

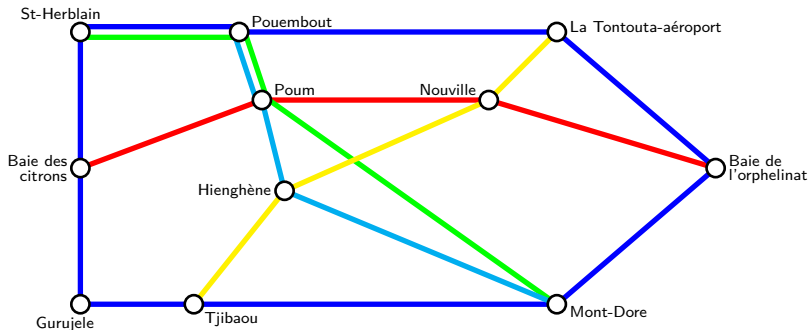
Autour de problèmes de plongements de graphes

Laurent Beaudou

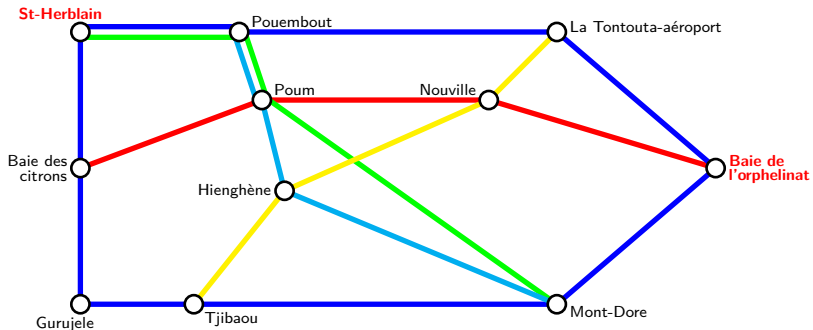
Institut Fourier
Université Joseph Fourier
Grenoble, France

Directeur de thèse : Sylvain Gravier

Méτρο nouméén



Méto nouméen

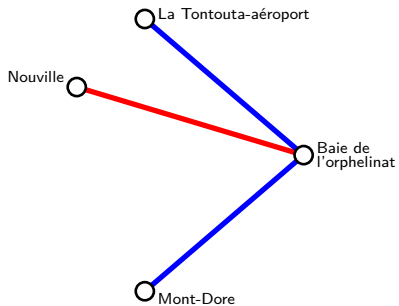


Métro nouméen

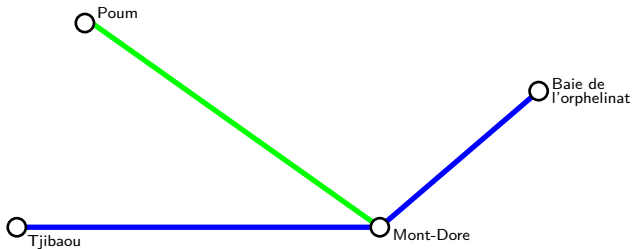
Station : Hienghène

Quai	Prochain arrêt
1	Nouvelle
2	Poum
3	Tjibaou
4	Mont-Dore

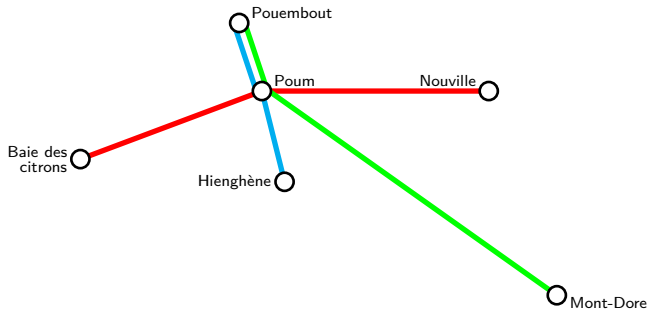
Métro nouméen



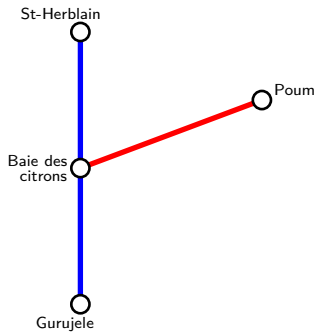
Méto nouméén



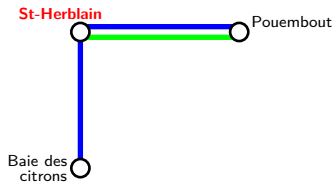
Métro nouméen



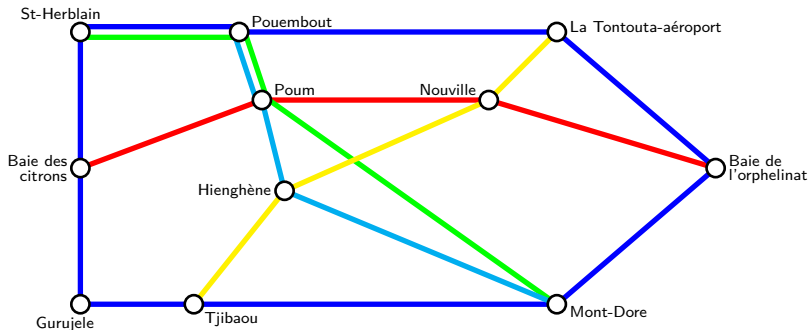
Métro nouméen



Métro nouméen

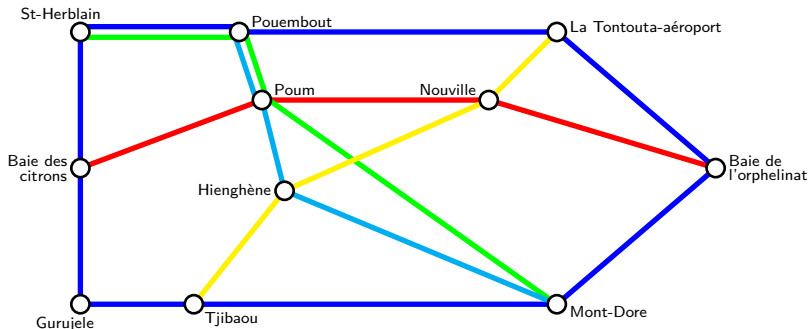


Méτρο nouméén

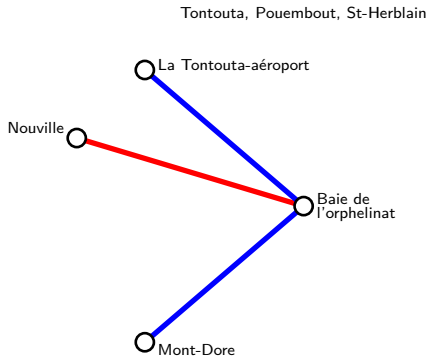


Méτρο nouméén

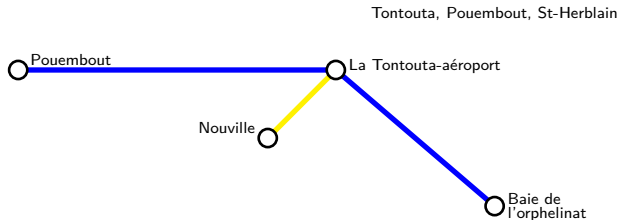
Tontouta, Pouembout, St-Herblain



Métro nouméen



Métro nouméen

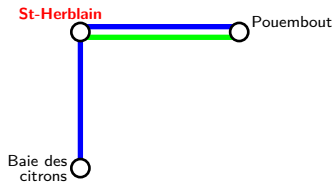


Méτρο nouméén

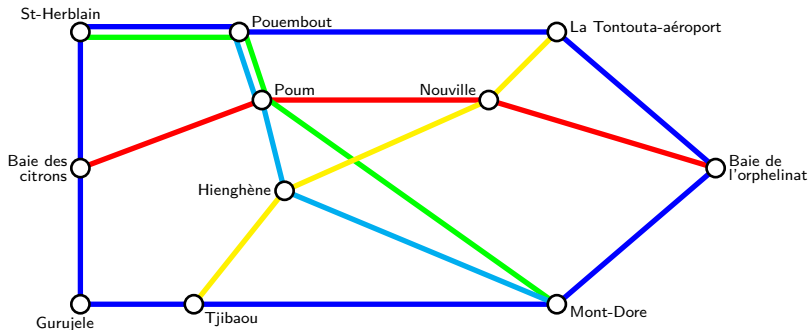


Métro nouméen

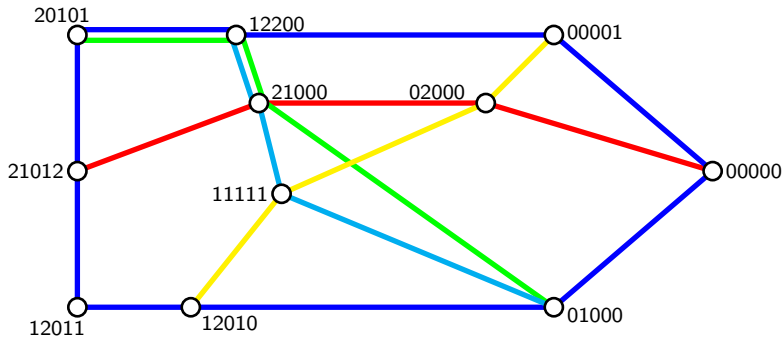
Tontouta, Pouembout, St-Herblain



Méτρο nouméén

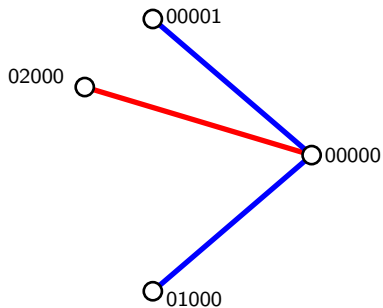


Métro nouméen



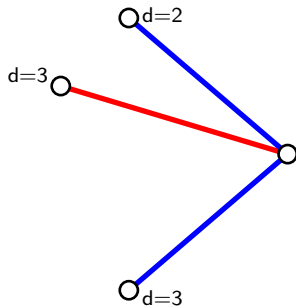
Méto nouméen

20101
○

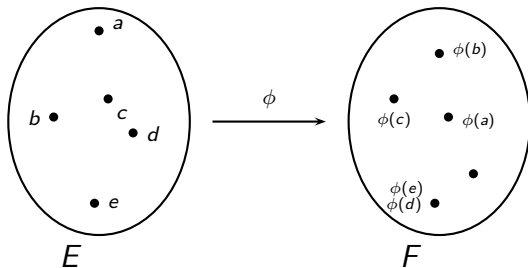


Métro nouméen

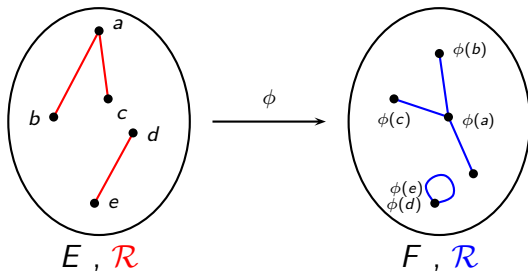
20101
○



Plongement



Plongement



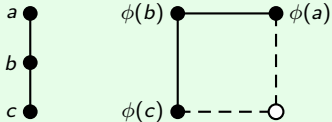
Plongements de graphes

Combinatoire : sommets vers sommets

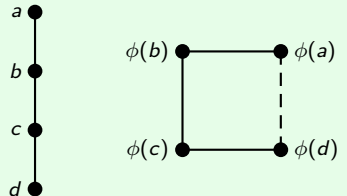
Plongements de graphes

Combinatoire : sommets vers sommets

P_2 dans C_4



P_3 dans C_4



Plongements de graphes

Topologique : sommets et arêtes vers \mathbb{R}^2 et courbes

$$\{v_1 \dots v_4\} \cup \{e_1 \dots e_6\}$$

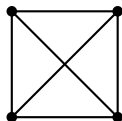
	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1	1	0	0
e_2	1	0	1	0
e_3	1	0	0	1
e_4	0	1	1	0
e_5	0	1	0	1
e_6	0	0	1	1

Plongements de graphes

Topologique : sommets et arêtes vers \mathbb{R}^2 et courbes

$\{v_1 \dots v_4\} \cup \{e_1 \dots e_6\}$

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1	1	0	0
e_2	1	0	1	0
e_3	1	0	0	1
e_4	0	1	1	0
e_5	0	1	0	1
e_6	0	0	1	1

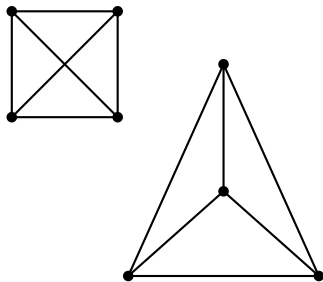


Plongements de graphes

Topologique : sommets et arêtes vers \mathbb{R}^2 et courbes

$\{v_1 \dots v_4\} \cup \{e_1 \dots e_6\}$

	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1	1	0	0
e_2	1	0	1	0
e_3	1	0	0	1
e_4	0	1	1	0
e_5	0	1	0	1
e_6	0	0	1	1



Quelles questions ?

Décision

(E, \mathcal{R}_E) se plonge-t-il dans (F, \mathcal{R}_F) ?

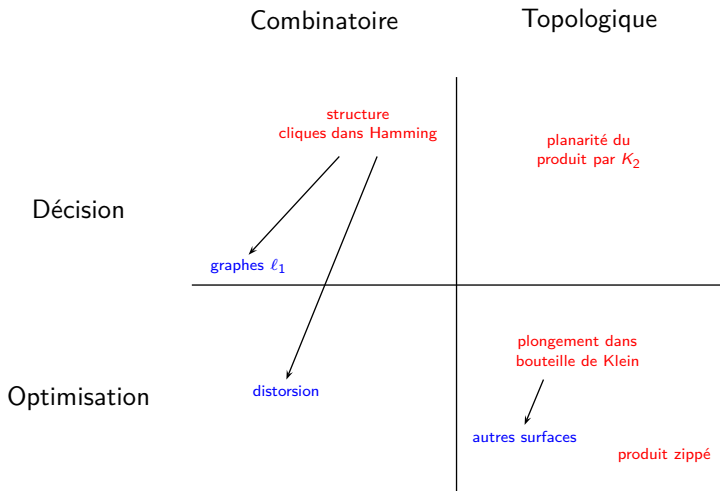
- algorithmes (constructifs ou non)
- caractérisations structurelles

Optimisation

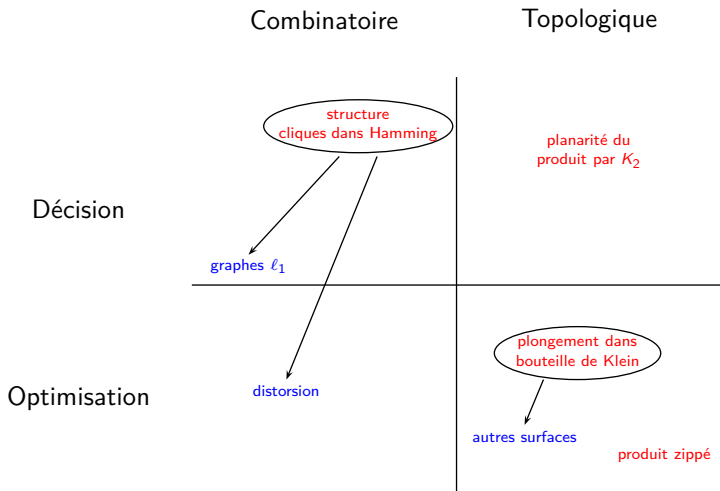
Définir une fonction de coût

- minimiser le coût du plongement
- si non-plongeable, minimiser la non-plongeabilité

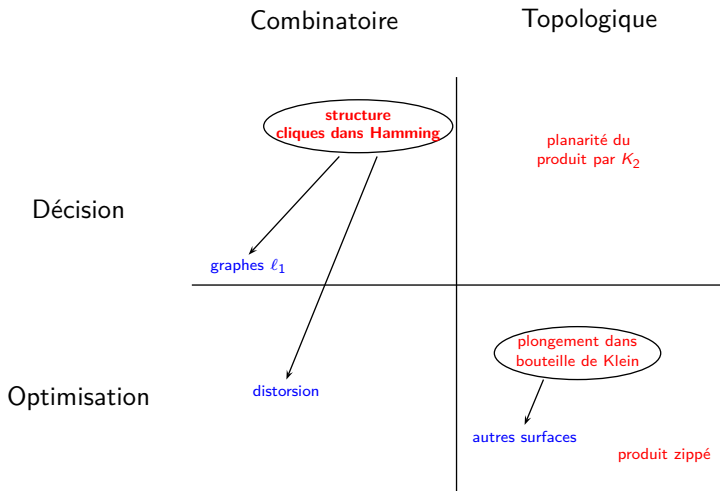
Cadastre



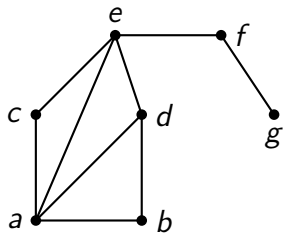
Cadastre



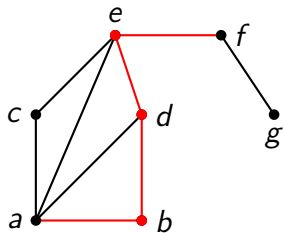
Cadastre



Métrie de graphe

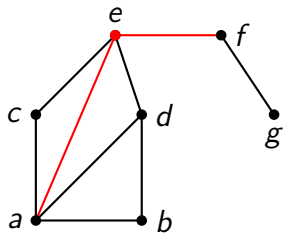


Métrie de graphe



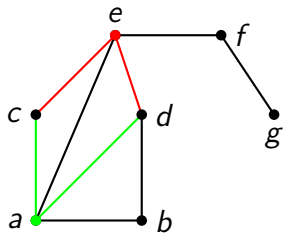
- af -chemin

Métrie de graphe



- af -chemin
- af -géodésique

Métrie de graphe



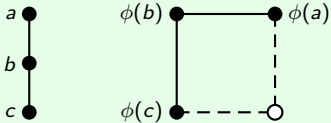
- af -chemin
- af -géodésique
- non-unique

Métrie de graphe

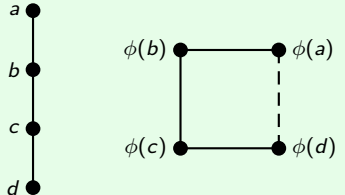
H isométriquement plongeable dans G

$$d_H(u, v) = d_G(\phi(u), \phi(v))$$

P_2 dans C_4



P_3 dans C_4

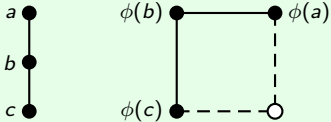


Métrie de graphe

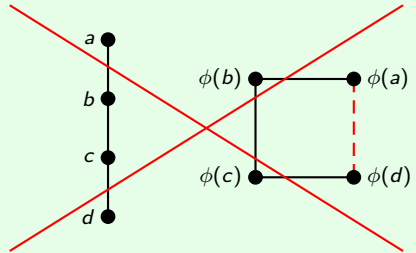
H isométriquement plongeable dans G

$$d_H(u, v) = d_G(\phi(u), \phi(v))$$

P_2 dans C_4

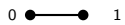


P_3 dans C_4



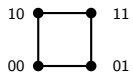
0 ●

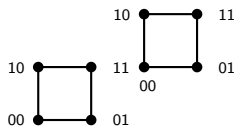
0 ● ● 1

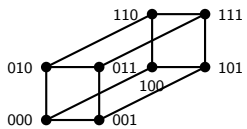


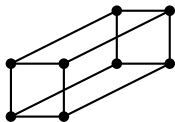
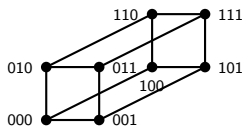
0 ● — ● 1

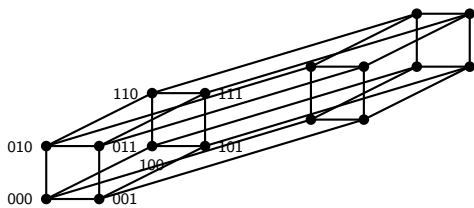
0 ● — ● 1











Métrie de graphe

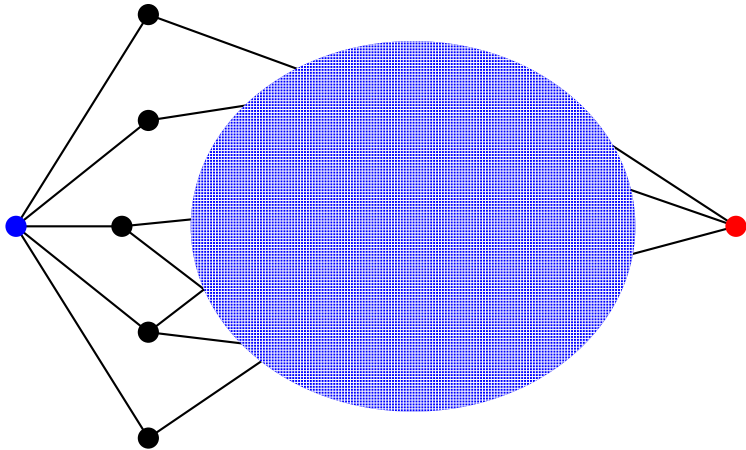
H isométriquement plongeable dans G

$$d_H(u, v) = d_G(\phi(u), \phi(v))$$

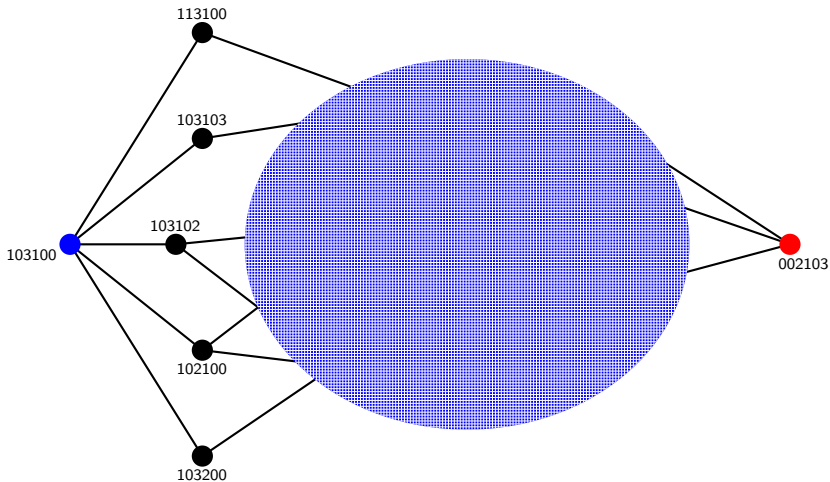
cube partiel : isométriquement plongeable dans un hypercube

graphe de Hamming partiel : isométriquement plongeable dans un graphe de Hamming

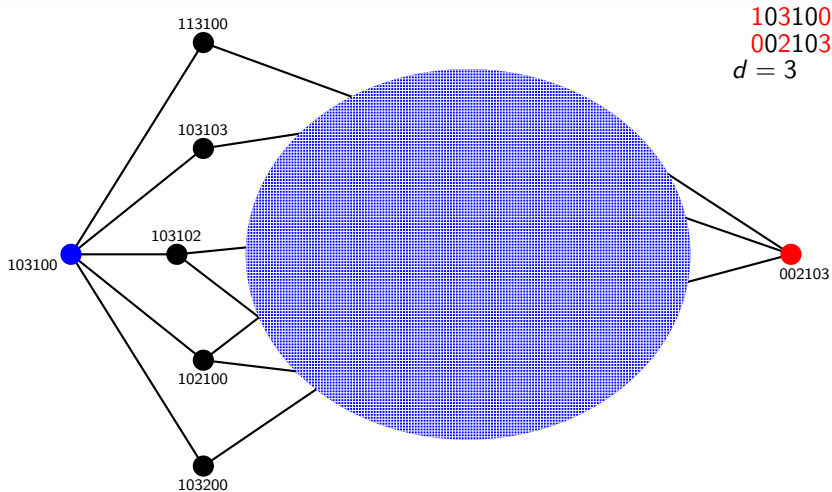
Pourquoi Hamming ?



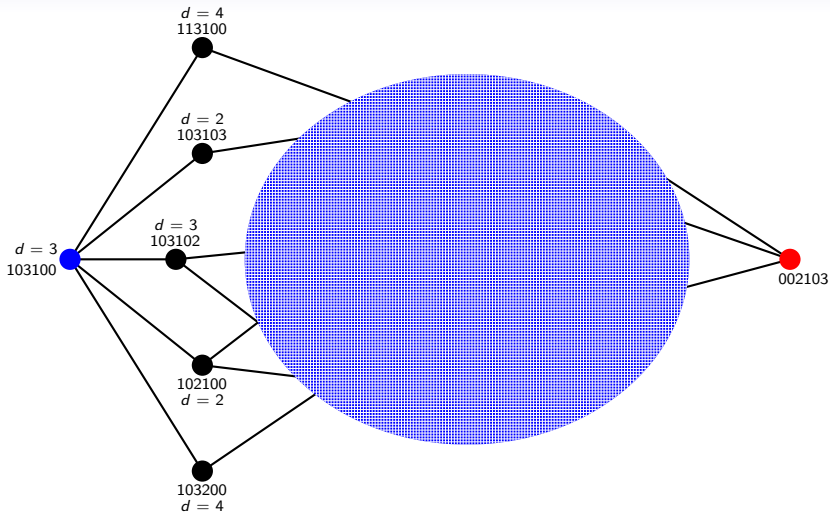
Pourquoi Hamming ?



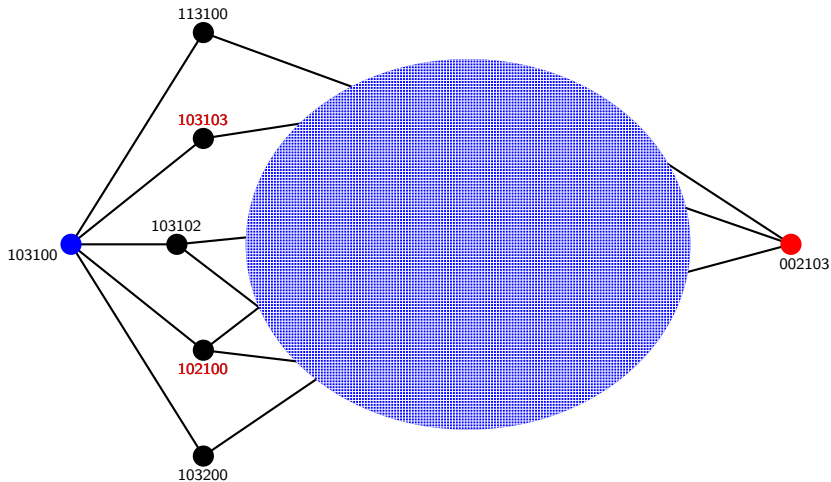
Pourquoi Hamming ?



Pourquoi Hamming ?



Pourquoi Hamming ?



Personnages principaux

Djoković, 1973

R. Graham et H.O. Pollack, 1971

V. Chepoi et C. Tardif, 1994

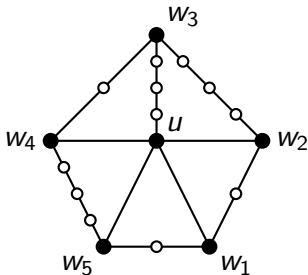
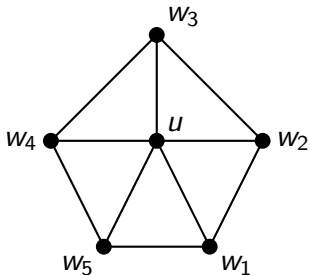
B. Brešar et S. Klavžar, 2002

S. Gravier, S. Klavžar et M. Mollard, 2003

Ce travail, 2007

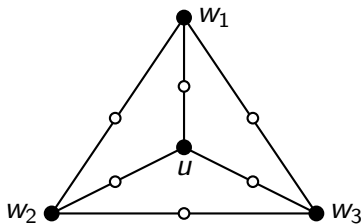
Subdivision de graphe

Ajout de sommets sur les arêtes



Subdivision de graphe

$S(G)$: chaque arête subdivisée une fois

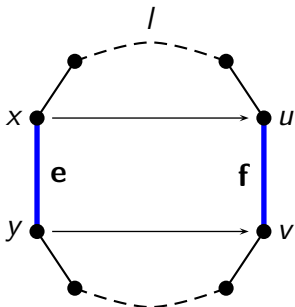


$S(K_4)$

Caractérisations précédentes

relation de Djoković-Winkler : $e = xy$ et $f = uv$, $e \Theta f$ si $d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u)$.

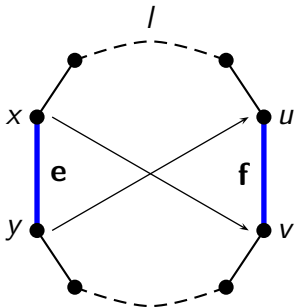
- C cycle pair
- e, f opposées
- alors $e \Theta f$



Caractérisations précédentes

relation de Djoković-Winkler : $e = xy$ et $f = uv$, $e \Theta f$ si $d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u)$.

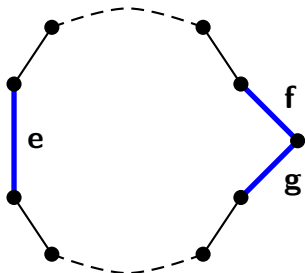
- C cycle pair
- e, f opposées
- alors $e \Theta f$



Caractérisations précédentes

relation de Djoković-Winkler : $e = xy$ et $f = uv$, $e \Theta f$ si $d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u)$.

- C cycle impair
- f, g en face de e
- alors $e \Theta f$ $e \Theta g$



Caractérisations précédentes

Théorème 1 [Winkler '84]

G un graphe, c'est un graphe de Hamming partiel ssi $\Theta = \Theta^*$



Winkler, Isometric embeddings in products of complete graphs, *Discrete Appl. Math.*, 7 (1984), 221–225.

Théorèmes obtenus

Théorème 2 [B., Gravier, Meslem '08]

G une subdivision de K_n , G est un cube partiel ssi $G \simeq S(K_n)$ ou G a un sommet universel et est biparti.

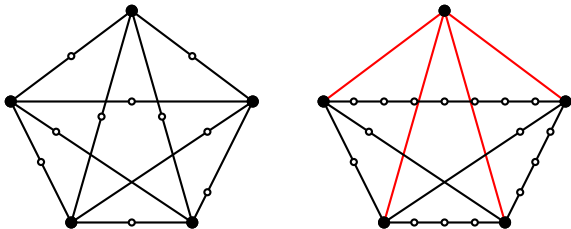


B., Gravier, Meslem, Isometric embeddings of subdivided complete graphs in the hypercube, *SIAM J. Discrete Math.*, 22 (2008).

Théorèmes obtenus

Théorème 2 [B., Gravier, Meslem '08]

G une subdivision de K_n , G est un cube partiel ssi $G \simeq S(K_n)$ ou G a un sommet universel et est biparti.



Théorèmes obtenus

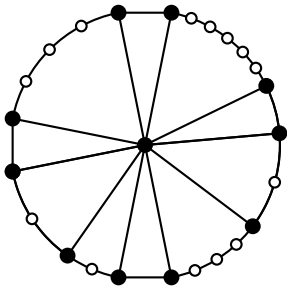
Théorème 3 [B., Gravier, Meslem '09]

G une clique subdivisée, c'est un graphe de Hamming partiel ssi c'est un cube partiel ou c'est la clique K_n .
+ caractérisation pour les roues subdivisées.



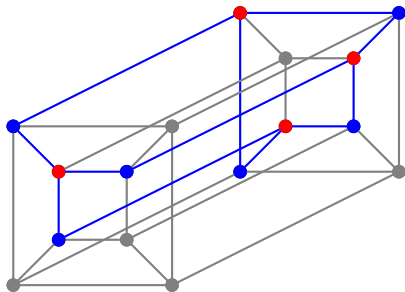
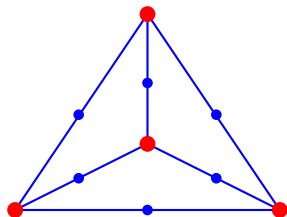
B., Gravier, Meslem, Subdivided graphs as isometric subgraphs of Hamming graphs, *European J. Combin.*, 30 (2009).

Théorèmes obtenus



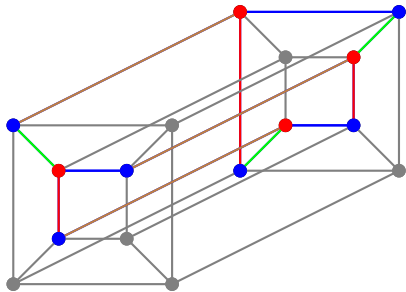
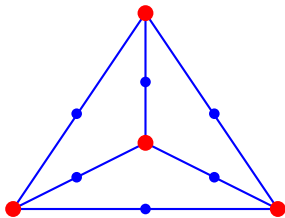
Éléments de preuve

Graphe de Hamming partiel \Rightarrow coloration des arêtes.



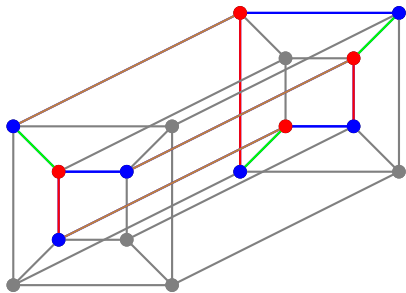
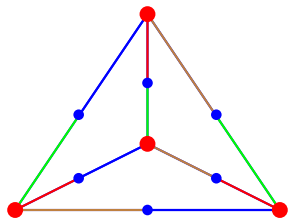
Éléments de preuve

Graphe de Hamming partiel \Rightarrow coloration des arêtes.



Éléments de preuve

Graphe de Hamming partiel \Rightarrow coloration des arêtes.



Éléments de preuve

Proposition 4 [Wilkeit '90]

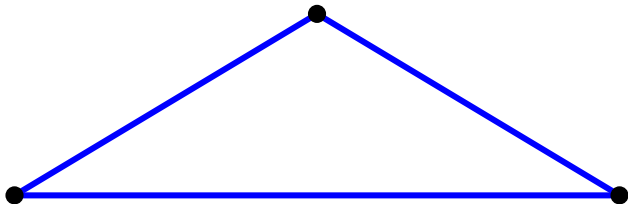
G Hamming partiel, alors G biparti $\Rightarrow G$ cube partiel.



Wilkeit, Isometric embeddings in Hamming graphs,
J. Combin. Theory Ser. B, 50 (1990) 179–197.

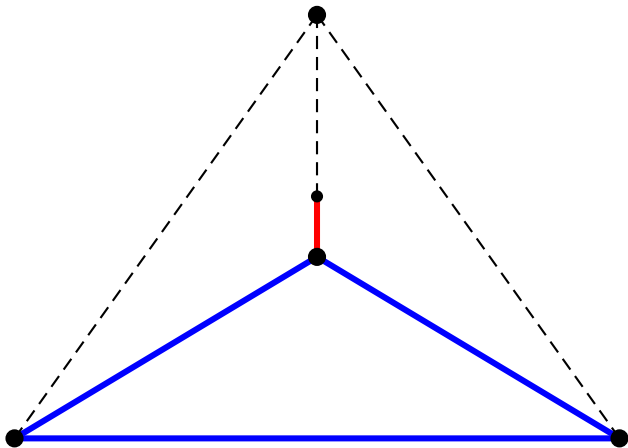
Éléments de preuve

Si G n'est pas biparti, alors il contient un K_3 .



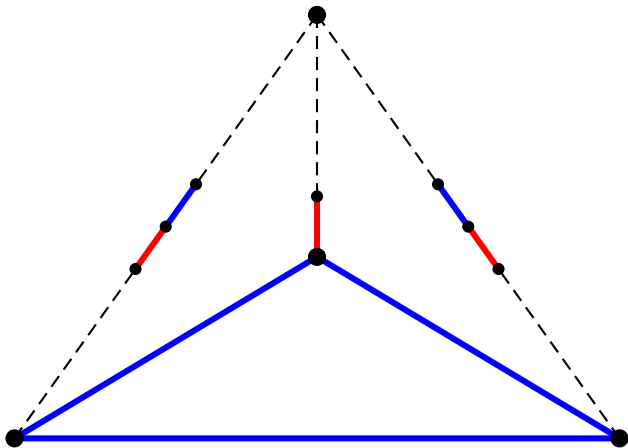
Éléments de preuve

Si G n'est pas biparti, alors il contient un K_3 .



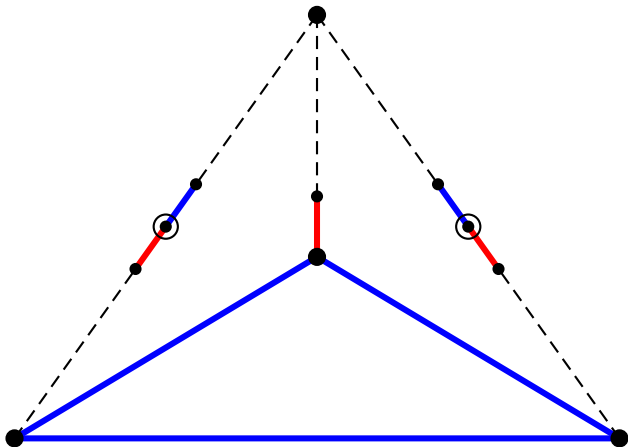
Éléments de preuve

Si G n'est pas biparti, alors il contient un K_3 .

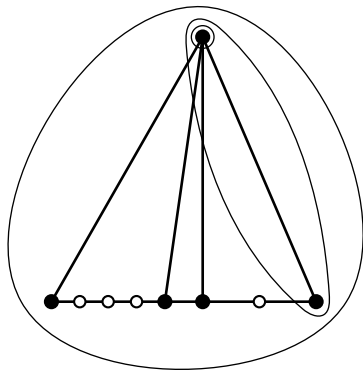


Éléments de preuve

Si G n'est pas biparti, alors il contient un K_3 .



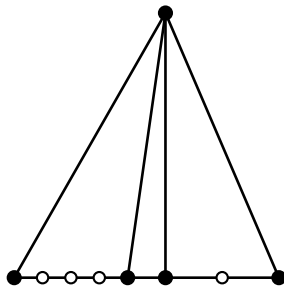
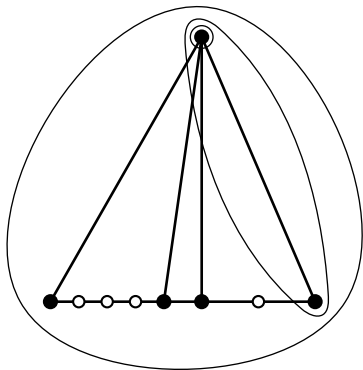
Outil de construction



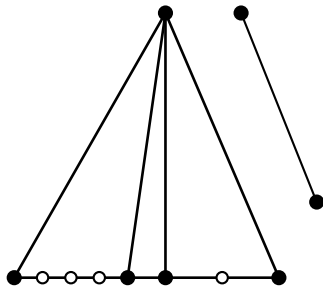
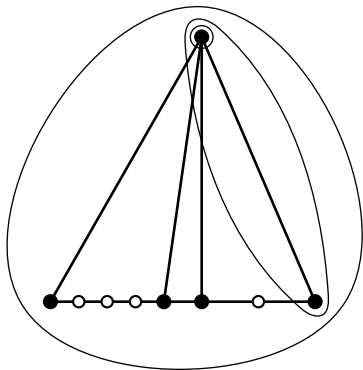
Expansion

- sacs isométriques
- intersections non-vides
- couverture du graphe

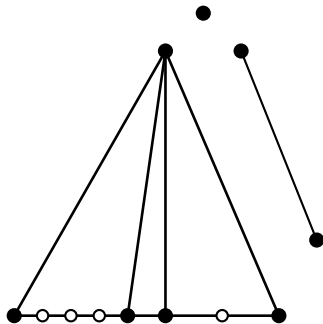
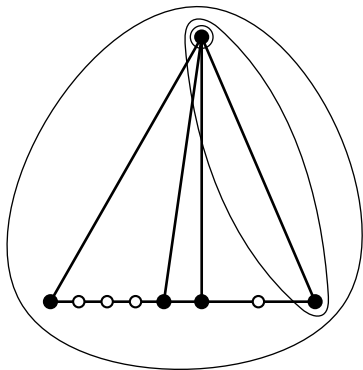
Outil de construction



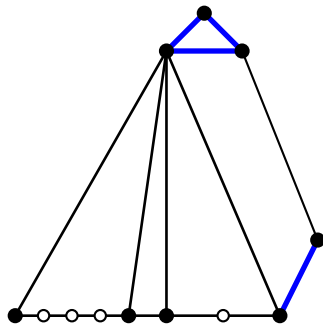
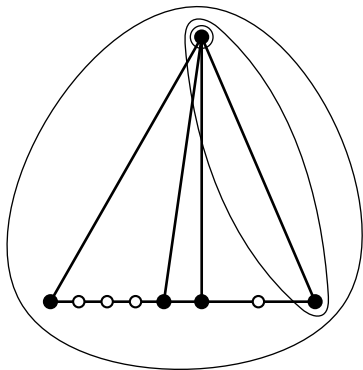
Outil de construction



Outil de construction



Outil de construction



Outil de construction

Théorème 5 [Chepoi '88]

G est un graphe de Hamming partiel ssi il est obtenu à partir de K_1 par une séquence d'expansions.



Chepoi, Isometric subgraphs of Hamming graphs and d -convexity, *Cybernet. Systems Anal.*, 1 (1988), 6–11.

Perspectives

Pas de caractérisation par mineur exclu

Perspectives

Une caractérisation par sous-graphes isométriques exclus

Observation

Il existe une famille \mathcal{F} de graphes telle qu'un graphe G est un cube partiel ssi aucun élément de \mathcal{F} n'est un sous-graphe isométrique de G .

Perspectives

Une caractérisation par sous-graphes isométriques exclus

Observation

Il existe une famille \mathcal{F} de graphes telle qu'un graphe G est un cube partiel ssi aucun élément de \mathcal{F} n'est un sous-graphe isométrique de G .

\mathcal{F} est-elle finie ? Peut-on caractériser facilement ses éléments ?
à subdivision près ?

Perspectives

Une caractérisation par sous-graphes isométriques exclus

Observation

Il existe une famille \mathcal{F} de graphes telle qu'un graphe G est un cube partiel ssi aucun élément de \mathcal{F} n'est un sous-graphe isométrique de G .

\mathcal{F} est-elle finie ? Peut-on caractériser facilement ses éléments ?
à subdivision près ?

Étude des graphes ℓ_1 : $\lambda d_H(u, v) = d_G(\phi(u), \phi(v))$

Perspectives

Une caractérisation par sous-graphes isométriques exclus

Observation

Il existe une famille \mathcal{F} de graphes telle qu'un graphe G est un cube partiel ssi aucun élément de \mathcal{F} n'est un sous-graphe isométrique de G .

\mathcal{F} est-elle finie ? Peut-on caractériser facilement ses éléments ?
à subdivision près ?

Étude des graphes ℓ_1 : $2d_H(u, v) = d_G(\phi(u), \phi(v))$

Perspectives

Une caractérisation par sous-graphes isométriques exclus

Observation

Il existe une famille \mathcal{F} de graphes telle qu'un graphe G est un cube partiel ssi aucun élément de \mathcal{F} n'est un sous-graphe isométrique de G .

\mathcal{F} est-elle finie ? Peut-on caractériser facilement ses éléments ?
à subdivision près ?

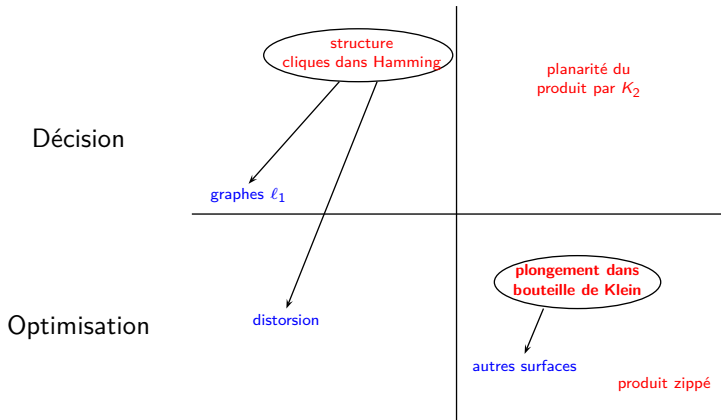
Étude des graphes ℓ_1 : $2d_H(u, v) = d_G(\phi(u), \phi(v))$

Distorsion du plongement : minimiser $\max \frac{d_H(u, v)}{d_G(\phi(u), \phi(v))}$

Cadastre

Combinatoire

Topologique



Personnages principaux

S. Lins, 1981

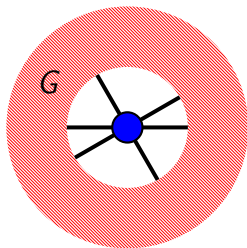
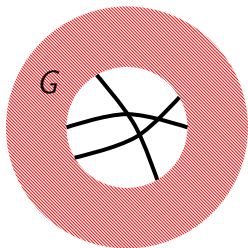
S. Lawrencenko and S. Negami, 1997

M. de Graaf and A. Schrijver, 1997

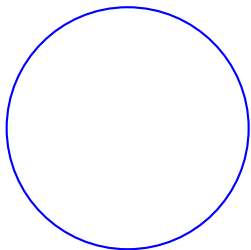
M. DeVos, B. Mohar and R. Samal, 2007

GT GraS, 2008

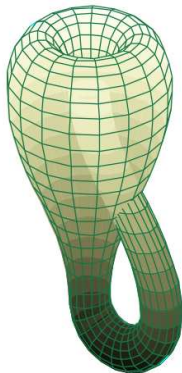
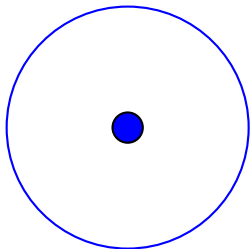
Représentation de surfaces



Représentation de surfaces



Représentation de surfaces



Une question se pose

Question

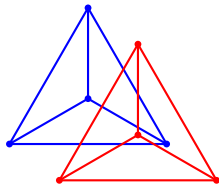
G l'union disjointe de deux graphes connexes G_1 et G_2 , Σ une surface. Est-ce que tout dessin optimal Ψ de G sur Σ laisse $\Psi|_{G_1}$ et $\Psi|_{G_2}$ disjoints ?



DeVos, Mohar and Samal, Drawing disconnected graphs on the same surface, *Open Problem Garden*, World Wide Web (2007).

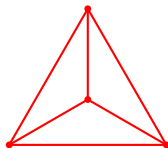
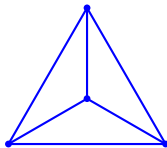
Trivial ?

(a) Plan



Trivial ?

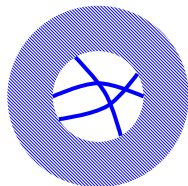
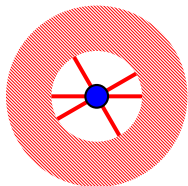
(a) Plan



Trivial ?

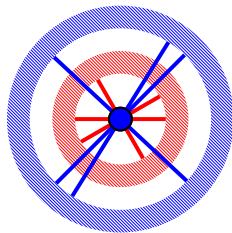
(a) Plan ✓

(b) Plan projectif



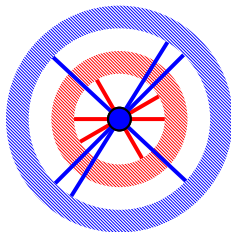
Trivial ?

- (a) Plan ✓
- (b) Plan projectif ✓
[DeVos et al.]



Trivial ?

- (a) Plan ✓
- (b) Plan projectif [DeVos et al.] ✓
- (c) Klein bottle ✓



Résultat principal

Théorème 6 [B., Gerbaud, Grappe, Palesi '09]

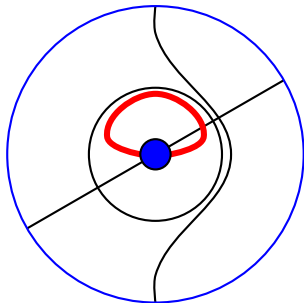
C'est vrai pour la bouteille de Klein.



B., Gerbaud, Grappe et Palesi, Drawing disconnected graphs on the Klein bottle, *Graphs Combin.*, à paraître (2009).

Courbes essentielles

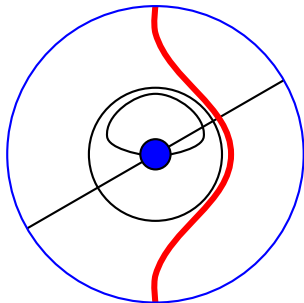
- type \mathcal{A}



Lawrencenko et Negami, Irreducible triangulations of the Klein Bottle, *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997).

Courbes essentielles

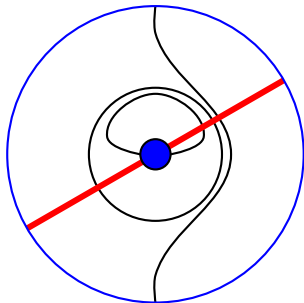
- type \mathcal{A}
- type \mathcal{B}



Lawrencenko et Negami, Irreducible triangulations of the Klein Bottle, *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997).

Courbes essentielles

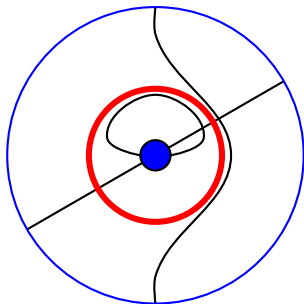
- type \mathcal{A}
- type \mathcal{B}
- type \mathcal{AB}



Lawrencenko et Negami, Irreducible triangulations of the Klein Bottle, *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997).

Courbes essentielles

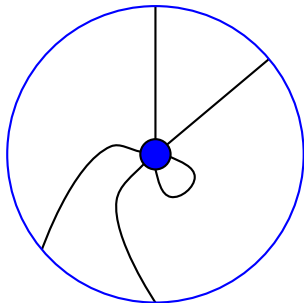
- type \mathcal{A}
- type \mathcal{B}
- type \mathcal{AB}
- type \mathcal{O}



Lawrencenko et Negami, Irreducible triangulations of the Klein Bottle, J. Combin. Theory Ser. B, 70 (1997).

Courbes essentielles

- type \mathcal{A}
- type \mathcal{B}
- type \mathcal{AB}
- type \mathcal{O}



Lawrencenko et Negami, Irreducible triangulations of the Klein Bottle, *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997).

Courbes essentielles

	A	B	AB	O
A	×		×	
B		×	×	
AB	×	×		×
O			×	

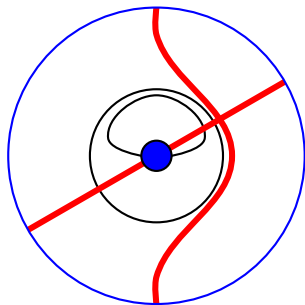


Schéma de la preuve

On se restreint d'abord aux graphes eulériens plongeables dans K

- Existence de *nombreuses* courbes essentielles [Schrijver]
- Borne inférieure sur le nombre de croisements
- Application de transformations améliorant la représentation

Généralisation aux graphes quelconques

Beaucoup de croisements

$[c]$: courbes homotopes à c

soit a une courbe de type \mathcal{A}

représentativité approchée :

$$\begin{aligned}k_{\mathcal{A}} &= \text{cr}([a], \Psi) \\ &= \min\{|\Psi \cap C| : C \text{ une courbe fermée de type } \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

Beaucoup de croisements

Théorème 7 [de Graaf, Schrijver '97]

Ψ un plongement d'un graphe eulérien dans une surface Σ .
Alors Ψ peut être décomposé en une collection de circuits I
telle que pour chaque courbe fermée c de Σ ,

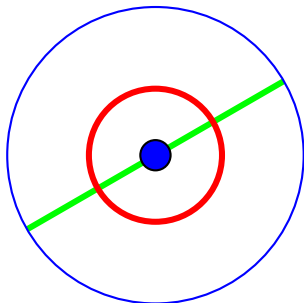
$$\text{cr}([c], \Psi) = \sum_{d \in I} \text{cr}([c], [d]).$$



de Graaf et Schrijver, *Decomposition on surfaces*,
J. Combin. Theory Ser. B, 70(1997).

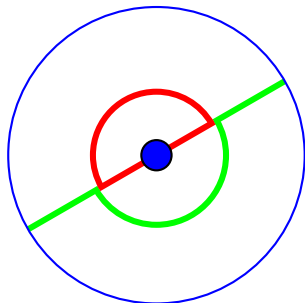
Existence des circuits appropriés

$$\mathcal{O} + \mathcal{AB} =$$



Existence des circuits appropriés

$$\mathcal{O} + \mathcal{AB} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$$



Existence des circuits appropriés

Décomposition en une famille I avec

circuits de type \mathcal{A} ou \mathcal{B} : $\min(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}}, k_{\mathcal{AB}})$

\mathcal{AB} -circuits : $\frac{1}{2}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \min(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}}, k_{\mathcal{AB}}))$

ou

\mathcal{A} -circuits : $\min(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{AB}})$

Borne inférieure

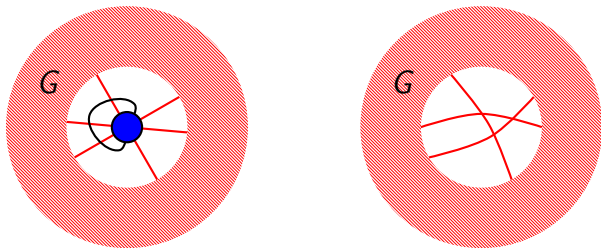
Nombre minimum de croisements :

$$\underbrace{\min(k_A + k_B, k_{AB})}_{1\text{-sc dans } G_1} * \min(h_A, h_B) + \underbrace{\frac{1}{2}(k_A + k_B - k_{AB})}_{\mathcal{AB}\text{-circuits dans } G_1} * h_{AB}$$

OU

$$\underbrace{\min(k_A, k_{AB})}_{\mathcal{A}\text{-circuits dans } G_1} * h_A$$

Transformation 1



$$\frac{k_A * (k_A - 1)}{2}$$

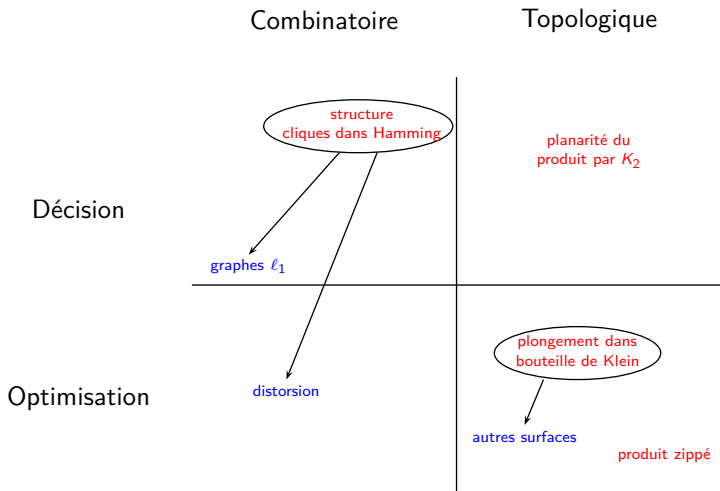
Généralisation

- plongeable eulérien \rightarrow plongeable : doubler les arêtes
- plongeable \rightarrow graphe quelconque : ajout de sommet sur les croisements

Perspectives

- Cette méthode ne se généralise pas aux autres surfaces.
- Que faire pour les autres surfaces ? (tore résolu par Vancouver)
- Trois graphes connexes ?

Cadastre



Productions

- B., Gravier et Meslem, [Isometric embeddings of subdivided complete graphs in the hypercube](#), *SIAM J. Discrete Math.*, Volume 22 (2008)
- B., Gravier et Meslem, [Subdivided graphs as isometric subgraphs of Hamming graphs](#), *European J. Combin.*, Volume 30 (2009)
- B., [Se repérer sans occuper trop d'espace](#), vulgarisation
- B., Gerbaud, Grappe et Palesi, [Drawing disconnected graphs on the Klein bottle](#), *Graphs Combin.*, à paraître
- B., Dorbec, Gravier et Jha, [On planarity of direct product of multipartite complete graphs](#), *Discrete Math. Algorithms Appl.*, Volume 1 (2009)
- B. et Bokal, [On the sharpness of some results relating cuts and crossing numbers](#), soumis

Productions

B., Gravier et Meslem, [Isometric embeddings of subdivided complete graphs in the hypercube](#), *SIAM J. Discrete Math.*, Volume 22 (2008)

B., Gravier et Meslem, [Subdivided graphs as isometric subgraphs of Hamming graphs](#), *European J. Combin.*, Volume 30 (2009)

B., [Se repérer sans occuper trop d'espace](#), vulgarisation

B., Gerbaud, Grappe et Palesi, [Drawing disconnected graphs on the Klein bottle](#), *Graphs Combin.*, à paraître

B., Dorbec, Gravier et Jha, [On planarity of direct product of multipartite complete graphs](#), *Discrete Math. Algorithms Appl.*, Volume 1 (2009)

B. et Bokal, [On the sharpness of some results relating cuts and crossing numbers](#), soumis

« Fichi e mòglia si pónu sceglie. »

–*Proverbe corse*