HAL
open science

Une approche eulérienne du couplage fluide-structure, analyse mathématique et applications en biomécanique

Thomas Milcent

To cite this version:

Thomas Milcent. Une approche eulérienne du couplage fluide-structure, analyse mathématique et applications en biomécanique. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT : . tel-00399435

HAL Id: tel-00399435

https://theses.hal.science/tel-00399435

Submitted on 26 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Grenoble

Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université Joseph Fourier

Spécialité : Mathématiques Appliquées

préparée au Laboratoire Jean Kuntzmann, Equipe EDP

Dans le cadre de l'école doctorale Mathématiques, Sciences et Technologie de l'Information, Informatique

présentée par

Thomas MILCENT

le 25 mai 2009

Une approche eulérienne du couplage fluide-structure, analyse mathématique et applications en biomécanique.

Après avis des rapporteurs :

M. R. MONNEAU	Professeur	ENPC
M. F. JOUVE	Professeur	Université Paris 7

Devant la commission d'examen constituée de :

M. A. IOLLO	Professeur	Université de Bordeaux
M. C. MISBAH	Directeur de recherches	Université de Grenoble
M. G.-H. COTTET	Professeur	Université de Grenoble
M. E. MAITRE	Maitre de conférences	Université de Grenoble

Table des matières

I Presentation du couplage fluide-structure **9**

1 Présentation des modèles fluides et élastiques **15**
1.1 Mécanique du point matériel 15
1.2 Généralités sur les milieux continus 16
1.3 Conservation de la masse 20
1.4 Conservation de la quantité de mouvement 22
1.5 Equations des fluides 26
1.6 Equations de l'élasticité 30
1.7 Calcul d'interface 33

2 Couplage fluide-structure **39**
2.1 Genéralités 39
2.2 Méthode ALE 40
2.3 Méthode de Peskin 42
2.4 Méthode Eulérienne de couplage-fluide structure 44

II Analyse mathématique du modèle **59**

3 Préliminaires **63**
3.1 Lien entre EDP et EDO 63
3.2 Equation de la chaleur 63
3.3 Equations non linéaires et compacité 65
3.4 Espaces et inégalités utilisés 67

4 Analyse mathématique du modèle de membrane **71**
4.1 Enoncé des hypothèses et du théorème 71
4.2 Remarques préliminaires 72
4.3 Problème régularisé 74
4.4 Estimations *a priori* 79
4.5 Passage à la limite 88
4.6 Conclusions et perspectives 91

III Prise en compte de la courbure **93**

5 Dérivation de fonctionnelles géométriques **97**

5.1 Problématique 97
5.2 Calcul de la courbure 99
5.3 Lemmes techniques 103
5.4 Différentiation utilisant une approximation volumique 105
5.5 Différentiation utilisant une formule de Reynolds surfacique 112
5.6 Différentiation utilisant les outils de géométrie différentielle 117
5.7 Comparaison des résultats 128
5.8 Bilan 139
5.9 Conclusions et perspectives 141

6 Applications numériques 143
6.1 Equation de la chaleur 1D 143
6.2 Schémas numériques pour le modèle de membrane 145
6.3 Cas 2D 151
6.4 Cas 3D 162

7 Annexe sur les courbes et les surfaces 179
7.1 Courbe plane paramétrée 179
7.2 Surface définie par une paramétrisation 183

Introduction

L'intérêt pour des problèmes couplant un fluide et une structure élastique s'est accru ces dernières années par le nombre croissant d'applications dans les différents domaines de la physique. Nous pouvons citer comme exemples l'étude de l'écoulement d'un fluide autour d'une aile d'avion ou d'un bateau et, dans le cadre qui nous intéresse dans cette thèse, la déformation d'une vésicule dans un écoulement sanguin. Tous ces phénomènes sont couplés car le comportement du fluide influe sur la structure et réciproquement. Les progrès en temps de calcul et en capacité mémoire des ordinateurs permettent actuellement de réaliser des simulations numériques associées à ce type de problème. Parallèlement à cette puissance informatique il est important pour les physiciens, biologistes et mathématiciens de développer en collaboration des modèles simples, robustes et réalistes constituant une approche complémentaire aux expériences *in vivo* ou *in vitro* qui peuvent être difficiles et couteuses à réaliser.

La principale difficulté liée à l'interaction d'un fluide et d'une structure réside dans le couplage de modèles décrits de manière différentes. En effet, le fluide est classiquement décrit en formulation eulérienne et la structure élastique en formulation lagrangienne. Le couplage de ces différentes formulations rend l'étude de ces systèmes très complexe, tant d'un point de vue numérique que mathématique. Une première avancée a été réalisée par Donea [20] qui introduit la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) basée sur un compromis entre les descriptions lagrangienne et eulérienne. Une autre avancée significative a été réalisée par Peskin [40] où le couplage avec la structure élastique est représenté par un terme source dans les équations du fluide. Cette technique a été utilisée avec succès dans de nombreuses applications, principalement en biomécanique.

Cependant, la formulation proposée demeure en partie lagrangienne et les interpolations nécessaires pour calculer les forces élastiques sont à l'origine de pertes de volumes. De plus, ce modèle ne permet pas de gérer simplement les grandes déformations qui sont fréquentes dans les applications en biomécanique. Dans le cas particulier d'une membrane élastique immergée dans un fluide, une nouvelle méthode a été proposée récemment par Cottet et Maitre [14, 15]. Elle consiste à représenter l'interface entre les deux fluides par une fonction level set qui est est advectée par la vitesse du fluide. La nouveauté de la méthode réside dans la prise en compte d'une partie de l'élasticité de la structure à l'aide de cette fonction level set. Le couplage fluide-structure est ainsi réduit à une formulation complètement eulérienne qui permet une meilleure conservation du volume, des grandes déformations ainsi que la prise en compte des éventuels changements de topologie.

Problématiques

Dans ce contexte je me suis intéressé à trois problématiques distinctes : analyse mathématique, modélisation et simulation numérique.

La première problématique est axée sur l'analyse mathématique de modèles de couplage fluide-structure. La principale difficulté rencontrée dans ce type de problème est la formulation différente de chaque constituant du couplage. Un résultat d'existence récent a été obtenu par Coutand et Shkoller [9, 17] en formulant le problème de manière complètement lagrangienne. Le modèle proposé par Cottet et Maitre [14, 15] ouvre de nouvelles perspectives en formulant le problème fluide-structure de manière complètement eulérienne permettant de décrire le couplage fluide-structure comme un fluide complexe. Des résultats d'existence ont été obtenus récemment pour ce type de fluide [46] et ils seront le point de départ de notre étude théorique.

La deuxième problématique concerne l'optimisation de formes géométriques qui consiste à trouver une surface qui minimise une fonctionnelle dépendant de la géométrie de la surface. L'étude de cette méthode est motivé par les applications en biomécanique où une partie de l'énergie liée à l'élasticité de la membrane (effets de flexion) est une fonctionnelle qui dépend de la courbure de la surface. Cette énergie permet, en ajoutant des contraintes de volume et d'aire, d'obtenir les formes d'équilibre des vésicules. Dans le but de minimiser cette fonctionnelle, une méthode classique d'optimisation consiste à choisir le gradient comme direction de descente. La principale difficulté liée au calcul du gradient réside dans le fait que le paramètre d'optimisation est une surface. Ce calcul a été effectué dans le cas de la courbure moyenne avec une méthode paramétrique [51] et une méthode level set [33] mais les résultats obtenus sont *a priori* différents. Mon travail pour cette partie a consisté à comparer ces méthodes et à généraliser les résultats dans le cas d'une fonctionnelle dépendant de la courbure de Gauss.

La troisième problématique concerne la résolution numérique de problèmes de couplage fluide-structure. La nouvelle méthode proposée dans [14, 15] permet la mise au point de méthodes numériques efficaces pour simuler une membrane dans un fluide. En effet, la formulation eulérienne permet une discrétisation avec de simples schémas aux différences finies du fluide et de la structure sur une grille fixe. Du point de vue des applications en biomécanique, nous nous sommes intéressé aux formes d'équilibres dans un écoulement stationnaire ainsi qu'au comportement dans un écoulement en cisaillement d'une vésicule.

Plan de la thèse

La thèse est articulée en trois parties.

La première partie, découpée en deux chapitres, est une introduction générale qui permettra d'aboutir au modèle eulérien de couplage fluide-structure. Dans le premier chapitre, nous introduirons les formulations lagrangiennes et eulériennes d'un milieu continu pour aboutir aux équations de Navier Stokes ainsi que les équations régissant un milieu élastique. Nous terminerons ce chapitre par quelques rappels sur le suivi d'interface avec une représentation paramétrique et la capture d'interface avec une représentation par une fonction level set. Le deuxième chapitre est consacré au couplage des deux modèles précédents. Nous introduirons la méthode ALE qui offre un compromis intéressant entre les formulations eulériennes et lagrangiennes. Nous continuerons en introduisant la méthode de frontière immergée de Peskin, qui demeure en partie lagrangienne, basée sur une description du milieu continu par un unique champ de vitesse continu. Nous finirons ce chapitre par détailler le modèle de membrane complètement eulérien où la surface est capturée à l'aide d'une fonction level set.

La deuxième partie, décomposée en deux chapitres, concerne un théorème d'existence de solutions pour le modèle de membrane introduit dans la première partie. Le premier chapitre est consacré à une introduction générale de quelques méthodes classiques permettant de montrer l'existence de solutions à une EDP ainsi que des lemmes spécifiques à notre étude. Le chapitre suivant est consacré au théorème proprement dit, dont le point de départ repose sur l'écriture du modèle sous la forme d'un fluide complexe. Nous procéderons à la résolution d'un problème approché construit avec une régularisation en temps du terme non linéaire d'inertie. Des estimations L^p de l'équation de transport et de l'équation de la quantité de mouvement permettront de passer à la limite dans le problème approché grâce aux outils classiques de compacité.

La troisième partie est consacrée à l'étude des forces de courbure associées à l'énergie de flexion de la membrane. Dans un premier chapitre, nous comparerons trois méthodes d'optimisation de formes associées à des fonctionnelles géométriques dépendant de la normale et de la courbure. Les deux premières méthodes reposent sur la représentation par une une fonction level set de la surface. Une première technique consiste à utiliser une approximation volumique tandis que la deuxième utilise une formule de Reynolds surfacique. La dernière méthode proposée est basée sur une représentation paramétrique de la surface. La contribution de cette partie est de montrer que les différentes approches proposées aboutissent au même résultat. Le deuxième chapitre sera ensuite consacré à quelques applications numériques utilisant la force de courbure obtenue dans le chapitre précédent. Nous retrouverons les formes d'équilibre classiques observées pour des globules rouges. Nous présenterons également quelques résultats préliminaires sur le cisaillement de vésicules.

L'étude des courbes et des surfaces ayant une importance considérable dans cette thèse une annexe y est consacrée dans le cas d'une représentation paramétrique.

Première partie

Presentation du couplage fluide-structure

Notations

Notations vectorielles et matricielles

n : entier fixé valant 2 ou 3 (dimension du domaine Ω)

$a \cdot b$: produit scalaire canonique de a et $b \in \mathbb{R}^n$

$|a| = \sqrt{a \cdot a}$: norme euclidienne de $a \in \mathbb{R}^n$

$a \otimes b$: matrice de terme général $a_i b_j$

$A\ b$: produit de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ et du vecteur $b \in \mathbb{R}^n$

$\mathrm{Tr}(A) = \sum_i A_{ii}$: trace d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n^2}$

$\det(A)$: determinant d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n^2}$

$\mathrm{Cof}(A)$: matrice des cofacteurs d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n^2}$

$A : B = \mathrm{Tr}(A^T B) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$: produit scalaire des matrices A et $B \in \mathbb{R}^{n^2}$

$|A| = \sqrt{A : A}$: norme euclidienne de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n^2}$

$|T| = \sqrt{\sum_{i,j,k} (T_{ijk})^2}$: norme euclidienne d'un tenseur d'ordre 3 $T \in \mathbb{R}^{n^3}$

Les matrices seront quelques fois notées entre crochets pour plus de lisibilité.

Opérateurs différentiels

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = (\cdot)_{,i}$: dérivation par rapport au ième vecteur de la base canonique

$\partial_t = (\cdot)_t = \frac{\partial}{\partial t}$: dérivation par rapport au temps

$\partial^2_{ij} \cdot = \partial_i(\partial_j \cdot)$: dérivation d'ordre 2 par rapport au ième et au jème vecteur de la base canonique

$\nabla = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$: opérateur gradient

$[\nabla u]$: gradient d'un champ de vecteurs u de terme général $\partial_j u_i$

$\Delta f = \sum_i \partial^2_{ii} f$: laplacien d'une fonction scalaire f

$\mathrm{div}(u) = \sum_i \partial_i u_i$: divergence d'un champ de vecteurs u

$[D^2 f]$: hessienne d'une fonction scalaire f de terme général $\partial^2_{ij} f$

Plan de la première partie

Cette thèse traite de problèmes de couplage fluide-structure et ses applications en biomécanique. D'une manière générale, l'interaction d'un fluide et d'une structure élastique réside dans le couplage de deux modèles qui sont naturellement décrits de manières différentes : lagrangienne pour le solide et eulérienne pour le fluide. Je propose dans un premier chapitre d'introduire de manière indépendante les équations qui régissent les fluides et les solides élastiques. Dans un deuxième chapitre, je propose d'étudier les méthodes classiques de couplage fluide structure pour aboutir à un modèle complètement eulérien qui sera le point de départ des résultats de la thèse. Cette première partie ne contient pas de résultats nouveaux mais permet une introduction pédagogique au couplage fluide-structure.

Nous commencerons dans un premier chapitre par introduire les équations simples de la physique régissant le mouvement d'une unique particule soumise à des forces extérieures. Nous verrons comment les principes fondamentaux de la dynamique peuvent se généraliser au cas d'un milieu continu en insistant sur les formulations eulériennes et lagrangiennes des équations. Nous appliquerons ce formalisme pour obtenir les équations eulériennes de Navier Stokes régissant un fluide puis les équations lagrangiennes régissant un milieu élastique général. Nous introduirons ensuite un modèle de fluide complexe comportant deux phases séparées par une interface diffuse, le modèle de Korteweg. L'interface délimitant un fluide et une structure joue un rôle important dans les applications. Nous terminerons donc ce chapitre en introduisant les principales méthodes existantes pour représenter une interface, en particulier les méthodes level set qui seront à la base d'une formulation eulérienne du couplage fluide-structure.

Nous aborderons dans un deuxième chapitre la modélisation du couplage fluide-structure proprement dit par quelques généralités puis nous décrirons les méthodes ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) qui permettent un compromis entre formulation eulérienne et lagrangienne. Une section sera ensuite consacrée à la méthode de frontière immergée introduite par Peskin qui permet de considérer l'ensemble fluide/solide comme un unique milieu continu, des marqueurs lagrangiens étant introduits pour calculer les forces élastiques. Nous terminerons ce chapitre en décrivant de manière détaillée le modèle de membrane complètement eulérien développé dans [14, 15].

Chapitre 1

Présentation des modèles fluides et élastiques

1.1 Mécanique du point matériel

L'étude de la mécanique classique (en opposition avec la mécanique relativiste et quantique que nous ne considérons pas ici) est née du calcul différentiel inventé par Isaac Newton au 17ème siècle. Dans cette théorie, le corps à étudier est assimilé à une masse ponctuelle qui est soumise à des forces extérieures. Newton postula le principe fondamental de la dynamique en 1687 : la variation de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures.

Notons $x(t) \in \mathbb{R}^3$ la position d'une particule de masse m à l'instant t, $x'(t)$ sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. En supposant que les forces extérieures notées F dépendent uniquement du temps, de la position et de la vitesse nous pouvons réécrire le principe de la dynamique sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$m\, x''(t) = F(t, x(t), x'(t)) \tag{1.1}$$

Pour que le problème soit bien posé, il faut ajouter des conditions initiales sur la position et la vitesse c'est-à-dire fixer $x(0)$ et $x'(0)$. La résolution de l'équation précédente ne peut pas se faire analytiquement, sauf dans des cas très particuliers. Cependant, des méthodes numériques élémentaires permettent d'obtenir des solutions approchées.

La mécanique du point se généralise à des solides rigides de la manière suivante : le centre d'inertie du solide est soumis au principe fondamental de la mécanique (comme pour la mécanique du point) et une équation sur le moment d'inertie est ajoutée pour le reste du solide. Le principe fondamental de la dynamique permet de calculer la vitesse de translation du centre de gravité du solide et l'équation sur le moment d'inertie permet de calculer la rotation du solide et ainsi donner accès à la trajectoire de tous les points du système étudié.

Le principe fondamental de la dynamique peut également s'appliquer dans le cas où plusieurs particules interagissent entre elles. La position de chaque particule est décrite par une équation similaire à (1.1) en ajoutant des forces d'interaction entre les différentes particules dans F. Cette modélisation est bien adaptée pour un petit nombre de particules. Le cadre qui nous intéresse est l'étude du mouvement

d'un objet déformable dont la taille caractéristique est macroscopique. Une description avec plusieurs particules représentant les atomes de l'objet est inadaptée dans notre contexte pour plusieurs raisons. Tout d'abord nous aimerions étudier la variation de grandeurs physiques grâce au calcul différentiel, qui ne peut se faire seulement si les quantités misent en jeu varient de manière régulière. Or à l'échelle microscopique les grandeurs physiques varient de manière discontinue à cause du chaos moléculaire. De plus, le nombre de particules à considérer est beaucoup trop élevé et les interactions entre les particules très complexes à modéliser. Une solution est apportée grâce à la notion de milieu continu que nous allons définir maintenant.

1.2 Généralités sur les milieux continus

Considérons une échelle intermédiaire entre l'échelle macroscopique et microscopique appelée mésoscopique constituée de petits volumes appelés particules fluides qui sont typiquement de l'ordre du $(\mu m)^3$. Ce volume contient un grand nombre de particules permettant de définir des grandeurs moyennes (masse volumique, pression, position et vitesse) qui vont évoluer de manière régulière au cours du temps.

Un milieu continu est défini par un ensemble de particules fluides qui interagissent entre elles. Pour connaître la déformation du milieu, il suffit de calculer les trajectoires de chaque particule fluide dont le nombre est infini. Le nombre infini de degrés de liberté rend le problème de l'étude de milieux continus complexe aussi bien numériquement que mathématiquement.

Un milieu continu peut être décrit en formulation eulérienne ou lagrangienne. Ces concepts sont fondamentaux car les fluides et les solides élastiques sont des milieux continus décrits à l'aide de ces deux descriptions. Nous suivons en partie la présentation faite dans [36]. Un autre livre de référence [21] peut également être consulté.

Dans la description qui va suivre, tous les domaines considérés seront des ouverts connexes réguliers de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$. Les dessins seront faits dans $\mathbb{R}^2$ par commodité.

1.2.1 Description lagrangienne

Considérons un milieu continu occupant initialement un domaine Ω_0 de référence et se déformant sous l'effet d'une application $\Phi(\cdot, t)$ en un nouveau domaine $\Omega_t = \Phi(\Omega_0, t)$.

$$\begin{array}{rcl} & \Omega_0 & \longrightarrow \Omega_t \\ \Phi(\cdot,t): & a & \mapsto \Phi(a,t) = x \end{array}$$

Le domaine de référence peut être choisi de manière quelconque mais il est d'usage de considérer le domaine initial où le milieu est au repos. Sur la figure (FIG 1.1) nous avons représenté le déplacement $\Phi - I_d$ et non la déformation pour simplifier la présentation. Nous opérerons le même abus de notation dans la suite.

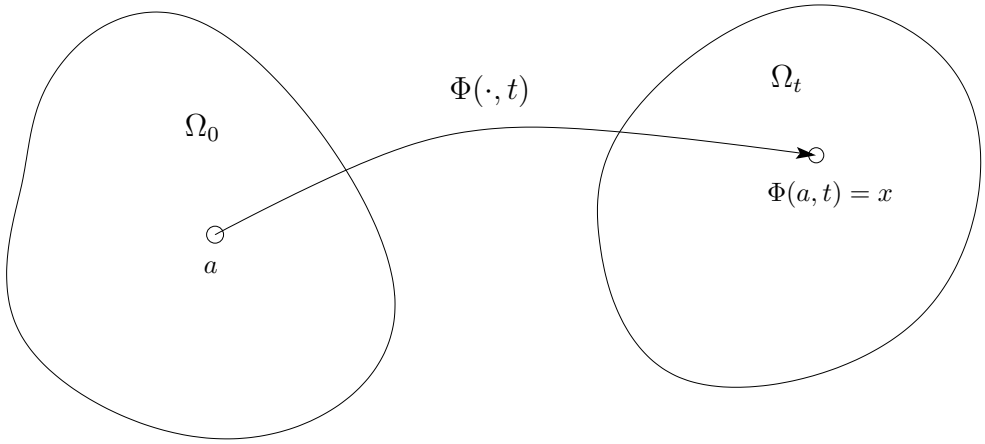

FIG. 1.1 – Déformation d'un domaine de référence avec l'application Φ

Il est imposé à Φ ainsi qu'à son inverse d'être régulières pour que les calculs qui vont suivre aient un sens. Le déterminant du jacobien de Φ est supposé positif pour garder une orientation positive. Cette hypothèse permet en particulier d'enlever la valeur absolue du déterminant de la jacobienne dans les changements de variables volumiques. Cette description est appelée lagrangienne, la connaissance de Φ permet de calculer la trajectoire de chaque point du domaine initial et détermine ainsi complètement la déformation du milieu continu. La vitesse u et l'accélération γ d'une particule a se trouvant à la position $x = \Phi(a,t)$ à l'instant t sont définis naturellement par (FIG 1.2)

$$u(\Phi(a,t),t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a,t), \qquad \gamma(\Phi(a,t),t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(a,t). \tag{1.2}$$

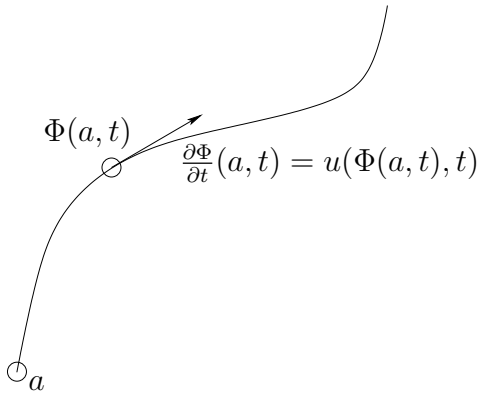

FIG. 1.2 – Vecteur vitesse d'une particule à l'instant t

D'un point de vue numérique, le milieu continu est discrétisé avec des particules placées aux noeuds d'un maillage dans le domaine de référence. Ces particules sont ensuite déplacées avec la fonction Φ qui déforme le domaine. L'avantage de cette description est de pouvoir suivre le mouvement des particules, en particulier celles qui se situent au bord du domaine qui peut varier avec le temps. De plus, il est possible d'adopter une approche adaptative c'est-à-dire positionner plus de particules dans la configuration

de référence aux endroits où l'on s'attend à de plus grandes variations des quantités mises en jeu. L'inconvénient majeur réside dans le fait qu'après déformation, les particules peuvent se concentrer ou se disperser, ce qui demande généralement d'insérer ou d'ajouter des particules à chaque pas de temps (FIG 1.3).

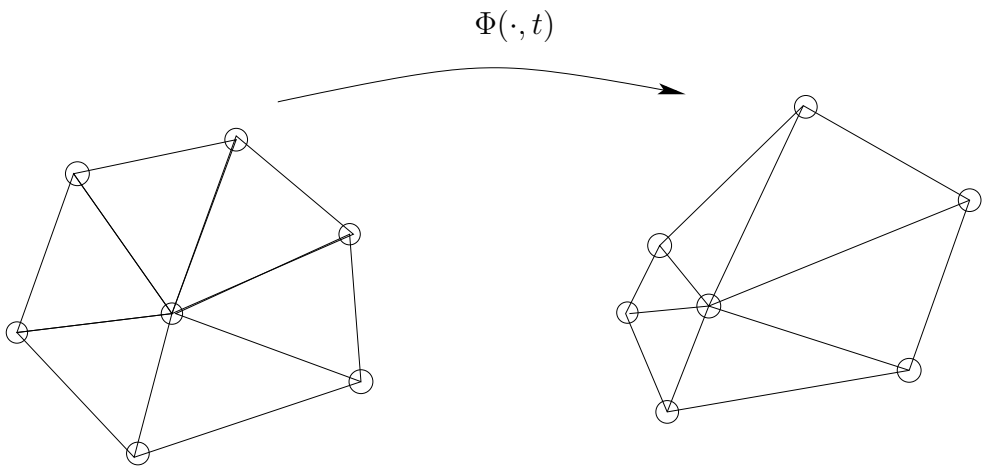

FIG. 1.3 – Déformation des noeuds d'un maillage lagrangien

1.2.2 Description eulérienne

Une autre description, dite eulérienne, est possible en donnant la vitesse du milieu continu pour tout point de l'espace et à tout instant. Tout se passe comme si un observateur était fixé en un point et regardait passer les particules avec une certaine vitesse u (FIG 1.4)

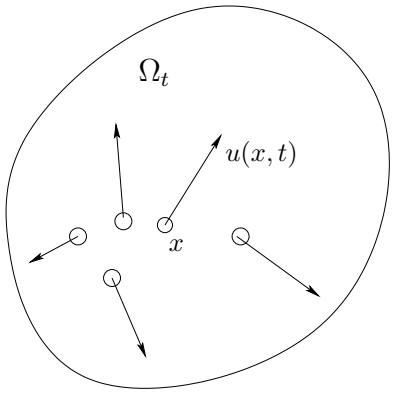

FIG. 1.4 – Représentation eulérienne du milieu continu

Les descriptions eulérienne et lagrangienne sont équivalentes en vertu de la relation

$$u(\Phi(a,t),t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a,t). \tag{1.3}$$

Contrairement à la description lagrangienne où il est explicitement fait référence à un domaine initial, la description eulérienne décrit le mouvement directement dans la configuration déformée.

Au niveau numérique, le milieu continu est discrétisé grâce à un maillage fixé dans le temps et les vitesses en chaque point du maillage sont des inconnues. Dans le cas d'une grille rectangulaire (FIG 1.5) des différences finies peuvent être utilisées pour calculer des dérivées de quantités définies aux points de grille. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité d'implémentation. Dans le cas d'un maillage non structuré (FIG 1.5), les quantités sont définies aux noeuds ou au centre de chaque triangle (en deux dimensions) et les équations décrivant le milieu peuvent être résolues par une méthode d'éléments finis par exemple. L'avantage du maillage non structuré est de pouvoir raffiner le domaine de référence dans les régions qui demandent une plus grande précision, en supposant que ces régions ne varient pas dans le temps. Dans tous les cas, le maillage est fixé, ce qui permet de prendre en compte de grandes déformations du milieu continu. Un inconvénient lié à cette représentation réside dans le besoin de remailler si le domaine évolue au cours du temps, dans le cas de surfaces libres par exemple.

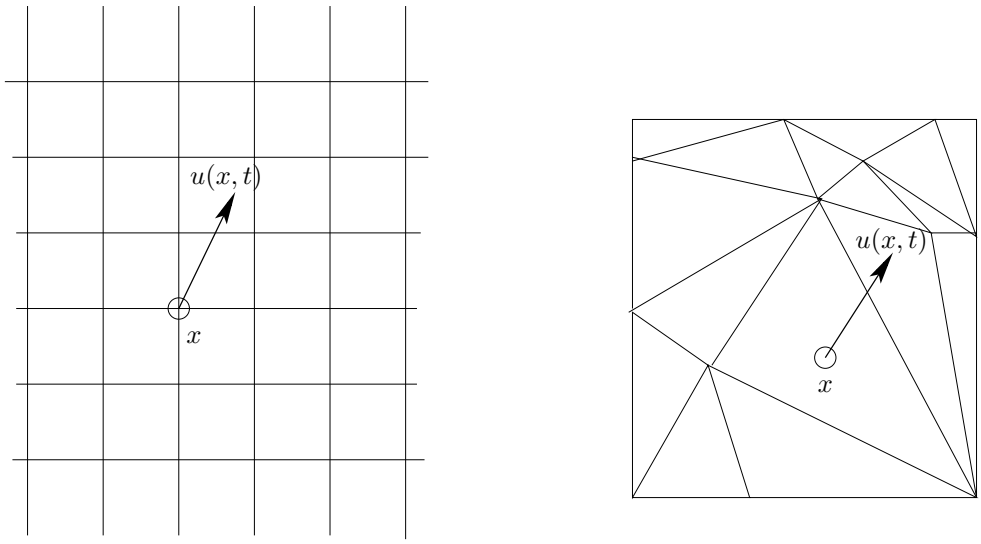

FIG. 1.5 – Maillages eulériens structurés et non structurés

Les formulations eulériennes et lagrangiennes utilisées pour caractériser un milieu continu étant maintenant introduites, nous allons comparer la dérivation d'une quantité attachée à la particule dans ces deux descriptions.

1.2.3 Dérivée particulaire

Considérons une fonction $g(a,t)$ décrite de manière lagrangienne et $h(x,t)$ la même quantité décrite de manière eulérienne. Ces deux fonctions sont liées par la relation

$$g(a,t) = h(\Phi(a,t),t). \tag{1.4}$$

En utilisant la formule de dérivation de composées et (1.3), on a

$$\frac{\partial g}{\partial t}(a,t) = \frac{\partial h}{\partial t}(\Phi(a,t),t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a,t)\cdot\nabla_x h(\Phi(a,t),t) = \frac{\partial h}{\partial t} + u\cdot\nabla_x h := \frac{Dh}{Dt}. \tag{1.5}$$

Cette dérivée est appelée particulaire car elle est attachée à une particule. Le terme de transport supplémentaire provient du fait que la particule qui se trouvait en x à l'instant t se retrouve, à cause de la déformation du milieu continu, en $x + u\ dt$ à l'instant $t + dt$. La formule précédente peut être obtenue d'une manière plus "physique" en écrivant

$$\frac{h(x + u\ dt, t + dt) - h(x, t)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \cdot \nabla_x h + o(dt).$$

La formule (1.5) se généralise facilement à des champs de vecteurs et permet d'écrire l'accélération en formulation eulérienne

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla_x)u. \tag{1.6}$$

Comparé à l'accélération écrite en formulation lagrangienne, il y a un terme supplémentaire non linéaire qui correspond au phénomène de convection de la vitesse par elle même.

Nous nous intéressons à présent aux principes fondamentaux de la physique de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Nous supposons dans cette thèse que les systèmes considérés sont isothermes et que l'entropie est constante pour pouvoir négliger les équations relatives aux deux principes de la thermodynamique.

1.3 Conservation de la masse

Le premier principe qu'il parait naturel de considérer est celui de la conservation de la masse. Pour établir l'équation correspondante, nous allons avoir besoin de la formule de Reynolds permettant de calculer la dérivée d'une intégrale posée sur un domaine qui est transporté par la vitesse du milieu continu.

Formule de Reynolds volumique

Considérons une quantité décrite de manière eulérienne $f(x, t)$ qui évolue dans un milieu continu décrit par une vitesse eulérienne $u(x, t)$. Pour tout ouvert Ω_t inclus dans le milieu continu nous avons la formule de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} f(x, t)\ dx\right) = \int_{\Omega_t} f_t + \operatorname{div}(fu)\ dx. \tag{1.7}$$

Nous proposons ici de démontrer cette formule classique car les idées introduites seront utilisées dans la suite. Considérons les caractéristiques Φ associées au champ de vitesse u (1.3). Un changement de variable dans les intégrales volumiques à l'aide $\Phi(\cdot, t)$ permet de se ramener à un domaine fixe Ω_0 ($\Omega_t = \Phi(\Omega_0, t)$)

$$\int_{\Omega_t} f(x, t)\ dx = \int_{\Omega_0} f(\Phi(a, t), t) \det([\nabla_a \Phi](a, t))\ da, \tag{1.8}$$

où da est la mesure volumique sur Ω_0 et ∇_a le gradient par rapport à la variable a. Le domaine d'intégration étant fixé, il suffit de calculer la dérivée de l'intégrande par rapport à t. Le premier terme fait intervenir la dérivée particulaire $f_t + u \cdot \nabla f$ comme dans (1.5). Pour le second terme, il suffit d'utiliser la dérivée du determinant d'une matrice $[A(t)]$

$$(\det([A(t)]))' = \det([A(t)])\,\mathrm{Tr}([A(t)]^{-1}[A'(t)]).$$

Dans notre cas nous obtenons

$$(\det([\nabla_a\Phi](a,t)))_t = \det([\nabla_a\Phi](a,t))\,\mathrm{Tr}([\nabla_a\Phi]^{-1}(a,t)[\nabla_a\Phi]_t(a,t)).$$

En utilisant la définition des caractéristiques (1.3)

$$[\nabla_a\Phi]_t(a,t) = \nabla_a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(a,t)\right) = \nabla_a(u(\Phi(a,t),t)) = [\nabla_x u](\Phi(a,t),t))[\nabla_a\Phi](a,t),$$

où ∇_x désigne le gradient par rapport à la variable x. En utilisant la propriété de la trace nous obtenons

$$(\det([\nabla_a\Phi](a,t)])_t = \det([\nabla_a\Phi](a,t))\,\mathrm{div}_x(u)(\Phi(a,t),t). \tag{1.9}$$

Le résultat est donc démontré en réécrivant le deuxième terme de la dérivée particulaire $u\cdot\nabla f$ plus le terme $f\,\mathrm{div}(u)$ apparaissant dans la dérivée du déterminant (1.9) sous la forme $\mathrm{div}(fu)$ puis en se ramenant à la configuration déformée.

Nous ne précisons plus à présent la dépendance en la variable de dérivation pour les opérateurs différentiels gradient et divergence lorsque le contexte ne prête pas à confusion.

Conservation de la masse en description eulérienne

La masse $m(t)$ contenue dans un sous domaine Ω_t du milieu continu est donnée par définition par la formule

$$m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)\,dx,$$

où $\rho(x,t)$ est la densité volumique du milieu écrite en variables eulérienne.

En utilisant la formule de Reynolds (1.7) pour $f=\rho$ sous l'hypothèse que la masse est conservée pour tout sous domaine Ω_t nous obtenons la formule de conservation locale de la masse écrite en formulation eulérienne

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho u) = 0. \tag{1.10}$$

En utilisant la formule de Reynolds (1.7) pour $f=1$ sous l'hypothèse que le volume est conservé pour tout sous domaine Ω_t, nous obtenons la contrainte de conservation locale du volume en formulation eulérienne

$$\mathrm{div}(u) = 0. \tag{1.11}$$

Remarque :
L'égalité (1.11) est en particulier vérifiée pour des fluides homogènes dont la densité est constante. Il existe cependant des fluides non homogènes qui sont incompressibles comme les fluides de Korteweg présentés dans la suite de ce chapitre. Dans ce cas, l'équation de conservation de la masse (1.10) est réduite à une équation de transport de la densité par la vitesse du milieu continu.

Conservation de la masse en description lagrangienne

Il existe une version lagrangienne de la conservation de la masse. Il suffit d'effectuer le même changement de variable utilisé dans la formule de Reynolds pour se ramener à la configuration de référence

$$m(t) = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, dx = \int_{\Omega_0} \rho(\Phi(a,t),t) \det([\nabla\Phi](a,t))\, da.$$

Sous l'hypothèse que la masse $m(t)$ est indépendante du temps, nous obtenons la formule de conservation locale de la masse écrite en formulation lagrangienne

$$\rho(\Phi(a,t),t) \det([\nabla\Phi](a,t)) = \rho(a,0). \tag{1.12}$$

L'équation de conservation du volume se déduit facilement

$$\det([\nabla\Phi](a,t)) = 1. \tag{1.13}$$

Remarque :
Dans la pratique, les solides élastiques incompressibles sont souvent considérés homogènes et la conservation de masse s'exprime simplement avec (1.13).

Nous allons à présent dériver les équations fondamentales de conservation de la quantité de mouvement en formulation eulérienne et lagrangienne.

1.4 Conservation de la quantité de mouvement

L'ingrédient essentiel de la mécanique des milieux continus est l'introduction d'un tenseur des contraintes qui va représenter les efforts intérieurs agissant dans le milieu continu.

1.4.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

Considérons une partition quelconque du milieu continu $\Omega_t = \Omega'_t \cup (\Omega_t \backslash \Omega'_t)$ dans la configuration déformée qui est à l'équilibre mécanique et séparée par une interface $\partial\Omega'_t$ (FIG 1.6)

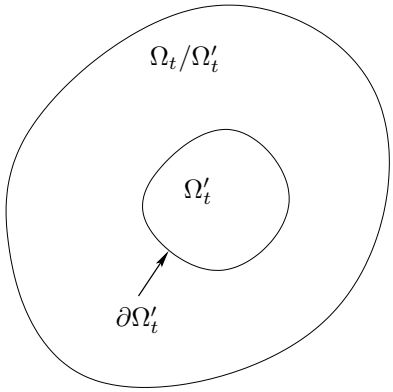

FIG. 1.6 – Partition du milieu continu Ω_t

Le milieu Ω'_t est supposé en équilibre sous l'action de plusieurs forces : des forces volumiques f (comme la gravité par exemple) qui agissent sur tout le domaine et des forces surfaciques T qui agissent sur $\partial\Omega'_t$. Les forces surfaciques sont supposées ne dépendre que du point considéré et de la normale (hypothèse de Cauchy). Des considérations géométriques montrent que T est en fait une fonction linéaire de n que l'on écrit

$$T(x,t,n(x,t)) = \sigma(x,t)n(x,t). \tag{1.14}$$

σ est appelé le tenseur des contraintes de Cauchy, il permet de modéliser les forces de cohésion qui agissent dans un matériau.

1.4.2 Formulation eulérienne de la conservation de la quantité de mouvement

Ayant décrit les forces volumiques et surfaciques agissant sur le système, nous pouvons utiliser le principe fondamental de la dynamique sur le domaine Ω'_t qui stipule que la variation de la quantité de mouvement est égale aux forces appliquées

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega'_t} \rho(x,t)u(x,t)\ dx\right) = \int_{\partial\Omega'_t} \sigma(x,t)\ n(x,t)\ ds + \int_{\Omega'_t} f(x,t)\ dx, \tag{1.15}$$

où ds est la mesure de surface sur $\partial\Omega'_t$.

Remarque :
Pour être complet, il faut également écrire une équation sur l'équilibre du moment des forces. Cette équation permet de montrer que le tenseur σ est une matrice symétrique. Pour plus de détails sur ce point, on pourra consulter le livre [36] p.37.

Pour le premier terme, nous utilisons la formule de Reynolds (1.7) qui se généralise simplement à des champs de vecteurs

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega'_t} \rho(x,t)u(x,t)\ dx\right) = \int_{\Omega'_t} (\rho u)_t + \mathrm{div}(\rho u \otimes u)\ dx.$$

Le terme du membre de droite se réecrit avec la conservation de la masse (1.10)

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho u_t + u\rho_t + \rho(u \cdot \nabla)u + u \operatorname{div}(\rho u) = \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u).$$

L'équation (1.15) se réécrit donc avec la formulation eulérienne de l'accélération (1.6)

$$\int_{\Omega'_t} \rho(x,t)\gamma(x,t)\, dx = \int_{\partial\Omega'_t} \sigma(x,t)\, n(x,t)\, ds + \int_{\Omega'_t} f(x,t)\, dx. \tag{1.16}$$

En utilisant la formule de la divergence

$$\int_{\partial\Omega'_t} \sigma(x,t)\, n(x,t)\, ds = \int_{\Omega'_t} \operatorname{div}(\sigma(x,t))\, dx.$$

En considérant que l'égalité (1.16) doit être valable pour tout sous domaine Ω'_t de Ω_t on obtient l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement écrite en formulation eulérienne

$$\rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) = \operatorname{div}(\sigma) + f \quad \text{sur} \quad \Omega_t \tag{1.17}$$

Les équations de la dynamique peuvent aussi être écrites en formulation lagrangienne.

1.4.3 Formulation lagrangienne de la conservation de la quantité de mouvement

La formulation lagrangienne s'obtient en écrivant les équations précédentes sur un domaine de référence en exprimant toutes les quantités à l'aide de la variable Φ. Il suffit pour cela de faire un changement de variable avec $\Phi(\cdot, t)$ dans (1.16) pour revenir dans la configuration de référence. Pour les intégrales de volume, il suffit de faire un changement de variable volumique ($\Omega'_t = \Phi(\Omega'_0, t)$). Après avoir posé

$$f_a(a,t) = f(\Phi(a,t),t)\det([\nabla\Phi](a,t)) \qquad \rho_a(a,t) = \rho(\Phi(a,t),t)\det([\nabla\Phi](a,t))$$

et en utilisant l'expression lagrangienne de l'accélération (1.2) nous obtenons

$$\int_{\Omega'_t} f(x,t)\, dx = \int_{\Omega'_0} f_a(a,t)\, da, \tag{1.18}$$

$$\int_{\Omega'_t} \rho(x,t)\gamma(x,t)\, dx = \int_{\Omega'_0} \rho_a(a,t)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(a,t)\, da. \tag{1.19}$$

Le point délicat réside dans le changement de variable pour ramener l'intégrale surfacique faisant intervenir σ dans la configuration de référence ($\Phi(\partial\Omega'_0, t) = \partial\Omega'_t$). Un terme lié à la variation d'aire dépendant de $\operatorname{Cof}(\nabla\Phi)$ apparaît (tout comme un terme dépendant de $\det(\nabla\Phi)$ apparaît pour mesurer la variation de volume). En notant $n_0(a) = n(a,0)$ la normale dans la configuration de référence (FIG 1.7) nous avons la formule

$$\int_{\partial\Omega'_t} \sigma(x,t)n(x,t)\, ds = \int_{\partial\Omega'_0} \sigma(\Phi(a,t),t)\operatorname{Cof}([\nabla\Phi](a,t))\, n_0(a)\, ds_0, \tag{1.20}$$

où ds_0 est la mesure de surface sur $\partial\Omega'_0$. Une démonstration de cette formule vectorielle pourra être trouvée dans l'annexe du chapitre 7 (7.59).

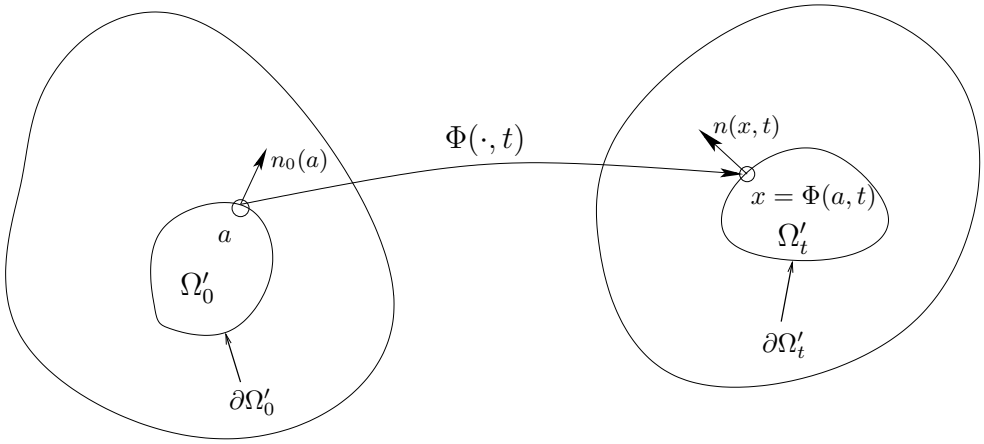

FIG. 1.7 – Transformation des normales par l'application Φ

On introduit donc le premier tenseur de Piola Kirchoff (qui n'est plus symétrique)

$$\mathcal{T}(a,t) = \sigma(\Phi(a,t),t)\,\mathrm{Cof}([\nabla\Phi](a,t)). \tag{1.21}$$

Il reste à utiliser le théorème de la divergence pour ce dernier terme

$$\int_{\partial\Omega'_0} \mathcal{T}(a,t)n_0(a)ds_0 = \int_{\Omega'_0} \mathrm{div}(\mathcal{T}(a,t))da.$$

et écrire que l'égalité obtenue après les différents changements de variables doit être valable pour tous les domaines Ω'_0 inclus dans Ω_0. Les équations locales de conservation de la quantité de mouvement obtenues en formulation lagrangienne sont données par

$$\rho_a \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \mathrm{div}(\mathcal{T}) + f_a \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \tag{1.22}$$

Les équations (1.17) et (1.22) sont générales et ne rendent pas compte des propriétés particulières du milieu continu considéré. Tout d'abord, le nombre d'inconnues (trois pour la vitesse ou la déformation, une pour la densité ainsi que les six composantes du tenseur de Cauchy) est plus grand que le nombre d'équations (une pour la conservation de la masse et trois pour la conservation de la quantité de mouvement). De plus, nous n'avons pas encore décrit de manière précise le milieu que l'on considère (fluide, gaz ou solide élastique par exemple). Pour fermer le système, il faut donner une relation entre les contraintes et les inconnues (σ et u en eulérien ou $\mathcal{T}$ et Φ en lagrangien). Les fluides et les solides élastiques sont des milieux continus que l'on peut décrire avec l'une ou l'autre de ces formulations. Cependant, dans la pratique, les fluides seront décrits en formulation eulérienne et les solides élastiques en formulation lagrangienne. Nous allons à présent introduire les modèles classiques utilisés en justifiant le choix de la formulation utilisée.

1.5 Equations des fluides

Un fluide est un objet très déformable qui n'a pas de forme propre. La modélisation des fluides a été introduite par Euler au 17ème siècle puis complétée par Navier et Stokes au 18ème siècle, notamment par la prise en compte de la viscosité. Les fluides que nous considérons dans la suite sont tous incompressibles et n'ont pas de surface libre.

Choix de la description

La description eulérienne est généralement retenue pour modéliser un fluide. Tout d'abord, l'absence de surface libre permet de travailler dans la configuration déformée qui n'est pas une inconnue du problème. De plus, comme nous allons le voir, le tenseur des contraintes s'exprime simplement en fonction de la vitesse qui est une inconnue des équations en formulation eulérienne (1.17). Le choix de la description lagrangienne conduirait à des équations très complexes car les dérivées temporelles de Φ apparaissent dans le terme d'accélération ainsi que dans le tenseur des contraintes (il faut exprimer la relation non linéaire entre ∇u et Φ avec (1.3)). Enfin, l'apparition de tourbillons conduirait à de très grandes déformations et des fonctions Φ très irrégulières.

1.5.1 Loi de comportement

Expérimentalement, une contrainte normale est exercée à la surface de tout volume de fluide, c'est la pression que l'on notera p. De plus, le frottement des différentes couches de fluides qui n'ont pas la même vitesse créent une contrainte dépendant de la partie symétrique du gradient de vitesse. Pour mieux comprendre pourquoi la partie symétrique du gradient de vitesse intervient, effectuons un développement limité de la vitesse au voisinage d'un point.

$$u(x+h) = u(x) + [\nabla u(x)]h + o(h). \tag{1.23}$$

Le gradient de u peut être décomposé en une partie symétrique, que l'on appelle le tenseur des vitesses de déformation noté $D(u)$, et une partie antisymétrique. Il est montré dans le livre [34] p.7 que la partie antisymétrique correspond à une rotation du fluide (elle ne créé donc pas de contrainte) et la partie symétrique correspond à une déformation du fluide. Un autre argument pour le choix de la partie symétrique provient du fait que le tenseur des contraintes doit être symétrique.

Le choix le plus simple consiste à postuler une loi de comportement linéaire entre la contrainte et le tenseur des vitesses de déformation. Ce type de fluide est appelé newtonien et suffit pour modéliser de nombreux fluides simples tels que l'eau et l'huile. Le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit donc dans la configuration déformée

$$\sigma = -pI_d + \mu([\nabla u]^T + [\nabla u]). \tag{1.24}$$

Le paramètre μ est appelé la viscosité. Il mesure l'importance des frottements entre les différentes particules de fluides. Le choix fait pour le tenseur des contraintes permet de fermer le système et d'écrire l'équation régissant les fluides.

1.5.2 Equations de Navier-Stokes

Dans le cas d'un fluide homogène avec une viscosité constante nous obtenons, en remplaçant (1.24) dans (1.17), les célèbres équations de Navier Stokes incompressibles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) - \mu\Delta u + \nabla p & = & f, \\ \operatorname{div}(u) & = & 0. \end{array} \right. \tag{1.25}$$

Ces équations semblent *a priori* mal posées car il y a une inconnue supplémentaire liée à la pression. Il n'en est rien car pour des fluides incompressibles, la pression joue un rôle particulier. Elle permet d'imposer la contrainte $\operatorname{div}(u) = 0$. D'un point de vue numérique, une vitesse intermédiaire est calculée en omettant la pression puis le résultat est projeté sur l'espace des fonctions à divergence nulle grâce à la pression. Dans le cas où le fluide considéré n'est pas homogène, il suffit d'ajouter l'équation de conservation de la masse (1.10) qui est une équation de transport sur la densité dans le cas incompressible.

Faisons maintenant un petit détour sur la description lagrangienne pour comparer les deux formulations. Nous avons besoin de trouver les contraintes fluides en fonction de la déformation Φ. En utilisant l'équation des caractéristiques (1.3)

$$[\nabla_a \Phi_t](a,t) = \nabla_a(u(\Phi(a,t),t)) = [\nabla_x u](\Phi(a,t),t)[\nabla_a \Phi](a,t).$$

Le tenseur des contraintes s'écrit donc dans la configuration de référence

$$\sigma(\Phi(a,t),t) = -p(\Phi(a,t),t)I_d + \mu\{\ [\nabla_a \Phi_t](a,t)[\nabla_a \Phi]^{-1}(a,t) + ([\nabla_a \Phi_t](a,t)[\nabla_a \Phi]^{-1}(a,t))^T\ \}.$$

D'après (1.22) et (1.13), les équations de Navier Stokes incompressibles écrites en formulation lagrangienne s'écrivent sous la forme (on omet la dépendance en a et t)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma(\Phi)\operatorname{Cof}([\nabla\Phi])) & = & f_a, \\ \det([\nabla\Phi]) & = & 1. \end{array} \right. \tag{1.26}$$

Remarquons à présent que les deux formulations donnent des équations non linéaires. Dans le cas de la formulation eulérienne (1.25), le terme portant sur les contraintes est linéaire mais c'est le terme d'accélération qui est non linéaire. Dans le cas de la formulation lagrangienne (1.26), le terme d'accélération est linéaire mais les contraintes sont fortement non linéaires et dépendent de Φ et Φ_t. Cette remarque est une raison supplémentaire pour décrire les fluides avec une formulation eulérienne lorsqu'il n'y a pas de surface libre.

Il existe également des fluides complexes dits non newtoniens décrits par une équation différentielle sur la contrainte qui dépend de manière non linéaire du tenseur des vitesses de déformation. Ces équations modélisent des fluides plus complexes comme la mayonnaise, le sang ou le plastique fondu. L'étude de ces fluides ne sera pas considérée dans cette thèse.

Equations d'Euler et de Stokes

Revenons un moment sur les termes apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes (1.25). Le terme dû à la viscosité fait apparaître un laplacien de la vitesse. C'est un terme diffusif qui régularise l'équation

comme pour l'équation de la chaleur. Le terme non linéaire provient de la formulation eulérienne de l'accélération et rend compte de la convection de la vitesse par elle même. Les équations de Navier-Stokes présentent les mêmes propriétés qualitatives pour différents paramètres de densité, viscosité, vitesse et longueur de l'écoulement. Il suffit en effet de procéder à une adimensionalisation des équations pour voir apparaître le nombre de Reynolds qui contrôle le rapport des effets inertiels (le terme non linéaire $(u \cdot \nabla)u$) sur les effets visqueux (le terme $\mu\Delta u$). Pour de grands Reynolds c'est le terme inertiel qui l'emporte et le fluide devient turbulent. Les équations obtenues à la limite en enlevant le terme visqueux sont les équations d'Euler

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) + \nabla p & = & f, \\ \mathrm{div}(u) & = & 0. \end{array} \right.$$

Pour de petits Reynolds c'est le terme diffusif qui l'emporte et le fluide est très visqueux. Les équations obtenues en enlevant le terme inertiel sont les équations de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_t - \mu\Delta u + \nabla p & = & f, \\ \mathrm{div}(u) & = & 0. \end{array} \right.$$

Pour donner quelques exemples, le nombre de Reynolds est de l'ordre de 10^6 pour un écoulement autour d'un nageur (très turbulent) et de 10^{-2} pour l'écoulement autour d'un globule rouge (très visqueux). C'est à ce dernier régime de petits Reynolds que nous nous intéresserons pour les applications en biomécanique.

Conditions initiales et conditions limites

Ces équations aux dérivées partielles doivent être complétées par une condition initiale (comme pour une équation différentielle ordinaire) ainsi que des conditions aux limites sur les bords du domaine. De manière très simpliste, la vitesse est imposée nulle sur une paroi immobile pour des fluides visqueux tandis que seule la composante normale de la vitesse est nulle pour un fluide décrit par les équations d'Euler. De manière plus générale, il est également possible de considérer des conditions de Dirichlet non homogènes ou de Neumann pour modéliser des parois qui se déplacent et des sorties libres.

1.5.3 Cas de fluides biphasiques

Dans beaucoup d'applications, un fluide homogène non miscible peut comporter plusieurs phases. Chaque phase est décrite par les équations de Navier-Stokes avec des paramètres différents pour la densité et la viscosité. Une interface au sens mathématique sépare alors les deux phases et des conditions à l'interface sont ajoutées. Il est couramment admis que la vitesse est continue à la traversée de la surface. Pour rendre compte de la tension de surface, qui donne la forme caractéristique des bulles de savon par exemple, un saut de contrainte proportionnel à la courbure est ajouté (loi de Laplace). Considérons une partition $\Omega^1 \bigcup \Omega^2$ du domaine Ω séparé par une interface Σ. Notons avec un indice i les quantités écrites dans le domaine Ω^i (FIG 1.8)

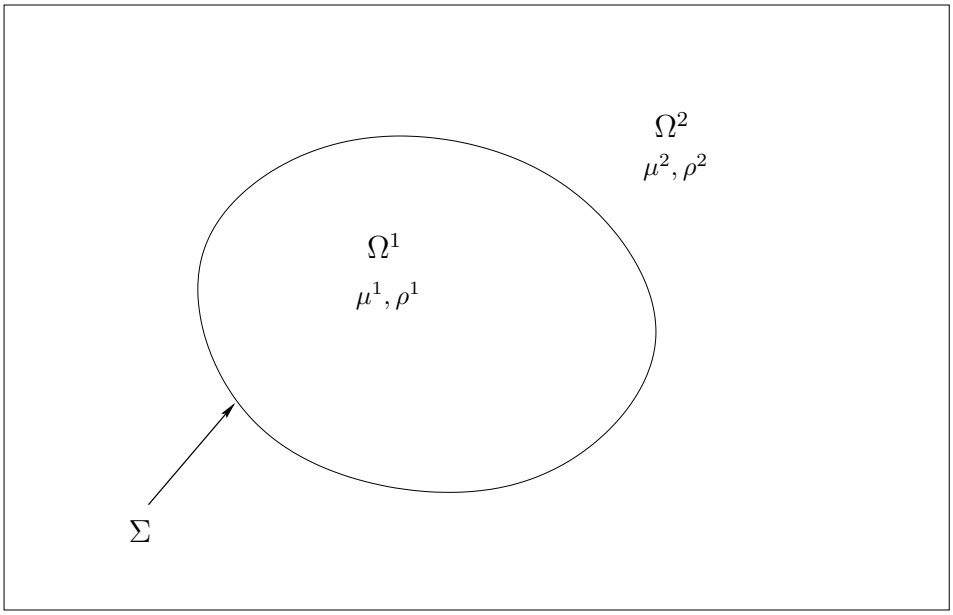

FIG. 1.8 – Milieu constitué de deux fluides différents

Le modèle biphasique s'écrit alors pour i égal à 1 ou 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho^i((u^i)_t + (u^i \cdot \nabla)u^i) - \mu^i \Delta u^i + \nabla p^i & = & f^i \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ \operatorname{div}(u^i) & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ \lfloor u \rfloor & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ \lfloor \sigma n \rfloor & = & \alpha H n \quad \text{sur} \quad \Sigma \end{array}\right.$$

où H représente la courbure moyenne de la surface Σ et α le coefficient de tension de surface. Nous avons également noté $\lfloor\ \rfloor$ le saut d'une quantité à l'interface.

1.5.4 Modèle de Korteweg

Dans l'approche précédente, l'interface n'a pas d'épaisseur et doit donc être étalée dans un voisinage qui ne correspond pas à la physique de l'interface. Pour remédier à ce problème, des modèles d'interfaces diffuses ont été introduits par Korteweg au début du 20ème siècle. Dans cette approche, un nouveau tenseur des contraintes contenant un terme non linéaire dépendant de la densité est considéré pour prendre en compte l'interaction non locale des molécules à l'interface (effets capillaires). Les équations du mouvement sont alors données sur tout le domaine par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u + \nabla p & = & -\operatorname{div}(\nabla \rho \otimes \nabla \rho) + f, \\ \rho_t + u \cdot \nabla \rho & = & 0, \\ \operatorname{div}(u) & = & 0. \end{array}\right. \tag{1.27}$$

Ce modèle ne nous servira pas explicitement dans cette thèse mais le modèle de membrane développé à la fin de la première partie peut être vu comme une généralisation du modèle de Korteweg. On pourra consulter l'article [3] pour plus de détails sur les modèles d'interfaces diffuses.

Les équations des fluides ayant été introduites, intéressons-nous maintenant au deuxième constituant du couplage fluide-structure : la formulation des équations relatives aux solides élastiques.

1.6 Equations de l'élasticité

Lorsque l'on déforme faiblement un matériau, il adopte un comportement élastique et revient dans sa forme initiale (en général). Pour des déformations plus importantes, le matériau est endommagé et il ne revient pas dans sa forme initiale. Ce comportement est appelé plastique et peut être atteint pour de plus ou moins grandes déformations en fonction du matériau considéré. Par exemple, le comportement plastique est atteint pour de petites déformations dans le cas d'une barre métallique et pour de grandes déformations pour du caoutchouc. Nous nous intéressons ici à des matériaux seulement dans le domaine élastique. Le comportement élastique du matériau peut être très complexe car la relation entre la contrainte et la déformation est non linéaire en général.

Choix de la description

La description lagrangienne est généralement utilisée pour étudier des matériaux élastiques. Tout d'abord, la formulation eulérienne n'est pas adaptée car le domaine déformé, qui est *a priori* différent du domaine de référence, est une inconnue du problème. Enfin, pour un matériau élastique, le tenseur des contraintes s'exprime de manière naturelle en fonction du gradient de la déformation qui est l'inconnue dans la formulation lagrangienne (1.22).

1.6.1 Lien entre énergie et tenseur des contraintes

Deux points de vue différents sont possibles pour décrire un matériau élastique : donner une relation entre le premier tenseur de Piola Kirchoff $\mathcal{T}$ et la déformation Φ ou postuler directement une énergie élastique dépendant de la déformation. Comme nous allons le voir, ces deux points de vue sont équivalents car l'énergie élastique est conservative. Pour alléger l'exposé, nous allons postuler directement des lois de comportement par le biais de l'énergie en définissant des matériaux hyperélastiques. De plus, c'est la description par l'énergie de l'élasticité qui sera retenue pour dériver les modèles fluide-structure qui interviendront par la suite. Nous suivons le livre de Ciarlet [11] pour cette partie.

Considérons un matériau homogène occupant un domaine Ω_0 dans sa configuration de référence et Ω_t après déformation par une fonction $\Phi(\cdot, t)$. Le gradient de la déformation $[\nabla\Phi]$ mesure au premier ordre les variations de déformation, il est donc naturel de postuler l'énergie suivante, écrite dans la configuration de référence

$$\mathcal{E}(\Phi) = \int_{\Omega_0} W([\nabla\Phi](a,t))\, da. \tag{1.28}$$

Considérons $\wp\Phi$ une variation infinitésimale de Φ. La variation de l'énergie précédente s'écrit

$$\wp\mathcal{E}(\Phi) = \int_{\Omega_0} W'([\nabla\Phi](a,t)) : [\nabla\wp\Phi](a,t)\, da,$$

où W' représente la matrice des dérivée de W par rapport à toutes ses variables. En intégrant par parties et en supposant que $\wp\Phi$ est nulle au bord

$$\wp\mathcal{E}(\Phi) = -\int_{\Omega_0} \mathrm{div}(W'([\nabla\Phi](a,t))) \cdot \wp\Phi(a,t)\, da.$$

La force élastique est conservative donc nous pouvons utiliser le principe des travaux virtuels pour écrire la force F associée à la variation de l'énergie $\wp\mathcal{E}$

$$\wp\mathcal{E}(\Phi) = -\int_{\Omega_0} F(\Phi(a,t)) \cdot \wp\Phi(a,t)\, da.$$

La force F étant égale à $\mathrm{div}(\mathcal{T})$ d'après (1.22) nous pouvons donc écrire la relation entre le premier tenseur de Piola Kirchoff et W qui s'écrit

$$\mathcal{T}([\nabla\Phi]) = W'([\nabla\Phi]).$$

et la force associée

$$F(\Phi) = \mathrm{div}(W'([\nabla\Phi])). \tag{1.29}$$

Les propriétés précédentes montrent qu'il est équivalent de se donner une énergie élastique ou le premier tenseur de Piola Kirchoff. Tout un travail est ensuite effectué pour déduire la forme générale de l'énergie avec des principes physiques simples comme le principe d'indifférence matérielle et l'isotropie. Nous ne détaillons pas ces aspects car nous n'en aurons pas besoin dans la suite.

1.6.2 Théorie des plaques minces

Dans certains cas (cellules biologiques par exemple), les objets élastiques sont minces c'est à dire que l'une des dimensions de l'objet, l'épaisseur, est petite devant les autres. Dans ce cas, d'un point de vue numérique, les équations de l'élasticité tridimensionnelle ne sont plus adaptées. On construit alors des modèles bidimensionnels qui approximent les équations de l'élasticité tridimensionnelle. Une technique classique consiste à construire ces modèles par des asymptotiques par rapport à un petit paramètre ε qui représente l'épaisseur du matériau. Pour des références plus complètes, on pourra consulter les livres de Ciarlet [12] et [13]. Les équations trouvées sont écrites sur la surface moyenne de la configuration de référence qui peut être plate (théorie des plaques) ou courbe (théorie des coques). La théorie des coques est plus complexe car elle fait intervenir la géométrie de la surface moyenne (FIG 1.9).

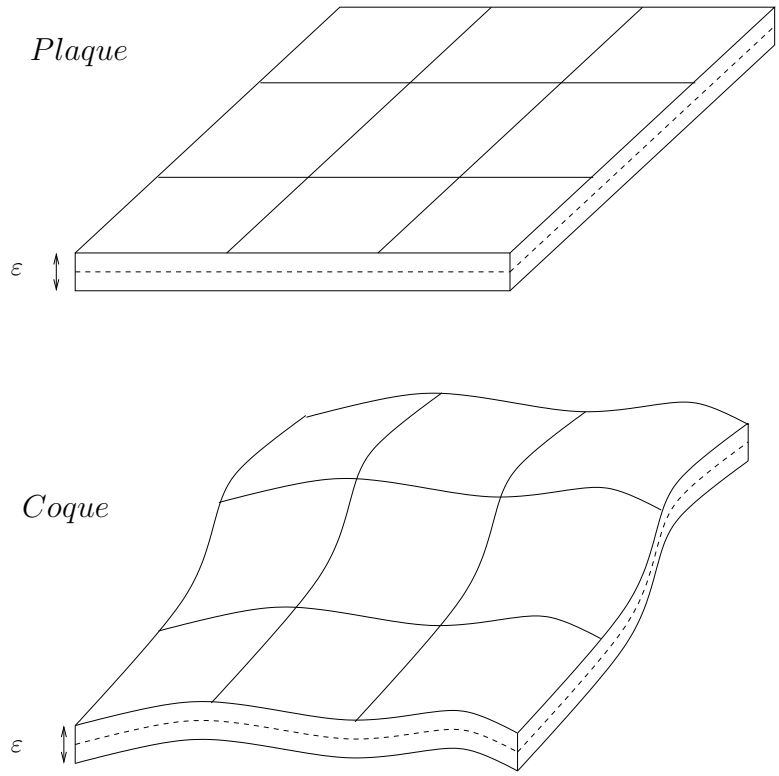

FIG. 1.9 – Représentation d'une plaque et d'une coque

De manière générale, l'asymptotique fait sortir plusieurs termes à différents ordres. Un terme d'étirement de la surface moyenne est obtenu au premier ordre. Il rend compte de l'énergie qui apparaît lors d'une variation de la métrique. Lorsque la métrique ne varie plus, c'est le terme au second ordre de flexion dépendant généralement de la courbure de la surface qui est prépondérant. Ce terme de flexion permet de rendre compte de la forme d'une coque lors d'un flambement par exemple.

Cas du matériau de Saint-Venant Kirchoff

Partant d'un matériau volumique général, il est possible d'effectuer un développement limité de la loi de comportement pour de petites déformations. Le matériau obtenu au premier ordre est appelé matériau de Saint-Venant Kirchoff et il est non linéaire. Dans le livre [13] une asymptotique est effectuée dans un cadre général pour des coques et l'énergie de flexion obtenue pour un matériau de Saint-Venant Kirchoff prend la forme simple

$$\mathcal{E}_c = \int_{\partial\Omega} \alpha(H - c_0)^2 + \beta G \, d\sigma, \tag{1.30}$$

où $\partial\Omega$ représente la surface moyenne de la coque et $d\sigma$ la mesure surfacique associée. De plus, H est la courbure moyenne et G la courbure de Gauss de $\partial\Omega$. Le terme c_0 est appelé la courbure spontanée et rend compte de la courbure de la coque dans sa configuration de repos.

Les applications visées dans cette thèse concernent les membranes biologiques. Dans le cas de vésicules, l'épaisseur de la membrane est faible par rapport aux autres dimensions et les variations de la métrique sont faibles. Le modèle de flexion (1.30) sera donc utilisé. Dans la troisième partie de la thèse nous nous intéresseront à différentes méthodes d'optimisation de forme permettant de calculer la force associée à cette énergie.

1.7 Calcul d'interface

Dans les applications qui nous intéressent, une interface sépare deux milieux qui peuvent être constitués de fluides ou de solides élastiques. Dans ce cas, il faut trouver des méthodes efficaces qui permettent de représenter l'interface qui va évoluer au cours du temps. D'un point de vue mathématique, cette interface peut être modélisée par une surface en dimension trois et une courbe paramétrée en dimension deux .

Il existe deux méthodes classiques pour représenter une surface : avec une paramétrisation explicite ou avec une fonction implicite. Nous esquissons ici quelques propriétés générales de ces deux méthodes en développant les avantages et inconvénients de chacune d'elle d'un point de vue numérique. La représentation implicite par lignes de niveau jouant un rôle central dans la modélisation de membranes élastiques immergées dans un fluide, elle sera développée plus en détail dans le chapitre suivant ainsi que dans la troisième partie d'un point de vue théorique et numérique. La représentation paramétrique sera quant à elle développée dans l'annexe du chapitre 7 d'un point de vue théorique car elle sera utilisée dans une méthode d'optimisation de formes développée dans la troisième partie.

1.7.1 Suivi d'interface

Plaçons nous dans le cas particulier des courbes paramétrées en dimension deux. Ces courbes sont décrites de manière mathématique par une application $t \mapsto X(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Après discrétisation de l'ensemble de départ on obtient une collection de points de contrôle $(X_i) \in \mathbb{R}^2$ qui vont être déplacés à chaque pas de temps avec une vitesse dépendant du problème étudié (FIG 1.10)

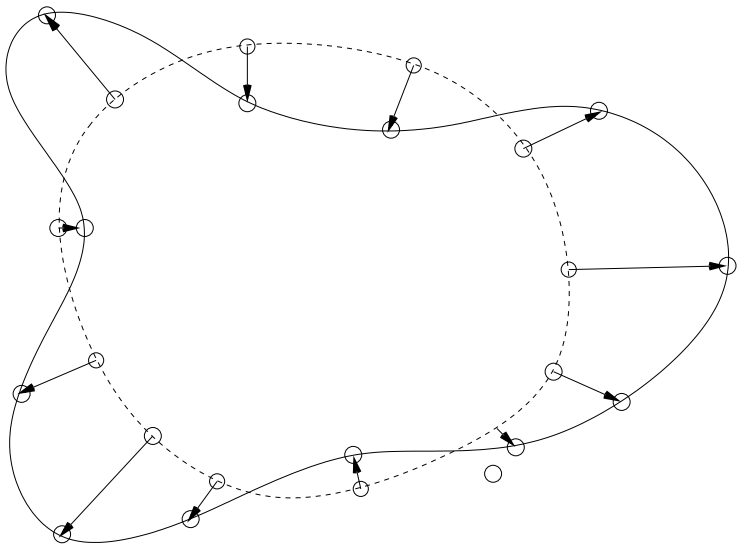

FIG. 1.10 – Déplacement des points de contrôle d'une paramétrisation

Le nombre de points servant à représenter l'interface reste le même au cours du temps. Lorsque l'interface subit de grandes déformations, il peut donc y avoir une perte d'informations car les points de contrôle se dispersent et se concentrent dans certaines régions. Si par exemple nous avons à calculer la courbure de la courbe et que les points sont de plus en plus éloignés, une perte de précision est constatée. Par contre, si des régions requièrent un nombre de points plus élevés (des régions où la courbure est importante par exemple), un nombre plus important de points de contrôle dans la configuration initiale peut permettre un calcul plus précis. Dans l'étude de fluides séparés par une interface, il arrive fréquemment qu'il y ait des changements de topologie. Avec le formalisme de la paramétrisation, il est peu commode de gérer ces changements de topologie car un certain nombre de points devra être supprimé ou ajouté.

Les arguments précédents sont aussi valables si l'on considère une surface en dimension 3 mais d'autres complications viennent s'ajouter. La surface est alors discrétisée par un nuage de points représenté à l'aide d'une triangulation. Ajouter ou enlever des points de contrôle lors de grandes déformations devient alors complexe, sans parler des changements de topologie. De plus une paramétrisation est souvent donnée localement, la reconstruction complète de la surface peut être laborieuse.

La représentation d'une interface par une paramétrisation est à rapprocher de la description lagrangienne car chaque point de contrôle de l'interface est transporté. C'est pour cette raison que les inconvénients mentionnés ci dessus sont les mêmes que ceux évoqués dans la description lagrangienne. Certains des défauts de la méthode paramétrique peuvent être résolus avec l'introduction d'une fonction implicite.

1.7.2 Capture d'interface

Une courbe paramétrée ou une surface peuvent aussi être décrites de manière implicite comme la ligne de niveau 0 d'une fonction scalaire que l'on note traditionnellement ϕ. Pour n égal à 2 ou 3 la surface ou la courbe paramétrée S est donc représentée par l'ensemble

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \phi(x) = 0\}. \tag{1.31}$$

Pour mieux comprendre le concept de fonction level set, nous proposons de traiter deux exemples où la ligne de niveau 0 d'une fonction level set ϕ est choisie pour représenter un cercle de rayon 1.

Etude de deux cas particuliers

Considérons la fonction

$$\phi_1 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \sqrt{x^2+y^2} - 1 \end{array}$$

Le graphe de ϕ_1 est un cône dont les lignes de niveau $\{\phi_1 = \varepsilon\}$ sont des cercles de rayon $1+\varepsilon$ (FIG 1.11)

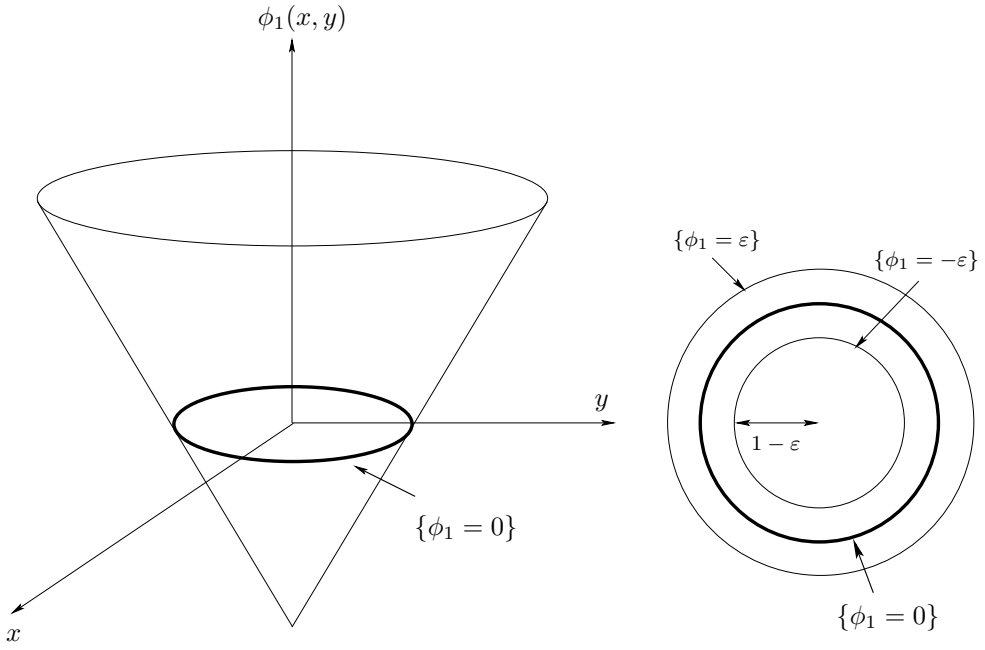

FIG. 1.11 – Représentation de ϕ_1 ainsi que ses lignes de niveau

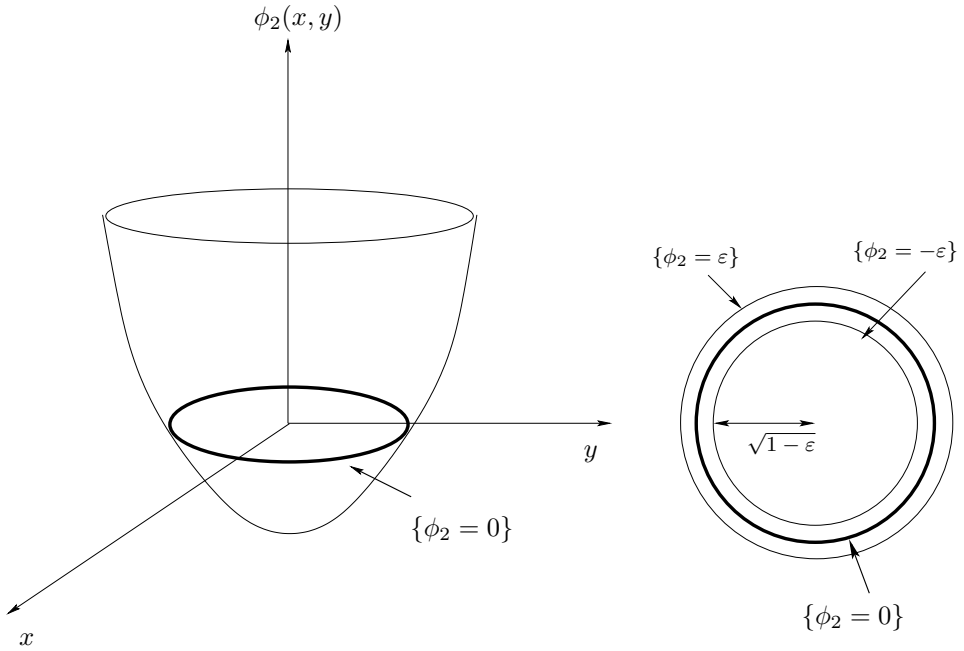

FIG. 1.12 – Représentation de ϕ_2 ainsi que ses lignes de niveau

Considérons à présent la fonction

$$\phi_2 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x^2+y^2-1 \end{array}$$

Dans ce cas, la représentation de ϕ_2 est un paraboloïde de révolution dont les lignes de niveau $\{\phi = \varepsilon\}$ sont des cercles de rayon $\sqrt{1+\varepsilon}$ (FIG 1.12).

Les lignes de niveau de la fonction choisie sont plus ou moins proches les unes des autres comme l'illustre FIG 1.11 et FIG 1.12. Le gradient de la fonction level set, qui mesure l'espacement entre les différentes lignes de niveau, est plus grand dans le cas de la fonction ϕ_2 que dans le cas de la fonction ϕ_1. Ces remarques seront importantes pour la suite car nous verrons dans le chapitre suivant que le gradient de la fonction ϕ contient de l'information sur la variation d'aire de la surface si elle est advectée par un champ de vitesses incompressible. De plus, le choix de la fonction ϕ sera crucial lors d'un calcul numérique. La fonction ϕ_1 est une fonction distance ($|\nabla\phi_1| = 1$ sur tout le domaine) et offre plus de stabilité. Nous discuterons plus en détails dans la troisième partie de ces aspects numériques.

Remarques générales

Contrairement à une paramétrisation qui est souvent définie localement, la représentation implicite permet une représentation globale de la courbe paramétrée, atout important lorsque la courbe est constituée de plusieurs morceaux. Seule la ligne de niveau 0 représente la courbe mais il est nécessaire de stoker la fonction sur tout le domaine, ce qui est plus coûteux en place mémoire que le cas d'une paramétrisation. De plus, le formalisme utilisé permet de traiter la dimension deux et les dimensions supérieures sans complexité théorique accrue (dans ce cas, la ligne de niveau 0 représente une surface). Les changements de topologie s'effectuent aussi très simplement puisqu'il n'y a pas de traitement spécifique à réaliser.

D'un point de vue numérique, la fonction level set est discrétisée sur une grille rectangulaire fixe, ce qui permet d'utiliser des schémas simples de différences finies pour discrétiser des quantités dépendant de ϕ. Cette version implicite de la représentation d'une surface est donc à rapprocher de la description eulérienne. Elle permet en particulier de traiter simplement de grandes déformations de l'interface. Par contre, la précision de l'information que l'on a sur la surface est la même partout.

Informations géométriques contenues dans la fonction ϕ

Une des raisons pour laquelle cette représentation est très utilisée en pratique provient du fait que des informations géométriques telles que la normale ou la courbure s'expriment simplement à l'aide de la fonction level set.

Considérons une surface représentée par la paramétrisation $(u^1,u^2) \mapsto X(u^1,u^2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ ainsi que par la ligne de niveau 0 d'une fonction ϕ. Nous avons alors l'égalité $\phi(X(u^1,u^2)) = 0$ que l'on peut dériver par rapport à u^1 et u^2 pour obtenir

$$X_{,1} \cdot \nabla\phi(X(u^1,u^2)) = 0 \qquad\qquad X_{,2} \cdot \nabla\phi(X(u^1,u^2)) = 0. \tag{1.32}$$

Les vecteurs $X_{,1}$ et $X_{,2}$ formant une base du plan tangent, le vecteur $\nabla\phi$ est donc dirigé suivant la normale. On définit donc la normale en formulation level set par

$$n(\phi) = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}. \tag{1.33}$$

Le raisonnement précédent reste valable si l'on choisit une ligne de niveau quelconque de ϕ. En conséquence, la définition précédente de la normale est valable pour toutes les lignes de niveau de ϕ. Avec cette définition, la normale est de norme un sur tout le domaine. Ce prolongement unitaire sera toujours utilisé pour la notation n dans le contexte des méthodes level set.

Les informations sur la variation de la normale donnent accès à la courbure de la surface (nous y reviendrons en détail dans la troisième partie). En particulier, la courbure moyenne de la surface est donnée par

$$H(\phi) = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right). \tag{1.34}$$

Nous avons obtenu dans ce premier chapitre les équations de la mécanique des fluides et des solides élastiques dans leur description naturelle ainsi que les différentes manières de représenter une interface. Nous avons désormais les outils pour étudier le couplage fluide-structure.

Chapitre 2

Couplage fluide-structure

2.1 Genéralités

Le couplage entre un fluide et une structure élastique est la base de beaucoup de phénomènes physiques. Nous pouvons citer par exemple les applications en aéronautique ou la structure de l'avion se déforme avec l'air ou en biomécanique où les cellules aux propriétés mécaniques élastiques interagissent avec le fluide environnant. Tous ces phénomènes sont couplés car le fluide influe sur le mouvement de la structure et réciproquement. Nous nous plaçons dans le cadre où une structure interagit avec un fluide dont une partie du bord est fixe. La seule surface libre considérée est donc celle délimitée par le fluide et la structure (FIG 2.1). De plus, la structure peut être de la même dimension que le fluide (un solide volumique) ou de dimension inférieure (une membrane). Nous considérons le cas volumique sauf dans la dernière section dédiée au couplage d'une membrane dans un fluide.

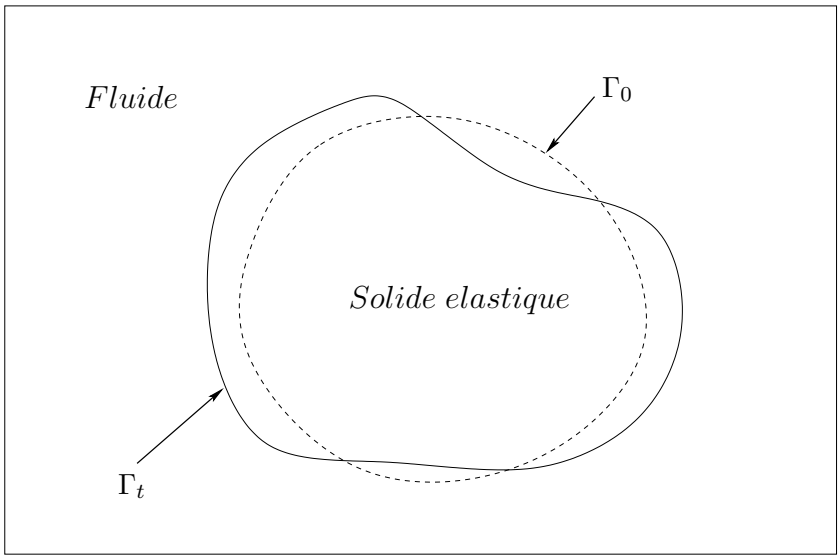

FIG. 2.1 – Solide élastique immergé dans un fluide

Le mouvement de la structure est décrit de manière naturelle en formulation lagrangienne par sa déformation Φ (par rapport à état de référence) qui est solution des équations de l'élasticité (1.22). Le fluide est quant à lui décrit de manière eulérienne par la donnée de sa vitesse u solution des équations de

Navier-Stokes (1.25). Ces deux modèles sont alors couplés à l'interface des deux milieux (noté Γ_t dans la configuration déformée et Γ_0 dans la configuration de référence) par des conditions de raccord.

Conditions de raccord à l'interface

Une condition naturelle est d'imposer une continuité de la vitesse à l'interface des deux modèles. La continuité de la vitesse à l'interface implique qu'il n'y a pas d'échange de matière entre le fluide et la structure (continuité dans la direction normale) ainsi qu'une absence de frottements entre le fluide et la structure (continuité dans la direction tangentielle). Dans le cas de solides élastiques volumiques (FIG 2.1), on impose que σn, qui représente les forces surfaciques, soit lui aussi continu à l'interface. Ces deux conditions ne sont pas simples à imposer à cause de la différence de formulation de ces deux milieux continus.

De plus, la formulation eulérienne étant classiquement utilisée pour décrire le fluide il est nécessaire de traiter le problème de surface libre. Pour ce faire, une méthode consiste à ramener les équations fluides (ou au moins le fluide qui se trouve dans un voisinage de l'interface) sur le domaine de référence. Cette méthode utilise des interpolations et il est difficile d'imposer simplement les lois de conservation. Une nouvelle méthode hybride a été introduite pour pallier à ces inconvénients.

2.2 Méthode ALE

La méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) a été introduite par Donea en 1982 [20]. D'autres références sur cette méthode peuvent être trouvés dans [23, 35]. Le problème considéré consiste à résoudre un problème de couplage entre un fluide et un solide élastique volumique. La méthode ALE est une méthode hybride combinant les descriptions lagrangienne et eulérienne permettant de déformer le maillage de manière adéquate et ainsi éviter les nombreuses interpolations intervenant dans d'autres méthodes. Nous supposons l'existence d'un code qui permet de calculer la déformation de la structure pour nous intéresser uniquement au calcul du fluide.

2.2.1 Introduction de la vitesse de maillage

L'idée principale de la méthode consiste à introduire une vitesse w associée à la déformation du maillage pour traiter la surface libre du fluide. Introduisons ici des caractéristiques $\Psi(a, s; t)$ plus générales que dans le chapitre précédent associées au champ de vitesse w de la manière suivante

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(a, s; t) = w(\Psi(a, s; t), t). \tag{2.1}$$

$\Psi(a, s; t)$ représente la position d'un point du maillage se déplaçant dans le champ de vitesses w à l'instant t qui se trouvait à la position a à l'instant s. Nous avons maintenant à calculer les termes intervenant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement sachant que le maillage se déforme. Les termes comportant des dérivées spatiales intervenant dans les équations ne posent pas de problème car le maillage est fixé à chaque pas de temps. La difficulté réside dans le calcul de l'accélération qui fait intervenir une dérivée temporelle de la vitesse.

2.2.2 Calcul de l'accélération en formulation ALE

La dérivée temporelle de la vitesse eulérienne u doit être calculée en un point fixé du maillage ce qui demande des interpolations car il se déforme à chaque instant. Par contre la dérivée temporelle du champ

de vitesse définie par

$$v(a, s, t) = u(\Psi(a, s; t), t), \tag{2.2}$$

permet de prendre en compte la déformation du maillage et se calcule donc simplement. Notons x_n un point du maillage à l'instant t_n qui est déplacé par la vitesse w en un point x_{n+1} à l'instant t_{n+1} (FIG 2.2)

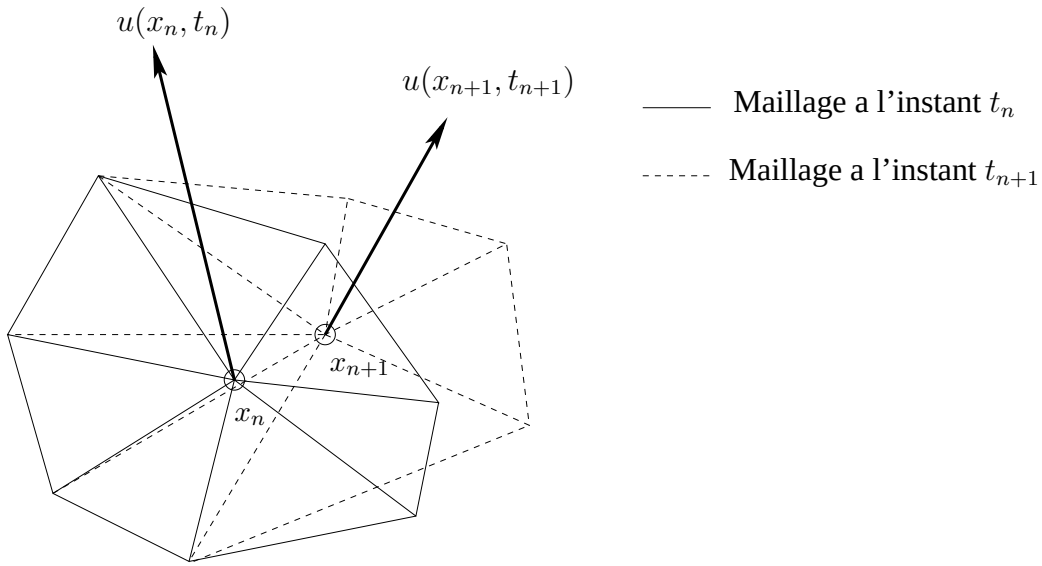

FIG. 2.2 – Déformation d'un maillage entre deux pas de temps

Le calcul de la dérivée temporelle de v au point x_n à l'instant t_n se calcule à l'aide de la vitesse u (c'est sur elle que nous avons une information) définie aux points de maillage de la manière suivante

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_n, t_n, t_n) \approx \frac{v(x_n, t_n, t_{n+1}) - v(x_n, t_n, t_n)}{\Delta t} \approx \frac{u(x_{n+1}, t_{n+1}) - u(x_n, t_n)}{\Delta t},$$

où nous avons utilisé les relations $\Psi(x_n, t_n; t_{n+1}) = x_{n+1}$ et $\Psi(x_n, t_n; t_n) = x_n$.

Nous pouvons à présent calculer la dérivée temporelle de (2.2) à l'aide de (2.1) (même raisonnement que pour les dérivées particulaires)

$$v_t = u_t + (w \cdot \nabla)u.$$

En remplaçant cette expression dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement du fluide nous obtenons

$$\rho(v_t + ((u - w) \cdot \nabla)u) - \mu\Delta u + \nabla p = f.$$

Cette méthode est efficace car il n'est pas fait usage d'interpolation. Le point délicat de la méthode réside dans le choix à chaque pas de temps de la vitesse w du maillage. Pour donner les grandes lignes disons

simplement que loin de la structure élastique w est choisit nul (le maillage ne bouge pas) et lorsque l'on est près de l'interface on choisit pour w un relèvement de la vitesse du solide élastique sur l'interface.

Les inconvénients de la méthode ALE sont les coûts de remaillage à chaque pas de temps et l'implémentation en 3D qui peut s'avérer délicate pour de grandes déformations. Au lieu de traiter séparément le fluide et la structure une méthode proposée par Peskin permet de considérer le milieu fluide-structure comme un milieu continu unique.

2.3 Méthode de Peskin

La méthode de frontière immergée a été introduite par Peskin en 1977 pour simuler la circulation du sang dans le coeur. L'idée générale est d'écrire les équations de l'élasticité dans une version eulérienne afin qu'elles ressemblent le plus possible aux équations des fluides. Une fois la transformation effectuée le couplage fluide-structure est écrit dans une forme plus simple à résoudre. On pourra se référer à l'article fondateur [40].

2.3.1 Formulation lagrangienne de l'élasticité

Considérons un matériau hyperélastique volumique incompressible décrit par sa déformation $\Phi(\cdot, t)$. L'énergie associée est donnée par

$$\mathcal{E}(\Phi) = \int_{\Omega_0} W([\nabla\Phi](a,t))\, da.$$

Comme nous l'avons vu dans la partie sur l'élasticité, le principe des travaux virtuels permet d'obtenir une force F qui dépend de W (1.29) et les équations du mouvement sont données par (1.22) sous forme intégrale

$$\int_{\Omega_0} \left(\rho(a,t) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(a,t) - F(\Phi(a,t)) \right) \cdot \wp\Phi(a,t)\, da = 0, \tag{2.3}$$

pour toute variation $\wp\Phi$ incompressible de la déformation. Cette condition n'étant pas très simple à imposer en formulation lagrangienne (1.13), nous allons donc transformer l'égalité précédente sur le domaine eulérien.

2.3.2 Passage lagrangien eulérien avec les masses de Dirac

Pour ce faire nous introduisons les vitesses eulériennes u associée à la déformation Φ du milieu élastique et v associée à la perturbation $\wp\Phi$

$$u(\Phi(a,t),t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(a,t), \qquad\qquad v(\Phi(a,t),t) = \wp\Phi(a,t).$$

La condition d'incompressibilité pour ces champs de vitesse se traduit par $\mathrm{div}(u) = \mathrm{div}(v) = 0$. Les variables eulériennes sont maintenant introduites via des masses de Dirac notées δ qui permettent de localiser l'information uniquement sur la structure élastique.

$$\wp\Phi(a,t) = v(\Phi(a,t),t) = \int_{\mathbb{R}^3} v(x,t)\delta(x-\Phi(a,t))dx.$$

Il va de soi que l'égalité précédente est pour le moment une notation car une masse de Dirac n'est pas une fonction. Cette formule prendra tout son sens lors de calculs numériques, la masse de Dirac étant approchée par une suite de fonctions. Le passage de la formulation lagrangienne à l'eulérienne pour le terme d'accélération a été démontré dans la section sur les milieux continus (1.2) et (1.6) et s'exprime sous la forme

$$\frac{Du}{Dt}(\Phi(a,t),t) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(a,t).$$

Nous pouvons à présent réécrire (2.3) sous la forme

$$\int_{\Omega_0}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\rho(a,t)\frac{Du}{Dt}(x,t) - F(\Phi(a,t))\right)\cdot v(x,t)\delta(x-\Phi(a,t))\ dx\ da = 0. \tag{2.4}$$

Cette dernière formule couple les variables lagrangiennes a et eulériennes x. Nous introduisons à présent les définitions eulériennes suivantes de la force et de la densité

$$\rho(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3}\rho(a,t)\delta(x-\Phi(a,t))\ da, \qquad f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3}F(\Phi(a,t))\delta(x-\Phi(a,t))\ da.$$

L'équation (2.4) se réécrit sous la forme eulérienne

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(\rho(x,t)\frac{Du}{Dt}(x,t) - f(x,t)\right)\cdot v(x,t)\ dx = 0.$$

2.3.3 Equations du milieu continu fluide-structure

L'égalité précédente doit être valable pour tous les champs v à divergence nulle. La décomposition de Helmhotz permet de faire apparaître un gradient de pression. Les équations que l'on obtient ressemblent fortement aux équations de Navier Stokes mis à part le terme visqueux. Nous ajoutons ce terme dans les équations ce qui rajoute de la viscosité dans le solide. Nous pouvons à présent formuler les équations régissant le mouvement d'un milieu fluide-structure

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(u_t + (u\cdot\nabla)u) - \mu\Delta u + \nabla p & = & f, \\ \operatorname{div}(u) & = & 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} & = & u(\Phi,t). \end{array}\right. \tag{2.5}$$

On peut montrer que la conservation de la masse peut se déduire des équations précédentes. La force f ayant comme support la structure élastique via les masses de Dirac nous retrouvons donc les équations des fluides en dehors de la structure. Dans les régions où est localisée la structure élastique des forces sont ajoutées par un terme en second membre des équations. Cette méthode permet donc de décrire le modèle fluide-structure comme un unique milieu continu décrit par une vitesse eulérienne continue u. De plus, on peut montrer que le tenseur des contraintes est continu à l'interface des deux milieux.

Le second membre f et la densité ρ sont calculés de manière lagrangienne via des marqueurs qui sont placés sur la structure et qui évoluent avec la vitesse du milieu continu donné par la troisième équation de (2.5). Ce modèle demeure donc en partie lagrangien et des interpolations sont nécessaires pour calculer les forces élastiques sur le maillage eulérien du fluide. Il a été constaté que ces interpolations peuvent causer des instabilités et des pertes de volume. De plus, il est nécessaire d'ajouter ou d'enlever des marqueurs lors de grandes déformations et les changements de topologie sont complexes à gérer.

Cas de membranes élastiques

La formulation précédente est générale et s'adapte aussi bien à des solides volumiques qu'à des membranes élastiques. Dans le cas de membranes élastiques, le second membre devient singulier et il est porté par une masse de Dirac sur l'interface. La vitesse est alors toujours continue à l'interface mais le tenseur des contraintes ne l'est plus. On peut montrer qu'un saut de contraintes proportionnel à la force élastique apparaît. Une dérivation de ces sauts de contraintes peut être trouvé dans [52].

Nous introduisons maintenant une méthode complètement eulérienne du couplage fluide-structure dans le cas de membranes élastiques. Le modèle développé sera le point de départ d'une partie des résultats de la thèse des parties suivantes. Pour cette raison, cette partie sera détaillée.

2.4 Méthode Eulérienne de couplage-fluide structure

Une nouvelle méthode a été proposée récemment par Maitre et Cottet dans [14, 15] pour pallier les inconvénients liés au traitement lagrangien de l'élasticité dans la méthode de Peskin. L'idée est de capturer l'interface par une fonction level set qui contient des informations sur l'étirement de la membrane. Toute l'étude qui suit est faite dans $\mathbb{R}^3$ mais les résultats énoncés sont les mêmes dans $\mathbb{R}^2$.

2.4.1 Représentation implicite de la surface

Considérons une surface définie dans un domaine volumique Q. L'interface est notée Γ_0 à l'instant initial et Γ_t au temps t. On note $\phi(\cdot, 0) = \phi_0(\cdot)$ la fonction level set initiale. L'idée générale de la méthode est de considérer une fonction level set ϕ dont la ligne de niveau 0 représente l'interface au temps t.

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ \phi(x,t) = 0\}.$$

On considère que la surface est plongée dans milieu continu décrit par une vitesse eulérienne u ou de manière équivalente par la trajectoire $a \mapsto \Phi(a,t)$ de chaque particule par rapport à une configuration de référence. L'interface faisant partie intégrante du milieu continu, elle est elle aussi déformée par la fonction Φ. Toute particule a se trouvant sur Γ_0 à l'instant initial se retrouve en $\Phi(a,t)$ sur Γ_t (FIG 2.3).

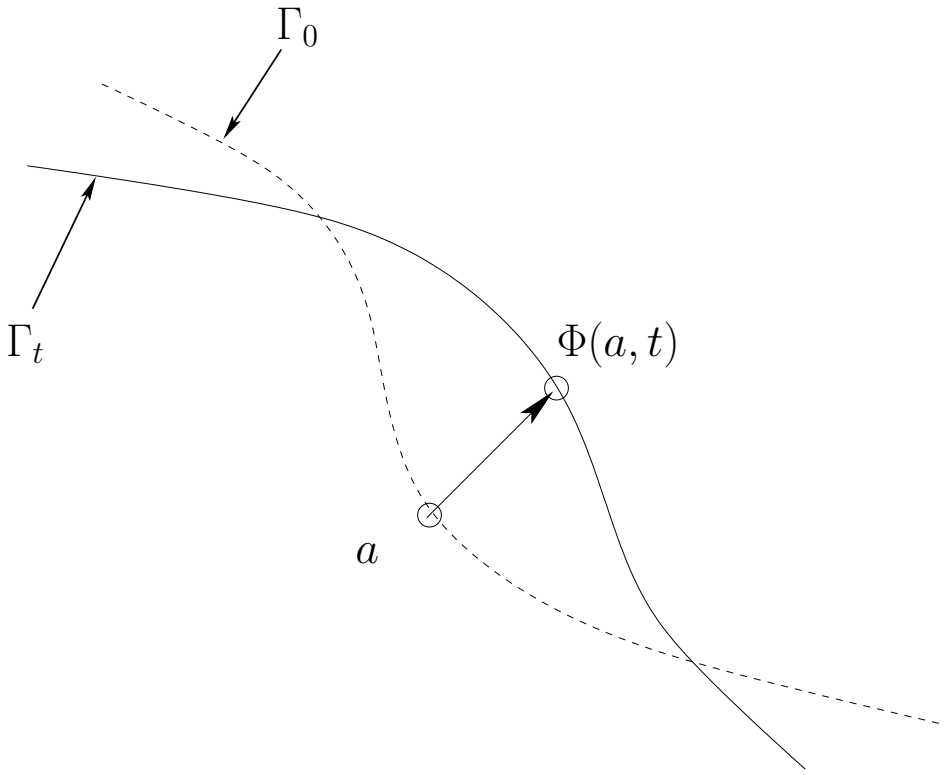

FIG. 2.3 – Déplacement des points de l'interface avec la fonction Φ

Equation de transport de la fonction level set

On obtient donc l'identité $\phi(\Phi(a,t),t) = 0$ pour tous les points a de Γ_0. En dérivant cette expression par rapport à t puis en utilisant (1.3) nous obtenons

$$\phi_t(\Phi(a,t),t) + u(\Phi(a,t),t) \cdot \nabla\phi(\Phi(a,t),t) = 0.$$

La fonction ϕ est décrite de manière eulérienne c'est à dire quelle est définie sur l'espace entier. Nous prolongeons donc l'égalité précédente sur l'espace entier.

$$\phi_t + u \cdot \nabla\phi = 0 \text{ sur } Q. \tag{2.6}$$

Cette équation de transport exprime que les lignes de niveau de ϕ sont transportées par u (FIG 2.4). Cette équation est de plus l'équivalent eulérien de la troisième équation de (2.5) du modèle de Peskin.

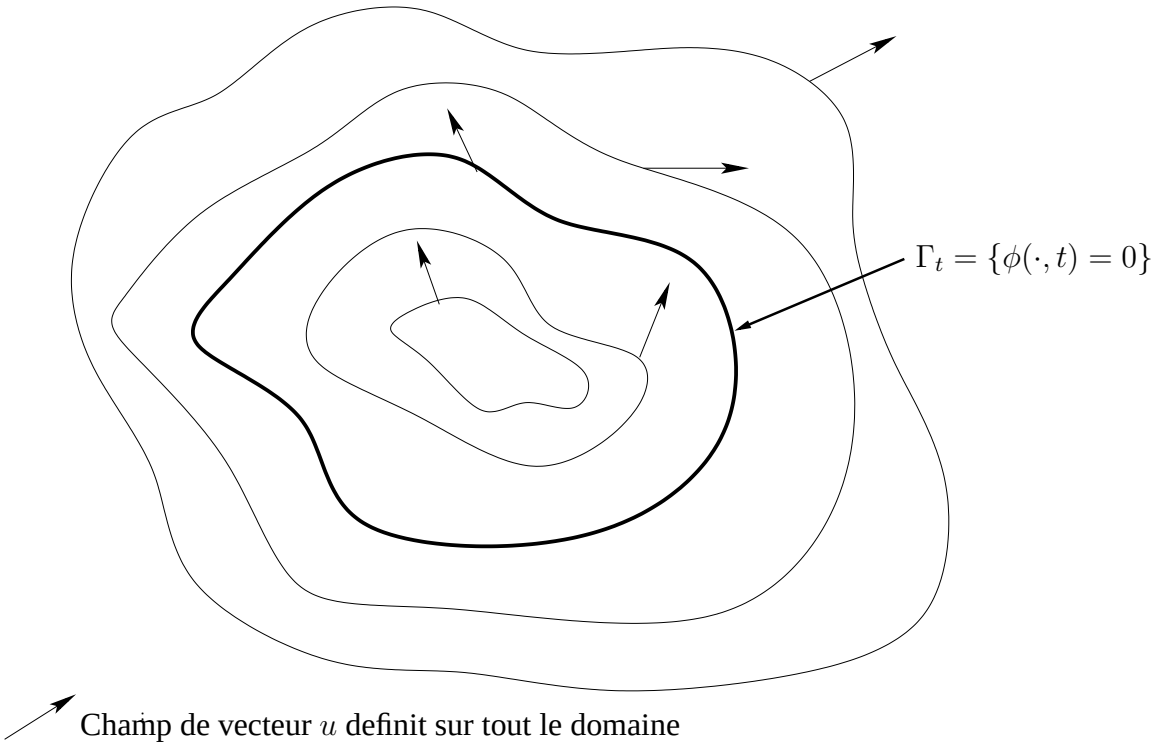

FIG. 2.4 – Transport des lignes de niveau de ϕ par le champ de vitesse u

Dans la méthode de Peskin, des marqueurs lagrangiens permettent de suivre le mouvement des particules et leur disposition permet de calculer les forces élastiques qui dépendent du gradient de la déformation. Regardons à présent comment la variation locale d'aire peut être calculée dans le cas d'une représentation par une méthode level set.

2.4.2 Information sur la variation de surface contenue dans la level set

Considérons une surface représentée par la ligne de niveau 0 d'une fonction level set ϕ qui est transportée dans un champ de vitesse u. Nous avons montré à la fin du chapitre précédent que la normale (1.33) et la courbure moyenne (1.34) peuvent être calculés à l'aide de la fonction ϕ. Une paramétrisation permet d'avoir accès, grâce à la métrique, au calcul de l'aire locale d'une surface (voir (7.13) de l'annexe du chapitre 7). Dans le cas d'une représentation implicite il n'est pas possible de faire un calcul analytique mais nous pouvons approcher l'aire globale d'une surface. Pour cela nous commençons par enoncer la formule de la coaire

$$\int_{\{|\phi(x)|<\varepsilon\}} f(x)\, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\{\phi(x)=r\}} f(x) |\nabla\phi(x)|^{-1}\, d\sigma dr. \tag{2.7}$$

Cette formule est assez naturelle car le volume (respectivement l'aire) $\{|\phi| < \varepsilon\}$ est calculé en intégrant l'aire (respectivement le perimètre) de $\{\phi = \nu\}$ avec un facteur $|\nabla\phi|^{-1}$ qui correspond à l'espacement local entre les lignes de niveau de ϕ (FIG 2.5).

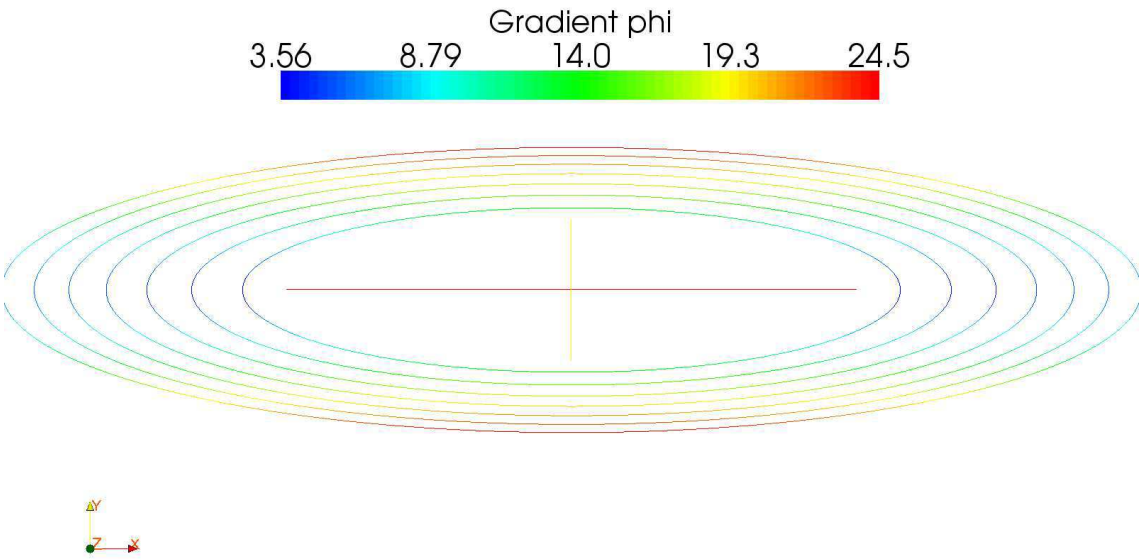

FIG. 2.5 – Lignes de niveau de $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{0.4}\right)^2 + \left(\frac{y}{0.1}\right)^2 - 1$

Nous renvoyons à [22] p 118 pour une preuve rigoureuse de ce résultat. Considérons maintenant une fonction cut-off ζ continue, à support compact dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \zeta = 1$. Sous ces hypothèses nous avons pour toute fonction continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) g(r)\ dr \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} g(0) \tag{2.8}$$

Cette propriété exprime une convergence faible vers la masse de Dirac en 0. En appliquant la formule d'approximation (2.8) à la fonction continue $g(r) = \int_{\{\phi(x)=r\}} f(x)\ d\sigma$ et en utilisant la formule de la coaire (2.7) nous obtenons

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{\{\phi(x)=r\}} \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi(x)}{\varepsilon}\right) f(x)\ |\nabla\phi||\nabla\phi|^{-1} d\sigma\ dr = \int_{\{|\phi|<\varepsilon\}} f(x)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) |\nabla\phi|\ dx \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_{\{\phi=0\}} f(x)\ d\sigma, \tag{2.9}$$

En notant Q un ouvert contenant la ligne de niveau 0 de ϕ nous obtenons

$$\int_Q f(x)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_{\{\phi=0\}} f(x)\ d\sigma, \tag{2.10}$$

Une question naturelle est de savoir si lors de la déformation d'une surface il est possible d'exprimer la variation d'aire en fonction de ϕ. La formule (2.10) montre qu'un bon candidat est $|\nabla\phi|$. Malheureusement, dans le cadre d'une déformation quelconque de la surface, $|\nabla\phi|$ seul ne permet pas de mesurer la variation d'aire comme le montre l'exemple suivant en dimension deux.

Contre exemple

Considérons la fonction $\phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 1$ et le champ de vitesse $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$ indépendant du temps et de norme 1 (nous mettons la valeur $(0,0)$ de ce champ à l'origine). Comme ϕ est solution de l'équation de transport (2.6), les lignes de niveau de $\phi(\cdot,t)$ restent des cercles dont l'espacement reste le même (FIG 2.6). En conséquence le périmètre a varié pendant la déformation mais le gradient de ϕ est toujours égal à 1. Le champ que nous avons considéré n'est pas à divergence nulle et c'est la raison pour laquelle $|\nabla\phi|$ ne contient pas d'information sur la variation de périmètre.

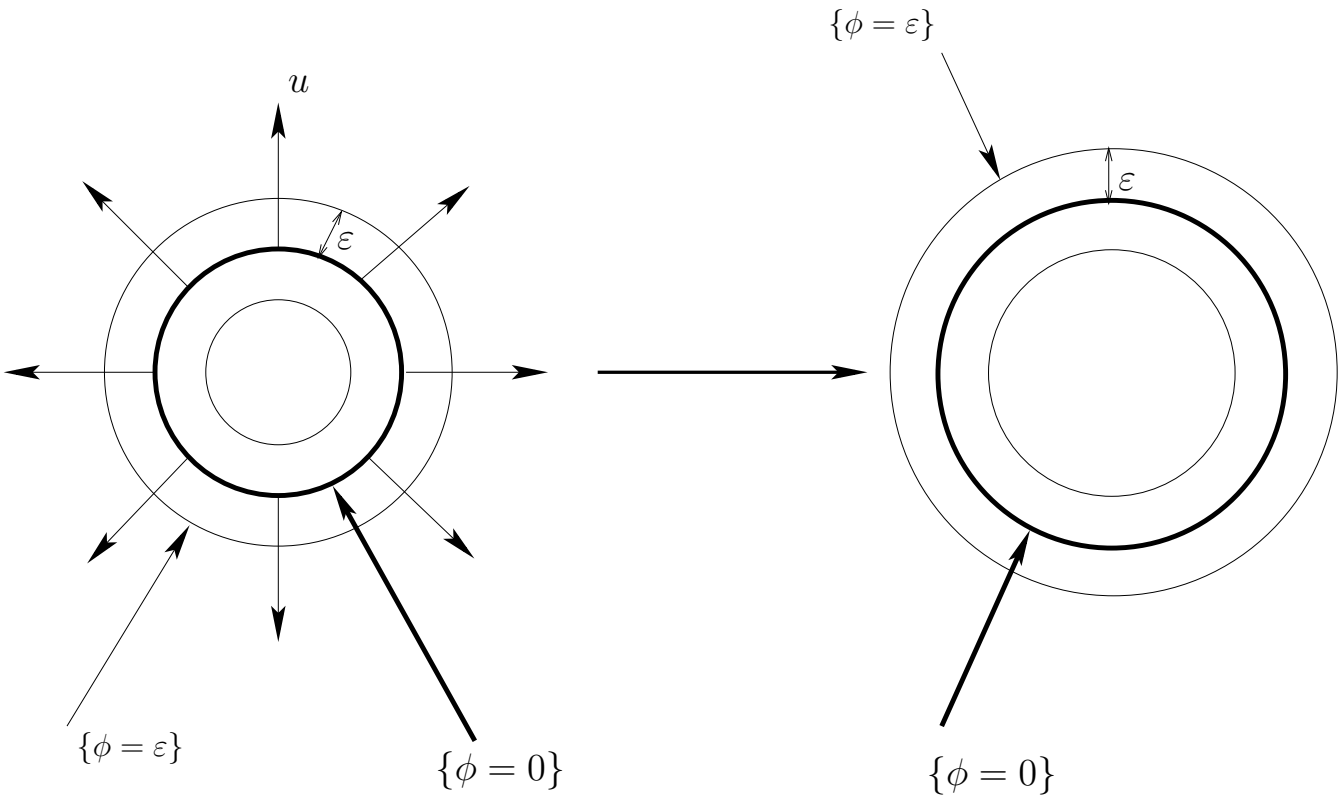

FIG. 2.6 – Transport des lignes de niveau de $\phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 1$ par le champ de vitesse $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$

Donnons à présent une idée intuitive de la raison pour laquelle $|\nabla\phi|$ contient des informations sur la variation d'aire lorsque la surface se déforme dans un champ incompressible. Sur la figure (FIG 2.7) nous appliquons un champ de vitesse incompressible pour étirer la courbe dans la direction tangentielle. La contrainte d'incompressibilité implique que champ de vitesse va rapprocher les lignes de niveau dans un voisinage de l'interface. La norme du gradient de ϕ qui mesure l'espacement des lignes de niveau va donc augmenter.

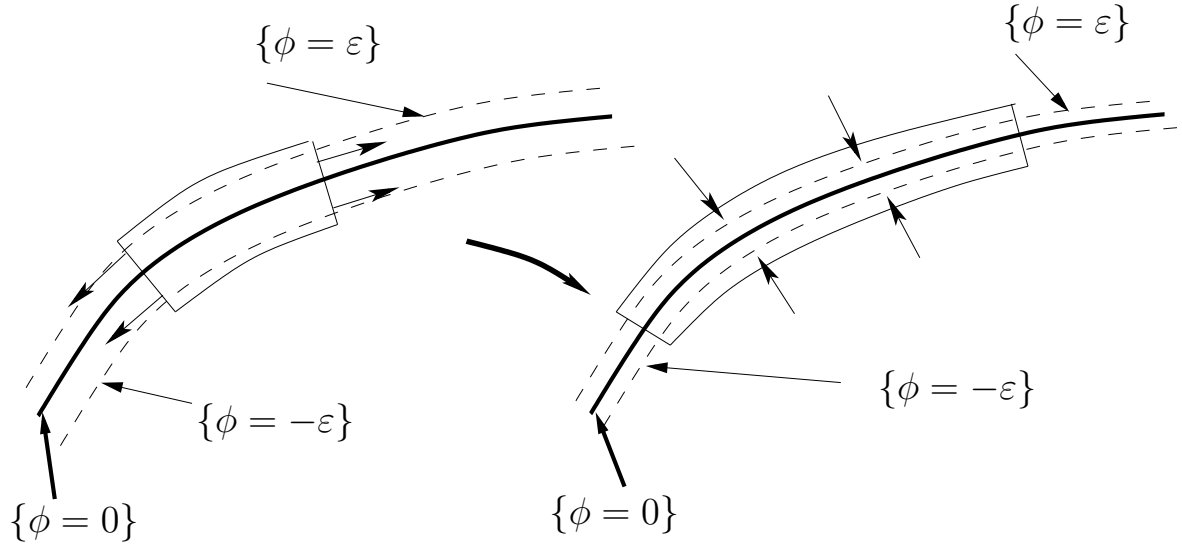

FIG. 2.7 – Le champ incompressible u rapproche les lignes de niveau

Nous allons maintenant justifier rigoureusement cette approche intuitive. Pour obtenir le résultat nous aurons besoin de la généralisation de la formule de Reynolds pour des surfaces.

Formule de Reynolds pour des surfaces

Considérons une surface fermée $\partial\Omega_t$ qui est la frontière d'un ouvert Ω_t immergé dans un milieu continu décrit par la vitesse eulérienne u ainsi qu'une fonction f décrite de manière eulérienne. Ayant choisit un prolongement de la normale unitaire, on obtient la formule de Reynolds surfacique

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t} f(x,t)\ d\sigma\right) = \int_{\partial\Omega_t} f_t + \operatorname{div}(fu) - f([\nabla u]\ n)\cdot n\ d\sigma. \tag{2.11}$$

Cette formule un peu plus complexe que dans le cas volumique se démontre de la même façon en se ramenant par changement de variable sur un domaine fixe puis en dérivant par rapport à t l'expression obtenue. Une démonstration de ce résultat est obtenue dans l'annexe du chapitre 7 (7.60).

Remarque
Il sera beaucoup développé dans la suite les notions d'opérateurs surfaciques. Ils permettent de calculer des dérivées de fonctions ou de champs de vecteurs définis sur une surface noté $\partial\Omega$ en enlevant les variations dans la direction normale. En particulier la divergence surfacique d'un champ de vecteurs est donnée par

$$\operatorname{div}_{\partial\Omega}(u) = \operatorname{div}(u) - ([\nabla u]\ n)\cdot n.$$

La formule précédente se réécrit

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t} f(x,t)d\sigma\right) = \int_{\partial\Omega_t} f_t + u\cdot\nabla f + f\operatorname{div}_{\partial\Omega}(u)\ d\sigma. \tag{2.12}$$

Cette formule donne une généralisation naturelle de la formule de Reynolds volumique (1.7). En choisissant $f = 1$ dans cette formule nous obtenons que l'incompressibilité locale de surface $\partial\Omega$ se traduit par l'identité écrite en variables eulériennes

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(u) = 0. \tag{2.13}$$

Formule de Reynolds dans le cadre level set

Nous allons maintenant adapter la formule (2.11) dans le cas ou la surface est décrite par une fonction level set. Pour cela nous remarquons que le dernier terme de la formule (2.11) peut s'exprimer à l'aide de ϕ et u. En effet, calculons la dérivée temporelle de $|\nabla\phi|$ sachant que ϕ vérifie l'équation de transport (2.6)

$$(|\nabla\phi|)_t = \frac{\nabla\phi\cdot\nabla\phi_t}{|\nabla\phi|} = \frac{\nabla\phi\cdot\nabla(-u\cdot\nabla\phi)}{|\nabla\phi|} = -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\cdot([\nabla u]^T\ \nabla\phi + [D^2\phi]\ u).$$

En utilisant la relation $\nabla|\nabla\phi| = \frac{[D^2\phi]\ \nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ et la définition de la normale (1.33) nous obtenons

$$([\nabla u]\ n)\cdot n = [\nabla u] : (n\otimes n) = -\frac{1}{|\nabla\phi|}((|\nabla\phi|)_t + u\cdot\nabla|\nabla\phi|). \tag{2.14}$$

En regroupant les termes apparaissant dans la formule de Reynolds surfacique

$$\begin{aligned} f_t + \mathrm{div}(fu) - f([\nabla u]\ n)\cdot n &= f_t + u\cdot\nabla f + f\,\mathrm{div}(u) + \frac{f}{|\nabla\phi|}((|\nabla\phi|)_t + u\cdot\nabla|\nabla\phi|) \\ &= \frac{1}{|\nabla\phi|}((f|\nabla\phi|)_t + u\cdot\nabla(f|\nabla\phi|)) + f\,\mathrm{div}(u). \end{aligned}$$

La formule de Reynolds se réécrit donc

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\{\phi(\cdot,t)=0\}} f(x,t)\ d\sigma\right) = \int_{\{\phi(\cdot,t)=0\}} \frac{1}{|\nabla\phi|}(\ (f|\nabla\phi|)_t + u\cdot\nabla(f|\nabla\phi|)\ ) + f\,\mathrm{div}(u)\ d\sigma. \tag{2.15}$$

Nous allons maintenant choisir une fonction f adaptée qui va permettre d'annuler le second membre dans le cas d'un écoulement incompressible.

Résultat sur la variation d'aire

Introduisons les caractéristiques générales $\Phi(x,t;\tau)$ associées à la vitesse u du milieu continu

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(x,t;\tau) = u(\Phi(x,t;\tau),\tau). \tag{2.16}$$

Nous avons la relation $\Phi(\Phi(x,\tau;t),t;\tau) = x$ par définition des caractéristiques. La dérivation de cette égalité par rapport à t donne

$$\Phi_t + (u\cdot\nabla)\Phi = 0.$$

L'égalité précédente est valable au point $(\Phi(x,\tau;t),t;\tau)$ que nous notons $(x,t;\tau)$. Choisissons à présent $f(x,t) = g(\Phi(x,t;0))|\nabla\phi|^{-1}(x,t)$. Nous obtenons avec la propriété précédente

$$\begin{aligned}(f|\nabla\phi|)_t + u\cdot\nabla(f|\nabla\phi|) &= (g(\Phi(x,t;0)))_t + u\cdot\nabla_x(g(\Phi(x,t;0)))\\ &= \Phi_t\cdot\nabla g + u\cdot([\nabla\Phi]^T\ \nabla g)\\ &= (\Phi_t + (u\cdot\nabla)\Phi)\cdot\nabla g = 0.\end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que le champ de vitesses u est à divergence nulle nous obtenons finalement avec (2.15)

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\{\phi(\cdot,t)=0\}} g(\Phi(x,t;0))|\nabla\phi|^{-1}(x,t)d\sigma\right) = 0.$$

et donc

$$\int_{\{\phi_0=0\}} g(a)|\nabla\phi_0|^{-1}(a)\ d\sigma_0 = \int_{\{\phi(\cdot,t)=0\}} g(\Phi(x,t;0))|\nabla\phi|^{-1}(x,t)\ d\sigma.$$

Pour obtenir le résultat nous allons maintenant revenir à une paramétrisation pour faire ressortir les éléments d'aire. Nous choisissons les notations de l'annexe du chapitre 7. Considérons une paramétrisation $X(t) : (u^1,u^2) \mapsto X(u^1,u^2,t)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ qui représente la surface $\{x\in\mathbb{R}^3\ /\ \phi(x,t)=0\} = X(t)(U)$. L'égalité précédente se réécrit donc à l'aide de la paramétrisation

$$\begin{aligned}&\int_U g(X(u^1,u^2,0))|\nabla\phi_0|^{-1}(X(u^1,u^2,0))\ |(X(0))_{,1}\wedge(X(0))_{,2}|\ du^1du^2\\ =\ &\int_U g(\Phi(X(u^1,u^2,t),t;0))|\nabla\phi|^{-1}(X(u^1,u^2,t),t)\ |(X(t))_{,1}\wedge(X(t))_{,2}|\ du^1du^2.\end{aligned}$$

où on a noté $(X(t))_{,1}$ et $(X(t))_{,2}$ les dérivées de la paramétrisation par rapport à u^1 et u^2.

Par définition des caractéristiques $\Phi(X(u^1,u^2,t),t;0) = X(u^1,u^2,0)$. L'égalité précédente étant valable pour toute fonction g nous obtenons donc

$$\frac{|(X(t))_{,1}\wedge(X(t))_{,2}|}{|(X(0))_{,1}\wedge(X(0))_{,2}|} = \frac{|\nabla\phi|}{|\nabla\phi_0|}. \tag{2.17}$$

La variation locale d'aire est donc capturée par la quantité $|\nabla\phi|/|\nabla\phi_0|$. En dimension deux $|\nabla\phi|$ mesure la variation de longueur de la courbe et peut être identifiée à l'étirement. Cependant, en dimension trois, il existe des déformations qui peuvent être effectuées à aire constante comme un cisaillement (FIG 2.8). Ces effets ne peuvent donc pas être pris en compte dans ce modèle. Ces effets sont importants dans le cas de globules rouges mais notre étude se limitera à un modèle simple de cellule appelée vésicule phospholipidiques où la membrane est considérée comme fluide. Le modèle de membrane est parfaitement adapté à ce type de vésicule car aucune contrainte n'est créée lors d'un cisaillement.

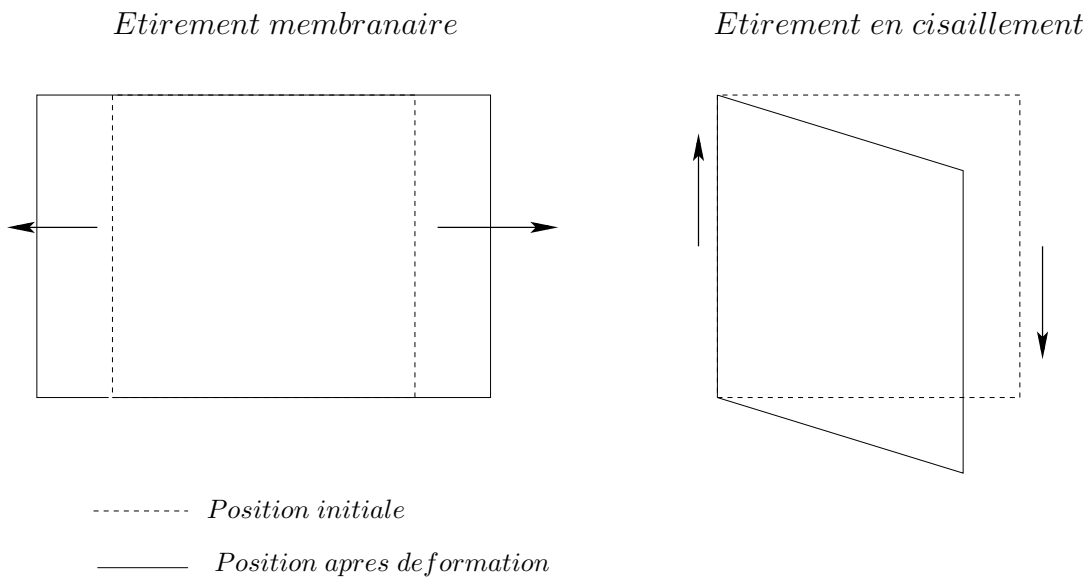

FIG. 2.8 – Etirement membranaire et cisaillement

2.4.3 Energie élastique et force élastique

Une partie de l'élasticité de membrane étant définie à partir de la variation locale d'aire il semble naturel de considérer une énergie élastique dépendant de $|\nabla\phi|$. L'énergie n'est alors pas géométrique car elle dépend du choix de la fonction ϕ par l'intermédiaire de $|\nabla\phi|$. Pour cette raison, l'énergie considérée est localisée dans un voisinage de l'interface à l'aide d'une fonction cut-off ζ et d'un paramètre ε et s'écrit dans la configuration déformée

$$\mathcal{E}_e(\phi) = \int_Q E(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx. \tag{2.18}$$

Q est un domaine volumique de $\mathbb{R}^3$ contenant la membrane élastique. En pratique on choisit la fonction ϕ_0 initiale de telle sorte que $|\nabla\phi_0|$ corresponde à l'étirement initial. On postule ensuite une loi de comportement E qui dépend de $|\nabla\phi|$ ainsi que de $|\nabla\phi_0|$. Cette énergie va maintenant nous permettre d'en déduire une force associée via le principe des travaux virtuels comme dans la méthode de Peskin. La variation de l'énergie (2.18) peut être calculée en considérant une variation $\wp$ de ϕ mais comme ϕ est transportée par le champ de vitesse u d'après l'équation de transport (2.6) nous choisissons de dériver par rapport au temps

$$(\mathcal{E}_e(\phi))_t = \int_Q E'(|\nabla\phi|)(|\nabla\phi|)_t\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx + \int_Q E(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\phi_t\, dx.$$

En utilisant la relation (2.14) et l'équation de transport (2.6)

$$(\mathcal{E}_e(\phi))_t = \int_Q E'(|\nabla\phi|)(-u\cdot\nabla|\nabla\phi| - |\nabla\phi|\,[\nabla u] : (n\otimes n))\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx + \int_Q E(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)(-u\cdot\nabla\phi)\, dx.$$

En intégrant par parties le deuxième terme

$$(\mathcal{E}_e(\phi))_t = -\int_Q u\cdot\nabla(E(|\nabla\phi|))\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) - \mathrm{div}\left(E'(|\nabla\phi|)\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\cdot u + E(|\nabla\phi|)\ u\cdot\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\ dx.$$

On obtient finalement en utilisant le principe des travaux virtuels

$$(\mathcal{E}_e(\phi))_t = -\int_Q F_e(\phi)\cdot u\ dx, \tag{2.19}$$

et en regroupant le premier et le dernier terme, la force élastique

$$\boxed{F_e(\phi) = \nabla\left(E(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) - \mathrm{div}\left(E'(|\nabla\phi|)\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right).} \tag{2.20}$$

Cette force sous cette forme sera utile pour le théorème d'existence que nous montrerons dans la deuxième partie car la partie en gradient pourra être mise dans la pression et le second terme est sous forme divergence ce qui nous permettra d'effectuer facilement des intégrations par parties. Cette expression sous forme divergence permet également d'en déduire le tenseur des contraintes associé à la force élastique et faire le lien avec les fluides de Korteweg.

Lien avec les fluides de Korteweg

Le tenseur des contraintes associée à cette force élastique peut se mettre sous la forme (en omettant le gradient)

$$\sigma_e = -E'(|\nabla\phi|)\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

Choisissons momentanément $\varepsilon = 1$ et introduisons une fonction Z dont la dérivée est $\sqrt{\zeta}$. En posant $\psi = Z(\phi)$ nous obtenons

$$\nabla\psi\otimes\nabla\psi = \nabla\phi\otimes\nabla\phi\ \zeta(\phi).$$

De plus, la fonction ψ vérifie la même équation de transport que ϕ. En choisissant $E'(r) = r$ nous obtenons donc les mêmes équations définies dans le modèle de Korteweg (1.27) où ψ joue le rôle de la densité. Le modèle de membrane peut donc s'interpréter comme un modèle de Korteweg généralisé.

Autre expression de la force élastique

Il est intéressant de mettre la force élastique (2.20) sous une autre forme pour en donner une interprétation physique. Rappelons un instant la définition du gradient surfacique d'une fonction f associé à une surface $\partial\Omega$

$$\nabla_{\partial\Omega} f = \nabla f - (\nabla f\cdot n)\ n.$$

Le gradient surfacique correspond donc à la projection du gradient de f dans le plan tangent (ces opérateurs seront développés en details dans la troisième partie). Dans le cas qui nous intéresse, $\partial\Omega = \{\phi = 0\}$ et la normale est donnée par (1.33). Développons à présent le terme en divergence de la force élastique que nous notons A

$$\begin{aligned}
A &= \operatorname{div}\left(E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) n\otimes n\right)\\
&= E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ \operatorname{div}(n\otimes n) + (n\otimes n)\left(\nabla\left(E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\right)\\
&= E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ (Hn + [\nabla n]\ n) - \nabla_{\partial\Omega}\left(E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\\
&\quad +\nabla\left(E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation $\operatorname{div}(n\otimes n) = Hn + [\nabla n]\ n$ (obtenue avec 1.34) et introduit artificiellement un gradient surfacique. Développons ce gradient surfacique

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial\Omega}\left(E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) &= \nabla_{\partial\Omega}(E'(|\nabla\phi|))|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) + E'(|\nabla\phi|)\ \nabla_{\partial\Omega}(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\\
&\quad +E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\nabla_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right).
\end{aligned}$$

D'après la définition de la normale en level set nous avons $\nabla_{\partial\Omega}\phi = 0$, ainsi le dernier terme est nul. De plus, il sera montré plus loin que $[\nabla n]\ n = \frac{\nabla_{\partial\Omega}|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|}$ (voir (5.13)) et donc deux termes se simplifient. Il reste

$$A = (\ E'(|\nabla\phi|)Hn - \nabla_{\partial\Omega}(E'(|\nabla\phi|))\ )|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) + \nabla\left(E'(|\nabla\phi|)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right).$$

Les termes en gradient ne contribuent pas à l'énergie car le champ de vitesse considéré est à divergence nulle et nul aux bords. En effet, si q est un champ scalaire quelconque

$$\int_Q \nabla q\cdot u\ dx = -\int_Q q\operatorname{div}(u)\ dx = 0.$$

Nous obtenons finalement, après avoir enlevé les termes en gradient

$$\boxed{F_e(\phi) = (\ \nabla_{\partial\Omega}(E'(|\nabla\phi|)) - E'(|\nabla\phi|)Hn\ )|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).} \tag{2.21}$$

Cette force est localisée à l'interface grâce à la fonction cut off ζ. Sous cette forme la force est décomposée en une partie dans le plan tangent et une autre dans la direction normale. Intéressons nous à présent à quelques cas particuliers.

Quelques cas particuliers

Dans le cas particulier $E(r) = \alpha\ r$ on obtient avec (2.10)

$$\mathcal{E}_e(\phi) = \int_Q \alpha|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \alpha\int_{\{\phi=0\}} d\sigma.$$

et

$$F_e(\phi) = -\alpha H n |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right).$$

α correspond dans ce cas à une tension de surface et on retrouve la force usuelle proportionnelle à la courbure moyenne et dirigée suivant la normale. Dans le cas où le coefficient α n'est pas constant il y a une composante dans la direction de tangentielle.

Dans le cas d'une membrane élastique dont l'étirement initial est égal à 1 nous pouvons considérer la loi $E(r) = (r-1)^2$. Dans ce cas, en plus d'une force normale proportionnelle à la courbure moyenne il y a une force tangentielle qui tend à ramener la membrane dans sa configuration de référence où l'étirement est constant. Le formalisme considéré permet de considérer des lois de comportement pour E plus générales non linéaires qui sont souvent utilisées en grandes déformations. Le modèle développé est complètement eulérien et permet de prendre en compte simplement ces grandes déformations.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires à la formulation du modèle eulérien de membrane.

2.4.4 Equations du modèle complet

On considère les équations de Navier Stokes définies sur tout le domaine avec en second membre la force élastique définie précédemment qui est localisée à l'interface. Cette équation est alors couplée avec l'équation de transport pour donner le modèle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho(\phi)(u_t + (u \cdot \nabla)u) - \mathrm{div}(\mu(\phi)D(u)) + \nabla p & = & F_e(\phi), \\ \mathrm{div}(u) & = & 0, \\ \phi_t + u \cdot \nabla \phi & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Les fluides de part et d'autre de la membrane ont des viscosités constantes qui peuvent être différentes. Notons μ_1 la viscosité intérieure et μ_2 la viscosité extérieure. La viscosité est lissée à l'interface grâce à une fonction de Heaviside donnée par $\tilde{\zeta}(r) = \int_{-\infty}^{r} \zeta$ (FIG 2.9)

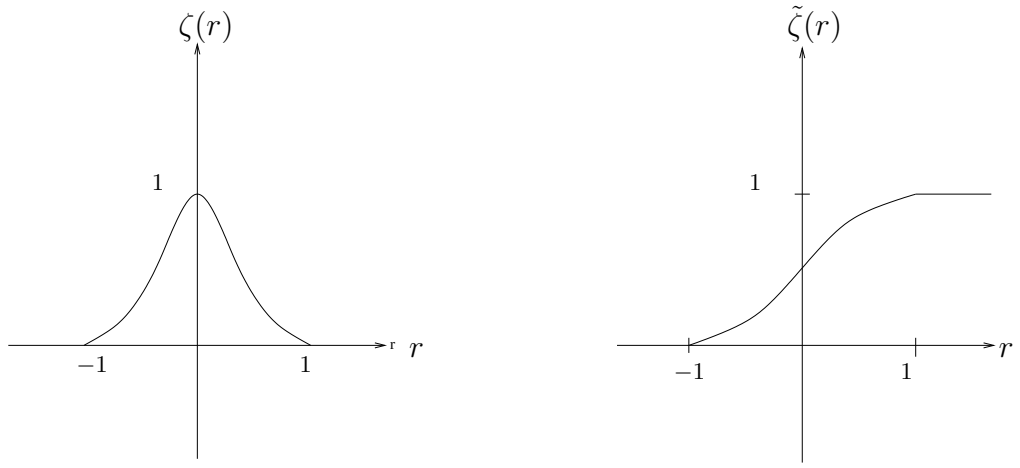

FIG. 2.9 – Fonction cut off et de Heavyside

$$\mu(\phi) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\tilde{\zeta}\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

Les densités de chaque fluide peuvent aussi être différentes. Notons ρ_1 la densité intérieure et ρ_2 la densité extérieure qui sont supposées constantes. Il est naturel de considérer que la membrane a une masse surfacique que nous notons Λ. En utilisant la formule (2.17) nous obtenons

$$|\nabla\phi|\Lambda = |\nabla\phi_0|\Lambda_0 \tag{2.23}$$

où Λ_0 est la masse surfacique dans la configuration de référence. La densité totale s'écrit donc de la manière suivante

$$\rho(\phi) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\tilde{\zeta}\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) + \Lambda_0|\nabla\phi_0|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

Vitesse et contraintes a l'interface

L'équation de transport de la fonction level set par le champ de vitesse u implique que la vitesse est continue à la traversée de l'interface. Il n'y a donc pas de transfert de masse entre les deux fluides à travers l'interface (continuité de la composante normale de la vitesse) ainsi qu'une absence de frottement entre les deux fluides (continuité de la composante tangentielle de la vitesse). Contrairement à la méthode de Peskin ou le second membre est singulier, toutes les quantités sont ici régularisées à l'interface. Cependant les contraintes varient très rapidement à la traversée de l'interface.

2.4.5 Egalité d'énergie du système

Partant du modèle (2.22) il est possible d'obtenir une égalité d'énergie. Pour simplifier la présentation nous considérons des conditions de Dirichlet homogènes pour la vitesse sur ∂Q. Multiplions l'équation sur la vitesse par u et intégrons sur le domaine Q. Pour le terme d'inertie développons l'expression

$$\operatorname{div}(\rho(\phi)u|u|^2) = \rho(\phi)|u|^2\operatorname{div}(u) + u\cdot\nabla(\rho(\phi))\,|u|^2 + u\cdot\nabla(|u|^2)\,\rho(\phi).$$

En intégrant sur Q l'égalité précédente, le membre de gauche est nul après intégration par parties. Le premier terme du second membre est nul d'après la condition d'incompressibilité. Il reste en utilisant le fait que $\rho(\phi)$ vérifie la même équation de transport que ϕ

$$2\int_Q \rho(\phi)((u\cdot\nabla)u)\cdot u\,dx = \int_Q u\cdot\nabla(|u|^2)\,\rho(\phi)\,dx = -\int_Q u\cdot\nabla(\rho(\phi))\,|u|^2\,dx = \int_Q (\rho(\phi))_t\,|u|^2\,dx.$$

Nous avons donc

$$\int_Q \rho(\phi)(u_t + (u\cdot\nabla)u)\cdot u\,dx = \int_Q \frac{1}{2}\rho(\phi)(|u|^2)_t + \frac{1}{2}(\rho(\phi))_t\,|u|^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_Q \rho(\phi)|u|^2\,dx\right).$$

Pour le terme de diffusion comme la vitesse est nulle aux bords, en intégrant par parties et en utilisant la symétrie de $D(u)$

$$\int_Q \operatorname{div}(\mu(\phi)D(u)) \cdot u \, dx = -\int_Q \mu(\phi)D(u) : \nabla u \, dx = -\int_Q \mu(\phi)D(u) : D(u) \, dx.$$

Pour le terme élastique il suffit d'utiliser la relation (2.19). On obtient finalement l'égalité d'énergie suivante

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_Q \rho(\phi)|u|^2 \, dx + \int_Q E(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx\right) = -\int_Q \mu(\phi)|D(u)|^2 \, dx.} \tag{2.24}$$

La variation d'énergie cinétique plus élastique du système est égale à la dissipation visqueuse. Si ρ n'est pas constant le terme non linéaire $(u \cdot \nabla)u$ est nécessaire pour obtenir cette égalité. Une égalité d'énergie d'un système est toujours un gage de stabilité lors de l'implémentation numérique donc nous ne négligerons pas le terme d'inertie.

Nous avons donc à travers les deux premiers chapitres introduit les outils de modélisation qui permettent d'aboutir aux équations modélisant chaque constituant du couplage fluide-structure. Nous avons ensuite pu introduire le modèle complètement eulérien de couplage fluide-structure dans le cas de membranes élastiques et définir les principales propriétés de ce système. La prochaine partie est consacrée à l'étude du système d'équations (2.22) d'un point de vue mathématique.

Deuxième partie

Analyse mathématique du modèle

Plan de la deuxième partie

Cette deuxième partie est consacrée à l'étude théorique du modèle eulérien de membrane élastique introduit dans le chapitre précédent. Le théorème présenté dans cette partie est basé sur une formulation d'un problème de couplage fluide-structure sous la forme d'un fluide complexe qui simplifie grandement l'étude.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous allons introduire quelques méthodes assez générales utilisées pour démontrer l'existence de solutions. Nous commencerons par introduire la problématique relative à l'existence pour des EDP en faisant le lien avec les EDO. Nous étudierons ensuite l'équation de la chaleur qui va nous permettre d'introduire les différents types de solutions et les espaces de Sobolev. Une section sera consacrée à l'introduction des outils de compacité qui est le point central de la démonstration d'existence pour des problèmes non linéaires. Pour préparer le chapitre suivant, nous passerons en revue les différents espaces, lemmes et inégalités que nous allons utiliser pour la preuve du théorème d'existence.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons la démonstration de ce théorème. Nous allons d'abord énoncer le théorème ainsi que les hypothèses utilisées. Avant de passer à la démonstration proprement dite nous expliquerons le cheminement qui nous a permis d'obtenir le résultat. Le point de départ sera l'existence d'un problème approché construit avec une régularisation en temps. Ensuite nous ferons les estimations *a priori* non hilbertiennes qui vont nous permettre d'obtenir la convergence forte sur les solutions approchées et ainsi passer à la limite dans les termes non linéaires. Enfin, nous évoquerons les possibles extensions de ce théorème.

Chapitre 3

Préliminaires

3.1 Lien entre EDP et EDO

Trouver des solutions analytiques n'est en général pas envisageable pour une EDO à part dans des cas très particuliers. Dans le cas d'EDP le problème est encore plus difficile et deux études peuvent être alors considérées : l'étude qualitative de l'équation c'est à dire le comportement des solutions ainsi que l'existence et l'unicité. Nous nous intéressons ici au cas de l'existence et l'unicité qui est très important lorsque l'on étudie un modèle puisque dans le cas contraire le problème est mal posé physiquement.

Une équation aux dérivées partielles peut être interprétée comme une équation différentielle ordinaire posée sur un espace de dimension infinie. En effet supposons que l'EDP dépende du temps et de l'espace. Dans ce cas, à t fixé, nous devons chercher une fonction $u(t)$ solution de

$$u'(t) = F(u(t), t),$$

où F est un opérateur posé sur un espace de dimension infinie agissant sur les dérivées spatiales de u. La dimension infinie n'apparaît pas uniquement dans des problèmes en évolution mais dès que l'inconnue du problème dépend de plusieurs variables. Il existe l'équivalent du théorème de Cauchy Lipschitz en dimension infinie mais il est valable pour un second membre lipschitzien et donc continu. Malheureusement, les opérateurs différentiels apparaissant au second membre sont le plus souvent non continus lorsque l'on les considère sur un espace de Sobolev. L'existence de solutions pour un problème donné est la plupart du temps effectué au cas par cas contrairement au cas des EDO en dimension finie.

Dans un but pédagogique, nous commençons par étudier l'équation de la chaleur qui permet d'introduire quelques concepts généraux comme le type de solutions que l'on peut envisager et les espaces de Sobolev qui sont les espaces fonctionnels dans lesquels il est naturel de chercher des solutions.

3.2 Equation de la chaleur

Considérons un domaine Ω régulier et borné de $\mathbb{R}^n$ constitué d'un matériau qui conduit la chaleur. La répartition de la température u dans le matériau soumis à un terme source f avec des conditions de Dirichlet homogènes obéit à l'équation linéaire aux dérivées partielles suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & f \quad \text{sur } \Omega \\ u & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Il nous faut tout d'abord choisir un espace fonctionnel dans lequel nous recherchons une solution. Comme le laplacien fait intervenir des dérivées d'ordre deux nous allons *a priori* rechercher une solution qui appartient à l'espace $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Ce type de solution est appelé solution classique.

Solutions faibles

Pour affaiblir la notion de solution il est utile de considérer une formulation variationnelle de cette équation. Pour ce faire, il suffit de multiplier l'équation par une fonction test v, d'intégrer sur le domaine Ω puis d'utiliser une intégration par parties. La fonction v est choisie dans un espace qui vérifie les mêmes conditions limites que u. Ceci permet d'annuler le terme de bord dans l'intégration par parties pour donner

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \tag{3.1}$$

L'intégration sur tout le domaine Ω permet de passer d'une formulation locale à une formulation globale de l'équation. De plus, l'intégration par parties permet de baisser le degré de l'équation car elle fait apparaître des dérivées d'ordre un. Il est donc possible de considérer des solutions qui sont moins régulières que les solutions classiques. La formulation étant globale, il est juste suffisant que les intégrales apparaissant dans (3.1) aient un sens. Pour satisfaire cette propriété il suffit (grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz) que les fonctions u et v ainsi que leurs gradients soient dans l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$. Introduisons donc l'espace de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ \ / \ \ \nabla v \in L^2(\Omega) \ \text{ et } \ v_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

Une fonction de carré intégrable n'étant pas nécessairement dérivable, la définition ci-dessus est donc à considérer au sens des distributions. La condition limite de Dirichlet homogène a bien un sens d'après les théorèmes de trace. Les solutions cherchées dans cet espace sont appelées des solutions faibles. La relation (3.1) s'interprète comme l'égalité d'une forme bilinéaire évaluée en l'inconnue u pour son premier argument et d'une forme linéaire posé sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. L'existence et unicité est alors assurée sous des hypothèses de continuité et de coercivité par le théorème de Lax-Milgram.

La mise sous forme variationnelle n'est pas uniquement un outil mathématique pour formuler des équations aux dérivées partielles de manière plus faible, elle est aussi à la base de la méthode des éléments finis qui est utilisée pour des géométries complexes.

Solutions fortes

Il existe aussi une notion de solution forte intermédiaire entre solution faible et solution classique qui est obtenue en interprétant les opérateurs différentiels dans les espaces de Sobolev. Dans ce cas, l'équation de la chaleur (contenant un laplacien) a un sens dans l'espace $H^2(\Omega)$ constitué des fonctions de carrés intégrables ainsi que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre deux. Les différents types de solutions cherchés pour l'équation de la chaleur peuvent être résumés par les inclusions suivantes.

$$\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \subset H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

Classifications des EDP

L'équation de la chaleur stationnaire est un exemple simple d'EDP, elle est linéaire et elliptique. Sans rentrer dans les détails, les EDP peuvent être classées en différents groupes dépendant du degré de dérivation des opérateurs mis en jeux ainsi que de leur signe. Les EDP sont alors reparties en trois groupes principaux : elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Les exemples classiques sont donnés par l'équation de la chaleur stationnaire pour le type elliptique, l'équation de transport et l'équation des ondes pour le type hyperbolique et l'équation de la chaleur en évolution pour le type parabolique. Le théorème de Lax Milgram ne s'applique que pour des équations elliptiques linéaires stationnaires. Chaque type d'équation a des propriétés très différentes et des outils spécifiques ont été développés pour les étudier tant d'un point de vue théorique que numérique.

De sérieuses difficultés apparaissent lorsque l'équation considérée est non linéaire. L'étude est alors réalisée en utilisant les outils de compacité que nous introduisons maintenant.

3.3 Equations non linéaires et compacité

Problématique

Ne sachant pas résoudre les équations non linéaires de manière générale, il faut trouver un moyen d'approcher l'équation par une autre que l'on sait résoudre. Plusieurs stratégies peuvent être envisagées. La première consiste à approcher l'équation sous forme variationnelle sur un espace de dimension finie (méthode de Galerkin). Dans ce cas, l'EDP se réduit à une EDO non linéaire dont on prouve l'existence d'une solution grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz en dimension finie. Il est également possible de régulariser les opérateurs différentiels pour qu'ils deviennent continus et ainsi utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz, en dimension infinie cette fois. Une autre stratégie consiste à régulariser les termes non linéaires pour obtenir une équation linéaire pour lesquelles des outils ont été développés pour en montrer l'existence. Dans toutes ces méthodes, une suite de solutions d'un problème plus simple est construite et il faut effectuer un passage à limite pour obtenir une solution de l'équation non linéaire de départ. Le problème délicat provient du fait que la suite de solutions approchées ne converge pas forcément sans travail supplémentaire. Pour en extraire une sous suite qui converge il faut utiliser des propriétés de compacité que nous allons brièvement décrire maintenant.

Compacité et convergence faible

Considérons un espace de Banach B (qui sera l'espace fonctionnel dans lequel on recherche une solution). Une suite x_n appartenant à B converge fortement vers x (noté $x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$) si

$$|x_n - x|_B \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

Un sous ensemble E de B est dit compact si de toute suite de E on peut en extraire une sous suite qui converge dans E. Considérons maintenant une suite bornée dans l'espace B. L'espace B étant supposé de dimension infinie la boule unité n'est pas compacte pour la topologie forte (théorème de Riez), la suite considérée peut donc ne pas avoir de sous suite qui converge fortement. Il est alors intéressant d'introduire la notion de convergence faible d'une suite x_n vers x noté ($x_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} x$) par la propriété

$$|L(x_n) - L(x)|_{\mathbb{R}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour toute forme linéaire L continue sur l'espace B. Il est immédiat que la convergence forte implique la convergence faible. L'intérêt de cette topologie faible réside dans le résultat suivant : si l'espace est supposé réflexif (le bidual peut s'identifier à l'espace de départ) alors la boule unité est compacte pour la topologie faible. Il est donc possible d'extraire une sous suite qui converge faiblement dans l'espace B. Dans le cas où l'espace n'est pas réflexif il est utile d'introduire la convergence faible étoile. Une suite L_n appartenant au dual topologique de B converge faible étoile vers L (noté $L_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup^\star} L$) si

$$|L_n(x) - L(x)|_{\mathbb{R}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

pour tout x appartenant à B. L'avantage de cette convergence est que la boule unité du dual d'un espace de Banach est compacte pour la topologie faible étoile (théorème de Banach-Alaoglu).

Passage à la limite dans les termes non linéaires

Il est donc important d'obtenir une borne uniforme sur les suites qui interviennent dans les problèmes approchés pour pouvoir extraire des sous-suites qui convergent faiblement. Ces bornes sont obtenues à l'aide d'estimations *a priori* sur l'équation approchée. Cependant, la convergence faible ne permet pas de passer à limite dans les termes non linéaires. Pour comprendre ce phénomène nous donnons un contre exemple. Considérons la suite de fonctions

$$x_n = t \mapsto \sin(nt).$$

Il est simple de montrer que cette suite converge faiblement vers 0 dans $L^2(]0,1[)$ par densité et intégration par parties. Par les mêmes arguments on montre que $(x_n)^2$ converge faiblement vers $1/2$ et non vers 0. Pour pouvoir passer à la limite dans les termes non linéaires il va donc falloir obtenir de la convergence forte. Ne pouvant pas être obtenue directement dans l'espace de départ (théorème de Riez) il est naturel de vouloir extraire d'une suite bornée de B une sous suite dans un espace plus gros contenant B.

Compacité et convergence forte

Il existe beaucoup de résultats de ce type dans les espaces de Sobolev. L'exemple le plus simple est l'espace $H^1(\Omega)$ qui s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega)$ (noté $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$). De toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous suite qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$. Remarquons que l'on doit obtenir des estimations dans un espace qui contient des dérivées d'ordre plus élevé que l'espace où l'on veut extraire des sous suites qui convergent fortement ; ce fait est général.

Citons au passage une autre méthode pour montrer l'existence de solutions basée sur le théorème du point fixe de Schauder. Elle consiste à linéariser l'équation non linéaire puis faire un point fixe. Il faut ensuite montrer que l'application est continue dans un certain espace et pour cela des estimations *a priori* sont requises. Dans tous les cas l'estimation *a priori* de solutions est donc l'ingrédient essentiel de la preuve d'existence.

Remarques dans le cas non stationnaire

Tous les exemples cités jusqu'a présent appartiennent à la classe des problèmes stationnaires. Les équations qui interviennent en physique font intervenir le temps et demandent d'introduire des espaces

fonctionnels plus généraux. Les idées principales évoquées dans cette introduction restent néanmoins les mêmes. Il est nécessaire d'ajouter une condition initiale pour ces équations. La solution de l'équation va alors fortement dépendre de la régularité de la condition initiale. Pour une condition initiale peu régulière, nous obtiendrons des solutions faibles alors que des solutions fortes ou classiques peuvent être obtenues avec plus de régularité. De plus, les solutions d'une équation de type évolution peuvent être locales ou globales en temps.

Concernant les résultats d'existence pour les équations de Navier Stokes incompressibles on renvoie le lecteur au livre [31].

Nous allons maintenant définir de manière plus précise les espaces fonctionnels, les inégalités ainsi que les lemmes dont nous aurons besoin dans notre étude.

3.4 Espaces et inégalités utilisés

La plupart des résultats de cette partie peuvent être trouvés dans [8]. Les ouverts Ω sont des domaines de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ supposés réguliers et bornés pour que toutes les propositions qui suivent soient valables.

Espaces fonctionnels utilisés et normes associées

Les espaces fonctionnels introduits précédemment sont hilbertiens c'est à dire munis d'un produit scalaire. Dans la pratique, il est nécessaire de considérer des espaces plus généraux qui permettent d'utiliser des inégalités plus fines. Définissons l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions dont la puissance pième est intégrable. Pour un domaine borné nous avons les inclusions $L^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ qui montrent que l'espace $L^\infty(\Omega)$ est le plus régulier et $L^1(\Omega)$ le moins régulier. Les espaces de Sobolev construits à partir de ces espaces sont définis par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \ / \ D^\alpha f \in L^p(\Omega) \ \text{ pour } \ |\alpha| \leq m\}.$$

Dans cette définition, la dérivée est bien entendue prise au sens des distributions. Cet espace est muni de la somme des normes L^p de chaque dérivée. Rappelons que ces espaces sont inclus dans les espaces usuels $C^k(\Omega)$ pour des m assez grands dépendant de k et de la dimension de l'espace dans lequel Ω est défini. Il est montré dans [49] p 316 qu'il existe une norme équivalente à la précédente en ne gardant que la norme de la fonction ainsi que celle de la dérivée de plus haut degré. Dans le cas de l'espace $W^{2,p}(\Omega)$, il est également démontré que la norme suivante est équivalente à la norme usuelle

$$|f|_{W^{2,p}} = |f|_{L^p} + |\Delta f|_{L^p}. \tag{3.2}$$

Introduisons à présent un sous espace de $W^{1,p}(\Omega)$ pour lequel les fonctions sont nulles aux bords

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{f \in W^{1,p}(\Omega) \ / \ f_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

Cette définition a bien un sens d'après les théorèmes de trace. D'après le lemme de Poincaré, une norme équivalente à la norme usuelle est obtenue en enlevant le terme d'ordre zéro, c'est à dire $|f|_{W_0^{1,p}} =$

$|\nabla f|_{L^p}$. De la même manière, une norme équivalente à la norme usuelle sur l'espace $W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ est donnée par

$$|f|_{W^{2,p}\cap W_0^{1,p}} = |\Delta f|_{L^p}. \tag{3.3}$$

Nous choisirons toujours la norme (3.2) pour l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ et lorsque de plus la fonction sera nulle aux bords (c'est à dire appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$) nous choisirons (3.3). Pour l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ avec des fonctions nulles aux bords nous utiliserons la norme $|f|_{W_0^{1,p}} = |\nabla f|_{L^p}$. Ces normes seront utilisées pour l'estimation de la vitesse qui vérifiera des conditions de Dirichlet homogènes.

Donnons maintenant quelques injections de Sobolev qui nous servirons pour faire des majorations.

Injections de Sobolev

Les injections continues permettent de majorer la norme sur un espace par une autre norme sur un espace plus petit. L'injection $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ est continue ce qui se traduit par l'inégalité

$$\exists C > 0, \quad \forall f \in W^{2,p}(\Omega) \quad |f|_{W^{1,p}} \leq C|f|_{W^{2,p}}. \tag{3.4}$$

Nous avons également, dans le cas où $p > 3$ (3 correspond en fait à la dimension de l'espace) , les injections continues $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ qui se traduisent par les inégalités

$$\exists C > 0, \quad \forall f \in W^{2,p}(\Omega) \qquad |f|_{W^{1,\infty}} \leq C|f|_{W^{2,p}}, \tag{3.5}$$

$$\exists C > 0, \quad \forall f \in W^{1,p}(\Omega) \qquad |f|_{L^\infty} \leq C|f|_{W^{1,p}}. \tag{3.6}$$

Ces injections sont en fait plus que continues, elles sont compactes. Il sera souvent fait usage de ces inégalités pour l'obtention des estimations *a priori* dans le chapitre suivant. Nous rappellerons à chaque fois l'injection que nous utiliserons.

Rappelons au passage que l'espace hilbertien $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\Omega)$ pour des domaines de dimension strictement supérieure à un. Il est nécessaire de considérer des dérivées d'ordre supérieur avec l'espace $H^2(\Omega)$ pour obtenir cette injection dans $L^\infty(\Omega)$. La considération des espaces non hilbertiens permet donc d'obtenir des majorations de la norme infinie plus fines faisant intervenir uniquement des dérivées d'ordre un. La contrepartie est de perdre le caractère Hilbertien de l'espace, ce qui complique l'étude.

Cas d'évolution

Pour des problèmes d'évolution, on est amené à considérer les espaces de Sobolev suivants

$$L^q(0,T;W^{m,p}(\Omega)) = \{f \quad / \quad |f'(t)|_{W^{m,p}} \in L^q(]0,T[)\}. \tag{3.7}$$

Les fonctions appartenant à cet espace ont donc une régularité L^q en temps et $W^{m,p}$ en espace. Pour l'obtention de résultats de compacité dans ces espaces il est nécessaire d'ajouter des hypothèses sur la régularité de la dérivée temporelle des fonctions considérées. Enonçons ici le théorème de compacité qui va nous servir dans le chapitre suivant et qui pourra être trouvé dans [42]

$$\left\{f \in L^{\alpha_0}(0,T;W^{2,p}(\Omega)) \ / \ f'(t) \in L^{\alpha_0}(0,T;L^p(\Omega))\right\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\alpha_0}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)). \tag{3.8}$$

Ce théorème utilise les injections $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ qui sont valables pour $3 < p < \infty$. Il sera utilisé dans les cas particuliers $\alpha_0 = p$ pour la vitesse et $\alpha_0 = \infty$ pour la fonction level set après avoir obtenu les estimations *a priori* adéquates. Dans le cas $\alpha_0 = \infty$ l'injection est compacte dans $C^0(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$. Nous remarquons que pour pouvoir extraire des sous suites qui convergent fortement dans un espace qui contient des dérivées en espace d'ordre un il est utile d'obtenir des bornes uniformes de la suite dans un espace qui contient des dérivées spatiales d'ordre au moins deux.

Tous les résultats précédents se généralisent sans difficultés dans des espaces fonctionnels vectoriels c'est à dire lorsque la fonction considérée possède plusieurs composantes. Pour plus de lisibilité nous utiliserons les mêmes notations pour les espaces fonctionnels vectoriels et scalaires. Suivant le contexte, la notation $|\cdot|$ correspondra à la valeur absolue, la norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice, voire même d'un tenseur d'ordre trois. De même pour $|\cdot|_{L^p}$, elle correspondra à la norme euclidienne des normes L^p de chaque composante dans les cas vectoriel ou matriciel.

Inégalités

Présentons à présent deux inégalités très utiles dans les estimations. Tout d'abord l'inégalité de Young obtenue par la convexité de l'exponentielle

$$\forall a, b > 0 \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{3.9}$$

ainsi que l'inégalité de Hölder (f, g et h fonctions scalaires)

$$\forall f, g, h \quad \left| \int_\Omega f\ g\ h \right| \leq |f|_{L^p} |g|_{L^q} |h|_{L^r} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

L'inégalité originale de Hölder peut être retrouvée en choisissant $h = 1$ et $r = \infty$. Cette inégalité reste vraie pour des fonctions à valeurs vectorielles ou matricielles faisant intervenir des produits scalaires vectoriels ou matriciels. Il suffit pour cela de développer le terme de gauche sous forme de somme de fonctions scalaires et d'appliquer l'inégalité précédente. Le terme obtenu se majore ensuite par les normes L^p vectorielles et matricielles voulues.

Intégration par parties

Lors de la mise sous forme variationnelle des équations, nous aurons besoin d'utiliser des intégrations par parties. Nous rappelons juste celles qui nous servirons dans la suite. Soient u et v des champs de vecteurs, A une matrice et Ω un ouvert borné

$$\int_\Omega u \cdot \Delta v\ dx = -\int_\Omega \nabla u : \nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla v\ n) \cdot u\ dx,$$

$$\int_\Omega \mathrm{div}(A) \cdot u\ dx = -\int_\Omega A : \nabla u\ dx + \int_{\partial\Omega} (A\ n) \cdot u\ dx.$$

Dans notre étude, des conditions limites de type Dirichlet homogènes seront choisies pour la vitesse et les intégrales de bord seront donc nulles.

Nous avons donc dans ce chapitre défini quelques méthodes générales pour montrer l'existence de solutions à une EDP et énoncé les lemmes et les notations que nous allons utiliser dans le chapitre suivant consacré à la preuve d'existence du modèle de membrane.

Chapitre 4

Analyse mathématique du modèle de membrane

Dans le cadre des équations modélisant l'interaction entre un fluide et une structure élastique, peu de résultats sont pour le moment connus. La plus grande partie des résultats concernent les solides rigides dans des fluides [26, 50]. Des preuves d'existences recentes ont aussi été effectuées dans le cas de solides déformables par Coutand et Shkoller [9, 17] en utilisant une formulation lagrangienne du couplage. La preuve d'existence que nous proposons ici dans le cas d'une membrane élastique plongée dans un fluide ne suppose pas de restriction sur les petites déformations. Cette propriété est due à la formulation eulérienne qui permet de considérer le couplage comme un fluide complexe. Par contre, nous montrerons seulement l'existence locale avec un temps d'existence qui dépendra du paramètre ε servant à localiser la force élastique.

4.1 Enoncé des hypothèses et du théorème

Nous étudions l'existence de solutions régulières du modèle de membrane dans le cas d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ borné connexe régulier. Pour simplifier l'étude, nous choisissons le paramètre ε de régularisation égal à un. Le temps d'existence final que nous obtiendrons dépendra donc du paramètre ε. Nous considérons également que la densité du fluide est la même partout égale à $\rho_0 \geq \alpha > 0$ (le théorème s'adapte simplement dans le cas de densités différentes). Néanmoins, nous ne négligeons pas la masse de la membrane dans la configuration de référence Λ_0. Pour simplifier l'étude nous supossons que Λ_0 est constante et que $|\nabla\phi_0| = 1$. La densité est donc donnée par (2.23)

$$\rho(\phi) = \rho_0 + \Lambda_0\zeta(\phi),$$

avec ζ une fonction cut-off C^∞ positive de masse un. La viscosité est choisie uniforme égale à μ dans les deux fluides. La prise en compte de viscosité non homogène ne rentre pas dans le cadre de l'étude qui va suivre. Le modèle considéré est donc le suivant (2.22)

$$\rho(\phi)(u_t + (u\cdot\nabla)u) - \mu\Delta u + \nabla\pi = -\operatorname{div}\left(\Sigma(\phi, |\nabla\phi|)\right), \tag{4.1}$$

$$\phi_t + u\cdot\nabla\phi = 0, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{div}(u) = 0. \tag{4.3}$$

Nous avons noté π la pression car la lettre p va être réservée à l'indice de régularité dans les espaces de Sobolev. Pour la force élastique, nous choisissons d'utiliser la formule (2.20) en mettant le terme en gradient dans la pression. La force élastique est donc donnée par la formule

$$\Sigma(\phi, |\nabla\phi|) = F(\phi, |\nabla\phi|)\nabla\phi \otimes \nabla\phi, \qquad F(\phi, |\nabla\phi|) = \frac{E'(|\nabla\phi|)}{|\nabla\phi|}\zeta(\phi). \tag{4.4}$$

Nous faisons l'hypothèse suivante sur la loi de comportement entre les contraintes et les déformations

$$r \mapsto E'(r) \in C^1([0, +\infty[). \tag{4.5}$$

Cette hypothèse est peu restrictive et permet de considérer des lois exponentielles qui sont souvent utilisées en élasticité.

Le système précédent est complété par des conditions initiales $u(x, 0) = u_0(x)$ et $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$ ainsi que des conditions de Dirichlet homogènes pour la vitesse sur le bord du domaine. D'après les propriétés de l'équation de transport il n'est pas nécessaire d'ajouter des conditions aux limites sur ϕ car le champ de vitesse est nul aux bords. Nous supposons également que $|\nabla\phi_0| \geq \alpha > 0$ dans un voisinage de $\{\phi_0 = 0\}$ pour que la force élastique soit bien définie.

Le résultat obtenu peut s'énoncer de la manière suivante

Théorème 1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ et $p > 3$. Soit $\phi_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ avec $|\nabla\phi_0| \geq \alpha > 0$ sur un voisinage de $\{\phi_0 = 0\}$ et $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\mathrm{div}(u_0) = 0$. Alors il existe $T^* > 0$ dépendant uniquement des conditions initiales tel que la solution de (4.1) (4.2) et (4.3) existe sur $[0, T^*]$ avec $\phi \in L^\infty(0, T^*; W^{2,p}(\Omega))$, $u \in L^\infty(0, T^*; W_0^{1,p}(\Omega)) \bigcap L^p(0, T^*; W^{2,p}(\Omega))$ et $\nabla\pi \in L^p(0, T^*; L^p(\Omega))$*

4.2 Remarques préliminaires

Avant de rentrer dans les détails techniques de la preuve j'aimerais faire quelques remarques sur le cheminement utilisé pour parvenir à la démonstration du théorème. La première chose à considérer est de définir quelles sont les types de solutions que nous cherchons. Les solutions faibles étant obtenues uniquement à l'aide de l'égalité d'énergie, regardons les estimations obtenues pour le modèle de membrane. Pour simplifier l'étude choisissons une densité constante égale à un et une loi de comportement de type Korteweg c'est à dire $F = 1$. Cette hypothèse n'est pas restrictive car l'important dans les estimations réside dans le fait que Σ s'exprime avec les dérivées premières de ϕ. Nous allons retrouver dans ce cas particulier l'égalité d'énergie que l'on peut obtenir directement avec (2.24).

4.2.1 Egalité d'énergie

Commençons par établir un lemme qui sera constamment utilisé. Si u est à divergence nulle vérifiant des conditions de Dirichlet homogènes et q une fonction quelconque alors une intégration par parties donne

$$\int_\Omega u \cdot \nabla q \, dx = 0. \tag{4.6}$$

Par l'utilisation de ce lemme, le terme de pression et le terme d'inertie $(((u \cdot \nabla)u) \cdot u = u \cdot \nabla(|u|^2))$ disparaissent lorsque l'on multiplie l'équation de la vitesse par u et que l'on intègre sur le domaine Ω.

Le terme visqueux est quant à lui intégré par parties avec le terme de bord qui est également nul avec les conditions de Dirichlet. Il reste en développant la divergence ($\mathrm{div}(\nabla\phi \otimes \nabla\phi) = \nabla\phi\Delta\phi + \frac{1}{2}\nabla(|\nabla\phi|^2)$) et en réutilisant le lemme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_{L^2}^2 + \mu|\nabla u|_{L^2} + \int_\Omega \Delta\phi\ \nabla\phi \cdot u\ dx = 0.$$

Prenons à présent le gradient de l'équation de transport (4.2) que l'on multiplie par $\nabla\phi$ et que l'on intègre par parties (le terme de bord étant de même nul)

$$\int_\Omega \nabla\phi_t \cdot \nabla\phi\ dx + \int_\Omega \nabla(u \cdot \nabla\phi) \cdot \nabla\phi\ dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\phi|_{L^2}^2 - \int_\Omega u \cdot \nabla\phi\Delta\phi\ dx = 0.$$

Nous obtenons donc l'égalité d'énergie suivante

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|_{L^2}^2 + |\nabla\phi|_{L^2}^2) + \mu|\nabla u|_{L^2}^2 = 0. \tag{4.7}$$

Remarquons que considérer un milieu continu visqueux permet d'obtenir plus de régularité car nous avons des estimations sur le gradient de u (sinon nous avons juste des estimations sur u). Après construction d'un problème approché, cette égalité va permettre de construire des bornes uniformes sur la dérivée première de ϕ en espace. Des résultats de compacité vont permettre de construire une sous suite qui va converger en espace fortement dans $L^2(\Omega)$ ou faiblement dans $H^1(\Omega)$. Malheureusement ces convergences vont être insuffisantes pour passer à la limite dans le terme non linéaire $\nabla\phi \otimes \nabla\phi$. Nous ne pouvons donc pas espérer trouver des solutions faibles pour le modèle considéré. Il est donc nécessaire d'obtenir des estimations d'ordre supérieur en espace pour ϕ pour pouvoir construire des sous-suites dont le gradient converge fortement et ainsi passer à la limite dans ce terme non linéaire. Intéressons nous donc aux estimations d'ordre deux que l'on peut obtenir avec l'équation de transport.

4.2.2 Estimation L^2 de la dérivée seconde de ϕ

Le laplacien de l'équation de transport (4.2) donne

$$\Delta\phi_t + \Delta u \cdot \nabla\phi + 2[\nabla u] : [D^2\phi] + u \cdot \nabla\Delta\phi = 0.$$

Pour obtenir des estimations d'ordre deux sur ϕ on multiplie l'équation précédente par $\Delta\phi$ puis on intègre sur Ω. Le premier terme va donner $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta\phi|_{L^2}^2$. Le dernier va être nul par application du lemme (4.6). Il faut ensuite estimer les deux autres termes en utilisant des majorations faisant apparaître des normes L^2 de la dérivée seconde de ϕ pour pouvoir utiliser le lemme de Gronwall. Les deux termes qui restent se majorent de la même façon.

Nous ne pouvons pas utiliser l'inégalité de Hölder avec $p = q = r = 2$. Un premier choix consiste a prendre $p = q = 2$ et $r = \infty$. Nous obtenons dans ce cas

$$\left|\int_\Omega [\nabla u] : [D^2\phi]\Delta\phi\ dx\right| \leq |\nabla u|_{L^\infty}|[D^2\phi]|_{L^2}|\Delta\phi|_{L^2}.$$

Il est nécessaire d'utiliser des majorations pour faire apparaître des normes L^2 donc nous devons utiliser l'injection $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$ qui va donner des dérivées d'ordre trois pour la vitesse. Ceci signifie qu'il va falloir dériver plusieurs fois l'équation sur la vitesse pour faire des estimations.

Une autre possibilité est de choisir $p = 2$ et $q, r > 2$. Sans perte de généralité nous pouvons choisir $q = r = 4$. Dans ce cas, $\Delta\phi$ et $D^2\phi$ jouant le même rôle nous majorons de la façon suivante

$$\left| \int_\Omega [\nabla u] : [D^2\phi]\Delta\phi \, dx \right| \leq |\nabla u|_{L^4} |[D^2\phi]|_{L^4} |\Delta\phi|_{L^2}.$$

Pour obtenir des estimations L^2 de $[D^2\phi]$, comme $H^1 \hookrightarrow L^4 \hookrightarrow L^2$, il va falloir utiliser une inégalité de Sobolev ou d'interpolation qui fera apparaître des dérivées d'ordre trois de ϕ. Il est donc nécessaire de dériver encore une fois l'équation de transport. De plus l'utilisation d'une injection de Sobolev pour majorer le terme sur la vitesse va faire intervenir des dérivées d'ordre trois de u qui demandent également de dériver l'équation sur la vitesse.

Ces calculs ont été faits dans l'article [30] qui traite un problème très proche du notre pour une loi de comportement très simple ($F = 1$). Les calculs faits sont très lourds et font appel à des dérivations multiples de l'équation de transport et l'équation sur la vitesse. De plus, les calculs ne semblent pas se généraliser simplement dans le cas d'une loi de comportement générale utilisée dans notre modèle.

4.2.3 Justification du cadre non Hilbertien

Le problème de l'approche précédente est donc surtout lié au caractère $L^2(\Omega)$ des estimations qui nécessite l'introduction des normes $H^2(\Omega)$ pour majorer les normes infinies. Comme mentionné dans le chapitre précédent, il est possible de majorer des normes infinies avec des normes faisant intervenir uniquement des dérivées d'ordre un. Pour ce faire il faut renoncer au cadre Hilbertien et considérer les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ pour $p > 3$ qui s'injectent dans l'espace $L^\infty(\Omega)$.

L'utilisation de ce cadre non Hilbertien a été utilisé récemment dans l'article [46] pour l'existence locale de solutions fortes pour un modèle de Korteweg. Notre modèle pouvant être vu comme une généralisation du modèle de Korteweg nous avons voulu adapter la démonstration dans notre cas. La méthode proposée est basée sur un théorème de point fixe qui utilise l'unicité de la solution sous réserve d'existence. Dans le cas d'une loi de comportement générale nous n'avons pas réussi à montrer l'unicité donc la méthode du point fixe ne pouvait pas être utilisée.

Tous les arguments précédents mettent en avant l'importance de considérer des estimations L^p qui permettent de ne dériver que deux fois l'équation de transport. De plus des estimations L^p pour le problème de Stokes existent et seront utilisées dans la suite. Avant de passer aux estimations nous allons construire un problème approché pour lequel la preuve de l'existence de solutions sera aisée. Nous construirons alors sur le problème approché des estimations qui permettront de passer à la limite.

4.3 Problème régularisé

Justification de la régularisation en temps

Il est nécessaire de dériver deux fois l'équation de transport pour obtenir les estimations voulues. Pour cette raison, nous n'allons pas utiliser une méthode de Galerkin basée sur une approche variationnelle des équations sur un espace de dimension finie. Nous allons donc utiliser une régularisation des équations. Cette régularisation doit obéir à deux règles : l'existence du problème régularisé doit être

simple et les termes régularisés doivent permettre de faire simplement les estimations.

Dans le livre [31] une méthode de régularisation est utilisée pour montrer l'existence du système donné par les équations de Navier Stokes non homogènes. Les termes non linéaires de l'équation sur la vitesse ainsi que la vitesse intervenant dans l'équation de transport sont régularisés par une convolution en espace pour obtenir un découplage ainsi qu'une équation plus simple sur la vitesse. Des estimations sont ensuite démontrées pour passer à la limite. Pour faire ces estimations, des propriétés de stabilité c'est à dire des inégalités entre les fonctions régularisées et non régularisées sont nécessaires. Il est montré à la fin du livre comment faire pour construire des régularisations ayant des propriétés de stabilité dans les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ à divergence nulle. En choisissant de régulariser en espace le terme de vitesse dans l'équation de transport pour découpler les équations nous allons avoir besoin de la stabilité $W^{2,p}(\Omega)$ lors des estimations d'ordre deux sur ϕ. Pour éviter la construction de régularisation de fonctions à divergence nulle avec une condition de stabilité dans $W^{2,p}(\Omega)$ qui semble difficile à obtenir nous proposons d'utiliser une régularisation en temps que nous allons définir maintenant.

4.3.1 Régularisations en temps et en espace utilisées

Régularisation en temps

La régularisation en temps va être effectuée avec une fonction cut-off ξ régulière à support compact dans $[1,2]$ de masse un. Considérons un paramètre de régularisation $\eta > 0$ et v une fonction appartenant à $L^\infty(0,T;W^{2,p}(\Omega)\bigcap W_0^{1,p}(\Omega))$. Cette fonction est prolongée par 0 en dehors de l'intervalle $[0,T]$ nous permettant de définir la convolution suivante

$$\tilde{v}^\eta(\cdot,t) = \frac{1}{\eta}\int_{\mathbb{R}} v(\cdot,t-s)\xi\left(\frac{s}{\eta}\right)ds.$$

D'après la définition du support de ξ l'expression précédente se réécrit

$$\tilde{v}^\eta(\cdot,t) = \frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{2\eta} v(\cdot,t-s)\xi\left(\frac{s}{\eta}\right)ds = \frac{1}{\eta}\int_{t-2\eta}^{t-\eta} v(\cdot,s)\xi\left(\frac{t-s}{\eta}\right)ds.$$

La convolution en temps permet donc de créer un effet de retard temporel. La valeur de $\tilde{v}^\eta(\cdot,t)$ ne dépend que des valeurs de $v(\cdot,t)$ entre $t-2\eta$ et $t-\eta$. Avec cette définition la régularisation temporelle est stable dans $L^\infty(0,T;W^{2,p}(\Omega)\bigcap W_0^{1,p}(\Omega))$ c'est à dire

$$|\tilde{v}^\eta|_{L^\infty(0,T;W^{2,p}\bigcap W_0^{1,p})} \leq C|v|_{L^\infty(0,T;W^{2,p}\bigcap W_0^{1,p})}. \tag{4.8}$$

Cette propriété se montre simplement en utilisant la norme $u \mapsto |\Delta u|_{L^p}$ sur l'espace $W^{2,p}(\Omega)\bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus, si v est à divergence nulle et nul aux bords alors $\tilde{v}^\eta$ l'est aussi comme on peut le vérifier rapidement.

Régularisation en espace

Intéressons nous maintenant à la régularisation en espace d'une fonction ψ appartenant à l'espace $W^{2,p}(\Omega)$. Il est assez simple de construire un prolongement de ψ noté A de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de Ω satisfaisant la condition de stabilité

$$|A(\psi)|_{W^{2,p}} \leq C|\psi|_{W^{2,p}}. \tag{4.9}$$

Choisissons à présent θ une fonction cut-off régulière à support dans la boule (de $\mathbb{R}^3$) centrée en 0 et de rayon $1/2$ et considérons la régularisation spatiale suivante

$$\overline{\psi}^{\eta}(x,\cdot) = \int_{\mathbb{R}^3} A(\psi(x-y,\cdot))\theta\left(\frac{y}{\eta}\right)\eta^{-3}dy.$$

Cette régularisation vérifie les mêmes conditions de stabilité que le prolongement de A c'est à dire

$$|\overline{\psi}^{\eta}|_{W^{2,p}} \leq C|\psi|_{W^{2,p}}, \tag{4.10}$$

ainsi que

$$|\overline{\psi}^{\eta}|_{L^{\infty}(0,T;W^{2,p})} \leq C|\psi|_{L^{\infty}(0,T;W^{2,p})}. \tag{4.11}$$

Il est simple de voir que la stabilité est aussi vraie dans $L^p(0,T;W^{2,p})$. En utilisant les propriétés de la convolution, $\overline{\psi}^{\eta}$ est une fonction régulière $\mathcal{C}^{\infty}$.

Problème régularisé

Nous pouvons à présent considérer une version régularisée du système d'équations précédentes. La première chose à faire est de découpler les équations en procédant à une régularisation de ϕ dans l'équation sur la vitesse et une régularisation de la vitesse dans l'équation de transport. Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, nous avons besoin de construire une régularisation d'un champ de vitesse nul aux bords et à divergence nulle possédant la stabilité $W^{2,p}(\Omega)$. C'est pourquoi nous utilisons une régularisation en temps pour la vitesse dans l'équation de transport où cette condition de stabilité est vérifiée (4.8). De plus, nous utilisons également une régularisation en temps pour le terme non linéaire d'inertie pour linéariser le problème. Pour les termes dépendant de ϕ dans l'équation sur la vitesse nous utilisons une régularisation en espace. Le système régularisé s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho(\overline{\phi}^{\eta})(u_t + (\tilde{u}^{\eta}\cdot\nabla)\tilde{u}^{\eta}) - \mu\Delta u + \nabla\pi & = & -\operatorname{div}\left(\Sigma(\overline{\phi}^{\eta}, |\nabla\overline{\phi}^{\eta}|)\right), \\ \phi_t + \tilde{u}^{\eta}\cdot\nabla\phi & = & 0, \\ \operatorname{div}(u) & = & 0. \end{array}\right.$$

La solution (u,ϕ,π) de ce système va dépendre de η. Nous notons donc cette solution avec des indices inférieurs $u_\eta, \phi_\eta, \pi_\eta$. Les indices supérieurs dénotent des régularisations en temps et en espace qui sont de plus accompagnées d'une barre ou d'un tilde pour qu'il n'y ait pas de confusion possible. Le système précédent devient

$$\rho(\overline{\phi}^{\eta}_{\eta})((u_\eta)_t + (\tilde{u}^{\eta}_{\eta}\cdot\nabla)\tilde{u}^{\eta}_{\eta}) - \mu\Delta u_\eta + \nabla\pi_\eta = -\operatorname{div}\left(\Sigma(\overline{\phi}^{\eta}_{\eta}, |\nabla\overline{\phi}^{\eta}_{\eta}|)\right), \tag{4.12}$$

$$(\phi_\eta)_t + \tilde{u}^{\eta}_{\eta}\cdot\nabla\phi_\eta = 0, \tag{4.13}$$

$$\operatorname{div}(u_\eta) = 0. \tag{4.14}$$

4.3.2 Existence globale de solutions pour le problème approché

Nous allons maintenant montrer l'existence globale de solutions pour le problème approché précédent sur l'intervalle de temps $[0, T]$ avec T fixé. La preuve est basée sur une récurrence. La solution va être construite pas à pas sur des intervalles de taille η. Cette construction est rendue possible par les régularisations en temps effectuées.

Initialisation

Pour l'amorce, on construit des fonctions constantes en temps sur l'intervalle $[0, 2\eta]$ à partir des conditions initiales (FIG 4.1)

$$u_\eta(x,t) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \phi_\eta(x,t) = \phi_0(x) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 2\eta].$$

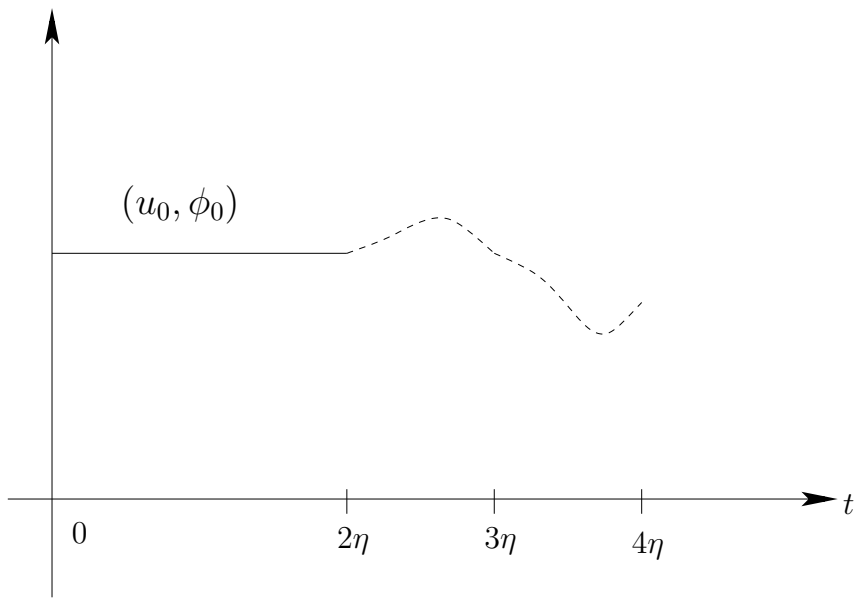

FIG. 4.1 – Initialisation de la récurrence

Comme ϕ_0 a été choisie dans $W^{2,p}(\Omega)$ et u_0 dans $W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ nous en déduisons

$$(u_\eta, \phi_\eta) \in L^p(0, 2\eta; W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)) \times L^\infty(0, 2\eta; W^{2,p}(\Omega)).$$

L'initialisation est donc acquise. Supposons maintenant que pour un certain $k > 0$, u_η et ϕ_η sont construits sur un intervalle $[0, k\eta]$ et appartiennent aux espaces

$$(u_\eta, \phi_\eta) \in L^p(0, k\eta; W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)) \times L^\infty(0, k\eta; W^{2,p}(\Omega)). \tag{4.15}$$

Nous allons maintenant construire u_η et ϕ_η sur l'intervalle $[k\eta, (k+1)\eta]$.

Résolution de l'équation de transport

Commençons par résoudre l'équation de transport. La fonction u_η est connue par hypothèse de récurrence sur $[0, k\eta]$. Nous pouvons donc calculer $\tilde{u}_\eta^\eta$ sur $[k\eta, (k+1)\eta]$ (il suffit même de connaître seulement u_η sur $[(k-2)\eta, k\eta]$ d'après les propriétés mentionnées pour la régularisation). Comme t appartient à l'intervalle $[k\eta, (k+1)\eta]$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence (4.15)

$$|\Delta\tilde{u}_\eta^\eta(t)|_{L^p} = \int_{t-2\eta}^{t-\eta} |\Delta u_\eta(s)|_{L^p} \left|\xi\left(\frac{t-s}{\eta}\right)\right| ds \leq C|\Delta u_\eta|_{L^p(0,n\eta;L^p)} \leq C.$$

Nous avons donc l'estimation

$$\tilde{u}_\eta^\eta \in L^\infty(k\eta, (k+1)\eta; W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{4.16}$$

Nous allons maintenant regarder quelle régularité ce champ de vitesse implique sur la fonction ϕ_η. Pour cela nous utilisons l'estimation obtenue pour l'équation de transport (4.21) (qui est indépendante de la présente démonstration) avec l'estimation (4.16)

$$\frac{d}{dt}|\Delta\phi_\eta|_{L^p}^p \leq C(1 + |\Delta\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^p}^p + |\Delta\phi_\eta|_{L^p}^{\frac{p^2}{p-1}}) \leq C(1 + |\Delta\phi_\eta|_{L^p}^{\frac{p^2}{p-1}}).$$

Il suffit ensuite d'utiliser un argument de type Gronwall pour en déduire

$$\phi_\eta \in L^\infty(k\eta, (k+1)\eta; W^{2,p}(\Omega))$$

Résolution de l'équation sur la vitesse

L'existence et la régularité de ϕ_η étant obtenue considérons l'équation sur la vitesse

$$\begin{aligned} \rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)((u_\eta)_t + (\tilde{u}_\eta^\eta \cdot \nabla)\tilde{u}_\eta^\eta) - \mu\Delta u_\eta + \nabla\pi_\eta &= -\operatorname{div}\left(\Sigma(\overline{\phi}_\eta^\eta, |\nabla\overline{\phi}_\eta^\eta|)\right), \\ \operatorname{div}(u_\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Comme précédemment la régularisation en temps permet de connaître $(\tilde{u}_\eta^\eta \cdot \nabla)\tilde{u}_\eta^\eta$ sur l'intervalle $[k\eta, (k+1)\eta]$ en fonction de la valeur de u_η sur $[(k-2)\eta, k\eta]$ qui est une donnée du problème. Nous mettons donc ce terme en second membre.

Le terme $\rho(\overline{\phi}_\eta)(\tilde{u}_\eta^\eta \cdot \nabla)\tilde{u}_\eta^\eta$ appartient bien à l'espace $L^p(k\eta, (k+1)\eta; L^p(\Omega))$. En effet le terme en $\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)$ se majore en norme infinie car ζ est borné. De plus d'après (4.16) et l'injection de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

$$|(\tilde{u}_\eta^\eta \cdot \nabla)\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^p}^p \leq |\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^\infty}^p |\nabla\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^p}^p \leq |\tilde{u}_\eta^\eta|_{W^{1,p}}^{2p} \leq C|\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^\infty(k\eta,(k+1)\eta);W^{2,p})}^{2p} \leq C.$$

Le terme de la force élastique est également dans cet espace car la régularisation en espace donne des fonctions très régulières que l'on majore en norme infinie.

On est donc en présence d'une équation de Stokes linéaire avec un second membre ainsi qu'une condition initiale (donnée en $t = k\eta$ par l'hypothèse de récurrence) dans $L^p(k\eta, (k+1)\eta; L^p(\Omega))$. Le résultat obtenu dans [44] par Solonnikov pour le problème de Stokes peut donc être utilisé. L'existence

et unicité d'une solution dans $L^p(k\eta,(k+1)\eta;W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega))$ est donc acquise.

La récurrence est donc achevée et nous avons donc montré l'existence globale en temps car la démonstration précédente est faite sur un intervalle $[0,T]$ fixé. Nous allons maintenant construire des estimations sur le problème régularisé pour pouvoir passer à la limite.

4.4 Estimations *a priori*

Il faut à présent construire des estimations sur u_η et ϕ_η indépendantes de η. Pour obtenir la convergence forte nécessaire pour passer à la limite dans le terme non linéaire élastique il est nécessaire obtenir des estimations sur $|\Delta\phi|_{L^p}$. De plus, il nous faudra aussi des estimations sur la vitesse pour passer à la limite dans les termes intervenant dans l'équation sur la vitesse. Pour ce faire, nous allons combiner des estimations obtenues en dérivant deux fois l'équation de transport, l'estimation L^p du problème de Stokes ainsi qu'une estimation indépendante de $[\nabla u]_{L^p}$. Pour plus de lisibilité nous enlevons les indices η apparaissant dans le problème approché. Nous notons $\tilde{u}=\tilde{u}_\eta^\eta$ et $\overline{\phi}=\overline{\phi}_\eta^\eta$.

4.4.1 Estimation sur l'équation de transport

Nous remarquons tout d'abord que l'équation de transport conserve la norme L^p. Pour cela nous multiplions (4.2) par $|\phi|^{p-2}\phi$, nous intégrons sur le domaine Ω et utilisons la propriété de la dérivée de la valeur absolue $|\phi|_t=\dfrac{\phi}{|\phi|}\phi_t$

$$\int_\Omega \phi_t|\phi|^{p-2}\phi\,dx+\int_\Omega \tilde{u}\cdot\nabla\phi|\phi|^{p-2}\phi\,dx=\frac{1}{p}\frac{d}{dt}(|\phi|_{L^p}^p)+\int_\Omega \tilde{u}\cdot\nabla(|\phi|^p)\,dx=0.$$

Le dernier terme est nul par le lemme (4.6). Nous obtenons donc

$$|\phi(t)|_{L^p}=|\phi_0|_{L^p}\geq 0. \tag{4.17}$$

La condition initiale étant fixée et connue, tous les termes faisant intervenir $|\phi(t)|_{L^p}$ sont donc bornés. Nous en déduisons donc l'inégalité suivante qui nous servira dans la suite

$$|[D^2\phi]|_{L^p}\leq|\phi|_{W^{2,p}}\leq C(|\phi|_{L^p}+|\Delta\phi|_{L^p})\leq C(1+|\Delta\phi|_{L^p}). \tag{4.18}$$

Passons maintenant à la dérivation à l'ordre deux de l'équation de transport. Le laplacien de (4.2) donne donc quatre termes (un pour la dérivée de ϕ_t et trois pour la dérivée seconde de $\tilde{u}\cdot\nabla\phi$)

$$\Delta\phi_t+\Delta\tilde{u}\cdot\nabla\phi+2[\nabla\tilde{u}]:[D^2\phi]+\tilde{u}\cdot\nabla\Delta\phi=0. \tag{4.19}$$

Multiplions cette équation par $|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi$ et intégrons sur Ω

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta\phi_t|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi\,dx &+ \int_\Omega \Delta\tilde{u}\cdot\nabla\phi|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi\,dx\\ &+ 2\int_\Omega[\nabla\tilde{u}]:[D^2\phi]|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi\,dx+\int_\Omega \tilde{u}\cdot\nabla\Delta\phi|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi\,dx=0.\end{aligned}$$

Dénotons par I_1, I_2, I_3 et I_4 les quatre termes intervenant dans l'égalité précédente et estimons les. Le premier terme s'écrit de la manière suivante en utilisant $|\Delta\phi|_t = \dfrac{\Delta\phi}{|\Delta\phi|}(\Delta\phi)_t$

$$I_1 = \int_\Omega \Delta\phi\Delta\phi_t|\Delta\phi|^{p-2}\,dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}(|\Delta\phi|^p_{L^p}).$$

Pour le deuxième terme utilisons une inégalité de Hölder

$$|I_2| = \left|\int_\Omega \Delta\tilde{u}\cdot\nabla\phi|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi\,dx\right| \leq |\nabla\phi|_{L^\infty}|\Delta\tilde{u}|_{L^p}||\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi|_{L^q}.$$

Comme les exposants conjugués vérifient $q(p-1) = p$ nous obtenons

$$||\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi|_{L^q} = \left(\int_\Omega |\Delta\phi|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = |\Delta\phi|^{p-1}_{L^p}. \tag{4.20}$$

En utilisant l'injection de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ ainsi que (4.18)

$$|I_2| \leq |\nabla\phi|_{L^\infty}|\Delta\tilde{u}|_{L^p}|\Delta\phi|^{p-1}_{L^p} \leq C|\Delta\tilde{u}|_{L^p}|\Delta\phi|^{p-1}_{L^p}(1+|\Delta\phi|_{L^p}).$$

Pour le troisième terme utilisons également une inégalité de Hölder ainsi que l'égalité (4.20)

$$|I_3| = 2\left|\int_\Omega [\nabla\tilde{u}] : [D^2\phi]|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi\,dx\right| \leq 2|[\nabla\tilde{u}]|_{L^\infty}|[D^2\phi]|_{L^p}||\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi|_{L^q} \leq 2|[\nabla\tilde{u}]|_{L^\infty}|[D^2\phi]|_{L^p}|\Delta\phi|^{p-1}_{L^p}.$$

En utilisant l'injection de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)\bigcap W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ ainsi que (4.18)

$$|I_3| \leq C|\Delta\tilde{u}|_{L^p}|\Delta\phi|^{p-1}_{L^p}(1+|\Delta\phi|_{L^p}).$$

Pour le dernier terme nous remarquons que

$$\nabla(|\Delta\phi|^p) = p\nabla(|\Delta\phi|)|\Delta\phi|^{p-1} = p\frac{\Delta\phi\nabla\Delta\phi}{|\Delta\phi|}|\Delta\phi|^{p-1} = p\Delta\phi\nabla\Delta\phi|\Delta\phi|^{p-2}.$$

Ainsi, en utilisant le lemme (4.6) à $\tilde{u}$ qui vérifie les mêmes propriétés que u nous obtenons

$$I_4 = \int_\Omega \tilde{u}\cdot\nabla\Delta\phi|\Delta\phi|^{p-2}\Delta\phi\,dx = \frac{1}{p}\int_\Omega \tilde{u}\cdot\nabla(|\Delta\phi|^p)\,dx = 0.$$

En mettant bout à bout les résultats précédents nous obtenons l'inégalité

$$\frac{d}{dt}(|\Delta\phi|^p_{L^p}) \leq C|\Delta\tilde{u}|_{L^p}(|\Delta\phi|^{p-1}_{L^p} + |\Delta\phi|^p_{L^p}),$$

qui se réécrit avec l'inégalité de Young $a \leq C(1 + a^{\frac{p}{p-1}})$

$$\frac{d}{dt}(|\Delta\phi|^p_{L^p}) \leq C|\Delta\tilde{u}|_{L^p}(1 + |\Delta\phi|^p_{L^p}).$$

Utilisons encore une fois une inégalité de Young

$$|\Delta\tilde{u}|_{L^p}|\Delta\phi|^p_{L^p} \leq \frac{1}{p}|\Delta\tilde{u}|^p_{L^p} + \frac{p}{p-1}|\Delta\phi|^{\frac{p^2}{p-1}}_{L^p}.$$

En réutilisant $a \leq C(1 + a^p)$ nous obtenons l'inégalité finale

$$\boxed{\frac{d}{dt}(|\Delta\phi|^p_{L^p}) \leq C(1 + |\Delta\tilde{u}|^p_{L^p} + |\Delta\phi|^{\frac{p^2}{p-1}}_{L^p})}. \tag{4.21}$$

L'idée est ensuite d'utiliser un lemme de Gronwall. Pour se faire, des estimations de $|\Delta\tilde{u}|_{L^p}$ seront obtenues grâce à l'équation sur la vitesse. C'est l'objet de la section qui suit.

4.4.2 Estimation sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement

L'estimation de l'équation sur la vitesse est simple à réaliser dans L^2. Il suffit de multiplier l'équation par u et d'intégrer sur le domaine Ω et appliquer des intégrations par parties. Si l'on essaye de faire la même chose dans L^p en multipliant par $u|u|^{p-2}$ nous n'arrivons pas à mettre le terme en laplacien sous la forme d'une norme L^p. Cependant, le résultat peut être obtenu mais il fait appel à des outils d'analyse harmonique très complexes. La démonstration de l'estimation dans les espaces L^p pour le problème de Stokes non homogène peut être trouvé dans [44]. Considérons le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_t - \mu\Delta u + \nabla\pi & = & f, \\ \operatorname{div}(u) & = & 0. \end{array} \right.$$

Alors nous avons l'estimation de Solonnikov

$$\int_0^t |u_t|^p_{L^p}\, ds + \mu\int_0^t |\Delta u|^p_{L^p}\, ds + \int_0^t |\nabla\pi|^p_{L^p}\, ds \leq P(M_\infty(t))\left(\int_0^t |f|^p_{L^p}\, ds + |u_0|_{W^{2-2/p,p}}\right).$$

où P est un polynôme croissant et $M_\infty(t) = |\nabla\rho|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)} + |\rho_t|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)}$. Appliquée à notre problème et en utilisant une inégalité de convexité pour le second membre nous obtenons l'estimation non hilbertienne

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^t |u_t|^p_{L^p}\, ds & + & \displaystyle\mu\int_0^t |\Delta u|^p_{L^p}\, ds + \int_0^t |\nabla\pi|^p_{L^p}\, ds \\ & \leq & \displaystyle P(M_\infty(t))\left(\int_0^t |(\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u}|^p_{L^p}\, ds + \int_0^t |\operatorname{div}(\Sigma(\overline{\phi}, |\nabla\overline{\phi}|))|^p_{L^p}\, ds + |u_0|_{W^{2-2/p,p}}\right). \end{array}$$

Nous avons ici majoré le terme $\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)$ en norme infinie. Dans ce cas

$$M_\infty(t) = |\nabla(\rho(\overline{\phi}))|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)} + |(\rho(\overline{\phi}))_t|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)}.$$

Remarquons ici que l'on aurait pu choisir une condition initiale dans $W^{2-2/p,p}(\Omega) \supset W^{2,p}(\Omega)$ pour plus de généralité. Nous majorons à présent la condition initiale par une constante. Il nous faut maintenant estimer $M_\infty(t)$ ainsi que les termes apparaissant en second membre.

Estimation de $M_\infty(t)$

Comme ζ' est une fonction bornée

$$M_\infty(t) \leq C(|\nabla\overline{\phi}|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)} + |\overline{\phi}_t|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)}).$$

En utilisant la stabilité de la régularisation spatiale (4.11) et l'équation de transport (4.13)

$$M_\infty(t) \leq C(1 + |\tilde{u}|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)})|\nabla\phi|_{L^\infty([0,t]\times\Omega)}.$$

En utilisant les injections de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ et $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$

$$M_\infty(t) \leq C(1 + |\nabla\tilde{u}|_{L^\infty(0,t;L^p(\Omega)})(1 + |\Delta\phi|_{L^\infty(0,t;L^p)}) \leq G_1(|\nabla\tilde{u}|_{L^\infty(0,t;L^p(\Omega)} + |\Delta\phi|_{L^\infty(0,t;L^p)}). \tag{4.22}$$

où G_1 est une fonction strictement croissante. Nous estimons ce terme avec les quantités $\nabla\tilde{u}$ et $\Delta\phi$ car toutes les estimations doivent être faites avec ces deux termes.

Estimation du terme d'inertie

Majorons à présent le terme non linéaire d'inertie apparaissant au second membre de l'estimation non hilbertienne. Pour cela, nous utilisons l'injection de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

$$|(\tilde{u}\cdot\nabla)\tilde{u}|_{L^p}^p \leq |\nabla\tilde{u}|_{L^p}^p|\tilde{u}|_{L^\infty}^p \leq C|\nabla\tilde{u}|_{L^p}^{2p}.$$

L'idée est maintenant de majorer le terme élastique à l'aide uniquement de la quantité $|\Delta\phi|_{L^p}$.

Estimation la force élastique

Pour arriver au résultat, nous commençons par développer le terme en divergence

$$\operatorname{div}(F(\overline{\phi},|\nabla\overline{\phi}|)\nabla\overline{\phi}\otimes\nabla\overline{\phi}) = F(\overline{\phi},|\nabla\overline{\phi}|)\operatorname{div}(\nabla\overline{\phi}\otimes\nabla\overline{\phi}) + (\nabla\overline{\phi}\otimes\nabla\overline{\phi})\nabla(F(\overline{\phi},|\nabla\overline{\phi}|)).$$

Le premier terme peut encore se développer et s'écrire

$$F(\overline{\phi},|\nabla\overline{\phi}|)\,\mathrm{div}(\nabla\overline{\phi}\otimes\nabla\overline{\phi}) = E'(|\nabla\overline{\phi}|)\zeta(\phi)\left(\Delta\overline{\phi}\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|} + [D^2\overline{\phi}]\,\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}\right).$$

Pour le deuxième terme nous devons développer le gradient

$$\nabla(F(\overline{\phi},|\nabla\overline{\phi}|)) = \nabla\left(\frac{E'(|\nabla\overline{\phi}|)}{|\nabla\overline{\phi}|}\zeta(\overline{\phi})\right) = \nabla\left(\frac{E'(|\nabla\overline{\phi}|)}{|\nabla\overline{\phi}|}\right)\zeta(\overline{\phi}) + \frac{E'(|\nabla\overline{\phi}|)}{|\nabla\overline{\phi}|}\nabla\overline{\phi}\,\zeta'(\overline{\phi}).$$

En développant le premier terme avec la propriété $\nabla|\nabla\overline{\phi}| = [D^2\overline{\phi}]\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}$

$$\nabla\left(\frac{E'(|\nabla\overline{\phi}|)}{|\nabla\overline{\phi}|}\right) = \frac{1}{|\nabla\overline{\phi}|^2}\left(E''(|\nabla\overline{\phi}|)[D^2\overline{\phi}]\,\nabla\overline{\phi} - E'(\nabla\overline{\phi})[D^2\overline{\phi}]\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}\right).$$

En réécrivant tous les termes nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\Sigma(\overline{\phi},|\nabla\overline{\phi}|)\nabla\overline{\phi}\otimes\nabla\overline{\phi}) &= E'(|\nabla\overline{\phi}|)\zeta(\phi)\left(\Delta\overline{\phi}\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|} + [D^2\overline{\phi}]\,\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}\right)\\
&+ \frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}\otimes\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}\zeta(\phi)\left(E''(|\nabla\overline{\phi}|)[D^2\overline{\phi}]\,\nabla\overline{\phi} - E'(\nabla\overline{\phi})[D^2\overline{\phi}]\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}\right)\\
&+ E'(|\nabla\overline{\phi}|)|\nabla\overline{\phi}|\nabla\overline{\phi}\,\zeta'(\overline{\phi}).
\end{aligned}$$

Les termes de l'égalité précédente sont notés J_1, J_2 et J_3. L'idée est maintenant assez simple. Nous allons majorer tous les termes en utilisant la propriété $\left|\frac{\nabla\overline{\phi}}{|\nabla\overline{\phi}|}\right| \leq 1$. Nous obtenons donc pour le premier terme (ζ est borné)

$$|J_1| \leq C|E'(|\nabla\overline{\phi}|)|(|[D^2\overline{\phi}]| + |\Delta\overline{\phi}|).$$

Pour le deuxième terme nous obtenons

$$|J_2| \leq |[D^2\overline{\phi}]|(\,|\nabla\overline{\phi}||E''(|\nabla\overline{\phi}|)| + |E'(|\nabla\overline{\phi}|)|\,).$$

Pour le troisième terme nous obtenons

$$|J_3| \leq |E'(|\nabla\overline{\phi}|)||\nabla\overline{\phi}|^2.$$

Pour toute fonction f continue il existe une fonction G croissante tel que $\forall r > 0 \;\; f(r) \leq G(r)$. Il suffit en effet de choisir

$$G(r) = \sup_{s\in[0,r]}|f(s)|.$$

Les fonctions $r \mapsto |E'(r)|$ et $r \mapsto r|E''(r)| + |E'(r)|$ sont des fonctions continues d'après hypothèse (4.5). Nous avons donc

$$|E'(r)| \leq G(r) \qquad\qquad r|E''(r)| + |E'(r)| \leq G(r)$$

où la fonction G est différente dans chaque cas. Pour J_3

$$|J_3|_{L^p} \leq |\,|E'(|\nabla\overline{\phi}|)|_{L^\infty}|\nabla\overline{\phi}|^2_{L^\infty} \leq G(|\nabla\overline{\phi}|_{L^\infty})|\nabla\overline{\phi}|^2_{L^\infty}.$$

Nous utilisons à présent l'injection de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ et la croissance de G ainsi que la propriété de stabilité de régularisation en espace (4.10)

$$|J_3|_{L^p} \leq G(|\Delta\overline{\phi}|_{L^p})|\Delta\overline{\phi}|^2_{L^p} \leq G(|\Delta\phi|^p_{L^p}).$$

La même démonstration permet de majorer de la même façon J_1 et J_2. En utilisant une inégalité de convexité pour obtenir $|J_1 + J_2 + J_3|^p_{L^p} \leq C(|J_1|^p_{L^p} + |J_2|^p_{L^p} + |J_3|^p_{L^p})$ nous avons finalement

$$|\operatorname{div}(\Sigma(\overline{\phi}, |\nabla\overline{\phi}|))|^p_{L^p} \leq G(|\Delta\phi|^p_{L^p}). \tag{4.23}$$

Estimation finale pour l'équation de Stokes

Mettant bout à bout les estimations pour chaque terme non linéaire nous obtenons l'estimation

$$\boxed{\int_0^t |u_t|^p_{L^p}\,ds + \mu\int_0^t |\Delta u|^p_{L^p}\,ds + \int_0^t |\nabla\pi|^p_{L^p}\,ds \leq P(M_\infty(t))\left(1 + \int_0^t |\nabla\tilde{u}|^{2p}_{L^p}\,ds + \int_0^t G(|\Delta\phi|^p_{L^p})\,ds\right).} \tag{4.24}$$

Pour finir, nous allons estimer la norme L^p du gradient de u.

4.4.3 Estimation de $[\nabla u]$

Cette estimation utilise seulement le fait que u est à divergence nulle et nul aux bords. Rappelons que dans le cas de matrices la notation $|A|^2 = A : A$. Nous avons donc $2|\nabla u|\,|\nabla u|_t = 2[\nabla u] : [\nabla u_t]$. Cette relation combinée avec une intégration par parties donne

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}(|[\nabla u]|^p_{L^p}) = \int_\Omega [\nabla u_t] : [\nabla u]\,|[\nabla u]|^{p-2}\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}([\nabla u]\,|[\nabla u]|^{p-2}) \cdot u_t\,dx + \int_{\partial\Omega} |[\nabla u]|^{p-2}([\nabla u]\,n) \cdot u_t\,dx$$

Le dernier terme est nul en dérivant par rapport au temps la condition de Dirichlet homogène sur la vitesse. Développons à présent la divergence

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}(|[\nabla u]|^p_{L^p}) = \int_\Omega |[\nabla u]|^{p-2}\Delta u \cdot u_t\,dx + \int_\Omega ([\nabla u]\,\nabla(|[\nabla u]|^{p-2})) \cdot u_t\,dx.$$

Les deux termes apparaissant dans l'expression précédente sont notés J_1 et J_2. Utilisons une inégalité de Hölder pour le premier terme avec $q = p$ et $r = \frac{p}{p-2}$

$$|J_1| = \left|\int_\Omega |[\nabla u]|^{p-2}\Delta u \cdot u_t\,dx\right| \leq |\Delta u|_{L^p}|u_t|_{L^p}||[\nabla u]|^{p-2}|_{L^r}.$$

Le dernier terme se réécrit

$$||[\nabla u]|^{p-2}|_{L^r} = \left(\int_\Omega |[\nabla u]|^{r(p-2)}\right)^{\frac{1}{r}} = |[\nabla u]|_{L^p}^{p-2}.$$

Utilisons à présent l'injection de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)\bigcap W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$

$$|J_1| \leq |\Delta u|_{L^p}|u_t|_{L^p}|[\nabla u]|_{L^p}^{p-2} \leq C|\Delta u|_{L^p}^{p-1}|u_t|_{L^p}.$$

En utilisant une inégalité de Young nous obtenons finalement

$$|J_1| \leq C(|\Delta u|_{L^p}^p + |u_t|_{L^p}^p).$$

Développons maintenant le terme apparaissant dans J_2

$$\nabla(|[\nabla u]|^{p-2}) = (p-2)\nabla(|[\nabla u]|)\ |[\nabla u]|^{p-3} = (p-2)[D^2u][\nabla u]|[\nabla u]|^{p-4},$$

où nous avons noté $[D^2u][\nabla u]$ l'expression $\frac{1}{2}\nabla([\nabla u] : [\nabla u])$. Utilisons maintenant une inégalité de Hölder

$$|J_2| \quad = \quad (p-2)\left|\int_\Omega ([\nabla u][D^2u][\nabla u]|[\nabla u]|^{p-4}) \cdot u_t\ dx\right| \leq |u_t|_{L^p}|[D^2u]|_{L^p}||[\nabla u]|^{p-2}|_{L^r}.$$

Cette inégalité est obtenue en développant tous les termes et en utilisant une inégalité de Hölder scalaire. En regroupant, les termes obtenus se majorent par les normes L^p du membre de droite. Ce terme se majore donc exactement comme J_1. Nous obtenons donc finalement l'estimation voulue

$$\boxed{\frac{d}{dt}(|\nabla u|_{L^p}^p) \leq C(|\Delta u|_{L^p}^p + |u_t|_{L^p}^p)}. \tag{4.25}$$

Nous avons donc maintenant toutes les estimations nécessaires pour donner l'estimation finale.

4.4.4 Estimation finale

Dans la suite G désignera une fonction croissante positive qui ne sera pas la même dans chaque inégalité. En additionnant l'estimation sur $[\nabla u]$ (4.25) et celle sur l'équation de transport (4.21) nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(|\nabla u|_{L^p}^p + |\Delta\phi|_{L^p}^p) \leq C(1 + |u_t|_{L^p}^p + |\Delta u|_{L^p}^p + |\Delta\tilde{u}|_{L^p}^p + |\Delta\phi|_{L^p}^{\frac{p^2}{p-1}}).$$

Intégrant la relation précédente sur l'intervalle $[0,t]$ nous obtenons

$$|\nabla u(t)|_{L^p}^p + |\Delta\phi(t)|_{L^p}^p \leq C_0 + C\left(t + \int_0^t |\Delta u|_{L^p}^p\ ds + \int_0^t |\Delta\tilde{u}|_{L^p}^p\ ds + \int_0^t |u_t|_{L^p}^p\ ds + \int_0^t |\Delta\phi|_{L^p}^{\frac{p^2}{p-1}}\ ds\right).$$

D'après la stabilité de la régularisation en temps (4.8)

$$\int_0^t |\Delta \tilde{u}|_{L^p}^p \, ds \leq \int_0^t |\Delta u|_{L^p}^p \, ds.$$

Nous utilisons à présent l'estimation sur la vitesse (4.24) pour majorer les normes L^p de u_t et Δu

$$|\nabla u(t)|_{L^p}^p + |\Delta \phi(t)|_{L^p}^p \leq C_0 + C \left(t + \int_0^t |\Delta \phi|_{L^p}^{\frac{p^2}{p-1}} \, ds + 3P(M_\infty(t)) \left(1 + \int_0^t |\nabla \tilde{u}|_{L^p}^{2p} \, ds + \int_0^t G(|\Delta \phi|_{L^p}^p) \, ds \right) \right)$$

En notant encore G une fonction croissante, l'expression précédente peut donc être majorée par

$$|\nabla u(t)|_{L^p}^p + |\Delta \phi(t)|_{L^p}^p \leq C(1 + P(M_\infty(t))) \int_0^t G(|\nabla \tilde{u}(t)|_{L^p}^p + |\Delta \phi(t)|_{L^p}^p) \, ds.$$

Posons

$$y(t) = \sup_{s \leq t} (|\nabla u(s)|_{L^p}^p + |\Delta \phi(s)|_{L^p}^p).$$

Par croissance de G et la propriété de stabilité de la régularisation temporelle (4.8)

$$\int_0^t G(|\nabla \tilde{u}(t)|_{L^p}^p + |\Delta \phi(t)|_{L^p}^p) \, ds \leq tG(\sup_{s \leq t} (|\nabla \tilde{u}(s)|_{L^p}^p + |\Delta \phi(s)|_{L^p}^p)) \leq tG(y(t)).$$

En utilisant l'estimation sur $M_\infty(t)$ (4.22) et en remettant la dépendance en η

$$y_\eta(t) \leq C(1 + G_1(y_\eta(t)))tG(y_\eta(t)),$$

que nous pouvons réécrire

$$y_\eta(t) \leq tG(y_\eta(t)).$$

La fonction y_η dépendant uniquement des conditions initiales et du domaine. Un raisonnement de type Gronwall donne l'existence d'un temps $T^\star$ sur lequel $y_\eta(t) \leq C$ sur $[0, T^\star]$ avec C indépendant de η.

Estimations obtenues et utilisation de la compacité

Nous obtenons donc les estimations suivantes ($|\phi|_{L^p}$ est borné d'après (4.17))

$$u_\eta \text{ est borné uniformément en } \eta \text{ dans } L^\infty(0, T^*; W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4.26}$$

$$\phi_\eta \text{ est borné uniformément en } \eta \text{ dans } L^\infty(0, T^*; W^{2,p}(\Omega)). \tag{4.27}$$

En utilisant (4.24) nous obtenons les estimations suivantes

$$(u_\eta)_t \text{ est borné uniformément en } \eta \text{ dans } L^p(0,T^*;L^p(\Omega)), \tag{4.28}$$

$$u_\eta \text{ est borné uniformément en } \eta \text{ dans } L^p(0,T^*;W^{2,p}(\Omega). \tag{4.29}$$

Il nous manque une dernière estimation sur $(\phi_\eta)_t$ pour pouvoir utiliser les résultats de compacité. Pour l'obtenir, nous repartons de l'équation de transport (4.2) et nous utilisons l'inclusion de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$

$$|(\phi_\eta)_t|_{L^p} \leq |\nabla\phi_\eta|_{L^\infty}|\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^p} \leq C|\phi_\eta|_{W^{2,p}}|\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^p} \leq C|\phi_\eta|_{L^\infty(0,t;W^{2,p})})|\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^\infty(0,t;L^p)}.$$

En utilisant la condition de stabilité (4.8) ainsi que les estimations que nous venons d'obtenir (4.26) et (4.27) nous obtenons

$$(\phi_\eta)_t \text{ est borné uniformément en } \eta \text{ dans } L^\infty(0,T^*;L^p(\Omega)). \tag{4.30}$$

En utilisant les résultats de compacité (3.8) nous obtenons l'existence de ϕ et u qui vérifient (à une sous suite près)

$$\phi_\eta \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \phi \quad \text{dans } \mathcal{C}^0(0,T^*;W^{1,\infty}(\Omega)) \quad \text{fortement}, \tag{4.31}$$

$$u_\eta \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } L^p(0,T^*;W^{1,\infty}(\Omega)) \quad \text{fortement}. \tag{4.32}$$

Convergence des suites régularisées

Dans le problème approchée il apparaît aussi les quantités régularisées. Il faut donc montrer que ces quantités convergent aussi. Il est bien connu que la convergence de la convolution d'une fonction f appartenant à L^p par un noyau θ_η converge vers f en norme L^p. Dans le cas qui nous intéresse la fonction f dépend du paramètre η. Dans ce cas il est nécessaire d'avoir des informations sur les dérivées de f pour obtenir la convergence.

Dans le cas d'une régularisation en temps nous avons par construction de $\tilde{u}_\eta^\eta$

$$\tilde{u}_\eta^\eta(\cdot,t) - u_\eta(\cdot,t) = \frac{1}{\eta}\int_\eta^{2\eta}(u_\eta(\cdot,t-s) - u_\eta(\cdot,t))\xi\left(\frac{s}{\eta}\right)ds.$$

En utilisant un développement de Taylor Lagrange et (4.28)

$$|\tilde{u}_\eta^\eta - u_\eta|_{L^p(0,T^*;L^p)} \leq C\eta|(u_\eta)_t|_{L^p(0,T^*;L^p)} \leq C\eta.$$

On obtient donc avec (4.32)

$$\tilde{u}_\eta^\eta \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } L^p(0,T^*;L^p(\Omega)). \tag{4.33}$$

Dans le cas de la régularisation spatiale, nous avons des estimations sur la dérivée seconde en espace (4.27) donc en suivant le même raisonnement que précédemment nous obtenons

$$\overline{\phi}_\eta^\eta \underset{\eta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \phi \text{ dans } C^0(0,T^*;W^{1,\infty}(\Omega)). \tag{4.34}$$

Toutes les convergences obtenues vont nous permettre de passer à la limite dans le problème régularisé. Comme la convergence obtenue pour la régularisée en temps $\tilde{u}_\eta^\eta$ (4.33) est beaucoup plus faible que celle obtenue avec u_η (4.32) nous allons réécrire le terme d'inertie sous forme divergence. Pour cela nous utilisons que u est à divergence nulle ainsi que le fait que $\rho(\phi)$ vérifie la même équation de transport que ϕ (nous avons enlevé les indices provisoirement)

$$\begin{aligned}(\rho(\phi)u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) &= \rho(\phi)(u_t + (u\cdot\nabla)u) + u((\rho(\phi))_t + u\cdot\nabla(\rho(\phi)) + \rho(\phi)\operatorname{div}(u)) \\ &= \rho(\phi)(u_t + (u\cdot\nabla)u).\end{aligned}$$

4.5 Passage à la limite

Nous allons mettre l'équation régularisée sous forme variationnelle et passer à la limite grâce à la convergence forte obtenue pour ϕ_η, u_η ainsi que leurs régularisées. Pour mettre le problème sous forme variationnelle nous considérons des fonctions tests de la forme $v(x)\psi(t)$ pour simplifier la présentation. La fonction ψ est prise dans $\mathcal{D}(]0,T^\star[)$ (fonctions $\mathcal{C}^\infty(]0,T^\star[)$ à support compact) et la fonction v dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact) avec la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div}(v) = 0$. Pour l'équation de transport, nous choisissons une fonction test w appartenant à l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. La fonction v étant nulle aux bords et à divergence nulle, les termes de bords seront nuls dans les intégrations par parties. La formulation variationnelle est donc la suivante

$$\int_0^{T^\star}\int_\Omega (\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)u_\eta)_t \cdot v\ \psi\ dxdt - \int_0^{T^\star}\int_\Omega \rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)\tilde{u}_\eta^\eta \otimes \tilde{u}_\eta^\eta : \nabla v\ \psi\ dxdt \tag{4.35}$$

$$+\ \mu\int_0^{T^\star}\int_\Omega \nabla u_\eta : \nabla v\ \psi\ dxdt = \int_0^{T^\star}\int_\Omega \Sigma(\overline{\phi}_\eta^\eta, |\nabla\overline{\phi}_\eta^\eta|) : \nabla v\ \psi\ dxdt. \tag{4.36}$$

$$\int_0^{T^\star}\int_\Omega (\phi_\eta)_t\ w\ \psi\ dxdt + \int_0^{T^\star}\int_\Omega \tilde{u}_\eta^\eta \cdot \nabla\phi_\eta\ w\ \psi\ dxdt = 0. \tag{4.37}$$

Remarquons que lors de l'extraction de sous suites qui convergent grâce aux théorèmes de compacité, $(\phi_\eta)_t$ converge effectivement vers ϕ_t et pas autre chose. Ce résultat est général et se montre grâce à l'unicité de la limite au sens des distributions. La même remarque est valable pour u_η. Les fonctions tests étant régulières et à support compact nous les majorerons à chaque fois en norme infinie par une constante. Pour plus de lisibilité, les $dx\ dt$ intervenant dans les intégrales ont été omis. Commençons l'étude par le cas le plus simple de l'équation de transport.

4.5.1 Equation de transport

Terme de dérivée en temps sur ϕ

Pour ce terme, la convergence faible va permettre de passer à la limite. Il est simple de voir que la forme linéaire $f \mapsto \int_0^{T^\star}\int_\Omega f\ w\ \psi$ est continue sur l'espace $L^1(0,T^\star;L^q(\Omega))$. Or d'après l'estimation (4.30)

$$(\phi_\eta)_t \underset{m\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup^\star} \phi_t \qquad \text{dans} \qquad L^\infty(0,T^\star;L^p(\Omega)) = (L^1(0,T^\star;L^q(\Omega)))'.$$

Nous obtenons donc facilement par convergence faible

$$\int_0^{T^\star}\int_\Omega (\phi_\eta)_t\ w\ \psi \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_0^{T^\star}\int_\Omega \phi_t\ w\ \psi.$$

Terme de transport

Nous écrivons

$$\tilde{u}_\eta^\eta\cdot\nabla\phi_\eta - u\cdot\nabla\phi = (\tilde{u}_\eta^\eta - u)\cdot\nabla\phi_\eta + u\cdot(\nabla\phi_\eta - \nabla\phi).$$

Pour le premier terme on utilise (4.27) et (4.33) ($W^{2,p}\hookrightarrow W^{1,\infty}$)

$$\left|\int_0^{T^\star}\int_\Omega (\tilde{u}_\eta^\eta - u)\cdot\nabla\phi_\eta\ w\ \psi\right| \ \leq\ C|\phi_\eta|_{L^\infty(0,T^\star;W^{1,\infty})}\ |\tilde{u}_\eta^\eta - u|_{L^p(0,T^\star;L^p)} \leq C|\tilde{u}_\eta^\eta - u|_{L^p(0,T^\star;L^p)} \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour le deuxième terme on utilise (4.31) et (4.32)

$$\left|\int_0^{T^\star}\int_\Omega u\cdot(\nabla\phi_\eta - \nabla\phi)\ w\ \psi\right| \ \leq\ C|u|_{L^p(0,T^\star,L^p)}\ |\phi_\eta - \phi|_{L^\infty(0,T^\star;W^{1,\infty})} \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Passons maintenant à la convergence des termes dans l'équation sur la vitesse.

4.5.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Terme de la force élastique

Σ est continu pour la norme uniforme car produit de fonctions continues (on utilise l'hypothèse (4.5)). D'après (4.34), $\overline{\phi}_\eta^\eta$ converge uniformément donc $\Sigma(\overline{\phi}_\eta^\eta, |\nabla\overline{\phi}_\eta^\eta|)$ converge également uniformément vers $\Sigma(\phi, |\nabla\phi|)$ qui est donc continu et borné. Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\int_0^{T^\star}\int_\Omega \Sigma(\overline{\phi}_\eta^\eta, |\nabla\overline{\phi}_\eta^\eta|) : \nabla v\ \psi \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_0^{T^*}\int_\Omega \Sigma(\phi, |\nabla\phi|) : \nabla v\ \psi. \tag{4.38}$$

Terme de dérivée temporelle

On commence par utiliser une intégration par parties en temps (les termes de bords sont nuls car $\psi \in \mathcal{D}(]0,T^\star[)$)

$$\int_0^{T^\star}\int_\Omega (\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)u_\eta)_t\cdot v\ \psi = -\int_0^{T^\star}\int_\Omega \rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)u_\eta\cdot v\ \psi_t.$$

Nous écrivons à présent

$$\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)u_\eta - \rho(\phi)u = (\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta) - \rho(\phi))u_\eta + \rho(\phi)(u_\eta - u).$$

Pour le premier terme on utilise (4.32) et (4.34)

$$\left|\int_0^{T^\star}\int_\Omega (\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta) - \rho(\phi))u_\eta \cdot v\ \psi_t\right| \leq C|\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta) - \rho(\phi)|_{L^\infty(0,T^\star,L^\infty)}|u_\eta|_{L^p(0,T^\star;L^p)} \leq C|\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta) - \rho(\phi)|_{L^\infty(0,T^\star,L^\infty)}.$$

Le terme précédent tend vers 0 avec un argument similaire à celui utilisé pour la force élastique (4.38). Pour le deuxième terme on utilise (4.32) et (4.31)

$$\left|\int_0^{T^*}\int_\Omega \rho(\phi)(u_\eta - u)\cdot v\ \psi_t\right| \leq |\rho(\phi)|_{L^\infty(0,T^\star,L^\infty)}|u_\eta - u|_{L^p(0,T^\star;L^p)} \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Terme d'inertie

Utilisons la décomposition suivante

$$\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)\tilde{u}_\eta^\eta \otimes \tilde{u}_\eta^\eta - \rho(\phi)u\otimes u = \rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)\tilde{u}_\eta^\eta \otimes (\tilde{u}_\eta^\eta - u) + \rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)(\tilde{u}_\eta^\eta - u)\otimes u + (\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta) - \rho(\phi))u\otimes u.$$

Pour le premier terme on utilise (4.34), la stabilité (4.8) ainsi que (4.26) et (4.33)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{T^*}\int_\Omega \rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)\tilde{u}_\eta^\eta\otimes(\tilde{u}_\eta^\eta - u) : \nabla v\ \psi\right| &\leq |\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta)|_{L^\infty(0,T^\star,L^\infty)}|\tilde{u}_\eta^\eta|_{L^\infty(0,T^\star,L^\infty)}|\tilde{u}_\eta^\eta - u|_{L^p(0,T^\star,L^p)}\\ ‘ &\leq C|\tilde{u}_\eta^\eta - u|_{L^p(0,T^\star,L^p)} \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Le deuxième terme se traite de manière analogue. Pour le troisième terme on utilise (4.32) et le même argument que pour la force élastique

$$\left|\int_0^{T^*}\int_\Omega (\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta) - \rho(\phi))u\otimes u : \nabla v\ \psi\right| \leq |\rho(\overline{\phi}_\eta^\eta) - \rho(\phi)|_{L^\infty(0,T^\star,L^\infty)}|u|^2_{L^\infty(0,T^\star,L^\infty)} \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Terme de diffusion

Il suffit de faire une majoration qui permet d'utiliser la convergence (4.32)

$$\left|\int_0^{T^*}\int_\Omega (\nabla u_\eta - \nabla u) : \nabla v\ \psi\right| \leq C|u_\eta - u|_{L^p(0,T^\star;W^{1,\infty})} \underset{\eta\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Nous avons avons donc réussi à passer à la limite dans tous les termes de l'équation et nous obtenons donc le résultat annoncé dans le théorème.

Conditions initiales et pression

Pour retrouver la pression il suffit d'utiliser la formulation variationnelle et d'utiliser le théorème de Rham. Pour ce qui est des conditions initiales, les résultats de compacité obtenus permettent de montrer que les fonctions ϕ et u sont en fait continues en temps. Les conditions initiales et u_0 et ϕ_0 ont donc du sens et elles peuvent se retrouver en intégrant par parties les termes de dérivée en temps dans la formulation variationnelle.

4.6 Conclusions et perspectives

La formulation eulérienne du couplage fluide-structure a permis d'écrire les équations du modèle comme un fluide complexe avec un tenseur des contraintes plus général que celui obtenu pour les fluides de Korteweg. Nous avons alors montré l'existence locale de solutions fortes à partir d'un problème régularisé et des estimations adéquates. Rappelons que nous avons choisi $\varepsilon = 1$ dans la démonstration du théorème. Il s'en suit que le temps d'existence dépend du paramètre ε. Il ne semble pas envisageable pour le moment de trouver un temps d'existence indépendant de ε car la régularisation fait apparaître un $1/\varepsilon$ dans la force élastique.

Dans les applications, il arrive fréquemment que les viscosités intérieure et extérieure soient différentes et donc que $\mu = \mu(\phi)$. Dans ce cas, le terme visqueux s'écrit $\mathrm{div}(\mu(\phi)D(u))$ que l'on peut développer en deux parties. Le premier terme fait apparaître un laplacien qui se traite comme dans l'étude précédente. Le deuxième terme serait mis dans le second membre lors de l'estimation L^p pour le problème de Stokes. Des estimations de ce terme par des dérivées d'ordre deux de ϕ et d'ordre un pour u semblent envisageables.

L'unicité semble difficile à obtenir à cause de la loi de comportement fortement non linéaire. Dans le cas simple où $E'(r) = r$ (fluide de Korteweg) le terme élastique devient plus simple et il est possible d'obtenir l'unicité comme dans l'article [46]. Les lois qui nous intéressent pour l'étude de forces élastiques sont de la forme $E'(r) = r - 1$ ce qui complique fortement l'étude à cause du terme en $|\nabla\phi|$ au dénominateur de la force élastique. Il sera également intéressant de regarder de plus près les estimations obtenues pour montrer l'existence globale pour des données petites.

Ce travail a été publié dans [16].

Troisième partie

Prise en compte de la courbure

Introduction

Dans la première partie, nous avons introduit un modèle eulérien de couplage fluide-structure où l'interface est capturée par une fonction level set. Dans le cas où la membrane est plongée dans un champ de vitesse incompressible, la quantité $|\nabla\phi|$ permet d'avoir accès à la variation d'aire (en dimension 3). Cette propriété permet alors de postuler une énergie élastique qui est localisée au voisinage de l'interface. Les applications qui nous intéressent concernent la biomécanique où les membranes de cellules biologiques possèdent des propriétés élastiques. Comme l'épaisseur de la la membrane est très faible devant les autres dimensions il est naturel d'utiliser un modèle de plaque mince. Les termes obtenus au premier ordre sont de deux types. Un premier appelé membranaire et liée à la variation locale d'aire et un deuxième lié aux déformations en cisaillement. Un cas particulier important de cellules de part sa simplicité est celui des vésicules phospholipidiques (4.2). Elles sont constituées de têtes hydrophiles et hydrophobes qui s'organisent de telle sorte à former des couches lipidiques qui peuvent être considérées comme fluides. Dans ce cas, il n'y a pas de contrainte créée lors d'un cisaillement et seule la variation d'aire engendre une contrainte. Le modèle élastique développé dans la première partie est donc parfaitement adapté pour modéliser ce type de vésicules.

Cependant, les forces de cohésions internes dans ces vésicules sont importantes et donnent lieu à une métrique qui ne varie quasiment pas. Dans ce cas, il est d'important de considérer un terme de flexion obtenu à un ordre plus élevé dans les modèles de plaques minces élastiques. C'est cette énergie qui pilote en particulier la forme de ces vésicules (4.3, (4.4).

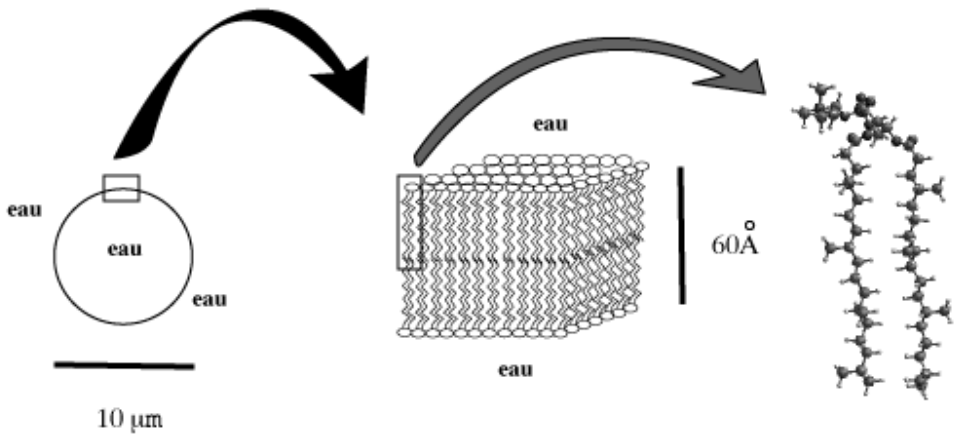

FIG. 4.2 – Vésicule phospholipidique, image tirée d'un article du Max Plank institute

Comme les déformations sont faibles nous pouvons utiliser le modèle de flexion introduit dans la première partie dans le cas d'un matériau de Saint-Venant Kirchoff (1.30). Notons $\partial\Omega$ la surface moyenne de la plaque mince et H et G les courbures moyenne et de Gauss de $\partial\Omega$. L'énergie de flexion est alors donnée par

$$\mathcal{E}_c = \int_{\partial\Omega} \alpha H^2 + \beta G \, d\sigma. \tag{4.39}$$

Pour intégrer cette énergie au modèle, il faut calculer la force associée avec le principe des travaux virtuels. Pour ce faire, il est nécessaire de procéder à la différentiation de (4.39). Cette fonctionnelle dépend de la surface $\partial\Omega$ considérée, il est donc naturel de se demander quelle méthode d'optimisation de forme nous allons utiliser.

Cette dernière partie va être découpée en deux chapitres. Un premier concernant la différentiation de l'énergie (4.39) avec plusieurs méthodes d'optimisation de formes. La deuxième est consacré à quelques applications numériques sur les formes d'équilibre de vésicules et le comportement dans un écoulement en cisaillement.

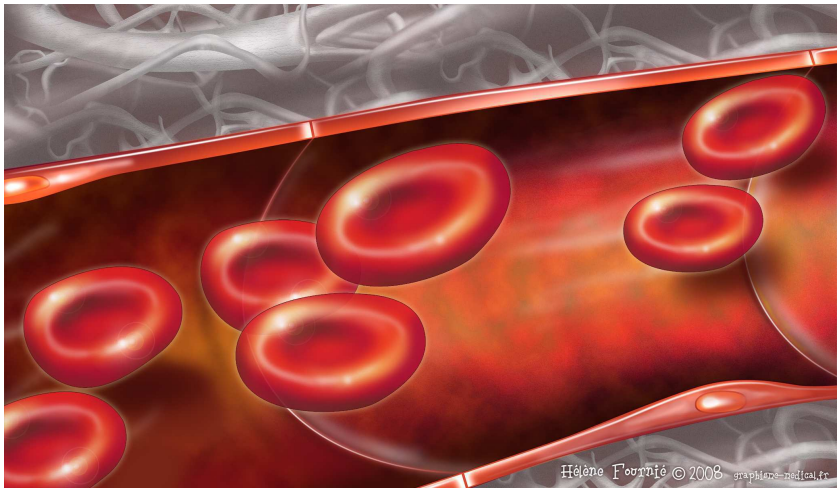

FIG. 4.3 – Vue d'artiste de globules rouges dans le sang réalisée par Hélène Fournier

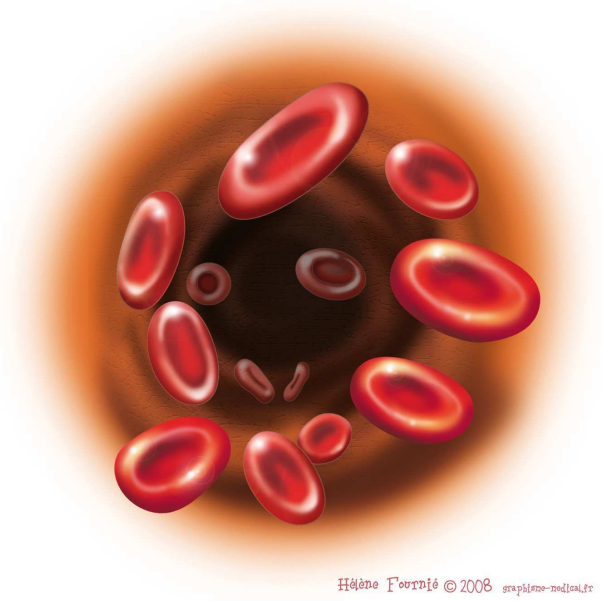

FIG. 4.4 – Vue d'artiste de globules rouges dans le sang réalisée par Hélène Fournier

Chapitre 5

Dérivation de fonctionnelles géométriques

5.1 Problématique

Dans la première partie nous avons introduit la fonctionnelle élastique

$$\mathcal{E}_e(\phi) = \int_Q E(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx.$$

Pour calculer la différentielle, nous avons introduit un champ de vitesse u qui transporte la fonction ϕ. Ceci permet de faire un calcul simple où la variation de l'énergie se calcule en dérivant par rapport à t. Il suffit ensuite d'utiliser l'équation de transport et une intégration par parties pour calculer l'expression de la différentielle sous la forme $\int_Q F\ u\cdot n$ et ainsi en déduire la force associée avec le principe des travaux virtuels (2.20). Ces calculs sont rendus relativement simples car le domaine d'intégration est un volume Q qui est fixé.

Le but de ce chapitre est de calculer la différentielle d'une fonctionnelle dépendant de la courbure dans le but de trouver la force associée à l'énergie (4.39). Pour se placer d'un point de vue plus général nous nous intéressons à des fonctionnelles géométriques de la forme

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x,\Omega)\, d\sigma,$$

où $f(x,\Omega)$ dépend de quantités géométriques telles la normale et la courbure qui sont définies sur la surface $\partial\Omega$. Dans ce cas, contrairement à l'énergie élastique, le domaine d'intégration (qui est une surface) varie lorsque l'on fait varier la forme.

Pour faire varier la forme, une idée naturelle est d'introduire une fonction level set ϕ dont la ligne de niveau 0 représente la surface $\partial\Omega$. Les quantités géométriques définies sur la surface pouvant être calculées avec cette fonction ϕ, la fonctionnelle précédente se réécrit alors (on omet la dépendance en x)

$$J(\phi) = \int_{\{\phi=0\}} f[\phi]\, d\sigma.$$

La notation $f[\phi]$ désigne une fonction f qui dépend de ϕ ainsi que les dérivées de ϕ (typiquement la normale et la courbure).

Le calcul de la différentielle de cette fonctionnelle consiste à faire varier la fonction ϕ et conserver le terme linéaire que l'on obtient au premier ordre. Le principal problème provient du fait que le domaine d'intégration est une surface qui n'est pas fixe. Pour contourner ce problème, une première méthode consiste à approcher cette fonctionnelle avec une régularisation volumique à l'aide d'une fonction cut off ζ et un paramètre ε par la formule

$$J_\varepsilon(\phi) = \int_Q f[\phi]\ |\nabla\phi|\ \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx.$$

Cette approximation a déjà été introduite dans la première partie (2.10) et se justifie avec la formule de la coaire. L'avantage principal de cette approximation est de se ramener à un domaine fixe Q qui est volumique. La formule précédente a bien un sens car les objets géométriques tels que la normale et la courbure sont définis sur tout l'espace. Pour calculer la différentielle de cette fonctionnelle, nous procédons comme pour l'énergie élastique. Nous introduisons un champ de vitesse $u(x,t)$ transportant $\phi(\cdot,t)$ qui dépend maintenant du temps. Nous pouvons donc utiliser le calcul différentiel classique en dérivant par rapport au paramètre t. Il suffit ensuite de faire tendre ε vers 0 pour en déduire la dérivée recherchée initialement.

Il est naturel de se demander si les résultats obtenus restent les mêmes si on ne procède pas à une régularisation volumique. Dans cette optique, nous allons utiliser une formule de Reynolds surfacique qui permet de calculer la différentielle de la fonctionnelle en restant sur la surface. Ce calcul est nouveau et constitue la contribution la plus importante de ce chapitre. Nous verrons que dans ce cas, des intégrations par parties sur les surfaces doivent être utilisées et permettent d'introduire les opérateurs surfaciques.

Une fonction ϕ arbitraire étant choisie pour faire les calculs précédents, le résultat va *a priori* dépendre de la fonction ϕ choisie et ainsi d'un prolongement des quantités en dehors de la ligne de niveau 0. Pour avoir une vision plus géométrique, nous effectuerons les calculs en représentant la surface par une paramétrisation $(u^1,u^2) \mapsto X(u^1,u^2)$. La fonctionnelle précédente s'écrit

$$J = \int_U f[X]\ |X_{,1} \wedge X_{,2}|\ du^1 du^2. \tag{5.1}$$

La notation $f[X]$ désigne une fonction f qui dépend de la paramétrisation X ainsi que des dérivées de X.

Pour calculer la différentielle, il suffit de déformer la surface dans la direction de la normale et de calculer la variation de chaque terme présent dans l'intégrale qui est écrit sur un domaine fixe. C'est cette méthode qui a été utilisée par Willmore [51] pour calculer la variation de la fonctionnelle $\int_{\partial\Omega} H(\Omega)^2\ d\sigma$. Nous développerons ce point de vue dans la troisième méthode d'optimisation.

Plan du chapitre

Nous nous intéressons dans cette partie à la dérivation de fonctionnelles géométriques par plusieurs méthodes. Le point central résidant dans la définition de la courbure nous commencerons par définir cette notion de manière surfacique puis nous regarderons les formules obtenues dans le cas de prolongement unitaire de la normale. Nous introduirons ensuite la méthode de dérivation par level set basée sur une régularisation volumique de la fonctionnelle surfacique à l'aide d'un paramètre ε et d'une fonction cut

off permettant de localiser la surface. Le principal avantage de cette méthode réside dans sa simplicité mais le résultat final dépendra *a priori* du prolongement de ϕ à l'extérieur de la surface. Pour ne pas utiliser d'approximation volumique, nous considèrerons une formule de Reynolds surfacique qui permet de faire les calculs en restant sur la surface. Nous finirons ce chapitre en introduisant les outils de géométrie différentielle qui permettent de faire les calculs sans faire appel à un prolongement en dehors de la surface. Dans ce cas, le résultat dépend uniquement de la surface c'est à dire de la courbure et d'opérateurs surfaciques. Nous comparerons alors les différents résultats obtenus en montrant l'équivalence dans le cas de fonctionnelles dépendant de la normale ainsi que de la courbure moyenne. Nous montrerons également l'équivalence de la première et la troisième méthode d'optimisation dans le cas d'une fonctionnelle dépendant de la courbure de Gauss qui intervient naturellement dans (4.39) en nous restreignant à une fonction distance.

5.2 Calcul de la courbure

Dans un grand nombre d'applications, le calcul de la normale et de la courbure est indispensable pour pouvoir faire évoluer une interface représentée mathématiquement par une surface de $\mathbb{R}^3$. Ces quantités peuvent se définir sur la surface à l'aide d'une paramétrisation (voir Annexe du chapitre 7) mais également à l'aide de fonctions définies sur tout l'espace dans le cadre d'une représentation implicite. Les quantités ayant un sens uniquement sur la surface il est donc nécessaire de construire des opérateurs qui ne dépendent pas du prolongement choisi à l'extérieur de celle-ci.

Dans la suite, Ω désigne un ouvert connexe régulier de $\mathbb{R}^3$ et on note $\partial\Omega$ sa frontière qui est donc une surface de $\mathbb{R}^3$ (FIG 5.1). La notation utilisée ici est différente de celle introduite dans les autres parties où le domaine Ω désignait un ouvert contenant le fluide et la surface.

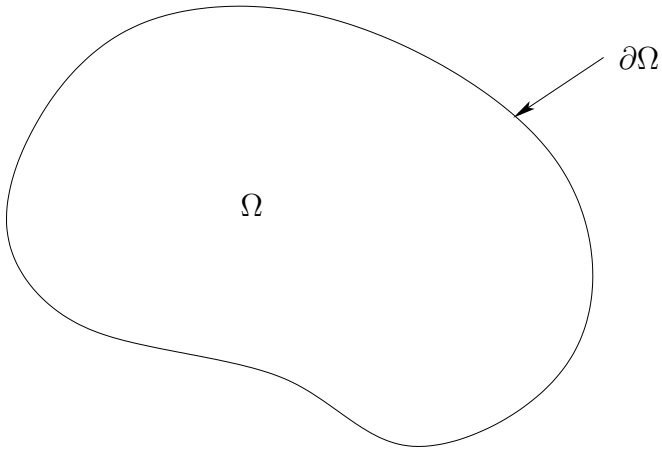

FIG. 5.1 – Representation d'une surface $\partial\Omega$

5.2.1 Opérateurs surfaciques

Nous allons construire des opérateurs différentiels associés à des fonctions ou des champs de vecteurs définis sur tout l'espace comme la projection des opérateurs différentiels classiques sur le plan tangent. Cette construction est rendue possible grâce à l'opérateur de projection P défini par, pour $w \in \mathbb{R}^3$

$$P(w) = (I - n \otimes n)(w) = w - (w \cdot n)n,$$

où n désigne un prolongement quelconque de la normale sortante à la surface. Les opérateurs surfaciques que nous allons définir peuvent être trouvés dans [28] et [43].

Gradient surfacique

On définit le gradient surfacique d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ noté $\nabla_{\partial\Omega} f$ comme la composante tangentielle du gradient de f

$$\nabla_{\partial\Omega} f = (I - n \otimes n)\nabla f = \nabla f - (\nabla f \cdot n)n.$$

Il est montré dans [28] que le gradient tangentiel est indépendant du prolongement choisi pour f à l'extérieur de la surface. Une propriété importante et évidente de cet opérateur est

$$\nabla_{\partial\Omega} f \cdot n = 0. \tag{5.2}$$

Définissons à présent le gradient surfacique d'un champ de vecteur $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par la formule

$$[\nabla_{\partial\Omega} v] = [\nabla v](I - n \otimes n). \tag{5.3}$$

Cette définition correspond à choisir le gradient surfacique de chaque composante v_i du vecteur v car la ième ligne de $[\nabla_{\partial\Omega} v]$ est $\nabla_{\partial\Omega} v_i$. Cet opérateur ne dépend donc pas du choix du prolongement de v choisi à l'extérieur de la surface. Nous avons de plus la propriété évidente $[\nabla_{\partial\Omega} v]\ n = 0$.

Divergence surfacique

Définissons la divergence surfacique d'un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ noté $\mathrm{div}_{\partial\Omega}(v)$ par

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) = \mathrm{Tr}([\nabla_{\partial\Omega} v]) = \mathrm{div}(v) - ([\nabla v]\ n) \cdot n. \tag{5.4}$$

D'après les propriétés du gradient surfacique d'un champ de vecteurs nous en déduisons que cet opérateur est également indépendant du prolongement choisi. On peut également définir la divergence surfacique d'une matrice $\tau : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ comme étant la divergence surfacique de chaque vecteur ligne τ_i de la matrice τ

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(\tau) = \mathrm{div}(\tau) - (\nabla\tau\ n) \cdot n,$$

avec la convention $[(\nabla\tau\ n) \cdot n]_i = (\nabla\tau_i\ n) \cdot n$. Cet opérateur ne dépend pas du prolongement choisi.

Laplacien surfacique

On définit le laplacien surfacique noté $\Delta_{\partial\Omega}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Delta_{\partial\Omega} f = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega} f).$$

Comme précédemment cet opérateur ne dépendant pas du prolongement choisi. Nous allons maintenant pouvoir définir l'opérateur surfacique associé à la courbure.

5.2.2 Courbure d'une surface

Opérateur surfacique associé à n et courbure

Pour les surfaces, la courbure est calculée à partir de la variation du vecteur normal sortant dans le plan tangent. Nous définissons donc l'opérateur surfacique de courbure en utilisant (5.3)

$$[\nabla_{\partial\Omega} n] = [\nabla n](I - n \otimes n). \tag{5.5}$$

Nous avons simplement que $[\nabla_{\partial\Omega} n]\ n = 0$ donc n est vecteur propre associé à la valeur propre 0. On se place maintenant en un point x de la surface et l'on considère la base (e_1, e_2, n) où (e_1, e_2) est la base orthonormée du plan tangent qui diagonalise dn (voir Annexe du chapitre 7). Les courbures principales κ_1 et κ_2 sont donc les deux valeurs propres de $[\nabla_{\partial\Omega} n]$ associées aux vecteurs propres e_1 et e_2.

Nous venons donc de montrer que les valeurs propres de l'opérateur $[\nabla_{\partial\Omega} n]$ en un point de la surface sont $0, \kappa_1, \kappa_2$. Rappelons qu'une matrice de taille 3 a trois invariants qui sont les valeurs propres ou de manière équivalente la trace, la trace des cofacteurs et le déterminant de la matrice. La trace correspond à la somme des valeurs propres, la trace des cofacteurs correspond à la somme de leur produit deux à deux et le déterminant à leur produit.

Courbure moyenne et courbure de Gauss "surfacique"

D'après l'annexe du chapitre 7 (7.24), la courbure moyenne se définie comme la somme de κ_1 et κ_2 qui est donc la trace de $[\nabla_{\partial\Omega} n]$

$$\boxed{H = \mathrm{Tr}([\nabla_{\partial\Omega} n]) = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(n).} \tag{5.6}$$

Quant à la courbure de Gauss, elle se définie à l'aide du produit de κ_1 et κ_2. Il nous faut donc calculer le produit des valeurs propres non nulles qui est donné par la trace des cofacteurs

$$\boxed{G = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}([\nabla_{\partial\Omega} n])).} \tag{5.7}$$

Les propriétés des opérateurs surfaciques montrent que les courbures ainsi définies ne dépendent pas du prolongement choisi pour n.

Cas d'un prolongement de la normale de norme 1

Dans le cas d'un prolongement de la normale vérifiant $|n|^2 = 1$ nous obtenons en dérivant

$$[\nabla n]^T n = 0. \tag{5.8}$$

On en déduit facilement la relation $([\nabla n]\ n) \cdot n = 0$. La formule (5.8) va maintenant permettre d'apporter des simplifications pour le calcul de la courbure. En utilisant la définition (5.6) et la propriété (5.8) nous obtenons

$$\boxed{H = \mathrm{Tr}([\nabla n]) = \mathrm{div}(n).} \tag{5.9}$$

Pour la courbure de Gauss utilisons la propriété $\mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(A)) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2))$ et la définition (5.7)

$$2G = (\mathrm{Tr}([\nabla n](I - n \otimes n)))^2 - \mathrm{Tr}([\nabla n](I - n \otimes n)[\nabla n](I - n \otimes n)).$$

Pour le premier terme nous utilisons (5.8) pour obtenir $\mathrm{Tr}([\nabla n](n \otimes n)) = ([\nabla n]\ n) \cdot n = 0$. Pour le deuxième terme nous utilisons la propriété (5.8) pour obtenir $(n \otimes n)[\nabla n] = n \otimes ([\nabla n]^T\ n) = 0$ qui implique

$$\mathrm{Tr}([\nabla n]^2(n \otimes n)) = \mathrm{Tr}([\nabla n](n \otimes n)[\nabla n]) = 0.$$

Il reste donc

$$\boxed{G = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}([\nabla n])).} \tag{5.10}$$

Dans toute l'étude qui va suivre nous utiliserons des prolongements unitaires de la normale

Passons maintenant en revue quelques propriétés des fonctions level set qui seront utiles dans la suite.

5.2.3 Propriétés des fonctions level set

Une surface régulière $\partial\Omega$ peut être représentée par la ligne de niveau 0 d'une fonction régulière ϕ

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 / \phi(x) = 0\}.$$

La fonction ϕ est définie sur l'espace entier mais seule la ligne de niveau 0 contient des informations sur la surface. En particulier, il faudra veiller à ce que les notions géométriques introduites par la suite ne dépendent pas de la fonction level set choisie mais uniquement de sa ligne de niveau 0.

Rappelons que $\nabla\phi$ est un vecteur orthogonal au plan tangent construit sur chaque ligne de niveau de ϕ. Il est donc naturel de définir la normale par la formule

$$n(\phi) = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}. \tag{5.11}$$

Nous choisissons comme convention que ϕ est négative à l'intérieur de la surface et positive sinon. La normale (5.11) est donc orientée vers l'extérieur de la surface. Le prolongement de la normale étant unitaire d'après (5.11) nous pouvons calculer la courbure à l'aide de (5.9) et (5.10) qui sont les invariants de $[\nabla n]$. En utilisant la propriété $\nabla|\nabla\phi| = [D^2\phi]\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ nous obtenons

$$[\nabla n] = \nabla\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) = \frac{1}{|\nabla\phi|}[D^2\phi] - \nabla\phi \otimes \frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|^2} = \frac{1}{|\nabla\phi|}\left(I - \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \otimes \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)[D^2\phi]. \tag{5.12}$$

En utilisant la définition du gradient surfacique on obtient facilement

$$[\nabla n]\, n = \frac{\nabla_{\partial\Omega}|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|}. \tag{5.13}$$

Cette expression avec un gradient surfacique n'est pas spécifique à la représentation par une méthode level set, elle est valable dès que l'on considère un prolongement de la normale de norme un. Les calculs de courbure d'une surface peuvent être simplifiés dans le cas particulier où la fonction ϕ est une fonction distance.

Remarque dans le cas d'une fonction distance

Une fonction distance est obtenue en choisissant pour $\phi(x)$ la distance signée entre le point x et la surface $\partial\Omega$

$$\phi(x) = \begin{cases} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) & \text{pour } x \text{ à l'extérieur de } \partial\Omega \\ -\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) & \text{pour } x \text{ à l'intérieur de } \partial\Omega \end{cases}$$

C'est un exemple assez simple de fonction level set mais il rarement possible de la construire explicitement. Pour ce type de fonction, les lignes de niveau sont régulièrement espacées et en conséquence nous avons $|\nabla\phi| = 1$ aux endroits où ϕ est régulière. Ce type de fonction apporte donc de grandes simplifications dans les calculs. En effet $[\nabla n]$ est alors symétrique d'après la définition de la normale et (5.8) devient

$$[\nabla n]\, n = 0. \tag{5.14}$$

Cette propriété se retrouve aussi avec la relation (5.13). De manière générale, il faut se donner un prolongement de la normale sur tout l'espace. Dans le cas particulier où nous choisissons une représentation level set, le prolongement de la normale est unitaire et il dépend de ϕ. Dans le cas d'une fonction distance les calculs sont simplifiés, notamment dans le cas du calcul de la courbure ($H = \Delta\phi$). Nous donnons maintenant quelques lemmes techniques qui vont être utiles dans ce chapitre.

5.3 Lemmes techniques

Dans toute la suite, le prolongement de la normale que l'on choisit est unitaire.

Soient f et g des fonctions scalaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Un petit calcul montre que

$$\nabla_{\partial\Omega}(fg) = f\nabla_{\partial\Omega}g + g\nabla_{\partial\Omega}f.$$

Toutes les formules de dérivation du produit pour les opérateurs classiques se généralisent donc au cas des opérateurs surfaciques. Nous donnons cependant les formules les plus importantes que nous utiliserons. En utilisant (5.9) nous obtenons

$$\operatorname{div}(n \otimes n) = [\nabla n]\, n + Hn. \tag{5.15}$$

En utilisant les propriétés (5.2) et (5.6) nous obtenons

$$\operatorname{div}_{\partial\Omega}(fn) = f \operatorname{div}_{\partial\Omega}(n) + \nabla_{\partial\Omega}f \cdot n = fH. \tag{5.16}$$

Nous avons également les formules de symétrie suivantes qui se démontrent simplement avec la définition du gradient surfacique

$$\nabla_{\partial\Omega} f \cdot \nabla g = \nabla f \cdot \nabla_{\partial\Omega} g = \nabla_{\partial\Omega} f \cdot \nabla_{\partial\Omega} g. \tag{5.17}$$

Nous énonçons maintenant quelques lemmes importants.

Lemme 1

$$\mathrm{div}([\nabla n]\ n) = \nabla H \cdot n + H^2 - 2G.$$

Démonstration

En développant la divergence nous obtenons

$$\mathrm{div}([\nabla n]\ n) = \mathrm{div}([\nabla n]^T) \cdot n + [\nabla n]^T : \nabla n.$$

En utilisant (5.9) nous obtenons facilement $\mathrm{div}([\nabla n]^T) = \nabla H$. Le résultat est alors démontré en utilisant la propriété $[\nabla n]^T : [\nabla n] = \mathrm{Tr}([\nabla n]^2) = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = H^2 - 2G$ qui est valable en dimension trois. En dimension deux nous aurions $\mathrm{Tr}([\nabla n]^2) = \kappa^2$.

Les deux lemmes suivants constituent le point clé pour mettre les fonctionnelles sous une forme géométrique car ils permettent de transformer simplement la partie tangentielle des divergences surfaciques (5.4) pour un champ de vecteurs qui s'exprime avec un gradient surfacique ou de $[\nabla n]\ n$.

Lemme 2

$$(\nabla\,(\nabla_{\partial\Omega} f)\, n) \cdot n = -\nabla f \cdot ([\nabla n]\ n).$$

Démonstration

Dérivons l'égalité (5.2) et multiplions scalairement le résultat obtenu par n

$$(\nabla(\nabla_{\partial\Omega} f)^T n) \cdot n + ([\nabla n]^T \nabla_{\partial\Omega} f) \cdot n = 0.$$

En utilisant le fait que $[\nabla n]\ n$ est un gradient surfacique dans le cas d'un prolongement de norme un (5.13) ainsi que la formule de symétrie (5.17)

$$(\nabla(\nabla_{\partial\Omega} f) n) \cdot n = -\nabla_{\partial\Omega} f \cdot ([\nabla n]\ n) = -\nabla f \cdot ([\nabla n]\ n).$$

Lemme 3

$$(\nabla\,([\nabla n]\ n)\, n) \cdot n = -([\nabla n]\ n) \cdot ([\nabla n]\ n).$$

Démonstration

Il suffit de dériver l'égalité $([\nabla n]\ n) \cdot n = 0$ valable pour un prolongement unitaire de la normale

$$\nabla([\nabla n]\ n)^T n + [\nabla n]^T\ [\nabla n]\ n = 0.$$

Le lemme est démontré en en multipliant scalairement par n la relation précédente.

Nous avons donc dans cette première partie du chapitre introduit la notion de courbure d'une surface à l'aide des opérateurs surfaciques et de la normale. Nous avons ensuite simplifié les expressions dans le cas d'un prolongement unitaire de la normale et énoncé quelques lemmes techniques.

Nous allons maintenant nous intéresser à la différentiation de fonctionnelles géométriques. Pour dériver une fonction définie sur $\mathbb{R}^m$, on fait varier la fonction dans chacune des directions (il y en a m) et on regarde le premier terme linéaire que l'on obtient dans le développement. Dans le cas qui nous intéresse, le paramètre que l'on fait varier est une surface qui peut être vu comme un objet de dimension infinie. Il faut donc faire de l'optimisation de formes en déformant la surface et regarder quels sont les termes obtenus au premier ordre. Nous proposons de comparer les résultats obtenus par trois méthodes différentes qui permettent en quelque sorte de contourner la difficulté en se ramenant sur un domaine fixe d'intégration.

5.4 Différentiation utilisant une approximation volumique

Dans cette partie nous n'allons pas nous affranchir de la dimension infinie mais nous allons régulariser les fonctionnelles pour les ramener sur un domaine volumique, en faisant dépendre la forme d'une fonction level set. Nous introduirons ensuite un champ de vitesses $u(x,t)$ qui transportera la fonction level set $\phi(\cdot,t)$ set permettant d'effectuer la différentiation de la fonctionnelle par rapport au temps. Nous allons d'abord obtenir une formule générale puis nous l'appliquerons dans le cas d'une fonctionnelle dépendant de la normale puis de la courbure.

5.4.1 Methode générale de dérivation de fonctionnelles avec les levels set

De manière générale on s'intéresse aux fonctionnelles du type

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x,\Omega)\ d\sigma,$$

où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ qui dépend du domaine Ω (la normale ou la courbure par exemple). En représentant la surface $\partial\Omega$ par la ligne de niveau 0 d'une fonction ϕ, la fonctionnelle précédente se réécrit

$$J(\phi) = \int_{\{\phi=0\}} f[\phi]\ d\sigma.$$

Nous verrons dans la prochaine section comment faire pour dériver directement cette fonctionnelle en restant sur la surface en utilisant une formule de Reynolds surfacique. Nous proposons ici une autre méthode basée sur une régularisation volumique.

Méthode de régularisation volumique

Pour contourner le problème du calcul de la différentielle de la fonctionnelle sur un domaine qui dépend de la forme, nous allons régulariser ces fonctionnelles via un paramètre ε et une fonction cut off ζ qui va permettre de se ramener à un domaine volumique. Il suffit en effet d'utiliser le résultat déjà énoncé dans la première partie

$$\int_Q f[\phi]|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_{\{\phi=0\}} f[\phi]\,d\sigma. \tag{5.18}$$

Nous n'avons plus le problème de dériver une fonctionnelle définie sur une surface qui évolue car nous nous sommes ramenés à un domaine Q de $\mathbb{R}^3$ qui est fixe, l'information sur la surface étant contenue dans le terme $|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$. Cette régularisation permet de simplifier l'étude car il suffit à présent de transporter la fonction $\phi(\cdot,t)$ par un champ de vitesse $u(\cdot,t)$ et dériver l'expression obtenue par rapport à t avec les outils de calcul différentiel classique. Nous utiliserons ensuite des intégrations par parties volumiques puis de faire tendre ε vers 0 pour obtenir le résultat.

Remarque
Nous aurions pu également calculer la différentielle de la fonctionnelle en dérivant par rapport à ϕ l'expression précédente et nous aurions obtenu les mêmes résultats.

Intégration par parties sur un volume

On se donne un domaine Q de $\mathbb{R}^3$ (ce sera typiquement une "boite" contenant la surface). Soient les fonctions $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, le champ de vecteur $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et le champ matriciel $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$. On suppose que les composantes de tous ces champs sont <u>nulles sur ∂Q</u>.

En utilisant la formule de Stokes nous obtenons

$$\int_Q v\cdot\nabla f\,dx = -\int_Q f\,\mathrm{div}(v)\,dx. \tag{5.19}$$

Nous en déduisons facilement la formule matricielle suivante

$$\int_Q A : \nabla v\,dx = -\int_Q v\cdot\mathrm{div}(A)\,dx. \tag{5.20}$$

On peut également écrire une formule d'intégration par parties volumique pour des objets surfaciques

$$\int_Q f\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(v)\,dx = -\int_Q \nabla_{\partial\Omega} f\cdot v\,dx + \int_Q \mathrm{div}(n\otimes n)\cdot v\,f\,dx. \tag{5.21}$$

Pour le démontrer il suffit d'écrire

$$f\ \mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) = f(\mathrm{div}(v) - ([\nabla v]\,n)\cdot n) = f\ \mathrm{div}(v) - [\nabla v] : (f\,n\otimes n).$$

En utilisant l'intégration par parties (5.19) sur le premier terme ainsi que (5.20) sur le deuxième terme nous obtenons

$$\int_Q f\ \mathrm{div}_{\partial\Omega}(v)\,dx = -\int_Q \nabla f\cdot v\,dx + \int_Q \mathrm{div}(f\,n\otimes n)\cdot v\,dx.$$

Le résultat est alors prouvé en développant la divergence et en utilisant la définition du gradient surfacique.

Commençons par établir un résultat général pour la dérivation de fonctionnelles géométriques régularisées à l'aide d'un paramètre ε et d'une fonction level set.

Dérivation d'une énergie surfacique

Rappelons la définition de la fonction cut off que nous utilisons. ζ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est l'intervalle $[-1,1]$ et tel que $\int_{\mathbb{R}} \zeta = 1$. Nous nous intéressons à la dérivation de la fonctionnelle générale $\int_{\{\phi=0\}} f(\phi)\, d\sigma$ que l'on régularise avec (5.18)

$$S_\varepsilon(\phi) = \int_Q f[\phi]|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx.$$

Introduisons maintenant un champ de vecteurs $u(x,t)$ qui transporte les lignes de niveau de ϕ qui dépend maintenant du temps

$$\phi_t + u\cdot\nabla\phi = 0.$$

Ce champ de vecteurs permet maintenant d'effectuer la différentiation par rapport au paramètre t

$$(S_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q (f[\phi])_t\, |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx + \int_Q f[\phi]\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\cdot\nabla\phi_t\, dx + \int_Q f[\phi]|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, \phi_t\, dx.$$

En intégrant par parties le deuxième terme et en développant la divergence

$$\begin{aligned}\int_Q f[\phi]\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\cdot\nabla\phi_t\, dx &= -\int_Q \operatorname{div}\left(f[\phi]\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\, \phi_t\, dx \\ &= -\int_Q \operatorname{div}\left(f[\phi]\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\phi_t\, dx + f[\phi]\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\cdot\nabla\phi\, \frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\phi_t\, dx.\end{aligned}$$

Des termes se compensent. En utilisant l'équation de transport nous avons $\phi_t = -u\cdot n\, |\nabla\phi|$ donc nous obtenons

$$\boxed{(S_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q (\,(f[\phi])_t + \operatorname{div}(f[\phi]n)\, u\cdot n\,)\, |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx.} \tag{5.22}$$

Nous allons maintenant appliquer le résultat (5.22) pour calculer la dérivée de fonctionnelles particulières qui dépendent de la normale et de la courbure. La démarche adoptée sera toujours la même. Nous dériverons la fonctionnelle considérée par rapport à t grâce à la formule (5.22) puis nous calculerons la différentielle de la fonction f intervenant dans l'intégrale. Nous utiliserons ensuite des intégrations par parties pour pouvoir mettre le résultat sous la forme $\int_Q F(\phi)\, u\cdot n\, |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx$ et ainsi faire ressortir le gradient de la fonctionnelle.

5.4.2 Dérivation d'une énergie surfacique dépendant de la normale

Les cas particuliers qui nous intéressent font intervenir des fonctionnelles dépendant de la normale et de la courbure (qui se calcule en fonction des dérivées de la normale d'après (5.9)), nous avons donc besoin de calculer dans un premier temps la différentielle de la normale.

Calcul de la dérivée de la normale

Considérons l'expression de la normale donnée par (5.11) et calculons la dérivée par rapport au temps

$$(n(\phi))_t = \frac{\nabla\phi_t}{|\nabla\phi|} + \nabla\phi\left(\frac{1}{|\nabla\phi|}\right)_t = \frac{\nabla\phi_t}{|\nabla\phi|} - \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}\frac{\nabla\phi_t\cdot\nabla\phi}{|\nabla\phi|}.$$

Donc en utilisant la définition du gradient surfacique

$$(n(\phi))_t = \frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}. \tag{5.23}$$

Remarquons que la dérivée de la normale dépend du choix fait pour ϕ par l'intermédiaire de $|\nabla\phi|$.

Afin de définir une fonctionnelle dépendant de la normale nous introduisons la fonction suivante

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (a_1,a_2) & \mapsto f(a_1,a_2) \end{array}$$

Notons $\nabla_1 f$ le gradient de f par rapport à la première variable et $\nabla_2 f$ le gradient de f par rapport à la deuxième variable.

Fonctionnelle dépendant de la normale

On considère une fonctionnelle dépendant de la normale que l'on régularise avec (5.18)

$$J_\varepsilon(\phi) = \int_Q f\left(\cdot, n(\phi)\right)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx.$$

Dans la suite $\nabla_2 f$ désignera le gradient de f par rapport à la deuxième variable au point $(\cdot, n)$.

En utilisant le résultat général (5.22) et la dérivée de la normale (5.23) nous obtenons

$$(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q \operatorname{div}(f(\cdot,n)n)\;u\cdot n\;|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx + \int_Q \nabla_2 f\cdot\frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx.$$

En utilisant la propriété de symétrie (5.17) puis une intégration par parties pour le deuxième terme et en développant la divergence

$$\begin{aligned}\int_Q \nabla_2 f \cdot \frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx &= \int_Q \nabla_{2,\partial\Omega} f \cdot \frac{\nabla\phi_t}{|\nabla\phi|}|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx \\ &= -\int_Q \operatorname{div}\left(\nabla_{2,\partial\Omega} f\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\phi_t\,dx \\ &= -\int_Q \nabla_{2,\partial\Omega} f\cdot\nabla\phi\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\phi_t dx - \int_Q \operatorname{div}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\phi_t\,dx.\end{aligned}$$

Le premier terme est nul d'après (5.2). Il reste finalement en utilisant $\phi_t = -u\cdot n\,|\nabla\phi|$

$$\boxed{(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q \operatorname{div}(f(\cdot,n)n + \nabla_{2,\partial\Omega} f)\;u\cdot n\,|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx.} \tag{5.24}$$

Intéressons nous à présent au calcul de la dérivée d'une fonctionnelle dépendant de la courbure moyenne.

5.4.3 Dérivation d'une fonctionnelle dépendant de la courbure moyenne

Considérons une fonction $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonctionnelle régularisée avec (5.18)

$$J_\varepsilon(\phi) = \int_Q A(H(\phi))|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx.$$

où $H(\phi) = \operatorname{div}(n(\phi))$ est la courbure moyenne écrite en formulation level set (5.9). En utilisant le résultat général (5.22) et la dérivée de la normale (5.23) nous obtenons (nous enlevons la dépendance en ϕ de H pour plus de lisibilité)

$$(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q \operatorname{div}\left(A(H)n\right)\;u\cdot n\,|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx + \int_Q A'(H)\operatorname{div}\left(\frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}\right)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx. \tag{5.25}$$

En intégrant par parties le deuxième terme (noté $(J_{2,\varepsilon}(\phi))_t$) nous obtenons

$$(J_{2,\varepsilon}(\phi))_t = -\int_Q \frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}\cdot\nabla\left(A'(H)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\,dx.$$

Lorsque l'on développe le gradient nous avons le terme $\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'(\frac{\phi}{\varepsilon})\nabla\phi = \alpha n$ qui multiplié par un gradient surfacique donne 0 d'après (5.2). Il reste donc

$$(J_{2,\varepsilon}(\phi))_t = -\int_Q \frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}\cdot\nabla\left(A'(H)|\nabla\phi|\right)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx.$$

Ensuite on utilise la propriété de symétrie (5.17) et une intégration par parties

$$\begin{aligned}(J_{2,\varepsilon}(\phi))_t &= -\int_Q \nabla\phi_t\cdot\nabla_{\partial\Omega}\left(A'(H)|\nabla\phi|\right))\frac{1}{|\nabla\phi|}\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\,dx \\ &= \int_Q \operatorname{div}\left(\frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla_{\partial\Omega}\left(A'(H)|\nabla\phi|\right))\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\,\phi_t\,dx.\end{aligned}$$

En développant la divergence

$$\begin{aligned}(J_{2,\varepsilon}(\phi))_t &= \int_Q \operatorname{div}\left(\frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla_{\partial\Omega}\left(A'(H)|\nabla\phi|\right)\right)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ \phi_t\ dx \\ &\quad + \int_Q \frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla_{\partial\Omega}\left(A'(H)|\nabla\phi|\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\nabla\phi\ \phi_t\ dx.\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul d'après la définition de la normale et la propriété (5.2). Il reste finalement en utilisant $\phi_t = -u\cdot n\ |\nabla\phi|$

$$\boxed{(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q \left(\operatorname{div}(A(H)n) - \operatorname{div}\left(\frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla_{\partial\Omega}\left(A'(H)|\nabla\phi|\right)\right)\right)\ u\cdot n\ |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx.} \tag{5.26}$$

Même après avoir fait tendre ε vers 0, la différentielle de la fonctionnelle dépend du choix de ϕ par l'intermédiaire de $|\nabla\phi|$. Nous verrons plus loin comment faire pour mettre ce résultat sous une forme géométrique.

5.4.4 Dérivation d'une énergie de courbure générale

Plaçons nous maintenant dans un cadre plus général où la fonctionnelle dépend de $[\nabla n]$ (qui contient les informations sur la courbure moyenne ainsi que la courbure de Gauss d'après (5.9) et (5.10)). Dans ce but, introduisons une fonction g définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} g:\quad M_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto g(w)\end{aligned}$$

Notons $[\nabla_w g]$ le gradient de g par rapport à w (c'est une matrice). Dans la suite des calculs, il ne faudra pas oublier que le gradient de g doit être pris au point $[\nabla n]$. Nous aurions pu considérer une fonctionnelle générale dépendant également de l'espace et de n. Dans ce cas il suffit d'ajouter au résultat celui que nous avons obtenu précédemment dans le cas $g(\cdot, n)$.

Considérons la fonctionnelle dépendant de $[\nabla n]$ régularisée avec (5.18)

$$J_\varepsilon(\phi) = \int_Q g\left(\nabla(n(\phi))\right)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx. \tag{5.27}$$

En utilisant le résultat général (5.22) et la dérivée de la normale donnée par la formule (5.23)

$$(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q \operatorname{div}(g([\nabla n])n)\ u\cdot n\ |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx + \int_Q [\nabla_w g] : \nabla\left(\frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}\right)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx.$$

On intègre par parties le dernier terme

$$\int_Q [\nabla_w g] : \nabla\left(\frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}\right)|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx \quad = \quad -\int_Q \operatorname{div}\left([\nabla_w g]|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\frac{\nabla_{\partial\Omega}\phi_t}{|\nabla\phi|}\ dx.$$

Nous utilisons à présent l'intégration par parties pour des opérateurs surfaciques donné par (5.21) pour obtenir finalement avec la relation $\phi_t = -u \cdot n \, |\nabla \phi|$

$$
\begin{aligned}
(J_\varepsilon(\phi))_t = & \int_Q \operatorname{div}(gn) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \; dx && (5.28)\\
- & \int_Q \operatorname{div}_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{|\nabla \phi|} \operatorname{div} \left([\nabla_w g] |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \right) \right) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \; dx && (5.29)\\
+ & \int_Q \operatorname{div} \left([\nabla_w g] |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \operatorname{div}(n \otimes n) \; u \cdot n \; dx. && (5.30)
\end{aligned}
$$

Nous proposons maintenant de développer cette expression pour permettre des calculs ultérieurs.

Développement de l'expression

Commençons par développer la divergence qui intervient dans les deux derniers termes

$$
\operatorname{div} \left([\nabla_w g] |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \right) = \operatorname{div}([\nabla_w g]) |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) + [\nabla_w g] \; \nabla |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) + [\nabla_w g] \; \nabla \phi \; |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon^2} \zeta' \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right).
$$

Lorsque nous allons prendre la divergence surfacique de l'expression précédente des simplifications peuvent être faites en utilisant la propriété suivante valable pour tout vecteur v qui utilise l'égalité $\nabla_{\partial\Omega}(\phi) = 0$

$$
\operatorname{div}_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) v \right) = \operatorname{div}_{\partial\Omega}(v) \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) + \nabla_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \right) \cdot v = \operatorname{div}_{\partial\Omega}(v) \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right).
$$

Nous pouvons donc réécrire le résultat de la dérivée de la fonctionnelle dépendant de $[\nabla n]$ sous la forme

$$
\begin{aligned}
(J_\varepsilon(\phi))_t = & \int_Q \operatorname{div}(g([\nabla n])n) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \; dx && (5.31)\\
- & \int_Q \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\operatorname{div}([\nabla_w g])) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \; dx && (5.32)\\
- & \int_Q \operatorname{div}_{\partial\Omega} \left([\nabla_w g] \; \frac{\nabla |\nabla \phi|}{|\nabla \phi|} \right) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \; dx && (5.33)\\
- & \int_Q \operatorname{div}_{\partial\Omega} \left([\nabla_w g] \; \nabla \phi \frac{1}{\varepsilon^2} \zeta' \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \right) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \; dx && (5.34)\\
+ & \int_Q \operatorname{div}([\nabla_w g]) \cdot \operatorname{div}(n \otimes n) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \; dx && (5.35)\\
+ & \int_Q \left([\nabla_w g] \; \frac{\nabla |\nabla \phi|}{|\nabla \phi|} \right) \cdot \operatorname{div}(n \otimes n) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \; dx && (5.36)\\
+ & \int_Q ([\nabla_w g] \; \nabla \phi) \cdot \operatorname{div}(n \otimes n) \frac{1}{\varepsilon^2} \zeta' \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \; u \cdot n \; |\nabla \phi| \; dx. && (5.37)
\end{aligned}
$$

Nous verrons dans la section consacrée à la comparaison des résultats comment se simplifie cette expression lorsque la fonctionnelle dépendra uniquement des invariants de $[\nabla n]$.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser une approximation volumique pour faire les calculs. Il est possible de dériver les fonctionnelles directement sur la surface comme nous allons le voir maintenant.

5.5 Différentiation utilisant une formule de Reynolds surfacique

La fonctionnelle que l'on cherche à optimiser s'écrit sous la forme

$$J(\phi) = \int_{\{\phi=0\}} f[\phi]\ d\sigma.$$

Nous recherchons maintenant une méthode pour différentier cette fonctionnelle sans faire appel à une approximation volumique. Pour ce faire, nous introduisons un champ de vitesse $u(x,t)$ qui va transporter les lignes de niveau de ϕ et ainsi déformer la surface

$$\phi_t + u \cdot \nabla\phi = 0. \tag{5.38}$$

L'introduction de ce champ de vitesse permet de faire dépendre la fonctionnelle du temps que l'on réécrit

$$J(\phi) = \int_{\{\phi(\cdot,t)=0\}} f[\phi(\cdot,t)]\ d\sigma.$$

La méthode d'optimisation proposée consiste donc à dériver cette énergie par rapport au temps. Pour ce faire nous utilisons la formule de Reynolds surfacique déjà utilisée dans la première partie et démontrée dans l'annexe du chapitre 7 (7.60). Nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\{\phi=0\}} f[\phi]\ d\sigma\right) = \int_{\{\phi=0\}} (f[\phi])_t + \mathrm{div}(f[\phi]u) - f[\phi]\ ([\nabla u]\ n)\cdot n\ d\sigma.$$

Pour mettre cette différentielle sous la forme d'un gradient ($u \cdot n$ en facteur) nous allons introduire la divergence surfacique pour permettre de faire une intégration par parties sur les surfaces qui sera énoncée plus loin (5.41).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_{\{\phi=0\}} f[\phi]\ d\sigma\right) &= \int_{\{\phi=0\}} (f[\phi])_t + u\cdot\nabla(f[\phi]) + f[\phi]\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(u) d\sigma \\
&= \int_{\{\phi=0\}} (f[\phi])_t + u\cdot\nabla(f[\phi]) - u\cdot\nabla_{\partial\Omega}(f[\phi]) + Hf[\phi]u\cdot n\ d\sigma.
\end{aligned}$$

En arrangeant les termes nous obtenons

$$\boxed{(J(\phi))_t = \int_{\{\phi=0\}} (f[\phi])_t + \mathrm{div}(f[\phi]n)u\cdot n\ d\sigma.} \tag{5.39}$$

C'est cette formule que nous allons utiliser pour faire les calculs de différentielle de fonctionnelles géométriques.

Remarque sur l'optimisation de formes

Au départ, la première idée avait été d'utiliser les outils de l'optimisation de forme géométrique pour effectuer cette dérivation. Il est montré dans les livres [2, 28, 43] que si l'on choisit de déformer le domaine avec une fonction θ (qui joue le même rôle que u) alors la dérivée dans la direction θ de la fonctionnelle $J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x, \Omega)\ d\sigma$ est donnée par la formule

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} f'(\Omega)(\theta) + \mathrm{div}(fn)\theta \cdot n\ d\sigma. \tag{5.40}$$

Nous retrouvons donc exactement la même formule que celle donnée par la formule de Reynolds surfacique (5.39). Comme la thèse est basée en partie sur les méthodes level set nous avons choisi d'utiliser la formule de Reynolds plutôt que les dérivées de forme. De plus, l'optimisation de forme est surtout utilisée pour minimiser des fonctionnelles dont l'intégrande est solution d'une EDP. Pour nos calculs nous avons juste besoin d'utiliser une méthode d'optimisation de forme géométrique qui utilise uniquement la formule (5.40) donc nous préférons utiliser la formule de Reynolds surfacique.

Une propriété remarquable de la formule (5.39) est qu'elle ne dépend que de la composante normale de u sur le bord du domaine. Cette propriété est très intuitive car la déformation des points intérieurs au domaine ainsi que la composante tangentielle de u sur le bord n'ont pas d'influence sur la forme de la surface. Dans la démonstration de la formule de Reynolds, il est supposé que le prolongement de la normale est unitaire. Dans tous les calculs qui vont suivre, nous allons donc utiliser un prolongement de la normale qui est de norme 1, nous pourrons donc en particulier utiliser la propriété (5.8).

Nous allons à présent calculer la différentielle de fonctionnelles qui dépendent de la normale et de la courbure. La différence fondamentale avec l'approche par approximation volumique utilisée précédemment réside dans les intégrations par parties. En effet, comme nous allons le voir, il est nécessaire d'utiliser des opérateurs surfaciques pour pouvoir intégrer par parties. Il est donc important que les quantités que l'on considère, en particulier la courbure, soient définies à l'aide d'opérateurs surfaciques.

Intégration par parties sur une surface

Le cadre général qui traite de l'intégration par parties est la formule de Stokes pour les formes différentielles ([24] p 182). Dans le cas de volumes on retrouve la formule de Green bien connue. On peut appliquer le théorème dans le cas de surfaces mais il est valable seulement pour des objets géométriques c'est à dire des opérateurs surfaciques et des vecteurs tangents. Or nous aurons besoin dans la suite d'utiliser des intégrations par parties pour tout champ de vecteurs, tangent ou pas. La généralisation de cette formule d'intégration par parties est donnée par la formule de Simon.

Considérons une surface fermée $\partial\Omega$ (donc sans bord), une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ alors (voir [43] p 184)

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla_{\partial\Omega} f \cdot v + f\ \mathrm{div}_{\partial\Omega}(v))\ d\sigma = \int_{\partial\Omega} Hfv \cdot n\ d\sigma. \tag{5.41}$$

où H est la courbure moyenne définie en (5.9) et les opérateurs surfaciques sont ceux définis précédemment. Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'intégration par parties sur un volume, il y a un terme supplémentaire qui fait intervenir la courbure moyenne. Nous en déduisons simplement la formule avec (5.2)

$$\int_{\partial\Omega} \Delta_{\partial\Omega} f \; g \; d\sigma = \int_{\partial\Omega} f \; \Delta_{\partial\Omega} g \; d\sigma. \tag{5.42}$$

Indication de démonstration

Pour comprendre d'où vient le terme supplémentaire faisant appel à la courbure moyenne dans (5.41) donnons quelques idées qui ne constituent pas une démonstration.

La première consiste à utiliser l'approximation volumique avec une fonction level set donnée par la formule (5.18). En utilisant l'intégration par parties avec des opérateurs surfaciques sur un volume (5.21) et (5.15)

$$\begin{aligned}\int_Q \mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) \; |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \; dx &= -\int_Q \nabla_{\partial\Omega}\left(|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)\cdot v \; dx + \int_Q H \; v\cdot n \; |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \; dx \\ &+ \int_Q ([\nabla n] \; n)\cdot v \; |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \; dx.\end{aligned}$$

En développant le gradient surfacique

$$\nabla_{\partial\Omega}\left(|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) = \nabla_{\partial\Omega}(|\nabla\phi|)\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) + \; |\nabla\phi|\nabla_{\partial\Omega}(\phi)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

Le dernier terme est nul car par définition $\nabla_{\partial\Omega}\phi = 0$. En utilisant (5.13) pour le premier terme, des expressions se compensent et on obtient en faisant tendre ε vers 0

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) \; d\sigma = \int_{\partial\Omega} Hv\cdot n \; d\sigma.$$

Il suffit ensuite de choisir v de la forme fv pour obtenir le résultat précédent.

La deuxième idée repose sur le théorème de Stokes basé sur des formes différentielles ([24] p 184). Dans le cas de surfaces fermées il s'écrit, pour tout <u>vecteur tangent v</u>

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) \; d\sigma = 0, \tag{5.43}$$

où la divergence surfacique est celle obtenue à l'aide d'une paramétrisation (voir l'annexe du chapitre 7).

Choisissons à présent un vecteur $w = w_T + (w\cdot n)n$ décomposé suivant une composante dans le plan tangent noté w_T et une composante suivant la normale notée $(w\cdot n)n$. Dans ce cas, en supposant que l'on peut utiliser la définition de la divergence surfacique définie par (5.4), la propriété (5.16) ainsi que (5.43)

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}(w) \; d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}(w_T) \; d\sigma + \int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}((w\cdot n)n) \; d\sigma = \int_{\partial\Omega} Hw\cdot n \; d\sigma.$$

Nous allons maintenant calculer la dérivée de la normale pour ensuite calculer la dérivée de fonctionnelles dépendant de la normale et de la courbure.

5.5.1 Dérivation d'une fonctionnelle dépendant de la normale

Ce calcul a déjà été fait précédemment, on met ici le résultat sous une autre forme.

Dérivée de la normale

En utilisant la formule précédemment obtenue (5.23), l'identité $\phi_t = -u \cdot n \, |\nabla \phi|$ ainsi que (5.13)

$$(n(\phi))_t = \frac{\nabla_{\partial\Omega}(\phi_t)}{|\nabla \phi|} = -\frac{\nabla_{\partial\Omega}(u \cdot n \, |\nabla \phi|)}{|\nabla \phi|} = -\nabla_{\partial\Omega}(u \cdot n) - ([\nabla n] \, n) \, u \cdot n.$$

Remarquons que la dérivée de la normale dépend du prolongement choisi pour n en dehors de la surface à cause du terme $[\nabla n] \, n$.

Fonctionnelle dépendant de la normale

Dans tout ce qui suit on note $\partial\Omega = \{\phi(\cdot, t) = 0\}$.

On s'intéresse à la dérivation d'une fonctionnelle dépendant de la normale.

$$J(\phi) = \int_{\partial\Omega} f(\cdot, n(\phi)) \, d\sigma.$$

En utilisant le résultat général (5.39) ainsi que la dérivée de la normale (5.5.1) nous obtenons

$$(J(\phi))_t = \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}(f(\cdot, n)n) \, u \cdot n + \nabla_2 f \cdot (-\nabla_{\partial\Omega}(u \cdot n) - ([\nabla n] \, n) \, u \cdot n) \, d\sigma.$$

En utilisant la relation de symétrie (5.17) et une intégration par parties

$$\begin{aligned} -\int_{\partial\Omega} \nabla_2 f \cdot \nabla_{\partial\Omega}(u \cdot n) d\sigma &= -\int_{\partial\Omega} \nabla_{2,\partial\Omega} f \cdot \nabla_{\partial\Omega}(u \cdot n) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} (\, \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f) - H \nabla_{2,\partial\Omega} f \cdot n \,) \, u \cdot n \, d\sigma. \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul d'après (5.2). En développant la divergence et en utilisant (5.9)

$$\operatorname{div}(f(\cdot, n)n) = f(\cdot, n) \operatorname{div}(n) + \nabla_x (f(x, n(x))) \cdot n = f(\cdot, n)H + \nabla_1 f \cdot n + ([\nabla n]^T \nabla_2 f) \cdot n.$$

des termes se compensent et il reste finalement

$$\boxed{(J(\phi))_t = \int_{\partial\Omega} (\, f(\cdot, n)H + \nabla_1 f \cdot n + \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f) \,) \, u \cdot n \, d\sigma.} \tag{5.44}$$

Nous nous intéressons à présent au calcul de la différentielle d'une fonctionnelle dépendant de la courbure moyenne.

5.5.2 Dérivation de d'une fonctionnelle dépendant de la courbure moyenne

Considérons une fonction $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonctionnelle définie par

$$J(\phi) = \int_{\partial\Omega} A(H(\phi))\, d\sigma. \tag{5.45}$$

Lorsque nous allons dériver cette fonctionnelle, nous aurons besoin de faire des intégrations par parties sur une surface ce qui est possible uniquement avec des opérateurs surfaciques (5.41). Les expressions (5.9) et (5.6) sont les mêmes dans le cas que nous considérons où le prolongement de la normale est unitaire. Le choix de (5.6) pour la courbure moyenne permet donc d'ajouter par rapport à (5.9) un terme qui est nul mais qui va nous permettre d'introduire des opérateurs surfaciques et ainsi effectuer les intégrations par parties sur une surface. Commençons par trouver la dérivée de forme de la courbure moyenne (5.6) dont nous rappelons l'expression

$$H(\phi) = \operatorname{div}_{\partial\Omega}(n(\phi)) = \operatorname{div}(n(\phi)) - ([\nabla(n(\phi))]\, n(\phi)) \cdot n(\phi). \tag{5.46}$$

L'expression précédente ne dépend que de la normale donc nous pouvons utiliser (5.5.1) pour calculer la dérivée temporelle de la courbure

$$\begin{aligned}(H(\phi))_t = \operatorname{div}(-\nabla_{\partial\Omega}(u\cdot n) - ([\nabla n]\, n)\, u\cdot n) \quad &- \quad (\nabla(-\nabla_{\partial\Omega}(u\cdot n) - ([\nabla n]\, n)\, u\cdot n)\, n)\cdot n \\ &- \quad ([\nabla n]\, (-\nabla_{\partial\Omega}(u\cdot n) - ([\nabla n]\, n)\, u\cdot n))\cdot n \\ &- \quad ([\nabla n]\, n)\cdot(-\nabla_{\partial\Omega}(u\cdot n) - ([\nabla n]\, n)\, u\cdot n).\end{aligned}$$

En faisant passer les deux premiers termes dans la divergence surfacique et en utilisant (5.8) pour le troisième terme nous obtenons

$$(H(\phi))_t = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(u\cdot n) + ([\nabla n]\, n)\, u\cdot n) + ([\nabla n]\, n)\cdot\nabla_{\partial\Omega}(u\cdot n) + ([\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n)\, u\cdot n. \tag{5.47}$$

En développant la divergence surfacique

$$-\operatorname{div}_{\partial\Omega}(([\nabla n]\, n) u\cdot n) = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\, n)\, u\cdot n - ([\nabla n]\, n)\cdot\nabla_{\partial\Omega}(u\cdot n).$$

Nous avons deux termes qui se compensent et en utilisant la définition du laplacien surfacique

$$(H(\phi))_t = -\Delta_{\partial\Omega}(u\cdot n) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\, n)\, u\cdot n + ([\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n)\, u\cdot n.$$

Nous pouvons maintenant utiliser le résultat général (5.39) et $(A(H(\phi)))_t = A'(H)\ (H(\phi))_t$ pour obtenir

$$\begin{aligned}(J(\phi))_t \quad &= \quad \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}(A(H)n)\, u\cdot n - A'(H)\Delta_{\partial\Omega}(u\cdot n)\, d\sigma \\ &+ \quad \int_{\partial\Omega} -A'(H)\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\, n)\, u\cdot n + A'(H)([\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n)\, u\cdot n\, d\sigma.\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant utiliser une intégration par parties sur le laplacien surfacique (5.42) pour mettre $u\cdot n$ en facteur

$$-\int_{\partial\Omega} A'(H)\Delta_{\partial\Omega}(u\cdot n)\,d\sigma = -\int_{\partial\Omega} \Delta_{\partial\Omega}(A'(H))\,u\cdot n\,d\sigma.$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}(J(\phi))_t &= \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}(A(H)n)\,u\cdot n - \Delta_{\partial\Omega}(A'(H))u\cdot n\,d\sigma && (5.48)\\ &+ \int_{\partial\Omega} -A'(H)\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\,n)\,u\cdot n + A'(H)([\nabla n]\,n)\cdot([\nabla n]\,n)\,u\cdot n\,d\sigma. && (5.49)\end{aligned}$$

Cette formule n'est pas écrite sous la même forme que dans la section précédente (5.26) mais elle a le mérite de faire apparaître des opérateurs surfaciques. Cependant, la formule n'est pas encore sous une forme géométrique à cause des terme et divergence et $[\nabla n]\ n$. Nous verrons dans la section sur la comparaison des résultats comment simplifier cette expression.

Remarque

J'ai également effectué le calcul de la dérivation avec la formule de Reynolds dans le cas d'une fonctionnelle générale dépendant de $[\nabla_{\partial\Omega} n]$ (pour prendre en compte la courbure de Gauss). Les calculs sont dans ce cas très lourds et nous obtenons le même résultat que dans le cas d'une approximation volumique.

Nous allons à présent refaire les calculs de dérivation de fonctionnelles géométriques avec les outils de géométrie différentielle.

5.6 Différentiation utilisant les outils de géométrie différentielle

Pour avoir une vision plus géométrique des résultats précédents, nous proposons d'utiliser les outils de géométrie différentielle pour calculer la dérivée de fonctionnelles géométriques. Cette approche diffère des précédentes dans la mesure où il ne sera à aucun moment fait usage de prolongement d'opérateurs en dehors de la surface. Nous utiliserons une paramétrisation et les objets qui interviendront tels les intégrales et les opérateurs surfaciques seront géométriques. Les résultats obtenus seront alors exprimés de manière complètement géométrique à l'aide d'opérateurs surfaciques, de la normale et de la courbure.

5.6.1 Notations et rappels

L'annexe du chapitre 7 est consacrée à l'étude des surfaces dans le cas d'une représentation paramétrique. Nous y détaillons les notions de métrique, courbure, tenseur, dérivée covariante et opérateurs surfaciques. Nous rappelons ici les différentes notions et notations introduites qui vont être utilisées dans cette partie. Une partie de ces résultats peuvent être trouvés dans [19].

Une surface peut être décrite à l'aide d'une paramétrisation $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs tangents associés à la paramétrisation sont donnés par la dérivée par rapport à u^1 et u^2 de X, nous les noterons $X_{,1}$ et $X_{,2}$. Tous les indices intervenant dans

la suite sont égaux à 1 ou 2. La métrique associée à la paramétrisation est donnée par la première forme fondamentale

$$g_{ij} = X_{,i} \cdot X_{,j},$$

et nous notons $g = g(u^1, u^2)$ le déterminant de matrice associée. La normale est alors définie par

$$n = \frac{X_{,1} \wedge X_{,2}}{|X_{,1} \wedge X_{,2}|}, \tag{5.50}$$

La normale ainsi définie est orienté de manière différente suivant la paramétrisation choisie. Nous choisissons par convention (comme pour les fonctions level set) une paramétrisation telle que la normale soit dirigée vers l'extérieur de la surface.

La normale vérifie $n \cdot X_{,i} = 0$. De plus, en dérivant par rapport à u^1 et u^2 l'expression de la normale qui est de norme un nous obtenons

$$n \cdot n_{,i} = 0.$$

Ces définitions permettent d'introduire la notion d'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sur la surface $X(U)$ notée $\partial\Omega$ à l'aide de la paramétrisation

$$J = \int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma = \int_U f(X(u^1, u^2)) \sqrt{g(u^1, u^2)}\, du^1 du^2.$$

La deuxième forme fondamentale contenant des informations d'ordre deux est alors définie par

$$h_{ij} = -X_{,i} \cdot n_{,j} = X_{,ij} \cdot n.$$

Dans les calculs qui vont suivre nous utiliserons le fait que les matrices deux premières formes fondamentales sont symétriques. Après avoir introduit la matrice de terme général

$$h_i^j = \sum_k g^{jk} h_{ki}, \tag{5.51}$$

la courbure moyenne et la courbure de Gauss sont données par les formules

$$H = -\sum_i h_i^i \qquad\qquad G = \det(h_i^j). \tag{5.52}$$

Nous utilisons ici la définition opposée à celle de [19] pour obtenir une courbure moyenne positive dans le cas d'une sphère (avec la convention que la formule (5.50) donne une normale sortante).

La dérivée de la normale par rapport aux variables de la paramétrisation s'exprime également à l'aide de la matrice (h_i^j) sous la forme (équations de Weingarten)

$$n_{,i} = -\sum_k h_i^k X_{,k}. \tag{5.53}$$

Donnons à présent les équations de Gauss qui permettent de décomposer la dérivée seconde de la paramétrisation à l'aide des symboles de Christoffel

$$X_{,ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_{,k} + h_{ij} n. \tag{5.54}$$

Les dérivées partielles $\psi_{,i}$ d'une fonction scalaire ψ peuvent être considérées comme les composantes covariantes d'un champ de vecteur et on a la formule

$$(\psi_{,i})_{;j} = \psi_{,ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \psi_{,k}. \tag{5.55}$$

Les opérateurs surfaciques sont alors donnés par

$$\nabla_{\partial\Omega}\psi = \sum_{i,j} g^{ij}\psi_{,i}X_{,j} \qquad\qquad \Delta_{\partial\Omega}\psi = \sum_{i,j} g^{ij}(\psi_{,i})_{;j}. \tag{5.56}$$

Après avoir noté $\tilde{h}^{ij} = Gh_{ij}^{-1}$, les équations de Mainardi-Codazzi (7.53) s'écrivent (pour $i = 1$ ou 2)

$$\sum_j (\tilde{h}^{ij})_{;j} = 0 \tag{5.57}$$

Comme les coefficients $\tilde{h}^{ij}$ sont symétriques on a également $\sum_j (\tilde{h}^{ji})_{;j} = 0$. Nous rappelons que les dérivées covariantes obéissent à la règle de Leibniz dans le cas d'un produit.

Nous aurons également besoin d'une propriété dite d'ascenseur d'indices

$$\sum_i g_{ik}\, a_i = b_k \quad \Rightarrow \quad a_i = \sum_k b_k\, g^{ki}.$$

Il suffit pour le démontrer de multiplier les deux membres par g^{kj} et de sommer sur k puis d'utiliser la propriété $\sum_k g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$.

5.6.2 Méthode de dérivation de fonctionnelles

Considérons une surface donnée par la paramétrisation $X^0 : (u^1, u^2) \mapsto X^0(u^1, u^2)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Dans toute la suite, nous notons $\partial\Omega$ la surface définie par $X^0(U)$. Considérons la fonctionnelle J qui s'écrit à l'aide de la paramétrisation

$$J = \int_U f[X^0(u^1, u^2)]\sqrt{g(u^1, u^2)}\, du^1 du^2. \tag{5.58}$$

où la notation $f[X]$ signifie que f dépend de la position X ainsi que des dérivées de X. Pour calculer la variation au premier ordre de J lorsque la surface se déforme, considérons une nouvelle paramétrisation obtenue en déformant la précédente dans la direction normale avec une fonction ψ de la manière suivante (FIG 5.2)

$$X(t, u^1, u^2) = X^0(u^1, u^2) + t\, \psi(u^1, u^2)\, n(u^1, u^2). \tag{5.59}$$

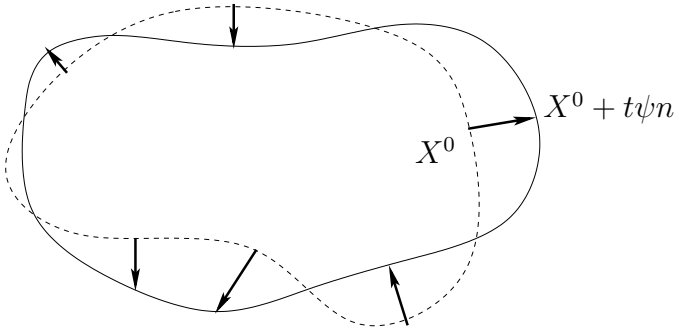

FIG. 5.2 – Déformation de la surface à l'aide de la nouvelle paramétrisation X

Nous ne considérons que des variations dans la direction normale de la paramétrisation car comme nous l'avons déjà évoqué, les variations dans le plan tangent n'ont pas d'influence sur la forme.

La fonctionnelle précédente s'écrit à l'aide de la nouvelle paramétrisation sous la forme

$$J(t) = \int_U f[X(t)]\sqrt{g(t)}\, dudv. \tag{5.60}$$

Nous avons noté $g(t) = X(t)_{,1} \cdot X(t)_{,2}$ et omis la dépendance en (u^1, u^2). Pour trouver la variation au premier ordre de cette fonctionnelle il suffit de calculer $J'(0)$. L'avantage de la représentation de la surface par une paramétrisation est de se retrouver avec une fonctionnelle écrite sur un domaine fixe U, ce qui permet de dériver simplement l'intégrale. Notons

$$\delta = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}$$

l'opérateur qui permet de calculer la dérivée en 0. Il vérifie en particulier les relations classiques de dérivées de produits ou de composées. Dans toute la suite, nous allons considérer des quantités qui dépendent du paramètre t que nous allons dériver avec l'opérateur δ. Lorsque que l'on prendra $t = 0$ ce sont donc les quantités définies sur la paramétrisation initiale qui apparaîtront. Par exemple, si $a(t)$ et $b(t)$ sont deux quantités définies à l'aide de la paramétrisation $X(t)$ alors

$$\delta(a(t)b(t)) = a'(0)b(0) + a(0)b'(0) \tag{5.61}$$

que nous noterons $\delta(a\ b) = a'\ b + a\ b'$. Pour ne pas alourdir les notations nous omettons les paramètres (u, v) et t. La dérivée de la fonctionnelle J est donc donnée par

$$\delta J = \int_U \delta(f[X])\sqrt{g} + f[X]\delta(\sqrt{g})\, du^1 du^2.$$

Commençons par calculer la dérivée de la métrique g. En dérivant l'expression (5.59) nous obtenons facilement

$$\delta X_{,i} = \psi_{,i} n + \psi n_{,i}. \tag{5.62}$$

Avec la relation $X_{,i} \cdot n = 0$ et la définition de la seconde forme fondamentale

$$\delta g_{ij} = \delta(X_{,i} \cdot X_{,j}) = \delta(X_{,i}) \cdot X_{,j} + \delta(X_{,j}) \cdot X_{,i} = \psi(n_{,i} \cdot X_{,j} + n_{,j} \cdot X_{,i}) = -2h_{ij}\ \psi. \tag{5.63}$$

La dérivée du déterminant est donnée par $\delta(\det(A)) = \det(A)\,\mathrm{Tr}(A^{-1}\delta A)$. Nous obtenons avec (5.63) et la définition (5.51)

$$\delta(\det(g_{ij})) = 2\sqrt{g}\delta(\sqrt{g}) = g\sum_{i,j} g^{ij}\delta(g_{ij}) = -2\psi\ g\sum_{i,j} g^{ij}h_{ij} = -2\ \psi\ g\sum_{i} h^i_i. \tag{5.64}$$

En utilisant la définition de la courbure moyenne (5.52) il vient

$$\delta(\sqrt{g}) = \psi H\ \sqrt{g}. \tag{5.65}$$

Réécrivons les résultats précédents avec l'intégrale sur $\partial\Omega$

$$\boxed{\delta J = \int_{\partial\Omega} \delta(f[X]) + f[X]H\ \psi\ d\sigma.} \tag{5.66}$$

Remarque

Contrairement aux autres méthodes d'optimisation δf contient les variations de f par rapport aux dérivées de X mais également celles de la position X.

Comme dans le cas des parties précédentes nous aurons besoin d'utiliser des intégrations par parties sur les surfaces.

Intégration par parties

L'intégration par parties sur les surfaces provient du résultat général obtenu par Stokes sur les formes différentielles. Si f est une fonction et v est un vecteur tangent alors ([24] p 184)

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}(v) f\ d\sigma = -\int_{\partial\Omega} \nabla_{\partial\Omega} f \cdot v\ d\sigma. \tag{5.67}$$

Si $v = v^1 X_{,1} + v^2 X_{,2}$ est décomposée sur la base contravariante associée à la paramétrisation la formule se réécrit

$$\int_{\partial\Omega} \sum_i v^i_{;i}\ d\sigma = 0. \tag{5.68}$$

Nous en déduisons facilement

$$\int_{\partial\Omega} \Delta_{\partial\Omega} f\ g\ d\sigma = \int_{\partial\Omega} \Delta_{\partial\Omega} g\ f\ d\sigma. \tag{5.69}$$

Nous nous intéressons maintenant aux cas particuliers où la fonctionnelle dépend de la normale et de la courbure.

5.6.3 Dérivée d'une énergie dépendant de la normale

Considérons la fonctionnelle f dépendant de la position et de la normale écrite à l'aide de la paramétrisation

$$J(t) = \int_U f(X(t), n(t))\sqrt{g(t)}\, du^1 du^2. \tag{5.70}$$

Notons $\nabla_1 f$ le gradient de f par rapport à la première variable et $\nabla_2 f$ le gradient de f par rapport à la deuxième variable. Pour le calcul de la dérivée de cette fonctionnelle nous avons besoin dans un premier temps de calculer la dérivée de la normale

Dérivée de la normale

Dans ce but commençons par dériver l'égalité $n \cdot X_{,i} = 0$ et utilisons $n \cdot n_{,i} = 0$

$$\delta n \cdot X_{,i} = -n \cdot \delta(X_{,i}) = -n \cdot (\psi_{,i} n + \psi n_{,i}) = -\psi_{,i}.$$

En dérivant $n \cdot n = 1$ avec δ nous obtenons que $\delta n = a_1 X_{,1} + a_2 X_{,2}$ est dans le plan tangent. En remplaçant dans l'expression précédente et en utilisant l'ascenseur d'indices

$$\sum_j a_j g_{ij} = -\psi_{,i} \quad \Rightarrow \quad a_j = -\sum_i \psi_{,i} g^{ij}.$$

En utilisant la définition du gradient surfacique nous obtenons

$$\delta n = -\sum_{i,j} g^{ij} \psi_{,i} X_{,j} = -\nabla_{\partial\Omega}\psi. \tag{5.71}$$

Dérivée de la fonctionnelle

En utilisant $\delta X = \psi n$ et (5.71)

$$\delta(f(X,n)) = \nabla_1 f \cdot \delta X + \nabla_2 f \cdot \delta n = \nabla_1 f \cdot n\, \psi - \nabla_2 f \cdot \nabla_{\partial\Omega}\psi$$

Nous pouvons à présent utiliser la formule générale (5.66)

$$\delta J = \int_{\partial\Omega} \nabla_1 f \cdot n\, \psi - \nabla_2 f \cdot \nabla_{\partial\Omega}\psi + f H \psi\, d\sigma.$$

La formule de symétrie (5.17) (qui est aussi valable dans le cas d'une paramétrisation) et une intégration par parties sur les surfaces (5.67) donne

$$-\int_{\partial\Omega} \nabla_2 f \cdot \nabla_{\partial\Omega}\psi d\sigma = -\int_{\partial\Omega} \nabla_{2,\partial\Omega} f \cdot \nabla_{\partial\Omega}\psi d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)\psi\, d\sigma.$$

Il reste finalement

$$\boxed{\delta J = \int_{\partial\Omega} (\ f(\cdot, n)H + \nabla_1 f \cdot n + \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)\ )\psi\, d\sigma.} \tag{5.72}$$

Considérons à présent une fonctionnelle dépendant de la courbure moyenne.

5.6.4 Calcul de la dérivée de l'énergie de courbure moyenne

Dans cette section nous exposons plus en détails les calculs faits dans [51]. Considérons une fonction $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et la fonctionnelle définie à l'aide de la paramétrisation par

$$J(t) = \int_U A(H(t))\sqrt{g(t)}\, du^1 du^2. \tag{5.73}$$

Comme H est donnée par $-\sum_{i,j} g^{ij} h_{ij}$ (5.52) nous avons à calculer la dérivée de l'inverse de la première forme fondamentale ainsi que la dérivée de la deuxième forme fondamentale.

Dérivée de l'inverse de la première forme fondamentale

La dérivée de $\sum_k g_{ik} g^{kj}$ est nulle donc en utilisant (5.63) et la définition (5.51)

$$\sum_k \delta(g^{kj}) g_{ik} = -\sum_k g^{kj} \delta(g_{ik}) = 2\psi \sum_k g^{kj} h_{ik} = 2\psi\, h_i^j.$$

En utilisant l'ascenseur d'indices nous obtenons

$$\delta(g^{ij}) = 2\psi \sum_k g^{jk} h_k^i. \tag{5.74}$$

Dérivée de la deuxième forme fondamentale

En dérivant la formule $h_{ij} = n \cdot X_{,ij}$ nous obtenons

$$\delta(h_{ij}) = \delta(X_{,ij}) \cdot n + X_{,ij} \cdot \delta n. \tag{5.75}$$

Pour le deuxième terme il suffit d'utiliser (5.71), les équations de Gauss (5.54) ainsi que $X_{,i} \cdot n = 0$

$$\begin{aligned} \delta n \cdot X_{,ij} &= -\left(\sum_{p,q} g^{pq} \psi_{,q} X_{,p}\right) \cdot \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k X_{,k} + h_{ij} n\right) \\ &= -\sum_{p,q,k} g^{pq} \psi_{,q} g_{pk} \Gamma_{ij}^k = -\sum_k \Gamma_{ij}^k \psi_{,k}. \end{aligned}$$

Pour la dernière ligne nous avons utilisé la relation $\sum_p g^{pq} g_{pk} = \delta_q^k$ où δ_q^k est le symbole de Kronecker et non l'opérateur de dérivation.

Pour le premier terme, il suffit de calculer la dérivée de $X_{,ij}$ que l'on obtient facilement avec (5.59)

$$\delta(X_{,ij}) = \psi_{,ij} n + \psi_{,i} n_{,j} + \psi_{,j} n_{,i} + \psi\, n_{,ij}.$$

En utilisant $n \cdot n_{,i} = 0$ nous obtenons

$$\delta(X_{,ij}) \cdot n = \psi_{,ij} + n_{,ij} \cdot n\ \psi.$$

En dérivant $n_{,i} \cdot n = 0$ par rapport à j et d'après les équations de Weingarten (5.53)

$$\begin{aligned} n_{,ij} \cdot n &= -n_{,i} \cdot n_{,j} = -\left(-\sum_p h_i^p X_{,p}\right) \cdot \left(-\sum_q h_j^q X_{,q}\right) = -\sum_{p,q} h_i^p h_j^q g_{pq} \\ &= -\sum_{p,q,k} h_i^p h_{kj} g^{qk} g_{pq} = -\sum_k h_{kj} h_i^k. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé $\sum_q g^{qk} g_{pq} = \delta_p^k$ pour la dernière ligne du calcul. En remplaçant les calculs précédents dans (5.75) et en introduisant la dérivée covariante $(\psi_{,i})_{;j}$ (5.55)

$$\delta h_{ij} = \psi_{,ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \psi_{,k} - \psi \sum_k h_{kj} h_i^k = (\psi_{,i})_{;j} - \psi \sum_k h_{kj} h_i^k. \tag{5.76}$$

Calcul de la dérivée de H

Utilisons à présent la définition de H à l'aide des deux formes fondamentales (5.52), (5.51) et utilisons les résultats (5.74) et (5.76) ainsi que la définition du laplacien surfacique (5.56)

$$\begin{aligned} -\delta H &= \delta\left(\sum_{i,j} g^{ij} h_{ij}\right) \\ &= \sum_{i,j} \delta(g^{ij}) h_{ij} + \sum_{i,j} g^{ij} \delta(h_{ij}) \\ &= 2\psi \sum_{i,j,k} g^{jk} h_k^i h_{ij} + \sum_{i,j} g^{ij} \left((\psi_{,i})_{;j} - \psi \sum_k h_i^k h_{kj}\right) \\ &= \psi \sum_{i,k} h_k^i h_i^k + \Delta_{\partial\Omega} \psi. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $\sum_j g^{jk} h_{ij} = h_i^k$ et $\sum_j g^{ij} h_{kj} = h_k^i$. Les h_i^j sont les coefficients de l'endomorphisme $-dn$ dans la base $(X_{,1}, X_{,2})$. Comme les valeurs propres de dn sont κ_1 et κ_2

$$\sum_{i,k} h_k^i h_i^k = \mathrm{Tr}(dn^2) = (\kappa_1)^2 + (\kappa_2)^2 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2\kappa_1\kappa_2 = H^2 - 2G.$$

Résultat final

La dérivée de $A(H)$ est donc donnée par

$$\delta(A(H)) = A'(H)\delta H = -A'(H)(\Delta_{\partial\Omega}\psi + (H^2 - 2G)\psi). \tag{5.77}$$

Nous pouvons à présent utiliser le résultat général (5.66)

$$\delta J = \int_{\partial\Omega} (-A'(H)\Delta_{\partial\Omega}\psi - A'(H)(H^2 - 2G)\psi + HA(H)) \, d\sigma.$$

Une intégration par parties du laplacien surfacique (5.69) donne finalement

$$\boxed{\delta J = -\int_{\partial\Omega} (\Delta_{\partial\Omega}(A'(H)) + A'(H)(H^2 - 2G) - HA(H)) \, \psi \, d\sigma.} \tag{5.78}$$

Ce résultat obtenu par Willmore [51] est complètement géométrique car il dépend uniquement de la courbure et d'opérateurs surfaciques.

5.6.5 Energies plus générales

Pour cette section nous nous inspirons de [45]. Des fonctionnelles plus générales dépendant de la courbure de Gauss peuvent être considérés avec des énergies du type

$$J(t) = \int_U F(H(t), G(t)) \sqrt{g(t)} \, du^1 du^2. \tag{5.79}$$

Nous avons

$$\delta(F(H, G)) = \delta(H)F_H + \delta(G)F_G \tag{5.80}$$

où nous avons noté $F_H(H, G)$ la dérivée de F par rapport à sa première variable et $F_G(H, G)$ la dérivée de F par rapport à sa deuxième variable. Pour plus de lisibilité nous omettons la dépendance en H et G de ces dérivées.

Le calcul de δH vient d'être effectué, il nous faut à présent calculer δG. Pour ce faire partons de la définition (5.52) que l'on peut réécrire $G = \dfrac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$. Dans la suite g désignera $\det(g_{ij})$. En appliquant l'opérateur δ

$$\delta G = \det(h_{ij})\delta\left(\frac{1}{g}\right) + \frac{1}{g}\delta(\det(h_{ij})).$$

Pour le premier terme nous utilisons (5.64)

$$\det(h_{ij})\delta\left(\frac{1}{g}\right) = -\det(h_{ij})\frac{\delta g}{g^2} = -2HG\psi.$$

Notons h_{ij}^{-1} l'inverse de la matrice h_{ij}. En utilisant la dérivée du déterminant ainsi que (5.76)

$$\frac{1}{g}\delta(\det(h_{ij})) = \frac{1}{g}\det(h_{ij})\sum_{i,j} h_{ij}^{-1}\delta(h_{ij}) = G\sum_{i,j} h_{ij}^{-1}\left((\psi_{,i})_{;j} - \psi\sum_k h_i^k h_{kj}\right).$$

En utilisant la définition de l'inverse de h_{ij} et la définition de la courbure moyenne (5.52) nous obtenons

$$\sum_{i,j,k} h_{ij}^{-1} h_i^k h_{kj} = \sum_{i,k} h_i^k \delta_{ik} = \sum_k h_k^k = -H.$$

Donc finalement, après avoir noté $\tilde{h}^{ij} = G h_{ij}^{-1}$

$$\delta G = -2GH\psi + \sum_{i,j} \tilde{h}^{ij} (\psi_{,i})_{;j} + GH\psi = -GH\psi + \sum_{i,j} \tilde{h}^{ij} (\psi_{,i})_{;j}.$$

Nous avons

$$F_G \delta G = -F_G\, GH\psi + \sum_{i,j} F_G \tilde{h}^{ij} (\psi_{,i})_{;j}.$$

En utilisant les propriétés de la dérivée covariante du produit et l'équation de Mainardi-Codazzi (5.57)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} F_G \tilde{h}^{ij} (\psi_{,i})_{;j} &= \sum_{i,j} (F_G \tilde{h}^{ij} \psi_{,i})_{;j} - \sum_{i,j} (F_G)_{;j} \tilde{h}^{ij} \psi_{,i} - \sum_{i,j} F_G (\tilde{h}^{ij})_{;j} \psi_{,i} \\ &= \sum_{i,j} (F_G \tilde{h}^{ij} \psi_{,i})_{;j} - \sum_{i,j} (F_G)_{;j} \tilde{h}^{ij} \psi_{,i}. \end{aligned}$$

Une fois intégré, le premier terme est nul d'après (5.68) car le produit contracté $\sum_i F_G \tilde{h}^{ij} \psi_{,i}$ correspond aux coordonnées contravariantes d'un champ de vecteurs. Comme $\psi_{,i} = \psi_{;i}$ et $(F_G)_{;j} = (F_G)_{,j}$ nous pouvons refaire le raisonnement précédent (en utilisant le fait que $\tilde{h}^{ij}$ est symétrique pour appliquer (5.57))

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (F_G)_{;j} \tilde{h}^{ij} \psi_{,i} &= \sum_{i,j} (F_G)_{,j} \tilde{h}^{ij} \psi_{;i} = \sum_{i,j} ((F_G)_{,j} \tilde{h}^{ij} \psi)_{;i} - \sum_{i,j} ((F_G)_{,j})_{;i} \tilde{h}^{ij} \psi - \sum_{i,j} (F_G)_{,j} (\tilde{h}^{ij})_{;i} \psi \\ &= \sum_{i,j} ((F_G)_{,j} \tilde{h}^{ij} \psi)_{;i} - \sum_{i,j} ((F_G)_{,j})_{;i} \tilde{h}^{ij} \psi. \end{aligned}$$

Une fois intégré, le premier terme est nul d'après (5.68) car le produit contracté $\sum_j (F_G)_{,j} \tilde{h}^{ij} \psi$ correspond aux coordonnées contravariantes d'un champ de vecteurs. Finalement

$$F_G \delta G = -F_G\, GH\psi + \sum_{i,j} ((F_G)_{,i})_{;j} \tilde{h}^{ij} \psi. \tag{5.81}$$

modulo des termes dont l'intégrale est nulle. En utilisant le résultat général (5.66) avec $f = F(H, G)$, l'expression de δH (5.77), δG (5.81) et en effectuant une intégration par parties pour le laplacien surfacique (5.69)

$$\delta J = \int_{\partial\Omega} \left(F(H,G)H - \Delta_{\partial\Omega}(F_H) - F_H(H^2 - 2G) - F_G GH + \sum_{i,j} \tilde{h}^{ij} ((F_G)_{,i})_{;j} \right) \psi \, d\sigma.$$

Utilisons à présent le théorème de Cayley Hamilton ($A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I = 0$) avec la matrice de terme général h_i^j et les relations (5.52)

$$\sum_k h_i^k h_k^j + H h_i^j + G\delta_i^j = 0.$$

Nous multiplions l'égalité précédente par h_{ip}^{-1} puis nous faisons la somme sur i. Pour chaque terme nous utilisons à présent (5.51). Pour le premier terme

$$\sum_{k,i} h_i^k h_k^j h_{ip}^{-1} = \sum_{k,i,m} h_k^j g^{km} h_{mi} h_{ip}^{-1} = \sum_{k,m} h_k^j g^{km} \delta_m^p = \sum_k h_k^j g^{kp}.$$

Pour le deuxième terme

$$H \sum_i h_i^j h_{ip}^{-1} = H \sum_{i,m} g^{jm} h_{mi} h_{ip}^{-1} = H \sum_m g^{jm} \delta_m^p = H g^{jp}.$$

pour le troisième terme

$$G \sum_i h_{ip}^{-1} \delta_i^j = G h_{jp}^{-1} = \tilde{h}^{jp}.$$

Nous obtenons finalement

$$\tilde{h}^{ij} = -H g^{ij} - \sum_k h_k^i g^{kj}.$$

Avec la définition du laplacien surfacique (5.56)

$$\sum_{i,j} \tilde{h}^{ij} ((F_G)_{,i})_{;j} = -H \sum_{i,j} g^{ij} ((F_G)_{,i})_{;j} - \sum_{i,j,k} h_k^i g^{kj} ((F_G)_{,i})_{;j} = -H \Delta_{\partial\Omega}(F_G) - \sum_{i,j,k} h_k^i g^{kj} ((F_G)_{,i})_{;j}.$$

$(F_G)_{,i}$ sont les composantes covariantes du champ de vecteurs $\nabla_{\partial\Omega}(F_G)$. Notons $\nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(F_G))$ la dérivée covariante de ce champ de vecteurs. Nous avons enfin avec (7.42)

$$dn : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(F_G)) = -\sum_{i,j,k} h_i^k g^{kj} ((F_G)_{,i})_{;j}$$

La formule finale est donc la suivante

$$\boxed{\delta J = \int_{\partial\Omega} \big(F(H,G)H - \Delta_{\partial\Omega}(F_H) - F_H(H^2 - 2G) - F_G G H - H \Delta_{\partial\Omega}(F_G) + dn : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(F_G)) \big)\, \psi \, d\sigma.} \tag{5.82}$$

5.7 Comparaison des résultats

Nous avons utilisé précédemment différentes approches pour calculé la dérivée de fonctionnelles géométriques. Nous commençons par comparer les méthodes d'optimisation utilisées puis nous nous intéresserons à la comparaison des résultats obtenus dans le cas de fonctionnelles dépendant de la normale ainsi que de la courbure.

5.7.1 Comparaison des méthodes d'optimisation

Dans chaque approche, nous avons déformé la surface et calculer les variations de la fonctionnelle au premier ordre. Déformer un domaine dans la direction tangentielle n'a aucune influence sur la forme. C'est pour cette raison que nous avons considéré uniquement des variations normales dans l'approche avec les outils de géométrie différentielle. Ce résultat se retrouve également dans le théorème de Reynolds où seule la composante normale $u \cdot n$ sur le bord du domaine intervient. Dans chaque méthode, l'idée principale est de se ramener à un domaine fixe pour pouvoir ensuite dériver les termes apparaissant dans l'intégrale.

Une différence importante entre la première méthode de dérivation et les autres est qu'on approxime une fonctionnelle surfacique par une fonctionnelle volumique. Pour comparer les résultats, il est donc nécessaire de faire tendre le paramètre ε vers 0. Dans ce cas, nous avons le résultat suivant pour la fonctionnelle générale level set (5.22) en utilisant (5.18)

$$\int_Q (\ (f[\phi])_t + \mathrm{div}(f[\phi]n)u \cdot n\ )\ |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_{\partial\Omega} (f[\phi])_t + \mathrm{div}(f[\phi]n)u \cdot n\ d\sigma.$$

Nous retrouvons donc le résultat (5.39). Dans le cas ou la fonctionnelle que l'on considère dépend de la position, remarquons $(f[\phi])_t$ contient uniquement les informations sur ϕ et ses dérivées et pas celles sur la position.

Si nous choisissons de développer le résultat précédent nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega} (f[\phi])_t + \nabla(f[\phi]) \cdot n\ u \cdot n + f[\phi] H u \cdot n\ d\sigma. \tag{5.83}$$

Dans le cas de la méthode paramétrique, δ contient les informations sur la position X et les dérivées de X. Pour comparer les résultats, il suffit de remarquer avec (5.59)

$$\delta(f[X]) = \nabla(f[X]) \cdot \delta X + \tilde{\delta}(f[X]) = \nabla(f[X]) \cdot n\ \psi + \tilde{\delta}(f[X])$$

où $\tilde{\delta}(f[X])$ désigne la variation de $f[X]$ par rapport aux dérivées de X. Le résultat (5.66) se réécrit donc

$$\delta J = \int_{\partial\Omega} \tilde{\delta}(f[X]) + \nabla(f[X]) \cdot n\ \psi + f[X] H \psi\ d\sigma \tag{5.84}$$

Nous pouvons donc identifier les résultats (5.83) et (5.84) en choisissant

$$u \cdot n = \psi. \tag{5.85}$$

Comparaison de la dérivée de la normale

Tous les résultats sont basés sur la dérivée de la normale. Avec les méthodes level set nous avions obtenu (5.5.1)

$$(n(\phi))_t = -\nabla_{\partial\Omega}(u \cdot n) - ([\nabla n]\ n)\ u \cdot n.$$

Remarquons que dans le cas de l'optimisation par les outils de géométrie différentielle nous avions obtenu $\delta n = -\nabla_{\partial\Omega}\psi$ qui correspond au premier terme de l'expression précédente. Le fait de travailler sans utiliser de prolongement permet de ne pas considérer le terme supplémentaire $[\nabla n]\ n$ qui dépend du prolongement choisi. Comme nous allons le voir, ce terme est à l'origine de résultats non surfaciques dans les deux premières méthodes et il complique les calculs. Dans le cas d'une fonction distance ce terme est nul (5.14) ce qui simplifie grandement les calculs.

Passons maintenant à la comparaison des résultats pour une fonctionnelle dépendant de la normale et de la courbure moyenne.

5.7.2 Comparaison pour une fonctionnelle dépendant de la normale

Les résultats obtenus par les trois approches sont *a priori* différents. Cependant nous allons simplifier les formules obtenues, notamment en utilisant les lemmes énoncés au début du chapitre. Nous repartons du résultat obtenu avec la première méthode (5.24)

$$(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q \operatorname{div}(f(\cdot,n)n + \nabla_{2,\partial\Omega} f)\ u \cdot n\ |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx.$$

Mise sous forme géométrique du résultat avec l'approximation volumique

On peut écrire cette formule sous une autre forme. En effet en utilisant le lemme 2 p 104

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla_{2,\partial\Omega} f) &= \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)) + (\nabla(\nabla_{2,\partial\Omega} f)\ n) \cdot n \\ &= \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)) - \nabla_2 f \cdot ([\nabla n]\ n).\end{aligned}$$

Nous avons également en développant la divergence

$$\operatorname{div}(f(\cdot,n)n) = f(\cdot,n)\operatorname{div}(n) + \nabla_x(f(x,n(x))) \cdot n = f(\cdot,n)H + \nabla_1 f \cdot n + ([\nabla n]^T \nabla_2 f) \cdot n.$$

Deux termes se simplifient et le résultat peut donc s'écrire

$$(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q (\ f(\cdot,n)H + \nabla_1 f \cdot n + \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)\ )\ u \cdot n\ |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\ dx.$$

Nous faisons maintenant tendre le paramètre ε vers 0 pour obtenir

$$(J(\phi))_t = \int_{\partial\Omega} (\ f(\cdot,n)H + \nabla_1 f \cdot n + \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)\ )\ u \cdot n\ d\sigma. \tag{5.86}$$

Nous pouvons donc identifier avec (5.85) les formules (5.44), (5.72) et (5.86). Si nous considérons une fonctionnelle géométrique c'est à dire dépendant uniquement de la normale et pas de la position nous

avons $\nabla_1 f \cdot n = 0$. Dans ce cas (5.86) se met sous une forme complètement géométrique car le résultat dépend uniquement de normale, la courbure et d'opérateurs surfaciques. Nous allons justifier à présent le calcul fait en donnant le type d'applications dans lesquels cette énergie est utilisée.

Mouvement à courbure moyenne anisotrope

De nombreux mouvements d'interfaces sont décris par la minimisation d'une énergie. Dans le cas de l'énergie $\int_{\partial\Omega} d\sigma$ nous obtenons d'après (5.39) que la dérivée est donnée par $\int_{\partial\Omega} Hu \cdot n \, d\sigma$. Dans les applications en cristallographie, des anisotropies apparaissent en fonction de la direction de la normale. L'énergie considérée est alors

$$J(\phi) = \int_{\partial\Omega} f(n) \, d\sigma.$$

Il est supposé que l'énergie est homogène de degré un c'est à dire $f(tn) = tf(n)$ car la fonction ne dépend que de l'orientation de n. En dérivant cette expression par rapport à t nous obtenons $(\nabla f)(n) \cdot n = f(n)$. Nous avons donc en utilisant (5.16)

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega} f) = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla f) - \mathrm{div}_{\partial\Omega}((\nabla f \cdot n)\, n) = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla f) - (\nabla f \cdot n)\, H = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla f) - fH.$$

En repartant du résultat (5.24) nous obtenons

$$(J(\phi))_t = \int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla f) u \cdot n \, d\sigma. \tag{5.87}$$

Il est d'usage de définir une normale anisotrope n_f et une courbure moyenne anisotrope H_f par les formules

$$n_f = (\nabla f)(n) \qquad\qquad H_f = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(n_f) \tag{5.88}$$

Nous retrouvons donc les formules introduites par exemple dans [18] p 192 qui modélisent des mouvements à courbure moyenne anisotrope.

5.7.3 Comparaison dans le cas d'une fonctionnelle dépendant de la courbure moyenne

Intéressons-nous maintenant au cas de la courbure moyenne. Nous repartons de la formule (5.26)

$$(J_\varepsilon(\phi))_t = \int_Q \left(\mathrm{div}(A(H)n) - \mathrm{div}\left(\frac{1}{|\nabla\phi|} \nabla_{\partial\Omega} \left(A'(H)|\nabla\phi| \right) \right) \right) u \cdot n \, |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \, dx. \tag{5.89}$$

Mise sous forme géométrique du résultat avec l'approximation volumique

Commençons par développer le premier terme de l'expression en utilisant (5.9)

$$\mathrm{div}(A(H)n) = A(H)H + A'(H)\nabla H \cdot n.$$

Développons à présent le deuxième terme en utilisant la propriété (5.13)

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla_{\partial\Omega}(A'(H)|\nabla\phi|)\right) = \operatorname{div}(A'(H)([\nabla n]\ n)) + \operatorname{div}(\nabla_{\partial\Omega}(A'(H))).$$

Pour le deuxième terme on introduit la divergence surfacique et on utilise le lemme 2 p 104

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla_{\partial\Omega}(A'(H))) &= \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(A'(H))) + (\nabla(\nabla_{\partial\Omega}(A'(H)))\ n)\cdot n\\ &= \Delta_{\partial\Omega}(A'(H)) - \nabla(A'(H))\cdot([\nabla n]\ n).\end{aligned}$$

Pour le premier terme on développe la divergence et on utilise le lemme 1 p 104

$$\operatorname{div}(A'(H)([\nabla n]\ n)) = A'(H)\ (\nabla H\cdot n + (H^2 - 2G)) + \nabla(A'(H))\cdot([\nabla n]\ n).$$

En mettant les résultats bouts à bouts des termes se compensent et il reste finalement en faisant tendre ε vers 0

$$(J(\phi))_t = -\int_{\partial\Omega}\left(\ \Delta_{\partial\Omega}(A'(H)) + A'(H)(H^2-2G) - A(H)H\ \right)\ u\cdot n\ d\sigma. \tag{5.90}$$

Nous retrouvons donc bien la même expression que dans le cas de l'optimisation avec les outils de géométrie différentielle (5.78)

Mise sous forme géométrique du résultat avec la formule de Reynolds surfacique

Nous repartons du résultat (5.49) obtenu avec la formule de Reynolds surfacique.

$$(J(\phi))_t = \int_{\partial\Omega}\operatorname{div}(A(H)n)\ u\cdot n - \Delta_{\partial\Omega}(A'(H))u\cdot n\ d\sigma \tag{5.91}$$

$$+ \int_{\partial\Omega} -A'(H)\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\ n)\ u\cdot n + A'(H)([\nabla n]\ n)\cdot([\nabla n]\ n)\ u\cdot n\ d\sigma. \tag{5.92}$$

En utilisant le lemme 1 p 104 et le lemme 3 p 104

$$\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\ n) = \operatorname{div}([\nabla n]\ n) - (\nabla([\nabla n]\ n)n)\cdot n = \nabla H\cdot n + H^2 - 2G + ([\nabla n]\ n)\cdot([\nabla n]\ n).$$

En développant la divergence et en utilisant (5.9)

$$\operatorname{div}(A(H)n) = A(H)\operatorname{div}(n) + \nabla(A(H))\cdot n = A(H)H + A'(H)\nabla H\cdot n.$$

En reportant les deux propriétés précédentes dans (5.92) des termes se compensent et il reste au final

$$(J(\phi))_t = -\int_{\partial\Omega}(\Delta_{\partial\Omega}(A'(H)) + A'(H)(H^2-2G) - A(H)H)\ u\cdot n\ d\sigma. \tag{5.93}$$

Nous retrouvons donc bien la même expression que dans le cas de l'optimisation avec les outils de géométrie différentielle (5.78).

Nous obtenons bien les mêmes résultats car nous avons montré dans l'annexe du chapitre 7 que le laplacien surfacique était le même dans le cas d'une paramétrisation ainsi que dans sa formulation avec une fonction implicite. Le résultat obtenu est géométrique car il ne dépend que de la courbure et d'opérateurs surfaciques. L'étude de ces différentes méthodes a été motivé par la compréhension des résultats *a priori* différents obtenus avec les outils de géométrie différentielle par Willmore et ceux obtenus avec une approximation volumique. Le passage entre les deux a été facilité par l'introduction de la formule de Reynolds qui permet d'introduire les opérateurs surfaciques. Dans le cas de la courbure moyenne au carré les résultats peuvent s'écrire sous la forme du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
J(\phi) = \int_{\{\phi=0\}} H(\phi)^2 \, d\sigma \arrow[r, "\text{Regularisation volumique}"] \arrow[d, "\text{Derivation par rapport a } t"] & J_\varepsilon(\phi) = \int_Q H(\phi)^2 \, |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \, dx \arrow[d, "\text{Derivation par rapport a } t"] \\
(J(\phi))_t = -\int_{\{\phi=0\}} (2\Delta_{\partial\Omega} H + H(H^2 - 4G)) \, u \cdot n \, d\sigma & (J_\varepsilon(\phi))_t \arrow[l, "\varepsilon \longrightarrow 0"']
\end{tikzcd}$$

FIG. 5.3 – Diagramme des résultats obtenus dans le cas de la courbure moyenne au carré

Quelques remarques dans le cas de la courbure moyenne au carré

Le cas particulier où $A(r) = r^2$ a été très étudié dans la littérature [51] et c'est cette énergie qui nous intéresse dans les applications en biomécanique

$$J = \int_{\partial\Omega} H^2 \, d\sigma.$$

On peut montrer que cette énergie est invariante par transformations conformes c'est à dire les translations, rotations, dilatation et inversion. Une application intéressante de la propriété de dilatation est que la valeur de cette fonctionnelle est la même à toutes les échelles, en particulier dans le cas de membranes biologiques. Les points critiques de cette fonctionnelle sont donnés d'après (5.90) par les surfaces qui vérifient

$$2\Delta_{\partial\Omega} H + H(H^2 - 4G) = 0. \tag{5.94}$$

Il est simple de voir que cette égalité est vérifiée pour une sphère ($H^2 = 4G = cte$). Il a été démontré que la sphère réalise le minimum de cette énergie parmi toutes les surfaces de topologie 0. Il est possible de montrer que l'égalité précédente est vérifiée pour un tore dont les rayons vérifient $r = R\sqrt{2}$. Par contre, montrer que ce tore est le minimum de cette énergie parmi tous les objets de topologie 1 est une conjecture (de Willmore). Le cas qui nous intéresse est de trouver le minimum de cette énergie lorsque l'aire et le volume sont fixé. Il n'existe pas à ma connaissance de résultat théorique sur le sujet.

L'égalité précédente peut s'interpréter de la manière suivante : le terme $H^2 - 4G$ tend à ramener la surface vers une sphère, tandis que le terme $\Delta_{\partial\Omega} H$ tend à moyenner localement la courbure moyenne. En effet, une fonction harmonique (dont le laplacien est nul) a cette propriété d'être localement égale à sa moyenne. C'est sûrement l'une des raisons pour laquelle les formes des globules rouge obtenues en minimisant (5.78) à aire et volume fixé ressemblent à un ellipsoïde concave plutôt qu'à une piste d'athlétisme (FIG 4.3)

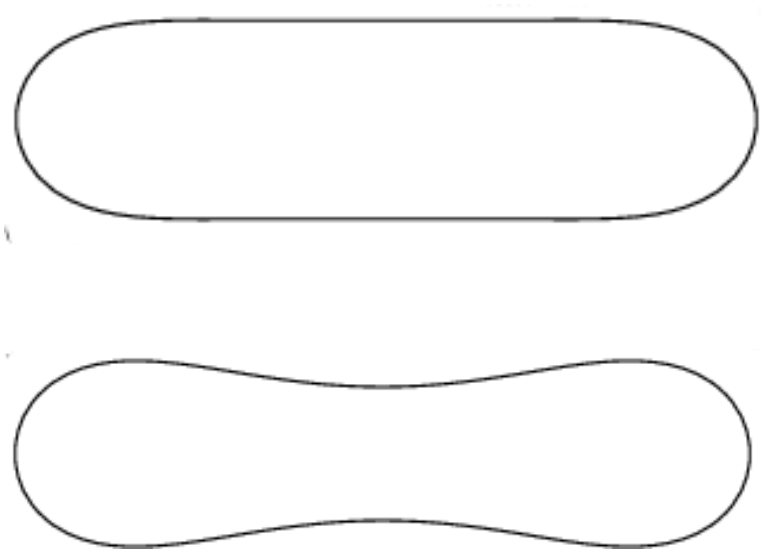

FIG. 5.4 – Piste d'athlétisme et forme d'un globule

Les résultats présentés sont valables pour une surface mais nous pouvons en déduire facilement la formule pour les courbes paramétrées. Dans ce cas on note κ la courbure de la courbe et les deux valeurs propres de $[\nabla n]$ sont κ et 0, en conséquence

$$\mathrm{Tr}([\nabla n]^2) = \kappa^2. \tag{5.95}$$

En reprenant les calculs précédents nous obtenons la dérivée de $J(\phi) = \int_{\partial\Omega} \kappa^2 \, d\sigma$ (on note toujours $\partial\Omega$ la courbe)

$$(J(\phi))_t = -\int_{\partial\Omega} (2\Delta_{\partial\Omega}\kappa + \kappa^3) \, u \cdot n \, d\sigma. \tag{5.96}$$

Remarquons que dans ce cas, la dérivée de l'énergie de courbure n'est pas nulle pour un cercle.

Nous pouvons à présent calculer la force F_c associée à l'énergie de courbure. Le principe des travaux virtuels stipule que

$$J(\phi)_t = -\int_Q F_c(\phi) \cdot u \, dx \tag{5.97}$$

En réécrivant le résultat (5.90) avec l'approximation volumique (5.18) nous obtenons

$$F_c(\phi) = (\ 2\Delta_{\partial\Omega} H + H(H^2 - 4G)\ )n\ |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \tag{5.98}$$

Dans le cas bidimensionnel nous obtenons

$$F_c(\phi) = (\ 2\Delta_{\partial\Omega}\kappa + \kappa^3\ )n\ |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \tag{5.99}$$

5.7.4 Calcul pour une fonctionnelle générale

Nous nous intéressons maintenant à la mise sous forme géométrique d'une énergie dépendant de la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Nous avons considéré cette énergie générale dans le cas des méthodes d'approximation volumique et paramétrique. Cependant, des calculs assez longs montrent que le résultat reste le même avec la formule de Reynolds surfacique. Pour ne pas alourdir l'exposé nous avons omis ces calculs. Nous allons donc simplifier l'expression générale (5.37) dans le cas ou la fonctionnelle dépend des invariants de $[\nabla n]$. N'ayant pas réussi a mettre le résultat sous forme géométrique j'utiliserais une fonction distance qui permet beaucoup de simplifications.

Calcul de $[\nabla_w g]$

Pour simplifier le résultat (5.37) nous avons donc besoin dans un premier temps de calculer $[\nabla_w g]$ dans le cas où

$$g(w) = F(\mathrm{Tr}(w), \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(w))). \tag{5.100}$$

Dans cette section, la notation g désigne la fonction précédente et non la métrique de la surface. Nous avons $g([\nabla n]) = F(H, G)$ d'après (5.9) et (5.10). En notant $f_1(w) = \mathrm{Tr}(w)$ nous obtenons que

$$df_1(w)(h) = \mathrm{Tr}(h) = I : h. \tag{5.101}$$

En notant $f_2(w) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Cof}(w))$ un développement limité donne

$$\begin{aligned} 2f_2(w+h) &= (\mathrm{Tr}(w+h))^2 - \mathrm{Tr}((w+h)^2) \\ &= \mathrm{Tr}(w)^2 + 2\,\mathrm{Tr}(w)\,\mathrm{Tr}(h) + \mathrm{Tr}(h^2) - \mathrm{Tr}(w^2) - \mathrm{Tr}(wh) - \mathrm{Tr}(hw) - \mathrm{Tr}(h^2) \\ &= 2f_2(w) + 2\,\mathrm{Tr}((\mathrm{Tr}(w)I - w)h) + o(|h|). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$df_2(w)(h) = (\mathrm{Tr}(w)I - w^T) : h.$$

Nous pouvons à présent calculer le gradient de g défini par $dg(w)(h) = [\nabla_w g](w) : h$. Après avoir noté F_H la dérivée de F par rapport à la première variable et F_G la dérivée de F par rapport à la deuxième variable

$$[\nabla_w g](w) = F_H I + F_G(\mathrm{Tr}([w])I - [w]^T).$$

L'égalité précédente doit être appliquée au point $[\nabla n]$ et nous obtenons

$$[\nabla_w g]([\nabla n]) = (F_H + HF_G)I - F_G[\nabla n]^T. \tag{5.102}$$

5.7.5 Simplifications de la formulation level set

Nous commençons par simplifier la formule (5.37) dans le cas où $g = F(H, G)$. Nous remplaçons pour simplifier la présentation $[\nabla_w g]$ par $\alpha I + \beta[\nabla n]^T$ où α et β sont des constantes.

Première simplification

Commençons par faire le calcul des deux termes contenant des ζ' intervenant dans (5.37) que nous notons L_ε (nous omettons les intégrales)

$$L_\varepsilon = \left(-\operatorname{div}_{\partial\Omega}\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\nabla\phi \frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) + \left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\nabla\phi\right) \cdot \operatorname{div}(n\otimes n)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) u\cdot n|\nabla\phi|.$$

Pour le premier terme nous utilisons (5.8) et (5.16)

$$-\operatorname{div}_{\partial\Omega}\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T) n|\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right) = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}\left(\alpha|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) n\right) = -\alpha H|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

Nous obtenons avec (5.8) et (5.15)

$$\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\, n|\nabla\phi|\right) \cdot \operatorname{div}(n\otimes n)\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) = \alpha(Hn + [\nabla n]\, n)\cdot n|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) = \alpha H|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta'\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

Nous avons donc $L_\varepsilon = 0$ et donc les termes en ζ', qui pouvaient sembler gênants, n'interviennent pas dans la différentiation.

Intéressons-nous à présent aux autres termes intervenant dans l'expression (5.37) en notant J_ε la fonctionnelle obtenue (nous omettons les intégrales ainsi que $u\cdot n|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$ qui est en facteur)

$$\begin{aligned} J_\varepsilon = \quad & \operatorname{div}(g([\nabla n])n) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\operatorname{div}(\alpha I + \beta[\nabla n]^T)) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|}\right) \\ + \quad & \operatorname{div}((\alpha I + \beta[\nabla n]^T))\cdot\operatorname{div}(n\otimes n) + \left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|}\right)\cdot\operatorname{div}(n\otimes n). \end{aligned}$$

En utilisant (5.13)

$$\frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|} = [\nabla n]\, n + \frac{\nabla|\nabla\phi|\cdot n}{|\nabla\phi|} n. \tag{5.103}$$

En utilisant (5.8)

$$(\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|} = (\alpha I + \beta[\nabla n]^T)[\nabla n]\, n + \alpha\frac{\nabla|\nabla\phi|\cdot n}{|\nabla\phi|} n. \tag{5.104}$$

Nous obtenons donc pour le troisième terme de J_ε avec (5.16)

$$-\operatorname{div}_{\partial\Omega}\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|}\right) = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)[\nabla n]\, n\right) - \alpha H\frac{\nabla|\nabla\phi|\cdot n}{|\nabla\phi|}.$$

Utilisons à présent (5.8) et (5.104) pour le cinquième terme de J_ε

$$\begin{aligned}
&\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\,\frac{\nabla|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|}\right)\cdot \operatorname{div}(n\otimes n)\\
=\;&\left(\alpha[\nabla n]\, n + \alpha\frac{\nabla|\nabla\phi|\cdot n}{|\nabla\phi|} n + \beta[\nabla n]^T[\nabla n]\, n\right)\cdot([\nabla n]\, n + Hn)\\
=\;&(\alpha+\beta H)([\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n) + \alpha H\frac{\nabla|\nabla\phi|\cdot n}{|\nabla\phi|} + \beta([\nabla n]\,[\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n).
\end{aligned}$$

Des termes se compensent et il reste donc

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon = \;& \operatorname{div}(g([\nabla n])n) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\operatorname{div}(\alpha I + \beta[\nabla n]^T)) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}\left((\alpha I + \beta[\nabla n]^T)\,[\nabla n]\, n\right) && (5.105)\\
+\;& \operatorname{div}((\alpha I + \beta[\nabla n]^T))\cdot\operatorname{div}(n\otimes n) + (\alpha+\beta H)([\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n) && (5.106)\\
+\;& \beta([\nabla n]\,[\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n). && (5.107)
\end{aligned}$$

Retrouvons maintenant le résultat que l'on a obtenu dans le cas de la courbure moyenne.

Cas de la courbure moyenne

Simplifions l'expression (5.107) dans le cas $\beta = 0$ en omettant le terme $\operatorname{div}(g([\nabla n])n)$ que nous notons R^α. En utilisant (5.15)

$$R^\alpha = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla\alpha) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}(\alpha[\nabla n]\, n) + \nabla\alpha\cdot(Hn + [\nabla n]\, n) + \alpha([\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n).$$

En utilisant (5.16) nous obtenons

$$-\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla\alpha) = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}\alpha) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}((\nabla\alpha\cdot n)n) = -\Delta_{\partial\Omega}\alpha - H\nabla\alpha\cdot n.$$

En développant la divergence et en utilisant le lemme 3 p 104

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\alpha[\nabla n]\, n) &= -\alpha\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\, n) - \nabla_{\partial\Omega}\alpha\cdot([\nabla n]\, n)\\
&= -\alpha\operatorname{div}([\nabla n]\, n) - \alpha([\nabla n]\, n)\cdot([\nabla n]\, n) - \nabla_{\partial\Omega}\alpha\cdot([\nabla n]\, n).
\end{aligned}$$

En utilisant la relation de symétrie (5.17) ainsi que (5.13)

$$-\nabla_{\partial\Omega}\alpha \cdot ([\nabla n]\ n) = \nabla_{\partial\Omega}\alpha \cdot \frac{\nabla_{\partial\Omega}|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|} = -\nabla\alpha \cdot \frac{\nabla_{\partial\Omega}|\nabla\phi|}{|\nabla\phi|} = -\nabla\alpha \cdot ([\nabla n]\ n).$$

Des termes se simplifient et il reste finalement

$$R^{\alpha} = -\Delta_{\partial\Omega}\alpha - \alpha\,\mathrm{div}([\nabla n]\ n). \tag{5.108}$$

Pour obtenir le résultat dans le cas d'une fonctionnelle du type $\int_{\partial\Omega} A(H)\ d\sigma$ il suffit d'après (5.102) de remplacer dans l'expression précédente α par $A'(H)$ et d'ajouter le terme $\mathrm{div}(A(H)n)$. Nous notons J_H le résultat obtenu.

En utilisant le lemme 1 p 104 et en développant la divergence nous obtenons

$$J_H = A(H)H + A'(H)\nabla H \cdot n - \Delta_{\partial\Omega}(A'(H)) - A'(H)(\nabla H \cdot n + H^2 - 2G). \tag{5.109}$$

Il reste donc

$$J_H = A(H)H - \Delta_{\partial\Omega}(A'(H)) - A'(H)(H^2 - 2G). \tag{5.110}$$

Nous retrouvons donc bien le résultat (5.93).

Après quelques essais infructueux je n'ai pas réussi à mettre sous forme géométrique le résultat dans le cas d'un β non nul. Je propose donc de faire une simplification en supposant que ϕ est une fonction distance.

Cas de la courbure de Gauss pour une fonction distance

Dans ce cas, d'après (5.14) nous avons la relation $[\nabla n]\ n = 0$ ce qui va notablement simplifier les calculs. Notons R_d^{β} l'expression (5.107) dans le cas d'une fonction distance avec $\alpha = 0$ dont nous ôtons le terme en $\mathrm{div}(g([\nabla n])n)$

$$R_d^{\beta} = -\,\mathrm{div}_{\partial\Omega}(\mathrm{div}(\beta[\nabla n]^T)) + \mathrm{div}((\beta[\nabla n]^T)) \cdot Hn. \tag{5.111}$$

En développant la divergence ainsi que la propriété $\mathrm{div}([\nabla n]^T) = \nabla H$

$$\mathrm{div}(\beta[\nabla n]^T) = \beta\nabla H + [\nabla n]^T\ \nabla\beta.$$

Nous avons donc en utilisant $[\nabla n]\ n = 0$

$$\mathrm{div}(\beta[\nabla n]^T) \cdot Hn = \beta H\nabla H \cdot n + H\ ([\nabla n]^T\ \nabla\beta) \cdot n = \beta H\nabla H \cdot n.$$

Nous avons également en utilisant (5.8)

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\operatorname{div}(\beta[\nabla n]^T)) &= -\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\beta\nabla H) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]^T\ (\nabla_{\partial\Omega}\beta + (\nabla\beta\cdot n)n)) \\
&= -\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\beta\nabla H) - \operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]^T\ \nabla_{\partial\Omega}\beta)
\end{aligned}$$

Pour le premier terme on développe la divergence surfacique et on utilise (5.16) ainsi que la propriété de symétrie (5.17)

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\beta\nabla H) &= -\beta\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla H) - \nabla H\cdot\nabla_{\partial\Omega}\beta \\
&= -\beta\operatorname{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}H + (\nabla H\cdot n)n) - \nabla_{\partial\Omega}H\cdot\nabla_{\partial\Omega}\beta \\
&= -\beta\Delta_{\partial\Omega}H - \beta H(\nabla H\cdot n) - \nabla_{\partial\Omega}H\cdot\nabla_{\partial\Omega}\beta.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on utilise la relation $\operatorname{div}_{\partial\Omega}(Ab) = \operatorname{div}_{\partial\Omega}(A^T)\cdot b + A^T : \nabla_{\partial\Omega}b$ ainsi que le fait que $[\nabla n]$ est symétrique car on a choisi une fonction distance

$$-\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]^T\ \nabla_{\partial\Omega}\beta) = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]\ \nabla_{\partial\Omega}\beta) = -\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]^T)\cdot\nabla_{\partial\Omega}\beta - [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}\beta).$$

En dérivant (5.8) et en multipliant par n nous obtenons dans le cas d'une fonction distance

$$(\nabla([\nabla n]^T)n)\cdot n = -[\nabla n]^T[\nabla n]\ n = 0.$$

Nous avons donc avec la relation $\operatorname{div}([\nabla n]^T) = \nabla H$

$$-\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]^T) = -\operatorname{div}([\nabla n]^T) + (\nabla([\nabla n]^T)n)\cdot n = -\nabla H.$$

En utilisant la relation de symétrie (5.17) nous obtenons

$$-\operatorname{div}_{\partial\Omega}([\nabla n]^T\nabla_{\partial\Omega}\beta) = -\nabla H\cdot\nabla_{\partial\Omega}\beta - [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}\beta) = -\nabla_{\partial\Omega}H\cdot\nabla_{\partial\Omega}\beta - [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}\beta).$$

Deux termes se compensent et il reste

$$R_d^\beta = -\beta\Delta_{\partial\Omega}H - 2\nabla_{\partial\Omega}H\cdot\nabla_{\partial\Omega}\beta - [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}\beta). \tag{5.112}$$

Cas général

Considérons à présent le cas général où $g([\nabla n]) = F(H,G)$. Dans ce cas, d'après (5.102), nous avons $\alpha = F_H + HF_G$ et $\beta = -F_G$. Notons J_d la somme de R^α (5.108), R_d^β (5.112) ainsi que le terme $\operatorname{div}(F(H,G)n)$. Dans le cas d'une fonction distance nous avons $R^\alpha = -\Delta_{\partial\Omega}\alpha$ et nous obtenons

$$J_d = \quad \operatorname{div}(F(H,G)n) - \Delta_{\partial\Omega}(F_H + HF_G) + F_G\Delta_{\partial\Omega}(H) + 2\nabla_{\partial\Omega}H\cdot\nabla_{\partial\Omega}(F_G) + [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(F_G)).$$

En développant le laplacien surfacique

$$\Delta_{\partial\Omega}(HF_G) = H\Delta_{\partial\Omega}(F_G) + 2\nabla_{\partial\Omega}(F_G)\cdot\nabla_{\partial\Omega}H + F_G\Delta_{\partial\Omega}(H).$$

Donc

$$-\Delta_{\partial\Omega}(HF_G) + F_G\Delta_{\partial\Omega}(H) + 2\nabla_{\partial\Omega}H \cdot \nabla_{\partial\Omega}(F_G) = -H\Delta_{\partial\Omega}(F_G).$$

En développant la divergence et en utilisant le lemme 1 p 104 avec une fonction distance

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(F(H,G)n) &= F(H,G)H + \nabla(F(H,G)) \cdot n = F(H,G)H + F_H\ \nabla H \cdot n + F_G\ \nabla G \cdot n \\ &= F(H,G)H - F_H\ (H^2 - 2G) + F_G\ \nabla G \cdot n. \end{aligned}$$

Il reste donc

$$J_d = F(H,G)H - F_H\ (H^2 - 2G) - \Delta_{\partial\Omega}(F_H) + F_G\ \nabla G \cdot n - H\Delta_{\partial\Omega}(F_G) + [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(F_G)). \tag{5.113}$$

Supposons que la surface ne change pas de topologie. Alors d'après le théorème de Gauss-Bonnet (7.26)

$$\int_{\partial\Omega} G\ d\sigma = cte. \tag{5.114}$$

Utilisons (5.113) avec $F(H,G) = G$. Nous avons $F_H = 0$ et $F_G = 1$. On obtient donc (on remet les intégrales)

$$\int_{\partial\Omega} (GH + \nabla G \cdot n)u \cdot n\ d\sigma = 0.$$

Cette formule étant valable pour tout champ de vitesse u nous avons

$$\nabla G \cdot n = -GH \tag{5.115}$$

La formule (5.113) se réécrit avec les intégrales et en faisant tendre ε vers 0

$$\boxed{J'(t) = \int_{\partial\Omega} \left(F(H,G)H - F_H\ (H^2 - 2G) - \Delta_{\partial\Omega}(F_H) - F_G\ GH - H\Delta_{\partial\Omega}(F_G) + [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(F_G))\right)\ u \cdot n\ d\sigma}. \tag{5.116}$$

Nous obtenons donc l'équivalent de la formule (5.82) obtenue avec la méthode paramétrique.

5.8 Bilan

5.8.1 Avantages et inconvénients de chaque méthode

Méthode approximation volumique

Cette méthode est la plus simple car on se ramène à un domaine volumique. Il est très simple de démontrer les théorèmes généraux de dérivation. Les intégrations par parties s'effectuent sur un volume ce qui simplifie les calculs. Le plus gros inconvénient réside dans le choix d'un prolongement des quantités considérées à l'extérieur de la surface. Les résultats obtenus dépendent donc *a priori* du choix de la fonction ϕ choisie. Remarquons que nous avons calculé la différentielle d'une fonctionnelle dépendant de la courbure de manière générale par l'intermédiaire de $[\nabla n]$.

Méthode avec formule de Reynolds

La démonstration des théorèmes de dérivations est dans ce cas plus complexe. Il faut utiliser un changement de variable dans les intégrales surfaciques et ensuite effectuer la dérivation. Comme les calculs sont effectués sur la surface, il faut introduire des opérateurs surfaciques (notamment pour la courbure) alors que le prolongement choisi est de norme 1 ce qui alourdit les calculs. Les résultats obtenus ne sont pas géométriques *a priori* car il est encore fait usage de prolongement à l'extérieur de la surface. Cependant, cette méthode a le mérite de donner un résultat avec des opérateurs surfaciques qui est intermédiaire entre la première méthode et la suivante.

Méthode géométrie différentielle

Avec cette méthode, les théorèmes généraux ne sont pas très complexes à démontrer. L'avantage majeur est de considérer une paramétrisation et de ne faire appel à aucun prolongement de quantités à l'extérieur de la surface. Le résultat obtenu ne dépend pas de la paramétrisation choisie car il s'exprime à l'aide d'opérateurs surfaciques et de la courbure. Un autre avantage réside dans le fait que les calculs sont simples dans la mesure où les objets considérés sont de dimension 2 (pour dn par exemple) contrairement aux deux autres méthodes ou $[\nabla n]$ est une matrice de taille 3. La difficulté de cette méthode est liée aux outils mathématiques introduits qui font appel à des notions géométriques très abstraites (dérivée covariante de tenseurs par exemple).

Résumons à présent les principaux résultats obtenus dans ce chapitre. Nous supposons que la surface et les fonctions considérées sont régulières afin que les calculs aient un sens. Nous reprenons les notations utilisées dans la méthode avec la formule de Reynolds surfacique et nous notons $\partial\Omega = \{\phi = 0\}$.

5.8.2 Cas de la normale

Considérons la fonctionnelle définie par

$$J(\phi) = \int_{\partial\Omega} f(\cdot, n)\, d\sigma$$

Les trois méthodes d'optimisation conduisent au même résultat qui se met sous la forme

$$\boxed{(J(\phi))_t = \int_{\partial\Omega} (\ f(\cdot, n)H + \nabla_1 f \cdot n + \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{2,\partial\Omega} f)\ )\ u \cdot n d\sigma}$$

5.8.3 Cas de la courbure moyenne

Considérons la fonctionnelle définie par

$$J(\phi) = \int_{\partial\Omega} A(H)\, d\sigma$$

Les trois méthodes d'optimisation conduisent au même résultat qui se met sous la forme

$$\boxed{(J(\phi))_t = -\int_{\partial\Omega} (\ \Delta_{\partial\Omega}(A(H)) + A'(H)(H^2 - 2G) - A(H)H\ )u \cdot n\, d\sigma}$$

5.8.4 Cas de la courbure de Gauss

Considérons la fonctionnelle définie par

$$J(\phi) = \int_{\partial\Omega} F(H,G)\, d\sigma$$

En faisant l'hypothèse simplificatrice d'une fonction distance pour la fonction level set ϕ, la méthode paramétrique et la méthode d"approximation volumique donnent le même résultat qui s'écrit

$$\boxed{(J(\phi))_t = \int_{\partial\Omega} \big(F(H,G)H - F_H\ (H^2 - 2G) - \Delta_{\partial\Omega}(F_H) - F_G\ GH - H\Delta_{\partial\Omega}(F_G) + [\nabla n] : \nabla_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega}(F_G))\big)\ u \cdot n\, d\sigma}$$

5.9 Conclusions et perspectives

Nous avons donc dans ce chapitre défini tout d'abord la courbure moyenne et de Gauss de manière intrinsèque avec (5.6) et (5.7). Nous avons ensuite simplifié ces expressions dans le cas de prolongements unitaires de la normale (5.9) (5.10). Trois approches pour calculer la dérivée de fonctionnelles géométriques ont alors été développées. Nous avons montré que ces trois différentes approches donnaient le même résultat dans le cas de fonctionnelles dépendant de la normale et de la courbure moyenne et elles permettent de mettre le résultat sous une forme géométrique. Ce résultat sera utilisé pour construire des schémas numériques de différences finies pour la force de courbure plus adaptés que ceux qui serait utilisés pour la formule obtenue initialement avec la dérivation par approximation volumique. Dans le cas de la courbure de Gauss nous avons identifié l'approche par approximation volumique ainsi que la méthode paramétrique dans le cas d'une fonction distance.

Comme perspective, il serait intéressant d'achever ce travail en mettant le résultat de la courbure de Gauss sous une forme géométrique dans le cas général où ϕ n'est pas une fonction distance. Une piste serait de trouver l'équivalent des équations de Mainardi-Codazzi (ce sont ces équations qui ont permis d'importantes simplifications dans la méthode paramétrique) dans le cas d'une représentation par une fonction level set.

Chapitre 6

Applications numériques

Plan du chapitre

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique des équations du modèle de membrane introduit dans la première partie. Dans un but pédagogique, nous commencerons par quelques généralités sur les schémas aux différences finies pour l'équation de chaleur. Nous présenterons ensuite les équations adimensionnées du modèle ainsi que les méthodes numériques utilisées pour résoudre l'équation de transport et les équations de Navier Stokes. Nous nous intéresserons ensuite aux erreurs commises lors du calcul du volume et de l'aire ainsi que de la courbure. Nous retrouverons ensuite les formes d'équilibres de vésicules en utilisant la force de courbure introduite dans la partie précédente. Nous présenterons enfin quelques résultats préliminaires concernant le cisaillement. Toutes les simulations numériques seront effectuées en deux et trois dimensions d'espace.

Une manière simple de résoudre une EDP est d'utiliser des schémas aux différences finies qui reposent sur des développements limités. Nous proposons dans ce début de chapitre d'étudier brièvement les schémas numériques de différences finies sur l'équation de la chaleur en mettant en avant les schémas implicites et explicites. Pour une introduction plus détaillée de l'analyse numérique on renvoie à [1].

6.1 Equation de la chaleur 1D

Considérons l'équation de la chaleur sur l'intervalle $[0,1] \times [0,T]$ avec des conditions de Dirichlet homogènes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \\ u(x,0) & = & u_0(x), \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0, \end{array} \right.$$

où f est un terme source qui peut être non linéaire et D est le coefficient de diffusion.

6.1.1 Approximation de la solution

Nous allons discrétiser l'espace $[0,1] \times [0,T]$ pour réduire à un nombre fini le nombre d'inconnues du problème. Pour ce faire, choisissons un pas d'espace $\Delta x = 1/M$ et un pas de temps $\Delta t = T/N$.

Notons u_i^n une approximation de la solution aux points de grille $(x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t)$. Utilisons un développement de Taylor Lagrange pour approximer la dérivée temporelle

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \tau),$$

où $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$. L'erreur commise en remplaçant la dérivée en temps par l'approximation du membre de gauche est donc proportionnelle au pas de temps Δt ainsi qu'a la dérivée seconde en temps de u. Si la dérivée seconde est bornée alors l'erreur commise tend vers 0 comme Δt donc le schéma est consistant à l'ordre 1 en temps. Pour le terme diffusif il est courant d'utiliser le schéma centré

$$F_i^n := \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t_n).$$

où $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$. Le schéma considéré est donc consistant à l'ordre 2 en espace. Nous avons maintenant plusieurs choix possibles pour résoudre le problème approché.

6.1.2 Schéma explicite

Nous supposons dans un premier temps que le terme source en second membre f est nul. Le schéma explicite est donné par

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\ F_i^n. \tag{6.1}$$

Ce schéma permet, connaissant la condition initiale, de déterminer explicitement les valeurs de u_i^n pour tout i et tout n. Si l'on choisit des pas d'espaces et temps quelconques, le schéma explicite (6.1) diverge. Bien que nous ayons construit des approximations consistantes des dérivées, les erreurs que l'on commet à chaque pas de temps peuvent s'accumuler et faire diverger la solution. Pour obtenir la convergence de l'algorithme, nous avons besoin de la notion de stabilité d'un schéma.

Un moyen efficace de montrer la stabilité est d'effectuer un développement en série de Fourier de la solution et de comparer le coefficient d'amplification au nombre 1. Il est également possible d'utiliser un principe du maximum discret (pour certaines équations comme celle de la chaleur) qui spécifie que la solution reste comprise entre le minimum et le maximum de la condition initiale. Après avoir noté $\alpha = \frac{D\,\Delta t}{(\Delta x)^2}$ l'équation (6.1) se met sous la forme

$$u_i^{n+1} = \alpha u_{i+1}^n + (1 - 2\alpha)u_i^n + \alpha u_{i-1}^n.$$

Le principe du maximum discret se reformule de la manière suivante : la valeur de u_i^{n+1} doit être une combinaison convexe des u_i^n. En conséquence nous avons la condition $1 - 2\alpha \geq 0$ que l'on réécrit

$$\Delta t \leq \frac{1}{2D}(\Delta x)^2. \tag{6.2}$$

Le schéma explicite est donc très simple à implémenter numériquement mais la condition (6.2) est très restrictive pour de petits pas d'espaces mais également pour de grands coefficients de diffusion. Pour lever cette condition de stabilité on peut considérer des schémas implicites.

6.1.3 Schéma implicite

Le schéma implicite est donné par

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\ F_i^{n+1}.$$

Pour calculer u au temps t_{n+1} en fonction de u au temps t_n il est nécessaire de résoudre un système linéaire (F_i^n dépend linéairement des u_i^n). La méthode implicite est plus coûteuse en temps de calcul que la méthode explicite mais elle permet de lever la condition de stabilité (6.2).

Si l'on ajoute le terme source f (non linéaire en général), il faut linéariser une partie ou le traiter entièrement en explicite. Dans ce dernier cas, le schéma devient

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\ F_i^{n+1} + f(u_i^n).$$

Le traitement explicite du terme non linéaire donne lieu à une autre condition de stabilité que nous n'expliciterons pas ici.

Cette introduction très sommaire permet de saisir les principales idées de la méthode de différences finies et se généralisent simplement en dimension supérieure. L'étude faite permet en particulier de justifier le choix d'un schéma implicite dans le cas où les effets visqueux (le laplacien) sont prépondérants. Nous allons maintenant présenter les schémas numériques utilisés pour le modèle de membrane.

6.2 Schémas numériques pour le modèle de membrane

Les équations du modèle membrane, où l'on a ajouté la force de courbure développée dans le chapitre précédent, sont données par le système d'équations

$$\begin{aligned} \rho(\phi)(u_t + (u\cdot\nabla)u) - \mathrm{div}(\mu(\phi)D(u)) + \nabla p &= \lambda F_e(\phi) + \alpha F_c(\phi), \\ \phi_t + u\cdot\nabla\phi &= 0, \\ \mathrm{div}(u) &= 0. \end{aligned}$$

avec les expressions suivantes de la densité et de la viscosité

$$\rho(\phi) = \rho + \Lambda_0|\nabla\phi_0|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right), \qquad \mu(\phi) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\tilde{\zeta}\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

La force élastique est donnée par la formule (2.21)

$$F_e(\phi) = (\ \nabla_{\partial\Omega}(E'(|\nabla\phi|)) - E'(|\nabla\phi|)H(\phi)n(\phi)\ )|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right), \tag{6.3}$$

La force de courbure est donnée par la formule (5.98)

$$F_c(\phi) = (\ 2\Delta_{\partial\Omega}(H(\phi)) + H(\phi)(H(\phi)^2 - 4G(\phi))\ )\ n(\phi)\ |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right). \tag{6.4}$$

Dans le cas bidimensionnel (5.99)

$$F_c(\phi) = (\ 2\Delta_{\partial\Omega}(\kappa(\phi)) + \kappa(\phi)^3\ )\ n(\phi)\ |\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right). \tag{6.5}$$

Les notations suivantes sont utilisées

- ϕ : fonction level set qui représente l'interface
- u : vitesse du fluide
- $D(u) = ([\nabla u] + [\nabla u])/2$: tenseur des vitesses de déformations
- p : pression
- ζ : fonction cut-off
- $\tilde{\zeta}$: fonction de Heaviside régularisée
- ε : paramètre de régularisation
- ρ : densité du fluide (supposée la même dans les deux fluides)
- Λ_0 : masse surfacique de la membrane
- μ_1 : viscosité du fluide à l'intérieur de la membrane
- μ_2 : viscosité du fluide à l'extérieur de la membrane
- λ : rigidité de la membrane
- α : coefficient de flexion
- $H(\phi)$: courbure moyenne
- $G(\phi)$: courbure de gauss
- $\kappa(\phi)$: courbure en 2D
- $n(\phi)$: normale

Lorsque l'on veut effectuer des simulations numériques il est utile de procéder à une adimensionalisation des équations. Elle permet de faire ressortir des paramètres adimensionnés qui contrôlent le comportement des solutions pour des paramètres physiques très différents.

6.2.1 Adimensionalisation

Introduisons des quantités caractéristiques de notre problème

$$\begin{array}{rclllll}
x & = & Lx', & y = Ly', & z = Lz', & & \\
u & = & Uu', & t = \dfrac{L}{U}t', & \rho = \rho_{ref}\rho', & & \\
\mu & = & \mu_{ref}\mu', & p = \rho_{ref}U^2p', & \phi = L\phi', & \varepsilon = L\varepsilon'. &
\end{array}$$

Le choix fait dans l'adimensionnement ne change pas l'équation de transport ainsi que la condition d'incompressibilité. Avec l'adimensionalisation, le membre de gauche de l'équation sur la vitesse est proportionnel à $\rho_{ref}U^2/L$. La force élastique est proportionnelle à λ/L^2 et la force de courbure à α/L^4 d'après (6.3) et (6.4). L'équation se réécrit en omettant les primes

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\rho(\phi)(u_t + (u\cdot\nabla)u) - \frac{1}{R_e}\operatorname{div}(\mu(\phi)D(u)) + \nabla p & = & \frac{1}{W_e}F_e(\phi) + \frac{1}{W_c}F_c(\phi), \\
\phi_t + u\cdot\nabla\phi & = & 0, \\
\operatorname{div}(u) & = & 0.
\end{array}\right.$$

avec les nombres adimensionnés suivants

$$R_e = \frac{LU\rho_{ref}}{\mu_{ref}}, \qquad W_e = \frac{\rho_{ref}LU^2}{\lambda}, \qquad W_c = \frac{\rho_{ref}U^2L^3}{\alpha},$$
$$\rho(\phi) = 1 + \frac{\Lambda_0|\nabla\phi_0|}{\varepsilon\rho_{ref}}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right), \qquad \mu(\phi) = 1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right)\tilde{\zeta}\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

Nous choisissons comme convention les paramètres de référence du fluide 1 ($\mu_{ref} = \mu_1$). L'équation adimensionnée fait donc apparaître trois paramètres qui contrôlent les caractéristiques du modèle. Le nombre de Reynolds R_e mesure l'importance des termes inertiels comparés aux termes visqueux. Le terme W_e mesure l'importance de la force élastique et W_c mesure l'importance de la force de courbure.

Les applications visées dans la thèse concernent la biomécanique et plus particulièrement l'étude du comportement de vésicules dans de petits vaisseaux sanguins. Nous choisissons donc les paramètres physiques suivants

$$\rho_{ref} = 1000, \qquad \mu_{ref} = 10^{-3}, \qquad L = 10^{-5}, \qquad U = 10^{-3}.$$

Ces paramètres donnent un nombre de Reynolds R_e de l'ordre de 10^{-2}. A l'échelle que l'on considère l'écoulement est donc très visqueux. Le paramètre W_e sera choisi de façon à imposer une faible variation de l'étirement de l'interface. Dans les simulations, nous allons négliger la densité surfacique de la membrane Λ_0 ($\rho(\phi) = 1$) par rapport à la densité du fluide.

Le système (6.2.1) est constitué d'une équation de transport sur la fonction level set ainsi que des équations de Navier Stokes pour la vitesse. Ces équations sont couplées via la fonction level set qui intervient en second membre de l'équation de Navier-Stokes ainsi que la vitesse qui intervient dans l'équation de transport. Il suffit de découpler ces équations pour aborder une résolution numérique de ce problème. Pour simplifier notre étude, nous choisissons de découpler explicitement les équations. Nous allons donc dans un premier temps résoudre l'équation sur la vitesse puis nous utiliserons cette vitesse pour résoudre l'équation de transport. Ce choix d'expliciter complètement le couplage va introduire une condition de stabilité dont nous parlerons plus loin.

Les équations étant maintenant découplées, nous allons décrire les méthodes numériques utilisées pour résoudre l'équation sur la vitesse ainsi que l'équation de transport. Le modèle de membrane étant écrit de manière complètement eulérienne le choix de schémas de différences finies s'est imposé pour sa simplicité d'implémentation.

6.2.2 Schéma pour la vitesse

La difficulté de résolution de l'équation sur la vitesse provient de la contrainte d'incompressibilité $\mathrm{div}(u) = 0$ ainsi que du traitement du terme non linéaire $(u \cdot \nabla)u$. Une méthode devenue maintenant classique pour imposer la contrainte d'incompressibilité a été introduite par Temam [47] et Chorin [10] en 1968 et consiste à utiliser un splitting d'opérateurs. Dans un premier temps, une vitesse intermédiaire $u^\star$ est calculée en omettant le terme de pression. Dans un deuxième temps la pression est calculée pour imposer la contrainte d'incompressiblité puis une réactualisation de la vitesse est effectuée. Nous allons maintenant décrire ces différentes étapes de manière plus précise.

Calcul de la vitesse $u^\star$

Les nombres de Reynolds considérés sont faibles donc le terme non linéaire d'inertie est peu important et il va être traité en explicite. Le traitement explicite de ce terme va impliquer une condition de stabilité CFL du même type que celle obtenue pour l'équation de transport que nous étudierons par la suite. Les effets visqueux étant importants dans les applications visées (R_e est faible), un traitement implicite du laplacien de la vitesse permet de lever la condition de stabilité $\Delta t \leq CR_e(\Delta x)^2$ qui apparaîtrait avec un traitement explicite. Si l'on omet la pression, nous obtenons une équation d'Helmholtz $(\Delta u + \beta u = f)$ que l'on résout avec la librairie FISHPACK (disponible à l'adresse http ://www.cisl.ucar.edu/css/software/fishpack/) qui est très performante pour ce genre d'équation.

Dans le cas où la viscosité n'est pas la même dans chaque fluide, le terme de viscosité est linéaire mais ne se met pas sous la forme d'un laplacien. Afin d'utiliser la librairie FISHPACK, nous proposons de décomposer le terme visqueux en deux termes. Le premier est un laplacien qui contient le terme prépondérant (avec la plus grande viscosité) que l'on va traiter en implicite. Le deuxième est traité en explicite mais il ne donnera pas lieu à une condition de stabilité (comme pour le schéma de Crank Nickolson).

Le second membre noté $F(\phi)$ est traité par différences finies de manière explicite. Nous détaillerons les schémas utilisés dans les sections qui suivent. Pour la dérivée temporelle de la vitesse, nous utilisons un schéma d'Euler d'ordre 1. Ce choix est justifié par le fait que les forces élastiques vont donner lieu à des restrictions importantes sur le pas de temps.

La première étape de l'algorithme consiste donc à chercher $u^\star$ qui vérifie

$$\frac{u^\star - u^n}{\Delta t} + (u^n \cdot \nabla)u^n - \frac{1}{R_e}\Delta u^\star - \frac{1}{R_e}\operatorname{div}((\mu(\phi) - 1)D(u^n)) = F(\phi^n).$$

Réécrivons cette expression sous la forme d'une équation d'Helmholtz

$$\Delta u^\star - \frac{R_e}{\Delta t}u^\star = -\frac{R_e}{\Delta t}u^n + R_e((u^n \cdot \nabla)u^n - F(\phi^n)) - \operatorname{div}((\mu(\phi) - 1)D(u^n)).$$

Nous choisissons de fixer des conditions limites de type Dirichlet, les mêmes que celles choisies pour u^n. Chaque composante de la vitesse est définie sur une grille décalée de type MAC (FIG 6.1 en 2D). Pour ne pas effectuer d'interpolations, nous avons choisi de résoudre les équations de Helmhotz directement sur la grille décalée pour chaque composante de la vitesse.

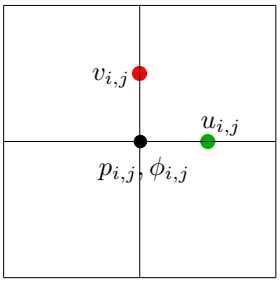

FIG. 6.1 – Grille MAC avec décalage des composantes de la vitesse

Une fois la vitesse intermédiaire $u^\star$ calculée, nous allons résoudre l'équation sur la pression qui va permettre d'imposer la contrainte d'incompressibilité.

Calcul de la pression

La vitesse $u^\star$ calculée précédemment n'a aucune raison d'être à divergence nulle à cause des conditions limites et des termes non linéaires. Pour imposer cette condition, nous résolvons l'équation de Poisson

$$\Delta p^n = \frac{\mathrm{div}(u^\star)}{\Delta t}. \tag{6.6}$$

La pression est calculée aux noeuds de la grille (6.1). Le décentrage de la vitesse permet un calcul de $\mathrm{div}(u^\star)$ plus précis aux noeuds de pression. Nous choisissons, comme dans la littérature, d'imposer des conditions de Neumann homogènes pour la pression car la vitesse vérifie des conditions de Dirichlet. La résolution de cette equation de Poisson est ensuite effectuée avec le solveur FISHPACK. La vitesse est alors réactualisée avec

$$u^{n+1} = u^\star - \Delta t \nabla p^n.$$

ce qui permet d'obtenir $\mathrm{div}(u^{n+1}) = 0$ d'après (6.6). Cette méthode peut également s'adapter au cas d'une densité variable.

Le schéma de projection que nous venons d'introduire est d'ordre un en temps. Plusieurs modifications ont été apportées pour améliorer l'ordre de convergence de la méthode avec l'introduction de termes artificiels dans le calcul de la pression. Une partie des résultats existants sur ces méthodes sont documentés dans [27].

6.2.3 Schéma pour l'équation de transport

Les schémas utilisés pour l'équation de transport sont très différents de ceux utilisés pour la vitesse. En effet, l'équation sur la vitesse peut être considérée comme parabolique tandis que l'équation de transport est hyperbolique. Des schémas de différences finies d'ordre 1 centrés et décentrés sont très diffusifs et introduisent des oscillations. Des avancées majeures ont été apportées dans les années 80 avec les schémas ENO (Essentially Non Oscillatory) [38] et WENO (Weighthted Essentially Non Oscillatory) [32]. Ces schémas reposent sur une combinaison optimale de plusieurs approximations de la solution par différences finies prenant en compte la régularité locale de la solution. L'équation de transport est alors traitée de manière explicite et la condition de stabilité CFL

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u|_{L^\infty}} \tag{6.7}$$

permet d'assurer la stabilité du schéma. Cette condition ne sera pas trop restrictive car les vitesses considérées seront faibles à cause du petit nombre de Reynolds.

6.2.4 Conditions de stabilité dû au traitement explicite du couplage

Le traitement explicite du couplage des équations va induire des conditions de stabilité qui ne sont pas très bien établies. Il existe néanmoins une condition de stabilité qui est valable dans le cas de deux fluides parfaits séparés par une interface avec une tension de surface, la condition de Brackbill [7]

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{W_e}{2\pi}}(\Delta x)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette condition est très contraignante pour des modules de rigidité de la force élastique importants (des petits W_e) mais ne prend pas en compte la viscosité du fluide. D'autres études ont été réalisées pour l'étude de la stabilité dans le cas de fluides visqueux [25]

$$\Delta t \leq \frac{W_e}{R_e}\Delta x.$$

Cette condition permet de relaxer la condition de stabilité de Brackbill pour de petits Reynolds. On pourra également consulter la thèse de Claire Bost [6] concernant les conditions de stabilité d'une membrane élastique dans un fluide.

Pour la force de courbure qui fait intervenir des dérivées d'ordre quatre, il n'existe pas à ma connaissance de telle condition de stabilité. Nous choisirons dans les calculs des petits pas de temps ou un paramètre W_c pas trop élevé pour que le schéma reste stable.

6.2.5 Fonction level set

Les méthodes level set ont été introduites en 1988 par Osher et Sethian [39] et elles sont maintenant largement utilisées dans de nombreuses applications. La fonction level set est discrétisée sur la grille fixe aux noeuds de pression. Dans l'idéal, le choix d'une fonction distance à l'interface ($|\nabla\phi| = 1$) permet une localisation des forces à l'interface ainsi qu'une meilleure stabilité numérique. Le calcul de réinitialisation nécessaire ne peut être effectué qu'initialement dans notre cas car $|\nabla\phi|$ capture l'information sur l'étirement de la membrane. Nous avons cependant besoin de localiser les forces sur une taille constante dans un voisinage de l'interface et cela quel que soit l'étirement de la membrane. Pour résoudre ce problème, G.-H Cottet a proposé le principe de renormalisation qui consiste à remarquer que $\dfrac{\phi}{|\nabla\phi|}$ est une fonction distance au premier ordre dans un voisinage de l'interface. Nous remplacerons donc dans l'expression des forces (6.3) et (6.4) $|\nabla\phi|\dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\phi}{\varepsilon}\right)$ par $\dfrac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\dfrac{\phi}{|\nabla\phi|\varepsilon}\right)$.

Le calcul analytique de l'expression d'une fonction distance n'est en général pas possible, plusieurs méthodes numériques peuvent cependant être envisagées. La première est basée sur un calcul direct où l'on calcule la distance entre chaque point de la grille et la surface. Cette méthode est très simple mais les temps de calculs deviennent rédhibitoires lorsque l'on travaille en 3D. La deuxième méthode introduite dans [41] consiste à résoudre une équation de Hamilton-Jacobi dont la solution stationnaire est une fonction distance. Cette équation s'écrit

$$\phi_t + \mathrm{sign}(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0, \qquad \phi_t + \mathrm{sign}(\phi_0)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\cdot\nabla\phi = \mathrm{sign}(\phi_0).$$

avec une condition initiale que l'on calcule de manière analytique. La deuxième expression peut être vue comme une équation de transport que l'on peut résoudre avec les schémas WENO mentionnés précédemment. La solution stationnaire de cette équation vérifie $|\nabla\phi| = 1$ au voisinage de l'interface après quelques quelques itérations.

Nous avons également besoin de choisir les fonctions ζ et $\tilde{\zeta}$ pour localiser et régulariser l'interface. Nous choisissons

$$\zeta(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos(\pi r)) & \text{si} \quad |r| < 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad |r| > 1 \end{cases}$$

$$\tilde{\zeta}(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + r + \frac{\sin(\pi r)}{\pi}\right) & \text{si} \quad |r| < 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad r < -1 \\ 1 \quad \text{si} \quad r > 1 \end{cases}$$

Le paramètre ε sera fixé à $1.5\Delta x$ dans les simulations. On revoie à [48] pour plus de détails sur les choix possibles de la fonction ζ et du paramètre ε. Ayant décrit les méthodes générales qui vont être utilisées dans la suite nous intéressons maintenant aux résultats numériques obtenus en 2D et 3D.

6.3 Cas 2D

Cette section est consacrée à l'étude du modèle de membrane en 2D. Nous commencerons par étudier l'erreur commise dans le calcul numérique du périmètre, de l'aire ainsi que la courbure. Ces résultats seront comparés à des formules analytiques dans le cas d'ellipses. Nous nous intéresserons ensuite aux formes d'équilibres des vésicules et au comportement d'une vésicule dans un écoulement en cisaillement.

Dans le cas de la représentation d'une courbe paramétrée par une fonction level set, le calcul du périmètre, de l'aire et de la courbure ne dépendent pas théoriquement de la fonction ϕ choisie. Pourtant, en pratique, les résultats obtenus avec des fonctions distances sont plus précis. Comme $|\nabla\phi|$ capture l'étirement variable de la membrane il est nécessaire de trouver des méthodes efficaces pour calculer des quantités dépendant de ϕ quel que soit l'étirement. Nous comparerons alors l'erreur commise en utilisant des formules analytiques que nous présentons maintenant.

6.3.1 Calculs analytiques dans le cas d'une ellipse

Choisissons de représenter l'ellipse par la ligne de niveau 0 de la fonction suivante

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6.8}$$

$$\phi : \quad (x,y) \longrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1. \tag{6.9}$$

Cette représentation nous permet de calculer l'aire de l'ellipse en utilisant une intégration par tranches

$$S = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = \pi ab. \tag{6.10}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, cette fonction implicite ne permet pas de calculer le périmètre. Pour faire ce calcul il suffit de considérer une représentation paramétrique donnée par

$$X : \theta \mapsto (a\cos(\theta), b\sin(\theta)).$$

Nous calculons le périmètre avec la formule (7.1) de l'annexe du chapitre 7

$$P = \int_0^{2\pi} |X'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)}\, d\theta.$$

Cette intégrale est elliptique et ne se calcule pas analytiquement, nous effectuerons donc un calcul numérique. Introduisons le taux de remplissage τ

$$\tau = \frac{S}{\pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2} = \frac{4\pi S}{P^2}.$$

Cette quantité représente le rapport entre l'aire délimitée par la courbe et l'aire du cercle qui a le même périmètre que la courbe paramétrée. D'après l'inégalité isopérimétrique, le taux de remplissage est toujours inférieur à 1. Diminuer τ revient à diminuer l'aire tout en gardant constant le périmètre.

La représentation implicite permet de calculer la normale $n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ et la courbure $\kappa = \mathrm{div}(n)$. Après quelques calculs, nous obtenons

$$\kappa(x, y) = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{6.11}$$

Nous discrétisons maintenant la fonction level set ϕ sur une grille (6.2). Pour faire les tests, nous choisissons d'utiliser (6.9) comme fonction level set. Comme $|\nabla\phi|$ n'est pas constant sur la courbe nous utilisons le terme étiré pour faire référence à cette fonction. Nous choisissons également deux ellipses types qui n'ont pas les mêmes rayons pour étudier l'influence de la variation plus ou moins grande de $|\nabla\phi|$ dans les calculs numériques. Dans tous les tests d'erreurs relatives nous utiliserons une résolution de $32, 64, 128$ et 256 points.

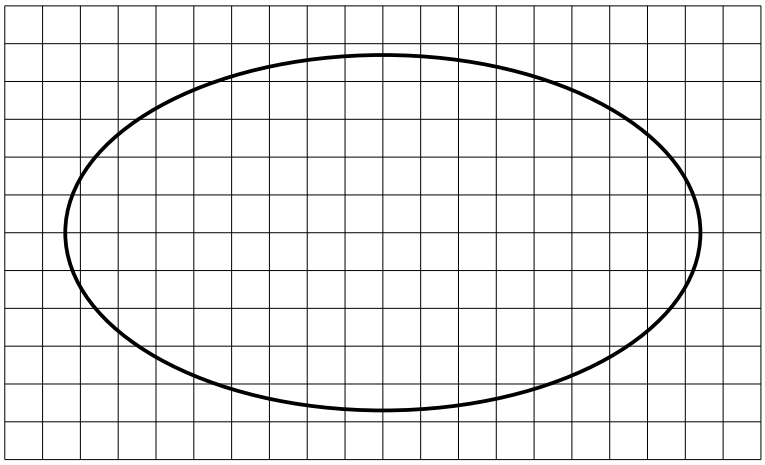

FIG. 6.2 – Représentation d'une ellipse sur une grille rectangulaire

6.3.2 Calcul approché de l'aire et du périmètre

Nous nous intéressons à présent à l'erreur que l'on commet lorsque l'on calcule l'aire et le périmètre d'une ellipse dans différentes situations.

Aire

Pour l'aire nous utilisons la formule renormalisée suivante

$$S_\varepsilon = \int_Q \left(1 - \tilde{\zeta}\left(\frac{\phi}{|\nabla\phi|\varepsilon}\right)\right)\, dx.$$

Nous avons choisi de renormaliser pour obtenir une approximation de la fonction distance à l'interface. Il est simple de voir que S_ε converge bien vers l'aire délimitée par la courbe.

Nous avons choisi comme cas tests deux ellipses étirées de paramètres $a = 0{,}4$ et $b = 0{,}3$ ainsi que $a = 0{,}4$ et $b = 0{,}1$. Pour éviter les effets de grille nous avons choisi de calculer une moyenne de l'erreur relative $|S_\varepsilon - S_{exact}|/S_{exact}$ pour plusieurs ellipses que nous faisons tourner d'un d'angle $\theta_k = 2\pi k\Delta x$ pour $k = 0, \cdot\cdot, n-1$. Les résultats obtenus sont les suivants

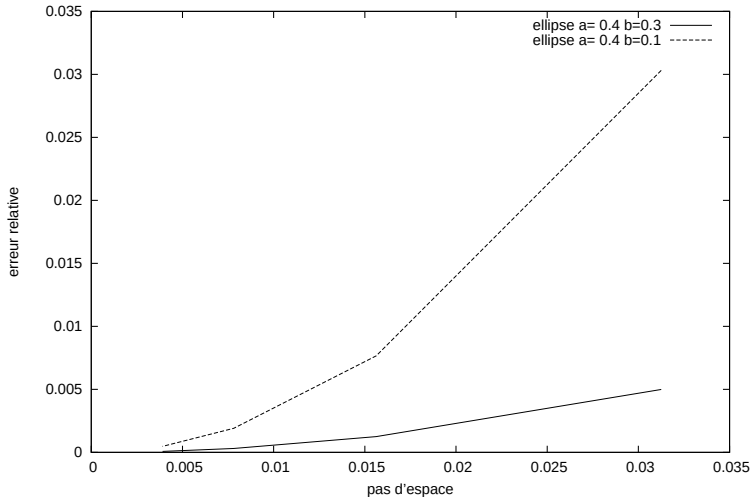

FIG. 6.3 – Erreur dans le calcul de l'aire d'une ellipse etiree

Comme on pouvait s'y attendre, le calcul de l'aire est moins précis dans le cas d'une ellipse plus étirée. Nous avons effectué les mêmes tests dans le cas d'une fonction distance et les résultats sont du même ordre de grandeur. Ceci s'explique simplement par le fait que nous avons utilisé un calcul de l'aire renormalisé.

Périmètre

Pour le calcul du périmètre nous utilisons par la formule d'approximation volumique (5.18)

$$\tilde{P}_\varepsilon = \int_Q |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\, dx. \tag{6.12}$$

Nous pouvons également utiliser la formule renormalisée

$$P_\varepsilon = \int_Q \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{|\nabla\phi|\varepsilon}\right)\, dx, \tag{6.13}$$

qui permet d'approcher la fonction distance dans un voisinage de l'interface. Les effets de grille sont plus importants que dans le calcul l'aire. Nous choisissons de faire un calcul de la moyenne de l'erreur relative $|P_\varepsilon - P_{exact}|/P_{exact}$ pour différentes ellipses tournées d'un angle $\theta_k = 2\pi k\Delta x$ pour $k = 0, \cdot\cdot, n-1$. Nous choisissons les mêmes cas tests que pour le calcul de l'aire. Voici les résultats obtenus pour l'erreur sur le périmètre avec la formule non renormalisée (6.12)

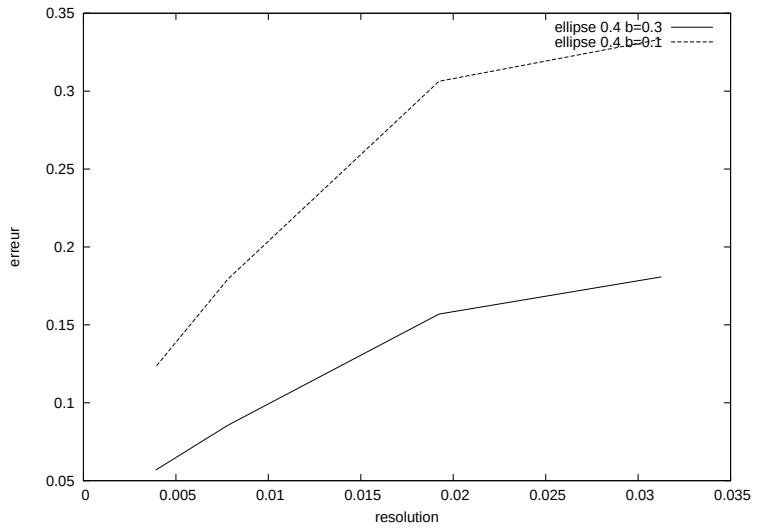

FIG. 6.4 – Erreur dans le calcul du périmètre d'une ellipse sans renormalisation

Voici les résultats obtenus pour l'erreur sur le périmètre avec la formule renormalisée (6.13)

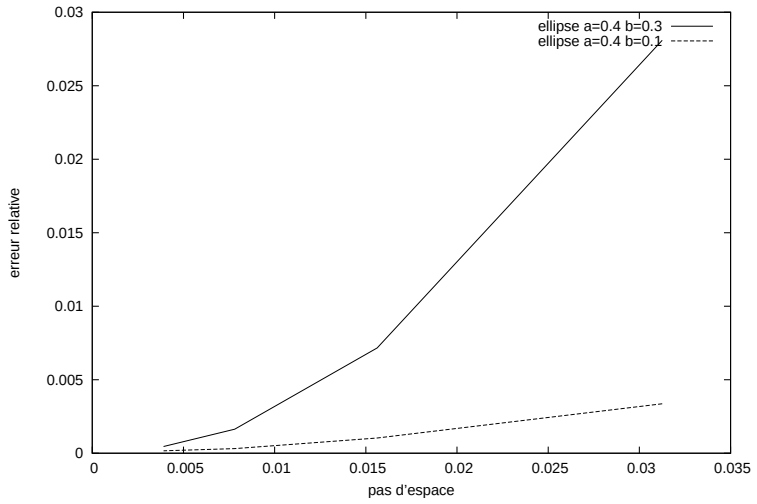

FIG. 6.5 – Erreur dans le calcul du périmètre d'une ellipse avec renormalisation

Les conclusions que nous tirons de ces courbes est que le calcul du périmètre sans renormalisation n'est pas utilisable dans la pratique pour des courbes étirées. De plus, les résultats sont beaucoup moins précis lorsque l'un des axes de l'ellipse est faible devant l'autre. Ce résultat est intuitif car dans ce cas $|\nabla\phi|$ varie beaucoup entre deux points de grille. Nous pouvons à présent donner une formule permettant de calculer la moyenne d'une fonction f sur la courbe par la formule

$$Moy_\varepsilon(f) = \frac{\int_Q f(x)\ \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|\varepsilon}\right)\ dx}{\int_Q \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|\varepsilon}\right)\ dx}. \tag{6.14}$$

Nous allons maintenant nous servir de cette formule pour calculer la moyenne de l'erreur locale sur la courbure.

6.3.3 Calcul approché de la courbure

Un calcul précis de la courbure ou plus généralement de dérivées secondes est important en pratique car la force élastique fait intervenir ces quantités. La courbure est donnée par la formule

$$\kappa(\phi) = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) \tag{6.15}$$

Une idée naturelle consiste à calculer cette quantité avec des schémas centrés pour la normale puis la courbure. En développant l'expression de $\kappa(\phi)$

$$\kappa(\phi) = \frac{1}{|\nabla\phi|}\left(\Delta\phi - \left([D^2\phi]\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\cdot\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right). \tag{6.16}$$

Nous utilisons alors des schémas centrés pour pour chaque terme. Nous allons maintenant comparer l'erreur commise sur la courbure avec ces deux schémas. Les effets de la position de l'ellipse par rapport à la grille sont encore importants donc nous calculons la moyenne de l'erreur relative $Moy_\varepsilon(|\kappa(\phi) - \kappa_{exact}|/\kappa_{exact})$ sur une ellipse que l'on fait tourner. Nous utilisons (6.11) comme formule pour calculer

κ_{exact}. Voici les résultats obtenus dans le cas d'une ellipse de paramètres $a = 0{,}4$ et $b = 0{,}3$ avec la formule développée (6.16) et non développée

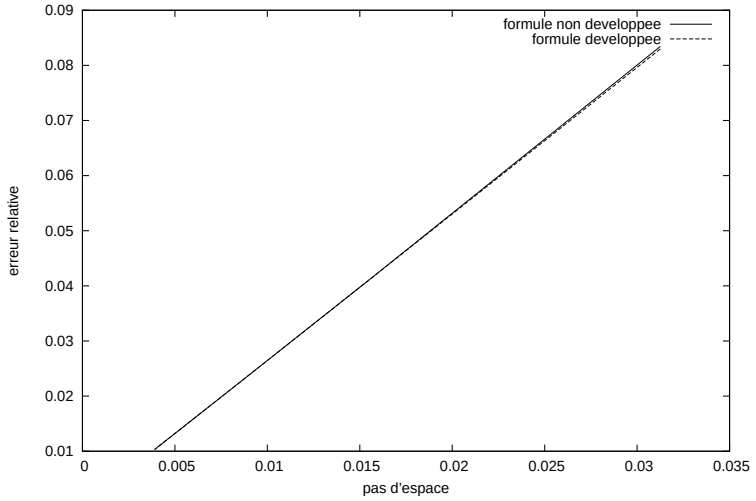

FIG. 6.6 – Erreur dans le calcul de la courbure d'une ellipse de paramètres $a = 0{,}4$ et $b = 0{,}3$

Nous observons que le calcul avec les deux méthodes donnent un résultat semblable. Ceci est dû au fait que $|\nabla\phi|$ varie très peu entre deux points de grille. Dans le cas d'une ellipse de paramètres $a = 0{,}4$ et $b = 0{,}1$ nous obtenons les résultats suivants

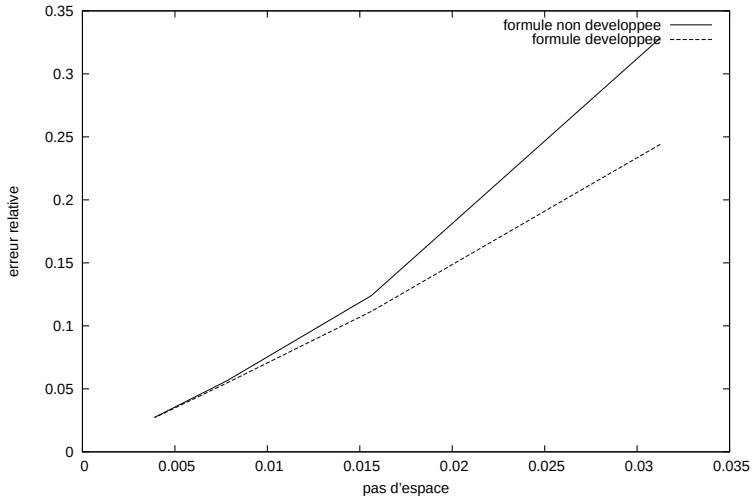

FIG. 6.7 – Erreur dans le calcul de la courbure d'une ellipse de paramètres $a = 0{,}4$ $b = 0{,}1$

Nous remarquons que pour des grands pas d'espace la formule développée est plus précise que la formule non développée. Ce résultat est intuitif, les variations de $|\nabla\phi|$ sont importantes entre deux points de grille pour une petite résolution.

Nous pouvons conclure de cette étude qu'il est préférable de développer les quantités dépendant de ϕ pour obtenir une meilleure précision. C'est ce que nous ferons pour le calcul de la force élastique.

6.3.4 Formes d'équilibres

Les vésicules phospholipidiques peuvent être modélisées par une membrane élastique plongée dans un fluide incompressible. Les forces de cohésion internes donnent lieu à de faibles variations de surface (en 3D). Les formes d'équilibre sont alors pilotées par l'énergie de courbure et le taux de remplissage τ. Les résultats du chapitre précédent permettent d'écrire la composante normale de la force de courbure sous la forme $2\Delta_{\partial\Omega}\kappa + \kappa^3$. Le deuxième terme va être calculé avec la formule développée (6.16). Le premier terme s'exprime à l'aide de dérivées d'ordre 4 et nous le traitons avec des schémas centrés.

Nous choisissons comme forme initiale une ellipse redistanciée (pour obtenir un étirement égal à 1) de rayons $a = 0{,}4$ et $b = 0{,}1$ dont le taux de remplissage vaut $0{,}54$. Pour l'énergie élastique nous choisissons la loi de comportement linéaire $E'(r) = (r - 1)$. A l'échelle considéré le fluide est très visqueux donc nous choisissons un nombre de Reynolds égal à $0{,}01$. Pour imposer la contrainte de surface avec notre modèle nous choisissons $W_e = 0{,}01$. Le paramètre W_c est fixé 30 pour que le schéma reste stable. Enfin nous adoptons une résolution avec 64 points ($\Delta x = 0{,}015$). Voici les résultats de cette simulation

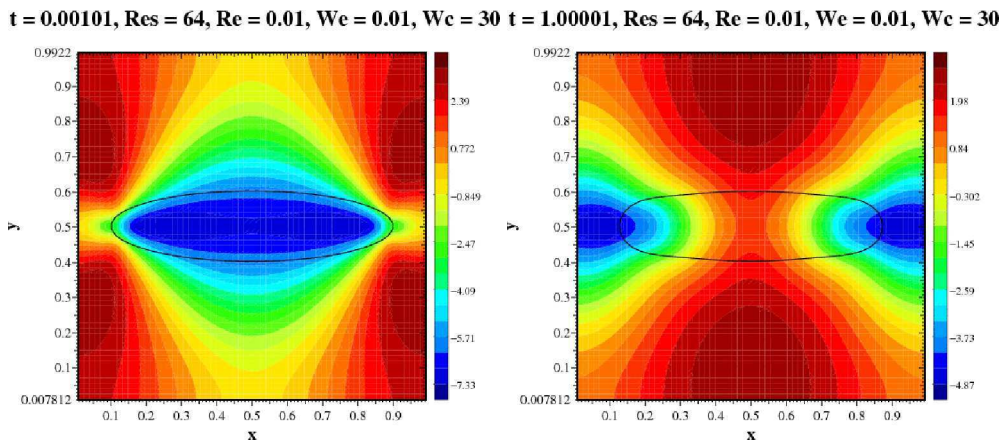

FIG. 6.8 – Résultats de la simulation à $t = 0$ et $t = 1$

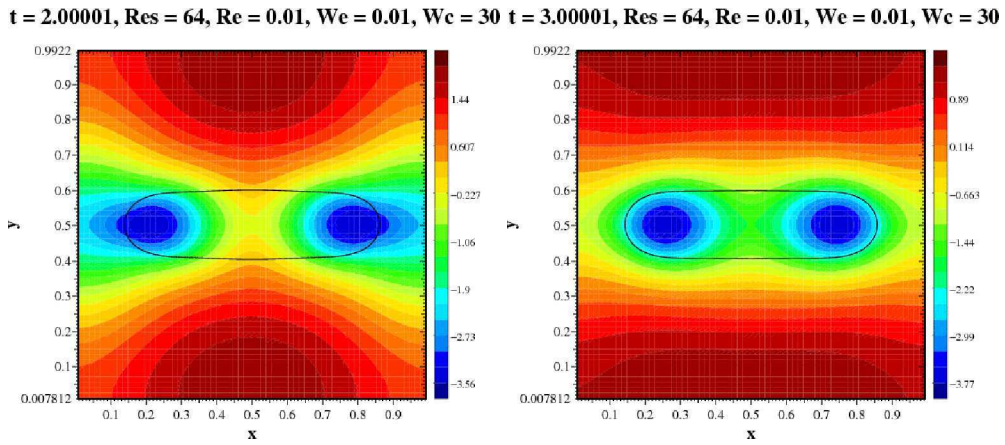

FIG. 6.9 – Résultats de la simulation à $t = 2$ et $t = 3$

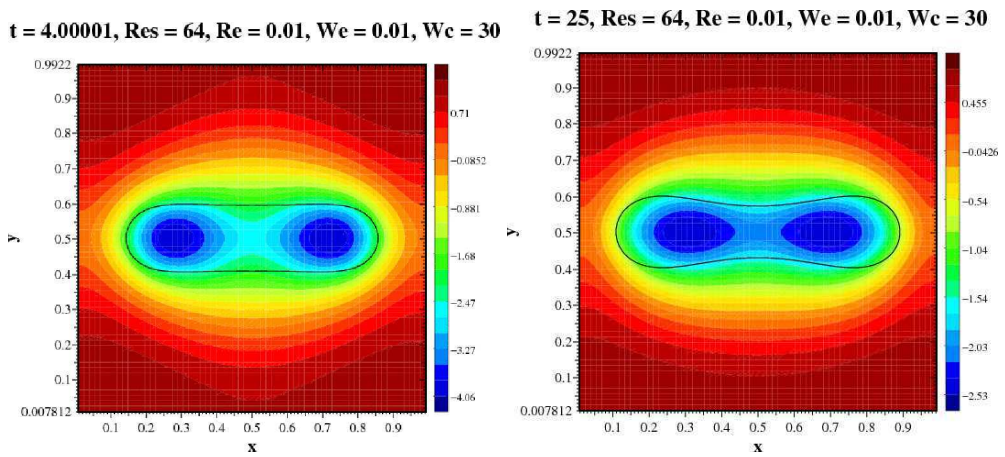

FIG. 6.10 – Résultats de la simulation à $t = 4$ et $t = 25$

Nous avons affiché sur les figures précédentes la ligne de niveau 0 de ϕ ainsi que la pression sur tout le domaine. Nous sommes parti d'une forme initiale proche de la solution pour ne pas tomber sur des minimums locaux. Le modèle permet donc de retrouver la forme caractéristique des globules rouges.

Le code permet aussi d'obtenir la forme d'équilibre correspondant à un taux de remplissage plus élevé. Choisissons une ellipse de paramètres $a = 0{,}4$ et $b = 0{,}2$ correspondant à un taux de remplissage de $0{,}84$. Voici le résultat de la simulation avec les mêmes paramètres que précédemment

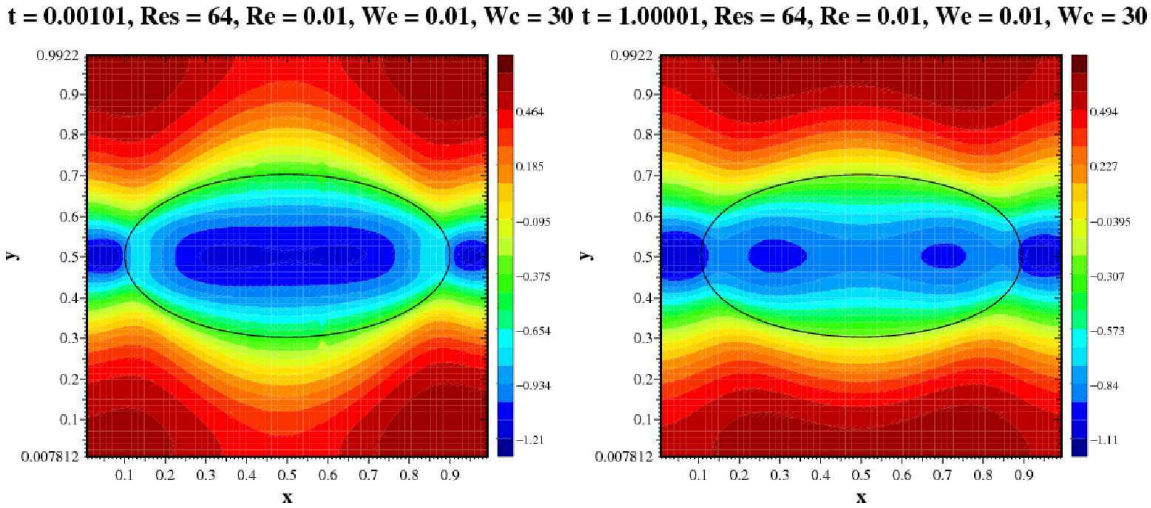

FIG. 6.11 – Résultats de la simulation à $t = 0$ et $t = 1$

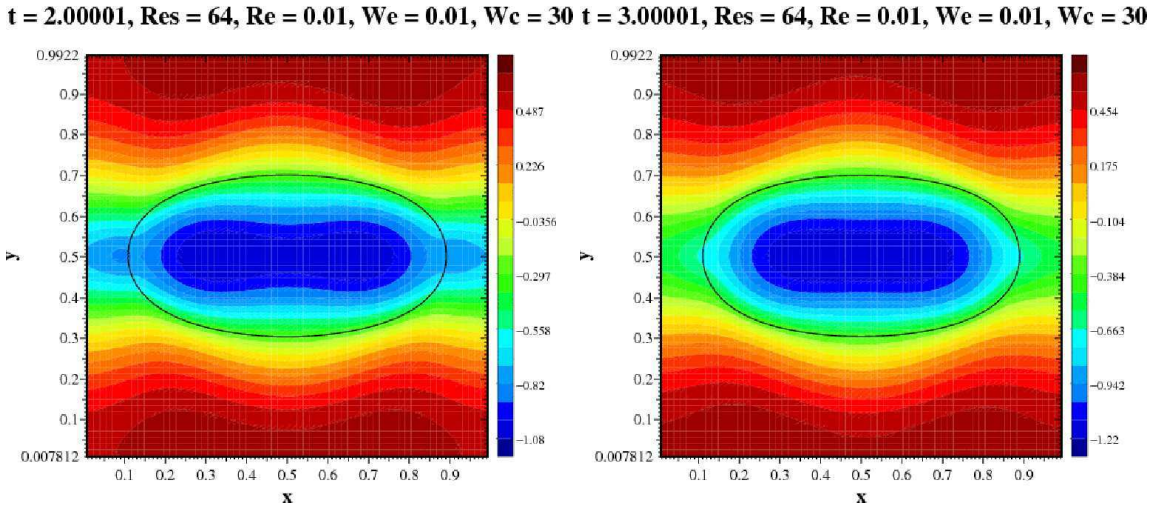

FIG. 6.12 – Résultats de la simulation à $t = 2$ et $t = 3$

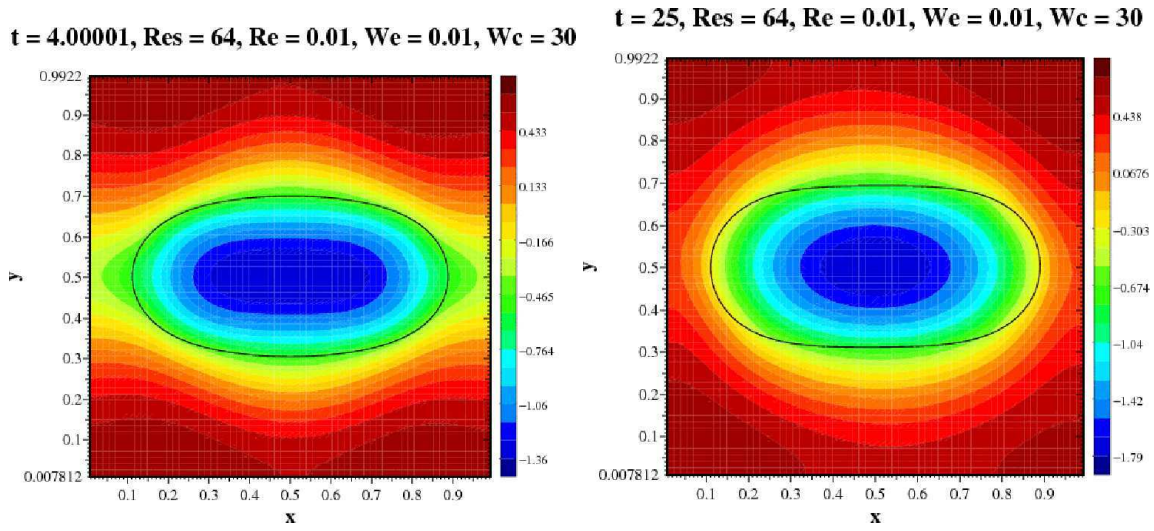

FIG. 6.13 – Résultats de la simulation à $t = 4$ et $t = 25$

6.3.5 Ecoulement en cisaillement

Les formes d'équilibre étant à présent obtenues, intéressons-nous au comportement d'une membrane dans une artère. Le profil de vitesse d'un écoulement visqueux est alors parabolique et porte le nom d'écoulement de Poiseuille (FIG 6.14).

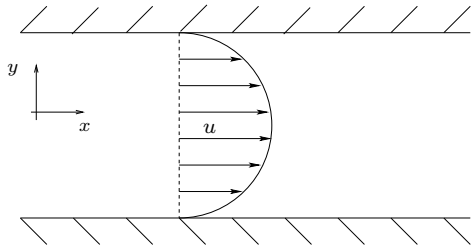

FIG. 6.14 – Ecoulement de Poiseuille

Afin de limiter le domaine de calcul, nous nous plaçons dans le référentiel de la vésicule en retranchant la vitesse moyenne de l'écoulement. Pour simplifier la présentation, nous choisissons un profil linéaire de vitesse de cisaillement défini dans le domaine $[0,1]^2$

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La vitesse de cisaillement peut donc être décomposée en une rotation et un champ d'élongation dans la direction d'angle $\pi/4$. Deux comportements sont alors observés en fonction du contraste de viscosité entre les deux fluides. Si le contraste est faible, la vésicule s'oriente suivant un certain angle et sa membrane se met à tourner (effet *tank treading* ou chenille de char). Si le contraste de viscosité dépasse un certain seuil, la vésicule se met en rotation (effet de *tumbling*). Ces différents régimes ont été étudiés

dans [5, 4, 37].

Contrairement au cas des formes d'équilibres, les déformations de la membrane dans un écoulement en cisaillement sont très importantes. Nous choisissons donc le nombre adimensionné élastique We à $0{,}0001$. Pour W_c nous avons choisi 10 qui est du même ordre de grandeur qu'auparavant. Voici le résultat de la simulation avec une ellipse de paramètres $a = 0{,}3$ et $b = 0{,}2$

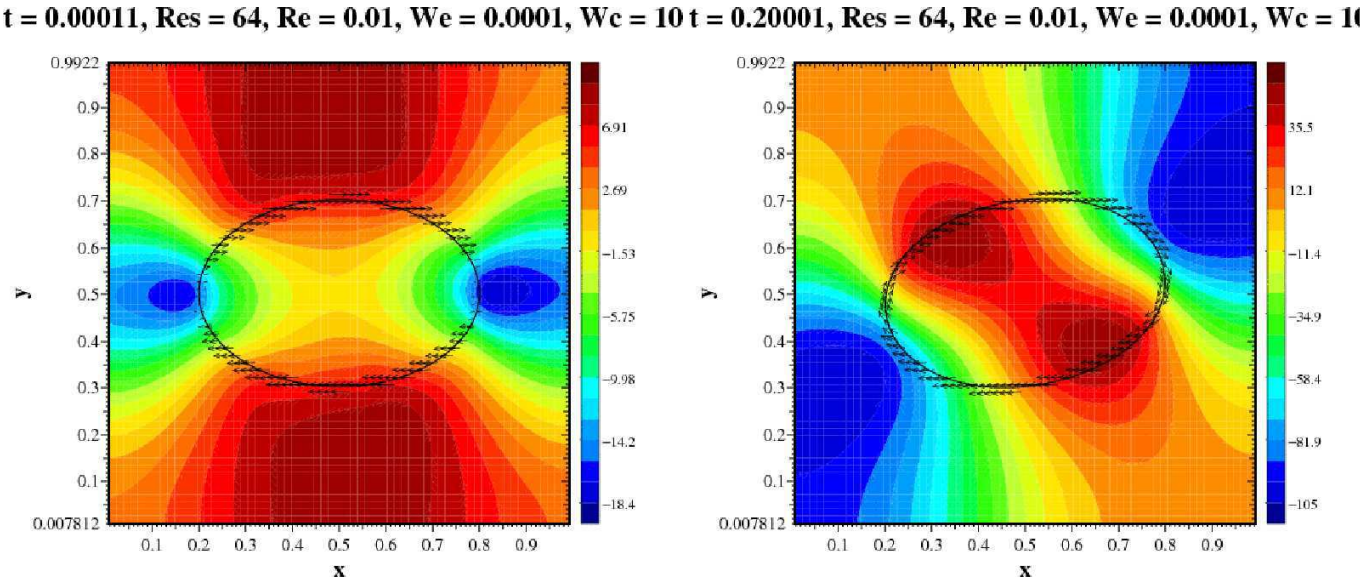

FIG. 6.15 – Résultat de la simulation à $t = 0$ et $t = 0.2$

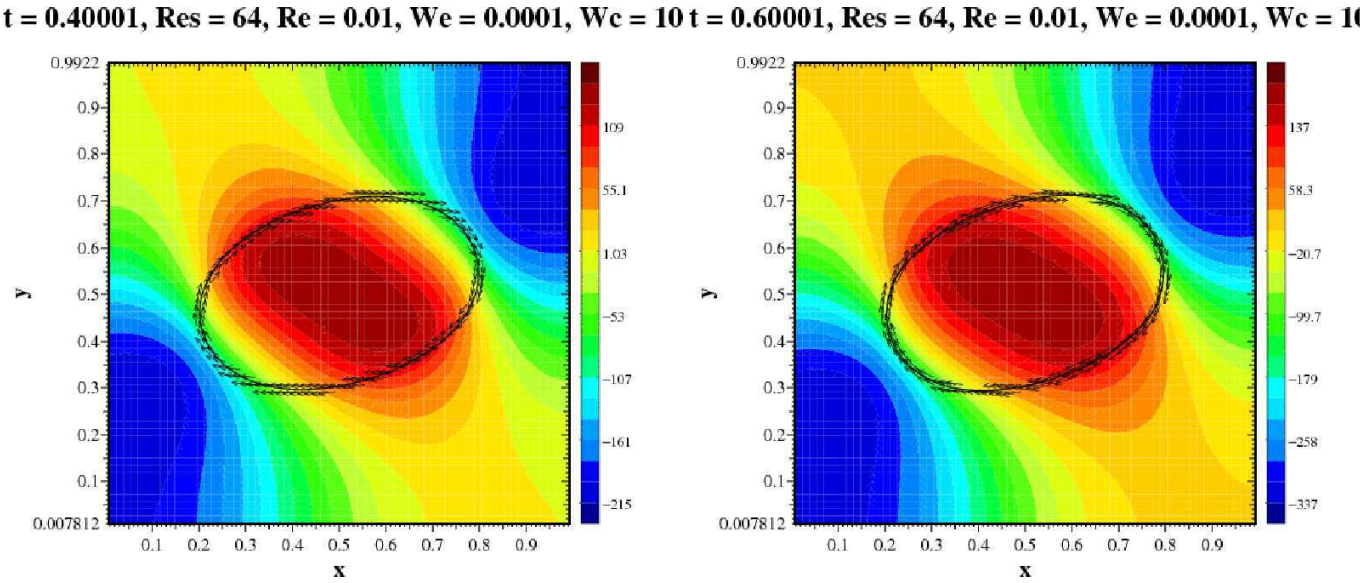

FIG. 6.16 – Résultat de la simulation à $t = 0.4$ et $t = 0.6$

Dans les figures précédentes la ligne de niveau 0 de la fonction level set, la pression et la vitesse dans un voisinage de l'interface. Nous remarquons que sur la dernière image, le champ de vitesse est tangent à

la vésicule. Cette propriété exprime bien le fait que la membrane effectue un mouvement de chenille de char. Nous nous intéressons maintenant aux résultats obtenus dans le cas tridimensionnel.

6.4 Cas 3D

Nous allons reprendre l'étude précédente dans le cas tridimensionnel. La formulation eulérienne du couplage fluide-structure permet d'utiliser les mêmes schémas numériques que ceux présentés dans la section précédente. Nous commencerons par comparer les résultats numériques du calcul de l'aire et du volume d'ellipsoïdes puis nous traiterons le cas de la courbure moyenne et de Gauss. Nous nous intéresserons ensuite aux formes d'équilibres qui sont plus riches que dans le cas 2D. Nous finirons par des résultats préliminaires sur le comportement d'une vésicule dans un écoulement en cisaillement. Les schémas et les tests utilisés s'apparentent au cas 2D donc nous commenterons moins les résultats obtenus.

6.4.1 Calculs analytiques dans le cas d'un ellipsoïde

Commençons par effectuer des calculs analytiques donnant l'aire et le volume d'un ellipsoïde. Choisissons de représenter l'ellipsoïde par la ligne de niveau de la fonction level set suivante

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6.17}$$

$$\phi : \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1. \tag{6.18}$$

Volume

A z fixé on obtient une ellipse de rayons $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ et $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. L'aire d'une ellipse d'axes a' et b' étant donné par $\pi a' b'$ nous obtenons la formule pour le volume en intégrant par tranches

$$V = \int_{-c}^{c} \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \, dz = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Aire

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'aire ne peut pas être calculée analytiquement à l'aide d'une représentation implicite. Pour faire ce calcul, choisissons la paramétrisation

$$X : (\theta, \psi) \mapsto (a\cos(\theta)\sin(\psi), b\sin(\theta)\sin(\psi), c\cos(\psi)).$$

Le calcul de la première forme fondamentale permet de trouver l'aire (voir (7.13) de l'annexe du chapitre 7)

$$S = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \sqrt{b^2c^2\cos^2(\theta)\sin^4(\psi) + a^2c^2\sin^2(\theta)\sin^4(\psi) + a^2b^2\cos^2(\psi)\sin^2(\psi)} \, d\psi \, d\theta.$$

Cette intégrale est elliptique et elle ne se calcule pas analytiquement. Le calcul reste toutefois possible si l'on considère un ellipsoïde de révolution. Si a est égal à b le changement de variable $t = \cos(\psi)$ permet d'obtenir

$$S = 4\pi ac \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) t^2} dt.$$

Dans le cas $a > c$ le changement de variable $\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} t = \text{sh}(u)$ permet d'obtenir

$$S = 2\pi ac \left(\frac{a}{c} + \frac{\text{argsh}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}} \right) \quad \text{si} \;\; a > c. \tag{6.19}$$

Dans le cas $a < c$ le changement de variable $\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} t = \sin(u)$ permet d'obtenir

$$S = 2\pi ac \left(\frac{a}{c} + \frac{\arcsin(\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}})}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \right) \quad \text{si} \;\; a < c. \tag{6.20}$$

Le calcul de l'aire et du volume permet de définir le taux de remplissage

$$\tau = \frac{V}{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{S}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\sqrt{\pi} V}{S^{\frac{3}{2}}}.$$

Le taux de remplissage permet de mesurer de combien on a remplissage une sphère en gardant l'aire constante.

Courbure

Le calcul de la courbure s'effectue avec (6.18) ainsi que des formules (5.9) et (5.10). Après quelques calculs nous obtenons

$$H = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{a^2 b^2 c^2 (\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})^{\frac{3}{2}}} \qquad G = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 (\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})^2}.$$

Ces formules ont un sens géométrique uniquement sur la surface. Le choix d'une autre fonction implicite donnerait un autre résultat qui coïnciderait avec le précédent sur la surface. Ces calculs analytiques vont maintenant nous permettre d'étudier l'erreur commise lors d'un calcul numérique.

6.4.2 Calculs approchés du volume et de l'aire

Volume

Nous utilisons comme en 2D la formule renormalisée pour le volume

$$V_\varepsilon = \int_Q \left(1 - \tilde{\zeta}\left(\frac{\phi}{|\nabla\phi|\varepsilon}\right)\right)\, dx.$$

Considérons deux ellipsoïdes de révolution étirés donnés par la formule 6.18 avec les paramètres $a = 0{,}4, b = 0{,}3, c = 0{,}3$ et $a = 0{,}4, b = 0{,}1, c = 0{,}1$. Nous calculons alors une moyenne de l'erreur relative $|V_\varepsilon - V_{exact}|/V_{exact}$ pour plusieurs ellipsoïdes que l'on fait tourner suivant un des axes. Les résultats de convergence sont les suivants

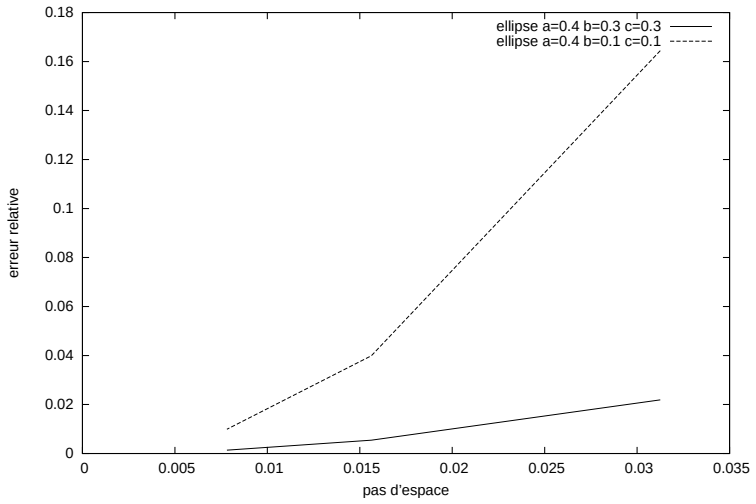

FIG. 6.17 – Erreur dans le calcul du volume

Aire

Pour l'aire, on utilise également une formule renormalisée car nous avons remarqué dans le cas 2D qu'elle donnait de meilleurs résultats que la formule d'approximation volumique classique.

$$S_\varepsilon = \int_Q \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{|\nabla\phi|\varepsilon}\right)\, dx.$$

Pour pouvoir tester les deux formules de l'aire (6.19) et (6.20), nous proposons de calculer la moyenne de l'erreur relative $|S_\varepsilon - S_{exact}|/S_{exact}$ pour plusieurs ellipsoïdes que l'on fait tourner suivant un des axes. Les résultats obtenus sont les suivants

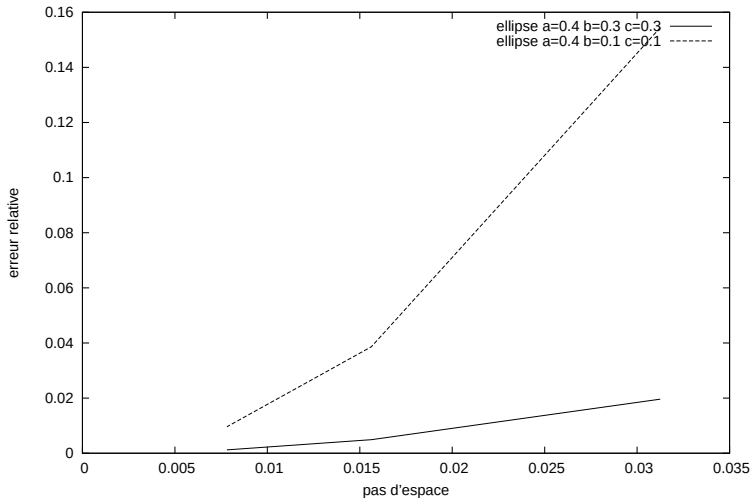

FIG. 6.18 – Erreur dans le calcul de l'aire dans le cas $b = c$

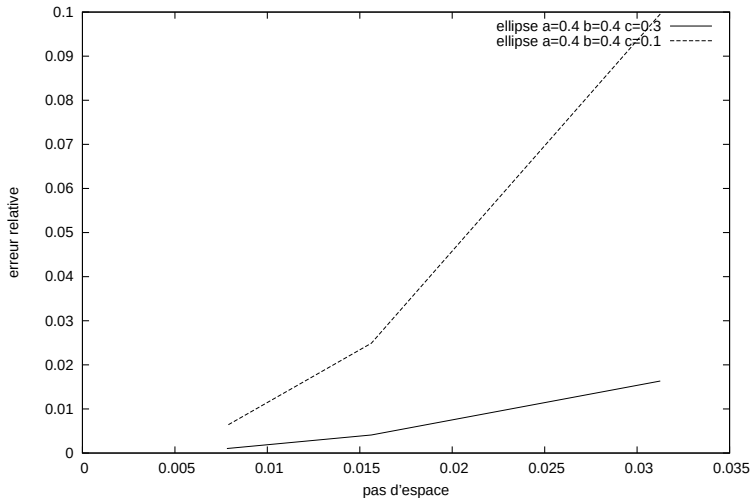

FIG. 6.19 – Erreur dans le calcul de l'aire dans le cas $a = b$

Nous pouvons faire les mêmes remarques que dans le cas 2D à savoir que les résultats sont moins précis dans le cas ou un des rayons est faible par rapport aux autres. Remarquons également que l'erreur est plus faible lorsque l'on considère un ellipsoïde de révolution dans le cas $a = b$.

6.4.3 Calculs approchés de la courbure

Pour la courbure on utilise des schémas aux différences finies centrées et l'analogue de la formule développée car nous avons montré qu'elle était plus robuste numériquement. Nous utilisons cette fois un ellipsoïde étiré avec ses trois rayons différents : $a = 0{,}4$, $b = 0{,}3$ et $c = 0{,}2$. En effectue ensuite une

moyenne avec la formule (6.14) de $|H_\varepsilon - H_{exact}|/H_{exact}$ et $|G_\varepsilon - G_{exact}|/G_{exact}$ avec des ellipsoïdes que l'on fait tourner suivant un axe. Les résultats obtenus sont les suivants

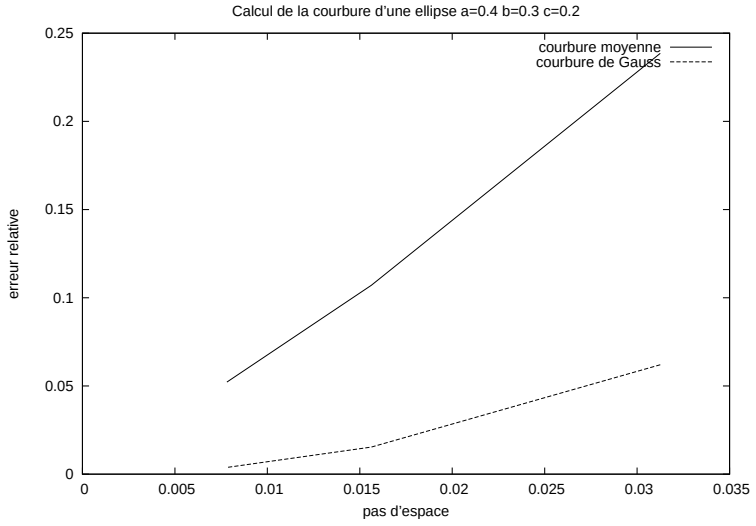

FIG. 6.20 – Calcul de la courbure pour un ellipsoïde de paramètres $a = 0{,}4$, $b = 0{,}3$ et $c = 0{,}2$

Nous observons que le calcul de la courbure de Gauss est plus précis que celui de la courbure moyenne. Nous nous intéressons maintenant aux différentes formes d'équilibre obtenues.

6.4.4 Formes d'équilibre

Les formes d'équilibres sont plus riches en trois dimensions. Intuitivement, l'équivalent 3D de la forme d'équilibre obtenue en 2D peut donner lieu à une "cacahouète" ou un d'ellipsoïde selon l'axe de révolution que l'on utilise.

Les fonctions suivantes représentent deux sphères de rayon r placées à une distance α du centre et un cylindre de rayon w

$$\begin{aligned}
\phi_1(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+(z+\alpha)^2)} - r, \\
\phi_2(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+(z-\alpha)^2)} - r, \\
\phi_3(x,y,z) &= \max(|z|-\alpha, \sqrt{x^2+y^2} - w).
\end{aligned}$$

On pose alors

$$\phi(x,y,z) = \min(\phi_1(x,y,z), \phi_2(x,y,z), \phi_3(x,y,z)).$$

La ligne de niveau 0 de ϕ représente une haltère qui est peu éloignée de la forme d'équilibre en "cacahouète". Nous avons choisi les paramètres $\alpha = 0{,}22, w = 0{,}13$ et $r = 0{,}18$, ce qui donne un taux de remplissage $\tau = 0{,}77$. Nous choisissons les paramètres $R_e = 0{,}01$, $W_e = 0{,}01$ et $W_c = 30$ avec une résolution de 64 points. Voici le résultat de la simulation

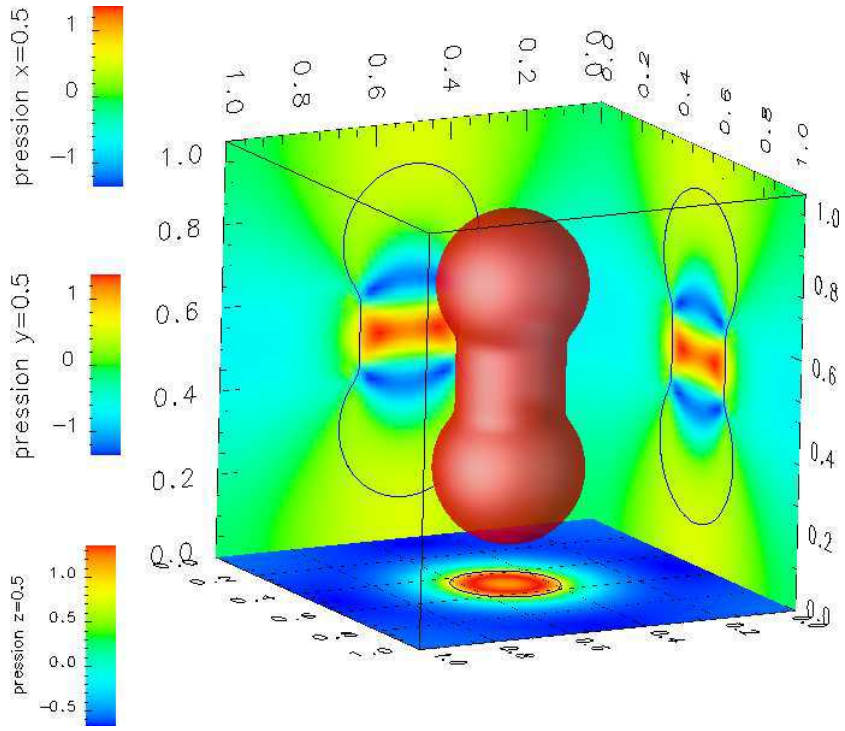

FIG. 6.21 – Résultat de la simulation à $t = 0$

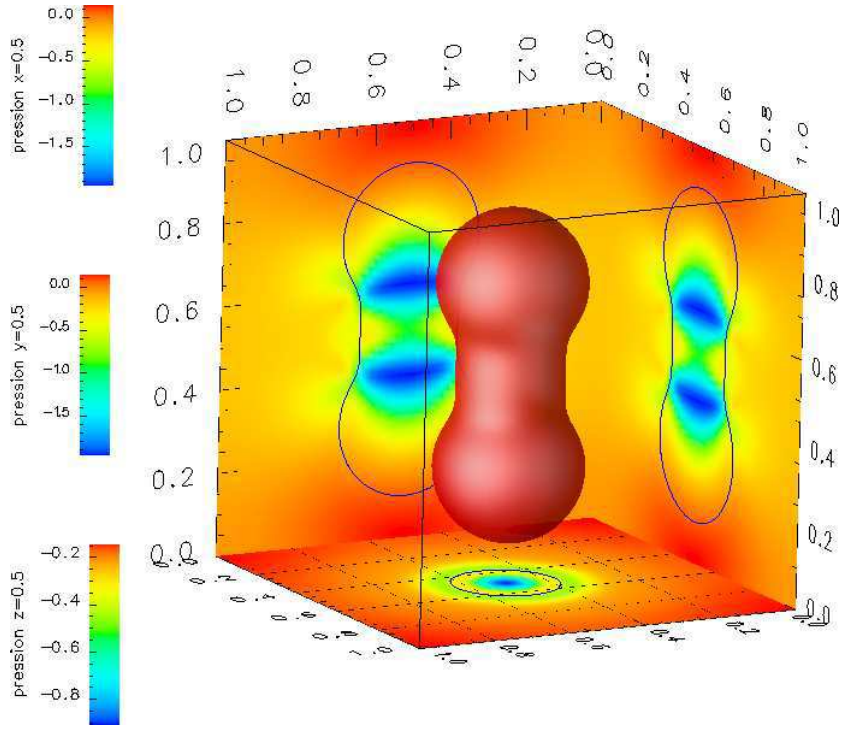

FIG. 6.22 – Résultat de la simulation à $t = 0.05$

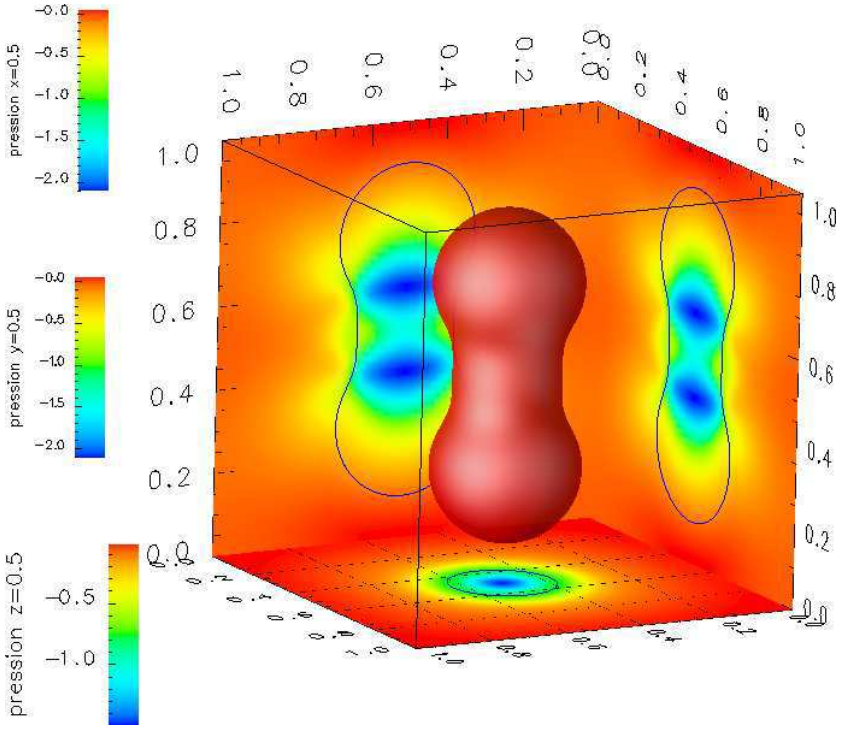

FIG. 6.23 – Résultat de la simulation à $t = 0.1$

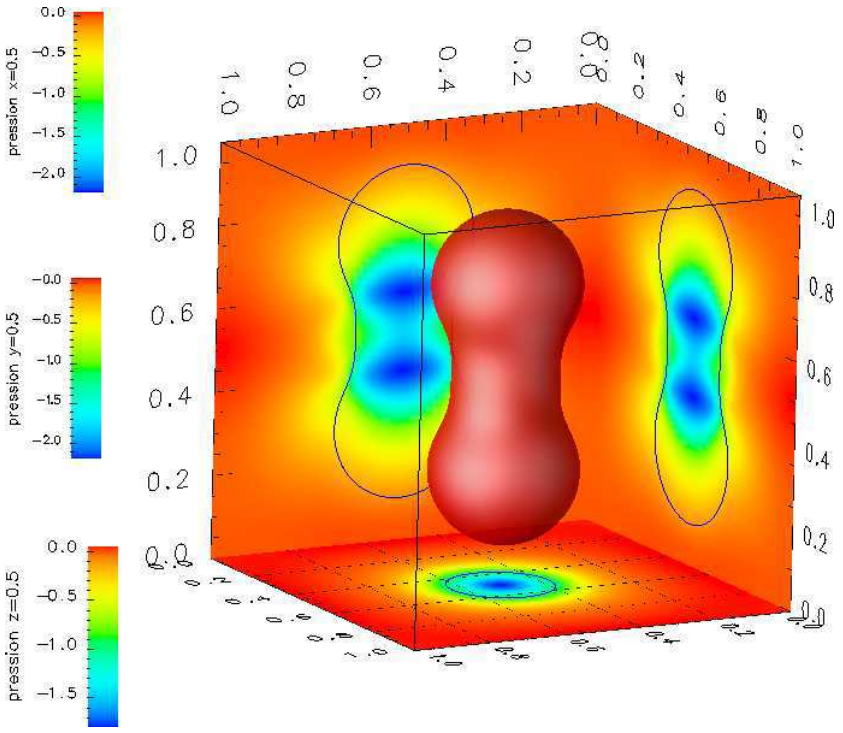

FIG. 6.24 – Résultat de la simulation à $t = 0.15$

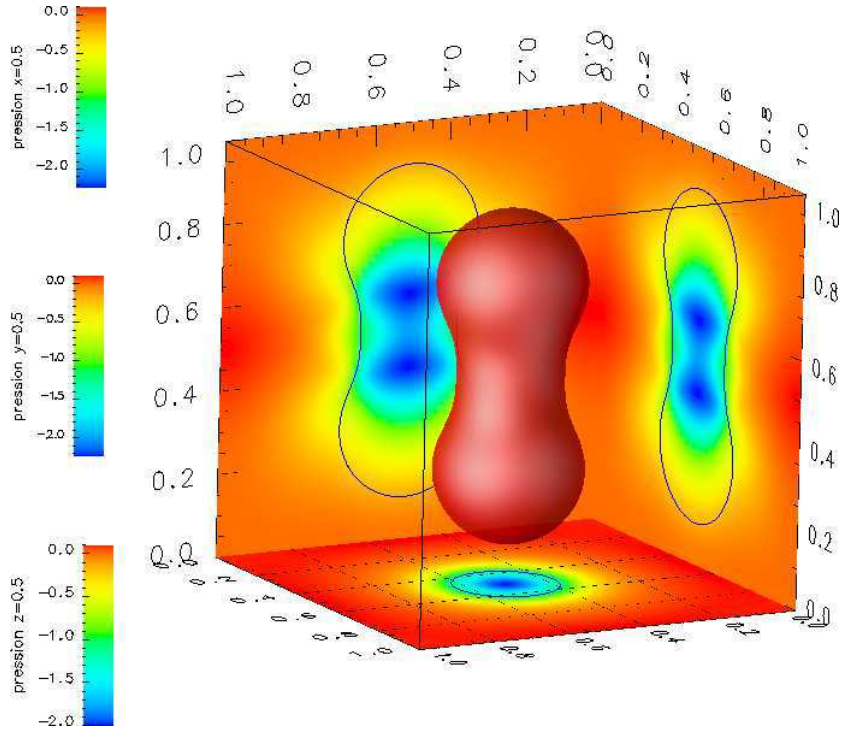

FIG. 6.25 – Résultat de la simulation à $t = 0.2$

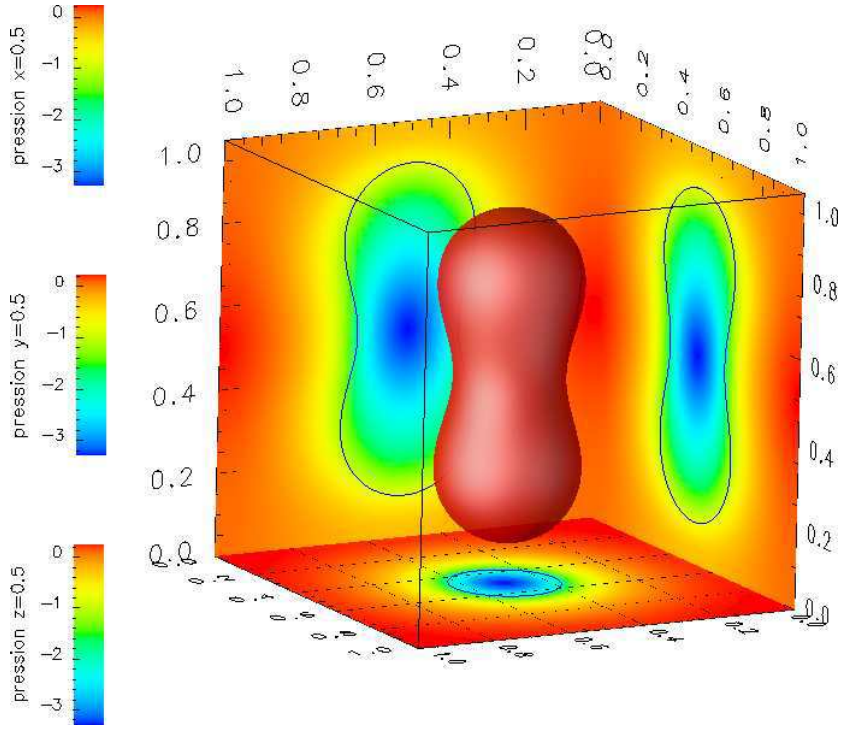

FIG. 6.26 – Résultat de la simulation à $t = 2$

Pour obtenir une autre forme d'équilibre intéressante (observée pour des globules rouges) nous choisissons comme forme initiale un ellipsoïde de paramètres $a = 0{,}35, b = 0{,}35$ et $c = 0{,}1$. Le taux de remplissage obtenu est égal à $0{,}6$. Voici le résultat de la simulation

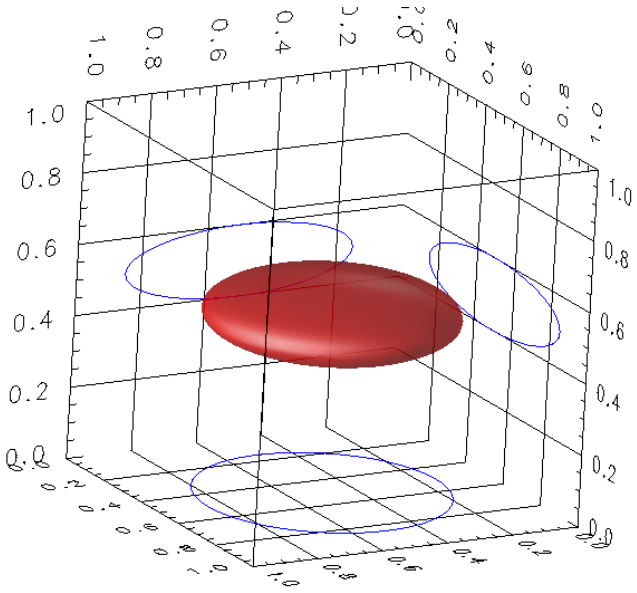

FIG. 6.27 – Résultat de la simulation à $t = 0$

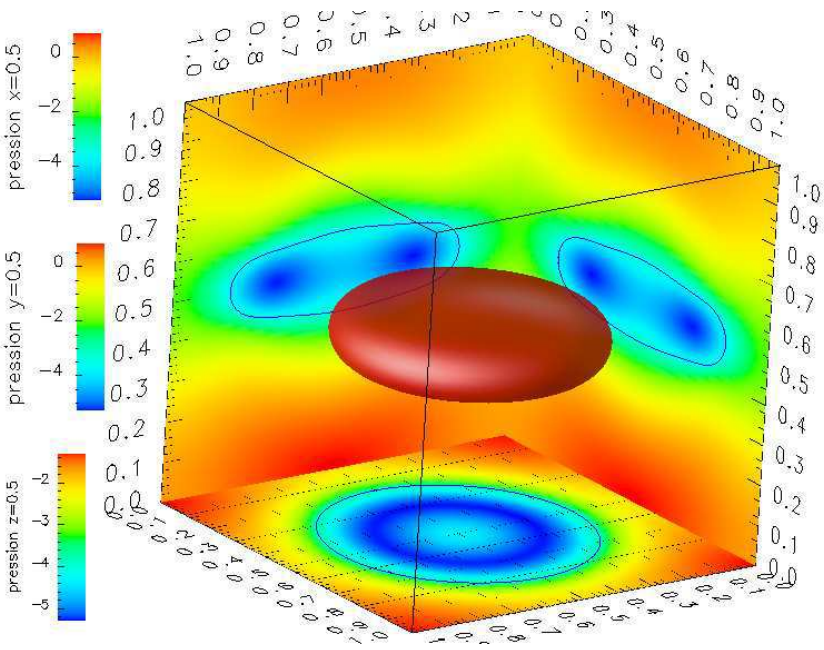

FIG. 6.28 – Résultat de la simulation à $t = 0.5$

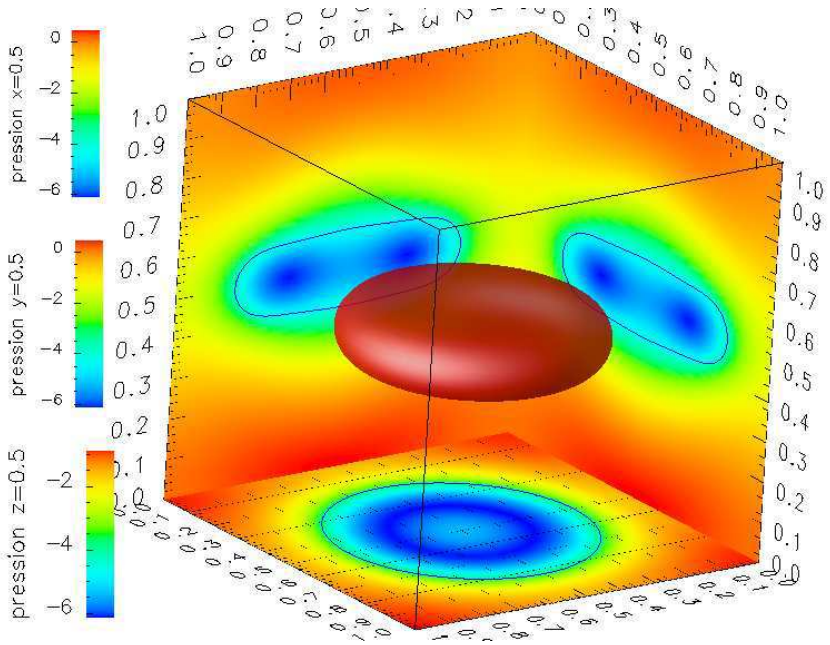

FIG. 6.29 – Résultat de la simulation à $t = 1$

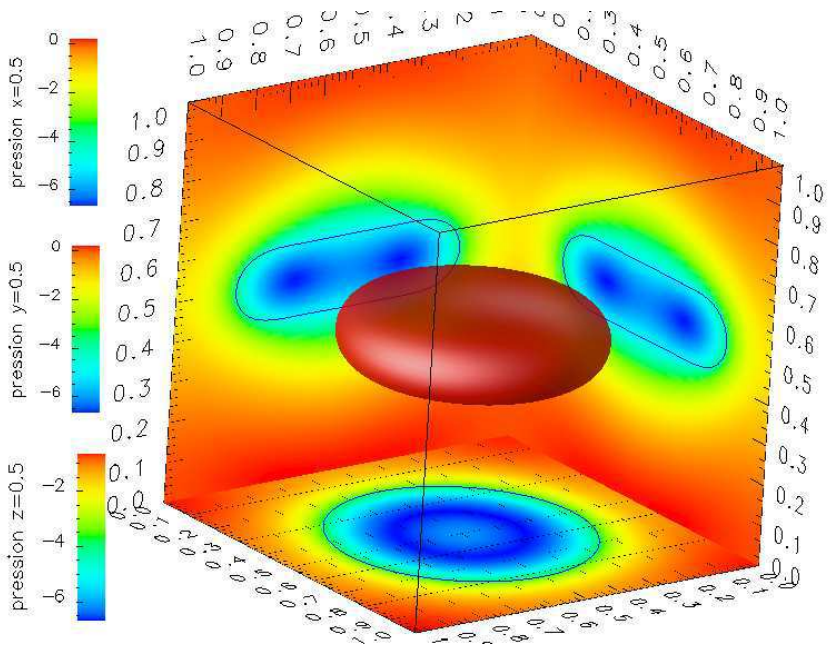

FIG. 6.30 – Résultat de la simulation à $t = 1.5$

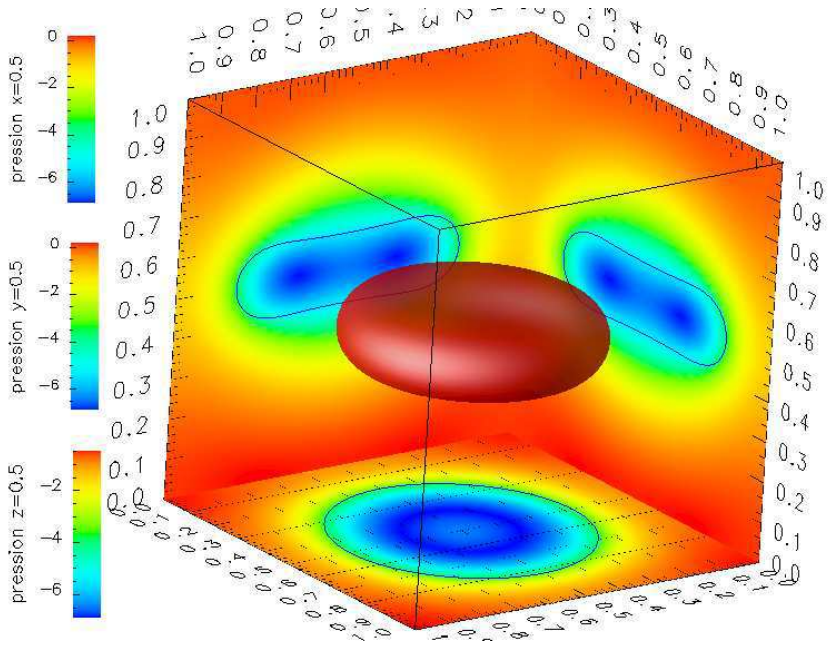

FIG. 6.31 – Résultat de la simulation à $t = 2$

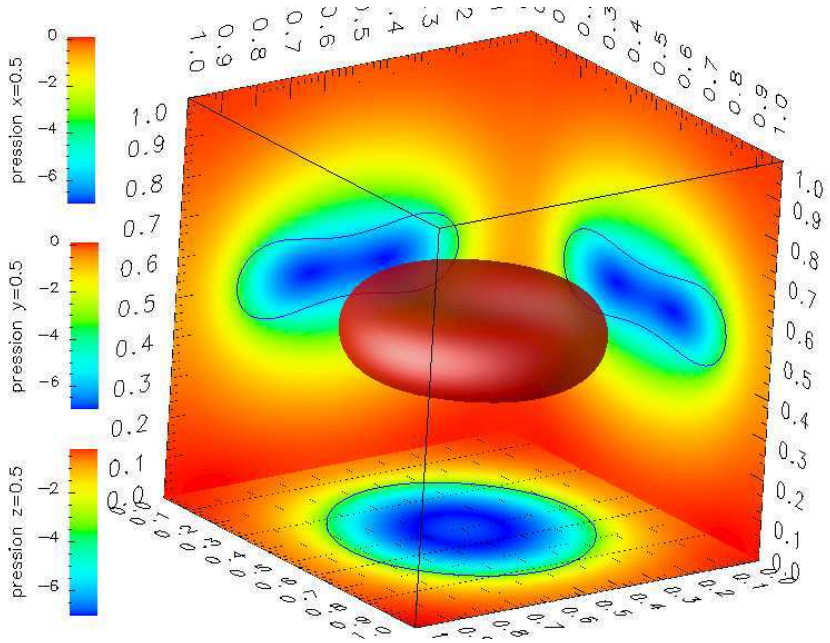

FIG. 6.32 – Résultat de la simulation à $t = 4.5$

Nous avons représenté dans les figures la ligne de niveau 0 de la fonction level set ainsi que les coupes de pression au centre de la boite de calcul. Dans ces deux simulations, nous sommes partis d'une forme initiale proche de la solution pour ne pas tomber sur des minimums locaux numériques. Nous nous intéressons à présent au comportement d'une vésicule dans un écoulement en cisaillement.

6.4.5 Cisaillement

La dynamique dans un écoulement en cisaillement est dictée par le contraste de viscosité entre les deux fluides. Nous proposons ici de retrouver le mouvement de *tank treading* obtenu avec un contraste de viscosité égal à 1. Les déformations de la vésicule dans un écoulement en cisaillement sont importantes donc nous avons choisi les paramètres $R_e = 0{,}01$, $W_e = 0{,}0001$ et $W_c = 30$. Pour la forme initiale nous considérons un ellipsoïde de paramètres $a = 0{,}4$, $b = 0{,}2$ et $c = 0{,}2$. Voici les résultats de la simulation

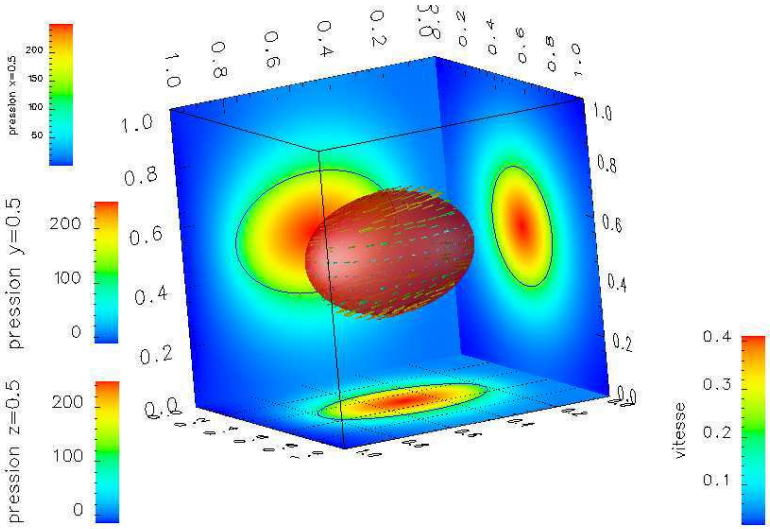

FIG. 6.33 – Résultat de la simulation à $t = 0$

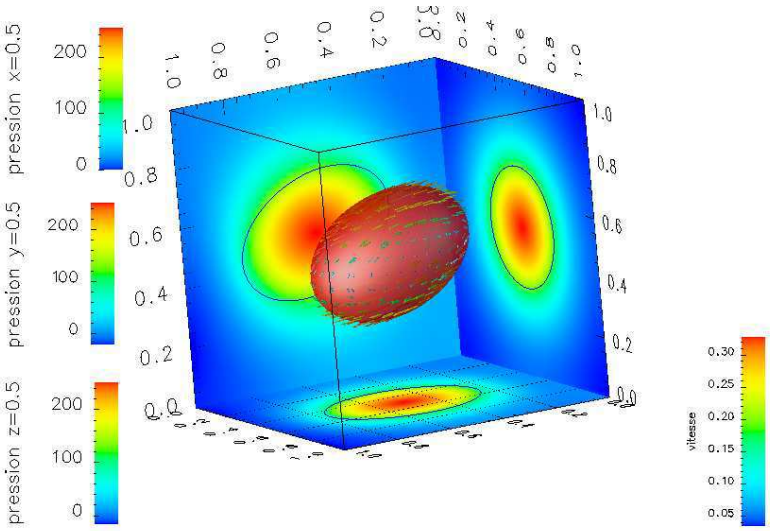

FIG. 6.34 – Résultat de la simulation à $t = 0.2$

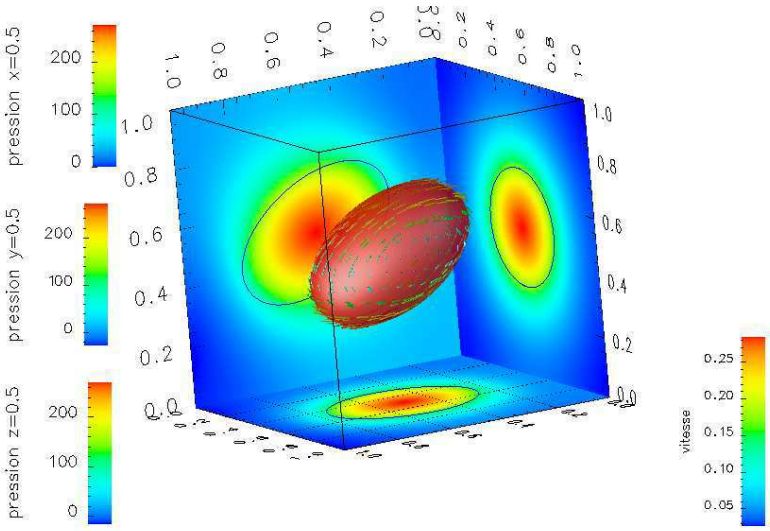

FIG. 6.35 – Résultat de la simulation à $t = 0.4$

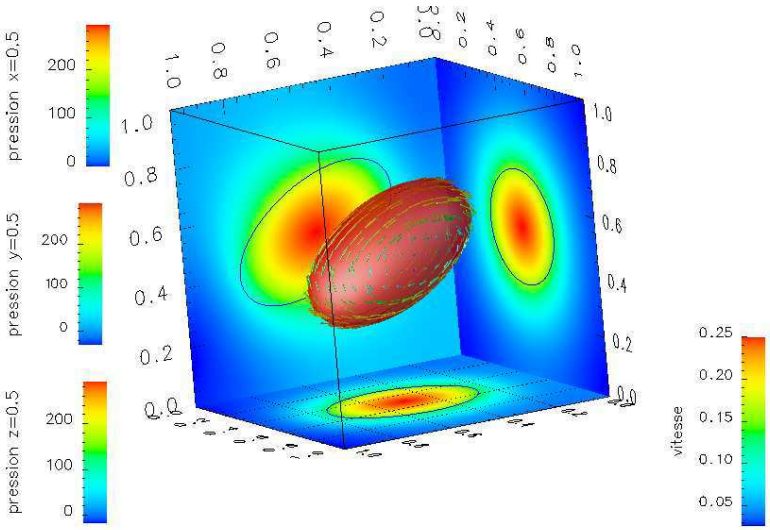

FIG. 6.36 – Résultat de la simulation à $t = 0.6$

Comparé aux figures présentées pour les formes d'équilibre nous avons ajouté le champ de vitesse sur la surface. Cette simulation montre bien que le champ de vitesse est tangent à la surface et donc que nous obtenons bien un mouvement de chenille de char.

Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons mis en place des schéma numériques de différences finies pour résoudre les équations du modèle de membrane. Nous avons tout d'abord effectué une étude de l'erreur commise lors d'un calcul numérique de l'aire, du périmètre et de la courbure. Nous avons ensuite retrouvé les différentes formes d'équilibres de vésicules obtenues dans la littérature. Nous avons aussi présenté quelques résultats préliminaires sur le cisaillement de vésicules. Nous avons enfin effectué les mêmes tests et simulations dans le cas tridimensionnel.

Le modèle eulérien de couplage fluide-structure permet donc d'obtenir des résultats satisfaisants concernant la modélisation des vésicules dans un fluide. Cependant, il serait désirable de mettre en place des schémas plus précis (ou un raffinement du maillage près de l'interface) pour le calcul du laplacien surfacique de la courbure intervenant dans la force de courbure. Concernant les formes d'équilibres, les calculs faits dans le chapitre précédent permettent d'envisager une énergie dépendant de la courbure de Gauss (qui peuvent intervenir dans le cas d'une membrane non homogène par exemple). On peut aussi imaginer imposer une contrainte de non changement de topologie (théorème de Gauss Bonnet) avec cette nouvelle force. Pour le comportement en cisaillement, il serait intéressant d'obtenir le comportement de *tumbling* dans le cas d'un contraste de viscosité important. Dans le cas tridimensionnel, le cisaillement a en fait lieu dans plusieurs directions et l'étude du comportement d'une vésicule dans un tel écoulement reste à faire.

Conclusions

Les contributions de cette thèse recouvrent trois aspects des mathématiques appliquées : analyse mathématique, modélisation et simulation numérique.

Dans la première partie, nous avons effectué une introduction générale au couplage fluide-structure et nous avons développé en détails le modèle eulérien de membrane. Dans la deuxième partie, l'analyse mathématique du modèle de membrane a été effectuée. La formulation eulérienne du couplage fluide structure a permis une avancée importante car le modèle peut être interprété comme un fluide complexe. Nous avons alors construit un modèle approché en utilisant une régularisation en temps originale permettant de découpler le terme non linéaire d'inertie. Des estimations *a priori* adéquates dans les espaces L^p ont ensuite permis de passer à la limite dans les termes non linéaires. Ce théorème d'existence ouvre la voie à des recherches futures pour les modèles eulériens développés dans [16] couplant un fluide et une structure élastique volumique.

La troisième partie consacrée à optimisation de formes contribue notablement à la compréhension des forces de courbure. Nous avons proposé trois méthodes pour optimiser des fonctionnelles géométriques dont une nouvelle basée sur la formule de Reynolds surfacique. Les calculs de différentiation ont été effectués dans un cas très général comportant la normale, la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Dans le cas d'une fonctionnelle dépendant de la normale et de la courbure moyenne, nous avons montré que les différentes méthodes menaient au même résultat qui est géométrique. Ce résultat est satisfaisant et permet également la mise au point de schémas numériques performants pour le calcul de la force de courbure. Dans le cas d'une fonctionnelle générale dépendant de la courbure de Gauss nous avons pu identifier les résultats des différentes méthodes dans le cas particulier d'une fonction distance. Ce travail ouvre la voie à de nouvelles recherches concernant les formes d'équilibre associées à une énergie dépendant de manière complexe de la courbure de Gauss et la courbure moyenne.

La fin de la troisième partie est consacrée à la mise en oeuvre numérique du modèle eulérien de membrane. Nous avons au préalable proposé quelques tests numériques sur le calcul de l'aire et du volume ainsi que la courbure. La simplicité de la méthode eulérienne nous a ensuite permis d'implémenter des schémas numériques en deux et trois dimensions avec une méthode de différences finies. La force de courbure dérivée à partir des méthodes d'optimisation de la partie précédente nous ont permis de retrouver en deux et trois dimensions les formes d'équilibre des vésicules. Nous avons également présenté quelques résultats préliminaires d'une vésicule dans un écoulement en cisaillement. Le modèle eulérien est donc très prometteur dans les applications en biomécaniques où les déformations sont importantes et où les changements de topologie peuvent apparaitre.

Perspectives

Sur le plan théorique, il serait intéressant d'étudier l'existence dans le cas où la viscosité n'est pas la même dans chaque fluide. Dans cette direction, Lemoine a démontré un résultat d'existence de solutions aux équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité dépend de la densité [29]. Les estimations *a priori* obtenues pourraient nous permettre de généraliser notre résultat pour une viscosité dépendant de ϕ. Le résultat d'existence est local en temps et dépend du paramètre de régularisation ε qui est supposé tendre vers 0 dans les applications. Montrer que le temps d'existence peut être indépendant de ε ne semble pas envisageable pour l'instant car un terme en $1/\varepsilon$ est en facteur dans les estimations. Par contre la perspective de l'existence globale pour de petites données semble envisageable.

Dans la partie concernant l'optimisation de formes nous avons utilisé une fonction distance dans la méthode level set pour faire coïncider les résultats dans le cas de la courbure de Gauss. Le calcul dans le cas paramétrique a été considérablement simplifié par l'utilisation des équations de Mainardi-Codazzi. L'équivalent en level set de ces équations pourrait être une idée pour traiter le cas général. D'un point de vue modélisation, l'ajout de la courbure de Gauss ouvre la voie à de nouveaux résultats sur les formes d'équilibres de vésicules.

D'un point de numérique, il reste de nombreux travaux à effectuer. Nous avons retrouvé les formes d'équilibre pour différents taux de gonflement qui permettent de valider le code. La continuité de ce travail est d'étudier la dynamique des vésicules, en particulier le comportement dans un écoulement en cisaillement. Nous avons présenté quelques résultats préliminaires sur le *tank treading* et il serait intéressant de retrouver également le phénomène de *tumbling* obtenu lorsque les viscosités interne et externe du fluide sont différentes.

Chapitre 7

Annexe sur les courbes et les surfaces

Dans les parties précédentes, l'accent a été mis sur l'étude des surfaces du point de vue implicite avec une représentation à l'aide d'une fonction level set. Cette annexe est consacrée à l'étude des courbes et des surfaces à l'aide d'une représentation paramétrique. Nous introduirons les notions de métrique, courbure, opérateur surfacique, tenseur, dérivée covariante. Toutes ces notions seront très utiles pour les calculs d'optimisation de formes du chapitre 6. Pour plus de clarté nous commencerons par définir une partie de ces notions dans le cas d'une courbe paramétrée puis nous les généraliserons au cas d'une surface. Nous démontrerons ensuite la formule de changement de variables pour une intégrale de surface et nous en déduirons la formule de Reynolds surfacique qui est utilisée à plusieurs reprises dans la thèse.

7.1 Courbe plane paramétrée

On définit une courbe paramétrée à l'aide de la paramétrisation

$$\begin{aligned} X : \quad [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto X(\theta). \end{aligned}$$

La fonction X est supposée C^∞ et vérifie $|X'(\theta)| \neq 0$. Il existe évidement plusieurs paramétrisations possibles d'une même courbe, il est donc indispensable de vérifier que les notions géométriques introduites dans la suite sont indépendantes de la paramétrisation choisie.

7.1.1 Métrique

Le vecteur vitesse v et la métrique g sont définis naturellement par

$$v(\theta) = X'(\theta), \qquad\qquad g(\theta) = |X'(\theta)|^2.$$

Les différentes paramétrisations que l'on peut choisir correspondent de manière intuitive à un parcours de la courbe avec des vitesses différentes. Une paramétrisation importante mais pas souvent exploitable analytiquement est la paramétrisation par abscisse curviligne pour laquelle $|X'(\theta)| = 1$ pour tout θ. Dans ce cas la courbe est parcourue à vitesse constante et les quantités géométriques se calculent de manière plus simple. La norme de la vitesse permet de calculer la longueur de la courbe par la formule

$$L = \int_a^b |X'(\theta)| d\theta = \int_a^b \sqrt{g(\theta)}\, d\theta. \tag{7.1}$$

Grâce à un changement de variable dans l'intégrale il est simple de montrer que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie. La normale est définie comme le vecteur unitaire orthogonal au vecteur vitesse

$$n(\theta) = \frac{X'(\theta)^\perp}{|X'(\theta)|}.$$

Nous choisissons comme convention que la normale est dirigée vers l'extérieur dans le cas d'une courbe fermée. Une base orthogonale directe $(v(\theta), n(\theta))$ est donc attachée à chaque point de la courbe (FIG 7.1)

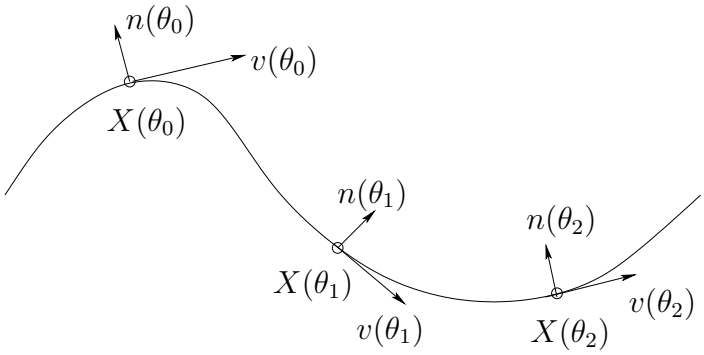

FIG. 7.1 – Vecteurs vitesse et normal associés à une courbe paramétrée

7.1.2 Courbure

La courbure est un concept fondamental en géométrie. Elle permet de donner une mesure de la façon dont une courbe se tord au voisinage d'un point. La figure (FIG 7.1) permet d'intuiter que la courbure est fortement liée à la manière dont le vecteur normal varie. La courbure (absolue) κ est alors définie par la norme de la dérivée de n qui se simplifie en

$$\kappa(\theta) = |n'(\theta)| = \frac{|X''(\theta) \wedge X'(\theta)|}{|X'(\theta)|^3} = \frac{|X''(\theta) \cdot X'(\theta)^\perp|}{|X'(\theta)|^3}. \tag{7.2}$$

Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie et dans le cas d'une paramétrisation par abscisse curviligne nous retrouvons le résultat bien connu que la courbure est égale à la norme de l'accélération. La variation du vecteur normal donnant accès à la courbure nous nous intéressons maintenant aux variations d'un vecteur tangent.

7.1.3 Dérivée covariante d'un champ de vecteurs

Considérons un champ de vecteurs tangent Y associé à la paramétrisation $\theta \mapsto X(\theta)$

$$Y(\theta) = a(\theta) X'(\theta).$$

La variation de ce champ de vecteurs par rapport au paramètre θ de la paramétrisation s'obtient facilement

$$Y'(\theta) = a'(\theta)X'(\theta) + a(\theta)X''(\theta).$$

Le vecteur $X''(\theta)$ se décompose dans la base orthogonale $(X'(\theta), n(\theta))$ de la manière suivante

$$X''(\theta) = \Gamma(\theta)\ X'(\theta) + h(\theta)\ n(\theta). \tag{7.3}$$

avec

$$\Gamma(\theta) = \frac{X''(\theta)\cdot X'(\theta)}{|X'(\theta)|^2} = \frac{\partial_\theta(\sqrt{g(\theta)})}{\sqrt{g(\theta)}}, \qquad h(\theta) = X''(\theta)\cdot n(\theta) = -X'(\theta)\cdot n'(\theta). \tag{7.4}$$

L'identité sur $h(\theta)$ étant obtenue en dérivant l'expression $X'(\theta)\cdot n(\theta) = 0$. Notons au passage que d'après la relation (7.2)

$$\kappa(\theta) = |(g(\theta))^{-1}\ h(\theta)|.$$

Comme nous le verrons dans la section suivante sur les surfaces g est l'équivalent de la première forme fondamentale, h l'équivalent de la deuxième forme fondamentale et Γ l'équivalent des symboles de Christoffel. La relation précédente montre que la courbure se calcule à l'aide des deux formes fondamentales.

La dérivée du champ de vecteurs Y se réécrit dans la base $(X'(\theta), n(\theta))$

$$Y'(\theta) = (a'(\theta) + a(\theta)\Gamma(\theta))X'(\theta) + a(\theta)\ h(\theta)\ n(\theta). \tag{7.5}$$

Remarquons que la dérivée d'un champ de vecteurs tangent n'est pas un champ de vecteurs tangent.

En géométrie il est d'usage de considérer des objets indépendamment du plongement choisi. Dans ce but il est nécessaire de définir des champs de vecteurs qui appartiennent uniquement au plan tangent. On introduit alors une nouvelle dérivée DY dite covariante définie comme la composante de la projection de $Y'(\theta)$ sur $X'(\theta)$. Elle se réécrit avec (7.4) et (7.5) sous la forme

$$DY(\theta) = \frac{1}{\sqrt{g(\theta)}}\partial_\theta(\sqrt{g(\theta)}\ a(\theta)). \tag{7.6}$$

L'introduction de cette dérivée covariante est très importante car elle permet d'introduire les opérateurs différentiels sur une courbe paramétrée.

7.1.4 Opérateurs surfaciques

Donnons-nous une fonction $\theta \mapsto f(\theta)$ définie à partir de la paramétrisation $\theta \mapsto X(\theta)$. La différentielle de f est une forme linéaire sur l'espace tangent et s'écrit $df = f'(\theta)d\theta$ où $d\theta$ est la forme linéaire "duale" associée au champ de vecteurs $X'(\theta)$ tel que $d\theta(X'(\theta)) = 1$. Le gradient associé (que l'on note $\nabla_{\partial\Omega} f$) est donné par

$$df(X'(\theta)) = \nabla_{\partial\Omega} f\cdot X'(\theta) = f'(\theta). \tag{7.7}$$

Donc en décomposant $\nabla_{\partial\Omega} f$ dans la base $X'(\theta)$

$$\nabla_{\partial\Omega} f = (g(\theta))^{-1}\ f'(\theta)\ X'(\theta). \tag{7.8}$$

Le gradient surfacique est donc simplement un vecteur appartenant au plan tangent proportionnel à la dérivée de f.

Les opérateurs différentiels sont définis classiquement sur $\mathbb{R}^2$ à l'aide des dérivées partielles de chaque composante. Si $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs alors la divergence est définie par $\mathrm{div}(v) = \partial_x v_x + \partial_y v_y$. Dans le cas de champs de vecteurs définis sur une courbe il est nécessaire d'utiliser la dérivée covariante définie précédemment car la dérivée classique n'appartient pas au plan tangent.

Si $Y(\theta) = a(\theta)X'(\theta)$ est un champ de vecteurs, définissons la divergence surfacique noté $\mathrm{div}_{\partial\Omega}(Y)$ comme la trace de la dérivée covariante (7.6)

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(Y) = \frac{1}{\sqrt{g(\theta)}}\partial_\theta(\sqrt{g(\theta)}\ a(\theta)). \tag{7.9}$$

Le laplacien d'une fonction scalaire f noté $\Delta_{\partial\Omega} f$ est alors défini à l'aide des opérateurs précédents de la manière suivante

$$\Delta_{\partial\Omega} f = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega} f) = \frac{1}{\sqrt{g(\theta)}}\partial_\theta\left(\sqrt{g(\theta)}\ (g(\theta))^{-1}\ f'(\theta)\right). \tag{7.10}$$

Nous allons maintenant à une généralisation de ces notions dans le cas des surfaces. Les quantités scalaires comme la métrique et la courbure seront remplacées par les matrices de taille 2 car les variations peuvent être considérées dans plusieurs directions. Plus de détails sur l'étude des courbes paramétrées et des surfaces peuvent être trouvés dans [19].

7.2 Surface définie par une paramétrisation

Considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une paramétrisation X de la surface (FIG 7.2)

$$\begin{array}{rccl} X: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u^1, u^2) & \mapsto & X(u^1, u^2). \end{array}$$

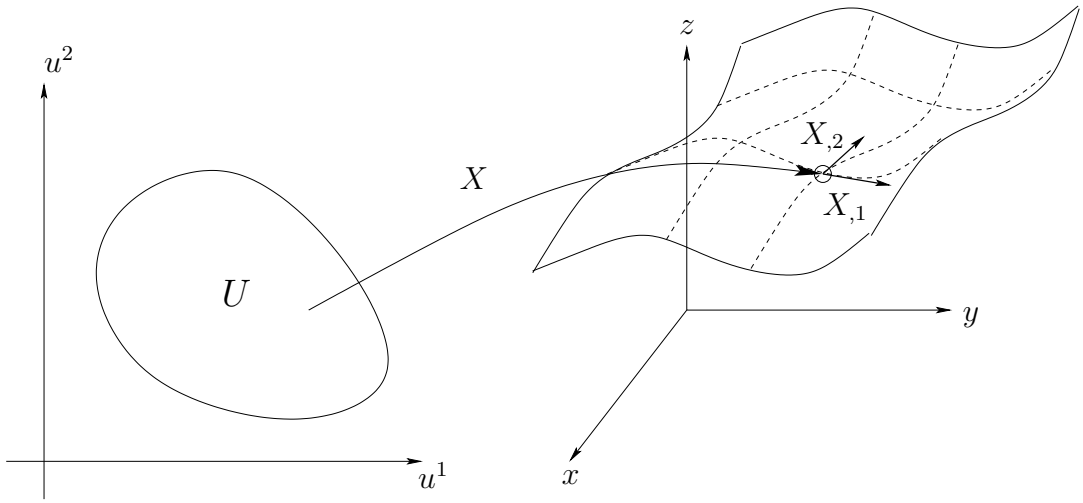

FIG. 7.2 – Représentation d'une surface à l'aide d'une paramétrisation

Nous supposons que les trois composantes de X sont C^∞. Toutes les quantités définies dans la suite seront définies localement au point (u^1, u^2) considéré. Pour ne pas alourdir les notations nous omettons cette dépendance. Notons $X_{,1} = \frac{\partial X}{\partial u^1}$ et $X_{,2} = \frac{\partial X}{\partial u^2}$ les vecteurs vitesses associées aux courbes paramétrées $u^1 \mapsto X(u^1, u^2)$ à u^2 fixé et $u^2 \mapsto X(u^1, u^2)$ à u^1 fixé.

Le plan tangent que nous notons TX (a ne pas confondre avec une notation usuelle où TX représente la réunion de tous les plan tangents) est par définition l'espace engendré par les vecteurs $X_{,1}$ et $X_{,2}$. En supposant que $|X_{,1} \wedge X_{,2}| \neq 0$ nous définissons la normale par la formule

$$n = \frac{X_{,1} \wedge X_{,2}}{|X_{,1} \wedge X_{,2}|}. \tag{7.11}$$

Remarque
Nous choisissons comme convention une paramétrisation de telle sorte que la normale (7.11) soit dirigée vers l'extérieur dans le cas d'une surface fermée.

Une base $(X_{,1}, X_{,2}, n)$ (pas forcément orthogonale) est donc attachée à chaque point de la surface. Comme pour les courbes paramétrées il existe une métrique qui permet de calculer des longueurs et des aires sur une surface.

7.2.1 Metrique

La métrique est définie par la première forme fondamentale notée I qui est une forme quadratique symétrique définie sur le plan tangent. Pour $w = w^1 X_{,1} + w^2 X_{,2} \in TX$

$$I(w) = w \cdot w = w^T I w = g_{11}(w^1)^2 + 2g_{12}w^1w^2 + g_{22}(w^2)^2. \tag{7.12}$$

avec $g_{ij} = X_{,i} \cdot X_{,j}$ les coefficients de la matrice I représentant la forme quadratique I dans la base $(X_{,1}, X_{,2})$. Notons g^{ij} les coefficients de la matrice inverse I^{-1} et g le déterminant de I.

Cette première forme fondamentale permet de répondre à des questions métriques sur la surface. Intuitivement si on sait calculer les longueurs et l'aire d'un triangle infinitésimal (par l'intermédiaire du produit scalaire sur chaque plan tangent) nous pourrons alors calculer les longueurs et les aires sur la surface. Choisissons

$$\begin{array}{rll} \alpha : & [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto X(x(t), y(t)) \end{array}$$

une courbe paramétrée dessinée sur la surface. La longueur de cette courbe est donnée, comme pour les courbes paramétrées bidimensionelles, par l'intégrale du module de la vitesse

$$L = \int_0^1 |\alpha'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 g_{11}(t) + 2x'(t)y'(t)g_{12}(t) + (y'(t))^2 g_{22}(t)}\, dt.$$

où l'on a noté $g_{ij}(t) = X_{,i}(x(t), y(t)) \cdot X_{,j}(x(t), y(t))$. La première forme fondamentale permet donc de calculer la longueur d'une courbe dessinée sur la surface.

Pour le calcul de l'aire nous partons de la constatation que

$$|X_{,1} \wedge X_{,2}|\, du^1 du^2 = \sqrt{|X_{,1}|^2 |X_{,2}|^2 - (X_{,1} \cdot X_{,2})^2}\, du^1 du^2 = \sqrt{g}\, du^1 du^2.$$

représente l'aire du parallélogramme infinitésimal engendré par $X_{,1}$ et $X_{,2}$. On pose donc comme définition de l'aire $\mathcal{A}$ d'une surface

$$\mathcal{A} = \int_U \sqrt{g}\, du^1 du^2. \tag{7.13}$$

Nous allons maintenant définir la courbure d'une surface. Pour ce faire nous allons introduire la deuxième forme fondamentale qui dépend des dérivées secondes de la paramétrisation.

7.2.2 Courbure

Comme pour les courbes paramétrées, la courbure est liée à la variation du vecteur normal. Comme nous travaillons sur des surfaces, la variation de la normale peut être choisie dans plusieurs directions et l'information sur la courbure va donc être contenue dans une matrice.

La normale n est une application qui à chaque point de la surface associe un vecteur de la sphère unité $\mathcal{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ donné par la formule (7.11). Notons $n_{,1} = \frac{\partial n}{\partial u^1}$ et $n_{,2} = \frac{\partial n}{\partial u^2}$ la variation de la normale dans les deux directions données par la paramétrisation. En dérivant par rapport à u^1 et u^2 l'égalité $n \cdot n = 1$ nous obtenons que $n_{,1}$ et $n_{,2}$ appartiennent à TX que l'on écrit

$$n_{,1} = aX_{,1} + bX_{,2} \qquad\qquad n_{,2} = cX_{,1} + dX_{,2}.$$

La matrice de l'endomorphisme $dn : TX \longrightarrow TX$ notée $[dn]$ s'écrit donc dans la base $(X_{,1}, X_{,2})$ $(dn(X_{,i}) = n_{,i})$

$$[dn] = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

dn contient les informations sur la courbure et on définit alors la courbure moyenne H et la courbure de Gauss G comme les invariants de dn

$$H = \mathrm{Tr}(dn), \qquad\qquad G = \det(dn). \tag{7.15}$$

Remarque
Nous choisissons ici une convention différente de celle utilisée dans [19]. En effet nous voulons que la courbure d'une sphère soit positive si la normale est orientée vers l'exterieur de la surface (c'est le cas dans le cas d'une représentation implicite par level set).

Une propriété remarquable de cet endomorphisme est qu'il est autoadjoint. En effet en dérivant les égalités $n \cdot X_{,1} = 0$ par rapport à u^2 et $n \cdot X_{,2} = 0$ par rapport à u^1 on obtient (en utilisant le théorème de Schwarz)

$$dn(X_{,2}) \cdot X_{,1} = n_{,2} \cdot X_{,1} = -n \cdot X_{,12} = -n \cdot X_{,21} = n_{,1} \cdot X_{,2} = dn(X_{,1}) \cdot X_{,2}.$$

Deuxième forme fondamentale

L'endomorphisme dn étant autoadjoint nous pouvons définir la deuxième forme fondamentale notée II qui est une forme quadratique symétrique définie sur le plan tangent. Pour $w = w^1 X_{,1} + w^2 X_{,2} \in TX$

$$II(w) = -dn(w) \cdot w = w^T II w = h_{11}(w^1)^2 + 2h_{12}w^1w^2 + h_{22}(w^2)^2. \tag{7.16}$$

avec $h_{ij} = -n_{,i} \cdot X_{,j}$ les coefficients de la matrice II représentant la forme quadratique II dans la base $(X_{,1}, X_{,2})$. Ces coefficients peuvent s'écrire autrement à l'aide de la paramétrisation en dérivant l'égalité $n \cdot X_{,i} = 0$ par rapport à j

$$h_{ij} = -n_{,i} \cdot X_{,j} = n \cdot X_{,ij}. \tag{7.17}$$

Nous allons à présent calculer $n_{,i}$ en fonction des deux formes fondamentales. Pour se faire décomposons $n_{,i}$ sur la base $(X_{,1}, X_{,2})$ c'est à dire $n_{,i} = \sum_k a_{ik} X_{,k}$. Nous obtenons avec (7.17)

$$h_{ij} = -\sum_k a_{ik} g_{kj}. \tag{7.18}$$

En utilisant la propriété dite d'ascenseur d'indice qui est basée sur la formule $\sum_j g_{kj} g^{jl} = \delta_k^l$ nous obtenons avec (7.20)

$$n_{,i} = -\sum_k h_i^k X_{,k}. \tag{7.19}$$

où nous avons noté

$$h_i^j = \sum_k g^{jk} h_{ki}. \tag{7.20}$$

La matrice $[dn]$ associée à dn dans la base $(X_{,1}, X_{,2})$ se réecrit donc

$$[dn] = -\begin{pmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 \end{pmatrix}. \tag{7.21}$$

En utilisant la définition (7.15) nous obtenons les formules pour la courbure en fonction de la paramétrisation

$$H = \mathrm{Tr}(h_j^i) = -\sum_i h_i^i. \tag{7.22}$$

$$G = \det(h_j^i). \tag{7.23}$$

Interprétation géométrique de la deuxième forme fondamentale

L'endomorphisme dn est autoadjoint mais cela ne signifie pas que la matrice $[dn]$ est symétrique (la base $(X_{,1}, X_{,2})$ n'est pas nécessairement orthonormale). Par contre le théorème spectral stipule que l'on peut le diagonaliser dans une base orthonormale que l'on note (e_1, e_2). Dans cette base

$$[dn] = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

D'après (7.15)

$$H = \mathrm{Tr}(dn) = \kappa_1 + \kappa_2, \qquad G = \det(dn) = \kappa_1 \kappa_2. \tag{7.25}$$

L'introduction de II est essentielle car elle contient des informations géométriques intéressantes. Il est montré dans [19] que la deuxième forme fondamentale appliquée à un vecteur w est égale au signe près à la courbure d'une courbe paramétrée définie comme l'intersection de la surface et le plan $\mathrm{vect}(w, n)$ appelé section normale. De plus si $\kappa_1 > \kappa_2$ la courbure de la courbe contenue dans le plan $\mathrm{vect}(e_1, n)$ est maximale et la courbure de la courbe contenue dans le plan $\mathrm{vect}(e_2, n)$ est minimale parmi toutes les courbes associées à une section normale.

Formule de Gauss-Bonnet

Le théorème de Gauss-Bonnet qui relie la courbure de Gauss à la topologie de la surface. Si $\partial\Omega$ est une surface fermée alors

$$\int_{\partial\Omega} G\, d\sigma = 4\pi(1-N). \tag{7.26}$$

où N est un invariant topologique égal au "nombre de trous" de la surface.

La variation du vecteur normal donne accès à la courbure de la surface. Nous allons maintenant nous intéresser à la variation d'un vecteur tangent.

7.2.3 Dérivée covariante d'un champ de vecteurs

Comme pour le cas de courbes paramétrées, la dérivée d'un vecteur tangent dans une direction ne va pas rester dans le plan tangent. Il est donc naturel de définir une nouvelle dérivée en projetant le résultat obtenu sur le plan tangent.

Décomposons dans la base $(X_{,1}, X_{,2}, n)$ les dérivées secondes de la paramétrisation. Comme les vecteurs de base varient lorsque l'on se déplace sur la surface il existe des coefficients Γ^k_{ij} (appelés symboles de Christoffel) et h_{ij} tels que

$$X_{,ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_{,k} + h_{ij} n. \tag{7.27}$$

Ces équations sont nommées les équations de Gauss. Remarquons que les h_{ij} correspondent aux coefficients de II d'après (7.17) et que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ car $X_{,ij} = X_{,ji}$. Pour trouver les relations entre les symboles de Christoffel et la première forme fondamentale nous commençons par écrire ($n \cdot X_{,i} = 0$)

$$(g_{ip})_{,j} = (X_{,i} \cdot X_{,p})_{,j} = X_{,ij} \cdot X_{,p} + X_{,i} \cdot X_{,pj} = \sum_k \Gamma^k_{ij} g_{kp} + \sum_k \Gamma^k_{pj} g_{ki}.$$

Un calcul rapide montre que

$$(g_{li})_{,j} + (g_{lj})_{,i} - (g_{ij})_{,l} = 2\sum_k \Gamma^k_{ij} g_{kl}. \tag{7.28}$$

En utilisant l'ascenseur d'indices nous obtenons

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l \frac{g^{kl}}{2}((g_{li})_{,j} + (g_{lj})_{,i} - (g_{ij})_{,l}). \tag{7.29}$$

Nous pouvons à présent décomposer la dérivée du champ de vecteur $Y = Y^1 X_{,1} + Y^2 X_{,2}$ dans la base $(X_{,1}, X_{,2}, n)$ à l'aide de (7.27)

$$Y_{,j} = \sum_i ((Y^i)_{,j} X_{,i} + Y^i X_{,ij}) = \sum_i (Y^i)_{;j} X_{,i} + \sum_i Y^i h_{ij} n.$$

où la notation suivante est utilisée

$$(Y^i)_{;j} = (Y^i)_{,j} + \sum_k \Gamma^i_{jk} Y^k. \tag{7.30}$$

Nous définissons à présent la dérivée covariante DY comme la projection sur le plan tangent de la dérivée du champ de vecteurs Y. La matrice DY est donc définie dans la base $(X_{,1}, X_{,2})$ par

$$DY = \begin{pmatrix} (Y^1)_{;1} & (Y^1)_{;2} \\ (Y^2)_{;1} & (Y^2)_{;2} \end{pmatrix}. \tag{7.31}$$

7.2.4 Opérateurs surfaciques

Nous allons maintenant introduire grace à la dérivée covariante la généralisation à une surface des opérateurs différentiels classiques.

Gradient surfacique

Donnons nous une fonction scalaire $(u^1, u^2) \mapsto f(u^1, u^2)$ définie sur la surface à partir de la paramétrisation $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2)$ et notons $f_{,i}$ la dérivée de f par rapport à la ième variable . La différentielle de f est une forme linéaire sur le plan tangent que l'on peut écrire

$$df = f_{,1} du^1 + f_{,2} du^2.$$

où (du^1, du^2) est la base duale associée à $(X_{,1}, X_{,2})$ c'est à dire $du^i(X_{,j}) = \delta^j_i$.

Lorsque que l'on travaille dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien le gradient d'une fonction f est défini par $df(h) = \nabla f \cdot h$. Si f est définie sur une surface nous définissons le gradient surfacique noté $\nabla_{\partial\Omega} f$ de manière naturelle avec le produit scalaire sur le plan tangent

$$df(X_{,i}) = \nabla_{\partial\Omega} f \cdot X_{,i} = f_{,i}.$$

En utilisant la propriété d'ascenseur d'indices nous obtenons une formule analogue à (7.8)

$$\nabla_{\partial\Omega} f = \sum_k \left(\sum_l g^{kl} f_{,l} \right) X_{,k}. \tag{7.32}$$

Divergence surfacique et contraction des symboles de Christoffel

Définissons à présent la divergence surfacique d'un champ de vecteurs tangents $Y = Y^1 X_{,1} + Y^2 X_{,2}$ notée $\mathrm{div}_{\partial\Omega}(v)$ par la trace de la matrice des dérivées covariantes et utilisons (7.30)

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(Y) = \sum_i (Y^i)_{;i} = \sum_i (Y^i)_{,i} + \sum_i \left(\sum_j \Gamma^j_{ij} \right) Y^i. \tag{7.33}$$

La formule précédente peut se simplifier à l'aide de la propriété de contraction des symboles de Christoffel. Utilisons la formule (7.29). En permutant les indices le premier et le dernier terme se compensent

$$\sum_j \Gamma_{ij}^j = \sum_{j,l} \frac{g^{jl}}{2}((g_{li})_{,j} + (g_{lj})_{,i} - (g_{ij})_{,l}) = \sum_{j,l} \frac{g^{jl}}{2}(g_{lj})_{,i}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser la dérivée du déterminant pour obtenir

$$(\det(g_{kl}))_{,i} = \det(g_{kl}) \sum_{j,l} g^{jl}(g_{lj})_{,i}.$$

Donc

$$\sum_j \Gamma_{ij}^j = g_{,i}\frac{1}{2g} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g})_{,i}.$$

Nous réécrivons donc la divergence surfacique sous la forme

$$\mathrm{div}_{\partial\Omega}(Y) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{2} (\sqrt{g}\, Y^i)_{,i}. \tag{7.34}$$

Laplacien surfacique

L'opérateur laplacien noté $\Delta_{\partial\Omega} f$ est alors défini à l'aide des deux opérateurs (7.32), (7.35) par la formule

$$\Delta_{\partial\Omega} f = \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\nabla_{\partial\Omega} f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} (\sqrt{g}\, g^{ij}\ f_{,j})_{,i}. \tag{7.35}$$

Intéressons nous à présent aux relations reliant les deux formes fondamentales associées à une surface qui ne sont en fait pas quelconques. Ces relations seront utilisées lors de la dérivation de forme associée à une paramétrisation de la troisième partie.

7.2.5 Equations de Gauss-Mainardi-Codazzi

Commençons par dériver $X_{,11}$ par rapport à la deuxième variable en repartant de (7.27)

$$(X_{,11})_{,2} = (\Gamma_{11}^1)_{,2} X_{,1} + \Gamma_{11}^1 X_{,12} + (\Gamma_{11}^2)_{,2} X_{,2} + \Gamma_{11}^2 X_{,22} + (h_{11})_{,2} n + h_{11} n_{,2}.$$

On réinjecte maintenant les expressions de $X_{,12}$ et $X_{,22}$ (7.27) dans l'expression précédente et on multiplie scalairement par n pour obtenir ($X_{,i} \cdot n = 0$ et $n_{,i} \cdot n = 0$)

$$(X_{,11})_{,2} \cdot n = \Gamma_{11}^1 h_{12} + \Gamma_{11}^2 h_{22} + (h_{11})_{,2}.$$

Le même type de calcul conduit à la relation

$$(X_{,12})_{,1} \cdot n = \Gamma_{12}^1 h_{11} + \Gamma_{12}^2 h_{21} + (h_{12})_{,1}.$$

Comme X est régulière on peut intervertir l'ordre de dérivation et nous obtenons la relation

$$(h_{11})_{,2} - (h_{12})_{,1} = \Gamma_{12}^1 h_{11} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) h_{21} - \Gamma_{11}^2 h_{22}. \tag{7.36}$$

En appliquant le même raisonnement avec $(X_{,22})_1 \cdot n = (X_{,21})_2 \cdot n$ nous obtenons

$$(h_{12})_{,2} - (h_{22})_{,1} = \Gamma^1_{22} h_{11} + (\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{21}) h_{21} - \Gamma^2_{12} h_{22}. \tag{7.37}$$

En utilisant le même type de raisonnement il est possible de déterminer une troisième équation indépendantes des deux précédentes qui exprime la courbure de Gauss à partir des symboles de Christoffel (qui dépendent uniquement de la première forme fondamentale d'après (7.29)). Cette relation est nommée équation de Gauss et est à la base du théorème Egregium de Gauss : la courbure de Gauss est invariante par isométrie (G dépend uniquement de la métrique). Nous ne développons pas plus ce point car nous n'utiliserons pas cette équation.

Les relations (7.36) et (7.37) sont appelées équations de Mainardi-Codazzi. Elles permettent, avec l'équation de Gauss, de montrer l'existence et l'unicité à un déplacement de $\mathbb{R}^3$ près d'une surface ayant deux formes fondamentales que l'on s'est fixé. Nous écrirons ces équations dans la suite en terme de dérivée covariante de tenseurs.

Nous avons rencontré jusqu'a présent plusieurs type d'objets mathématiques : vecteurs, formes linéaires, formes bilinéaires et applications linéaires. Tous ces objets ont des caractéristiques communes : ils sont "linéaires" et sont invariants par changement de coordonnées. La théorie générale qui englobe ces concepts est la notion générale de tenseur. Nous avons par ailleurs déjà défini le concept de dérivée covariante de champ de vecteurs et nous aimerions généraliser cette notion aux tenseurs car nous l'utiliserons dans la troisième partie concernant une méthode d'optimisation de formes paramétrique.

7.2.6 Notion de tenseur

Nous n'allons pas introduire les tenseurs de manière générale par simplicité et nous nous restreindrons aux tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2. De plus nous considèrerons que des tenseurs euclidiens définis dans chaque plan tangent TX (le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ restreint à chaque plan tangent).

Tenseur d'ordre 1

Considérons un champ de vecteurs tangent Y décomposé sur la base $(X_{,1}, X_{,2})$ associé à la paramétrisation

$$Y = Y^1 X_{,1} + Y^2 X_{,2}.$$

Considérons à présent la base duale notée (du^1, du^2) qui vérifie $du^i(X_{,j}) = \delta^j_i$. Nous pouvons identifier TX et son dual à l'aide du produit scalaire. Cette identification donne une base $((X_{,1})^*, (X_{,2})^*)$ du plan tangent telle que pour tout vecteur tangent h

$$du^i(h) = (X_{,i})^* \cdot h.$$

En utilisant la propriété de la base duale $du^i(X_{,j}) = \delta^j_i = (X_{,i})^* \cdot X_{,j}$ et l'ascenseur d'indices nous obtenons

$$(X_{,i})^* = \sum_j g^{ij} X_{,j}. \tag{7.38}$$

Nous avons donc

$$(X_{,i})^* \cdot (X_{,j})^* = \left(\sum_k g^{ik} X_{,k}\right) \cdot \left(\sum_l g^{jl} X_{,l}\right) = \sum_{k,l} g^{ik} g^{jl} g_{kl} = g^{ij}.$$

En utilisant $(X_{,i})^* \cdot X_{,j} = \delta_i^j$ on montre avec un ascenseur d'indices que

$$X_{,i} = \sum_j g_{ij} (X_{,j})^*. \tag{7.39}$$

Les formules (7.39), (7.38) permettent donc, via le tenseur métrique et son inverse, de passer de la base $(X_{,1}, X_{,2})$ à la base duale associée $((X_{,1})^*, (X_{,2})^*)$. Le champ de vecteurs Y est indépendant de la base et nous notons Y_1 et Y_2 ses composantes dans la base duale

$$Y = Y^1 X_{,1} + Y^2 X_{,2} = Y_1 (X_{,1})^* + Y_2 (X_{,2})^*.$$

D'après les propriétés de la base duale et les relations (7.39) et (7.38) les composantes (Y^1, Y^2) et (Y_1, Y_2) sont liées par les relations

$$Y_i = Y \cdot X_{,i} = \sum_j Y^j g_{ij} \qquad Y^i = Y \cdot (X_{,i})^* = \sum_j Y_j g^{ij}. \tag{7.40}$$

Ces formules permettent de passer des composantes d'un vecteur dans la base $(X_{,1}, X_{,2})$ à ses composantes dans la base duale $((X_{,1})^*, (X_{,2})^*)$.

Regardons à présent comment ces coordonnées se transforment lors d'un changement de base. Pour ce faire effectuons le changement de base donné par $\tilde{X}_{,i} = \sum_j C_{ij} X_{,j}$. Nous avons alors $X_{,i} = \sum_j C_{ij}^{-1} \tilde{X}_{,j}$ et donc

$$Y = \sum_i Y^i X_{,i} = \sum_j \left(\sum_i C_{ij}^{-1} Y^i\right) \tilde{X}_{,j} = \sum_j \tilde{Y}^j \tilde{X}_{,j}.$$

Alors que les éléments de la nouvelle base en fonction de l'ancienne s'expriment à l'aide de C_{ij}, les composantes du vecteur dans la nouvelle base s'exprime à partir des composantes dans l'ancienne base et de C_{ij}^{-1}. C'est pour cette raison que les composantes Y^i sont appelées composantes contravariantes du vecteur. En utilisant le même changement de base nous avons

$$\tilde{Y}_i = Y \cdot \tilde{X}_{,i} = \sum_j C_{ij} Y \cdot X_{,j} = \sum_j C_{ij} Y_i.$$

Dans ce cas, les composantes du vecteur dans la nouvelle base s'expriment à l'aide des composantes dans l'ancienne base et de C_{ij}. C'est pour cette raison que les composantes Y_i du vecteur Y sont appelées covariantes.

Un tenseur d'ordre un est un champ de vecteurs que l'on peut écrire avec ses composantes contravariantes ou covariantes. Dans ce dernier cas on peut également identifier le champ de vecteurs avec une

forme linéaire sur le plan tangent à l'aide du produit scalaire. Illustrons ce propos avec l'exemple déjà étudié de la différentielle d'une fonction f définie à l'aide de la paramétrisation X. Le champ de vecteurs associé à df est noté $\nabla_{\partial\Omega} f$ et s'écrit en composantes covariantes

$$\nabla_{\partial\Omega} f = \sum_i f_{,i} (X_{,i})^*.$$

et en composantes contravariantes

$$\nabla_{\partial\Omega} f = \sum_j \left(\sum_i f_{,i} g^{ij} \right) X_{,j}.$$

Cette différence dans la décomposition d'un vecteur est fondamentale et change en particulier les expressions des dérivées covariantes comme nous le verrons.

Tenseur d'ordre deux

Un tenseur A d'ordre deux est une application bilinéaire sur TX. Choisissons deux vecteurs du plan tangent Y et Z que l'on décompose sur la base contravariante naturelle associée à la paramétrisation

$$Y = \sum_i Y^i X_{,i} \qquad\qquad Z = \sum_j Z^j X_{,j}.$$

On a alors

$$A(Y, Z) = \sum_{i,j} Y^i Z^j A(X_{,i}, X_{,j}).$$

Introduisons à présent la notation tensorielle suivante (a, b, u et v sont des vecteurs)

$$(a \otimes b)(u, v) = (a \cdot u)\ (b \cdot v).$$

En notant $A_{ij} = A(X_{,i}, X_{,j})$ nous obtenons avec (7.40)

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} (X_{,i})^* \otimes (X_{,j})^*.$$

En choisissant de décomposer $Y = \sum_i Y_i (X_{,i})^*$ sur la base covariante

$$A(Y, Z) = \sum_{i,j} Y_i Z^j A((X_{,i})^*, X_{,j}) \qquad\qquad A = \sum_{i,j} A^i_j X_{,i} \otimes (X_{,j})^*.$$

avec $A((X_{,i})^*, X_{,j}) = A^i_j$. Nous pourrions également décomposer Y sur la base contravariante et Z sur la base covariante pour obtenir une autre décomposition.

Si l'on choisit également de décomposer $Z = \sum_j Z_j (X_{,j})^*$ sur la base covariante

$$A(Y,Z) = \sum_{i,j} Y_i Z_j A((X_{,i})^*, (X_{,j})^*) \qquad\qquad A = \sum_{i,j} A^{ij} X_{,i} \otimes X_{,j}.$$

avec $A((X_{,i})^*, (X_{,j})^*) = A^{ij}$. Les relations (7.39) et (7.38) permettent d'en déduire les relations entre les composantes du tenseur A dans différentes bases

$$A^i_k = \sum_j A^{ij} g_{jk} \qquad\qquad A_{kl} = \sum_{i,j} g_{ki} A^{ij} g_{jl}. \tag{7.41}$$

Il est donc possible de décomposer un tenseur d'ordre deux de quatre manières équivalentes et les relations entre les composantes du tenseur sont données par (7.41).

Contraction de tenseurs

Il est possible à partir d'un ou plusieurs tenseurs d'en construire un autre d'ordre moins élevé avec l'outil de contraction que nous introduisons maintenant. Il consiste à sommer les composantes d'un tenseur avec un indice covariant et un autre contravariant. Considérons deux tenseurs Y et Z d'ordre un. La contraction de ces deux tenseurs est appelé le produit scalaire et il est noté $\cdot$

$$Y \cdot Z = \left(\sum_i Y_i (X_{,i})^* \right) \cdot \left(\sum_k Z^j X_{,j} \right) = \sum_i Y_i Z^i.$$

En écrivant ces vecteurs dans d'autres bases nous obtenons avec (7.40)

$$Y \cdot Z = \sum_{i,j} g_{ij} Y_i Z_j = \sum_{i,j} g^{ij} Y^i Z^j.$$

Intéressons-nous à la contraction d'un tenseur d'ordre 2 A et un tenseur d'ordre 1 Y. Nous avons

$$A = \sum_{i,j} A^{ij} X_{,i} \otimes X_{,j} \qquad\qquad Y = \sum_k Y_k (X_{,k})^*.$$

Le produit contracté Z de A et Y (avec le deuxième indice contravariant de A) est défini par

$$Z = \sum_{i,j} A^{ij} Y_j \; X_{,i}.$$

Z un tenseur d'ordre un écrit en composantes contravariantes. Il est possible d'obtenir d'autres expressions avec les formules (7.40) et (7.41).

Dans le cas où l'on considère deux tenseurs A et B d'ordre deux

$$A = \sum_{i,j} A^{ij} X_{,i} \otimes X_{,j} \qquad\qquad B = \sum_{i,j} B_{ij} (X_{,i})^* \otimes (X_{,j})^*.$$

on peut définir une double contraction pour obtenir un tenseur d'ordre 0 noté $A : B$

$$A : B = \sum_{i,j} A^{ij} B_{ij}. \tag{7.42}$$

Il est possible d'obtenir d'autres expressions avec des formules du type (7.41). Nous allons maintenant étudier comment se généralise la dérivée covariante pour des tenseurs.

7.2.7 Dérivée covariante de tenseur

Commençons par le cas le plus simple d'une fonction scalaire qui est considérée comme un tenseur d'ordre 0. La fonction n'est pas définie à l'aide d'une base qui varie avec la surface donc la dérivée habituelle et la dérivée covariante sont les mêmes

$$f_{;i} = f_{,i}.$$

Dérivée covariante de tenseur d'ordre 1

Nous avons déjà décrit précédemment la dérivée covariante d'un champ de vecteurs en coordonnées contravariantes (7.30). Nous allons maintenant en déduire la dérivée covariante d'un champ de vecteurs en coordonnées covariantes. Commençons par dériver l'égalité $X_{,i} \cdot (X_{,j})^* = \delta_i^j$

$$(X_{,i} \cdot (X_{,j})^*)_{,k} = 0 = X_{,ik} \cdot (X_{,j})^* + X_{,i} \cdot ((X_{,j})^*)_{,k}.$$

Rappelons à présent la décomposition de $X_{,ik}$ dans la base $(X_{,1}, X_{,2}, n)$ (7.27)

$$X_{,ik} = \sum_p \Gamma_{ik}^p X_{,p} + h_{ik} n. \tag{7.43}$$

Nous obtenons donc comme $X_{,i} \cdot (X_{,j})^* = \delta_i^j$ et $(X_{,j})^* \cdot n = 0$

$$((X_{,j})^*)_{,k} \cdot X_{,i} = -\Gamma_{ik}^j.$$

En dérivant l'identité $(X_{,j})^* \cdot n = 0$ puis en utilisant (7.19)

$$((X_{,j})^*)_{,k} \cdot n = -(X_{,j})^* \cdot n_{,k} = \sum_p h_k^p (X_{,j})^* \cdot X_{,p} = h_k^j.$$

Nous obtenons finalement

$$(X_{,i}^*)_{,j} = -\sum_p \Gamma_{pj}^i (X_{,p})^* + h_j^i n. \tag{7.44}$$

Introduisons à présent un champ de vecteur $Y = Y_1 (X_{,1})^* + Y_2 (X_{,2})^*$ écrit à l'aide de ses composantes covariantes. Nous avons

$$Y_{,j} = \sum_i ((Y_i)_{,j} (X_{,i})^* + Y_i ((X_{,i})^*)_{,j}) = \sum_i (Y_i)_{;j} (X_{,i})^* + \sum_i Y_i h_i^j n.$$

où la notation suivante est utilisée

$$(Y_i)_{;j} = (Y_i)_{,j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k Y_k. \tag{7.45}$$

Remarquons que la dérivée covariante exprimée en coordonnées covariantes (7.45) diffère d'un signe moins avec la dérivée covariante exprimée en coordonnées contravariantes (7.30). De plus les indices ne sont pas placés de la même façon.

Dérivée covariante de tenseur d'ordre 2

Nous avons maintenant tous les outils pour calculer la dérivée covariante d'un tenseur d'ordre 2. Une propriété naturelle est que la dérivée covariante d'un produit obéit aux mêmes règles que la dérivée classique (règle de Leibniz). Considérons un tenseur d'ordre 2 $A = \sum_{i,j} A^{ij} X_{,i} \otimes X_{,j}$ écrit sur une base covariante et dérivons par rapport à k

$$A_{,k} = \sum_{i,j} (A^{ij})_{,k} X_{,i} \otimes X_{,j} + \sum_{i,j} A^{ij} X_{,ik} \otimes X_{,j} + \sum_{i,j} A^{ij} X_{,i} \otimes X_{,jk}.$$

Il suffit à présent d'utiliser (7.43) pour obtenir en enlevant les parties suivant la normale

$$A_{,k} = \sum_{i,j} (A^{ij})_{;k} X_{,i} \otimes X_{,j}.$$

avec

$$(A^{ij})_{;k} = (A^{ij})_{,k} + \sum_p \Gamma_{pk}^i A^{pj} + \sum_p \Gamma_{pk}^j A^{ip}.$$

Si on décompose le tenseur A en coordonnées contravariantes $A = \sum_{i,j} A_{ij} (X_{,i})^* \otimes (X_{,j})^*$ alors la dérivée par rapport à k donne

$$A_{,k} = \sum_{i,j} (A_{ij})_{,k} (X_{,i})^* \otimes (X_{,j})^* + \sum_{i,j} A_{ij} ((X_{,i})^*)_{,k} \otimes (X_{,j})^* + \sum_{i,j} A^{ij} (X_{,i})^* \otimes ((X_{,j})^*)_{,k}.$$

En utilisant (7.44)

$$A_{,k} = \sum_{i,j} (A_{ij})_{;k} (X_{,i})^* \otimes (X_{,j})^*.$$

avec

$$(A_{ij})_{;k} = (A_{ij})_{,k} - \sum_p \Gamma_{ik}^p A_{pj} - \sum_p \Gamma_{jk}^p A_{ip}. \tag{7.46}$$

Applications

A titre d'exemple nous allons utiliser ces formules pour montrer que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle. En utilisant les formules (7.46) et (7.28)

$$(g_{ij})_{;k} = (g_{ij})_{,k} - \sum_p \Gamma^p_{ik} g_{pj} - \sum_p \Gamma^p_{jk} g_{ip} = (g_{ij})_{,k} - \frac{1}{2}((g_{ij})_{,k} + (g_{jk})_{,i} - (g_{ik})_{,j} + (g_{ij})_{,k} + (g_{ik})_{,j} - (g_{jk})_{,i}) = 0. \tag{7.47}$$

En utilisant le même genre de raisonnement et la règle de Leibniz nous pouvons dériver des produits de tenseurs dont les composantes sont covariantes ou contravariantes. Par exemple avec des notations évidentes

$$(fA^{ij}Y_k)_{;l} = f_{;l}A^{ij}Y_k + f(A^{ij})_{;l}Y_k + fA^{ij}(Y_k)_{;l}. \tag{7.48}$$

et

$$(A^{ij}B_{kl})_{;p} = (A^{ij})_{;p}B_{kl} + A^{ij}(B_{kl})_{;p}. \tag{7.49}$$

Ce type de calcul donne des résultats similaires pour des produit tensoriels contractés. Appliquons ce résultat en calculant la dérivée covariante de l'inverse de la première forme fondamentale g^{ij}

$$\sum_k (g^{ik})_{;l} g_{kj} = -\sum_k g^{ik}(g_{kj})_{;l} = 0. \tag{7.50}$$

Nous en déduisons avec l'ascenseur d'indices que $(g^{ij})_{;k} = 0$. Nous allons maintenant pouvoir écrire le laplacien surfacique sous une autre forme qui nous sera utile. D'après (7.32) les composantes contravariantes de $\nabla_{\partial\Omega} f$ sont égales à $\sum_j g^{ij} f_{,j}$ qui peut être vu comme un produit contracté d'un tenseur d'ordre un et d'un tenseur d'ordre deux. D'après (7.33), la divergence surfacique d'un champ de vecteurs est donné par $\mathrm{div}_{\partial\Omega}(Y) = \sum_i (Y^i)_{;i}$ où Y^i représente les composantes contravariantes de Y. Nous obtenons en utilisant la relation $(g^{ij})_{;k} = 0$

$$\Delta_{\partial\Omega} f = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} f_{,j} \right)_{;i} = \sum_{i,j} (g^{ij})_{;i} f_{,j} + \sum_{i,j} g^{ij} (f_{,j})_{;i} = \sum_{i,j} g^{ij} (f_{,i})_{;j}.$$

Réécriture des équations de Mainardi-Codazzi

Réinterprétons maintenant les équations de Mainardi-Codazzi en termes de dérivée covariante. En utilisant la formule (7.46) l'équation (7.36) peut se réécrire

$$(h_{11})_{;2} = (h_{12})_{;1}. \tag{7.51}$$

De même (7.37) se réécrit avec (7.46) sous la forme

$$(h_{12})_{;2} = (h_{22})_{;1}. \tag{7.52}$$

Nous aimerions maintenant écrire ces équations sous la forme d'une divergence de tenseur qui est nulle. Pour se faire, introduisons la matrice inverse des h_{ij} que l'on va noter h^{-1}_{ij} (on rappelle que h^{ij} représente

les composantes contravariantes de la deuxième forme fondamentale et non les composantes de l'inverse de h_{ij}). Nous avons

$$\begin{pmatrix} h_{11}^{-1} & h_{12}^{-1} \\ h_{12}^{-1} & h_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(h_{ij})} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix}.$$

Posons $\tilde{h}^{ij} = G h_{ij}^{-1}$. Comme $G = \det(h_{ij})/\det(g_{ij})$ nous obtenons

$$\tilde{h}^{11} = \frac{1}{\det(g_{ij})} h_{22} \qquad \tilde{h}^{12} = -\frac{1}{\det(g_{ij})} h_{12} \qquad \tilde{h}^{22} = \frac{1}{\det(g_{ij})} h_{11}.$$

Comme la dérivée de la métrique est nulle (7.47) nous avons

$$(\det(g_{ij}))_{;k} = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})_{;k} = (g_{11})_{;k}g_{22} + g_{11}(g_{22})_{;k} - (g_{12})_{;k}g_{21} - g_{12}(g_{21})_{;k} = 0.$$

en conséquence $(1/\det(g_{ij}))_{;k} = 0$ et les équations (7.51) (7.52) permettent d'obtenir

$$(\tilde{h}^{11})_{;1} + (\tilde{h}^{12})_{;2} = \frac{1}{\det(g_{ij})}((h_{22})_{;1} - (h_{21})_{;2}) = 0 \qquad (\tilde{h}^{21})_{;1} + (\tilde{h}^{22})_{;2} = \frac{1}{\det(g_{ij})}(-(h_{12})_{;1} + (h_{11})_{;2}) = 0.$$

ou de manière plus compacte pour $i = 1$ ou 2

$$\sum_j (\tilde{h}^{ij})_{;j} = 0. \tag{7.53}$$

Comme la matrice de terme général $\tilde{h}^{ij}$ est symétrique nous obtenons également

$$\sum_j (\tilde{h}^{ji})_{;j} = 0. \tag{7.54}$$

7.2.8 Lien avec les opérateurs surfaciques définis avec des fonctions level set

Nous avons démontré dans la troisième partie que la dérivée de fonctionnelles dépendant de la courbure moyenne faisait référence au laplacien surfacique défini à l'aide de fonction level set. Pour comparer notre résultat à celui obtenu par Willmore il est donc nécessaire de montrer que les opérateurs surfaciques définis à l'aide d'une paramétrisation et de fonction level set sont les mêmes.

Dans ce but, considérons une fonction définie sur tout l'espace $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et sa restriction $f(u^1, u^2) = \tilde{f}(X(u^1, u^2))$ à la surface. En utilisant les règles de dérivation des fonctions composées nous obtenons $f_{,i} = X_{,i} \cdot \nabla \tilde{f}$. Par définition, la projection orthogonale $w = a_1 X_{,1} + a_2 X_{,2}$ de $\nabla \tilde{f}$ sur le plan tangent vérifie

$$(\nabla \tilde{f} - w) \cdot X_{,1} = 0 \qquad (\nabla \tilde{f} - w) \cdot X_{,2} = 0.$$

Ce système linéaire de taille 2 permet de trouver les coefficients a_i et le résultat est le suivant

$$w = \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{l=1}^{2} g^{kl} f_{,l} \right) X_{,k}.$$

Le gradient surfacique défini en (7.32) est donc la projection orthogonale de $\nabla \tilde{f}$ sur le plan tangent. Ce résultat est donc le même que celui obtenu avec la définition du gradient surfacique avec des fonctions level set.

Nous ne pouvons pas comparer directement les opérateurs de divergence obtenus avec les deux méthodes car celui obtenu par les fonctions level set est défini pour tout vecteur et celui obtenu à l'aide d'une paramétrisation est défini uniquement pour les vecteurs tangents. Considérons un champ de vecteur défini sur tout l'espace dont la restriction à la surface appartient au plan tangent. Dériver ce champ de vecteurs puis le projeter sur le plan tangent est la même chose dans les deux définitions. Le résultat final ne faisant intervenir uniquement le laplacien défini comme la divergence surfacique d'un champ de vecteurs tangents les définitions des laplaciens surfaciques sont donc les mêmes.

7.2.9 Changement de variables dans une intégrale surfacique

Le changement de variables dans une intégrale de volume est bien connu et fait apparaître le déterminant de la jacobienne de la transformation. Nous proposons ici de donner la démonstration du théorème de changement de variables dans le cas d'intégrales de surface. Cette formule est importante car nous nous en servons dans la première partie pour écrire les équations lagrangiennes de la mécanique des milieux continus. De plus nous en aurons besoin pour montrer la formule de Reynolds surfacique de la section suivante.

Considérons une surface $\partial\Omega_0$ et une déformation $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\Phi(\partial\Omega_0) = \partial\Omega$. Choisissons maintenant une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. La formule de changement de variable dans les intégrales de surfaces s'écrit

$$\boxed{\int_{\Phi(\partial\Omega_0)} f(x)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} f(\Phi(a))|\operatorname{Cof}([\nabla\Phi](a))n_0(a)|\, d\sigma_0.} \tag{7.55}$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface sur $\partial\Omega$ et $d\sigma_0$ est la mesure de surface sur $\partial\Omega_0$. Le changement de variables fait donc apparaître un terme dépendant de la matrice des cofacteurs de la jacobienne de la transformation.

Démonstration

Introduisons une paramétrisation $X : (u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2)$ de la surface $\partial\Omega_0$ et $Y : (u^1, u^2) \mapsto \Phi(X(u^1, u^2))$ la paramétrisation de $\partial\Omega = \Phi(\partial\Omega_0)$ (FIG 7.3).

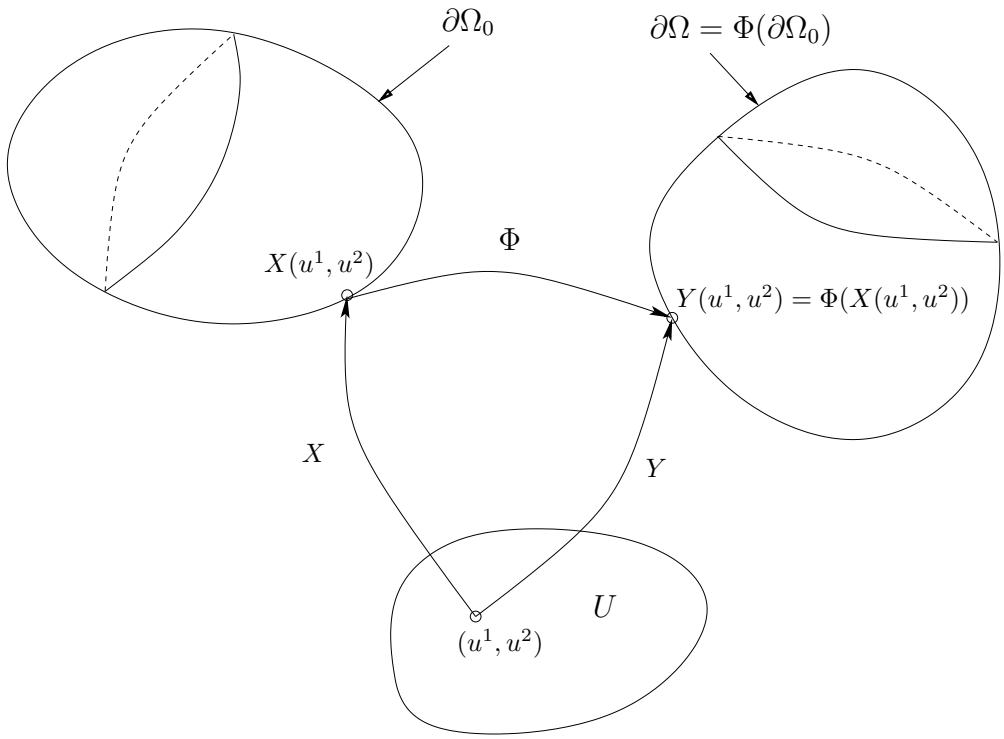

FIG. 7.3 – Déformation d'une surface avec l'application Φ

D'après (7.13), l'intégrale de surface sur $\partial\Omega$ s'écrit à l'aide de sa paramétrisation Y

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\ d\sigma = \int_U f(Y(u^1, u^2))|Y_{,1} \wedge Y_{,2}|\ du^1 du^2.$$

Nous allons maintenant calculer l'élément de surface $|Y_{,1} \wedge Y_{,2}|$ en fonction de la paramétrisation X. En dérivant $Y(u^1, u^2) = \Phi(X(u^1, u^2))$ par rapport à chacune de ses variables on obtient $Y_{,i} = [\nabla\Phi]\ X_{,i}$ par application des règles de dérivation de la composée de fonctions. Nous multiplions à présent $Y_{,1} \wedge Y_{,2}$ par $[\nabla\Phi]\ v$ où v est un vecteur quelconque. En utilisant la propriété du déterminant $\det(w_1, w_2, w_3) = (w_1 \wedge w_2) \cdot w_3$

$$(Y_{,1} \wedge Y_{,2}) \cdot ([\nabla\Phi]\ v) = \det([\nabla\Phi]\ X_{,1}, [\nabla\Phi]\ X_{,2}, [\nabla\Phi]\ v) = \det([\nabla\Phi]) \det(X_{,1}, X_{,2}, v).$$

Nous avons donc

$$([\nabla\Phi]^T\ (Y_{,1} \wedge Y_{,2})) \cdot v = \det([\nabla\Phi])(X_{,1} \wedge X_{,2}) \cdot v.$$

La relation étant valable pour tout v nous obtenons

$$Y_{,1} \wedge Y_{,2} = \det([\nabla\Phi])[\nabla\Phi]^{-T} X_{,1} \wedge X_{,2}.$$

Les vecteurs normaux n_0 sur $\partial\Omega_0$ ainsi que n sur $\partial\Omega$ sont donnés par

$$n_0 = \frac{X_{,1} \wedge X_{,2}}{|X_{,1} \wedge X_{,2}|} \qquad\qquad n = \frac{Y_{,1} \wedge Y_{,2}}{|Y_{,1} \wedge Y_{,2}|}.$$

En remplaçant dans la relation précédente nous obtenons

$$|Y_{,1} \wedge Y_{,2}| n = \det([\nabla\Phi])[\nabla\Phi]^{-T} n_0 |X_{,1} \wedge X_{,2}|. \tag{7.56}$$

En prenant la norme de l'égalité précedente et en utilisant la relation $\mathrm{Cof}([\nabla\Phi]) = \det([\nabla\Phi])[\nabla\Phi]^{-T}$ nous obtenons

$$|Y_{,1} \wedge Y_{,2}| = |\,\mathrm{Cof}([\nabla\Phi]) n_0||X_{,1} \wedge X_{,2}|. \tag{7.57}$$

qui exprime la relation entre l'élément d'aire de $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_0$. Nous avons donc

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, d\sigma = \int_U f(\Phi(X(u^1,u^2)))|\,\mathrm{Cof}([\nabla\Phi]) n_0||X_{,1} \wedge X_{,2}|\, du^1 du^2 = \int_{\partial\Omega_0} f(\Phi(a))|\,\mathrm{Cof}([\nabla\Phi](a)) n_0(a)|\, d\sigma_0$$

Nous obtenons donc le théorème de changement de variables annoncé.

Regardons maintenant comment cette formule s'écrit dans le cas d'un champ vectoriel dépendant du temps $f(x,t)n(x,t)$ (nous en aurons besoin dans la première partie). En choisissant le changement de variable Φ tel que $\Phi(\partial\Omega_0, t) = \partial\Omega_t$ nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega_t} f(x,t) n(x,t)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} f(\Phi(a,t),t) n(\Phi(a,t),t)|\,\mathrm{Cof}([\nabla\Phi(a,t)]) n_0(a)|\, d\sigma_0.$$

En divisant (7.56) par (7.57)

$$n(\Phi(a,t),t) = \frac{\mathrm{Cof}([\nabla\Phi(a,t)]) n_0(a)}{|\,\mathrm{Cof}([\nabla\Phi(a,t)]) n_0(a)|}. \tag{7.58}$$

Donc

$$\int_{\partial\Omega_t} f(x,t) n(x,t)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} f(\Phi(a,t),t)\,\mathrm{Cof}([\nabla\Phi(a,t)]) n_0(a)\, d\sigma_0. \tag{7.59}$$

La formule de Reynolds est un outil classique très utilisé et elle est démontrée dans la première partie à l'aide d'un changement de variables dans les intégrales volumiques. Il existe un équivalent pour les surfaces qui se démontre naturellement à l'aide d'un changement de variables dans les intégrales surfaciques que nous venons de démontrer.

7.2.10 Formule de Reynolds surfacique

La formule de Reynolds est l'un des points clé de la thèse. En effet, elle permet de montrer dans la première partie que $|\nabla\phi|$ contient des informations sur la variation d'aire dans le cas d'un écoulement incompressible. De plus nous l'utilisons également dans la deuxième méthode d'optimisation de fonctionnelles géométriques de la troisième partie.

Considérons une surface $\partial\Omega_t$ évoluant dans un champ de vitesse $u(x,t)$ et $f(x,t)$ une fonction. La formule de Reynolds surfacique est la suivante

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t} f(x,t)\ d\sigma\right) = \int_{\partial\Omega_t} f_t + \operatorname{div}(fu) - f([\nabla u]\ n)\cdot n\ d\sigma.} \tag{7.60}$$

Démonstration

L'idée de la preuve consiste (comme pour la preuve de la formule de Reynolds volumique) à se ramener à un domaine fixe qui ne dépend plus du temps à l'aide d'un changement de variable dans les intégrales de surfaces pour ensuite dériver chaque terme par rapport au temps. Introduisons les caractéristiques Φ associées au champ de vitesse u

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(a,t) = u(\Phi(a,t),t). \tag{7.61}$$

Considérons une surface $\partial\Omega_0$ qui se déforme sous l'action de l'application Φ en $\partial\Omega_t = \Phi(\partial\Omega_0,t)$. En effectuant le changement de variable $x = \Phi(a,t)$ avec la formule (7.55)

$$\int_{\partial\Omega_t} f(x,t)\ d\sigma = \int_{\partial\Omega_0} f(\Phi(a,t),t)\det([\nabla\Phi(a,t)])|[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)|\ d\sigma_0.$$

Nous nous sommes maintenant ramenés à un domaine fixe. Nous pouvons donc dériver l'expression précédente en dérivant par rapport à t chacun des termes dans l'intégrale. Pour le premier terme nous obtenons facilement avec l'équation des caractéristiques (7.61)

$$(f(\Phi(a,t),t))_t = f_t(\Phi(a,t),t) + \Phi_t(a,t)\cdot\nabla_x f(\Phi(a,t),t) = f_t(\Phi(a,t),t) + u(\Phi(a,t),t)\cdot\nabla_x f(\Phi(a,t),t).$$

Pour le deuxième terme nous utilisons la dérivée du determinant $(\det(A(t)))' = \det(A(t))\operatorname{Tr}([A(t)]^{-1}A'(t))$

$$(\det(\nabla_a\Phi(a,t)))_t = \det(\nabla_a\Phi(a,t))\operatorname{Tr}([\nabla_a\Phi(a,t)]^{-1}[\nabla_a\Phi(a,t)]_t).$$

En utilisant la définition des caractéristiques (7.61)

$$[\nabla_a\Phi(a,t)]_t = \nabla_a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(a,t)\right) = \nabla_a(u(\Phi(a,t),t)) = [\nabla_x u](\Phi(a,t),t))[\nabla_a\Phi(a,t)]. \tag{7.62}$$

En utilisant la propriété de la trace nous obtenons

$$(\det(\nabla\Phi(a,t)))_t = \det(\nabla\Phi(a,t))\operatorname{div}(u)(\Phi(a,t),t). \tag{7.63}$$

Il ne nous reste plus qu'a calculer la dérivée du troisième terme $|[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)|$. En utilisant la propriété $|v|_t = v_t\cdot\frac{v}{|v|}$ valable pour un vecteur v

$$|[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)|_t = (([\nabla\Phi(a,t)]^{-T})_t n_0(a))\cdot\frac{[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)}{|[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)|}.$$

En utilisant la dérivée de l'inverse d'une matrice $(A^{-1})'(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)$ et (7.62)

$$([\nabla\Phi(a,t)]^{-1})_t = -[\nabla\Phi(a,t)]^{-1}[\nabla\Phi(a,t)]_t[\nabla\Phi(a,t)]^{-1} = -[\nabla\Phi(a,t)]^{-1}[\nabla u](\Phi(a,t),t).$$

Nous obtenons donc avec (7.58)

$$\begin{aligned} |[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)|_t &= -\left(([\nabla u]^T(\Phi(a,t),t)\,\frac{[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)}{|[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)|}\right)\cdot[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a) \\ &= -\left([\nabla u](\Phi(a,t),t)\;n(\Phi(a,t))\right)\cdot n(\Phi(a,t))\;|[\nabla\Phi(a,t)]^{-T}n_0(a)|. \end{aligned}$$

Donc après avoir fait le changement de variable $x = \Phi(a,t)$ et utilisé $\mathrm{div}(fu) = f\,\mathrm{div}(u) + u\cdot\nabla f$ nous obtenons la formule de Reynolds surfacique annoncée. Dans les parties concernées nous mettrons ce résultat sous d'autres formes.

Bibliographie

[1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

[2] G. Allaire. *Conception optimale de structures*. no 58 Springer, 2006.

[3] D. M. Anderson, G.B. Mc Fadden, and A.A. Wheeler. Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech*, 30 :39–65, 1998.

[4] J. Beaucourt, F. Rioual, T. Séon, T. Biben, and C. Misbah. Steady to unsteady dynamics of a vesicle in a flow. *Physical Review E*, 69(1) :011906, 2004.

[5] T. Biben and C. Misbah. Tumbling of vesicles under shear flow within an advected field approach. *Physical Review E*, 67 :031908, 2003.

[6] C. Bost. *Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'intéractions fluide-structure*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2008.

[7] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and C. Zemach. A continium method for modeling surface tension. *J. Comp. Phys.*, 100 (2) :335–354, 1992.

[8] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Collection Sciences Sup , Dunod, 1994.

[9] A. Cheng, D. Coutand, and S. Shkoller. Navier-stokes equations interacting with a nonlinear elastic biofluid shell. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol 39 :742–800, 2007.

[10] A. Chorin. Numerical simulation of the navier-stokes equations. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.

[11] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity Vol I, Three dimensional elasticity*. Volume 20 of Studies in Mathematics and its Applications, 1994.

[12] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity Vol II, Theory of plates*. Volume 27 of Studies in Mathematics and its Applications. North Holland publishing Co. Amsterdam, 1997.

[13] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity Vol III, Theory of shells*. Volume 29 of Studies in Mathematics and its Applications. North Holland publishing Co. Amsterdam, 2000.

[14] G.-H Cottet and E. Maitre. A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid-structure interaction problems. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 338 :581–586, 2004.

[15] G.-H Cottet and E. Maitre. A level-set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol 16, No. 3 :415–438, 2006.

[16] G.-H. Cottet, E. Maitre, and T. Milcent. Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *M2AN*, 42 :471–492, 2008.

[17] D. Coutand and S. Shkoller. Motion of an elastic solid inside of an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 176 (1) :25–102, 2005.

[18] K. Deckelnick, G. Dziuk, and C.M. Elliott. Computation of geometric partial differential equations and mean curvature flow. *Acta numerica*, Cambridge University Press :139–232, 2005.

[19] M.P. do Carmo. *Differential geometry of Curves and Surfaces*. Pearson Education, 1976.

[20] J. Donea, S. Guiliani, and J.P. Halleux. An arbitrary lagrangian eulerian finite element method for transcient dynamics fluid structure interaction. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol 33 :689–723, 1982.

[21] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 1998.

[22] L.C. Evans and R. Gariepy. *Mesure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.

[23] M. Fernandez, J.-F. Gerbeau, and C. Grandmont. A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *Rapport de recherche INRIA n˚5700*, 2005.

[24] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Springer, 1982.

[25] C. Galusinski and P. Vigneaux. Level set method and stability condition for curvature-driven flows. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, Vol 344 no 11 :703–708, 2007.

[26] C. Grandmont and Y. Maday. Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem. *M2AN*, Vol 34 no 3 :609–636, 2000.

[27] J.-L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 195 :6011–6045, 2006.

[28] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes, une analyse géométrique*. Mathématiques et applications Springer no 48, 2005.

[29] J. Lemoine. On non-homogeneous viscous incompressible fluids. existence of regular solutions. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 38, 3 :697–715, 1997.

[30] F.-H Lin, C. Liu, and P. Zhang. On hydrodynamics of viscoelastic fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. LVIII :1–35, 2005.

[31] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics volume 1 : incompressible models*. Oxford lecture series in mathematics and its applications, 3, 1996.

[32] X.-D Liu, S. Osher, and T.Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 126 :200–212, 1994.

[33] E. Maitre, T. Milcent, G-H. Cottet, A. Raoult, and Y. Usson. Applications of level set methods in computational biophysics. *Math. Comput. Model.*, a paraître, 2008.

[34] A.J. Majda and A.L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flows*. Cambridge texts in applied mathematics, 2002.

[35] B. Maury and O. Pironneau. Characteristics ale method for unsteady free surface flows with surface tension. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, vol 76, Suppl. 2 :613–614, 1996.

[36] A. Miranville and R. Temam. *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*. Scopos 18 Springer, 2003.

[37] C. Misbah. Vacillating breathing and tumbling of vesicles under shear flow. *Physical Review Letters*, 96(2) :028104, 2006.

[38] S. Osher and R. Fedkiw. *Level set methods and dynamics implicit surfaces*. vol 153 Applied mathematical sciences, 2003.

[39] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependant speed, algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comp. Phys.*, 79 :12–49, 1988.

[40] C.S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, pages 1–39, 2000.

[41] J.A. Sethian, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comp. Phys.*, 114 :146–159, 1994.

[42] J. Simon. Compact sets in the space $l^p(0,t,b)$. *Ann. Mat. Pur. Appl*, 146 (4) :65–96, 1987.

[43] J. Simon. Différentiation de problèmes aux limites par rapport au domaine. *Cours Université de Seville http ://math.univ-bpclermont.fr/ simon/pagePubs.html*, 1991.

[44] V.A. Solonnikov. Estimates for solutions of non stationary navier-stokes equations. *J. Soviet. Math.*, 8 (4) :467–529, (1977).

[45] D. Steigmann, E. Baesu, E. Rudd, and J. Belak. On the variational theory of cell-membrane equilibria. *Interfaces and Free Boundaries*, 5 :357–366, 2003.

[46] M. Sy, D. Bresch, F. Guillen-Gonzalez, J. Lemoine, and M.A. Rodriguez-Bellido. Local strong solution for the incompressible korteveg model. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I, 342 :169–174, 2006.

[47] R. Temam. Une méthode d'approximation de la solution des équations de navier-stokes. *Bull. Soc. Math. France*, 98 :115–152, 1968.

[48] A.K. Tornberg and B. Engquist. Numerical approximations of singular source terms in differential equations. *J. Comp. Phys.*, 200 :462–488, 2004.

[49] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.

[50] M. Tucsnack, J. San Martin, and V. Starovoitov. Global weak solutions for the two dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 161 :113–147, 2002.

[51] T.J. Willmore. *Total curvature in riemannian geometry*. Ellis Horwood Series Mathematics and its applications, 1982.

[52] S. Xu and Z.J. Wang. Systematic derivation of jump conditions for the immersed interface method in three-dimensional flow simulation. *SIAM. J. Sci. Comput.*, Vol 27, no 6 :1948–1980, 2006.