# Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation

Michèle Gandit

▶ **To cite this version:**

Michèle Gandit. Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation. domain_other. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT : . tel-00398847

**HAL Id: tel-00398847**

**https://theses.hal.science/tel-00398847**

Submitted on 25 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier
Grenoble I

*Discipline* : Mathématiques et Informatique

Présentée et soutenue publiquement par :

Michèle GANDIT

le 28 octobre 2008

---

# Etude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement
# Une ingénierie de formation

---

Composition du jury : Nicolas Balacheff, Président
Alain Bronner, Rapporteur
Denis Tanguay, Rapporteur
Viviane Durand-Guerrier, Examinatrice
Maggy Schneider-Gilot, Examinatrice
Denise Grenier, Co-directrice de thèse
Charles Payan, Co-directeur de thèse

Thèse préparée à l'Institut Fourier, UMR 5582, UJF/CNRS, Grenoble

*Je remercie tout d'abord le laboratoire Leibniz, qui m'a accueillie pour les premières années de ma recherche, puis l'Institut Fourier qui m'a permis d'achever mes travaux.*

*Je remercie Nicolas Balacheff qui a accepté de présider le jury de soutenance de cette thèse. Je le remercie également d'avoir été l'un des premiers instigateurs de ma réflexion sur la preuve.*
*Je remercie Alain Bronner et Denis Tanguay, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Leur lecture attentive et leurs remarques m'ont été précieuses.*
*Je remercie Viviane Durand-Guerrier et Maggy Schneider-Gilot pour avoir accepté d'être examinatrices dans mon jury de soutenance de thèse.*
*Qu'ils soient remerciés tous les cinq pour l'intérêt qu'ils ont manifesté par rapport à mon travail.*

*Je remercie mes deux directeurs de thèse, Denise Grenier et Charles Payan, qui ont toujours été disponibles pour mes questions, m'ont soutenue dans mon travail tout en me laissant une grande liberté et m'ont aidée par la complémentarité de leurs apports.*

*Mes remerciements vont également à toute l'équipe de Maths à modeler, au sein de laquelle j'ai effectué cette recherche, en particulier à Sylvain Gravier, qui, en tant que responsable d'équipe, m'a permis de faire connaître mes travaux dans les écoles d'été de didactique des mathématiques. Mais aussi à Léa Cartier et Nicolas Giroud. Qu'ils soient particulièrement remerciés tous les trois, pour les moments d'exposés et de critique constructive que nous avons partagés.*

*Merci mille fois à Marie-Claire Demongeot, qui m'a beaucoup aidée, soutenue, encouragée dans ce travail, avec laquelle j'ai partagé de longs moments de réflexion sur la preuve, la formation des enseignants. Nous avons préparé ensemble et animé la plupart des moments de formation relatés dans ce texte.*

*Merci aussi à Luc Bouttier, Renée De Graeve, Claire Helmstetter, Christiane Serret, qui, au sein de l'IREM de Grenoble, m'ont accompagnée dans mes premières expérimentations et mes premiers écrits sur le Centre de secours, lors de stages ou de la Fête de la Science.*

*Je remercie aussi Marc Legrand, qui, par ses travaux sur le débat scientifique, a initié mes actions de formation des enseignants et inspiré en partie cette recherche, et continue de le faire.*

*Merci aussi à Thomas Lecorre avec qui, grâce à l'IREM de Grenoble, j'ai partagé l'animation d'un stage de formation des enseignants sur la preuve.*

*Je remercie aussi l'IUFM de Grenoble : la formation des enseignants qu'il m'a permis d'assurer est un des éléments de base de ce travail. Merci aussi à mes collègues de l'IUFM qui m'ont aidée et soutenue moralement, notamment au cours de l'année qui a vu l'achèvement de ce travail : Anne Bilgot, Isabelle Bellin, Hamid Chaachoua, Claude Fini, Gérard Gerdil-Margueron, Catherine Jacques, Geneviève Martiel.*

*Merci de tout cœur à toute ma famille, surtout à Philippe, qui m'a soutenue et a patiemment supporté ma surcharge de travail.*
*Merci aussi à Guillaume, Gaëlle, Alexandre et Thibaut.*

*A Aïko*

**TABLE DES MATIERES**

**Les questions de départ et le cadre théorique....1**
1. Les constats et les questions de départ....1
2. Mes raisons épistémologiques et philosophiques....2
3. Ce questionnement s'inscrit dans un ensemble théorique, qui intègre des dimensions épistémologiques, didactiques, cognitives et qui relèvent aussi de la logique et de l'ergonomie....2
4. Organisation du document....4
5. Reformulation des premières questions en référence aux chapitres de la première partie....4

**Chapitre 1 La preuve en mathématiques et dans certains travaux de didactique....5**
1. Qu'est-ce qu'une preuve en mathématiques ?....5
2. L'écriture d'une preuve formelle....8
3. Différentes approches de la preuve en didactique....11
4. Les trous et les petits pas....13
5. Notre proposition pour l'enseignement....14

**Chapitre 2 Les attendus des enseignants et le contrat usuel....17**

**L'activité mathématique en classe....17**
1. Ce que nous considérons comme activité mathématique en classe....17
2. Ce que les professeurs attendent de leurs élèves en mathématiques....21

**Le contrat usuel relatif à la preuve dans les pratiques de classe de collège....25**
1. *On sait que… or… donc…* : la recette « miracle » pour apprendre à démontrer....25
2. Un professeur stagiaire rédige librement sa façon d'aborder la preuve dans sa classe....26
3. Visite dans une classe : on introduit la démonstration....28
4. Une fiche sur l'apprentissage de la démonstration proposée sur le site officiel *Planète maths* 30
5. Des enseignants débutants s'expriment sur l'enseignement de la démonstration....32
6. En résumé, le contrat usuel relatif à la preuve en vigueur au collège....34

**Chapitre 3 Notre principal objet d'étude : les conceptions des enseignants sur la preuve....35**
1. Notre définition des conceptions des enseignants sur la preuve....36
2. Composantes locales de conceptions d'enseignants sur la preuve....37
3. Des conceptions globales des enseignants sur la preuve....39

**Chapitre 4 Choix de tâches sur la preuve....43**
1. Le choix d'énoncés....43
2. Les variables retenues qui entrent en jeu dans le choix des énoncés....44
3. La liste des huit énoncés et les valeurs prises par les variables retenues....46
4. Les variables retenues qui entrent en jeu dans les éléments de gestion de la classe....49
5. Utilisation de notre grille d'analyse pour étudier les réponses d'un premier échantillon de vingt-deux enseignants....51
6. Evolution de la méthodologie : modification des propositions de tâches pour enseigner la preuve....55
7. Les résultats obtenus avec cette nouvelle grille....58

**Chapitre 5 Les manuels et les programmes sur la preuve....61**
1. L'enjeu de vérité, le doute sont peu présents dans les manuels....63
2. Les manuels proposent peu de travail concernant l'entrée dans la rationalité mathématique ...66
3. Le formalisme est imposé dès le début de l'apprentissage....69
4. L'expérimentation précédant l'écriture de preuve....74
5. L'apprentissage de la preuve n'est pas centré sur la preuve elle-même, il s'agit de mettre en œuvre les connaissances du cours....77
6. Les tâches préalables sans projet de preuve : elles sont présentes dans beaucoup de manuels .80

7. La preuve s'apprend essentiellement en géométrie plane ..... 80
8. Synthèse des conceptions véhiculées dans les manuels ..... 83

**Chapitre 6 La problématique ..... 85**
1. Un contrat d'ostension performant ..... 85
2. Décalage entre la preuve en mathématiques et la preuve dans la classe ..... 85
3. Pertinence d'un travail sur les conceptions des enseignants relativement à la preuve ..... 86
4. Des points d'appui pour induire un changement dans les pratiques ..... 87
5. Les pratiques des enseignants sont résistantes au changement ..... 87
6. Nous résumons notre thèse ..... 87
7. Présentation de la suite de notre travail ..... 87

**Chapitre 7 Les Malentendus ..... 89**
1. Le *malentendu du détournement mathématique* ..... 91
2. Le *malentendu sur le savoir* et le *malentendu réussite* ..... 92
3. Le *malentendu diagnostic échec* ..... 94
4. Le *malentendu rapport existant des élèves à la preuve* ..... 97
5. Tableau récapitulatif des différents types de malentendus ..... 102

**Chapitre 8 Présentation de l'ingénierie ..... 105**
1. Trois points d'appui pour induire chez les enseignants une prise de conscience de contradictions ..... 105
2. Des constats qui peuvent ne pas impliquer un changement de pratiques ..... 107
3. Il est possible d'amener les élèves actuels à faire de vraies mathématiques dans quelque classe que ce soit ..... 109
4. Un modèle pour penser notre formation ..... 111
5. Il est possible de faire évoluer les conceptions des enseignants sur la preuve ..... 113
6. Le cœur de notre ingénierie de formation : trois problèmes ..... 114
7. Préalablement il faut montrer aux enseignants le rapport existant des élèves à la preuve ..... 118
8. D'autres outils pour compléter notre ingénierie de formation sur la preuve ..... 119

**Chapitre 9 Un regard sur les pratiques et le rapport existant des élèves à la preuve ..... 121**
1. Le rapport existant des élèves à la preuve ..... 122
2. Les copies ..... 127
3. Le point de vue du faux pour motiver à la preuve ..... 130

**Chapitre 10 Le centre de secours ..... 133**

**Analyse mathématique du problème ..... 133**
1. Deux points de vue dans le cadre de la géométrie plane ..... 133
2. Le modèle du sauveteur dans le cas de *n* points ..... 135
3. Construction du centre de secours dans quelques cas particuliers ..... 138
4. On développe le modèle du villageois ..... 139
5. A l'issue de l'étude de ces deux modèles… ..... 141

**Les productions d'enseignants ..... 141**
1. Cinq classes de productions relatives à la recherche du Centre de secours ..... 141
2. Méthode d'analyse des productions ..... 143
3. La tendance : on traite un autre problème ..... 144
4. La tendance : on entre dans le problème ..... 152
5. Observations sur le traitement des cas particuliers, la disjonction des cas ..... 156
6. Observations sur la production de résultats, de conjectures fausses ou ouvertes ..... 159
7. En conclusion, pour la formation ..... 164

**Chapitre 11 Le polymino ..... 167**

**Les preuves relatives au polymino ..... 168**
1. Condition nécessaire sur la parité des côtés pour que le pavage existe : la preuve est simple et commune dans l'enseignement secondaire ..... 168
2. La structuration du polymino par coloration donne une preuve lumineuse de l'impossibilité d'un pavage : ce type de preuve est encore peu connu dans le secondaire ..... 169
3. Une preuve par exhibition pour montrer l'existence d'un pavage ..... 170
4. Une preuve par « forçage » pour montrer l'impossibilité d'un pavage ne fait pas toujours l'unanimité ..... 170
5. La décomposition/recomposition permet directement une preuve de l'existence d'un pavage dans le cas où le trou est une case noire, pour un polymino de côtés *n* et *p* impairs ..... 171
6. Le raisonnement par induction passant aussi par décomposition/recomposition permet différentes preuves de l'existence d'un pavage dans le cas où le trou est une case noire, pour un polymino de côtés *n* et *p* impairs ..... 171

**Les enseignants face au problème du polymino ..... 175**
1. Le refus d'entrer dans le problème ..... 176
2. Les enseignants ont des représentations différentes du problème, ce qui permet d'envisager la posture de l'élève face à la généralité ..... 177
3. L'étude du cas général amène à la condition « *n* impair » nécessaire à l'existence d'un pavage… presque unanimement ..... 180
4. L'étude des cas particuliers (notamment le cas où $n = 3$) est riche d'enseignements pour l'apprentissage et l'enseignement de la preuve ..... 181
5. Dans le cas d'un polymino de taille *n* impaire, le traitement du cas général de la position du trou permet d'aborder d'autres types de preuve ..... 184
6. En conclusion, pour la formation ..... 191

**Chapitre 12 Le pentagone ..... 193**

**Analyse mathématique du problème ..... 193**
1. Une première approche qui permet de découvrir que la preuve n'est pas évidente ..... 193
2. Quelques définitions nécessaires pour établir une preuve ..... 195
3. La somme des angles d'un polygone *P* à *n* sommets ..... 196
4. La somme des angles d'un polygone *P* non croisé à *n* sommets ..... 198

**Les productions d'enseignants ..... 200**
1. Le contexte du recueil des productions ..... 201
2. Une première tendance : l'aspect formel de la preuve l'emporte sur le fond ..... 203
3. Une deuxième tendance : absence de maîtrise de la preuve dans le cas où ce qu'il y a à prouver n'est pas difficile ..... 206
4. Un troisième type d'observations : la redondance, le rapport dessin/figure ..... 210
5. Un quatrième type d'observation : la considération de la généralité et le traitement des différents cas ..... 212
6. Une cinquième observation : la gestion de la contradiction ..... 217
7. La suite de ce problème en formation ..... 220

**Conclusion ..... 229**
1. Par rapport au travail sur les trois problèmes ..... 229
2. Par rapport à cette thèse ..... 229
3. Par rapport à ce qui n'a pas été traité et qui ouvre des perspectives ..... 230

**Bibliographie ..... 233**

**Annexes au chapitre 4 ..... 247**
1. Que choisissez-vous pour un premier travail en classe sur la démonstration ? (première version) ..... 247

2. Valeurs des variables retenues ..... 253
3. Etude des réponses des vingt-deux enseignants ..... 254
4. Le débat sur les choix des enoncés ..... 267
5. Que choisissez-vous pour un premier travail en classe sur la démonstration ? (deuxième version) ..... 278

**Annexes au chapitre 9 ..... 283**
1. « C'est une petite erreur » ..... 283
2. « Il n'a pas le droit de … » ..... 284
3. La copie d'Yvan ..... 285
4. La copie d'Angélique ..... 286
5. La copie de Farida ..... 287
6. La copie de Sophie ..... 288
7. La consigne par rapport à chacune de ces copies ..... 288
8. Test sur le vrai/faux dans une classe de quatrième (2006/2007) ..... 289

**Annexe au chapitre 10 : les textes produits par les enseignants sur le centre de secours ..... 291**
1. Les productions de la première classe, FC02 ..... 291
2. Les textes de la deuxième classe, FC06 ..... 299
3. Les textes de la troisième classe, PLC2-06 ..... 307
4. Les textes de la quatrième classe, APM02 ..... 313
5. Les productions de la cinquième classe, PLC2-06/07 ..... 315

**Annexes au chapitre 11 : Analyse des productions sur le polymino ..... 323**
1. Etude de l'indicateur « Compréhension du problème » ..... 323
2. Présence de l'étude du cas particulier $n = 5$ ou $n = 7$ dans les 64 productions ..... 323
3. Etude de l'indicateur « existence d'un trou dans la preuve du cas $n = 3$ » ..... 324
4. Preuve que le polymino est pavable si le trou est une case noire, dans le cas général où $n$ est impair ..... 325
5. Preuve de l'impossibilité du pavage si le trou est une case blanche, dans le cas où $n$ est impair ..... 327
6. Etude de l'indicateur « expérimentation sur des cas particuliers » ..... 328

**Annexes au chapitre 12 ..... 331**
1. Une preuve de la somme des angles d'un polygone quelconque (croisé ou non) (d'après Choquet 1964) ..... 331
2. Commentaires sur les productions de deux classes ..... 333

## LES QUESTIONS DE DEPART ET LE CADRE THEORIQUE

*« L'ignorance terrible est sur nous, mais le mensonge est là où celui qui ne sait pas dit qu'il sait. »*
*(Paul Claudel, Tête d'Or, 1959)*

### 1. Les constats et les questions de départ

Les questions de départ sont issues de mon expérience de professeure de mathématiques et de formatrice, en formation continue (un à deux stages par an de 1994 à 2006) et en formation initiale à l'IUFM[1] de Grenoble (depuis 2000). A la sortie du collège, les élèves n'ont aucune idée de la pratique des mathématiciens : ils ont appris à faire des exercices de mathématiques, ils n'ont pas appris à faire des mathématiques. Ceci repose sur une enquête, menée de 2006 à 2008, où des élèves de six classes de seconde ont été interrogés, mais aussi sur des visites régulières dans les classes de collège ou de lycée.

Les enseignants expérimentés rencontrent des difficultés à enseigner la démonstration. En attestent les questions posées en formation et les copies qu'ils apportent, devant lesquelles ils se sentent démunis. Par ailleurs ils n'ont pas l'habitude de chercher des problèmes pour lesquels ils n'ont pas la solution, certains refusent même cette activité. Un nombre important de professeurs de collège interdisent à leurs élèves d'utiliser « car » pour introduire un argument dans l'écriture d'une preuve : il faut utiliser « donc ». Des établissements (collèges) entiers font du « dressage » sur la démonstration et ils commencent tôt (en classe de cinquième) pour que les élèves sachent écrire des démonstrations en classe de quatrième, où c'est exigé. Certains enseignants disent que le « 'on sait que[2]...', cela marche très bien ».

Les élèves disent qu'ils apprennent le « on sait que… » au lieu de dire qu'ils apprennent à démontrer. Ils reconnaissent une démonstration à la présence de certaines expressions comme celle-là. Certains élèves refusent d'entrer dans un jeu dont ils ne comprennent pas l'utilité. Des copies apportées par les professeurs en formation révèlent que la démonstration est devenue un non-sens pour beaucoup d'élèves.

A la question, « En quoi une production issue de la recherche d'un problème est-elle une preuve ? En quoi n'en est-elle pas une ? Pourquoi ? », des enseignants répondent sur l'apparence. Les indices d'une forme de raisonnement reconnue, telle

[1] Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

[2] Ce point va être éclairci dans les pages suivantes.

que la récurrence, la disjonction des cas…, sont cités, comme des éléments de preuve, quelle que soit la validité de ce qui est avancé. Comment en est-on arrivé là ?

Comment se peut-il que des élèves en viennent à écrire des textes qui ne sont pas cohérents sur le plan du sens, mais comportent des indices de forme qui les font reconnaître comme des démonstrations ? Comment se peut-il que des enseignants questionnés sur ce qu'est pour eux une démonstration intègrent dans leurs réponses ces mêmes indices de forme ? Pourquoi en est-on arrivé, en classe, à donner de la démonstration une image étrangère à ce qu'elle est en mathématiques ? Peut-on remédier à ce décalage ? Comment ?

## 2. Mes raisons épistémologiques et philosophiques

Mon objectif à long terme est de réduire ce décalage. Ceci est étroitement lié à ma propre épistémologie des mathématiques et à l'idée que j'ai des métiers de professeur et de formateur, à la finalité que je donne à mon enseignement des mathématiques. Avoir pour objectifs que les élèves puissent éprouver par eux-mêmes la validité d'un résultat, bâtir une preuve, expérimenter sur un problème, ce n'est pas seulement parce que je crois qu'ils sont capables de le faire ou parce que cela leur sera utile, c'est parce que ma démarche de professeure relève d'une idéologie humaniste :

[…] *vouloir faire produire par des élèves un processus par lequel ils deviennent les auteurs de ce qu'ils font, les propriétaires de ce qu'ils savent, les responsables de ce qu'ils disent* […]. (Brousseau 2005)

Idéologie humaniste qui fait aussi partie de ma démarche de formatrice : avoir pour objectif que les enseignants développent cette idéologie humaniste dans leur enseignement, qu'ils apprennent aux élèves à être responsables sur le plan scientifique, qu'ils leur fassent comprendre que les savoirs ne sont pas arbitraires, qu'ils ne résultent pas de la volonté d'autrui, qu'ils sont des constructions de l'esprit auxquelles ils doivent prendre part. C'est dans cette démarche que je situe l'enseignement et l'apprentissage de la preuve.

## 3. Ce questionnement s'inscrit dans un ensemble théorique, qui intègre des dimensions épistémologiques, didactiques, cognitives et qui relèvent aussi de la logique et de l'ergonomie

Sur les plans épistémologique et didactique, nous situons d'abord notre travail par rapport à ceux qui ont déjà été effectués sur la preuve (ou démonstration) : c'est l'objet du premier chapitre.

Si nous utilisons les notions de *rapport à la preuve* et *transposition*, empruntés à la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 1998), c'est dans la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) que s'inscrit en premier notre questionnement : les concepts de *contrat didactique*, *situation*, *institutionnalisation*, *obstacle*, *ingénierie*, pour ne citer que les plus utilisés dans ce travail. Nous nommons aussi les *situations recherche pour la classe* (Grenier & Payan 2002), dont nous nous inspirons directement pour notre ingénierie de formation, ainsi que *le*

*débat scientifique* (Legrand 1988). Nous n'oublions pas la notion de *conception*, qui concerne notre principal objet d'étude, que nous reprécisons au chapitre 3.

Celle-ci se situe au confluent de ce premier cadre théorique et de la Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud 1990), à laquelle nous nous reportons par rapport au langage, l'écriture d'une démonstration passant par le langage :

[…] *ce n'est pas dans n'importe quelles circonstances qu'un individu accompagne son action d'une activité langagière, mais plutôt quand il a besoin de planifier et de contrôler une suite d'actions insuffisamment maîtrisée.* (Vergnaud 1990)

C'est ce qui pourrait expliquer certaines pratiques des enseignants qui demandent aux élèves d'utiliser « je sais que » (« on sait que … »), « j'utilise… » (« or… »), pensant ainsi mieux les impliquer dans la pratique d'un raisonnement. Nous faisons référence aussi aux concepts de *signifiant* et *signifié* lorsque nous évoquons, dans la suite, les *auxiliaires pédagogiques* utilisés par les enseignants tels que, par exemple, les tableaux en trois colonnes (hypothèses/règle/conclusion) : on cherche à apprendre aux élèves le *signifiant* pensant lui apprendre le *signifié*. Nous avons d'autres entrées dans le domaine de la psychologie cognitive, notamment avec les travaux de Bautier (2006, 2007). Nous développerons notamment un chapitre sur ce que nous appelons *les malentendus* (chapitre 7), dont nous tentons une caractérisation.

L'*activité mathématique en classe* est décrite en référence à trois courants, la recherche INRP-IREM de Grenoble (INRP/ADIREM 2003), ensuite Robert & M. Rogalski (2002) et Robert (2005), enfin le groupe CESAME (2005). Nous développons ce point dans *L'activité mathématique en classe* (au chapitre 2). Nous parlons aussi de *tâche* au sens employé par Robert dans les travaux cités.

Le domaine de la logique intervient d'abord lorsque nous décrivons le *formalisme* (dans le premier chapitre), mais aussi, lorsque nous utilisons des modèles qui permettent d'analyser le raisonnement mathématique (dans le chapitre 1 et le chapitre 9). Nous évoquons notamment l'organisation déductive du discours de démonstration (Duval & Egret 1989) qui peut se ramener au modèle du calcul des propositions (dans le chapitre 1 sur la preuve), ainsi que les travaux de Durand-Guerrier & Arsac (2003) qui proposent un autre modèle pour étudier le raisonnement, à savoir travailler sur les objets et leurs propriétés (dans le chapitre 9 sur les pratiques et le rapport existant des élèves à la preuve).

Enfin sur le plan des pratiques des enseignants, nous prenons position par rapport au modèle de la *double-approche*, proposé par Robert, Rogalski & Roditi. En effet, si notre expérience de formation nous conduit à adopter des hypothèses de travail, en partie formulées aussi par ces auteurs, nous nous gardons de vouloir décrire trop précisément les raisons qui sous-tendent certaines pratiques enseignantes ; nous tenterons néanmoins de les comprendre. Cependant insister sur les raisons est une façon de les cautionner, par suite aucun changement ne semble possible. Ces travaux amènent en effet à admettre que :

[…] *assez rapidement, pour un enseignant donné, les pratiques sont stables : des décisions analogues sont prises dans des situations analogues.* […] *Cette stabilité est renforcée par une grande cohérence individuelle des pratiques* […]. (Robert 2005)

Notre objectif à long terme étant une modification des pratiques, ceci nous renforce dans l'idée de travailler sur les conceptions des enseignants par rapport à la preuve, son enseignement, son apprentissage.

## 4. Organisation du document

Ce travail se compose de deux parties :

- la première partie propose une étude épistémologique et didactique de la preuve et de son enseignement ; elle est constituée des chapitres 1 à 6 ; dans ce chapitre 6 est résumée notre thèse ;
- la seconde partie propose une ingénierie de formation sur la preuve ; elle contient les chapitres 7 à 12.

## 5. Reformulation des premières questions en référence aux chapitres de la première partie

Qu'est-ce que la preuve en mathématiques ? Qu'entend-on par écriture d'une preuve formelle ? Comment est-elle abordée en didactique ? Dans quelle mesure s'opère la transposition ? Quelle approche épistémologiquement satisfaisante peut-on proposer pour l'écriture de preuve ? Nous abordons ces questions dans le chapitre 1.

Le chapitre 2 donne une première analyse de l'enseignement de la preuve. Sa première partie traite deux questions relatives à l'*activité mathématique en classe* : la définition adoptée et sa place dans les attentes des enseignants. La seconde partie aboutit à une description du contrat didactique usuel relatif à la preuve, en vigueur au collège, et donne des exemples de pratiques en matière d'enseignement de la preuve au collège.

Les pratiques des enseignants sont issues de leurs conceptions. Dans le chapitre 3, nous précisons comment nous utilisons cette notion. Quelles sont les conceptions des enseignants sur la preuve, son enseignement, son apprentissage ? Nous apportons les premiers éléments de réponse à cette question. Nous établissons ainsi une grille de composantes de conceptions, qui nous sert d'outil d'analyse dans les deux chapitres suivants.

Le chapitre 4 précise les conceptions sur l'enseignement de la preuve à partir d'une situation de choix de tâches pour enseigner la preuve. Nous explicitons notre méthodologie et son évolution, nous donnons nos premiers résultats.

Pour clore cette analyse de l'enseignement de la preuve, nous étudions, dans le chapitre 5, les programmes et douze manuels relatifs aux classes de cinquième et de quatrième, au moyen de notre grille de conceptions établie au chapitre 3.

Enfin, nous résumons notre problématique, en précisant nos hypothèses, et exposons notre thèse dans le chapitre 6.

# CHAPITRE 1
## LA PREUVE EN MATHEMATIQUES ET DANS CERTAINS TRAVAUX DE DIDACTIQUE

*« Cette véritable méthode, qui formerait les démonstrations dans la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens ; l'autre, de n'avancer aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues ; c'est-à-dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions.* […]. *Certainement cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible* […] *»*
*(Blaise Pascal, De l'esprit géométrique, 1658)*

Nous considérons que *preuve* et *démonstration* sont synonymes, tout au long de ce travail.

De nombreux travaux portent sur la preuve, desquels Cabassut (2005), dans sa thèse (p. 144-160), fait un panorama en citant notamment ceux de Balacheff, Arsac, Duval et des IREMs de Grenoble[3] et de Rennes. Nous recommandons particulièrement la lecture de l'étude épistémologique et didactique sur l'origine de la démonstration écrite par Arsac (1987), ainsi que des actes du septième colloque inter-IREM *Epistémologie et histoire des mathématiques*, portant sur la démonstration mathématique dans l'histoire (1990). Nous ne développerons pas ces travaux. Nous y puiserons cependant certaines références.

La preuve renvoie à la fois à un *processus* qui vise à l'établissement du vrai et à un *produit*, le plus souvent[4] un texte, qui est l'aboutissement d'un travail d'écriture. Ce texte comporte inévitablement des *trous* et des *petits pas*. Nous explicitons ceci dans ce chapitre. Nous nous situons par rapport aux travaux de didactique sur ce thème. Ceci nous amène à étudier la place de la formalisation. Nous décrivons enfin notre proposition pour l'enseignement.

## 1. Qu'est-ce qu'une preuve en mathématiques ?

Citons René Thom (1985) :

*Je ne connais guère qu'une science réellement difficile : c'est la mathématique. Encore la difficulté des mathématiques vient-elle plus souvent d'une complication externe, rhétorique en quelque sorte (la technique de la démonstration), que de la complication interne de ses objets.*

[3] Nous reviendrons plus loin sur ces derniers, dont nous sommes l'un des auteurs.

[4] Il existe des *preuves sans mot*, voir le site de *Maths à modeler*.

Bien grande est notre tâche de professeur : enseigner à nos élèves cette *rhétorique*, *complication externe* peut-être, mais incontournable si l'on veut atteindre les *objets*, essentielle puisqu'elle est constitutive des mathématiques. L'objectif de notre travail est de trouver comment les professeurs peuvent permettre à leurs élèves d'accéder à cette rhétorique.

Preuve et démonstration sont synonymes aussi dans la communauté mathématique, celle des mathématiciens, passés ou contemporains, qui produisent des mathématiques. Il s'agit là de leur outil pour construire les mathématiques et de leur moyen de communication : c'est au travers des preuves que naissent et vivent les objets mathématiques. Le résultat concernant la somme des angles d'un triangle, par exemple, comporte de nombreuses démonstrations dont nous citons celles d'Euclide (III$^{è}$ siècle av. JC), Clairaut (1765), Hilbert (1899), Choquet (1964) : elles reposent sur le même argument, mais mettent en jeu des objets de la géométrie qui n'ont pas le même statut. Leur analyse montre (les trois premières[5] sont analysées par Barbin (1989)) la manière dont s'opèrent simultanément la construction du concept d'angle et l'élaboration des preuves qui, tout à la fois, utilisent le concept et lui donnent sens. Le Gendre (1794) définit la démonstration comme un raisonnement qui permet de rendre évidentes des vérités qui seront appelées théorèmes. Que signifie *rendre évident un résultat* ? Cette définition ne satisfait pas Bolzano (1810) pour qui mathématiques, logique et philosophie sont étroitement liées :

*Dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de « fabrications d'évidences » (Gewissmachungen) mais doivent être bien plutôt des fondements (Begrundungen) ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer.*

Pour une étude approfondie de la question de la *vérité* en mathématiques, nous renvoyons à Durand-Guerrier (2005) qui explicite, en particulier, la « conception sémantique de Tarski » et montre :

*l'intérêt d'une théorie sémantique de la vérité pour analyser le raisonnement mathématique*.

Ainsi, si l'un des rôles de la preuve est d'assurer la validité d'un résultat à l'intérieur d'un système théorique, de légitimer la connaissance, de dire le vrai — c'est la *fonction de validation* ou *validante* de la preuve — un autre de ses attributs est d'expliquer pourquoi ce résultat est valide, la connaissance ainsi prouvée devenant de ce fait nécessaire, au sens qu'il est impossible qu'elle ne soit pas vraie. Ce deuxième aspect est ce que Grenier et Payan (1998) appellent la *fonction explicative* de la preuve. Citons Bouligand (1935) :

*Bien des théorèmes sont susceptibles de différentes démonstrations. Les plus éducatives sont naturellement celles qui font comprendre les raisons profondes des résultats qu'on se propose d'établir. En pareille matière la notion de domaine de causalité fournit un guide. La démonstration naturelle d'une proposition doit embrasser tous les cas où elle est vraie. Et inversement, en envisageant systématiquement tous ces cas, on sera conduit à dégager le théorème de toute supposition accessoire ; on se trouvera donc, d'emblée, dans des conditions meilleures pour effectuer le raisonnement.*

[5] La quatrième est un cas particulier de celle que nous proposons dans un des problèmes de l'ingénierie, inspirée de Choquet (1964).

Pour expliciter ce point de vue, on peut considérer la formulation suivante du théorème de Pythagore (Bouligand 1935, cité par Glaeser 1990) :

*Si trois figures semblables sont construites sur les trois côtés d'un triangle rectangle, l'aire de celle qui est construite sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux autres. Le cas classique correspond à des figures carrées. Mais si le théorème est démontré pour le choix d'une figure particulière, il est vrai pour toutes les autres.*
*En effet si les aires des figures semblables sont* $k\,a^2$, $k\,b^2$, $k\,c^2$, *l'égalité* $k\,a^2 = k\,b^2 + k\,c^2$ *est équivalente à* $a^2 = b^2 + c^2$.
*Or le théorème est évident lorsqu'on construit les trois triangles rectangles semblables ABC, ABH et ACH sur les 3 côtés (H est le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse).*
*La cause de la validité du théorème de Pythagore est que les triangles rectangles sont les seuls qui peuvent être découpés en deux parties semblables au tout.*

Prouver pour le mathématicien, c'est d'abord se débarrasser de tout ce que l'on connaît pour se concentrer strictement sur le problème posé, ce que Poincaré (1908) identifie comme la phase de maturation du problème. C'est une suite de tâtonnements, calculs, études d'exemples, d'où vont émerger des formulations d'énoncés permettant une compréhension de la situation étudiée, de conjectures. Le plus souvent, celles-ci sont assorties d'arguments qui sont des ébauches de preuves, des tentatives d'explications de ce qui est annoncé dans ces conjectures. Poincaré (1908) parle de la phase de découverte, résultat d'une inspiration ou d'une intuition. La preuve se construit lentement au cours d'une longue période expérimentale. Etablir une preuve rigoureuse est ensuite le seul moyen que le mathématicien a de se convaincre d'abord lui-même, puis de convaincre ses pairs, de la vérité d'un résultat, dans le cadre d'une rationalité propre aux mathématiques. Poincaré (1908) cite l'élaboration de la démonstration comme la phase de vérification. Cette rationalité s'exprime au travers d'une certaine formalisation. La preuve est avant tout un *processus*, dont on peut identifier, dans une perspective d'enseignement, différentes phases (Boero 1999). Leur énumération ne reflète en rien la chronologie, elles sont en réalité imbriquées les unes dans les autres :

- exploration du problème donnant lieu à une conjecture : elle appartient au travail heuristique privé du mathématicien ;
- communication par un document de l'énoncé qui se dégage de la phase précédente ;
- exploration de la conjecture, les limites de sa validité et un travail, ici encore privé, du mathématicien concernant sa validation ;
- sélection d'arguments théoriques concernant la validation de la conjecture, qui puissent être communiqués à un public averti ;
- élaboration d'un texte de preuve de la conjecture qui soit acceptable selon les standards mathématiques en vigueur ;
- approche de la preuve formelle, cette phase ne concernant parfois que quelques parties de la preuve.

Toute démonstration est reconnue comme telle par la communauté mathématique si elle satisfait à certaines exigences de rigueur[6], bien que reposant sur des vérités premières. Ce dernier point soulève ainsi la question de la validité des

[6] Nous y revenons dans le paragraphe suivant.

axiomes[7]. Cependant, bien que le niveau de rigueur évolue avec le temps, de même que le sentiment de l'évidence (Barbin 1989) — la rigueur d'Euclide n'est pas la même que celle de Hilbert — il n'en demeure pas moins que l'on considère comme preuves, celles qui ont été faites par Euclide comme celles que l'on doit à Hilbert. C'est qu'elles comportent des invariants : le caractère de nécessité assuré aux énoncés démontrés et le caractère de suffisance, pourrait-on dire, du discours démonstratif, suffisamment réglé dans son achèvement pour se détacher de l'expérience.

## 2. L'écriture d'une preuve formelle

L'écriture accompagne le processus de preuve, son étape ultime est la rédaction d'une preuve formelle, c'est-à-dire une présentation des arguments dans le cadre d'un *système formel* qui permet de caractériser sans ambiguïté les expressions du langage et les règles de démonstration recevables.

Un système formel est constitué à partir d'une *langue formalisée* (les symboles et les expressions décrites ci-dessous) et d'une *démonstration formalisée*.

- On considère au départ un ensemble fini ou dénombrable de symboles, répartis, suivant leur usage en constantes, variables, symboles de relations, symboles logiques, éventuellement des symboles de ponctuation (qui peuvent être remplacés par des conventions d'écritures)… Ils permettent de constituer des *expressions* qui sont des suites finies de ces symboles.
- On définit un sous-ensemble constitué par ce qu'on appelle les *expressions correctement formées* (ou *formules*) du système. Si l'on considère une représentation du système formel dans un certain domaine (les mathématiques discrètes, par exemple), ces formules correspondent soit à l'énoncé d'une relation, soit à celui d'une proposition, qui peut être vraie ou fausse.
  Ce sous-ensemble n'est pas donné en extension, il est défini de manière récursive, par l'énonciation de règles de formation dont l'application réitérée engendre les formules.
- On définit un sous-ensemble de formules qu'on appelle les *axiomes* du système. Le plus souvent, on peut décider si une formule donnée est un axiome (on parle alors de théorie axiomatique).
- On définit ensuite une suite finie de relations $R_i$ entre les formules ($i = 1 \ldots n$), qu'on appelle des *règles d'inférence* (la règle de *détachement* et la règle de *substitution* en sont des exemples usuels). Pour chaque $R_i$, il existe un nombre entier $j$ tel que, pour tout ensemble de $j$ formules et toute formule F, on puisse décider si les $j$ formules considérées et la formule F sont dans la relation $R_i$. Dans ce cas, on dit que F est une *conséquence immédiate* des formules considérées en vertu de $R_i$.

[7] Une conception ancienne de l'axiomatique consiste à faire appel à l'évidence intuitive : on part d'objets suffisamment simples et de propositions suffisamment évidentes pour qu'elles soient acceptables sans démonstration. Les développements mathématiques modernes ont donné le jour à une conception de l'axiomatique selon laquelle le critère de validité est la non-contradiction, conduisant ainsi à mettre systématiquement en doute les vertus de l'intuition et à augmenter le formalisme des démonstrations.

• On appelle alors *démonstration formelle* du système une suite finie de formules dont chacune est soit un axiome, soit une conséquence immédiate des formules précédentes en vertu d'une règle d'inférence.
Une démonstration est dite démonstration de sa dernière formule.
Un théorème du système est une formule dont il existe une démonstration.

Dans un tel système formel, la *vérité* est représentée par la démontrabilité comme elle vient d'être précisée. Nous renvoyons à Durand-Guerrier (2005) pour l'étude de différents formalismes.

Une réponse au souci de rigueur est apportée par un certain formalisme, qui se situe entre la preuve formelle et les éléments de preuve élaborés par le mathématicien au cours de sa recherche, et qui inclut, entre autres choses, la définition[8] des objets étudiés, et cette preuve formalisée permet de convaincre totalement. Considérons à titre d'exemple le début du cours sur la mesure des ensembles du plan proposé par Kolmogorov & Fomine (1974), qui introduit une présentation de l'intégration. Il comporte d'abord la définition de la mesure des divers rectangles[9] du plan comme une fonction positive et additive. Les auteurs étendent ensuite cette définition à des ensembles *élémentaires* :

*Un ensemble de points du plan est dit élémentaire, s'il peut être mis au moins d'une façon sous la forme d'une réunion finie de rectangles deux à deux disjoints.*

Viennent ensuite le premier théorème et sa démonstration :

*Théorème 1. La réunion, l'intersection, la différence et la différence symétrique de deux ensembles élémentaires sont aussi des ensembles élémentaires.*
[…]
*Démonstration. Il est clair que l'intersection de deux rectangles est un rectangle. Donc, si*

$$A = \bigcup_k P_k \text{ et } B = \bigcup_j Q_j$$

*sont deux ensembles élémentaires, leur intersection*

$$A \cap B = \bigcup_{k,j} \left( P_k \cap Q_j \right)$$

*est aussi un ensemble élémentaire.*
*Il est aisé de vérifier que la différence de deux rectangles est un ensemble élémentaire. Par conséquent, si d'un rectangle quelconque on soustrait un ensemble élémentaire, on obtient un ensemble élémentaire (comme intersection d'ensembles élémentaires). Soient maintenant A et B deux ensembles élémentaires. Il existe, évidemment, un rectangle P contenant chacun d'eux. Alors, d'après ce qui précède, l'ensemble*

$$A \cup B = P - \left[ \left( P - A \right) \cap \left( P - B \right) \right]$$

*est élémentaire. Ceci et les égalités*

$$A - B = A \cap \left( P - B \right)$$

*et*

$$A \Delta B = \left( A \cup B \right) - \left( A \cap B \right)$$

*impliquent que la différence et la différence symétrique de deux ensembles élémentaires sont*

[8] Tarski parle de *règles de définition*.

[9] Il s'agit de rectangles « à côtés verticaux et horizontaux ».

*des ensembles élémentaires.*
*Le théorème est démontré.*

Mais mettre en place un formalisme pour la preuve d'un théorème n'est souvent pas plus facile que de prouver directement ce théorème. L'avantage que présente cet effort est cependant de donner lieu à de multiples généralisations et de permettre de traiter ensemble toute une classe de problèmes. Kolmogorov & Fomine (1974) défendent l'idée de présenter l'intégration en faisant appel à la théorie de la mesure, tout en signalant qu'on peut faire autrement :

*A notre point de vue, la théorie de la mesure qui est largement utilisée dans la théorie ergodique, dans la théorie des processus aléatoires, etc., présente assez d'intérêt en elle-même, indépendamment du problème de l'introduction de la notion d'intégrale, pour être incluse dans un cours universitaire obligatoire.*

Pour illustrer autrement le propos, nous prenons un exemple historique dans le domaine de la géométrie algébrique énumérative (il est proposé par Perrin (1997) dans un texte destiné à la commission inter-IREM Université, pour illustrer le recours au formalisme dans l'activité mathématique). Il s'agit de la partie de la géométrie qui cherche à déterminer combien il y a d'objets vérifiant certaines conditions. Cet exemple concerne le problème de Chasles : dans le plan, combien de coniques sont tangentes à cinq coniques données ? Une première réponse à ce problème a été proposée par Steiner en 1848 : il s'appuyait sur une argumentation peu formalisée, une application d'un théorème sans réel souci des conditions d'application. L'erreur de Steiner s'est révélée en 1866, grâce aux travaux de Jonquière et Chasles. La méthode utilisée par Chasles pour résoudre ce problème, différente de celle de Steiner, donnait un résultat exact, mais ne pouvait être vue comme vraiment rigoureuse à l'époque de Chasles, faute d'un formalisme adéquat. Cette méthode est actuellement reconnue comme fondamentalement correcte, un formalisme adapté aux questions de géométrie énumérative ayant été mis en place à la fin du dix-neuvième siècle. Le degré de conviction par rapport à une preuve évolue dans la communauté mathématique.

Et même aujourd'hui (nous reprenons Perrin 1997) où les formalismes peuvent paraître assez bien établis, il n'est pas simple de définir une preuve rigoureuse. Une des raisons en est la grande complexité des mathématiques au moment de leur élaboration. La première preuve d'un résultat peut être d'abord très complexe. Le mathématicien ne voit pas toujours dès le début le niveau de simplification adéquat. Les preuves, malgré le soin dont elles font l'objet, peuvent demeurer un moment incertaines ; un exemple récent est donné par la preuve de Wiles au théorème de Fermat. Quand est-on vraiment sûr qu'un résultat est correct ? Certains mathématiciens avancent des éléments de réponses qui touchent à l'empirisme et à la psychologie : quand on voit fonctionner ce résultat dans beaucoup de situations différentes, on finit par être intimement convaincu qu'il est vrai. Mais il semble relever d'un consensus au sein de la communauté mathématique qu'un résultat est définitivement établi lorsqu'on a suffisamment progressé pour qu'il soit revu par d'autres voies, plus simples ou plus conceptuelles, de manière totalement convaincante.

En mathématiques, la formalisation se situe en fin d'élaboration de la preuve et sa place est finalement réduite, alors qu'elle est proposée a priori en classe et qu'elle

occupe toute la place. Il semblerait même qu'il soit pratiquement impossible, voire vide de sens pour le mathématicien, de produire une preuve complètement formelle pour la plupart des théorèmes actuels en mathématiques (Boero 1999). Citons Tarski (1946) (traduit de l'anglais) :

*C'est seulement grâce au développement de la logique déductive que, théoriquement du moins, nous sommes aujourd'hui en mesure de présenter chaque discipline mathématique sous une forme formalisée. Dans la pratique, toutefois, cela suscite des complications considérables ; un gain en exactitude et en correction méthodologique s'accompagne d'une diminution de clarté et d'intelligibilité.*

Il faut ajouter que certains mathématiciens s'autorisent même des pas de côté par rapport au formalisme, sûrement dans le souci d'être plus explicites. Balacheff (1988) cite notamment Bezout (1832), qui explique par un exemple générique que le reste de la division d'un nombre entier par 25 est le même que celui du nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite.

## 3. Différentes approches de la preuve en didactique

Nous ne rentrons pas dans le débat qui oppose argumentation et démonstration. Nous trouvons une explication à ce point de vue dans la description de l'activité mathématique, précédemment décrite.

A propos des rapports entre argumentation et démonstration, les recherches se scindent en deux directions, l'une conduisant à la mise en évidence d'une unité cognitive entre l'argumentation lors de l'élaboration d'une conjecture et sa démonstration (Boero 1999), l'autre visant à une double analyse, fonctionnelle et structurelle de ces rapports, d'un point de vue cognitif et linguistique (Duval 1991 ; Balacheff 1999). Dans sa thèse, B. Pedemonte (2002) tente de répondre à la question de l'existence d'une continuité ou d'un écart entre argumentation et démonstration. Elle donne de l'argumentation en mathématiques des caractéristiques fonctionnelles : c'est une justification rationnelle, convaincante, qui s'adresse à un auditoire universel, qui a pour objectif la recherche de la vérité, celle-ci pouvant prendre des détours conduisant à des réfutations de conjectures par contre-exemple, passant ainsi par l'établissement du faux. Ces caractéristiques fonctionnelles, nous les reprenons, mais par rapport à la preuve elle-même, et même au travail d'écriture qui doit l'accompagner dans l'enseignement. Nous nous démarquons totalement de certains points de vue qui, à notre sens, donnent lieu à des dérives[10] dans les pratiques en France : faire voir la démonstration comme un « enchaînement de pas ternaires » et l'opposer radicalement à l'argumentation, affirmer l'importance de réduire le « discours commentaire » et mettre en avant le « discours opératoire » (Duval 2000). L'exemple de la preuve de Bouligand donnée dans le paragraphe 1 montre la coexistence des deux types de discours et leur importance. Pour appuyer ce point de vue, citons aussi la preuve donnée par Cauchy (1821) du théorème des valeurs intermédiaires :

[10] Ces dérives sont tout à fait visibles dans les manuels utilisés au collège. Nous y revenons plus loin.

*THEOREME IV. - Si la fonction f(x) est continue par rapport à la variable x entre les limites* $x = x_0$ , $x = X$ *,et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre* $f(x_0)$ *et f(X), on pourra toujours satisfaire à l'équation f(x) = b par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre* $x_0$ *et X.*
*Démonstration. - Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation y = f(x) rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation y = b dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses* $x_0$ *et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction f(x) étant continue entre les limites* $x = x_0$ , $x = X$, *la courbe qui a pour équation y = f(x) et qui passe 1° par le point correspondant aux coordonnées* $x_0$, $f(x_0)$, *2° par le point correspondant aux coordonnées X et f(X) , sera continue entre ces deux points ; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation y = b se trouve comprise entre les ordonnées* $f(x_0)$, *f(X) des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.*

Le recours aux graphes (Duval parle de « graphes propositionnels orientés ») pour présenter ce qu'est une preuve peut donner lieu à d'autres points de vue. Citons Glaeser (1990) :

*Le domaine d'un long raisonnement sera comparé à un LABYRINTHE. Celui-ci aura ses entrées (prémisses, données, axiomes, théorèmes invoqués…), ses sorties (conclusions, réponses…), ses carrefours (résultats de calculs ou de raisonnements intermédiaires).*
*Ce sont là les sommets d'un graphe dont les arêtes sont des connecteurs ou des opérateurs.*
*Ce graphe est partiellement ordonné (à cause de la présence d'arêtes sagittales :* $\Rightarrow$*, […]*
*Une démonstration est essentiellement un itinéraire joignant l'hypothèse à la conclusion. Cependant, il peut comporter des affluents, prenant leurs sources aux différents théorèmes ou axiomes invoqués. De même un calcul joint essentiellement les données à la réponse.*
*En général, il peut y avoir de nombreuses démonstrations possibles, dont certaines comportent des impasses (fausses pistes) ou des pas inutiles qu'il conviendra d'éliminer.*

Ces dérives dans l'enseignement en France au collège, nous les explicitons plus loin et nous montrons les difficultés qui en résultent pour les élèves, dans leur apprentissage de la preuve, difficile, il faut bien le dire. Tanguay (2007) donne une explication sur l'incapacité de certains élèves à écrire une démonstration en géométrie, alors même qu'ils ont compris qu'ils ne devaient pas lire la réponse sur la figure :

[…] *quand l'élève a atteint ce stade où il est capable de refouler « l'évidence » suggérée par la figure, c'est alors pour laisser toute la place à la valeur de vérité et augmenter d'autant son poids d'entrave au raisonnement.* […] *Cette prégnance de la valeur de vérité durera aussi longtemps que l'élève* […] *n'aura pas compris qu'en démonstration, ce ne sont plus les énoncés qu'on valide mais le raisonnement lui-même ; ou autrement dit, qu'il ne s'agit plus pour lui de produire des énoncés vrais, mais des pas de raisonnement valables.*

Le saut conceptuel important, nécessaire pour comprendre les spécificités d'une preuve, consiste non seulement dans le passage d'un point de vue pragmatique à un point de vue théorique (Balacheff 1987), mais aussi dans une « refocalisation fondamentale, de la vérité des propositions vers la validité des pas de raisonnement » (Tanguay 2007). Mais notre hypothèse est que ceci ne s'appréhende pas en premier par un travail d'écriture, soumise à des contraintes formelles, mais bien plutôt par un

travail sur la rationalité[11] et les fonctions explicative et validante de la preuve. Le recours aux « graphes propositionnels orientés » de Duval nous semble par contre utile, dans un second temps, pour faire analyser les preuves par les élèves, montrer les erreurs et fournir une aide en cas de difficulté, mais surtout dans un aller-retour entre graphe et texte. Duval insiste d'ailleurs sur l'importance du travail sur le texte, en accompagnement de celui qui porte sur le graphe.

## 4. Les trous et les petits pas

Le travail d'écriture faisant apparaître l'organisation ternaire des pas déductifs ne doit pas non plus être un aboutissement. Le produit attendu d'une preuve (voir celles que nous avons données de Bouligand, Cauchy, Kolmogorov) n'est pas une suite de pas déductifs tous explicités. Il faut le réorganiser pour mettre en relief les arguments forts et taire les moins importants. Il s'agit en fait d'apprendre à faire des *trous* dans une preuve. Pour expliciter cette notion de trou, plaçons-nous du côté du lecteur (ou de l'auditeur) d'une preuve, c'est-à-dire un membre du public auquel s'adresse la preuve. Le lecteur (ou auditeur) constate qu'un argument est omis, qu'un résultat intermédiaire n'est pas donné. Il se peut que cette omission relève de la volonté de l'auteur de ne pas dire certains arguments ou résultats, qu'il juge élémentaires, pour en mettre en valeur d'autres, qu'il considère comme plus pertinents. Ces trous augmentent l'intelligibilité de la preuve. Citons Tarski (1946, traduction 1971) :

[…] *il ne serait pas raisonnable de demander que les preuves des théorèmes dans un manuel ordinaire de quelque discipline mathématique soient données sous forme complète ; on doit, toutefois, escompter que l'auteur d'un manuel aura la certitude intuitive que toutes ses preuves peuvent être présentées sous cette forme, et même qu'il poussera ses considérations jusqu'au point à partir duquel un lecteur qui a quelque pratique de la pensée déductive et une connaissance suffisante de la logique contemporaine serait capable de franchir l'écart sans grande difficulté.*

Mais d'autres trous seront considérés comme des erreurs. Il se peut en effet que l'auteur de la preuve ne sache pas compléter ces manques constatés ou mésestime l'importance relative des arguments. Ainsi nous relevons deux catégories de trous. Il n'est cependant pas toujours facile, pour le lecteur, de classer tel trou dans telle catégorie, surtout s'il ne connaît rien de l'auteur de la preuve. Quant à ce dernier, il organise le produit de sa preuve en fonction du public auquel elle est communiquée ; ainsi une preuve peut se rédiger à différents niveaux. Ceci est source de difficultés pour l'enseignant, qui souhaite repérer si l'élève fait des trous pour se faire mieux comprendre ou parce qu'il ne comprend pas bien la preuve.

Apprendre à faire des trous dans une preuve est un objectif complètement absent des classes, nous allons le voir. Bien plus, les enseignants ne veulent surtout pas que les élèves manquent un pas dans une démonstration. Une conception répandue est que les « petits pas » peuvent faire comprendre la structure de la démonstration et que leur évitement est néfaste à cette compréhension. Nous reprenons l'exemple proposé par Tanguay (2006) : il s'agit de prouver que les trois

[11] Nous développons dans le dernier paragraphe et dans le paragraphe 4 du chapitre 7.

médiatrices d'un triangle sont concourantes. Les élèves doivent remplir un schéma déductif dont les étapes sont apparentes, puis rédiger un texte convaincant. Pour remplir leur schéma, ils disposent de deux listes : les propositions utiles et les conclusions à écrire dans les cases du schéma. Les hypothèses sont les suivantes : un triangle *ABC,* [*AB*] et [*BC*] ont respectivement pour milieux *M* et *N* et pour médiatrices *m* et *n*, dont le point d'intersection est *W*. Le schéma proposé invite à établir la preuve comme suit :

- Les deux premiers pas sur le même plan :
  *W* est un point de la droite *m* et *m* est la médiatrice de [*AB*], donc $AW = BW$ ;
  *W* est un point de la droite *n* et *n* est la médiatrice de [*BC*], donc $BW = CW$ ;
  ces deux implications étant justifiées par la propriété selon laquelle tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.
- Le troisième pas lié aux deux précédents :
  $AW = BW$ et $BW = CW$, donc, d'après la propriété de transitivité de l'égalité, $AW = CW$.
- Le dernier pas :
  $AW = CW$ et *l* est la médiatrice de [*AC*], donc *W* est un point de la droite *l*, d'après la proposition suivant laquelle un point équidistant de deux autres appartient nécessairement à la médiatrice du segment formé par ces deux derniers.

Dans toute rédaction de preuve, il y a des pas incontournables et d'autres qui ne font pas nécessairement l'unanimité et relèvent de l'arbitraire. L'énoncé de départ comporte l'hypothèse que *W* est le point d'intersection de *m* et de *n*. Un *petit pas* supplémentaire pourrait être : *W* est le point d'intersection de *m* et de *n*, donc, d'après la définition de l'intersection de deux ensembles, *W* appartient à *m* et *W* appartient à *n*. Et si l'on veut encore aller plus loin dans ce sens, on peut ajouter cet autre petit pas : *m* est la médiatrice de [*AB*] et *W* appartient à *m*, donc *W* appartient à la médiatrice de [*AB*]. Et pourquoi ne pas ajouter aussi un pas, avant le dernier, pour justifier que *AW* et *CW* ne sont pas nuls. Rajouter d'autres pas à cette rédaction la rend plus difficile à comprendre et n'aide pas à saisir ce qui est essentiel et ce qui est accessoire. Pour cet exemple, l'essentiel pourrait se résumer par : *W* appartenant aux médiatrices de [*AB*] et de [*BC*], il est donc équidistant aussi de *A* et de *C*, donc il appartient à la médiatrice de [*AC*]. Nous faisons l'hypothèse que les petits pas gênent les élèves dans les débuts de l'apprentissage parce qu'ils font rester sur place, la preuve n'avance pas, et ils relèvent de l'arbitraire. Nous y reviendrons dans notre analyse de certaines difficultés et dans notre ingénierie.

## 5. Notre proposition pour l'enseignement

Nous avons identifié un certain décalage entre la preuve en mathématiques, qui ne relève pas d'un consensus dans cette institution, et celle qui est mise en avant dans certains travaux de didactique. Ce phénomène de transposition est inévitable entre l'institution savante et celle de l'enseignement, mais nous défendons l'idée qu'il doit être réduit.

Pour l'enseignement, nous proposons de considérer la preuve sous le double aspect du *processus* et du *produit*, ceci permettant de ne pas se réduire à enseigner l'écriture d'un certain type de preuve, en suivant un modèle (au sens de modèle à

imiter). Le processus de preuve recouvre pour nous les différents gestes, attitudes, intentions, opérations mentales, afférents à l'action de prouver dans le cadre de la rationalité mathématique, dont certains sont plus ou moins visibles de l'extérieur suivant que cette action a lieu au sein d'un groupe ou dans le domaine privé de la personne. Il se met en effet en marche sous la triple impulsion qui naît de la recherche d'une conjecture, du désir de combler le doute sur cette conjecture, et du besoin d'explication. Nous y ajoutons l'interaction sociale comme moteur du processus de preuve (Balacheff 1987).

Nous distinguons bien *apprendre à prouver* et *apprendre à écrire une preuve*.

L'apprentissage de la preuve s'accompagne nécessairement d'un travail d'écriture. Celui-ci ne consiste pas en la rédaction d'une preuve dans un cadre formel. Un certain formalisme est certes nécessaire à l'écriture d'une preuve, mais l'obligation d'y recourir doit être le résultat d'un apprentissage lié à la prise de responsabilité scientifique[12], et non pas la réponse à une injonction du professeur.

Nous proposons que ce travail d'écriture commence par donner toute sa place à l'expérimentation, à la formulation de conjectures, celles-ci étant accompagnées par un moyen de les valider ou bien de les réfuter. Il nécessite donc au préalable un apprentissage relatif à la *rationalité mathématique* : comment on définit, on reconnaît le *faux*, le *vrai* en mathématiques, le principe du *tiers exclu*, les divers statuts d'un énoncé (conjecture, théorème, définition…), l'implication… Cet apprentissage ne se réalise pas en quelques séances, il doit certes débuter par des séances spécifiques (Legrand 1990, Gandit & Massé-Demongeot 1996), mais cette rationalité mathématique s'apprend si le professeur, tout au long de ses cours, la met en avant en laissant la classe exercer une part de responsabilité sur le plan scientifique. L'habitude ainsi acquise par les élèves d'expérimenter, de formuler des conjectures, de les valider ou les réfuter, peut alors déboucher sur un travail d'écriture comme nous l'évoquons ci-dessus. Nous nommons *écrit de recherche* cette rédaction, communicable à autrui, ainsi constituée chronologiquement des éléments forts de la recherche et de la preuve du vrai ou du faux liés à celle-ci. Notre définition de *l'écrit de recherche se* démarque un peu de ce qu'on appelle communément une *narration de recherche* (Sauter 1998) : nous pensons toutefois qu'il est utile, dans l'enseignement, de commencer par faire écrire aux élèves des narrations de recherche, puis à montrer comment on peut les dépouiller de certains éléments, qui relèvent de la narration, pour les faire évoluer vers ces *écrits de recherche*. Ces derniers ne sont pas nécessairement organisés pour rendre les idées claires, pour convaincre autrui. C'est justement ce qui distingue l'*écrit de recherche* du texte que nous désignons par *la rédaction de preuve*, plus formalisée : celle-ci peut aussi contenir des indications heuristiques, s'autoriser des remarques qui permettent au lecteur de comprendre le sens profond des arguments en jeu, leurs raisons. Mais ce n'est plus un écrit de recherche, la chronologie de la démarche n'y figure plus, cette rédaction est réorganisée de manière à rendre intelligible au lecteur ou à l'auditeur l'essentiel, l'essence, devrait-on dire, de la preuve. Les grandes lignes de la ou des stratégies employées pour établir la vérité sont clairement annoncées, les arguments

[12] Nous ne disons pas que faire la dévolution à la classe d'une responsabilité scientifique suffit à conduire les élèves à écrire des preuves, mais nous pensons que c'est nécessaire.

sont triés suivant leur pertinence, les plus forts sont mis en avant, ceux de moindre importance sont tus, les résultats qu'on ne sait pas prouver sont clairement explicités. L'évolution de l'*écrit de recherche* vers la *rédaction de preuve* se réalise sur un temps nécessairement long (plusieurs années). L'apprentissage de cette *écriture de preuve* passe donc avant tout par un travail sur l'entrée dans la rationalité mathématique et non pas par l'apprentissage du formalisme sous-jacent aux schémas déductifs.

# CHAPITRE 2
## LES ATTENDUS DES ENSEIGNANTS ET LE CONTRAT USUEL

*« - Claudine, au tableau. Extrayez la racine carrée de deux millions soixante-treize mille six cent vingt. Je professe une insupportable horreur pour ces petites choses qu'il faut extraire. »*
*(Colette, Claudine à l'école, 1900)*

Ce chapitre se compose de deux parties : *l'activité mathématique en classe* et le *contrat usuel relatif à la preuve dans les pratiques de classe au collège*.

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé notre référence en matière d'activité mathématique et de preuve, dans l'institution qui produit le savoir mathématique. Nous envisageons maintenant sa transposition à l'école (au sens d'institution d'enseignement), plus particulièrement au niveau de l'enseignement secondaire.

Dans la première partie de ce travail, nous donnons des éléments de réponse à la question de recherche suivante : les attentes des enseignants par rapport à l'activité de leurs élèves relèvent-elles principalement de l'activité mathématique ? En nous appuyant sur certains travaux de didactique et sur notre expérience de professeur, nous proposons une description de ce que nous appelons *l'activité mathématique de l'élève en classe*, pour la démarquer d'autres types d'activité que l'école attend aussi de l'élève en cours de mathématiques. Nous l'utilisons ensuite pour analyser les attendus des enseignants par rapport à l'activité de leurs élèves.

La seconde partie propose une explicitation du *contrat didactique usuel relatif à la preuve*, en vigueur dans beaucoup de classes, de collège surtout. C'est la conclusion que nous avons tirée de nos recherches précédentes, réalisées notamment dans le cadre de notre mémoire de DEA et qui s'appuient sur notre expérience en matière de formation des enseignants de mathématiques. Nous rapportons des faits en rapport avec l'enseignement de la preuve en collège, qui nous permettent d'illustrer ce contrat. Nous concluons par d'autres questions de recherche.

## L'ACTIVITE MATHEMATIQUE EN CLASSE

Nous identifions quatre types d'activité de l'élève en classe, dans la perspective de repérer, au travers du discours des enseignants, ce qu'ils attendent de leurs élèves en mathématiques.

### 1. Ce que nous considérons comme activité mathématique en classe

Caractériser l'activité mathématique est un sujet délicat, même dans la communauté mathématique, où il est rare d'arriver à un consensus. Nous avons exposé notre référence dans le chapitre 1. Lakatos (1976) développe l'idée que

l'activité mathématique et les mécanismes de la découverte en mathématiques, relèvent d'une dialectique preuve/réfutation, les rapports entre générer des preuves et les réfuter par des contre-exemples dépassant largement la dualité vrai/faux. Ce que nous voulons expliciter dans ce paragraphe, c'est l'activité mathématique qui se pratique en classe. Outre le point de vue de Lakatos, nous nous référons à trois courants dans les travaux didactiques, d'abord, ceux auxquels nous avons participé dans le cadre d'une recherche IREM-INRP (1999-2003) sur la question, Qu'est-ce que faire *véritablement* des mathématiques en classe ?, ensuite ceux qui sont menés par Robert & M. Rogalski (2002) et Robert (2005), enfin ceux du groupe CESAME (2005). Les premiers ont abouti à l'élaboration d'un *modèle simple de l'activité mathématique de l'élève* :

[…] *activité mathématique vue comme culture de base à faire partager par l'école à tout futur citoyen d'un pays qui se veut humaniste et démocratique.* (INRP-ADIREM 2003)

Les seconds associent à des tâches (énoncés, questions) des activités mathématiques potentielles des élèves. Nous reprenons leur définition de *l'activité* :

*Nous réservons le mot activité(s) à tout ce que dit, fait, pense l'élève pendant l'action, avant ou après. Cela peut avoir des traces, écrites ou orales, mais une partie est invisible.* (Robert & M. Rogalski 2002)

Les troisièmes étudient l'élève en train de faire des mathématiques, ce qu'il peut dire de son activité et analyse le rôle d'autrui.

*Le modèle de la triple approche dans son double aspect, statique (Léonard & Sackur 1991) et dynamique (Sackur & al. 1997), nous a permis de caractériser certains comportements d'élèves sur lesquels on peut s'accorder pour dire qu'il leur manque des caractéristiques importantes d'une activité mathématique.* (CESAME 2005)

Notre objectif est de repérer au travers du discours des enseignants leurs attentes concernant l'activité de l'élève. De ce fait, nous ne pouvons exploiter les travaux de CESAME qui portent sur l'élève en train de faire des mathématiques. Nous nous référons davantage aux deux autres courants.

Une de nos hypothèses de travail est de considérer que beaucoup de tâches données en cours de mathématiques engendrent chez les élèves des *activités* que nous ne considérons pas comme mathématiques. Nous décrivons les différentes activités que l'élève est amené à pratiquer à l'école, en précisant celles que nous considérons comme *mathématiques* ou non. Cependant ce tri n'est pas facile. La nature (mathématique ou autre) dépend à la fois de la tâche qui est proposée (l'énoncé choisi) et de la gestion de la classe par le professeur. Citons Robert & M. Rogalski en considérant que ce qu'ils appellent « le succès de l'entreprise », c'est, de notre point de vue, que les élèves aient une activité mathématique :

*Ainsi, quels que soient les énoncés proposés (et leur élaboration comporte un premier enjeu), pour nous, le succès de l'entreprise dépend aussi de la gestion de la classe pendant le travail des élèves.*

De ce fait, la nature de l'activité de l'élève dépend étroitement de la conception que l'enseignant a lui-même de l'activité mathématique et de son métier (ce second point sera étudié au chapitre 8, où est présentée l'ingénierie de formation).

Avoir une *activité mathématique*, ce serait, face à un problème, à une question, adopter une attitude où s'entrelacent concret et abstrait, particulier et général, concepts et techniques, informel privé et formalisme, imagination et rigueur. L'entrelacement est important car ces divers aspects qui s'opposent, l'un s'appuyant sur l'autre, aident à la construction du sens. Il s'agit avant tout de comprendre que la plupart des problèmes ne sont pas naturellement mathématiques, mais qu'ils peuvent, par modélisation, donner naissance à des questionnements essentiellement mathématiques dont les conclusions nécessaires apporteront des éléments de réponses aux problèmes de départ. L'expérimentation sur des cas simples permet l'entrée dans le problème devenu mathématique, de voir ce qu'il y a de général ou de généralisable derrière le particulier. L'identification d'un concept ou l'acte de définition permettent la simplification du problème, la formulation de conjectures, dont la résolution peut passer alors par l'utilisation de telle technique, reconnue pertinente. La mobilisation d'un résultat connu relève aussi d'une activité mathématique, à condition évidemment qu'aucune indication ne soit donnée. Ces actions s'accompagnent nécessairement de représentations et langage informels, qui relèvent du domaine privé de la personne qui fait des mathématiques. Ces représentations et langage évoluent ensuite pour devenir plus canoniques, formalisés, et être communiqués à autrui. Il est à la fois nécessaire d'imaginer les cas les plus extrêmes, pour mettre à l'épreuve ses conjectures ou ses conclusions, et de recourir à la logique la plus rigoureuse pour produire des réponses qui ne puissent être mises en défaut. Dans *l'activité mathématique* se retrouve simultanément la recherche de la vérité et d'une explication de cette vérité : ceci induit la reconnaissance du faux et des raisons du faux, la reconnaissance de la pertinence d'une stratégie ou de son inadéquation, et toujours des raisons. Celles-ci sont aussi importantes, voire plus importantes à l'école, que les conclusions finales auxquelles elles permettent d'aboutir.

Pour que l'activité en classe puisse être potentiellement mathématique, des conditions sont nécessaires : le choix des énoncés, avons-nous dit, mais aussi le respect d'un vrai temps de recherche pour les élèves, la dévolution d'une responsabilité scientifique, la liberté de s'exprimer accordée aux élèves, l'engagement de ces derniers, l'interaction sociale. Le *débat scientifique* (Legrand 1990), par exemple, est un modèle qui permet une activité essentiellement mathématique. Mais ce n'est pas le cas s'il s'agit de répondre à une injonction du professeur, qui, dans quelques instants, donnera la solution à la question qu'il vient de poser.

Pour l'élève, il existe d'autres enjeux que la pratique des mathématiques. Se débarrasser de son exercice en appliquant une méthode sans vraiment comprendre, savoir sa leçon en apprenant par cœur les théorèmes et les définitions, avoir une bonne note à l'examen en suivant pas à pas les différentes questions de l'énoncé sans s'occuper de la cohérence globale, ces trois enjeux induisent, à notre sens, des activités qui ne sont pas mathématiques, même si elles sont utiles pour faire des mathématiques. Nous les déterminons en fonction de l'objectif qu'elles visent. Nous qualifions l'activité de *technique* s'il s'agit d'appliquer sans réflexion une méthode, un algorithme, l'objectif étant d'arriver à un résultat ; nous disons activité *d'apprendre* au sens d'activité d'étude, l'objectif étant d'acquérir des connaissances ; nous parlons d'activité *scolaire* au sens de conformité au contrat, l'objectif étant de réussir à l'école. Nous ne disons pas qu'apprendre ou utiliser une technique de façon automatique ne relèvent pas de l'activité mathématique. La

technique (même sans réflexion) aide à la recherche de la vérité et des raisons, et il est souvent fort utile de ne pas se préoccuper de « pourquoi cette technique fonctionne », pour ne pas perdre de vue la question que l'on cherche à résoudre. Elle fait partie de l'activité mathématique si elle s'accompagne d'une vigilance par rapport aux résultats intermédiaires, de moyens de contrôle, d'une réflexion sur les résultats finaux par rapport à la question posée. Apprendre ou utiliser une technique peut relever ou non d'une activité mathématique, suivant qu'on est capable ou non d'expliciter la technologie[13] afférente. Néanmoins, compte tenu du fait que nous cherchons seulement à identifier une activité potentielle de l'élève au travers de ce que disent les enseignants, nous proposerons l'étiquette *technique* pour qualifier l'activité qui peut résulter d'une tâche dont l'enjeu est technique, tout en sachant qu'elle peut aussi bien être mathématique ou au contraire en être très éloignée. Il est impossible de faire des mathématiques si l'on n'a pas acquis certaines connaissances : l'élève doit apprendre des définitions, des théorèmes, des techniques, pour enrichir le milieu de la prochaine situation dans laquelle il sera amené à pratiquer une activité mathématique. Cette activité *d'apprendre* peut être un moyen d'enrichir sa pratique mathématique : apprendre un algorithme, le faire fonctionner pour augmenter sa rapidité à l'exécuter, apprendre des résultats, tout ceci est utile pour faire des mathématiques. Dans ce type d'activité, l'enjeu est d'apprendre. Mais si, ce faisant, on ne se demande jamais pourquoi cette technique fonctionne, pourquoi on la présente ainsi, dans quels cas elle est pertinente ou ne l'est pas, pourquoi et comment on peut appliquer ce théorème, comment on le démontre, si on n'apprend que pour réussir au contrôle ou à l'examen, on n'apprend pas en accord avec l'activité mathématique. Cette activité d'apprendre peut donc elle aussi être loin de l'activité mathématique. Il en est aussi de même de l'activité que nous qualifions de *scolaire*. Nous allons plus loin. Il est même nécessaire pour qu'un élève réussisse à l'école qu'il acquière des connaissances scolaires qui, même si elles lui servent à répondre à des questions de mathématiques, le détournent de l'activité mathématique. Par exemple, il doit savoir que, dans un sujet d'examen, si on lui demande de prouver quelque chose, c'est que c'est vrai et qu'il n'a pas à se mettre en position de supposer que c'est faux (sauf évidemment s'il s'engage dans un raisonnement par l'absurde ou par contraposition). Il ne doit pas s'engager dans la recherche d'une question suscitée par le sujet, si celle-ci ne lui est pas posée explicitement. Il doit savoir repérer des indices qui vont lui être utiles à la poursuite de la résolution d'une question, même s'il n'en voit pas les raisons. Cette activité *scolaire* relève essentiellement du contrat. Elle peut s'avérer en opposition avec l'activité mathématique. La manifestation d'un esprit critique développé par la pratique des mathématiques coexiste en effet difficilement avec l'obéissance aux règles, néanmoins incontournable à l'école.

Ainsi nous venons de définir quatre types d'activité en classe, *mathématique*, *technique*, *d'apprendre* ou *scolaire*, tout en gardant à l'esprit que les trois dernières peuvent être en accord ou bien en opposition profonde avec la première[14]. Mais il se peut aussi que l'activité de l'élève en classe ne relève d'aucune des catégories de ce modèle, qu'elle soit totalement autre, dans le cas, par exemple, où il est en position

[13] Au sens de Chevallard

[14] Nous sommes d'accord pour dire que ce modèle descriptif est assez grossier.

de refus d'apprendre. Ce type de posture d'élève n'est pas exceptionnel, mais nous ne traiterons pas de ce cas, parce que nos outils sont totalement inefficaces dans ce domaine. Il ne faut cependant pas oublier que ce comportement est aussi une réalité à l'école.

## 2. Ce que les professeurs attendent de leurs élèves en mathématiques

Lors de divers stages de formation continue ou en formation initiale à l'IUFM, nous avons posé directement aux enseignants la question suivante : quelles attitudes, quels comportements souhaiteriez-vous qu'un élève ait quand il fait des mathématiques ? L'analyse que nous proposons porte sur cent seize réponses à cette question, soixante six venant d'enseignants expérimentés, inscrits volontairement à une formation sur la démonstration, et cinquante de stagiaires PLC2[15].

Demander aux enseignants ce qu'ils attendent d'un élève qui fait des mathématiques vise les conceptions que ces professeurs ont de l'activité mathématique, en rapport avec leur enseignement, plus directement pensons-nous, que si on leur demande de décrire ce que signifie pour eux faire des mathématiques. Notre objectif est de décrire les cent seize réponses obtenues au moyen des activités que nous avons qualifiées de mathématique, technique, d'apprendre et scolaire.

### Notre méthodologie d'analyse des réponses

L'expérience dans le métier, nulle pour les PLC2 et non nulle pour les enseignants en formation continue, est une variable qu'il nous a semblé important de prendre en compte dans notre analyse, les préoccupations des enseignants débutants étant différentes de celles de leurs collègues plus expérimentés. Nous avons ainsi étudié, d'une part les cinquante réponses des professeurs stagiaires, que nous avons découpées en cent cinquante-huit *éléments de réponse* (au sens que nous précisons ci-dessous), d'autre part, les soixante-six réponses des professeurs plus expérimentés, enseignant tous en collège, réponses qui ont été scindées en trois cent trente-neuf éléments de réponse.

Ce que nous appelons *un élément de réponse*, c'est un groupe de mots décrivant une idée qui se rapporte à notre description de l'activité *mathématique* ou bien aux autres étiquettes de *technique*, *d'apprendre* ou *scolaire*. Illustrons notre propos par des exemples recueillis dans les réponses. « Avoir un esprit critique » est rattaché à une activité *mathématique*, « maîtrise d'un certain nombre de règles » renvoie à une activité que nous avons qualifiée de *technique*, « faire des recherches dans son cours ou ses exercices, dans le manuel scolaire » relève de ce que nous avons nommé une activité *d'apprendre*, « trouver le sens de la question, de la consigne » renvoie à une activité *scolaire*. Nous avons classé *autres* les éléments que nous ne pouvions ranger dans aucune des catégories précédentes, comme par exemple « je souhaiterais qu'il perçoive les exercices comme un jeu intellectuel, amusant (?). ». Pour montrer comment nous avons découpé une réponse en différents éléments, nous prenons deux exemples.

[15] Professeur de Lycée ou Collège en formation initiale à l'IUFM.

La première réponse a été donnée en 2005 par un enseignant expérimenté de collège (nous avons ajouté des numéros pour faciliter la compréhension de nos commentaires) :

*→ s'impliquer, ne pas regarder le prof ou les autres élèves faire des maths. (1)*
*→ ne pas accepter de ne pas comprendre : en maths, tout s'explique. (2)*
*→ pour être performant, il faut s'entraîner avec sérieux et régularité. (3)*
*→ les maths : l'école de la rigueur, des règles (sans exception !) (4)*
*→ pour les exercices de base, pas besoin de beaucoup d'imagination, se donner la peine de comprendre la règle et de l'appliquer correctement (5)*
*→ faire des erreurs à l'entraînement est un bon moyen pour progresser à condition d'analyser correctement celles-ci pour ne pas les reproduire (6)*

Cette réponse est facile à scinder en différents éléments puisque l'auteur lui-même l'a fait en allant à la ligne pour chaque nouvelle idée. Nous avons classé les éléments (2) et (4) comme relevant de l'activité *mathématique*, l'élément (1) nous semble correspondre à une activité essentiellement *scolaire*, l'élément (5) à une activité *technique*, enfin les éléments (3) et (6) en rapport avec une activité *d'apprendre* de l'élève, qui, si l'on en juge par (6), peut être proche de l'activité *mathématique*.

La seconde, dont l'auteur est aussi un enseignant expérimenté de collège, est moins évidente à séparer en différents éléments. Nous avons rajouté des numéros dans le texte pour montrer notre découpage :

*L'élève doit être concentré (1), faire attention à chaque mot du texte de façon à se l'approprier (2) et doit chercher à comprendre pourquoi ce qu'il lit dans les questions de l'énoncé est vrai (3). Il doit pour cela faire appel à ce qu'il sait (4). Il doit avoir le goût de trouver, de chercher à comprendre ce qui se passe (5). Il cherche une méthode logique (6) et élégante pour approfondir et comprendre le problème posé.*

Nous avons relevé six éléments de réponse. Les trois premiers relèvent à notre sens d'une activité *scolaire*, l'élément (3) évoque le vrai, mais il ne s'agit pas de la recherche de la vérité, on doit, en vertu du contrat, considérer que l'énoncé dit le vrai, il n'y a pas de doute, qui pourrait amener à une activité mathématique. L'élément suivant, le (4), montre que cette vérité est obtenue par une mise en œuvre des connaissances du cours. Nous rattachons cet élément à une activité essentiellement *technique* car il s'agit d'appliquer ce qu'on sait. De la fin de la réponse, nous avons retenu deux éléments qui concernent l'activité *mathématique*, la volonté de comprendre et le raisonnement (logique).

### Les résultats de notre analyse

Les tableaux ci-dessous rendent compte de nos résultats. Ces pourcentages sont à considérer avec beaucoup de précautions, nous ne les considérons que comme des indicateurs assez grossiers des parts relatives des différents types d'activités tels que nous les avons définis :

| *Ce que les professeurs de mathématiques **stagiaires** disent qu'ils attendent de leurs élèves, c'est* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *qu'ils aient une activité essentiellement* | *mathématique* | *technique* | *d'apprendre* | *scolaire* | *autre* |
| *Sur 158 éléments de réponse :* | *45 %* | *3 %* | *7 %* | *38 %* | *7 %* |

| *Ce que les professeurs de mathématiques **expérimentés** disent qu'ils attendent de leurs élèves, c'est* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *qu'ils aient une activité essentiellement* | *mathématique* | *technique* | *d'apprendre* | *scolaire* | *autre* |
| *Sur 339 éléments de réponse :* | *48 %* | *6 %* | *6 %* | *31 %* | *9 %* |

Dans les attendus des enseignants, cette part assez importante d'activité que nous qualifions de *scolaire* indique la part du contrat social, cadre nécessaire à toute activité collective[16]. Comme prévu, les attentes des enseignants stagiaires sont légèrement différentes de celles de leurs collègues plus expérimentés : ils sont en effet essentiellement à la recherche d'une position d'autorité dans la classe, concevant difficilement que l'intérêt et la concentration des élèves soient liés à la tâche qu'ils ont à accomplir, au problème qu'ils ont à résoudre, et demandent davantage que les élèves aient une activité *scolaire*. Ceci est fort bien mis en évidence dans la réponse suivante :

*Ne pas se balancer sur sa chaise, se tenir correctement face au tableau, ne pas parler avec son voisin , ne pas parler quand le professeur fait une explication au tableau, ne jamais dire « j'ai rien compris » avec un air médisant et tourner la tête vers ses voisins pour rigoler quand le prof tente vainement de réexpliquer, sortir une feuille et un stylo, ne pas crier, ni hurler, ne pas insulter le prof, ne pas lui lancer d'objet…, poser des questions en rapport avec le cours, ne pas siffler…, après toutes ces conditions on arrive enfin à faire cours correctement.*

Il ne faut en effet pas voir trop d'ironie dans cette tirade : l'auteur est sincère ! De plus un enseignant stagiaire juge de sa capacité à s'imposer en tant que maître au fait que ses élèves sont calmes et silencieux. Nous faisons l'hypothèse que ce professeur a des difficultés à gérer ses classes. Ces mêmes attentes *scolaires* sont aussi mises en avant dans des réponses d'enseignants expérimentés (nous en proposons deux à la fin de ce paragraphe). Certains enseignants ont même une image très étroite de l'élève qui fait des mathématiques, uniquement orientée vers l'utilisation du cours, comme le montre, par exemple, cette autre réponse d'un professeur stagiaire :

*Qu'il soit attentif aux explications données au tableau par le professeur.*
*Qu'il cherche à comprendre le cours et non à l'apprendre par cœur sans comprendre.*
*Qu'il fasse des exercices d'entraînement (en particulier, ceux donnés par l'enseignant) en essayant d'appliquer le cours correspondant, qu'il recherche dans le cours les outils utiles à la résolution de l'exercice s'il a des difficultés à démarrer, et qu'il fasse le lien entre cours et exercices (utilité du cours pour la résolution d'une certaine classe d'exercices).*

Pour un élève, faire des mathématiques en classe voudrait donc dire bien écouter le professeur, comprendre le cours, s'entraîner avec des exercices d'application. Ceci est loin de notre description de l'activité mathématique. Enfin, quelques-uns de ces stagiaires sont tellement centrés sur leur propre rôle dans la classe qu'ils en oublient l'activité mathématique de leurs élèves et qu'ils s'inventent une autre question. Voici une partie d'une réponse qui n'a même pas été répertoriée sous les rubriques

[16] Même si l'on remarque le peu de collectif dans l'activité scolaire habituelle

précédentes, car, au lieu de se placer sur le plan de l'élève, un enseignant répond sur son rôle à lui :

[…] *Il faut encourager toutes les propositions, toutes les pistes, et voir dans quelle mesure elles sont intéressantes, ne pas hésiter à valoriser les idées de la classe.*

Si l'on regroupe les résultats obtenus, sans distinction entre stagiaires et professeurs plus expérimentés, on obtient les résultats suivants, qui — et nous insistons sur ce point — sont à considérer comme des indicateurs très approximatifs des parts relatives des différents types d'activités attendues par les enseignants :

| *Ce que les professeurs de mathématiques disent qu'ils attendent de leurs élèves, c'est* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *qu'ils aient une activité essentiellement* | *mathématique* | *technique* | *d'apprendre* | *scolaire* | *autre* |
| *Sur 497 éléments de réponse :* | *47 %* | *5 %* | *6 %* | *33 %* | *9 %* |

*La conclusion qui se dégage de ces résultats chiffrés, c'est que les attendus des professeurs par rapport à leurs élèves ne relèvent pas clairement*[17] *que de l'activité mathématique : seulement 47 %. Une réelle activité mathématique ne correspond pas à la moitié de ces attentes. Globalement, 42 % des attendus sont non mathématiques, dont une proportion importante d'attendus scolaires. La part des attendus techniques est faible au regard de ce que nous allons mettre en évidence dans la deuxième partie de ce chapitre.*

Enfin voici deux réponses intégrales de deux enseignants de collège expérimentés, qui ne renferment rien qui puisse être raccroché à une activité *mathématique* :

Réponse 1
*<u>Attitude, comportement</u>*
*- calme*
*- pas de menaces, d'injures*
*- qu'il reste assis*
*- communique avec ses camarades (engendre des discussions)*
*<u>Image des mathématiques</u>*
*Outil pour les autres matières*

Réponse 2
*La même attitude que quand il fait de l'histoire, ou de l'anglais ou…, à savoir parfois une attitude « curieux », parfois une attitude « appliqué ».*

Nous classons l'intégralité des attentes de ces enseignants dans le domaine *scolaire.* Si le professeur lui-même n'exprime même pas l'idée qu'il attend que ses élèves pratiquent une réelle activité mathématique, il est impossible que celle-ci puisse avoir lieu dans ses classes. Cette attitude évoquée ci-dessus, de curiosité, d'application, devrait être induite par l'activité mathématique en classe, et non pas préalable à celle-ci : on est curieux face à une (vraie) question et appliqué si on est intéressé à se donner les moyens d'y répondre. Il reste que certaines réponses posent

[17] Nous avons précisé que les activités *technique* et *d'apprendre* pouvaient, suivant les conditions dans lesquelles elles étaient pratiquées, être proches ou non de l'activité mathématique.

questions ! Pour terminer donnons en effet un extrait relevé dans une réponse d'un enseignant de collège expérimenté, l'enseignant dit ce qu'il attend d'un élève :

*Qu'il admette avant de comprendre.*

Ceci montre combien les *conceptions* des enseignants peuvent même être à l'opposé de notre modèle de l'activité mathématique.

Dans la suite de ce travail, nous envisageons un moyen d'accéder aux conceptions des enseignants, sur la preuve notamment.

## LE CONTRAT USUEL RELATIF A LA PREUVE DANS LES PRATIQUES DE CLASSE DE COLLEGE

Les faits décrits dans cette partie, en rapport avec l'enseignement de la preuve en collège, qui nous permettent d'illustrer ce contrat, ont été saisis dans des lieux différents : stage de formation continue, manuel scolaire, préparation de cours rédigée par un enseignant, classe, site officiel de l'Education Nationale, mémoires professionnels d'enseignants débutants. Ce ne sont pas seulement ces quelques exemples qui nous ont permis d'expliciter ce contrat, mais nous les avons choisis car ils sont génériques. Nous verrons dans la suite de notre étude que tous les exemples choisis par rapport à l'apprentissage de la preuve (en collège) se situent bien dans ce contrat.

### 1. *On sait que… or… donc…* : la recette « miracle » pour apprendre à démontrer

Lors d'un stage en 2002, nous entendons un stagiaire confier à son voisin :

*Moi, avec « on sait que… or… donc… » j'ai réglé le problème de la démonstration en quatrième, et ça marche bien !*

De quoi s'agit-il ? Pour le comprendre, un détour du côté des manuels[18] scolaires de la classe de quatrième, édités en 2002. Certains manuels scolaires prônent en effet l'utilisation de *on sait que… or… donc…* comme moyen d'apprentissage de la démonstration, *or* pouvant être, comme nous allons le voir, omis ou remplacé par *on utilise*. Le manuel de la collection *Triangle* (2002) définit une démonstration en géométrie comme étant

[…] *une succession de chaînons déductifs qui partent des données et arrivent à la conclusion. Un chaînon déductif est un enchaînement de phrases qui peut se présenter sous la forme :*
*On sait que …* ← *donnée ou conclusion précédente*
*Si … alors …* ← *propriété*
*Donc …* ← *conclusion du chaînon* […] (Triangle 4e, 2002)

[18] Il s'agit du manuel *Maths 4ème* (2002), collection Diabolo, Hachette *Education*, et du manuel *Mathématiques 4ème* (2002), collection Triangle, Hatier.

Le manuel de la collection Diabolo (2002) explique ainsi la démonstration :

*Dans la plupart des cas, une démonstration élémentaire comporte trois parties :*
** elle s'appuie sur des données prises dans l'énoncé :* ***on sait que…*** *;*
** elle utilise une propriété ou une définition déjà connue :* ***on utilise…*** *;*
** elle aboutit à une conclusion :* ***donc…*** (Diabolo 4e, 2002)

Ainsi de ces deux manuels se dégage une règle, qui consiste à réduire la démonstration à un exercice formel de manipulations de propriétés vues en cours, suivant une structure codifiée, en trois phases, la première étant introduite par *on sait que* et la dernière par *donc*. Dans la suite, pour parler de ce type de texte, nous dirons le *texte-algorithme*. Cette règle (la règle du « on sait que-or-donc ») pourrait être ainsi formulée : pour faire une démonstration en géométrie, on articule différents pas ternaires, hypothèse-règle-conclusion, l'hypothèse étant introduite par « on sait que », la conclusion par « donc », la « règle » (définition, propriété ou théorème) justifiant le passage de la première à la seconde étant éventuellement introduite par « or ». Il s'agit de la première règle du *contrat didactique usuel relativement à la preuve*. Ce que nous désignons ainsi, et dans toute la suite plus succinctement par *contrat usuel*, est un contrat didactique, qui permet de modéliser les coutumes très répandues dans les classes de collège, relativement à la démonstration. Il va peu à peu être illustré par les exemples choisis dans la suite et sera résumé à la fin de ce chapitre.

## 2. Un professeur stagiaire rédige librement sa façon d'aborder la preuve dans sa classe

Un professeur débutant, en première année (2005) de formation à l'IUFM, propose sa préparation de cours concernant la démonstration, en classe de quatrième :

*MON APPROCHE DE LA DEMONSTRATION EN 4è*
*Contenu de la séquence*
*1. Rappels préliminaires sur des propriétés vues en 5è sur des transparents qu'il faut compléter (voir en annexe 1) (je complète « en direct » mon transparent, eux complètent en même temps que moi la feuille polycopiée que je leur ai donnée). Ceci fait office de cours. Dès cette étape, mise en avant de la nécessité de distinguer données et conclusion.*
*2. Puis exemple de démonstration « à tiroirs» (voir annexe 2) (toujours partie cours) : après avoir fait réfléchir les élèves chez eux (au brouillon) à la façon de résoudre ce problème, puis suite à un débat, je leur propose une démonstration (sur feuille polycopiée) dont les étapes sont à mettre clairement en avant. Leur travail consiste, en même temps que moi (sur mon transparent), à colorier (sur leur feuille) les différentes parties DONNEES / PROPRIETES / CONCLUSIONS de la démonstration.*
*3. Puis exercice d'application : montrer que si un quadrilatère a au moins trois angles droits, alors il en a quatre. A eux de bâtir une ébauche de démonstration, seuls, sur cet exemple simple. Une correction de la démonstration est faite sous la forme d'un schéma de démonstration (voir annexe 3).*
*4. Puis le cours se poursuit : « Triangle rectangle et cercle circonscrit ». Durant chaque exercice du manuel (6 au total, faits à la maison puis corrigés en cours, + un DM de 2 exercices), j'essaie d'insister sur le schéma données/propriétés/conclusion (démonstration avec des mots et/ou schéma de démonstration) qu'ils doivent mettre en œuvre dans leur réponse.*

*ANNEXE 1*

*Droites parallèles et perpendiculaires*
*Propriété 1 : Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.*
*Données :* *Conclusion :*

*Propriété 2 : Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*
*Données :* *Conclusion :*
[…]

*ANNEXE 2*
*Enoncé : Dans le triangle ABC, on construit la hauteur (AH), le milieu I du côté [BC] et la droite passant par I et parallèle à (AH). Cette droite coupe [AB] ou [AC] en J. Démontrer que le triangle BJC est isocèle.*
*<u>Résolution</u> présentée dans la partie cours de la façon suivante:*
*On sait que la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC,*
*donc par définition, les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.*
*De plus, on sait que les droites (IJ) et (AH) sont parallèles.*
*Or si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*
*Donc les droites (IJ) et (BC) sont perpendiculaires.*
*D'autre part, on sait que I est le milieu du segment [BC].*
*Donc par définition, la droite (IJ) est la médiatrice du segment [BC].*
*Or si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.*
*Donc JB = JC*
*et par conséquent, par définition, le triangle BJC est isocèle en J.*

*ANNEXE 3*
[…]

L'annexe 1 est donnée ici de façon incomplète : elle renferme plus d'une dizaine de définitions ou propriétés, celles-ci étant reformulées en termes de « données » et « conclusions ». L'annexe 2 contient donc le premier exemple sur lequel on écrit la première preuve.

L'analyse de l'exercice conduit à dire que :

- l'apprentissage de la démonstration se situe dans le cadre de la géométrie plane,
- le rapport entre le sujet du problème et le cours est étroit,
- on ne se centre pas sur la preuve elle-même,
- l'énoncé proposé est très fermé car ce qu'il y a à prouver est explicité,
- la réponse est évidente, il n'y a pas de doute,
- la tâche demandée est d'ordre technique ou formel puisque la preuve est rédigée et il n'y a qu'à colorier les propositions suivant leur position dans le pas de déduction.

L'annexe 3, qui n'est pas reproduite, renferme un schéma de démonstration, au sens de Duval (1989).

On peut décrire en termes de *règles de contrat* le fonctionnement de cette classe sur la preuve (Gandit 2003).

- La *règle du « on sait que-or-donc »* : voir ci-dessus.
- La *règle des petits pas* : dans une démonstration, il faut expliciter tous les pas, même les plus petits, comme ceux qui relèvent d'une définition.
  Par exemple, si l'on sait que le triangle *ABC* est isocèle de sommet principal *A*, il faut écrire explicitement que *AB=AC*, par définition du triangle isocèle. Si l'on sait que (*AH*) est une hauteur du triangle *ABC*, il faut écrire explicitement que (*AH*) est perpendiculaire à (*BC*) ou que l'angle *AHB* est droit, par définition d'une hauteur… Si l'on a déjà désigné une droite par (*AB*) et que l'on sait que le point *I* appartient à (*AB*), il faut écrire un pas pour signaler que l'on change le nom de la droite (*AB*) en (*AI*).
- La *règle du fichier-méthodes* : dans une démonstration, on ne doit utiliser que les connaissances vues en cours ou celle d'une liste donnée.

Nous faisons l'hypothèse que ce contrat, en vigueur dès le début de l'apprentissage, empêche l'activité mathématique des élèves, aboutit à une activité essentiellement technique et non mathématique : la plupart du temps, aucun questionnement n'est en effet proposé aux élèves sur les raisons qui pourraient justifier le formalisme ainsi imposé a priori.

## 3. Visite dans une classe : on introduit la démonstration

Nous décrivons une séance de cours sur la preuve, à laquelle nous avons assisté (Jeudi 6 octobre 2005, 10h40, collège de La Mure, classe de quatrième). Le manuel choisi dans la classe est *Cinq sur Cinq, 4ème, édition 2005*. Le professeur de mathématiques est un stagiaire PLC2 qui a suivi une formation d'ingénieur et qui débute dans l'enseignement.

*Le professeur demande :*
*- Qui peut me donner une définition de démontrer ?*
*- C'est… on sait que… or… donc, répond un élève.*
*- Non, réplique un autre élève, ça, c'est les mots qu'on utilise, c'est …*
*- Démontrer, c'est expliquer pourquoi ce qu'on voit sur une figure est vrai, dit le professeur, on écrira cela dans le cours.*
*- Qui connaît un théorème de géométrie vu en cinquième ? poursuit-il.*
*- La somme des angles d'un triangle est 180 degrés, dit un élève.*
*- Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre, cite Clara.*
*Le professeur envoie Clara au tableau et lui demande de faire un dessin.*
*- Je ne sais plus comment on peut voir que c'est parallèle, dit Clara, devant le tableau, sur lequel elle a tracé deux droites parallèles.*
*- Qui peut me dire comment on peut coder que deux droites sont parallèles ? questionne le professeur.*
*Les élèves ne répondent plus. Le professeur ajoute lui-même que l'on ne peut pas coder des droites parallèles. Clara, qui poursuit son dessin au tableau, code les deux angles droits après avoir tracé une perpendiculaire à l'une des parallèles.*
*Le professeur ajoute :*
*- C'est ce qu'on voit sur le schéma. Qui connaît un autre théorème qui a été vu en cinquième ?*
*- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles,*

*propose Samantha.*
*- C'est la même chose ! disent plusieurs élèves.*
*Le professeur envoie Samantha au tableau et lui demande aussi de faire un dessin. Elle dessine trois droites, dont deux sont parallèles et la troisième perpendiculaire aux deux autres. Samantha finit par convenir que c'est finalement la même chose que ce qu'a dit Clara auparavant. Le professeur reprend alors la parole pour dire que ce sont deux théorèmes différents, bien qu'il leur corresponde le même schéma.*
*Un autre élève lève la main pour dire un troisième théorème, mais le professeur estime que les deux exemples déjà vus suffisent et invite plusieurs élèves à lire, à tour de rôle et à haute voix, une page du manuel qui propose :*

*<u>Le code de conduite de l'apprenti-géomètre</u> :*
** Utiliser des instruments en bon état et un crayon bien taillé.*
** Effectuer les tracés avec soin et précision.*
** Faire des dessins assez grands, de préférence sur des feuilles non quadrillées (sauf indication contraire).*
** Eviter, en général, de faire des figures particulières. Ainsi, lorsqu'on demande de tracer, par exemple, un parallélogramme, il convient de le tracer le plus « quelconque » possible, c'est-à-dire ni rectangle, ni losange.*
** Sur une figure, coder au fur et à mesure les informations contenues dans l'énoncé.*
** Dans un problème de construction, commencer par faire un schéma à main levée pour voir comment « se présentent les affaires ».*
** Prouver (justifier) ses affirmations (même si cela n'est pas demandé dans l'énoncé.*
** Ne pas écrire de signe mathématique (⊥, //, ∈, ∉) dans une phrase en français courant.*

*Le professeur commente le texte qui vient d'être lu, puis propose de lire « une petite démonstration », qui est rédigée.*
*n°5 – Une petite démonstration (manuel* Cinq sur Cinq, 4ème*, Hachette, 2002) :*
*1. a) Marquer trois points R, S, T alignés.*
*b) Construire la médiatrice d du segment [RS] et la médiatrice d' du segment [ST].*
*c) Sur la figure, coder les informations contenues dans l'énoncé.*
*d) Formuler une conjecture concernant les droites d et d'.*
*2. Recopier et compléter :*

| *a)* **Données (ou hypothèses)** | | **Résultat (ou conclusion)** |
|---|---|---|
| *d est la médiatrice du … [RS]* | *donc* | *d ⊥ (RS)* |
| *d' est la … du segment [ST]* | *donc* | *d'…(ST)* |

*b) Les … R, S et T étant …, les droites (RS) et (S.) sont confondues.*
*Or, si deux … sont perpendiculaires à une même troisième …, alors elles sont … .*
*Par conséquent :* ... // ...

*Une élève redit alors que, pour rédiger, elle connaît « on sait que … or … donc … »; une autre affirme qu'il ne faut pas utiliser « car ».*

Le professeur débute, nous ne jugeons pas ici sa séance, nous regardons sa conception de la preuve et celles des élèves, qui ont reçu un enseignement sur ce sujet en classe de cinquième. Leurs remarques montrent la prégnance du contrat usuel, essentiellement formel, que nous avons décrit, notamment de la règle du *on sait que…or…donc…*, qu'il n'est pas question de transgresser en utilisant *car*. Les élèves ont de la preuve une image exclusivement *technique*, en dehors de tout enjeu de vérité. Par ailleurs le professeur semble préoccupé par le codage des figures et la compréhension du contenu des propriétés déjà vues par les élèves dans la classe antérieure. On retrouve la règle du *fichier-méthodes*, et ce que nous appelons la *règle de transcription de l'énoncé* : pour faire une démonstration en géométrie, on fait une figure que l'on accompagne des hypothèses (souvent appelées données), que l'on

code, et l'on écrit ce que l'on veut démontrer ; le codage est indépendant du projet de preuve.

Or il est bien évident que la pertinence du codage des hypothèses dépend du projet de preuve (Demongeot & Gandit 2003). Ainsi le codage relatif à la médiatrice d'un segment peut aussi bien être fait en terme d'équidistance d'un point aux extrémités du segment (on codera alors l'égalité de deux longueurs) ou bien en terme de perpendiculaire au milieu du segment (on codera alors l'angle droit et l'égalité de deux autres longueurs).

Enfin, on note aussi l'interdiction vis-à-vis des cas particuliers, dans ce que recommande le manuel. Ce que nous identifions comme une autre règle de contrat, dite de *l'interdiction des cas particuliers* : pour faire une démonstration en géométrie, il faut dessiner une figure qui n'est pas un cas particulier.

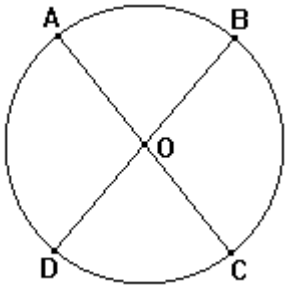
Nous savons bien cependant que les cas particuliers font avancer la recherche lors de la résolution d'un problème.

## 4. Une fiche sur l'apprentissage de la démonstration proposée sur le site officiel *Planète maths*

*ACTIVITÉ : INITIATION À LA DÉMONSTRATION*
*Ce document peut valablement être utilisé dans une phase d'initiation. Il ne doit cependant pas définir un modèle finalisé de rédaction de démonstration et ne constitue en aucun cas une norme.*
*Exercice 1*
*ABC est un triangle rectangle en A.*
*Par le milieu M du segment [AB], on trace la droite (d) parallèle à la droite (AC).*
*On se propose de démontrer que (d) et (AB) sont perpendiculaires.*
*Fais la figure.*
*Complète le tableau suivant :*

| *Je sais* | *Propriété* | *Donc (ce que j'ai trouvé)* |
|---|---|---|
| | *or* | *(AB) et (AC) sont perpendiculaires* |
| *(AB) et (AC) sont perpendiculaires et les droites (d) et (AC) sont parallèles* | *or* | *(d) et (AB) sont perpendiculaires* |

*Exercice 2*
*[AC] et [BD] sont deux diamètres d'un cercle de centre O.*
*On se propose de démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.*
*Complète le tableau suivant :*




| *Je sais* | *Propriété* | *Donc (ce que j'ai trouvé)* |
|---|---|---|
| *[AC] et [BD] se coupent en leur milieu* | *or* | |
| | *or* | *ABCD est un rectangle* |

*Exercice 3*
*ABCD est un parallélogramme, CEFD est un parallélogramme.*
*On se propose de démontrer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.*
*Fais une figure.*
*Complète le tableau suivant :*

| *Je sais* | *Propriété* | *Donc (ce que j'ai trouvé)* |
|---|---|---|
| | *or si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux* | *La droite (AB) est parallèle à la droite (CD)* |
| *CEFD est un parallélogramme* | *or* | |
| | *or si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles* | *Les droites (AB) et (EF) sont parallèles* |

*Suite de l'activité*

*Pour chacun de ces trois exercices, on peut rédiger un texte à partir du tableau.*
*Exemple pour l'exercice 1 :*
*ABC est un triangle rectangle en A. Or si un triangle ABC est rectangle en A alors les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.*
*Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires et les droites (d) et (AC) sont parallèles. Or si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc les droites (AB) et (d) sont perpendiculaires.*

*Ce texte constitue une démonstration possible du fait que les droites (d) et (AB) sont*

*perpendiculaires.*
*Etablir pour l'exercice 2 puis pour l'exercice 3 une rédaction de la démonstration.*
*Une correction collective en collaboration avec les élèves pourra être mise en place par la suite.*

On note bien dans les deux premières lignes de la fiche, une précaution d'emploi recommandée. Il n'en demeure pas moins clair que cette fiche est proposée pour une initiation à la preuve, à un moment où justement la question du formalisme ne devrait pas se poser, si l'on voulait entraîner les élèves vers une activité mathématique, et non pas technique (non mathématique). C'est l'enjeu de vérité qui devrait être présent dans les premiers pas sur la preuve, le formalisme n'intervenant que plus tard. Le cadre est, ici aussi, celui de la géométrie plane, le rapport avec les connaissances du cours est étroit, on ne se centre pas non plus sur la preuve elle-même. Les trois exercices proposés sont fermés et les résultats sont évidents. Ainsi la tâche est aussi de type technique et formel, puisqu'on demande de remplir un tableau, sans recherche préalable d'un moyen de convaincre de la vérité de ce que l'on veut prouver. L'activité des élèves qui est ici encouragée n'est pas mathématique. Les règles de contrat déjà citées se retrouvent, notamment celle du *on sait que…or… donc…*, ou sa déclinaison préalable en remplissage d'un tableau en trois colonnes.

## 5. Des enseignants débutants s'expriment sur l'enseignement de la démonstration

Depuis quatre ans, nous dirigeons, dans le cadre de la formation des enseignants de mathématiques à l'IUFM, un atelier destiné à l'élaboration de mémoires professionnels. L'intitulé de notre atelier est « L'élève fait-il des mathématiques en classe de mathématiques ? ».

Voici quelques extraits de certains mémoires, rédigés par des enseignants stagiaires. La rédaction des mémoires (individuelle ou en binôme) se situe vers le mois d'avril, après une expérience d'enseignement de sept mois et une réflexion menée en parallèle à l'IUFM. Nous avons choisi des extraits de mémoires dont les auteurs sont des professeurs en classe de quatrième. L'enseignement de la démonstration est un réel souci pour eux. Pour les débuts de leur enseignement, ils s'appuient sur les manuels, sur l'expérience des équipes pédagogiques de leur collège. Ces extraits ne nous révèlent pas de nouvelles règles du contrat usuel relatif à la preuve, ce sont celles que nous avons déjà vues, mais il nous donnent quelques éléments sur les conceptions des enseignants. Ils nous montrent même que ces conceptions ont évolué entre le moment où ils ont démarré leur enseignement de la démonstration et le moment où ils rédigent leur mémoire.

### Sophie et Stéphanie, en 2008

[…] *la plupart des manuels scolaires s'appuient sur la méthode suivante :*
*- On sait que …* *Donnée*
*- Si … alors …* *Propriété*
*- Donc …* *Conclusion*
*Beaucoup d'enseignants pensent que les élèves ont besoin d'être structurés et que grâce à cette méthode, ils seront capables de démontrer un résultat. […] Ces enseignants pensent*

*que cette méthode permet de donner un « point de départ » aux élèves les plus en difficulté.* […]

Donner un modèle à suivre semble être un moyen d'obtenir un écrit de la part d'élèves en difficulté. Mais cet écrit a-t-il un statut de preuve ? En surface sûrement. Pourquoi ne pas s'en contenter ?

**Sébastien, en 2008**

[…] *Plus clairement un élève qui a compris la nécessité d'une démonstration dans un cas particulier sera-t-il capable de reproduire cette démonstration dans un autre cas de figure ? En saisira-t-il la nécessité ou bien la reproduira-t-il par mimétisme ? L'expérience nous apprend que souvent nous pouvons répondre par la négative à ces questions et que l'élève loin de comprendre les enjeux se contente d'appliquer ces recettes qu'il a vues en cours. A titre d'exemple de recette nous pouvons citer la fameuse « On sait que …, si… alors…, donc… » massivement utilisée dans nos cours de géométrie. L'expérience nous montre que l'élève cherche bien plus à remplir les trous (du moins à un niveau $4^{eme}$) qu'à réellement établir une démonstration à travers un cheminement logique. Ainsi j'ai soumis à mes élèves des exercices de géométrie où plusieurs démonstrations du même résultat (certaines correctes d'autres non) étaient données par des élèves virtuels. Certains (bons) élèves ont prétendu que certaines démonstrations (pourtant logiquement valides) étaient incorrectes car elles n'étaient pas présentées sous la forme « On sait que… ». On le voit bien sur cet exemple, ce n'est pas en donnant des recettes aux élèves qu'on leur apprend à faire des mathématiques.*

On vérifie à nouveau que la preuve ne semble vivre que par des indices de forme. C'est bien ce que le professeur a voulu tester en choisissant de proposer plusieurs démonstrations du même résultat.

**Annabelle et Patricia, en 2007**

*Après un certain temps de réflexion, nous avions toutes deux opté pour une activité d'initiation à la démonstration utilisant des connaissances des années antérieures. Pour éviter l'oubli de ces connaissances, nous avions même fourni aux élèves une fiche « boîte à outils » regroupant les propriétés des parallélogrammes.* […] *Mais au préalable, nous avions laissé quelques minutes aux élèves pour se remémorer ces propriétés. La forme de rédaction était imposée : un tableau avec trois colonnes (données avec une figure, propriété, conclusion) où même les pas de la démonstration apparaissaient (une ligne du tableau pour chaque pas). Cette forme de rédaction nous apparaissait également comme une aide à l'apprentissage de la démonstration. En effet, grâce à ce tableau, nous pensions que la tâche serait plus aisée pour les élèves car guidée et que les élèves gagneraient du temps dans ce dur travail… Mais nous avons vite compris que ça ne leur facilitait pas du tout le travail, bien au contraire. La démonstration et la démarche de preuve sont, nous le savions et nous en avons eu la preuve, des points qui prennent du temps et de l'énergie. Par conséquent il faut veiller à ne pas trop vouloir aller trop vite et à ne pas trop « mâcher » les tâches pour ne pas bloquer le raisonnement propre à chaque élève. De plus, il faut aussi reconnaître que cette forme de rédaction pouvait présenter un autre attrait : la facilité pour les professeurs de l'évaluation.*

Les mêmes règles de contrat se retrouvent dans les classes dont il est question dans ces extraits. Nous avons ici une variante sur le plan de la forme : le tableau en trois colonnes. C'est bien cette forme qui est proposée dans le paragraphe 4 sur un

site officiel de l'Education Nationale. Une idée nouvelle qui montre l'intérêt de cette présentation formelle sous forme d'un tableau : c'est facile à évaluer. C'est ce que l'on peut penser au premier abord, sauf si l'on se rend compte que beaucoup de pas (surtout les petits pas) relèvent de l'arbitraire.

## 6. En résumé, le contrat usuel relatif à la preuve en vigueur au collège

Le tableau de la page suivante récapitule les différentes règles de contrat explicitées dans ce qui précède et qui définissent ce que nous appelons le *contrat didactique usuel relatif à la preuve* :

| | |
|---|---|
| *La règle du « on sait que-or-donc »* | *Pour faire une démonstration en géométrie, on articule différents pas ternaires, hypothèse-règle-conclusion, l'hypothèse étant introduite par « on sait que », la conclusion par « donc », la règle*[19] *justifiant le passage de la première à la seconde étant éventuellement introduite par « or ».* |
| *La règle des petits pas* | *Dans une démonstration, il faut expliciter tous les pas, même les plus petits, comme ceux qui relèvent d'une définition ou d'un changement de notation.* |
| *La règle du fichier-méthodes* | *Dans une démonstration, on ne doit utiliser que les connaissances vues en cours ou celles d'une liste donnée.* |
| *La règle de transcription de l'énoncé* | *Pour faire une démonstration en géométrie, on fait une figure que l'on accompagne des hypothèses (souvent appelées données), que l'on code, et l'on écrit ce que l'on veut démontrer ; le codage est indépendant du projet de preuve.* |
| *La règle d'interdiction des cas particuliers* | *Pour faire une démonstration en géométrie, il faut dessiner une figure qui n'est pas un cas particulier.* |
| *La règle du tableau en trois colonnes* | *Pour faire une démonstration, on présente chaque pas dans une ligne d'un tableau en trois colonnes, la première colonne est réservée aux hypothèses, la troisième à la conclusion du pas, la deuxième à la règle qui permet de justifier le passage des hypothèses à la conclasion. On recycle la conclusion en hypothèse pour le pas suivant.* |

[19] Cette « règle » peut être une définition, une propriété, un théorème.

# CHAPITRE 3
## NOTRE PRINCIPAL OBJET D'ETUDE : LES CONCEPTIONS DES ENSEIGNANTS SUR LA PREUVE

*« J'étais devenu expert en trous… Je souffrais plus la contradiction… Il se renfrognait dans son coin… C'était fini la conférence !… On se reparlait plus… »*
*(Louis-Ferdinand Céline, Mort à crédit, 1936)*

Qu'est-ce qu'une démonstration pour vous ? Un professeur stagiaire (2002) répond :

*Une démonstration est un texte qui part des hypothèses, des données. Par un enchaînement de pas (hypothèse, propriété, conclusion), elle permet d'aboutir à la conclusion finale, c'est-à-dire la question posée. Elle doit être indépendante de toute figure, c'est-à-dire le texte doit se suffire à lui-même pour la compréhension.*

Cette réponse reflète une conception (au sens commun du terme) de la démonstration qui est représentative de celles de beaucoup d'enseignants. Nous la mettons en regard de celles que nous avons rapportées au chapitre 1 : Bolzano (1810), Poincaré (1908), Bouligand (1935). Aucun d'eux ne met en avant la structure du discours, ils la définissent par rapport à ses fonctions explicative et validante. Glaeser (1990) parle de pas, mais c'est pour introduire une dimension spatiale (itinéraire) et aussi temporelle (marche suivant un itinéraire) et il évoque avant tout un labyrinthe. Clairaut (1765), dans son traité de géométrie à vocation pédagogique, mentionne aussi des pas, mais c'est pour mettre en avant les raisons de ce qui est *inventé*. Il n'hésite pas non plus à recourir au dessin :

*J'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes, où l'on démontre que telle vérité ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la « découvrir ».*
[…]
*En suivant cette voie, les Commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur, et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.* (Clairaut 1765)

Dans ce chapitre, nous étudions les *conceptions des enseignants relativement à la preuve, son apprentissage et son enseignement*, ce que nous désignerons plus succinctement dans toute la suite par *conceptions des enseignants sur la preuve* (nous expliquons pourquoi il est difficile de les dissocier). Notre hypothèse est que certaines d'entre elles se constituent en *obstacles* à l'entrée des élèves dans une démarche de preuve. Ces conceptions sur la preuve résistent au temps et produisent des réponses adaptées, qui sont les standards acceptés au collège, tels que nous les avons décrits. Cependant nous allons montrer que les pratiques qui en découlent empêchent les élèves d'accéder à la signification de la preuve en tant que moyen d'expliquer et de valider, et nient l'heuristique. Elles détournent aussi de l'écriture d'une preuve où les arguments seraient organisés en fonction de leur pertinence. Ainsi si certaines difficultés d'élèves sont inhérentes à l'apprentissage de la preuve, ou, en amont à l'entrée dans l'activité mathématique, d'autres, par contre, sont

générées par certaines pratiques des enseignants eux-mêmes, par suite par les conceptions qui les sous-tendent. Nous définissons d'abord ce que nous appelons une *conception sur la preuve*. Nous dressons une liste de *composantes locales*, que nous avons dégagées d'études préalables, puis nous identifions certains groupements de celles-ci comme des *conceptions globales*.

## 1. Notre définition des conceptions des enseignants sur la preuve

Notre objectif est de décrire au mieux le rapport des enseignants à la preuve, par l'explicitation de tous les éléments de *conceptions* (nous dirons *composantes de conceptions*) que nous avons pu saisir par les divers moyens que nous avons employés.

Cette notion de *conception* est largement utilisée en didactique, avec des sens différents (Artigue 1990), pas toujours explicités. Notre étude se réfère aux professeurs de mathématiques des lycées et des collèges. Nous cherchons, d'une part, à pointer ce que nous appelons des *composantes* de conception sur la preuve, son apprentissage, son enseignement, d'autre part, à reconstituer des classes représentatives de conceptions dominantes à partir de certaines de ces composantes. Ce sont donc à la fois l'aspect *local* et l'aspect *global* de la notion de conception qui nous sont utiles.

Ce que nous appelons *conception sur la preuve* est un modèle pour rendre compte des comportements des professeurs mis en situation de prouver ou d'enseigner la preuve. Ce modèle se caractérise par des règles d'actions et des pratiques (le contrat usuel décrit dans le chapitre 2 en atteste), un système de représentations symboliques et un ensemble de situations, d'enseignement ou de résolution de problèmes, dans lesquelles entrent en jeu ces règles d'action et ces pratiques. Les diverses situations que nous avons choisies, questionnement direct, choix d'exercices, analyse de manuels, résolution de problèmes…, nous permettent de saisir des *composantes de conception*, par le repérage des valeurs prises par certaines variables que nous nous sommes fixées au départ. Ainsi la réponse du professeur stagiaire donnée en introduction nous permet d'identifier trois composantes de conception sur la preuve :

- composante *P* (pas) : une démonstration est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse - règle - conclusion.
  Le domaine de validité de *P* se restreint à certains types de démonstrations construites sur le mode du raisonnement déductif. Dans le chapitre précédent, nous avons déjà largement décrit des situations d'enseignement où se révèlent des pratiques caractéristiques de *P* : la *règle de contrat du « on sait que-or-donc »* en est une conséquence. Le système de représentations symboliques lié à *P* est constitué du texte-algorithme et du tableau en trois colonnes (décrits dans le chapitre précédent), mais aussi du schéma déductif (décrit au chapitre 1).
- composante *T* (tout est écrit) : une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.
  Cet élément *T* n'est valide que pour certaines démonstrations simples, dans le

cadre de la géométrie plane et engendre facilement la *règle de contrat des petits pas*. Le système de représentation symbolique est le même que pour *P*.

• composante *G* (géométrie) : la démonstration s'apprend dans le cadre de la géométrie plane.
C'est l'évocation d'une figure dans cette réponse qui nous permet d'évoquer cet élément, conforté par les pratiques : la preuve existe peu en dehors de la géométrie (plane), les listes de propriétés proposées dans les classes pour justifier les pas sont relatives à la géométrie plane (nous y revenons au chapitre 5).

Cet exemple montre notre utilisation de l'aspect local de la notion de conception. Nous dressons dans le paragraphe suivant une liste de composantes, comme les trois précédentes, mais sans revenir sur leur domaine de validité, ni sur les pratiques ou les représentations symboliques afférentes. Cette liste nous sert de grille d'analyse dans les deux chapitres suivants. Nous utilisons aussi l'aspect global de la conception. En regroupant diversement les composantes de cette liste, nous constituons en effet différentes classes, qui nous permettent de décrire telle conception dominante dans un manuel (chapitre 5) ou telle conception d'un enseignant (paragraphe 3 de ce chapitre et chapitre 4). Ainsi nous considérons que $\{P, T, G\}$ est une partie de la conception de l'auteur de la réponse (du début de ce chapitre), qui permet mieux d'expliquer ou de prévoir les pratiques de cet enseignant que des éléments séparés.

Par rapport à la preuve, il est très difficile, voire impossible, de séparer les conceptions décrites par les professeurs eux-mêmes, les conceptions qu'ils manifestent et celles qu'ils véhiculent dans leur enseignement, induites par celles qu'ils ont de l'apprentissage. En effet, l'ingénierie de formation, que nous avons élaborée dans le but de provoquer une modification du rapport des enseignants à la preuve, nous a permis de saisir d'autres éléments que les composantes de conception que nous avons décrites ici (nous le verrons dans la deuxième partie). Cette ingénierie est fondée sur des situations de recherche, les enseignants étant donc confrontés directement à la preuve. On pourrait penser que ces composantes de conception puissent donc davantage être liées à la preuve qu'à son apprentissage ou son enseignement. Nous verrons que la distinction est impossible à établir clairement, les enseignants rédigeant des preuves en vertu du contrat didactique en vigueur dans leurs classes. C'est pour cette raison que nous considérons comme impossible de dissocier clairement les conceptions sur la preuve, celles qui sont relatives à son apprentissage et celles qui concernent son enseignement, ces dernières étant étroitement liées aux secondes. Nous disons donc simplement *conceptions sur la preuve*, pour signifier ces trois types. D'ailleurs il nous importe peu d'éclaircir cette distinction, notre objectif final étant que les élèves puissent accéder à la preuve, avec tout le sens qu'elle a dans la communauté mathématique.

## 2. Composantes locales de conceptions d'enseignants sur la preuve

Une première étude des conceptions que nous avions réalisée pour notre mémoire de DEA (Gandit 2003) avait permis de dégager une liste de ces composantes, comme les trois éléments *P*, *T* et *G*, que nous venons de décrire. Cette liste s'est révélée insuffisante pour d'autres analyses, nous l'avons complétée, notamment par des composantes *adverses* (celle qui sont désignées par *non*…), qui

ne sont pas exactement les contraires. Ces composantes sont de deux types, épistémologiques et didactiques.

Cette liste va servir d'outil d'analyse dans deux contextes différents :

• les choix d'exercices sur la preuve effectués par des enseignants, ainsi que les raisons de ces choix (chapitre 4),

• l'étude de manuels scolaires et des programmes destinés aux classes de 5e et de 4e (chapitre 5).

| *Désignation* | *Description de la composante de conception* |
|---|---|
| *AC (application du cours)* | *La preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.* |
| *nonAC (non application du cours)* | *La preuve n'est pas seulement un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours ; son apprentissage est facilité si les connaissances en jeu ne relève pas du cours.* |
| *COP (centration sur l'objet preuve)* | *L'apprentissage de la preuve se réalise dans des situations où les connaissances en jeu sont suffisamment simples pour ne pas occulter le raisonnement. On se centre sur l'apprentissage des fonctions de validation et d'explication de la preuve.* |
| *nonCOP (non centration sur l'objet preuve)* | *L'apprentissage de la preuve se réalise dans des situations qui utilisent le cours, dans des situations qui mettent en jeu des connaissances qui ne sont pas élémentaires, occultant de fait l'apprentissage de la preuve (ses fonctions de validation et d'explication).* |
| *FM (fichier-méthodes)* | *Une preuve se construit à partir des stratégies courantes vues dans le cursus secondaire, elle repose sur un corpus de connaissances construit et bien identifié dans lequel il n'y a qu'à puiser.* |
| *nonFM (non fichier-méthodes)* | *Une preuve ne se construit pas nécessairement à partir des stratégies courantes vues dans le cursus secondaire, elle ne repose pas nécessairement sur un corpus de connaissances bien identifié dans lequel il n'y a qu'à puiser, cette attitude peut même être un obstacle à la preuve.* |
| *G (géométrie)* | *La preuve s'apprend dans le cadre de la géométrie plane.* |
| *nonG (non géométrie)* | *La géométrie plane n'est pas nécessairement le meilleur cadre dans lequel on apprend la preuve.* |
| *P (pas)* | *Une preuve est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse — règle — conclusion. La preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.* |
| *nonP (non pas)* | *Une preuve est bien autre chose qu'un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse — règle — conclusion ; l'apprentissage de la preuve se fait en dehors de tout formalisme.* |
| *R (rationalité)* | *Une preuve répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, on ne peut démontrer si l'on n'entre pas dans ce type de rationalité.* |
| *nonR (non rationalité)* | *Le « bon sens » suffit pour faire des preuves.* |
| *SExp (statut reconnu à l'expérimentation)* | *L'expérimentation, soit l'étude d'exemples, la formulation de conjectures, l'invalidation de certaines d'entre elles, l'ébauche de preuve, a un statut reconnu, une place dans l'écrit qui correspond à une preuve.* |

| | |
|---|---|
| *nonSExp (statut non reconnu à l'expérimentation)* | *On s'approprie un problème nouveau par l'expérimentation sur des exemples, à partir desquels on essaie d'identifier des régularités, ainsi que les conditions de ces régularités, mais ceci doit rester dans le domaine privé et n'a pas de statut reconnu dans l'écrit relatif à la preuve.* |
| *SV (suite de vérités)* | *Une preuve, constituée d'une suite d'implications dont les hypothèses et les conclusions sont toutes vraies, est correcte.* |
| *nonSV (non suite de vérités)* | *Une preuve n'est pas seulement une suite d'implications dont les hypothèses et les conclusions sont toutes vraies ; les arguments doivent être triés suivant leur pertinence ; les « trous » sont utiles à la compréhension d'une preuve.* |
| *T (tout est écrit)* | *Une preuve est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.* |
| *nonT (non texte)* | *Une preuve peut ne pas être un texte ou ne pas seulement être un texte ; un dessin, un schéma, une animation… peuvent constituer des preuves.* |
| *TP (tâches préalables)* | *L'apprentissage de la preuve se prépare par des tâches préalables telles que le repérage d'une liste d'hypothèses à partir d'un texte donné, des conditions d'application d'un théorème à partir d'une figure donnée, le codage d'une figure…, tout ceci en dehors de tout projet de preuve.* |
| *nonTP (non tâches préalables)* | *Les tâches préalables telles que le repérage d'une liste d'hypothèses à partir d'un texte donné, des conditions d'application d'un théorème à partir d'une figure donnée, le codage d'une figure…, tout ceci en dehors de tout projet de preuve, ne sont pas utiles pour l'apprentissage de la preuve ; cela détourne l'élève de l'activité mathématique au sens de notre modèle.* |
| *V (vérité)* | *Une preuve est destinée à établir la vérité d'un résultat, elle a pour fonction essentielle de valider et de réduire le doute.* |
| *nonV (non enjeu de vérité)* | *Une preuve se réalise dans un contexte où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité.* |

## 3. Des conceptions globales des enseignants sur la preuve

Notre méthodologie a évolué tout au long de cette étude. Nous montrons ici comment nous avons utilisé l'aspect global de ce modèle pour obtenir les quatre premières classes de conceptions relatives à la preuve.

Nous avons demandé directement à des professeurs stagiaires en formation de proposer un exercice qu'ils jugeaient bien adapté pour l'apprentissage de la démonstration dans leurs classes et de justifier leur choix. Les vingt-six réponses obtenues nous ont permis de pointer certains des éléments de la liste ci-dessus, que nous avons regroupés en quatre catégories (Gandit 2004). Chacune d'elles correspond à une conception globale, que nous avons étiquetée. Nous la confrontons alors à notre grille d'analyse de l'activité de l'élève en classe, *mathématique*, *technique*, *d'apprendre* ou *scolaire*.

La première catégorie correspond à neuf réponses sur vingt-six, elle recouvre des énoncés qui répondent à trois critères. Tout d'abord, ils ont pour cadre la géométrie (composante *G*). Ensuite, ils créent peu de doute, l'enjeu de vérité est très

faible. Aucune place n'est laissée à la recherche de la conjecture à démontrer ; celle-ci est donnée dans une phrase du type « démontrer que… » ou est la réponse évidente à la question posée : ceci renvoie à la composante *nonV*. Le troisième critère concerne la structure supposée de la preuve : les énoncés sont révélateurs d'une conception très formelle de la preuve (composante *P*). Enfin, un quatrième élément est souvent avancé (mais ce n'est pas toujours le cas) par les enseignants qui proposent ces énoncés : ils évoquent leur simplicité (ils ne présentent aucune difficulté pour les élèves), ce qu'ils jugent bon pour commencer. Ce dernier point, qui renforce *nonV*, est en contradiction avec une modélisation constructiviste de l'enseignement-apprentissage. Ainsi la conception dominante, relative à cette catégorie, est celle qui consiste à voir la preuve essentiellement comme un texte particulier, qui s'articule en pas, suivant un mode déductif. C'est un exercice de style qui est proposé aux élèves pour apprendre la preuve. La forme du texte est essentielle, l'enjeu de vérité est absent. La conception globale sous-jacente peut être codée par les quatre composantes, *G*, *nonV*, *P* et *T*.

Une deuxième catégorie, relative à sept réponses sur vingt-six, regroupe les exercices qui mettent l'accent sur le cours. Pour beaucoup des propositions, il n'y a pas d'enjeu de vérité, mais aucune exigence de forme n'est requise explicitement sur le texte à produire. Quelques-uns des énoncés relèvent de domaines autres que la géométrie plane. Les propositions de cette catégorie consistent en des exercices de mise en application de connaissances. Les commentaires donnés par les professeurs ne laissent apparaître aucun élément relatif à l'apprentissage de la preuve. Les enseignants privilégient les connaissances, la preuve n'étant qu'un moyen de les mettre en application et ne requérant pas d'apprentissage explicite. Nous reconnaissons ainsi la composante *AC*, et nous ajoutons *nonCOP*, pour marquer la conception que la preuve ne relève pas d'un apprentissage explicite, dans des situations conçues à cet effet. Nous codons ainsi par *nonV*, *AC*, *nonCOP*, la conception globale qui sous-tend cette catégorie.

Une troisième catégorie de propositions (deux seulement sur vingt-six) montre tout de même que certains enseignants, bien au contraire, souhaitent mettre en avant l'apprentissage de la démonstration et proposent pour cela des situations dans lesquelles interviennent des connaissances de niveau antérieur, qu'ils pensent beaucoup plus disponibles comme outils de raisonnement pour les élèves. Nous les regroupons sous cette troisième catégorie qui relève de la composante *COP*. Cependant les énoncés proposés, qui relèvent de la géométrie, comme ceux des deux rubriques précédentes, laissent peu de place à l'expérimentation de l'élève et il n'y a aucun doute sur le résultat à démontrer. Ainsi au travers de cette catégorie, ce n'est plus la conception formelle de la preuve qui domine, ce n'est pas non plus la démonstration en tant que moyen d'utilisation du cours récemment acquis qui est privilégiée, c'est plutôt la construction d'un système d'articulation de connaissances géométriques simples qui permette d'expliquer des faits dont la valeur épistémique est déjà très forte. Pour l'élève, aucun désir de convaincre, aucune motivation à établir la vérité parce qu'il y aurait doute ! Aussi pouvons-nous coder cette troisième catégorie par les composantes de conception : *G*, *nonV*, *COP*.

Enfin une quatrième catégorie (huit réponses sur vingt-six) qui se démarque des précédentes par l'apparition de la fonction de la preuve, qui est de réduire le doute. Les propositions de cette catégorie montrent davantage d'ouverture vers des activités diversifiées qui permettent de travailler sur le sens de la preuve. Si, dans

quelques-unes seulement, nous voyons évoqué le travail sur la logique mathématique, sur la nécessité de définir un langage approprié, c'est bien dans toutes que se retrouvent le besoin de démontrer pour expliciter une contradiction ou le souci de prouver pour convaincre. Certes le domaine privilégié reste la géométrie, une proposition est néanmoins faite dans le numérique. Se retrouvent ainsi les éléments de conception *R* et *V*, par lesquels nous codons cette catégorie. C'est la seule de ces quatre catégories qui peut favoriser une activité de l'élève essentiellement mathématique.

En résumé, nous ajoutons une colonne indiquant l'activité de l'élève que cette conception de l'enseignant peut favoriser :

| *Dénomination de la conception globale identifiée* | *Eléments qui constituent la conception globale* | *Proportion dans l'échantillon de 26 enseignants* | *L'enjeu pour l'élève* |
|---|---|---|---|
| *absence d'enjeu de vérité et exclusivité du formalisme* | *G, P, T, nonV* | *9/26* | *appliquer une technique en se conformant au contrat* |
| *absence d'enjeu de vérité et mise en œuvre du cours* | *AC, nonCOP, G, nonV* | *7/26* | *appliquer une technique en se conformant au contrat et apprendre son cours* |
| *absence d'enjeu de vérité et organisation de connaissances simples* | *COP, G, nonV* | *2/26* | *appliquer une technique en se conformant au contrat* |
| *entrée dans la rationalité mathématique et enjeu de vérité* | *R, V* | *8/26* | *faire des mathématiques* |

Seule la dernière catégorie (mais huit enseignants sur vingt-six) révèle une conception plus proche de celle qui prévaut dans la communauté mathématique.

# CHAPITRE 4
# CHOIX DE TACHES SUR LA PREUVE

*« Il faut que la critique attaque la forme, jamais le fond de vos idées, de vos phrases. »*
*(Isidore Ducasse Comte de Lautréamont, Poésies I, 1870)*

Nous avons fait état du décalage important entre la preuve en classe et la preuve telle qu'elle vit en mathématiques. Nous soutenons la thèse qu'il résulte principalement des conceptions des enseignants sur la preuve[20]. L'un des moyens que nous avons choisis pour montrer ce décalage et expliciter ces conceptions est une situation de choix de tâches sur la preuve. Ces choix sont effectués par les enseignants pour enseigner la preuve dans leurs classes. Choisir une tâche consiste à choisir, non seulement un énoncé exposant une question mathématique, mais aussi un mode de gestion de classe. L'objet de ce chapitre est à la fois la description de la mise en œuvre de cette situation en formation et les résultats auxquels elle permet d'aboutir. Nous exposons d'abord la méthodologie employée dans la construction de ce moyen, la modélisation sous-jacente, ainsi que son évolution au cours de la recherche.

## 1. Le choix d'énoncés

Nous avons d'abord constitué une liste de huit énoncés[21] mathématiques, parmi lesquels les enseignants ont effectué deux choix en vue d'un premier enseignement de la preuve. La feuille des consignes figure intégralement en annexe 1 à ce chapitre. Nous explicitons dans le paragraphe suivant les variables retenues pour constituer cette liste.

Un exemple d'énoncé : soient $ABC$ un triangle, $M$ un point de $[AB]$ ; la parallèle à $[BC]$ passant par $M$ coupe $[AC]$ en $N$ ; le point $K$ est le symétrique de $M$ par rapport à $B$ ; la droite $(KN)$ coupe $(BC)$ en $L$ ; démontrer que $L$ est le milieu de $[KN]$, en utilisant un tableau en trois colonnes.

Les huit énoncés proposés sont accompagnés de commentaires facilitant leur appropriation, le temps réservé à ce choix d'exercices étant très réduit (une demi-heure environ). Ceci sera remis en cause lors de la deuxième expérimentation de cette situation. Le commentaire qui accompagne l'énoncé proposé en exemple ci-dessus est le suivant, il propose des raisons de choisir cette tâche :

*On donne cet énoncé après avoir proposé en classe quelques exemples simples de démonstrations sous forme de tableaux en trois colonnes, ce qui donne dans ce cas :*

---

[20] C'est-à-dire les conceptions des enseignants sur la preuve, son apprentissage et son enseignement.

[21] Au sens d'énoncés d'exercices.

| *Je sais que* | *D'après la propriété* | *J'en conclus que* |
|---|---|---|
| *K est le symétrique de M par rapport à B* | *Si un point A est symétrique de B par rapport à I alors I est le milieu de [AB]* | *B est le milieu de [KM]* |
| *Dans le triangle KMN, (BL) est parallèle à (MN) et B est le milieu de [KM]* | *Si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.* | *L est le milieu de [KN].* |

*La première propriété est connue dès la classe de cinquième, la seconde fait partie du programme de quatrième. Aussi doit-on donner ce problème après le chapitre « Triangles et droites parallèles », ce qui permet un réinvestissement d'une propriété qui vient d'être vue. Cette présentation de la démonstration offre un environnement où le statut d'une proposition correspond à sa position géographique dans le tableau, qui permet de bien mettre en évidence les trois composantes de chaque pas de raisonnement. En réduisant les passages d'un pas à un autre à un aspect purement technique (remplir un tableau), cette pratique permet aux élèves de se consacrer à la recherche de fond de la solution, ceux-ci n'ayant plus de question à se poser sur sa rédaction.*

Certains de ces énoncés (deux sur sept) sont issus de manuels de quatrième, d'autres (deux sur sept) sont des propositions retenues auparavant par d'autres enseignants, dans le cadre d'une formation, pour des travaux en classe sur la démonstration : c'est le cas de celui qui est donné en exemple ci-dessus… Trois de ces énoncés mettent en avant un cadre formel : un graphe de preuve pour l'un, un tableau en trois colonnes pour le deuxième (voir exemple ci-dessus), un texte à trous pour le troisième ; l'enjeu de vérité y est très faible. Les cinq autres peuvent permettre un travail sur la rationalité mathématique et le doute peut être important, si la gestion de la classe est prévue en fonction de ces objectifs. Nous proposons ci-dessous une analyse plus approfondie de ces énoncés suivant deux axes, les variables didactiques que nous avons retenues, d'une part, les éléments de conception qui ont de fortes chances d'être induits par le choix des exercices, d'autre part.

## 2. Les variables retenues qui entrent en jeu dans le choix des énoncés

Différentes variables entrent en jeu dans la sélection ou construction de ces énoncés. Nous en avons retenu quatre :

- *Rapport sujet-cours* désigne le rapport (dans l'énoncé) entre les notions mathématiques en jeu et le programme du niveau auquel on se place : s'agit-il de notions qui apparaissent explicitement dans le programme ou de notions moins institutionnelles ?
- *Ouverture* désigne l'ouverture de l'énoncé : est-il constitué d'une succession de questions ou éléments qui guident pas à pas ou n'y a-t-il qu'une seule question ? La réponse est-elle ou non indiquée dans l'énoncé ?
- *Nature de la tâche* signifie la nature de la tâche demandée à l'élève : l'enjeu pour l'élève est-il d'appliquer une technique, d'entrer dans la rationalité mathématique, de chercher ?

• *Cadre* désigne le cadre dans lequel se situe le problème : numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel, des mathématiques discrètes, arithmétique ou couplant certains des cadres cités dans le cas où un changement de cadres est possible.

Pour chacune de ces variables, nous récapitulons ci-dessous les valeurs que nous leur attribuons, ainsi que les composantes de conceptions auxquelles elle renvoie.

| *Rapport sujet-cours* | *étroit* | *lointain* |
|---|---|---|
| *Indices qui impliquent cette valeur* | *Le lien est étroit entre les notions en jeu dans l'exercice proposé et le programme du niveau pour lequel l'exercice est choisi ou celui du niveau précédent.* | *La tâche requiert peu de connaissances ou les connaissances en jeu sont supposées bien acquises.* |
| *Composantes de conceptions liées à cette valeur* | *nonCOP*<br>*AC.* | *COP* |

| *Ouverture* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|
| *Indices qui impliquent cette valeur* | *La question est du type « démontrer que… » ou ce qu'il y a à démontrer est évident.* | *Il y a bien un doute sur le résultat à obtenir, mais les arguments sont à choisir dans une liste fournie.* | ** Ou bien la question est fermée (du type « démontrer que… »), mais il y a un enjeu de vérité dans le sens où ce qu'il y a à démontrer n'est pas évident, cela demande une recherche.*<br>** Ou bien la question est ouverte, l'enjeu de vérité est réel, il n'y a aucune piste indiquée pour la résolution de la question.* |
| *Composantes de conceptions liées à cette valeur* | *nonV* | *V*<br>*FM* | *V* |

| *Nature de la tâche* | *technique-formelle* | *vrai/faux* | *recherche-argumentation* | *recherche* |
|---|---|---|---|---|
| *Indices qui impliquent cette valeur* | *L'énoncé comporte une référence à un auxiliaire pédagogique tel que tableau en trois colonnes, graphe de démonstration, texte-algorithme sur le modèle « on sait que-or-donc»* | *L'énoncé demande explicitement un travail sur la rationalité mathématique.* | *L'énoncé fixe le cadre de la recherche des arguments (une liste est donnée par exemple) tout en laissant la question ouverte, avec un certain enjeu de vérité.* | *L'énoncé demande une véritable activité de recherche.* |
| *Composantes de conceptions liées à cette valeur* | *P*<br>*nonV*<br>*nonR* | *R* | *FM*<br>*V* | *V* |

| *Cadre* | *n* | *al* | *g* | *f* | *d* | *ar* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *numérique* | *algébrique* | *géométrique* | *fonctionnel* | *mathématiques discrètes* | *arithmétique* |

Cette variable *cadre* peut aussi prendre pour valeurs les trente couples d'éléments distincts que l'on peut constituer à partir des ces six valeurs, tels que, par exemple, *n-a*, *n-g*… pour traduire que l'on peut passer du cadre numérique au cadre algébrique, du cadre numérique au cadre géométrique… Cela renvoie aux composantes *G* et *nonG*. Sortir des cadres usuels dans les programmes, utiliser par exemple un énoncé lié au cadre des mathématiques discrètes, absentes dans les programmes de collège, permettrait une centration de l'apprentissage sur la preuve elle-même, indépendamment de l'acquisition de connaissances du cours. Mais nous avons aussi retenu cette variable pour relever la fréquentation du cadre géométrique pour l'enseignement de la démonstration (que nous savons déjà être grande).

## 3. La liste des huit énoncés et les valeurs prises par les variables retenues

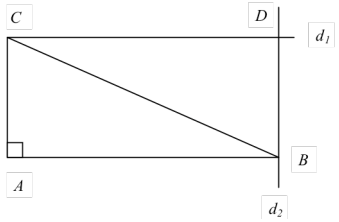
### *Enoncé 1*

On rappelle les propriétés suivantes.
❶ Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.
❷ Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
❸ Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.
❹ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
❺ Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.

❻ Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.
❼ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.

Soient ABCD et CDEF deux parallélogrammes.
Les droites (AB) et (EF) sont-elles toujours parallèles quels que soient les parallélogrammes choisis au départ ? Justifier la réponse en utilisant certaines des propriétés ci-dessus.

***Enoncé 2***




Soit *ABC* un triangle rectangle en *A*. On construit la droite $d_1$ parallèle à (*AB*) passant par *C* et la droite $d_2$ parallèle à (*AC*) passant par *B*. On note *D* l'intersection de $d_1$ et $d_2$.
Quelle est la nature du quadrilatère *ABDC* ? Rédiger une démonstration après avoir fait un schéma déductif.

***Enoncé 3***

Soient *ABC* un triangle, *M* un point de [*AB*]. La parallèle à [*BC*] passant par *M* coupe [*AC*] en *N*. Le point *K* est le symétrique de *M* par rapport à *B*. La droite (*KN*) coupe (*BC*) en *L*.
Démontrer que *L* est le milieu de [*KN*], en utilisant un tableau en trois colonnes.

***Enoncé 4***

On choisit n'importe quel nombre, on lui retranche 4 ; on multiple le résultat obtenu par – 3 ; à ce nouveau résultat, on ajoute le triple du nombre de départ. On trouve toujours le même résultat final. Pourquoi ?

***Enoncé 5***

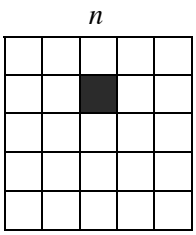
a) Marquer trois points *R*, *S*, *T* alignés.
b) Construire la médiatrice *d* du segment [*RS*] et la médiatrice *d'* du segment [*ST*].
c) Sur la figure, coder les informations contenues dans l'énoncé.
d) Formuler une conjecture concernant les droites *d* et *d'*.

Recopier et compléter :

| a) **Données (ou hypothèses)** | | **Résultat (ou conclusion)** |
|---|---|---|
| *d* est la médiatrice du … [*RS*] | donc | $d \perp (RS)$ |
| *d'* est la … du segment [*ST*] | donc | *d'*…(*ST*) |

b) Les … *R*, *S* et *T* étant …, les droites (*RS*) et (*S.*) sont confondues.
Or, si deux … sont perpendiculaires à une même troisième …, alors elles sont … .
Par conséquent : … // …

***Enoncé 6***




On considère un quadrillage à mailles carrées identiques, privé d'une case (un exemple est dessiné ci-contre).

Est-il possible de le paver avec des dominos ?

***Enoncé 7***

Si l'on prend n'importe quel nombre entier naturel, sauf 0, qu'on le multiplie par l'entier qui le précède et qu'à ce produit, on ajoute 11, on obtient un résultat qui n'a que deux diviseurs.
Vrai ou faux ?

***Enoncé 8***

Est-il possible de trouver un quadrilatère qui a un seul angle droit ? exactement deux angles droits ? exactement trois angles droits ?

Dans le tableau qui figure en annexe 2 à ce chapitre, nous récapitulons les valeurs des variables par rapport à chacun de ces exercices. Nous proposons aux enseignants de travailler pour trois niveaux de classe : quatrième, troisième ou seconde. Cette indication peut modifier la valeur des variables. Ainsi dans l'énoncé n°1 :

- la variable *rapport sujet-cours* prend la valeur *étroit* pour les niveaux de 4ème ou inférieurs, mais *lointain* pour niveaux 3ème ou supérieurs,
- la variable *ouverture* prend la valeur 1,
- la variable nature de la tâche prend la valeur *recherche-argumentation*,
- la variable *cadre* prend la valeur *géométrie.*

Cette analyse en termes de variables nous conduit à une modélisation des choix reposant sur les conceptions sur la preuve, les valeurs de ces variables impliquant le repérage de certaines composantes de conception au regard du choix des exercices. Ainsi, si l'on reprend l'énoncé n°1 déjà retenu ci-dessus, on retient les composantes de conceptions :

- *nonCOP* et *AC*, si la variable *rapport sujet-cours* prend la valeur *étroit*, et *COP* dans les autres cas,
- *V* et *FM* puisque la variable *ouverture* prend la valeur 1 et que la variable *nature de la tâche* prend la valeur *recherche argumentation*,
- *G*, puisque la variable *cadre* prend la valeur *g*.

Nous obtenons ainsi le tableau suivant :

| *Enoncés* | *n°1* | *n°2* | *n°3* | *n°4* | *n°5* | *n°6* | *n°7* | *n°8* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *pour niveaux 4ème ou inférieurs* | *nonCOP AC* | *nonCOP AC* | *nonCOP AC* | *COP R* | *nonCOP AC* | *COP R* | *nonCOP AC* | *nonCOP AC* |
| *pour niveau 3ème* | *COP* | *COP* | *nonCOP AC* | *COP* | *COP* | *COP R* | *COP R* | *COP R* |
| *pour niveaux 2nde ou supérieurs* | *COP* | *COP* | *COP* | *COP R* | *COP* | *COP R* | *COP R* | *COP R* |
| *ouverture* | *V FM* | *nonV* | *nonV* | *V* | *nonV* | *V* | *V* | *V* |
| *nature de la tâche* | *FM V* | *P* | *P* | *V* | *P* | *V* | *R* | *R* |
| *cadre* | *G* | *G* | *G* | *nonG* | *G* | *nonG* | *nonG* | *G* |

Puisque les enseignants choisissent deux exercices, il se peut qu'on obtienne à la fois les éléments de conception *C* et *nonC*. Dans ce cas, nous relevons les deux de manière provisoire, et la sélection de la mise en œuvre nous permettra soit de renforcer, soit d'annihiler l'élément *C*. Cela est valable pour tous les éléments de conception, sauf *G*. Si l'un des exercices relève de la géométrie et l'autre d'un autre cadre, on retient *nonG*.

La relation que nous avons ainsi établie entre chacun des huit énoncés et certaines composantes de conceptions sur la preuve (par l'intermédiaire des variables que nous avons retenues) nous fournit la première partie de la grille avec laquelle nous allons analyser les réponses des enseignants.

## 4. Les variables retenues qui entrent en jeu dans les éléments de gestion de la classe

Par expérience, nous savons bien que si le choix de l'exercice est important pour la construction d'une séance d'apprentissage, il est loin d'être le seul élément qui va déterminer l'activité de l'élève. La gestion de la classe peut changer complètement les objectifs d'apprentissage de la preuve que l'on pourrait envisager a priori : un énoncé très ouvert peut donner lieu à une séance où l'élève aura peu d'initiative à prendre si l'enseignant donne des indications et répond aux questions des élèves qui demandent des pistes ; un énoncé fermé, où la question commence par « démontrer que… » peut finalement déboucher sur une situation ouverte pour peu que la conjecture à prouver soit loin d'être évidente et que l'enseignant s'interdise d'intervenir dans la recherche des élèves. C'est la raison pour laquelle nous avons accompagné le choix d'énoncés de celui d'éléments de gestion de la classe. La liste intégrale figure en annexe 1 à ce chapitre, en voici deux exemples, qui montrent des contrats très différents :

- le professeur propose une fiche d'aide pour la rédaction de la démonstration, mettant en évidence la structure ternaire des pas et leur articulation ;
- chaque groupe cherche le problème et doit rédiger un texte montrant son expérimentation sur des exemples, ses conjectures, proposant des pistes, même si elles n'aboutissent pas.

Nous explicitons les variables retenues pour les choix de ces éléments de gestion. Nous n'évoquons ici que la gestion prévue par les enseignants. Nous savons qu'il existe un décalage entre ce qui est prévu et ce qui est réalisé. Mais nous voulons repérer les conceptions des enseignants sur la preuve. Nous pensons qu'elles se révèlent davantage dans leurs intentions que dans leurs gestes professionnels effectifs.

Nous retenons cinq variables :

1. L'*organisation temporelle*, notée *OT*, de la ou des séances consacrées aux problèmes choisis : nous regardons deux valeurs numériques correspondant à la durée en heures de la séquence consacrée à chacun des problèmes. Vouloir séparer la recherche du problème de l'écriture d'une preuve, avoir l'intention de réserver plus d'une séance à un premier travail sur la preuve, ces projets dénotent l'importance à accorder à un premier travail sur la démonstration, où il faut laisser du temps aux élèves.
   Si *OT* prend une valeur strictement supérieure à 1, les composantes *V* ou *R* sont renforcées ; sinon, elles sont annulées.

2. L'*interaction sociale*, notée *IS*, est aussi une variable que nous retenons : elle est présente lorsque l'enseignant propose aux élèves un travail de groupe, lorsqu'il permet les échanges de stratégies de preuve. C'est un élément important dans la construction du sens de la preuve. Nous considérons, pour cette variable, les valeurs 0 (pas d'interaction sociale) ou 2 (interaction sociale importante) pour signifier qu'elle est ou n'est pas envisagée dans la mise en œuvre choisie de l'enseignant, ou 1 si l'enseignant a des choix contradictoires sur ce plan.
   Si *IS* prend la valeur 2, les composantes *V* ou *R* sont renforcées.

3. La *prise d'initiative par les élèves*, variable notée *PI* : nous lui donnons les valeurs 0 (prise d'initiative nulle), 1 (prise d'initiative légère) ou 2 (prise d'initiative importante), qui codifient la place que l'enseignant a prévu de laisser à cette prise d'initiative, aussi bien dans la recherche du problème que dans l'écriture du texte. Si l'enseignant prévoit de répondre aux questions des élèves, de donner des pistes, nous considérons que la variable *PI* prend la valeur 1.
   Si *PI* prend la valeur 2, les composantes *V* ou *R* sont renforcées ; sinon, elles sont annulées.

4. La *responsabilité scientifique des élèves*, variable notée *RS* : nous lui donnons les mêmes valeurs qu'à la variable précédente. Elle est nulle (valeur 0) si c'est l'enseignant qui valide les productions, elle est légère (valeur 1) si l'enseignant trie les arguments, les pistes des élèves, elle est importante (valeur 2) si c'est l'élève qui exerce cette responsabilité, s'il est capable de valider une production par recours à des arguments strictement mathématiques (la sienne ou celle d'un autre élève).

Si *RS* prend la valeur 2, les composantes *V* ou *R* sont renforcées ; sinon, elles sont annulées.

5. La *forme* exigée pour le texte produit, notée *F* : nous lui donnons les trois valeurs *libre*, *ternaire* ou *exp*. La valeur *ternaire* marque que l'enseignant impose un modèle du type « pas ternaires » et « enchaînement de tels pas », sous la forme d'un texte-algorithme ou d'un tableau ou d'un graphe. La valeur *libre* dénote que les élèves sont laissés libres de leur expression quant à la preuve qu'ils produisent. La valeur *exp* dénote la demande faite à l'élève d'écrire son expérimentation sur des exemples, de faire des propositions de pistes, d'écrire ses conjectures, éléments qui facilitent la communication entre l'auteur et le lecteur sur la démarche de l'auteur. Nous estimons en outre que la présence d'éléments de ce type révèle l'entrée de l'auteur dans la démarche de preuve.
   Si *F* prend la valeur *ternaire*, la composante *P* se trouve renforcée. Si *F* prend la valeur *libre*, c'est *nonP* qui est renforcée. Si *F* prend la valeur *exp*, nous en déduisons la composante *SExp*.

Par rapport à la liste d'éléments de gestion proposés aux enseignants, nous relevons dans le tableau qui figure en annexe 2 à ce chapitre ceux qui correspondent aux différentes valeurs des variables retenues. Nous complétons ainsi notre grille d'analyse.

## 5. Utilisation de notre grille d'analyse pour étudier les réponses d'un premier échantillon de vingt-deux enseignants

Nous décrivons d'abord les conditions dans lesquelles ont été recueillies les réponses de vingt-deux enseignants. Il s'agit de professeurs expérimentés qui se sont inscrits à un stage de formation continue sur la démonstration.

Individuellement et par écrit, les enseignants ont choisi, avec l'objectif de faire en classe un premier travail sur la démonstration, deux énoncés dans la liste proposée, ainsi que des éléments de mise en œuvre, ils ont explicité par écrit les raisons de leurs choix. Ils se sont ensuite exprimés oralement sur celles-ci. Le texte de l'enregistrement du débat figure en annexe 4 à ce chapitre.

Au regard des commentaires écrits des enseignants, nous sommes amenée à modifier certaines valeurs des variables. Par exemple, l'enseignant peut évoquer dans ses commentaires la règle de contrat du « on sait que… or … donc… », ce qui est à rattacher à l'élément de conception *P*, sans choisir d'exercice qui soit directement en relation avec *P*, celui-ci apparaîtra néanmoins dans la conception globale. Voici deux exemples qui montrent nos choix lorsque ceux-ci ne découlent pas directement du modèle que nous avons choisi. L'étude détaillée des vingt-deux réponses obtenues figure en annexe 3 à ce chapitre 4.

*Enseignant n°1*

Ce tableau récapitule ses choix et ses commentaires :

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 3* | *8[22] : « montre l'importance de la démonstration, travail sur exemple et démonstration, → nécessité de la preuve* | *c[23], y[24], m[25]* |

Les éléments de conception induits par les choix :

| *Ex* | *conception* | *variable : cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | g | | ? | 2 | 2 | 2 | *ternaire* |
| *3* | *nonCOP, AC, nonV, P* | g | *conception* | | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *P renforcée* |

Nous éliminons *nonV* d'après les choix de mise en œuvre, nous ajoutons *G* puisque la variable *cadre* prend deux fois la valeur *g*.

D'où la conception globale qui se résume par : *nonCOP, AC, V, R, P, G*.

[22] Enoncé 8 : est-il possible de trouver un quadrilatère qui a un seul angle droit ? exactement deux angles droits ? exactement trois angles droits ?

[23] Elément de mise en œuvre *c* : les élèves sont répartis en groupes de trois ou quatre ; ils cherchent le problème pendant une heure ; le professeur ne répond à aucune question relative au problème.

[24] Elément de mise en œuvre *y* : les preuves des groupes sont proposées à toute la classe qui doit se prononcer sur leur validité en explicitant ses critères.

[25] Elément de mise en œuvre *m* : au bout d'une demi-heure, le professeur demande aux élèves des propositions de stratégies, de théorèmes qui leur semblent pertinents ; toutes les propositions sont inscrites au tableau, même si elles ne sont pas pertinentes par rapport au problème.

*Enseignant n°19*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 4*[26] | *8 : « Faire la différence entre preuve et exhibition d'un exemple où ça marche. Une même formulation de question amène à fournir des preuves différentes (exemple, démonstration). Les questions sont assez ouvertes, ce qui permet de laisser plusieurs pistes aux élèves. Révisions de 5ème sur les parallélogrammes ou les angles. »*<br>*4 : « Utilisation du calcul littéral pour faire une démonstration. Cela change des démonstrations en géométrie. Pour répondre les élèves vont devoir faire des tests et émettre une conjecture. »* | *b*[27]*, d*[28]*, j*[29]*, n*[30]*, y*<br><br>*b, f*[31]*, j, q*[32]*, t*[33]*, z*[34] |

[26] Enoncé 4 : on choisit n'importe quel nombre, on lui retranche 4 ; on multiple le résultat obtenu par – 3 ; à ce nouveau résultat, on ajoute le triple du nombre de départ ; on trouve toujours le même résultat final. Pourquoi ?

[27] Elément de mise en œuvre *b* : une seule séance est consacrée à ce problème.

[28] Elément de mise en œuvre *d* : les élèves sont répartis en groupes de trois ou quatre ; le professeur circule d'un groupe à l'autre et propose des pistes à la demande, de manière à ce que presque tous les élèves aient rédigé une démonstration à la fin de la séance.

[29] Elément de mise en œuvre *j* : aucune figure n'est dessinée au tableau.

[30] Elément de mise en œuvre *n* : au bout d'une demi-heure, le professeur demande aux élèves des propositions de stratégies, de théorèmes qui leur semblent pertinents ; seules les propositions pertinentes par rapport au problème posé sont inscrites au tableau, pour permettre à toute la classe de poursuivre sa recherche.

[31] Elément de mise en œuvre *f* : chaque élève cherche individuellement le problème et doit rédiger, avec ou sans l'aide du professeur, un texte conforme aux règles du raisonnement déductif, en mettant en évidence hypothèse, propriété et conclusion, pour chaque pas.

[32] Elément de mise en œuvre *q* : toutes les conjectures émises par les élèves sont récoltées par le professeur et écrites au tableau ; elles sont successivement débattues avec toute la classe, suivant leur pertinence par rapport au problème, leur valeur de vérité.

[33] Elément de mise en œuvre *t* : le professeur envoie au tableau un élève qui a trouvé afin qu'il propose sa solution à toute la classe.

[34] Elément de mise en œuvre *z* : certaines preuves individuelles sont proposées à toute la classe qui doit se prononcer sur leur validité en explicitant ses critères.

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *1* | *2* | *1* | *0* | *ternaire* |
| *4* | *COP, R, V, V* | *n-a* | *conception* | *V et R annulées* | *V et R renforcées* | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *P renforcée* |

Les commentaires et les exercices choisis peuvent amener aux composantes *R* et *P*. Mais les choix de mise en œuvre remettent en question ces éléments. En effet, pour l'exercice 8, l'enseignant choisit *d*, qui propose que le professeur donne des pistes à la demande, de manière à ce que presque tous les élèves aient rédigé une démonstration à la fin de la séance. Ceci annule l'enjeu de vérité que pouvait recouvrir l'exercice 8. Ce choix de mise en œuvre, de même que celui d'envoyer au tableau un élève qui a trouvé (*t*) montrent le peu de responsabilité scientifique qu'ont les élèves. De ce fait la composante *R* se trouve annulée.

D'où la conception globale qui se résume par : *COP, AC, P, nonG*.

Chacune des conceptions globales qui se dégagent n'est pas nécessairement celle du professeur correspondant. En effet, les commentaires donnés par l'enseignant n°19, par exemple, montrent que la preuve nécessite l'entrée dans un certain type de rationalité et qu'elle s'apprend dans des situations qui renferment un enjeu de vérité. Mais sa conception de l'apprentissage va à l'encontre de cette conception de la preuve. Or ce qui nous importe, c'est bien la résultante du couple formé de la conception de la preuve et de celle de son apprentissage, puisque c'est bien ce qui permet de saisir des éléments de ce que le professeur prévoit pour sa classe.

Un tableau récapitulatif des vingt-deux conceptions globales figure en fin d'annexe 3 à ce chapitre. Les conclusions que nous en tirons ne concernent que le groupe des vingt-deux enseignants expérimentés qui ont répondu au questionnaire. Rappelons qu'ils étaient volontaires pour suivre une formation sur la démonstration.

Il ne ressort pas une émergence forte de la composante *G*[35] : on ne peut pas en conclure que l'idée que la preuve s'apprend dans le cadre de la géométrie l'emporte nettement. Les professeurs ne choisissent pas que des énoncés de géométrie pour enseigner la preuve.

La composante *nonCOP*[36] est largement présente (17 sur 22, soit près de 4 sur 5), elle est à mettre en relation avec *AC*[37], représenté 21 fois sur 22 : l'apprentissage

[35] La preuve s'apprend dans le cadre de la géométrie plane.

[36] L'apprentissage de la preuve se réalise dans des situations qui utilisent le cours, dans des situations qui mettent en jeu des connaissances qui ne sont pas élémentaires, occultant de fait l'apprentissage de la preuve (ses fonctions de validation et d'explication).

[37] La preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.

de la preuve se réalise dans des situations qui mettent en œuvre les connaissances du cours. Ceci appuie notre hypothèse.

Les éléments *V*[38] et surtout *R*[39] sont peu présents (respectivement 10 sur 22 et 8 sur 22), soit un peu moins de 1 sur 2 pour *V* et un peu moins de 2 sur 5 pour *R*. La preuve n'apparaît pas de façon majoritaire comme un moyen de valider et de réduire le doute, et surtout, il ne ressort pas la nécessité d'entrer dans la rationalité mathématique pour apprendre la preuve, on pourrait dire que « le bon sens » semble suffire.

Enfin la composante *P*[40] ressort 15 fois sur 22, soit près de 7 fois sur 10. Pour un premier apprentissage de la preuve, le formalisme du « on sait que… or… donc » se révèle nettement, ce qui appuie notre hypothèse, mais tout de même pas exclusivement.

Ces résultats sont confirmés par le débat que nous avons réalisé avec les enseignants sur ces réponses. L'aspect formel de la preuve ressort nettement, des raisons sont avancées : on peut se reporter à la transcription du débat qui figure en annexe 4 à ce chapitre.

## 6. Evolution de la méthodologie : modification des propositions de tâches pour enseigner la preuve

Pour la poursuite de notre recherche, deux éléments nous conduisent à modifier nos consignes dans cette situation de choix de tâches. Ce sont, d'une part, la difficulté à pointer les composantes de conception sur la preuve d'après les choix dans la liste trop importante des éléments de gestion de classe, d'autre part, la trop grande influence sur les choix exercée par les commentaires écrits à la suite de chacun des énoncés. Nous éliminons donc les commentaires qui accompagnent les énoncés des exercices et nous ne proposons que quatre choix de gestion de la classe. L'élimination des commentaires laisse plus d'ouverture aux enseignants et les scénarios de mise en œuvre sont plus complets que les simples éléments du premier questionnaire, ils constituent un ensemble assez typé, qu'il est plus simple de choisir que toute une suite d'éléments. Dans cette nouvelle version du questionnaire, les professeurs interrogés doivent choisir deux couples (énoncé, mise en œuvre), l'un pour un premier travail sur la démonstration, l'autre pour la poursuite de ce travail. Nous pouvons ainsi dégager des tendances qui se confirment ou des idées qui changent d'orientation. Enfin, nous demandons aux enseignants quels sont les énoncés qu'ils ne choisiront sûrement pas, ainsi que leurs raisons. Ceci permet d'appuyer ou de remettre en cause les résultats obtenus. Ce nouveau questionnaire

[38] Une preuve est destinée à établir la vérité d'un résultat, elle a pour fonction essentielle de valider et de réduire le doute.

[39] Une preuve répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, on ne peut démontrer si l'on n'entre pas dans ce type de rationalité.

[40] Une preuve est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse – règle – conclusion. La preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.

figure en annexe 5 à ce chapitre. Les nouvelles gestions (ou mises en œuvre) proposées sont les suivantes :

1. Les élèves cherchent le problème en groupes. Ils doivent rédiger un texte qui montre leur expérimentation sur des exemples, leurs conjectures, qui propose des preuves ou seulement des pistes. Ce texte doit être convaincant, il sera communiqué à la classe. Le professeur n'intervient ni dans la recherche du problème, ni dans l'écriture du texte. Il organise ensuite le débat sur les textes produits, en demandant aux élèves d'expliciter leurs critères. Les textes validés par la classe sont considérés comme des démonstrations.

2. Les élèves cherchent le problème, seuls ou avec leurs voisins, pendant quelques minutes. Le professeur passe dans les rangs pour aider les élèves à la recherche et à l'écriture de la démonstration, en mettant en évidence la structure des pas et leur articulation. Le professeur rédige ensuite une démonstration au tableau sous la dictée des élèves. Certaines preuves sont proposées à toute la classe qui doit se prononcer sur leur validité en explicitant les critères retenus. Le bilan débouche sur une fiche-méthode relative à la démonstration.

3. Les élèves cherchent le problème, seuls ou avec leurs voisins. Ils doivent écrire une conjecture et essayer de la prouver. Le professeur n'intervient pas dans la recherche. Au bout d'un certain temps, il recueille les conjectures des élèves, organise le débat sur leur pertinence par rapport au problème posé et sur leur valeur de vérité, en refusant les arguments d'autorité et en laissant aux élèves la responsabilité du vrai et du faux. Dans la synthèse finale, le professeur fait apparaître le faux avec sa preuve et le vrai avec sa preuve.

4. Les élèves cherchent le problème, seuls ou avec leurs voisins. Le professeur intervient auprès des élèves qui le demandent. Au bout d'une demi-heure, le professeur fait le bilan au tableau des conjectures et pistes de démonstration proposées par les élèves. Il montre pourquoi certaines propositions ne sont pas retenues et relance le travail en indiquant les pistes à poursuivre, les propriétés à utiliser. Le professeur rédige ensuite au tableau une démonstration, en mettant en évidence la structure ternaire des pas et leur articulation.

Pour ces gestions de classe, nous ne nous centrons que sur les variables *IS* (interaction sociale), *PI* (prise d'initiative), *RS* (responsabilité scientifique) et *F* (forme), dont nous retenons les valeurs suivantes :

| *Variable IS* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|
| *Mise en œuvre* | *n°4* | *n°2* | *n°1 et n°3* |
| *Conception* | | | *V ou R renforcées* |

| *Variable PI* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|
| *Mise en œuvre* | *n°2* | *n°4* | *n°1 et n°3* |
| *Conception* | *V ou R annulées* | *V ou R annulées* | *V ou R renforcées* |

| *Variable RS* | *0* | *2* |
|---|---|---|
| *Mise en œuvre* | *n°2 et n°4* | *n°1 et n°3* |
| *Conception* | *V ou R annulées* | *V ou R renforcées* |

| *Variable F* | *ternaire* | *exp* | *libre* |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Mise en œuvre* | *n°2 et n°4* | *n°1* | *n°3* |
| *Conception* | *P renforcée* | *nonEP* | *nonP renforcée* |

Il est clair que les mises en œuvres n°1 et 3 peuvent permettre l'activité mathématique de l'élève, tandis que les deux autres induisent pour la plupart des élèves une activité technique et non mathématique.

Le tableau qui suit présente notre nouvelle grille d'analyse. Les composantes de conception, que nous relevons pour le choix d'un énoncé et d'une mise en œuvre, peuvent varier pour un même couple, suivant le niveau d'enseignement choisi (niveau de quatrième ou inférieur, niveau de seconde ou supérieur). L'analyse des réponses montre que ces composantes ne seront pas modifiées au vu des commentaires qui accompagnent ces choix, mais plutôt renforcées. Par contre certains couples apparaissent contradictoires, lorsque, par exemple, le choix de l'énoncé révèle la composante de conception *V* et que celui de la mise en œuvre révèle *nonV*[41]. Ils apparaissent néanmoins dans les réponses. Dans ce cas, nous privilégions les éléments de conception induits par le choix de l'énoncé. Enfin nous laissons de côté la variable *cadre*.

[41] Une preuve se réalise dans un contexte où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité.

| *mise en œuvre énoncé* | *n°1 V ou R renforcées, nonEP* | *n°2 V ou R annulées P renforcée* | *n°3 V ou R renforcées nonP renforcée* | *n°4 V ou R annulées P renforcée* |
|---|---|---|---|---|
| *1 : 4è : nonCOP, AC, V, FM 2nde : COP, FM,* | *4è : nonCOP, AC, V, FM, nonEP 2nde : COP, FM,* | *4è : nonCOP, AC, FM, P 2nde : COP, FM, P* | *4è : nonCOP, AC, V, FM, nonP 2nde : COP, FM,* | *4è : nonCOP, AC, FM, P 2nde : COP, FM, P* |
| *2 : 4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP,* | *contradictoire* | *4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP, nonV, P* | *contradictoire* | *4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP, nonV, P* |
| *3 : 4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP,* | *contradictoire* | *4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP, nonV, P* | *contradictoire* | *4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP, nonV, P* |
| *4 : 4è : COP, R, V 2nde : COP, R, V* | *4è : COP, R, V, nonEP 2nde : COP, R, V, nonEP* | *4è : COP, P 2nde : COP, P* | *4è : COP, R, V, nonP 2nde : COP, R, V, nonP* | *4è : COP, P 2nde : COP, P* |
| *5 : 4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP,* | *contradictoire* | *4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP, nonV, P* | *contradictoire* | *4è : nonCOP, AC, nonV, P 2nde : COP, nonV, P* |
| *6 : 4è : COP, R, V 2nde : COP, R, V* | *4è : COP, R, V, nonEP 2nde : COP, R, V, nonEP* | *4è : COP, P 2nde : COP, P* | *4è : COP, R, V, nonP 2nde : COP, R, V, nonP* | *4è : COP, P 2nde : COP, P* |
| *7 : 4è : nonCOP, AC, V, R 2nde : COP, R, V* | *4è : nonCOP, AC, V, R, nonEP 2nde : COP, R, V,* | *4è : nonCOP, AC, P 2nde : COP, P* | *4è : nonCOP, AC, V, R, nonP 2nde : COP, R, V, nonP* | *4è : nonCOP, AC, P 2nde : COP, R, V, P* |
| *8 : 4è : nonCOP, AC, V, R 2nde : COP, R, V* | *4è : nonCOP, AC, V, R, nonEP 2nde : COP, R, V,* | *4è : nonCOP, AC, P 2nde : COP, P* | *4è : nonCOP, AC, V, R, nonP 2nde : COP, R, V, nonP* | *4è : nonCOP, AC, P 2nde : COP, P* |

## 7. Les résultats obtenus avec cette nouvelle grille

Nous avons analysé soixante-neuf réponses d'enseignants stagiaires PLC2 (stagiaires à l'IUFM de Grenoble en 2005/2006), dont seulement soixante-sept ont répondu pour les deux choix de couples.

Nous avons d'abord étudié l'aspect formel de la preuve au travers de la présence de l'élément de conception *P*. Dans le premier travail que les enseignants choisissent sur la démonstration, il est présent quarante-six fois sur soixante-neuf réponses (soit près de 7/10). Parmi ces quarante-six enseignants, seuls cinq choisissent ensuite un travail qui permet un réajustement par rapport au formalisme,

révélant ainsi la composante *nonP*[42]. Et dans vingt-sept réponses sur soixante-neuf (soit près de 2/5), l'élément *P* est présent dans les deux choix. La composante *nonP*, dans au moins un des choix, n'est visible que dans quatorze réponses sur soixante neuf (près de 1/5). Ceci confirme bien notre hypothèse.

*Pour les enseignants, le formalisme tient non seulement une grande place dans la preuve, mais il est aussi considéré a priori (sept fois sur dix) ou exclusivement (près de quatre fois sur dix) comme un moyen d'enseigner la preuve.*

Par rapport aux composantes *V*[43] et *nonV*[44], les résultats issus du premier choix des enseignants sont les suivants : *nonV* est présent trente et une fois sur soixante-neuf (plus de 2 sur 5), alors que *V* n'est présent que treize fois sur soixante-neuf (moins de 1/5). Parmi ces trente et un premiers choix, dix-sept sur vingt-neuf (qui ont fait un deuxième choix) (près de 3/5) montrent à nouveau *nonV* par rapport au deuxième choix. Près d'un enseignant sur quatre (17/67) ne fonctionne que sous l'élément de conception *nonV*. Ainsi :

*De façon importante (deux fois sur cinq) la preuve est abordée dans un contexte où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité et l'on s'en tient là dans un cas sur quatre.*

Dans quelle mesure la preuve est-elle un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours ? Nous avons relevé la présence de la composante *AC*[45], d'une part dans le premier choix, trente-sept fois sur soixante-neuf, d'autre part, dans les deux choix, trente-quatre fois sur soixante-sept :

*Un enseignant sur deux voit la preuve essentiellement comme un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.*

Ceci nous amène à examiner la présence dans les réponses des composantes*COP*[46] et *nonCOP*[47]. Ce dernier est présent dans les deux choix, dans trente-quatre réponses sur soixante-sept (soit 1/2). Autrement dit :

---

[42] Une preuve est bien autre chose qu'un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse-règle -conclusion ; l'apprentissage de la preuve se fait en dehors de tout formalisme.

[43] Une preuve est destinée à établir la vérité d'un résultat, elle a pour fonction essentielle de valider et de réduire le doute.

[44] Une preuve se réalise dans un contexte où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité.

[45] La preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.

[46] L'apprentissage de la preuve se réalise dans des situations où les connaissances en jeu sont suffisamment simples pour ne pas occulter le raisonnement.

[47] L'apprentissage de la preuve se réalise dans des situations qui utilisent le cours, dans des situations qui mettent en jeu des connaissances qui ne sont pas élémentaires, occultant de fait l'apprentissage de la preuve (ses fonctions de validation et d'explication).

*Pour la moitié des enseignants, la preuve ne s'apprend que dans des situations qui utilisent le cours.*

Et dans trente-huit réponses sur soixante-neuf (près de 3/5), on commence l'apprentissage de la preuve dans une situation où l'on met en œuvre les connaissances du cours. La conception que la preuve s'apprend dans un contexte où les connaissances sont suffisamment simples pour ne pas occulter le raisonnement se dégage des deux choix de dix-neuf enseignants sur soixante-sept (un peu moins de 3/10). La composante *COP* figure au premier choix de vingt-deux réponses sur soixante-neuf (un peu plus de 3/10). Les deux résultats précédents sont largement confirmés par le rejet de l'énoncé 6 (le polymino), dans vingt-huit réponses sur soixante-neuf (soit 2/5) : c'est de loin l'énoncé le plus rejeté.

Enfin :

*L'entrée dans la rationalité mathématique comme un préalable à la preuve ne semble pas faire partie des conceptions des enseignants.*

Cette conception est en effet sous-représentée dans les réponses. La composante *R*[48] ne figure en premier choix que dans onze réponses sur soixante-neuf (soit moins de 1/5) et ne figure dans au moins un des deux choix que dans vingt-deux réponses sur soixante-neuf (soit un peu plus de 3/10).

Pour clore cette analyse, nous avons dégagé une conception globale qui se retrouve à partir du premier choix de vingt-trois réponses sur soixante-neuf, à partir du deuxième choix de vingt-cinq réponses sur soixante-sept, donc à partir d'au moins un des deux choix dans quarante-huit réponses sur soixante-neuf (soit 7/10). Cette conception globale est décrite par : *nonCOP*, *AC*, *nonV* et *P*. Et cette conception globale est la seule qui résulte des deux choix dans douze réponses sur soixante-sept (presque 1/5). Ainsi :

*Pour près de sept enseignants sur dix, la preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours, elle s'apprend dans un contexte, où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité, on suit un « modèle de rédaction donné », qui montre l'enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse/règle/conclusion. Et pour presque un enseignant sur cinq, la preuve n'est conçue que sous cet aspect.*

[48] Une preuve répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, on ne peut démontrer si l'on n'entre pas dans ce type de rationalité.

# CHAPITRE 5
## LES MANUELS ET LES PROGRAMMES SUR LA PREUVE

*« Celui qui n'a égard en écrivant qu'au goût de son siècle songe plus à sa personne qu'à ses écrits : il faut toujours tendre à la perfection, et alors cette justice qui nous est quelquefois refusée par nos contemporains, la postérité sait nous la rendre. »*
*(La Bruyère, Les caractères)*

L'étude des manuels constitue un deuxième moyen que nous avons choisi pour accéder aux conceptions des enseignants sur la preuve[49], et ceci à double titre. D'une part, ce sont des enseignants qui sont auteurs des manuels. D'autre part, le choix d'un manuel est déterminant pour la conduite du cours par la majorité des enseignants qui, souvent, ne reviennent pas aux documents officiels et font confiance aux auteurs des manuels. Ceux-ci sont des intermédiaires entre les professeurs de terrain et la noosphère. Cependant s'ils ont étudié les programmes et les documents d'accompagnement, ils ont aussi dû répondre à certains critères imposés par les éditeurs (qui sont issus des résultats d'enquêtes auprès des enseignants).

Cette étude des manuels est développée en relation étroite avec les programmes et les documents d'accompagnement. Les programmes officiels (en vigueur, à la rentrée 2006 en classe de cinquième, à la rentrée 2007 en classe de quatrième) mettent l'accent sur la preuve (ce mot même est utilisé), sur la résolution de problèmes, sur l'expérimentation, sur le choix de situations d'apprentissage où l'enjeu de vérité est réel. Ils prônent une initiation plus précoce à la démonstration que les programmes antérieurs, au cycle central du collège (classes de cinquième et quatrième). C'est la raison pour laquelle nous concentrons notre étude sur des manuels relatifs à ces deux classes. Comme nous allons le voir, ces programmes, et surtout les documents d'accompagnement, sont rédigés, sur certains points, en réaction contre des abus flagrants, visibles dans les manuels des éditions précédentes, et, par suite, dans les pratiques des enseignants. Certaines collections ont radicalement évolué, d'autres sont restées conformes à certaines conceptions sur la preuve, même si celles-ci renforcent les *malentendus*[50] et conduisent finalement à des contrats non conformes aux documents officiels.

Sur ce plan de l'entrée dans la preuve, nous analysons douze manuels de collège, relatifs aux programmes cités, répartis en six collections :

- Collection Diabolo, édition Hachette Education : trois auteurs communs aux deux niveaux, Maths 5e, 2006 (sept auteurs) & Maths 4e, 2007 (quatre auteurs) ;

[49] Nous rappelons que nous nommons ainsi, tout au long de notre travail, les conceptions des enseignants sur la preuve, son enseignement et son apprentissage.

[50] Ce mot est défini au chapitre 7.

• Collection Phare, édition Hachette Education : cinq mêmes auteurs pour les deux niveaux,
Mathématiques 5e, 2006 & Mathématiques 4e, 2007 ;

• Collection Triangle, édition Hatier : quatre mêmes auteurs pour les deux manuels,
mathématiques 5e, 2006 & mathématiques 4e, 2007 ;

• Collection Prisme, édition Belin : trois auteurs communs aux deux manuels, math 5e, 2006 (cinq auteurs) & math 4e, 2007 (six auteurs) ;

• Transmath, édition Nathan : six mêmes auteurs pour les deux niveaux, Transmath 5e, 2006 & Transmath 4e, 2007 ;

• Edition Bréal : trois auteurs communs aux deux manuels,
Maths 5e, 2006 (sept auteurs) & Maths 4e, 2007 (huit auteurs).

Pour cette analyse nous nous référons à onze composantes locales de conception, parmi celles que nous avons déjà décrites au chapitre 3. Nous les rappelons dans ce tableau :

| *Désignation* | *Description de la composante de conception* |
|---|---|
| *AC (application du cours)* | *La preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.* |
| *nonCOP (non centration sur l'objet preuve)* | *L'apprentissage de la preuve se réalise dans des situations qui utilisent le cours, dans des situations qui mettent en jeu des connaissances qui ne sont pas élémentaires, occultant de fait l'apprentissage de la preuve (ses fonctions de validation et d'explication).* |
| *FM (fichier-méthodes)* | *Une preuve se construit à partir des stratégies courantes vues dans le cursus secondaire, elle repose sur un corpus de connaissances construit et bien identifié dans lequel il n'y a qu'à puiser.* |
| *G (géométrie)* | *La preuve s'apprend dans le cadre de la géométrie plane.* |
| *P (pas)* | *Une preuve est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse-règle-conclusion. La preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.* |
| *R (rationalité)* | *Une preuve répond à des critères de raisonnement, de logique, qui sont propres aux mathématiques, on ne peut démontrer si l'on n'entre pas dans ce type de rationalité.* |
| *SExp (statut reconnu à l'expérimentation)* | *L'expérimentation, soit l'étude d'exemples, la formulation de conjectures, l'invalidation de certaines d'entre elles, l'ébauche de preuve, a un statut reconnu, une place dans l'écrit qui correspond à une preuve.* |
| *nonSExp (statut non reconnu à l'expérimentation)* | *On s'approprie un problème nouveau par l'expérimentation sur des exemples, à partir desquels on essaie d'identifier des régularités, ainsi que les condition de ces régularités, mais ceci doit rester dans le domaine privé et n'a pas de statut reconnu dans l'écrit relatif à la preuve.* |

| | |
|---|---|
| *T (tout est écrit)* | *Une preuve est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.* |
| *TP (tâches préalables)* | *L'apprentissage de la preuve se prépare par des tâches préalables telles que le repérage d'une liste d'hypothèses à partir d'un texte donné, des conditions d'applications d'un théorème à partir d'une figure donnée, le codage d'une figure…, tout ceci en dehors de tout projet de preuve.* |
| *V (enjeu de vérité)* | *Une preuve est destinée à établir la vérité d'un résultat, elle a pour fonction essentielle de valider et de réduire le doute.* |

## 1. L'enjeu de vérité, le doute[51] sont peu présents dans les manuels

Si l'on veut réduire le doute, il faut d'abord le créer.

Peut-on douter si l'on est confronté à un seul cas ? Or la moitié des manuels étudiés propose, dans la partie réservée au cours, des activités où l'on demande à l'élève de faire une conjecture à partir d'un seul exemple : en géométrie, on construit une figure, on est guidé pour constater une propriété sur celle-ci, puis, sans transition, on recopie ou on lit, en la complétant éventuellement (s'il y a des trous) une phrase qui énonce la propriété. Il y a détournement de l'activité de conjecturer. On utilise le mot, mais l'expérimentation est absente, même si parfois ce mot figure dans le titre. C'est le cas en 5e par exemple, à propos de l'existence du centre de gravité et de l'orthocentre d'un triangle : pour *Bréal 5e* page 154, pour *Prisme 5e* page 163, pour *Transmath 5e* page 187, qui affichent le mot d'expérimentation, alors qu'elle est demandée sur un seul cas.

Et même en 4e, certains manuels reprennent cette démarche pseudo-expérimentale, alors que les élèves de 5e ont, suivant le programme officiel, déjà dû être initiés à la preuve. On la trouve dans *Diabolo 4e* page 111, à propos du lien entre tableau de proportionnalité et points alignés dans un repère. De même dans *Prisme 4e* page 103, à propos de ordre et addition, il est toutefois précisé qu'une démonstration est proposée en exercice. On conjecture aussi sur un exemple dans *Phare 4e*, pages 24, 35, à propos de l'égalité de deux quotients, de l'égalité des produits en croix, de l'addition de deux fractions, page 103 aussi concernant ordre et addition.

Le programme demande pourtant, dans l'introduction pour le cycle central :

*Le travail expérimental (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de logiciels) permet d'émettre des conjectures. La résolution de problèmes vise à donner du sens aux connaissances travaillées.* (B.O. hors-série n°6, du 19 avril 2007)

Or ce travail expérimental prôné par le programme est absent puisque le doute n'est pas possible. La contradiction avérée entre cette démarche pseudo-expérimentale et « l'acquisition de méthodes et des modes de pensée caractéristiques

[51] Ce qui renvoie à la composante *V* du tableau précédent, qui est donc peu présente dans les manuels.

des mathématiques » (B. O. n°6 du 19 avril 2007) est renforcée par l'absence de statut donné aux énoncés que l'on tire, dans beaucoup de manuels, des observations effectuées sur quelques cas. Ainsi dans les manuels de 5e précédemment cités, on ne démontre pas l'existence de l'orthocentre ou du centre de gravité (ceci est recommandé par le programme officiel), mais on ne donne même pas de statut à cette constatation : on ne dit pas si c'est une conjecture, on ne dit pas qu'il reste à la démontrer, même si on ne le fait pas, elle est reprise dans le cours comme une propriété, sans qu'il soit dit que l'on admet ce résultat. L'introduction du programme officiel pour le cycle central précise cependant clairement que :

[...] *l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis.*
[...] *Les élèves sont conduits à distinguer conjecture et théorème, à reconnaître les propriétés qui sont démontrées et celles qui sont admises.*
(B.O. hors-série n°6, du 19 avril 2007)

Cette absence d'explicitation du statut des énoncés, contraire à celle qui est recommandée dans le programme, est reprise en classe de quatrième. *Prisme 4e*, page 27, demande de démontrer que des quotients sont égaux en utilisant une conclusion établie précédemment par *observation* : on a *observé* que l'on ne changeait pas un quotient en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre relatif non nul, et on l'utilise pour démontrer ensuite l'égalité de quotients donnés. De même, on observe, puis on conclut, dans le chapitre sur les nombres relatifs de *Bréal 4e*, pages 6 et 7, alors que les premières pages du manuel proposent une « initiation à la démonstration », donnant notamment les définitions de *conjecturer* et de *prouver*.

En classe de quatrième, la preuve est davantage présente dans les manuels, mais la motivation à prouver demeure encore absente, dans au moins deux manuels, même en géométrie (en général, deuxième partie des manuels de 4e) : *Diabolo 4e* page 170 demande encore une conjecture sur un seul exemple à propos du cercle circonscrit à un triangle rectangle ; il en est de même pour *Phare 4e* page 166. Certains manuels se démarquent toutefois par rapport aux précédents sur ce sujet, faisant naître le doute par une expérimentation plus poussée : *Bréal 4e* page 182, *Transmath 4e* page 205, *Triangle 4e* page 198 demandent une expérimentation sur au moins trois triangles, *Prisme 4e* page 235 propose une expérimentation et un questionnement plus larges à l'aide d'un logiciel.

Le doute peut aussi être suscité par un questionnement sur l'existence de toute une classe d'objets qui vérifient telle propriété constatée sur quelques exemples. Ainsi procèdent quelques manuels qui mettent en évidence le quantificateur universel « quel que soit… » dans les questions ou les propositions des exercices « vrai/faux ». Cela permet non seulement de restaurer une partie du doute sur la conjecture à prouver, mais aussi de lever l'ambiguïté[52] de certaines phrases où l'on utilise « un » : s'agit-il d'un objet représentatif de toute une classe ou bien d'un élément particulier ? C'est ce que fait *Triangle 4e*, qui demande page 144 :

[52] Nous y revenons dans le chapitre 7, intitulé « Les malentendus ».

*Pour chacune des phrases suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.*
*(1) Quel que soit l'entier choisi, s'il est inférieur à 135 alors il est inférieur à 133.*
[…]
*(2) Quel que soit le quadrilatère choisi, s'il a des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.* (Triangle 4e p 144)

Ce même type de travail destiné à envisager la généralité est repris pour présenter la *première démonstration*, page 145 (le livre du maître recommande d'aborder ce chapitre en tout début d'année) :

*EFGH est un losange. Soit (d) une droite perpendiculaire à (EG) qui passe par E. Les droites (d) et (FH) sont-elles toujours parallèles quel que soit le losange tracé au départ ?*
[…] (Triangle 4e p 145)

Cependant les quantificateurs n'apparaissent plus dans la suite des chapitres de géométrie de ce manuel.

Le quantificateur universel est aussi précisé dans *Transmath 4e* dans la première démonstration proposée, relative au calcul littéral (page 25). Il s'agit de « démontrer qu'un nombre relatif quelconque et son opposé ont le même carré. ». Par contre, aucun quantificateur n'est précisé en géométrie, ni dans les exercices classiques, ni dans les « vrai/faux ». Il l'est davantage en calcul littéral où l'on trouve des exercices comme le suivant, page 101 :

[…] *a) Vérifier les égalités : $2^3 - 2 = 1 \times 2 \times 3$, $3^3 - 3 = 2 \times 3 \times 4$, $4^3 - 4 = 3 \times 4 \times 5$, $5^3 - 5 = 4 \times 5 \times 6$.*
*b) Quelle formule générale suggèrent les calculs précédents ? Démontrer que cette formule est exacte pour tous les nombres relatifs.* (Transmath 4e p 101)

Le doute, moteur de la preuve, est présent en tant que tel dans le document d'accompagnement des programmes de collège relatif à la géométrie :

*C'est en travaillant, par exemple, des situations construites sur des doutes « visuels »* [...], *plutôt qu'en appliquant de façon immédiate un théorème, que l'élève comprendra les nouvelles règles du jeu impliquées par les situations de preuve en géométrie. Plus généralement, ce n'est pas en étant confronté à des situations d'une grande pauvreté que l'on peut appréhender vraiment la nécessité d'une preuve, ni d'ailleurs en résolvant de manière répétitive des exercices-types* (Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007)

Or si l'on met en regard de cet extrait les premières démonstrations proposées par chacun des manuels de quatrième, autres que les deux précédemment cités, on constate à nouveau le décalage.

Pour sa première démonstration, *Bréal 4e* propose, à la première page du manuel, l'exercice suivant (une figure accompagne l'énoncé) :

*ABC est un triangle tel que AB = 3 cm, AC = 4,2 cm et BC = 2,3 cm. Le point D est tel que C est le milieu de [AD] et le point E est le symétrique de B par rapport à C. Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles* (Bréal 4e page de couverture)

Il est dit que l'on recherche des informations dans l'énoncé, c'est-à-dire que l'on recopie l'énoncé, sauf la phrase « démontrer que… », en allant à la ligne entre chaque donnée, puis on dresse un catalogue de propriétés qui permettent de

démontrer que des droites sont parallèles, enfin on rédige en suivant le modèle « on sait que… or… donc… ». Comment un élève qui suit ces recommandations peut-il appréhender l'idée de preuve ? Où est l'enjeu de vérité ? Sans parler du formalisme imposé au départ, point sur lequel nous revenons plus loin.

La première démonstration qui apparaît dans *Prisme 4e* se trouve en exercice n°80 page 22. Il s'agit de démontrer que « l'opposé d'une somme de deux termes est égal à la somme des opposés des termes de cette somme ». On remarquera que l'on ne précise même pas de quels nombres on parle et que l'utilisation de « deux » entretient l'ambiguïté entre « deux quelconques » et « deux particuliers ». La partie expérimentale qui précède cette démonstration est proposée dans un exercice, cinq pages avant. La démonstration donnée est découpée en deux questions : il suffit de répondre « –1 » à la première, et la seconde consiste à compléter une ligne d'égalités successives avec des trous. La démarche de preuve est le seul fait du rédacteur de l'exercice, l'élève ne peut y prendre part, il se contente de suivre le modèle et n'a aucune initiative à prendre. Le document d'accompagnement insiste pourtant sur le point de vue contraire.

Enfin, au lieu de susciter le doute, certains manuels contiennent des injonctions à prouver. Les premières pages de *Phare 5e* (pages 9 à 12) sont consacrées à une initiation à la démonstration. La démonstration, introduite en géométrie, répond à l'affirmation « Voir ne suffit pas, il faut justifier. » La première fois où l'on rencontre le mot de démonstration, c'est dans la phrase suivante (c'est l'auteur qui souligne en gras) :

*Les codages mis à part,* ***voir*** *quelque chose* ***sur un dessin ne suffit pas*** *pour justifier une réponse. Un dessin n'est pas une démonstration mais seulement une illustration.*
(Phare 5e p 9)

Ainsi, beaucoup de manuels de 5e et 4e, dans la partie cours, pratiquent une démarche pseudo-expérimentale qui consiste à observer une propriété sur un exemple. Celle-ci est parfois démontrée malgré le peu d'enjeu de vérité. Mais bien plus souvent, la constatation devient propriété, sans qu'il ne soit évoqué la nécessité de la prouver. Les premières preuves proposées par certains manuels sont davantage présentées comme des réponses à des injonctions à rentrer dans un nouveau contrat que comme des moyens de réduire le doute engendré par une expérimentation conséquente ou une question pertinente. Sur ces points, les manuels ne suivent pas ce que préconisent les programmes.

## 2. Les manuels proposent peu de travail concernant l'entrée dans la rationalité mathématique[53]

Dès son introduction pour le cycle central, le programme stipule que :

*Sans qu'il soit possible (ni nécessaire) d'identifier dans chaque partie du programme le développement d'attitudes spécifiques, on peut souligner que l'étude des mathématiques au cycle central permet aux élèves d'appréhender l'existence de lois*

[53] La composante de conception *R* (Rationalité) est peu présente dans les manuels.

*logiques et développe* [...] *le respect de la vérité rationnellement établie, l'esprit critique* [...] (B.O. hors-série n°6 du 19 avril 2007, p 32)

Par ailleurs, dans le B.O. hors-série n°5, du 25 août 2005, on peut lire une description de la *démarche d'investigation*, recommandée dans l'introduction des programmes de collège commune à l'ensemble des disciplines scientifiques, démarche au cours de laquelle on demande que les élèves puissent débattre de la validité des propositions avancées :

[...] *confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective de preuves.* (B.O. hors-série n°5, du 25 août 2005)

La question qui se pose : comment permettre aux élèves d'être en mesure de débattre de la validité des propositions avancées par d'autres ? Il faut pour cela leur donner une certaine responsabilité sur le plan scientifique, sans laquelle aucun débat scientifique n'est possible. Il faut qu'ils puissent reconnaître le vrai et le faux en mathématiques. Sur ce point rien n'est réellement explicité dans les programmes, ni même dans les documents d'accompagnement. Et nous allons voir que certains manuels en arrivent même à des contresens sur la notion de contre-exemple.

Le programme de 5$^{e}$ comporte « tester une égalité ». Ce pourrait être l'occasion d'introduire le faux en mathématiques et la preuve du faux (le contre-exemple). C'est ainsi que nous comprenons ce commentaire du programme :

*La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner* (B.O. hors-série n°6 du 19 avril 2007, p 39)

*Bréal 5$^{e}$* s'engage dans cette voie : dans le cours, il définit, page 115, deux expressions littérales égales et introduit le mot de contre-exemple, mais sans le définir, mot que l'on retrouve encore dans un exercice où l'on teste des égalités, page 121, mais plus dans le reste du manuel. Ce n'est pas le point de vue adopté par *Prisme 5$^{e}$* qui n'évoque le contre-exemple qu'en géométrie, page 159, sans le relier à la vérification qu'un nombre ne satisfait pas à une égalité :

*Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Par exemple, l'affirmation : « Si les quatre côtés d'un quadrilatère ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un carré » est fausse. Le quadrilatère ci-contre a ses quatre côtés de même longueur, mais ce n'est pas un carré.* (Prisme 5$^{e}$ p 159)

Certains manuels proposent une définition incorrecte d'un contre-exemple. Ainsi *Diabolo 5$^{e}$* page 219, donne :

*Un contre-exemple est un exemple qui prouve qu'un énoncé est faux.* (Diabolo 5$^{e}$ p 129)

Tout d'abord, il est faux de dire qu'un contre-exemple est un exemple. Si l'on considère une implication valable dans un ensemble $E$, du type, pour tout $x$ élément de $E$, si A($x$), alors B($x$), où A($x$) et B($x$) sont des propositions, un contre-exemple est un élément $x_0$ de E tel que A($x_0$) est vrai et B($x_0$) est faux, alors qu'un exemple est un élément $x_0$ de E tel que A($x_0$) et B($x_0$) sont tous deux vrais. De plus cette définition de *Diabolo 5$^{e}$* ne définit nullement ce qu'est un contre-exemple, puisque le faux n'est

pas défini. Elle entretient le malentendu[54] qui va nécessairement s'installer quand les élèves vont produire de « faux contre-exemples », que nous préférons appeler des *hors-sujet*, c'est-à-dire des éléments $x$ de $E$ pour lesquels A($x$) est faux. La même erreur se retrouve dans *Phare 4e* qui propose une page complète, page 13, intitulée « Je prouve à l'aide d'un contre-exemple » :

*On considère une proposition du type : « Si partie 1, alors partie 2. »*
*Pour prouver qu'une proposition est vraie, il faut faire une démonstration.*
*Pour prouver qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un exemple pour lequel elle est fausse. Un tel exemple est appelé contre-exemple.* (Phare 4e p 13)

Par ailleurs certains manuels abordent un travail sur la rationalité mathématique en continuité avec le fonctionnement du quotidien. Ainsi *Phare 5e*, page 11, propose un travail sur le vrai et le faux d'une implication directe et de sa réciproque, en puisant certains exemples dans le langage courant, notamment dans certaines règles de grammaire, où l'on dit souvent que l'exception confirme la règle. Ce manuel ne parle pas de contre-exemple. Il propose, page 33, une « recette » pour tester si une égalité est vraie. Difficile pour un élève de comprendre ce qu'est une implication fausse, un contre-exemple, d'entrer dans la rationalité mathématique, de comprendre qu'elle est différente du fonctionnement du quotidien[55].

Cependant certains manuels sont plus clairs sur la notion de contre-exemple. Ainsi *Triangle 5e* propose comme « propriété », dans le cours, page 167 :

*Contre-exemple*
*Propriété : Pour un énoncé de la forme « Si… alors… », un contre-exemple est un cas qui vérifie la condition et qui ne vérifie pas la conclusion.* (Triangle 5e p 167)

De même *Transmath 5e* introduit le faux et la preuve du faux, par différents exercices, dont le premier, qui évoque le contre-exemple, se trouve au deuxième chapitre, sur les nombres en écritures fractionnaires : l'exercice 101 page 44 est intitulé « Conjecture : vraie ou fausse ? ». Il propose trois exemples numériques en écriture fractionnaire de valeurs de ($a$ , $b$), demande le calcul de $a + b$ et de $a\ b$ pour ces valeurs ; on trouve le même résultat, on peut donc conjecturer que $a + b = a\ b$ pour tout couple de fractions ($a$ , $b$) ; l'exercice demande de « démontrer que cette conjecture est fausse » et on lit l'encadré suivant :

*Pour prouver qu'une propriété est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire ici deux fractions a et b telles que* $a + b \neq a\ b$. (Transmath 5e p 44)

On retrouve le contre-exemple à l'exercice 112 page 68, où un texte à trous propose une rédaction d'un contre-exemple à la conjecture que la somme d'un nombre positif et d'un nombre négatif est toujours négative. Dans la suite du manuel, on retrouve le contre-exemple en exercice, sur des calculs de pourcentages (page 102), puis des exercices de type « vrai/faux » en géométrie, qui figurent dès le premier chapitre de *Transmath 4e*.

---

[54] Nous retrouvons ici le problème de la quantification implicite des énoncés conditionnels (Durand-Guerrier 2005), dont nous reparlerons au chapitre 7, intitulé « Les malentendus ».

[55] Ce point sera développé dans le chapitre 7.

S'ils permettent l'entrée dans la rationalité mathématique, les exercices de type « vrai/faux », présents dans la plupart des manuels, entretiennent le flou sur l'utilisation des quantificateurs. Par exemple, on demande de se prononcer sur le vrai ou le faux de « un losange est un carré ». Or une telle phrase peut se comprendre de deux façons suivant le sens que l'on donne à « un », particulier ou général. On note l'absence d'explicitation à ce sujet dans la plupart des manuels. Nous y reviendrons au chapitre 7. Voici un autre exemple, qui montre le manque de clarté au sujet du vrai/faux en mathématiques : *Prisme 4e* demande, page 62, de « démontrer que l'égalité A = B n'est pas vraie pour tout nombre *y*. » Comment un élève peut-il comprendre cette phrase ? Il amalgame presque sûrement « n'est pas vraie » à « est fausse », il va prendre une valeur de *y* pour prouver quelque chose qui comporte « pour tout nombre *y* » ; il va retenir qu'un exemple sert à prouver que c'est vrai et un contre-exemple à prouver que c'est faux.

Enfin un exemple qui montre la présence de réelles contradictions dans certains manuels, notamment sur le plan de la démarche mathématique. Il est tiré de *Phare 4e*, qui consacre ses premières pages à une « initiation à la démonstration ». A la page 12, intitulée « Je justifie à l'aide d'une démonstration », on voit imposé le formalisme usuel du pas de démonstration :

*Pour démontrer un résultat, on utilise le raisonnement suivant :*
*ETAPE 1 : on écrit* ***les données utiles*** *(écrit en vert dans le manuel) à l'utilisation de la propriété choisie.*
*ETAPE 2 : on cite* ***la propriété*** *(écrit en bleu dans le manuel).*
*ETAPE 3 : on écrit* ***la conclusion*** *(écrit en rouge dans le manuel).* (Phare 4e p 12)

Il est ensuite proposé un exercice dont la dernière question est « Que peut-on dire des trois hauteurs d'un triangle ? ». A côté de cette question, figure la remarque suivante : « Je me rappelle que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. » On demande ainsi à l'élève de déduire un résultat d'un autre, simplement par analogie, sans lien de raisonnement.

Ainsi, mises à part les collections *Transmath* et *Triangle*, qui proposent un travail sur l'entrée dans la rationalité mathématique, en mettant en évidence certaines de ses spécificités par rapport au fonctionnement du quotidien, les autres manuels entretiennent le flou sur le vrai et le faux en mathématiques. Certains d'entre eux ne sont ni clairs, ni cohérents sur le plan de la démarche mathématique.

### 3. Le formalisme est imposé dès le début de l'apprentissage[56]

Par rapport au formalisme, le programme (B.O. hors-série n°6 du 19 avril 2007) s'inscrit en réaction par rapport au contrat usuel[57]. Il distingue l'apprentissage de la preuve et celle de l'écriture de preuve :

---

[56] Les composantes de conception *P* (Pas) et *T* (Tout est écrit) sont très présentes dans les manuels.

[57] le contrat usuel relatif à la preuve en vigueur au collège, que nous avons décrit au chapitre 2.

[...] *deux étapes doivent être distinguées : la recherche et la production d'une preuve, d'une part, la mise en forme de cette preuve, d'autre part. Le rôle essentiel de la première étape (production d'une preuve) ne doit pas être occulté par des exigences trop importantes sur la deuxième (mise en forme de la preuve). Pour cela, la responsabilité de produire les éléments d'une démonstration doit être progressivement confiée aux élèves. A partir des éléments qu'ils fournissent, la mise en forme peut, elle, être réalisée collectivement, avec l'aide de l'enseignant.* (B.O. hors-série n°6 du 19 avril 2007)

Le document d'accompagnement des programmes de collège, relatif à la géométrie, précise par ailleurs l'influence de la rédaction de l'énoncé (problème ou exercice guidé) sur la prise d'initiative de l'élève dans la preuve et le travail d'écriture qui l'accompagne :

*Aussi convient-il d'éviter de qualifier de « problèmes » les supports d'enseignement déclinés en une succession de petites questions bien délimitées (exercices d'application et/ou à résolution guidée). De fait, dans ce cas, l'essentiel de la démarche est réalisée en amont par le rédacteur de l'énoncé et l'élève, dans le meilleur des cas, n'en découvrira l'unité que dans le cadre d'une synthèse, indispensable mais pas toujours présente. Il en est de même des fiches à trous ou des canevas (déductogrammes) imposés a priori, qui donnent un modèle de raisonnement mais ne permettent pas d'en construire un. De plus, les exercices guidés ou les fiches à trous empêchent de sortir du cadre et de la démarche prévus par l'enseignant, donc d'explorer plusieurs pistes et de faire émerger pour les confronter diverses méthodes.* (Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p 14)

Plus loin, il insiste sur la nécessité de faire évoluer l'écrit vers celui d'une preuve, en partant des textes des élèves, mais en évoquant seulement le *début du collège* :

*Au début du collège, tout formalisme dans la rédaction est évité : l'écrit s'appuie sur les formulations proposées par les élèves, du moment qu'elles sont acceptables du point de vue du sens, même si celles-ci ne satisfont pas aux canons d'une « bonne rédaction ».* (Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p 15)

On peut comprendre qu'éviter tout formalisme ne concerne que la classe de sixième et le début de cinquième et que le recours au formalisme se situe après le *début du collège*.

Ceci pourrait expliquer que beaucoup de manuels imposent un formalisme dès la 5e, notamment en géométrie. On pourrait dire, si l'on compare les manuels des éditions précédentes, que ce contrat formel relatif à la preuve s'est déplacé de la 4e vers la 5e : « on commence plus tôt ». Ainsi *Triangle 5e*, bien que proposant des preuves sans formalisme donné, en calcul littéral, dans la première partie du manuel, impose fortement un modèle de rédaction dans son chapitre consacré à une initiation au raisonnement déductif, page 163. Les premières activités proposées dans ce chapitre concernent d'une part, les énoncés du type « si… alors… », d'autre part, les *chaînons déductifs*. Il est demandé de compléter des phrases à trous composées sur le modèle « on sait que… or… donc… », sans même qu'il ne soit proposé de faire une démonstration, ni même qu'une question ne soit posée. Voici un exemple, l'énoncé débute ainsi (page 165) :

*Compléter les chaînons déductifs suivants :*
*a) On sait que « (AB) ⊥ (CD) et (EF) ⊥ (CD) ».*

*Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.*
*Donc …*
*b)…*
(Triangle 5e p 165)

Ce type d'exercices est très répandu dans le chapitre sur les quadrilatères : on en voit huit en trois pages successives (pages 216 à 218), tous sur le même modèle « on sait que… or… donc… ». Il s'agit bien d'entraîner les élèves à suivre un modèle avant même qu'ils ne se demandent ce qu'est une démonstration et ne comprennent son rôle en mathématiques. Ou alors les auteurs pensent qu'à ce stade, les élèves savent démontrer ? Ce manuel est pourtant l'un des rares à permettre un travail important sur l'entrée dans la rationalité mathématique.

*Triangle 4e* contient deux chapitres consacrés à la démonstration, l'un en lien avec le calcul littéral, l'autre avec la géométrie. L'aspect formel de la démonstration ressort nettement : il y figure des modèles de rédaction pour différents types de questions, démontrer une conjecture sur les nombres, page 33, calculer une longueur, page 164, démontrer une propriété géométrique, page 165. A la page 150, il est proposé une fiche-méthode intitulée « Contrôler une démonstration », où figure le « On sait que… Si … alors… Donc… » avec des questions relatives à la constitution du chaînon. Le livre du maître, page 327, précise les exigences au niveau de la rédaction des démonstrations en géométrie, qui ne sont d'ailleurs pas les mêmes en calcul littéral :

*Pour notre part, nous exigeons que les élèves citent les propriétés de géométrie qu'ils utilisent dans une démonstration en fin de 4e. En 3e, on accepte qu'ils ne le fassent plus pour certaines propriétés très utilisées (propriétés du parallélogramme, des droites parallèles). Mais on insiste pour qu'ils citent bien les conditions et la conclusion du chaînon.*
(Triangle 4e, édition réservée au professeur, p 327)

Ainsi demander des preuves en calcul littéral sans insister sur le côté formel, puis imposer fortement un formalisme en géométrie est une ligne de conduite adoptée aussi par plusieurs autres manuels, dont *Prisme 5e*. Celui-ci contient, page 152, une fiche « Savoir-faire », intitulée « Comment rédiger une démonstration à partir d'une figure codée ». On ne se demande pas si le codage doit être ou non en rapport avec le projet de preuve. On résout un exercice où il s'agit de démontrer qu'un point appartenant à la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de celui-ci, puis on introduit une liste de questions destinées à apprendre à rédiger une démonstration, qui se rapportent en premier aux données, ensuite à ce que l'on veut démontrer, enfin aux propriétés à utiliser. On remarquera l'inadéquation entre l'organisation de ce questionnement et l'attitude de preuve : il est clair qu'il est plus pertinent de considérer d'abord ce qu'il faut prouver avant de s'intéresser aux données. Mais ici c'est le côté formel qui l'emporte sur le sens de ce que l'on est en train de faire : le manuel demande d'écrire d'abord les données. On voit apparaître un tableau en trois colonnes : d'abord, la colonne « on sait que… », puis la colonne « on utilise la propriété », enfin la colonne « la conclusion ».

Des auxiliaires pédagogiques tels que ce *tableau en trois colonnes* ou les *chaînons déductifs à trous*, souvent sans question préalable, comme les proposent *Triangle* 5e, *Prisme 5e*, *Diabolo 5e*, sont bien présents dans les manuels de 5e, donc avant que la preuve ne prenne sens pour les élèves. On trouve aussi des *schémas*

*déductifs* (déductogrammes), inspirés des travaux de Duval. Par exemple, *Prisme 4e* propose huit schémas déductifs en trois pages (pages 174 à 176) dans le chapitre consacré à la démonstration en géométrie. La fréquence de ces auxiliaires sur quelques pages, comme la présence signalée dans *Triangle 5e* de huit chaînons déductifs à trous, montre nettement qu'il s'agit d'imposer un cadre formel par répétition. Il n'est jamais demandé de transcrire un texte de preuve en un schéma, la combinaison de ces deux tâches, dans un sens ou dans l'autre, pouvant permettre un travail sur l'aspect formel de la preuve par changement de registres sémiotiques. Ce qui est privilégié, c'est que les élèves parviennent à une production, même au prix d'une absence totale de sens, comme l'illustre le texte à trous qui figure à la page 153 de *Prisme 5e* : un élève peut parfaitement remplir les trous sans rien comprendre à ce qu'il prouve. Il suffit qu'il regarde les mots situés autour du trou à compléter ou qu'il se réfère à ce qu'il a l'habitude d'entendre par association de mots :

*Les points A et B appartiennent à un même ……. de centre O.*

On est sûr qu'il faut écrire « cercle » dans le trou. Un élève de 5e connaît-il un autre objet qui ait un centre ?

*Or si deux points appartiennent à un même cercle, alors ils sont situés à la même ……. de son centre.*

Le mot est ici plus difficile à trouver. Mais si on lit la phrase suivante :

*Par conséquent, les points A et B sont situés à la même distance du point O ;*

Il devient évident que l'on va écrire le mot de « distance » : on lit les mêmes mots « à la même » qui précèdent le trou et « de » qui le suit.

*Par conséquent, les points A et B sont situés à la même distance du point O ; donc : OA =…*

Ici on voit deux lettres sur le même plan dans le début de la phrase « *A* et *B* » et on a compris que le point *O* joue un rôle un peu particulier, on peut écrire « *OB* » dans le trou, sans chercher à savoir pourquoi sur le plan mathématique. Et de même dans la suite à compléter, le mot à écrire dans chaque trou est donné dans la phrase suivante, et, de plus, peut être trouvé par association d'idées, comme « médiatrice » dans la deuxième phrase :

*Ainsi, le point O est ……. des extrémités A et B du segment [AB].*
*Or, si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la ……. de ce segment.*
*Par conséquent le point ……. appartient à la médiatrice du segment [AB].*
(Prisme 5e p 153)

Cette tâche développe des compétences chez les élèves, liées au vocabulaire, à la lecture, à la copie, à la reconnaissance de forme, mais ne lui apprend sûrement pas à démontrer, ni même à comprendre ce qu'est une démonstration. Quel est le type d'activité (au sens défini dans le chapitre 2) de l'élève qui remplit ces trous ? Elle peut être mathématique, mais elle peut être tout autre : dans la plupart des cas, l'élève qui fait cet exercice cherche à le faire le plus rapidement possible, une fois la tâche accomplie, il ne peut pas savoir (comment le pourrait-il ?) qu'il devrait avoir compris autre chose que trouver le bon mot.

Enfin tous les autres manuels examinés, sauf ceux de la collection *Transmath*, reprennent cette ligne de conduite, fondée sur la répétition d'exercices formels, qui font suite à une première démonstration sur des sujets qui présentent un faible enjeu de vérité. Ainsi *Bréal 5e* présente sa première démonstration en exercice, page 187, comme un texte à trous, sur le modèle « on sait que… or… donc… » ; dans les exercices qui suivent figurent deux textes à trous du même type. *Bréal 4e* prend le même parti en reprenant ce modèle de rédaction dans la première page du manuel. Le formalisme est aussi très présent dans *Diabolo 4e*, page 166, dans *Phare 5e*, dès la page 10 (tout début du manuel), dans *Phare 4e* page 12. *Prisme 4e* distingue les démonstrations à un pas, à deux pas, à plus de deux pas, en donnant pour chaque type, des textes à trous et des schémas déductifs à compléter.

Le document d'accompagnement de la géométrie au collège consacre plus d'une page à l'écrit qui communique la preuve (mais nous en avons déjà cité des extraits) et évoque un autre type d'écrit :

*Un autre volet des apprentissages, en géométrie tout particulièrement, est celui de la formalisation des raisonnements, c'est à dire de la communication de la preuve. Sans ignorer que la phase heuristique est incontournable dans la pratique du raisonnement, il est essentiel de faire travailler les élèves sur son explicitation, et ceci le plus tôt possible, à l'écrit comme à l'oral. Il s'agit, entre autres, de leur faire comprendre qu'une rédaction obéit à des règles de structuration, prenant appui sur les connecteurs de langage de la langue française, sans pour autant qu'il n'y ait qu'un seul modèle admissible.* (Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p 15)

Ce qui est dit sur la « rédaction » n'est pas propre aux mathématiques, mais concerne toute argumentation rédigée, dans quelque discipline que ce soit. Il est question d'un apprentissage sur le long terme :

*Le travail sur les formulations des rédactions ne fait pas l'objet d'un chapitre particulier mais s'effectue au coup par coup autant que de besoin. L'un des objectifs est d'améliorer tout au long du cursus en collège (et au lycée !) la fluidité de l'écriture sans en altérer la précision.* (Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p 16)

Les exemples qui accompagnent les lignes précédentes ne concernent cependant pas du tout la phase heuristique, ni la transition avec l'écriture de la preuve formalisée, mais seulement cette dernière, et les degrés d'implicite (ce que nous avons appelé les *trous*). Ainsi on peut lire :

*Une difficulté particulière vient du fait que, suivant le niveau, les implicites (conventions liant l'émetteur et le récepteur) varient d'un contexte à l'autre. Par exemple, les formalisations suivantes sont toutes correctes et recouvrent à peu près le même niveau d'implicite :*
*"On sait que ABCD est un parallélogramme. Or, dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. Donc, AB = CD."*
*" ABCD est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. Donc, AB = CD."*
*"Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. On sait que ABCD est un parallélogramme. Donc, AB = CD."*
*"Dans le parallélogramme ABCD, les côtés opposés [AB] et [CD] sont de même longueur."*
*"Les côtés opposés [AB] et [CD] sont de même longueur, car ce sont des côtés opposés dans le parallélogramme ABCD."*
*...*

*D'autres formulations se rencontrent, tout aussi recevables, mais à un degré d'implicite plus élevé :*
*"Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur. Donc, AB = CD."*
*"Dans le parallélogramme ABCD, AB = CD."*
*Il n'est pas question de les repousser. Il s'agit de mettre en évidence l'inconvénient (éventuel !) d'une rédaction aussi condensée. Le niveau d'implicite accepté dans une rédaction est fonction de l'ancienneté de la connaissance et de la maîtrise du raisonnement déductif.* (Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p 15-16)

Cette dernière phrase sous-entend peut-être qu'il ne faut pas laisser d'implicite dans une preuve en début d'apprentissage, autrement dit qu'il faut écrire les *petits pas*, idée que nous avons réfutée au chapitre 1, en disant que les *petits pas* font rester sur place et en montrant qu'ils relèvent de l'arbitraire. Il est par contre incontestable que les formulations proposées pour les pas de raisonnement sont diverses et ne relèvent pas toutes de la règle du contrat usuel « On sait que-or-donc ». La variété de ces façons de rédiger n'est pas visible dans les manuels évoqués précédemment dans ce paragraphe. Le fait qu'une telle liste soit explicitement donnée montre l'étendue du problème par rapport au formalisme et la rigidité du contrat. Les seuls manuels qui se démarquent sont *Transmath 5e* et *Transmath 4e* : la démonstration est abordée dès les premières pages, elle est pratiquée d'un bout à l'autre de ces deux manuels, le style adopté est plus libre.

Ainsi dans cinq collections sur six, le formalisme est imposé sans travail sur la preuve, en géométrie dès la classe de cinquième, et fortement repris en quatrième. Il est par contre très peu présent dans les domaines numérique ou littéral. On pourrait penser que les auteurs des manuels répondent ainsi aux injonctions officielles, puisque les chapitres de calcul littéral ou numérique précèdent ceux de géométrie : on apprend bien d'abord la preuve sans imposer de formalisme, puis on apprend la forme en géométrie. Mais la nette distinction que font les manuels de la preuve en géométrie et de la preuve en dehors de la géométrie ne peut pas permettre à un élève de comprendre qu'il s'agit dans les deux cas d'une activité de preuve qui répond au même objectif : établir la vérité d'un résultat et l'expliquer.

## 4. L'expérimentation[58] précédant l'écriture de preuve

Nous avons déjà abordé le sujet de l'expérimentation, en tant que moyen de montrer l'enjeu de vérité présent dans telle ou telle question mathématique. Nous avons vu que, pour plusieurs manuels, l'expérimentation se réduisait à l'observation d'un exemple. Ainsi *Diabolo 4e*, dans les activités 4 et 5 de la page 111, donne trois tableaux, dont un seul est un tableau de proportionnalité, et demande de conjecturer le lien entre tableau de proportionnalité et points alignés. Dans l'activité 2 page 170, ce même manuel demande de conjecturer, toujours à partir d'un seul exemple, que dans un triangle rectangle, le cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse est circonscrit au triangle.

[58] Expérimentation renvoie aux deux composantes *SExp* (Statut reconnu à l'Expérimentation) et *nonSExp* (Statut non reconnu à l'Expérimentation).

Le travail expérimental en mathématiques est pourtant mis en avant dans les programmes et documents d'accompagnement, comme nous avons vu en géométrie :

*Le travail expérimental (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessins ou de logiciels) permet d'émettre des conjectures.* (B.O. hors série n°6, du 19 avril 2007)

Par ailleurs l'introduction commune aux programmes des disciplines scientifiques recommande d'entraîner les élèves à la pratique de la *démarche d'investigation* :

*La démarche d'investigation scientifique présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre* (B.O. hors série n°5, du 25 août 2005)

Ceci est peu mis en œuvre dans certains manuels. Ainsi *Diabolo 4e*, par exemple, dans les activités préparatoires au cours sur le produit de deux nombres relatifs (page 11), demande des conjectures à partir d'exemples proposés, sur le signe et la valeur absolue du produit de deux nombres relatifs de signes contraires, puis sur le produit de deux entiers négatifs, et on admet ensuite ces conjectures. Puis on vérifie (c'est le terme employé par le manuel) que la conjecture relative au produit de deux entiers négatifs reste vraie pour des nombres décimaux, à la calculatrice ! S'agirait-il d'encourager la validation expérimentale, même en mathématiques ?

Officiellement le travail expérimental ne doit plus rester privé, il doit aussi apparaître à l'écrit (*nonSExp*) comme on le lit dans la description des étapes de la démarche d'investigation, dans le même numéro du B.O. :

[...] *formulations orales ou écrites de conjectures ou d'hypothèses par les élèves ;*
[...] *description et exploitation des méthodes et des résultats : recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment ;*
[...] *communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des questions qui demeurent ...*
(B.O. hors série n°5, du 25 août 2005)

Il est aussi question de « faire travailler les élèves sur l'explicitation » de la phase heuristique, comme il est rappelé dans l'extrait du document d'accompagnement des programmes cité dans le paragraphe précédent, mais on note une coupure dans l'écriture entre l'expérimental et la preuve. L'introduction des programmes pour le collège se borne à énumérer différents types d'écrits :

*Différents types d'écrits*
*Les élèves sont fréquemment placés en situation de production d'écrits. Il convient à cet égard de développer et de bien distinguer trois types d'écrits dont les fonctions sont différentes.*
** Les écrits de type « recherche » (brouillon) qui correspondent au travail « privé » de l'élève : ils ne sont pas destinés à être communiqués, ils peuvent comporter des dessins, des schémas, des figures, des calculs. Ils sont un support pour essayer, se rendre compte d'une erreur, reprendre, rectifier, pour organiser sa recherche. Ils peuvent également être utilisés comme mémoire transitoire en cours de résolution du*

*problème. Si l'enseignant est amené à les consulter pour étudier le cheminement de l'élève, il ne doit ni les critiquer, ni les corriger.*
** Les écrits destinés à être communiqués et discutés : ils peuvent prendre des formes diverses (affiche, transparent...) et doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation, tout en sachant que, le plus souvent, ils seront l'objet d'un échange entre élèves au cours duquel des explications complémentaires seront apportées.*
** Les écrits de référence, élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe, et donc destinés à être conservés.*
(B.O. hors-série n°6 du 19 avril 2007)

Ce texte n'encourage pas explicitement la valorisation d'écrits relatifs à la recherche, puisqu'ils demeurent privés. Le second type concerne des écrits collectifs, le programme reste vague par rapport au troisième. L'existence d'*écrits de recherche* n'est pas établie, comme nous proposons de le faire au chapitre 1, où nous défendons l'idée que leur évolution progressive vers des textes plus formalisés est un moyen d'apprendre à écrire des preuves. Peut-être peut-on considérer que cet *écrit de recherche*, qui contient, à défaut de la résolution complète du problème, la preuve de certains résultats, l'essentiel de la démarche, y compris les preuves du faux (éventuellement dues à une démarche erronée explicitée), fait partie des écrits qui *constituent une mémoire du travail de l'élève* ? Dans les textes officiels relatifs au collège, on constate un vide sur le plan de l'écrit entre l'expérimental pratiqué au brouillon et la preuve rédigée. Par contre, on commence à voir une évolution sur ce plan dans les sujets de baccalauréat de la série scientifique. Ainsi, lors de la session de juin 2008, on lit, dans le sujet de mathématiques de la série S, les phrases suivantes (la première figure dans l'encadré de la première page, chacune des deux autres dans un des exercices) :

[...]. *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.* [...]
[...]
*Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
[...]
*Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.* (Baccalauréat, session 2008, mathématiques, série S).

L'écriture *au brouillon* est reprise dans plusieurs manuels, mais il ne s'agit pas d'une réelle expérimentation. Il s'agit d'écrire un brouillon pour réviser son contrôle en cherchant un exercice mettant en jeu les connaissances du chapitre. Ainsi dans *Bréal 4e*, chaque chapitre comporte une fiche intitulée « Je prépare le contrôle » qui comporte un problème avec une partie « brouillon ». *Bréal 5e* contient une fiche, dans chaque chapitre, qui se nomme « Des conseils pour progresser » : on lit un énoncé d'exercice, une partie de cours en rapport avec l'exercice, une autre qui peut évoquer *l'expérimentation*, mais au sens où l'on va faire un brouillon, et qui s'intitule « Je raisonne », puis un modèle de réponse rédigée. La mise en œuvre, dans ces manuels, des textes officiels, relativement à l'expérimentation, donne de celle-ci une image réductrice, qui ne correspond pas à la phase heuristique décrite par des mathématiciens au chapitre 1 : on n'explore rien de nouveau, puisqu'on révise son chapitre, on n'apprend pas à se concentrer strictement sur le problème.

Parmi les douze étudiés, trois manuels se démarquent, surtout par rapport au contexte de l'expérimentation. *Transmath 5e*, dès la page 24, demande, en exercice, de « faire des essais » dont les premiers sont guidés, et les suivants laissés à

l'initiative de l'élève, avant d'aboutir à une conjecture, puis à une preuve. Dans *Transmath 4e*, toutes les fiches de cours relatives à la démonstration comportent une partie « recherche au brouillon » et une partie « rédaction au propre ». Il en est de même dans *Triangle 4e*, qui demande explicitement une démarche expérimentale dans certains exercices (problème ouvert page 215).

Dans les manuels, autres que les cinq qui viennent d'être cités, rien n'apparaît par rapport à l'expérimentation, ni à l'écrit que l'on peut lui associer, si ce n'est les questions qui figurent dans les activités de cours où l'on demande à l'élève d'observer des propriétés. Cette pratique d'observation, souvent liée à la mesure de longueurs, d'angles…, est d'ailleurs remise en cause par le document d'accompagnement de la partie géométrie du programme :

*D'autre part, s'il convient, ainsi que le préconisent les textes officiels, de mettre les élèves en situation d'expérimenter, il est indispensable de leur proposer des situations qui relèvent d'une véritable démarche expérimentale. Ainsi, l'introduction du théorème de Pythagore se fait souvent à partir d'une activité qui consiste à mesurer les côtés de divers triangles rectangles et à constater la relation* $a^2 = b^2 + c^2$. *Le caractère expérimental de cette approche n'est pas avéré. Il semble en effet impossible pour un non initié de découvrir directement à partir des données relevées la permanence d'une relation entre des carrés de nombres, même avec beaucoup d'intuition* [...].(Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p 14)

Ainsi, si l'on peut reconnaître que le programme du collège met en avant l'expérimentation dans le cours de mathématiques, il existe une coupure, sur le plan de l'écriture, entre le brouillon qui reste privé et la rédaction de preuve. L'expérimentation est peu visible dans les manuels, qui évoquent seulement l'utilisation du brouillon.

## 5. L'apprentissage de la preuve n'est pas centré sur la preuve elle-même, il s'agit de mettre en œuvre les connaissances du cours

Dès son introduction pour le cycle central du collège, le programme évoque l'initiation au raisonnement déductif à travers l'utilisation des propriétés du cours. On ne se centre pas sur l'objet preuve, en tant que moyen de convaincre et expliquer :

*L'initiation au raisonnement déductif permet aux élèves de passer de l'utilisation consciente d'une propriété mathématique au cours de l'étude d'une situation à l'élaboration complète d'une démarche déductive dans des cas simples, dans le domaine numérique comme dans le domaine géométrique.* (B.O. hors-série n°5, du 25 août 2005)

Le programme de 5e affiche clairement que les séquences déductives doivent mettre en œuvre les outils du programme et aussi ceux qui sont acquis depuis la sixième. On réduit l'apprentissage de la preuve à celui de l'écriture d'un texte organisé où figurent des propriétés connues. C'est ce qu'on retrouve dans les manuels. *Prisme 5e* et *Prisme 4e*, par exemple, consacrent un chapitre à la démonstration en géométrie qui ne contient rien d'autre que des fiches récapitulatives de connaissances déjà acquises. Ce dernier affiche clairement ce point de vue, page 163, montrant qu'on est loin de la démonstration qui permet de réduire le doute :

*Pour démontrer en géométrie, les outils dont on dispose sont des définitions et des propriétés.*[…] *La première étape, avant de commencer une démonstration, consiste donc à identifier cette situation afin de choisir l'outil le mieux adapté.* (Prisme 4e p 163)

Les pages du manuel qui suivent ces phrases contiennent dix-sept fiches-méthodes qui commencent toutes par « Pour démontrer que… », comme par exemple : « Pour démontrer que trois points sont alignés ». Tous les manuels étudiés contiennent des fiches-méthodes. Ils mettent tous en avant qu'il faut rechercher, dans le catalogue des propriétés connues, celles qui permettent de prouver ce qui est demandé. Nous identifions cette conception de la preuve comme un obstacle (nous le vérifierons plus loin) à la compréhension de ce que signifie prouver en mathématiques : pour le mathématicien, les connaissances doivent être mises à l'écart pour qu'on puisse voir d'abord le problème. Il faut dire que le document d'accompagnement des programmes de collège relatif à la géométrie prône cette idée de faire des catalogues de propriétés et de figures-clés :

*Parmi les démarches heuristiques conduisant à l'élaboration d'une démonstration, certaines sont identifiables et donc susceptibles d'être construites et travaillées. Il s'agit essentiellement du repérage des figures-clés dans un contexte donné et de la pratique de l'analyse remontante*[59].(Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p 12)

Malgré l'utilisation de l'expression « démarches heuristiques », il ne s'agit pas, à notre sens, d'expérimentation au sens de recherche sur un problème, formulation et éventuellement réfutation de conjectures, il s'agit de repérer des indices menant à l'écriture d'un texte utilisant des propriétés connues : on ne se préoccupe pas d'apprendre à prouver, mais seulement d'apprendre à écrire une preuve. Tout ce qui précède, dans ce paragraphe, renvoie aux composantes de conception *AC*[60] (application du cours) et *nonCOP* (apprentissage non centré sur les fonctions de validation et d'explication de la preuve). Dans aucun manuel, l'apprentissage de la preuve n'est proposé dans des situations où les connaissances en jeu sont, non seulement, suffisamment simples pour ne pas occulter le raisonnement, mais aussi, assez complexes pour porter un fort enjeu de vérité.

De plus, comme la preuve en géométrie est décalée vers le milieu des manuels, les contextes des premières preuves relèvent souvent du calcul littéral, domaine nouveau et difficile pour les élèves. Par exemple, *Phare 5e* propose le premier texte de preuve (bien que le manuel n'utilise ni le mot de preuve, ni celui de démonstration) à la page 34, dans le chapitre sur le calcul littéral. La démarche est la même dans *Diabolo 4e*, qui propose, en guise de première démonstration, page 52, celle de la double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Il s'agit d'une suite d'égalités à trous qu'il faut compléter. Rien de la démarche n'incombe donc à l'élève :

[59] « L'analyse remontante consiste, à partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou des propriétés de la configuration étudiée qui, une fois établie(s), impliquerai(en)t, en appliquant un théorème identifié, le résultat à démontrer. » (Eduscol, Projet de document d'accompagnement des programmes de collège, géométrie, juillet 2007, p. 12)

[60] La preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.

*Démontrer un résultat*
*Soit a, b, c, d et k cinq nombres relatifs quelconques.*
*1. Recopier et compléter l'égalité : k(c + d) =... + ... .*
*2. Remplacer le facteur k par l'expression (a + b) dans l'égalité de la question 1.*
*3. Développer alors les expressions (a + b) c et (a + b) d.*
*4. Recopier et compléter l'égalité suivante : (a + b) (c + d) = ... + ... + ... + ...*
(Diabolo 4e, p. 52)

La première égalité qu'on demande de compléter n'est pas prouvée, elle est tirée, à la page précédente, d'une figure constituée d'un rectangle de dimensions $k$ et $a + b$, découpé en deux rectangles, l'un de dimensions $k$ et $a$, l'autre de dimensions $k$ et $b$. Puis, dans ce même manuel, *Diabolo 4e*, les preuves en géométrie apparaissent ensuite dans des situations très simples, sans enjeu de vérité, comme la première d'entre elles qui figure à la page 167, où l'on apprend seulement à organiser un texte de preuve, oubliant qu'il s'agit de convaincre et d'expliquer un résultat :

*Dans un triangle ABC, les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ mesurent respectivement 32° et 58°. Prouver que le triangle ABC est rectangle en utilisant les deux aides ci-dessous.*
*Aides : Pour résoudre ce problème, on peut utiliser l'une ou l'autre des deux aides suivantes, voire les deux aides.*
*1. Le tableau permet d'organiser la recherche et d'en conserver une trace écrite.*
*Reproduire ce tableau en répondant directement aux questions posées dans les cellules.*

| *Données*[61] | *Propriétés* | *Conclusion* |
|---|---|---|
| *1. Que sait-on du triangle ABC ?*<br>*Que peut-on dire des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ?* | *3. Chercher mentalement les propriétés qui ont pour conséquences « alors le triangle est rectangle ».*<br>*4. La condition de l'une de ces propriétés concerne des angles ; quelle est cette propriété ?* | *2. Que faut-il montrer au sujet du triangle ABC ?* |

*2. Rédiger la réponse en trois parties [...] en reprenant les réponses aux questions posées dans le tableau. On a écrit le début de chacune des trois parties :*
* *On sait que...(écrit en bleu dans le manuel)*
* *On utilise...(écrit en mauve dans le manuel)*
* *Donc ...(écrit en rouge dans le manuel)*
(Diabolo 4e, p. 167)

Les questions posées ne font pas référence à l'explication du fait que l'angle $\hat{C}$ est droit, mais à des indices de forme : celles qui sont écrites en bleu dans la colonne de gauche renvoient à la lecture de l'énoncé, avant « prouver que… », la question en rouge de la colonne de droite aussi à la lecture de l'énoncé, mais après « prouver que… », la colonne du milieu en violet concerne le tri des propriétés connues énoncées sous forme d'implications, soit en fonction de leur conclusion que le triangle est rectangle, soit en fonction de leur hypothèse concernant des angles. Mais on ne se demande pas comment expliquer que l'angle $\hat{C}$ mesure 90°.

[61] Le contenu de cette première colonne est écrit en bleu dans le manuel, celui de la deuxième en mauve et celui de la troisième en rouge.

Le programme situe la preuve essentiellement comme un moyen de mettre en œuvre le cours. Ceci se décline dans la plupart des manuels en une accumulation de fiches-méthodes qui occultent la signification de la preuve, son apprentissage se réduisant à celui de l'écriture d'un texte.

## 6. Les tâches préalables sans projet de preuve[62] : elles sont présentes dans beaucoup de manuels

Beaucoup de manuels, même parmi ceux qui travaillent davantage sur les fonctions de validation et d'explication de la preuve, proposent des tâches préalables sans projet de preuve. Nous avons déjà évoqué les chaînons déductifs à trous proposés par *Triangle 4e* et *Triangle 5e*, qui ne répondent à aucune demande de preuve. Dans ce même manuel, on trouve aussi, page 153, des exercices qui comportent une liste de données, une liste de propriétés, et l'on demande d'associer à chaque donnée la propriété qui peut être utilisée et la conclusion qui peut être tirée. Il en est de même dans *Diabolo 4e* qui, à tous les chapitres de géométrie, comporte une liste classée d'exercices suivant les catégories : « Repérer les données », « Utiliser la bonne propriété », « Bien conclure ». *Diabolo 5e* comporte aussi, mais moins, de tels exercices. A la page 9 de *Phare 5e*, on demande d'écrire « en notations mathématiques, toutes les données de la figure » proposée. De même dans *Bréal 4e* on trouve beaucoup d'exercices sur le codage.

On ne voit pas ce type de tâches dans *Transmath 4e*, ni dans *Prisme 4e*, ni dans *Phare 4e*.

Le document d'accompagnement des programmes de collège relatif à la géométrie présente lui aussi des tâches préalables, par exemple, le *travail sur les « mots »* : les deux manuels de la collection *Diabolo* présentent, pour chaque chapitre, une liste d'exercices sous la rubrique « Avec les bons mots ». Ce même document d'accompagnement préconise aussi un entraînement à la reconnaissance de *figures-clés*, dont nous avons déjà parlé.

Ainsi, la plupart des manuels proposent des exercices qui relèvent de l'entraînement à des productions liées au formalisme, occultant[63] encore une fois la signification de la preuve, en tant que moyen d'établir la vérité et d'expliquer.

## 7. La preuve s'apprend essentiellement en géométrie plane

La géométrie est pensée comme le terrain propice à l'apprentissage du raisonnement déductif, qui est le type de preuve privilégié par les enseignants. Propice, l'est-il vraiment ou est-ce un effet de contrat didactique ? Il n'est en effet jamais réellement évoqué le problème de l'évidence, qui joue nécessairement un grand rôle en géométrie. Peut-on donner les raisons de tout fait géométrique ?

[62] Les tâches préalables sans projet de preuve renvoie à la composante de conception *TP*.

[63] Ces exercices d'entraînement pourraient être proposés à la suite d'un travail spécifique sur la preuve en tant que moyen d'établir la vérité et d'expliquer. Or ce n'est pas le cas.

Plusieurs propositions sont accompagnées de dessins, les enseignants souhaitent cependant que les élèves « ne lisent pas sur la figure ». Ont-ils vraiment analysé leurs propres actions lorsqu'ils prouvent en géométrie ? Citons G. Arsac (1998) :

[…] *en fait le raisonnement mathématique est bien fabrication à l'aide de la logique de vérités nouvelles à partir de vérités supposées connues, mais ces vérités supposées connues ne se résument pas à une collecte dans les axiomes et les théorèmes, dans les faits, elle implique presque toujours d'autres origines, en géométrie par exemple, l'appel à la lecture du dessin* […] (Arsac 1998)

Ainsi l'apprentissage de la démonstration en géométrie, outre la difficulté de l'organisation des connaissances dont il s'accompagne, se double nécessairement du problème de la gestion de la figure.

Nous avons déjà cité le programme qui insiste pour que l'apprentissage du raisonnement déductif ait pour support, aussi bien le domaine numérique que le domaine géométrique. Il reconnaît toutefois *la place particulière* occupée par la géométrie. Ceci est affiché clairement par les manuels qui comportent un chapitre spécifique sur la démonstration en géométrie plane ou qui propose des pages spéciales sur la démonstration, illustrées essentiellement par des exemples en géométrie plane. D'autres manuels tels *Triangle 5e* contiennent un chapitre consacré au raisonnement déductif, illustré à la fois en géométrie et dans le domaine numérique. Mais la distinction est faite entre « prouver en géométrie » et « prouver avec des nombres ». Les chaînons déductifs ne sont proposés qu'en géométrie. Le programme n'évoque d'ailleurs les séquences déductives qu'en géométrie. Quant à *Triangle 4e* , il propose deux chapitres consacrés à la démonstration, l'un en lien avec le calcul littéral (pages 25-44), intitulé « Calcul littéral et initiation à la démonstration », l'autre avec la géométrie plane (pages 143-156), nommé « Géométrie et initiation à la démonstration ». Dans le premier, les exigences sont faibles sur le plan formel, alors que dans le second, elles sont très grandes. Par exemple, page 33 figure un exemple rédigé de démonstration d'une conjecture sur les nombres, dans laquelle on lit :

[…]
*A = 2 (n + 3) – 2 n*
*A = 2 n + 6 –2 n*
[…] (Triangle 4e, p. 33)

Il n'est pas du tout proposé de justifier le passage d'une ligne à l'autre en invoquant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, bien que ce résultat figure dans le cours quelques pages auparavant (cette connaissance figure aussi au programme de 5e). Par contre, à la page 150, figurent les lignes suivantes, extraites d'un exemple de démonstration rédigée en géométrie plane :

[…]
*On sait que ABCD est un losange.*
*Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.*
*Donc (AC) et (BD) sont perpendiculaires.*
[…] (Triangle 4e, p. 150).

La propriété utilisée du losange figure dans le cours, page 267, c'est un rappel aussi de la classe de 5e. Ceci montre la différence entre les exigences sur le plan formel entre la preuve dans le domaine numérique et la preuve en géométrie. Mais on remarque aussi un écart, voire une contradiction, entre la preuve en géométrie plane et la preuve en géométrie dans l'espace. Voici un exemple, tiré de *Triangle 4e*, page 185, dans une fiche-méthode intitulée « Calculer la longueur d'un segment dans l'espace » : il s'agit de calculer la hauteur d'une pyramide qui a un volume de 75 $cm^3$ et dont la base est un carré de 6 cm de côté :

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$
$$75 = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times h$$
[…] (Triangle 4e, p. 185)

Le manuel ne demande pas de repréciser qu'il s'agit d'une pyramide, ce qui justifierait l'utilisation de cette formule, connaissance nouvelle en 4e, qui figure dans le cours page 184. Par contre, lorsque, en géométrie plane, il s'agit de calculer la longueur d'un segment en utilisant le théorème de Pythagore, connaissance du programme de 4e, on lit, page 164 :

*On sait que AHE est un triangle rectangle en H.*
*Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (théorème de Pythagore).*
*Donc* $AE^2 = EH^2 + AH^2$
$5^2 = 2^2 + AH^2$
[…] (Triangle 4e, p. 164)

Les deux dernières lignes ci-dessus correspondent aux deux lignes du texte précédent relatif à la pyramide. Le formalisme imposé est cependant totalement différent, bien que les connaissances en jeu relèvent toutes deux du programme de 4e.

Il est clair cependant que tous les manuels proposent des preuves en calcul littéral et en géométrie, la plupart d'entre eux demandant les premières preuves dans le domaine numérique. C'est un moyen, semble-t-il, de répondre au souci de laisser de côté le formalisme dans un premier temps, les preuves dans ce domaine ne recourant pas à l'explicitation des pas. Toutefois *Diabolo 5e* propose sa première démonstration en géométrie, page 145.

On constate ainsi, dans la plupart des manuels, une séparation à propos de la preuve entre la géométrie plane et le domaine numérique. Considérant que ce dernier est propice à l'écriture de preuve sans explicitation des pas de raisonnement, c'est dans le domaine numérique que la majorité des manuels abordent les premières preuves, surtout en calcul littéral. La pratique du calcul littéral étant déjà difficile pour les élèves, aborder la preuve dans ce domaine ajoute une difficulté supplémentaire. Les niveaux d'exigence dans le formalisme sont importants en géométrie plane. Ceci amène à des incohérences si l'on compare avec les preuves dans les autres domaines.

## 8. Synthèse des conceptions véhiculées dans les manuels

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Diabolo 5e* | *nonR* | *V léger* | *P* | *FM* | *nonSExp* | *G* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Diabolo 4e* | *nonR* | *nonV* | *P* | *FM* | *nonSExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Phare 5e* | *nonR* | *nonV* | *P* | *FM* | *nonSExp* | *G* | *AC* | *nonCOP* | |
| *Phare 4e* | *nonR* | *nonV* | *P* | *FM* | *nonSExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Triangle 5e* | *R* | *nonV* | *P* | *FM* | *nonSExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Triangle 4e* | *R* | *V* | *P* | *FM* | *SExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Prisme 5e* | *nonR* | *nonV* | *P* | *FM* | *nonSExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Prisme 4e* | *nonR* | *nonV* | *P* | *FM* | *nonSExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Transmath 5e* | *R* | *nonV* | *nonP* | *FM* | *SExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Transmath 4e* | *nonR* | *V* | *P peu marqué* | *FM* | *SExp* | *nonG* | *AC* | *nonCOP* | |
| *Bréal 5e e* | *nonR* | *nonV* | *P* | *FM* | *SExp (brouillon)* | *G* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |
| *Bréal 4e* | *nonR* | *nonV* | *P* | *FM* | *SExp (brouillon)* | *G* | *AC* | *nonCOP* | *TP* |

Ce tableau montre la conception globale dominante dans huit manuels sur les douze étudiés :

*Pour enseigner la preuve, il n'est pas utile de travailler l'entrée dans la rationalité mathématique, le « bon sens » suffit. La preuve n'est vue que comme un moyen de mettre en œuvre le cours, d'où la nécessité de le rappeler par des fiches-méthodes. Les fonctions de validation et d'explication de la preuve sont occultées par l'apprentissage de l'écriture de preuve, dans un formalisme suivant la règle « on sait que…or…donc… ». Ce formalisme est vu comme un moyen d'apprendre à prouver. De ce fait, il faut apprendre à l'utiliser, d'où la présence de tâches préalables, sans objectif de preuve. Et par conséquent les situations d'apprentissage de la preuve n'ont pas à renfermer un fort enjeu de vérité et l'expérimentation n'a pas de statut reconnu à l'écrit. Enfin la preuve ne s'apprend pas essentiellement en géométrie.*

## CHAPITRE 6
## LA PROBLEMATIQUE

*« Je ne reconnais pas chez Aristote le plupart de mes mouvements ordinaires ; on les a couverts et revêtus d'une autre robe pour l'usage de l'école. »*
*(Michel de Montaigne, Essais, Livre troisième, 1586)*

Nous reformulons nos questions sous forme d'hypothèses, en précisant ce qui est admis (nos hypothèses de travail), ce qui résulte de l'étude faite dans cette première partie, ce qui sera mis à l'épreuve dans la partie suivante. Nous exposons notre thèse. Nous présentons enfin la deuxième partie de notre travail.

### 1. Un contrat d'ostension performant

Le contrat didactique usuel relatif à la démonstration, en vigueur dans beaucoup de classes de collège, se décline essentiellement en contraintes de forme, de langage, imposées dès le début de l'apprentissage. Les enseignants et les manuels imposent des « règles de formatage » très strictes, avant même que ne soit posée la question de la nécessité et de l'intérêt de la preuve. Ce contrat d'ostension[64] est performant. Il conduit à la réussite à court terme de beaucoup d'élèves dans l'écriture d'un type de preuve, qui relève du calcul propositionnel.

Il s'agit au départ d'une hypothèse de travail, mais nous l'avons étayée au cours de cette première partie, sauf sur la question de la performance. Celle-ci tient au fait que ce contrat usuel existe depuis plusieurs années et résiste aux changements demandés dans les derniers programmes.

Concernant la *règle des petits pas*, nous reprenons notre hypothèse selon laquelle l'obligation faite aux élèves d'expliciter des *petits pas* ne les font pas avancer dans la compréhension de ce qu'est une preuve, bien au contraire. Ceci nous permet d'expliquer certains comportements d'élèves, relevés dans des copies. Il s'agit d'une hypothèse que nous avons admise et qui nécessiterait d'être mise à l'épreuve.

### 2. Décalage entre la preuve en mathématiques et la preuve dans la classe

L'enseignement ne donne pas de la preuve une approche épistémologiquement satisfaisante. Il semble que la transposition dénature son sens. Il s'agit d'un constat fait au départ, que nous avons appuyé tout au long de cette première partie. Nous pouvons décliner cette hypothèse de la façon suivante :

[64] Contrat selon lequel le professeur montre comment faire.

- les fonctions de la preuve, de réduire le doute et d'expliquer, sont quasiment absentes des classes, surtout lors de l'apprentissage au collège ; elles sont occultées par la centration exclusive sur l'écriture de preuve ;
- la phase expérimentale, qui permet la maturation du problème et qui légitime l'écriture de la preuve, est réduite, voire inexistante en classe, en phase d'apprentissage et elle n'a pas sa place dans les écrits des élèves recevables par les enseignants ;
- la preuve n'est vue en classe que comme un moyen de faire fonctionner des connaissances, des méthodes bien établies, alors que pour le mathématicien, prouver, c'est, dans un premier temps, se débarrasser de tout ce que l'on connaît pour se concentrer strictement sur le problème posé.

## 3. Pertinence d'un travail sur les conceptions des enseignants relativement à la preuve

Ce contrat, si largement répandu, résulte d'une conception globale de la preuve, dominante, sous laquelle fonctionnent bon nombre d'enseignants, expérimentés ou débutants, que l'on retrouve dans les manuels scolaires. Elle se décrit sous la forme suivante : la preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours, elle s'apprend dans un contexte, où le doute est absent, où il n'y a pas d'enjeu de vérité, on suit un modèle de rédaction donné qui montre l'enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse/règle/conclusion. Nous avons justifié cela dans cette première partie.

Nous ajoutons l'hypothèse suivante, qui sera mise à l'épreuve dans le travail qui suit : il est difficile de distinguer, dans les conceptions des enseignants, celles qui relèvent de la preuve elle-même, celles qui ont trait à son enseignement et celles qui se rapportent à son apprentissage.

Cette conception globale dominante de la preuve est trop décalée par rapport à celle qui prévaut dans la communauté mathématique, où son rôle est essentiellement de convaincre de la vérité d'un résultat et de l'expliquer. Ceci se révèle au travers de cette partie et ce décalage sera argumenté aussi dans la suite de notre travail. Nous faisons l'hypothèse que cette conception globale dominante, ou certaines composantes, se constituent en *obstacles* à l'entrée des élèves dans la preuve. Ces conceptions sur la preuve résistent en effet au temps et produisent des réponses adaptées, qui sont les standards acceptés au collège, tels que nous les avons décrits. Cependant nous allons montrer que les pratiques qui découlent de ces conceptions empêchent les élèves d'accéder à la signification de la preuve — en tant que moyen d'établir la vérité de résultats qui ne sont pas évidents a priori — et nient l'heuristique. Elles détournent aussi l'élève de l'écriture de preuve qui puisse *signifier*[65] une réelle activité de preuve.

Comment agir en formation pour modifier les pratiques qui induisent le décalage décrit ? Cette question, essentielle pour nous, repose sur une autre

[65] Nous renvoyons à *signifiant* et *signifié* dans la théorie des champs conceptuels.

hypothèse de travail : travailler sur les conceptions des enseignants, au moins les faire expliciter, sont des aides à la modification des pratiques.

## 4. Des points d'appui pour induire un changement dans les pratiques

Ces hypothèses, admises, sont développées dans le premier paragraphe du chapitre 8 (présentation de l'ingénierie). Nous les résumons :

- la contradiction (montrée dans le chapitre 2) entre les attendus des professeurs et leurs choix d'enseignement peut être, si elle est pointée, le moteur d'un changement ;
- certains enseignants ont déjà conscience de ce décalage ;
- confronter les enseignants à la preuve en mathématiques (en les mettant en situation de résoudre un problème) peut permettre une prise de conscience du décalage avec la preuve dans la classe.

## 5. Les pratiques des enseignants sont résistantes au changement

Nous développons cette hypothèse de travail dans le deuxième paragraphe de présentation de l'ingénierie (chapitre 8). Elle nous a incitée à engager un travail sur les conceptions.

## 6. Nous résumons notre thèse

Il est possible et nécessaire de changer les pratiques des enseignants, de façon à permettre une approche de la preuve en classe épistémologiquement satisfaisante. Il est pertinent d'amorcer ce changement par un travail sur les conceptions des enseignants sur la preuve, en leur montrant le rapport existant des élèves à la preuve et en les mettant en situation de recherche de problèmes.

## 7. Présentation de la suite de notre travail

Cette deuxième partie comporte sept chapitres.

Elle propose une ingénierie de formation sur la preuve en mathématiques. Elle s'adresse à des enseignants de collège ou lycée, stagiaires (PLC2[66]) ou expérimentés, des formateurs, des inspecteurs. Elle débute par un chapitre où nous montrons que le contrat usuel relatif à la preuve est fondé sur *des malentendus* (nous définissons ce mot), ceci constitue un autre point d'appui pour infléchir un changement dans les pratiques. L'ingénierie de formation est ensuite présentée dans le chapitre 8 : elle se décline sur les chapitres 9 à 12.

[66] Professeurs de Lycée ou de Collège, qui ont réussi les concours de recrutement du CAPES ou de l'agrégation et qui sont en année de formation à l'IUFM (c'est, pour ceux qui ont préparé le CAPES à l'IUFM, leur **2e** année de formation à l'IUFM).

# CHAPITRE 7
# LES MALENTENDUS

*« Tu te conduis comme un enfant. Les malentendus ont-ils jamais gêné l'amour ? N'est-ce pas le contraire ? Tu n'es pas ici en géométrie. »*
*(Jean Giono, Les âmes fortes, 1949)*

L'objet de ce chapitre est de montrer en quoi un autre regard sur les actions des élèves, dont les raisons sont la plupart du temps interprétées en termes de difficultés, peut permettre de sensibiliser les enseignants à la reconnaissance que certaines pratiques sont inopérantes. Nous interprétons certaines réactions d'élèves en termes de sources d'actions pour le professeur, non pas de re-médiation par rapport à ces élèves, mais en vue d'un changement de pratique pour tous. Il s'agit en effet bien souvent de *malentendus*. Nous allons donc préciser ce que nous entendons par ce terme, le concept nous étant utile en tant qu'outil d'analyse de ce qui se passe en classe de mathématiques[67].

Pourquoi ce terme de *malentendu* ? Il convient pour expliquer certains faits de classe, certaines productions d'élèves, qui, au premier abord, paraissent surprenants, mais qui, à notre sens, révèlent que, dans la classe, l'élève et le professeur évoluent dans des univers parallèles sans qu'aucun des deux ne s'en rende compte : l'un *entend mal* ce que dit l'autre, voire ne l'entend pas du tout. Bautier & al (2006) parle de *malentendu* en tant que « […] co-construction de l'école et des élèves qui ne sont pas de plain-pied dans les attendus scolaires ». Cette définition introduit une dissymétrie entre le professeur et les élèves : on pourrait la reformuler en disant que certains élèves n'entendent pas ce que voudrait leur dire l'école. Ce n'est pas seulement ce que nous voulons dire. Nous ajoutons dans ce terme de malentendu que le professeur n'entend pas non plus ce que lui dit l'élève dans certains cas, et c'est ce point que nous voulons développer dans notre ingénierie de formation. Lorsque nous disons que l'élève et le professeur évoluent dans des univers parallèles, nous ne parlons pas du phénomène qu'on dit de dédoublement de la situation, dans la théorie des situations didactiques, qui désigne le fait que les élèves évoluent dans une situation qui n'est pas celle du professeur (Perrin-Glorian & Hersant 2003). Nous voulons décrire cette réalité où, dans certains cas, il n'y a même pas de situation du tout, tant la distance est grande entre ces deux univers parallèles.

Il ne faut pas voir dans l'utilisation de ce mot de *malentendu* une façon anodine de qualifier certains dysfonctionnements. On pourrait croire en effet qu'il suffirait de *lever le malentendu* pour que l'élève et le professeur se retrouvent en phase. Bien au contraire, les malentendus dont nous parlons sont résistants et difficiles à lever, comme nous l'explicitons dans la suite.

[67] Dans certains cas, on peut généraliser cette analyse à ce qui se passe à l'école en général.

Une même tâche donnée par le professeur peut induire divers types d'activités suivant les élèves d'une même classe. Ainsi le décrivent Bautier & al (2006) :

*Concernant le travail scolaire, certains élèves sont simultanément dans la tâche et dans l'activité, c'est-à-dire la réflexion sur l'objet à apprendre et l'apprentissage de l'objet par l'intermédiaire de la tâche à faire, quand d'autres sont dans la seule exécution du travail demandé qui n'entraîne pas d'apprentissage au-delà de celui qui concerne l'effectuation du travail* […]

Ceci voudrait dire que certains élèves auraient les clés pour décrypter ce qui est à apprendre et que d'autres ne les auraient pas. Ces auteurs ajoutent que le milieu social d'origine joue sur ce plan un rôle primordial. Nous ne le nions pas, mais nous ne nous aventurons pas sur ce terrain. Dans toutes les analyses qui suivent, relatives à des épisodes de vie scolaire, nous adoptons une position épistémologique qui nous permet d'agir sur le plan de la formation et de l'enseignement des mathématiques. Nous la décrivons ainsi : l'élève est de bonne volonté et n'est pas en posture de refus de l'école, il fait ce qu'il pense être attendu par le professeur, le professeur a pour objectif premier l'apprentissage de mathématiques par ses élèves. Des raisons qui poussent les élèves à agir de telle ou telle manière, nous excluons celles qui sont d'ordre personnel[68], non pas parce que nous pensons qu'elles ne sont pas importantes ; au contraire, ces raisons-là ont une influence non négligeable sur les attitudes, mais nous n'avons pas de moyens d'action dans les domaines qu'elles mettent en jeu. Ainsi nous nous contentons d'identifier, parmi les explications possibles de certains faits scolaires, celles qui se rapportent à l'école, aux pratiques des enseignants…, tout en pensant que ces comportements d'élèves sont finalement inévitables et découlent, presque nécessairement, des contextes dans lesquels ils sont placés.

Nous distinguons plusieurs types de *malentendus*, que nous illustrons ensuite par des exemples, un même exemple pouvant d'ailleurs aider à en décrire plusieurs.

- Le professeur ne réalise pas que le type de tâche proposée à l'élève ne conduit pas nécessairement à l'apprentissage escompté. L'élève réussit la tâche, à chaque fois qu'elle lui est donnée, le professeur n'a pas d'indice lui permettant de voir que l'apprentissage visé n'est pas réalisé. Pour illustrer ce cas, on évoque les élèves qui réussissent à écrire des preuves suivant la règle « on sait que… or…donc… », mais qui n'ont pas compris ce qu'était une preuve. Nous le désignons par le *malentendu réussite de l'élève*.
- Le professeur constate l'échec de l'élève dans la réalisation d'un type de tâche, il l'identifie alors comme étant « en difficulté » dans l'apprentissage escompté, bien que celui-ci ne découle pas nécessairement du type de tâche. Celui-ci n'est cependant pas remis en cause. Ce cas est désigné par *malentendu diagnostic échec*.
- Le professeur ne se rend pas compte que certains apprentissages préalables sont nécessaires à l'entrée des élèves dans la preuve. Il pense que le « bon sens » suffit, que « cela va de soi » pour que l'on puisse comprendre le jeu mathématique. Il a en vue le rapport attendu des élèves à la preuve, il ne voit

[68] Celles qui ont pour origine la santé des élèves, la vie familiale, la vie en dehors de l'école.

pas qu'il doit asseoir sa pratique sur le rapport existant des élèves à la preuve. Nous l'appelons le *malentendu rapport existant des élèves à la preuve*.

• Le contrat dans la classe est tel qu'il est antinomique de l'activité mathématique. Nous avons déjà étudié dans le chapitre 2 combien les attendus scolaires pouvaient être loin des mathématiques. Ceci peut être source d'un malentendu sur la nature du savoir. Nous l'appelons le *malentendu sur le savoir*.

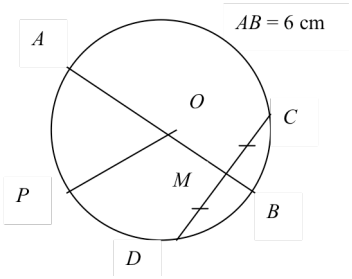
• Le professeur, malgré son souci de faire entrer les élèves dans une démarche mathématique, ne réalise pas que la tâche proposée peut les détourner de toute activité mathématique. Le malentendu est tel que l'élève n'apprend rien du tout sur le plan mathématique.

Nous illustrons d'abord, avec l'exemple de l'*ami malade*, ce cas extrême, que nous nommons *malentendu du détournement mathématique*.

## 1. Le *malentendu du détournement mathématique*

L'exemple que nous développons est extrême en ce sens que le professeur, soucieux de faciliter l'entrée de l'élève dans la tâche mathématique, va totalement à l'encontre de son objectif et détourne même l'élève de toute activité mathématique. Et surtout il ne voit pas sa propre responsabilité dans la réaction de l'élève. C'est là que réside le malentendu.

Dans un collège, on a affiché en salle des professeurs un extrait du dernier contrôle de mathématiques, dans une classe de sixième. Il s'agit de la septième question du contrôle : sont reproduits ci-dessous la figure et le texte qui l'accompagne. Viennent ensuite deux réponses d'élèves (les fautes d'orthographe n'ont pas été corrigées) et un commentaire de la part du professeur de la classe :




*VII) Votre ami est malade et vous voulez par téléphone l'aider à tracer la figure ci-contre. Préparez par écrit ce que vous allez lui dire afin de dépenser moins de téléphone (Utilisez un vocabulaire exact et précis).*

*La réponse d'un élève :* *« Mon ami est malade je lui dit de rester au lit bien au chaud an regardant la télévisions. »*

*La réponse d'un autre élève :* *« Je lui dit il faut que tu te soignes bien comme ça tu viendras dormir chez moi parceque ma mère à dit que tu te soigne bien parceque de ne viendra chez nous. »*

*Le commentaire du professeur :* *« A défaut d'être bons en maths, ne sont-ils pas attentionnés nos élèves ?! »*

L'objectif du professeur est de faire écrire un programme de construction : c'est un texte qui doit permettre au lecteur, qui ne voit pas la figure, de la reproduire exactement s'il suit les instructions du programme. Pour réussir ce type de tâche, à savoir l'écriture d'un programme de construction, on doit se

décentrer, imaginer que l'on ne voit pas la figure, c'est assez difficile pour un élève de sixième. Le professeur, conscient de cette difficulté, propose une situation pour aider l'élève dans cette décentration. Il lui fixe pour objectif de téléphoner à son ami et de lui donner des instructions pour qu'il construise la figure. Pour justifier cette transmission par téléphone, le professeur dit que l'ami est malade. Enfin, la consigne donnée à l'élève est d'écrire ce qu'il va dire au téléphone et ce doit être court. La justification de cette dernière contrainte est l'obligation de réduire la dépense de téléphone.

Cette mise en situation de la vie quotidienne ne peut en aucun cas aider l'élève qui n'a pas identifié le projet du professeur. Les arguments sont multiples. Tout d'abord, l'aller-retour entre discours oral et discours écrit : le but est l'écriture d'un texte mathématique, le programme de construction, mais on demande à l'élève de préparer un discours oral, ce n'est pas le même type de texte. Ensuite, si l'on s'imagine au téléphone, l'échange oral ne se situe pas dans un seul sens : si l'on donne des instructions pour le tracé de la figure, l'interlocuteur va intervenir, demander des explications. De plus on doit aider son ami à construire la figure : lui lire un programme de construction au téléphone n'est sûrement pas le moyen le plus efficace pour qu'il réussisse cette construction, un échange de type questions-réponses l'est davantage. La représentation que l'on peut légitimement se faire de la production attendue, si l'on entre dans l'histoire du professeur, n'est sûrement pas celle d'un programme de construction. Enfin l'interlocuteur est un ami, qui de plus est malade, c'est le professeur qui introduit l'affectif dans la situation. L'échange téléphonique ne peut pas se borner à des instructions pour construire une figure. La moindre des choses est de demander des nouvelles de la santé de son ami. Enfin, pour l'élève, l'objectif peut aussi être simplement la transmission des devoirs de mathématiques à un élève malade, ce qui ne se fera pas sur le mode d'un programme de construction. Or pour réussir cette tâche, l'élève doit non seulement avoir identifié l'objectif du professeur, mais aussi ne pas tenir compte de l'histoire qu'il a inventée. C'est ce que fait l'élève « bon en maths ». L'autre, qui est pris par l'histoire, s'il est un peu attentif aux autres, répond en s'imaginant dans cette mise en scène. Les réponses des deux élèves données ci-dessus sont courtes : on peut penser qu'ils essaient justement de minimiser leurs dépenses de téléphone, ils disent ce qui leur semble l'essentiel dans cette situation.

La fiction est inventée par le professeur pour motiver l'élève. Or cette histoire doit être complètement ignorée, avons-nous dit, si l'on veut répondre au problème. L'élève, qui n'identifie pas cet objectif (et rien ne le met sur la voie) croit répondre correctement en s'imaginant tenir un rôle dans cette fiction.

## 2. Le *malentendu sur le savoir* et le *malentendu réussite*

Nous rappelons un de nos résultats, à savoir que les professeurs pensent implicitement que le respect de la forme suffit pour que les élèves se construisent un rapport adéquat à la preuve : on donne un modèle de rédaction « on sait que… or… donc… » et les élèves apprennent ou devraient apprendre ainsi à écrire un certain type de preuve, il n'y a qu'à suivre le modèle. Nous voulons montrer que le rapport à la preuve se construit ainsi sur des malentendus.

Lorsque nous parlons du *malentendu sur le savoir*, il s'agit du savoir enseigné ou du savoir appris. Le contrat didactique est tel qu'il s'oppose à la pratique d'une démarche de preuve. Le professeur enseigne à son insu un objet qui n'est pas la preuve. L'élève croit appendre la démonstration. A titre d'illustration, on peut citer un extrait du dialogue enregistré en formation sur la démonstration (il figure en annexe 4 au chapitre 4) :

*- On arrive quand même à des trucs caricaturaux. Enfin, l'autre jour, j'ai un élève, qui a son grand frère ou sa grande sœur, qui étaient, je ne sais pas quoi, en première, en quatrième, qui dit que la démonstration en quatrième, ça se fait avec « je sais que… je cite une propriété … donc », parce que, au collège, depuis un certain nombre d'années, c'est ce qui se pratiquait, il y avait un schéma très fixe en quatrième…*
*- C'est pas au collège il y a un certain nombre d'années, c'est actuellement.*
*- Non, non, mais oui, depuis un certain nombre d'années au collège, c'est quelque chose qui est fait, donc l'élève qui est maintenant en première, il y a la démonstration en quatrième, qui est quelque chose, et puis il y a la démonstration d'ailleurs peut-être, à la limite, on se demande si c'est la même chose. Parce que la démonstration en quatrième, c'est « je sais que… je cite la propriété… donc ». Mais alors maintenant il est en première, il a le droit de faire autrement, mais son petit frère ou sa petite sœur qui est en quatrième, il doit faire comme ça parce que ça, c'est la vraie démonstration de quatrième.*

L'élève de première a appris ce qu'il appelle « la démonstration de quatrième », il ne fait même pas nécessairement le rapprochement avec les autres preuves qu'il a faites dans les classes suivantes. Il y a manifestement méprise sur ce qu'il a appris. Nous faisons l'hypothèse que son professeur de quatrième n'avait pas pour intention de lui apprendre une démonstration spécifique à la classe de quatrième. Il pensait lui apprendre à faire une démonstration.

Ce type de malentendu va de pair avec le *malentendu réussite de l'élève*, puisque tant qu'il n'y a pas d'échec, l'enseignant poursuit sa pratique, ne se rendant pas nécessairement compte du savoir qu'elle induit.

Nous citons l'exemple d'un professeur stagiaire qui, amené en formation[69] à réfléchir à l'utilisation d'un tableau en trois colonnes pour apprendre la démonstration, a fini par se rendre compte que ses élèves de quatrième n'avaient pas compris ce qu'était une preuve, alors que ces mêmes élèves réussissaient parfaitement à rédiger ce qu'ils croyaient être une preuve en utilisant un tableau en trois colonnes. Désireux de confirmer que ses élèves avaient bien compris le fonctionnement du raisonnement déductif, il leur propose de rédiger une preuve au brouillon, relative à un autre exercice, en leur imposant de ne pas faire de tableau. Il fait un bilan de ce qu'il obtient en analysant six copies qu'il dit représentatives des deux tiers de la classe :

[…] *aucun élève sur les trente ne m'a rendu une démonstration correcte. Les élèves* […] *commencent par rappeler les hypothèses de manière exhaustive. Il n'y a pas le début d'un pas d'inférence. Mais il y a plus grave, et qui est commun aux six élèves, c'est la confusion entre les données de départ et la conclusion finale.* […] *Il me semble que l'on peut en conclure sans appel que le principe de démonstration n'est pas compris, que la confusion entre hypothèse et conclusion en dit long sur l'ignorance entre les différents statuts possibles*

[69] Dans le cadre de son mémoire professionnel.

*d'une proposition.* […] *Il est donc surprenant que ces mêmes élèves furent en mesure de remplir le tableau précédent en donnant ainsi l'illusion d'avoir tout compris !!!*
(Jamgotchian 2005)

Cet enseignant s'est rendu compte de l'échec de la méthode employée pour l'apprentissage de la preuve parce qu'il était invité à y réfléchir dans le cadre de sa formation, mais il aurait très bien pu en rester au succès total de ses élèves dans le remplissage de tableaux en trois colonnes et croire qu'ils avaient compris ce qu'était une démonstration. Certains professeurs en restent là, le *malentendu sur le savoir* et le *malentendu réussite de l'élève* sont entretenus.

### 3. Le *malentendu diagnostic échec*

Le professeur diagnostique par exemple que l'élève ne sait pas faire une démonstration parce qu'il n'a pas réussi à remplir le tableau en trois colonnes « hypothèse, règle, conclusion ». Il est persuadé que ce dispositif est pertinent pour apprendre la preuve. L'échec dans le remplissage du tableau est donc interprété comme un échec dans l'apprentissage de la preuve. Certains enseignants, la majorité peut-être, pourraient dire que les deux élèves qui ont donné les réponses citées dans l'épisode de *l'ami malade*, ne savent pas lire les consignes. Ce type d'analyse, en terme d'échec dans la réalisation d'une tâche, conduit au mieux à des pratiques destinées à apprendre aux élèves à lire des consignes. Nous remettons ceci en question en regardant du côté des pratiques plutôt que de celui des élèves.

Le système éducatif développe actuellement beaucoup de moyens pour montrer qu'il faut enseigner en tenant compte de l'acquisition ou de la non-acquisition de *capacités* par les élèves. Lorsqu'on détecte qu'un élève n'a pas acquis une certaine capacité, on cherche à y remédier en lui proposant des tâches supposées adéquates. A un manque de l'élève, on tente ainsi de faire correspondre des tâches destinées à combler ce manque. Les enseignants viennent alors en formation pour trouver des tâches bien ciblées par rapport à certaines défaillances supposées des élèves et on tombe dans ce que l'on appelle la *différenciation*. Ce qu'on ne remet jamais en cause dans ce fonctionnement, ce sont ces diagnostics d'échecs. On ne regarde pas les raisons qui peuvent conduire un élève à donner une réponse qui sera interprétée ensuite comme révélatrice qu'il n'a pas acquis une connaissance ou un savoir-faire. On ne regarde pas les pratiques des enseignants qui peuvent conduire à ces comportements d'élèves. Or c'est justement ce que nous proposons, écartant l'analyse primaire de certains échecs en termes de manques de la part de l'élève. Ce faisant, nous nous opposons au courant dominant actuellement dans les établissements scolaires — diagnostic d'échec à une compétence, remédiation, individualisation de l'enseignement (différenciation) — ce *genre*[70] dominant étant lui-même, à notre sens, le fruit de malentendus sur ce que recouvre le terme de

[70] *Le genre est un ensemble ouvert de règles, de conventions, d'actions pour agir, non écrites, à la fois contraintes et ressources qui définissent, dans un milieu donné, l'usage des objets et l'échange entre les personnes*. (Clot 1999)

*compétence*[71], sur les moyens d'évaluer leurs degrés d'acquisition. Mais nous ne développerons pas ces points dans ce travail.

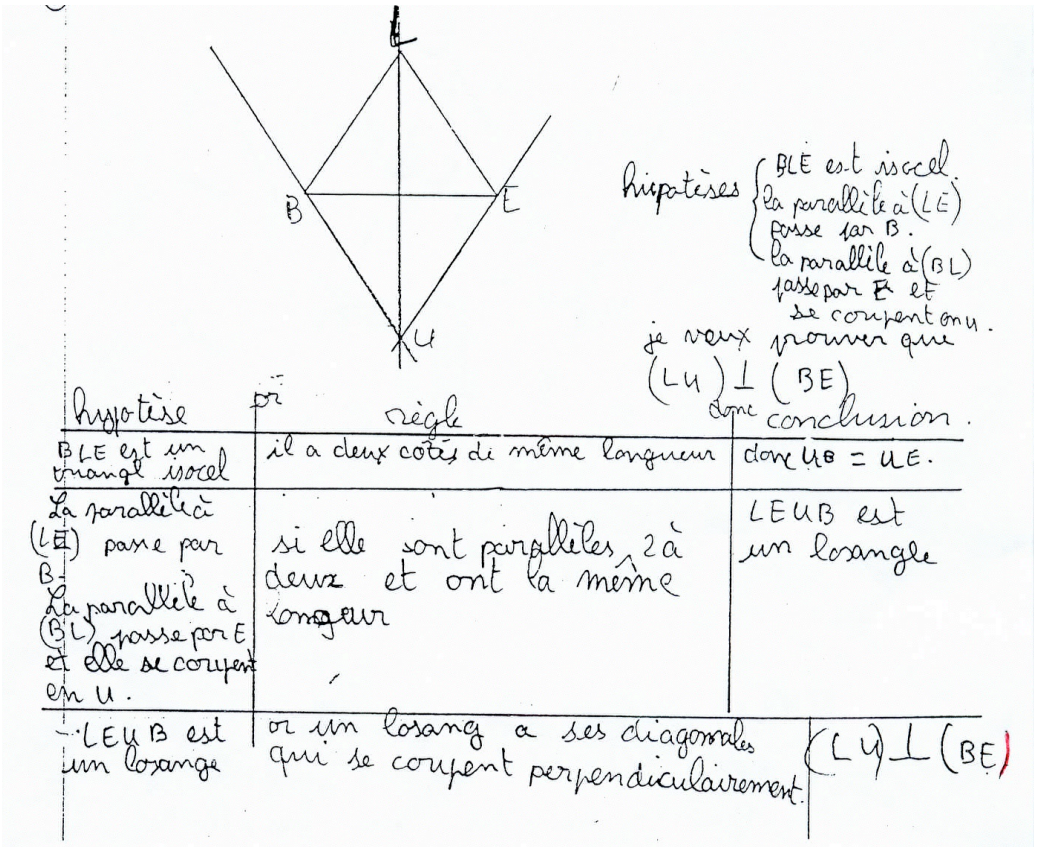
A l'occasion d'un stage sur la démonstration en 1995[72], un professeur nous communiqua des copies qui lui semblaient révélatrices des difficultés de ses élèves par rapport à la démonstration. Dans sa classe de quatrième, il avait proposé en devoir surveillé l'énoncé suivant :

*BLE est un triangle isocèle de sommet principal L. La parallèle à (BL) qui passe par E et la parallèle à (LE) qui passe par B se coupent en U. Démontre que (BE) est perpendiculaire à (LU).*

Voici la copie de Farida.

[71] Ce terme recouvre de multiples définitions. Nous reprenons celle de Roegiers (2000) : *« La compétence est la possibilité, pour un individu, de mobiliser de manière intériorisée un ensemble intégré de ressources en vue de résoudre une famille de situations-problèmes. »* Nous précisons en référence à l'Institution : dans le rapport n°2007-048 de l'Inspection générale, on lit une suite de caractéristiques des compétences, du point de vue institutionnel, basées sur « *des mots-clés*
** transversalité : les compétences recouvrent plusieurs disciplines, elles s'exercent dans des situations variées ;*
** contextualisation / décontextualisation : la compétence doit être maîtrisée et évaluée à travers des situations concrètes, les plus proches possibles de celles rencontrées dans la vie réelle ;*
** complexité : les tâches, les situations de mise en œuvre des compétences sont par essence complexes, requérant la mobilisation de savoirs, savoir faire, capacités, attitudes variées ;*
** intégration : les compétences intègrent diverses disciplines, diverses facettes (capacités, attitudes, connaissances).* »

[72] Chaque année, depuis 2004, nous recueillons des productions du même type que celles de Farida. Plusieurs d'entre elles figurent en annexe au chapitre 8.




Cette copie révèle des éléments du contrat didactique relatif à la démonstration en vigueur dans la classe, tel que nous l'avons décrit dans le chapitre 2. Les tâches proposées à Farida pour l'apprentissage de la preuve reposent sur l'utilisation d'un tableau en trois colonnes comme elle l'a dessiné. Elle a bien tracé une figure illustrant l'énoncé, comme on le lui demande habituellement, elle a réécrit les hypothèses et noté ce qu'elle voulait démontrer, ces tâches préalables étant demandées par le professeur comme un rituel indépendant du projet de preuve.

Nous faisons des hypothèses sur la façon dont Farida a pu remplir son tableau.

Comme le montre la première ligne, Farida a bien compris qu'elle devait écrire une donnée dans la première case du tableau : elle recopie donc, pour la deuxième fois d'ailleurs, le début de l'énoncé, « *BLE* est un triangle isocèle ». Elle voit sur la figure que *BUE* est aussi un triangle isocèle, donc que *UB* = *UE*, mais elle sait que ce n'est ni une hypothèse, ni une « règle », elle n'a donc que le choix de l'écrire dans la colonne de droite, et sur la même ligne que « *BLE* est un triangle isocèle », car c'est bien une des raisons pour lesquelles *UB* = *UE*. Il lui faut une « règle » à écrire dans la colonne du milieu, qui permette d'obtenir une égalité de longueurs, elle écrit donc « il a deux côtés de même longueur », ceci ayant l'avantage d'être lié en outre à l'hypothèse de la même ligne. Ainsi Farida a bien rempli sa première ligne en s'appuyant sur des indices pertinents, distinguant bien le statut d'hypothèse et celui de conclusion.

Or, en guise de premier pas, l'enseignant attendait : « on sait que *BLE* est un triangle isocèle, or un triangle isocèle a deux côtés de même longueur, donc *LB* = *LE*. » La « règle » de justification attendue est donc la définition d'un triangle isocèle. Ceci renvoie à la règle de contrat dite « des petits pas ». La conclusion de

cette première ligne n'est qu'une autre façon d'écrire que *BLE* est isocèle. Cela fait la troisième fois, sans compter celle de l'énoncé, que l'on écrit cette donnée du problème. Et nous pensons que c'est peut-être cela qui a gêné Farida pour son premier pas : la conclusion « *LB = LE* » est porteuse de trop peu d'information par rapport à l'énoncé et elle ne vaut pas la peine d'être écrite ; par contre, « *UB = UE* » est un résultat qui semble faire avancer davantage la solution du problème. Cette difficulté à comprendre ce formalisme qui nécessite d'écrire plusieurs fois la même chose ne doit pas être identifié par le professeur comme une non-compréhension de la preuve. Or c'est bien l'amalgame qui est fait. De plus, le professeur pense qu'il faut être exigeant avec les élèves sur l'écriture de tels *petits pas*, surtout au début de l'apprentissage de la démonstration. Notre hypothèse est contraire, d'autant plus que si l'on réfléchit à la construction du triangle *BLE*, faite avant la démonstration, on utilise nécessairement que *LB = LE*. Enfin le souci du professeur d'unifier la formalisation par l'utilisation du seul mot de règle induit une autre difficulté dans la réalisation de la tâche : une définition doit être considérée comme une règle.

En ce qui concerne le deuxième pas, Farida recopie le deuxième bloc d'hypothèses qu'elle a déjà marquées à côté de la figure. Ce qu'elle écrit comme « règle » reprend en partie ces hypothèses, « si elles sont parallèles deux à deux… » : elle a compris que les hypothèses de la « règle » à écrire dans la colonne du milieu devaient correspondre au contenu de la colonne de gauche. Ceci n'est cependant pas suffisant, elle le sait, pour conclure que *LEUB* est un losange, ce qu'elle a bien remarqué sur la figure. Aussi ajoute-t-elle « …et ont la même longueur » dans la colonne centrale, sans se préoccuper du sens mathématique de la proposition conditionnelle toutefois grammaticalement correcte. Farida a vu en effet que tous les côtés du quadrilatère *BLEU* avaient la même longueur : *BL = LE* vient du fait que le triangle *BLE* est isocèle, *UB = UE* vient d'être écrit à la ligne précédente du tableau, *LB = UE* est implicitement contenu dans « … et ont la même longueur. »

Le professeur qui nous a proposé cette copie avait identifié que Farida n'avait rien compris à la démonstration. Nous faisons l'hypothèse que ce n'est pas la démonstration que Farida n'a pas comprise, mais que c'est comment satisfaire à ce formalisme posé a priori, qui n'a pas valeur de preuve pour elle. C'est bien la pratique de l'enseignant qui est à questionner. Et nous renvoyons aux deux autres types de malentendus déjà évoqués dans le paragraphe précédent : le professeur avait auparavant constaté que beaucoup d'élèves réussissaient ce type de tâche passant par ce tableau en trois colonnes, ce rituel de réécriture des hypothèses et de ce qu'il y a à démontrer à côté de la figure, il ne s'était pas nécessairement interrogé sur la nature de ce que les élèves apprenaient de cette façon.

## 4. Le *malentendu rapport existant des élèves à la preuve*

Nous avons vu que les enseignants pouvaient penser que le rapport des élèves à la preuve se construisait ou devait se construire naturellement, sans préalable. Le professeur attend de l'élève un certain rapport à la preuve, il ne réalise pas qu'il assoit sa pratique sur un rapport existant, qui peut être très loin du rapport attendu (plus conforme à celui de la communauté mathématique). En effet ce n'est pas seulement lorsqu'ils abordent le chapitre intitulé « Initiation à la démonstration », en classes de quatrième ou cinquième, que les élèves commencent à se construire un

rapport à la preuve. Celui-ci se construit à partir d'éléments qui vivent en dehors de la preuve, même en dehors des mathématiques : les élèves ont déjà fait des mathématiques avant que ne soit abordée explicitement la preuve, ils ont dessiné des figures, ils ont mesuré sur ces figures, ils ont étudié d'autres disciplines dans lesquelles on généralise à partir d'exemples, et ils continuent à les étudier…

Or en dehors des mathématiques, l'implication a son sens propre, pas toujours le même que dans le quotidien. C'est un des premiers éléments de ce rapport existant que nous allons développer. Si l'on examine de plus près les différences entre le fonctionnement du quotidien et la logique mathématique, on voit bien d'autres connaissances à institutionnaliser pour éviter les malentendus, d'autant plus que la pratique mathématique elle-même contient de nombreux implicites, dont les professeurs du secondaire n'ont pas nécessairement conscience :

*Une spécificité de la logique, lorsqu'on l'étudie d'un point de vue didactique, c'est qu'il y a en quelque sorte un double mouvement de transposition. Tout d'abord, le mathématicien, dans son activité propre, l'utilise le plus souvent comme une technique, sans référence explicite à une théorie logique, et se sert à sa convenance d'un certain nombre d'ellipses et de raccourcis. Parmi ces usages, l'un des plus répandus, à tel point que pour certains auteurs, il s'agit même d'une règle que l'on peut institutionnaliser, est la quantification implicite des énoncés conditionnels universels ; un deuxième usage est celui qui consiste à utiliser massivement, dans les énoncés complexes, la quantification bornée. Ces pratiques usuelles se transportent tout naturellement dans la classe, via la formation universitaire des enseignants pour le second degré, et parce qu'à l'université, les enseignants de mathématiques sont en général également des mathématiciens professionnels.*
(Durand-Guerrier 2005)

Ces *ellipses et ces raccourcis* utilisés en mathématiques entretiennent des malentendus lorsqu'ils sont utilisés au collège ou au lycée, comme nous allons le voir dans la suite de ce paragraphe. Nous évoquons aussi le *fonctionnement scolaire*, qui s'oppose parfois à la rationalité mathématique.

### Le fonctionnement du « si… alors… » dans le quotidien et dans la rationalité mathématique

Lors d'une soutenance de mémoire professionnel en juin 2008, un enseignant expérimenté qui assistait à la présentation du mémoire de son stagiaire lui demande :

*Mais qu'est-ce que tu appelles dans ton mémoire la rationalité mathématique ? Je ne vois pas bien ce que c'est.*

Ainsi le professeur évolue naturellement dans la rationalité mathématique, il peut même ne pas avoir identifié cette rationalité mathématique, comme le montre la question précédente. L'élève, lui, reste dans le fonctionnement du quotidien. Or nous allons voir ci-dessous que le quotidien ne fonctionne pas toujours comme les

mathématiques. On pourrait dire que, dans ce cas, le malentendu se situe au niveau du milieu[73].

Prenons un exemple représentatif des pratiques de la majorité des enseignants. Pour expliquer les notions d'implication, de réciproque, beaucoup de professeurs recourent à des phrases qui décrivent des situations de la vie courante, souhaitant raccrocher l'élève à un univers familier sans voir que son fonctionnement ne relève pas nécessairement de la logique.

- Proposition n°1 : Si tu as la moyenne à ton DS, alors tu fais du VTT avec Charles.

Dans cette phrase proposée par le professeur à la classe pour expliquer le sens de « si…alors » s'opposent deux fonctionnements, celui du quotidien et celui des mathématiques. Dans la vie courante, si l'on a dit cette proposition n°1 à un enfant et qu'il n'a pas la moyenne à son DS, on ne lui permet pas de faire du VTT avec Charles. En toute logique (mathématique), on pourrait bien le lui permettre sans être en contradiction avec la première proposition. Mais l'enfant ne s'attendra pas du tout à pouvoir faire du VTT avec Charles s'il n'a pas sa moyenne au DS. En disant la proposition n°1, on sous-entend du même coup la proposition n°2 :

- Proposition n°2 : Si tu n'as pas la moyenne à ton DS, alors tu ne fais pas de VTT avec Charles.

Si l'on regarde les propositions n°1 et n°2, d'un point de vue strictement mathématique, elles sont réciproques l'une de l'autre : la seconde est la réciproque de la première, sous sa forme contraposée. En effet, la réciproque de la n°1 peut s'écrire sous la forme « Si tu fais du VTT avec Charles, alors tu as la moyenne à ton DS. ». La contraposée d'une proposition étant logiquement équivalente[74] à cette dernière, la phrase « Si tu fais du VTT avec Charles, alors tu as la moyenne à ton DS. » est équivalente à sa contraposée « Si tu n'as pas la moyenne à ton DS, alors tu ne fais pas de VTT avec Charles. » Ainsi cette proposition n°1 véhicule à elle seule, dans la vie courante, une équivalence entre « tu as la moyenne à ton DS » et « tu fais du VTT avec Charles ». Aussi le recours au contexte du quotidien est-il peu pertinent pour expliquer l'implication, la différence entre l'hypothèse et la conclusion, puisque, dans ce cas, elles sont interchangeables.

Le rapport existant des élèves à la preuve s'installe sur ce malentendu entre le fonctionnement du quotidien et la pratique des mathématiques qui, malgré ce qui est souvent dit, ne relève pas du « bon sens ».

Ceci est rarement dit aux élèves, sous prétexte de ne pas trop les déstabiliser, et surtout de ne pas les détourner définitivement d'une discipline qui les éloignerait encore de la vie courante. Encore un malentendu. Il ne peut rester à la seule charge

---

[73] *Milieu* est entendu ici au sens d'outil qui permet de répondre à des questions telles que : quelles connaissances, quels savoirs sont en jeu, quelles actions la situation induit-elle, quelles informations, quelles validations renvoie-t-elle à l'élève ?

[74] logiquement équivalente, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux vraies ou bien toutes les deux fausses.

de l'élève de comprendre que « Si tu as la moyenne à ton DS, alors tu fais du VTT avec Charles. » et « Si *M* est le milieu de [*AB*], alors *MA = MB*. », ne fonctionnent pas de la même façon : la compréhension de cette différence est d'autant moins immédiate que les deux phrases ont la même structure grammaticale, renferment les mêmes mots « si » et « alors ». Et, comme le suggèrent certains enseignants, conscients qu'on ne peut pas utiliser n'importe quelle phrase de la vie courante avec « si…alors… » pour expliquer l'implication, si l'on recourt à des implications relatives au quotidien qui « fonctionnent » comme en mathématiques, on ne fait qu'accroître le malentendu, car l'élève, lui, n'a pas le recul suffisant pour repérer que telle implication située dans un contexte familier se comporte comme en mathématiques et telle autre non. Il faudrait pour cela qu'il ait auparavant identifié la spécificité de l'implication en mathématiques, ce qui est justement ce que l'on veut lui faire comprendre. C'est un cercle vicieux.

### La quantification implicite des énoncés conditionnels

*La quantification implicite des énoncés conditionnels est une pratique massive tant parmi les mathématiciens que dans la classe de mathématiques, dans le second degré ou à l'université. Ce constat s'appuie sur de nombreuses observations naturalistes, ainsi que sur quelques analyses de manuels dans notre thèse, et, pour la Tunisie, sur Chellougui (2000). Cette pratique massive cache la distinction entre implication entre propositions, implication universellement quantifiée et implication ouverte, et fait disparaître l'importance de l'univers du discours pour établir la vérité d'un énoncé général. L'exemple […] met en évidence le fait que cet implicite n'est pas partagé par de nombreux élèves, et qu'en outre, il peut conduire les enseignants à proposer des réponses inadaptées dans certaines situations.* (Durand-Guerrier 2005)

L'exemple dont il est question, « L'élève, le professeur et le labyrinthe » est analysé de manière très détaillée dans Durand-Guerrier (1999). Nous ne développons pas cette analyse. Nous avons déjà signalé ce point dans l'analyse des manuels au chapitre 5 et nous donnons un autre exemple.

Dans le cadre de leur mémoire professionnel, deux professeures stagiaires (Chalot & Marin 2008) ont proposé à leurs élèves d'étudier la vérité de la proposition suivante, l'une en classe de quatrième, l'autre en seconde.

- Si un nombre est divisible par 2 et par 4 alors il est divisible par 8.

En quatrième comme en seconde, les résultats donnés par les élèves sont de trois types : vrai car 16 est divisible par 2, 4 et 8 (en quatrième) ou car, si un nombre est divisible par 2 et 4, alors il est divisible par $2 \times 4$ (en seconde) ; faux car 12 est divisible par 2 et 4, mais pas par 8 ; vrai et faux car cela ne marche pas avec tous les nombres. Un débat ayant eu lieu ensuite avec la classe et un consensus établi autour du fait que l'affirmation est fausse, la professeure de la classe de quatrième ajoute :

*Un élève (un bon élève) m'a ensuite demandé timidement : « Je ne comprends pas pourquoi cette propriété est fausse puisqu'elle marche pour certains nombres comme par exemple 16. Elle est à la fois juste et fausse, non ? »* (Chalot & Marin 2008)

Cet exemple montre l'étendue du malentendu qui résulte de la compréhension de « un nombre » dans cette proposition. Le professeur peut aussi l'interpréter comme

une difficulté de l'élève qui n'est pas entré dans la rationalité mathématique et ne sait pas qu'il suffit d'un contre-exemple pour prouver que la proposition est fausse.

**D'autres savoirs rarement institutionnalisés**

Il n'y a pas que l'implication (Deloustal-Jorrand 2004), avec ce qu'elle comporte d'implicite, qui est à prendre en charge dans le rapport existant des élèves à la preuve. Il y a bien d'autres éléments (Gandit & Massé-Demongeot 1996) qui peuvent être sources de malentendus, suivant qu'on les considère dans le contexte du quotidien ou en mathématiques. Ce sont des connaissances utiles pour faire des mathématiques, qui font rarement l'objet d'une institutionnalisation :

- la redondance, commune dans la vie courante quand il s'agit de raconter une histoire, (voir aussi le *principe du maximum d'information* (IREM de Grenoble 1985)), qui constitue une erreur dans une preuve mathématique ; un élève doit savoir qu'une preuve en mathématiques doit exclure les éléments redondants et s'en tenir au minimum des arguments suffisants pour aboutir à une conclusion ; ceci ne figure pas dans les programmes ou documents d'accompagnement ;
- le caractère de nécessité des énoncés mathématiques ;
- le principe du tiers exclu en mathématiques : on considère qu'une proposition en mathématiques est soit vraie, soit fausse ; dans le quotidien, il y a bien d'autres nuances ;
- un contre-exemple suffit à prouver le faux en mathématiques, alors qu'on dit souvent qu'une exception confirme la règle ;
- le vrai est induit à partir de quelques exemples dans la vie courante, ce qui s'oppose au vrai mathématique ;
- la notion d'équivalence logique en mathématiques qui n'est pas nécessairement une équivalence sémantique.

Il s'agit à la fois de connaissances mathématiques et de connaissances *sur* les mathématiques. Nous nous référons au cadre théorique proposé par le groupe CESAME pour qualifier ces connaissances nécessaires pour la pratique mathématique : il s'agit des *connaissances d'ordres II et III* (Sackur & al 2005) :

[…] *d'une part, ces connaissances sont acquises à travers « l'expérience vécue » et, d'autre part, autrui joue un rôle essentiel dans leur acquisition en classe.*

Certains travaux (Sackur 2004) montrent que l'absence d'institutionnalisation des connaissances d'ordre II est un obstacle à la pratique d'une activité mathématique réelle en classe. Cependant, même si leur explicitation auprès des élèves est importante, cela ne peut suffire pour que les élèves s'en emparent, elles ne s'enseignent pas comme les connaissances d'ordre I. Précisons cette classification des connaissances établie par le groupe CESAME. Les *connaissances d'ordre I* sont les savoirs et connaissances mathématiques, reconnus institutionnellement comme relatifs au contenu mathématique, auxquels les professeurs se réfèrent par l'intermédiaire des programmes (les définitions, propriétés et théorèmes du cours habituel). Les *connaissances d'ordre II* sont relatives à l'activité mathématique, elles sont constitutives des mathématiques, et ne relèvent pas seulement du « méta » (Robert & Robinet 1996). Elles sont de trois types (Sackur & al 2005) :

[…] *celles concernant la sémiosis (au sens de Duval,1995), celles concernant la validité (au sens large) des énoncés, et celles liées à la logique mathématique : en quelque sorte, pour faire des mathématiques il faut démontrer (validité), il y a des règles pour démontrer (dont la logique est un modèle) et il faut savoir s'exprimer correctement dans les différents registres (sémiosis).*

Les caractéristiques de la démonstration, comme éviter la redondance, sont des exemples de connaissances d'ordre II : celles-ci évoluent suivant les époques et les cultures, elles ne sont pas stables. Ce n'est pas le cas des connaissances d'ordre I. Les connaissances d'ordre III s'expliquent moins facilement (Sackur & al 2005) :

*« L'activité mathématique consiste à jouer avec des connaissances d'ordre I selon des règles du jeu d'ordre II » est un exemple typique de connaissance d'ordre III.*

Ces connaissances d'ordre III sont difficiles à identifier car, comme certaines des connaissances d'ordre II, elles ne relèvent pas d'un consensus dans la noosphère, par suite, elles sont peu explicitées. Elles touchent à la nature de l'activité mathématique : nous comprenons qu'elles permettent de cerner ce qui relève de *faire des mathématiques* ou *ne pas faire de mathématiques*.

Aussi nous semble-t-il pertinent d'ajouter à la liste de ces savoirs rarement institutionnalisés la coexistence dans la classe de trois « logiques » : le *fonctionnement scolaire*, la logique mathématique avec tout ce qu'elle comporte d'implicite et le *fonctionnement du quotidien*. Nous avons déjà évoqué les deux derniers. Le *fonctionnement scolaire* est ce qui régit l'activité scolaire de l'élève telle que nous l'avons décrite dans le chapitre 2. Un élève, qui veut réussir son examen, va décrypter dans l'énoncé tous les indices qui peuvent lui permettre de résoudre un exercice sans nécessairement se poser des questions d'ordre mathématique. Par exemple, si on lui demande de décomposer une fraction rationnelle en éléments simples et qu'à la question d'après, on lui demande de calculer une intégrale mettant en jeu cette fraction, il va immédiatement utiliser la décomposition en éléments simples sans se questionner sur une éventuelle autre démarche. Ce faisant, il a pour objectif la réussite scolaire et oublie que faire des mathématiques, c'est se questionner sur la pertinence d'une démarche, sur le résultat auquel on aboutit.

## 5. Tableau récapitulatif des différents types de malentendus

Nous faisons le bilan des différents types de malentendus par rapport à l'apprentissage de la preuve :

| *Eléments en jeu*<br><br>*Type de malentendu* | *Le professeur* | *La pratique du professeur conduit à* | *L'élève* |
|---|---|---|---|
| *réussite* | *pense que l'élève sait prouver et que la tâche est pertinente par rapport à l'apprentissage de la preuve.* | *la réussite de l'élève, mais n'est pas pertinente pour apprendre à prouver.* | *n'a cependant rien appris d'autre qu'à effectuer la tâche.* |
| *diagnostic échec* | *pense que la tâche est pertinente par rapport à l'apprentissage de la preuve, mais que l'élève est en difficulté.* | *l'échec de l'élève, mais n'est pas pertinente par rapport à l'apprentissage de la preuve.* | *ne comprend pas ou n'apprend pas, mais n'est pas nécessairement en difficulté.* |
| *rapport existant à la preuve* | *pense que l'élève est en difficulté et ne voit pas qu'il manque un apprentissage préalable.* | *l'échec de l'élève, un apprentissage préalable n'étant pas effectué.* | *ne peut accéder à la preuve, ni entrer dans l'activité mathématique.* |
| *sur le savoir* | *pense que l'élève a appris à prouver et ne voit pas le manque de pertinence de la tâche par rapport à ce savoir.* | *la réussite de l'élève, mais l'apprentissage n'est pas relatif à la preuve.* | *croit apprendre à prouver, mais apprend autre chose.* |
| *du détournement mathématique* | *pense que l'élève est en difficulté et ne voit pas que la tâche peut le détourner de l'activité mathématique.* | *l'échec de l'élève et n'est pas pertinente (elle développe un contexte non mathématique).* | *n'a pas d'activité mathématique.* |

Identifier auprès des enseignants ces malentendus et institutionnaliser ces savoirs, qui ne relèvent pas strictement des mathématiques, nous semblent devoir faire l'objet de la première situation de formation de l'ingénierie de formation.

# CHAPITRE 8
# PRESENTATION DE L'INGENIERIE

*« Tu sais, j'imagine, que ceux qui s'appliquent à la géométrie, à l'arithmétique ou aux sciences de ce genre, supposent le pair et l'impair, les figures, trois sortes d'angles et d'autres choses de la même famille, pour chaque recherche différente ; qu'ayant supposé ces choses comme s'ils les connaissaient, ils ne daignent en donner raison ni à eux-mêmes ni aux autres, estimant qu'elles sont claires pour tous ; qu'enfin, partant de là, ils déduisent ce qui s'ensuit et finissent par atteindre, de manière conséquente, l'objet que visait leur enquête. » (Platon, La République, livre VI, trad. Baccou 1966)*

Dans la première partie de notre travail, nous avons montré l'importance du décalage qui existe entre la preuve dans la communauté mathématique et la preuve dans la classe. L'objectif à long terme de l'ingénierie est de le réduire. L'objectif à court terme est d'en faire prendre conscience aux enseignants par un travail sur les conceptions, fondé sur trois points. Nous les précisons dans le premier paragraphe.

Nous explicitons ensuite nos intentions par rapport à l'enseignement de la preuve, en complément de celles que nous avons déjà affichées dans le chapitre 1, à savoir, d'abord, réduire la part du formalisme en classe où il occupe toute la place, alors que sa place est réduite dans la communauté mathématique, apprendre aux élèves à rédiger des preuves en mettant en avant les arguments pertinents, sans nécessairement tout dire, à pratiquer les mathématiques comme les mathématiciens. Nous développons dans ce chapitre de quelles mathématiques nous parlons.

Par l'explicitation de ces intentions, nous avons déjà pris position par rapport à certains résultats issus de travaux de didactique sur la preuve, nous poursuivons en ce sens par rapport à d'autres travaux sur la formation des enseignants. Nous proposons un modèle pour penser notre formation.

Enfin nous décrivons brièvement les trois problèmes que nous avons choisis pour notre ingénierie. Ils seront étudiés dans les chapitres 10 à 13. Nous précisons qu'en formation, ils doivent être introduits par une mise en évidence du rapport existant des élèves à la preuve, ce qui fait l'objet du chapitre 9.

## 1. Trois points d'appui pour induire chez les enseignants une prise de conscience de contradictions

Le décalage décrit ci-dessus se lit dans le contrat didactique usuel[75] relatif à la preuve, mais aussi dans les choix effectués par les enseignants pour l'apprentissage de la preuve, dans les manuels, et, dans une moindre mesure, dans les programmes ou documents d'accompagnement. Il résulte des conceptions des enseignants, sur la

[75] largement décrit au chapitre 2

preuve et son enseignement, enseignants qui, malgré tout, attendent de leurs élèves une activité mathématique. Cette contradiction entre les attendus des professeurs et leurs choix d'enseignement peut être, si elle est pointée, le moteur d'un changement. C'est notre premier point d'appui.

Certains professeurs ont déjà conscience de ce décalage. Ils reconnaissent, avec regret, qu'ils « formatent » leurs élèves, que les moyens pédagogiques qu'ils utilisent sont inefficaces pour induire un réel apprentissage de la preuve. En même temps, il semblerait qu'ils perçoivent ce passage comme obligatoire. D'autres enseignants peuvent par ailleurs ne pas avoir pris conscience de ce décalage. Nous voyons à cela deux raisons. La première est la réussite à court terme de beaucoup d'élèves. En effet, cette pratique qui consiste à imposer dès le début de l'apprentissage des « règles de formatage » très strictes, avant même que ne soit posée la question de la nécessité et de l'intérêt de la preuve, conduit à la réussite à court terme de beaucoup d'élèves dans l'écriture d'un certain type de preuve. Beaucoup d'élèves réussissent, nous ne le nions pas, à « écrire » des démonstrations sous forme « on sait que… or…donc… ». Pour peu que l'enseignant s'en tienne à ce type de preuve, les élèves peuvent rester en situation de réussite. Le professeur peut ne pas se rendre compte que ces bons résultats ne dénotent pas nécessairement que les élèves ont compris le sens de la preuve, que cette réussite se résume peut-être au respect des indices de surface, même pour ceux qui sont à l'aise avec le formalisme imposé. L'explicitation de ce malentendu, ainsi que des autres, que nous avons pointés au chapitre précédent, constitue notre deuxième point d'appui. La seconde raison est que les enseignants ne voient réellement pas le décalage entre la preuve en mathématiques et la preuve enseignée, car ils ont eux-mêmes de la preuve l'image d'un algorithme déductif fondé sur « on sait que… or…donc… ». Ils n'ont jamais eu de regard sur la preuve pratiquée par les mathématiciens.

Notre ingénierie vise à induire la prise de conscience du décalage d'une manière plus générale, par l'émergence d'une contradiction. C'est notre troisième point d'appui qui réside dans la confrontation entre la preuve qui est au cœur des problèmes qui constituent notre ingénierie et l'image qu'elle a dans la classe.

Pour cela nous nous plaçons sous l'hypothèse du modèle constructiviste d'acquisition des connaissances, selon laquelle la contradiction engendre un déséquilibre dont la compensation conduit à un apprentissage. Cependant, le fait de la contradiction est complexe. Ainsi une contradiction avérée pour un individu peut être inexistante ou niée pour un autre. Par exemple, même s'il est repéré que la réussite des élèves dans un certain type de preuves est fondée sur des malentendus (comme nous venons de le dire ci-dessus), cela ne détourne pas nécessairement les enseignants de leur pratique de formatage. Il y a d'autres explications à ce comportement, liées au métier d'enseignant, soucieux de garder un certain équilibre. Nous renvoyons à Robert & Rogalski (2002) et citons Robert (2005) :

[…] *pour les enseignants tous les choix a priori raisonnables, notamment en termes d'apprentissages, ne sont pas possibles : certaines ingénieries didactiques par exemple, pourtant très bien conçues, ne seront pas adoptées par les enseignants parce qu'elles ne peuvent pas rentrer dans cette enveloppe liée aux programmes, aux instructions, et à des habitudes profondes du milieu.*

## 2. Des constats qui peuvent ne pas impliquer un changement de pratiques

Les constats que nous allons proposer dans l'introduction de l'ingénierie (qui sera décrite plus loin) amènent à la conclusion que la plupart des élèves (surtout au collège) ne sont pas entrés dans la rationalité mathématique (ils ne connaissent pas de critère pour départager le vrai et le faux en mathématiques, ni le fonctionnement de l'implication, ils ne voient pas la preuve comme un moyen de valider, réduire le doute…). Si nous en concluons qu'il est incontournable de travailler dans le quotidien de la classe, au collège et au lycée, sur la signification du vrai et du faux en mathématiques pour que les élèves accèdent au sens de la preuve, ce n'est pas nécessairement ce qu'en tirent tous les enseignants, car cela peut impliquer un changement profond de contrat didactique, comme l'atteste la citation précédente. Un élève qui n'a aucun point de repère sur le vrai et le faux en mathématiques est exclu de tout débat mathématique : il ne peut que s'en remettre à la vérité qui vient du professeur, qui seul alors détient le pouvoir de lui dire ce qui est vrai[76] et ce qui est faux. Ce peut être une position confortable pour un professeur, surtout dans une classe difficile, où l'on impose souvent des cadres, des méthodes, parfois une seule méthode, comme le montre l'extrait suivant. Celui-ci rapporte les propos d'un professeur qui échange avec un autre collègue et un chercheur-clinicien, sur son enseignement dans une classe de troisième, à propos de la résolution des systèmes d'équations linéaires à deux inconnues. Les deux méthodes invoquées sont la méthode par substitution et la méthode par combinaisons linéaires :

*Moi, j'ai abandonné plusieurs méthodes. Moi je leur dis qu'il y a une méthode. C'est bon. Sinon ils mélangent tout, ils multiplient, après ils transforment, ils remplacent…*
*Ce qui ne marche pas, c'est quand tu en fais deux des méthodes, parce que là ils te font un petit pot-pourri de tes deux méthodes. A partir du moment où tu fais première méthode, deuxième méthode, après eux, ils mélangent les deux méthodes, tu vois. Et là ils te font des trucs ou alors ils n'arrivent pas à voir les deux inconnues.* (Roger, Ruellan & Clot 2007)

La prise de conscience par ce professeur du fait que les élèves ne possèdent pas de moyens de contrôle sur la vérité de ce qu'ils disent eux-mêmes, de ce que leurs pairs disent, de ce que le professeur dit, n'entraînera vraisemblablement pas un changement de sa pratique, dans laquelle il a trouvé un équilibre professionnel. C'est un professeur qui donne *la* méthode à suivre, l'élève applique ce que dit le professeur (ou tente de le faire), il n'y a pas d'autres questions à se poser. Ce qui guide le contrat dans cette classe, ce n'est pas le vrai ou le faux en mathématiques, c'est l'application de la méthode qui permet de « faire » des mathématiques, et il ne faut surtout pas dire aux élèves qu'il pourrait y avoir plusieurs méthodes. On est bien loin ici du « développement de la pensée autonome », reconnu par l'institution comme la principale mission de l'école (Rapport de l'Inspection générale n°2007-048) :

[...] *la focalisation sur la notion de compétences permet donc de porter une attention accrue aux processus d'apprentissage, à la façon dont l'élève apprend et utilise ses connaissances, et finalement au fonctionnement cognitif des individus.*
[...] *elle rappelle l'ardente obligation de donner du sens aux savoirs enseignés à l'école, d'en augmenter la portée au-delà de l'horizon de la seule réussite aux*

[76] Le professeur lui dit d'ailleurs que c'est juste, et non pas que c'est vrai. Ce glissement d'un mot vers l'autre n'est pas anodin.

*épreuves scolaires, et de mettre au premier rang des missions de l'école la formation de la pensée autonome.*

La pratique décrite par ce professeur s'appuie sur une conception, somme toute assez répandue et avec laquelle nous devons compter, que l'activité mathématique en classe est essentiellement *technique* (mais *technique non mathématique* comme nous l'avons décrite au chapitre 2 de la première partie). Le même professeur l'exprime dans ce qui suit (Roger, Ruellan & Clot 2007) :

*Moi je pense que c'est en faisant qu'on comprend, si tu veux. Comme je leur dis souvent, les mathématiques ce n'est pas de l'art, donc ça ne se regarde pas, ce n'est pas la peine de me regarder, ce n'est pas marqué sur mon nez, ce n'est pas marqué au tableau, les mathématiques, ça ne se lit pas, ce n'est pas en lisant. Pour moi, les mathématiques, ça s'apprend en faisant, donc on fait. On fait des choses et, après je pense que ça fait sens* […] *Mais il faut d'abord les faire. Si tu ne les fais pas, ça n'a pas de sens* […]. *On fait et on va trouver des solutions, donc ça n'est peut-être pas mal ce qu'on fait.*

Ce que nous soulignons ainsi, c'est bien l'existence de conceptions sur les mathématiques, sur la preuve, qui vont nécessairement aller à l'encontre de notre ingénierie de formation. Elles donnent lieu à des pratiques stables, communes à beaucoup de professeurs, qui persistent malgré les injonctions de l'institution elle-même (voir le rapport de l'Inspection générale n°2007-048). Nous renvoyons au concept de *genre* introduit par Clot (1999), que certains travaux de didactique (Robert 2005), reprennent actuellement dans l'étude du métier d'enseignant :

*Le genre est un ensemble ouvert de règles, de conventions, d'actions pour agir, non écrites, à la fois contraintes et ressources qui définissent, dans un milieu donné, l'usage des objets et l'échange entre les personnes.* (Clot 1999)

Voir le rapport des élèves à la preuve, tel qu'il existe, même si cela ne conduit pas nécessairement à un changement des pratiques, peut néanmoins contribuer, nous l'espérons, à une modification des conceptions. Nous défendons cependant l'idée qu'insister trop sur des explications qu'on peut donner du comportement des enseignants dans leurs classes (comme celui qui est décrit ci-dessus) peut apparaître comme une façon de les cautionner. Nous venons de faire des hypothèses sur les raisons du professeur ci-dessus à résister au changement de pratique : le contrat repose sur son autorité, il est le seul responsable sur le plan scientifique, les élèves ne peuvent pas accéder à une réelle activité mathématique. Nous développons ci-dessous d'autres explications, car elles engendrent des obstacles importants à l'efficacité de notre ingénierie, mais nous n'y reviendrons plus dans la suite. Cela peut en effet décourager d'entreprendre quelque formation que ce soit.

Ces explications des résistances aux changements de pratiques a renforcé notre volonté d'agir sur les conceptions.

- Les enseignants souhaitent obtenir le plus rapidement possible une réussite à court terme des élèves. Ils répondent en cela à des pressions extérieures. L'apprentissage de la preuve, on le sait, est nécessairement long. Or, actuellement, ce qui prend du temps « passe à la trappe » dans les classes.
- Ils aimeraient donner rapidement une représentation tangible du produit attendu. On fait croire en effet que la démonstration se réduit à un algorithme. C'est une façon de s'adapter à un public dont les pratiques langagières sont souvent pauvres. De plus, les indices de surface, survalorisés, rendent

« lisible » le produit fini aux élèves, même si cette lisibilité est fondée sur un malentendu.

• Les professeurs, en général, se conforment à des pratiques institutionnellement reconnues. « L'écrasement » de la démonstration sur la forme est en effet encouragée par les manuels et certains sites, comme nous l'avons vu dans la première partie.

• L'apprentissage doit pouvoir être évalué facilement. L'évaluation, par les professeurs, de ces productions stéréotypées, construites sur le même modèle, est en effet facilitée. On peut ainsi évaluer (et les notes compteront dans la moyenne de l'année) très rapidement au début de l'apprentissage, avec des résultats apparemment crédibles. On n'évalue que la forme, mais peu importe.

• L'enseignement de la preuve, voire des mathématiques, est difficile. Les enseignants veulent se rassurer face à une tâche que l'on sait très délicate. Ce repliement sur la forme diminue le risque, l'incertitude pour le professeur. Les gestes à enseigner et à apprendre sont désignés. On peut mesurer où l'on en est.

• Les professeurs de collège ne veulent pas « perdre de temps » à enseigner des savoirs qui ne sont pas valorisés par l'institution. Au brevet des collèges, « on ne demande pas de démonstration », disent les enseignants. Cette même institution a certes essayé d'agir en prônant l'existence de questions ouvertes au baccalauréat, mais ceci n'est guère une préoccupation de la plupart des enseignants de collège.

On entre sûrement dans le cercle vicieux (Perrin-Glorian 1993) des contraintes qui pèsent sur l'enseignant. Ces contraintes amènent à « martyriser sa matière », mais chaque professeur essaie de trouver un équilibre dans chacune de ses classes. On rejoint aussi en ce sens les travaux actuels d'A. Robert (Robert 2005) et de J. Rogalski (Rogalski 2003) qui, par leur démarche *de la double approche*, montrent bien les aspects liés au métier d'enseignant que l'on ne peut plus négliger en didactique des mathématiques :

*Il s'agit d'une double approche, qui s'appuie à la fois sur le didactique et sur l'ergonomique. Une double approche qui s'inspire du fait que pour comprendre des pratiques il est nécessaire de tenir compte à la fois des effets potentiels visés et des acteurs. L'emprunt à l'ergonomie consiste ici essentiellement à intégrer le point de vue du métier.* (Robert 2005)

Ces hypothèses, que nous venons d'énumérer, font partie du milieu pour notre ingénierie, qui va devoir leur opposer nos objectifs, liés à des raisons d'ordre épistémologique et philosophique, données dans l'introduction de cette thèse, et que nous développons dans ce qui suit.

### 3. Il est possible d'amener les élèves actuels à faire de vraies mathématiques dans quelque classe que ce soit

Nous avons émis l'hypothèse que, pour beaucoup d'enseignants, la construction d'un rapport adéquat à la preuve ne relevait guère de la responsabilité du professeur et que beaucoup d'élèves n'en construiraient jamais. Nous soutenons l'idée contraire. Les raisons qui nous poussent à vouloir changer les pratiques sont sous-tendues par l'idée que nous sommes convaincue de la possibilité d'induire chez les élèves la pratique d'une activité mathématique, conforme à celle des

mathématiciens, et ceci dans quelque classe que ce soit. Nous citons Legrand (1996) :

*Il est possible* […] *de faire faire des mathématiques en vraie grandeur aux élèves d'une classe ou aux étudiants d'un amphi.*

Nos objectifs par rapport aux élèves sont les suivants (Gandit & Massé-Demongeot 1996).

Nous voulons d'abord leur faire comprendre que les objets mathématiques sont des objets de pensée créés par une communauté. Ceci ne veut pas dire que ces objets sont loin de la réalité. Bien au contraire, ils sont souvent construits pour répondre à des problèmes du monde réel. Nous avons de ces objets mathématiques des représentations communes ou non, certaines d'entre elles sont bien codifiées comme, par exemple, les vecteurs, les angles droits..., mais d'autres le sont moins, elles peuvent néanmoins servir localement entre quelques interlocuteurs, à condition qu'ils se soient préalablement entendus. Un objet se distingue de ses représentations ; lors de la recherche, il y a très souvent, en géométrie par exemple, superposition d'une représentation de l'objet de pensée, nous dirons figure, et d'un objet réel, nous dirons dessin. La même trace sur la feuille peut être vue comme représentation de l'objet mental triangle ou comme dessin sur lequel j'expérimente, je mesure. Le même problème se pose dans le domaine numérique avec l'écran de la calculatrice dans le rapport entre l'affichage qu'elle propose et le nombre qui est en jeu.

Aider les élèves à entrer dans la rationalité mathématique est aussi un de nos objectifs, essentiel pour la preuve. Les objets mathématiques, et les affirmations à caractère général qui les concernent, telles que « Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme », sont des résultats, des productions de l'activité mathématique ; elles sont vraies s'il n'y a pas de contre-exemple, un seul contre-exemple suffit pour qu'elles soient fausses. Le vrai ne souffre pas d'exception. Une conséquence de cela est que plusieurs exemples ne permettent pas de généraliser, puisque l'existence d'exemples ne prouve pas qu'il n'y a pas de contre-exemple. Cette règle du vrai et du faux en mathématiques est aussi la base du caractère de nécessité des énoncés : dès que les hypothèses sont vérifiées, ce qui est annoncé dans la conclusion ne peut que se réaliser. Les énoncés ont un caractère prédictif, la validité de la prédiction étant garantie. Les mathématiques ont leur rationalité propre, différente de celle du quotidien, au sens qu'elle ne fonctionne pas toujours comme la logique du quotidien. Elle ne lui est cependant pas complètement étrangère. Mais en mathématiques, les contradictions sont intolérables ; dans le quotidien, il en va autrement.

Nous souhaitons également développer chez l'élève une habitude de contrôle, l'esprit critique, une attitude de doute. Il n'en demeure pas moins présent à notre esprit qu'il existe des énoncés auxquels on ne sait pas attacher de valeur de vérité, soit parce qu'on ne sait pas prouver qu'ils sont vrais ou faux, soit parce que, dans la théorie où ils se placent, dire qu'ils sont vrais ou dire qu'ils sont faux ne conduisent à aucune contradiction. Et même si l'élève, lui, est souvent dans cette situation *d'indécidabilité*, nous souhaiterions qu'il adopte l'attitude du doute, qu'il pose un regard critique sur tout énoncé nouveau, quel qu'il soit.

Ce qui précède rejoint notre objectif suivant : développer chez l'élève le goût de la recherche, la prise d'initiative, le désir d'enclencher un processus de preuve. Face à un problème, on adopte une attitude de recherche faite d'essais, d'erreurs, d'intuitions, de fausses pistes, d'expérimentations, s'engageant ainsi dans une démarche de preuve. On ne fait des mathématiques que si l'on adopte une attitude de preuve, les preuves étant là pour établir les connaissances. Si les démonstrations peuvent s'aider des sens (lecture de la figure par exemple), elles présentent cependant la caractéristique de se détacher de l'expérience et du monde sensible.

Nous voulons faire comprendre aux élèves la fonction de modèle qu'exercent les mathématiques. Les objets de pensée sur lesquels on travaille sont issus de problèmes relatifs à la réalité (et aussi de problèmes liés à d'autres objets de pensée), et la connaissance que l'on a d'eux peut permettre d'agir, de prévoir, dans cette réalité. C'est la fonction de modélisation des mathématiques qui ne peut s'exercer que par une très grande simplification du réel.

Enfin nous voulons faire apparaître la dimension sociale de la preuve, développer la communication. La preuve prend son statut dans une communauté, la classe en est une, avec son corpus de connaissances et son niveau de preuve qui évoluent au cours du temps. La dimension sociale est importante : chacun doit pouvoir apporter ses arguments, examiner ceux des autres, être entendu. Les moments où c'est le professeur qui dit le vrai ou le faux, ne doivent pas empiéter sur la validation, faite par l'élève lui-même, par des moyens mathématiques : chacun devrait arriver à se créer des convictions, soit par intuition remise éventuellement en question, soit en se donnant des preuves mathématiques, et non parce que le professeur, personne d'autorité, a dit.

Ces objectifs pour les élèves constituant le moteur de notre action, nous proposons des moyens pour réaliser cet apprentissage de la preuve.

## 4. Un modèle pour penser notre formation

Comment apprendre aux élèves à adopter une attitude de preuve et à produire des démonstrations rédigées ? Nous sommes persuadée que faire vivre la preuve en classe comme un moyen de convaincre (avec des arguments strictement mathématiques) et de réduire le doute et donc, nécessairement, donner toute sa place à la phase expérimentale qui précède le recours utile à un certain formalisme, apportent des réponses aux difficultés rencontrées par les enseignants dans l'enseignement de la preuve. Ces moyens que nous proposons restaurent en classe une partie du sens de la preuve telle qu'elle vit dans la communauté mathématique, ils permettent de réduire le décalage. Mais nous savons qu'il ne suffit pas de dire que ce sont des moyens de remédier aux problèmes de l'apprentissage de la preuve pour que les enseignants s'en emparent efficacement. Citons Robert (2005) :

*Former des pratiques serait, dans le cadre que nous venons de préciser, réussir à donner à chaque enseignant des moyens pour « optimiser » à son échelle les composantes cognitives et médiatives de ses pratiques, en tenant compte des contraintes, variables selon ses classes. « Donner des moyens » signifierait donner des connaissances, des moyens d'apprécier leur portée et leurs limites, des moyens de les critiquer et de les adapter.*

L'efficacité de ces moyens repose en effet sur toute une panoplie de présupposés et de conceptions, sans lesquels on ne peut se les approprier, et que nous allons essayer d'expliciter. C'est l'apprentissage de ces moyens par les enseignants que nous souhaitons induire par notre ingénierie. Mais cet apprentissage ne peut être immédiat, nous visons le long terme. Les moyens que nous donnons demandent en effet une évolution profonde des conceptions des enseignants relativement à la preuve et à son enseignement, voire une révolution.

C'est notre hypothèse de travail essentielle, à savoir que travailler sur les conceptions aide à la modification des pratiques.

Nous n'avons pas choisi de faire *un livre du maître sur la preuve*, ni de proposer une liste d'exercices à faire en classe pour réaliser l'apprentissage de la preuve. Nous sommes en effet convaincue de l'inefficacité du moyen pédagogique qui consisterait à proposer aux enseignants une liste de tâches, même précisément décrites et largement commentées, qu'ils n'auraient plus qu'à donner à leurs élèves pour qu'ils apprennent à démontrer. Il faut en effet qu'en plus, la classe soit gérée de manière appropriée, laissant aux élèves une certaine responsabilité scientifique dans l'activité mathématique, et ceci pas seulement lors d'activités spécifiques sur la preuve, mais tout au long des séances, même lorsqu'on corrige un exercice. Nous visons ainsi l'établissement d'un contrat didactique radicalement différent de celui que nous avons nommé le contrat didactique usuel relatif à la preuve, qui met en avant le formalisme. Ce nouveau contrat doit accorder à l'élève une large part de la responsabilité scientifique dans les actions et les productions de la classe, avons-nous dit. L'élève doit être en mesure de proposer des conjectures et de les valider ou de les invalider. Par suite le professeur doit avoir fait au préalable la dévolution à la classe de cette responsabilité scientifique. Ceci ne peut donc avoir lieu sans une évolution importante des conceptions et ne peut être réalisé à court terme.

Pour résumer notre conception de la formation, nous proposons un schéma (voir figure 1). Nous y faisons l'hypothèse que l'action du professeur n'est pas entravée par toutes les raisons (décrites dans le paragraphe 2) qu'il pourrait avoir à ne pas réduire le décalage signalé.

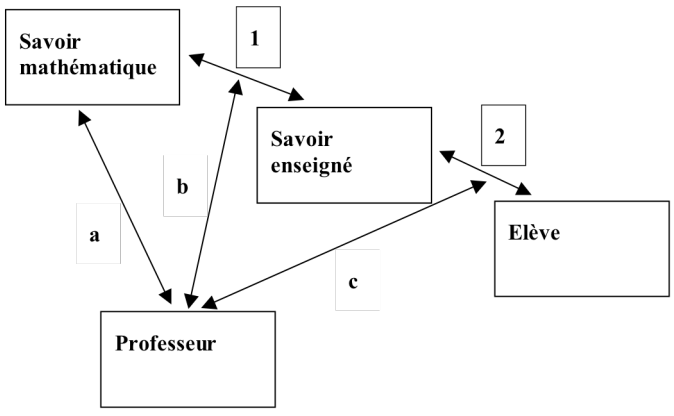



**Figure 1**

Les flèches numérotées 1 et 2 symbolisent les lieux d'action du professeur : entre le savoir mathématique et le savoir enseigné, d'une part, entre le savoir enseigné et l'élève, d'autre part, chacun dans un aller-retour. Nous ne disons pas que le professeur est le seul à agir entre le savoir mathématique et le savoir enseigné : la noosphère participe à cet aller-retour. En formation, nous souhaitons agir sur les allers-retours représentés par les flèches a, b et c. Elles constituent les lieux d'action du formateur.

## 5. Il est possible de faire évoluer les conceptions des enseignants sur la preuve

Nous avons déjà vu au paragraphe 5 de la deuxième partie du chapitre 2 (Le contrat usuel relatif à la preuve dans les pratiques de classe de collège) des exemples qui montraient une évolution des conceptions d'enseignants sur l'enseignement de la preuve. Nous donnons ici un autre exemple, de façon plus développée, en mettant en évidence le changement opéré dans la pratique du professeur. Il s'agit d'un professeur stagiaire (Jamgotchian 2005) qui a initié les élèves à la démonstration en utilisant un tableau en trois colonnes : première colonne intitulée « Je sais que », deuxième « D'après la propriété », troisième « J'en conclus que ». Dans son mémoire professionnel, il donne les raisons qui l'ont poussé à recourir à cet auxiliaire pédagogique :

*Pour ceux qui maîtrisent la structure des démonstrations, la représentation sous forme de tableaux, ou tout autre représentation, apparaît comme une clarification. Cela explique en partie l'enthousiasme des profs pour ces méthodes. Beaucoup les utilisent pour introduire la démonstration, d'autres iront même jusqu'à en faire un langage exclusif.*
*Pour le jeune professeur que je suis, ce type d'organisation présentait l'avantage d'un cadre rigide et donc plus rassurant. Je le voyais comme un moyen de « dompter » la difficulté des démonstrations car il offrait un environnement où le statut d'une proposition réglementait sa « position géographique » au sein du tableau. Il était donc l'outil idéal, car permettant de bien mettre en évidence les trois composantes de chaque pas de raisonnement. Même si l'articulation des pas est au contraire peu apparente, j'étais très optimiste sur la valeur ajoutée didactique de ce tableau. De plus, je pensais qu'en réduisant les passages de type « inférence » et « enchaînement » à un aspect purement technique (remplir un tableau), cela permettrait aux élèves de ne pas s'attarder sur des questions de forme et de se consacrer pleinement à la recherche de fond de la solution. J'avais cependant conscience que cela ne serait qu'une phase de transition vers une rédaction libre et ne pouvait d'aucune manière constituer une fin en soi.* (Jamgotchian 2005)

On retrouve la plupart des raisons évoquées au paragraphe 2 de ce chapitre : cadre rassurant pour le professeur, qui donne une représentation du produit fini, méthode qui fait partie des coutumes et qui permet aux élèves de réussir. On peut reconnaître des composantes de conception sur la preuve : *P*[77], *FM*[78] et *AC*[79] (ces deux dernières

[77] *P* (Pas) : une preuve est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse – règle conclusion ; la preuve d'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.

[78] *FM* (Fichier-Méthodes) : une preuve se construit à partir des stratégies vues dans le cursus secondaire, elle repose sur un corpus de connaissances construit et bien identifié dans lequel il n'y a qu'à puiser.

se rattachant au titre de la deuxième colonne du tableau). Il faut toutefois noter qu'il pensait que le recours à ce type de tableau pouvait permettre aux élèves de se libérer de l'aspect technique de l'écriture de preuve, un peu comme une calculatrice permet de se décharger de l'aspect calculatoire d'un problème et favorise la centration sur le raisonnement.

Ce professeur obtient une très large réussite de la part de ses élèves dans la confection de ces tableaux. Soucieux tout de même de vérifier les apprentissages, il demande à sa classe une preuve, sans contrainte de style, sauf l'interdiction de faire un tableau, et il conclut que « c'est un fiasco ». La conclusion de son mémoire, un peu radicale, montre l'évolution de sa conception :

*Il m'est difficile de savoir si le tableau a permis aux élèves d'avoir une perception différente du statut de la proposition mathématique. Et pour être tout à fait honnête, il m'importe peu de le savoir à présent que je sais cette technique être le pire ennemi de la démonstration.* (Jamgotchian 2005)

## 6. Le cœur de notre ingénierie de formation : trois problèmes

Si nous avons décidé de travailler sur les conceptions des enseignants relativement à la preuve (flèche a de la figure 1), à son enseignement (flèche b) et à son apprentissage (flèche c), c'est que nous pensons que, sans cela, la transformation des pratiques ne peut être que superficielle et éphémère. Aussi avons-nous choisi dans notre ingénierie, pour impulser cette évolution des pratiques, de mettre à jour le rapport des enseignants à la preuve, en les confrontant à des problèmes mathématiques et à l'écriture de preuves. Nous souhaitons en quelque sorte leur faire vivre une expérience cruciale.

Ceci est fondé sur notre deuxième hypothèse de travail : placer les professeurs en situation de questionnement par rapport à la démonstration, à travers une activité de recherche de problème et de preuve, les amènera à réexaminer leurs pratiques d'enseignant et le positionnement demandé à l'élève. Cela les conduira aussi à être plus sensibles à des analyses, des suggestions, des ouvertures que nous pourrons ensuite proposer.

Ainsi le cœur de l'ingénierie est constitué de trois problèmes, dont voici les énoncés tels qu'ils sont proposés aux enseignants.

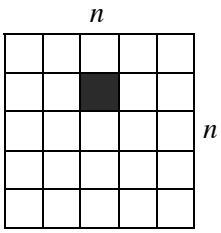
---

[79] *AC* (Application du Cours) : la preuve est un moyen de mettre en œuvre les connaissances du cours.

*Le Centre de Secours*
*Dans une vaste région se trouvent quatre villages de même importance ; on veut construire un centre de secours muni d'un hélicoptère de façon à pouvoir atteindre le plus rapidement possible le village le plus éloigné. Où placer le centre de secours ?*

*Le Polymino*

*On considère un polymino carré privé d'une case (un exemple est dessiné ci-contre).*
*Est-il possible de le paver avec des dominos ?*




*Le Pentagone*
*Somme des angles d'un pentagone.*

Ces trois problèmes visent des aspects divers de la preuve et vont permettre d'aborder des points spécifiques pour l'enseignement de la démonstration. Ils ont été choisis en fonction de variables :

- la proximité apparente avec les pratiques,
- le niveau des connaissances en jeu,
- le choix d'une modélisation,
- le recours à l'acte de définition,
- la compréhension de ce que l'on cherche,
- la facilité à produire des conjectures fausses et des contre-exemples,
- la variété des types de preuves,
- la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante,
- La résolution du problème passe par la preuve de l'existence ou de l'inexistence d'un objet.

Certaines de ces variables prennent des valeurs différentes suivant les problèmes. La résolution du problème du *Centre de Secours* passe par une phase de modélisation, montrant un intérêt de la géométrie plane, ce qui suscite l'intérêt des enseignants. La dévolution en est facilitée, d'autant plus que la plupart des enseignants pensent que la preuve s'apprend dans le domaine de la géométrie. Il est bien évident que *le Pentagone* relève aussi de la géométrie plane, mais ce polygone est un objet peu étudié au collège et semble plus difficile que le quadrilatère… De plus, la notion d'angle est complexe. Quant *au Polymino*, des blocages se sont déjà produits en formation, les stagiaires se demandant pourquoi on leur proposait un problème aussi loin de leurs préoccupations habituelles, pensant perdre leur temps… Il est bien évident que *le Centre de Secours* n'est pas plus proche des pratiques habituelles que *le Polymino* ou *le Pentagone* ; ce n'est que sa façade, pourrait-on dire, qui peut paraître aux enseignants, plus attirante que les deux autres

problèmes ; en réalité, la difficulté réside dans la compréhension de ce que l'on cherche. Si l'attirance est moindre vers *le Polymino* ou *le Pentagone*, l'entrée réelle dans ces deux problèmes est plus facile que dans *le Centre de Secours*, mais les enseignants n'en ont pas nécessairement conscience. Pour les trois problèmes, les connaissances sont simples sur le plan des objets mathématiques en jeu. Elles sont élémentaires pour *le Polymino* : parité des nombres entiers, aire d'un rectangle, pavage. Elles sont légèrement moins simples pour *le Pentagone* : pentagone, angle, mais surtout il faut prendre l'initiative de les définir. En ce qui concerne *le Centre de secours*, elles sont un peu plus complexes, mais relèvent tout de même de la géométrie du collège : notion de centre, disque, angle, cercle circonscrit à un triangle. La recherche des trois problèmes passe par une expérimentation sur des cas simples ; il s'en dégage assez rapidement des résultats (avec leur preuve), des conjectures fausses sont facilement formulées à propos *du Centre de secours*, conjectures facilement réfutées. Si les objets mathématiques présents dans ces trois problèmes sont simples, les raisonnements qui les mettent en jeu s'inscrivent en rupture avec les pratiques usuelles et déconcertent parfois les enseignants, surtout dans *le Polymino*. Les rédactions des preuves ne correspondent pas non plus à ce qui est demandé dans les classes. Les enseignants peuvent se sentir loin de ce qu'ils reconnaissent pour une démonstration. *Le Polymino* met en avant la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante et les types de preuve sont très variés. *Le Pentagone* apparaît beaucoup plus rassurant sur ce plan : certains enseignants écrivent des démonstrations en suivant les règles du contrat usuel dans le cas du pentagone régulier, avant de s'apercevoir éventuellement qu'il pourrait exister d'autres cas de pentagones. Quant au problème *du Centre de Secours*, ce n'est qu'après un temps assez long que les enseignants perçoivent la difficulté du problème ou n'entrent jamais, sans vraiment s'en apercevoir, dans la question posée ; ils en sont détournés par le recours à des connaissances qui s'avèrent, en réalité, étrangères au problème.

En résumé :

| *Problèmes*<br>*Variables* | *Le Centre de Secours* | *Le Pentagone* | *Le Polymino* |
|---|---|---|---|
| *La proximité apparente avec les pratiques* | *semble très proche* | *est proche* | *est éloigné* |
| *Le niveau des connaissances en jeu* | *élémentaire* | *élémentaire* | *élémentaire* |
| *Le choix d'une modélisation* | *nécessaire : deux choix possibles* | *pas de modélisation* | *léger* |
| *Le recours à l'acte de définition* | *n'est pas en jeu* | *est essentiel* | *n'est pas en jeu* |
| *La compréhension de ce que l'on cherche* | *difficile* | *semble facile* | *facile* |
| *La facilité à produire des conjectures fausses et des contre-exemples* | *très facile* | *moins facile* | *facile* |
| *La variété des types de preuves* | *pas beaucoup de types de preuves* | *non* | *beaucoup de types de preuves* |
| *La distinction entre condition nécessaire et condition suffisante* | *n'est pas en jeu* | *n'est pas en jeu* | *est en jeu de manière importante* |
| *La résolution du problème passe par la preuve de l'existence ou de l'inexistence d'un objet* | *oui de l'existence d'un centre* | *oui, de l'existence d'une triangulation du pentagone* | *oui suivant les cas, de l'existence ou de l'inexistence d'un pavage* |

Notre travail de thèse relativement à ces trois problèmes aboutit à des résultats sur le rapport à la preuve des enseignants, que nous développons dans les chapitres 10 et suivants.

La situation de formation organisée autour de ces trois problèmes ne consiste pas seulement en leur résolution par les enseignants. Celle-ci n'en constitue qu'une petite partie et n'est qu'un moyen de mettre à jour leurs conceptions sur la preuve. Autour de chaque problème, nous proposons deux parties, d'une part la recherche du problème par groupe, pendant un temps assez court (trente minutes), suivie de l'écriture par chaque enseignant d'un texte relatif à cette recherche (un *écrit de recherche*[80]), d'autre part un débat sur des productions, obtenues pendant la séance ou antérieurement, par d'autres enseignants ou des élèves. Ce débat doit se clore par une institutionnalisation à deux niveaux. Le premier concerne la résolution des problèmes : les démarches, les connaissances en jeu, les conceptions sur la preuve. Le second niveau concerne l'enseignement de la preuve, plus particulièrement la remise en cause du contrat didactique usuel par rapport à la preuve ou l'installation dans la classe d'un nouveau contrat didactique. Ceci constitue, ne l'oublions pas, notre objectif à long terme.

[80] Voir au chapitre 1.

Des pistes pour la classe peuvent découler de ce travail sur les problèmes. Comment faire entrer les élèves dans la rationalité mathématique (le vrai, le faux) (Demongeot 2003) ? Quelles particularités présentent les preuves relatives à ces problèmes par rapport à celles qui sont faites en classe ? Quel travail à faire avec les élèves pour les faire évoluer sur le plan de l'écriture vers la rédaction d'une preuve ?

En particulier, une possibilité d'évolution se situe dans le repérage d'éléments de preuve qui sortent du contrat usuel, comme par exemple les *solutions particulières* ou *les stratégies locales*. La résolution de ces problèmes permet d'institutionnaliser ce qu'est un *résultat* en mathématiques : ce que nous appelons un *résultat* peut recouvrir différentes formes, qui sont toutes présentes dans les productions sur les problèmes (comme nous le verrons dans les chapitres suivants). Un *résultat*, ce peut être :

- une solution, dans un cas particulier du problème, par exemple, le centre de secours dans le cas de trois points alignés. La preuve n'est pas nécessairement donnée explicitement, mais l'auteur l'a en tête, pourrait-on dire. C'est ce que l'on peut appeler une *solution particulière* ;

- une méthode d'élaboration d'une solution relative à un cas particulier ou plus générale, c'est ce que nous appellerons une *stratégie locale* (relative au cas particulier) ou *globale* (méthode plus générale). Un exemple de stratégie locale par rapport au *Centre de secours* est que, pour déterminer le centre de secours pour quatre points, on se ramène à deux points ou bien à trois points, suivant certains cas identifiés ;

- une *preuve*, qui peut elle aussi, être *locale* si elle concerne un cas particulier ou un élément particulier du problème ou *globale*, s'il s'agit de la preuve de la solution du problème. Un contre-exemple à une conjecture donnée est un exemple de preuve locale. Le Centre de secours, par exemple, donne lieu à de multiples conjectures que l'on peut réfuter par des contre-exemples.

Les professeurs produisent des résultats lors de la recherche des problèmes : il s'agit de se prononcer sur leur validité et de les faire ressortir en tant qu'éléments constitutifs de la preuve.

## 7. Préalablement il faut montrer aux enseignants le rapport existant des élèves à la preuve

Pour obtenir des enseignants en formation qu'ils vivent pleinement cette expérience cruciale, que constitue la résolution de ces trois problèmes (ou d'au moins l'un d'entre eux), nous savons, d'après notre expérience de formatrice, que nous devons débuter la formation par une situation introductrice mûrement réfléchie, une mise en bouche en quelque sorte. Sinon, nous risquons le rejet de la formation par les enseignants, tant la distance peut leur paraître grande entre, d'une part, leur univers mathématique et la résolution des trois problèmes, d'autre part, leur pratique et ce que nous proposons pour l'enseignement à l'issue du travail sur ces problèmes. Nous explicitons cette introduction dans le chapitre suivant (chapitre 9). Elle montre *le rapport existant des élèves à la preuve*, avant même que ne commence

officiellement l'enseignement de celle-ci, elle fait prendre conscience des *malentendus* explicités au chapitre 7.

## 8. D'autres outils pour compléter notre ingénierie de formation sur la preuve

Si le travail sur les trois problèmes et la situation introductive évoquée ci-dessus constituent l'essentiel de l'ingénierie de formation, celle-ci se décline néanmoins en différents outils que nous décrivons succinctement ci-dessous, en guise de conclusion de cette présentation.

### Un questionnaire préalable sur l'enseignement de la preuve permet un débat sur les conceptions en fin de formation

La formation peut être préparée en amont par un questionnaire pour décrire le rapport existant des professeurs à l'enseignement de la preuve. Il propose une liste d'exercices et de mises en œuvre possibles dans la classe. Les professeurs doivent faire un choix correspondant à l'objectif d'enseigner la preuve en classe, suivant le niveau qu'ils sélectionnent. Un exemple a été analysé dans le chapitre 4. Ce questionnaire est plus utile en formation continue qu'en formation initiale, surtout si celle-ci se situe tôt dans l'année scolaire, à un moment où les professeurs stagiaires ne se sont pas posé beaucoup de questions sur l'enseignement de la preuve. Les réponses fournies constituent un matériau pour favoriser les échanges[81] ultérieurs et faire émerger les contradictions dans les pratiques. C'est un élément constitutif du milieu pour les situations ultérieures. Il faudrait que les enseignants puissent y répondre avant la première heure de la formation et qu'un débat ait lieu en fin de formation sur leurs réponses. Les échanges sont riches. Les enseignants cherchent à justifier leurs choix d'activités et de mise en œuvre en classe par rapport à la preuve. Le débat est fructueux dans le sens de l'explicitation des conceptions.

### La pratique de la *narration de recherche* est un premier pas vers l'*écrit de recherche*, qui peut évoluer vers l'écriture d'une preuve

Les professeurs sont assez déstabilisés, d'une part, par la description du rapport existant des élèves à la preuve, d'autre part, par ce qui ressort de la recherche des problèmes. Ils peuvent alors percevoir les écarts entre leur rapport à la preuve et, d'une part, celui des élèves (l'existant), d'autre part, celui de la communauté mathématique. Ils peuvent aussi reconnaître à ce moment-là l'inefficacité de leurs pratiques. Le malaise peut être grand.

Nous proposons un moyen, qui ne demande pas encore une révolution dans les façons d'enseigner, mais qui permet aux élèves d'évoluer dans l'apprentissage de l'écriture de preuves : les *narrations de recherche*. Nous les présentons au travers de différents auteurs qui les ont décrites et illustrées (Sauter 2000 ; IREM de Paris 7, 2002…). On travaille le rapport des élèves à la preuve en examinant des copies de narration de recherche, sur les trois problèmes ou d'autres, mais aussi ce qu'elles

[81] Un tel échange est retranscrit à l'annexe 4 du chapitre 4.

révèlent de l'activité mathématique des élèves. La plupart du temps, les enseignants sont étonnés par le contenu scientifique de ces copies. Par certaines similarités entre les écrits des professeurs et ceux des élèves, les copies montrent aussi un autre rapport possible des élèves aux mathématiques et à la preuve en construction. Par d'autres aspects, elles étayent en même temps les malentendus. Enfin, la pratique de la narration de recherche est un moyen d'amorcer l'écriture de preuve, un premier pas vers l'*écrit de recherche*, qui peut progressivement évoluer vers un texte plus formel, n'intégrant pas nécessairement la démarche de recherche. Nous invitons donc les enseignants à proposer à leurs élèves d'écrire des narrations de recherche.

**Une situation qui permet de réfléchir sur l'activité mathématique, sur la logique utile en classe et de poser les bases d'un nouveau contrat didactique**

Il s'agit de la situation *Circuit* (*circuit électrique*, pour le lycée et la formation des enseignants, ou *circuit de bus*, pour le collège). Nous ne développons pas sur ce point, mais renvoyons à Legrand (1990) et Gandit & Massé-Demongeot (1996, 2002). Notre expérience de professeure et de formatrice nous conduit à dire que cette situation est exceptionnellement pertinente par rapport aux objectifs affirmés dans le titre ci-dessus. En formation, les enseignants doivent la vivre pour eux-mêmes, sans penser à leurs élèves. Il est utile de montrer ensuite comment elle a été gérée par le formateur et les raisons de ses gestes professionnels, enfin qu'elle peut être pratiquée de la même façon en classe.

# CHAPITRE 9
## UN REGARD SUR LES PRATIQUES ET LE RAPPORT EXISTANT DES ELEVES A LA PREUVE

*« L'ensemble de Cantor et la courbe de Peano ont, eux aussi, vu le jour uniquement comme contre-exemples, c'est-à-dire comme preuves directes que certaines notions que l'on disait fondamentales étaient (en fait) sans fondement ; les géomètres et les analystes s'étaient convaincus qu'elles étaient intuitives et inévitables, bien que leur invention par Leibniz et Newton ne remontât alors qu'à deux siècles à peine. »*
*(Benoît Mandelbrot, Les fractales, Encyclopaedia Universalis, supplément II Les enjeux, 1985)*

Ce chapitre rapporte la première situation de notre ingénierie de formation. Elle est indispensable, avons-nous dit, pour la construction d'un milieu favorable à la dévolution des trois problèmes qui suivent. Nous voulons montrer aux enseignants certains éléments du *rapport existant* des élèves à la preuve, avec lequel ils vont devoir compter dans leur enseignement de la preuve, qu'ils ne doivent pas négliger sous peine de voir s'installer des *malentendus*, comme ceux que nous avons décrits au chapitre 7. Bien souvent, c'est le *rapport attendu* des élèves à la preuve (plus conforme à celui de la communauté mathématique) que l'on considère pour asseoir sa pratique (nous l'avons décrit dans la première partie de notre travail). Nous voulons insister sur le fait que ce rapport *attendu* ne peut se construire qu'à partir du rapport *existant*. Aussi donnons-nous quelques éléments pour mieux cerner ce dernier, qui peut résister dans sa différence avec le rapport *attendu*, bien au-delà des classes de collège, comme nous allons le voir dans les épisodes qui suivent, tirés de la vie des classes de lycée. Nous les avons choisis en seconde ou en première scientifique, où les élèves ont un passé mathématique plus important, pour montrer combien ce rapport existant à la preuve est éloigné, et le demeure, de celui qui est attendu. Mais nous proposons aussi des exemples tirés du collège.

Nous concevons cette situation en trois parties[82]. La première est constituée de faits d'élèves, qui sont rapportés aux enseignants auxquels on demande ou propose une analyse. La deuxième consiste en une étude de copies d'élèves, la troisième en une proposition d'ouverture sur une autre pratique. La première partie débute par *l'ami malade*, décrit au début du chapitre 7 et que nous ne reprenons pas, se poursuit par les trois premiers exemples intitulés *« C'est une petite erreur* », *« Il n'a pas le droit de… »*, *« On sait que… »*. Ceux-ci attestent d'un rapport à la preuve fondé sur la forme, celle-ci étant mise en avant par les élèves eux-mêmes, ce qui montre la prégnance du contrat usuel, qui est ainsi explicité au fur et à mesure des exemples. Le dernier d'entre eux donne en outre des raisons de remettre en cause la *règle du on sait que-or-donc*, ce qui est repris à partir de l'analyse des copies, proposée dans la deuxième partie. Le quatrième exemple rapporté, *« Il a simplement donné un exemple, il en faudrait au moins deux, et… »*, montre un rapport des élèves à la

[82] Elles correspondent chacune à un paragraphe dans la suite de ce chapitre.

preuve bâti sur des bases incertaines par rapport au vrai/faux. Chacune des deux parties se termine par une synthèse. La troisième partie est un peu différente : elle montre qu'on peut adopter un autre point de vue dans l'apprentissage de la preuve.

Les faits cités en exemples ou les copies proposées peuvent facilement être remplacés par d'autres, menant aux mêmes constats : ils sont en effet représentatifs du comportement de beaucoup d'élèves, dans des classes ordinaires.

## 1. Le rapport existant des élèves à la preuve

### « C'est une petite erreur »

Dans une classe de seconde, le professeur a proposé à ses élèves de se prononcer sur le vrai ou le faux d'une résolution d'inéquation et de justifier leur évaluation. Le texte ci-dessous en caractères italiques est celui qui est proposé par le professeur.

*Voici l'énoncé d'un exercice et une solution proposée par un élève. La solution est-elle vraie ou fausse ? Justifier.*
*Enoncé : résoudre dans IR l'inéquation* $(2x-3)(6-3x) \geq 0$
*Solution proposée par l'élève :*
$(2x-3)(6-3x) \geq 0$
$(2x-3) \geq 0$ *et* $(6-3x) \geq 0$
$2x \geq 3$ *et* $-3x \geq -6$
$x \geq \frac{3}{2}$ *et* $x \leq 2$
*D'où* $S = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[ \cap ]-\infty ; 2\right] = \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$

Nous ne comprenons pas très bien l'objectif du professeur. Est-il question de travailler les *trous* dans une preuve ? En effet l'inéquation de départ est bien équivalente à :

$$\left[2x-3=0 \text{ ou } 6-3x=0\right] \text{ ou } \begin{cases} 2x-3>0 \\ 6-3x>0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x-3<0 \\ 6-3x<0 \end{cases}.$$

Ce dernier système n'a pas de solution, donc l'inéquation de départ est équivalente à $\left[2x-3=0 \text{ ou } 6-3x=0\right] \text{ ou } \begin{cases} 2x-3>0 \\ 6-3x>0 \end{cases}$, et donc à « $2x-3 \geq 0$ et $6-3x \geq 0$ » qui a bien pour ensemble de solutions $\left[\frac{3}{2} ; 2\right]$. L'équivalence n'est pas signalée dans la solution de l'élève, ni la raison. Mais si l'on considère que le passage d'une ligne à la suivante se fait par équivalence, bien que cela ne soit pas mentionné, on ne peut pas invalider cette résolution. Par contre, il est fort probable que le professeur attende que le passage de la première à la deuxième ligne soit justifié, n'acceptant pas le *trou* qui correspond au fait que le système constitué par les deux facteurs strictement négatifs n'ait pas de solution. Il est même fort possible que le professeur souhaite

« un tableau de signes ». Mais là n'est pas notre propos, ce qui nous intéresse ici est la correction de cette copie, proposée par un élève (de seconde).

Voici sa réponse, telle qu'il l'a écrite (une copie de l'original figure en annexe à ce chapitre) :

*[Une flèche pointe vers l'inéquation $x \leq 2$ de l'énoncé ci-dessus] $x \geq 2$ car un négatif avec un négatif fait un positif.*
*C'est juste a part cette petite erreure, le reste, reste juste.*

Pour justifier que l'inéquation correcte est $x \geq 2$ au lieu de $x \leq 2$ (ce qui est faux), il fait un amalgame entre la « règle » selon laquelle une inégalité entre nombres réels du type $a \geq b$ est équivalente à $a / c \geq b / c$ dans le cas où $c$ est strictement positif et l'autre « règle » de calcul qui dit que le quotient d'un nombre négatif par un nombre strictement négatif est positif. L'équivalence entre $-3\ x \geq -\ 6$ et $x \geq 2$ peut être invalidée par un contre-exemple. Là n'est cependant pas l'essentiel de ce que nous voulons montrer avec cet épisode. Il réside plutôt dans le fait que l'élève pense que c'est une « petite erreur » : en effet, il pense qu'il faut juste écrire le signe $\geq$ à la place du signe $\leq$ et que cela ne change pas le reste.

Ce que nous désignons ici est le fait que l'élève considère comme peu grave de devoir simplement écrire un symbole à la place d'un autre, ne mentionnant pas ce que cela entraîne pour la suite de la preuve. Le rapport existant de cet élève à la preuve ne repose pas sur le raisonnement mathématique, essentiellement ici l'équivalence entre les inéquations ou systèmes d'inéquations : il s'agit seulement de faire des calculs en suivant des règles plus ou moins sues, la volonté de preuve est absente. L'élève ne se situe pas là où l'espère le professeur. On pourrait remplacer cet exemple par beaucoup d'autres, qui attestent de ce même type de rapport à la preuve, qu'on peut décrire par : une erreur dans une preuve (d'ailleurs il est fort probable que l'élève ne voie pas qu'il s'agit d'une preuve[83]) peut se corriger comme une faute d'orthographe, il suffit de rectifier là où elle apparaît sans modifier le reste.

**« Il n'a pas le droit de… »**

Il s'agit de la même classe de seconde que la précédente, l'énoncé de départ et la question du professeur sont les mêmes. Voici la réponse telle qu'elle est écrite par un autre élève (une copie de l'original figure en annexe à ce chapitre) :

*La solution proposée par l'élève est fausse car dans la solution l'élève a écrit*
*$S = [3/2 ; +\infty[ \cap ]-\infty ; 2]$ ( = ~~[3/2 ; 2]~~) il n'a pas le droit d'écrire sont résultat final de cette façon il doit écrire $S = [3/2 ; 2]$.*

Pour cet élève le faux vient d'une écriture incorrecte de l'ensemble des solutions, incorrecte non pas sur le fond, mais sur la forme. Il fait référence au droit : en mathématiques, on impose des façons de présenter comme on impose de « rouler sur la voie de droite » dans le code de la route en France. Ce que nous

[83] Certains enseignants que nous avons interrogés ne considèrent pas que la résolution d'une inéquation (ou d'une équation) est une preuve.

montrons ici, c'est que l'élève invalide une réponse à cause de sa forme, il ne se préoccupe pas du tout du fond, c'est simplement une mauvaise présentation de la réponse. Nous rapprochons ce fait du comportement de certains professeurs qui rejettent des démonstrations lorsque les élèves rédigent leur justification en employant « car ».

Cet exemple permet d'introduire le débat sur l'usage d'un formalisme qui n'est pas justifié sur le plan mathématique, mais qui est imposé par contrat. On remarque d'autant plus cette prégnance du formalisme en classe que c'est un élève qui y fait référence. On peut évidemment remplacer cet épisode par tout exemple où l'élève invoque « qu'il n'a pas le droit » de faire telle ou telle chose en mathématiques, parce qu'on lui a imposé de procéder ainsi, et non pas pour des raisons mathématiquement fondées.

**« On sait que… »**

Nous avons déjà évoqué l'utilisation de cette expression dans le contrat usuel relatif à la preuve, sa présence dans les manuels. Il s'agit ici d'un court dialogue entre deux élèves d'une classe de première scientifique, saisi à leur insu par leur professeur :

*« Soit I le point d'intersection des trois droites…, commence Sam.*
*- Mais tu ne sais pas qu'elles sont concourantes ! répond Marielle.*
*- Mais si ! Je le sais, qu'elles sont concourantes ! On me demande de le démontrer, c'est que c'est vrai ! »*

Dans cet épisode, le contexte est strictement mathématique : deux élèves sont en train de traiter un exercice où il s'agit de démontrer que trois droites sont concourantes. Sam a parfaitement intégré les règles du fonctionnement scolaire : si on lui demande de démontrer quelque chose, il n'a aucun doute, ce ne peut qu'être vrai. Cependant il commence sa preuve par l'existence de l'objet qu'il veut prouver[84], ce qui est dénoncé par Marielle. Celle-ci est persuadée aussi, par la forme de la question posée (que l'on suppose être : montrer que les droites sont concourantes), qu'elles sont bien concourantes, mais contrairement à Sam, elle a compris certaines règles du jeu de démonstration : *elle sait que* les droites sont concourantes, mais elle se dit qu'*on ne le sait pa*s. Dans sa réponse, elle utilise « tu ne sais pas que » pour signifier à Sam que le fait que les droites sont concourantes est la conclusion à laquelle il s'agit d'aboutir, que ce n'est pas une hypothèse. Nous pensons qu'elle a retenu qu'un texte de démonstration se présentait sous une forme imposant que l'expression *on sait que* soit suivie des hypothèses.

Ce dialogue permet d'abord d'évoquer, avec les enseignants, toute l'ambiguïté de l'utilisation de *on sait que*, quand il s'agit de faire une preuve : par contrat, cette expression introduit une hypothèse du problème ou un résultat démontré dans le

[84] Une méthode pour démontrer que trois droites du plan sont concourantes consiste à démontrer que le point d'intersection de deux d'entre elles (sous réserve de son existence) appartient à la troisième. Sam a peut-être confondu au départ « point d'intersection de deux droites » avec « point d'intersection des trois droites », c'est une hypothèse.

cours de la résolution. Savoir que les droites sont concourantes n'a pas le statut d'hypothèse, il a celui de conclusion, ce qui ne veut pas dire que ce savoir ne doit pas être utilisé dans la preuve. Au contraire, le fait de savoir ce que l'on veut démontrer oriente la démarche, c'est aussi utile si l'on raisonne par conditions suffisantes. La reconnaissance du statut des énoncés (conjectures, proposition prouvée ou à prouver, définition…) est source de difficultés dans l'apprentissage de la démonstration. Si l'élève ne connaît ou ne reconnaît pas ce statut des énoncés, il ne peut entrer dans une démarche de preuve. Ainsi chaque fois qu'un exercice propose de démontrer une proposition donnée, qui est donc nécessairement vraie, dans le fonctionnement scolaire, l'élève doit comprendre le changement de posture qui consiste à faire comme si on ne savait pas que c'était vrai, tout en le prenant en compte pour la démarche et en utilisant l'expression *on sait que* pour d'autres éléments du problème. Or nous voulons montrer que l'utilisation de *on sait que*, imposée par le professeur avec un sens particulier, n'aide pas dans la clarification du statut des énoncés dans une preuve. Dans le langage courant l'expression *on sait (que)* signifie seulement que l'on a une certaine connaissance, sans rien préciser de son statut :

- on *sait* les données du problème à résoudre, ce qui dans la preuve prend au départ le statut d'hypothèses,
- *on sait que* les droites sont concourantes, ce qui doit prendre finalement le statut de conclusion,
- *on sait aussi* par exemple, que dans un triangle, les hauteurs sont concourantes, ce qui pourrait (on ne connaît pas le problème à résoudre ici) constituer un théorème utile dans la démonstration de Sam et Marielle. L'expression introduit ici une proposition qui justifie un pas de démonstration.

De cet exemple, nous dégageons en formation un deuxième élément, relatif au rapport à la preuve d'un élève en classe de première scientifique. Nous ne disons pas que Sam ne devrait pas poursuivre des études scientifiques, ce que nous soulignons, c'est l'existence de beaucoup d'élèves qui se sont construit un rapport à la preuve identique à celui de Sam. Le professeur doit donc être conscient que, dans sa classe de première scientifique, mais plus encore dans sa classe de seconde ou de collège, le rapport à la preuve des élèves est très loin de celui qu'il pourrait attendre.

### « Il a simplement donné un exemple, il en faudrait au moins deux, et … »

Nous rapportons une situation vécue et racontée par un professeur, mais par expérience, nous savons qu'elle est représentative du rapport des élèves à la preuve existant dans toutes les classes. Son objectif est de tester le vrai et le faux en mathématiques dans sa classe de seconde. Notre expérience nous conduit à dire qu'il ne s'agit pas d'une situation exceptionnelle, elle révèle des faits qui sont tout à fait courants, dans la plupart des classes[85]. L'énoncé comporte une proposition et quatre positions par rapport à sa valeur de vérité :

*« Le carré d'un nombre positif est plus grand que ce nombre. »*
*$P_1$ : C'est faux car $0,5^2 < 0,5$.*
*$P_2$ : C'est vrai car par exemple $7^2 = 49$ et $2,5^2 = 6,25$. Quand on multiplie on obtient*

[85] Un test sur le vrai et le faux dans une classe de quatrième figure en annexe de ce chapitre 9.

*toujours un nombre plus grand.*
*$P_3$ : Ca dépend, la phrase est parfois vraie et parfois fausse.*
*$P_4$ : C'est presque toujours vrai.*

Le professeur demande alors, par écrit, à ses élèves ce qu'ils pensent de chacun des points de vue $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$, puis fait le bilan des réponses obtenues. Celles-ci sont regroupées suivant chacun des points de vue.

*Pour $P_1$*
*« Cet élève a à moitié raison, mais ce n'est pas entièrement faux car… »*
*« L'élève a utilisé un contre-exemple, sa justification est donc bonne, mais il n'a pas traité d'autres exemples. »*
*« Ce n'est pas strictement faux. »*
*« Il a simplement donné un exemple, il en faudrait au moins deux et avec un nombre entier. »*
*Pour $P_2$*
*« Sa dernière phrase ne sert à rien. »*
*Pour $P_3$*
*« La réponse de cet élève est fausse, ça ne dépend pas, la phrase est soit vraie, soit fausse. A partir du moment où il y a un contre-exemple, une phrase est fausse. »*
*« Il n'explique pas sa réponse par un exemple. »*
*« Il a faux car un seul contre-exemple prouve que sa réponse est fausse. »*
*« Il n'y a pas d'exemple pour justifier cette phrase. »*
*Pour $P_4$*
*« Il n'y a pas d'exemple pour justifier cette phrase. »*
*« C'est vrai, il n'existe qu'une infime part d'exceptions possibles. »*
*« Sa réponse est fausse, il y a beaucoup de réels entre 0 et 1. »*
*« Il y a une infinité de contre-exemples. »*

La phrase de départ « Le carré d'un nombre positif est plus grand que ce nombre. » est ouverte : on ne sait pas de quels nombres on parle, des entiers, des réels… ? La quantification universelle est implicite[86] : un élève ne sait pas nécessairement s'il s'agit d'un nombre en particulier ou si cela concerne tout un ensemble de nombres. Mais c'est bien ce type de formulation qu'on rencontre dans beaucoup de démonstrations ou de cours de mathématiques. Il est donc légitime de regarder ce qu'en pensent les élèves quand ils utilisent, lisent ou entendent cette phrase. Ce que nous mettons en avant, dans cette formation, c'est un rapport à la preuve existant.

Nous insistons auprès des enseignants sur le fait que les réponses des élèves peuvent s'expliquer autrement qu'en disant qu'ils sont en difficulté. Ces réponses montrent en effet que les arguments sont semblables à ceux que l'on donne dans la vie courante, qu'on peut lire aussi dans les annotations des copies. Par exemple, les arguments qui sont donnés pour $P_1$ révèlent que les élèves pensent que c'est incomplet de donner juste un contre-exemple, il y a d'autres choses à dire, comme le fait qu'il y ait des exemples de nombres plus grands que leur carré. Quand on construit une argumentation en français ou dans d'autres disciplines, c'est bien ce qui est attendu. Il ne faut pas se contenter de montrer un cas où l'on prend une position négative, il faut argumenter le pour, le contre, avant de faire une synthèse.

[86] Nous avons évoqué ce point au chapitre 7.

**A l'issue de cette partie**

Nous invitons les enseignants à tester le vrai/faux dans leurs classes. Des résultats proposés par un enseignant en classe de quatrième figurent en annexe à ce chapitre. Les professeurs sont ainsi amenés à se demander comment ils peuvent aider les élèves à se construire un rapport à la preuve plus adéquat : un travail sur le vrai/faux s'avère nécessaire, à défaut duquel s'installent *les malentendus*, de manière durable puisque les élèves ci-dessus sont en classe de seconde et qu'ils ont donc un passé déjà important sur la preuve. Qu'ont-ils pu en saisir ? Et les autres qui n'ont pu accéder au lycée ? Ceci permet d'appuyer l'idée que le professeur doit enseigner comment entrer dans la rationalité mathématique. L'activité *Circuit* (évoquée à la fin du chapitre 8) peut apporter une réponse. Nous montrons aussi le risque de malentendu qui peut résulter de l'illustration des énoncés conditionnels avec des phrases du quotidien : nous renvoyons au paragraphe 4 du chapitre 7 (Les malentendus). Nous concluons cette première partie par les *autres savoirs rarement institutionnalisés*, qui sont développés dans ce même paragraphe, ainsi que par la coexistence dans la classe de trois modes de fonctionnement qui peuvent se heurter, à savoir le *fonctionnement scolaire*, la logique mathématique et le *fonctionnement du quotidien*. Nous les identifions au travers de chacun des exemples présentés. Nous revenons plus loin sur la quantification implicite.

## 2. Les copies

Dans les paragraphes précédents, nous avons décrit certains éléments du rapport existant des élèves à la preuve, qu'ils se sont construit au fil des années, du fait de certains manques au niveau des connaissances d'ordre II ou III, manques dus au vide des pratiques sur ce sujet. Ce que nous abordons dans la suite concerne les pratiques spécifiques qui remplacent l'apprentissage de la preuve par celui de l'écriture de preuve. Elles intègrent des artifices, que nous avons désignés au chapitre 2, par *auxiliaires pédagogiques* : ce sont les *textes-algorithmes* de rédaction construits sur la trame *on sait que…or…donc*, *les tableaux en trois colonnes* (prémisses, énoncés-tiers, conclusions), les *graphes propositionnels orientés*, mais aussi le rituel qui accompagne les énoncés géométriques tel que *faire la figure, coder, écrire les hypothèses, démontrer que*, que les élèves mettent en pratique sans avoir aucun projet de preuve (Demongeot & Gandit 2003 ; Gandit 2004), juste pour se conformer au contrat. En formation, nous voulons les expliciter et montrer qu'elles ramènent la pratique de preuve à un exercice formel dénué de sens pour beaucoup d'élèves (même parmi ceux qui réussissent, avons-nous dit). Nous avons déjà analysé une copie qui nous le montre, celle de Farida, au chapitre 7. Nous pouvons la reprendre, ainsi que d'autres, celles de Sophie et d'Angélique, analysées ci-dessous, celle d'Yvan, pour l'analyse de laquelle nous renvoyons à Demongeot & Gandit (2003). Ces copies reflètent des comportements d'élèves que l'on retrouve de façon régulière dans les classes, ce ne sont pas des productions qui se démarquent par leur originalité.

Nous demandons alors aux enseignants un travail par groupe sur une copie, dont ils rédigent la synthèse sur transparent, qu'ils présentent à tous. Le travail demandé consiste à faire des hypothèses sur le contrat didactique en vigueur dans la classe de l'élève relativement à la démonstration, sur le raisonnement que peut avoir suivi l'élève pour rédiger sa copie. Cette analyse d'erreur ne doit cependant pas

aboutir à recenser les défaillances des élèves par rapport à certaines compétences, nous insistons sur ce point.

**La copie de Sophie**

Sophie est élève en classe de quatrième (2007-2008), une copie de l'original figure en annexe à ce chapitre :

*[En haut à droite de la copie, Sophie a dessiné quatre petits cœurs pour entourer les mots suivants]*
*Désolée Madame mais je n'est pas compris comment on fait la rédaction ! Veuillez m'excuser. Amicalement.*
*[Voici ses réponses sur la copie, c'est l'élève qui a souligné certains mots]*
*On sait que : TAXI est un carré.*
*Or si un quadrilatère a ses côtés opposés et // donc c'est un carré.*
*Donc [IX] et [TA] sont //.*

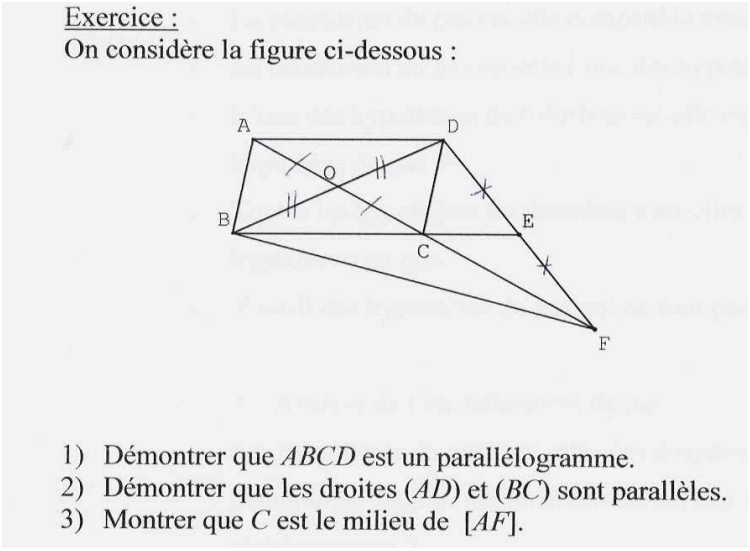
*On sait que TAGE est un losange.*
*Or si un parallélogramme a ses côtés de même mesure opposés deux a deux // alors c'est un losange.*
*Donc [TA] et [EG] sont //.*

*On sait que [IX] et [TA] sont //*
*et que [TA] et [EG] sont //.*
*Or si deux droites // et que l'une des deux est // à une même 3ème alors les 3 droites sont //.*
*Donc [IX] // [TA] // [EG] donc [IX] // [EG].*

La règle du *on sait que-or-donc* est clairement installée dans le contrat avec la classe : c'est l'élève qui a souligné les mots qui introduisent chacune des trois parties du pas de déduction. L'en-tête de la copie montre bien que Sophie a conscience du fait que quelque chose lui a échappé. Et elle écrit elle-même que c'est la rédaction, elle ne dit pas qu'elle n'a pas compris la question ou encore l'exercice. Il est aisé de reconnaître que la pratique du professeur ne lui apporte pas d'aide dans l'apprentissage de la preuve. Or pour le professeur (nous l'avons interrogé), il s'agit bien d'une aide pour l'écriture d'une démonstration, pour l'élève, c'est un cadre dans lequel il ne sait pas compléter ce qui suit la conjonction or. Nous n'en tirons pas comme conséquence qu'il faut proposer à Sophie une tâche spécifique destinée à lui apprendre comment choisir l'énoncé mathématique qui permet de justifier le pas de déduction. Des travaux de didactiques (Duval 1991 ; Barbin & al 2001) nous proposent des explications et des pistes pour aider les élèves qui, comme Sophie, ne distinguent pas une propriété de sa réciproque pour justifier son raisonnement. Ce que nous en concluons, c'est que cette pratique conduit à des non-sens pour Sophie. Ceci est d'autant plus grave qu'elle a compris le raisonnement : elle sait que *TAXI* est un carré, elle en déduit que les côtés [*IX*] et [*TA*] sont parallèles ; elle sait que *TAGE* est un losange, elle en déduit que les côtés [*TA*] et [*EG*] sont parallèles ; elle déduit ensuite de ce qui précède que [*IX*] est parallèle à [*EG*].

**La copie d'Angélique**

Angélique est aussi une élève de quatrième, sa copie nous a été proposée par son professeur en 2005, elle est précédée de l'énoncé de l'exercice. Une copie de l'original figure en annexe au chapitre 9.




*1) Je démontre que ABCD est un parallélogramme.*
*Je sais que O est le milieu de [AC] et que O est le milieu de [BD].*
*J'utilise le théorème 2 : si un segment joint les milieux des 2 côtés d'un triangle, alors sa longueur est égal à la moitié du 3ème côté.*
*Donc ABCD est un parallélogramme.*

*2)Je démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.*
*Je sais que O est le milieu de [AC] et aussi le milieu de [BD].*
*J'utilise le théorème 3 : si une droite passe par le milieu des deux côtés d'un triangle alors cette droite passe aussi par le 2ème et le 3ème côté de ce triangle.*
*Donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.*

*3) Je montre que C est le milieu de [AF].*
*Je sais que E est le milieu de [DF]*
*est que CD et CE sont parallèles.*
*J'utilise le théorème 1 : si une droite passe par le milieu d'un côté, alors cette droite est parallèle au 3ème côté.*

Angélique a compris qu'on démontre avec des pas en trois temps, l'organisation est respectée. Les réponses sont introduites par « je démontre que », elles correspondent aux questions posées et, sauf dans la troisième, aux conclusions, introduites par « donc ». Le premier temps du pas doit être introduit par « je sais que », ceci est respecté et elle écrit des informations correctes tirées du codage de la figure. Angélique sait que le deuxième temps du pas doit être un théorème introduit par « j'utilise le théorème …», ce qui figure dans la copie. La forme, qui résulte nécessairement du contrat usuel en vigueur dans cette classe, est respectée. Le premier théorème énoncé est correct, son hypothèse cite deux milieux, ce dont il s'agit dans le premier temps du pas. Néanmoins le texte n'est pas cohérent, le théorème ne sert pas de justification du pas et sa conclusion est complètement étrangère à ce qu'il s'agit de démontrer. Ce qui est nommé théorème dans la

deuxième réponse n'en est pas vraiment un, mais on reconnaît là aussi des indices de forme communs aux informations qui suivent « je sais que » et à l'hypothèse du théorème : il est question aussi de deux milieux.

**L'institutionnalisation relative à cette analyse de copies**

Elle permet d'expliciter les règles du contrat usuel relatif à la preuve telles que nous les avons décrites à la fin du chapitre 2.

Elle donne des explications possibles sur les réactions des élèves auteurs des copies, qui résultent des pratiques, sur lesquelles on peut s'interroger. On pointe le *malentendu diagnostic échec*, mais aussi comme une conséquence le *malentendu réussite*. On se demande quels types d'*activité* sont favorisés par le contrat usuel.

Notons bien que ce que nous remettons en cause, auprès des enseignants, ce n'est pas le choix d'initier à la preuve de type raisonnement déductif en faisant apparaître son organisation en pas ternaires (il faut faire un choix au départ), c'est le glissement vers le formalisme comme *le* moyen de cette initiation, c'est le remplacement de l'apprentissage de la preuve par celui de l'écriture de preuve, et l'absence de tout autre ouverture. Nous développons ci-dessous ce dernier point.

## 3. Le point de vue du faux pour motiver à la preuve

Dans la géométrie pratiquée dans l'enseignement secondaire, et notamment au collège, les travaux de Durand-Guerrier et Arsac (2003) montrent que les démonstrations géométriques reposent, au plan logique, sur le calcul des propositions, essentiellement sur la règle d'inférence appelée le *modus ponens*[87]. La centration sur la structure ternaire des pas de démonstration et le recyclage des énoncés (une conclusion d'un pas devenant prémisse du pas suivant) (Duval 1989, 1991) relèvent de ce cadre, où l'on raisonne sur un élément générique, représenté par une figure. Les quantificateurs sont absents des démonstrations. Les théorèmes manipulés sont en effet de la forme *Pour tout x d'un certain ensemble, si P(x), alors Q(x)* et on travaille sur l'exemple générique *a* de *x* : on utilise donc seulement *Si P(a), alors Q(a)*. L'utilisation exclusive de ce cadre théorique constitue un obstacle pour certaines preuves (Durand-Guerrier & Arsac 2003) et conduit à des difficultés lorsqu'il s'agit de prouver qu'un énoncé est faux. L'exemple proposé est le suivant :

*Soit Q un quadrilatère ; pour chacune des deux implications suivantes dire si elle est vraie ou fausse ;*
*a) si Q est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur ;*
*b) si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange.*
*L'énoncé a) est vrai, car il est associé à un théorème universel ; quant à l'énoncé b), c'est une instance d'un énoncé ouvert admettant à la fois des exemples et des contre-exemples. Autrement dit, on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de cet énoncé. Le déclarer faux revient à assimiler cet énoncé à l'énoncé universellement quantifié associé.*
(Durand-Guerrier & Arsac 2003)

[87] dont le fonctionnement cognitif passe par la reconnaissance du théorème pertinent, la vérification de ses conditions d'application et le détachement de la conclusion.

Confrontés à un énoncé tel que b), les élèves (de collège et de lycée) vont répondre comme dans l'exemple du *carré d'un nombre positif*, proposé dans le paragraphe 1 de ce chapitre : ils vont hésiter entre faux, pas toujours vrai et vrai.

Ce qui précède, dans ce paragraphe, n'est pas dit en formation, mais ce qui suit peut donner aux enseignants un autre éclairage sur la preuve, qu'on peut illustrer à partir de l'exercice de la copie de Sophie (paragraphe précédent). En limitant en effet la preuve à une rédaction qui ne convient qu'aux cas où il s'agit de démontrer qu'un objet générique, qui possède certaines propriétés, vérifie nécessairement une autre propriété, non seulement, on exclut les preuves de l'existence d'un objet satisfaisant à une condition (et bien d'autres types de preuves), mais on ne met pas non plus en évidence qu'on raisonne sur des ensembles d'objets, dont on montre l'inclusion. Or, c'est justement cet autre aspect qui pourrait aider à surmonter les difficultés qui apparaissent dès lors qu'on rencontre des objets qui ne sont plus représentés par l'exemple générique. C'est une source de malentendus (de type *rapport existant à la preuve*) dès qu'on veut travailler sur le faux.

Par exemple, si l'on reprend le problème que Sophie veut résoudre dans sa copie (paragraphe précédent) : *TAXI* est un carré et *TAGE* est un losange, il s'agit de démontrer que les droites (*IX*) et (*EG*) sont parallèles. On occulte complètement dans cette preuve qu'elle est valable pour six points quelconques coplanaires, nommés *T*, *A*, *G*, *E*, *X* et *I* qui vérifient que *TAXI* est un carré et *TAGE* est un losange. Une conclusion pertinente sur ce point pourrait être proposée à l'issue de la preuve, mais ce n'est pas fait dans le contrat usuel en classe. La preuve consiste en fait à montrer qu'un objet générique, un sextuplet *T*, *A*, *G*, *E*, *X*, *I*, qui possède les deux propriétés que *TAXI* est un carré et *TAGE* est un losange, vérifie nécessairement que les droites (*IX*) et (*EG*) sont parallèles. Mais nous pouvons aussi considérer cette preuve comme celle de l'inclusion de l'ensemble des sextuplets *T*, *A*, *G*, *E*, *X*, *I*, tels que *TAXI* est un carré et *TAGE* un losange (ce qui correspond d'ailleurs à l'intersection de deux ensembles) dans l'ensemble des sextuplets *T*, *A*, *G*, *E*, *X*, *I*, tels que (*IX*) et (*EG*) sont parallèles. Nous renvoyons à la thèse de V. Deloustal-Jorrand pour un éclairage détaillé du raisonnement déductif dans le cadre ensembliste et dans celui de la logique formelle (Deloustal-Jorrand 2004).

En formation, nous suggérons que travailler en classe sur le vrai et le faux peut constituer un levier pour enseigner la preuve (une *ouverture* comme nous le disons en conclusion du paragraphe précédent). Comme nous l'avons vu, certains manuels proposent bien de travailler au collège en ce sens quand on aborde la démonstration, mais c'est pour expliquer que, dans les cas simples des implications abordées au collège, on montre que c'est faux par un contre-exemple. On apprend à prouver que c'est faux, on apprend à prouver que c'est vrai, la plupart du temps, on ne voit pas la cohérence (nous l'avons souligné au chapitre 5 qui analyse des manuels).

Ce que nous proposons en formation, c'est d'*adopter le point de vue du faux* en classe. C'est se demander constamment, plutôt entraîner les élèves à se le demander, si ce qui est dit ne serait pas faux. Autrement dit, c'est entraîner les élèves à la recherche systématique d'un contre-exemple. Par exemple, le professeur dit : « Si un quadrilatère a deux angles droits, alors c'est un rectangle. » Les élèves trouvent un contre-exemple, c'est donc faux. Le professeur dit : « Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle. » Les élèves cherchent un contre-exemple, ils n'en trouvent pas : serait-ce vrai ? Comment alors prouver qu'il n'y a pas de contre-

exemple ? La preuve retrouve sa fonction essentielle qui est de réduire le doute. Nous renvoyons à Weil[88] (1943) :

*[…] Il n'y a pas à choisir entre la démonstration et l'expérience. On démontre avec du bois ou du fer aussi facilement qu'avec de la craie.*
*Il y aurait une manière simple d'introduire la nécessité géométrique dans une école professionnelle, en associant l'étude et l'atelier. On dirait aux enfants : « Voici un certain nombre de tâches à exécuter (fabriquer des objets satisfaisant à telles, telles et telles conditions). Les unes sont possibles, les autres, impossibles. Exécutez celles qui sont possibles, et celles que vous n'exécutez pas, forcez-moi à admettre qu'elles sont impossibles ». Par cette fente, toute la géométrie peut s'introduire dans le travail.*
*L'exécution est une preuve empirique suffisante de la possibilité, mais pour l'impossibilité il n'y a pas de preuve empirique ; il y faut une démonstration. L'impossibilité est la forme concrète de la nécessité.*

*Adopter le point de vue du faux* permet aussi de restaurer un certain enjeu de vérité dans les questions traitées en classe. Nous allons voir l'intérêt de ce point de vue dans les preuves sur les problèmes qui suivent, notamment dans l'utilisation du raisonnement par l'absurde. Si l'on reprend par exemple la phrase de Sam dans le dialogue vu au paragraphe 1, cela pourrait devenir :

– Supposons que les trois droites ne sont pas concourantes…, commence Sam.

[88] Simone Weil, philosophe

# CHAPITRE 10
# LE CENTRE DE SECOURS

*« Ses idées tournaient autour d'un point fixe comme les phalènes autour d'une lampe ; il ne parvenait pas à les fixer ; le plus important lui échappait. »*
*(Marguerite Yourcenar, Anna, soror…, 1981)*

*Le problème*
*Dans une vaste région se trouvent quatre villages de même importance ; on veut construire un centre de secours muni d'un hélicoptère de façon à pouvoir atteindre le plus rapidement possible le village le plus éloigné.*
*Où placer le centre de secours ?*

## ANALYSE MATHEMATIQUE DU PROBLEME

### 1. Deux points de vue dans le cadre de la géométrie plane

Le problème recouvre trois questions :

- l'existence du centre : existe-t-il un tel centre de secours, quelle que soit la position géographique des villages ?
- l'unicité du centre : en cas d'existence, ce centre est-il unique ?
- comment le trouver ?

Des questions se posent sur les objets en jeu dans le problème, à savoir une *vaste région* et *quatre villages*. Le relief de la région est-il à prendre en compte ou se situe-t-on dans un plan ? Les villages vont-ils être considérés comme des zones ou, plus particulièrement, des points ? Si on considère des zones, quelle forme choisir ? Des disques, des carrés… ? Va-t-on chercher une zone pour le centre de secours ? De quelle forme ? Disque, carré, point ? On peut aussi considérer que les villages sont représentés par des zones non régulières, de forme polygonale ou « arrondie ».

Des questions aussi sur les relations entre ces objets : l'énoncé précise que les villages sont *de même importance*, va-t-on choisir des zones de même aire pour traduire ceci ? Ou bien simplement des points ? Quelle que soit la modélisation adoptée pour les villages, zones régulières ou non, réduites ou non à un point, comment peut-on traduire le fait que *l'hélicoptère doit pouvoir atteindre le plus rapidement possible le village le plus éloigné* ? Si, pour aller d'un village à l'autre, l'hélicoptère doit franchir une haute montagne ou si les deux villages sont situés dans une plaine, l'hélicoptère ne mettra pas autant de temps, même si les deux villages sont situés à égale distance du centre de secours sur une carte géographique. Avec son réservoir rempli de carburant, l'hélicoptère doit pouvoir atteindre chaque village : la région est vaste, mais pas trop. Quelle forme et quelle *taille* considérer alors pour cette région ?

L'entrée dans le problème et l'identification de ce qu'on cherche est peut-être plus facile si l'on prend réellement en compte ces questions sur le choix d'un modèle. Nous faisons l'hypothèse que si le glissement est trop rapide vers le choix de quatre points d'un plan dont on cherche un centre, cela induit, de la part de ceux qui cherchent le problème, des comportements qui les font sortir du problème.

Nous ne traiterons pas tous les modèles suggérés par les réponses aux questions précédentes. Nous choisissons de ne pas tenir compte du relief de la région et nous nous ramenons donc à traiter la recherche d'un centre dans un plan. Nous supposons également que chaque village est à la portée de l'hélicoptère : la quantité de carburant disponible est suffisante pour le trajet aller et retour, de même que la taille du réservoir. Nous décidons de ne pas tenir compte des phases d'accélération ou de ralentissement de l'hélicoptère, dues aux moments de décollage ou d'atterrissage ou encore aux conditions atmosphériques, et nous remplaçons la mesure du temps de parcours par celle de la longueur du parcours en ligne droite dans le plan. Il reste le choix des objets mathématiques qui vont représenter les villages et le centre de secours. Si l'on considère que les villages sont des zones qui ne sont pas des points, nous sommes ramenée à la recherche d'un centre (ou d'une zone centrale) d'une infinité de points. Le modèle reste alors trop complexe.

Nous décidons de représenter chaque village par un point du plan et nous recherchons un point (le centre de secours) qui soit *le plus proche possible* du point le plus éloigné. Mais on peut alors adopter deux points de vue (ou modèles) :

- le point de vue d'un sauveteur dont l'hélicoptère décolle du centre de secours, nous l'appelons le *modèle du sauveteur*,
- le point de vue d'une personne d'un village qui a besoin d'être secourue, nous le nommons le *modèle du villageois*.

Nous développons chacun de ces points de vue.

### Le point de vue du sauveteur

Revenons à la modélisation. Imaginons que l'hélicoptère décolle du centre de secours et qu'il doive atteindre le plus rapidement possible le ou les points les plus éloignés du point de décollage. On considère[89] que, quelle que soit la direction autour du point de décollage, il atteint aussi rapidement chacun des points de tout cercle[90] centré sur ce point. Aussi peut-on traduire la contrainte d'atteindre le plus rapidement possible n'importe quel point de tels cercles par celle de parcourir la plus petite distance entre le centre de secours et le point à atteindre, c'est-à-dire le rayon du cercle centré au point de décollage, qui passe par le point à atteindre.

De ce point de vue, le problème consiste à déterminer s'il existe un point $M$ (et s'il est unique) qui réalise le minimum de la plus grande des distances entre $M$ et les

[89] compte tenu des conditions du modèle déjà précisées.

[90] de rayon raisonnable bien entendu, c'est-à-dire tel que le réservoir de l'hélicoptère contienne le carburant suffisant pour l'aller et le retour au centre de secours, comme nous l'avons déjà dit.

quatre villages $V_1$, $V_2$, $V_3$ et $V_4$ ou encore s'il existe un (et un seul) plus petit disque possible qui contienne les quatre villages.

Ce modèle prend en compte deux variables : le centre du disque (qui sera alors le centre de secours) et son rayon (qui sera le rayon d'action de l'hélicoptère).

### Le point de vue du villageois

Mettons-nous maintenant à la place d'une personne blessée qui doit être transportée par l'hélicoptère des secouristes. Le village dans lequel elle habite étant représenté par un point, on considère cette personne en ce point. Elle doit pouvoir être emmenée par l'hélicoptère venant de toute direction autour du point où elle est située. Ceci amène à considérer un disque centré sur le village, considéré comme un point, son rayon représentant la distance à parcourir dans les deux sens, du centre de secours vers le village (aller) et le retour. Ce point de vue adopté par rapport à un village doit être le même par rapport aux trois autres villages, d'où la représentation d'un ensemble de quatre disques centrés sur chacun des villages, de rayon suffisamment grand pour que leur intersection soit non vide et contienne ainsi le centre de secours.

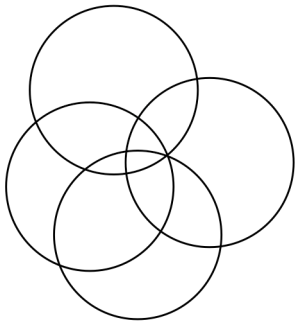


*Figure n°1 : la frontière de la zone commune semble être, dans ce cas, la réunion de trois arcs de cercle.*

Existe-t-il une zone commune à quatre tels disques qui puisse se réduire à un point ? Est-elle unique ?

Le centre de secours serait alors ce point.

Ce modèle ne comporte qu'une seule variable, le rayon commun à ces quatre disques.

Peut-on dire que l'un des points de vue est plus naturel que l'autre ? Le second est peut-être moins directement issu de la question posée dans le problème, encore que…

Dans ce qui suit, nous développons d'abord le *modèle du sauveteur* en deux temps : dans le cas de $n$ points, nous prouvons l'existence et l'unicité du centre (de secours) cherché, puis, dans quelques cas particuliers ($n = 2$, $n = 3$, $n = 4$), nous donnons sa construction. Nous proposons ensuite une étude du *modèle du villageois*, où nous prouvons l'existence et l'unicité du centre pour quatre points.

## 2. Le modèle du sauveteur dans le cas de *n* points

### L'unicité du centre de secours pour *n* points

S'il existe un disque, le plus petit possible, qui contienne $n$ points ($n$ nombre entier naturel), est-il unique ? Oui.

En effet, supposons qu'il existe deux disques distincts $C_1$ et $C_2$, qui aient le même rayon $r$, le plus petit possible, et qui contiennent les $n$ points :

ces points seraient alors contenus dans la zone commune des deux disques, soit $C_1 \cap C_2$. Si l'on désigne par $a$ et $b$, les deux points d'intersection des cercles correspondants, $ab$ serait strictement inférieure au diamètre des disques puisque ceux-ci sont supposés distincts. Or le disque de diamètre $[ab]$ contiendrait nécessairement les $n$ points puisqu'il contiendrait $C_1 \cap C_2$.

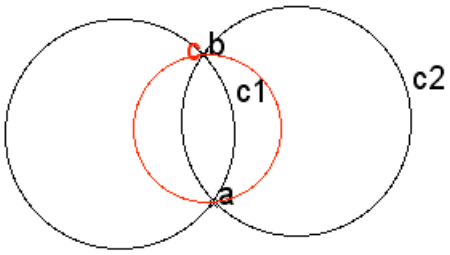



*Figure n°2 : un disque plus petit contiendrait les quatre points*

Il existerait donc un disque de rayon inférieur à $r$, celui qui a pour diamètre $[ab]$, et qui contiendrait les $n$ points.

Ceci contredit l'hypothèse, donc s'il existe un disque de rayon le plus petit possible qui contient les $n$ points, alors ce disque est unique. Le centre de secours sera alors son centre.

**L'existence du centre de secours pour *n* points**

Soient $n$ points fixés ($n$ entier supérieur à 2), on recherche le plus petit disque (disque *minimum*) qui les contient.

On peut recouvrir ces $n$ points par un disque suffisamment grand. Peut-on réduire ce disque, sans qu'aucun point n'en sorte ? On cherche à obtenir un disque *minimal*, suivant cette procédure de réduction, qui soit aussi le disque *minimum* recherché (le disque *minimum* recherché est un disque *minimal*).

Dans le cas où les $n$ points sont strictement contenus dans le disque (aucun n'appartient à la frontière du disque), on peut alors réduire le disque sans qu'aucun point n'en sorte.

Supposons que $p$ de ces $n$ points ($p$ entier compris entre 1 et $n$) appartiennent à un demi-cercle $c$ ouvert, inclus dans la frontière du disque, les $n - p$ autres restant strictement contenus dans le disque. On désigne par $d$ la droite qui contient le diamètre de $c$. On peut alors déplacer le centre du disque perpendiculairement à $d$ vers $c$ de telle façon que le disque ne contienne plus aucun point sur sa frontière. On est alors ramené au cas précédent et on peut donc réduire le disque.

Supposons que deux des $n$ points soient diamétralement opposés sur la frontière du disque, les $n - 2$ autres restant contenus dans le disque fermé. On ne peut plus alors réduire le disque sans qu'aucun des points n'en sorte. Tout disque de diamètre inférieur ne peut plus en effet contenir les deux points. On aboutit à un disque minimal. On le nomme le *disque-2 points* ; si les deux points se nomment $A$ et

*B*, le centre de ce disque est le milieu de [*AB*] et son rayon est *AB*/2, dans ce cas, on le nomme *disque-AB*[91].

Supposons que trois des *n* points appartiennent à la frontière du disque sans qu'il n'existe de demi-cercle les contenant tous les trois, les $n-3$ autres restant contenus dans le disque fermé. La frontière du disque est alors le cercle circonscrit au triangle formé par les trois points. On ne peut plus alors réduire le disque sans qu'aucun des points n'en sorte. On aboutit aussi à un disque minimal. On le nomme le *disque-3 points* ; si les trois points se nomment *A, B* et *C*, le centre de ce disque est le centre *O* du cercle circonscrit au triangle *ABC* et son rayon est *OA*, dans ce cas, on le nomme *disque-ABC*[92].

Pourquoi le disque *minimal* trouvé dans les deux cas précédents, *disque-AB* ou bien *disque-ABC*, est-il le disque *minimum* recherché ?

*Dans le cas de disque-AB*

S'il existait un disque *d'* strictement plus petit que *disque-AB*, qui contienne les *n* points. Soit *J* son centre. Son rayon serait strictement inférieur à *AB*/2 ; on aurait donc $JA < AB/2$ et $JB < AB/2$, donc $JA + JB < AB$, ce qui contredit l'inégalité triangulaire.

Il n'existe donc pas de disque plus petit que *disque-AB* qui contienne les *n* points.

*Dans le cas de disque-ABC*

S'il existait un disque *d'* strictement plus petit que *disque-ABC*, qui contienne les *n* points. Soit *J* son centre : $J \neq O$, sinon on aurait $JA = OA$, ce qui est exclu puisque $JA < OA$.

Les angles $J\hat{O}A$, $J\hat{O}B$, $J\hat{O}C$ ne pourraient pas être tous les trois aigus : sinon, *A*, *B* et *C* appartiendraient au même demi-plan ayant pour frontière la droite perpendiculaire à (*JO*) qui contient *O*. Donc il existerait un même demi-cercle de centre *O* et de rayon *OA* qui contiendrait les trois points *A*, *B* et *C*. Ce qui est exclu.

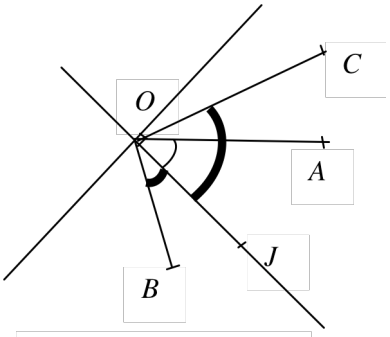



*Figure n°3*

*Si $J\hat{O}A$, $J\hat{O}B$, $J\hat{O}C$ sont les trois angles aigus, alors A, B, C appartiennent au même demi-plan ayant pour frontière la droite perpendiculaire à (JO) qui contient*

[91] Ce même disque peut être déterminé par une autre paire de points diamétralement opposés, puisque la frontière du disque peut contenir plusieurs paires de points diamétralement opposés.

[92] Ce même disque peut être déterminé aussi par un autre ensemble de trois points tels qu'il n'existe aucun demi-cercle qui les contiennent tous les trois.

*O*.

L'un au moins des trois angles $J\hat{O}A$, $J\hat{O}B$, $J\hat{O}C$ serait donc obtus ou droit. Quitte à renommer les sommets, supposons que ce soit $J\hat{O}A$. Donc on aurait $JA \geq OA$, ce qui est exclu aussi.

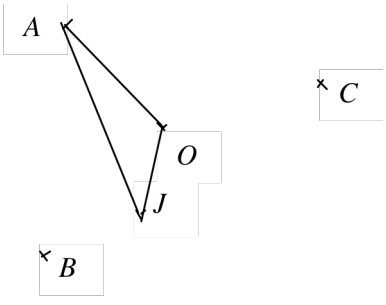



*Figure n°4*

Il n'existe donc pas de disque plus petit que *disque-ABC*, qui contienne les *n* points.

Ainsi le disque *minimal* trouvé dans les deux cas est bien le disque minimum recherché. Le centre de secours est donc le milieu de [*AB*] dans le cas du *disque-2 points* et le centre du cercle circonscrit au triangle *ABC* dans le cas du *disque-3 points*.

## 3. Construction du centre de secours dans quelques cas particuliers

La preuve précédente ne donne pas une construction du centre de secours au vu des points. C'est ce que nous allons effectuer dans quelques cas particuliers. Le cas où $n = 2$ est immédiat : le disque cherché est un *disque-2 points*, le centre de secours est donc le milieu des deux points.

### Cas $n = 3$

On considère trois points du plan.

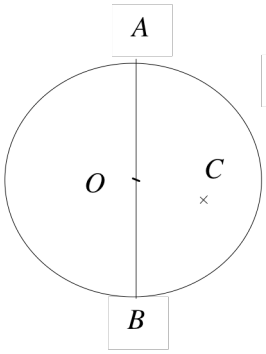



*Figure n°5*

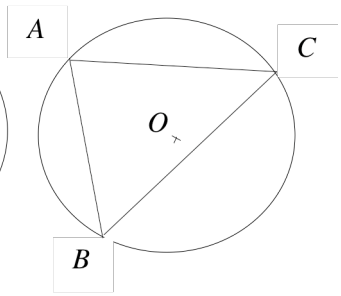



*Figure n°6*

Si les trois points sont alignés ou si le triangle formé par les trois points a un angle obtus ou droit, on désigne par [*AB*] le plus petit segment qui contient les trois points, dans le premier cas, ou le côté opposé à l'angle obtus, dans le deuxième cas. Le disque minimum cherché est celui qui a pour diamètre [*AB*] (figure n°5). Le centre cherché est donc le milieu de [*AB*].

Sinon, le triangle *ABC* formé par les trois points a tous ses angles aigus. Le disque minimum cherché est celui qui a pour frontière le cercle circonscrit à *ABC* (figure n°6). Le centre cherché est celui du cercle.

**Cas $n = 4$**

On considère quatre points du plan.

Si les quatre points sont alignés, le centre cherché est le milieu du plus petit segment qui les contient.

Si l'enveloppe convexe des quatre points est un triangle, le centre de secours est le centre du cercle circonscrit à ce triangle, si ses trois angles sont aigus ; sinon, c'est le centre du cercle ayant pour diamètre le côté du triangle opposé à l'angle obtus ou droit.

Si l'enveloppe convexe des quatre points est un quadrilatère *ABCD*, on peut considérer sans ambiguïté les quatre angles (intérieurs) $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ de ce quadrilatère (convexe) et les sommes *s* et *s'* des mesures des angles opposés : *s* et *s'* ne peuvent pas être, ni toutes deux strictement inférieures à $\pi$, ni toutes deux strictement supérieures à $\pi$, puisque leur somme est égale à $2\pi$.

- Si $s = s'$ (donc égales à $\pi$), *ABCD* est inscriptible dans un cercle, le centre de secours est donc le centre de ce cercle.
- Si $s \neq s'$, supposons que $s > s'$. Alors $s > \pi > s'$. L'un au moins des deux angles, dont la somme des mesures est *s*, est obtus (ou droit). Quitte à renommer les sommets du quadrilatère, supposons que *s* désigne la somme des mesures des angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ et que $\hat{C}$ désigne celui des deux angles dont la mesure est supérieure à l'autre ou l'un des deux s'ils sont égaux. La détermination du centre de secours se ramène au cas des trois points *A*, *B*, *D*. En effet, il est impossible que $\hat{A}$ et $\hat{C}$ soient tous les deux aigus (ou droits) puisque $s > \pi$. D'où :
  - Si $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont tous les deux obtus ($\hat{A}$ pouvant être droit), alors *A* et *C* appartiennent au disque de diamètre [*BD*].
    Le disque minimum cherché est un *disque-2* points, c'est *disque-BD*.
    Le centre cherché est le milieu de [*BD*]
  - Si $\hat{A}$ est aigu et $\hat{C}$ obtus, alors *C* appartient au disque ayant pour frontière le cercle circonscrit au triangle *ABD*.
    Le disque minimum cherché est un *disque-3* points, c'est *disque-ABD*.
    Le centre cherché est le centre du cercle circonscrit à *ABD*.

## 4. On développe le modèle du villageois

### L'existence du centre de secours

Ce point de vue amène à chercher, nous l'avons déjà dit, une zone commune à quatre disques, chacun d'eux étant centré sur un village et pouvant se réduire à un point (alors le centre de secours). Nous avions déjà remarqué qu'un des avantages de ce modèle résidait dans le fait qu'il n'y avait qu'une seule variable, le rayon commun des quatre disques.

Que peut-on dire de cette zone commune à quatre disques de même rayon ? Quelles propriétés possède-t-elle ? Est-il possible de trouver un rayon commun aux

quatre disques tel que leur zone d'intersection soit réduite à un point, qui serait alors le centre de secours ?

D'abord, introduisons des notations : pour tout rayon $r$ donné, désignons par $Z(r)$ la zone d'intersection des quatre disques de rayon $r$, qui ont pour centre chacun des quatre villages, eux-mêmes désignés par $V_1$, $V_2$, $V_3$ et $V_4$.

La zone $Z(r)$ peut être vide, si, par exemple, $r$ est strictement inférieur à la moitié de la distance maximale qui sépare deux villages. Mais cette intersection peut aussi ne pas être vide, si, par exemple, $r$ est strictement supérieur à la distance maximale entre deux villages. On désignera par *inf* la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels $r$ strictement positifs pour lesquels $Z(r)$ n'est pas vide.

Si $Z(r)$ n'est pas vide, c'est un ensemble fermé convexe : c'est en effet l'intersection de quatre disques fermés. Tout segment dont les bornes sont deux points de $Z(r)$ est entièrement inclus dans $Z(r)$ puisqu'il est contenu dans quatre disques de rayon $r$. Si, de plus, la zone $Z(r)$ n'est pas réduite à un seul point, sa frontière est une réunion finie d'arcs de cercles de rayon $r$.

Si l'on diminue le rayon des disques, alors leur zone d'intersection diminue : si $s < r$, $s$ et $r$ désignant des nombres réels strictement supérieurs à *inf*, alors $Z(s)$ (non vide) est strictement incluse dans $Z(r)$. Ceci est dû au fait que les quatre disques de rayon $r$ sont strictement inclus dans les quatre disques de rayon $s$. Autrement dit, la famille des ensembles $Z(r)$, pour $r \geq inf$, qui est une famille d'ensembles fermés et bornés[93], non vides, du plan, donc une famille d'ensembles compacts, est totalement ordonnée par inclusion. Or l'intersection d'une famille décroissante d'ensembles compacts qui ne sont pas vides n'est pas vide non plus, elle contient donc au moins un point. Nous allons préciser cette intersection.

### L'unicité du centre de secours

On peut considérer, pour tout nombre $r$, supérieur à *inf*, l'aire de la zone $Z(r)$, définissant ainsi une fonction $a$. Rappelons que $Z(r)$ est convexe et que sa frontière est une réunion finie d'arcs de cercle. Cette fonction $a$ est continue et décroissante, donc l'intersection de la famille des $Z(r)$, qui n'est pas vide, est un compact et convexe d'aire nulle, c'est donc un point ou un segment. Comme la frontière de $Z(r)$ est une réunion finie d'arcs de cercles de rayon fini, l'intersection de la famille des $Z(r)$ est nécessairement réduite à un point. C'est le centre de secours.

### En conclusion, selon le modèle du villageois

Cette preuve de l'existence et de l'unicité du centre de secours n'indique pas comment il peut être construit.

---

[93] Les sous-espaces compacts de $IR^2$ sont les sous-ensembles fermés et bornés de $IR^2$ : les zones $Z(r)$ sont bien fermées et contenues dans des pavés de bases bornées.

Nous ne développerons pas davantage ce modèle, si ce n'est en ajoutant qu'à partir d'une zone $Z(r)$, il resterait à examiner sa forme (constituée de deux ou bien trois ou bien quatre arcs de cercles) et à déterminer quelles sont les médiatrices des segments formés par les villages qui la traversent.

### 5. A l'issue de l'étude de ces deux modèles…

Nous avons démontré l'existence et l'unicité d'un point, qui est le centre de secours, au sein de chacun des deux modèles, qui se réfèrent chacun à des éléments théoriques différents. Ces modèles étant validés par les preuves correspondantes, le point obtenu est bien le même. On peut d'ailleurs remarquer, à la fin de l'étude du modèle du villageois, que le centre va s'obtenir par intersection de médiatrices de segments formés par les villages. On rejoint les conclusions du modèle du sauveteur.

## LES PRODUCTIONS D'ENSEIGNANTS

Nous avons analysé vingt-six productions, rédigées par les enseignants sur le problème du Centre de secours[94]. Certaines étant issues d'un travail en groupe, elles concernent en tout environ soixante-cinq personnes, tous enseignants.

Le texte intégral de ces productions figure en annexe à ce chapitre, elles sont accompagnées de commentaires, qui constituent la première analyse que nous en avons effectuée et à partir de laquelle nous avons réalisé une seconde analyse rapportée dans les paragraphes qui suivent.

Dans un premier temps, nous décrivons le contexte dans lequel nous avons recueilli ces productions, que nous répartissons en cinq classes. Nous proposons ensuite une analyse de ces productions dans une perspective de formation.

Cette analyse permet de dégager deux types de conclusions :

- d'une part, des invariants dans les *attitudes*[95] des enseignants par rapport à ce problème, que nous distinguons en *tendances* ou *observations* ; ceci nous amène à des résultats, indicateurs de conceptions des enseignants sur la preuve ;
- d'autre part, des éléments à institutionnaliser en formation.

### 1. Cinq classes de productions relatives à la recherche du Centre de secours

Nous regroupons les vingt-six productions en cinq classes, du fait que nous les avons récoltées dans des contextes différents. Le choix initial de la variable *contexte différent* peut se décliner suivant trois autres variables : le *temps* alloué à la recherche

---

[94] Dans la suite, nous dirons souvent *Le Centre de secours* pour signifier le problème du Centre de secours et sa résolution.

[95] Au sens de manière d'envisager le problème, de position prise par rapport au problème.

du problème, le *mode de rédaction*, rédaction personnelle ou en groupe de la production, le *public*, enseignants expérimentés ou stagiaires. Nous ferons éventuellement des commentaires par rapport à ces variables pour chacun des textes, mais nous n'en tirerons pas de conclusion globale, car la population concernée est trop peu nombreuse. Seulement quatre productions sur vingt-six (qui concernent une quinzaine de personnes) ont été réalisées au bout d'un temps (deux heures) beaucoup plus long que les autres (moins d'une heure[96]). Nous pourrons néanmoins examiner si ce temps donné pour la recherche du problème a permis à certaines personnes un changement de stratégie, une avancée dans le problème. Certaines productions sont le fruit d'une seule personne, après une recherche collective : nous verrons si la rédaction personnelle a fait apparaître une idée particulière, invisible dans la production des autres membres du groupe. Enfin treize productions sur vingt-six ont été réalisées par des enseignants stagiaires et l'autre moitié par des enseignants expérimentés.

Nous présentons le contexte du recueil de ces productions.

**La première** classe, désignée par FC02 (Formation Continue 2002) est constituée de quatre éléments (FC02-1, FC02-2, FC02-3 et FC02-4). Il s'agit de textes produits en 2002, par des groupes d'enseignants candidats à un stage de formation continue, intitulé « Situations-problèmes, problèmes ouverts, débat scientifique ». Les stagiaires, tous professeurs de mathématiques, neuf en collège, un en lycée, sont invités à chercher, par groupes de deux ou trois, le problème du centre de secours, posé de la manière suivante : « Dans une région se trouvent quatre villages de même importance ; on veut construire un centre de secours muni d'un hélicoptère de façon à pouvoir atteindre le plus rapidement possible le village le plus éloigné. Où placer le centre de secours ? »

La consigne est précisée de la manière suivante : le temps imparti est de deux heures, sans communication entre les groupes. Les stagiaires doivent écrire sur transparents la narration de recherche de leur groupe, qui sera présentée ensuite à tous. Il s'agit surtout qu'au travers de ces textes, chaque groupe mette en avant sa démarche de recherche :

- noter toutes les pistes suivies, même si elles sont abandonnées par la suite, et dans ce cas, il faut donner la raison de leur abandon ;
- écrire toutes les conjectures, mêmes si elles ne sont que très partielles, mêmes si elles se sont révélées fausses ; dans ce cas, un contre-exemple doit être donné pour prouver qu'elles sont fausses ;
- peu importe si une solution complète n'est pas trouvée.

Aucune configuration de village n'est proposée, aucun matériel non plus, à part les transparents et les feutres.

**La seconde** classe (sept productions) désignée par FC06 (Formation Continue 2006) provient aussi d'enseignants volontaires pour participer à un stage de formation continue sur la démonstration au collège. Deux groupes, l'un de trois

[96] On peut penser que ce temps est court. Mais c'est particulièrement les façons d'aborder le problème que nous cherchons à étudier.

personnes, l'autre de quatre, ont choisi[97] de travailler sur le problème du centre de secours, posé de la même façon que pour la première classe. La consigne, un peu différente, précise que la recherche par groupe dure quarante-cinq minutes[98], puis que vingt minutes seront ensuite consacrées à la rédaction individuelle d'un texte qui s'adresse à des personnes qui n'ont pas nécessairement cherché le problème choisi. Ce texte devra mettre en évidence la démarche, les résultats obtenus, les pistes suivies, même si elles n'ont pas abouti.

**La troisième** classe (cinq productions) comporte des textes qui proviennent de professeurs stagiaires, en formation à l'IUFM[99], durant l'année universitaire 2005-2006 (désignée par PLC2-06). Cette formation initiale inclut un module de neuf heures sur la démonstration, la recherche du problème du centre de secours a lieu pendant ce module. La consigne donnée est exactement la même que celle de la deuxième catégorie. Les enseignants sont répartis en deux groupes de trois stagiaires.

**La quatrième** classe comprend deux productions de groupes, récoltées lors d'un atelier aux journées nationales de l'APMEP[100], à Rennes, en 2002. Cette catégorie est désignée par APM02. Les participants ont cherché le problème du centre de secours pendant un temps assez court, puis ont rédigé un transparent par groupe.

**La cinquième** catégorie (huit productions) est formée de transparents rédigés par des professeurs stagiaires de mathématiques, dans le cadre d'un module de formation sur la démonstration, durant l'année universitaire 2006/2007. Elle est désignée par PLC2-06/07. Chaque groupe, de quatre stagiaires environ, a eu à peine une demi-heure pour chercher ce problème et a rédigé ensuite un transparent, à présenter à l'ensemble du groupe.

## 2. Méthode d'analyse des productions

De l'examen et de la comparaison des différentes productions sur le Centre de secours, nous pointons diverses tendances dans les *attitudes* par rapport à ce problème. Certaines lui sont spécifiques, d'autres relatives au processus ou au texte de preuve, de façon plus générale.

Nous les regroupons en quatre *observations*, les deux premières pointent des *tendances*, les deux autres recouvrent *différentes attitudes* pointées à partir de deux points d'entrée dans l'analyse des productions :

- première tendance : *on traite un autre problème* ;

---

[97] Les autres groupes travaillent sur *le Polymino* ou sur *le Pentagone*.

[98] Nous insistons sur le fait que c'est la façon d'aborder le problème qui nous importe. Nous ne cherchons pas à « piéger » les enseignants en leur accordant un temps trop court. Nous les prévenons d'ailleurs en leur disant que, dans le temps imparti, nous pensons qu'ils n'auront pas le temps de résoudre complètement le problème.

[99] Institut Universitaire de Formation des Maîtres

[100] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

• deuxième tendance : *on entre dans le problème* ;

• troisième : *on se comporte différemment par rapport au traitement des cas particuliers et le recours au raisonnement par disjonction des cas* ;

• quatrième : *on se comporte différemment par rapport à la production de résultats et de conjectures fausses ou ouvertes*.

Ce découpage en quatre catégories ne donne pas lieu à une partition de l'ensemble des productions analysées. Une même production peut relever de plusieurs catégories, du fait de la possibilité de changer d'attitude par rapport au problème. Ce que nous cherchons, pour la formation, c'est à pointer certains comportements par rapport à la preuve, et non pas à classer les productions en différentes catégories.

Pour identifier ces *attitudes*, nous utilisons différentes variables :

• *stratégie employée*,

• *présence d'éléments liés à la modélisation*,

• *point de vue adopté sur le problème*,

• *traitement des cas particuliers*,

• *type de raisonnement*,

• *nombre de résultats*,

• *nombre de conjectures fausses, nombre de conjectures ouvertes.*

Nous développons, dans les quatre paragraphes qui suivent, relatifs aux catégories d'observations, comment ces variables ont été utilisées.

## 3. La tendance : on traite un autre problème

Nous avons utilisé la seule variable *stratégie employée* pour identifier cette tendance ou catégorie.

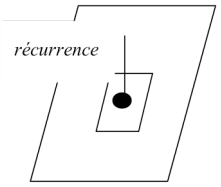
### Comment la variable *stratégie employée* permet d'identifier cette tendance

Certaines des stratégies de preuve adoptées, bien qu'en dehors de la question, répondent à un critère pour déterminer un point, comme par exemple, rechercher un point qui réalise l'égalité des distances à quatre autres points. C'est une sorte d'esprit de justice qui guide les enseignants qui oublient le problème. En voici un exemple :

[…] *Deuxième idée :- SA≈ SB≈ SC≈ SD.*
*- Si points A, B, C, D sont cocycliques, on sait résoudre.*
*- Si points A, B, C, D non cocycliques*
*→ tracés des quatre médiatrices, on obtient quatre centres de cercles circonscrits.*
[…] (extrait de FC02-02)

Mais d'autres, comme celle qui consiste à réduire le quadrilatère de départ jusqu'à ce qu'il devienne « très petit » sont des *pseudo-procédures de convergence*, sans réel fondement mathématique par rapport à ce problème : elles ont pour seul objectif d'aboutir à un seul point qui serait le centre cherché.

⇒ *recherche sur le triangle avec médiatrice et barycentre.*




⇒ *médiatrice des points groupés par 3 puis les médiatrices des 4 points obtenus et récurrence de quadrilatère de + en + petit*.

[…] (extrait de FC06-4-G2)

Les enseignants se raccrochent à ces stratégies, sans se rendre compte qu'ils se détournent ainsi du problème à résoudre.

Ces deux stratégies évoquées, comme toutes celles qui figurent dans cette catégorie et que nous illustrons ci-dessous, relèvent d'une conception de la preuve comme moyen de faire fonctionner des méthodes connues, en rapport avec la composante de conception *FM*[101] (fichier-méthodes). Le problème est que certaines de ces stratégies n'ont qu'une vague parenté avec des méthodes reconnues et qu'elles sont utilisées sans raisons mathématiques. Il faut dire que le problème incite[102], par les objets familiers qu'il met en jeu, à se raccrocher à un environnement connu. Les enseignants se sentent dans un milieu familier, celui de la géométrie plane, des segments, triangles et quadrilatères. Ils manipulent cependant ces objets *sans avoir de problématique de recherche mathématique*. Une telle pratique de résolution des problèmes, de la part des enseignants, qui est aussi celle qu'ils enseignent, est un obstacle à la *pratique mathématique* par rapport à un problème comme le Centre de secours.

Nous identifions ainsi au travers de l'utilisation de ces procédures, cette tendance, identifiée par *on traite un autre problème*, qui regroupe les productions où des développements assez importants sont rédigés suivant les stratégies que nous allons décrire ci-dessous.

**Les stratégies qui relèvent de cette tendance**

***Stratégie CS-ED (Centre de Secours : Egalité de Distances)***

Elle peut se formuler ainsi : *on recherche un point qui réalise l'égalité des distances à deux, trois ou quatre points*. Elle est illustrée par le premier exemple donné dans le sous-paragraphe précédent.

Ceci conduit au milieu pour le cas de deux points, ce qui est vrai. Cette procédure donne le centre du cercle circonscrit pour le cas de trois points, ce qui

[101] Une preuve se construit à partir des stratégies courantes vues dans le cursus secondaire, elle repose sur un corpus de connaissances construit et bien identifié dans lequel il n'y a qu'à puiser.

[102] C'est un des intérêts de ce problème pour la formation des enseignants.

n'est vrai que si le triangle a tous ses angles aigus. Pour quatre points, on n'obtient le centre du cercle circonscrit à ces quatre points, que s'ils sont cocycliques.

Comme nous l'avons dit, se raccroche à cette stratégie une certaine idée de justice : on voudrait mettre tous les villages à égalité. On ne se rend pas compte que cela n'est pas cohérent avec le problème posé. On risque en effet d'éloigner le centre de secours d'un village sous prétexte que la distance du centre aux villages doit être la même, alors que cela ne change rien pour le ou les villages les plus éloignés de ce centre.

Dans certaines productions, on propose de tracer a priori des médiatrices ou des cercles circonscrits à des triangles, sans pour autant expliciter que l'on recherche un point qui soit équidistant des quatre villages, ni que l'on cherche un point qui réalise le minimum de la plus grande distance à chaque village . Nous identifions tout de même cette stratégie *CD-ED* au travers de ces productions. Voici un exemple :

[…] *Ensuite j'ai commencé par tracer les médiatrices des côtés du quadrilatère formé par les quatre villages mais ça « n'avait pas l'air » de mener à grand chose à part pour certains cas particuliers (lesquels ?).* […] (extrait de FC06-1-G1)

Notons bien que cette méthode donne une réponse au problème dans plusieurs cas de figures. Lorsqu'elle apparaît après un raisonnement, comme, par exemple, pour le cas de trois villages formant un triangle aux angles tous aigus, nous ne la relevons pas dans cette catégorie. Nous l'identifions uniquement dans le cas où elle est présentée comme un moyen de trouver un point qui respecte une *certaine égalité*, sans référence à la question de départ.

***Stratégie CS-MSD (Centre de Secours : Minimiser la Somme des Distances)***

Elle veut dire : *on cherche à minimiser la somme des distances du centre aux quatre villages*.

Voici un exemple :

*On a voulu minimiser les distances du centre de secours aux quatre villes.*
*Pistes explorées :*
** Tracer les quatre centres des cercles circonscrits aux 4 triangles et recommencer l'opération*
** minimiser la fonction* $OV_1 + OV_2 + OV_3 + OV_4$ […] (extrait de FC06-6-G2)

Cette approche correspondrait, par exemple, au problème de la construction d'une laiterie chargée de collecter le lait dans les villages. Chaque village fournissant une quantité de lait telle que la cuve du camion serait remplie, le transporteur de lait devrait en effet faire un aller-retour entre chaque village et la laiterie. On chercherait alors à minimiser le nombre de kilomètres que devrait faire le camion.

Dans le cas de trois points alignés, on démontre que le minimum est obtenu pour l'un des points, celui qui est situé entre les deux autres.

Dans le cas de trois points non alignés, on démontre que le minimum n'est obtenu pour un point intérieur au triangle, *le point de Toricelli*, que si les trois angles

construits en reliant ce point aux trois sommets mesurent moins de 120° ; sinon, il est obtenu pour l'un des sommets du triangle.

Dans le cas de quatre points qui forment un quadrilatère convexe, le minimum est obtenu pour le point d'intersection des diagonales, en effet :

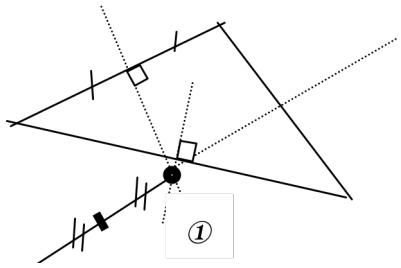
- le point $I$ d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ est un point $M$ en lequel les sommes positives $MA + MC$ et $MB + MD$ sont minimales, donc en lequel la somme $MA + MB + MC + MD$ est minimale et égale à $AC + BD$ ;
- supposons que le minimum de $MA + MB + MC + MD$ soit obtenu en un point $M$ autre que $I$, alors $MA + MB + MC + MD \leq AC + BD$ ; de plus, $M$ n'appartient pas à l'un au moins des segments $[AC]$ ou $[BD]$, donc, on a $AC < AM + MC$ ou $BD < BM + MD$. Donc
AC + $BD$ < MA + $MB + MC + MD \leq AC + BD$, ce qui est impossible.

Dans le cas de quatre points qui forment un quadrilatère concave, on démontre que le minimum est obtenu pour le point qui est à l'intérieur du triangle qui constitue l'enveloppe convexe du quadrilatère.

***Stratégie CS-R (Centre de Secours : Réduction)***

On la formule ainsi : *dans la recherche du centre de secours, on remplace certains points par un seul, ce qui permet de réduire le nombre de points ou la figure obtenue.*

Voici un exemple, qui montre cette procédure *associative* :




[…]
*② J'essaie en enlevant une contrainte : s'il n'y avait que trois points, je saurais où placer le centre de secours (CS) mais évidemment, même en prenant le milieu de ce point et du quatrième, ça ne fonctionne pas tout le temps.*
[…] (extrait de FC06-7-G1)

Cette stratégie ne convient pas. Un contre-exemple peut être donné par quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ tels que le triangle $ABC$ soit rectangle en $C$ et que $D$ appartienne à l'intérieur du disque de diamètre $[AB]$. Soit $O$ le milieu de $[AB]$, $O$ est le centre de secours relatif aux trois points $A$, $B$, $C$, et celui des quatre points $A$, $B$, $C$, $D$. Il ne peut pas être le milieu de $[OD]$ comme le donne la stratégie.

Elle propose de remplacer trois des points par un seul point, comme on l'utilise, sous certaines conditions, pour la recherche d'un barycentre par exemple, grâce à la propriété qui s'appelle justement *l'associativité du barycentre*.

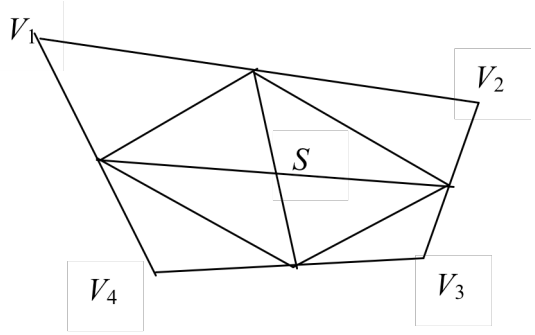
Nous avons vu un autre exemple dans le premier sous-paragraphe, où l'on obtient « un quadrilatère plus petit ». Puisqu'on cherche un point (l'unicité de ce point n'est jamais remise en question), il est plus facile de l'obtenir à partir d'un quadrilatère « plus petit », d'où l'idée de réduire de plus en plus celui-ci, jusqu'à imaginer qu'il ne reste plus qu'un point.

***Stratégie CS-ID (Centre de secours : Intersection des Diagonales du quadrilatère)***

Il s'agit de : *on détermine le point d'intersection des diagonales du quadrilatère formé par les quatre points.*

Voici un exemple :

*Première idée : nous avons pensé au quadrilatère de Varignon :*
*Schéma :*




*Nous avons placé les quatre villages de façon quelconque, tracé le « quadrilatère des milieux » et tracé les diagonales de ce quadrilatère.*
*Le centre de secours serait l'intersection des diagonales.*
[…] (extrait de PLC2-06-5-G1)

Cette procédure, couramment utilisée dans une approche naïve du problème, est la plus simple qui fasse apparaître un point construit à partir de quatre autres points. On peut évidemment en trouver des contre-exemples. Elle fait parfois suite à une autre procédure qui consiste d'abord à réduire le quadrilatère (*CS-R*) par exemple), puis à en tracer les diagonales lorsqu'il est « petit ».

***Stratégie CS-B (Centre de Secours : Barycentre)***

On la formule ainsi : *on cherche l'isobarycentre des quatre points.*

Cette stratégie est très souvent mise en avant, pour trouver directement le centre de secours (c'est l'isobarycentre) ou comme un intermédiaire. Voici un exemple :

*$A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ sont quatre points du plan*
*1) On cherche à minimiser la fonction scalaire*

$$f : M \mapsto \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MA_i^2}$$

*Indication : considérer l'isobarycentre des points* $\left(A_i\right)_{i=1,\ldots,4}$
[…] (FC06-5-G2)

Les mots de barycentre ou d'isobarycentre évoquent un centre, centre de gravité, mais la norme associée ne correspond pas à celle qui sous-tend la recherche du centre de secours. Le barycentre est notamment utilisé pour minimiser la somme des carrés des distances d'un point aux quatre villages. La somme des distances d'un point aux quatre villages étant assez difficile à minimiser, on transforme le problème en celui du minimum de la somme des carrés. Cette association des deux procédures est peut-être liée à l'idée que le minimum de $x^2 + y^2$ est obtenu pour $(x ; y) = (0 ; 0)$, qui est aussi le point qui réalise le minimum de $x + y$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

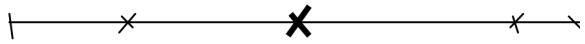
***Stratégie CS-Gb (Centre de Secours : Géométrie de base)***

On l'exprime par : *on en reste à la géométrie du triangle ou des quadrilatères, sans évoquer les angles.*

Une fois la modélisation réalisée, le contexte rassurant du problème (quatre points d'un plan) incite à rester dans le cadre de la géométrie plane simple du collège, où il est finalement peu question d'angle, mis à part les angles droits. Voici une illustration :

** D'abord les cas simples*

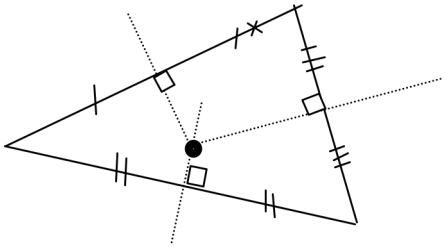
** Si les quatre villages sont alignés :*



*on place le centre de secours au milieu du segment reliant les deux villages les plus éloignés.*

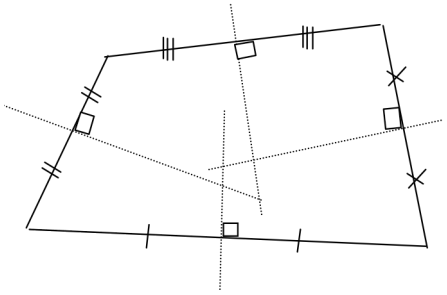
*Comme il est à égale distance des deux plus loin, il est évidemment plus près des deux autres.*

** Si trois points (villages) sur quatre sont alignés, il faut rechercher le point le moins éloigné des trois villages qui constituent le triangle.*

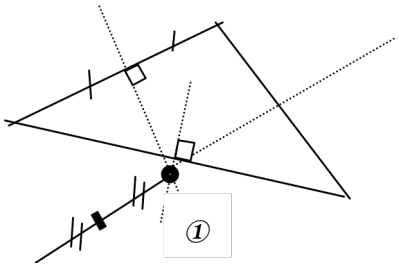


*Donc en prenant le centre du cercle circonscrit, on se place à égale distance des 3 plus loin. Et si on se décale de ce point, on sera forcément plus loin de l'ensemble des trois ⇒ pas possible.*

** Sinon, cela forme un quadrilatère :*

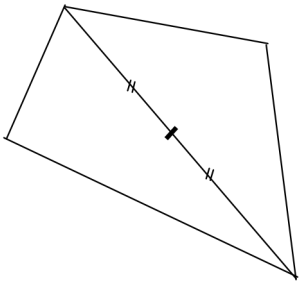


*① le centre de secours, pour bien faire, devrait être à égale distance des quatre. C'est impossible, sauf cas particulier, mais j'utilise cette piste en traçant les quatre médiatrices des côtés. Je ne sais pas comment utiliser ces constructions.*

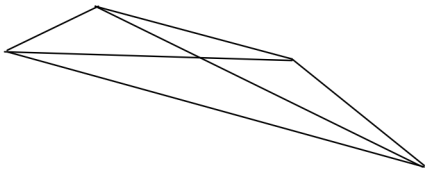



*② J'essaie en enlevant une contrainte : s'il n'y avait que trois points, je saurais où placer le centre de secours (CS) mais évidemment, même en prenant le milieu de ce point et du quatrième, ça ne fonctionne pas tout le temps.*

*③ Ensuite, je me dis que le CS doit être à égale distance des deux villages les plus éloignés, pour ne pas en pénaliser un.*



*Il faut donc en plus de regarder les diagonales, aussi les côtés car :*



*Malheureusement dans certains cas, problème.*
*④ Reste peut-être à retravailler soit sur les médiatrices des segments les plus longs, soit sur le régionnement du plan qu'elles entraînent*. (FC06-7-G1)

**Effectif de chacune de ces stratégies dans les productions**

L'analyse des productions des enseignants met à jour les résultats chiffrés suivants : on peut se reporter à l'annexe à ce chapitre pour lire les productions intégralement.

| *Stratégie* | *Productions qui la mettent à jour* | *Effectif* |
|---|---|---|
| *CS-ED : Egalité de Distances* | *FC02-2, FC06-1-G1, FC06-2-G1, FC06-7-G1, FC06-3-G2, FC06-6-G2, PLC2-06-5-G1, PLC2-06-1-G2, PLC2-06-2-G2, APM02-1, APM02-2, PLC2-06/07-4, PLC2-06/07-8* | *13* |
| *CS-B : Barycentre* | *FC06-3-G2, FC06-4-G2, FC06-5-G2, FC06-6-G2, PLC2-06-3-G1, PLC2-06-5-G1, APM-02-1, APM02-2, PLC2-06/07-2, PLC2-06/07-3, PLC2-06/07-4, PLC2-06/07-8* | *12* |
| *CS-MSD : Minimiser la Somme des Distances* | *FC02-1, FC02-2, FC02-4, FC06-3-G2, FC06-4-G2, FC06-5-G2, FC06-6-G2, APM02-1, APM02-2* | *9* |
| *CS-R : Réduction* | *FC06-7-G1*<br>*FC02-2, FC06-4-G2, PLC2-06-3-G1, PLC2-06-4-G1, PLC2-06-5-G1, PLC2-06/07-2* | *7* |
| *CS-ID : Intersection des Diagonales* | *FC06-2-G1, PLC2-06-5-G1* | *2* |
| *CS-Gb : Géométrie de base* | *FC06-7-G1* | *1* |

Figurent au moins une fois dans ce tableau dix-neuf productions sur vingt-six, soit 73% : c'est donc le pourcentage des productions qui révèlent l'utilisation d'au moins une stratégie sans rapport avec la question posée.

On pourrait dire que la stratégie *CS-ED* n'est, somme toute, pas étrangère à la résolution du problème : rappelons cependant qu'elle n'est pas identifiée dans la production si elle apparaît après un raisonnement, comme, par exemple, pour le cas de trois villages formant un triangle aux angles tous aigus, elle n'est relevée que dans le cas où elle est présentée comme un moyen de trouver un point qui respecte une *certaine égalité*, sans référence à la question de départ.

On remarque que les trois procédures les plus proposées sont *CS-ED* (13 fois sur 44, soit environ 30%), *CS-B* (12 fois sur 44, soit aussi environ 30%) et *CS-MSD* (9 sur 44, soit environ 20%). Elles correspondent toutes trois à des questions assez couramment posées dans l'enseignement secondaire.

On peut se demander combien de méthodes sans rapport avec le problème sont proposées dans certaines productions ? Le nombre obtenu dépend-il du temps proposé aux enseignants pour la recherche du problème. La seule classe de productions obtenues après un temps plus long que les autres est celle qui est identifiée par *FC02*.

| *Nombres de méthodes utilisées sans rapport avec le problème* | *4* | *3* | *2* | *1* |
|---|---|---|---|---|
| *Productions correspondantes* | *PLC2-06-5-G1* | *FC02-2*<br>*FC06-4-G2*<br>*FC06-6-G2*<br>*APM02-1*<br>*APM02-2* | *FC06-2-G1*<br>*FC06-3-G2*<br>*FC06-5-G2*<br>*FC06-7-G1*<br>*PLC2-06-3-G1*<br>*PLC2-06/07-2*<br>*PLC2-06/07-4*<br>*PLC2-06/07-8* | *FC06-1-G1*<br>*FC02-1*<br>*FC02-4*<br>*PLC2-06-4-G1*<br>*PLC2-06/07-3* |
| *Nombre de productions correspondantes* | *1* | *5* | *8* | *5* |

On remarque que cinq productions (5/19) proposent une seule stratégie de cette catégorie *on traite un autre problème*, quatorze (14/19) proposent au moins deux stratégies de cette catégorie et six (6/19) vont jusqu'à donner au moins trois stratégies, sans rapport avec le problème posé. Ce n'est pas le temps laissé à la recherche qui augmente le nombre de stratégies erronées.

On peut noter que quatorze productions sur vingt-six, soit environ 54%, empruntent au moins deux voies qui sont étrangères au problème lui-même. Ainsi, pour plus de la moitié des productions, se rendre compte que la méthode utilisée ne convient pas ne renvoie pas à se poser la question, *Que cherche-t-on ?*, mais à s'engager dans une autre voie, qui n'a pas davantage de rapport avec le problème posé.

*C'est un des premiers résultats sur ce problème : très majoritairement et avec insistance, les enseignants manipulent des objets mathématiques sans avoir de problématique de recherche mathématique. Le recours à un catalogue de méthodes, évoquées par le contexte a priori familier du problème, les empêche de voir le problème. Celles-ci sont souvent utilisées sans souci de contrôle de validité.*

Ceci va complètement à l'encontre de ce que nous avons développé au sujet de la preuve, dans le paragraphe 1 du premier chapitre de ce travail.

Cette persistance à ne pas entrer dans le problème, pour peu qu'elle soit montrée aux enseignants en formation, devrait les questionner, à la fois :

- dans leur rapport à la preuve : pourquoi le recours à des procédures apprises, non adéquates, l'emporte-t-il sur la question fondamentale *Quel est le problème ?* ;
- sur le plan de leur enseignement : qu'apprend-on aux élèves pour démarrer un problème ? La mise en avant de la *boîte à outils* pour démontrer est-elle un auxiliaire pédagogique utile ? Si oui, correctement employé, prématuré ? Ne doit-on pas alors séparer l'apprentissage de la démonstration et la mise en œuvre du cours qui vient d'être traité ?

Nous faisons en effet l'hypothèse que ceci pourrait être mis en relation avec le contrat usuel relatif à la preuve, notamment la *règle du fichier-méthodes*. Cette même attitude, manipulation d'objets mathématiques sans problématique de recherche, est, nous l'avons identifié, encouragée en classe par le recours systématique aux catalogues de méthodes lorsqu'on est en phase d'apprentissage de la preuve (composante de conception *FM*). Ceci est cautionné par les programmes, et surtout, par les manuels.

## 4. La tendance : on entre dans le problème

Pour identifier les *attitudes*, qui relèvent de cette tendance, nous utilisons trois variables : *présence d'au moins un élément lié à la modélisation*, *point de vue adopté sur le problème*, *stratégie employée*, les valeurs des deux dernières constituant des indicateurs de l'entrée (ou non) dans le problème, la première permettant de déceler que l'on *regarde* le problème avant de « se lancer ».

### Comment ces variables permettent d'identifier cette tendance

Concernant la modélisation, on évoque l'importance des villages, les trajets de l'hélicoptère, le vent… Par exemple :

*Un village est un point (non une zone)*. […] (extrait de FC02-1)

Nous notons par *CS-M* (Modélisation) la présence d'au moins un élément lié à la modélisation au cours de la résolution du problème. Nous ne relevons pas une production qui ne contient pas d'élément relatif à la modélisation.

Nous distinguons de la précédente la variable, *point de vue* adopté sur le problème, bien que les valeurs prises par la seconde (*point de vue du sauveteur*, *point de vue du villageois*, *absent*) puissent être liées à la première, parce que ce *point de vue* est rarement explicité dans les productions, même s'il est adopté. Nous décrivons ainsi les valeurs de cette variable, autres que *absent* :

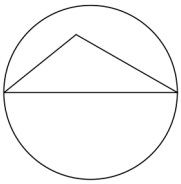
- *CS-PVS* (Point de Vue du Sauveteur) correspond à une production qui montre *une approche du problème relevant de la recherche du plus petit disque qui contient les quatre villages.*

• *CS-PVV* (Point de Vue du Villageois) correspond à une production qui montre *une approche du problème relevant de la recherche d'une zone d'intersection de disques de même rayon, centrés sur les villages*.

Ces deux points de vue témoignent d'une réelle entrée dans le problème : celui-ci *est vu*, il est *identifié*, à savoir qu'il s'agit de démontrer l'existence d'un point qui réalise le minimum de la distance à quatre points fixés dans le plan et de le construire. Voici un exemple :

[…]
*Piste 4 : Il faut trouver le plus petit cercle qui contient les quatre villages. Son centre est le centre de secours (non démontré, mais trivial ?! Définition du cercle.)*
*Piste 5 : solution pour 3 villages*

*Cas 1 :*
*il existe un angle obtus*
*Cercle de diamètre la plus grande distance*



*Cas 2 :*
*pas d'angle obtus*
*Cercle circonscrit aux trois villages*

*Conjecture solution : quatre villages définissent quatre triangles (donc quatre cercles) ; un de ces cercles est solution.*
*Non démontré. Pas de contre-exemple*. (FC02-1)

Mais c'est non seulement à la présence (ou l'absence) de ces deux éléments que nous reconnaissons que le problème est *identifié* (ou non), c'est aussi à la *pertinence* (ou non) de la ou des stratégies proposées (l'une de celles que nous avons exposées dans l'analyse mathématique du problème ou avoisinante). Nous illustrons notre propos par deux *exemples-non*, c'est-à-dire des productions auxquelles nous n'attribuons ni *CS-PVS*, ni *CS-PVV*, ce qui révèle que le problème n'est pas identifié, malgré ce que l'on pourrait penser à première vue :

*On a voulu minimiser les distances du centre de secours aux quatre villes.*
*Pistes explorées :*
** Tracer les quatre centres des cercles circonscrits aux 4 triangles et recommencer l'opération*
** minimiser la fonction* $OV_1 + OV_2 + OV_3 + OV_4$
** utilisation de l'isobarycentre des points* $V_1, V_2, V_3, V_4$

$$MA_i^2 = MG^2 + GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{GA_i}$$

$$\sum_{i=1}^{4} MA_i^2 = 4MG^2 + 4\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG} \bullet \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i}$$

$$= 4MG^2 + 4\sum_{i=1}^{4} GA_i^2$$

*C'est bien minimisé si G =M*
*cas particulier : 4 points alignés*
*3 points alignés + 1 autre* (FC06-6-G2)

La production débute bien par une phrase qui pourrait évoquer *CS-PVS*, puisque le problème semble explicité. Cependant, la suite montre qu'il n'est pas identifié puisque les stratégies ou techniques utilisées ne sont pas pertinentes.

Un deuxième *exemple-non* :

[…]
*⇒ changement de l'énoncé : idée de minimaliser une fonction avec les coordonnées*
*⇒ chgt d'axe problème minimaliser la somme des distances ⇒ isobarycentre (est-ce bien le bon résultat ?)*
*⇒ marche pas si ils sont alignés (ce serait le milieu des points extrêmes)*
*⇒ logiciel de géométrie dynamique / ou tableur avec des si pour expérimenter. Problème on peut pas vraiment expérimenter c'est vite trop long (Cabri tableur grosse aide).*
(FC06-4-G2)

la production explicite de « minimaliser une fonction avec les coordonnées », mais ce qui pourrait passer pour une identification du problème est suivi par un « changement d'axe », qui montre qu'il n'en est rien : le problème est abandonné.

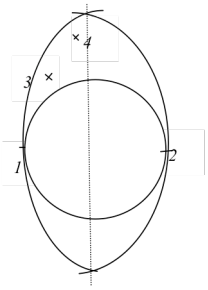
Ainsi ce n'est pas à la seule vue dans la production d'une phrase, du type « On a voulu minimiser les distances du centre de secours aux quatre villes », que nous dirons que l'entrée dans le problème est réelle, il faut des indices pertinents qui montrent cette appropriation du problème : *CS-PVS* ou *CS-PVV* ou l'un des indicateurs suivants :

- *CS-MinMax* : *on cherche un point qui réalise le Minimum de la distance Maximale aux quatre villages* ;
  on peut décliner cette stratégie suivant deux cadres :
  - *CS-MinMaxGeo* : on recherche ce point de *manière géométrique* ;
  - *CS-MinMaxAna* : on recherche ce point de *manière analytique*.
- *CS-RC* (Recherche d'un Cercle) : *on cherche à attraper tous les points sur un même cercle.*
- *CS-RZ* (Recherche d'une Zone) : *on cherche une zone à laquelle devraient appartenir des villages à partir d'une zone déjà délimitée par les autres villages.*

Un exemple pour illustrer cette dernière stratégie :

*Piste 2 : on prend la distance maximale entre deux villages, le centre de secours est au milieu.*

*Deux zones posent problème*




[…] (extrait de FC02-1)

On détermine les deux villages qui sont les plus éloignés l'un de l'autre, soient *A* et *B*, on considère le disque qui a pour diamètre [*AB*], on fait apparaître que si les deux autres villages appartiennent à une même partie d'une certaine zone[103], alors on ne sait pas répondre à la question.

**Les résultats correspondant à cette tendance**

Le tableau ci-dessous ne comporte pas les productions pour lesquelles la variable *présence d'au moins un élément lié à la modélisation* prend la valeur *non*, seule sa valeur *oui* est signalée par *CS-M*. Il ne comporte pas non plus les productions qui correspondent à la valeur *absent* de la variable *point de vue adopté sur le problème*, ni celles pour lesquelles la stratégie employée n'est pas pertinente par rapport au problème.

Les résultats chiffrés sont les suivants :

| *Valeurs des variables* | *Productions qui les mettent à jour* | *Effectifs* |
|---|---|---|
| *CS-M : Modélisation* | *FC02-1, FC02-4, FC06-2-G1, FC06-4-G2, APM-02-1, APM02-2, PLC2-06/07-2, PLC2-06/07-5* | *8* |
| *CS-PVS : Point de Vue du Sauveteur* | *FC02-1, FC02-2, FC02-3, FC02-4, FC06-1-G1, FC06-2-G1, PLC2-06-1-G2, PLC2-06/07-1, PLC2-06/07-3, PLC2-06/07-4, PLC2-06/07-6* | *11* |
| *CS-PVV : Point de Vue du Villageois* | *FC06-2-G1* | *1* |
| *CS-MinMaxGeo : recherche Géométrique du Minimum de la distance Maximale aux villages* | *FC02-1, FC02-2, FC02-4, FC06-1-G1, FC06-2-G1, PLC2-06-3-G1, PLC2-06-4-G1, PLC2-06/07-3, PLC2-06/07-5, PLC2-06/07-6* | *10* |
| *CS-MinMaxAna : recherche Analytique du Minimum de la distance Maximale aux villages* | *PLC2-06/07-1, PLC2-06/07-7* | *2* |
| *CS-RC : Recherche d'un Cercle* | *PLC2-06-1-G2, PLC2-06-2-G2, PLC2-06/07-8* | *3* |
| *CS-RZ : Recherche d'une Zone* | *FC02-1, FC02-2, FC06-2-G1* | *3* |

[103] Cette zone est le complémentaire du disque de diamètre [*AB*] dans l'intersection du disque de centre *A* qui passe par *B* et du disque de centre *B* qui passe par *A*.

Seules huit productions sur vingt-six donnent des éléments concernant la modélisation. Nous pensons que la présence faible d'éléments relatifs à la modélisation est une conséquence du contrat didactique usuel, qui veut qu'en mathématiques, on fasse des exercices de mathématiques, sans se préoccuper réellement du problème qu'on est en train de résoudre.

Seulement onze (la seule production qui prend la valeur *CS-PVV* prend aussi la valeur *CS-PVS*) productions sur vingt-six témoignent d'une réelle entrée dans le problème, au bout d'un temps plus ou moins long. Cette appropriation de la question a d'ailleurs pu être précédée d'une phase de tâtonnements en dehors du problème : la production FC02-1, par exemple, qui est relevée dans cette tendance, figure aussi dans la tendance précédente. On note l'importance de la variable *temps* de *recherche* dans l'entrée dans le problème : les quatre productions FC02, pour lesquelles les enseignants ont eu davantage de temps, montrent une appropriation du problème, mais celle-ci n'est pas immédiate. Cependant, par rapport à ce qu'on cherche à montrer, qui concerne la façon d'aborder un problème, il est plus intéressant de laisser peu de temps de recherche. Parmi ces productions, c'est majoritairement le point de vue du sauveteur qui est retenu et un seul texte conjugue les deux points de vue.

Quelques remarques enfin sur la cohérence dans le remplissage du tableau. Tout d'abord, dans les lignes *CS-MinMaxGeo*, *CS-MinMaxAna*, *CS-RC*, *CS-RZ*, on retrouve les onze productions, qui marquent une compréhension du problème, sauf deux, FC02-3 et PLC2-06/07-4. La première montre que l'entrée dans le problème est réalisée (*CS-PVS*), mais ce qu'on cherche n'est pas explicité, aucune stratégie n'est développée pour répondre au problème. Dans la seconde, il apparaît une disjonction de cas pertinente, qui évoque une identification du problème, mais le raisonnement qui suit, sur différents cas d'enveloppes convexes des quatre points, semble conforter les auteurs dans la recherche d'un barycentre. Ensuite, quatre productions, PLC2-06-3-G1, PLC2-06-4-G1, PLC2-06/07-5, PLC2-06/07-7, évoquent des stratégies pertinentes, *CS-MinMaxGeo* et *CS-MinMaxAna*, mais ne sont pas considérées comme montrant une compréhension du problème, parce que le problème, bien qu'explicitement décrit, ne semble pas compris : aucune stratégie pertinente n'est proposée.

Les éléments, qui apparaissent dans cette deuxième catégorie d'attitudes par rapport au problème, permettent d'appuyer les résultats donnés par la première tendance *on résout un autre problème*. L'institutionnalisation proposée dans le paragraphe précédent pour la formation s'en trouve confortée.

## 5. Observations sur le traitement des cas particuliers, la disjonction des cas

Les cas particuliers sont très mal considérés dans l'enseignement, notamment dans le cadre de la géométrie plane au collège. Nous renvoyons à la règle de contrat dite *d'interdiction des cas particuliers*[104] (chapitre 2) :

[104] Pour faire une démonstration en géométrie, il faut dessiner une figure qui n'est pas un cas particulier.

En témoigne la production suivante :

*Utilisation de dessins aux différentes étapes de la recherche :*
*- éviter les cas particuliers,*
[…] (extrait de APM-02-2)

Beaucoup d'enseignants pensent que les cas particuliers empêchent les élèves de voir la preuve dans le cas général. Ils sont souvent bannis de la classe et des cahiers des élèves. Ici, ils sont utiles à la compréhension du problème et leur étude fait partie de la preuve : le regard sur deux ou trois villages change le regard sur quatre, la figure montrant trois villages qui forment un triangle rectangle permet d'avancer sur le problème…

Nous avons montré (chapitre 9) en renvoyant à Arsac et Durand-Guerrier (2003) pourquoi la vision exclusive de la preuve comme relevant du calcul des propositions appliqué à un exemple générique contribue à écarter tout travail sur les cas particuliers et sur le faux. Ceci a des conséquences sur la mobilisation du raisonnement par disjonction de cas, comme nous allons le voir.

Nous avons analysé les productions sur le plan du *traitement des cas particuliers*, variable dont nous considérons les trois valeurs suivantes :

- *CS-TCP+* : *les cas particuliers sont exploités et constituent un appui à la conjecture ou produisent des résultats*.
  Les productions montrent l'étude de cas particuliers, points alignés, cas de trois villages, à partir desquels des conjectures sont émises.

- *CS-TCP–* : *les cas particuliers sont traités succinctement ou évoqués, sans preuve explicitée, ils servent seulement à l'appropriation de la question.* Il se peut que les productions montrent l'étude de cas particuliers, mais que ceux-ci donnent lieu à des résultats faux. De telles productions seront alors étiquetées *CS-TCP–*.

- *CS-nonTCP* : *aucun cas particulier n'est traité.*

Enfin la preuve concernant ce problème passant par une disjonction des cas, nous avons examiné si ce type de raisonnement était mobilisé dans le cadre de ce problème (géométrie). Nous avons donc relevé *CS-DC* (Disjonction des Cas) : *on réalise que la résolution du problème passe par une disjonction des cas.* Si la production ne montre aucun indice relevant de la disjonction des cas, nous ne la relevons pas, par rapport à la variable *type de raisonnement*.

Les résultats obtenus sont les suivants :

| *Valeurs des variables* | *Productions qui les mettent à jour* | *Effectif* |
|---|---|---|
| *CS-TCP+ : Traitement positif des cas particuliers* | *FC02-1, FC02-3, FC02-4, FC06-7-G1, PLC2-06/07-4, PLC2-06/07-6* | *6* |
| *CS-TCP– : Traitement négatif des cas particuliers* | *FC02-2, FC06-1-G1, FC06-2-G1, FC06-3-G2, FC06-4-G2, FC06-6-G2, PLC2-06-3-G1, PLC2-06-4-G1, PLC2-06-5-G1, PLC2-06/07-2, PLC2-06/07-7* | *11* |
| *CS-nonTCP : les cas particuliers ne sont pas traités du tout* | *FC06-5-G2, PLC2-06-1-G2, PLC2-06-2-G2, APM02-1, APM02-2, PLC2-06/07-1, PLC2-06/07-3, PLC2-06/07-5, PLC2-06/07-8* | *9* |
| | *TOTAL* | *26* |
| *CS-DC : Disjonction des Cas* | *FC02-1, FC02-3, FC02-4, PLC2-06-1-G2, PLC2-06/07-1, PLC2-06/07-4* | *6* |

Sur les vingt-six productions, dix-sept étudient des cas particuliers. Cependant il n'y a que six textes qui montrent un traitement positif de ces cas particuliers, ce qui, par rapport à l'ensemble des textes représente seulement 23%. Un peu plus du tiers des productions (9/26) n'évoquent aucun cas particulier. Ceci révèle une autre composante de conception : *il faut éviter les cas particuliers* (*nonCP : non Cas Particulier*). On la voit d'ailleurs explicitée en toutes lettres dans la production citée en exemple au début de ce paragraphe.

Enfin, par rapport à la dernière ligne du tableau, il n'y a que six textes sur vingt-six qui reconnaissent que la réponse au problème passe par une disjonction de cas, soit 23%. *Les preuves en géométrie*, notamment au collège, *ne passent généralement pas par une disjonction de cas* (qui figure cependant au programme), c'est un nouvel élément de conception *nonDC* (*non Disjonction des Cas*). Le raisonnement par disjonction des cas n'est pas mobilisé lors de la preuve sur ce problème.

Un autre résultat sur ce problème :

*L'intérêt de recourir au traitement des cas particuliers n'est pas reconnu par les enseignants. Le raisonnement par disjonction des cas n'est pas mobilisé.*

En formation, l'institutionnalisation est double :

- montrer l'importance du traitement des cas particuliers dans l'avancée dans le processus de preuve, à valoriser dans toute production, en particulier des élèves qui apprennent à démontrer. Ceci remet évidemment en cause les situations usuelles d'apprentissage de la démonstration et le contrat ;

• attirer l'attention des professeurs sur les difficultés des élèves engendrées par la pratique usuelle qui consiste à ne montrer la démonstration que sous l'aspect *calcul propositionnel*. Nous revenons sur ce point à partir de la catégorie suivante.

## 6. Observations sur la production de résultats, de conjectures fausses ou ouvertes

Dans la perspective d'aider à l'évolution des conceptions sur l'écrit relatif à la preuve, par rapport aux composantes *P*[105], *T*[106] et *nonSExp*[107], nous pointons dans les productions tous les indices révélateurs de preuve, qui sortent de la forme stéréotypée, pas déductif et enchaînement des pas. Les *résultats* sur le problème font partie de ces indices. Nous renvoyons au chapitre 8 pour la définition que nous avons donnée d'un résultat. Nous utilisons la variable *CS-nR* (Centre de Secours : *n* Résultats) : *la production contient un nombre n de résultats*. D'autres indices sont les conjectures, fausses ou ouvertes, révélateurs de l'heuristique.

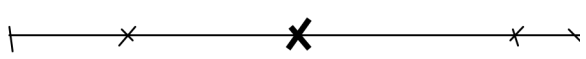
### La variable *nombre de résultats*

Par rapport aux productions, elle prend les valeurs entières entre 0 et 6.

Par exemple, nous avons relevé trois résultats dans cette production, qui sont les suivants :

• premier résultat : une solution particulière avec preuve.

[…] ** Si les quatre villages sont alignés :*



*on place le centre de secours au milieu du segment reliant les deux villages les plus éloignés.*

*Comme il est à égale distance des deux plus loin, il est évidemment plus près des deux autres.* […] (extrait de FC06-7-G1)

• deuxième résultat : une autre solution particulière avec preuve.

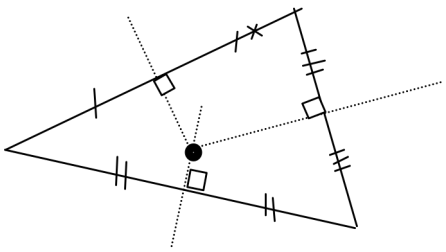
[…] ** Si trois points (villages) sur quatre sont alignés, il faut rechercher le point le moins éloigné des trois villages qui constituent le triangle.*

---

[105] Une preuve est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse - règle - conclusion. La preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.

[106] Une preuve est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.

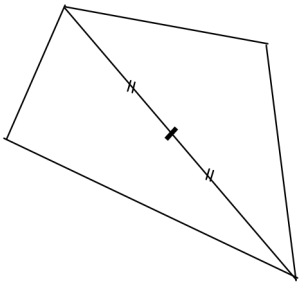
[107] On s'approprie un problème nouveau par l'expérimentation sur des exemples, à partir desquels on essaie d'identifier des régularités, ainsi que les conditions de ces régularités, mais ceci doit rester dans le domaine privé et n'a pas de statut reconnu dans l'écrit relatif à la preuve.



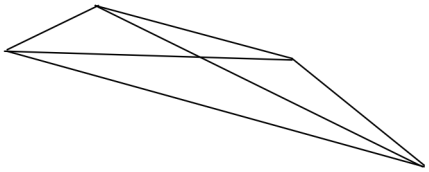
*Donc en prenant le centre du cercle circonscrit, on se place à égale distance des 3 plus loin. Et si on se décale de ce point, on sera forcément plus loin de l'ensemble des trois ⇒ pas possible. […] (extrait de FC06-7-G1)*

• troisième résultat : celui-ci, mieux explicité dans une des autres productions de groupe (chacun a rédigé personnellement la réflexion du groupe), consiste à dire que le milieu de la plus grande diagonale du quadrilatère ne convient pas toujours ; il s'agit d'une preuve locale.

[…] *Ensuite, je me dis que le CS doit être à égale distance des deux villages les plus éloignés, pour ne pas en pénaliser un.*



*Il faut donc en plus de regarder les diagonales, aussi les côtés car :*



*Malheureusement dans certains cas, problème*
[…] (extrait de FC06-7-G1)

L'analyse des productions fait apparaître les résultats suivants :

| *CS-nR* | *les résultats obtenus dans les productions* | *effectifs* |
|---|---|---|
| *n=0* | *FC06-3-G2, FC06-5-G2, FC06-6-G2, PLC2-06-2-G2, APM02-1, APM-02-2, PLC2-06/07-1, PLC2-06/07-2* | *8* |
| *n=1* | *FC02-2, FC06-4-G2, PLC2-06-4-G1, PLC2-06-1-G2, PLC2-06/07-7, PLC2-06/07-8* | *6* |
| *n=2* | *FC02-4, FC06-1-G1, FC06-2-G1, PLC2-06-3-G1, PLC2-06/07-3, PLC2-06/07-5* | *6* |
| *n=3* | *FC02-1, FC06-7-G1, PLC2-06-5-G1* | *3* |
| *n=4* | *PLC2-06/07-4* | *1* |
| *n=5* | *FC02-3* | *1* |
| *n=6* | *PLC2-06/07-6* | *1* |

Un peu moins du tiers des productions (8/26) ne contient aucun résultat, mais on voit donc apparaître au moins un résultat dans la majeure partie des textes, ce qu'il s'agit de mettre en avant, en formation.

**Les variables *nombre de conjectures fausses* et *nombre de conjectures ouvertes***

Il s'agit des variables :

• *CS-nCF* (Centre de Secours : *n* Conjectures Fausses) : *la production fait apparaître un nombre n de conjectures reconnues comme fausses, contre-exemple explicité ou non.*

• *CS-nCO* (centre de Secours : *n* Conjectures Ouvertes) : *un nombre n de conjectures ouvertes figurent dans la production.*

Le regard porté sur ces éléments va permettre d'institutionnaliser la nécessité de préciser le statut des énoncés (au sens de phrases ou expressions) qui figurent dans les textes. S'agit-il d'une conjecture ouverte ? D'un résultat ?… Nous avons vu que les manuels ne sont pas éclairants sur ce point.

Un exemple, où le statut de ce qui est écrit n'est pas clair du tout, est donné par la production suivante :

*Préliminaires*
** Pas de contraintes supplémentaires : relief, mer…*
** notion de « plus éloigné » : réponse simpliste : le poste de secours au village le plus éloigné.*
*Isobarycentre :*
*contre-exemple : figure*
*Milieu des deux villages les plus éloignés*
*contre-exemple : figure*
*Trois points*
*Chaque triplet de points définit un cercle circonscrit. On regarde la distance du centre du cercle et du quatrième point avec les quatre cercles.*
*Soit M' le centre du cercle qui ne passe pas par M et* $r_M$ *son rayon. On cherche le minimum, pour M appartenant à {A, B, C, D}, du maximum de {MM',* $r_M$*}, et on place le centre de secours au centre du cercle qui ne contient pas le point ci-dessus.* (PLC2-06/07-5)

Non seulement, il est difficile de comprendre ce que les auteurs ont voulu dire, mais on se demande aussi si telle ligne signifie un résultat, une conjecture, s'il y a une preuve…

Les résultats obtenus :

| *Conjectures fausses ou ouvertes* | | *Productions qui les révèlent* | *Effectifs* | *Pourcentages* |
|---|---|---|---|---|
| *CS-nCF* | *n=0* | *FC02-3, FC06-1-G1, FC06-3-G2, FC06-5-G2, FC06-6-G2, PLC2-06-4-G1, PLC2-06-1-G2, PLC2-06-2-G2, APM02-1, APM02-2, PLC2-06/07-1, PLC2-06/07-2, PLC2-06/07-3, PLC2-06/07-7* | *14* | *54%* |
| | *n=1* | *FC02-2, FC02-4, FC06-7-G1, FC06-4-G2, PLC2-06-3-G1, PLC2-06/07-6, PLC2-06/07-8* | *7* | *27%* |
| | *n=2* | *FC02-1, FC06-2-G1, PLC2-06-5-G1, PLC2-06/07-4, PLC2-06/07-5* | *5* | *19%* |
| | | *TOTAL* | *26* | |
| *CS-nCO* | *n=0* | *FC02-2, FC02-4, FC06-1-G1, FC06-7-G1, FC06-3-G2, FC06-4-G2, FC06-5-G2, FC06-6-G2, PLC2-06-4-G1, PLC2-06-5-G1, PLC2-06-1-G2, PLC2-06-2-G2, APM02-1, APM02-2, PLC2-06/07-3, PLC2-06/07-4, PLC2-06/07-5, PLC2-06/07-6, PLC2-06/07-7, PLC2-06/07-8* | | *77%* |
| | *n=1* | *FC02-1, FC02-3, FC06-2-G1, PLC2-06/07-1,* | | *15%* |
| | *n=2* | *PLC2-06/07-2, PLC2-06-3-G1* | | *8%* |
| | | *TOTAL* | *26* | |

Le problème n'est pas résolu, toutefois une forte proportion (77%) des productions ne propose aucune conjecture ouverte. Une petite moitié (46%) des textes montre une ou deux conjectures fausses. Le faux est donc assez présent, mais on peut dire que ceci est davantage lié à la résolution qu'en proposent les enseignants qu'au problème lui-même : les tâtonnements divers, pas nécessairement en rapport avec le problème, produisent des conjectures fausses, donc des contre-exemples, mais ceux-ci ne font pas nécessairement partie du problème lui-même.

Le faux est présent à deux titres : une conjecture ou un résultat sont proposés, et il se trouve qu'ils sont faux, mais ce n'est pas signalé dans le texte, ou bien une conjecture est proposée et prouvée fausse dans la production, c'est donc un résultat, à condition qu'elle ne résulte pas d'une stratégie manifestement inadéquate, comme par exemple la recherche d'un centre de gravité. En voici deux illustrations, qui montrent chacune un point de vue différent sur le faux.

***Le faux vient du problème***

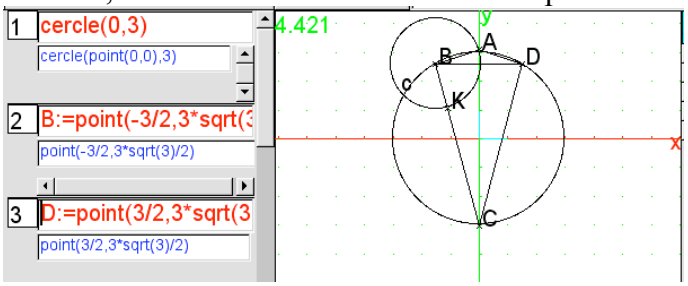
Une production propose une conjecture finale, pas très claire, dont on donne la formulation suivante :

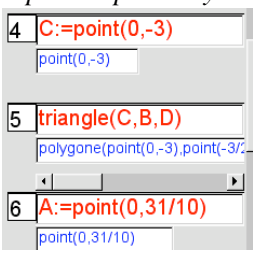
[…] *Si le quadrilatère ABCD a deux angles obtus consécutifs, par exemple l'angle DAB et l'angle ABC, le second étant inférieur au premier, on considère les deux cas suivants : le premier est celui où le triangle BDC a trois angles aigus, on construit alors le centre de secours au centre du cercle circonscrit au triangle BDC ; le second cas est celui où l'angle*

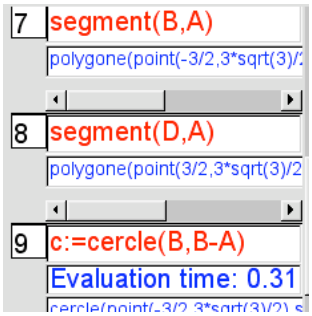
*DBC est obtus, le centre de secours est alors situé au milieu de [DC]. Cette conjecture n'est pas démontrée, et on ne sait pas conclure, si les deux angles obtus consécutifs du quadrilatère sont égaux.* (d'après FC02-3)

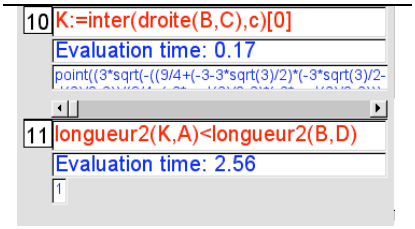
Cette conjecture finale est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous :

*Les instructions données au logiciel (voir ci-contre et ci-dessous) montrent la construction de la figure. Le triangle BDC est isocèle, de sommet principal C et son cercle circonscrit est le cercle qui a pour centre l'origine du repère et pour rayon 3.*




Le point *A* n'appartient pas au cercle circonscrit à *BCD*, ni au disque correspondant, mais, comme *C*, il appartient à l'axe des ordonnées, axe de symétrie du triangle *BCD* : *AB* = *AD*. Le point *A* appartient aussi à *c*, qui est le cercle de centre *B* qui passe par *A*. Les deux angles *DAB* et *ABC* sont obtus. Le triangle *BDC* a bien trois angles aigus. Le point *K* est le point d'intersection de *c* et de [*BC*]. Les longueurs *AB*, *AD* et *BK* sont donc égales. L'instruction 11 donnée au logiciel lui demande de comparer les carrés des longueurs *KA* et *BD* : la réponse donnée, qui est 1, montre que *KA* < *BD*, d'où l'on déduit que l'angle obtus *DAB* est plus grand que l'angle obtus *ABC*. Cependant le centre de secours n'est pas le centre du cercle circonscrit à *BCD* ; il est le milieu de [*AC*]. On peut dire que ce contre-exemple fait partie du problème.

### *Le faux ne vient pas du problème*

Un second type de contre-exemple est donné dans la production très succincte, dont voici ci-contre un extrait :

[…] *Isobarycentre : contre-exemple : figure* (extrait de PLC2-06/07-5)

On peut dire que ce type de contre-exemple, d'ailleurs non explicité, ne fait pas partie du problème. Il est induit par une attitude qui relève de la tendance *on traite un autre problème*.

Ce qui nous donne le résultat suivant :

*Le faux tient une place importante dans les productions, il se montre sous deux aspects : le faux qui fait partie du problème et le faux qui résulte de la tendance « on*

*traite un autre problème ».*
*Les conjectures ouvertes sont peu présentes.*
*Un tiers des productions ne comporte aucun résultat sur le problème.*

Néanmoins, en formation, nous ne distinguerons pas ces deux points de vue sur le faux, car ce qu'il nous importe d'institutionnaliser auprès des enseignants, c'est la nécessité de donner un statut à l'expérimentation dans le texte de preuve en vue de l'apprentissage de la preuve et de son écriture. Dans un premier temps, il est inutile d'évoquer les dérives, telles que, par exemple, mettre en valeur une production parce qu'elle contient une conjecture, prouvée fausse par un contre-exemple, alors que l'auteur *a fait n'importe quoi par rapport au problème en connaissance de cause*.

## 7. En conclusion, pour la formation

L'objectif de la situation de formation à partir de ce problème est l'institutionnalisation de connaissances d'ordre II et III par rapport à la preuve, voire d'ordre I par rapport au problème. Celle-là, comme nous l'avons précisé au chapitre 8 consacré à la présentation de l'ingénierie, doit être clairement faite sur deux niveaux :

- d'une part, on pointe des éléments dans les productions des professeurs sur *le Centre de secours* qui font ressortir des connaissances d'ordre II ou III,
- d'autre part, on se place dans la perspective où les élèves, mis en situation de recherche (pas nécessairement sur ce problème) produisent des écrits du même type[108], en précisant que ces mêmes connaissances d'ordre II ou III sont à institutionnaliser auprès des élèves, afin que ces narrations de recherche évoluent vers ce que nous avons nommé *écrits de recherche*, voire ensuite vers des preuves plus formalisées.

Dans un premier temps, nous institutionnalisons des éléments relatifs aux quatre tendances et observations relevées, avant de mettre en évidence les éléments cités dans la colonne du milieu du tableau ci-dessous. Nous précisons en outre dans la troisième colonne, des composantes de conceptions (parmi celles qui ressortent du chapitre 3) qui se manifestent dans le contrat usuel relatif à la preuve en classe, qui pourraient évoluer à la suite de ce travail sur le problème.

[108] Un apport est fait aux enseignants à propos des *narrations de recherche* (Sauter 1998)

| *Les différentes observations à pointer* | *Les éléments relatifs à ces observations qui sont à préciser en formation* | *Les composantes de conception qui pourraient évoluer* |
|---|---|---|
| *On traite un autre problème* | ** Citer des stratégies relevées dans les productions, montrer qu'elles relèvent de cette tendance.* | *FM (Fichier-Méthodes)* |
| *On entre dans le problème* | ** Citer des stratégies relevées dans les productions, montrer qu'elles relèvent de cette catégorie.*<br>** Les deux points de vue sur le problème et une rapide solution si elle n'a pas été trouvée.*<br>** La présence d'éléments relatifs à l'expérimentation dans les textes produits.* | *nonSExp (Statut non reconnu à l'expérimentation)* |
| *Le traitement des cas particuliers*<br>*Le raisonnement par disjonction des cas* | ** L'importance de la prise en compte des cas particuliers, dans le problème, et en général.*<br>** La solution du problème passe par une disjonction de cas, ce qui est peu usuel dans la géométrie, du collège notamment.*<br>** Un autre point de vue sur la démonstration : la règle du « on sait que-or-donc » est issue d'une vision de la démonstration comme un calcul sur les énoncés.*<br>*On peut voir la démonstration comme un raisonnement sur les objets, les ensembles d'objets qui satisfont à certaines propriétés, ce qui ouvre la voie vers l'étude des cas particuliers, les cas où la propriété n'est pas vérifiée (le faux), la disjonction des cas.* | *P (pas)*<br>*(la règle « d'interdiction des cas particuliers »)* |
| *La production de résultats, de conjectures fausses ou ouvertes* | ** Les textes comportent des résultats, qui sont constitutifs de la preuve.*<br>** Un résultat est une solution particulière, une stratégie locale ou globale, une preuve locale ou globale.*<br>** L'importance de préciser le statut des énoncés : conjecture, affirmation sans preuve…*<br>** Une conjecture ouverte est aussi un élément qui atteste de l'entrée dans le processus de preuve.*<br>** L'expérimentation doit avoir un statut dans les écrits des élèves.* | *nonR (non Rationalité)*<br>*nonSExp*<br>*nonV (non enjeu de Vérité)* |

Après ce bilan fait en rapport avec les productions obtenues pendant la séance (colonne du milieu du tableau ci-dessus), on peut aborder la phase d'institutionnalisation à un niveau plus général, en explicitant les points suivants, dont chacun d'eux est décliné suivant les deux niveaux précisés au début de cette conclusion :

- La nécessité de preuve vient du fort enjeu de vérité présent dans la situation. Pour enseigner la démonstration, il convient de choisir des problèmes où la réponse n'est pas évidente, où la phase heuristique existe, où le doute tient une large place.

- La phase heuristique débouche sur l'écriture d'un texte, qui ne répond pas aux contraintes de forme du type *on sait que-or-donc*. Il s'agit d'y repérer les indices qui montrent l'entrée dans la preuve : l'explicitation du statut des énoncés (au sens de phrases ou expressions) et les résultats.
  L'apprentissage de la démonstration passe par la reconnaissance et l'explicitation du statut des énoncés, en particulier savoir si ce qu'on écrit est une conjecture, une affirmation sans preuve, un résultat du cours, un résultat sur le problème étudié. L'entrée de l'élève dans la preuve passe par la production d'éléments qui prennent pour lui statut de validation, ils doivent être reconnus comme constitutifs de la preuve. Les résultats obtenus sur des cas particuliers font partie de ces éléments.

- Le vrai et le faux coexistent dans les textes produits.
  L'apprentissage de la rationalité est une étape préalable à l'entrée dans la démarche de preuve. Au début de l'apprentissage, l'enjeu est d'ajouter un autre mode de preuve à ceux qui ont été très largement utilisés jusque-là, comme par exemple, la mesure sur un dessin (Demongeot 2000). Pour cela l'élève doit apprendre certaines *règles du jeu mathématique*, celles qui sont fondamentales pour aborder le vrai ou le faux en mathématiques (Gandit M. & Massé-Demongeot M.C. 1995, 2002) et qui ne relèvent pas du « bon sens ».

- Il est utile de travailler sur le faux et les cas particuliers.
  En classe, il ne faut pas chercher à éviter les cas particuliers, ils font avancer dans le problème. Il ne faut pas non plus chercher à éviter le faux : le contre-exemple doit exister en classe, et pas seulement de la part du professeur.

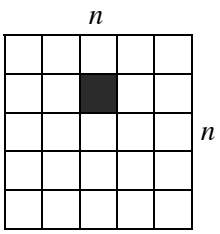
- L'entrée dans un problème passe par la compréhension et l'explicitation de ce qu'on cherche, de la question posée. Cette démarche essentielle ne doit pas être occultée par le recours à un catalogue de méthodes connues.
  L'apprentissage de la démonstration doit se faire en dehors de tout contexte d'évaluation des connaissances ou de mise en œuvre du cours. Le recours aux fiches-méthodes ne doit pas être proposé a priori.

## CHAPITRE 11
## LE POLYMINO

*« Le mathématicien et le naturaliste ne diffèrent pas quand ils vont à la recherche des principes. Les uns et les autres induisent, font des hypothèses et expérimentent, c'est-à-dire font des tentatives pour vérifier l'exactitude de leurs idées. »*
*« De tout cela, je conclurai que l'induction et la déduction appartiennent à toutes les sciences. Je ne crois pas que l'induction et la déduction constituent réellement deux formes de raisonnement essentiellement distinctes. L'esprit de l'homme a, par nature, le sentiment ou l'idée d'un principe qui régit les cas particuliers. »*
*(Claude Bernard, Introduction à l'étude de la médecine expérimentale, 1865)*

*Le problème*

*On désigne par n un entier naturel quelconque.*
*On considère un polymino[109] carré, de côté n, privé d'une case quelconque (un exemple est dessiné ci-contre).*




*Est-il possible de le paver avec des dominos ?*
*Un domino est un élément qui recouvre deux cases qui ont un côté commun.*

Dans toute la suite, lorsque nous dirons *polymino de taille n*, nous entendrons un carré de $n^2$ cases, privé de l'une quelconque d'entre elles. Si nous disons *polymino de côtés n et p*, nous voulons dire un rectangle de *n* sur *p* cases carrées, privé d'une case quelconque aussi. Lorsque nous parlerons d'un *pavage* ou que nous dirons que l'on *peut paver* ou que le polymino *est pavable*, il s'agira de comprendre que l'on peut recouvrir totalement, et sans chevauchement, le polymino troué avec des dominos, le trou n'étant pas recouvert, un domino recouvrant deux cases accolées par un côté. Nous dirons indifféremment *case* ou *carreau* pour parler des mailles carrées du quadrillage.

Plusieurs analyses mathématiques et didactiques de ce problème sont parues. La première (Grenier & Payan 1998) montre en quoi ce problème constitue une situation fondamentale pour l'émergence de raisonnements et méthodes propres aux mathématiques discrètes : expérimentation sur de petits objets (polyminos de tailles 2, 3, 4, 5…), structuration du polymino par reconnaissance d'un invariant, décomposition et recomposition qui fournit un algorithme de pavage ou qui permet une approche du raisonnement par induction. Cette analyse est reprise dans Gandit

[109] Plus généralement, étant donné un quadrillage à mailles carrées identiques, on appelle polymino un ensemble de ces mailles ou cases.

(2003 et 2004) : nous la présentons comme situation de formation sur la preuve. Un autre regard sur ce problème est proposé par J. Rolland (1999) dans sa thèse. Il développe une analyse qui montre le lien entre la gestion de l'information et les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.

Nous revenons brièvement sur l'analyse mathématique du problème en mettant en évidence les méthodes de preuve inconnues dans l'enseignement secondaire, notamment le *raisonnement par induction* qui se démarque de l'approche du raisonnement par récurrence donnée dans les classes terminales du lycée. Nous complétons ce retour sur les preuves relatives à ce problème par le point de vue de l'enseignant de mathématiques (au collège ou au lycée).

## LES PREUVES RELATIVES AU POLYMINO

Lorsque c'est possible, nous généralisons certains résultats à des formes autres que le carré, notamment les rectangles avec un trou d'une case. Dans toute la suite, $n$ et $p$ désignent des nombres entiers naturels.

### 1. Condition nécessaire sur la parité des côtés pour que le pavage existe : la preuve est simple et commune dans l'enseignement secondaire

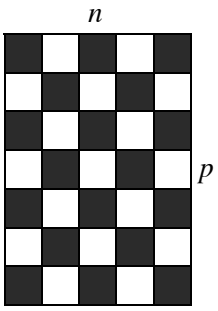
Si l'on considère un polymino[110] de côtés $n$ et $p$, il est nécessaire que $n$ et $p$ soient impairs, pour que le pavage existe. En effet, un tel polymino comptant $n\,p - 1$ cases, le pavage par des dominos (2 carreaux) implique que $n\,p - 1$ soit pair, donc que $n\,p$ soit impair, donc que $n$ et $p$ soient impairs (puisque si $n$ ou $p$ sont pairs, alors $n\,p$ est pair).

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante : le cas du polymino de taille 3 avec le trou sur la case au milieu d'un côté nous donne un contre-exemple.

Ce résultat simple permet un travail avec les élèves sur le vrai/faux en mathématiques, le contre-exemple, sur les notions de condition nécessaire, de condition suffisante.

[110] rectangle troué d'une case (voir remarque au début du chapitre)

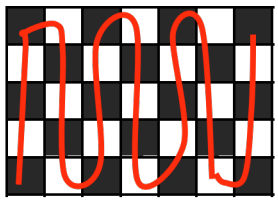
## 2. La structuration du polymino par coloration donne une preuve lumineuse de l'impossibilité d'un pavage : ce type de preuve est encore peu connu dans le secondaire




On considère un polymino de côtés *n* et *p*. Un domino recouvre deux cases qui ont un côté commun. Ce voisinage de deux cases peut se repérer par une coloration en damier (blanc et noir), la possibilité de poser un domino se repérant par la juxtaposition d'une paire de cases accolées (par un côté) de couleurs différentes (l'invariant du problème)

Dans cette coloration, il n'y a pas autant de cases noires[111] que de cases blanches : la coloration n'est pas *équilibrée*. Elle compte une case noire de plus. Si le trou est une case blanche, la coloration est encore plus déséquilibrée. Il est alors impossible de paver le polymino.

Si le trou est une case noire, on associe au polymino (voir ci-contre) un chemin obtenu « en dépliant » le polymino comme ci-dessous :



On obtient ainsi une bande bicolore, qui comporte un carré noir de plus qu'un carré blanc. Le trou étant une case noire, la bande se retrouve coupée en deux bandes[112] ayant exactement le même nombre de cases de chaque couleur (*coloration équilibrée*) qui sont donc pavables. Lorsqu'on « range » les deux bandes dans le polymino de côtés *n* et *p*, on obtient un pavage possible du polymino.

Ce type de preuve par coloration est rare dans l'enseignement secondaire, nous constaterons néanmoins un début de changement, peut-être dû à la présence, dans le programme de spécialité de la classe terminale en série économique et sociale, de la coloration des graphes.

Nous verrons néanmoins apparaître la coloration en damier, non pas comme un moyen de preuve, mais comme une façon de signaler, dans la conjecture, les cases pour lesquelles le pavage est possible (noires) ou impossible (blanches).

---

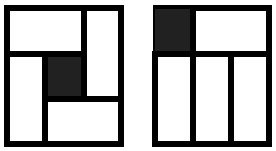
[111] La couleur de la première case en haut à gauche est choisie noire, dans toute la suite de ce texte.

[112] La coloration équilibrée implique dans ce cas l'existence d'un pavage, car il s'agit de rectangles sans trous. Ce n'est pas une condition suffisante en général.

Dans toute la suite, une *case noire* signifiera une case du polymino coloré en damier comme ci-dessus. De même pour une *case blanche*. Et la case en haut à gauche est choisie *noire*.

## 3. Une preuve par exhibition pour montrer l'existence d'un pavage

Prouver l'existence d'un objet mathématique est rarement travaillé dans l'enseignement secondaire, surtout au collège. Le cas du polymino de taille 3 permet ce type de preuve dans les cas où les trous sont des cases noires.



Les autres cas où le trou est une case noire se ramènent à ces deux-ci par rotation du carré autour de la case centrale.

## 4. Une preuve par « forçage » pour montrer l'impossibilité d'un pavage ne fait pas toujours l'unanimité

Cette preuve vient assez naturellement dans le cas du polymino de taille 3, pour traiter les cas où le trou est une case blanche. Elle peut se faire sans mot, ce qui est rarement accepté dans l'enseignement :

Si le polymino est pavable, on arrive nécessairement à une zone non pavable, comme ici la réunion de deux cases ayant seulement un sommet en commun. D'où la contradiction. Le polymino de taille 3 avec le trou sur une case blanche n'est donc pas pavable.

Une question qui est souvent posée : et si on démarre le pavage autrement ? Elle dénote une difficulté dans la compréhension de l'implication.

Ce même type de preuve convient pour prouver qu'on ne peut pas paver une configuration du type ci-contre :

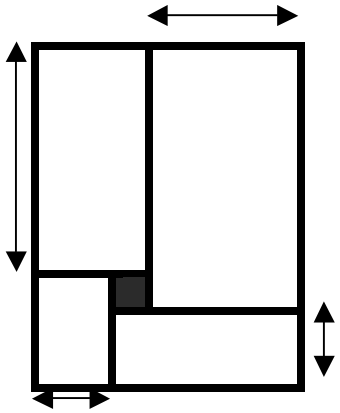
en effet si un pavage de cette configuration existe, alors un domino recouvre nécessairement les deux premières cases, comme ci-contre, d'où la contradiction puisque l'on ne peut pas paver le reste.

## 5. La décomposition/recomposition permet directement une preuve de l'existence d'un pavage dans le cas où le trou est une case noire[113], pour un polymino de côtés *n* et *p* impairs

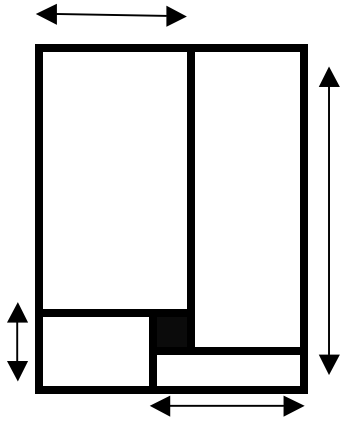
Ce type de preuve se rencontre dans le secondaire, notamment en géométrie plane à propos des preuves utilisant les aires. On peut donner une preuve directe utilisant cette méthode ou une preuve nécessitant en plus un raisonnement par induction. Ces preuves par induction feront l'objet du paragraphe suivant.

Une preuve directe peut être donnée aussi sans mot, dans le cas d'un polymino de côtés *n* et *p* impairs, avec le trou sur une case noire. Les cases noires sont celles qui ont des coordonnées de somme paire :

si les coordonnées du trou sont toutes les deux impaires



si les coordonnées du trou sont toutes les deux paires



Les côtés marqués par une flèche sont pairs. Or il suffit qu'un rectangle sans trou ait un côté pair pour qu'il soit pavable : on peut en effet placer une rangée de dominos sur ce côté pair et accoler autant de rangées que l'autre côté du rectangle. La réunion des quatre rectangles pavables et du trou reconstitue le polymino de côtés *n* et *p*, qui est donc pavable.

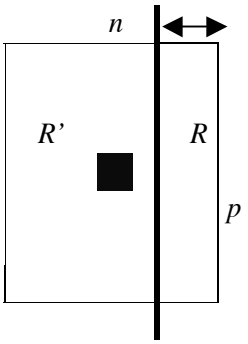
## 6. Le raisonnement par induction passant aussi par décomposition/recomposition permet différentes preuves de l'existence d'un pavage dans le cas où le trou est une case noire, pour un polymino de côtés *n* et *p* impairs

Nous verrons que ce type de preuve n'est pas disponible chez les enseignants. Il ne figure dans aucun programme de l'enseignement secondaire. Le raisonnement par induction se voit plutôt sous la forme d'un raisonnement par récurrence ascendante, pour lequel il faut connaître précisément la propriété à démontrer et savoir à quel rang elle est initialisée : il apparaît de ce fait souvent comme un exercice formel (nous reviendrons sur ce point à la fin de ce paragraphe). Le raisonnement par induction, au contraire, permet une construction de la classe

[113] Nous rappelons que, dans tout ce qui suit, la coloration en noir et blanc est telle que la case en haut à gauche de tous les rectangles est noire.

d'objets qu'on étudie. Soit à démontrer la conjecture selon laquelle tout polymino de côtés *n* et *p*, impairs, dont le trou est une case noire, est pavable.

On raisonne par l'absurde. Supposons que cette conjecture soit fausse. Il existe donc des contre-exemples (au moins un), parmi les plus petits, considérons-en un, autrement dit, un contre-exemple minimal, soit un *plus petit* polymino *M* de côtés impairs avec un trou sur une case noire, qui soit *non pavable*.




On le partage en deux rectangles dont l'un, *R*, est sans trou avec un côté non nul pair (marqué par une flèche ci-contre) : *R* est pavable. L'autre rectangle avec trou, *R'*, est plus petit que *M*, il est donc pavable. Donc la réunion de *R* et de *R'* est pavable, ce qui signifie que *M* est pavable. D'où la contradiction.

Le partage utilisé au début de ce raisonnement est-il toujours possible ? Non, puisqu'il faut qu'on puisse enlever un rectangle sans trou dont l'un des côtés est au moins égal à 2 ; ce qui est impossible si le polymino est réduit à un trou ou si le trou est la case centrale du polymino de taille 3. Ces deux cas, qui doivent être traités autrement, constituent la *base* de l'induction.

Dans ce type de raisonnement, on « descend » vers des objets plus petits. Par ce découpage, il faut s'assurer que l'objet sur lequel on arrive a bien les mêmes propriétés que l'objet de départ. Sinon il faut modifier la propriété qu'on veut démontrer pour qu'elle soit conservée par le découpage. Ainsi, si au lieu de prouver la propriété sur les polyminos rectangles, on veut la prouver sur les polyminos carrés : on démarre le découpage sur un contre-exemple minimal qui est un polymino carré de côté *n* impair, avec un trou sur une case noire, non pavable, mais le découpage en deux nous amène à deux objets dont aucun n'est un carré. De plus, il faut vérifier que le découpage est toujours possible. Ces deux aspects, trouver le *bon découpage* et la *bonne propriété* ne sont jamais évoqués au lycée, où l'on ne travaille que sur l'ensemble des entiers naturels.

A ce propos, le programme de terminale de la série scientifique précise :

*on présentera le principe de récurrence comme un axiome. (B.O. hors série n°4 du 30/08/2001)*

Et on trouve le commentaire suivant dans le document d'accompagnement de ce programme, qui fait état de la difficulté de beaucoup d'élèves à comprendre qu'on démontre effectivement quelque chose, vue la présentation qui est adoptée :

*Le principe de récurrence peut s'énoncer ainsi : soit P(n) une propriété de l'entier positif ou nul n. Si on a P(0) et que pour tout n ≥ 0, P(n) implique P(n+1), alors on a P(n) pour tout n ≥ 0. Il est important de faire remarquer aux élèves qu'on peut également appliquer ce principe à partir d'un certain rang $n_0$, en leur donnant des exemples simples où la récurrence ne s'initialise pas en 0.*
*Si un problème en requiert l'usage, on peut présenter le « principe de récurrence fort », qui s'énonce ainsi : soit P(n) une propriété de l'entier positif ou nul n. Si on a P(0), et que pour tout n > 0, on a l'implication « si on a P(k) pour tout k strictement inférieur à n, alors on a P(n) », alors on a P(n) pour tout n ≥ 0.*

*- Ces deux formes sont logiquement équivalentes, et encore équivalentes*[114] *à l'énoncé : « tout ensemble non vide d'entiers positifs admet un plus petit élément », ou à l'énoncé : « toute suite décroissante d'entiers positifs est constante à partir d'un certain rang ». mais on ne pas bien sûr entraîner les élèves dans ces subtilités, ni leur faire établir l'équivalence des différentes formes du principe de récurrence.*
*- On ne multipliera pas les exemples de « paradoxes » démontrés à l'aide d'une récurrence subtilement incorrecte, mais on montrera sur des exemples l'usage positif et puissant qu'on peut en faire.*

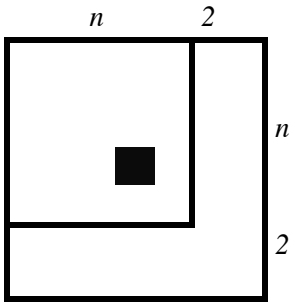
*La difficulté conceptuelle du principe de récurrence est qu'il faut bien comprendre ce qu'on fait quand on suppose P(n) pour démontrer P(n+1). Les élèves peuvent en effet avoir l'impression de supposer ce qu'ils veulent démontrer et donc qu'il n'y a rien à faire, ou au contraire que l'argumentation est un cercle vicieux. La mise en forme d'une démonstration par récurrence est difficile , et il pourra être utile de proposer un schéma de rédaction. Quelques exercices seront sans doute plus efficaces qu'un discours abstrait pour leur faire saisir que la récurrence permet de démontrer une infinité de propositions parce que le pas qui permet de passer d'une de ces propositions à la suivante est toujours le même. Une image classique à ce sujet est celle d'un escalier (infini) gravi par un marcheur (infatigable) qui cependant ne pourrait pas sauter des marches. Une autre image est celle de sucres disposés verticalement les uns à côté des autres (chaque sucre fait tomber le suivant à condition qu'on pousse le premier), ou celle de l'hérédité d'une propriété de la génération n à la génération n + 1.* (Accompagnement des programmes de mathématiques des classes terminales des séries scientifique et économique et sociale 2002)

On retrouve ainsi dans ces lignes le recours au formalisme a priori pour apprendre aux élèves la pratique du raisonnement par récurrence, puisqu'il est suggéré « de proposer un schéma de rédaction ». Ce même document décrie pourtant le formalisme imposé au collège pour l'apprentissage du raisonnement déductif. Cette contradiction est peut-être masquée par le fait que le raisonnement par récurrence ne vit qu'en classe de terminale, mais on peut faire l'hypothèse que les difficultés rencontrées par suite du recours abusif au formalisme sans réflexion sur le fond se rencontrent dans l'enseignement supérieur.

Les enseignants proposent des raisonnements par récurrence pour traiter ce problème, mais d'un autre type que le précédent (qui met en jeu des rectangles). Nous en développons deux en les présentant de manière inductive. La propriété à démontrer est : tout polymino de taille $n$ impaire, dont le trou est une case noire, est pavable. On suppose que c'est faux. Il existe donc un contre-exemple minimal, soit un *plus petit* polymino $M$ de taille $n$ impaire avec un trou sur une case noire, qui soit *non pavable*. L'une des preuves se poursuit par le partage du polymino en une bande en L sans trou de largeur 2 (sur deux côtés) et un polymino plus petit (de taille $n - 2$), l'autre par le partage du polymino en une couronne sans trou de largeur 1 (tout autour) et un polymino de taille $n - 2$ aussi.

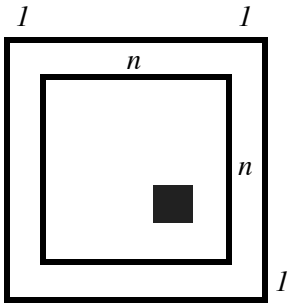
[114] Ce qui est faux pour les ensembles en général (n'a de sens que pour certains types d'ensembles comme celui des entiers naturels)

### *Découpage d'une bande en L de largeur 2*




La bande en L sans trou est pavable puisqu'elle est de largeur 2, le polymino *P* de taille $n - 2$ aussi, puisqu'il est plus petit que *M*. Donc la réunion de la bande en L et de *P* est pavable, c'est-à-dire que *M* est pavable, d'où la contradiction. Ce découpage est toujours possible, sauf si le polymino est de taille 3 avec le trou sur la case centrale (noire) ou s'il est réduit au trou. La base de l'induction est la même que pour le raisonnement précédent (avec les rectangles).

### *Découpage d'une couronne de largeur 1*




La couronne de largeur 1 est pavable puisqu'elle compte un nombre pair de cases (soit $4n - 4$) : on peut donc placer les dominos l'un à la suite de l'autre. Le polymino *P* de taille $n - 2$ est pavable aussi, puisqu'il est plus petit que *M*. Donc la réunion de la couronne de largeur 1 et de *P* est pavable, c'est-à-dire que *M* est pavable, d'où la contradiction. Ce découpage est toujours possible, sauf si on ne peut pas enlever de couronne sans trou, c'est-à-dire si le trou est une case noire du bord (le cas du polymino réduit au trou est inclus). La base de l'induction est la classe des polyminos avec le trou sur une case noire du bord (il s'agit d'une base de taille infinie).

## LES ENSEIGNANTS FACE AU PROBLEME DU POLYMINO

Nous proposons dans cette partie, une étude des soixante-quatre productions que nous avons recueillies sur ce problème entre 2002 et 2007, suivant différents *indicateurs* relatifs à la preuve (nous allons préciser ce que nous entendons par *indicateurs*). Ces soixante-quatre productions d'enseignants correspondent au travail d'environ cent treize personnes, certaines d'entre elles étant produites par des groupes. Elles ont été recueillies au cours de six formations différentes en relation avec la preuve, formation initiale ou continue. Trois variables nous semblent importantes pour notre analyse : le public (enseignants débutants ou bien expérimentés de collège), le temps donné pour la recherche du problème (assez court pendant la formation ou bien non contrôlé car en dehors du temps de formation), la consigne pour l'écriture du texte (production à présenter au groupe ou bien narration de recherche). Ainsi nous regroupons les productions en cinq classes :

- La classe PLC2-0203 (vingt-huit personnes) : elle est constituée de huit productions d'enseignants stagiaires en formation initiale (à l'IUFM). Elles ont été rédigées en groupe, de façon assez soignée, après une recherche longue d'une durée de deux heures. Les textes n'excèdent pas deux pages, ils sont écrits à la main. La solution générale du problème est donnée par un groupe, un autre s'en approche, mais comporte des trous.
- La classe formée des cinq productions désignées par FC04Ch-*i* et des six désignées par FC04V-*k* : les enseignants (environ une quarantaine) exercent en collège, ils se sont inscrits, un groupe à Chambéry, l'autre à Valence, à une formation sur la démonstration. La consigne demandait d'écrire, après une recherche assez courte (une trentaine de minutes[115]) un texte d'une page sur les résultats obtenus, et un autre d'une page aussi sur les démarches, les questions, chacun d'eux devant être photocopié sur un transparent et présenté au grand groupe. Mise à part une des productions, celles-ci sont très pauvres au niveau des résultats et ne présentent pas d'idée de preuve dans le cas général. Plusieurs enseignants, surtout dans le groupe de Chambéry, se sont montrés réfractaires à la recherche de ce problème. Nous y revenons plus loin. Aucun texte ne donne la résolution générale du problème.
- La classe FC06G (sept enseignants) est constituée de sept productions rédigées individuellement après une recherche en groupe (un groupe de quatre et un groupe de trois), assez courte. Il est demandé de décrire sa démarche, de donner ses résultats. Ces stagiaires, qui enseignent en collège depuis plusieurs années, se sont inscrits à une formation sur la démonstration. Ils font partie d'un groupe plus important, les autres ayant à chercher soit *le Centre de secours*, soit *le Pentagone.*
- La classe formée de quatre productions PLC2-06-GB (quatre personnes seulement, le reste du groupe ayant cherché un autre problème) et de treize productions PLC2-06-GA (treize personnes) : les professeurs concernés sont

[115] Nous insistons sur le fait que c'est la façon d'aborder le problème qui nous importe. Nous ne cherchons pas à « piéger » les enseignants en leur accordant un temps trop court. Nous les prévenons d'ailleurs en leur disant que, dans le temps imparti, nous pensons qu'ils n'auront pas le temps de résoudre complètement le problème.

débutants, en formation initiale, dans le cadre de laquelle ils suivent un module sur la démonstration. Les enseignants devaient chercher le problème en groupes pendant une trentaine de minutes, avaient ensuite dix minutes pour rédiger individuellement un texte qui devait mettre en évidence la démarche suivie, les résultats obtenus, les pistes suivies (même si elles n'avaient pas abouti).

• La classe PLC2-07-G (vingt et une personnes) est constituée de vingt et une narrations de recherche, que les enseignants (stagiaires) ont rédigées en dehors du temps de formation. Les textes sont souvent tapés, très bien présentés ; beaucoup donnent, comme le demandait la consigne, des indications intéressantes sur la démarche de recherche. La longueur est très variable, entre une et huit pages.

Le positionnement des enseignants face à ce problème, leurs méthodes de résolution et les preuves fournies permettent d'interroger et expliciter les conceptions sur la preuve et d'envisager une remise en cause du contrat usuel[116] relatif à la preuve. A cet effet il est pertinent de confronter certaines productions des enseignants à celles d'élèves sur ce problème (nous l'avons proposé dans les exercices donnés à choisir aux enseignants pour l'enseignement de la preuve, voir chapitre 4) ; nous en proposons quelques-unes dans les paragraphes suivants, où nous dégageons des résultats concernant l'utilisation de ce problème en formation.

## 1. Le refus d'entrer dans le problème

Nous avons au moins trois productions, relatives à environ une douzaine de personnes sur les cent treize (environ 10 %), qui montrent la difficulté des enseignants à s'investir dans ce problème qu'ils jugent trop éloigné de leurs préoccupations habituelles. Un exemple est donné par FC04V-5-D, dont nous ne donnons ci-dessous qu'une partie :

➔*Recherche de cas possibles et de cas impossibles.*
*exemple n = 2, n = 3, n = 4…*
*Puis arrêt recherche…*
➔ *Intérêt de la question ?*
*« Où veut-on nous mener ? »*
↘ *A quoi cela peut-il servir ?*
↘ *Définir une démarche ?*
➔ *Retour au problème :*
*On avait affirmé trop rapidement « vrai, possible pour 3 ».*
*on s'aperçoit que cela dépend de la position du trou.*
*Recherche par essais successifs, mais « ne pas trouver pour un essai ne signifie pas que cela ne marche pas. »*
*Pour n impair → Y a –t-il toujours des positions OK ?*
*↘où non OK.*
➔ *Lien avec la vie courante.*
*Intérêt pour le carreleur ?*
*Lien avec le jeu du « taquin ».*
➔ *Retour au problème : comment comprendre l'énoncé*

[116] Le contrat usuel relatif à la preuve que nous avons décrit au chapitre 2.

*<u>possible</u> signification ? toujours vrai ?*
*parfois vrai ?*
*toujours faux ?*
*➔ recherche d'une généralisation 3 →5 $n \to n+2$*
*Fausse piste… Autre piste : raisonnement par distance au bord.*
*➔ (notre ccl) Recherche assez décousue : échanges*
*➔ (notre ccl) Pas trouvé de raisonnement mathématique dans le temps imparti.*
*➔ Dans quel état sommes-nous ?*

La dernière ligne de ce texte montre le désarroi des enseignants face à un tel problème : ils ne peuvent pas se raccrocher à des méthodes connues, craignent de ne pas « savoir faire ». Aussi masquent-ils cette peur (et l'école se borne souvent à apprendre aux élèves des savoir-faire) derrière cette manifestation, parfois véhémente, qu'ils n'ont pas de temps à perdre en formation à chercher ce type de problème, que cela ne leur sert à rien dans leur enseignement.

Ces enseignants[117], qui ne supportent pas de « sécher » sur un problème, peuvent difficilement induire chez les élèves une réelle activité mathématique.

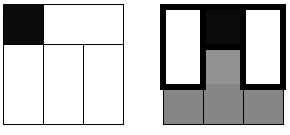
*Ce problème du polymino peut être rejeté par certains enseignants qui le jugent trop loin de leur quotidien. Le cas échéant, cela permet d'envisager, d'une part, la position de l'élève qui se bloque parce qu'il est devant un problème nouveau, d'autre part, la difficulté à conduire les élèves à une activité réellement mathématique si l'on refuse pour soi-même cette pratique.*

## 2. Les enseignants ont des représentations différentes du problème, ce qui permet d'envisager la posture de l'élève face à la généralité

L'entrée dans le problème est facile, on expérimente rapidement sur des cas simples, mais cela ne signifie pas qu'on a compris ce qu'on cherche. Il peut se révéler une opposition entre le sens mathématique du problème et le contrat imaginé, en référence au *contrat usuel*[118], qui veut qu'on réponde strictement à la question posée. Ainsi nous relevons trois représentations différentes du problème.

### La représentation n°1

Revenons à la question : « Est-il possible de paver, avec des dominos, un polymino $n \times n$ privé d'une case ? ».



Certains enseignants affirment avoir traité le problème dans le cas où $n = 3$, lorsqu'ils montrent un pavage possible, par exemple celui de la figure de gauche, ils le prouvent *par exhibition* (voir paragraphe 3 de la première partie), leur réponse est alors « oui ». Ils

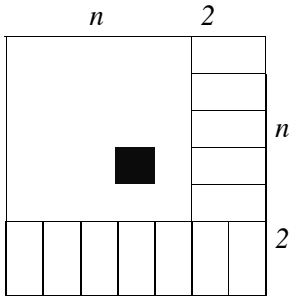
[117] Nous en avons rencontré un nombre significatif au cours de nos formations.

[118] Le contrat usuel relatif à la preuve, que nous avons décrit au chapitre 2.

répondent à la consigne et ne se préoccupent pas du sens du problème posé. Cette représentation du problème vaut aussi pour le cas général du polymino de taille *n*, comme le montre PLC2-07-G6 :

[…]
*En fait si on définit la position de la case noire par la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne, on a bien si i + j est pair on peut paver avec les dominos. C'est notre critère de position de la case.*
*-Démonstration par récurrence :*
*Pour n = 3, si i + j est pair (coin ou centre) on peut paver.*
*Pour n impair quelconque supposons vrai que si la case est positionnée telle que i + j est pair, alors on peut paver.*
*Au rang suivant n + 2 impair : la case est repérée par i et j tel i + j pair*

*➔ si i et j ≤ n, la case est dans un carré n × n, dans lequel elle est repérée par les mêmes i et j et donc le carré n × n se pave (hypothèse de récurrence). On pave facilement le L restant avec 2 n + 2 dominos.*




[…]
*Donc le carré (n +2)× (n +2) est pavable.*
*➔ La propriété est démontrée par récurrence.*

L'auteur prouve ainsi par récurrence (on peut cependant remarquer que la récurrence ne fonctionne pas si le trou est au centre dans le cas où $n = 3$) qu'il est possible de paver le polymino pour les différentes valeurs de *n* impair, et c'est tout. Cette représentation du problème est largement présente dans les textes des enseignants : dix productions sur soixante-quatre (environ 16 %). Nous écartons l'idée que ces textes ne sont pas achevés : ce sont en effet des narrations de recherche et les auteurs montrent, par leur façon de conclure leurs textes longs, souvent écrits sur ordinateur, qu'ils pensent avoir résolu le problème.

### La représentation n°2

D'autres professeurs (2 sur 64) comprennent la question comme : « Est-il *toujours* possible de paver avec des dominos un polymino *n*×*n* privé d'une case ? ». Leur réponse est alors « non » et ils proposent une preuve de l'impossibilité du pavage : *par forçage* (voir paragraphe 4 de la première partie), dans le cas où $n = 3$ et le trou au milieu d'un bord, ou bien en prenant le cas d'un polymino de taille paire, comme l'illustre PLC2-07-G17 :

*Cas n = 5*
*12 dominos recouvrent 24 cases. On a 24 cases à paver donc pour l'instant, ce que l'on demande n'a pas de raison a priori d'être impossible.*
*Voir les autres cas.*
*Cas n = 4 :*
*15 cases à recouvrir. Or un pavage par des dominos couvrira nécessairement un nombre pair de cases. Donc pour le cas n = 4, le problème n'a pas de solution.*
*(j'ai pris n = 4 car je voulais un $n^2$ pair pour rechercher justement ce problème de parité.*

*Ce cas unique est le contre-exemple recherché pour infirmer le résultat.)*
*Donc le problème n'a pas en général de solutions.*

### La représentation n°3

Certains enseignants (une production de groupe sur les soixante-quatre) répondent au problème par « oui et non » : c'est non, si *n* est pair, et ils le prouvent, c'est oui, si *n* est impair, et ils s'en tiennent à cette conjecture ; en témoigne FC04V-2 :

*Résultats mathématiques*
*→ C'est impossible dans le cas où le côté du carré est un nombre pair : il y a alors un nombre impair de cases à recouvrir.*
*→ C'est possible (« semble ») si la case du trou a pour coordonnées (impair ; impair) ou (pair ; pair).*
[…]
*Question posée : selon la position de la case vide, c'est possible ou impossible.*
[…]

### Envisager la posture de l'élève face à la généralité

Le texte du problème est volontairement ambigu, pour permettre l'émergence de ces trois représentations. Il faut reconnaître que, derrière la consigne, il y a une question mathématique. Ce que l'on cherche, c'est une catégorisation de toutes les cases si elles sont choisies comme trous : on veut déterminer une partition de l'ensemble des cases-trous en, d'une part, celles qui permettent le pavage, d'autre part, celles qui rendent le pavage impossible. C'est la représentation mathématique du problème. Cet exemple illustre l'opposition de deux enjeux, faire des mathématiques, d'une part, respecter la consigne, d'autre part, deux types d'activités que nous avons respectivement qualifiées de *mathématique* et de *scolaire*. La première conduit à chercher ce qu'il y a de généralisable dans ce problème, la seconde à respecter strictement la consigne, conformément au contrat, ce que font les enseignants cités précédemment. Il ne faut pas oublier qu'on parle beaucoup à l'école du respect de la consigne, de la lecture d'énoncé. Il y a même des activités de re-médiation toutes prêtes sur ces sujets, dans la logique actuelle qui veut qu'à une défaillance corresponde un remède, comme nous l'avons déjà dit. Au final, c'est dans treize productions sur soixante-quatre (dont une est un travail de groupe, qui concerne donc trois ou quatre personnes), soit plus d'une sur cinq, que figure cette opposition entre sens du problème et respect de la consigne.

C'est un autre résultat sur l'utilisation de ce problème en formation :

*Le problème du polymino amène, par les diverses représentations auxquelles il donne lieu, à envisager, ensuite, en formation avec les enseignants, la posture de l'élève devant la généralité.*

Les élèves sont en effet souvent dans cette situation où l'implicite est grand, voire plus grand que dans cette situation. Cet implicite relève en réalité du questionnement mathématique, mais les élèves n'en sont souvent pas encore arrivés à ce stade de la recherche du sens mathématique des problèmes qui leur sont posés. Par

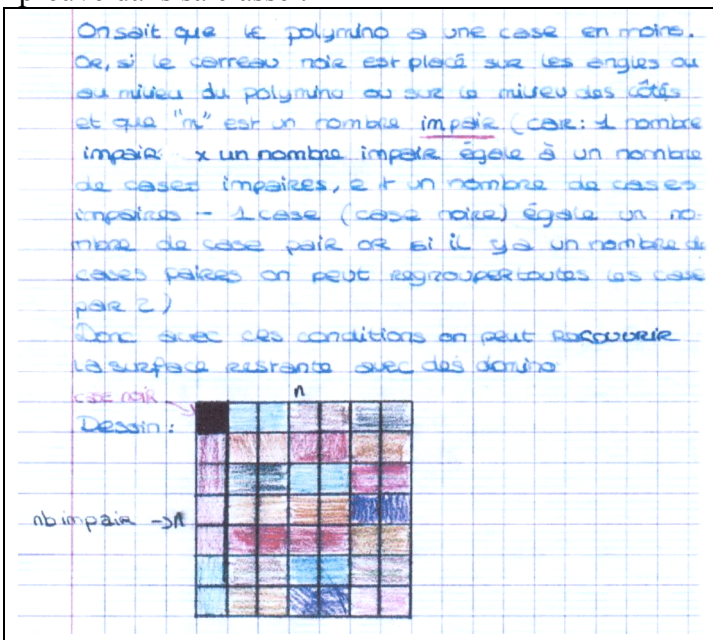
exemple, lorsqu'un élève vient de construire un dessin qui représente une figure, à partir de laquelle il doit faire une démonstration, comment peut-il être amené à envisager toute une classe de dessins comme le sous-entend le travail de preuve sur cette figure ? Plus grand encore peut être le malentendu si le dessin est fourni par le professeur. Dans le *polymino*, c'est une taille variable qui est à envisager, ainsi que la place variable du trou, mais, en géométrie, là où s'exerce la preuve dans le contrat usuel, c'est au travers de la forme variable que s'envisage la généralité : c'est plus difficile. Les élèves ont-ils les moyens d'envisager ceci en lien avec la preuve ? Ceci doit-il rester à leur charge ? Ces questions doivent être soulevées en formation à la suite de ce problème.

### 3. L'étude du cas général amène à la condition « *n* impair » nécessaire à l'existence d'un pavage… presque unanimement

Ce résultat simple figure en effet dans la totalité des productions, sauf deux :

- PLC2-07-G17, citée dans le paragraphe précédent : l'auteur veut montrer que la réponse à la question est négative, il se contente donc de donner un contre-exemple, en utilisant justement $n = 4$ ;
- FC06G-4, qui, après coloration du polymino en damier, propose d'étudier un polymino à 16 cases (de taille 4), mais s'arrête ensuite.

Il est intéressant, en formation, de donner à examiner aussi des productions d'élèves, notamment par rapport à ce résultat, comme la suivante, produite par un groupe d'élèves de quatrième. Elle est accompagnée d'un commentaire de la part du professeur[119] (Leloup & Ecarnot 2006) qui utilise ce problème pour enseigner la preuve dans sa classe :




*Transcription du texte : « On sait que le polymino a une case en moins. Or, si le carreau noir est placé sur les angles ou au milieu du polymino ou sur le milieu des côtés et que « n » est un nombre impair (car : 1 nombre impair × un nombre impair égale à un nombre de cases impaires, et un nombre de cases impaires – 1 case (case noire) égale un nombre de case pair or s'il y a un nombre de cases paires on peut regrouper toutes les cases par 2)*
*Donc avec ces conditions on peut recouvrir la surface restante avec des domino. »*

[119] Il s'agit d'un professeur stagiaire qui étudie l'apprentissage de la preuve dans le cadre de son mémoire professionnel.

*La preuve est ici clairement établie en ce qui concerne la condition nécessaire d'imparité. Ces élèves ont raisonné sur le nombre de cases restantes après avoir supprimé une case du polymino et ce, dans le cas général. Il n'y a que peu d'exemples fabriqués au brouillon. Les arguments sont convaincants, mathématiquement corrects et introduits par des éléments de mise en forme comme « On sait que », « Or », « Donc ». Nous entrevoyons que* […] *la démonstration est soumise à des règles précises d'écriture.*
*Néanmoins, la structure de la démonstration ne prend pas le pas sur le fond. Nous pensons que ce groupe a eu le souci de privilégier les éléments de preuve (énoncés après la conjonction de coordination « car »).* […] *La conclusion, introduite par le mot de liaison caractéristique « donc », semble en revanche un peu plus floue. En effet, le sens du verbe pouvoir prête à confusion. Autrement dit, est-ce énoncé sous forme d'une condition nécessaire ou suffisante ?* (Leloup & Ecarnot 2006)

## 4. L'étude des cas particuliers (notamment le cas où $n = 3$) est riche d'enseignements pour l'apprentissage et l'enseignement de la preuve

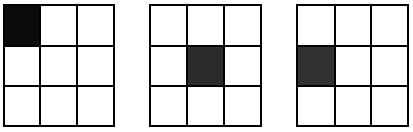
L'entrée dans le problème se fait par expérimentation sur des cas simples et l'on aboutit rapidement à des *résultats* (nous considérons que c'est un résultat s'il est accompagné d'une preuve ou au moins d'éléments de preuve). Ce que nous avons repéré dans les productions :

- le cas $n = 1$ est mentionné ;
- le cas $n = 3$ est traité en partie ou complètement ;
- dans les cas $n = 5$ ou $n = 7$, il est démontré que si le trou est à coordonnées de somme paire, le pavage est possible : ce résultat figure dans dix productions sur soixante-quatre, dont la moitié comporte des preuves incomplètes (les manques sont les mêmes que pour le cas général, étudié plus loin) ;
- dans le cas $n = 5$, il est démontré que si le trou est à coordonnées de somme impaire, le pavage est impossible.

Nous revenons plus particulièrement sur les enseignements que nous pouvons tirer du seul cas $n = 3$, pour l'enseignement ou pour la formation.

### Plus de quatre-vingt pour cent des productions qui étudient le cas $n = 3$ contiennent des preuves avec des trous

Il y a quarante-quatre productions sur soixante-quatre (soit près de 70%), qui estiment avoir traité le cas $n = 3$. Sur ces quarante-quatre études du polymino de taille 3, seules huit (soit 18 %) donnent une preuve complète, les trente-six autres affirment sans preuve que le pavage est impossible si la case manquante a ses coordonnées de somme impaire (case blanche).

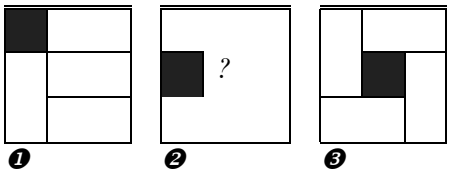


*possible* *possible* *impossible*

La plupart se contentent en réalité de trois schémas assortis des commentaires « possible » ou « impossible », mais sans que le second ne soit argumenté. Nous le signalons comme un *trou* et nous développons nos raisons ci-dessous.

Certaines productions en effet, qui ne sont pas décomptées dans ces 70 %, traitent aussi du cas $n = 3$, mais reconnaissent que leurs preuves ne sont pas complètes. Voici un extrait de PLC2-07-G2 :

*n=3*




*Il y a 3 façons de trouer le polymino (à une rotation près)*

*J'ai réussi à paver les polyminos ❶ et ❸, mais pas le ❷.*

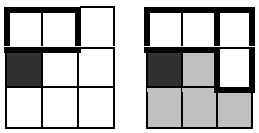
L'auteur dit qu'il n'a pas réussi à paver le polymino dans un cas, mais il ne tire pas la conclusion que le pavage est impossible dans ce cas. Ceci renforce bien l'idée que la preuve de l'impossibilité du pavage dans le cas où le trou est au milieu d'un côté nécessite un argument qui n'est pas trivial et que l'on peut donc considérer que rien n'est prouvé quand on affirme *impossible* dans ce cas : c'est un *trou*. On peut le combler en donnant une preuve *par forçage* (voir paragraphe 4 de la première partie de ce chapitre).

Ainsi à partir du traitement du seul cas où $n = 3$, on peut institutionnaliser ce qu'on appelle un *trou* : un argument non trivial à ne pas passer sous silence car il est important pour le raisonnement, et non pas un « pas » évident qui n'est pas écrit. On peut ainsi considérer que les schémas n°1 et n°3 donnent des preuves sans trou (par *exhibition*) de l'existence d'un pavage dans le cas où le trou est dans un coin ou dans la case centrale.

**Le cas $n = 3$ permet de rencontrer des preuves qui sortent du contrat usuel**

Nous pouvons mettre en avant la richesse sur le plan de la preuve du traitement de ce cas simple, qui met en jeu :

- la preuve de l'existence d'un objet (le pavage) par construction de celui-ci, ce que nous avons nommée preuve *par exhibition* ;
- la nécessité de prouver une impossibilité, ce qui constitue une motivation à la preuve ;
- la preuve de cette impossibilité, *par forçage*, avons-nous dit : le raisonnement suit l'une des « règles » de base du raisonnement déductif, à savoir celle du *modus tollens* : sachant que (A ⇒ B) est vrai et que B est faux, on en déduit que A est faux.



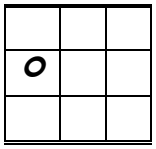
En effet, dans le cas où le trou est au milieu d'un côté, si le polymino est pavable, alors un domino se place nécessairement à côté du trou. Comme il reste une seule case libre au coin consécutif au domino, un autre domino se glisse nécessairement dans le coin. Il est alors nécessaire de recouvrir par des dominos la configuration en gris, ce qui est faux. Donc ce polymino n'est pas pavable.

Outre les types de preuves cités qui sortent du contrat usuel, leur forme se pose aussi en rupture avec celui-ci : les preuves s'accompagnent nécessairement de schémas ou ne se montrent que sous forme de schémas.

**Confusion entre condition nécessaire et condition nécessaire et suffisante ?**

Certaines productions, qui ne sont pas répertoriées dans les quarante-quatre, ne donnent que les positions du trou pour lesquelles le pavage est impossible. Voici un extrait de FC04V-4 :

*n=3*
*4 dominos*

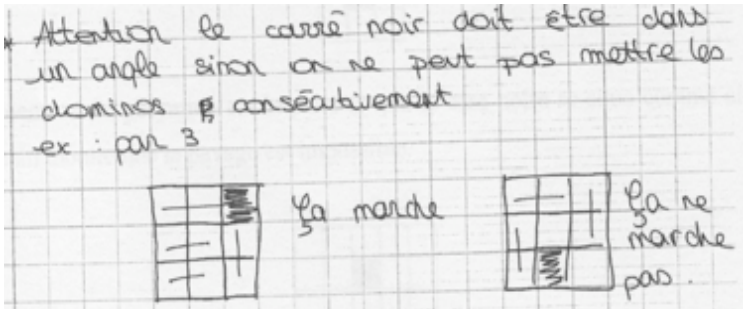


*impossible, d'où 4 cas impossibles par symétrie*

On peut se demander si cette condition suffisante pour que le pavage soit impossible ne sous-entend pas la réciproque, c'est-à-dire n'est pas vue comme une condition nécessaire et suffisante. En effet, la production (de groupe) ne mentionne aucun élément concernant l'existence d'un pavage pour les autres trous possibles.

**Enfin la preuve du cas *n* = 3 est un résultat sur le problème**

Il est à considérer comme un élément de la preuve, à faire figurer dans sa rédaction. Pour illustrer la pertinence de ce problème, non seulement pour la formation des enseignants, mais aussi pour l'apprentissage de la preuve au collège, voici une copie d'élève de quatrième[120] (2007), qu'il pourrait être intéressant d'exploiter en classe, d'abord pour faire ressortir les différences entre les deux preuves qui y figurent, ensuite pour réfuter la conjecture, enfin, pour montrer l'avancée dans la preuve :




*Le traitement du cas simple n = 3 se pose en rupture du contrat usuel. Il permet d'aborder en formation différents types de preuve (par exhibition, par forçage), de définir ce qu'est un trou (en l'opposant à l'oubli d'un « petit pas »), un résultat, de voir des preuves qui peuvent être « sans mot ». Les preuves sortent du domaine de validité des composantes locales de conception P, T, FM, nonSExp.*

[120] d'un collège situé en Zone d'Education Prioritaire, à Cluses en Haute Savoie. Cette copie a été relevée par le professeur de la classe, stagiaire, qui étudie l'apprentissage de la preuve dans le cadre de son mémoire professionnel

## 5. Dans le cas d'un polymino de taille *n* impaire, le traitement du cas général de la position du trou permet d'aborder d'autres types de preuve

Le résultat est le suivant : le polymino est pavable si, et seulement si, le trou est à coordonnées de somme paire (case noire[121] dans la coloration en damier). Nous avons vu que la condition suffisante pour qu'un pavage existe, à savoir, si le trou est une case noire, alors il existe un pavage, ne se prouvait pas de la même façon que la condition nécessaire, c'est-à-dire s'il existe un pavage, alors le trou est une case noire, ou plutôt, sous sa forme contraposée, si le trou est une case blanche, alors il n'existe aucun pavage. Nous distinguons donc les preuves des deux implications.

**Résultat :**
**si le trou est une case noire (à coordonnées de somme paire), alors il existe un pavage**

Ce résultat figure, plus ou moins explicitement, dans trente-huit productions sur soixante-quatre (soit près de 60 %). Parmi les preuves, vingt-six (près de 70 %) sont erronées ou comportent des trous importants (certaines se bornent à suggérer, sans le faire, un raisonnement par récurrence). La plupart des erreurs (16/22[122], environ 73 %) relèvent de la confusion entre condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante. Voici un exemple : la production FC06G-7, qui est confuse sur ce qui est prouvé exactement. On note par ailleurs que le mot « hypothèse » est employé à la place de conjecture. Enfin elle comporte l'erreur qui consiste à croire non pavable la réunion « d'un pavable et d'un non pavable ».

[…]
*Hypothèse 2 : possible si cases noires échiquier [un échiquier est dessiné]*
*Preuve : hyp 2 possible si case noire*
*idée : extraire carré 3×3 comme fig 1 [c'est le carré 3x3 colorié en damier, noir : possible, blanc : impossible] pavable. Reste alors rectangles L× l pairs donc pavables*
*impossible si case blanche*
*idée (fausse ?) pavable + non pavable = non pavable*

Nous avons vu que des méthodes possibles pour prouver ce résultat sont la coloration en damier, la décomposition/recomposition directe (découpage autour du trou en rectangles ayant un côté pair, par exemple) ou au travers d'un raisonnement par induction (découpage d'une couronne de largeur 1, d'une bande en L de largeur 2…). Celui-ci n'est pas disponible dans l'enseignement secondaire, on peut toutefois voir l'idée que l'on découpe le polymino pour en avoir un plus petit… jusqu'à obtenir un polymino de taille 3 dont on a étudié toutes les cases. Ceci se remarque dans PLC2-07-G1, qui raisonne toutefois sur un exemple générique, au lieu de considérer un polymino de taille quelconque impaire :

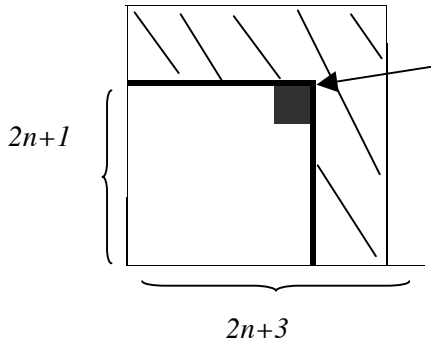
[121] Nous rappelons que la case en haut à gauche du rectangle est coloriée en noir.

[122] On relève 22 preuves erronées et 4 de plus qui comportent des trous importants, soit 26 en tout. Voir en annexe du chapitre 11 le tableau récapitulatif de cette analyse.

*J'entreprends un essai sur un 7*7, et je me rends immédiatement compte que je peux facilement recouvrir une bonne partie du polymino et ainsi me ramener à un polymino 5*5 …réflexion … mieux je peux me ramener à un 3*3.*
*Voilà je pense avoir résolu le problème, peu importe la taille du polymino, je peux toujours me ramener à un polymino 3*3. De plus pour n=3, j'ai étudié tous les cas possibles et ils vérifient ma conjecture (qui forcément est un peu compliquée pour le nombre de cases d'un polymino 3*3).*

On note par ailleurs la confusion sur ce qu'on prouve : l'auteur pense démontrer ainsi à la fois la condition nécessaire et la condition suffisante. La façon dont « on se ramène » à un polymino plus petit n'est pas explicitée, c'est aussi le cas dans d'autres productions : on ne se soucie pas de vérifier qu'on obtient bien toujours un objet du même type lorsqu'on réduit le polymino de taille quelconque. Voici un autre exemple, PLC2-06-GA-Gr3, où, de plus, l'hypothèse de récurrence est fausse (le cas $n = 3$ et le trou au centre donne un contre-exemple) et l'auteur annonce une récurrence ascendante, alors qu'il raisonne « en descendant », mais sans se soucier si c'est toujours possible.

[…]
*Hypothèse de récurrence : si n est impair, « si une case marche, celles situées autour ne marchent pas. »*
*Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang 2n+1 et montrons qu'elle encore au rang 2n+3.*




*Supposons que la case ~~noir~~cie soit ~~ici~~ (quitte à tourner le quadrillage).*
*Il reste autour des cases que l'on peut grouper par 2. Si on les enlève, on se retrouve avec un quadrillage 2n+1 × 2n+1.*

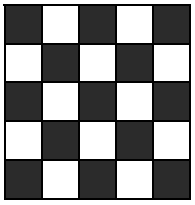
D'autres types de preuve que le raisonnement par récurrence sont proposés (ou suggérés), voici un tableau qui les récapitule :

| *Sur 38 productions qui contiennent une preuve ou tentative de preuve de « si le trou est une case noire, alors il existe un pavage.»* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Type de preuve* | *Un seul type évoqué ou utilisé : récurrence* | *Un seul type évoqué ou utilisé : raisonnement direct par décomposition-recomposition* | *Deux types : tentatives de récurrence et raisonnement direct par décomposition-recomposition* | *Un seul type : coloration en damier* |
| | *21* | *13* | *2* | *2* |
| *Preuves erronées ou incomplètes* | *17* | *5* | *2* | *2* |

Parmi les vingt-trois preuves (ou tentatives) qui passent par une récurrence (voir paragraphe 6 de la première partie), douze proposent un *découpage d'une bande en L de largeur 2*, une recourt à un *découpage d'une couronne de largeur 1*, trois utilisent les deux *découpages* et sept restent trop vagues ou ne disent rien sur le passage d'un rang au suivant (comme PLC2-07-G1 déjà cité). Les quinze productions qui recourent à un raisonnement direct par décomposition/recomposition proposent des découpages divers du polymino, allant de quatre à huit rectangles pavables, ceux-ci pouvant différer suivant la parité des coordonnées du trou ; certains (au moins deux, comme FC06G-7 déjà cité) enfin proposent « d'extraire des carrés $3 \times 3$ » sans expliciter davantage. Enfin les deux preuves par coloration sont erronées. Les voici, elles sont issues du même groupe, d'abord FC06G-3 :

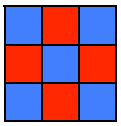
[…]

*Imaginons un damier n cases sur n cases avec n impair.*
*Certaines cases noires, les autres blanches*
*Y a-t-il le même nombre de blanches et de noires ?*
*Non car n impair s'écrit 2 i +1*
*total* $n^2 = (2\,i + 1)^2 = 4\,i^2 + 4\,i + 1$ *(impair)*
*Il y a 1 case noire de plus (par exemple).*
*Si on place le trou sur une case noire, l'équilibre est rétabli, on pourra paver car un domino couvre (1 noire + 1 blanche).*
*Si on place le trou sur une case blanche, le déséquilibre est accentué, il y a maintenant 2 noires de plus.*

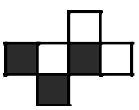


Ensuite FC06G-4 :

*Avec un polymino à 9 cases*
*Je colorie chaque case alternativement en rouge et bleu ce qui représentera un domino*
[…]
*Un domino est constitué d'une case [bleue, l'auteur a écrit « noire » ?] et d'une case rouge.*
*En coloriant une case, on enlève une case bleue ou une case rouge.*
** Si on supprime une case bleue (abscisse impaire, ordonnée impaire)*
*(abscisse paire, ordonnée paire)*
*le nombre de cases bleues devient pair → possible*
** Si on supprime une case rouge (paire impaire, impaire paire)*
*le nombre de cases rouges devient impair → impossible*
*Avec un polymino à 16 cases*
[…]

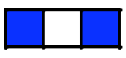


La dernière phrase de l'extrait ci-dessus montre que l'auteur n'a pas saisi qu'une condition nécessaire pour que le pavage existe était que la taille du polymino soit impaire. On considère que l'expression « en coloriant une case » signifie : si le trou est une des cases. L'argument qui consiste à dire que l'égalité des nombres de cases de chaque couleur (on dit *coloration équilibrée*) implique l'existence d'un pavage, est faux.



Un contre-exemple est donné par la figure ci-contre.

Ce n'est pas non plus le fait que le nombre de cases bleues soit pair qui peut justifier l'existence d'un pavage, comme le montre le contre-exemple ci-dessous.



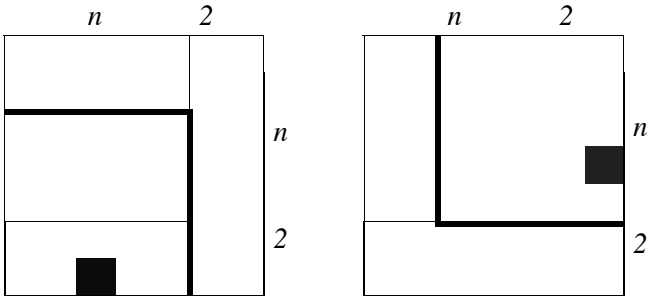
On remarque aussi que FC06G-3 ne conclut pas en

l'impossibilité d'un pavage dans le cas où le trou est une case blanche.

Enfin certaines preuves sont très détaillées, redondantes et formellement complexes. Voici l'exemple de PLC2-07-G6 (que nous avons déjà vue au paragraphe 2), qui étudie quatre cas : l'auteur, qui a déjà étudié le cas où le trou est « en haut et à droite » (voir au paragraphe 2), n'a pas vu que ces quatre cas pouvaient être traités en un seul, si on pensait à faire tourner le polymino, il poursuit :

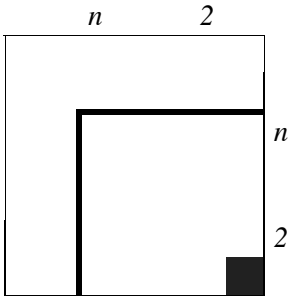
[…]

➔ *si $i > n$ et $j \leq n$ ou $i \leq n$ et $j > n$, on prend un carré $n \times n$ qui inclut la case et dans lequel elle est repérée par i' et j'*




| | |
|---|---|
| *$i' = i - 2$ et $j' = j$ ou $i' = i$ et $j' = j - 2$* | *$i' + j' = i + j - 2$ pair donc le carré $n \times n$ est pavable, et le L restant est pavable aussi (voir au-dessus))* |

➔ *si $i > n$ et $j > n$, même raisonnement avec le carré $n \times n$ en bas à droite. La case dans le carré $n \times n$ est repérée par i' et j' et $i' = i$ 2*
*$j' = j - 2$ $i' + j' = i + j - 4$ pair, donc le carré $n \times n$ est pavable, et le L aussi.*




[…]

**Résultat :**
**si le trou est une case blanche (coordonnées de somme impaire), le pavage est impossible**

Quarante et une productions sur soixante-quatre (soit 64 %) comportent une conjecture ou une preuve (ou tentative) de ce résultat, celui-ci étant plus ou moins explicité clairement, souvent amalgamé à sa réciproque dans un essai de raisonnement par récurrence (dans la moitié des preuves, 14/28). Nous avons évoqué ce point dans la partie précédente de ce paragraphe. Voici un tableau récapitulatif :

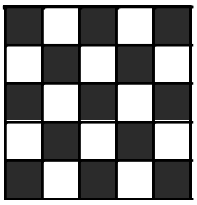
| *Conjecture seulement, reconnue comme non prouvée* | *Preuve correcte par coloration en damier* | *Erreur : découpage en rectangles d'aires impaires, donc polymino non pavable ou autre découpage ou « on se ramène au cas 3x3 »* | *Essai de preuve par récurrence* |
|---|---|---|---|
| *13* | *7* | *7* | *14* |

Il s'agit de prouver une impossibilité. Une preuve par décomposition/recomposition (directe ou par récurrence) ne peut pas convenir parce qu'un polymino qui n'est pas

pavable, peut être reconstitué à partir de deux objets dont l'un ou les deux ne sont pas pavables : la réunion de deux objets non pavables peut être pavable, de même que la réunion d'un objet pavable et d'un autre non pavable. Nous obtenons sept preuves par coloration (paragraphe 2 de la première partie), ce qui montre que certains raisonnements spécifiques des mathématiques discrètes commencent à être disponibles chez les professeurs du secondaire. Voici l'une de ces sept preuves, il s'agit de FC06G-2 (nous avons ajouté des numéros pour nous référer à certains passages) :

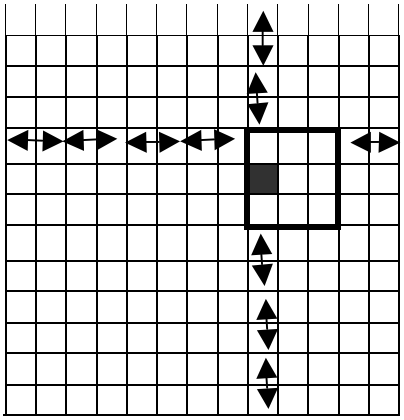
[…]
*Coloriage du polymino : cases où ça marche*
*On suppose qu'un domino est* .
*Si la case vide est sur une case ■, alors il y a autant de cases ■ que de cases ❑. (1)*
*Sinon il y a plus de cases ■ que de cases ❑, donc on ne peut mettre des dominos. (2)*

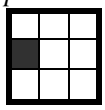
La preuve figure donc dans l'implication (2). L'auteur ne conclut pas de (1) que le pavage est alors possible, ce qui serait faux, comme nous l'avons vu (au sous-paragraphe précédent).



Les erreurs sont multiples dans la preuve de ce résultat. La production suivante (PLC2-06GB-2) en montre deux, qui ne sont pas isolées :

[…]
*Maintenant si on part du cas n=13 !*



*On place une case noire au hasard !*
*On s'arrange pour faire apparaître un carré de côté 3 cases (car on sait que tout est basé sur ce carré d'après ce qui précède) de telle sorte qu'il soit éloigné des bords par un nombre pair de cases ! Dans ce cas, on peut dire qu'il n'est pas pavable car le cas*

*ne l'est pas !*

La première erreur (signalée ci-dessus) consiste à dire que la réunion de rectangles pavables et d'un polymino non pavable n'est pas non plus pavable, la seconde à déduire que le polymino n'est pas pavable parce que le découpage proposé ne fournit pas de pavage. On note par ailleurs que le raisonnement est explicité sur un « gros » exemple : *exemple générique* ou *expérience cruciale* (Balacheff 1988) ? Ce type de production amène à évoquer comment on montre qu'une preuve est fausse. Il faut sortir du cadre du problème pour montrer que le raisonnement n'est pas correct. Par exemple, pour la seconde erreur, on ne prouve pas une impossibilité en exhibant une solution qui ne convient pas.

Le rapport entre condition nécessaire et condition suffisante pour que le pavage existe est à ce point confuse, que l'on rencontre des productions où la preuve ne correspond pas à la conjecture annoncée, ainsi PLC2-07-G20 :

[…]
*Ma conjecture :*
*Si on appelle i et j les numéros de ligne et de colonne du « trou » alors le trou a pour coordonnées (i ; j).*
*Si n est impair on ne peut pas paver le polymino dans le cas où i et j sont de parités différentes.*

*4) Je raisonne maintenant sur le cas n = 5.*
*Toujours pour des raisons de symétrie, on peut se limiter au cas où le « trou » se trouve en (i ; j) avec (i ; j) ∈ {1,2,3}², c'est-à-dire que l'on est ramené à paver un polymino troué de taille n = 3 et un « L plein » composé d'un rectangle 2 × n et d'un rectangle 2 × (n –2).*
*Comme 2 × n ×[123] 2 × (n –2) est pair on peut recouvrir le « L » avec des dominos et donc [il y a un dessin qui n'est pas reproduit, du même type que celui qui illustre la deuxième stratégie de démonstration de l'existence du pavage dans le cas où i+j est pair] :*
*« Paver le polymino n = 5 » équivaut à « paver le polymino n = 3 ».*

*5) Ce raisonnement s'applique pour un polymino de taille n et de taille n+2. La propriété se transmet donc de « proche en proche » (d'impair en impair).*
*Elle est donc vérifiée par récurrence.*

La conjecture porte bien sur le résultat, « si le trou est une case blanche, alors le pavage est impossible », alors que ce qui figure en 4 et 5 prouve le résultat réciproque, à moins que ce ne soit une preuve des deux ensemble (qui est donc fausse). En effet la propriété dont il est question en 5 doit être celle qui figure dans la conjecture (on ne voit pas d'autre énoncé qui pourrait convenir). Ceci veut dire que, comme dans la vie courante (voir le chapitre *Les malentendus*), il est bien sous-entendu la réciproque. On note aussi l'erreur qui consiste à dire que, puisque l'on a une aire paire ($2 \times n + 2 \times (n-2)$) [124], le pavage est possible. Ceci est faux : le polymino de taille 3 avec le trou au milieu d'un côté nous fournit un contre-exemple. Enfin on peut se demander ce que signifie : « Paver le polymino $n = 5$ » équivaut à « paver le polymino $n = 3$ ».

Une autre erreur (voir l'extrait de PLC2-07-G3 ci-dessous) consiste à affirmer qu'on ne peut procéder autrement, alors que c'est tout à fait possible :

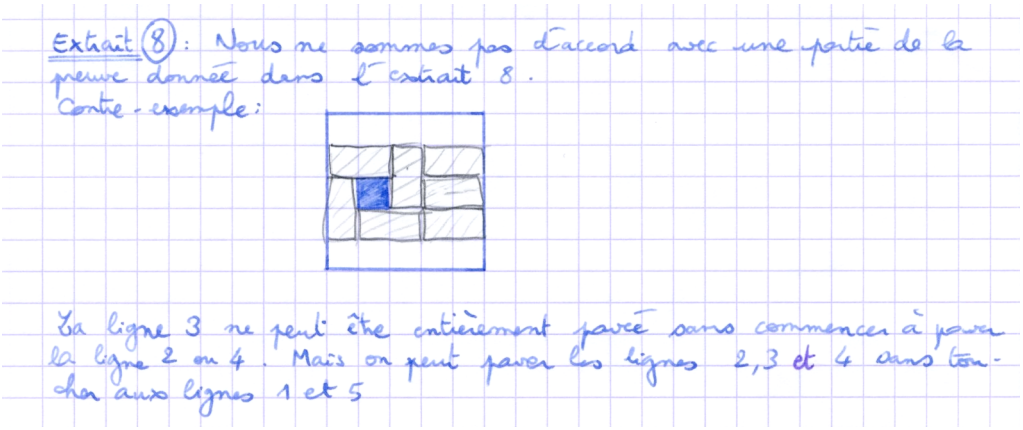
[…]
*Deuxième condition : pour qu'un pavage d'un polymino carré (de côté n imapir) troué existe, il faut que la ligne et la colonne du trou soient de même parité.*
*Arrivé à ce stade, il m'était évident que je ne trouverais plus de solutions, car le seul cas qui restait à montrer était celui d'une case grisée en $a_{ij}$ avec i+j impair ; or ce cas est celui de i impair et j pair, ou i pair et j impair. Etant donné que l'on peut passer d'un cas à l'autre par une rotation du polymino, il suffit de traiter un seul cas. Traitons le cas de i impair et j pair.*
*La raison pour laquelle un pavage du polymino est impossible dans ce cas est que la ligne $l_i$*

[123] On suppose qu'ici il y a une erreur de frappe : l'auteur voulait écrire + à la place de ce ×

[124] si l'on admet qu'il y a une erreur de frappe.

*ne peut être entièrement pavée sans que l'on commence à paver $l_{i-1}$ ou $l_{i+1}$. On peut trouver plusieurs configurations possibles pour le pavage de $l_i$, et toutes mènent à paver en partie $l_{i-1}$ ou $l_{i+1}$ de telle sorte qu'il ne reste à paver qu'un nombre impair de cases, ce qui est impossible à paver sans commencer à paver $l_{i-2}$ ou $l_{i+2}$. … Le processus se répète jusqu'au moment de la dernière (ou première) ligne, à ce moment il est impossible de paver entièrement cette ligne.*

On peut trouver un contre-exemple à l'affirmation que toutes les configurations possibles mènent à paver en partie $l_{i-1}$ ou $l_{i+1}$et donc $l_{i-2}$ ou $l_{i+2}$., celui-ci a d'ailleurs été donné par un groupe d'enseignants lors d'un débat sur les preuves (ce qui est désigné par « extrait 8 », c'est l'extrait du texte de PLC2-07-G3, qui est reproduit ci-dessus) :




**En conclusion de l'étude de ces deux résultats : les erreurs, les trous, la redondance, le formalisme dans les preuves**

Une grande majorité des preuves (environ 40%) renferment une erreur qui relève de la confusion entre condition nécessaire et condition suffisante. Ceci donne à penser qu'il est légitime que la distinction soit difficilement faite par les élèves : c'est difficile et cela n'est pas une affaire de « bon sens ». C'est un des résultats sur ce problème :

*Le polymino donne lieu à des productions qui montrent significativement que les enseignants distinguent mal condition nécessaire et condition suffisante.*

Sur le plan général du raisonnement, nous retenons également des productions sur ce problème que :

*Prouver une impossibilité est riche d'enseignements sur le plan de la preuve, en atteste la diversité des conceptions erronées sur le plan du raisonnement, générées notamment par la preuve de l'impossibilité du pavage si n est impair et le trou une case blanche :*
** penser que si un raisonnement par récurrence permet de prouver l'existence d'un objet dans certains cas, alors la preuve que, dans les autres cas, l'objet n'existe pas, doit pouvoir être établie par le même type de raisonnement ;*
** affirmer qu'une procédure (le découpage du polymino) conduit nécessairement à une autre, alors que celle-ci n'est pas nécessaire ;*
** affirmer qu'une propriété vraie sur deux objets (l'impossibilité du pavage) l'est*

*aussi sur l'objet constitué par la réunion des deux ;*
** penser que l'on peut prouver qu'un objet n'existe pas en exhibant divers objets qui ne conviennent pas.*

Enfin sur l'aspect formel de la preuve :

*Le problème permet des productions où il s'avère que l'accumulation d'arguments détaillés et le formalisme nuisent à la compréhension, alors que quelques schémas commentés pourraient suffire à établir une preuve.*

## 6. En conclusion, pour la formation

L'institutionnalisation sur ce problème se fait sur le même mode que celle qui concerne le *Centre de secours*. Nous ne la détaillons pas à nouveau. Nous récapitulons seulement dans un tableau (du même type que celui qui conclut le chapitre précédent sur *le Centre de secours*) les différents éléments décrits précédemment en vue de la formation :

| *Les différentes observations à pointer* | *Les éléments relatifs à ces observations qui sont à préciser en formation* | *Les composantes de conception qui pourraient évoluer* |
|---|---|---|
| *Le refus d'entrer dans le problème* | ** Evoquer les blocages ressentis.*<br>** Cela permet d'envisager, d'une part, la position de l'élève qui se bloque parce qu'il est devant un problème nouveau, d'autre part, la difficulté à conduire les élèves à une activité réellement mathématique si l'on refuse pour soi-même cette pratique.* | |
| *Des représentations différentes du problème* | ** Citer les différentes représentations adoptées.*<br>** Envisager la posture de l'élève face à la généralité, parler de la figure et de l'implicite qui lui est attaché.* | *nonV (non enjeu de Vérité)* |
| *La condition « n impair » nécessaire à l'existence d'un pavage*<br>*L'étude des cas particuliers (notamment le cas où n = 3)* | ** Montrer que ces deux résultats sont donnés aussi par les élèves, montrer des copies d'élèves.*<br>** Un résultat est une solution particulière, une stratégie locale ou globale, une preuve locale ou globale.*<br>** Examiner des preuves relatives à ce cas, de la part d'enseignants ou d'élèves sur le plan de la forme, de la présence de trous, des différents types de preuve qui sortent du contrat usuel.*<br>** L'importance de préciser le statut des énoncés : conjecture, affirmation sans preuve…*<br>** Une conjecture ouverte est aussi un élément qui atteste de l'entrée dans le processus de preuve.*<br>** L'expérimentation doit avoir un statut dans les écrits des élèves.* | *nonV*<br>*nonT (non Texte)*<br>*nonP (non Pas)*<br>*nonR (non Rationalité)*<br>*nonSExp* |
| *Dans le cas d'un polymino de taille n impaire, le traitement du cas général de la position du trou* | ** Preuve de la condition nécessaire à l'existence d'un pavage dans le cas n impair.*<br>** Preuve de la condition suffisante d'existence d'un pavage dans le cas n impair.*<br>** Différents types de preuve, notamment le raisonnement par induction* | *nonR* |

## CHAPITRE 12
## LE PENTAGONE

*« La plupart des mathématiciens ne regardent la géométrie de Lobatchevsky que comme une simple curiosité logique ; quelques-uns d'entre eux sont allés plus loin cependant. Puisque plusieurs géométries sont possibles, est-il certain que ce soit la nôtre qui soit vraie ? »*
*(Henri Poincaré, La science et l'hypothèse, 1891)*

*Le problème*

*Somme des angles d'un pentagone*.

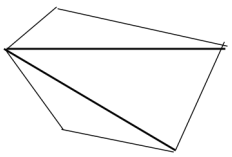
Il est posé exactement sous cette forme, sans autre précision. Il y a d'abord à reconnaître une question.

### ANALYSE MATHEMATIQUE DU PROBLEME

### 1. Une première approche qui permet de découvrir que la preuve n'est pas évidente

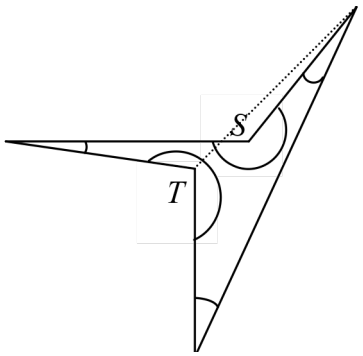
Ce problème est résolu depuis longtemps, enfin c'est ce qu'on pense au départ.

Cependant, une fois passé le moment où l'on se dit que c'est évident et qu'il n'y a qu'à découper le pentagone en trois triangles pour montrer que cette somme est de 540 degrés ou $3\pi$ radians, on peut se demander si cette preuve est générale. Comment réalise-t-on cette *triangulation* du pentagone ? On choisit un sommet, on considère les deux diagonales qui contiennent ce sommet et l'on obtient les trois triangles de la partition[125].

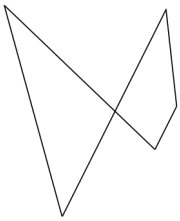


Des questions se posent alors sur l'existence de cette triangulation. Peut-on choisir n'importe quel sommet au départ ? Autrement dit, les diagonales qui contiennent n'importe lequel des sommets du pentagone sont-elles toutes deux incluses dans l'*intérieur* du pentagone ?

[125] Nous allons le voir, cette preuve est fausse dans le cas général.




Il semble alors important d'évoquer la convexité du pentagone. Si le pentagone n'est pas convexe, le sommet à partir duquel on découpe le pentagone en trois triangles ne peut pas alors être n'importe lequel parmi les cinq sommets du pentagone. Celui de la figure ci-contre ne peut pas être triangulé[126] « en partant du sommet *T* », puisqu'il existe au moins une diagonale issue de *T* qui ne reste pas à l'intérieur du pentagone.



Et si l'on envisage que les côtés puissent se croiser ? Qu'est-ce alors que l'*intérieur* du pentagone ? Qu'est-ce que l'on considère comme un *angle* du pentagone ? Le pentagone de la figure ci-contre compte-t-il cinq ou sept angles ?

Le point de vue naïf sur l'angle, adopté pour traiter le cas des polygones non croisés ne fonctionne plus puisqu'il utilise la notion d'*intérieur* et que, pour un pentagone croisé, il n'y a pas intérieur. Nous verrons plus loin la difficulté engendrée par ce point dans les productions des enseignants. L'angle est un objet mathématique difficile. Citons Choquet (1964) :

*La notion d'angle est sans doute celle qui soulève le plus de discussions et de difficultés dans l'enseignement de la géométrie.*
*Les difficultés sont dues, en partie à une terminologie mal précisée, en partie à un mélange confus de plusieurs notions mathématiques, et aussi à la véritable difficulté mathématique de cette question.*
*Une première confusion vient de ce qu'on utilise le même mot « angle », pour désigner des concepts plus ou moins liés, mais néanmoins distincts : secteur plan, couple de demi-droites, mesure, etc* (Choquet 1964)

Dans la suite, nous confondrons d'ailleurs *angle* et « *sa* » *mesure en radians.*

Pour qu'une réponse soit apportée aux questions développées ci-dessus, il apparaît nécessaire de poser certaines définitions. Le mot de *pentagone* signifie étymologiquement « qui a cinq angles ». Dans un manuel de sixième (collection Multi-maths, 2005), on peut lire qu'« un pentagone est un polygone à 5 côtés » et qu'un « polygone est une ligne brisée fermée comportant au moins trois côtés ». Qu'est-ce qu'une *ligne brisée fermée* ? Celle-ci peut-elle se recouper ? Autrement dit, acceptons-nous de considérer des *pentagones croisés* ?

Plus généralement, nous pouvons traiter la somme des angles d'un polygone *P* quelconque à *n* sommets, sans avoir à distinguer s'il est croisé ou non. Nous proposons cette preuve dans un premier temps (paragraphe 3). Cette démonstration passe par la construction d'une définition de ce qu'on appelle un *angle de P*, ce qui est l'objet du paragraphe 2. Nous verrons que c'est cette absence de définition qui va

[126] Ceci est précisé plus loin.

faire obstacle dans les preuves proposées par les enseignants. Ces derniers abordant d'abord la preuve de la somme des angles d'un pentagone qui n'est pas croisé, nous donnons, dans un deuxième temps (paragraphe 4), une preuve de la somme des angles d'un polygone non croisé à *n* sommets. Elle met en jeu un découpage du polygone en triangles, dont nous prouvons l'existence.

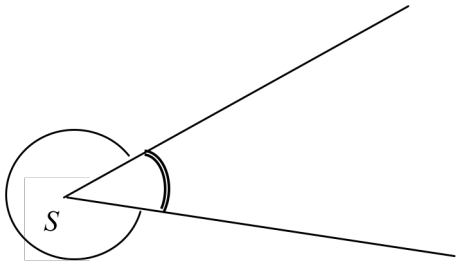
En séparant les polygones croisés de ceux qui ne le sont pas, nous travaillons sur des objets géométriques, qui sont différents, même si l'on peut considérer qu'ils peuvent être tous deux générés par une ligne brisée fermée. Cependant bien que cette séparation ne s'impose pas pour traiter le cas général, elle arrive assez naturellement lorsqu'on traite ce problème. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de donner différentes preuves, la première étant générale, la seconde incluant la preuve de l'existence d'une triangulation de tout polygone.

## 2. Quelques définitions nécessaires pour établir une preuve

On désigne par *n* un nombre entier supérieur à 3. On définit un *polygone P à n sommets* comme une courbe fermée constituée de la réunion de *n* segments[127] de droites, tels que chacun de ces segments ait ses extrémités en commun avec deux autres segments de cette courbe. Ces segments de droite qui constituent *P* s'appellent les *côtés*. Les extrémités de ces côtés sont les *sommets.* Deux sommets qui sont les extrémités d'un même côté sont dits *consécutifs*, de même que deux côtés qui ont un sommet en commun. Tout segment de droite dont les extrémités sont des sommets non consécutifs est appelé une *diagonale*.

Dans le cas où la courbe fermée qui constitue *P* est *simple* (c'est-à-dire dans le cas où elle ne se recoupe pas), elle sépare le plan en deux parties connexes dont une seule est bornée et sans trou. On peut alors considérer l'ensemble compact du plan, qui est délimité par *P* : son intérieur, connexe et sans trou, est appelé *l'intérieur de P*.

On définit un *angle de P* comme un angle en un sommet de *P*.

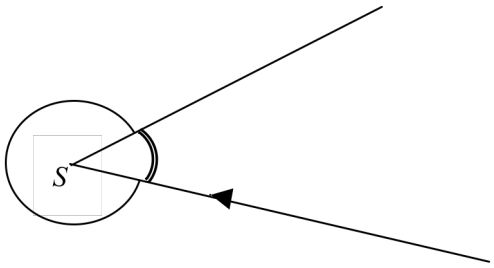



Or en un sommet *S* de *P*, on peut considérer deux angles. Dans le cas d'un polygone non croisé, on peut considérer *un angle en S à l'intérieur* de *P* et *un angle en S à l'extérieur de P* (dans la figure ci-contre, on ne peut pas savoir quel est *l'angle à l'intérieur* et quel est *l'angle à l'extérieur*). On peut choisir de définir *un angle en S* comme l'angle du plus petit cône affine issu de *S* qui contient l'intersection d'un voisinage arbitrairement

[127] Si l'on se donne 5 points du plan, distincts deux à deux, on peut obtenir 12 suites finies à partir de ces cinq points, donc 12 pentagones différents, suivant ce qu'on considère comme côtés du pentagone. En effet, si l'on nomme les points *A*, *B*, *C*, *D* et *E*, on a 5 ! (= 120) suites finies possibles formées de ces cinq lettres, mais 10 d'entre elles (5 choix possibles du point de départ et 2 choix possibles de sens de parcours) correspondent à la même ligne brisée (aux mêmes côtés). On a ainsi 120/10 pentagones différents.

petit de *S* avec l'intérieur de *P*.

Cette définition ne convient plus pour les polygones croisés puisque, dans ce cas, il n'y a plus ni intérieur, ni extérieur. Comment alors choisir entre les deux angles en *S* d'une autre manière (qu'en distinguant intérieur et extérieur) qui conviendrait aussi pour les croisés ?



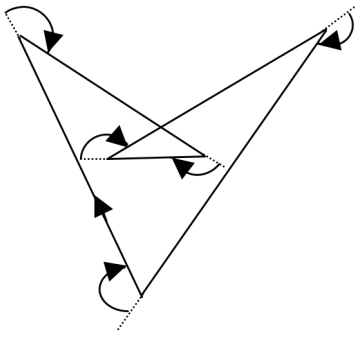

On envisage de décrire la ligne fermée qui constitue *P* après avoir choisi un des deux sens de parcours, cette idée de *parcours orienté* du polygone permettant ainsi d'envisager, en un sommet *S*, un *angle à droite* et un *angle à gauche*. On peut ainsi considérer que *l'angle*, marqué ci-contre par un double trait est *l'angle à droite en S*, dans le sens de parcours choisi. Ce serait l'*angle à gauche en S* si l'on choisissait l'autre sens de parcours. Cette distinction entre angle à droite et angle à gauche revient à celle entre intérieur et extérieur qui convient aux polygones non croisés. Autrement dit, cette nouvelle définition d'un angle en un sommet de *P* (avec choix d'un sens de parcours de *P* et choix d'un marquage à droite ou d'un marquage à gauche) permet de mettre en relation le point de vue naïf abordé au départ avec l'angle de la rotation opérée en ce sommet quand on parcourt le polygone.

Enfin une précision : dans toute la suite, nous confondons souvent *angle* et *mesure de l'angle en radians*, celle-ci étant considérée comme un nombre positif inférieur à $2\pi$ (celle qu'on obtient à l'aide d'un rapporteur). Ainsi l'expression, « la somme des angles d'un polygone *P* à *n* sommets », doit être comprise comme la somme des mesures des angles de *P*, au sens précisé.

## 3. La somme des angles d'un polygone *P* à *n* sommets

On désigne par *n* un nombre entier naturel supérieur à 3.

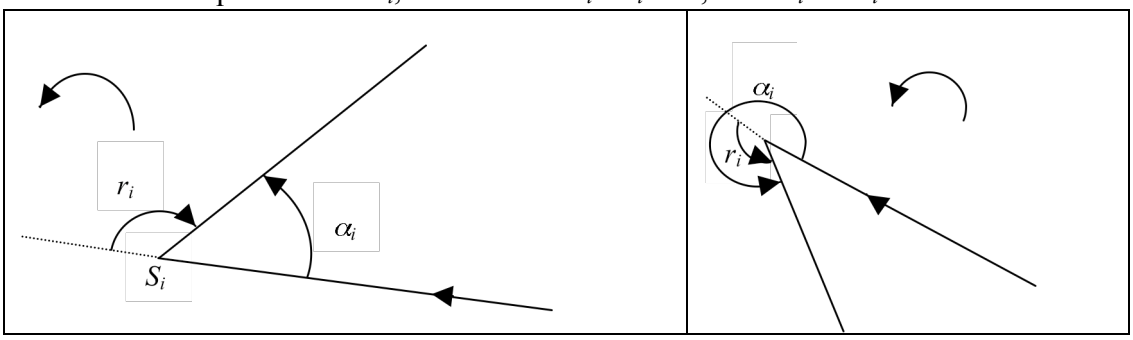
Si l'on part d'un sommet quelconque de *P* et qu'on revient à ce sommet après avoir parcouru *P* dans un sens choisi auparavant, on fait un nombre entier (positif) *p* de tours.
Par exemple, sur la figure ci-contre $p = 2$.



Ce nombre de tours ne dépend pas du sens de parcours choisi.

Pour un sens de parcours fixé, en chaque sommet $S_i$ (pour tout nombre entier $i$ compris entre 1 et $n$), on désigne par $\alpha_i$ la mesure[128] de l'*angle à droite*. On peut choisir une orientation du plan qui permette de compter positivement la mesure des angles $\alpha_i$. Or, en chacun des $n$ sommets $S_i$, on peut considérer la rotation qui a pour centre ce sommet $S_i$ et pour angle $r_i$ ($r_i$ est positif ou négatif). Ce sont ces angles de rotation qui sont indiqués sur la figure ci-dessus.

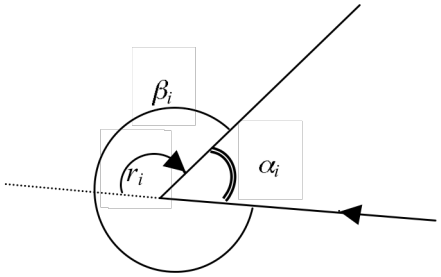
Pour chaque sommet $S_i$, on a donc : $\alpha_i - r_i = \pi$, donc $r_i = \alpha_i - \pi$.




La somme des $r_i$ est aussi le nombre de tours effectués quand on parcourt le polygone, soit $p \times 2\pi$. On a donc la relation :

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \pi) = \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad (1)$$
$$= \; p \times 2\pi$$

Si, tout en gardant le même sens de parcours, on choisit l'autre marquage des angles, c'est-à-dire si l'on désigne par $\beta_i$ la mesure de *l'angle à gauche en* $S_i$, on a alors :




$\alpha_i + \beta_i = 2\pi$, donc $\alpha_i = 2\pi - \beta_i$

Par suite : $\sum_{i=1}^{n}(2\pi - \beta_i - \pi) = p \times 2\pi$ (2)

Des relations (1) et (2), on obtient la *somme des angles* en fonction du nombre $n$ de sommets de $P$ et du nombre $p$ de tours effectués lors du parcours de $P$ :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = (n+2p)\pi \;\text{ et }\; \sum_{i=1}^{n}\beta_i = (n-2p)\pi$$

**Dans le cas particulier où le polygone est un pentagone**

On a $n = 5$.

[128] En radians et inférieure à $2\pi$

Le nombre $p$ de tours est 0, 1 ou 2.

Pour $p = 0$, la somme des angles est égale à $5\pi$.

Pour $p = 1$, ce qui est le cas des pentagones non croisés, la somme des angles est égale à $3\pi$ ou $7\pi$, selon les angles choisis. La valeur de $3\pi$ correspond aux *angles à l'intérieur* du pentagone.

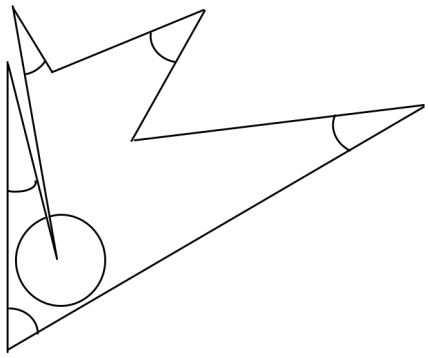
Pour $p = 2$, on obtient une somme de $\pi$ ou $9\pi$.

## 4. La somme des angles d'un polygone *P* non croisé à *n* sommets

La preuve donnée au paragraphe précédent inclut ce cas. Cependant le problème étant souvent abordé sous cet aspect d'un polygone non croisé, nous donnons une preuve dans ce cas.

Le nombre minimum de sommets d'un polygone est trois, un tel polygone est un triangle. Notre définition exclut les triangles *aplatis* puisque, dans le cas des polygones non croisés, la courbe $P$ est simple. Pour toute la suite de ce paragraphe, $P$ désigne un polygone non croisé à $n$ sommets ($n \geq 3$).

Une *triangulation* d'un tel polygone $P$ est un *découpage*[129] de $P$ en triangles d'intérieurs disjoints et dont les sommets sont des sommets de $P$. On dit qu'un polygone peut *être triangulé* s'il existe une triangulation de $P$.



Un *angle* de $P$ est considéré de manière naïve comme le suggère la figure ci-contre.

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à $\pi$ radians.

### La preuve qu'un polygone non croisé peut être triangulé, puis la somme des mesures de ses angles

On cherche à déterminer la somme des mesures des angles de $P$ (chaque mesure d'angle est un nombre positif inférieur à $2\pi$). Pour ce faire, nous allons prouver que $P$ peut être triangulé.

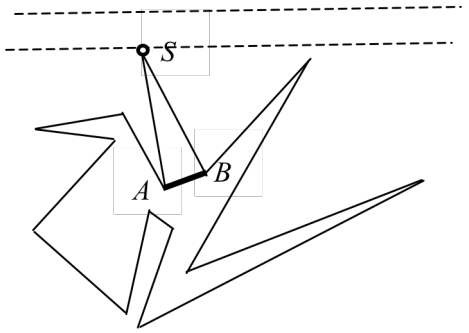
[129] Nous disons *découpage* au lieu de *partition* pour éviter le problème lié au fait que, dans la réunion de deux triangles d'intérieurs disjoints qui ont un côté commun, celui-ci « compte deux fois », autrement dit, l'intersection de deux tels triangles n'est pas vide, mais est constituée du côté commun.

L'existence d'une triangulation de $P$ en $k$ triangles ($k$ entier naturel) permet d'obtenir que la somme des mesures des angles de $P$ est égale à $k\,\pi$ radians, puisque la triangulation s'appuie sur les sommets de $P$.

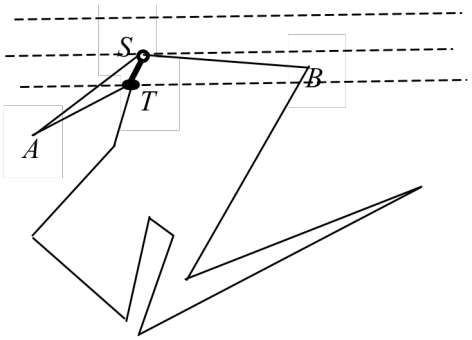
On le prouve par récurrence sur $n$.

L'étape d'induction repose sur la preuve que $P$ (pour $n \geq 4$) comporte toujours une diagonale $d$ qui est complètement contenue dans $P$[130]. En effet :

On considère une direction δ de droite, différente de toutes celles des droites qui contiennent les $n$ côtés de $P$ et des droites qui contiennent les sommets non consécutifs pris deux à deux. On balaie[131] le plan vers l'intérieur de $P$ suivant δ. Il y a nécessairement une droite de direction δ qui rencontre un seul sommet de $P$. On considère le premier sommet rencontré, soit $S$, ainsi que les deux sommets $A$ et $B$, consécutifs à $S$.




Si le segment [$AB$] est inclus dans l'intérieur fermé de $P$, [$AB$] (qui ne peut pas être un côté car $A$ et $B$ ne sont pas consécutifs[132]) est bien une diagonale de $P$ incluse dans $P$.




Sinon, [$AB$] n'étant donc pas inclus dans l'intérieur fermé de $P$, [$AB$] est nécessairement coupé par la frontière de $P$. Donc il existe au moins un sommet de $P$ à l'intérieur de $SAB$. On continue à balayer le plan vers l'intérieur de $P$ suivant la direction δ. On considère alors le (nouveau) premier sommet $T$ rencontré à l'intérieur de $SAB$, exceptés $A$ et $B$. Le segment [$ST$] est nécessairement inclus dans l'intérieur fermé de $P$ : sinon cela voudrait dire qu'il y a une droite de direction δ qui contient un morceau de la frontière de $P$, située entre la droite de direction δ qui passe par $S$ et la droite de

[130] $P$ est aussi l'intérieur fermé de $P$.

[131] On considère l'ensemble des droites qui ont pour direction $\delta$.

[132] Car $n > 3$ et $A$ et $B$ sont tous deux consécutifs à $S$.

direction δ qui passe par $T$ ; or ce morceau ne peut pas être un côté car aucun côté n'a pour direction[133] δ et ce ne peut pas être un sommet, sinon $T$ ne serait pas le *premier* rencontré après $S$ (sans compter $A$ et $B$). Donc [$ST$] est bien une diagonale de $P$ incluse dans $P$.

Dans tous les cas, on a démontré l'existence d'une diagonale incluse dans $P$.

Cette diagonale partage $P$ en deux polygones $P_1$ et $P_2$ qui ont moins de sommets que $P$. Soient $n_1$ et $n_2$ le nombre de sommets de $P_1$ et $P_2$ respectivement, on a $n = n_1 + n_2 - 2$. L'induction fonctionne tant qu'on a $n_1$ et $n_2$ supérieurs à 3, soit $n \geq 4$. Si $n_1$ et $n_2$ sont égaux à 3, $P_1$ et $P_2$ sont eux-mêmes des triangles, ils sont triangulés.

De ce qui précède, nous déduisons que $P$ possède une triangulation qui comporte $n - 2$ triangles, donc que la somme des mesures de ses angles est égale à $(n - 2)$ π radians, soit donc 3 π radians pour le pentagone non croisé.

## LES PRODUCTIONS D'ENSEIGNANTS

Nous avons recueilli soixante et une productions, dans six contextes différents. Certaines, transparents ou affiches, ont été rédigées en groupes de trois ou quatre personnes, d'autres ont été écrites individuellement après une recherche en groupe. Ces textes concernent environ cent quinze enseignants, en formation initiale ou continue.

Dans un premier temps, nous décrivons le contexte dans lequel nous avons recueilli ces productions, réparties en cinq classes. Nous reportons en annexe à ce chapitre les commentaires sur les productions de deux classes, qui permettent d'illustrer l'essentiel des résultats obtenus sur l'ensemble. De l'analyse de toutes les productions se dégagent deux types de conclusions, données dans le dernier paragraphe du chapitre :

- d'une part, des invariants dans les *attitudes*[134] des enseignants par rapport à ce problème, que nous pointons en différentes *observations* ; ceci nous amène à des résultats, indicateurs de conceptions des enseignants sur la preuve ;
- d'autre part, des éléments à institutionnaliser dans une perspective de formation.

Ces *tendances* dans les attitudes des enseignants sont générées par le problème lui-même, comme, par exemple, le comportement face à la contradiction, qui apparaît dès lors qu'on s'aperçoit que la somme des angles du pentagone varierait suivant certains angles ; d'autres renvoient davantage à la preuve en général. Nous les regroupons en catégories, une même production pouvant d'ailleurs être rangée dans plusieurs catégories. Chacune d'elles fait l'objet des paragraphes 2 à 6.

---

[133] plus exactement, aucun côté n'est contenu dans une droite de direction δ, par choix de δ.

[134] Au sens de manière d'envisager le problème, de position prise par rapport au problème.

## 1. Le contexte du recueil des productions

Que le temps alloué à la recherche du problème soit court (une demi-heure) ou plus long, cela importe peu par rapport à ce que nous souhaitons observer, qui est la démarche de preuve, plus particulièrement l'engagement dans la preuve, et le texte produit. Nous ne nous attendons pas à ce que le problème soit résolu et, comme nous l'avons déjà précisé, ceci est explicitement dit aux stagiaires.

### Les deux classes de la première expérimentation : PLC2-2005-G et PLC2-2005-C

Ce problème a été proposé la première fois, en mars 2005, dans le cadre d'un module de formation de professeurs[135] stagiaires de lycée et collège, intitulé « Raisonnement – Démonstration », d'une durée de dix heures (séparées en trois sessions). Cette formation a eu lieu à l'IUFM[136], sur le site de Grenoble[137] (vingt-quatre stagiaires, dont la classe des productions est désignée par PLC2-2005-G) et sur le site de Chambéry[138] (vingt-quatre stagiaires, dont on note PLC2-2005-C la classe des productions).

Les stagiaires devaient chercher ce problème par groupes de trois ou quatre, et rédiger soit une affiche (pour la classe de Grenoble), soit un transparent (pour la classe de Chambéry). Le temps imparti à la recherche et à la rédaction était prévu de trente minutes, suivi d'une mise en commun des différentes productions.

### La classe PLC2-2006-G

Elle comporte cinq productions individuelles de professeurs stagiaires de l'enseignement secondaire en formation initiale, rédigées après une recherche par groupes (deux groupes[139]), dans le cadre d'une formation sur la preuve (mars 2006). Il était demandé une rédaction individuelle d'un texte mettant en évidence la démarche, les résultats obtenus, les pistes suivies même si elles n'avaient pas abouti ; ce texte devait s'adresser à des personnes qui n'auraient pas nécessairement cherché[140] le problème.

---

[135] Il s'agit de professeurs de l'enseignement secondaire, certifiés ou agrégés.

[136] Institut Universitaire de Formation des Maîtres

[137] La lettre G signifie que la formation avait lieu à Grenoble.

[138] La lettre C signifie que la formation avait lieu à Chambéry.

[139] Les autres stagiaires du groupe avaient un autre problème à chercher : le Polymino ou le Centre de Secours.

[140] Il était ensuite demandé à l'ensemble des vingt stagiaires de faire en groupe une analyse de quatre productions, chacun des groupes étudiant des textes issus de la recherche d'un autre problème que celui qu'il avait cherché (Le Polymino ou bien le Centre de Secours), textes provenant de leurs collègues stagiaires ou bien d'élèves. Ils devaient relever dans ces textes tout ce qui se rapportait à la démarche de preuve.

**La classe PLC2-2006-C**

Cette classe est constituée de vingt-sept productions, rédigées individuellement après une recherche en groupe par des professeurs stagiaires en formation initiale. A la différence de la classe précédente, l'ensemble des stagiaires en formation devait chercher le même problème. Un des groupes a été filmé, nous y reviendrons plus loin. Le reste du scénario de formation (mars 2006) était le même que pour la classe précédente.

**La classe PLC2-06/07-G**

La trentaine d'enseignants concernés sont des professeurs stagiaires en formation initiale (octobre 2006). Le problème a été cherché par groupes pendant une demi-heure, dans le cadre d'un module de formation sur la preuve, à Grenoble. Chaque groupe a produit une affiche. Lors de la séance suivante, les huit affiches ont été exposées toutes ensemble et il a été demandé d'analyser chacune de ces productions en remplissant une grille, qui a été relevée : chaque stagiaire devait répondre par « oui » ou « non » à chacune des questions suivantes, pour chacune des huit affiches :

- la question est posée de la définition d'un angle d'un pentagone ;
- une rédaction formelle justifie le résultat dans un cas simple ;
- la question est posée de l'existence d'un point qui permet une partition du pentagone en triangles ;
- les différents cas de pentagones sont évoqués ;
- le statut des affirmations écrites est clair : conjecture, résultat prouvé ;
- il y a au moins une affirmation qui n'est pas prouvée ;
- il y a incohérence dans ce qui est considéré comme un angle d'un pentagone ;
- il y a au moins une affirmation fausse ;
- le résultat concernant la somme des angles d'un pentagone est démontré.

**La classe FC2006**

Cette classe est constituée de huit textes, rédigés individuellement après une recherche en groupe, par des enseignants expérimentés en formation continue sur la démonstration. Le scénario (janvier 2006) est le même que pour la classe PLC2-2006-G.

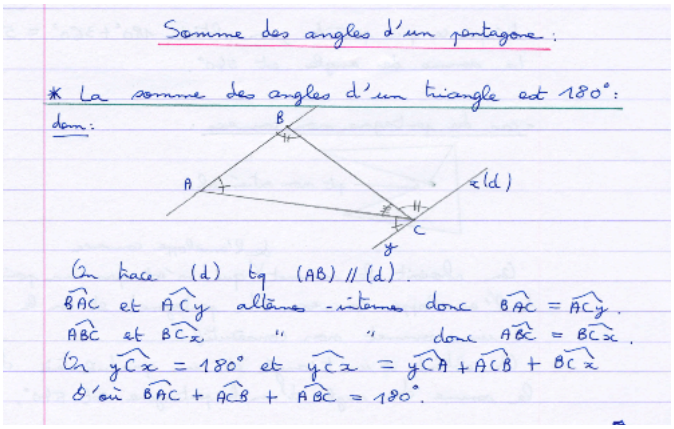
Les textes rédigés individuellement sont plus représentatifs des conceptions personnelles des enseignants. Ils sont à privilégier pour une situation de formation. Le travail en groupe peut permettre cependant un travail plus riche et évite que certaines personnes ne se retrouvent en difficulté face au problème.

Dans ce qui suit, il s'agit de relever des éléments, des observations qui donneront lieu à une institutionnalisation sur la preuve et son enseignement, dans le contexte du problème, mais aussi d'une manière plus générale, en les mettant en regard des conceptions qui sont ainsi mises à jour.

## 2. Une première tendance : l'aspect formel de la preuve l'emporte sur le fond

Devant le problème de la somme des angles du pentagone, les enseignants se sentent en terrain connu. Cela les renvoie souvent à la somme des angles d'un triangle dont on étudie une démonstration au collège. Nous faisons l'hypothèse que, du fait qu'ils sont en formation sur la preuve, certains enseignants se sentent contraints de rédiger un texte comme ils le feraient pour leurs élèves, c'est-à-dire d'une façon qu'ils pensent très complète, avec les propriétés utiles. Peut-être s'imaginent-ils que le travail qui va suivre cette recherche va consister à éplucher les preuves produites, pointer les arguments qui manquent… Aussi détaillent-ils beaucoup la preuve des cas simples, notamment celle de la somme des angles du pentagone convexe ou de la somme des angles d'un triangle, tout ceci d'ailleurs au détriment du problème, qu'ils ne pensent pas à considérer dans sa généralité, comme nous le verrons plus loin. Beaucoup de ces textes, classés dans cette catégorie, suivent la règle du *on sait que-or-donc*. Nous mettons ce type de comportements en relation avec les composantes de conception $P$[141] et $T$[142] (qui engendrent la *règle du on sait-que-or-donc* et *la règle des petits pas* ).

Nous avons noté ces éléments dans les productions PLC2-2005-G-1, PLC2-2005-G-6, PLC2-2005-G-7 et PLC2-2005-C-1, qui figurent en annexe. Voici ci-contre un autre exemple, extrait de PLC2-2006-C-1 ; il donne une preuve relative à la somme des angles d'un triangle. L'aspect formel est tout à fait visible. La figure proposée pourrait suffire en tant que preuve, mis à part le parallélisme de (*d*) et (*AB*), qu'on ne traduit pas par un codage. Le texte qui suit la figure n'apporte aucun élément nouveau.



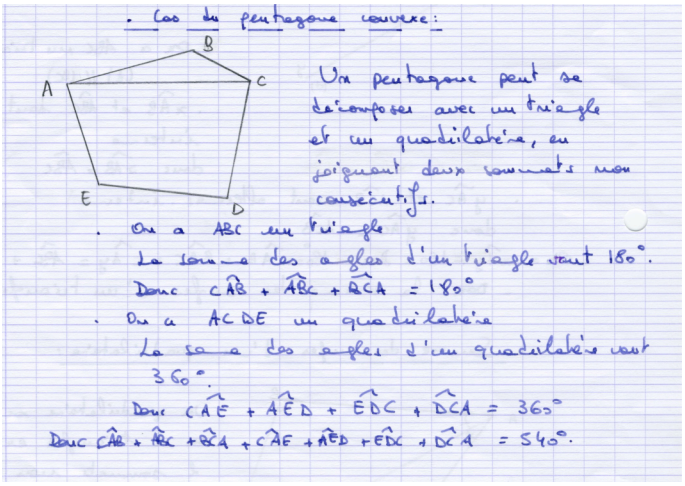

Nous relevons ainsi dans cette tendance deux comportements, d'une part, le fait de rédiger en suivant la règle du *on sait que-or-donc* ou celle des *petits pas*, d'autre part, celui qui consiste à donner une preuve détaillée d'un cas simple (la somme des angles d'un triangle, d'un quadrilatère, d'un pentagone régulier ou convexe). Nous désignons ces éléments respectivement par *Triangle*, *Quadrilatère*, *Pentagone Régulier* et *Pentagone Convexe*, pour désigner que des preuves très détaillées sont données pour le cas du triangle ou du quadrilatère ou du pentagone régulier ou du pentagone convexe. Nous signalons par ailleurs (dans le tableau qui suit) la présence dans la production d'une preuve où l'aspect formel est très présent.

---

[141] Une preuve est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse-règle - conclusion. La preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.

[142] Une preuve est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.

Nous en avons une autre illustration dans l'extrait qui figure ci-contre (PLC2-2006-C-4). La démonstration concernant le pentagone convexe est aussi très détaillée, mais la question du choix du sommet à partir duquel on fait le partage en un triangle et un quadrilatère n'est pas soulevée (nous y revenons dans la catégorie suivante). Dans le tableau ci-dessous, nous signalons cet extrait par *Pentagone Convexe* et *L'aspect formel est apparent.*




Ce tableau aide à dresser un bilan de cette première catégorie. Rappelons que le nombre total de productions est de soixante et un (qui concernent environ cent quinze personnes) :

*Tableau n°1*

| *Ce qui est simple est très détaillé* | *Triangle* | *Quadrilatère* | *Pentagone Régulier* | *Pentagone Convexe* | *L'aspect formel est apparent* |
|---|---|---|---|---|---|
| *PLC2-2005-G* | *1, 2* | *2* | | *3, 1, 4, 5, 6, 7* | *1, 5, 6, 7* |
| *PLC2-2005-C* | | | | *1, 2* | *1* |
| *PLC2-2006-C* | *1, 3, 4, 12, 13, 14* | *1, 4, 13, 14* | *6, 8, 9* | *2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27* | *1, 4, 6, 12, 14, 19* |
| *PLC2-2006-G* | | | *5* | *1, 2, 3, 4, 5* | *4* |
| *FC-2006* | | | | *2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* | *2, 3* |
| *PLC2-06/07* | | | | *1, 3, 4, 6* | *4* |
| *TOTAL* | *8* | *5* | *4* | *42* | *15* |

A partir de ce tableau, on peut déterminer le nombre de productions qui éprouvent le besoin de traiter, de manière détaillée, au moins un cas très simple, autre que celui du pentagone convexe, soit onze, sur un total de soixante et une, soit 18%.

Le cas du pentagone convexe est très détaillé (mais nous verrons qu'il reste néanmoins des trous dans la preuve), dans quarante-deux productions sur soixante et une, soit près de 69%. Nous disons même que ces preuves sont trop détaillées par comparaison à celles qu'on trouve dans les cas plus délicats des pentagones non convexes, qui sont très elliptiques.

L'aspect formel de la preuve se retrouve dans quinze textes sur soixante et un, soit presque 25% : ceci montre la prégnance du contrat didactique usuel relatif à la preuve, même en dehors de la classe. Il apparaît ainsi la difficulté de séparer les

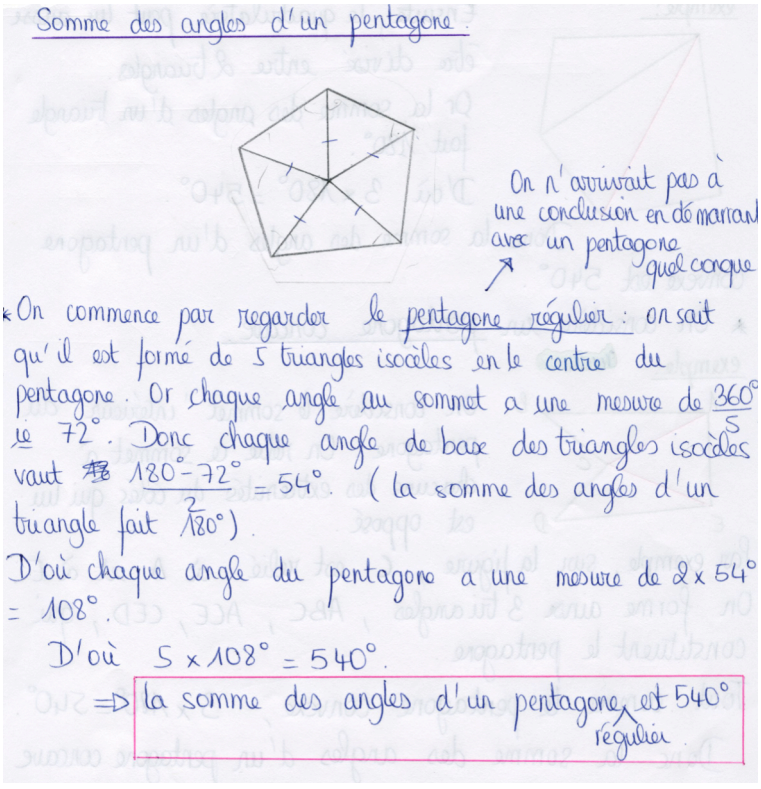
conceptions relatives à la preuve et celles qui ont trait à son enseignement : elles sont très imbriquées.

On peut mettre ces résultats en relation avec le tableau suivant, qui donne une idée du *degré de traitement du problème*, si l'on peut dire : sont répertoriés deux ensembles, d'une part, les textes qui ne traitent que le cas du pentagone convexe, d'autre part, ceux qui ne traitent aucun cas de pentagones croisés (le premier ensemble étant inclus dans le second).

*Tableau n°2*

| *Etude de différents cas de pentagones* | *Seul le cas du pentagone convexe est étudié* | *Aucun pentagone croisé n'est étudié* |
|---|---|---|
| *PLC2-2005-G* | *1, 3, 7* | *1, 3, 7* |
| *PLC2-2005-C* | *1* | *1* |
| *PLC2-2006-C* | | *1, 3, 4, 6, 9, 13, 14* |
| *PLC2-2006-G* | | *2, 3* |
| *FC-2006* | | *1, 2, 3, 4* |
| *PLC2-06/07* | *2, 6* | *2, 4, 5, 6, 7* |

On s'aperçoit ainsi que, sur ces quinze productions qui mettent en avant l'aspect formel de la preuve, dix n'envisagent pas du tout le cas d'un pentagone croisé et trois (qui sont des productions de groupe, ne l'oublions pas, c'est-à-dire qui concernent au moins quinze enseignants) ne traitent même que le cas du pentagone convexe. Ceci appuie l'hypothèse selon laquelle l'aspect formel de la preuve masque un certain vide (conscient ou non chez les auteurs des preuves) au niveau du sens du problème et au niveau épistémologie de la preuve.




Enfin, l'accumulation d'arguments pour traiter des cas simples pose vraiment la question du *niveau de preuve*. A qui s'adresse une preuve, comme celle qui figure ci-contre (PLC2-2006-C-6) ? Cet extrait permet aussi de vérifier l'hypothèse déjà formulée ci-dessus : ce *vide au niveau de la recherche* est d'ailleurs signalé par l'auteur, dans la remarque rajoutée au bout de la flèche qui part de « pentagone régulier ».

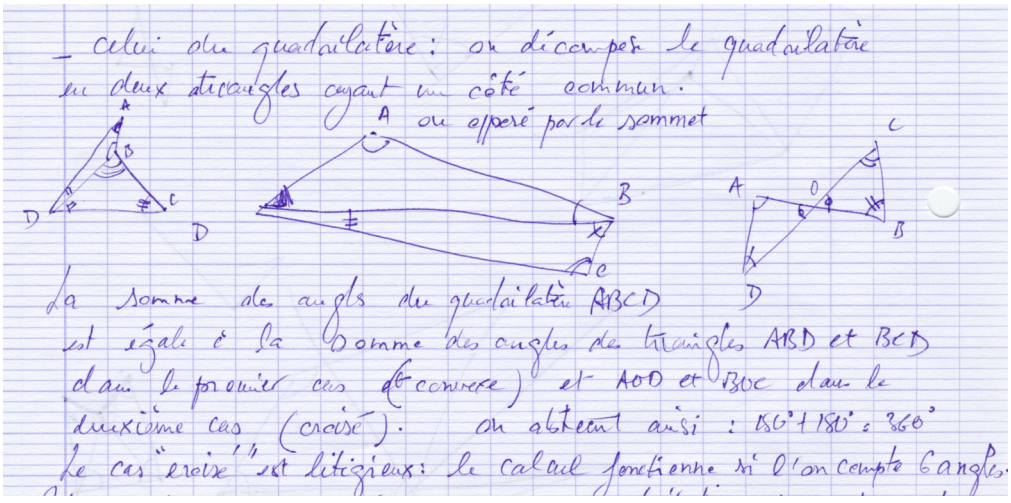
Ainsi une part non négligeable des enseignants donnent des preuves formalisées très (voire trop) détaillées, dans des cas très simples. Il semblerait que l'aspect formel de la preuve masque un certain vide au niveau du sens du problème et au niveau épistémologie de la preuve. Ceci atteste de

la prégnance du contrat didactique usuel relatif à la preuve, même en dehors de la classe. Il apparaît ainsi la difficulté de séparer les conceptions relatives à la preuve et celles qui concernent son enseignement : elles sont imbriquées.

### 3. Une deuxième tendance : absence de maîtrise de la preuve dans le cas où ce qu'il y a à prouver n'est pas difficile

On pourrait croire que, sous cet aspect formel fortement apparent et cette accumulation d'arguments formels, que nous venons de décrire, ces preuves *disent tout* ce qui est pertinent par rapport au problème, qu'elles sont rigoureuses. Il n'en est rien. Citons plusieurs erreurs, ce qui nous amène à distinguer cette deuxième tendance.

Accumuler les détails et omettre des arguments, nécessaires à la résolution du problème, sont des attitudes contradictoires dans l'écriture d'une preuve. Nous voulons montrer que, même dans des cas simples, elles coexistent dans une même production. C'est en effet le traitement des cas simples qui est le facteur commun des comportements que nous rangeons dans cette même catégorie. Les cas simples dont il est question ici sont d'ailleurs à voir sous deux aspects : ou bien il s'agit de cas particuliers, étudiés dans la voie d'une généralisation (étudier le cas du triangle, puis « celui » du quadrilatère, puis « celui » du pentagone, dans l'idée d'une généralisation possible à la somme des angles d'un pentagone, voire d'un polygone), ou bien il s'agit seulement du cas du pentagone convexe, le problème n'étant vu que sous ce seul aspect.



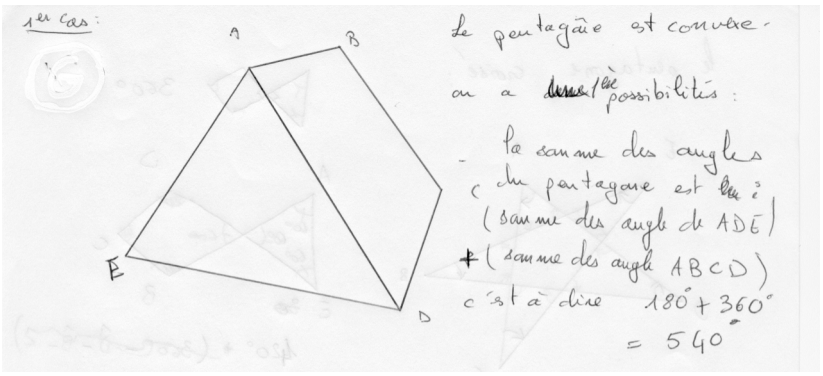

Commençons par les affirmations fausses dans les cas simples. La production ci-dessus (PLC2-2006-C-13) aborde le cas du quadrilatère dans un esprit de généralisation à la somme des angles d'un pentagone. Ceci est annoncé dès le début

du texte par la phrase : « On a considéré deux énoncés[143] plus simples pour parvenir au cas du pentagone ». La plupart des preuves relatives au cas « du quadrilatère » oublient le cas du quadrilatère croisé. Et dans les quatre[144] textes où ce cas est traité, la preuve prend en compte six angles : aux quatre angles « naturels » du quadrilatère s'ajoutent deux angles opposés par le sommet, au croisement des côtés. Or s'agit-il de deux angles du quadrilatère ? Ainsi l'erreur dans cette preuve (déjà relevée sous la même forme et dans le même esprit de généralisation dans PLC2-2005-G-2) consiste à dire que la somme des angles d'un quadrilatère croisé est égale à 360 degrés parce qu'elle est la somme des angles des deux triangles « opposés par le sommet » qui apparaissent.

Cette erreur est complètement liée au *trou* qui se situe au niveau de l'existence de la partition de tout quadrilatère en deux triangles. Dans le cas du quadrilatère convexe, c'est le fait que les deux triangles en question ont les mêmes angles que le quadrilatère de départ, qui justifie que l'on additionne la somme des angles de chacun des triangles. Le cas du quadrilatère croisé ne peut pas être étudié de la même façon. Il apparaît déjà la nécessité de définir ce que l'on appelle un *angle* du quadrilatère croisé, mais le milieu ne renvoie pas un message de contradiction suffisamment fort puisqu'on trouve le résultat attendu de 360 degrés. La dernière phrase de l'auteur marque néanmoins que cela lui semble « litigieux », mais il n'y a pas d'autre élément de preuve de ce résultat. Nous verrons plus loin que le même type d'erreur dans le cas d'un pentagone croisé donne lieu à une formule inattendue qui montre de manière plus flagrante la contradiction.

Une autre affirmation fausse, qui apparaît dans PLC2-2006-C-4, par exemple, consiste à dire « qu'un quadrilatère se décompose en deux triangles en joignant deux sommets consécutifs. » Dans ce cas, c'est le cas du quadrilatère croisé qui est complètement absent et l'existence de la partition qui n'est pas questionnée.

L'absence d'interrogation au sujet de l'existence d'un découpage du pentagone en un triangle et un quadrilatère ou en trois triangles, déjà signalée dans les productions présentées au début du chapitre, est très largement partagée dans l'ensemble des productions, comme nous le verrons dans le tableau récapitulatif ci-dessous. En voici une illustration (PLC2-2006-C-23).




Le tableau ci-dessous précise les chiffres concernant l'absence de questionnement par rapport à une « partition » du pentagone

[143] Les deux énoncés plus simples en question sont la somme des angles d'un triangle et la somme des angles d'un quadrilatère.

[144] PLC2-2005-G-2, PLC2-2006-C-1, PLC2-2006-C-12, PLC2-2006-C-13

convexe : quarante productions sur cinquante-trois, soit les trois quarts environ.

*Tableau n°3*

| *La question de l'existence d'une partition du pentagone convexe n'est pas posée* | |
|---|---|
| *PLC2-2005-G* | *1, 4, 5, 6, 7* |
| *PLC2-2005-C* | *1, 2* |
| *PLC2-2006-C* | *2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 27* |
| *PLC2-2006-G* | *1, 2, 3, 4, 5* |
| *FC2006* | *2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* |
| *PLC2-06/07* | *1, 3, 4, 6* |
| *Total* | *40* |

On peut mettre les résultats de ce tableau en regard de ceux du tableau n°1, notamment de ceux qui sont rappelés ci-dessous :

*Extrait du tableau n°1*

| *Ce qui est simple est très détaillé* | *Pentagone Convexe* | *L'aspect formel est apparent* |
|---|---|---|
| *PLC2-2005-G* | *3, 1, 4, 5, 6, 7* | *1, 5, 6, 7* |
| *PLC2-2005-C* | *1, 2* | *1* |
| *PLC2-2006-C* | *2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27* | *1, 4, 6, 12, 14, 19* |
| *PLC2-2006-G* | *1, 2, 3, 4, 5* | *4* |
| *FC2006* | *2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* | *2, 3* |
| *PLC2-06/07* | *1, 3, 4, 6* | *4* |

On remarque que toutes les productions du tableau n°3 sont déjà répertoriées dans le tableau n°1, parce qu'elles montrent des preuves où ce qui est simple est très détaillé ou parce qu'elles sont très formelles. Il apparaît ainsi nettement que cette apparence de preuves « très bien rédigées » cache au moins un élément essentiel de la preuve, l'existence d'un partage du pentagone convexe en polygones plus simples. On pourrait dire que la question de l'existence de ce partage n'est pas posée parce qu'elle est évidente : tout pentagone convexe peut[145] être découpé en considérant deux diagonales issues toutes les deux de n'importe lequel de ses sommets.

Nous étudions donc cette question dans le cas du pentagone non convexe et non croisé. Le tableau ci-dessous montre bien que la question de l'existence d'un partage de ce type de pentagone est peu prise en compte. Rappelons que, dans ce cas, il peut y avoir un ou deux sommets à l'intérieur de l'enveloppe convexe des cinq points et que le sommet à privilégier, comme même extrémité des deux diagonales utiles à la décomposition du pentagone en trois triangles, ne peut pas être n'importe lequel des cinq sommets du pentagone.

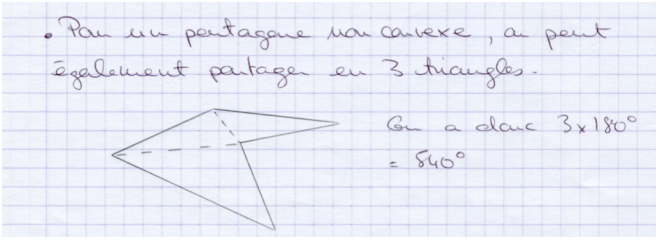
[145] Voir le chapitre consacré à l'analyse mathématique du problème.

*Tableau n°4*

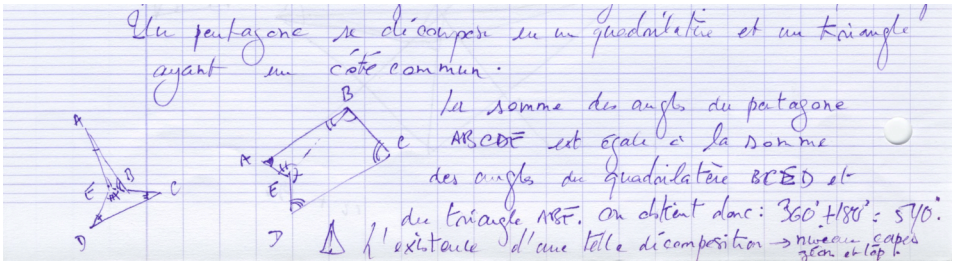
| *Existence d'un partage en triangles dans le cas du pentagone non convexe et non croisé* | *L'existence de la partition est au moins évoquée* | *La question de l'existence de la partition n'est pas posée* |
|---|---|---|
| *PLC2-2005-G* | | *2, 5, 7* |
| *PLC2-2005-C* | | *2, 3, 4, 5* |
| *PLC2-2006-C* | *1, 9, 10, 12, 13, 14* | *2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24* |
| *PLC2-2006-G* | | *2, 3, 5* |
| *FC2006* | | *1, 2, 3, 4* |
| *PLC2-06/07* | | *1, 4, 5, 7* |
| *Total* | *6* | *35* |

Il n'y a que quarante et une productions répertoriées dans ce tableau, les vingt qui manquent par rapport au total de soixante et un sont celles qui n'évoquent pas le cas du pentagone non convexe et non croisé. Et sur ces quarante et un textes, trente-cinq, soit 85%, ne prennent pas en compte la question de l'existence de la triangulation.

La plupart des textes qui proposent le cas du pentagone non convexe et non croisé donnent un dessin avec un découpage, comme on le voit dans l'extrait ci-dessous de PLC2-2006-C-2 :




les cas où deux sommets sont intérieurs à l'enveloppe convexe de l'ensemble des sommets ne sont pas du tout présents. Et lorsque l'un de ces cas est évoqué, il l'est souvent de façon très succincte, comme dans la production PLC2-2006-C-13, ci-dessous : il s'agit de l'étude générale du pentagone, qui est représenté d'emblée comme non convexe. Le choix du sommet intéressant pour la partition n'est pas envisagé. Celui-ci, nous l'avons vu, doit satisfaire à un critère : il faut, et il suffit, que la diagonale qui contient ce sommet soit incluse dans l'intérieur du pentagone (côtés compris), pour que ce sommet soit reconnu comme pertinent pour le partage.



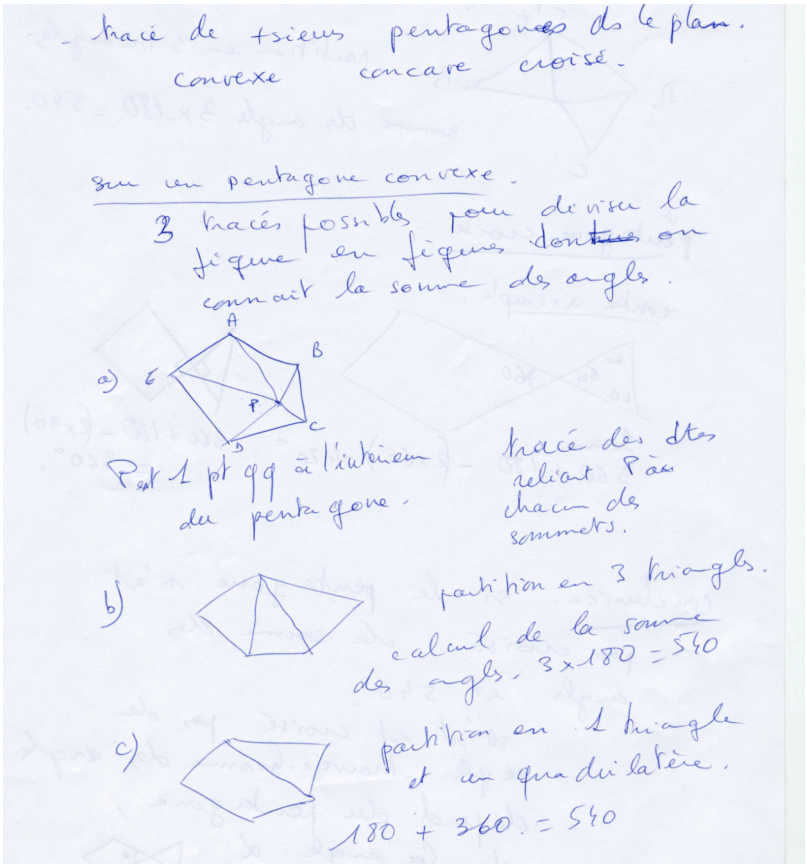

L'auteur signale cependant, tout en bas de la page, que l'existence d'une telle décomposition relève du niveau CAPES, géométrie et topologie.

Ainsi la plupart des preuves dans les cas simples, qui semblent formellement détaillées, comportent des trous et des affirmations fausses.

## 4. Un troisième type d'observations : la redondance, le rapport dessin/figure

On peut se demander ce qui justifie le classement dans une même catégorie de la redondance et de la prise en compte d'objets du monde sensible. Nous explicitons ci-dessous ce que recouvrent ces mots, mais nous émettons l'hypothèse que la présence de ces éléments dans les productions est liée à la consigne donnée aux enseignants, qui était de faire état de la recherche du problème, de faire une sorte de *narration de recherche*, comme c'est d'ailleurs écrit en titre dans PLC2-2006-C-8.

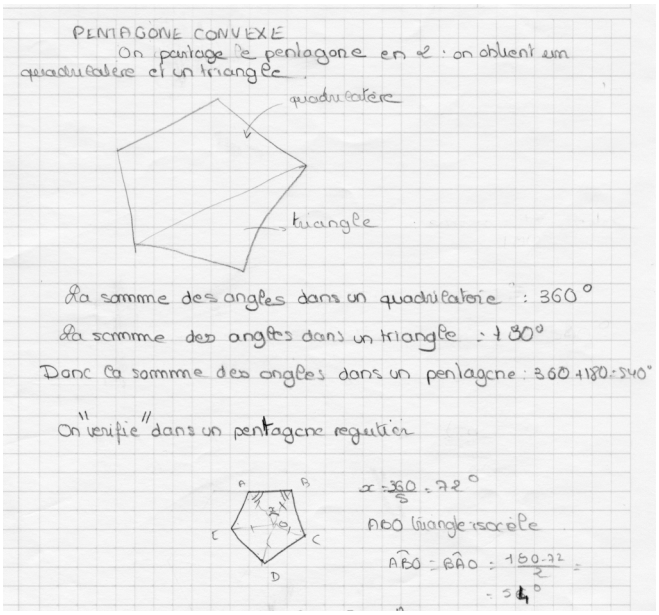
Nous avons déjà parlé des preuves très détaillées, qui relevaient de la première catégorie, mais il ne s'agissait pas de preuves où la redondance était manifeste. Dans ces preuves, les arguments n'étaient pas triés en fonction de leur pertinence, tout était dit *sur le même plan*. Par redondance, c'est autre chose que nous voulons dire. Nous avons déjà dégagé (voir chapitre 3) une composante de conception relative à cette redondance, (*SV- Suite de Vérités)* qui consiste à considérer comme systématiquement correcte une preuve, de type raisonnement déductif, formée d'une suite d'implications dont les hypothèses et les conclusions sont toutes vraies, sans souci de sélectionner ce qui est strictement utile au raisonnement. *En dire trop dans une preuve* n'est pas considéré comme une erreur par les enseignants qui fonctionnent sous cette conception. C'est un des points essentiels de la différence entre la preuve en mathématiques et une argumentation en français ou en philosophie. C'est aussi un point important qui révèle une différence entre une preuve et une narration de recherche. La redondance est acceptée dans celle-ci, mais c'est une erreur dans celle-là.




En voici une illustration dans l'extrait ci-contre (PLC2-2006-C-27). Le texte propose trois partages différents du pentagone convexe, l'un à partir d'un des sommets, en trois triangles ou en un quadrilatère et un triangle, un autre à partir d'un point intérieur au pentagone. Cependant n'est pas pour autant mentionnée la question de l'existence de ces partages. Il se peut

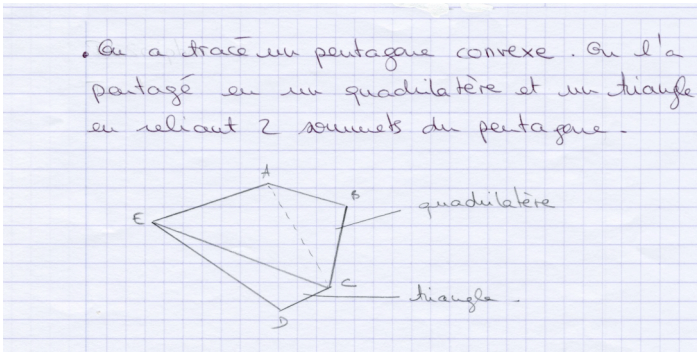
ici que l'auteur ait voulu transcrire sa démarche de recherche, c'est-à-dire faire une narration de recherche fidèle à ce qui s'est réellement passé. Ce qui nous conforte d'ailleurs dans cette hypothèse, c'est la première phrase du texte qui montre que l'auteur relate les différents événements de la recherche du groupe.

Nous ne disons pas qu'il faut changer la consigne pour que ce type de comportement n'apparaisse pas. Bien au contraire, cela donne l'occasion de marquer la différence entre une narration de recherche et une preuve. Et, pour l'enseignement de la preuve, c'est bien par la narration de recherche que nous proposons une entrée dans l'écriture d'un texte sur la résolution d'un problème, texte dont il va s'agir de déterminer les éléments à garder ou à éliminer pour en faire une preuve. Enfin, la redondance se manifeste sous une autre forme par rapport à la preuve relative au pentagone convexe. Quatre productions traitent en effet le cas du pentagone convexe, puis donnent une « vérification » dans le cas du pentagone régulier (PLC2-2006-C-8, PLC2-2006-C-16, PLC2-2006-C-19, PLC2-2006-C-26) : voici ci-contre un extrait de PLC2-2006-C-8.




Quel est le statut de cette vérification ? Si la preuve dans le cas général du pentagone convexe est valide, pourquoi vérifier dans le cas du pentagone régulier ? Ici encore, il y a redondance, et, tout comme dans l'extrait précédent, il se peut très bien qu'elle soit un effet de la consigne donnée, qui était de décrire la démarche.

Dans cette catégorie, outre la redondance, nous avons classé le rapport entre dessin et figure, qui se manifeste par la description d'actions effectuées sur des dessins. Ces objets du monde sensible sont à opposer aux objets théoriques (Dias & Durand-Guerrier 2005), sur lesquels reposent les preuves en géométrie. Par exemple, dans PLC2-2006-C-26, on lit : « Nous avons dessiné un pentagone « non croisé » non régulier. En reliant certains sommets, nous avons mis en évidence 3 triangles dans ce pentagone… », puis, plus loin, à propos d'un pentagone croisé avec cinq points de croisement, « Nous avons repassé en couleur certains triangles… ». Ce qui est en jeu ici, ce sont des dessins tracés sur une feuille, mis en couleur, beaucoup plus que les objets mathématiques qu'ils représentent. Ces éléments montrent, nous en faisons l'hypothèse, que ce texte donne une description du déroulement de la recherche, fidèle à la chronologie.




L'extrait ci-contre (de PLC2-2006-C-2) est aussi une illustration de ce point : le début du texte évoque des actions, le dessin est même accompagné d'une légende.

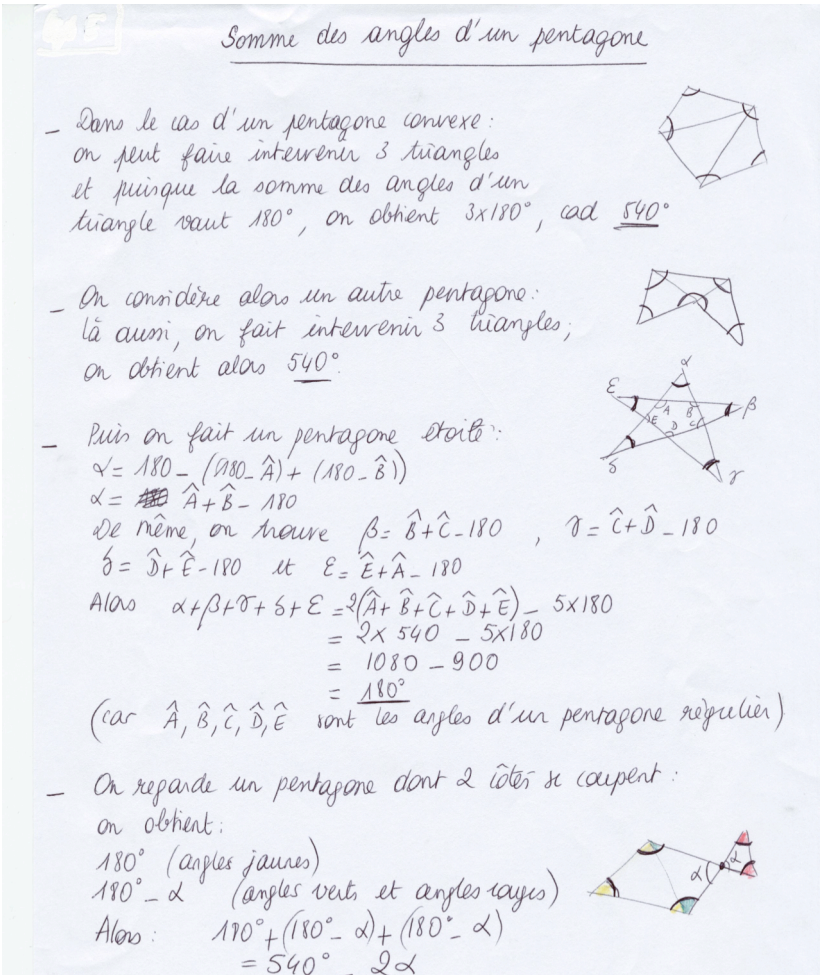
Ainsi certaines productions sont davantage des narrations que des écrits de recherche[146].

## 5. Un quatrième type d'observation : la considération de la généralité et le traitement des différents cas

Tout d'abord nous avons déjà évoqué que six productions (issues de groupes, donc qui ne concernent pas seulement six personnes) ne montrent pas une véritable entrée dans le problème puisqu'elles ne mentionnent que le cas du pentagone convexe. Ensuite nous avons répertorié vingt productions sur soixante et une, soit environ le tiers, qui ne mentionnaient pas du tout le cas des pentagones non convexes et non croisés. Ne pas envisager ce cas permet d'éviter la question de la triangulation du pentagone, qui n'est alors pas possible à partir de tout sommet. S'agit-il d'une stratégie pour éviter la difficulté ou bien le cas a-t-il été oublié ? Un peu plus du tiers (22/61) des textes exclut inconsciemment tout pentagone croisé. Le tableau ci-dessous donne les chiffres relatifs à l'étude des différents cas de pentagones croisés : 1, 2, 3 ou 5 points de croisement.

[146] Dont nous parlons en conclusion du chapitre 1.

Parmi les pentagones croisés, les deux cas concernant un seul et cinq points de croisement sont les plus étudiés. Ce dernier est même souvent le premier cas[147] de pentagone croisé étudié, comme dans l'extrait ci-contre de PLC2-2006-C-5 : il apparaît comme un prototype des pentagones croisés, dont la somme des angles fait 180 degrés. Aucune question n'est soulevée en rapport avec ce que l'on appelle un angle d'un pentagone : il est admis que les angles, marqués en plus foncé sur la figure ci-dessus, sont les cinq angles du pentagone. Toutes les productions qui traitent ce cas procèdent ainsi. Mais celui des pentagones croisés qui recueille le plus grand effectif (28) est le pentagone de forme « poisson » (il comporte un seul point de croisement et son enveloppe convexe est un pentagone), comme dans l'extrait ci-dessus, c'est la configuration qui *laisse perplexe*. Nous y revenons dans la catégorie suivante.




[147] Il vient facilement l'idée d'une étoile à cinq branches.

*Tableau n°5*

| *Etude de différents cas de pentagones* | *Seul est étudié le cas du pentagone convexe* | *Aucun pentagone croisé n'est évoqué* | *Pentagone avec un seul point de croisement* | *Pentagone avec 2 points de croisement* | *Pentagone avec 3 points de croisement* | *Pentagone avec 5 points de croisement* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *PLC2-2005-G* | *1, 3, 7* | *1, 3, 7* | *2, 5, 6* | *6* | | *4, 5* |
| *PLC2-2005-C* | *1* | *1* | *3, 4, 5* | | *4, 6* | *2, 3, 4, 5, 6* |
| *PLC2-2006-C* | | *1, 3, 4, 6, 9, 13, 14* | *5, 8, 10, 11, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27* | *5, 11, 15, 17, 21, 24* | *11, 15, 20, 21, 22, 25, 26* | *2, 5, 7, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26* |
| *PLC2-2006-G* | | *2, 3* | *4, 5* | *1* | *5* | *1, 4* |
| *FC2006* | | *1, 2, 3, 4* | *5, 7, 8* | *6,* | | *7* |
| *PLC2-06/07* | *2, 6* | *2, 4, 5, 6, 7* | *1, 8* | | | *1, 3, 8* |
| *Total* | *6* | *22* | *28* | *9* | *10* | *27* |

Nous faisons l'hypothèse que c'est à cause du manque de temps alloué à la recherche du problème que les autres cas de pentagones croisés sont nettement moins étudiés. Il est en effet assez naturel de penser d'abord à l'étoile à cinq branches, puis de se demander ensuite : « Et s'il y a un seul point de croisement ? ».

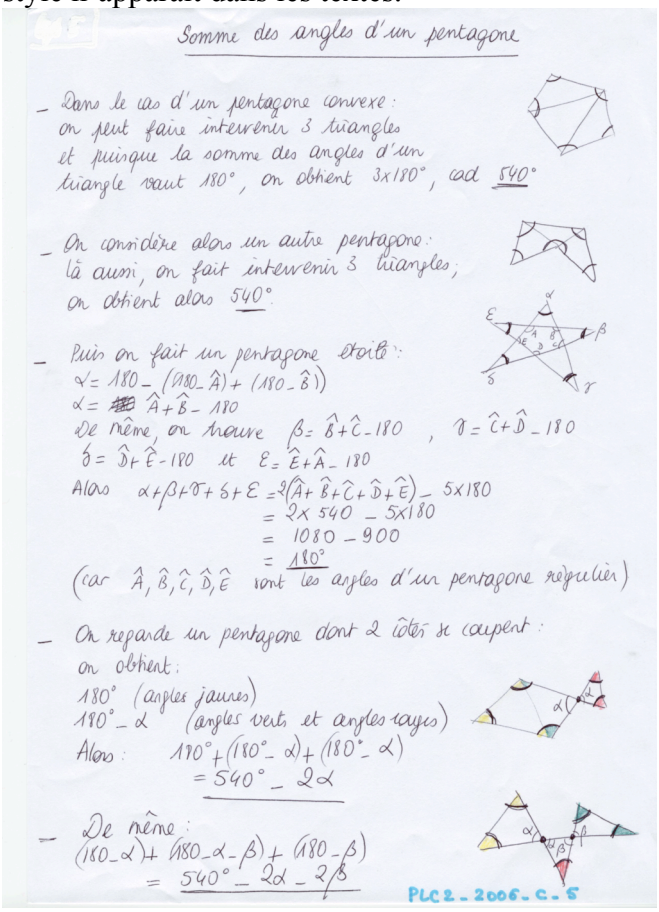
Ainsi nous pensons que l'étude des différents cas devrait répondre à une certaine logique de recherche, à défaut d'une logique de preuve. On ne procède pas à une disjonction des cas sans vérifier au moins que les cas sont disjoints. Le raisonnement par disjonction des cas n'est en fait pas toujours maîtrisé.

La production PLC2-2006-C-6 affirme que tous les cas ont été étudiés, alors qu'il en manque : il n'est question d'aucun pentagone croisé, mais, en plus, dans le cas non convexe et non croisé, il n'est pas envisagé que l'enveloppe convexe puisse être un triangle. L'auteur (et il n'est pas le seul) écrit : « On considère le sommet à l'intérieur[148] du pentagone », sans avoir le point de vue critique qui consiste à se demander « Est-ce que c'est toujours vrai qu'il y ait un sommet à l'intérieur du pentagone ? ». Adopter cette attitude critique par rapport à l'affirmation d'existence des objets aide à envisager d'autres cas possibles. Elle amène ici à envisager un contre-exemple à l'affirmation ci-dessus : le cas où l'enveloppe convexe est un triangle, il y a deux sommets à l'intérieur. Trois textes, tout de même, montrent des pentagones dont l'enveloppe convexe est un triangle : PLC2-2006-C-13, PLC2-2006-G-2, PLC2-2006-G-3.

[148] Ceci signifie (on le voit au dessin qui accompagne le texte) que l'on considère l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble des sommets du pentagone, qui n'est vue ici que comme un quadrilatère.

Un autre exemple de cette absence d'esprit critique par rapport aux affirmations écrites : les quatre productions FC2006-1, FC2006-2, FC2006-3, FC2006-4 affirment qu'il y a deux cas possibles.

Nous abordons alors le deuxième élément de cette catégorie : la cohérence dans l'étude des différents cas. Cette cohérence vient d'abord d'une suite de questions liées à la recherche du problème. En effet, dès qu'on aborde le cas du pentagone convexe, qu'on traite par triangulation, on se demande si le partage à partir d'un sommet est toujours possible. Pour un convexe, la réponse est oui. On peut alors se demander pour quels cas il ne serait pas possible. Vient alors le cas du pentagone non convexe (et encore non croisé) : une diagonale peut « sortir » de l'intérieur du pentagone. On est ainsi amené à envisager l'*intérieur* du pentagone. On voit qu'on ne peut pas découper un tel pentagone sans choisir judicieusement le sommet *de départ* et on s'aperçoit même que celui-ci ne peut pas être choisi au hasard. Il faut distinguer les différents cas d'enveloppe convexe du pentagone. Cette enveloppe convexe peut être soit un quadrilatère, soit un triangle. Si c'est un quadrilatère, les deux diagonales qui contiennent l'unique sommet à l'intérieur de ce quadrilatère sont contenues dans l'intérieur du pentagone, frontière comprise. Si l'enveloppe convexe est un triangle, il se peut que l'un des deux sommets ou les deux, à l'intérieur du triangle, ne conviennent pas pour faire la partition : au moins une des deux diagonales qui contient ce ou ces sommets « sort » du pentagone. Et peut-on envisager l'intérieur de n'importe quel pentagone, notamment les croisés ? Et combien peut-il y avoir de points de croisement ? Or aucun raisonnement de ce style n'apparaît dans les textes.

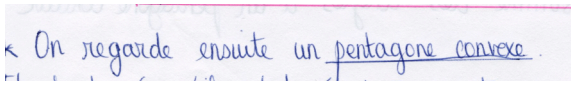



Bien souvent les cas sont proposés les uns après les autres, alors que certains d'entre eux sont des cas particuliers d'un cas plus général. Un exemple est donné dans PLC2-2006-C-5 : cinq cas sont étudiés les uns après les autres, sans lien apparent. On ne sait pas si les cas sont tous étudiés.

Peut-être ici aussi, l'auteur a-t-il voulu respecter la chronologie de la recherche, fonctionnant de manière plus intuitive que celle qui est exposée ci-dessus.

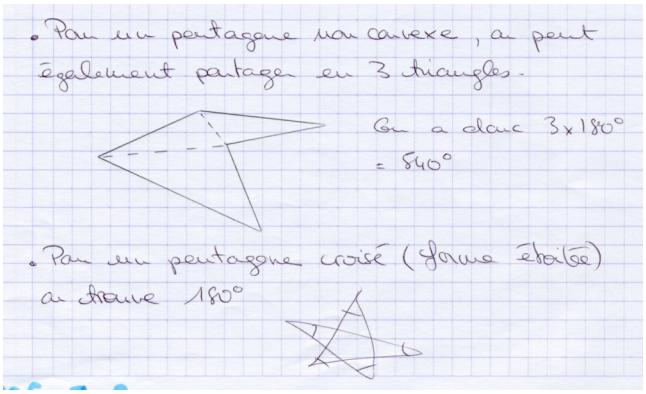
Un autre exemple d'absence de hiérarchisation des cas est donné dans l'extrait suivant de PLC2-2006-C-6 :

[…]



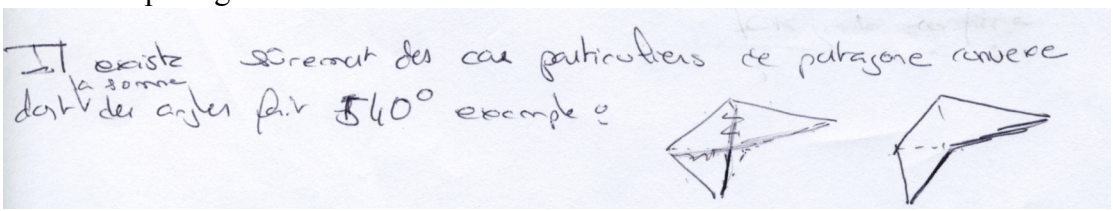

[…]

L'auteur examine d'abord le cas du pentagone régulier, puis passe au cas du pentagone convexe, ceci laissant penser qu'il s'agit de deux cas différents, sans reconnaître que le pentagone régulier est aussi un pentagone convexe. Nous signalons ce texte en relevant une incohérence, comme il est marqué dans le tableau récapitulatif ci-dessous.




Dans d'autres productions, l'incohérence se situe au niveau de la hiérarchisation des cas : dans l'extrait ci-contre (PLC2-2006-C-2), qui fait suite à l'étude du cas du pentagone convexe, il semblerait[149] que le pentagone *étoilé* ne soit pas considéré comme un pentagone non convexe.

Enfin certaines productions laissent perplexes, sur le plan de la reconnaissance du cas du pentagone convexe :




Le tableau ci-dessous récapitule ce manque de cohérence au niveau de la disjonction des cas : on le note dans quarante-deux productions sur quarante-six, soit plus de 90% des textes, qui ont vu qu'il pouvait y avoir plusieurs cas.

[149] Une autre interprétation est possible.

*Tableau n°6*

| *Incohérence et contradiction dans le raisonnement* | *La disjonction des cas répond à une certaine cohérence* | *La disjonction des cas n'est pas cohérente* |
|---|---|---|
| *PLC2-2005-G* | | *2, 4, 5, 6* |
| *PLC2-2005-C* | | *2, 3, 4, 5, 6* |
| *PLC2-2006-C* | *15, 17, 22,* | *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27* |
| *PLC2-2006-G* | *3* | *1, 2, 4* |
| *FC2006* | | *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* |
| *PLC2-06/07* | | *1, 3, 4, 5, 7, 8* |
| *Total* | *4* | *46* |

Enfin d'autres incohérences auraient pu être relevées, comme la suivante : certains auteurs considèrent le cas d'un pentagone croisé, mais n'envisagent pas celui du quadrilatère croisé, ou encore évoque le quadrilatère croisé, mais ne mentionnent pas de cas de pentagone croisé. Ceci se révèle dans quatre productions individuelles.

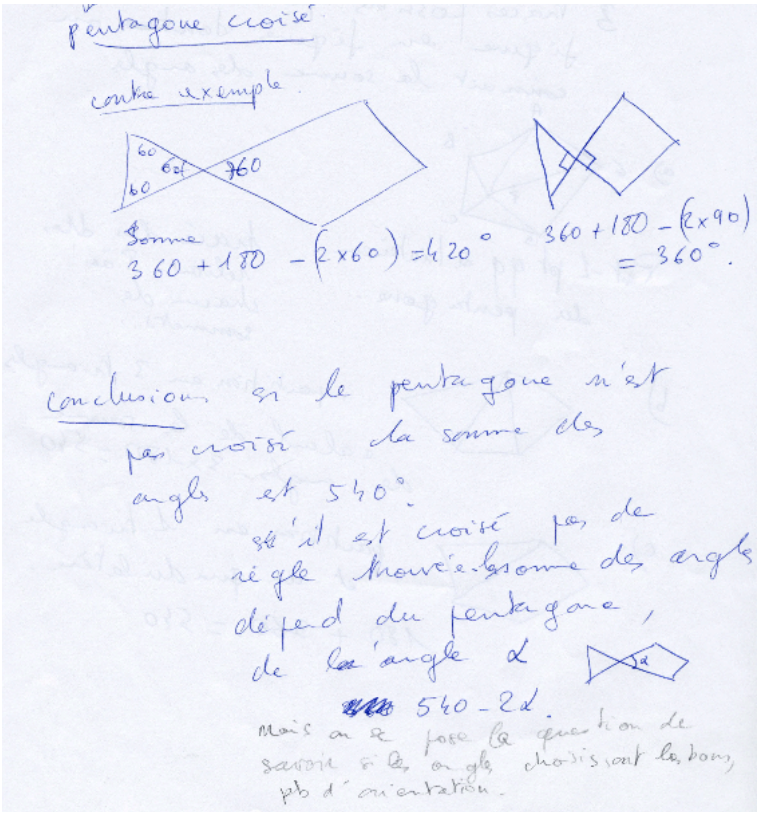
Ainsi les preuves renferment des incohérences, le raisonnement par disjonction des cas n'est pas maîtrisé de façon majoritaire.

## 6. Une cinquième observation : la gestion de la contradiction

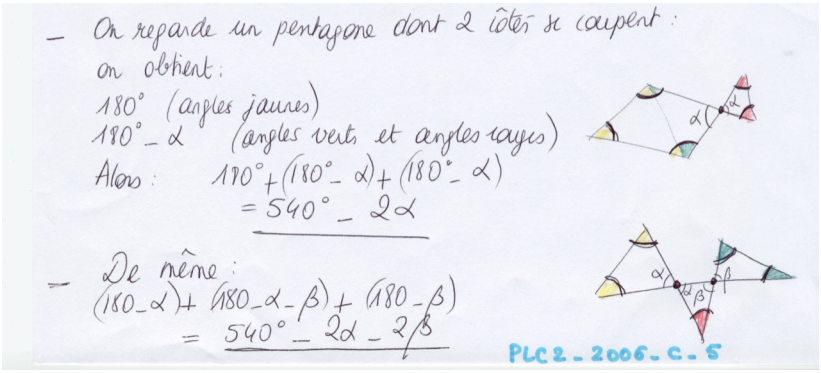
Il s'agit aussi d'une incohérence, qui aurait pu être classée dans la catégorie précédente. Nous avons estimé préférable de la distinguer des autres, à cause des différences de réactions qu'elle a engendrées de la part des enseignants eux-mêmes. Certains auteurs n'en ont pas été conscients, d'autres l'ont acceptée, d'autres encore y ont vu un résultat contradictoire avec l'intuition, source d'interrogation, d'autres enfin ont cherché à l'éviter.

Il s'agit de cette incohérence, désignée dans le tableau ci-dessous par *Incoh*, qui conduit à dire que, dans le cas de la configuration *en poisson* (pentagone croisé avec un seul point de croisement, dont l'enveloppe convexe est un pentagone), la somme des angles varierait suivant la *forme, allongée* ou *aplatie* de ce pentagone. Voici une illustration, tirée de PLC2-2006-C-27, où la formule $540 - 2\,\alpha$ apparaît explicitement.

Les deux angles opposés par le sommet qui apparaissent au croisement des côtés sont considérés comme des angles (égaux à $\alpha$) du pentagone. Par suite la somme des angles du pentagone devient une fonction de cet angle $\alpha$. Ce que nous

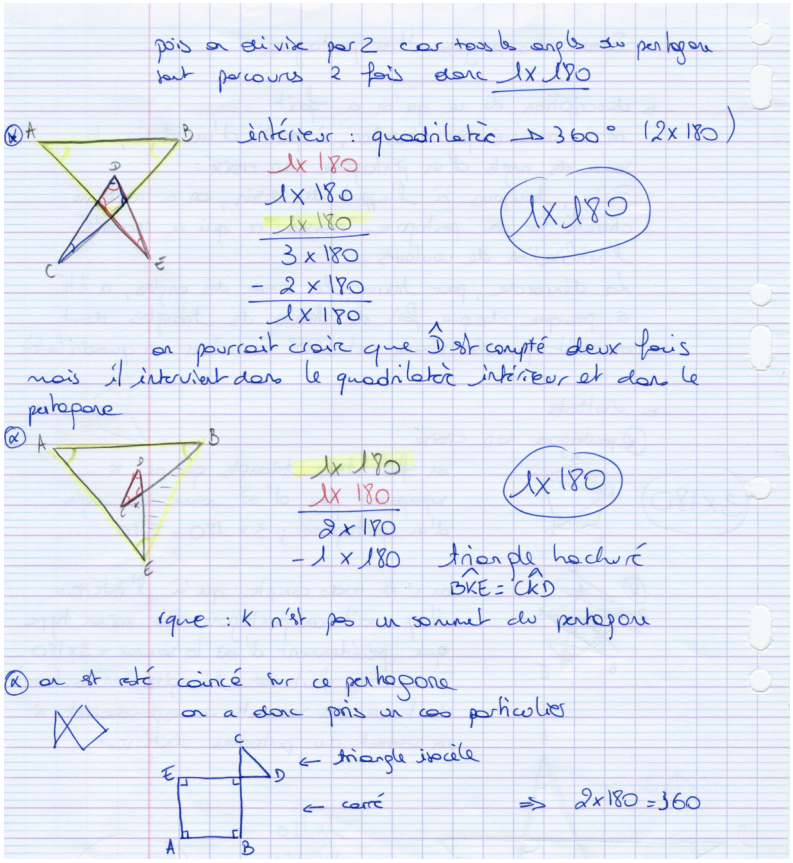



avons désigné ci-dessus par *forme allongée*, c'est la forme du pentagone dans le cas où $\alpha$ est *petit* et par *forme aplatie* celle qui correspond au cas où $\alpha$ est *voisin* d'un angle plat. On remarque la phrase finale du texte qui montre que l'auteur s'interroge sur ce résultat. Il est prêt à remettre en question la définition d'un angle du pentagone. Ceci justifie que nous considérions que ce problème constitue une *situation de construction de définition* (Ouvrier-Buffet 2003) : le milieu renvoie la nécessité de définir ce que l'on appelle un *angle du pentagone*.




L'étude du cas du pentagone croisé avec deux points de croisement donne lieu aussi à une formule qui, au même titre que la précédente, peut apparaître comme contradictoire avec l'intuition. Elle est donnée ci-dessous dans l'extrait de PLC2-2006-C-5 : la somme des angles du pentagone serait, dans ce cas, une fonction de deux variables notées $\alpha$ et $\beta$, dans ce texte. Mais, on ne voit pas que l'auteur s'interroge à partir de ces formules. Les résultats sont soulignés. Ceci nous laisse penser que l'auteur accepte cette contradiction, qui, du coup, ne lui apparaît pas comme telle : dans certains cas, la somme des angles serait un invariant attaché au « type » de pentagone ; dans d'autres cas, cette somme varierait en fonction de certains angles.

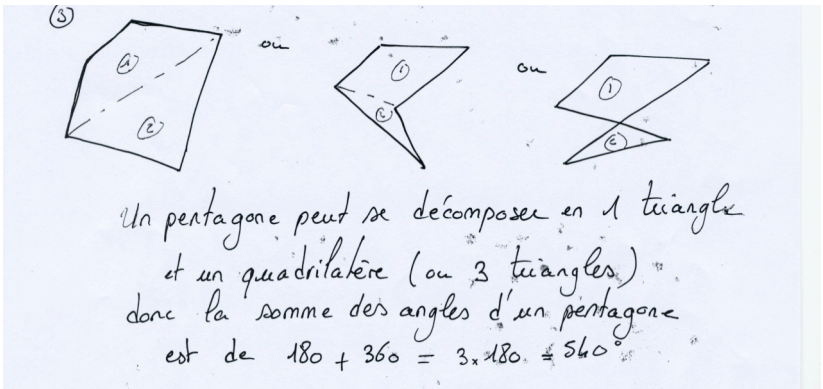
Enfin, nous avons annoncé que certains enseignants avaient cherché à éviter cette contradiction, à la cacher.




Il s'agit de la deuxième page de PLC2-2006-C-22. L'auteur ne reconnaît pas la contradiction (sauf en disant « on est resté coincé sur ce pentagone ») qui apparaît avec le pentagone *poisson*. Il choisit un « cas particulier » qui lui donne une somme des angles égale à 360 degrés. Nous faisons l'hypothèse qu'il considère comme inacceptable que la somme varie en fonction d'un angle et que, pour éviter de le faire apparaître, il « prend un cas particulier », qui lui donne un résultat de 360 degrés, plus plausible. Nous considérons qu'il s'agit d'un *évitement* de la contradiction.

Enfin, il semble que certains auteurs n'aient pas eu conscience de cette contradiction. Nous l'avons déjà signalé dans PLC2-2005-G-2, par exemple :

la décomposition du pentagone en un quadrilatère et un triangle fait apparaître un résultat conforme à ce qui est attendu. Mais cela induit que le pentagone ait sept angles, ce qui n'est pas explicité par les auteurs du transparent (rédigé en groupe). Ils ne voient pas de contradiction dans le fait de considérer qu'un pentagone peut avoir cinq angles dans certains cas (les deux premiers) et sept dans un autre cas (le troisième).




Nous avons voulu relever dans les productions l'apparition de cette contradiction et la façon dont elle était gérée par les auteurs. Dans le tableau ci-dessous, nous avons noté *F* (formule) pour marquer la présence d'au moins l'une des deux formules, du type $540 - 2\,\alpha$ ou $540 - 2\,\alpha - 2\beta$. La lettre *Q* (question) marque une interrogation de la part de l'auteur, une fois obtenues l'une ou l'autre de ces formules.

*Tableau n°7*

| *La gestion de la contradiction* | *Incoh F, Q* | *Incoh F, non Q* | *Incoh nonF* |
|---|---|---|---|
| *PLC2-2005-G* | | *6* | *2, 5* |
| *PLC2-2005-C* | | | *3, 4, 5, 6* |
| *PLC2-2006-C* | *20, 27* | *5, 11, 15, 17, 21, 24* | *1, 8, 12, 22, 23, 25, 26* |
| *PLC2-2006-G* | | | *1, 2, 4, 5* |
| *FC2006* | | *5, 6, 7, 8* | |
| *PLC2-06/07* | *8* | | *1* |
| *Total* | *3* | *11* | *18* |

Les cas de pentagones susceptibles de faire naître cette contradiction sont ceux des pentagones croisés avec un, deux ou trois points de croisement. Si l'on se réfère au tableau n°5 qui donne que quarante-sept textes mentionnent l'un au moins de ces cas, on obtient, à partir du tableau n°7 ci-dessus, que trente-deux sur quarante-sept comportent l'incohérence signalée dans cette catégorie, soit plus des deux tiers.

Parmi ces trente-deux, quatorze productions, soit plus de deux sur cinq, mentionnent explicitement l'une des deux formules $540 - 2\alpha$ ou $540 - 2\alpha - 2\beta$. Seulement trois de ces quatorze productions montrent une interrogation de la part des auteurs devant ces résultats. Le reste, onze sur quatorze, soit près des quatre cinquièmes, affirment ce *résultat étrange* sans se poser de question.

Or, parmi les textes qui n'ont mentionné aucune de ces deux formules, c'est-à-dire parmi les dix-huit sur trente-deux, quatre (voir tableau n°8 ci-dessous) montrent le comportement que nous avons désigné par *évitement de la contradiction* : les auteurs donnent un exemple de pentagone avec un point de croisement qui fournit une somme des angles égale à une valeur attendue telle que 540 degrés ou 360…

*Tableau n°8*

| *La configuration « poisson » entraîne des comportements étranges* | *On évite la contradiction en fournissant un exemple où l'on trouve 540° ou 360°* |
|---|---|
| *PLC2-2005-G* | |
| *PLC2-2005-C* | |
| *PLC2-2006-C* | *22, 25, 26* |
| *PLC2-2006-G* | *4* |
| *FC-2006* | |
| *PLC2-06/07* | |

D'où un résultat important par rapport à ce problème :

*Ce problème est pertinent par rapport à la nécessité de définir un objet mathématique (un angle d'un pentagone). Or les enseignants ne prennent pas cette initiative, malgré les contradictions qui apparaissent dans les deux tiers des textes. Le processus de définition ne fait pas partie de leur pratique mathématique usuelle.*

## 7. La suite de ce problème en formation

En formation, l'institutionnalisation qui fait suite à ce problème (comme pour le *Centre de secours* et le *Polymino*) se situe à deux niveaux. Le premier concerne les

enseignants eux-mêmes face au problème, c'est-à-dire les démarches, les connaissances en jeu, les conceptions sur la preuve, le second les enseignants avec leurs élèves, plus particulièrement la remise en cause du contrat didactique usuel par rapport à la preuve ou l'installation dans la classe d'un nouveau contrat didactique.

Pour la formation, nous nous plaçons dans les conditions suivantes : les enseignants en formation ont cherché *le Pentagone*, par groupes de trois ou quatre, pendant une trentaine de minutes ; puis ils ont rédigé individuellement un texte à l'issue de cette recherche ; les textes ont été relevés. Nous faisons l'hypothèse que chacune des catégories relevées dans ce qui précède va être représentée par au moins une des productions générées par ce problème du Pentagone.

Nous reprenons chacune des observations (paragraphes 2 à 6), explicitons nos résultats et inférons des hypothèses, avant de faire des propositions pour la formation.

**L'aspect formel de la preuve l'emporte sur le fond**

Les résultats obtenus lors de nos expérimentations nous permettent d'affirmer que :

*d'une part, ce problème donne lieu à des productions d'enseignants où les cas simples (par exemple, celui du pentagone convexe) apparaissent comme très détaillés (ce fut le cas dans plus des deux tiers des productions analysées), rédigés de façon formelle (ce fut le cas dans presque un quart des productions) ;*
*d'autre part, la prégnance du contrat didactique usuel relatif à la preuve, même en dehors de la classe, empêche de distinguer les conceptions relatives à la preuve et celles qui concernent son enseignement : elles sont imbriquées.*

La plupart des textes formels (les deux tiers) étaient pauvres au niveau de la résolution du problème, par exemple, laissant de côté les cas plus difficiles[150]. Ceci nous amène à une hypothèse, par rapport aux enseignants, dont on peut reconnaître l'impact par rapport à l'enseignement de la preuve et l'activité mathématique des élèves :

*Il semblerait que l'aspect formel de la preuve masque un certain vide au niveau du sens du problème et par rapport à l'épistémologie de la preuve*.

Pour la formation, nous proposons de sélectionner une production qui montre une preuve rédigée de façon très formelle, dans un cas simple, comme celui du pentagone convexe (et qui ne comporte pas de question sur l'existence d'un partage du pentagone) et qui omet les cas de pentagones non convexes. Nous la désignons par *production-pentagone n°1*.

[150] On pourrait penser que ceci est dû au fait que les enseignants disposaient de peu de temps pour la recherche du problème. Or notre pratique de formatrice nous a montré que, sur ce problème, les enseignants ne demandent pas davantage de temps : ils estiment souvent avoir terminé avant la fin de la demi-heure accordée.

A partir de celle-ci, l'institutionnalisation au *premier niveau* met en avant deux éléments. Tout d'abord l'identification d'une conception de la preuve en tant que calcul sur les énoncés : on relève clairement la composante de conception *P*[151] (pas). Ensuite, on fait ressortir l'aspect contradictoire du texte qui propose le traitement d'un cas simple par une preuve formelle détaillée et qui comporte néanmoins des *trous importants*, au niveau de l'entrée dans le problème. Au *deuxième niveau* (les enseignants avec leurs élèves), nous identifions et remettons en cause *la règle de contrat dite du «on sait que-or-donc »*, surtout lorsqu'elle est imposée dès le début de l'apprentissage. Une nouvelle règle de contrat à instaurer serait que l'on ne rédige une preuve qu'après avoir cherché un problème, avec pour objectif de réduire le doute et de convaincre le lecteur, en dehors de tout cadre formel imposé.

### L'absence de maîtrise de la preuve dans le cas où ce qu'il y a à prouver n'est pas difficile

Cette observation fait référence au traitement des cas simples : triangles, quadrilatères et pentagones non croisés. Les erreurs courantes que nous avons relevées sont les suivantes :

- la somme des angles d'un quadrilatère croisé est égale à 360 degrés parce qu'elle est la somme des angles des deux triangles « opposés par le sommet » qui apparaissent ; ceci induit qu'un quadrilatère croisé a six angles ;
- l'affirmation qu'on peut toujours, en partant d'un sommet quelconque, décomposer un pentagone en trois triangles ou bien en un triangle et un quadrilatère, ce qui est faux (voir analyse mathématique) ;
- l'oubli du cas du pentagone non convexe dont l'enveloppe convexe est un triangle : un sommet choisi à l'intérieur de l'enveloppe convexe ne convient pas nécessairement pour faire la partition du pentagone.

Toutes ces erreurs sont liées à la question de l'existence d'un objet mathématique, à savoir un partage du pentagone en figures plus simples. Nous avons vu que sur les quarante et une productions qui traitent du cas du pentagone non convexe et non croisé, plus de quatre sur cinq ne prennent pas en compte la question de l'existence de la triangulation. Il nous semble que l'absence d'interrogation à ce sujet est induite par la façon de considérer la démonstration comme un calcul sur les énoncés. Dans cette vision de la preuve, en effet, on pense surtout à enchaîner correctement les pas de démonstration, on se pose peu de questions sur l'existence des objets mathématiques en question, on oublie la généralité, pour quelle classe d'objets ce raisonnement est valide. Nous reviendrons sur ce point à propos de la quatrième catégorie qui concerne justement la prise en compte de la généralité.

Le résultat que nous tirons de l'étude de cette catégorie peut se formuler de la manière suivante :

[151] Une démonstration est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse-règle-conclusion ; la preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.

*le problème génère des productions qui permettent de poser la question de la pertinence des arguments dans une preuve, ceux à ne pas omettre, ceux à ne pas trop développer.*

Le contrat didactique usuel installé dans la plupart des classes semble induire que les « bonnes démonstrations » sont celles qui « disent tout », tout le raisonnement est explicité. Ceci est mis en défaut dans les productions sur ce problème, qui, malgré une apparence conforme à ce contrat, comportent des *trous*, voire des erreurs : ces preuves reposent sur l'existence d'une triangulation du pentagone, alors même que ce point essentiel n'est pas signalé[152].

La deuxième hypothèse inférée de cette étude et qui est renforcée par la suite :

*la conception de la preuve comme un calcul sur les énoncés (un enchaînement de pas ternaires) constitue un obstacle au questionnement sur la pertinence des arguments.*

Pour la formation, nous proposons de choisir une production qui comporte l'une de ces erreurs signalées et qui est, par ailleurs, détaillée pour l'étude de certains cas simples. Nous la désignons par *production-pentagone n°2.*

Au premier niveau, celle-ci, ainsi que la production-pentagone n°1, permettent d'institutionnaliser deux éléments. En premier, il apparaît que la preuve détaillée traite de ce qui est simple et que, malgré les apparences, elle omet des points importants. Or une preuve ne peut pas « tout dire », il faut trier les arguments en fonction de leur pertinence. Et c'est la recherche du problème qui va guider dans les choix à faire au niveau de la rédaction. On peut ainsi expliciter la conception sous-jacente, que nous avons notée *T* (tout est écrit)[153]. Le deuxième élément que l'on fait ressortir, c'est que la conception de la preuve comme un calcul sur les énoncés occulte la généralité du problème, empêche de s'interroger sur l'existence des objets en jeu.

Au second niveau, il s'agit à nouveau de remettre en cause le contrat usuel relatif à la preuve, en explicitant cette fois la règle[154] *des petits pas* selon laquelle on demande à l'élève d'expliciter tous les pas de démonstration, sans distinguer les *petits* des *grands*. Une nouvelle règle pourrait être de distinguer les arguments importants de ceux qu'on peut omettre parce qu'ils sont plus évidents, dans le souci de réduire le doute et de convaincre.

---

[152] Etant donné le peu de temps alloué à la recherche du problème, on attendait seulement, dans les productions, une question relative à cette partition.

[153] Une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.

[154] Règle relative au contrat usuel par rapport à la preuve

**La redondance, le rapport dessin/figure**

Nous avions regroupé dans cette catégorie des productions qui montraient des arguments redondants, des vérifications sur des cas particuliers de résultats démontrés dans des cas plus généraux, des narrations portant sur des objets du monde sensible. Notre hypothèse était que la présence de tels éléments dans les productions était due à la consigne donnée aux enseignants : elle demandait en effet de raconter sa démarche… Cette catégorie étant trop peu représentée dans l'ensemble des productions, nous ne la prenons pas en compte pour la suite de la formation.

Cependant si des productions qui relèvent de cette catégorie apparaissent lors de la recherche, il est utile de montrer en quoi ces éléments de narration de la démarche ne seront pas à conserver pour une preuve. Changer le contrat en classe de telle sorte que ces narrations de recherche soient acceptées, et même demandées par les enseignants, est une façon de faire entrer les élèves dans la preuve, de leur faire écrire des mathématiques. Mais un travail en classe sera alors nécessaire pour faire évoluer ces narrations vers des *écrits de recherche*, et vers des preuves.

**La considération de la généralité et le traitement des différents cas**

Si nous avons répertorié qu'un peu plus du tiers des productions excluait tout cas de pentagone croisé, c'est bien la question de la généralité de la preuve qui se pose. Elle se pose aussi, nous l'avons déjà dit, à propos du traitement des cas de pentagones non convexes et non croisés : le cas où l'enveloppe convexe est un triangle n'est que très rarement mentionné. Ce traitement de la généralité passe par une disjonction des cas, raisonnement qui, semble-t-il, n'est pas clairement maîtrisé. On note un manque de cohérence dans plus de 90 % des textes, textes qui montrent tout de même qu'il peut y avoir plusieurs cas. Ceci nous amène à formuler le résultat suivant :

*le problème du Pentagone permet de générer des productions où la généralité n'est pas envisagée, où le raisonnement par disjonction des cas présente des incohérences.*

Ceci renforce notre deuxième hypothèse.

Pour la formation, nous sélectionnons une *production-pentagone n°3*. Elle doit envisager différents cas de pentagones, convexes, non convexes non croisés, différents croisés, mais rester tout de même incomplète ; on n'y voit pas clairement la cohérence dans la disjonction des cas. Il est alors important de préciser, qu'on ne s'attend pas à ce que tous les cas soient traités, vu le peu de temps accordé pour la recherche du problème.

Au premier niveau, elle nous permet de faire ressortir que c'est bien la considération de la généralité du problème qui donne lieu à une disjonction de cas, raisonnement qu'on rencontre très peu en géométrie au collège. Le texte du problème parle d'*un* pentagone, mais il s'agit bien de répondre pour tous les cas. Et ces différents cas se reconnaissent dès qu'on se questionne sur l'existence des objets : existence d'un découpage du pentagone en figures plus simples, existence de

l'intérieur d'un pentagone, nombre de points de croisement possibles… La progression dans la généralité du problème se fait par l'émergence de cas particuliers, qui s'avèrent être des contre-exemples, notamment dans le cas du pentagone non convexe et non croisé et dans le cas du pentagone croisé. Ce n'est pas dans le « cours », dans une liste de méthodes bien établie, qu'on peut trouver de quoi avancer dans la preuve de ce problème, mais bien plutôt dans la capacité à être critique par rapport à la démarche empruntée, être en permanence en recherche d'un éventuel contre-exemple qui pourrait contredire ce qu'on affirme.

Au second niveau, il s'agit d'envisager la position de l'élève face à cette généralité. L'élève comprend-il le *un* générique utilisé notamment en géométrie, qui traduit l'universalité du propos mathématique ? Est-il encouragé à adopter un regard critique par la recherche d'éventuels contre-exemples ? Apprendre aux élèves à être critique au lieu de leur apprendre des certitudes.

**La gestion de la contradiction**

Nous avons relevé que, parmi les productions qui abordent les cas de pentagones croisés, plus de deux sur cinq mentionnent explicitement une formule du type $540 - 2\alpha$ [155]. Seulement trois de ces quatorze productions montrent que les auteurs s'interrogent devant une telle formule. Elle ne suscite pas de question dans les autres productions.

En partant de la *définition naïve* d'un angle d'un pentagone, on constate que la somme des angles d'un pentagone convexe et d'un non convexe et non croisé est égale à 540°, que celle de plusieurs types de pentagones croisés est égale à 180°, alors que cette somme semble variable pour le pentagone croisé *en poisson*. Cette absence de généralisation doit remettre en cause ce qu'on appelle un angle du pentagone, pousser à définir un tel objet. Cette nouvelle définition devrait alors permettre une preuve de la somme des angles d'un pentagone, en général. Aussi formulons-nous le résultat suivant :

*le problème du Pentagone est une situation de construction de définition, au sens de Ouvrier-Buffet (2003).*

Nous précisons que nous retrouvons dans ce problème deux aspects de la construction de définition : la génération de définitions par les *problèmes de classification* (classification des différents types de pentagone) et la génération de définitions par la *résolution de problèmes* (la résolution de la configuration *en poisson*).

Pour la formation, nous proposons de retenir une production qui contient l'étude de la configuration *en poisson* comportant la formule $540 - 2\alpha$. C'est la *production-pentagone n°5*. Au premier niveau, elle permet de montrer la nécessité de définir un objet mathématique, un angle d'un pentagone. C'est cette absence de définition qui aboutit à des incohérences. Au second niveau, cela permet d'envisager la position de l'élève auquel on propose toujours des définitions a priori, sans qu'il

[155] ou « $540 - 2\alpha - 2\beta$ ».

en saisisse la nécessité (il ne distingue pas la plupart du temps une définition d'un théorème ; pour lui, c'est une phrase qui est marquée « dans le cours »). Cette production-pentagone n°5 devrait également mettre en évidence que l'incohérence n'est pas le seul fait des élèves. Elle naît souvent d'un malentendu sur les objets en jeu : elle vient dans ce problème du fait que les objets en jeu (les angles du pentagone) ne sont pas clairement perçus, c'est une position très courante chez la plupart des élèves.

### Synthèse pour la formation

*Production-pentagone n°1 : elle montre une preuve rédigée de façon très formelle, dans un cas simple, celui du triangle ou du pentagone convexe, et ne comporte pas de question sur l'existence d'une triangulation du pentagone. Elle est aussi pauvre au niveau du nombre de cas étudiés.*

| *Institutionnalisation au premier niveau* | *Institutionnalisation au second niveau* |
|---|---|
| ** Identification d'une conception de la preuve en tant que calcul sur les énoncés : élément de conception P(pas).*<br>** Aspect contradictoire du texte qui propose le traitement d'un cas simple par une preuve formelle détaillée et qui comporte néanmoins des « trous » importants, au niveau de l'entrée dans le problème.* | ** Identifier et remettre en cause la règle de contrat du « on sait que-or-donc », imposée dès le début de l'apprentissage.*<br>** Une nouvelle règle de contrat à instaurer : on ne rédige une preuve qu'après avoir cherché un problème, avec pour objectif de réduire le doute et de convaincre le lecteur, en dehors de tout cadre formel imposé.* |

*Production-pentagone n°2 : : elle traite un cas simple, de façon détaillée, et la preuve de ce cas comporte l'une des erreurs signalées.*

| *Institutionnalisation au premier niveau* | *Institutionnalisation au second niveau* |
|---|---|
| ** La preuve qui est ici très détaillée, c'est celle qui traite de ce qui est simple et qui, malgré les apparences, omet des points importants. Une preuve ne peut pas « tout dire », il faut trier les arguments en fonction de leur pertinence. C'est la recherche du problème qui va guider dans les choix à faire au niveau de la rédaction. Explicitation de la conception sous-jacente T (tout est écrit).*<br>** La conception de la preuve comme un calcul sur les énoncés occulte la généralité du problème, empêche de s'interroger sur l'existence des objets en jeu.* | ** Remise en cause du contrat usuel relatif à la preuve, en explicitant la règle « des petits pas », selon laquelle on demande à l'élève d'expliciter tous les pas de démonstration, sans distinguer les « petits » des « grands ».*<br>** Une nouvelle règle de contrat à instaurer : distinguer les arguments importants de ceux qu'on peut omettre parce qu'ils sont plus évidents, dans le souci de convaincre et de montrer qu'on réduit le doute.* |

*<u>Production-pentagone n°3</u> : elle envisage différents cas de pentagones, convexes, non convexes non croisés, différents croisés, mais reste tout de même incomplète ; en outre on ne voit pas clairement la cohérence dans la disjonction des cas.*

| *Institutionnalisation au premier niveau* | *Institutionnalisation au second niveau* |
|---|---|
| ** C'est la considération de la généralité du problème qui donne lieu à une disjonction de cas. Le texte du problème parle d'un pentagone, mais il s'agit bien de répondre pour tous les cas. Et ces différents cas se reconnaissent dès qu'on se questionne sur l'existence des objets. La progression dans la généralité du problème se fait par l'émergence de cas particuliers, qui s'avèrent être des contre-exemples, notamment dans le cas du pentagone non convexe et non croisé et dans le cas du pentagone croisé.*<br>** Ce n'est pas dans le « cours », dans une liste de méthodes bien établie, qu'on peut trouver comment avancer dans la preuve de ce problème, mais bien plutôt dans la capacité à être critique par rapport à la démarche empruntée, être en permanence en recherche d'un éventuel contre-exemple qui pourrait contredire ce qu'on affirme.* | ** Envisager la position de l'élève face à cette généralité. L'élève comprend-il le « un » générique utilisé notamment en géométrie, qui traduit l'universalité du propos mathématique.*<br>** Une nouvelle règle à instaurer : dans l'écriture d'une preuve, adopter un regard critique sur ce qu'on écrit, en recherchant d'éventuels contre-exemples.* |

*<u>Production-pentagone n°4</u> : elle contient l'étude de la configuration « poisson » comportant la formule 540 – 2 $\alpha$.*

| *Institutionnalisation au premier niveau* | *Institutionnalisation au second niveau* |
|---|---|
| *Nécessité de définir un objet mathématique, un angle d'un pentagone. C'est cette absence de définition qui aboutit à des incohérences.* | ** Envisager la position de l'élève auquel on propose toujours des définitions a priori, sans qu'il en saisisse la nécessité.*<br>** L'incohérence n'est pas le seul fait des élèves. Elle naît souvent d'un malentendu sur les objets en jeu : elle vient dans ce problème du fait que les objets en jeu (les angles du pentagone) ne sont pas clairement perçus, c'est une position très courante chez la plupart des élèves.* |

# CONCLUSION

*« Certes la figure que j'envisage possède tous ces caractères particuliers ; mais nulle mention n'en est faite pour prouver la proposition. »*
*(George Berkeley, Traité sur les principes de la connaissance humaine, (1685-1753))*

## 1. Par rapport au travail sur les trois problèmes

Nous avons déjà conclu par rapport à chacun des problèmes sur deux niveaux, d'une part, les constats par rapport aux enseignants auxquels les problèmes donnent lieu, qui permettent d'identifier les composantes de conceptions sous-jacentes, d'autre part, le questionnement induit par ces constats par rapport aux pratiques et au contrat usuel relatif à la preuve. Nous ne reprenons pas ces conclusions. Nous reprenons seulement un seul constat par problème, qui montre à quel point le décalage est grand entre la preuve pratiquée en mathématiques et la preuve en classe.

Le premier est issu du *Centre de secours* :

*Majoritairement, les enseignants manipulent des objets mathématiques sans avoir de problématique de recherche mathématique ; le recours à un catalogue de méthodes, évoquées par le contexte a priori familier du problème, empêche de voir le problème. Ceci questionne la présence des fiches-méthodes dans les manuels et le recours systématique à celles-ci en phase d'apprentissage de la preuve.*

Le second vient du *Polymino* :

*On obtient des productions qui montrent significativement que les enseignants distinguent mal condition nécessaire et condition suffisante, et d'autres conceptions erronées sur le plan du raisonnement, générées notamment par la preuve d'une impossibilité.*

Enfin le dernier, à partir du *Pentagone* :

*La contradiction engendrée par l'absence de définition d'un objet ne conduit pas les enseignants à définir cet objet ; dans beaucoup de cas, cette contradiction est volontairement évitée ou cachée.*

## 2. Par rapport à cette thèse

### Il est nécessaire de changer les pratiques des enseignants par rapport à l'enseignement de la preuve

Les résultats relatifs au décalage entre la preuve en mathématiques et la preuve en classe montrent cette nécessité, celle-ci reposant essentiellement sur les raisons d'ordres épistémologique et philosophique données en introduction.

**Il est possible de changer les pratiques des enseignants par rapport à l'enseignement de la preuve**

Nous l'appuyons sur cinq points. Tout d'abord, nous avons prouvé cette possibilité par des exemples de changement de conception, développés au chapitre 8. Ensuite, nous avons montré que le contrat usuel relatif à la preuve en classe, malgré sa performance, était fondé sur des malentendus. Par ailleurs, certains enseignants sont conscients de la transposition exagérée induite par leur pratique d'enseignement, sur le plan de la preuve. Quatrième point : nous avons montré la contradiction entre les attentes des enseignants par rapport à l'activité mathématique des élèves, relativement importantes, et les choix de tâches qu'ils effectuent pour enseigner la preuve. Enfin nous faisons l'hypothèse que voir le rapport existant des élèves à la preuve peut induire un autre regard sur leurs pratiques.

**Il est pertinent d'amorcer un changement des pratiques par le travail sur les conceptions sur la preuve, décrit dans notre ingénierie**

Nous avons vu que l'hypothèse selon laquelle les pratiques des enseignants sont résistantes au changement nous confortait dans notre travail sur les conceptions, un autre choix ne s'avérant guère possible.

Les résultats obtenus à partir des problèmes montrent que chacun d'eux a une spécificité, mais globalement, chacun permet un questionnement par rapport aux pratiques d'enseignement sur la preuve. L'ingénierie prend en compte les trois problèmes, mais une formation pertinente peut n'en considérer qu'un.

## 3. Par rapport à ce qui n'a pas été traité et qui ouvre des perspectives

Il reste à étudier le lien entre la situation introductive de notre ingénierie, visant à montrer aux enseignants le rapport existant des élèves à la preuve, et le travail sur les trois problèmes. La présence de cette introduction est seulement justifiée expérimentalement par notre pratique de formatrice.

Une nouvelle pratique d'enseignement de la preuve pourrait conjuguer les deux modèles, issus de la logique, que sont le calcul des propositions et l'étude des objets mathématiques et de leurs propriétés (voir chapitre 9), le premier étant actuellement le seul utilisé en phase d'apprentissage. Comment étudier la viabilité d'une approche épistémologiquement plus satisfaisante (des indices qui vont dans ce sens nous sont donnés par les programmes étudiés au chapitre 5), fondée sur la conjugaison des deux modèles ? Nous avons déjà identifié des contraintes s'opposant à l'extension du second modèle. Sur le plan épistémologique, la longue domination de la géométrie dans l'enseignement de la preuve, la grande variété des types de preuves de l'existence ou de l'inexistence des objets, la plus grande complexité des questions liées à la logique sous-jacente. Sur le plan cognitif, les conceptions des enseignants sur la preuve, le rapport des élèves à la preuve. Sur le plan didactique, la force du refuge algorithmique qui correspond actuellement à l'apprentissage de l'écriture de preuve, la difficulté d'enseigner la démonstration à partir du calcul littéral qui est la seule autre proposition qu'on trouve dans les manuels. Sur le plan de l'ergonomie, la

difficulté à changer sa pratique, les coutumes, l'incertitude qui résulte du changement.

Enfin, concernant la *règle des petits pas* dans l'écriture d'une preuve. Dans quelle mesure l'obligation faite aux élèves d'expliciter des *petits pas*, ne les fait-elle pas avancer dans la compréhension de ce qu'est une preuve. Et plus généralement, il serait intéressant d'étudier comment enseigner la transition entre *l'écrit de recherche*, tel que nous le proposons dans le chapitre 1, et l'écriture de preuve plus formalisée.

## BIBLIOGRAPHIE

*Cette bibliographie comporte, outre les références des textes cités dans les chapitres précédents, celles d'autres écrits qui ont nourri notre réflexion sur le sujet de cette thèse.*


ARSAC G. (1987), L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 8/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 267-312.

ARSAC G. (1988), Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 247-280.

ARSAC. G., GERMAIN G. & MANTE M. (1991), *Problème ouvert et situation-problème*, éd. IREM de Lyon.

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G. GUICHARD Y. & MANTE M. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses universitaires de Lyon.

ARSAC G. (1992), L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 7-32.

ARSAC G. (1994), Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration, *Petit x*, n°37, éd. IREM de Grenoble, 5-33.

ARSAC G. (1998), Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie, *Petit x*, n°47, éd. IREM de Grenoble, 5-31.

ARTIGUE M. (1988), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 281-308.

ARTIGUE M. (1990), Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 241-286.

ASSUDE T. (1995), Sur les modèles des conceptions, Relecture d'une expérimentation, *Les débats de didactique des mathématiques, Actes du séminaire national 1993-1994*, éd. La Pensée Sauvage, 9-19.

ASSUDE T., MERCIER A. & SANSEVY G. (2007), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 27/2, éd. La Pensée Sauvage, 221-252.

BALACHEFF N. (1982), Preuve et démonstration en mathématiques au collège, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 261-304.

BALACHEFF N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* 18, éd. D. Reidel Publishing Company, 147-176.

BALACHEFF N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.

BALACHEFF N. (1999), L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat…, *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, http://www.lettredelapreuve

BALACHEFF N. (1999), Apprendre la preuve, *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, éd. PUF.

BARBIN E. (1989), Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, *Actes du 7ème colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques*, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 57-79.

BARBIN E., DUVAL R., GIORGIUTTI I., HOUDEBINE J. & LABORDE C. (2001), *Produire et lire des textes de démonstration*, éd. Ellipses.

BATTIE V. (2007), Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes en arithmétique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 27, éd. La Pensée Sauvage, 9-44.

BAUTIER E. & al (équipe ESCOL) (2006), *Apprendre à l'école, Apprendre l'école, Des risques de construction d'inégalités dès la maternelle*, éd. De la Chronique Sociale.

BAUTIER E. (2007), Pratiques scolaires et inégalités sociales, *Perspectives en didactique des mathématiques, cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, éd. La Pensée Sauvage, 135-151.

BEZOUT (1832), Notes sur l'arithmétique.

BERTÉ A. (1996), Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes, *Petit x*, n°40, éd. IREM de Grenoble, 41-63.

BKOUCHE R. & LEHMAN D. (1989), *De la démonstration*, éd. IREM de Lille.

BKOUCHE R. (1989), Quelques remarques sur la démonstration (autour de la philosophie de Gonseth), *La démonstration mathématique dans l'histoire*, *Actes du 7ème colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques*, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 115-127.

BKOUCHE R. (2002), Du raisonnement à la démonstration, *Repères-IREM*, n°47, éd. Topiques, Pont-à-Mousson, 41-64.

BLOCH I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : connaissances, savoirs, et conditions relatives à la validation*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu-connaissances et savoirs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 19-2, éd. La Pensée Sauvage, 135-194.

BOERO P. (1994), Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergences et divergences dans les perspectives de recherche, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, *hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, éd. La Pensée Sauvage, 17-50.

BOERO P. (1999), Argumentation et démonstration : une relation complexe, productive et inévitable en mathématique et dans l'enseignement des mathématiques, *International*

*Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, http://www.lettredelapreuve

BOLZANO B. (1810), *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung des Mathematik,* Erste Lieferung, Prague ; rééd. (1926) sous le titre *Philosophie der Mathematik*, Padeborn.

BOULIGAND G. (1935), *Premières leçons sur la théorie générale des groupes*, éd. Vuibert, Paris.

BOUTTIER L, GANDIT M., GENEVES B. & GALLOT S. (2002), *Recherche de centres*, éd. IREM de Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7/2, éd. La Pensée Sauvage, 33-115.

BROUSSEAU G. (1994), Perspectives pour la didactique des mathématiques, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, *hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud,* éd. La Pensée Sauvage, 51-66.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*, éd. La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 167-210.

BROUSSEAU G. (2005), Réponses écrites aux questions à Guy Brousseau, *Sur la théorie des situations didactiques, Questions, réponses, ouvertures, Hommage à Guy Brousseau*, éd. La Pensée Sauvage

CABASSUT R. (2005), *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, Denis Diderot.

CARRAL M. (2002), Démontrer, pourquoi ?, *Repères-IREM*, n°49, éd. Topiques Metz, 17-40.

CASTELA C. (2007), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, *Perspectives en didactique des mathématiques, cours de la XIII*$^{e}$ *école d'été de didactique des mathématiques*, éd. La Pensée Sauvage, 88-114.

CAUCHY A. (de 1811 à 1850), Œuvres complètes d'A. Cauchy, 2è série, publiées sous la direction de l'Académie des sciences (1974), tome III, éd. Gauthier-Villars, Paris, 50-51.

CESAME (2005) (CESAME : groupe constitué de SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J.P. & PAQUELIER Y.), L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25/1, éd. La Pensée Sauvage, 57-90.

CHAPET PARIÈS M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 24/2.3, éd. La Pensée Sauvage, 251-284.

CHARLOT B. & BAUTIER E. (1993), Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques, *Repères-IREM*, n°10, éd. Topiques, 5-25.

CHARNAY R. (2006), Quelle culture mathématique commune (ou partagée) au terme de la scolarité obligatoire ? Eléments de réflexion et contribution à un nécessaire débat, *Repères-IREM*, n°64, éd. Topiques, Metz, 50-61.

CHELLOUGUI F. (2003), Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques de l'enseignement tunisien, *Petit x*, n°61, éd. IREM de Grenoble, 11-34.

CHEVALIER A. (1993), Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire, *Petit x*, n°33, éd. IREM de Grenoble, 71-79.

CHEVALLARD Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, séminaire n°108, *Actes du séminaire de didactique des mathématiques*, éd. IMAG Grenoble, 211-235.

CHEVALLARD Y (1992), Concepts fondamentaux de la didactique des mathématiques : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 12-1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, *Actes de l'université d'été de La Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, juillet 1998*, éd. IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 19/2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (2002), Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions, devenir, *Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées (I.D.D., T.P.E., A.I., ...), Actes des journées de Dijon 2002*, éd. IREM de Dijon.

CHOQUET G. (1964), *L'enseignement de la géométrie*, éd. Hermann.

CHOQUET G. (1969), *Cours d'analyse, Tome II, Topologie*, éd. Masson et C$^{ie}$.

CLAIRAUT A. (1765), *Eléments de géométrie*, reédition (1986) Siloë, Laval.

CLOT Y. (1999), *La fonction psychologique du travail*, PUF, Paris.

COMITI C. & GRENIER D. (1998), Régulations didactiques et changements de contrats, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 81-102.

COMMISSION INTER-IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES (1990), *La démonstration mathématique dans l'histoire*, *Actes du 7$^{ème}$ colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques*, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

CONNE F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 12/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 221-270.

CONNE F. (2004), Problèmes de transposition didactique, *Petit x*, n°64, éd. IREM de Grenoble, 62-81.

DELAHAYE J.-P. (2000), Raccourcis dans les démonstrations, Le thème de la lettre, http://www.lettredelapreuve.it

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004), *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.

DEMONGEOT M.-C. (2003), Construire la rationalité pour enseigner la démonstration, *Preuve et démonstration : quelques questions essentielles*, Fascicule rédigé dans le cadre d'un contrat DESCO-IREMs de GRENOBLE et de RENNES.

DEMONGEOT M.-C. & GANDIT M. (2003), Faire la figure, coder, écrire les hypothèses, démontrer que…, *Petit x*, n°63, éd. IREM de Grenoble, 30-50.

DIAS T. & DURAND-GUERRIER V. (2005), Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères-IREM*, n°60, éd. Topiques, Metz, 61-78.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 7.2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-31.

DURAND-GUERRIER V. (1995), Logique et raisonnement mathématique : exemples d'analyse de tâches à l'aide de la logique formelle, *Didatech, séminaires 94-95*, éd. CNRS, IMAG, UJF.

DURAND-GUERRIER V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, n°50, éd. IREM de Grenoble.

DURAND-GUERRIER V. & ARSAC G. (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?*, Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 23/3, éd. La Pensée Sauvage, 295-342.

DURAND-GUERRIER V. (2005), *Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique*, Habilitation à Diriger des Recherches en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon 1.

DUVAL R. & EGRET M.-A. (1989), L'organisation déductive du discours, Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration, *Annales de didactique et de sciences cognitives 2*, Strasbourg, éd. IREM de Strasbourg, 25-40.

DUVAL R. (1990), Pour une approche cognitive de l'argumentation, *Annales de didactique et de sciences cognitives 3*, Strasbourg, éd. IREM de Strasbourg, 195-221.

DUVAL R. (1991), Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics 22*, Netherlands, éd. Kluwer Academic Publishers, 233-261.

DUVAL R (1993), Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x*, n°31, éd. IREM de Grenoble, 37-61.

DUVAL R. (1996), « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.16/3, éd. La Pensée Sauvage, 349-382.

DUVAL R. (2000), Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.20/2, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage, 135-170.

EGRET M.A. & DUVAL R. (1989), Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, éd. IREM de Strasbourg, 41-64.

ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS (1980), Formalisme et formalisation, vol 7., éd. Encyclopædia universalis France, Paris, 176-179.

ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS (1980), Hilbert (David), vol 8., éd. Encyclopædia universalis France, Paris, 390-393.

ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS (1980), Le Gendre Adrien Marie, vol 19., éd. Encyclopædia universalis France, Paris, 1085.

ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS (1980), Fondements des mathématiques, vol 10., éd. Encyclopædia universalis France, Paris, 619-625.

EUCLIDE (III$^{e}$ s. av. J.C.), *Les éléments*, traduction (1966) Peyrard, éd. Blanchard, Paris.

FLORIS R. (1995), La Géométrie traite-t-elle des illusions d'optique ? Quatre élèves aux prises avec le triangle aplati, *Petit x*, n°39, éd. IREM de Grenoble, 29-53.

FREGONA D. & ORUS BAGUENA P. (2005), Une étude du contrat didactique à l'aide de la structuration du milieu didactique. Deux exemples : le cas des figures planes et du raisonnement, *Sur la théorie des situations didactiques, Questions, réponses, ouvertures, Hommage à Guy Brousseau*, éd. La Pensée Sauvage, 203-233.

GANDIT M. & MASSE-DEMONGEOT M.-C. (1996, reéd. 2001), *Le vrai et le faux au collège et au lycée*, éd. IREM de Grenoble.

GANDIT M. (2003), Faire exister la phase heuristique, *Preuve et démonstration : quelques questions essentielles*, Fascicule rédigé dans le cadre d'un contrat DESCO-IREMs de Grenoble et de Rennes.

GANDIT M. (2003), *La preuve (ou démonstration) un thème pour la formation des enseignants de mathématiques,* Mémoire de D.E.A., Combinatoire Naïve et Apprentissage des Mathématiques, Laboratoire Leibniz, CNRS-INPG, Université J. Fourier, Grenoble.

GANDIT M. (2004), Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : première partie, *Petit x*, n°65, éd. IREM de Grenoble, 36-49.

GANDIT M. (2004), Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : deuxième partie, *Petit x*, n°66, éd. IREM de Grenoble, 49-82.

GIRMENS Y., LARGUIER M., PELLEQUER S. (2003), Des tâches nouvelles pour l'apprentissage de la démonstration au collège, *Repères-IREM*, n°53, éd. Topiques, Metz, 43-61.

GLAESER G. (1990), *Analyse et synthèse*, Publication n°76 de l'APMEP, Paris.

GODOT K. (2005), *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation, Exemple de la roue aux couleurs*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier Grenoble 1.

GRENIER D. & PAYAN C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.18/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 59-100.

GRENIER D. & PAYAN C. (2002), Situations de recherche « en classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation, *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, n°92, Laboratoire Leibz-IMAG, Grenoble (en ligne)

GUILLEMOT M. (1990), Bolzano et la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, *Actes du 7ème colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques*, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 99-114.

HACHE C. (2001), L'univers mathématique proposé par le professeur en classe, Observation, description, organisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21/1.2, éd. La Pensée Sauvage, 81-98.

HERBST P.-G. (1999) The role of the teacher: What do the practices associated with two-column proofs say about the possibilities for argumentation? (Paper presented in the context of the symposium "Fostering argumentation in the mathematics class: The role of the teacher".), AERA 1999 annual meeting, http://www.lettredelapreuve.it

HILBERT D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, traduction (1971): les fondements de la géométrie, édition du CNRS, Dunod.

HOUDEBINE J. & al (1998), *La démonstration : écrire des mathématiques au collège et au lycée*, éd. Hachette éducation.

INRP/ADIREM (2003), *Evaluation et développement de dispositifs d'enseignement en mathématiques,* Rapports de synthèse des équipes engagées dans la recherche, éd. IREM de Clermont-Ferrand.

IREM de GRENOBLE (1985), *Apprentissage du raisonnement ou vers une autonomie de l'élève … par une approche en compréhension des connaissances…*, éd. IREM de Grenoble.

IREMs de GRENOBLE et de RENNES (2003), *Preuve et démonstration : quelques questions essentielles*, Fascicule rédigé dans le cadre d'un contrat DESCO-IREMs de GRENOBLE et de RENNES.

IREM de PARIS 7 (2002), *Expériences de narration de recherche en mathématiques*, coéd. ACL- Les Editions du Kangourou, Paris.

KOLMOGOROV A. & FOMINE S. (1974), *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, éd. de Moscou.

LAKATOS I. (1976), *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press. Traduction française (1985) : Preuves et réfutations, éd. Hermann.

LE GENDRE (OU LEGENDRE) A.-M. (1794), *Eléments de géométrie, avec additions et modifications par M.A. Blanchet*, ed. b. 1813, Paris : Firmin-Didot frères, 1852, http://name.umdl.umich.edu/ACV0786.0001.001.

LEGRAND M. (1988), Génèse et étude sommaire d'une situation co-didactique : le débat scientifique en situation d'enseignement, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, éd. La pensée Sauvage, 53-66.

LEGRAND M. (1990), Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 9/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 365-406.

LEGRAND M. (1995), Les mathématiques, mythe ou réalité ? (1ère partie), Un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique, *Repères-IREM*, n°20, éd. Topiques, Pont-à-Mousson, 91-108.

LEGRAND M. (1995), Les mathématiques, mythe ou réalité ? (2ème partie), *Repères-IREM*, n°21, éd. Topiques, Pont-à-Mousson, 111-139.

LEGRAND M. (1996), La problématique des situations fondamentales, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 16/2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 221-280.

LEGRAND M. (1997), La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique, Deux regards sur l'enseignement des mathématiques, *Repères-IREM*, n°27, éd. Topiques, Pont-à-Mousson, 81-125.

LEONARD F. & SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 205-240.

MARGOLINAS C. (1989), *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.

MARGOLINAS C. (1992), Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 113-158.

MARGOLINAS C (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe*, éd. La pensée Sauvage.

MARGOLINAS C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, *Actes du séminaire national 1993-1994*, éd. La Pensée Sauvage, 89-102.

MARGOLINAS C. & RIVIÈRE O. (2005), La préparation de séance : un élément du travail du professeur, *Petit x*, n°69, éd. IREM de Grenoble, 32-57.

MAROT M. (2000), Une approche de la démonstration en classe de sixième, *Repères-IREM* n°39, éd. Topiques, Metz, 21-34.

MATHERON Y. (2000), Analyser les praxéologies, quelques exemples d'organisations mathématiques, *Petit x*, n°54, éd. IREM de Grenoble, 51-78.

MULLER J.-P. (1994), La démonstration en géométrie en quatrième et en troisième, *Repères-IREM*, n°15, éd. Topiques, 7-24.

OUVRIER-BUFFET C. (2003), *Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.

PEDEMONTE B. (2002), *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1 et Universite de Genova.

PEDEMONTE B. (2005), Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25/3, éd. La Pensée Sauvage, 313-348.

PEIX A. & LE POULICHET M. (1990), Initiation à la démonstration en 4ème, Compte-rendu d'expérimentation, *Petit x*, n°26, éd. IREM de Grenoble, 29-46.

PERRIN D. (1997), Rigueur et formalismes(s), Commission InterIREM, Paris.

PERRIN D. (2007), L'expérimentation en mathématiques, *Petit x*, n° 73, éd. IREM de Grenoble, 6-34.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 13/1.2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-118.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1994), Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, *hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, éd. La Pensée Sauvage, 97-147.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1997), Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? … Peut-on tirer de l'analyse de ces difficultés des enseignements pour la formation des maîtres ?, *Repères-IREM*, n°29, éd. Topiques, Pont-à-Mousson, 44-66.

PERRIN-GLORIAN M.-J. & HERSANT M. (2003), Milieu et contrat didactique, Outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 23/2, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 217-276.

POINCARÉ H. (1908), L'invention mathématique, *Bull. de l'Institut Général Psychologique*, 8è année, n°3.

ROBERT A. & TENAUD I. (1988), Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9/1, éd. La Pensée Sauvage, 31-70.

ROBERT A. (1992), Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 33-58.

ROBERT A. & ROBINET J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 16/2, éd. La Pensée Sauvage, 145-176.

ROBERT A. & ROGALSKI M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x*, n°60, éd. IREM de Grenoble, 6-35.

ROBERT A. (2004), Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une video filmée en classe, La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants, Perspectives en formation d'enseignants, *Petit x*, n°65, éd. IREM de Grenoble, 52-79.

ROBERT A. & ROGALSKI M. (2004), Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée, *Repères-IREM*, n°54, éd. Topiques, 77-103.

ROBERT A. (2005), Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré, *Petit x*, n°67, éd. IREM de Grenoble, 63-76.

ROBERT A. (2005), De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 10, éd. IREM de Strasbourg, 209-249.

ROBERT A. (2006), Une méthodologie pour décrire des déroulements de séances de classe à partir de vidéo dans les recherches sur les pratiques d'enseignants de mathématiques au collège et au lycée, *Les méthodes de recherches en didactiques*, éd. Presses Universitaires du Septentrion, 191-202.

RODITI E. (2004), Le théorème de l'angle inscrit au collège, Analyse d'une séance d'introduction, *Petit x*, n°66, éd. IREM de Grenoble, 18-48.

ROGALSKI J. (2003), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 23/3, éd. La Pensée Sauvage, 343-388.

ROGALSKI J. (2006), Analyse de l'activité de l'enseignant à partir de sa communication avec la classe / les élèves, *Les méthodes de recherche en didactiques*, éd. Presses Universitaires du Septentrion, 85-98.

ROGER J.-L., RUELLAND D. & CLOT Y. (2007), De l'action à la transformation du métier : l'activité enseignante au quotidien, *Education et Sociétés*, *revue internationale de sociologie de l'éducation*, éd. De Boeck.

ROLLAND J. (1999), *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.

ROUCHE N. (1989), Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, *Actes du 7ème colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques*, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 9-38.

SACKUR C., DROUHARD J.P., MAUREL M. & PECAL M. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères-IREM*, n°28, éd. Topiques, 37-68.

SACKUR C. & MAUREL M. (2000), Les inéquations en classe de seconde, Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques, *Petit x*, n°53, éd. IREM de Grenoble, 5-26.

SACKUR C. & DROUHARD J.-P. (2001), La triple approche : un modèle de l'activité mathématique des élèves, *Bulletin vert de l'APMEP*, n°433, éd. APMEP, 159-168.

SACKUR C., ASSUDE T. & MAUREL M (2004), Are my students actually doing mathematics ? *Proceedings of the Third Conference of ERME*, CD-ROM, Pisa University Press, www.edizioniplus.it

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M. , DROUHARD J.-P. & PAQUELIER Y. (CESAME) (2005), L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 25/1, éd. La Pensée Sauvage, 57-90.

SAUTER M. (1998), Narration de recherche, une nouvelle pratique pédagogique, *Repères-IREM,* n°30, éd. Topiques, 9-21.

SAUTER M. (2000), Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège, *Repères-IREM*, n° 39, éd. Topiques, 7-20.

SAYAC N. (2006), Etude à grande échelle sur les pratiques des professeurs de mathématiques de lycée : résultats liés à des variables spécifiques et essai de typologie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 26/2, éd. La Pensée Sauvage, 231-278.

SPAGNOLO F. (2006), La modélisation dans la recherche en didactique des mathématiques : les obstacles épistémologiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 26/3, éd. La Pensée Sauvage, 337-380.

STEGEN P. & COLOMB J. (2005), Des outils didactiques et après ? Une ingénierie de formation pour évaluer l'impact d'un outil didactique sur les pratiques d'enseignants, *Sur la théorie des situations didactiques, Questions, réponses, ouvertures, Hommage à Guy Brousseau*, éd. La Pensée Sauvage, 391-406.

TANGUAY D. (2005), Apprentissage de la démonstration et graphes orientés, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 10, éd. IREM de Strasbourg, Université L. Pasteur, 55-93.

TANGUAY D. (2006), Comprendre la structure déductive en démonstration, *Envol n°134*.

TANGUAY D. (2007), Learning Proof : from Truth towards Validity, *Proceedings of the X$^{th}$ Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME), San Diego State University, San Diego, Californie, (sur le web)*

TARSKI A. (1946), traduit de l'anglais par TREMBLAY S. J. J.) (1971), *Introduction à la logique*, 3$^{ème}$ édition revue, éd. Gauthier-Villars.

THOM R. (1985), La science malgré tout…, *Les Enjeux, Enyclopædia Universalis,* éd. Encyclopædia universalis France, Paris, 73-77.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 10/2.3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 133-170.

WARUSFEL A. (1966), Démonstration, *Dictionnaire raisonné de mathématiques*, éd. Seuil, 103-111.

WEIL S. (1943), *L'enracinement*, dans Œuvres Gallimard (1999).

## Mémoires professionnels de professeurs stagiaires de lycée ou collège

BARTHÉLÉMY S. (2008), *Déléguer une responsabilité scientifique à l'élève par la pratique du débat scientifique*, mémoire professionnel PLC2, IUFM, Université J. Fourier, Grenoble.

CHALOT S. & MARIN S. (2008), *Vers une meilleure prise d'initiative en démonstration*, mémoire professionnel PLC2, IUFM, Université J. Fourier, Grenoble.

JAMGOTCHIAN H. (2005), *Le tableau et le graphe dans l'apprentissage de la démonstration*, mémoire professionnel PLC2, IUFM de l'académie de Grenoble.

LELOUP M. & ECARNOT J. (2006), *Le long chemin des élèves vers la démonstration*, mémoire professionnel PLC2, IUFM de l'académie de Grenoble.

MUGNIER A. & PINTO P. (2007), *Démonstration, Trouver l'équilibre entre le fond et la forme*, mémoire professionnel PLC2, IUFM, Université J. Fourier, Grenoble.

## Manuels relatifs aux classes de quatrième et cinquième édités entre 1998 et 2008

Maths 4e, 1998, collection Cinq sur cinq, éd. Hachette éducation

Maths 5e, 2001, collection Cinq sur cinq, éd. Hachette éducation.

Dimathème 4e, 2002, éd. Didier.

Maths 4e, 2002, collection Cinq sur cinq, éd. Hachette éducation.

Maths 4e, 2002, collection Diabolo, éd. Hachette éducation.

Mathématiques 4e, 2002, Les petits manuels Hatier, éd. Hatier.

Math 4e, 2002, nouveau décimale, éd. Belin.

Mathématiques 4e, 2002, collection Triangle, éd. Hatier.

Maths 3e, 2003, éd. Magnard.

Maths 3e, 2003, collection Diabolo, éd. Hachette éducation.

Dimathème, classe de cinquième, édition 2006, éd. Didier.

Math 5e, 2006, nouveau programme, collection Prisme, éd. Belin.

Maths 5e, programme 2006, collection Diabolo, éd. Hachette éducation.

Math 5e, collection Domino, programme 2006, éd. Nathan.

Mathématiques 5e, programme 2006, collection Phare, éd. Hachette éducation.

Mathématiques 5e, programme 2006, collection Triangle, éd. Hatier.

Maths 5e, nouveau programme 2006, éd. Bréal.

Maths 5e, programme 2006, éd. Magnard.

Transmath 5e, programme 2006, éd. Nathan.

Dimathème 4e, programme 2007, éd. Didier.

Math 4e, collection Prisme, programme 2007, éd. Belin.

Mathématiques 4e, 2007, collection Triangle, éd. Hatier.

Mathématiques 4e, programme 2007, collection Phare, éd. Hachette éducation.

Maths 4e, programme 2007, collection Diabolo, éd. Hachette éducation.

Maths 4e, nouveau programme 2007, éd. Bréal.

Transmath 4e, programme 2007, éd. Nathan.

## Documents officiels

Mathématiques Collège, Projet de document d'accompagnement, Géométrie, juillet 2007, Eduscol, ministère éducation nationale enseignement supérieur recherche.

Programmes de l'enseignement des mathématiques, des SVT, de physique-chimie du collège, B.O. n°6, 10 avril 2007, hors-série, Annexe 2, Mathématiques, 11-66.

Programmes de l'enseignement des mathématiques, des SVT, de physique-chimie du collège, B.O. n°6, 10 avril 2007, hors-série, Annexe 5, Thèmes de convergence, 145-151.

Programmes des collèges, introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques, B.O. n°5, 25 août 2005, hors-série.

Lycée, voie générale et technologique, Accompagnement des programmes, 2000, Mathématiques, classe de seconde, ministère de l'éducation nationale, direction de l'enseignement scolaire, CNDP.

Lycée, voie générale et technologique, Accompagnement des programmes, 2001, Mathématiques, classe de première des séries générales, ministère de l'éducation nationale, direction de l'enseignement scolaire, CNDP.

Lycée, Accompagnement des programmes, 2002, Mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale, ministère de l'éducation nationale, direction de l'enseignement scolaire, CNDP.

Rapport de l'Inspection générale n°2007-048, sur l'évaluation par compétences.

## Sites

Planète Maths : http://www.ac-grenoble.fr/maths, Les collègues proposent, Collège : Quatrième, une fiche d'initiation à la démonstration en quatrième (proposée par Nordine Guettouf).

http://www.lettredelapreuve.it

http://mathsamodeler

## ANNEXES AU CHAPITRE 4

### 1. Que choisissez-vous pour un premier travail en classe sur la démonstration ? (première version)

Les pages suivantes contiennent une liste d'énoncés de problèmes. Chacun d'eux est accompagné d'un commentaire, en caractères italiques, destiné, d'une part, à vous faciliter son appropriation dans le peu de temps qui vous est laissé (30 minutes), d'autre part, à expliciter des raisons qui pourraient motiver son choix pour un travail en classe. Vous devez choisir deux énoncés pour un premier travail sur la démonstration, en classes de quatrième, troisième ou seconde : reportez les numéros correspondants ci-dessous, en explicitant les raisons de vos choix.

Pour chaque énoncé, il reste cependant à construire une mise en œuvre en classe. Il est clair qu'un même énoncé peut donner lieu à de multiples situations de classe, c'est pourquoi il vous est demandé de choisir aussi, pour chacun des problèmes, quelques éléments, parmi ceux qui figurent à la page 5, relatifs à une mise en œuvre dans la classe, en reportant les lettres correspondantes.

*Nom :*

*Niveau de classe choisi :*

*Premier problème choisi pour un premier travail sur la démonstration*

Reportez ici son numéro :

*Deuxième problème choisi pour poursuivre le travail sur la démonstration*

Reportez ici son numéro :

*Raisons du choix de ces problèmes :*

*Mise en œuvre en classe du premier problème choisi*

Reportez les lettres qui correspondent aux éléments de gestion de classe choisis :

*Mise en œuvre en classe du deuxième problème choisi*

Reportez les lettres qui correspondent aux éléments de gestion de classe choisis :

*Des problèmes à choisir*

n°1 – Sont-elles toujours parallèles ? (manuel *Triangle*, 4ème, Hatier, 2002, page 89)

On rappelle les propriétés suivantes.

❶ Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

❷ Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

❸ Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.

❹ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
❺ Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.

❻ Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

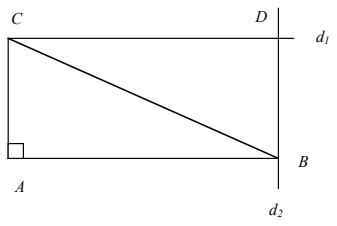
❼ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.

Soient *ABCD* et *CDEF* deux parallélogrammes.

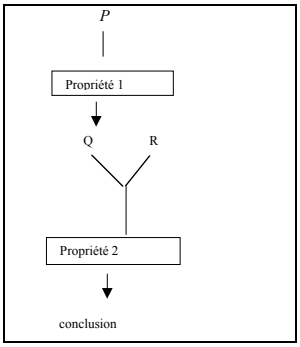
Les droites (*AB*) et (*EF*) sont-elles toujours parallèles quels que soient les parallélogrammes choisis au départ ? Justifier la réponse en utilisant certaines des propriétés ci-dessus.

*La question est ouverte. La preuve prend appui sur des propriétés de géométrie connues depuis la classe de cinquième, malgré les confusions inévitables entre certaines d'entre elles (directe et réciproque : il sera nécessaire d'expliciter la différence).*

n°2 - En partant d'un triangle rectangle




« Soit *ABC* un triangle rectangle en *A*. On construit la droite $d_1$ parallèle à (*AB*) passant par *C* et la droite $d_2$ parallèle à (*AC*) passant par *B*. On note *D* l'intersection de $d_1$ et $d_2$. Quelle est la nature du quadrilatère *ABDC* ? Rédiger une démonstration après avoir fait un schéma. »




*On rédige ce texte avec toute la classe, mais sans utiliser les symboles (P), (Q) et (R) : on a (AB)∥(CD) et (AC)∥(BD) (P), donc ABDC a ses côtés parallèles deux à deux ; ABDC est donc un parallélogramme (Q). Or BÂC = 90° (R) ; un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle, on en déduit que ABDC est un rectangle. Le schéma (avec les élèves, (P), (Q) et (R) sont remplacés par leurs énoncés) fait apparaître que (Q) a, à la fois, le statut de conclusion et d'hypothèse, ce qui permet de mettre en évidence un des mécanismes de la démonstration.*

n°3 – Avec un tableau (H. Jamgotchian, mémoire professionnel PLC2, 2005)

Soient *ABC* un triangle, *M* un point de [*AB*]. La parallèle à [*BC*] passant par *M* coupe [*AC*] en *N*. Le point *K* est le symétrique de *M* par rapport à *B*. La droite (*KN*) coupe (*BC*) en *L*. Démontrer que *L* est le milieu de [*KN*], en utilisant un tableau en trois colonnes.

*On donne cet énoncé après avoir proposé en classe quelques exemples simples de démonstrations sous forme de tableaux en trois colonnes, ce qui donne dans ce cas :*

| *Je sais que* | *D'après la propriété* | *J'en conclus que* |
|---|---|---|
| *K est le symétrique de M par rapport à B* | *Si un point A est symétrique de B par rapport à I alors I est le milieu de [AB]* | *B est le milieu de [KM]* |
| *Dans le triangle KMN, (BL) est parallèle à (MN) et B est le milieu de [KM]* | *Si dans un triangle une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.* | *L est le milieu de [KN].* |

*La première propriété est connue dès la classe de cinquième, la seconde fait partie du programme de quatrième. Aussi doit-on donner ce problème après le chapitre « Triangles et droites parallèles », ce qui permet un réinvestissement d'une propriété qui vient d'être vue.*

*Cette présentation de la démonstration offre un environnement où le statut d'une proposition correspond à sa position géographique dans le tableau, qui permet de bien mettre en évidence les trois composantes de chaque pas de raisonnement. En réduisant les passages d'un pas à un autre à un aspect purement technique (remplir un tableau), cette pratique permet aux élèves de se consacrer à la recherche de fond de la solution, ceux-ci n'ayant plus de question à se poser sur sa rédaction.*

n°4 – Avec des nombres

On choisit n'importe quel nombre, on lui retranche 4 ; on multiple le résultat obtenu par –3 ; à ce nouveau résultat, on ajoute le triple du nombre de départ. On trouve toujours le même résultat final. Pourquoi ?

*Il n'y a pas qu'en géométrie qu'on fait des démonstrations. La question laisse la place à l'expérimentation des élèves, qui débouche sur une conjecture.*

n°5 – Une petite démonstration (manuel *Cinq sur Cinq, 4ème*, Hachette, 2002)

1. a) Marquer trois points *R*, *S*, *T* alignés.

b) Construire la médiatrice *d* du segment [*RS*] et la médiatrice *d'* du segment [*ST*].

c) Sur la figure, coder les informations contenues dans l'énoncé.

d) Formuler une conjecture concernant les droites *d* et *d'*.

1. Recopier et compléter :

a) ***Données (ou hypothèses)*** ***Résultat (ou conclusion)***

*d* est la médiatrice du … [*RS*] donc $d \perp (RS)$

*d'* est la … du segment [*ST*] donc *d'*…(*ST*)

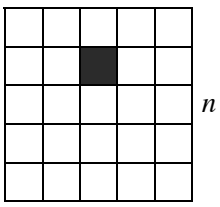
b) Les … *R*, *S* et *T* étant …, les droites (*RS*) et (*S.*) sont confondues.

Or, si deux … sont perpendiculaires à une même troisième …, alors elles sont … .

Par conséquent : … // …

*La conjecture est facile à formuler, il y a peu de risque d'erreur. Les connaissances en jeu sont simples, relatives à la classe de cinquième. La structure du raisonnement déductif est bien mise en évidence. Les élèves vont facilement produire un texte qui sera celui d'une démonstration correcte.*

n°6 – Le polymino




On considère un quadrillage à mailles carrées identiques, privé d'une case (un exemple est dessiné ci-contre).

Est-il possible de le paver avec des dominos ?

*L'entrée dans ce problème est facile, les connaissances en jeu sont élémentaires : savoir ce qu'est un nombre pair, calculer l'aire d'un carré, comprendre ce que l'on appelle un pavage. La preuve que le pavage est possible dans certains cas passe par l'exhibition d'un pavage, mais, pour l'impossibilité du pavage, la preuve devient nécessaire : si, après plusieurs essais, on ne trouve pas de pavage qui convienne, on ne peut pas en tirer la conclusion que le pavage est impossible.*

n°7– Que deux diviseurs

Si l'on prend n'importe quel nombre entier naturel, sauf 0, qu'on le multiplie par l'entier qui le précède et qu'à ce produit, on ajoute 11, on obtient un résultat qui n'a que deux diviseurs.

Vrai ou faux ?

*Les élèves vont expérimenter dans le domaine numérique, avant de se faire une opinion. Les nombres entiers de 1 à 10 fournissent des exemples à cette proposition. On obtient un contre-exemple en prenant n = 11. Il s'agit d'un travail sur le vrai et le faux en mathématiques. C'est un contre-exemple qui donne la preuve que la proposition est fausse.*

n°8 – Quadrilatères

Est-il possible de trouver un quadrilatère qui a un seul angle droit ?

Est-il possible de trouver un quadrilatère qui a exactement deux angles droits ?

Est-il possible de trouver un quadrilatère qui a exactement trois angles droits ?

*L'entrée dans le problème est facile. Pour prouver que c'est possible, il suffit d'exhiber l'objet qui convient. Mais pour prouver que ce n'est pas possible, il faut faire autrement. La recherche de quadrilatères, initiée dans les deux premières questions et n'aboutissant pas dans la troisième, peut faire naître le doute sur l'existence d'un quadrilatère comportant exactement trois angles droits et motiver la preuve.*

*Des éléments d'une mise en œuvre en classe*

a. La recherche du problème et l'écriture de la démonstration sont clairement distinguées, par exemple, dans des séances distinctes ou…
b. Une seule séance est consacrée à ce problème.
c. Les élèves sont répartis en groupes de trois ou quatre. Ils cherchent le problème pendant une heure. Le professeur ne répond à aucune question relative au problème.
d. Les élèves sont répartis en groupes de trois ou quatre. Le professeur circule d'un groupe à l'autre et propose des pistes à la demande, de manière à ce que presque tous les élèves aient rédigé une démonstration à la fin de la séance.
e. Les élèves cherchent individuellement ou avec leurs voisins pendant quelques minutes. Le professeur passe dans les rangs pour aider à l'écriture de la démonstration, en mettant en évidence la structure des pas et leur articulation.
f. Chaque élève cherche individuellement le problème et doit rédiger, avec ou sans l'aide du professeur, un texte conforme aux règles du raisonnement déductif, en mettant en évidence hypothèse, propriété et conclusion, pour chaque pas.
g. Le professeur propose une fiche d'aide pour la rédaction de la démonstration, mettant en évidence la structure ternaire des pas et leur articulation.
h. Chaque élève cherche individuellement le problème et doit rédiger un texte montrant son expérimentation sur des exemples, ses conjectures, proposant des pistes, même si elles n'aboutissent pas.
i. Chaque groupe cherche le problème et doit rédiger un texte montrant son expérimentation sur des exemples, ses conjectures, proposant des pistes, même si elles n'aboutissent pas.
j. Aucune figure n'est dessinée au tableau.
k. Les groupes doivent produire un texte qui sera examiné avec toute la classe lors de la prochaine séance (transparent, affiche, feuille qui sera photocopiée sur un transparent…).
l. Chaque groupe doit produire un texte conforme aux règles du raisonnement déductif, en mettant en évidence hypothèse, propriété et conclusion, pour chaque pas.
m. Au bout d'une demi-heure, le professeur demande aux élèves des propositions de stratégies, de théorèmes qui leur semblent pertinents ; toutes les propositions sont inscrites au tableau, même si elles ne sont pas pertinentes par rapport au problème.
n. Au bout d'une demi-heure, le professeur demande aux élèves des propositions de stratégies, de théorèmes qui leur semblent pertinents ; seules les propositions pertinentes par rapport au problème posé sont inscrites au tableau, pour permettre à toute la classe de poursuivre sa recherche.
o. Chaque élève doit produire un contre-exemple en explicitant pourquoi c'est un contre-exemple.
p. Aucune exigence de forme n'est formulée par le professeur.

q. Toutes les conjectures émises par les élèves sont récoltées par le professeur et écrites au tableau. Elles sont successivement débattues avec toute la classe, suivant leur pertinence par rapport au problème, leur valeur de vérité.
r. Certaines conjectures d'élèves ou propositions de pistes, qui risquent de créer le doute ou le trouble dans la classe, sont écartées. Les conjectures ou pistes qui requièrent un consensus assez large sont examinées avec toute la classe.
s. Le professeur rédige une démonstration au tableau sous la dictée des élèves.
t. Le professeur envoie au tableau un élève qui a trouvé afin qu'il propose sa solution à toute la classe.
u. La séance se termine par une liste de pistes à explorer par les élèves pour la séance suivante.
v. Chaque élève doit rédiger sa démonstration pour la fin de la séance ou pour une séance suivante.
w. Les textes produits sont corrigés par le professeur.
x. Le professeur organise sa deuxième séance en fonction des résultats de la recherche des élèves : il pointe les résultats obtenus, montre les pistes abandonnées en donnant les raisons de leur abandon, propose de résoudre certaines conjectures obtenues, vraies ou fausses.
y. Les preuves des groupes sont proposées à toute la classe qui doit se prononcer sur leur validité en explicitant ses critères.
z. Certaines preuves individuelles sont proposées à toute la classe qui doit se prononcer sur leur validité en explicitant ses critères.

## 2. Valeurs des variables retenues

Pour l'analyse des exercices donnés à choisir

| *Enoncés*<br>*Variables* | *n°1* | *n°2* | *n°3* | *n°4* | *n°5* | *n°6* | *n°7* | *n°8* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *rapport sujet-cours pour niveaux 4ème ou inférieurs* | *étroit* | *étroit* | *étroit* | *lointain* | *étroit* | *lointain* | *étroit* | *étroit* |
| *rapport sujet-cours pour niveau 3ème* | *lointain* | *lointain* | *étroit* | *lointain* | *lointain* | *lointain* | *lointain* | *lointain* |
| *rapport sujet-cours pour niveaux 2nde ou supérieurs* | *lointain* | *lointain* | *lointain* | *lointain* | *lointain* | *lointain* | *lointain* | *lointain* |
| *ouverture* | *1* | *0* | *0* | *2 ou 0** | *0* | *2* | *2* | *2* |
| *nature de la tâche* | *recherch-argum* | *techni-forme* | *techni-forme* | *recherch* | *techni-forme* | *recherch* | *vrai/faux* | *vrai/faux* |
| *cadre* | *g* | *g* | *g* | *n-a* | *g* | *d-ar* | *ar* | *g* |

**2 pour des niveaux inférieurs à la seconde, sinon 0*
*** pour des niveaux inférieurs à la seconde, sinon technique-formelle*

Pour l'analyse des éléments de mise en œuvre

| *Valeurs de la variable OT* | *1* | *2 ou plus* |
|---|---|---|
| *Eléments de mise en œuvre indiquant que OT prend cette valeur* | *b, d* | *a, b, k, u, x* |

| *Valeurs de la variable IS* | *2* | *0* | *1* |
|---|---|---|---|
| *Eléments de mise en œuvre indiquant que IS prend cette valeur* | *c, d, i, k, l, m, n, x, q, r, y, z* | *e, f, h* | |

| *Valeurs de la variable PI* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|
| *Eléments de mise en œuvre indiquant que PI prend cette valeur* | *e, g* | *d, n, r* | *c, j, m, q, u, x, y, z* |

| *Valeur de la variable RS* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|
| *Eléments de mise en œuvre indiquant que RS prend cette valeur* | *e, g, s, t, w, n, r* | | *c, h, i, k, m, o, q, u, x, y, z* |

| *Valeurs de la variable F* | *libre* | *ternaire* | *exp* |
|---|---|---|---|
| *Eléments de mise en œuvre indiquant que F prend cette valeur* | *k, p* | *e, f, g, l* | *h, i* |

## 3. Etude des réponses des vingt-deux enseignants

Les raisons données par les enseignants peuvent modifier légèrement les éléments de conception que l'on aurait relevés au vu seulement des choix d'énoncés et de gestion. Dans un premier temps, nous donnons les analyses individuelles des réponses des enseignants, puis un tableau récapitualtif des conceptions globales.

### Analyse individuelle des réponses des enseignants

*Enseignant n°1*

Ce tableau récapitule ses choix et ses commentaires :

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 3* | *8 : « montre l'importance de la démonstration, travail sur exemple et démonstration, → nécessité de la preuve* | *c, y, m* |

Les éléments de conception induits par les choix :

| *Ex* | *conception* | *variable : cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *?* | *2* | *2* | *2* | *ternaire* |
| *3* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *P renforcée* |

Nous éliminons *nonV* d'après les choix de mise en œuvre, nous ajoutons *G* puisque la variable *cadre* prend deux fois la valeur *g*.

| *La conception globale* | *n°1* | *nonCOP, AC, V, R, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°2*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 3* | *« Mise en œuvre du contre-exemple, si exemple non trouvé, il faut démontrer, faire appel à des propriétés précédentes, faire appel à un exo type 3 ensuite pour rédiger la réponse de la question 3 (sous forme de tableau, puis écriture). »* | *a, d, m, p, y…* |

| *Ex* | *conception* | *variable : cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *?* | *2* | *1* | *1* | *ternaire* |
| *3* | *nonCOP, AC, nonV,* | *g* | *conception* | | *V et R renforcées* | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *P renforcée* |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *P* | | | | | | | |

Les éléments *V* et *R* se trouvant annulés deux fois, nous les enlevons de la conception. Nous voyons là l'importance de la mise en œuvre. En effet l'enseignant choisit, pour sa classe, de circuler d'un groupe à l'autre et de proposer des pistes à la demande, de manière à ce que presque tous les élèves aient rédigé une démonstration à la fin de la séance. La responsabilité scientifique et la prise d'initiative des élèves ne sont pas bien grandes dans ce cas, l'enjeu de vérité attaché aux énoncés choisis s'en trouve dénaturé.

| *La conception globale* | *n°2* | *nonCOP, AC, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°3*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *6ème* | *8,7* | *8 : « preuve demandée simple et nécessité d'un exemple pour prouver. Troisième question impossible avec exemple, expérimentation donne pas de résultat. »*<br>*7 : « Contre-exemple suffit à preuve et nécessité de preuve. »* | *x, y, r, i, p*<br>*h, m, p, q* |

| *Ex* | *conception* | *variable : cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *?* | *1* | *1* | *1* | *libre* |
| *7* | *nonCOP, AC, V, R* | *ar* | *conception* | | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *nonP renforcée* |

| *La conception globale* | *n°3* | *nonCOP, AC, nonG, nonP* |
|---|---|---|

*Enseignant n°4*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 4* | *« Par élimination… n°1 et 2 pas mal mais supposent qu'ils sachent déjà rédiger une démonstration. »* | *b, o, p, q puis b, o* |

| *Ex* | *conception* | *variable : cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *1* | *2* | *2* | *2* | *?* |
| *4* | *COP, R, V, V* | *n-a* | *conception* | *V et R annulées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | |

| *La conception globale* | *n°4* | *nonCOP, AC, V, R, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°5*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* | *Commentaires* |
|---|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 3* | *8 : « entrée facile dans le problème : tout le monde peut produire quelque chose, nécessité de produire une preuve »*<br>*3 : mise en évidence des 3 pas de raisonnement. »* | *b, m, s*<br><br>*i, y* | *Pour m : moins de ½ h* |

On note une contradiction entre les choix de mise en œuvre : *s* (le professeur rédige une démonstration au tableau sous la dictée des élèves) et *y* (les preuves des groupes sont proposées à toute la classe…)

| *Ex* | *conception* | *variable : cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *1* | *1* | *1* | *1* | *ternaire* |
| *3* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | *V et R annulées* | | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°5* | *nonCOP, AC, nonV, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°6*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* | *Commentaires* |
|---|---|---|---|---|
| *4ème* | *6, 7* | *6 : « Entrée facile et faisant peu appel à des arguments d'autorité qui auraient pu être forgés dans les classes antérieures (n°8 dangereux si cela a été déclaré vrai auparavant), entrée autre que géométrique (on en fera déjà assez en géométrie), priorité au défi, à l'implication, au foisonnement d'idées par rapport à la mise en forme et à la rédaction claire dès le commencement. »*<br>*7 : « ou adapté en n(n – 1) – 41 pour essayer de contrer l'accumulation d'ex. qui entraînent le vrai. »* | *q…*<br><br><br><br>*x, h* | *Narration de recherche* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *6* | *COP, R, V, V* | *d-ar* | | *?* | *2* | *2* | *2* | *exp* |
| *7* | *nonCOP, AC, V, R* | *ar* | *conception* | | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *nonEP* |

| *La conception globale* | *n°6* | *COP, AC, R, V, nonEP, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°7*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *7, 1* | *7 : « En reformulant avec un vocabulaire plus adapté pour travailler sur le vrai et le faux. »*<br>*1 : « Pour justifier et convaincre tout le monde avec des propriétés. »* | *b, h, m,*<br><br>*m, p, s, v, x* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *7* | *nonCOP, AC, V, R* | *ar* | | *> 2* | *?* | *2* | *2* | *exp* |
| *1* | *nonCOP, AC, V, FM, FM, V* | *g* | *conception* | *V et R renforcées* | | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *nonEP* |

| *La conception globale* | *n°7* | *nonCOP, AC, FM, V, R, nonEP, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°8*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *2, 4* | *2 : « géométrie : évidence d'après dessin, mais est-ce vrai à tous les coups ? »*<br>*4 : « algèbre : essai sur plusieurs choix, mais est-ce vrai à tous les coups ? mise en équation, maîtrise vocabulaire. »* | *a, j, h, m, v*<br>*b, h, m, t* |

Le choix simultané des éléments de mise en œuvre *h*, *m* et *t* est contradictoire : faire écrire toutes les propositions des élèves au tableau et faire écrire sa solution par un élève. Que fait-on des propositions des autres élèves ? Une autre contradiction apparaît dans le fait de choisir le problème 2 et celui de demander aux élèves de décrire leur démarche expérimentale.

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | | *1* | *0* | *2* | *?* | *exp* |
| *4* | *COP, R, V, V* | *n-a* | *conception* | *V et R annulées* | | *V et R renforcées* | | *nonEP* |

La présence simultanée de *COP* et *nonCOP* nous conduit au choix de *COP*.

| *La conception globale* | *n°8* | *COP, AC, V, R, P, nonEP, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°9*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* | *Commentaires* |
|---|---|---|---|---|
| *4ème* | *2, 3* | *2 : « structurer la démonstration, révision propriétés 5è et réciproque. »*<br>*3 : « autre façon de structurer son raisonnement, réinvestissement cours. »* | *q +*<br><br>*f* | *correction avec contre-ex. si c'est faux* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | | *?* | *1* | *2* | *0* | *ternaire* |
| *3* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | | | *V ou R renforcées* | | *P renforcée* |

Même si *V* ou *R* se trouvent renforcées, le choix des exercices 2 et 3 n'induisent pas ces éléments de conception, que nous ne retenons pas.

| *La conception globale* | *n°9* | *nonCOP, AC, nonV, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°10*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 2* | *8 : « nécessité d'apporter une preuve pour convaincre une partie de la classe → démonstration. »*<br>*2 : « construction d'un schéma logique (en partant du bas) qui facilitera la phase de rédaction. »* | *a, q, z, e*<br>*a, n, z, q, e, s* |

Il apparaît une contradiction dans le choix simultané de l'élément *e* (Le professeur aide à l'écriture de la démonstration en mettant en évidence la structure des pas et leur articulation) et le débat sur les propositions des élèves que l'on peut envisager au travers des éléments *q* et *z*.

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *?* | *0* | *1* | *0* | *ternaire* |
| *2* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | | | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°10* | *nonCOP, AC, nonV, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°11*

| *Niv* | *Couple énoncés* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre* |
|---|---|---|---|

| | *choisi* | | *choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *1, 8* | *1 : « les propriétés sont données (elles ne sont donc pas à chercher). Problème facile à comprendre, pas d'autre difficulté que celle de la démonstration. »*<br>*8 : « Problème simple qui nécessite une preuve. »* | *m, y*<br><br>*m, y* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *nonCOP, AC, V, FM, FM, V* | *g* | | *?* | *2* | *2* | *2* | *?* |
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | *conception* | | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | |

| *La conception globale* | *n°11* | *nonCOP, AC, FM, V, R, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°12*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* | *Com-mentaires* |
|---|---|---|---|---|
| *?* | *8, 1* | *8 : « intérêt de la démonstration, on ne peut pas toujours se fier à ce que l'on voit, à la portée de tous les élèves, pas de connaissances préalables à avoir sur les propriétés de 5ème.»*<br>*1 : « utilisation des propriétés de la classe de 5ème, on amorce le schéma déductif (on sait que… propriété…conclusion) »* | *b, c, p, m, y*<br><br>*b, f, z*<br>*m, y* | *c : pas une heure* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *1* | *2* | *2* | *2* | *ternaire* |
| *1* | *nonCOP, AC, V, FM, FM, V, P (commentaire)* | *g* | *conception* | *V et R annulées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°12* | *nonCOP, AC, FM, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°13*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *1, 2* | *1 : « J'ai choisi sans trop de conviction le problème n°1 car les élèves peuvent facilement faire quelques essais pour émettre une conjecture. Les propriétés pouvant être utilisées sont données, donc le passage à* | *b, h, m, z, v* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | *la justification peut être facilité. Par contre, j'aurais préféré comme premier problème, un exercice qui met en évidence la nécessité de la preuve. »*<br>*2 : « Le 2nd problème me semble bien pour expliquer les différentes parties d'une démonstration. Un schéma est plus ludique pour les élèves. »* | *b, h, m, z, v* |

Une contradiction apparaît entre l'intention de choisir un premier problème où apparaisse la nécessité de la preuve et :

- d'une part, le choix du problème n°2 où l'enjeu de vérité est nul : ce problème de la nécessité de la preuve semble résolu après le travail sur le premier problème ;
- d'autre part, le fait que l'enseignant n'ait pas choisi un autre problème que le n°1 où se révèle plus fortement la nécessité de la preuve.

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *nonCOP, AC, V, FM, FM, V* | *g* | | *1* | *1* | *2* | *2* | *ternaire* |
| *2* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | *V annulée* | | *V renforcée* | *V renforcée* | *P renforcée* |

| | | |
|---|---|---|
| *La conception globale* | *n°13* | *nonCOP, AC, FM, V, P, G* |

*Enseignant n°14*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *?* | *6, 3* | *6 : « Sortir du cadre purement mathématique afin de se concentrer sur la logique. Ne pas ajouter au problème de la logique le problème de la formalisation mathématique. »*<br>*3 : « Faire ressortir quels sont les éléments que l'on a le droit d'utiliser dans une démonstration, comment s'articule-t-elle ? »* | *d*<br><br>*q, s* |

Une contradiction importante apparaît entre le choix du problème n°6 (il faut noter que l'enseignant pense qu'il « sort du cadre purement mathématique ») et la gestion prévue puisque les élèves doivent avoir une solution au bout d'une heure. Ainsi l'enjeu de vérité qui est important au départ, dans le problème lui-même, est dénaturé par sa mise en œuvre en classe.

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *6* | *COP, R, V, V* | *d-ar* | | *1* | *2* | *1* | *2* | *ternaire* |
| *3* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | *V et R annulées* | *V et R renforcées* | *V et R annulées* | *V et R renforcées* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°14* | *COP, AC, V, P, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°15*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *5, 1* | *5 : « Figure simple. Propriétés nécessaires bien connues depuis la 6è. Rédaction facile pour la plupart des élèves. »*<br>*1 : « Figure intéressante (points A, D, C alignés ou pas). Premières discussions sur l'utilisation d'une propriété ou de sa réciproque. »* | *e*<br><br>*c, l, y* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *5* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | | *?* | *0* | *0* | *0* | *ternaire* |
| *1* | *nonCOP, AC, V, FM, FM, V* | *g* | *conception* | | | *V annulée* | *V annulée* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°15* | *nonCOP, AC, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°16*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *1, 3* | *1 : « Utilise des propriétés très simples. La formulation du sujet souligne qu'on ne peut pas dessiner toutes les figures. »*<br>*3 : « Problème plus compliqué et donc la conclusion paraîtra moins « évidente » pour les élèves sur le dessin. Schématisation intéressante de la démonstration (moins compliqué à présenter avec le déductogramme). »* | *b, p, q, s*<br><br>*a, d, g, i, q, v* |

Le choix des éléments *G* (Le professeur propose une fiche d'aide pour la rédaction de la démonstration…) et *Q* (Toutes les conjectures sont débattues…) pourrait, à première vue, sembler contradictoire, mais l'enseignant a prévu de distinguer clairement la recherche du problème et l'écriture de la preuve : la recherche est relativement libre, l'écriture est beaucoup plus dirigée.

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *nonCOP, AC, V, FM, FM, V* | *g* | | *1* | *2* | *1* | *1* | *ternaire* |
| *3* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | *V annulée* | *V renforcée* | *V annulée* | *V annulée* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°16* | *nonCOP, AC, FM, P, G* |
|---|---|---|

*Enseignant n°17*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* | *Commentaires* |
|---|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 7* | *« * Introduire le contre-exemple qui est l'une des armes les plus importantes de la démonstration. * Le différencier de l'exemple et la démonstration. * Voir qu'il y a de la démonstration en géométrie et en algèbre »* | *c, k, y* | *Peut-être la moitié des groupes sur l'un et l'autre moitié sur le deuxième énoncé, ou alors, les deux problèmes à chercher et un seul à présenter. Moitié du temps pour la recherche et l'autre partie pour préparer la présentation.* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *?* | *2* | *2* | *2* | *libre* |
| *7* | *nonCOP, AC, V, R* | *ar* | *conception* | | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *nonP renforcée* |

| *La conception globale* | *n°17* | *nonCOP, AC, V, R, nonP, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°18*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *2nde* | *2, 4* | *2 : « Le premier est un exercice très simple où on met bien en évidence la place des hypothèses, des propriétés et de la conclusion (grâce au schéma). Il permet de revoir les règles de démonstration en géométrie. »* | *f, t, z (b)* |
| | | *4 : « Le deuxième problème montre la place aussi de la démonstration en calcul algébrique. Les élèves doivent utiliser la calcul littéral, faire une conjecture et essayer seul d'expliquer pourquoi il faut faire des tests. »* | *h, t, z, (b)* |

On peut être étonné du choix de l'énoncé n°2 pour un niveau de seconde.

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2* | *COP, nonV, P* | *g* | | *?* | *1* | *1* | *1* | *ternaire* |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *4* | *COP, R, V, V* | *n-a* | *conception* | | | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°18* | *COP, P, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°19*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 4* | *8 : « Faire la différence entre preuve et exhibition d'un exemple où ça marche. Une même formulation de question amène à fournir des preuves différentes (exemple, démonstration). Les questions sont assez ouvertes, ce qui permet de laisser plusieurs pistes aux élèves. Révisions de 5ème sur les parallélogrammes ou les angles. »*<br>*4 : « Utilisation du calcul littéral pour faire une démonstration. Cela change des démonstrations en géométrie. Pour répondre les élèves vont devoir faire des tests et émettre une conjecture. »* | *b, d, j, n, y*<br><br>*b, f, j, q, t, z* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *1* | *2* | *1* | *0* | *ternaire* |
| *4* | *COP, R, V, V* | *n-a* | *conception* | *V et R annulées* | *V et R renforcées* | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *P renforcée* |

| *La conception globale* | *n°19* | *COP, AC, P, nonG* |
|---|---|---|

*Enseignant n°20*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *8, 2* | *8 : « constat qu'on ne peut pas trouver un quadrilatère qui a exactement trois angles droits donc utilité d'expliquer pourquoi donc de le prouver. »*<br>*2 : « Mise en place de la constitution des chaînons déductifs pour mettre en place « on sait que … Propriété… conclusion. »* | *z, e, a, s, q*<br><br>*g, e, a, s* |

On note des contradictions entre les éléments de mise en œuvre choisis à propos du même problème : *e* (Les élèves cherchent individuellement ou avec leurs voisins quelques minutes. Le professeur passe dans les rangs pour aider à l'écriture de la démonstration, en mettant en évidence la structure des pas et leur articulation) et *q* (Toutes les conjectures sont récoltées, débattues avec la classe…).

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | | *?* | *0* | *0* | *0* | *ternaire* |
| *2* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | | | *V et R annulées* | *V et R annulées* | *P renforcée* |

| | | |
|---|---|---|
| *La conception globale* | *n°20* | *nonCOP, AC, P, nonV, G* |

*Enseignant n°21*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* |
|---|---|---|---|
| *4ème* | *1, 5* | *1 : « Travail sur le « toujours parallèles » et donc notion du vrai/faux en maths/ exemples, contre-exemples. Mettre en évidence qu'une démonstration s'appuie sur des propriétés (définir le statut de la propriété). »*<br>*5 : « Intérêt de la figure et du codage des info données par le texte ⇒ travailler le « on sait que ». Intérêt de la conjecture ⇒ travailler le « donc ». la deuxième partie de l'exo ne m'emballe pas par sa forme : texte à trous, mais il marque, selon moi, des chaînons dans la déduction . »* | *b, h, z, v*<br>*b, h, m, z, v* |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *nonCOP, AC, V, FM, FM, V* | *g* | | *1* | *0* | *2* | *1* | *ternaire* |
| *5* | *nonCOP, AC, nonV, P* | *g* | *conception* | *V annulée* | | *V renforcée* | *V annulée* | *P renforcée* |

| | | |
|---|---|---|
| *La conception globale* | *n°21* | *nonCOP, AC, FM, nonV, P, G* |

*Enseignant n°22*

| *Niv* | *Couple énoncés choisi* | *Raisons du choix* | *Mise en œuvre choisie* | *Commentaire* |
|---|---|---|---|---|
| *4ème* | *7, 8* | *« Il s'agit de problèmes dont l'énoncé ou les commentaires n'induisent pas de piste ou méthode de résolution et n'imposent pas de schéma de rédaction. »*<br>*7 : « met en évidence la notion de contre-exemple et montre l'insuffisance de la multiplication des exemples. »*<br>*8 : « permet de montrer une* | *i, k*<br>*i, k, x, y* | *k : précédé d'un temps (entre 5 et 15 min) d'appropriation individuelle)* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *inexistence. »* | | |

| *Ex* | *conception* | *variable cadre* | *Mise en œuvre* | *OT* | *IS* | *PI* | *RS* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *7* | *nonCOP, AC, V, R* | *ar* | | *> 2* | *2* | *2* | *2* | *libre* |
| *8* | *nonCOP, AC, V, R* | *g* | *conception* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *V et R renforcées* | *nonP renforcée* |

| *La conception globale* | *n°22* | *nonCOP, AC, V, R, nonG* |
|---|---|---|

**Tableau récapitulatif des conceptions globales**

| | | *COP* | *nonCOP* | *AC* | *V* | *R* | *P* | *nonP* | *nonV* | *nonEP* | *FM* | *nonG* | *G* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n°1* | *nonCOP, AC, V, R, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°2* | *nonCOP, AC, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°3* | *nonCOP, AC, nonG, nonP* | | | | | | | | | | | | |
| *n°4* | *nonCOP, AC, V, R, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°5* | *nonCOP, AC, nonV, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°6* | *COP, AC, R, V, nonEP, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°7* | *nonCOP, AC, FM, V, R, nonEP, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°8* | *COP, AC, V, R, P, nonEP, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°9* | *nonCOP, AC, nonV, P, G* | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n°10* | *nonCOP, AC, nonV, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°11* | *nonCOP, AC, FM, V, R, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°12* | *nonCOP, AC, FM, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°13* | *nonCOP, AC, FM, V, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°14* | *COP, AC, V, P, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°15* | *nonCOP, AC, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°16* | *nonCOP, AC, FM, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°17* | *nonCOP, AC, V, R, nonP, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°18* | *COP, P, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°19* | *COP, AC, P, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| *n°20* | *nonCOP, AC, P, nonV, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°21* | *nonCOP, AC, FM, nonV, P, G* | | | | | | | | | | | | |
| *n°22* | *nonCOP, AC, V, R, nonG* | | | | | | | | | | | | |
| | *Total* | *5* | *17* | *21* | *10* | *8* | *15* | *2* | *5* | *3* | *6* | *10* | *12* |

## 4. Le débat sur les choix des enoncés

Il s'agit de la retranscription d'un enregistrement vidéo. Le débat se situe en fin de formation. Les réponses écrites au questionnaire des enseignants ont été dépouillées.

Une des deux formatrices (M) annonce que c'est l'énoncé n°8 qui a été très majoritairement choisi par les enseignants qui suivent le stage, sans qu'il ait été différencié s'il s'agissait du premier ou deuxième choix. Elle demande aux stagiaires de s'exprimer sur les raisons de leurs choix.

L'enseignant n°6[156] répond le premier :

- Moi, éventuellement, je peux commencer un peu à contre-courant, histoire de mettre de l'ambiance… L'exercice n°8, je l'ai regardé, je l'ai trouvé bien, mais j'ai trouvé qu'il y avait un risque important que les élèves prennent une position d'autorité par rapport à des savoirs de sixième ou de cinquième, moi je me suis placé au niveau de quatrième. Et c'est un risque qui m'a semblé trop important pour commencer là-dessus. Parce que si justement, on veut mettre en place l'envie d'argumenter, de démontrer, il faut éviter au maximum à mon avis les arguments « c'est comme ça, parce qu'on l'a vu l'année dernière ».
- Moi, je commence la démonstration en sixième avec le n°8, pas formalisée comme en quatrième.
- Moi je l'ai choisi (le n°8), pour la même raison, au niveau sixième. Au niveau quatrième, ils savent trop de choses sur les quadrilatères et ça peut les bloquer. Alors qu'au niveau sixième, on a vu les petites propriétés avec les droites parallèles et les droites perpendiculaires à une même troisième, et moi, je l'ai essayé avec ma classe de sixième, j'ai fait un travail en groupe et sur les 5 groupes, il y en a quand même deux qui ont trouvé tout de suite qu'il fallait utiliser les propriétés qu'on avait vues il n'y a pas longtemps, et les autres ont eu un peu plus de mal à mettre en œuvre, à tracer un quadrilatère, ils voulaient absolument que les trois angles droits…
  En quatrième, ils savent trop de choses sur les quadrilatères, ça peut les bloquer, ils ne vont pas voir l'intérêt de la preuve.
  Alors qu'en sixième, les propriétés sur les droites parallèles et les droites perpendiculaires, c'est frais, et ils vont avoir envie de les utiliser.
  … ils ne vont pas voir l'intérêt de la preuve dans la dernière question.
- Sur l'histoire de l'utiliser en sixième, dit l'enseignant n°22, j'en sais rien, j'ai pas de sixième, mais la dernière, ça me paraît un peu compliqué, on va pas vraiment le formaliser, tu disais une mini-démonstration, mais pour moi, c'est quand même autre chose qu'une mini-démonstration, si on veut le rédiger correctement autrement, par une méthode constructive.… Mais, même sans passer à la phase écrite, sans passer à un niveau de rédaction élevé, juste de formaliser que, bien tiens, j'ai construit mon quadrilatère qui en avait trois, donc je vais démontrer que ça implique nécessairement que j'en ai un quatrième.…

[156] Les numéros attribués aux enseignants renvoient à l'annexe 3 précédente.

Par contre, du coup, ça me paraît intéressant en quatrième aussi. Parce que, bon, ils ont quelques préjugés sur les quadrilatères, mais, en même temps, il ne faut pas surévaluer les souvenirs qu'ils ont des propriétés sur les quadrilatères de sixième et cinquième. C'est pas parce qu'une fois on leur a dit s'il y en a trois, il y en a quatre, qu'ils vont arriver en quatrième, qu'ils vont le rebalancer tout de suite. Par contre je le complèterais un peu, parce que… par rapport au travail sur l'argumentation, il y a deux choses : il y a…on prouve par un exemple et on prouve que ça n'existe pas, mais il y a pas vraiment de construction, prouver par l'exemple, c'est bien, mais ça marche pas très souvent. Montrer qu'on peut en exhiber un de quadrilatère tel que…, c'est …pas inintéressant, mais c'est quand même pas l'essentiel du travail de démonstration qu'on fait d'habitude. Moi, je le complèterais, pour un travail en quatrième, pour montrer un certain nombre de types d'argumentation qui peuvent exister : montrer par l'exemple, montrer que ça n'existe pas, ça veut dire qu'il ne suffit pas de montrer un contre-exemple, par exemple, ce genre de choses. Peut-être en complétant, en essayant d'imaginer deux, trois autres cas autour, qui nécessitent plusieurs pas de démonstration, ce genre de choses. Enfin, pas forcément non plus en travail introductif.

- En sixième, ils y arrivent bien à démontrer dans la troisième… Enfin ils le voient assez vite. Parce que si deux droites sont perpendiculaires à deux droites, elles sont parallèles. Et il n'y a pas besoin d'utiliser autre chose.
- Et après, quand t'as deux parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc t'as deux pas de démonstration, déjà.
- Oui, mais bon…
- Mais ils le voient, c'est vrai qu'ils le voient bien…
- Ah, ils le voient, ça…
- Rédiger, après tu peux pas avoir le même niveau d'exigence pour une rédaction en sixième qu'en quatrième, sinon… Là, c'est pour une première approche sans comment formaliser la rédaction, c'est pas… c'est pas sur la rédaction, c'est sur le fait de voir des choses, voir à quoi ça sert, l'intérêt d'utiliser les propriétés qu'on a vues, sinon il y a pas d'intérêt d'avoir vu ces propriétés en sixième : voir comment les utiliser.
- Mais quand tu dis, quand tu dis, quand tu utilises comme tu as dit le « ça se voit », est-ce qu'on est dans le champ de la démonstration.
- Ben ça se voit en utilisant les propriétés qu'ils ont vues.
- Oui…enfin… Je suis pas sûr que dans leur tête, ça soit aussi clair que ça.
- Et en plus dans le n°8, il y a nécessité d'expérimentation. Et ça, c'est intéressant aussi. Ils expérimentent, ils expérimentent… et
- Est-ce qu'il y en a qui l'ont utilisé en quatrième ? demande MC (une des deux formatrices) … Non ? Et en sixième, est-ce que vous avez énoncé ce que… ce qui a été trouvé finalement.

Les enseignants ne comprennent pas ce que veut dire MC, qui reprend :

- Eh ben, est-ce que vous avez énoncé par exemple, si un quadrilatère a trois angles droits, alors il en a quatre.

– A l'oral oui… à l'oral… euh, ils me l'ont dit, ils me l'ont dit, oui…
– Parce que ça peut être intéressant de… de le noter dans le cahier, puis de s'en souvenir, finalement… euh… on a un résultat… enfin, les élèves ont démontré quelque chose, c'est un théorème, c'est se familiariser avec les théorèmes aussi, reprend MC.

Les enseignants discutent entre eux, pendant que M écrit au tableau : « Il peut être intéressant d'écrire que l'on a démontré que si un quadrilatère a trois angles droits, alors il en a quatre. »

M demande qu'on prenne la parole pour toute l'assistance.

– Je sais pas, je parlais du théorème… en quatrième, on dit carrément que si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.
– Oui, mais on ne le dit pas sous la forme : « alors il en quatre », répond M.
– Non, justement, c'est ce que je disais…

On entend que « ça revient au même ».

– Bien sûr, ça revient au même, mais pas forcément pour les élèves, insiste M.
– Mais alors, on peut énoncer les deux, parce que, ce qui est proche de la démonstration, c'est la conclusion : il en a quatre… enfin, de la façon dont on a posé l'exercice, dit MC.
– Non mais, la conclusion de l'exercice lui-même…, reprend M.
– Rien n'empêche d'écrire les deux phrases, après de se dire …un quadrilatère qui … de…, ça, c'est un rectangle, répond MC.
– Ça, c'est une activité qu'on fait pas assez souvent en cours, insiste M. A la fin d'un exercice, essayer d'écrire : qu'est-ce qu'on a démontré ? Et après faire le lien avec le cours, parce que s'il a trois angles droits, alors il en quatre. Bon ben, s'il a quatre angles droits, c'est un rectangle, et voir différentes formulations de…
– Mais même en sixième, hein… En sixième, c'est pas plus compliqué que si deux droites sont parallèles, na, na, na s'il y en a une qui coupe l'une …c'est même moins compliqué, dit MC.
– Donc quelques personnes avaient choisi le n°5 ou 6. Est-ce que vous pourriez expliciter vos raisons ?… Deux de chaque. Deux qui ont choisi le 5, deux qui ont choisi le 6.
– Moi, dit l'enseignant n°21, j'avais choisi le 5… Je le trouvais intéressant sur le codage. Elle relit la question de l'exercice : « Sur la figure, coder les informations contenues dans l'énoncé. » Donc là, la consigne, elle est donnée, et par la suite, on la donne rarement. Et pourtant s'ils le font pas, ils sont souvent bloqués. Moi, je trouve que … une figure… sèche, ben, ils sont bloqués sur comment démarrer la démonstration, comment avoir une idée. Donc le fait que ce soit demandé au début… enfin, les exercices qu'on fait au début du chapitre, c'est demandé pour prendre un bon réflexe. Et du coup, ça fait travailler, donc la deuxième partie qui est « hypothèse-conclusion »… La troisième question, il y a… la question du codage, et ensuite, la question de la conjecture. Donc sur la

même figure, il faut que je fasse la différence entre ce que je sais et ce que je vois, ce qui est tout à fait le parallèle au niveau de la deuxième question, avec les hypothèses d'un côté et la conclusion de l'autre.. Donc je trouve intéressant le travail entre le tri des informations et la conclusion sur la figure, et du coup, dans la rédaction.… Alors mais j'avais mis une petite réserve, sur la deuxième partie, donc sur le texte à trous, j'avais écrit qu'il manquait des chaînons dans la déduction, c'est vrai, c'est pas vrai ?

– Entendons-nous bien…, enfin, je vois que tu redis ce que tu avais marqué sur ta feuille, répond M.
– Tu peux avoir changé d'avis, insiste MC.
– Mais non, j'ai pas changé d'avis.
– T'as pas changé d'avis.
– J'ai pas réfléchi plus, je change pas d'avis… sans réfléchir. Oui, je trouve qu'il manque les propriétés dans la deuxième partie…… justifier…

M relance le débat.

– Alors vous pouvez réagir ou dire, « oui, moi, j'ai choisi aussi pour ça », ou réagir « non, j'ai pas choisi justement à cause de ça… Allez-y.
– Enfin, moi, je l'aurais pas choisi parce que… enfin, ça dépend de l'objectif qu'on se fixe. Pour faire un travail sur la démonstration, je choisirais pas ça. Les remarques faites par … (enseignant n°21) sur le codage de la figure, ça, aucun problème là-dessus. Par contre, c'est la question 2, pour moi, c'est tout sauf de la démonstration de faire ça. En fait du texte à trous, de la même manière qu'on pourrait leur dire de souligner en vert le verbe et le machin, il y a même des choses qui me paraissent tenir d'un rigorisme… : « *d* est la médiatrice du », il y a trois petits points et il y a segment *RS* qui est déjà codé. Nous quand on l'écrit, on écrira pas « du segment *RS* », on le dira, mais c'est déjà codé entre crochets. Donc là on introduit des contraintes pour le gamin…, je pense qu'il y a plein de gamins, qui vont même pas comprendre… qui vont même pas imaginer ce qu'il faut mettre dans ces trois petits points. Donc on introduit un… on introduit une difficulté qui n'est pas liée à la difficulté de la démonstration. On est en train de mettre en place quelque chose qui est hyperformel, qui est hypercodifié au niveau de la façon de rédiger, peut-être dans l'idée qu'ils vont s'inculquer ce mode de pensée dans la tête, ça, je pense, c'est quand ils auront fait quelques années de démonstration qu'ils iront naturellement vers ça, et après… alors c'est une discussion à avoir : sur le fait de citer les propriétés, donc, moi, je trouvais déjà que ça en faisait beaucoup, alors Marjorie propose d'en rajouter dans le même sens, donc, là, ça fait plus, de citer une définition de médiatrice, de citer « si deux droites sont perpendiculaires à une même …, alors elles sont… », là, moi, c'est des trucs dont je ne vois pas l'intérêt. Parce que sur les copies, on se retrouve très souvent avec des élèves qui citent la propriété, qui récitent un théorème, éventuellement, in abstracto, ça veut dire que, dans le cours, ils ont appris Pythagore avec *ABC*, donc ils récitent Pythagore avec *ABC*, même si c'est *EFG*, dans l'exercice, et du coup, ils se sentent dédoinés de « comment je l'applique ? », « quel est le lien entre le théorème et l'exercice ? », donc, enfin moi, je sais qu'en ce qui me concerne, je leur demande pas de citer les

propriétés, je leur demande de citer leur nom : « d'après le théorème de Pythagore, le triangle est rectangle… », « D'après…, ce genre de choses.

– Elles ont pas toutes un nom.

– Oui, mais là, tu leur dis quoi ?

– Oui, mais sur des propriétés comme…, après je leur dis que ça fait partie du bagage mathématique commun. Si ils écrivent proprement l'un en dessous de l'autre, que, je (…) « *d* est perpendiculaire à (*RS*) », juste en dessous que « *d'* est perpendiculaire à (*RS*) », à condition de le reformuler parce que c'est aligné, ils écrivent ça, ils mettent « donc c'est parallèle ». Ca fait partie des propriétés… enfin, je veux dire…. Y compris nous, dans notre façon de fonctionner, il y a, à un moment ou à un autre, il y a quelque chose qui fait partie du bagage commun, qu'on n'explique plus, à condition que ça soit présenté de manière explicite.

Ceci cause des remous dans la salle.

– Ça c'est le gros problème, à partir de quel moment, on n'utilise plus les propriétés. Parce que, en seconde, deux droites parallèles à une même troisième, on l'écrit plus, ça je crois qu'on est tous d'accord. En sixième, on est tous d'accord sur le fait qu'on l'écrit, ou en tout cas, on l'énonce. Mais après, le problème, c'est en cinquième, en troisième, qu'est-ce qu'on fait ? Alors, celui que tu sais qu'il la maîtrise bien, tu lui dis, s'il ne l'écrit pas « ça va », celui que tu sais qu'il la connaît pas bien, petit à petit, tu lui dis qu'il te l'écrive, du coup, il y a forcément des choses qui sont fausses. C'est vrai que là-dessus, c'est pas…

– Oui, mais alors là, moi, je trouve que ça dépend. Enfin, parce que tu dis, là si c'est faux, mais, en cinquième ou en quatrième, ils font pas de démonstration dans l'espace. Ils savent que, si dans l'énoncé, t'as deux droites perpendiculaires à une même troisième, et que, dans la conclusion, t'as « montrer qu'elles sont parallèles »… Le gamin qui comprend rien, il recopie l'énoncé, il recopie la conclusion, il a tout bon.

– Mais c'est déjà qu'il a bien compris si il fait ça, quand même, dit l'enseignant n°11, c'est qu'il a bien compris ce qu'il fallait utiliser au départ, si… même s'il écrit pas, c'est qu'il raisonne juste le gamin.

– Pourquoi il raisonne juste ? S'il a appris une technique ? Si il recopie ses hypothèses, et que derrière, il recopie la conclusion…

– En général ils le font pas, ils inventent des hypothèses

– C'est à nous de réfléchir sur l'énoncé, ça veut dire : tu fais pas un énoncé dans lequel il y a juste « *d* parallèle à *d'*, *d''* parallèle à *d'*, montrer qu'elles sont perpendiculaires ».

– Oui, c'est ce que je dis, ça veut dire que tu fais une question où il y a plusieurs pas. S'il y a plusieurs pas…

– Non, tu peux très bien faire une question à un pas, mais dans l'énoncé, soit il y a une reformulation, soit il y a une information qui ne sert à rien, et je pense que sur ça, l'histoire de deux parallèles à une même troisième, etc…toutes ces propriétés-là, une présentation correcte de l'élève te permet de voir s'il a compris ou pas. Celui qui va te mettre clairement, en te mettant en évidence la

perpendicularité à une même troisième ou…, c'est qu'il a compris. Et celui qui te fait un charabia, qui te recopie l'énoncé justement, en te mettant « donc », parce qu'il entendu un jour qu'il fallait mettre un « donc », et qu'il te met la conclusion, celui-là, on peut raisonnablement imaginer qu'il y a pas eu de raisonnement derrière.

- Mais vous voyez que là, il y a une déviation, bon, je sais pas comment on pourrait le dire, vous divergez vers l'évaluation de la démonstration, réplique M. En fait vous cherchez à savoir si l'élève a compris, vous cherchez pas à savoir s'il a appris à faire une démonstration, vous cherchez à évaluer sa démonstration.
- Ben oui, …(…) on voudrait bien savoir si il sait, s'il comprend ce qu'il raconte… Evaluation
- L'évaluation, c'est pas forcément mettre une note, reprend M.

L'assistance semble d'accord.

- A chaque fois qu'un élève produit un travail…, il y a un rapport élève-professeur… Il est élève parce qu'il est son professeur. Evidemment qu'on cherche à comprendre s'il a compris ou pas.
- Non, moi, c'est pas ça que j'étais en train de dire, dit Stéphane[157], ce qu'il a dit, c'est pas tout à fait ce que tu[158] dis, ni ce que tu me fais dire, il a dit « on peut savoir s'il a compris ». Parce que tu te dis, s'il a écrit l'hypothèse correcte, la conclusion correcte et que, il a pas dans sa tête un théorème dans le cours, qui permet de passer de l'hypothèse à la conclusion, toi[159] tu dis « moi, je peux pas savoir », « toi, tu dis, moi je pense qu'il a compris » parce qu'il arrive déjà à trier les bonnes hypothèses…
- Ben, moi, j'en ai, ils m'écrivent… enfin, ils travaillent sur le « on sait que… or… donc…»… Ils savent que…
- Mais, en général, ils écrivent toutes les hypothèses… S'ils arrivent à trier, c'est déjà qu'ils ont compris.
- J'en ai des fois qui me mettent : « On sait que les deux parallèles codées, or une propriété qui n'a rien à voir
- Mais comment tu fais la différence entre celui qui fait un peu de démonstration et celui qui … C'est ça que j'arrive pas à faire… (c'est une question qui s'adresse à M).
- Mais, moi je pense qu'il faut, il faut déjà peut-être sortir de toutes ces propriétés, répond M. En fait si vous imaginez le problème du polymino, vous arrivez à le rédiger avec les « on sait que… or… donc… » ? Je pense que c'est là, que c'est dans ce genre…
- Mais il y a une argumentation

[157] Enseignant n°17

[158] Marjorie (enseignant n°21)

[159] Stéphane

– Oui, mais dans cette argumentation, t'auras pas forcément l'idée de citer les propriétés, par exemple, citer en toutes lettres que si vous avez deux cases et que vous avez un domino, (…) un domino recouvre deux cases consécutives. J'ai regardé ce que vous aviez marqué, il y en a pas beaucoup qui ont cité… La forme des textes que vous avez écrite par rapport à ce problème, elle n'a rien à voir avec ce que vous êtes en train de dire là.

– Ben évidemment.

– Ben justement, c'est peut-être là-dedans qu'on peut regarder la différence entre celui qui a un projet de preuve et celui qui n'en a pas. Peut-être que si on sort du contexte des connaissances du cours, c'est-à-dire où il n'y a pas à manipuler forcément les théorèmes du cours…

– Oui, mais là, tu fais quand même une différence entre le polymino, qui est un projet à grandes étapes, enfin je veux dire : il y a beaucoup d'étapes pour arriver au bout du polymino, avec tous les morceaux qu'on était en train de regarder, qui est l'exercice à un pas dans lequel, il y a pas beaucoup de matière pour arriver à avoir un projet autrement que par ce qui est dit. Enfin…

– Non, répond M, parce qu'elle parlait du projet, et je pense que le projet sur la démonstration, c'est pas quelque chose qui se construit sur un petit exercice. Un élève qui, une bonne fois pour toutes, s'est dit qu'il a compris à quel jeu on joue en mathématiques, je pense que, sur ces petits trucs, c'est ce que tu[160] disais avant, je pense qu'il va garder son projet de démonstration.

– Oui, mais ça se commence sur des exercices à faibles pas. Enfin…

Brouhaha

– Exactement[161], insiste M. Je suis en train de dire exactement le contraire, en fait…

– Sur la formulation, sur l'écriture de la démonstration… Le raisonnement, je suis d'accord que, que tu raisonnes à un truc à trente pas ou à un pas, c'est le même raisonnement, le projet, tu l'as ou tu l'as pas. Après, au niveau de la rédaction, de la mise en forme écrite, au passage à l'écrit, on apprend à tricoter petit avant de faire un pull, quoi.

– Oui, mais là, Michèle, ce qu'elle veut dire, c'est que pour prouver qu'il y a un intérêt à démontrer, il vaut mieux mettre un problème comme ça.. C'est pas sur l'idée de comment formuler, c'est quelque chose de différent.

– Moi, je pense qu'il faudrait le contraire.

– Je suis en train de dire le contraire[162], insiste M. Je suis persuadée du contraire.

– Sur le passage à l'écrit ?

---

[160] Ce doit être Sébastien.

[161] qui s'adresse à un autre interlocuteur que Marjorie

[162] De ce qu'a dit Marjorie « il faut tricoter petit avant de faire un pull ».

– Oui, reprend M. Mais d'ailleurs, pas forcément par rapport à la démonstration, sur tout. Le fait de commencer par des choses simples, je suis persuadée que c'est pas ça qui aide les gens à apprendre.

L'enseignante n°3 demande la parole.

– Pour la même raison, je suis pas d'accord avec le fait qu'il oblige à coder, parce que en fait… A la rigueur, ils le font s'ils en ont besoin, on peut leur suggérer, en cours de recherche, peut-être d'essayer de faire un schéma en codant, mais qu'il leur impose comme ça, je vois pas…, du coup, ils ne vont peut-être pas voir le lien non plus. Ils ont des questions à répondre les unes après les autres, et voilà. C'est prédigéré, tout est prédigéré.

– Tu veux dire le lien avec le projet de prouver après, questionne M. C'est cela que tu veux dire que le codage, quand il est imposé, après, les élèves ne voient pas le lien avec ce qu'il y a à faire après ?

– Ils vont peut-être aller le chercher, mais disons qu'ils vont répondre aux questions les unes après les autres de toute façon. Alors que, ils chercheraient, ils ne trouveraient pas, et on leur dirait : « ben, tiens, fais peut-être un schéma, avec des codages », là, ça va peut-être les aider davantage.

– Mais alors là, autant je suis d'accord que les propriétés, on les écrit pas ; au fur et à mesure que l'on grandit en mathématiques, on ne les écrit pas, autant le codage… Tu prends un élève à n'importe quel niveau de maths, sur une figure compliquée (je ne dis pas sur le triangle et encore), tu as besoin d'avoir tes informations.

– Oui, mais justement, il en a besoin. Mais il faut que lui, il se rende compte que…

– … qu'il se crée ce besoin, c'est cela que tu veux dire ? demande M.

– Là, on a dit que le codage, on le met sur le début du travail sur la démonstration pour que ça devienne un réflexe.

– Ça deviendra un réflexe de toute façon, puisque, chaque fois qu'il aura besoin de démontrer un peu compliqué, il ne va pas y arriver sans codage, donc il va coder.

– C'est à ça… Pour moi, ça a un statut un tout petit peu différent. Je suis parfaitement d'accord avec ce que tu dis, par exemple, sur le besoin de rajouter des points ou des lettres. Cela, je crois qu'il faut vraiment que ça vienne de l'élève. Sur le codage, je ne suis pas sûr que le besoin, il soit transcrit dans le codage ? C'est-à-dire, on peut faire naître un besoin d'intelligibilité et d'information de la figure, mais je ne suis pas sûr qu'on arrive à …, je ne suis pas sûr qu'il s'exprime. Je crois simplement qu'un élève qui ne comprend rien, enfin, qui ne voit pas les données, comment elles sont sur la figure, il va dire : « Je comprends rien à ce pb. ».

– Oui, mais je lui dis : « Essaie de faire un schéma. »

– Ben, tu lui dis.

– Ben, je lui dis, mais je ne lui impose pas dès le début. J'attends qu'il y arrive pas avant de lui dire.

– Je pense que la finalité est la même, mais qu'il y a une différence sur la démarche, c'est-à-dire que, on est tous d'accord sur la nécessité du codage et, si on recherche, nous, un exo de maths, c'est quelque chose qu'on va pratiquer naturellement, mais après, la question, c'est : est-ce que l'élève va comprendre que c'est nécessaire, parce qu'on va lui dire…, parce qu'on va lui dire que, si tu codes pas ta figure, tu auras moins 0,5, parce que … ce genre d'argument…

– Ah non, on n'a pas parlé de cela.

– Non, mais je n'ai pas dit… Mais il y des endroits où cela se fait… Je veux dire, il n'y a pas de souci là-dessus, on peut trouver des exemples où ça se fait. Est-ce que c'est ça qui va faire comprendre à l'élève la nécessité de coder, ou est-ce que c'est parce que une juxtaposition d'exercices, des comparaisons de copies d'élèves qui auront… entre celui qui a codé, qui a trouvé, qui…, et puis l'élève qui va expliquer son raisonnement aux autres : « Eh bien, moi j'ai codé, c'est ce qui m'a permis de… ». Est-ce que c'est… il y a un peu l'argument construit, et puis l'argument d'autorité, qui s'opposent. Donc, c'est vrai que, de l'écrire dans l'énoncé de temps en temps, ça peut peut-être générer une habitude chez l'élève, mais je pense que c'est pas ça qui fera qu'il comprendra la nécessité du codage. Si c'est écrit dans l'énoncé, l'élève, il va le faire parce que c'est écrit dans l'énoncé, pas parce qu'il a compris que c'est nécessaire.

– Oui, ça, je suis d'accord.

– Il faut voir si on le fait à chaque exercice, ou si ça reste un exercice de début de démonstration, où…, de temps en temps, il faut quand même montrer un peu la voie. Effectivement, si c'est un leitmotiv à chaque exercice, ça peut probablement avoir des effets incapacitants.

– Vous savez, intervient MC, le codage est très…, le codage est très ambigu en fait. D'abord, il y a des choses qui ne se codent pas : les droites parallèles, il n'y pas de codage pour les droites parallèles.

– Il n'y a pas de codage international pour les droites parallèles.

– Voilà, reprend MC. Maintenant, supposons que l'on dise dans le texte : telle droite est médiatrice de tel segment. Il y a déjà une traduction quand on marque le milieu et la perpendiculaire. Et pourquoi on code ça, et pas… S'il y a un point sur la médiatrice, pourquoi on ne code pas tout de suite les deux segments égaux, non plus. On pourrait coder ça directement. Si on nous dit « une droite est hauteur d'un triangle », on dessine l'angle droit et après, dans la démonstration, il faut qu'on démontre qu'il y a un angle droit, si bien qu'on commence…, quand on code, on a déjà commencé la démonstration.

Plusieurs personnes acquiescent.

– Oui, c'est la définition qu'on code.

– Oui, voilà, reprend MC. Il y a la définition, ou bien sur la médiatrice, vous voyez qu'il y a certaines…, un truc qu'on prend sur la médiatrice et d'autres qu'on ne prend pas, et dans de multiples endroits, comme ça. C'est pas du tout aussi simple qu'on l'imagine, et nous, on code en fonction du projet de preuve qu'on a. Et on ne code pas avant, sans projet de preuve déjà. On a déjà commencé le projet de preuve quand on code. Vous regarderez bien. Même des fois, on peut voir quelqu'un qui a codé avec ce qui était écrit dans le texte, et

puis il a codé un angle droit à un endroit, par exemple, avec un point d'interrogation. C'est-à-dire qu'en fait, les codages eux-mêmes ont un statut.

- Par rapport à ce que tu dis, ce qu'on code, c'est les définitions, pas les propriétés. Là, tu parles de la médiatrice, tu veux coder un point qui est équidistant des extrémités du segment. Là on arrive déjà dans la caractérisation de la médiatrice par l'équidistance.
- Il y a des fois, il y a des fois…
- Oui, mais ça dépend comment tu la définis, la médiatrice.
- Il y a des fois, reprend MC, dans les manuels, la médiatrice, c'est l'ensemble des points équidistants…
- Pourquoi pas ?
- Au collège, c'est très rare qu'on prenne cette définition-là quand même. On la définit par le milieu et perpendiculaire…
- C'est vrai, dit MC, que maintenant, c'est plus rare, mais il y a eu une époque où ce n'était pas rare du tout. C'était pas rare du tout à certaines époques.
- Moi, je l'ai introduite comme ça, la médiatrice, par l'équidistance. C'est comme ça qu'ils la découvrent.
- Tiens, ben voilà, réplique MC.
- Je pense qu'il y a une ambiguïté dans la discussion parce que chacun n'a pas formalisé ses objectifs. J'ai l'impression qu'on a une discussion à double niveau : qu'on a une discussion qui est…, et qui éventuellement… enfin, moi je suis confronté… J'ai le sentiment que c'est un peu des objectifs qui s'opposent, entre, « je suis en train de former un mathématicien » (en l'admettant dans un sens très large, c'est-à-dire que je veux amener l'élève à réfléchir, je veux amener l'élève à ressentir le besoin de la preuve), et à côté de ça, je suis en train de former aussi un élève qui doit s'intégrer dans le système scolaire et qui doit être capable de rédiger un certain nombre de pas de démonstration suivant un certain nombre de schémas universellement reconnus et admis. Pour moi, par exemple, l'exercice, le 5, la deuxième partie, c'est quelque chose qui, à mon sens, aide vraiment une très petite partie. Parce que l'élève qui est capable de compléter ça, c'est l'élève qui a déjà le schéma de la preuve dans la tête. Et c'est pas le schéma naturel de pensée, ça. Enfin, moi, je sais que, quand je fais une démonstration … (peut-être qu'une démonstration de ce type-là, on y arriverait), mais une démonstration de toute façon un tout petit peu plus élaborée, on a rarement en tête « étape 1, étape 2, étape 3, étape 4 et je sais que l'étape 5, ça va être ma conclusion », et je les connais toutes. Il y a beaucoup plus de dialogue entre « je pars de l'énoncé, tiens, qu'est-ce que l'énoncé me permet de déduire ? », « je pars de la question, qu'est-ce que je connais qui me permet d'arriver à la question ? », ces trucs-là. Donc, dans la tête, naturellement, ce qui se passe, c'est pas une rédaction bien ordonnée avec « je mets… je pars de ma première hypothèse, j'en déduis ça, parce que je sais qu'après, ça va me servir à… ». Je pense qu'il y a… enfin, j'en sais rien…, ça fait longtemps que j'ai pas lu le programme de quatrième, je ne suis pas sûr de les avoir lus, mais… je ne sais pas comment sont formulés exactement les objectifs ? Mais quel est l'objectif qu'on se fixe ? Est-ce que l'objectif, c'est d'amener l'élève à réfléchir…

– Mais attends, intervient M, c'est en dehors du niveau…, en dehors du niveau de classe.

– Oui, d'accord. Sauf qu'à un moment, il y a des exigences qui sont formalisées.

– Pas vraiment, reprend M, justement, dans le programme du lycée, on dit d'arrêter un peu avec ce formalisme. C'est marqué clairement dans les documents d'accompagnement.

– Dans le programme de quatrième, c'est explicité : démonstration à (…), sur d'autres chapitres, la preuve des théorèmes part de tel autre théorème qu'on a déjà vu.

– Oui, mais il n'y a rien sur la forme du texte, intervient MC.

– Oui, oui, mais sur la forme, le codage, il n'y a rien qui est explicité dans les documents d'accompagnement, reprend M. Ça reste très vague. Je suis d'accord avec toi qu'on parle de pas de démonstration, etc…, à un pas ou à deux pas, mais ça reste très, très vague. Par contre, c'est clairement écrit dans les programmes, les documents d'accompagnement de seconde, qu'il faut essayer d'ouvrir sur la forme qu'ont pris les textes de démonstration.

– On arrive quand même à des trucs caricaturaux. Enfin, l'autre jour, j'ai un élève, qui a son grand frère ou sa grande sœur, qui étaient, je ne sais pas quoi, en première, en quatrième, qui dit que la démonstration en quatrième, ça se fait avec « je sais que… je cite une propriété … donc », parce que, au collège, depuis un certain nombre d'années, c'est ce qui se pratiquait, il y avait un schéma très fixe en quatrième…

– C'est pas au collège il y a un certain nombre d'années, c'est actuellement, intervient M.

– Non, non, mais oui, depuis un certain nombre d'années au collège, c'est quelque chose qui est fait, donc l'élève qui est maintenant en première, il y a la démonstration en quatrième, qui est quelque chose, et puis il y a la démonstration, d'ailleurs peut-être, à la limite, on se demande si c'est la même chose. Parce que la démonstration en quatrième, c'est « je sais que… je cite la propriété… donc ». Mais alors maintenant il est en première, il a le droit de faire autrement, mais son petit frère ou sa petite sœur qui est en quatrième, il doit faire comme ça parce que ça, c'est la vraie démonstration de quatrième.

– Je ne vous ai pas raconté le premier jour, je ne me rappelle plus si je vous l'ai dit : un élève, en soutien, qui avait dit à son prof : «Ah, ben aujourd'hui, j'ai appris, le « on sait que » ». J'ai appris le « on sait que », hein ? Donc c'est tout à fait ça.

## 5. Que choisissez-vous pour un premier travail en classe sur la démonstration ? (deuxième version)

Les pages suivantes contiennent une liste d'énoncés de problèmes et quatre possibilités de mise en œuvre de ces problèmes en classe. Vous souhaitez organiser une première séquence de travail sur la démonstration. Quels sont vos choix ?

Merci beaucoup pour vos réponses.

*Niveau de classe choisi :*

*Problème choisi pour un premier travail sur la démonstration*

Reportez ici son numéro :

Pour quelles raisons avez-vous choisi ce problème ?

Quelle mise en œuvre choisissez-vous pour ce problème dans votre classe ? Indiquez son numéro :

Quels commentaires souhaitez-vous éventuellement ajouter ?

*Problème choisi pour poursuivre le travail sur la démonstration*

Reportez ici son numéro :

Pour quelles raisons avez-vous choisi ce problème ? (Ecrivez au verso si besoin)

Quelle mise en œuvre choisissez-vous pour ce problème dans votre classe ? Indiquez son numéro :

Quels commentaires souhaitez-vous éventuellement ajouter ?

*Quel(s) problème(s) ne choisiriez-vous surtout pas ? Pourquoi ? (Ecrivez au verso si besoin)*

*Des problèmes à choisir*

Enoncé n°1

On rappelle les propriétés suivantes.

❶ Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

❷ Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

❸ Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.

❹ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

❺ Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.

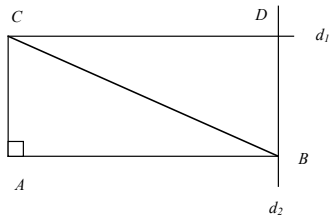
❻ Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu alors c'est un parallélogramme.

❼ Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales ont le même milieu.

Soient *ABCD* et *CDEF* deux parallélogrammes.

Les droites (*AB*) et (*EF*) sont-elles toujours parallèles quels que soient les parallélogrammes choisis au départ ? Justifier la réponse en utilisant certaines des propriétés ci-dessus.

Enoncé n°2




Soit *ABC* un triangle rectangle en *A*. On construit la droite $d_1$ parallèle à (*AB*) passant par *C* et la droite $d_2$ parallèle à (*AC*) passant par *B*. On note *D* l'intersection de $d_1$ et $d_2$. Quelle est la nature du quadrilatère *ABDC* ?

Faire un schéma déductif, puis rédiger une démonstration.

Enoncé n°3

Soient *ABC* un triangle, *M* un point de [*AB*]. La parallèle à [*BC*] passant par *M* coupe [*AC*] en *N*. Le point *K* est le symétrique de *M* par rapport à *B*. La droite (*KN*) coupe (*BC*) en *L*. Démontrer que *L* est le milieu de [*KN*].

Pour l'écriture de la démonstration, on utilisera un tableau en trois colonnes (Je sais que…, D'après la propriété…, J'en conclus que…).

Enoncé n°4

On choisit n'importe quel nombre, on lui retranche 4 ; on multiple le résultat obtenu par $-3$ ; à ce nouveau résultat, on ajoute le triple du nombre de départ. On trouve toujours le même résultat final. Pourquoi ?

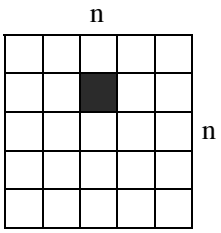
Enoncé n°5

1. a) Marquer trois points *R*, *S*, *T* alignés.
   b) Construire la médiatrice *d* du segment [*RS*] et la médiatrice *d'* du segment [*ST*].
   c) Sur la figure, coder les informations contenues dans l'énoncé.
   d) Formuler une conjecture concernant les droites *d* et *d'*.
2. Recopier et compléter :

| a) ***Données (ou hypothèses)*** | | ***Résultat (ou conclusion)*** |
|---|---|---|
| *d* est la médiatrice du … [*RS*] | donc | $d \perp (RS)$ |

*d'* est la … du segment [*ST*] donc *d'*…(*ST*)
b) Les … *R*, *S* et *T* étant …, les droites (*RS*) et (*S*.) sont confondues.
Or, si deux … sont perpendiculaires à une même troisième …, alors elles sont … .
Par conséquent : … // …

### *1. Enoncé n°6*




On considère un quadrillage à mailles carrées identiques de $n \times n$ cases, privé d'une case quelconque (un exemple est dessiné ci-contre pour $n = 5$).

Est-il possible de le paver avec des dominos ?

### Enoncé n°7

Si l'on prend n'importe quel nombre entier naturel $n$, sauf 0, le nombre $n \times (n - 1) + 11$ n'a que deux diviseurs (est premier). Vrai ou faux ?

### Enoncé n°8

Est-il possible de trouver : un quadrilatère qui a un seul angle droit ? un quadrilatère qui a exactement deux angles droits ? un quadrilatère qui a exactement trois angles droits ?

## *Des mises en œuvre en classe à choisir*

### Mise en œuvre n°1

Les élèves cherchent le problème en groupes. Ils doivent rédiger un texte qui montre leur expérimentation sur des exemples, leurs conjectures, qui propose des preuves ou seulement des pistes. Ce texte doit être convaincant, il sera communiqué à la classe.

Le professeur n'intervient ni dans la recherche du problème, ni dans l'écriture du texte. Il organise ensuite le débat sur les textes produits, en demandant aux élèves d'expliciter leurs critères.

Les textes validés par la classe sont considérés comme des démonstrations.

### Mise en œuvre n°2

Les élèves cherchent le problème, seuls ou avec leurs voisins, pendant quelques minutes.

Le professeur passe dans les rangs pour aider les élèves à la recherche et à l'écriture de la démonstration, en mettant en évidence la structure des pas et leur articulation.

Le professeur rédige ensuite une démonstration au tableau sous la dictée des élèves. Certaines preuves sont proposées à toute la classe qui doit se prononcer sur leur validité en explicitant les critères retenus.

Le bilan débouche sur une fiche-méthode relative à la démonstration.

### Mise en œuvre n°3

Les élèves cherchent le problème, seuls ou avec leurs voisins. Ils doivent écrire une conjecture et essayer de la prouver.

Le professeur n'intervient pas dans la recherche. Au bout d'un certain temps, il recueille les conjectures des élèves, organise le débat sur leur pertinence par rapport au problème posé et sur leur valeur de vérité, en refusant les arguments d'autorité et en laissant aux élèves la responsabilité du vrai et du faux.

Dans la synthèse finale, le professeur récapitule le faux et le vrai et les preuves associées.

Mise en œuvre n°4

Les élèves cherchent le problème, seuls ou avec leurs voisins.

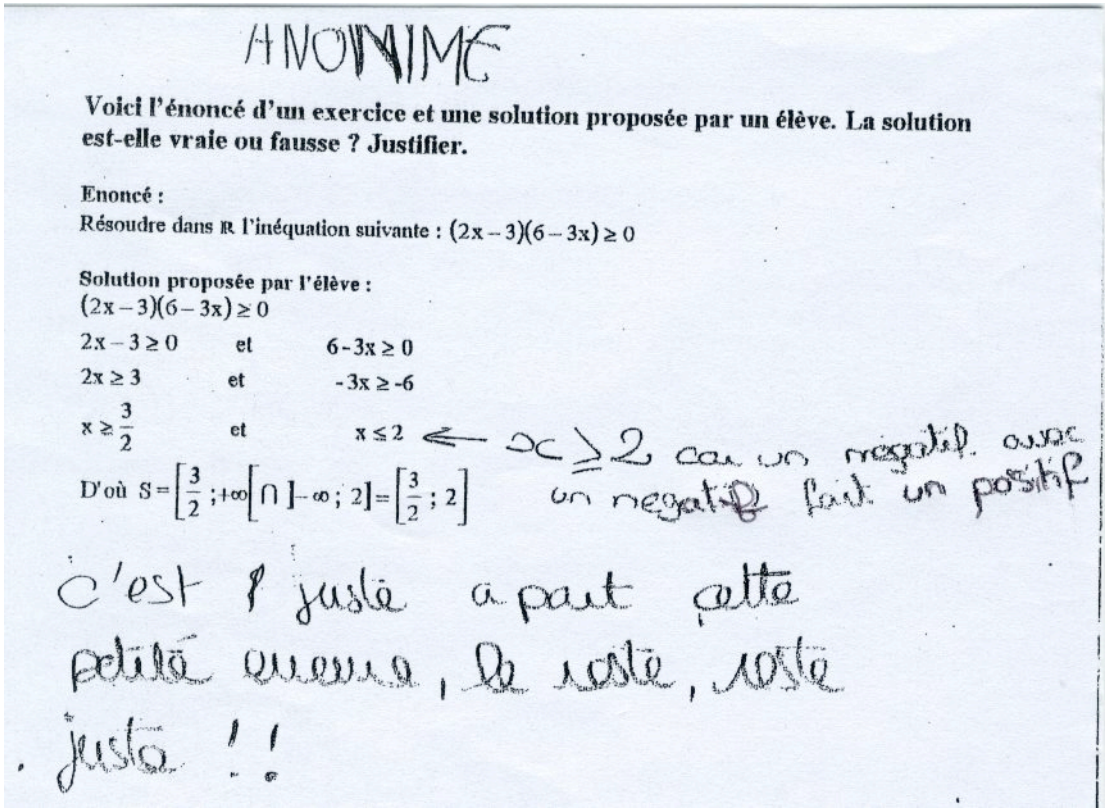
Le professeur intervient auprès des élèves qui le demandent. Au bout d'une demi-heure, le professeur fait le bilan au tableau des conjectures et des pistes de démonstration proposées par les élèves. Il montre pourquoi certaines propositions ne sont pas retenues et relance le travail en indiquant les pistes à poursuivre, les propriétés à utiliser.

Le professeur rédige ensuite au tableau une démonstration, en mettant en évidence la structure ternaire des pas et leur articulation.

**ANNEXES AU CHAPITRE 9**

## 1. « C'est une petite erreur »

La réponse d'un élève qui se nomme « Anonime » à qui le professeur a demandé de se prononcer sur le vrai ou le faux d'une solution à un exercice.



ANONIME

**Voici l'énoncé d'un exercice et une solution proposée par un élève. La solution est-elle vraie ou fausse ? Justifier.**

**Enoncé :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(2x-3)(6-3x) \geq 0$

**Solution proposée par l'élève :**
$(2x-3)(6-3x) \geq 0$

$2x-3 \geq 0$ et $6-3x \geq 0$

$2x \geq 3$ et $-3x \geq -6$

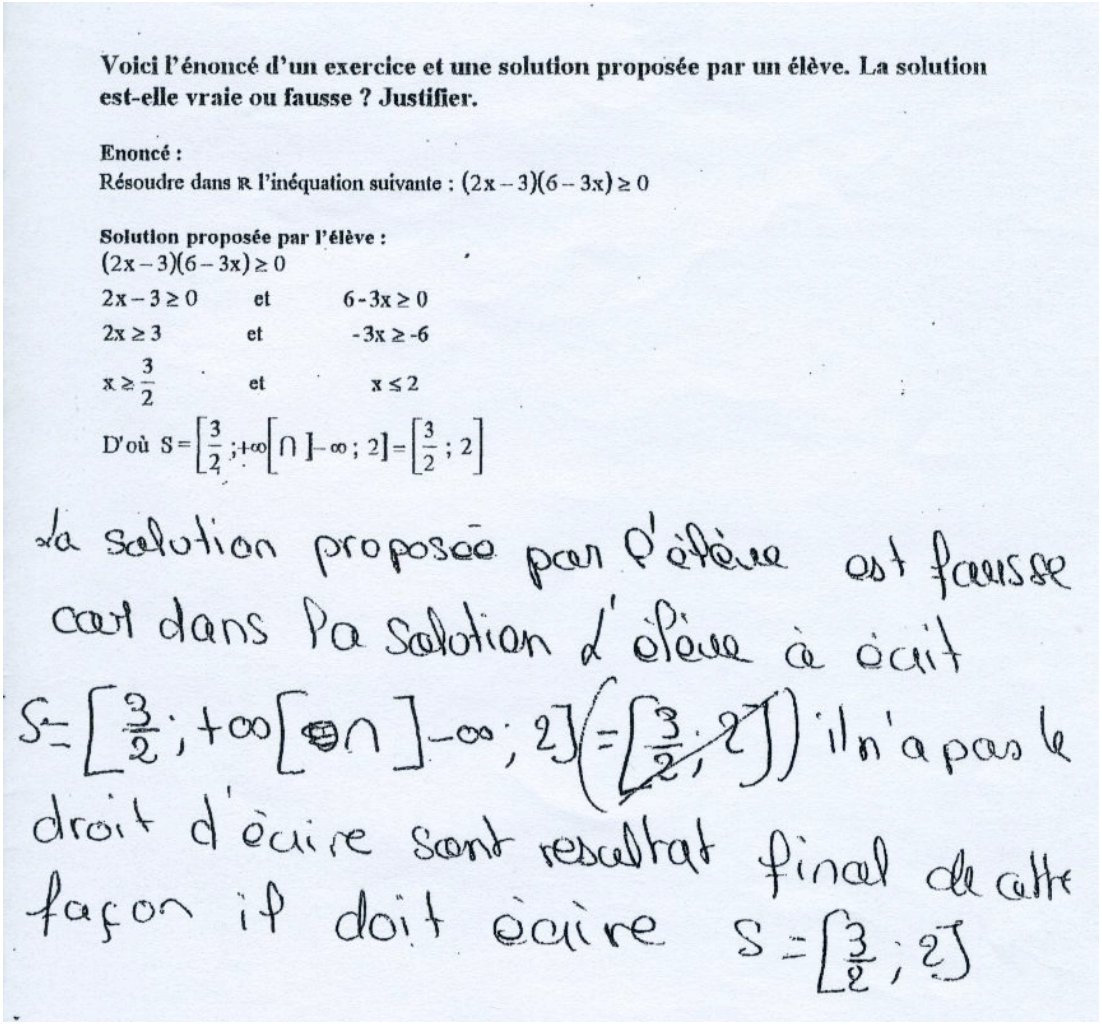
$x \geq \frac{3}{2}$ et $x \leq 2$ ← $x \geq 2$ car un négatif avec un négatif fait un positif

D'où $S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[ \cap \left]-\infty; 2\right] = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

c'est presque juste à part cette petite erreur, le reste, reste juste !!

## 2. « Il n'a pas le droit de … »

La réponse d'un autre élève à la même consigne que celle qui figure dans le paragraphe précédent.



**Voici l'énoncé d'un exercice et une solution proposée par un élève. La solution est-elle vraie ou fausse ? Justifier.**

**Enoncé :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(2x-3)(6-3x) \geq 0$

**Solution proposée par l'élève :**
$(2x-3)(6-3x) \geq 0$

$2x-3 \geq 0$ et $6-3x \geq 0$

$2x \geq 3$ et $-3x \geq -6$

$x \geq \frac{3}{2}$ et $x \leq 2$

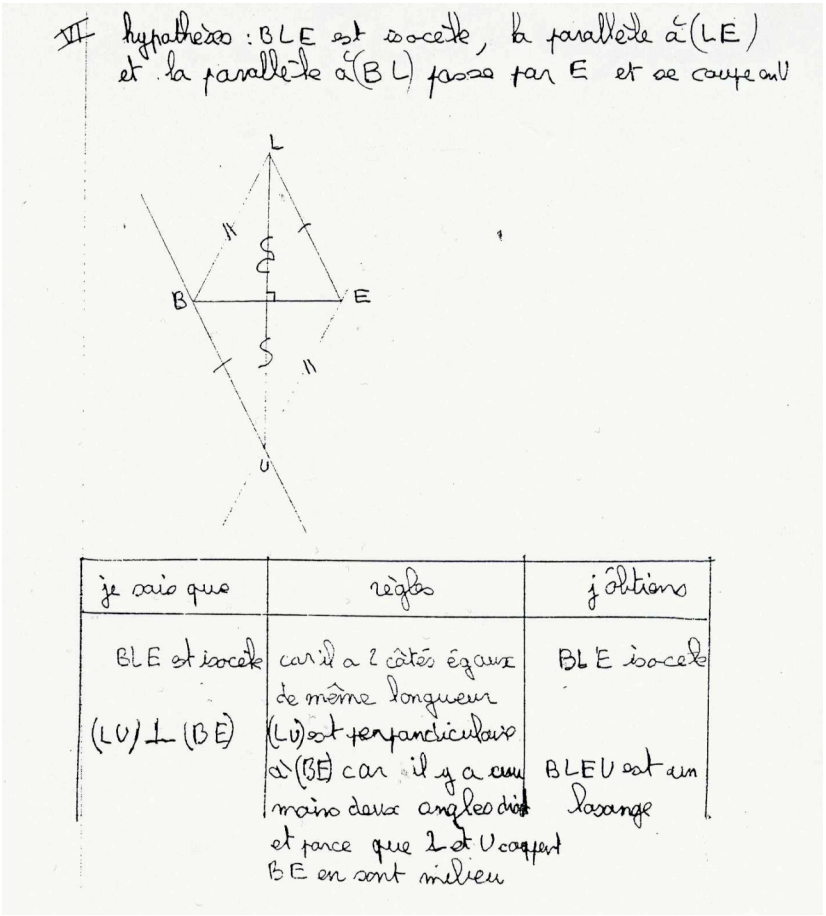
D'où $S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[ \cap ]-\infty; 2] = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

la solution proposée par l'élève est fausse car dans la solution d'élève à écrit $S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[ \cap ]-\infty; 2] \left(= \left[\frac{3}{2}; 2\right]\right)$ il n'a pas le droit d'écrire sont resultat final de cette façon il doit écrire $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

## 3. La copie d'Yvan

Voici une copie d'élève de quatrième, fournie par son professeur de mathématiques à l'occasion d'un stage de formation continue sur la démonstration. Il s'agit de la réponse proposée par Yvan à la question suivante posée en devoir surveillé :

*BLE est un triangle isocèle de sommet principal L. La parallèle à (BL) qui passe par E et la parallèle à (LE) qui passe par B se coupent en U. Démontre que (BE) est perpendiculaire à (LU).*

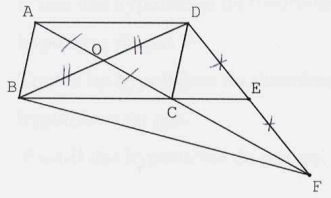


## 4. La copie d'Angélique

Voici un énoncé et une copie d'élève de quatrième :

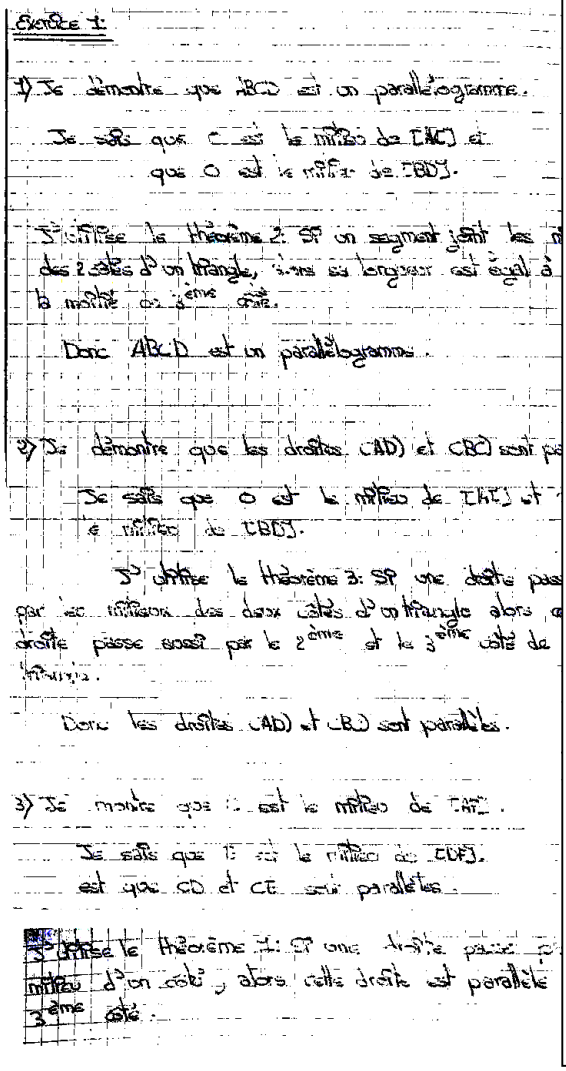
Voici l'énoncé d'un exercice donné à des élèves de l'une de nos classes de quatrième lors d'un contrôle portant sur le chapitre : « Théorèmes des milieux » :

Exercice :
On considère la figure ci-dessous :




1) Démontrer que *ABCD* est un parallélogramme.
2) Démontrer que les droites (*AD*) et (*BC*) sont parallèles.
3) Montrer que *C* est le milieu de [*AF*].

Angélique :




*1) Je démontre que ABCD est un parallélogramme.*

*Je sais que O est le milieu de [AC] et que O est le milieu de [BD].*

*J'utilise le théorème 2 : si un segment joint les milieux des 2 côtés d'un triangle, alors sa longueur est égal à la moitié du 3ème côté.*

*Donc ABCD est un parallélogramme.*

*2)Je démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.*

*Je sais que O est le milieu de [AC] et aussi le milieu de [BD].*

*J'utilise le théorème 3 : si une droite passe par le milieu des deux côtés d'un triangle alors cette droite passe aussi par le 2ème et le 3ème côté de ce triangle.*

*Donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.*

*3) Je montre que C est le milieu de [AF].*

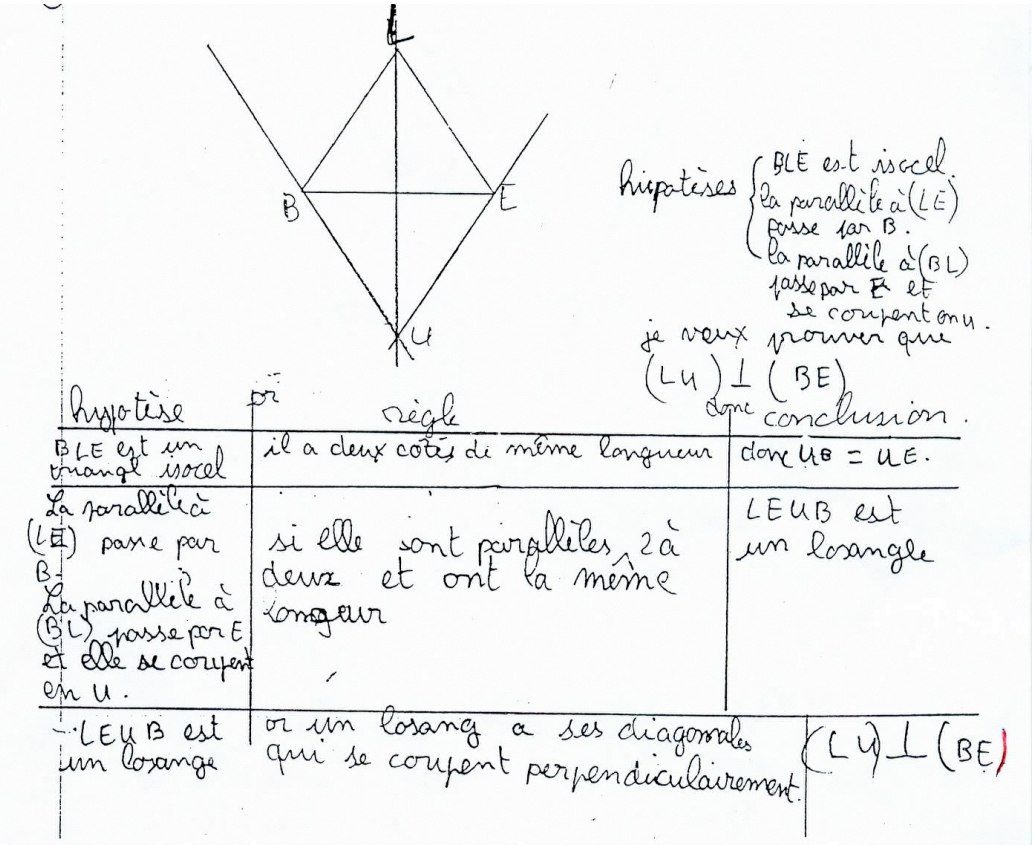
*Je sais que E est le milieu de [DF] est que CD et CE sont parallèles.*

*J'utilise le théorème 1 : si une droite passe par le milieu d'un côté, alors cette droite est parallèle au 3ème côté.*

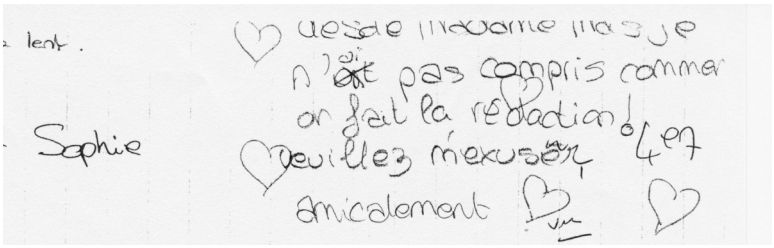
## 5. La copie de Farida

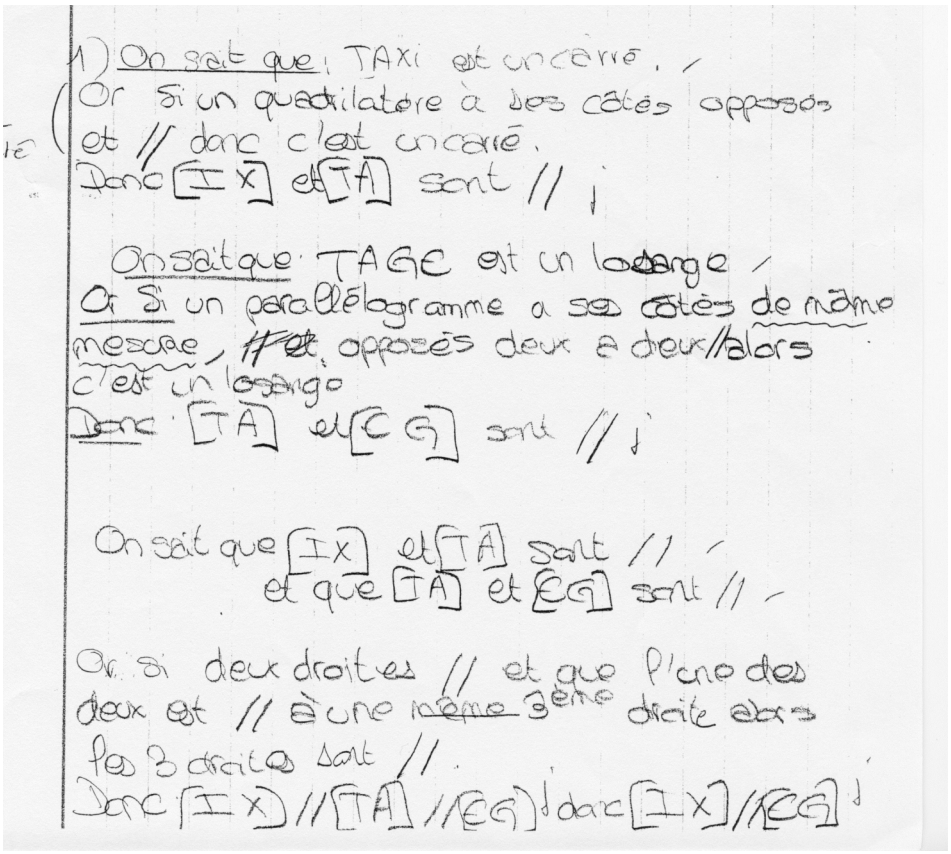
Voici une copie d'élève de quatrième, fournie par son professeur de mathématiques à l'occasion d'un stage de formation continue sur la démonstration. Il s'agit de la réponse proposée par Farida à la question suivante posée en devoir surveillé :

*BLE est un triangle isocèle de sommet principal L. La parallèle à (BL) qui passe par E et la parallèle à (LE) qui passe par B se coupent en U. Démontre que (BE) est perpendiculaire à (LU).*



## 6. La copie de Sophie




## 7. La consigne par rapport à chacune de ces copies

Par groupe : répondre sur un transparent qui sera présenté à tous, dans 30 minutes :

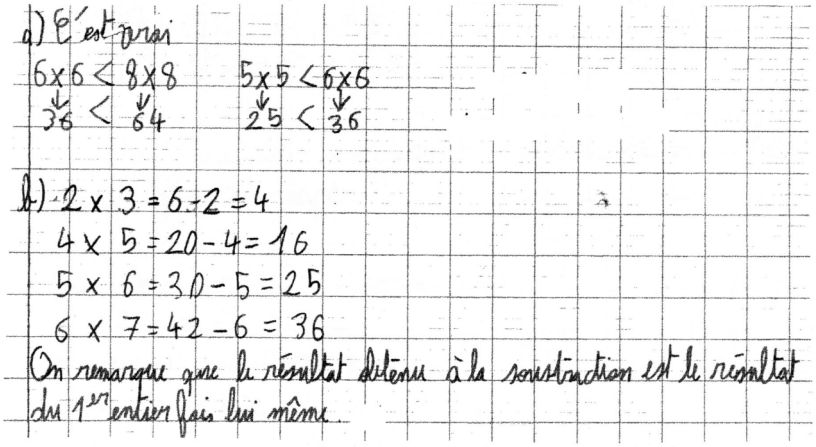
- faire des hypothèses sur le contrat didactique en vigueur dans la classe relativement à la démonstration ;
- faire des hypothèses sur le raisonnement que pourrait avoir fait chacun de ces élèves pour rédiger sa copie.

## 8. Test sur le vrai/faux dans une classe de quatrième (2006/2007)

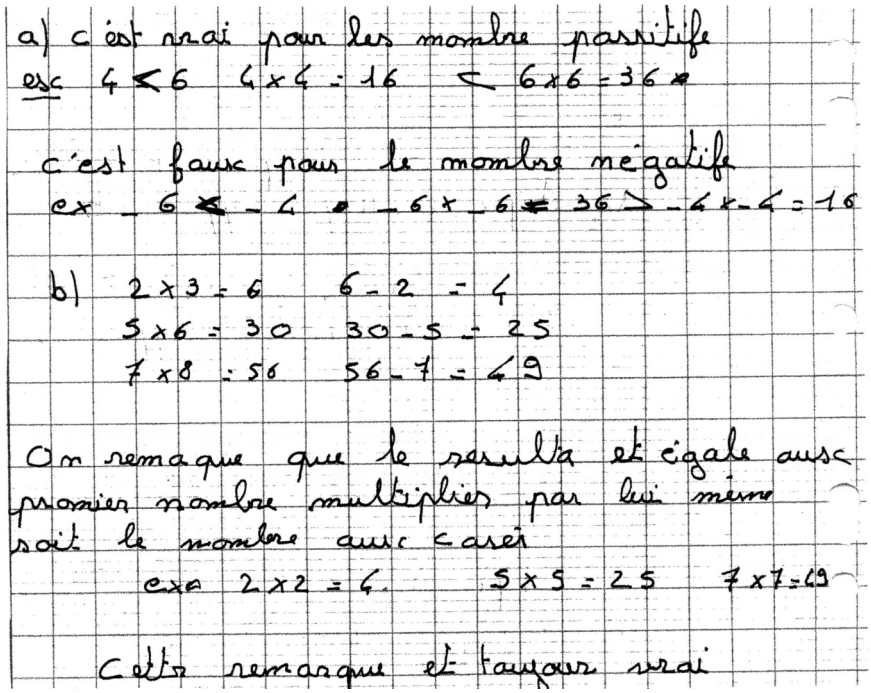
a) La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? Le démontrer.
« Quels que soient les nombres a et b, si $a < b$ alors $a \times a < b \times b$. »

b) Choisir un nombre entier, multiplier ce nombre par le nombre entier qui le suit dans la liste des entiers et retrancher au produit obtenu le nombre choisi au départ.
- Faire plusieurs essais. Que remarque-t-on ?
- Cette remarque est-elle toujours vraie ? Justifier la réponse.

---




---



7a Vrai puisque a < b donc axa sera toujours plus petite que bxb vu que a au départ est plus petit

b $3 \times 4 = 12 - 3 = 9$
$4 \times 5 = 20 - 4 = 16$
$6 \times 7 = 42 - 6 = 36$
$8 \times 9 = 81 - 8 = 73$

Le résultat est toujours dans la table du chiffre de départ.

---

a) La phrase est fausse car :
Si a et b < 0
ex : A = -3 B = -2
=> -3 < -2
mais : -3 x -3 ✗ -2 x -2
car : 9 ✗ 4

b) * 5
5 x 6 = 30
30 - 5 = 25

* 7
7 x 8 = 56
56 - 7 = 49

le résultat obtenu est le carré du nombre entier choisi au départ.

cette remarque est uniquement vraie dans le cas d'un nombre entier positif car :
ex : -6
-6 x -7 = 42
42 - (-6) = 42 + 6 = 48
48 n'est pas le carré de -6

**ANNEXE AU CHAPITRE 10 :**
**LES TEXTES PRODUITS PAR LES ENSEIGNANTS**
**SUR LE CENTRE DE SECOURS**

Ces productions sont accompagnées de commentaires.

## 1. Les productions de la première classe, FC02

### Le texte du groupe n°1 : il tient sur trois transparents (FC02-1)

** Un village est un point (non une zone).*

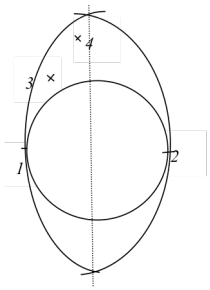
** La définition du problème est en boucle : la construction du centre fait ou non que le village est éloigné.*

** Recherche d'une méthode (itération ?)*

*Piste 1 (5 min) : le point cherché correspond-il au minimum de la somme des distances ?*

*Réponse : non*

*Piste 2 : on prend la distance maximale entre deux villages, le centre de secours est au milieu.*



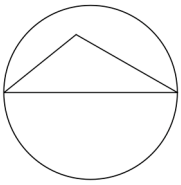

*Deux zones posent problème*

*Piste 3 : on ordonne les distances* $6 = C_4^2$ *distances*
*On abandonne rapidement cette piste. Il se passe ensuite un temps « infini ».*

*Piste 4 : Il faut trouver le plus petit cercle qui contient les quatre villages. Son centre est le centre de secours (non démontré, mais trivial ?! Définition du cercle.)*

*Piste 5 : solution pour 3 villages*

*Cas 1 :*
*il existe un angle obtus*
*Cercle de diamètre la plus grande distance*



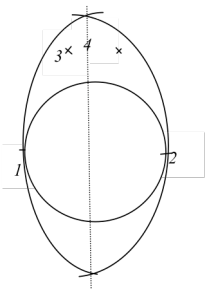
*Cas 2 :*
*pas d'angle obtus*
*Cercle circonscrit aux trois villages*

*Conjecture solution : quatre villages définissent quatre triangles (donc quatre cercles) ; un de ces cercles est solution.*
*Non démontré. Pas de contre-exemple.*

*Piste 5 bis :*

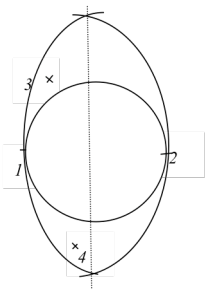
*Premier pas : on prend la plus grande distance entre villages 2 cas de figure*

*Cas 1*




*En traçant la famille de cercles passant par 1 et 2, on prend le plus petit contenant les quatre villages.*

*Cas 2*




*La piste 5 répond : cercle circonscrit à 2, 3, 4.*

*Conjecture ? : soient quatre points, est-ce qu'il existe un cercle circonscrit à trois de ces points qui contient le quatrième ?*

**Commentaires sur le texte du groupe n°1**

Il est fait allusion à la modélisation d'un village par un point, mais cette modélisation n'est pas du tout développée. Dès le début est posée la question du critère qui va permettre de décider de la position du centre de secours : c'est d'abord le minimum de la somme des distances qui est retenu, puis réfuté par un contre-exemple. Vient ensuite le critère de la distance maximale entre deux villages, qui n'est pas reconnu comme satisfaisant pour certains cas de figures. On remarque que cette démarche est assez naturelle, qui consiste à considérer les deux villages les plus éloignés, le disque qui contient ces deux villages aux extrémités de son diamètre, puis à repérer si les deux autres villages sont ou non extérieurs à ce disque. Ce n'est qu'à la quatrième piste qu'est énoncé « il faut trouver le plus petit cercle[163] qui contient les quatre villages », mais le critère correspondant n'est pas explicité. Le

[163] Il semblerait qu'il faille comprendre « disque ».

disque n'est jamais cité, seul le cercle l'est : on peut cependant se demander si « cercle » ne signifie pas « disque », à plusieurs endroits, notamment là où la piste 4 est annoncée, ainsi que dans la conjecture-question de la fin. C'est plutôt « le point de vue du sauveteur », qui est adopté (piste 4, mais évoqué dès la piste 2), il est en partie confronté à « celui du villageois », une zone commune, n'étant cependant vue que comme n'ayant que deux sommets (trois dessins la représentent ainsi).

Quelques cas particuliers sont donnés, qui mettent sur la piste d'une conjecture dans le cas de quatre villages. Le contre-exemple qui réfute le premier critère retenu est proche du cas particulier de deux villages, qui n'est cependant pas explicité. Plus loin, l'initiative de ne considérer d'abord que trois villages va permettre l'émergence de la conjecture concernant les quatre.

Il est noté plusieurs fois que les conjectures énoncées ne sont pas démontrées. Le doute subsiste sur la vérité de la conjecture, d'abord annoncée comme solution, mais transformée ensuite en question. Cette conjecture est fausse ; un contre-exemple est fourni par l'ajout d'un point quelconque à l'intérieur du disque du cas 1 de la piste 5 : aucun des quatre cercles circonscrits aux quatre triangles possibles ne convient, la solution étant le disque tracé sur la figure. On peut ainsi noter une certaine contradiction dans le fait d'écrire cette conjecture juste à côté de cette figure relative au cas de trois points. Ainsi la preuve du faux est présente : deux contre-exemples sont donnés. La conjecture finale n'est pas prouvée (d'ailleurs elle est fausse), il est seulement noté « pas de contre-exemple », ce qui est une affirmation fausse.

**Texte du groupe n°2 (FC02-2)**

*Première idée : - SA + SB + SC + SD min, abandon au bout de 5 minutes. Cela ne correspond pas à l'énoncé.*

*Deuxième idée :- SA≈ SB≈ SC≈ SD.*

*- Si points A, B, C, D sont cocycliques, on sait résoudre.*
*- Si points A, B, C, D non cocycliques*
*→ tracés des quatre médiatrices, on obtient quatre centres de cercles circonscrits.*
*Observation : on obtient une figure plus petite.*
*conjecture : cette figure est-elle une réduction[164] du quadrilatère de départ*
*→ recherche d'égalités d'angles*
*→ mesure des côtés, proportionnalité*
*Pas de conclusion évidente.*
*Si on arrive à prouver la réduction. On recommence le tracé des médiatrices. Essai sur trois figures différentes*
*→ doute*
*En réitérant, conclusion : c'est faux.*

*Troisième idée : On pense à faire un repère, coordonnées, calculer les distances.*
*Max( SA, SB, SC, SD) le plus petit possible*

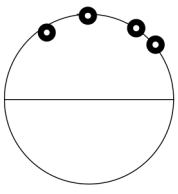
[164] Ce mot est à comprendre au sens dans lequel il est utilisé au collège.

*Quatrième idée : On mesure toutes les distances entre deux points. On choisit la distance la plus grande, exemple CD. On trace le cercle de diamètre [CD] et on limite la position de A et B possible en traçant deux cercles, cercle de centre C et rayon CD, cercle de centre D et rayon CD.*

**Commentaires sur le texte du groupe n°2**

Rien n'est dit de la modélisation. La question du problème n'est pas vraiment prise en compte, dans la plus grande partie du texte. La première piste, abandonnée rapidement, suggère de minimiser la somme des distances de quatre points au centre de secours. Cette piste est remplacée par celle de la recherche d'un point où sa distance aux quatre villages est à peu près la même, ce qui conduit à l'idée des cercles circonscrits aux quatre triangles possibles, qui évolue vers celle de la recherche d'un quadrilatère plus petit, à partir des centres des cercles circonscrits : le problème est oublié, il s'est transformé en une question sans rapport avec la recherche du centre de secours. Cette idée nouvelle par rapport au texte précédent, celle de remplacer le quadrilatère de départ par un quadrilatère plus petit (une « réduction »), en prenant les quatre centres des cercles circonscrits aux quatre triangles obtenus à partir des quatre points de départ, tire peut-être son origine dans le fait qu'il semble plus simple de déterminer un centre (mais sans toutefois que la norme afférente ne soit explicitée) à partir d'un quadrilatère dont l'enveloppe convexe est plus petite ; à la limite, si les quatre points sont confondus en un seul, le centre sera ce dernier. La forme initiale du quadrilatère de départ semble peu importante, seul importe le fait qu'il se réduise ; les quadrilatères obtenus successivement par les centres des cercles circonscrits sont en effet de formes différentes, mais les centres des cercles sont de plus en plus « proches » les uns des autres. Le critère, minimiser la plus grande distance d'un point quelconque à quatre villages, est donné tardivement (à partir de la piste 3), et il est placé dans le contexte de la géométrie analytique, on ne sait pas s'il est repris dans la quatrième piste. La dernière piste donne une méthode, sans que l'on sache ce qu'elle permet de trouver. L'idée de disque n'est pas présente, sauf peut-être sous-jacente à la fin. Aucun des deux points de vue n'est adopté, soit partir d'un village, soit partir du centre de secours.

Un seul cas particulier est évoqué : le cas de quatre points cocycliques, mais l'affirmation « on sait résoudre » laisse perplexe : on peut penser que c'est le centre du cercle circonscrit qui est suggéré, ce qui est faux, comme le montre le contre-exemple suivant :



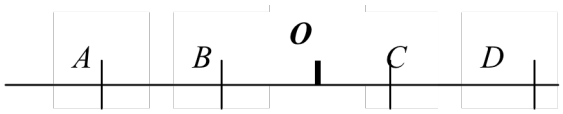
les quatre villages sont situés sur un même cercle, mais le centre de secours n'est sûrement pas à placer au centre du cercle.

Enfin ce texte ne contient aucune preuve, que ce soit du faux ou bien du vrai. Il n'y a que des affirmations de preuve, telles que « on sait résoudre », « c'est faux ». La seule conjecture énoncée est en fait une question. On note également qu'aucun dessin n'est donné : certaines constructions sont seulement décrites brièvement.

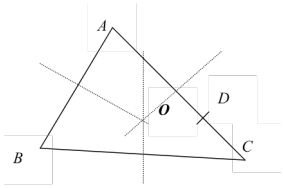
**Texte du groupe n°3 (FC02-3)**

*→ <u>cas particuliers</u> (10 min)*

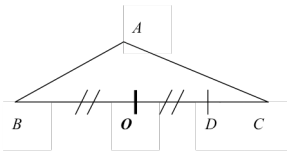
*→* 4 villages alignés : O au milieu de [AD]*




*→ 3 alignés → triangle*



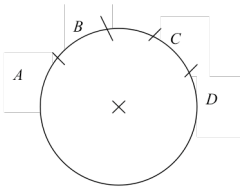

*Si 3 angles aigus*
*O centre du cercle circonscrit*
*↓*
*Du mal à le prouver*




*Si un angle obtus*
*O au milieu de [BC]*
*↓*
*Prouvé facilement*

*→ <u>Cas général</u> → quadrilatère (10 min)*
*→ Idée des médiatrices*
*→ Cas particuliers des quadrilatères*
**Parallélogramme → O est le centre.*
*Pour le prouver, voir triangles avec angles obtus*

*→ Si 4 points cocycliques ? →*

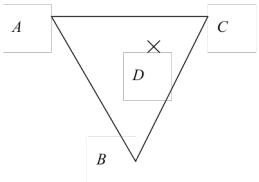



*centre*

*idiot →*

*→ Si un point dans le triangle constitué par les 3 autres*

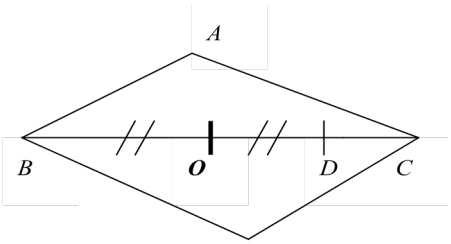
*Voir triangles*



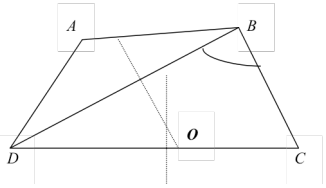

*Quadrilatère concave*

*→ Retour 1ère démo (10 min)*
*→ Quadrilatère convexe*
*→ Si les 2 angles obtus sont opposés, on se ramène au cas du triangle*

*O milieu de [AC]*



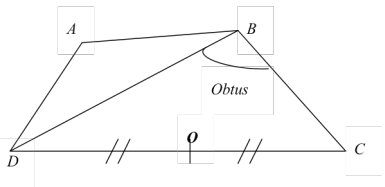
*→ Si 2 angles consécutifs sont obtus*
*Toutes sortes de dessins.*
*On a essayé de repasser aux triangles avec 1 angle obtus → sans résultat.*
*A 10h30 « Si ça se trouve on se plante complètement, mais on continue. »*
*Un point à l'extérieur du quadri. ne présente pas d'intérêt, car son symétrique par rapport à un côté est au moins aussi bon.*
*→ Pour finir, on est revenu aux médiatrices des côtés.*
*Conclusion :*




*Si* $A\hat{B}C < D\hat{A}B$

*← Si BDC a 3 angles aigus, O est le centre du cercle circonscrit à BDC.*

*Si* $\hat{A} = \hat{B}$ *??*
*C'est notre conjecture ?!*




*← Si BDC a 1 angles obtus ,* $\rightarrow \hat{B}$*,*
*O est le milieu de [DC].*

**Commentaires sur le texte du groupe n°3**

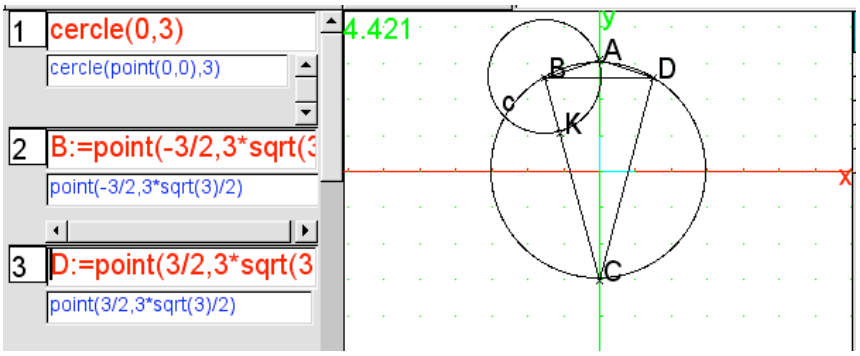
Comme le deuxième texte, celui-ci ne mentionne en rien la modélisation. Ici aussi, on dirait que la question du problème n'est pas prise en compte : il semble inutile de formuler ce qu'on cherche, on engage directement une étude sur les triangles ou les quadrilatères.

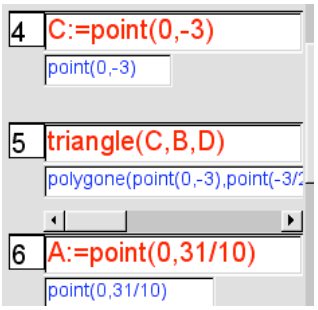
Plusieurs cas particuliers sont cependant étudiés : d'abord les cas de quatre, puis trois villages alignés ; le cas de trois villages, qui ne sont pas alignés, est assez bien étudié (une des parties est dite prouvée, sans que la preuve ne soit donnée, l'autre partie est dite non prouvée) ; ensuite le cas d'un quadrilatère avec des angles obtus opposés ; enfin le cas d'un quadrilatère concave, qui est vu comme se ramenant à celui d'un triangle. Le cas de quatre points cocycliques pose question, car le centre du cercle qui contient les quatre points est repéré comme n'étant pas nécessairement la solution pour le centre de secours. L'idée prégnante est celle des quadrilatères formés par les villages, elle n'est pas reliée à celle de trouver un disque qui les contient, le plus petit possible. L'idée de disque est totalement absente : on reste assez loin de la recherche du problème suivant les deux points de vue présentés.

Ou bien les preuves sont données de manière très succincte (renvoi à d'autres cas), ou bien, il est affirmé, comme dans le texte précédent, que certains résultats sont prouvés sans que la preuve ne soit donnée. La conjecture finale n'est pas très claire, on en donne la formulation suivante : « Si le quadrilatère *ABCD* a deux angles obtus consécutifs, par exemple l'angle *DAB* et l'angle *ABC*, le second étant inférieur au premier, on considère les deux cas suivants : le premier est celui où le triangle

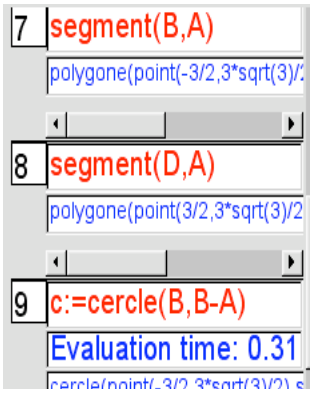
*BDC* a trois angles aigus, on construit alors le centre de secours au centre du cercle circonscrit au triangle *BDC* ; le second cas est celui où l'angle *DBC* est obtus, le centre de secours est alors situé au milieu de [*DC*]. Cette conjecture n'est pas démontrée, et on ne sait pas conclure si les deux angles obtus consécutifs du quadrilatère sont égaux. » Cette conjecture finale est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous :

*Les instructions données au logiciel (voir ci-contre et ci-dessous) montrent la construction de la figure. Le triangle BDC est isocèle, de sommet principal C et son cercle circonscrit est le cercle qui a pour centre l'origine du repère et pour rayon 3.*

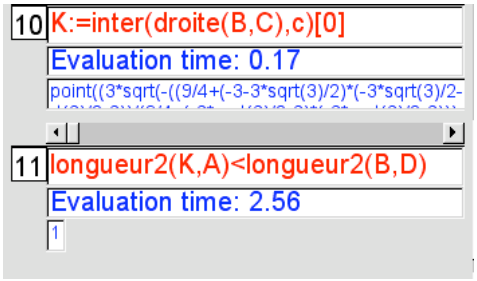



*Le point A n'appartient pas au cercle circonscrit à BCD, ni au disque correspondant, il appartient à l'axe des ordonnées, donc à l'axe de symétrie du triangle BCD : AB = AD.*



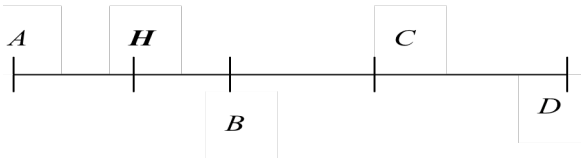

*Le cercle c est le cercle de centre B, qui contient A. Les deux angles DAB et ABC sont obtus. Le triangle BDC a bien trois angles aigus.*




*Le point K est le point d'intersection de c et de [BC]. On a les trois longueurs AB, AD et BK, qui sont égales. L'instruction 11 donnée au logiciel lui demande de comparer les carrés des longueurs KA et BD : la réponse donnée, qui est 1, montre que KA < BD, d'où l'on déduit que l'angle obtus DAB est plus grand que l'angle obtus ABC.*

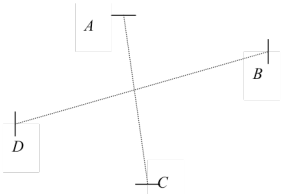
Cependant le centre de secours n'est pas le centre du cercle circonscrit à *BCD* ; il est le milieu de [*AC*].

### Texte du groupe n°4 (FC02-4)




*Première étape : minimisation de (HA + HB + HC + HD) (10 min)*
*Abandonnée: → Contre-exemple : A, B, C, D alignés*
*→ on ne privilégie pas le côté économique (minimisation de consommation…)*
*Ce n'est pas un problème de tuyauterie, mais de vies humaines.*

*Deuxième étape : critère adopté : trouver le cercle du plus petit rayon contenant les quatre points.*




*Critère trouver le cercle du plus petit rayon qui contient les quatre points A, B, C et D.*
*Méthode proposée :*
*Remarque : le cercle recherché contient au moins deux points (les plus éloignés).*
*1) On trace les cercles circonscrits aux 4 triangles formés par les pts et ayant tous des angles aigus.*
*Situation : A) Un de ces cercles contient le quatrième point. Le plus petit en rayon est notre solution (n°1).*
*Sinon : on prend max(AB, AC, AD, BC, BD, CD), le cercle de ce diamètre est solution (n°2)*

*La plus petite des n°1 et n°2.*

### Commentaires sur le texte du groupe n°4

On note quelques éléments relatifs à la modélisation, au choix du critère, après l'abandon de la piste de la minimisation de la somme des distances du centre de secours aux quatre villages. Ce critère est explicitement cité, le mot de cercle étant vraisemblablement à prendre partout au sens de disque. Le point de vue adopté est celui du sauveteur.

Un seul cas particulier est examiné, celui de quatre villages alignés, qui permet de réfuter qu'il s'agit de minimiser une somme de distances. C'est le seul élément de preuve que contient ce texte : un contre-exemple. Tout le reste, dont la rédaction est assez confuse, contient une description de la démarche et d'un algorithme de détermination du centre, dont il n'est pas démontré qu'il conduit à la solution du problème. Reprenons cet algorithme : on trace d'abord les cercles circonscrits aux triangles formés par les quatre points et ayant tous des angles aigus ; un de ces disques contient le quatrième point, celui qui a le rayon le plus petit est notre solution n°1 ; sinon, on détermine les deux villages les plus éloignés l'un de l'autre et le cercle dont le diamètre est le segment d'extrémités ces deux villages est notre solution n°2 ; entre la solution n°1 et la solution n°2, on détermine celle qui a le

rayon le plus petit, et on construit le centre de secours en son centre. Le contre-exemple fourni à la conjecture du groupe n°3 montre quatre points *A*, *B*, *C* et *D* tels que seul le triangle *BCD* a tous ses angles aigus, mais le disque qui correspond à son cercle circonscrit ne contient pas le quatrième point. S'agit-il aussi d'un contre-exemple pour cet algorithme ? Ou bien la formulation est à comprendre différemment ?

### Conclusion-hypothèse sur cette première classe de productions

La consigne d'expliciter la démarche de recherche du problème semble, aux yeux des enseignants, exclure les preuves du vrai, qui sont presque complètement absentes des textes. Des contre-exemples sont donnés pour réfuter les conjectures fausses, mais ceci était précisé dans la consigne. La recherche d'un problème n'inclurait donc pas la preuve ? Qu'est-ce qu'alors un résultat ?

## 2. Les textes de la deuxième classe, FC06

Rappelons que les enseignants, en deux groupes, l'un de trois personnes, le groupe 1, l'autre de quatre, le groupe 2, ont cherché ensemble le problème, pendant quarante-cinq minutes seulement, puis ont rédigé seuls leur texte.

### Les productions des enseignants du groupe 1

Elles sont désignées par FC06-1-G1, FC06-2-G1 et FC06-7-G1.

#### *FC06-1-G1*

*1. J'ai déjà traité le cas où les quatre villages sont alignés (cas le plus simple) puis celui où trois villages sont alignés (pas trop compliqué non plus). Reste celui où les quatre villages ne sont pas (trois à trois) alignés.*

*2. Ensuite j'ai commencé par tracer les médiatrices des côtés du quadrilatère formé par les quatre villages mais ça « n'avait pas l'air » de mener à grand chose à part pour certains cas particuliers (lesquels ?).*

*3. Retour au problème : qu'est-ce qu'on cherche*

*A minimiser la plus grande distance entre le centre de secours et les villages.*
*Il faut alors peut-être le situer entre (au milieu ?) les deux villages les plus éloignés (sur un côté ou sur une diagonale). Le milieu de la plus grande diagonale ne marche pas toujours. Il est peut-être intéressant de tracer les médiatrices des deux côtés (ou diagonales) les plus longs ?*
*J'ai pas eu le temps d'aller plus loin…*

#### *FC06-2-G1*

*Premier problème : préciser le critère « où placer ».*

→ *plusieurs lecture et dessin sont nécessaires pour s'approprier la notion de* $\min\left(\max_i d_i\right)$

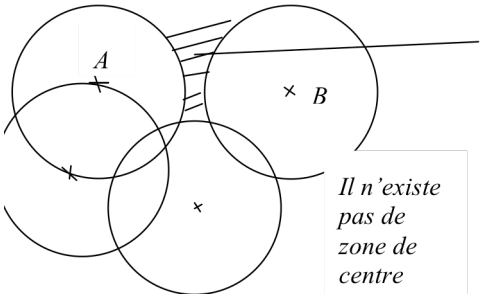
*Deuxième étape : essais de modélisation, sur des croquis (modélisation : points, distances partant du centre).*

| | |
|---|---|
| * diagonales, intersections des diagonales.<br>* médiatrice des côtés<br>* cas de points cocycliques / non cocycliques | → mise en évidence de C.E[165] ou de la difficulté à lier à l'optimisation |

* milieu de la plus grande diagonale → contre-exemple, mais idée semble intéressante

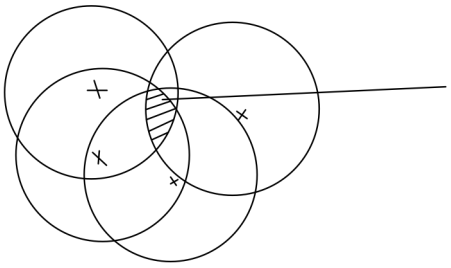
*Troisième étape : changement de point de vue*

*On part des villes pour aller vers le centre de secours, et pas du centre de secours vers les villes*
*Problème : trouver la situation limite entre « il n'existe pas de zone de centre » à « il existe une zone de centre ».*
*Au lieu de placer quatre points, si possible dans un cas particulier, puis de crayonner, on part de l'idée directrice : soit [AB] le plus long segment parmi tous*



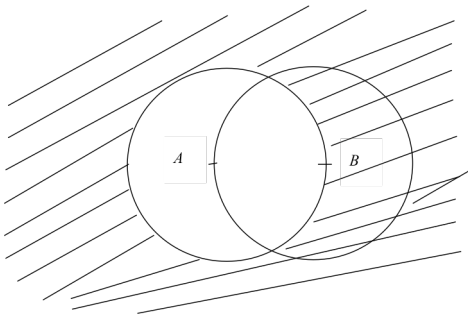

*Zone dans laquelle devrait se situer le centre mais ne pourra pas atteindre A et B dans les temps impartis par le rayon du cercle*

*Il n'existe pas de zone de centre*

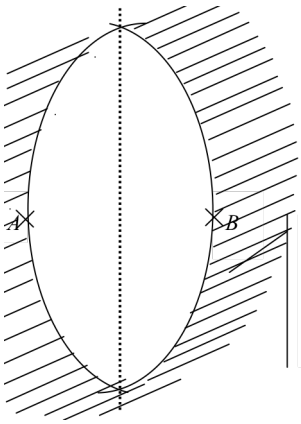


*Zone du centre*

*Puis adaptation de l'idée à celle de plus grande diagonale.*

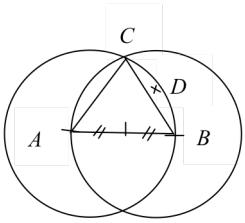



*Les autres pts ne peuvent pas être là si [AB] est la + gde « diagonale »*

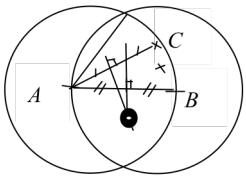



*Les deux autres points sont là*

→




*Cas extrême le milieu de [AB] n'est pas le plus court*



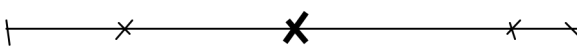

→

*soit [AB] et [AC] les deux plus grands segments, alors le centre de secours est l'intersection des médiatrices de [AB] et de [AC].*

***FC06-7-G1***

** D'abord les cas simples*

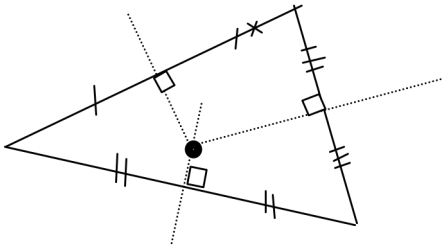
** Si les quatre villages sont alignés :*



*on place le centre de secours au milieu du segment reliant les deux villages les plus éloignés.*

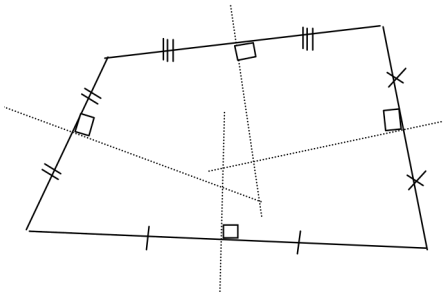
*Comme il est à égale distance des deux plus loin, il est évidemment plus près des deux autres.*

** Si trois points (villages) sur quatre sont alignés, il faut rechercher le point le moins éloigné des trois villages qui constituent le triangle.*

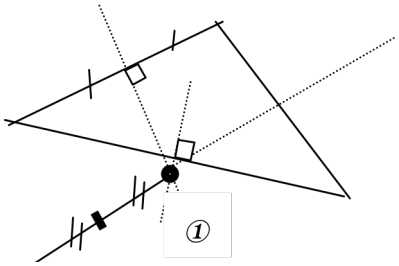


*Donc en prenant le centre du cercle circonscrit, on se place à égale distance des 3 plus loin. Et si on se décale de ce point, on sera forcément plus loin de l'ensemble des trois ⇒ pas possible.*

** Sinon, cela forme un quadrilatère :*

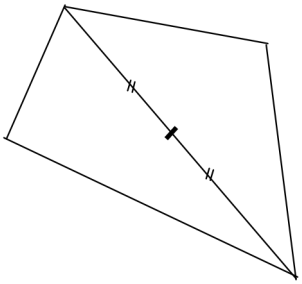


*① le centre de secours, pour bien faire, devrait être à égale distance des quatre. C'est impossible, sauf cas particulier, mais j'utilise cette piste en traçant les quatre médiatrices des côtés. Je ne sais pas comment utiliser ces constructions.*

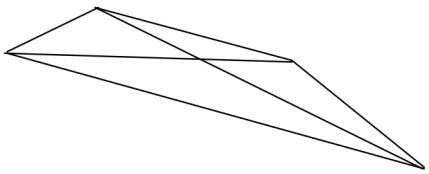



*② J'essaie en enlevant une contrainte : s'il n'y avait que trois points, je saurais où placer le centre de secours (CS) mais évidemment, même en prenant le milieu de ce point et du quatrième, ça ne fonctionne pas tout le temps.*

*③ Ensuite, je me dis que le CS doit être à égale distance des deux villages les plus éloignés, pour ne pas en pénaliser un.*



*Il faut donc en plus de regarder les diagonales, aussi les côtés car :*



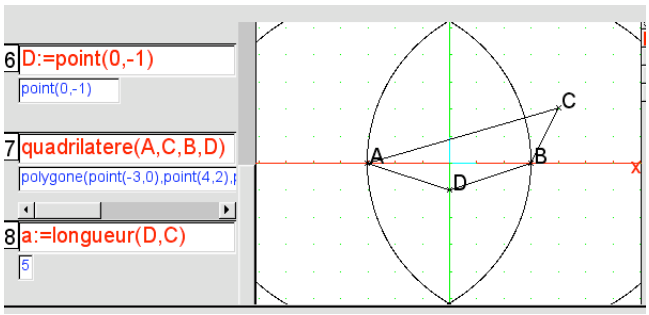
*Malheureusement dans certains cas, problème.*
*④ Reste peut-être à retravailler soit sur les médiatrices des segments les plus longs, soit sur le régionnement du plan qu'elles entraînent.*

**Commentaires sur ces productions**

Les textes FC06-1-G1 et FC06-7-G1 sont rédigés et comportent des éléments analogues, tout en différant sensiblement sur trois points : l'illustration par des figures, présente dans le second et totalement absente dans le premier, l'explicitation d'éléments de preuve de certains cas, dans le second seulement, enfin la présence de questions dans le premier exclusivement. Le texte FC06-2-G1, peu rédigé, explicite dès le début le critère retenu, ce qui n'est pas fait du tout dans FC06-7-G1, alors que cette formulation du critère est tout de même donnée, mais après l'étude de cas particuliers dans FC06-1-G1 : les auteurs de deux des textes font des constructions de médiatrices, étudient des cas particuliers, alors même qu'ils ne savent pas exactement ce qu'ils cherchent ou qu'ils n'éprouvent pas le besoin de le formuler. Dans un second temps, cette production FC06-2-G1 reprend, beaucoup plus brièvement que les deux autres, des constructions relatives à l'étude de cas particuliers telles que tracé des diagonales, des médiatrices de côtés de quadrilatères ou triangles…, tout en formulant la difficulté à relier ce travail à ce qu'on cherche et en mentionnant que des contre-exemples ont été trouvés, mais sans les donner. Les deux autres textes ne signalent pas l'existence de contre-exemples, mais indiquent seulement que les réponses trouvées ne conviennent que dans certains cas particuliers, ce qui s'avère faux dans certains cas, comme il est vu plus loin. Enfin, dans une troisième partie, le texte FC06-2-G1 développe le « point de vue du villageois », en mentionnant qu'il s'agit d'un changement de point de vue, le premier adopté étant « celui du sauveteur ». La recherche ayant été faite en groupe, il est étonnant de ne voir émerger l'idée de disque que dans le texte FC06-2-G1, seule est mentionnée une allusion au régionnement du plan à partir des médiatrices dans FC06-7-G1.

Un travail est développé sur quatre cas particuliers : les quatre villages alignés, trois villages alignés, les quatre points cocycliques. Seul FC06-7-G1 développe le traitement des deux premiers cas. Le résultat concernant trois villages alignés est faux car il ne distingue pas le cas des triangles avec un angle obtus. Concernant ces cas particuliers, les textes FC06-1-G1 et FC06-2-G1 sont beaucoup trop succincts pour qu'on puisse voir que les résultats sont faux ; ce n'est que l'autre texte qui le révèle. On peut penser, d'après les éléments de FC06-7-G1, que le résultat concernant quatre points cocycliques est faux aussi : il semblerait que le centre de secours soit placé au centre du cercle, ce qui est faux (voir contre-exemple déjà donné pour la classe précédente).

L'affirmation, sans preuve, donnée dans le texte FC06-2-G1, « Les autres points ne peuvent pas être là si [*AB*] est la plus grande diagonale » est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :




le quadrilatère *ADBC* admet bien [*AB*] comme plus grande diagonale puisque $AB = 6$ et $DC = 5$. Cependant le point *C* est bien dans la région rejetée dans FC06-2-G1

Le dernier cas traité dans FC06-2-G1 propose une réponse fausse, qui devient une question dans FC06-1-G1 : la conclusion (toujours non prouvée) suivant laquelle le centre de secours est le point d'intersection des médiatrices des segments les plus grands est illustrée par une figure comportant un quadrilatère dont l'enveloppe convexe est un triangle, à l'extérieur duquel se trouve le centre du cercle circonscrit, ce qui suffit à rejeter ce centre comme le lieu du centre de secours : cette figure constitue un contre-exemple à ce qui est conclu.

**Les productions des enseignants du groupe 2**

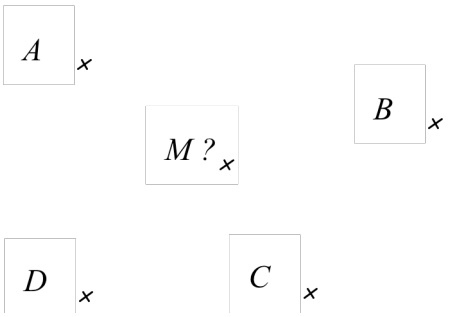
Elles sont désignées par FC06-3-G2, FC06-4-G2 et FC06-6-G2.

***FC06-3-G2***

*La première attitude que nous ayons eue est de faire un dessin pour se repérer et mieux « voir ». Le problème étant lié aux distances, nous sommes tout d'abord partis sur les médiatrices, à cause de la propriété d'équidistance qui les caractérise… sauf que nous commencions à nous tromper de problème. Nous ramenions un problème de minimalisation de distance à un problème de point équidistant de 4 autres…*
*Cette erreur était due au fait que dans le triangle ABC dont nous partions (nous avions mis un point de côté), nous avions considéré à tort que le point d'intersection des médiatrices était le point tel que MA + MB + MC soit minimale… Or il s'avère que* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ *pour M=G isobarycentre !*
*Nos recherches se sont orientées vers l'isobarycentre des 4 villages A, B, C, D. On a donc cherché à réduire la somme des distances* $MA_i^2$

$$MA_i^2 = MG^2 + GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{A_i}$$

d'où $\sum_{i=1}^{4} MA_i^2 = 4MG^2 + \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 + 0$ [166]




*somme qui est minimale pour M=G.*
*Mais et les cas particuliers ? (les 4 villages sont alignés ; 3 seulement sont alignés…).*
*De plus, n'avons-nous pas transformé le problème initial ? Ne nous sommes-nous pas fourvoyés, en ne répondant pas au problème ?*
*Et si nous étions allés plus loin dans notre raisonnement sur les médiatrices finalement…*
*Bref c'est inachevé.*

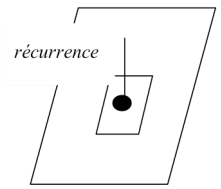
***FC06-4-G2***

*⇒ Quand on découvre le sujet, on peut penser au triangle d'abord.*
*⇒ Traduire l'énoncé « la distance = vitesse ? » / la plus longue distance soit minimalisée.*

---

[166] On suppose que l'auteur a voulu écrire $MA_i^2 = MG^2 + GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{GA_i}$

*Plusieurs pites :*
*⇒ recherche sur le triangle avec médiatrice et barycentre.*




*⇒ médiatrice des points groupés par 3 puis les médiatrices des 4 points obtenus et récurrence de quadrilatère de + en + petit.*

*⇒ changement de l'énoncé : idée de minimaliser une fonction avec les coordonnées*
*⇒ chgt d'axe problème minimaliser la somme des distances ⇒ isobarycentre (est-ce bien le bon résultat ?)*
*⇒ marche pas si ils sont alignés (ce serait le milieu des points extrêmes)*
*⇒ logiciel de géométrie dynamique / ou tableur avec des si pour expérimenter. Problème on peut pas vraiment expérimenter c'est vite trop long (Cabri tableur grosse aide).*

### *FC06-5-G2*

*$A_1, A_2, A_3, A_4$ sont quatre points du plan*
*1) On cherche à minimiser la fonction scalaire*

$$f : M \mapsto \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{MA_i^2}$$

*Indication : considérer l'isobarycentre des points* $\left(A_i\right)_{i=1,\ldots,4}$
*2) On peut faire le même travail avec la fonction*

$$g : M \mapsto \sum MA_i$$

*C'est une tâche plus compliquée qu'en 1).*

### *FC06-6-G2*

*On a voulu minimiser les distances du centre de secours aux quatre villes.*
*Pistes explorées :*
** Tracer les quatre centres des cercles circonscrits aux 4 triangles et recommencer l'opération*
** minimiser la fonction $OV_1 + OV_2 + OV_3 + OV_4$*
** utilisation de l'isobarycentre des points $V_1, V_2, V_3, V_4$*

$$MA_i^2 = MG^2 + GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{GA_i}$$

$$\sum_{i=1}^{4} MA_i^2 = 4MG^2 + 4\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG} \bullet \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i}^{167}$$

$$= 4MG^2 + 4\sum_{i=1}^{4} GA_i^2$$

[167] Il y a une erreur dans les deuxième et troisième lignes :

*C'est bien minimisé si G =M*
*cas particulier : 4 points alignés*
*3 points alignés + 1 autre*

**Commentaires sur les productions de ce groupe 2**

Trois des textes décrivent la démarche utilisée, alors que FC06-5-G2 est très succinct : il ressemble à un texte d'exercice, très formel, qu'on pourrait poser à partir de la classe de première, en section scientifique ; aucun lien n'est fait avec le problème posé, d'ailleurs quel pourrait-il être ? On peut supposer que l'auteur de cette production est peu habitué à décrire sa démarche.

Au travers de deux des autres textes (FC06-3-G2 et FC06-6-G2), on voit que le groupe s'est d'abord penché sur le cas particulier du triangle. Le problème est ramené à la construction de médiatrices, le critère d'égale distance entre le centre de secours et les villages étant d'abord retenu. L'obtention d'un quadrilatère formé par les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles conduit à l'idée d'itérer la méthode sur ce quadrilatère, le quadrilatère ainsi construit devenant plus petit : seuls les textes FC06-4-G2 et FC06-6-G2 mentionnent cette idée, sans toutefois donner la raison de son abandon. La question de savoir ce qu'on cherche, présente dans trois des textes sous la forme « minimiser les distances du centre de secours aux 4 villages » se transforme en la recherche du minimum de la somme des distances du centre de secours aux quatre villages, puis en celle du minimum de la somme des carrés de ces distances, procédure connue des enseignants qu'ils développent en faisant intervenir l'isobarycentre des quatre points. Les changements de pistes ne sont pas justifiés. Cette dernière stratégie semble poser question : seul le texte FC06-6-G2 affirme qu'elle ne convient pas si les points sont alignés, mais aucun contre-exemple n'est donné dans les trois autres productions. Le texte FC06-6-G2 mentionne les cas des quatre points alignés, puis de trois des points alignés, sans expliciter ce qu'il en ressort, le texte FC06-3-G2 accompagne ces cas particuliers d'un point d'interrogation. Le faux prouvé est absent de ces textes. Aucune conjecture n'est énoncée. On note quelques questions dans deux des textes. Il est difficile de déceler le statut de ce qui est écrit : par exemple, dans le texte FC06-6-G2, on voit annoncée la procédure de détermination de l'isobarycentre des quatre points pour minimiser la somme des carrés des distances, elle est suivie des calculs, puis de la conclusion que le minimum est obtenu « si $G = M$ », enfin sont cités les cas de quatre, puis trois points alignés, sans qu'apparaisse la contradiction avec ce qui précède, à savoir que ces cas fournissent des contre-exemples au résultat du barycentre. On fait l'hypothèse que les auteurs s'interdisent le faux dans un texte mathématique. Cela semble être aussi le cas de l'auteur de FC06-3-G2 qui, devant cette contradiction, signale seulement « Mais, et les cas particuliers ? »

---

$$\sum_{i=1}^{4} MA_i^2 = 4MG^2 + \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG} \bullet \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{GA_i}$$

$$= 4MG^2 + \sum_{i=1}^{4} GA_i^2$$

Des calculs (qui comportent des erreurs) sont donnés dans deux des textes, mais, contrairement à ce que pensent les auteurs, ils sont sans rapport avec le problème posé. On pourrait dire que les auteurs transforment le problème de manière à aboutir à une question qu'ils savent traiter, même si elle n'a pas de lien avec la recherche du centre de secours. La première transformation se situe au moment où le critère du minimum de la plus grande distance à quatre points est abandonné au profit de la recherche du minimum de la somme des distances à quatre points, la seconde quand ce deuxième critère laisse la place à celui de la recherche du minimum de la somme des carrés des distances à quatre points.

Ces textes révèlent le cheminement de la démarche, sans donner les raisons des changements de pistes.

## 3. Les textes de la troisième classe, PLC2-06

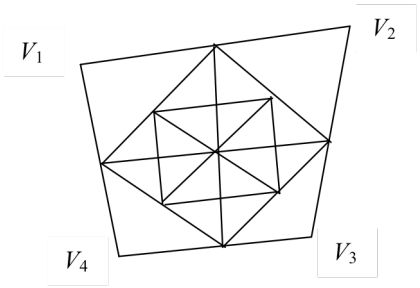
Il s'agit pour cette classe, rappelons-le, de productions d'enseignants stagiaires, qui suivent tous un module de formation sur la démonstration à l'IUFM.

### Les productions du premier groupe

Ce groupe comporte trois professeurs stagiaires.

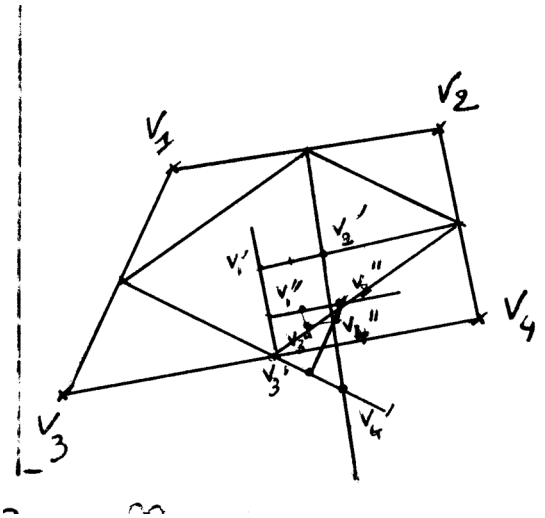
#### *PLC2-06-3-G1*

*Recherche*




*Le plus éloigné du centre*
*il faut minimiser la plus grande distance entre le centre et les quatre villages*

*2 villages → le milieu*
*3 villages → le centre du cercle circonscrit (point d'intersection des médiatrices)*




*Ce problème revient à minimiser la plus grande distance entre un point (le centre de secours) et quatre autres points (les villages).*

*Partant du constat que si nous avons uniquement deux villages le point de secours sera forcément au milieu, nous avons tracé les milieux de chaque segment reliant deux villages. Ainsi nous avons obtenu le quadrilatère de Varignon dont nous avons tracé le point d'intersection des …*
*Cette solution semble réaliste.*

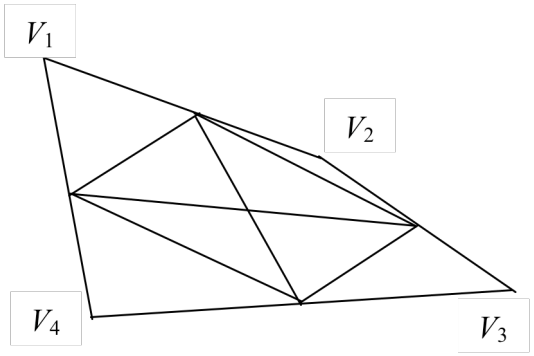
*Puis nous avons essayé de voir ce qui se passe avec trois villages et de l'adapter au cas de quatre villages.*
*Quatre points donnent quatre triangles. Nous avons tracé le centre du cercle circonscrit de chacun et ainsi nous obtenons un nouveau quadrilatère auquel nous réitérons la technique. Apparemment la technique converge vers un point. Mais ce point convient moins que celui obtenu avec la première technique.*

*Une piste à creuser : les barycentres.*

*ouverture* *Est-ce que le problème ne serait pas plutôt de minimiser la distance entre un point et quatre autres ?*
*→ si les points sont cocycliques : c'est évident.*
*→ sinon : retour aux barycentres*

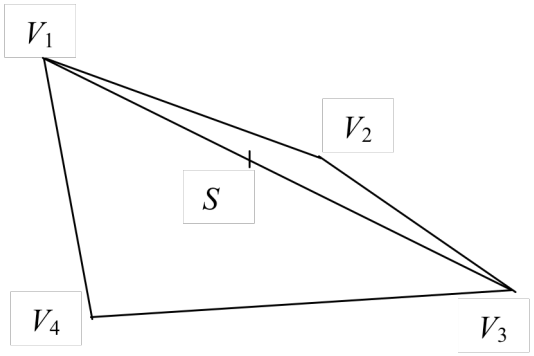
***PLC2-06-4-G1***

(*)




*Minimiser la plus grande distance entre le centre de secours et les villages.*

*- Plusieurs essais de résolution*
*→ Tracer le plus grand segment entre les villages (segment entre les deux villages les plus éloignés), le centre de secours pouvant être le milieu de ce segment.*

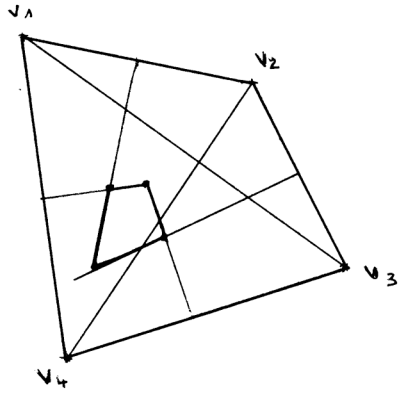



*Comment prouver que $SV_2$ et $SV_4$ ne seraient pas plus grandes que $SV_3$ ? (Ne convient pas)*
*→ Idée : nous voudrions que lorsque nous nous rapprochons du village le plus éloigné, ce ne soit pas un autre village qui devienne le plus éloigné.*
*Tracer le quadrilatère de Varignon. Tracer ses diagonales. Le point d'intersection des diagonales correspond-il au centre de secours ?*

(*)

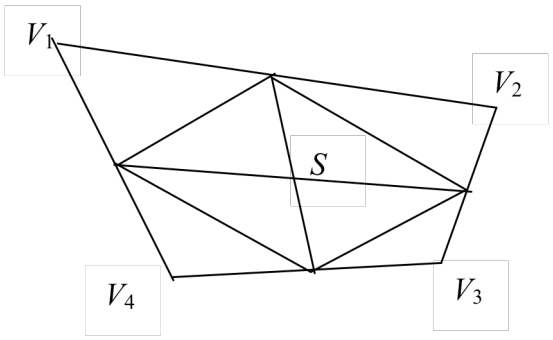
*→ si le centre de secours était pour deux villages, il faudrait le placer au milieu. Pour trois villages, ce serait le centre du cercle circonscrit.*
*Pour 4 villages, nous traçons le quadrilatère dont les sommets sont les centres cisrconscrits des traingles $V_1V_2V_3$, $V_2V_3V_4$, $V_3V_4V_1$ et $V_4V_1V_2$.*

*Nous refaisons le même travail avec ce quadrilatère.*



### *PLC2-06-5-G1*

*→ Minimiser le temps revient à minimiser la distance*
*Première idée : nous avons pensé au quadrilatère de Varignon :*
*Schéma :*




*Nous avons placé les quatre villages de façon quelconque, tracé le « quadrilatère des milieux » et tracé les diagonales de ce quadrilatère.*
*Le centre de secours serait l'intersection des diagonales.*
*Mais S (sur le schéma) pourrait être encore plus proche de $V_1$ (le village le plus éloigné de S).*

*Deuxième idée : Raisonner avec un nombre moindre de villages. Pour deux villages, le centre de secours doit être placé au milieu de $[V_1V_2]$.*
*Pour trois villages, le centre de secours doit être placé sur le centre de gravité du triangle $V_1V_2V_3$.*
*Pour quatre villages, il faudrait qu'il soit à égale distance des quatre villages. Donc il faudrait que les quatre villages soient cocycliques (et le centre de secours serait le centre du cercle).*
*Mais les villages étant fixés ce n'est pas toujours possible.*

*Troisème idée : Fixer quel village est le plus éloigné (par exemple $V_1$). Tracer le cercle de centre G circonscrit aux trois autres puis minimiser la*
*S serait le point d'intersection de $[V_1G]$ avec le cercle. Cela ne fonctionne pas. Le poste de secours pourrait être encore plus près de $V_1$.*

*Piste à étudier : les barycentres*

**Commentaires sur les productions de ce premier groupe**

Le cheminement des idées est raconté dans ces trois textes, mais le lien entre les idées est difficile à saisir. Il s'agit davantage d'association d'idées que de raisonnement de type mathématique. En voici deux exemples. Le premier se lit dans le texte PLC2-06-3-G1 : « Partant du constat que si nous avons uniquement deux villages le point de secours sera forcément au milieu, nous avons tracé les milieux de chaque sgt reliant deux villages. Ainsi nous avons obtenu le quadrilatère de Varignon dont nous avons tracé le point d'intersection des … (il manque ici un mot qui doit être *diagonales*). Cette solution semble réaliste ». Il semblerait que ce soit le mot de milieu qui serve de fil conducteur à la narration. De plus, on peut se demander ce qui permet de passer de l'idée de milieu à celui de l'intersection des diagonales du « quadrilatère des milieux ». Que signifie, sur le plan mathématique, qu'une « solution est réaliste » ? La production PLC2-06-5-G1 affirme, d'après le dessin tracé de ce point $S$ d'intersection des diagonales du quadrilatère de Varignon, que $S$ « pourrait être encore plus proche de » l'un des villages : ce serait donc un contre-exemple, mais celui-ci n'est pas signalé en tant que tel. Le second exemple de « raisonnement non mathématique » est tiré du texte PLC2-06-5-G1, dans lequel est noté : « Pour 2 villages, le centre de secours doit être placé au milieu de $[V_1V_2]$. Pour 3 villages, le centre de secours doit être placé sur le centre de gravité du triangle $V_1V_2V_3$. Pour 4 villages, il faudrait qu'il soit à égale distance des quatre villages. Donc il faudrait que les quatre villages soient cocycliques (et le centre de secours serait le centre du cercle). » L'association des deux cas, « milieu pour deux villages » et « centre de gravité pour trois », peut laisser penser que c'est la notion d'isobarycentre qui est sous-jacente, mais cela ne convient pas pour le rapprochement avec le cas « des quatre villages qui devraient être cocycliques ».

Deux de ces textes contiennent très explicitement le critère retenu pour déterminer le centre de secours, à savoir minimiser la plus grande distance entre le centre et les quatre villages. Mais aucun ne s'attarde davantage sur la modélisation. On note à nouveau que ce critère évolue très rapidement devant celui de l'égale distance à quatre points, sans que la contradiction n'apparaisse aux auteurs des textes. L'affirmation selon laquelle « c'est évident pour quatre points cocycliques » est fondée sur ce critère d'égale distance.

Deux des textes, PLC2-06-3-G1 et PLC2-06-4-G1, mentionnent l'idée de réduire le quadrilatère par la construction itérée des centres des cercles circonscrits. Il est noté que le point obtenu « convient moins que celui » qui est à l'intersection des diagonales du quadrilatère de Varignon. Enfin on peut noter l'originalité de la troisième idée du texte PLC2-06-5-G1, dont il est écrit qu'elle « ne fonctionne pas » : elle propose de « fixer quel village est le plus éloigné », noté $V_1$, puis de construire le centre de secours à l'intersection du cercle circonscrit (de centre $G$) et de $[V_1G]$.

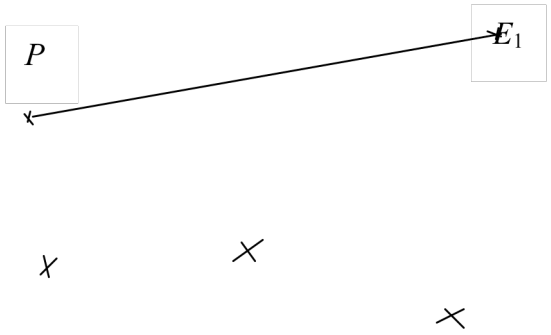
Enfin on peut dire que la preuve, que ce soit du vrai ou bien du faux, ne vit pas dans ces textes, qui contiennent des affirmations fausses, qui ne sont pas présentées comme des conjectures. Aucun contre-exemple n'est visible, aucun élément de preuve du vrai non plus.

## Les productions du deuxième groupe

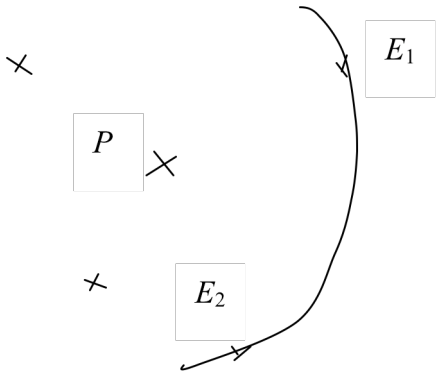
Ce groupe comportait trois personnes qui n'ont rendu que deux productions.

### *PLC2-06-1-G2*

*- On considère quatre villages : ①, ②, ③, ④.*
*- Grâce à ces quatre villages, on a quatre triangles (123, 124, 134, 234) donc quatre centres de cercles circonscrits.*
*- Le Poste est un de ces quatre centres car :*
*Imaginons qu'on ait la place du poste P*
** On prend alors le village le + éloigné $E_1$.*




*On se place alors sur le segment $PE_1$, pr se rapprocher de $E_1$ jusqu'à mettre un deuxième village (le premier qu'on peut) sur le cercle de centre P, de rayon $PE_1$.*
*On se retrouve avec deux villages les plus éloignés (qui sont bien les plus éloignés car on a pris le premier village possible).*
** On a donc*




*Deux villages $E_1$ et $E_2$ les plus éloignés du poste*
*Deux autres villages dans le cercle de centre P, de rayon $PE_1 = PE_2$.*

*On recommence pr se rapprocher encore de $E_1$ et $E_2$ : en restant sur la médiatrice de $[E_1E_2]$ jusqu'à mettre un troisième pt sur le cercle de centre P et de rayon $PE_1 = PE_2$.*
*Vu qu'on prend encore le premier possible, le quatrième village est dans le cercle. On obtient un centre de cercle circonscrit.*
*- Lequel de ces quatre centres :*
*Plusieurs possibilités*
*- Soit il y a un seul cercle dont le quatrième village est dans le cercle. Alors c'est lui. Si plusieurs possibilités, on prend celui de rayon le plus petit.*
*- Soit en raisonnant sur les longueurs des rayons, et de distance centre/quatrième point.*

***PLC2-06-2-G2***

*On considère quatre points du plan $V_1$, $V_2$, $V_3$ et $V_4$ qui représentent les quatre villages, et P un point qui représente le centre de secours (placé aléatoirement pour l'instant) et on va chercher à optimiser la position de P.*
*Considérons le cercle de centre P et qui passe par le village le plus éloigné de P. Les trois autres villages sont à l'intérieur du cercle.*
*On peut optimiser la position de P en rapprochant P du village le plus éloigné, le cercle va se rétrécir jusqu'à ce que deux villages soient sur le cercle.*
*Si on rapproche P des deux villages les plus éloignés le cercle va encore se rétrécir jusqu'à ce qu'un troisième point se trouve sur le cercle et le quatrième à l'intérieur. A ce moment-là on ne peut optimiser plus la position de P.*
*P est donc le centre d'un cercle circonscrit à un des quatre triangles que l'on peut former avec les quatre villages.*
*Lequel des quatre est le bon ?*
*Celui qui tracera le cercle avec le quatrième village à l'intérieur.*
*Si il y a plusieurs possibilités on prend celui qui donne le cercle au rayon le plus faible.*
*Il n'y a pas un seul village le plus éloigné mais au moins trois.*

**Commentaires sur les productions de ce deuxième groupe**

Ces deux textes donnent une preuve (fausse) du fait que le centre de secours est nécessairement le centre d'un des quatre cercles circonscrits aux quatre triangles formés à partir des quatre villages. Ils utilisent une procédure développée dans l'analyse a priori, celle qui consiste à attraper le plus possible de points, soit trois, sur le cercle, et à s'arrêter lorsque le quatrième point appartient au disque correspondant. Celle-ci n'est valable que dans certains cas particuliers, celui où les triangles n'ont que des angles aigus. Cette idée d'attraper trois points sur le cercle conduit à celle du cercle circonscrit au triangle, mais occulte la possibilité d'obtenir un rayon plus petit, dans le cas où deux points seraient diamétralement opposés et les deux autres appartiendraient au disque correspondant.

Par ailleurs, rien n'est dit de la modélisation, ce qu'on cherche n'est pas reformulé. L'idée de disque est cependant présente, bien que le mot ne figure dans aucune des deux productions. A plusieurs reprises, le mot de cercle est à prendre au sens de disque.

On notera qu'aucun cas particulier n'est évoqué. Le deuxième texte ne comporte aucune figure.

## 4. Les textes de la quatrième classe, APM02

Les deux transparents qui suivent ont été rédigés par des enseignants en groupes de deux ou trois, qui ont cherché le problème du centre de secours une demi-heure environ.

### Le premier transparent, APM02-1

*Piste 1 :*
*Placer à égale distance des quatre villages (4 points) par rapport aux mots « villages de même importance ». Points alignés. Points cocycliques.*

*Piste 2 :*
*Question des allers-retours. D'où l'idée de minimiser la distance parcourue par l'hélicoptère en supposant qu'il se déplace autant dans les quatre villages. On a parlé de barycentre (sans être convaincu).*

*Piste 3 :*
*Minimiser la somme OA + OB + OC + OD (A, B, C, D : quatre points pour quatre villages, O : centre de secours).*
*Démarche algébrique : minimiser une fonction de deux variables (ou d'une seule si points alignés, mais avec valeurs absolues).*
*Démarche géométrique : cas particuliers (trois points alignés, carré), question de symétrie.*

*Piste 4 :*
*Avec l'aide d'un logiciel, localiser le point par des essais.*

### Le deuxième transparent, APM02-2

*Utilisation de dessins aux différentes étapes de la recherche :*
*- éviter les cas particuliers,*
*- pour poser le problème,*
*- comme contre-exemple,*
*_ pour chercher à partir de deux points, de trois points… en utilisant des constructions géométriques.*

*Traduction mathématique du problème : minimiser la somme des distances de S à chaque « village ». Après avoir exclu l'égalité des distances à l'aide du contre-exemple du segment.*

*Outils, méthodes, idées :*
*Centre de gravité, isobarycentre.*
*Plus court chemin dans un graphe !!!*
*Avec trois points : les points remarquables dans un triangle.*
*Géométrie analytique.*

*Travail sur l'énoncé : vent, montagne, camion.*
*Recherche sur l'ordinateur pour une conjecture de la réponse… qu'on cherche encore !*

### Des commentaires sur ces deux transparents

Ces transparents évoquent le problème sous sa forme initiale, technique : on parle de l'importance des villages, de la distance parcourue par l'hélicoptère, du vent…, éléments qu'on retrouve peu dans les autres productions. Par contre, il n'est dessiné qu'une seule figure (et encore, un segment). Les pistes et les démarches sont seulement évoquées, il n'y a aucun résultat, aucune conjecture.

Les deux transparents évoquent une liste de pistes auxquelles on cherche à se raccrocher, sans se préoccuper du problème : chercher un point à égale distance des quatre villages, un barycentre, un point qui minimise la somme des distances aux

quatre villages, les points remarquables du triangle… Ceci relève d'une certaine conception sur la preuve : on met en regard du problème à résoudre une liste de méthodes qu'on passe en revue, sans se préoccuper du problème lui-même. Le choix du fichier de méthodes est seulement guidé par certains éléments évoqués par le problème tels que points, centre, minimum, distance…

Un autre élément de conception, très répandu dans les classes, notamment de collège, est explicitement rédigé dans le deuxième transparent : « éviter les cas particuliers ».

On note également une affirmation étonnante : « […] après avoir exclu l'égalité des distances à l'aide du contre-exemple du segment. » Le segment [*AB*] dessiné figure deux villages, un point *S* est placé sur le segment, le centre de secours, mais pas au milieu : or il est clair que, pour deux villages, le centre de secours est le point qui réalise l'égalité des distances aux deux villages, c'est le milieu du segment.

## 5. Les productions de la cinquième classe, PLC2-06/07

Les enseignants stagiaires avaient une bonne demi-heure seulement pour chercher et rédiger, par groupes de quatre, le problème du centre de secours.

### PLC2-06/07-1

*Preuve de l'existence de min max {MA, MB, MC, MD}*

*La fonction $\phi$ de $IR^2$ dans IR, qui à M associe max {MA, MB, MC, MD} est continue, comme maximum de quatre fonctions continues : $M \rightarrow MA$, $M \rightarrow MB$, $M \rightarrow MC$, $M \rightarrow MD$.*
*Recherche d'un minimum sur un compact K bien choisi :*
*prenons K=boule fermée de centre A et de rayon r, r étant le maximum de {AB, AC, AD}.*
*Par argument de continuité et compacité, ce minimum noté $m_0$ existe et $m_0 \leq r$.*
*Il est assez clair que, hors de K, max {MA, MB, MC, MD} > $r \geq m_0$.*
*Donc $m_0$ est le minimum de $\phi$ sur $IR^2$. CQFD.*

*Conjecture : soient A, B les deux villages les plus éloignés. Le point M cherché sera soit le milieu de [AB], soit le centre du cercle circonscrit à ABC, ou encore ……ABD.*

### Commentaire sur cette production PLC2-06/07-1

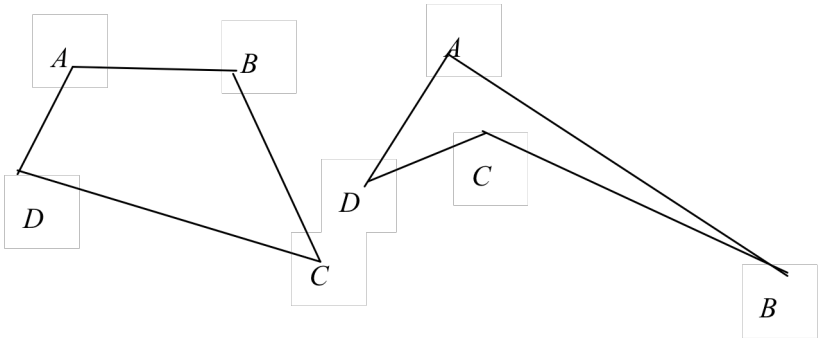
C'est une des rares productions obtenues où est posée et résolue la question de l'existence du point cherché, sans évocation d'une méthode pour obtenir ce point. Le statut des affirmations est clair : preuve de l'existence du centre de secours, conjecture sur sa position suivant les cas de figures.

### PLC2-06/07-2

*Le centre de secours.*

*Notons A, B, C, D les quatre villages.*

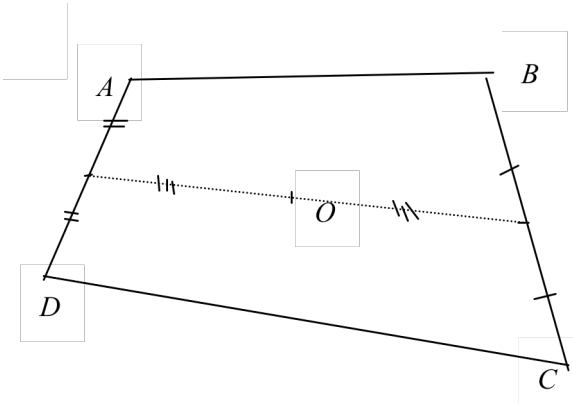
*Première approximation : considérons que les quatre villages sont situés dans un même plan.*
*Exemples de quadrilatères :*




*Première conjecture : Le centre de secours doit être situé à l'intérieur de l'enveloppe convexe du quadrilatère ABCD.*

*Première idée : tracer les médiatrices des segments [AB], [BC], [CD], [DA] en espérant y voir plus clair.*
*Nous nous sommes intéressés au polygone formé par les médiatrices, mais il n'existe pas dans tous les cas, nous avons donc abandonné cette piste.*

*Deuxième idée : Il semblerait qu'il faille placer le centre de secours en l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.*




*O est le centre de secours*

*Démonstration : à suivre…*

**Commentaire sur cette production PLC2-06/07-2**

On note une début relatif à un élément de modélisation du problème, curieusement appelé « approximation », à savoir que les villages sont considérés dans un même plan.

L'idée d'un travail sur les quadrilatères est prégnante. Le fait que, dans certains cas, notamment celui qui est représenté au début, on puisse ramener à trois points la recherche du centre de secours pour quatre villages, n'est pas exploité.

**PLC2-06/07-3**

*Le centre de secours*

*→Idée du barycentre rapidement abandonnée.*
*→Idée du milieu du diamètre du pentagone.*
*→Idée du cercle de diamètre minimal contenant les quatre points :*
**il est unique*
**On peut le trouver :*
*- soit il passe par deux points, et alors c'est le milieu du diamètre*
*- soit il passe par au moins trois points, et ainsi c'est l'intersection des médiatrices.*

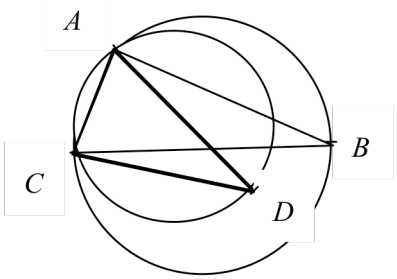
*On construit tous les milieux de bipoints et les cercles circonscrits à tous les triplets. On trace les cercles associés. On choisit le cercle le plus petit. On arrive à la solution en dix essais maximum.*

**Commentaires sur cette production PLC2-06/07-3**

Il est question, au début, d'un pentagone : il doit s'agir d'une confusion de mots, pentagone pour quadrilatère.

On affirme que le centre de secours est unique : peu de productions ont évoqué de point. Une méthode est donnée pour construire ce centre, mais aucune preuve n'est évoquée.

Une erreur à la fin : il ne s'agit pas du cercle le plus petit, comme le montre le contre-exemple suivant :




*Le cercle circonscrit au triangle ABC délimite un disque qui contient le quatrième point D. Le cercle circonscrit au triangle ACD est plus petit que le cercle précédent, mais il n'est pas solution car le disque correspondant ne contient pas le point B.*

**PLC2-06/07-4**

*Centre de secours*[168]

*1) Cas où les villages sont alignés : on place le centre de secours au milieu des villages extrêmes.*

*2) Cas où l'enveloppe convexe des quatre villages est un triangle*
** On s'est d'abord intéressé au centre de gravité en pensant qu'il serait solution.*

[168] Trois dessins n'ont pas été reproduits, qui n'apportent rien par rapport au discours rédigé.

*Mais en étudiant le cas où les villages sont alignés, le barycentre vérifie* $\sum_i \overrightarrow{MV}_i = \vec{0}$*, mais ne minimise pas les distances.*
** On a donc regardé le centre du cercle circonscrit car ce point est à distance égale des sommets. Mais en prenant un triangle avec un angle obtus, le centre du cercle circonscrit sort du triangle ! Ce point n'est donc pas une solution.*

*3) Cas où l'enveloppe convexe des quatre villages est un quadrilatère*
** carré : on prend le centre du carré.*
** losange et rectangle : point d'intersection des diagonales.*
** quadrilatère quelconque : on a pensé à l'isobarycentre, mais ça n'a pas l'air de marcher. On a essayé de scinder le quadrilatère en deux triangles et d'étudier chaque triangle. En les étudiant et avec des contre-exemples, on retombe sur l'isobarycentre !*

**Commentaire sur PLC2-06/07-4**

La disjonction de cas qui apparaît immédiatement dans le transparent est en fait un moyen d'examiner des cas particuliers. C'est le raisonnement sur différents cas de quadrilatères qui semble l'emporter et conforter les auteurs dans la recherche d'un barycentre.

**PLC2-06/07-5**

*Préliminaires*
** Pas de contraintes supplémentaires : relief, mer…*
** notion de « plus éloigné » : réponse simpliste : le poste de secours au village le plus éloigné.*

*Isobarycentre :*
*contre-exemple : figure*

*Milieu des deux villages les plus éloignés*
*contre-exemple : figure*

*Trois points*
*Chaque triplet de points définit un cercle circonscrit. On regarde la distance du centre du cercle et du quatrième point avec les quatre cercles.*
*Soit M' le centre du cercle qui ne passe pas par M et* $r_M$ *son rayon. On cherche le minimum, pour M appartenant à {A, B, C, D}, du maximum de {MM',* $r_M$*}, et on place le centre de secours au centre du cercle qui ne contient pas le point ci-dessus.*

**Commentaire sur PLC2-06/07-5**

La réponse dite simpliste du début n'a guère d'intérêt. Le sens des expressions qui figurent dans la question n'a pas été compris.

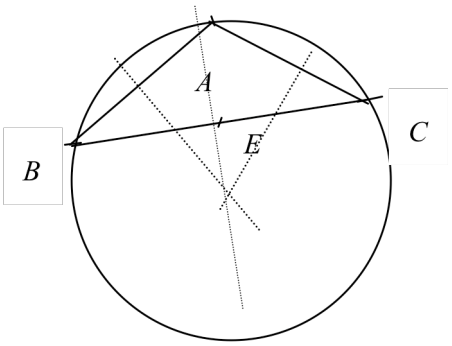
Plusieurs solutions (isobarycentre, milieu des deux villages les plus éloignés) sont rejetées en bloc, sans qu'il ne soit étudié la possibilité qu'elles puissent convenir dans certains cas. Le milieu des deux villages les plus éloignés est pourtant bien la solution dans le cas de quatre villages alignés.

Enfin, il est difficile de comprendre ce qui est proposé dans le cas de trois points.

**PLC2-06/07-6**

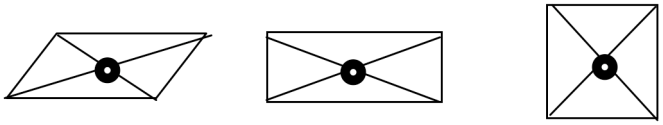
*Le centre de secours*
*On a quatre villages A, B, C, D et un centre de secours H. On cherche à minimiser max(AH, BH, CH, DH)*

*1) On s'intéresse d'abord au cas où trois points sont alignés ⇒ cas du triangle.*
*Partant de l'idée que pour deux points, c'est le milieu, on s'est d'abord dit que c'était le centre du cercle circonscrit.*

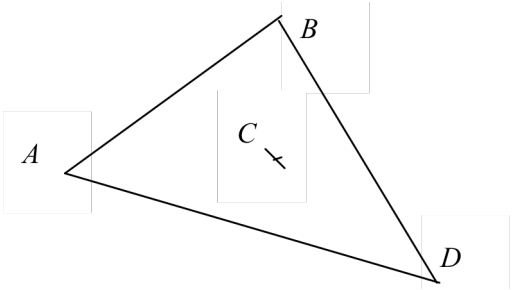



*AB=AC*
*Or ici E est la solution si d(A, (BC)) < (1/2) BC*
*Contre-exemple.*
*Ceci est aussi un contre-exemple pour le centre du cercle circonscrit.*

*2) Cas particuliers des parallélogrammes : Conjecture : intersection des diagonales*



*3) Les concaves reviennent au cas du triangle*




*Il y a toujours un des points qui est à l'intérieur de l'enveloppe convexe.*

*Si on avait résolu le problème pour trois points, on aurait résolu le problème pour le cas non convexe.*

*4) S'ils sont tous les quatre alignés : milieu des extrêmes.*

**Commentaire sur PLC2-06/07-6**

Si le critère est affiché dès le début, celui-ci n'est pas vraiment pris en compte dans la suite de la recherche. Il apparaît toutefois clairement que, pour certains cas, la recherche du centre de secours pour quatre points se ramène à la recherche pour trois.

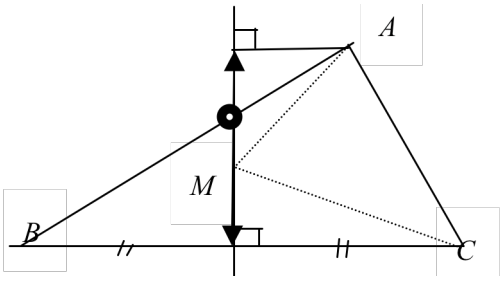
On notera que, bien qu'une figure soit dessinée pour signifier un parallélogramme, elle est suivie du cas du rectangle et de celui du carré. Pourquoi ?

### PLC2-06/07-7

*(Plusieurs figures, qui n'apportent rien à l'écrit, n'ont pas été reproduites.)*
*Formellement : si on se place dans un repère orthonormé où le point cherché a pour coordonnées (x ; y), on est amené à minimiser : max($(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$, ..., $(x-x_D)^2+(y-y_D)^2$)*

*Etude de cas simples : le carré, le rectangle, le parallélogramme (les dessins sont les mêmes que dans le transparent précédent)*

*On repart sur le cas de trois points :*




### Commentaire sur PLC2-06/07-7

Le critère est ici explicité sous une forme analytique : on cherche à minimiser le maximum des carrés des distances d'un point aux quatre villages.

Aucun commentaire par rapport à la figure de la fin.

### PLC2-06/07-8

*→ Pistes suivies :*
** Isobarycentre (abandonné avec contre-exemple),*
** Médiatrices, centres de cercles circonscrits*

*→ Piste conservée : centre d'un cercle circonscrit*
*Objectif : trouver un triangle dont le quatrième point soit à l'intérieur ou sur le cercle circonscrit à ce triangle.*
*Si le quadrilatère est non convexe : résolu.*

*Cas convexe :*
*Première idée : faire les quatre cercles circonscrits les uns après les autres.*
*Deuxième idée : essayer de trouver un moyen de faire un seul cercle.*
*On a pensé à prendre les deux plus grandes distances.*
*Troisième idée : choisir le plus grand angle.*
*Quatrième idée : faire les quatre cercles et prendre le plus petit rayon.*

**Commentaire sur PLC2-06/07-8**

Ici encore est présente l'idée que certaines configurations des quatre villages se ramènent à l'étude de trois villages seulement… L'affirmation finale est fausse : un contre-exemple est simple à trouver.

**ANNEXES AU CHAPITRE 11 :**
**ANALYSE DES PRODUCTIONS SUR LE POLYMINO**

## 1. Etude de l'indicateur « Compréhension du problème »

| *Représentation n°1 : oui, et on montre des cas où le pavage est possible* | *Représentation n°2 : non, et on montre un cas où le pavage est impossible* | *Représentation n°3 : oui ou non* |
|---|---|---|
| *PLC2-07-G6*<br>*PLC2-07-G8*<br>*PLC2-07-G9*<br>*PLC2-07-G16*<br>*PLC2-07-G18*<br>*PLC2-07-G19*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-2*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-3*<br>*PLC2-06-GA-Gr4-3*<br>*PLC2-06-GA-Gr4-4* | *PLC2-07-G17*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-1* | *FC04V-2* |
| *10 sur 64* | *2 sur 64* | *1 sur 64* |

## 2. Présence de l'étude du cas particulier $n = 5$ ou $n = 7$ dans les 64 productions

| *étude du cas* particulier $n = 5$ ou $n = 7$ |
|---|
| *PLC2-0203-1 (preuve incomplète)*<br>*FC04Ch-3 (preuve incomplète)*<br>*FC04V-1 (preuve incomplète)*<br>*PLC2-06GB-1*<br>*PLC2-06GB-2*<br>*PLC2-07-G8*<br>*PLC2-07-G19 (preuve incomplète)*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-2 (preuve incomplète)*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-2*<br>*PLC2-06-GA-Gr4-1* |

## 3. Etude de l'indicateur « existence d'un trou dans la preuve du cas *n* = 3 »

*Tableau n°2*

| *La production traite spécifiquement le cas du polymino de talle 3* | *La preuve du cas où n=3 contient un trou* |
|---|---|
| *PLC2-0203-1* | *non* |
| *PLC2-0203-3* | *PLC2-0203-3* |
| *PLC2-0203-6* | *non* |
| *FC04Ch-2* | *FC04Ch-2* |
| *FC04Ch-3* | *FC04Ch-3* |
| *FC04Ch-4* | *FC04Ch-4* |
| *FC04Ch-5* | *FC04Ch-5* |
| *FC04V-1* | *FC04V-1* |
| *FC04V-2* | *FC04V-2* |
| *FC04V-3* | *FC04V-3* |
| *FC04V-5* | *FC04V-5* |
| *FC04V-6* | *FC04V-6* |
| *FC06G-4* | *FC06G-4* |
| *FC06G-5* | *FC06G-5* |
| *FC06G-6* | *FC06G-6* |
| *FC06G-7* | *FC06G-6* |
| *PLC2-06GB-2* | *PLC2-06GB-2* |
| *PLC2-06GB-3* | *PLC2-06GB-3* |
| *PLC2-06GB-4* | *non* |
| *PLC2-07-G1* | *PLC2-07-G1* |
| *PLC2-07-G2* | *PLC2-07-G1* |
| *PLC2-07-G4* | *PLC2-07-G4* |
| *PLC2-07-G5* | *PLC2-07-G5* |
| *PLC2-07-G6* | *non* |
| *PLC2-07-G7* | *non* |
| *PLC2-07-G8* | *non* |
| *PLC2-07-G9* | *PLC2-07-G9* |
| *PLC2-07-G10* | *PLC2-07-G10* |
| *PLC2-07-G12* | *PLC2-07-G12* |
| *PLC2-07-G13* | *PLC2-07-G13* |
| *PLC2-07-G14* | *non* |
| *PLC2-07-G15* | *non* |
| *PLC2-07-G16* | *PLC2-07-G16* |
| *PLC2-07-G18* | *PLC2-07-G18* |
| *PLC2-07-G20* | *PLC2-07-G20* |
| *PLC2-06-GA-Gr2-1* | *PLC2-06-GA-Gr2-1* |
| *PLC2-06-GA-Gr2-2* | *PLC2-06-GA-Gr2-2* |
| *PLC2-06-GA-Gr2-3* | *PLC2-06-GA-Gr2-3* |
| *PLC2-06-GA-Gr3-2* | *PLC2-06-GA-Gr3-2* |
| *PLC2-06-GA-Gr3-3* | *PLC2-06-GA-Gr3-3* |
| *PLC2-06-GA-Gr4-1* | *PLC2-06-GA-Gr4-1* |
| *PLC2-06-GA-Gr4-2* | *PLC2-06-GA-Gr4-2* |
| *PLC2-06-GA-Gr4-3* | *PLC2-06-GA-Gr4-3* |
| *PLC2-06-GA-Gr4-4* | *PLC2-06-GA-Gr4-4* |
| *44 productions* | *36* |

## 4. Preuve que le polymino est pavable si le trou est une case noire, dans le cas général où *n* est impair

| *Résultat : si le trou est une case noire, polymino pavable* | *Récurrence* | *Décomposition directe* | *coloration en damier* | *trou* | *erreur* |
|---|---|---|---|---|---|
| *PLC2-0203-2* | *bande L* | | | | *initialisation récurrence* |
| *PLC2-0203-3* | *couronne* | | | | *long paire dc aire paire dc pavable* |
| *PLC2-0203-4* | | *découpage diffère suivant parité de i et j* | | | *long paire dc aire paire dc pavable* |
| *PLC2-0203-5* | | *découpage en 8 rectangles* | | | |
| *PLC2-0203-6* | *bande L* | | | | *récurrence sur CNS* |
| *PLC2-0203-7* | | *découpage en plus de 4 rect* | | | |
| *PLC2-0203-8* | | *découpage diffère suivant parité de i et j* | | | |
| *FC04V-1* | *rien sur le passage d'un rang au suivant* | | | *très incomplet* | *récurrence sur CNS* |
| *FC04V-5* | *évoquée seulement* | | | *seulement mot de récurrence* | |
| *FC04V-6* | *évoquée seulement* | *découpage en carrés 3× 3* | | | *pas clair si l'on traite CS ou CNS, récurrence ou pas* |
| *FC06G-1* | | *découpage en 4 rectangles* | | | |
| *FC06G-2* | | *découpage en 4 rectangles* | | | |
| *FC06G-3* | | | *Coloration pour CNS* | | *coloration équilibrée dc pavable* |
| *FC06G-4* | | | *coloration pour CNS* | | *coloration équilibrée dc pavable* |
| *FC06G-6* | *couronne et bande L* | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *FC06G-7* | | *extraire carrés 3× 3* | | *très incomplet* | *preuve CNS d'un coup ; erreur pav union non pav = non pavable* |
| *PLC2-06GB-1* | *couronne et bande L* | | | *très incomplet* | *récurrence sur CNS* |
| *PLC2-06GB-3* | *découpage en un carré 3× 3 et autre chose* | | | *incomplet* | *récurrence sur CNS ; pavable union non pavable = non pavable* |
| *PLC2-06GB-4* | *couronne ou bande L ou bande en U* | | | *incomplet* | *pas clair si CS ou CNS* |
| *PLC2-07-G1* | *sur un exemple générique : du 7x7 au 3x3* | | | *pas cas général* | *preuve d'un coup de la CNS* |
| *PLC2-07-G3* | | *décomposition en rectangles divers* | | | *confusion entre CNS et CN et non pav union non pav = non pavable* |
| *PLC2-07-G4* | *n'aboutit pas* | | *pas de coloration mais essai graphe* | *essais non aboutis* | *preuve d'un coup CNS* |
| *PLC2-07-G5* | | *découpage diffère suivant parité de i et j* | | | |
| *PLC2-07-G6* | *bande L* | | | *pas idée de tourner le polymino* | |
| *PLC2-07-G8* | | *sur un exemple générique : du 7x7 au 3x3* | | *pas cas général* | |
| *PLC2-07-G9* | *bande L* | | | | *confusion entre Cs et CNS pour n=5* |
| *PLC2-07-G10* | | *seul i impair pas de dessin* | | *incomplet* | |
| *PLC2-07-G11* | | *découpage diffère suivant parité de i et j* | | | |
| *PLC2-07-G12* | *3 découpages puis abandon* | *découpage en 4 rectangles* | | | *confus entre CS et CN* |
| *PLC2-07-G13* | | *découpage diffère suivant parité* | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *PLC2-07-G14* | *bande L* | | | | *initialisation récurr et confus entre CS et CN* |
| *PLC2-07-G15* | *bande L* | | | | |
| *PLC2-07-G16* | *bande L* | | | | *initialisation récurr* |
| *PLC2-07-G18* | *bande L* | | | | |
| *PLC2-07-G20* | *bande L* | | | | *confusion CN et CS* |
| *PLC2-06-GA-Gr3-1* | *bande L, puis abandon* | | | *très incomplet* | *CNS* |
| *PLC2-06-GA-Gr3-3* | *bande L* | | | *très incomplet* | *confusion CNS* |
| *PLC2-06-GA-Gr4-4* | *bande L ébauchée* | | | *mot récurrence suggéré* | |
| *38 preuves ou tentatives* | *23 évoquent ou utilisent la récurrence* | *15 recourent à une décomposition directe* | *2 preuves par coloration erronées* | *En tout : 26 ou à trous* | *16 erreurs par rapport à CNS preuves erronées sur les 38* |

## 5. Preuve de l'impossibilité du pavage si le trou est une case blanche, dans le cas où *n* est impair

| *preuve correcte par coloration en damier* | *conjecture seulement reconnue comme non prouvée* | *erreur : découpage en rectangles d'aires impaires, donc polymino non pavable ou autre découpage ou « on se ramène au cas 3x3* | *essai de preuve par récurrence* |
|---|---|---|---|
| *PLC2-0203-8*<br>*PLC2-0203-7*<br>*FC06G-1*<br>*FC06G-2*<br>*FC06G-3*<br>*PLC2-07-G5*<br>*PLC2-07-G11* | *PLC2-0203-1*<br>*PLC2-0203-2*<br>*PLC2-0203-3*<br>*FC04-V6*<br>*FC06G-6*<br>*FC06G-7*<br>*PLC2-07-G4*<br>*PLC2-07-G13 (essai non abouti par découpage)*<br>*PLC2-07-G13 (non « résolvable »)*<br>*PLC2-07-G21*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-4*<br>*PLC2-06-GA-Gr3-2*<br>*PLC2-06-GA-Gr4-1* | *PLC2-0203-4 (avec point d'interrogation)*<br>*PLC2-0203-5 (avec interrogation)*<br>*PLC2-07-G3*<br>*PLC2-07-G10 (CNS)*<br>*PLC2-07-G12 (CNS)*<br>*FC06-G7*<br>*PLC2-07-G2 (pas clair)* | *PLC2-0203-6*<br>*FC04V-1 (par l'absurde)*<br>*PLC2-06GB-1 (pas clair ce que l'on prouve)*<br>*PLC2-06GB-3 (CNS)*<br>*PLC2-06GB-4 (CNS)*<br>*PLC2-07-G1*<br>*PLC2-07-G2*<br>*PLC2-07-G4 (CNS pas clair)*<br>*PLC2-07-G14 (pas clair)* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | *PLC2-07-G15*<br>*PLC2-07-G20 (CNS)*<br>*PLC2-06-GA-Gr3-1*<br>*PLC2-06-GA-Gr3-3*<br>*PLC2-07-G15 (CNS)* |
| *7* | *13* | *7* | *14* |

| | |
|---|---|
| *Erreurs CNS (cumulées avec celles du tableau de l'annexe 4)* | *19 productions sur 48 qui tentent une étude du cas général n impair (CN ou CS)* |

## 6. Etude de l'indicateur « expérimentation sur des cas particuliers »

*Sur 64 productions au total*

| *P-TCP+* | *P-TCP–* | *P-nonTCP* |
|---|---|---|
| *PLC2-0203-1 ; PLC2-0203-3*<br>*PLC2-0203-6* | *PLC2-0203-3* | *PLC2-0203-8 mais problème résolu (résultat 4)*<br>*PLC2-0203-4; PLC2-0203-5*<br>*PLC2-0203-7 (résultat 4)* |
| *FC04Ch-2 ; FC04Ch-3*<br>*FC04Ch-4 ; FC04Ch-5*<br>*FC04V-3 ; FC04V-4*<br>*FC04V-5 ; FC04V-6*<br>*FC06G-1 ; FC06G-4*<br>*FC06G-5 ; FC06G-6*<br>*FC06G-7* | *FC04Ch-1*<br>*FC04V-1*<br>*FC04V-2* | *FC06G-2 (résultat 4)*<br>*FC06G-3* |
| *PLC2-06GB-1 ; PLC2-06GB-2*<br>*PLC2-06GB-3 ; PLC2-06GB-4* | | |
| *PLC2-06GA-Gr1-1 ; PLC2-06GA-Gr1-1*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-1 ; PLC2-06-GA-Gr2-2*<br>*PLC2-06-GA-Gr2-3 ; PLC2-06-GA-Gr2-4*<br>*PLC2-06-GA-Gr3-1 ; PLC2-06-GA-Gr3-2*<br>*PLC2-06-GA-Gr3-3 ; PLC2-06-GA-Gr4-1*<br>*PLC2-06-GA-Gr4-2 ; PLC2-06-GA-Gr4-3*<br>*PLC2-06-GA-Gr4-4* | | |

| | | |
|---|---|---|
| *PLC2-07-G1 ; PLC2-07-G2*<br>*PLC2-07-G4*<br>*PLC2-07-G5 (résultat 4)*<br>*PLC2-07-G6 ; PLC2-07-G7*<br>*PLC2-07-G8 ; PLC2-07-G9*<br>*PLC2-07-G10*<br>*PLC2-07-G11 (résultat 4)*<br>*PLC2-07-G12 ; PLC2-07-G13*<br>*PLC2-07-G14 ; PLC2-07-G15*<br>*PLC2-07-G16 ; PLC2-07-G17*<br>*PLC2-07-G18 ; PLC2-07-G19*<br>*PLC2-07-G20 ; PLC2-07-G21* | | *PLC2-07-G3* |
| *53 productions* | *4 productions* | *7 productions* |

## ANNEXES AU CHAPITRE 12

### 1. Une preuve de la somme des angles d'un polygone quelconque (croisé ou non) (d'après Choquet 1964)

On peut ramener la définition d'un *polygone P de n sommets* à celle d'une suite finie de $n$ points distincts deux à deux, ($A_1$, $A_{2, \ldots,}$ $A_n$ ), définie à une permutation circulaire près. Par convention, dans tout ce paragraphe, le suivant $A_{i+1}$ de $A_i$ pour $i = n$ est $A_1$.

Nous définissons d'abord un *angle* dans le plan, indépendamment du polygone, puis nous préciserons ce que nous appellerons un *angle du polygone P*, enfin nous calculons la somme des angles de *P*.

#### Un angle dans le plan

Pour tout point $O$ du plan $\Pi$, on appelle *angle de sommet O* toute rotation autour de $O$. Pour tout couple ($a$ ; $b$) de demi-droites d'origine $O$, on appelle *angle de ce couple* la rotation autour de $O$ qui amène $a$ sur $b$, on le note $\hat{ab}$. L'ensemble des angles de sommets $O$ est donc l'ensemble des rotations[169] autour de $O$ ; c'est donc un groupe commutatif, dont on note + l'opération.

La translation permet la comparaison des angles de sommets différents. En effet, pour tous points $A$ et $B$ du plan, la translation $t_{A, B}$ qui transforme $A$ en $B$ est un isomorphisme du plan pointé ($\Pi$, $A$) sur le plan pointé ($\Pi$, $B$), pour la structure d'espace vectoriel et pour la structure métrique. Cet isomorphisme est transitif en ce sens qu'il vérifie la propriété suivante : pour tous points $A$, $B$, $C$ de $\Pi$, $t_{A, C} = t_{B, C} \circ t_{A, B}$. Les rotations étant définies en termes de droites et de distances, l'isomorphisme $t_{A, B}$ induit un isomorphisme, noté aussi $t_{A, B}$, du groupe additif des angles de sommet $A$ sur le groupe additif des angles de sommet $B$. On peut choisir une origine arbitraire $A$ dans $\Pi$ et identifier grâce à l'isomorphisme $t_{A, B}$, tout angle de sommet $B$ à l'angle correspondant de sommet $A$. La transitivité des isomorphismes $t$ garantit la cohérence de cette identification.

Si l'on considère deux demi-droites $a_1$ et $a_2$ quelconques d'origine $A$, comme l'isomorphisme $t_{A, B}$ de ($\Pi$, $A$) sur ($\Pi$, $B$) transforme chaque demi-droite $a_i$ d'origine $A$ en la demi-droite parallèle $b_i$ d'origine $B$, on a $\hat{a_1a_2} = \hat{b_1b_2}$. Ce qui permet de définir, dans le plan pointé ($\Pi$, $O$), *l'angle d'un couple ($d_1$, $d_2$) de demi-droites d'origines quelconques*, comme l'angle de sommet $O$ des demi-droites $d'_1$, $d'_2$,

[169] Une rotation autour de $O$ est une isométrie qui laisse fixe $O$, composée de deux symétries axiales dont les axes contiennent $O$.

d'origine $O$, respectivement parallèles à $d_1$ et $d_2$. On le note $\hat{d_1 d_2}$. Cette définition ne dépend qu'en apparence de l'origine $O$ choisie.

Dans le groupe additif des angles, on note 0 l'élément neutre et $p$ (comme plat ou $\pi$) l'angle associé à la symétrie de centre $O$. Pour tout couple ($a$, $b$) de demi-droites de même origine, on a donc :

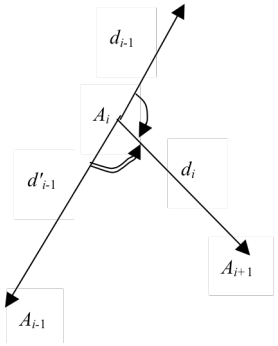
- $\hat{ab} = 0 \Leftrightarrow a = b$
- $\hat{ab} = p \Leftrightarrow a$ et $b$ opposées
- De plus : $p + p = 0$ ou encore $-p = p$
- Relation de Chasles : soient $a$, $b$, $c$ trois demi-droites quelconques d'origine $O$, la rotation qui transforme $a$ en $c$ est la composée de celle qui transforme $a$ en $b$ par celle qui transforme $b$ en $c$, soit : $\hat{ac} = \hat{ab} + \hat{bc}$.
  Cette relation s'étend à toute suite finie ($d_1$, $d_2$,…, $d_n$) de demi-droites d'origine $O$, et, par parallélisme, au cas de demi-droites d'origines quelconques.

On arrive ainsi à la somme des angles de $P$, polygone à $n$ sommets au sens précisé au début du paragraphe.

**La somme des angles d'un polygone quelconque à *n* sommets**

On pose alors $d_i$ la demi-droite $[A_i A_{i+1})$, pour tout $i = 1, \ldots, n$ (avec la convention choisie au début du paragraphe).

On appelle *angle extérieur du polygone relatif au sommet* $A_i$ l'angle $\hat{d_{i-1} d_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. En utilisant la notation simplifiée $\hat{ABC}$ pour désigner l'angle du couple de demi-droites ([$BA$), [$BC$)), on peut définir les *angles du polygone* $P$ de la manière suivante : on appelle *angle du polygone en* $A_i$ l'angle $\hat{A_{i-1} A_i A_{i+1}}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.




On détermine alors la somme des angles extérieurs de $P$, par utilisation de la relation de Chasles : $\hat{d_1 d_2} + \hat{d_2 d_3} + \ldots + \hat{d_n d_1} = \hat{d_1 d_1}$, somme qui est donc égale à 0.

On en déduit alors que la somme des *angles de P* est égale à 0 ou $p$, en fonction de la parité de $n$. En effet, si on note $d'_{i-1}$ la demi-droite $[A_i A_{i-1})$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a bien $\hat{d_{i-1} d'_{i-1}} = p$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc :

$$\begin{aligned} \hat{A_{i-1} A_i A_{i+1}} &= \hat{d'_{i-1} d_{i-1}} + \hat{d_{i-1} d_i} \\ &= p + \hat{d_{i-1} d_i} \end{aligned}$$

La somme de ces angles est donc égale à $n\,p + 0$, soit 0 ou $p$ suivant que $n$ est pair ou impair, puisque $p + p = 0$.

Dans le cas particulier du pentagone, on obtient que la somme des angles est égale à $5\ p\ +\ 0 = p$. Cette preuve générale nous amène donc au résultat que la somme des angles d'un pentagone est égale à un angle plat.

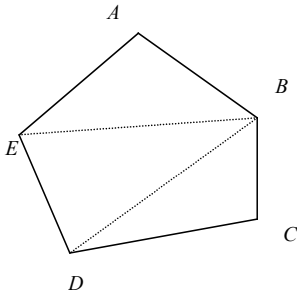
## 2. Commentaires sur les productions de deux classes

Nous avons choisi de faire une présentation complète des textes des classes PLC2-2005-C et PLC2-2005-G, qui permettent d'illustrer l'essentiel de ce que nous voulons faire ressortir de cette expérimentation. Les autres productions seront utilisées, parfois partiellement, pour appuyer certains éléments que nous pointons dans les preuves rédigées par les enseignants.

### La classe PLC2-2005-C

Il s'agit de transparents. Sur six d'entre eux est traité le cas du pentagone convexe par découpage en trois triangles, et deux transparents se bornent à la preuve dans ce cas (transparents n°1 et n°3), sans même signaler, pour l'un d'entre eux, qu'il puisse exister d'autres cas. La preuve qui accompagne la figure du pentagone convexe découpé en trois triangles est rédigée sur deux transparents de façon très formelle[170]. Deux groupes (transparents n°1 et n°2) complètent cette démonstration par celle que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Les textes de preuve sont rédigés de manière détaillée pour les cas les plus faciles.

***PLC2-2005-C-1***




*Somme S des angles d'un pentagone :*
*Le pentagone ABCDE se décompose en trois triangles : ABE, EBD et BCD.*
*Or la somme des angles dans un triangle est égale à 180° et*

$$S = A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}E + D\hat{E}A + E\hat{A}B$$
$$= (A\hat{B}E + E\hat{B}D + D\hat{B}C) + B\hat{C}D + (C\hat{D}B + B\hat{D}E) + (D\hat{E}B + B\hat{E}A) + E\hat{A}B$$
$$= (A\hat{B}E + B\hat{E}A + E\hat{A}B) + (B\hat{C}D + D\hat{B}C + C\hat{D}B) + (B\hat{D}E + E\hat{B}D + D\hat{E}B)$$

*donc S = 180° + 180° +180° = 540°*
*Démontrons que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°…*

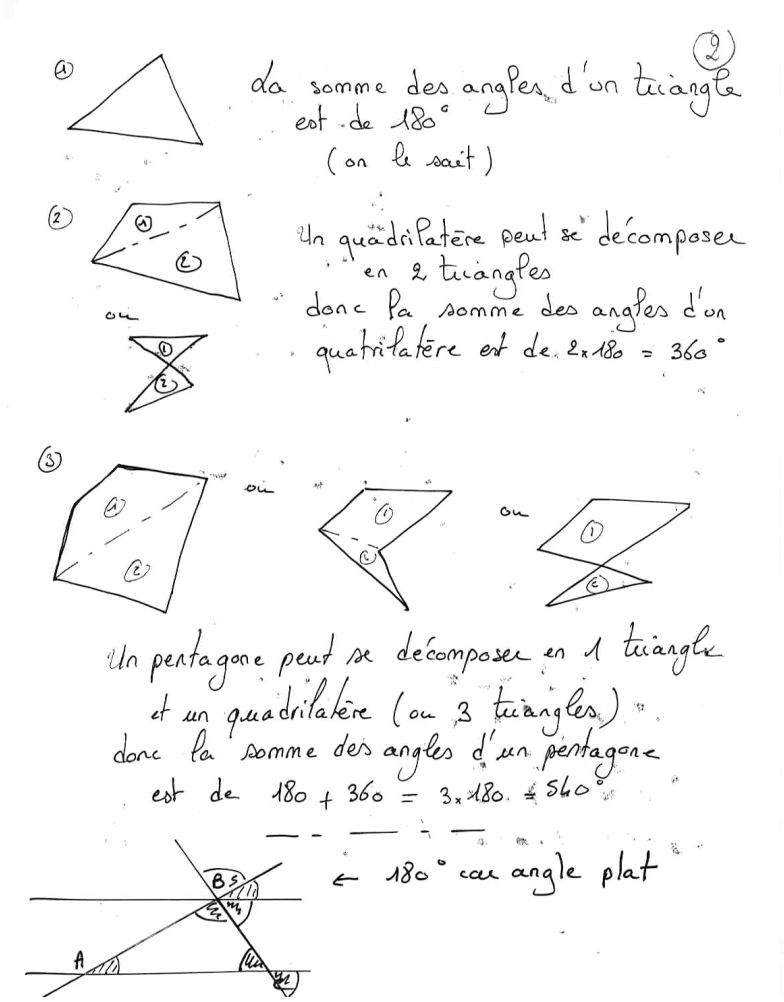
On peut dégager de ce transparent l'élément de conception $T$[171] : une grande partie du texte n'apporte rien par rapport à la figure. On remarque des *trous* dans cette preuve puisqu'il n'est pas question de l'existence de la partition du pentagone en trois triangles, il n'est rien dit non plus du choix du sommet à partir duquel ce découpage est praticable, ni de l'existence d'autres types de pentagones pour lesquels se pose le problème de la définition des angles.

---

[170] suivant le *contrat usuel relatif à la preuve* en vigueur au collège.

[171] *T* (tout est écrit) : une démonstration est un texte qui explicite totalement le raisonnement, les arguments ne sont pas triés en fonction de leur pertinence, ils sont tous écrits ; une figure ne peut remplacer une partie du texte.

***PLC2-2005-C-2***

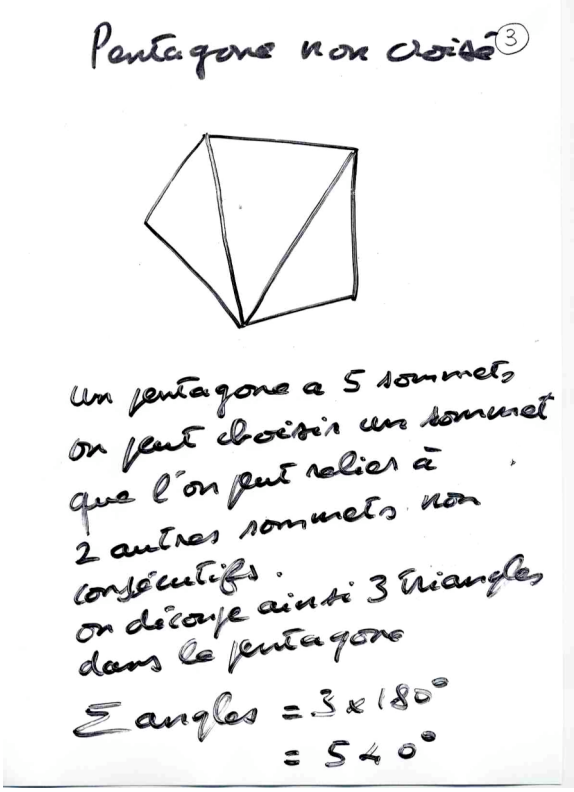



On note un raisonnement par décomposition, le pentagone étant découpé en un quadrilatère et un triangle. On voit à nouveau, comme dans le transparent précédent, une preuve de la somme des angles d'un triangle.

Le problème de la définition d'un angle se pose dès le cas du quadrilatère croisé, mais il n'en est pas fait mention dans le transparent : les deux angles opposés par le sommet, celui-ci étant obtenu comme point d'intersection de deux des côtés, sont considérés comme des angles du quadrilatère. Le même point de vue est adopté lors du découpage du pentagone croisé en un triangle et un quadrilatère. L'incohérence n'est pas vue.

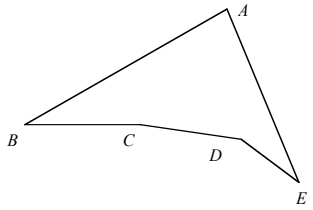
La lecture du texte pourrait également laisser penser que sont répertoriés les différents cas possibles, ce qui est faux : il suffit de penser à un pentagone qui aurait deux points de croisement, par exemple.

***PLC2-2005-C-3***




Un élément nouveau, par rapport aux deux précédents, apparaît dans ce transparent, à savoir l'affirmation de l'existence d'une partition du pentagone en trois triangles à partir d'un sommet.

On pourrait croire, à la lecture, que tout pentagone non croisé se ramène à ce cas, ce qui est faux. Celui-ci peut ne pas être convexe : tout sommet ne peut pas alors être choisi pour donner lieu à ce type de partition à partir d'un sommet, dans le cas de certains pentagones non convexes et non croisés.




Ainsi, par rapport à la figure ci-contre : si l'on choisit de relier le sommet *E* à ses sommets non consécutifs, on n'obtient pas un découpage du pentagone : [*BE*] *sort* de l'intérieur du pentagone.

***PLC2-2005-C-4***

Ce transparent est presque illisible, seules deux figures sont reproduites, sans commentaires. Ceux qui accompagnent les figures ci-dessous ne sont pas donnés par les auteurs du transparent.

La figure n°1 ci-dessous montre une triangulation du pentagone en cinq triangles, ayant tous un sommet commun situé à l'intérieur du pentagone : nous verrons qu'il n'est pas toujours simple de considérer un point à l'*intérieur* d'un pentagone, notamment dans les cas de pentagones croisés. La figure n°2 propose *l'enveloppe convexe* d'un pentagone non convexe avec cinq points de croisement.

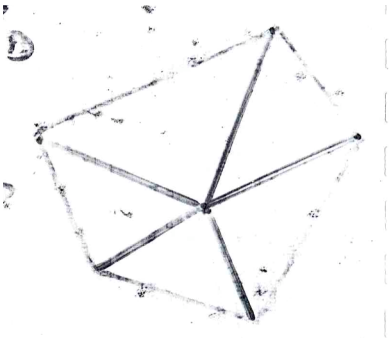


*Figure n°1*

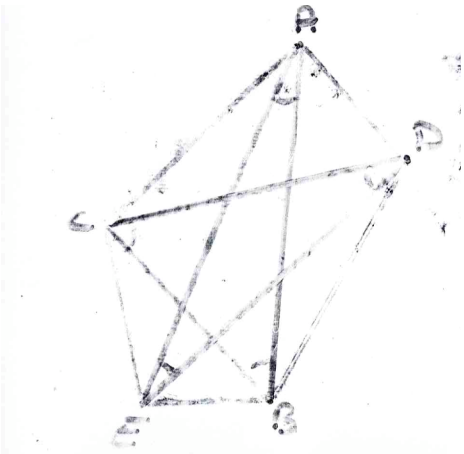
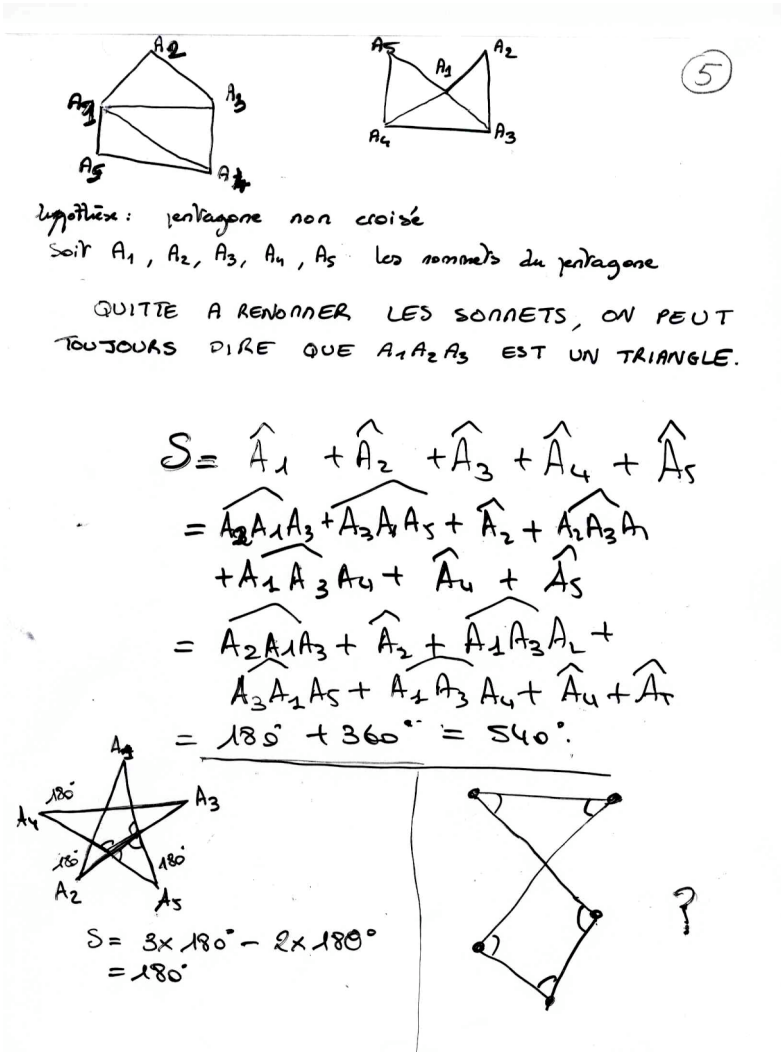


*Figure n°2*

***PLC2-2005-C-5***

C'est le premier des transparents présentés, qui donne plusieurs résultats, 540° et 180°, pour la somme des angles d'un pentagone.

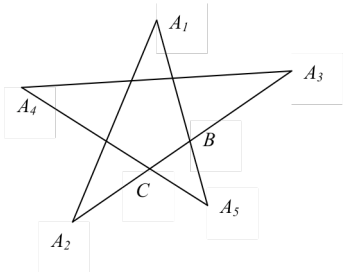



Cette production aborde quatre cas : le pentagone non croisé, convexe ou non convexe, le pentagone non convexe avec cinq points de croisement et le pentagone convexe avec un seul point de croisement.

Dans le cas du pentagone non croisé, l'existence de la partition en trois triangles est admise. En ce qui concerne la phrase « on peut toujours dire que $A_1A_2A_3$ est un triangle», nous supposons qu'il faut ajouter *un des triangles de la partition*, c'est-à-dire inclus dans l'intérieur fermé du pentagone. Or ceci est faux, notamment dans certains cas de

pentagones dont l'enveloppe convexe est un triangle.

En ce qui concerne le cas du pentagone *en étoile*, il semble que le raisonnement soit le suivant :




la somme des angles est égale à la somme des angles des trois triangles $A_4CA_3$, $A_1A_2B$ et $BCA_5$, à laquelle on retranche la somme des angles marqués, d'une part, sur $[A_1A_5]$, d'autre part, sur $[A_2A_3]$, soit deux fois 180°. On trouve ainsi 180°. Ce qui correspond au résultat trouvé dans la partie mathématique.

Ce troisième cas à droite, du pentagone croisé, semble poser problème, à en juger par la présence du point d'interrogation. On ne peut pas savoir si ce point d'interrogation révèle un problème sur la définition des angles du pentagone ou bien sur le calcul de cette somme : en effet, si, à la somme des angles du triangle ajoutée à celle du quadrilatère (soit 180° + 360° = 540°), on retranche la somme des deux angles opposés par le sommet, du triangle et du quadrilatère, soit 2 $t$, en désignant par $t$ la mesure en degrés de l'un de ces angles, on trouve $540 - 2\,t$ ; ce qui conduit à penser que si l'on *écrase* plus ou moins la figure, $t$ peut prendre toutes les valeurs de ]0 ; 180[. Ainsi la somme des angles d'un tel pentagone ne serait pas constante. Le point d'interrogation pourrait montrer la perplexité des auteurs du transparent devant ce résultat.

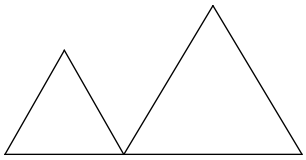
***PLC2-2005-C-6***

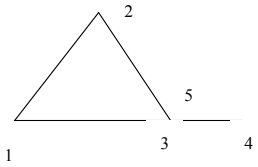
Ce transparent va plus loin que les autres. Rappelons qu'il s'agit du fruit d'un travail de groupe : on relève des éléments de conception divers, sur le plan de la démonstration, allant du très formel pour le cas le plus facile au simple dessin accompagné de formules pour les cas plus complexes.

Deux cas sont d'abord nettement distingués, chacun d'eux étant illustré par une figure, puis d'autres semblent avoir été rajoutés, rapidement, à la fin du temps imparti. Le premier cas est celui d'un pentagone convexe, séparé par des pointillés en trois triangles, chacun d'eux ayant ses angles différenciés. Il est accompagné du texte suivant :

*Propriété : Dans un triangle, la somme des angles vaut 180°.*
*Or, dans un pentagone, on peut le partitionner en 3 triangles.*
*Donc la somme des angles du pentagone vaut la somme des angles des 3 triangles.*
*D'où somme (pentagone) = 3 ×180°=540°*

Le deuxième cas annoncé est qualifié de « dégénéré », il se scinde en trois sous-cas, chacun étant illustré par une figure et accompagné d'un calcul de la somme :

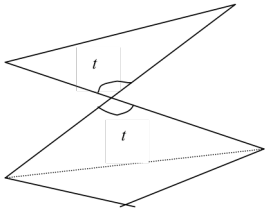


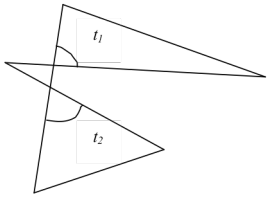





*Somme = 2 ×180°=360°* *Somme = 180°* *Somme = 0°*

Il semble que deux autres cas aient été rajoutés, en haut du transparent, sans que le groupe ait eu le temps de mentionner qu'il s'agissait d'autres cas :



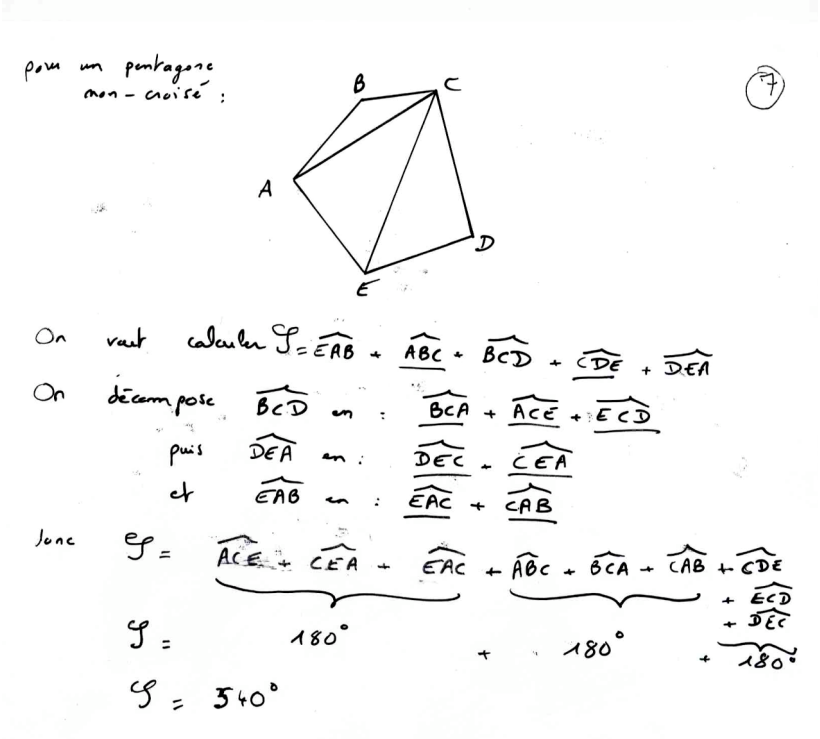




*Somme = 540 – 2t* *t∈ ] 0 ; 180[* *Somme = 540 – 2($t_1$ – $t_2$)*

On peut remarquer que le cas du pentagone convexe (le premier cas) est traité par une démonstration où l'on identifie l'élément de conception *P*[172]. Seul ce cas simple est accompagné d'un texte qui semble obéir à la règle du « On sait que …or …donc ». On note que, dans le deuxième cas qualifié de dégénéré, les sommets sont numérotés, ce qui semble indiquer la nécessité de définir un sens de parcours des sommets pour parler de certains pentagones. Enfin les deux derniers cas évoqués semblent indiquer qu'on peut obtenir toute valeur de ]0 ; 540[ comme somme des angles d'un pentagone. Le groupe ne semble pas, ici, s'en étonner.

[172] *P* (pas) : une démonstration est un enchaînement de pas ternaires, construits sur le mode hypothèse-règle-conclusion. La preuve s'apprend ou se reconnaît si l'on suit ce formalisme.

***PLC2-2005-C-7***




Ce transparent est du même type que les transparents n°1 et 3 de cette classe : le cas facile est traité longuement. On pourrait croire que c'est une preuve complète, ce qui est faux. L'existence du partage du pentagone en trois triangles n'est pas évoquée.

Il est signalé que c'est le cas d'un pentagone non croisé qui est prouvé. Or le choix du sommet commun aux deux diagonales qui permettent le découpage pose problème dans les cas de pentagones non croisés, mais non convexes.

**La classe PLC2-2005-G**

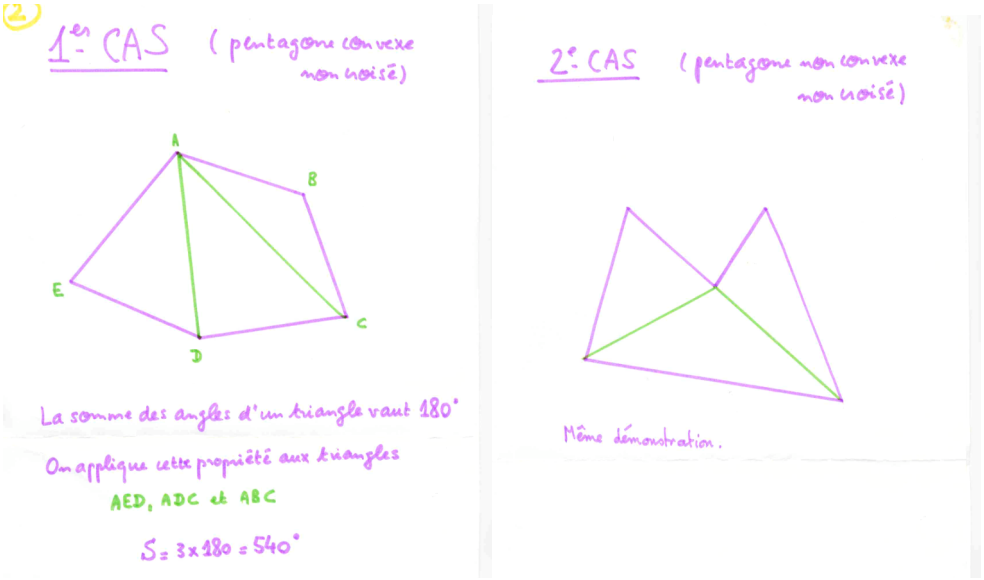
Ce groupe se composait de vingt-quatre stagiaires. Les productions étaient communiquées sur affiches, une par groupe de quatre stagiaires. Nous analysons ci-dessous les six affiches obtenues. Seule une affiche sur six ne traite pas les cas des pentagones non croisés, jugés trop simples. On note sur deux productions, une disjonction de cas entre « pentagone étoilé » et « pentagone non étoilé » sans qu'aucune définition ne soit précisée à ce sujet. Les seules preuves rédigées (qui apparaissent sur deux affiches) sont celles qui traitent du cas du pentagone convexe. Dans les autres cas, on lit une figure accompagnée d'une formule et de quelques mots éventuellement.

***PLC2-2005-G-1***

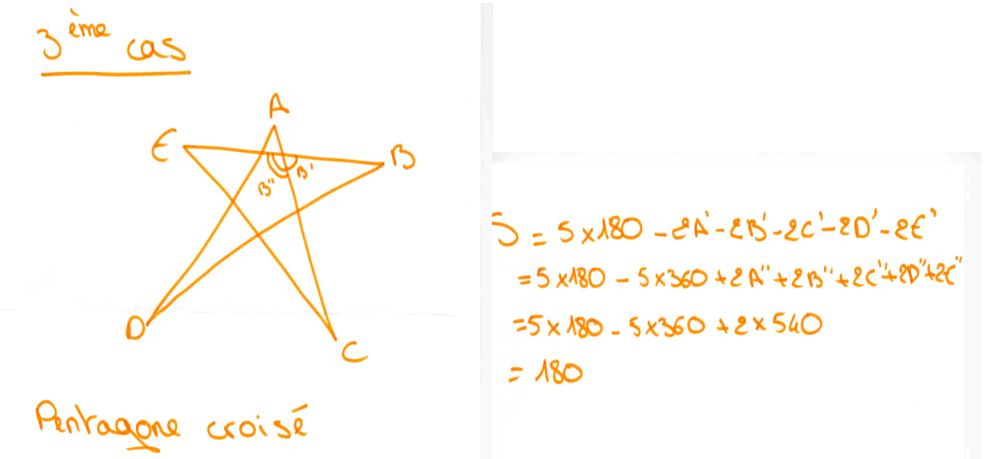
Elle est du même type que le transparent n°1 : le pentagone n'est envisagé que convexe, sans qu'il soit signalé l'existence d'autres cas, la preuve est très détaillée (figure accompagnée d'un texte), l'existence d'un découpage en trois triangles n'est cependant pas signalée. Il est mentionné qu'on admet (la preuve est donnée sur le transparent n°1) que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. On note un souci de rigueur sur certains points simples, alors qu'il y a des *trous* importants dans la preuve.

***PLC2-2005-G-2***

Elle propose trois cas : le « pentagone convexe non croisé » (on peut se demander l'intérêt d'ajouter « non croisé »), le pentagone non convexe non croisé, le pentagone croisé. Les figures proposées pour chacun des deux premiers cas sont du même type que celles du transparent n°5 :



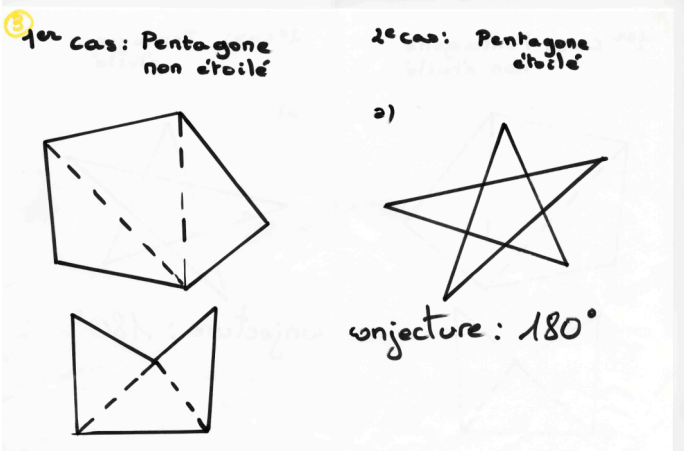

Le texte qui les accompagne est cependant plus succinct. Rien n'est dit de l'existence de la triangulation en trois triangles, ni du choix du sommet à partir duquel on effectue ce découpage, dans le second cas.



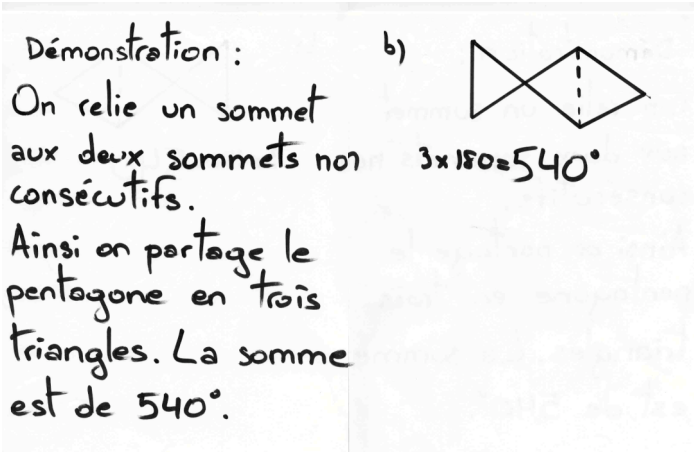

Le cas du pentagone croisé est envisagé sous l'aspect du pentagone *en étoile*. La formule qui accompagne la figure montre une somme des angles égale à 180°.

***PLC2-2005-G-3***

La disjonction des cas est présentée entre « pentagone étoilé » et « pentagone non étoilé ».



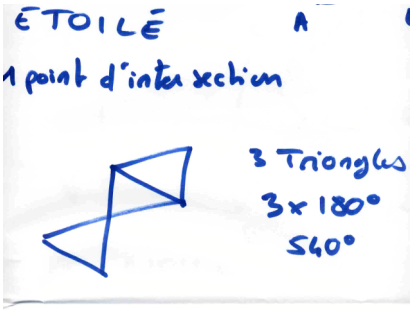

On peut être étonné de la dénomination de pentagone étoilé dans « 2ème cas b) ». Dans ce cas, les angles du pentagone ne sont pas tous des angles de côtés consécutifs, si l'on en juge par le découpage en trois triangles (qui donne la somme des angles de 540°). On note l'utilisation du mot de conjecture dans le cas a).




Les angles du pentagone ne sont pas définis de la même façon que dans le cas b). Enfin on signale les mêmes *trous* que pour les affiches ou transparents précédents, en ce qui concerne la démonstration du cas simple.

***PLC2-2005-G-4***

Cette affiche traite d'abord très succinctement les cas des pentagones dits « non étoilés », c'est-à-dire le pentagone convexe et le pentagone concave non croisé. Puis est abordé le cas du pentagone *en étoile*, qui regroupe les figures suivantes :

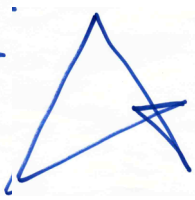



*n°1*

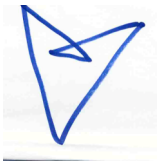
*Plus d'un point d'intersection*

*n°2*

*180°*



*n°3*

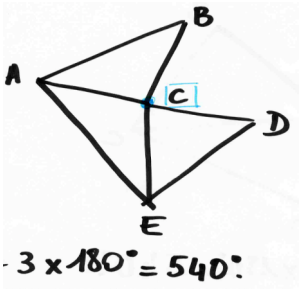


*n°4*

Il est remarquable que, dans plusieurs affiches, figure cet adjectif d'étoilé, pour qualifier des cas différents, sans que jamais ne soit proposée une définition de ce mot. A nouveau, on note une contradiction dans la façon dont sont considérés les angles dans chacune des figures : dans la figure n°1, l'angle des deux côtés sécants est considéré comme un angle du pentagone, mais pas dans le cas de la figure n°2. Notons que les cas n°2 à n°4 correspondent à la même somme égale à π radians (ou 9π suivant le *marquage* des angles), alors que le cas n°1 donne une somme de 5π.

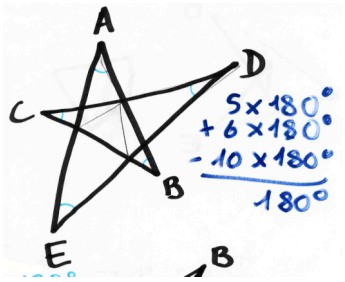
***PLC2-2005-G-5***

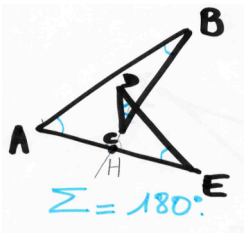
On nomme le pentagone *ABCDE*, semblant signaler de cette façon l'importance de nommer les sommets du pentagone dont on parle. Différents cas sont proposés avec des numéros différents, mais sans qu'ils ne soient nommés. Très peu de texte accompagne chacune des figures.

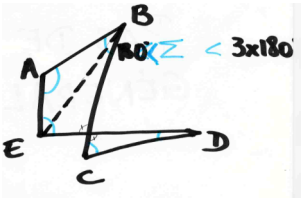



A propos du deuxième cas qui semble être celui du pentagone non convexe et non croisé, on relève un indice qui semble montrer l'importance du choix du sommet à partir duquel il faut procéder à la triangulation du pentagone. Aucun commentaire n'est fait, seul le point *C* est marqué différemment des autres sommets, la lettre *C* étant encadrée. Le cas où il pourrait y avoir deux points à l'intérieur de l'enveloppe convexe n'est pas signalé.

Les pentagones qui sont ensuite proposés en « 3ème cas » sont nommés « croisés » :



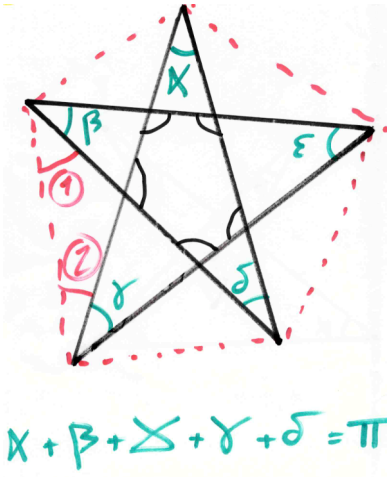



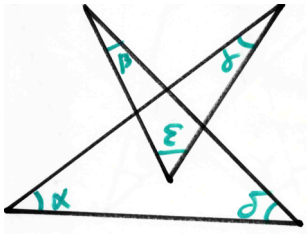




La conclusion qui est ensuite donnée est : « PAS DE GENERALITE ! ». On note que les angles du pentagone semblent être ceux qui sont notés de couleur claire.

***PLC2-2005-G-6***

Elle ne considère que deux cas.




Pour cette affiche comme pour la précédente, les angles du pentagone sont notés sur les figures.

On note ci-contre une erreur d'écriture dans la formule des angles : c'est ε à la place de l'un des γ.

Comme cela avait été prévu, à Grenoble comme à Chambéry, un rapide échange a eu lieu dans chacun des deux groupes, sur les productions obtenues. A la suite de ce bilan, nous avons demandé aux stagiaires s'ils considéraient que la

démonstration avait été faite de la somme des angles du pentagone (ils ont voté à main levée) : certains pensaient que oui, d'autres que non, les autres étaient indécis. Ce fut une surprise !

**Résumé**

L'étude réalisée met en évidence un décalage important entre la preuve en mathématiques et la preuve telle qu'elle vit en classe, notamment au collège : actuellement la transposition didactique dénature son sens, réduisant l'apprentissage de la preuve à celui de savoir faire des exercices d'écriture formelle. Un changement s'avère ainsi nécessaire dans les pratiques des enseignants, pour que la preuve soit abordée en classe, de manière plus satisfaisante sur les plans épistémologique et didactique. Nous montrons qu'il est pertinent, et possible, d'amorcer ce changement par un travail sur les conceptions des enseignants relativement à la preuve, son apprentissage et son enseignement. Pour ce faire, nous proposons une ingénierie de formation fondée sur trois problèmes : dans un premier temps, elle montre le rapport existant des élèves à la preuve, ce qui permet d'exhiber certains malentendus entre le professeur et les élèves ; dans un second temps, les enseignants sont mis en situation de recherche de problèmes et produisent des preuves. Les résultats obtenus à partir des problèmes choisis permettent à la fois de préciser le rapport des enseignants à la preuve et d'amorcer avec eux une réflexion sur leurs pratiques.

The study shows that mathematical proof does not live in the classroom as it does in mathematics especially in the secondary school (from eleven to fourteen years old children). The gap is wide. The didactical transposition distorts the meaning of mathematical proof today, learning of proof is reduced to learning how to succeed in doing exercises about formal writing. Thus it is necessary to change teaching practices, so that the proof is taught in the classroom, more satisfactorily on epistemological and educational plans. We point out that it is relevant and possible, to initiate this change by working on teachers' conceptions about the proof, teaching and learning. For this purpose we propose a teacher education engineering grounded on three problems : at first it aims students' existing relation with mathematical proof, that may show misunderstandings between the teacher and students, then we make the teachers search problems and produce proofs. With the results that we get from the chosen problems we may specify the teachers' relation with proof and begin make them reflect on their teaching practices at the same time.

**Mots clés**

Preuve, Démonstration, Formation des enseignants de mathématiques, Situation recherche pour la formation, Ingénierie de formation, Malentendu, Contrat didactique, Conception, Polymino, Pentagone, Angle, Recherche d'un centre, Résolution d'un problème.