

# INTÉGRATEURS GÉOMÉTRIQUES

## APPLICATION À LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

**Marx Chhay**

Thèse dirigée par **Aziz Hamdouni**  
Co-encadrée par **Pierre Sagaut**

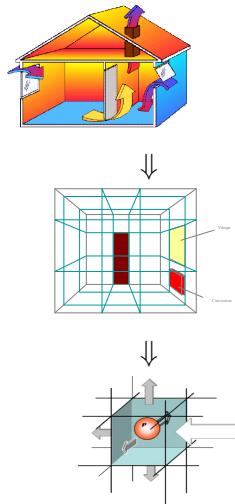
16 décembre 2008  
LEPTIAB - Université de La Rochelle

# Motivation

Un des thèmes de recherche du  
LEPTIAB:

**Étudier les phénomènes de  
transferts de masse et de chaleur  
appliqués au bâtiment**

- Méthode du nœud singulier
- Modèle zonal
- Maillage grossier



# Programme scientifique

- De la modélisation géométrique des phénomènes physiques
- À la construction des méthodes numériques adaptées



D. Razafindralandy

Contribution à l'étude mathématique et numérique de la simulation des grandes échelles.

*Thèse à Université de La Rochelle dirigée par A. Hamdouni, 2005.*



M. Oberlack

A unified approach for symmetries in plane parallel turbulent shear flows.

*Journal of Fluid Mechanics, 427 (299–328) 2001*



B. Lindgren, J. Österlund, A. Johansson

Evaluation of scaling laws derived from lie group symmetry methods in zero-pressure-gradient turbulent boundary layers.

*Journal of Fluid Mechanics, 502(127–152), 2004.*



D. Razafindralandy, A. Hamdouni, M. Oberlack

Analysis and development of subgrid turbulence models preserving the symmetry properties of the Navier–Stokes equations.

*European Journal of Mechanics B/Fluids, 26 (531–550), 2007.*

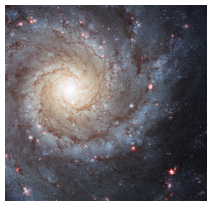
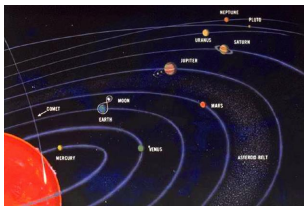
# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Intégrateurs symplectiques et variationnels
- 3 Schémas invariants
- 4 Conclusion et Perspectives



# Systemes hamiltoniens

Les systemes dynamiques hamiltoniens:



- Champ de vecteur  $\leftrightarrow$  gradient symplectique du Hamiltonien  $H$   
 $\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{J}\nabla H(\mathbf{z})$  avec  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{z} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})^T$ .
- Le flot hamiltonien préserve la forme symplectique:  
 $\omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$
- Conservation du Hamiltonien (cas autonome):  $\frac{dH}{dt} = 0$

# Schémas symplectiques

Schéma symplectique:

- Flot numérique conserve la forme symplectique discrète
- Très bonne conservation du Hamiltonien sur de long temps d'intégration pour une méthode d'ordre  $r$ :

$$H^n = H_0 + O(\Delta t^r) \text{ pour } n\Delta t \leq e^{\frac{\gamma}{2\Delta t}} \text{ et } \gamma > 0$$

Grande littérature sur le sujet:



P. J. Channell, C. Scovel

Symplectic integration of Hamiltonian systems.  
*Nonlinearity*, 3 (231–259), 1990.



E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner  
Solving Ordinary Differential Equations I.  
*Springer-Verlag*, 1993 .



J. M. Sanz-Serna, M. P. Calvo  
Numerical Hamiltonian Systems.  
*Chapman and Hall*, (London), 1994.



M. P. Calvo, E. Hairer

Accurate long-term integration of dynamical systems.  
*Journal of Applied Mathematics*, 18 (95-105), 1995.

# Application: hydrodynamique bidimensionnelle

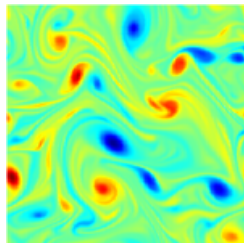
Modèle de  $N$  vortex ponctuels  
Formulation hamiltonienne:

$$\gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \gamma_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

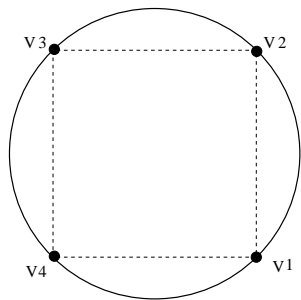
où

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_i^N \sum_{j \neq i}^N \gamma_i \gamma_j \ln |r_{ij}|$$

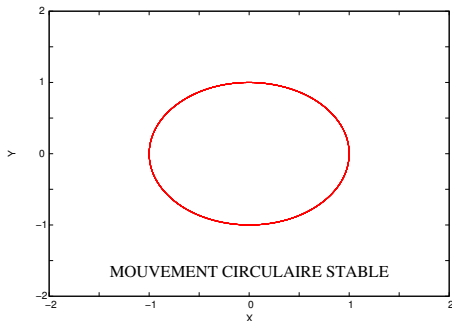
$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$



# Dynamique qualitative de $N = 4$ vortex

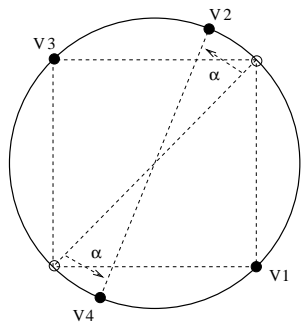


Configuration initiale  
carrée des vortex

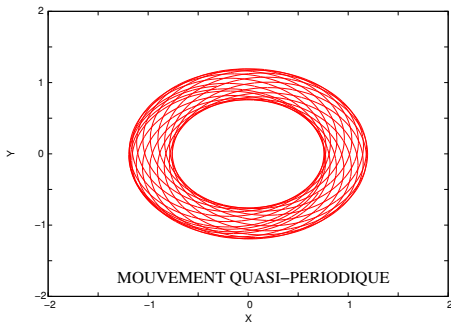


Mouvement périodique stable

# Dynamique qualitative de $N = 4$ vortex

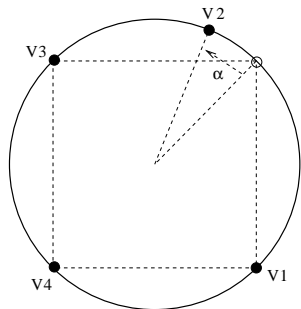


Configuration initiale  
préservant la symétrie  
discrète

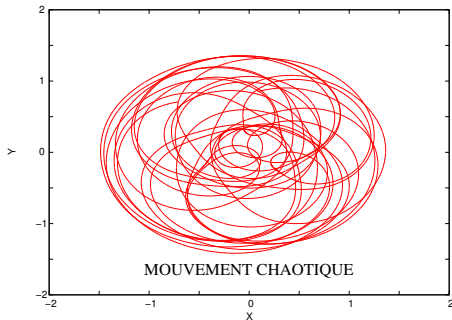


Mouvement quasi-périodique

# Dynamique qualitative de $N = 4$ vortex



Configuration initiale  
brisant la symétrie  
discrète



Mouvement chaotique

# Dynamique qualitative de $N = 4$ vortex

## Problématique

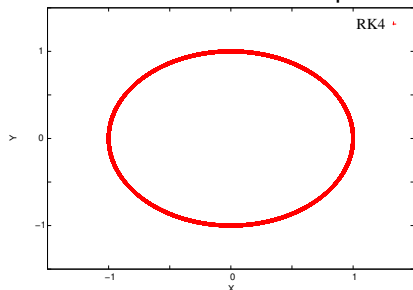
Comment les méthodes d'intégrations traduisent ce comportement?

Méthodes d'intégration:

- Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)
- Runge-Kutta Symplectique d'ordre 4 (RKS4)

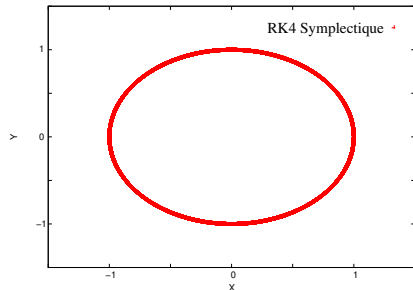
# Dynamique qualitative

La configuration initiale est la configuration de référence carré associée à un mouvement périodique



RK4 classique

$T = 5 \times 10^5$  itérations.  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$

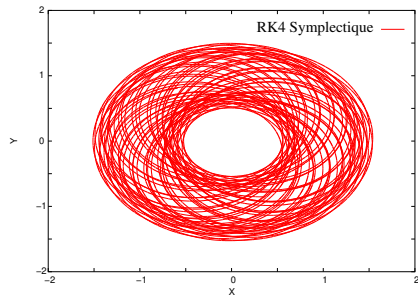
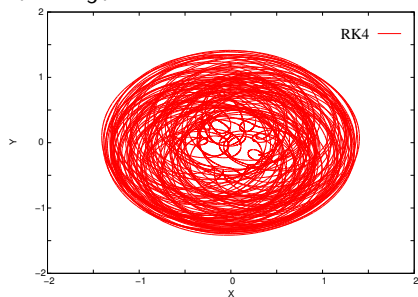


RK4 symplectique (RKS4)



## Dynamique qualitative

La configuration initiale correspond à une perturbation symétrique ( $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ) associée à un mouvement quasi-périodique.



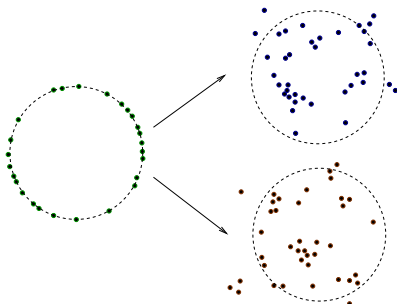
RK4 classique

RK4 symplectique (RKS4)

$T = 5 \times 10^5$  itérations.  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$

# Dynamique tourbillonnaire de $N = 250$ vortex

E. Bécu et V. Pavlov [1] calculent numériquement la configuration du système en imposant la conservation du Hamiltonien.



Mais il peut exister plusieurs configurations possibles associées au même Hamiltonien!

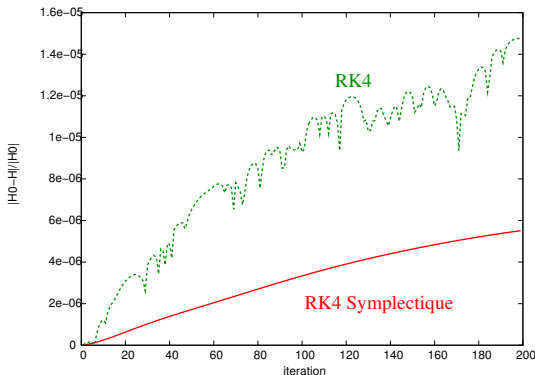


E. Bécu and V. Pavlov

*Evolution of localized vortices in the presence of stochastic perturbations.*  
*Nonlinear Processes in Geophysics* 13 (41-51) 2006

## Dynamique tourbillonnaire

Conservation du Hamiltonien pour les intégrateurs RK4 classique et RKS4 symplectique.



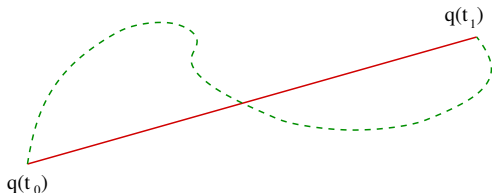
$N = 250$  tourbillons ponctuels pour 200 itérations.  $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$ .

# Systèmes lagrangiens

Système mécanique décrit par un Lagrangien  $L(t, q(t), \dot{q}(t))$ .

Solution physique est celle qui **rend extrémale** l'action lagrangienne

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L dt .$$



Les variations  $\delta\mathcal{L}$  *au sens des jets* permettent d'obtenir

- la dynamique par les équation d'Euler-Lagrange
- les lois de conservation par le théorème de Noether

# Systemes et integrateurs variationnels

Intégrateurs variationnels:

Nombreux travaux de Marsden *et al.* sur divers problèmes de mécanique [1] [2] [4],

Développements théoriques Chen [3],



C. Kane, J.E. Marsden, M. Ortiz, M. West

Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(10) (1295-1325), 2000.



J. E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller, M. West,

Variational methods, multisymplectic geometry and continuum mechanics. *J. Geom. Phys.*, 38(3-4) (253-284), 2001.



J-B. Chen

Total Variation in Discrete Multisymplectic Field and Multisymplectic-Energy-Momentum Integrators. *Letters in Mathematical Physics*, 61 (63-73), 2002.



A. Lew, J.E. Marsden, M. Ortiz, M. West

Variational time integrators.

*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003

# Intégrateurs variationnels

Reproduire le calcul des variations dans le cas discret

$$\begin{aligned}L(t, q(t), \dot{q}(t)) &\longleftrightarrow L_d(z_k) \\ \delta \mathcal{L} = 0 &\longleftrightarrow \delta \left( \sum L_d \right) = 0\end{aligned}$$

Variable discrète:  $z_k = (t_k, t_{k+1}, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots)$

- Équations d'Euler-Lagrange discrète:

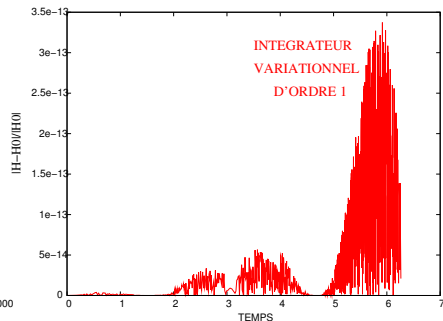
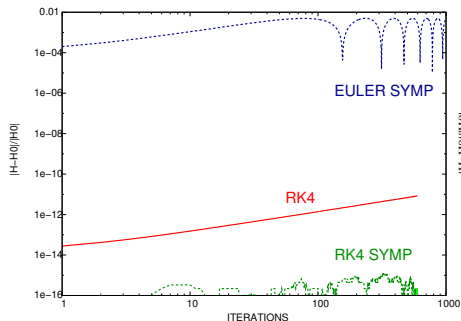
$$0 = \Delta t_k \frac{\partial L_d(z_k)}{\partial q_k} + \Delta t_{k-1} \frac{\partial L_d(z_{k-1})}{\partial q_k}$$

- Équation d'évolution de l'énergie discrète:

$$0 = \Delta t_k \frac{\partial L_d(z_k)}{\partial t_k} + \Delta t_{k-1} \frac{\partial L_d(z_{k-1})}{\partial t_k} + L_d(z_{k-1}) - L_d(z_k)$$

# Illustration: l'oscillateur harmonique

Erreur relative sur l'énergie.



Euler Symplectique  $O(\Delta t)$ ,  
RK4 et RK4 Symplectique

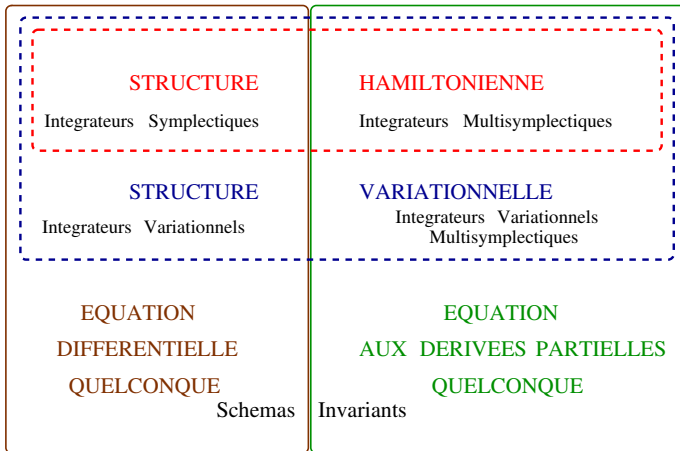
Intégrateur variationnel  $O(\Delta t)$

## Bilan

Méthode	Classique	Symplectique	Variationnelle
Symplecticité	non	oui	oui
Théorème de Liouville	non	oui	oui (théorique)
Conservation de l'énergie	moyenne	bonne	exacte



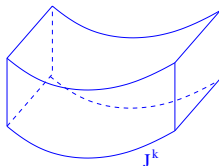
# Contexte



# Espace des Jets

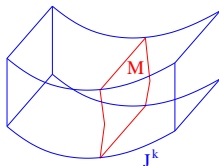
- Espace des jets d'ordre  $k$ :

$$J^{(k)} = \{\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}\} \text{ avec } w = w(\zeta)$$



# Espace des Jets

- Espace des jets d'ordre  $k$ :  
 $J^{(k)} = \{\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}\}$  avec  $w = w(\zeta)$
- E.D.P. (E):  
 $F(\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}) = 0 \Leftrightarrow M$  sous-variété de  $J^{(k)}$



## Espace des Jets

- Espace des jets d'ordre  $k$ :

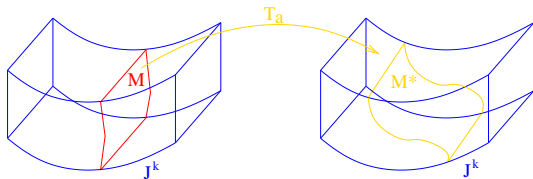
$$J^{(k)} = \{\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}\} \text{ avec } w = w(\zeta)$$

- E.D.P. (E):

$$F(\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} \text{ sous-variété de } J^{(k)}$$

- Transformation à paramètres:

$$T_a : q = (\zeta, w) \mapsto \tilde{q}(\tilde{\zeta}, \tilde{w}) \text{ avec } \tilde{q} = \tilde{q}(a, q)$$



## Espace des Jets

- Espace des jets d'ordre  $k$ :

$$J^{(k)} = \{\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}\} \text{ avec } w = w(\zeta)$$

- E.D.P. (E):

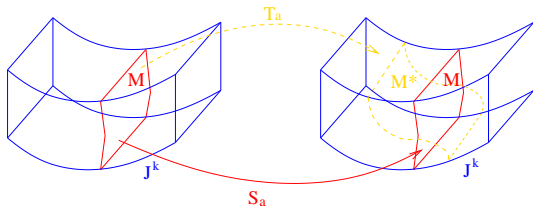
$$F(\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} \text{ sous-variété de } J^{(k)}$$

- Transformation à paramètres

$$T_a : q = (\zeta, w) \mapsto \tilde{q}(\tilde{\zeta}, \tilde{w}) \text{ avec } \tilde{q} = \tilde{q}(a, q)$$

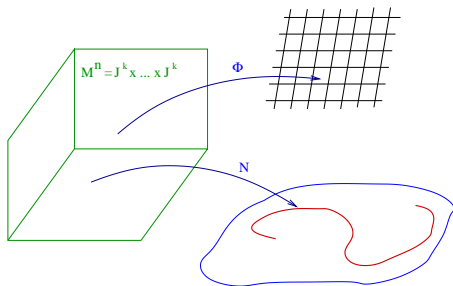
- Une symétrie  $S_a$  de (E) si

$$F(\zeta, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}) = 0 \Rightarrow F(\tilde{\zeta}, \tilde{w}, \tilde{w}^{(1)}, \dots, \tilde{w}^{(k)}) = 0$$



## Schémas numériques

Un schéma numérique est un couple d'applications  $(N, \Phi)$  vérifiant des conditions de consistance avec l'EDP



L'équation aux différences finies est représentée par  $N(\mathbf{z}) = 0$   
Les équations du maillage sont données par  $\Phi(\mathbf{z}) = 0$

## Schémas numériques symétrisés

### Définition

Soit un schéma numérique  $(N, \Phi)$  pour une EDP dont le groupe de symétrie est  $G$ . Alors  $(N, \Phi)$  est  $G$ -symétrique lorsque:

$$N(\mathbf{z}) = 0 \Rightarrow N(g \cdot \mathbf{z}) = 0, \quad \Phi(\mathbf{z}) = 0 \Rightarrow \Phi(g \cdot \mathbf{z}) = 0, \quad \forall g \in G$$

## Les méthodes utilisant les symétries

[1] Y. I. Shokin: "*Schémas semi-invariants*"

[2] V. A. Dorodnitsyn, [3] M. I. Bakirova : "*Invariants discrets différentiels*"

[4] C. J. Budd : "*Adaptation du maillage pour préserver la transformation d'échelle*"



Y. I. Shokin  
*The Method of Differential Approximation.*  
Springer-Verlag, 1983



V. A. Dorodnitsyn  
Finite-difference models entirely inheriting continuous symmetry of original differential equations.  
*International Journal of Modern Physics C, (Physics and Computers)*, 5(4) (723-734), 1994.



M. I. Bakirova, V. A. Doronitsyn, R. V. Kozlov,  
Symmetry-preserving differences schemes for some heat transfer equations.  
*J. Phys. A: Math. Gen.*, 30 (8139-8155), 1997.



C. J. Budd, V. A. Dorodnitsyn  
Symmetry adapted moving mesh schemes for the nonlinear Schrödinger equation.  
*J. Phys.*, 34 (48) (10387-10400), 2001.



# Schéma invariants utilisant les repères mobiles

## Schéma invariant utilisant les repères mobiles

Développée par P.J.Olver,

- Cadre mathématique rigoureux
- Méthode algorithmique
- Ramène la construction de schémas invariants à la détermination de sections transverses
- **ou à la détermination d'une famille de repères mobiles pour un schéma paramétrisé**



P.J. Olver

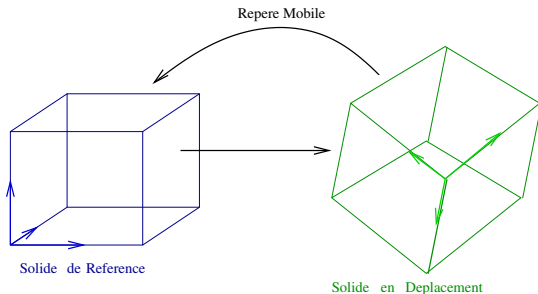
Moving frames.

*J.Symb.Comp.*, 3 (501-512), 2003.

## Repère mobile

Un repère mobile (à droite) est une application  $\rho : M \mapsto G$  telle que:

$$\rho(g \cdot z) = \rho(z)g^{-1} \quad \forall z \in M, \forall g \in G \quad (\text{équivariance})$$



Existence des repères mobiles sous les conditions de régularité et de liberté d'action du groupe.

# Théorème fondamental

## Théorème

Soit  $(N, \Phi)$  un schéma numérique pour l'équation  $F(z) = 0$ , et  $G$  un groupe de symétrie pour cette équation. Alors les applications  $(\tilde{N}, \tilde{\Phi})$  construits avec le repère mobile  $\rho$  associé à  $G$ :

$$\begin{aligned}\tilde{N}(\mathbf{z}) &= N(\rho(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}) \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{z}) &= \Phi(\rho(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z})\end{aligned}$$

définissent un schéma numérique invariant par  $G$  pour  $F(z) = 0$ .

Mais pas de précision sur l'ordre de consistance du schéma!

Pour obtenir un schéma invariant...

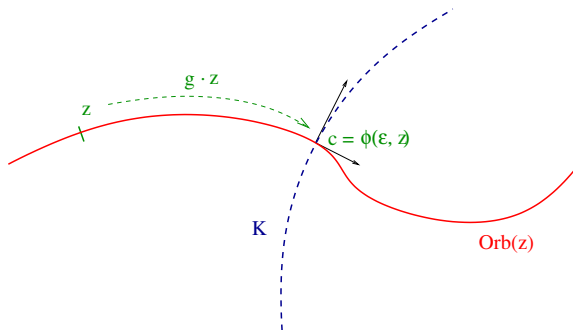
...il suffit alors de construire pour chaque transformation un repère mobile!

- Méthode de normalisation (Cartan, Olver, Kim)
- Méthode de paramétrisation du schéma (Chhay, Hamdouni)

## Méthode de normalisation [1]

On choisit une section transverse  $K$  à l'orbite

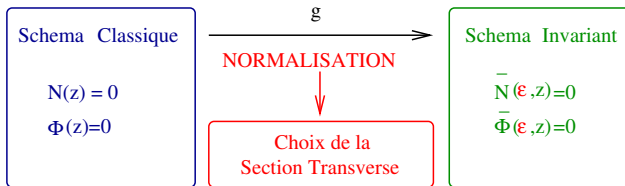
$\text{Orb}(z) = \{g \cdot z = \bar{z}(\varepsilon, z) \mid g \in G\}$  d'un point  $z$ .



É. Cartan

*La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus, et les espaces généralisés.*  
Exposés de Géométrie, 5. Hermann, 1935.

# Méthode de normalisation



La première mise en oeuvre par P. Kim pour *invariantiser* le schéma Crank-Nicolson pour l'équation de Burgers [1]



P. Kim

Invariantization of the Crank–Nicolson method for Burgers equation.

*Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(2) (243-254), 2008.

## Méthode de normalisation

### Limites de la méthode d'invariantisation par normalisation:

- Le schéma invariant obtenu est sensible au choix de la section transverse
- Le choix de la section dépend de la nature de la solution
- La normalisation ne garantit pas l'ordre de consistance du schéma invariant obtenu
- Le schéma invariant ne semble pas aussi performant qu'attendu sur l'équation de la chaleur [1]

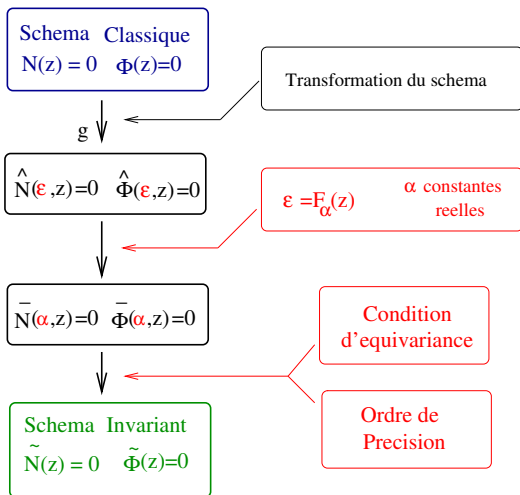


A. S. Dawes

Invariant numerical methods.

*International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56(8)  
(901-906), 2008.

## Paramétrisation du schéma





## Application: équation de Burgers

Équation de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Les symétries sont les transformations à 1-paramètre réel:

- Translation spatiale:  
 $(x, t, u) \mapsto (x + \varepsilon_1, t, u)$
- Translation temporelle:  
 $(x, t, u) \mapsto (x, t + \varepsilon_2, u)$
- Projection:  
 $(x, t, u) \mapsto$   
 $(\frac{x}{1-\varepsilon_3 t}, \frac{t}{1-\varepsilon_3 t}, u(1 - \varepsilon_3 t) + \varepsilon_3 x)$
- Transformation d'échelle:  
 $(x, t, u) \mapsto (xe^{\varepsilon_4}, te^{2\varepsilon_4}, ue^{-\varepsilon_4})$
- Transformation galiléenne:  
 $(x, t, u) \mapsto (x + \varepsilon_5 t, t, u + \varepsilon_5)$

## Burgers 1D

Invariante par la transformation dépendante des paramètres  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  et  $\varepsilon_5$ :

$$\bar{x} = \frac{(x + \varepsilon_1) + \varepsilon_5(t + \varepsilon_2)}{1 - \varepsilon_3(t + \varepsilon_2)}$$

$$\bar{t} = \frac{t + \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_3(t + \varepsilon_2)}$$

$$\bar{u} = u(1 - \varepsilon_3(t + \varepsilon_2)) + (x + \varepsilon_1)\varepsilon_3 + \varepsilon_5$$

## Schéma FTCS

Schéma explicite centré en espace (FTCS):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

devient:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + F = 0$$

avec un choix *naturel* pour les paramètres de translations:

$$\varepsilon_1 = -x_j$$

$$\varepsilon_2 = -t^n$$

$$F = -2\varepsilon_3(u_j^{n+1} - u_j^n) + \varepsilon_5 \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \varepsilon_3 \right) + \Delta t \varepsilon_3^2 u_j^{n+1}$$

On pose:

$$\varepsilon_3 = \frac{au_{j+1}^n + bu_j^n + cu_{j-1}^n}{\Delta x} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon_5 = du_{j+1}^n + eu_j^n + fu_{j-1}^n \quad d, e, f \in \mathbb{R}$$

La condition d'équivariance:

$$c - a = 1, \quad a + b + c = 0, \quad d - f = 0, \quad d + e + f = -1,$$

La consistance du terme additionnel est:

$$F = (a + c) \left( -u \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - 2(a + c) \frac{\Delta x}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} \\ + \Delta t \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + (u + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}) \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + (a + c) \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right) + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

La condition de consistance à l'ordre  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  s'écrit:

$$a + c = 0$$

On pose:

$$\varepsilon_3 = \frac{au_{j+1}^n + bu_j^n + cu_{j-1}^n}{\Delta x} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon_5 = du_{j+1}^n + eu_j^n + fu_{j-1}^n \quad d, e, f \in \mathbb{R}$$

La condition d'équivariance:

$$c - a = 1, \quad a + b + c = 0, \quad d - f = 0, \quad d + e + f = -1,$$

La consistance du terme additionnel est:

$$F = (a + c) \left( -u \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - 2(a + c) \frac{\Delta x}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} \\
 + \Delta t \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + (u + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}) \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + (a + c) \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right) + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

La condition de consistance à l'ordre  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  s'écrit:

$$a + c = 0$$

## Schéma FTCS invariant

L'expression des paramètres de transformation est déterminée par:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= -\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ \varepsilon_5 &= du_{j+1}^n + eu_j^n + fu_{j-1}^n \quad \text{avec } d = f \text{ et } d + e + f = -1 \end{aligned}$$

Le schéma invariant et consistant à l'ordre  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  s'écrit:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{u_j^{n+1}(1 - \varepsilon_3\Delta t) - u_j^n(1 + \varepsilon_3\Delta t)}{\Delta t} \\ &\quad + (u_j^n + \varepsilon_5) \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \varepsilon_3 \right) - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

## Schéma FTCS invariant

L'expression des paramètres de transformation est déterminée par:

$$\varepsilon_3 = -\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\varepsilon_5 = du_{j+1}^n + eu_j^n + fu_{j-1}^n \quad \text{avec } d = f \text{ et } d + e + f = -1$$

Le schéma invariant et consistant à l'ordre  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  s'écrit:

$$0 = \frac{u_j^{n+1}(1 - \varepsilon_3 \Delta t) - u_j^n}{\Delta t} (1 - \varepsilon_3 \Delta t) \\
 + (u_j^n + \varepsilon_5) \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \varepsilon_3 \right) - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

## Pseudo-choc

On considère le problème dont les conditions de bord et la condition initiale sont données par la solution exacte:

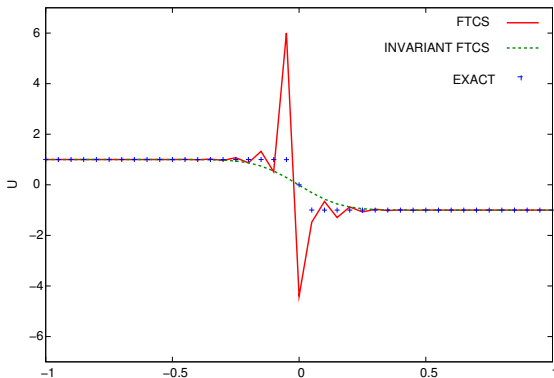
$$u_{\text{exact}}(x, t) = \frac{\sinh\left(\frac{x}{2\nu}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2\nu}\right) + \exp\left(-\frac{t}{4\nu}\right)}$$

Le domaine spatial est  $\Omega = ]-1; 1[$ . L'intervalle de temps est  $[1; 2]$ .



# Pseudo-choc

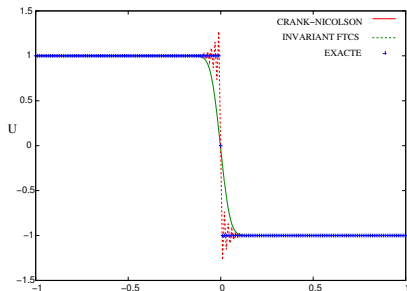
Schémas explicites FTCS et invariant ITCS:



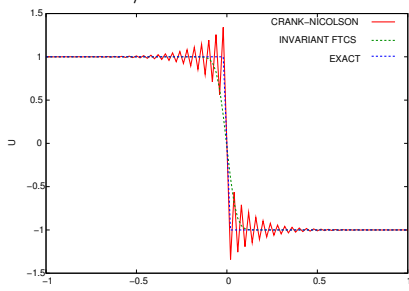
$$\Delta x = 5 \times 10^{-2}, \Delta t = 10^{-2}, \nu = 8 \times 10^{-3}.$$

# Pseudo-choc

Schéma implicite Crank-Nicolson et explicite invariant IFTCS:  
 $\nu = 75 \times 10^{-5}$ , CFL = 1/2.



$\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta x = 10^{-3}$



$\Delta t = 10^{-2}$ ,  $\Delta x = 2 \times 10^{-2}$

## Commentaires

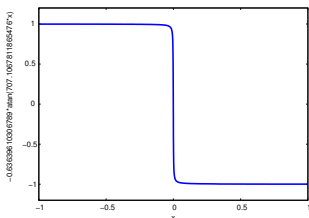
Capture de la solution autosimilaire associée à la projection:

$$(x, t, u) \mapsto \left( \frac{x}{1 - \varepsilon_3 t}, \frac{t}{1 - \varepsilon_3 t}, (1 - \varepsilon_3 t)u + \varepsilon_3 x \right)$$

sont de la forme:

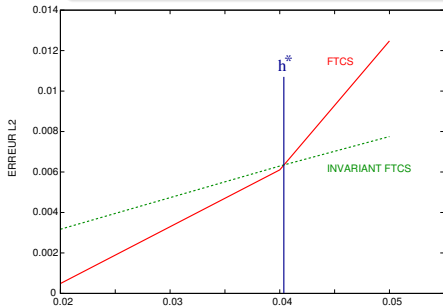
$$\arctan \left( \frac{k_3 v}{\sqrt{k_1}} \right) = (y + k_2)(k_3 \sqrt{k_1})$$

Ces solutions autosimilaires représentent des chocs!

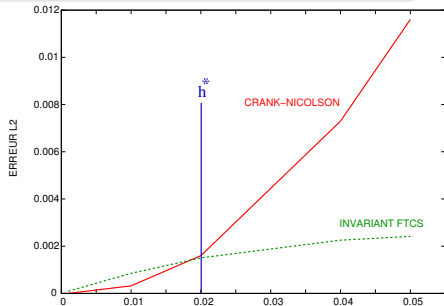


## Prédiction

Il existe une taille seuil  $h^*$  de maillage pour laquelle les schémas invariants sont plus efficaces!



FTCS et IFTCS, CFL=0.3



Crank-Nicolson et IFTCS, CFL=0.5

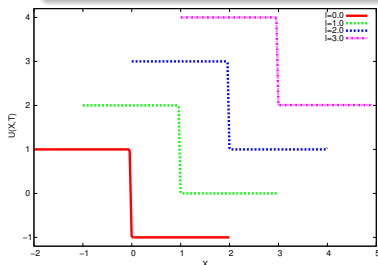
# Invariance galiléenne

## Principe d'invariance galiléenne

Les lois de la Physique sont identiques dans tous les référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres

## Problématique:

Les méthodes d'intégration brisent-elles ce principe?



Vitesse d'entrainement galiléenne  $\lambda$

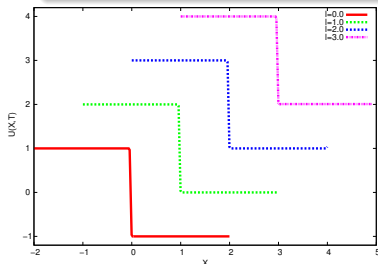
# Invariance galiléenne

## Principe d'invariance galiléenne

Les lois de la Physique sont identiques dans tous les référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres

## Problématique:

Les méthodes d'intégration brisent-elles ce principe?



Vitesse d'entrainement galiléenne  $\lambda$

## Invariance galiléenne I

On prend un maillage suffisamment fin pour être dans les bonnes conditions de stabilité.

Vitesses d'entraînement  $\lambda = 0, \lambda = 0.5$  et  $\lambda = 1$ .

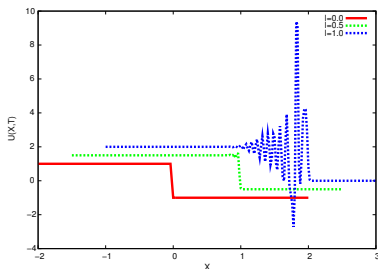


Schéma FTCS

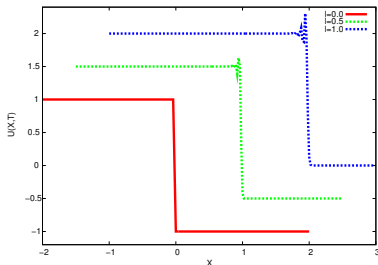


Schéma Crank-Nicolson (CN)

$\Delta x = 2 \times 10^{-2}$ .  $\nu = 5 \times 10^{-3}$ .

Le CFL = 1/2 dans référentiel d'origine.

## Invariance galiléenne II

Vitesses d'entraînement  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  et  $\lambda = 3$ .

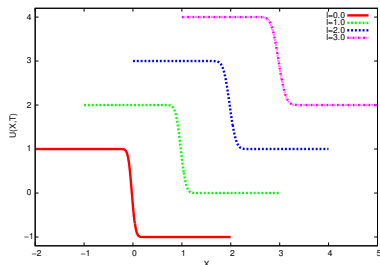


Schéma FTCS invariant

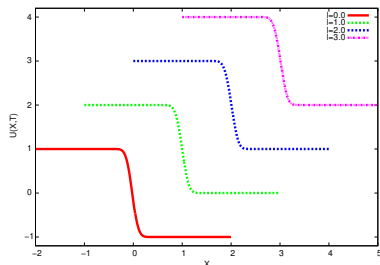


Schéma Crank-Nicolson invariant

$$\Delta x = 2 \times 10^{-2}, \quad \nu = 5 \times 10^{-3}.$$

Le CFL = 1/2 dans référentiel d'origine.



## Comparaison avec un schéma semi-invariant

Comparaison avec la méthode de semi-invariance (Y. I. Shokin), mise en œuvre par E. Hoarau [1].

On considère le schéma numérique d'ordre  $O(\Delta t, \Delta x^4)$ :

$$0 = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left( \mu \delta - \frac{\mu \delta^3}{6} \right) \left( \frac{u^2}{2} \right)_i^n - \nu \frac{1}{\Delta x^2} \left( \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} \right) (u_i^n) - \left( \Omega_{i+\frac{1}{2}}^n \delta^+ - \Omega_{i-\frac{1}{2}}^n \delta^- \right) u_i^n$$

où l'on a noté les opérateurs de dérivation:

$$\delta(u_i^n) = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}, \quad \mu(u_i^n) = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^n + u_{i-\frac{1}{2}}^n}{2}, \quad \delta^\pm(u_i^n) = \pm \frac{u_{i\pm 1}^n - u_i^n}{\Delta x},$$



E. Hoarau, C. David, P. Sagaut, T. H. Le

Lie group stability of finite difference schemes.

*Discrete and continuous dynamical systems*, 3 (1-10), 2007.

## Présentation du problème

Soit le problème dont la condition initiale et les conditions aux limites sont données par la solution exacte:

$$u_{\text{ex}}(x, t) = \frac{\frac{x-2t}{t+0.1}}{1 + \nu^2 \sqrt{t + 0.1} \exp\left(\frac{(x-2t)^2}{4\nu(t+0.1)}\right)} + 2$$

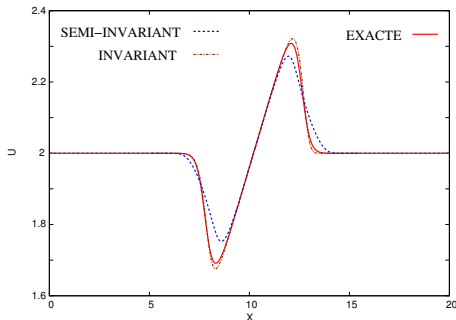
Domaine spatial  $\Omega = ]0, 20[$ .

Intervalle de temps  $[0.1, 5]$ .

$\nu = 5 \times 10^{-2}$ .

$\Delta x = 6 \times 10^{-2}$ .

$\Delta t = 8 \times 10^{-3}$ .



## Burgers 2D

Équation de Burgers 2D:

$$u_t + uu_x + vu_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad v_t + uv_x + vv_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}),$$

Les symétries sont:

- Translation temporelle

$$\mathbf{T}_\tau : (t, x, y, u, v) \longmapsto (t + \tau, x, y, u, v)$$

- Translations spatiale:

- selon  $x$ :  $\mathbf{S}_{\sigma_1} : (t, x, u) \longmapsto (t, x + \sigma_1, u)$
- selon  $y$ :  $\mathbf{S}_{\sigma_2} : (t, y, v) \longmapsto (t, y + \sigma_2, v)$

## Burgers 2D

Équation de Burgers 2D:

$$u_t + uu_x + vu_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad v_t + uv_x + vv_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}),$$

Les symétries sont:

- Rotation

$$\mathbf{R}_\rho : (x, y, u, v) \longmapsto (x \cos \rho - y \sin \rho, x \sin \rho + y \cos \rho, \\ u \cos \rho - v \sin \rho, u \sin \rho + v \cos \rho)$$

- Dilatation

$$\mathbf{D}_\delta : (t, x, y, u, v) \longmapsto (te^{2\delta}, xe^\delta, ye^\delta, ue^{-\delta}, ve^{-\delta})$$

## Burgers 2D

Équation de Burgers 2D:

$$u_t + uu_x + vu_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad v_t + uv_x + vv_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}),$$

Les symétries sont:

- Transformations galiléenne:

- selon  $x$ :  $\mathbf{G}_{\gamma_1} : (t, x, u) \mapsto (t, x + \gamma_1 t, u + \gamma_1)$
- selon  $y$ :  $\mathbf{G}_{\gamma_2} : (t, y, v) \mapsto (t, y + \gamma_2 t, v + \gamma_2)$

- Transformation projective:

$$\mathbf{P}_\varepsilon : (t, x, y, u, v) \mapsto \left( \frac{t}{1 - \varepsilon t}, \frac{x}{1 - \varepsilon t}, \frac{y}{1 - \varepsilon t}, u(1 - \varepsilon t) + \varepsilon x, v(1 - \varepsilon t) + \varepsilon y \right)$$

## Burgers 2D

On ne prend en compte que les translations  $(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ , la projection  $(\varepsilon)$  et les transformations galiléennes  $(\gamma_1, \gamma_2)$ :

$$t \longmapsto \bar{t} = \frac{t + \tau}{1 - \varepsilon(t + \tau)}$$

$$x \longmapsto \bar{x} = \frac{(x + \sigma_1) + \gamma_1(t + \tau)}{1 - \varepsilon(t + \tau)}$$

$$y \longmapsto \bar{y} = \frac{(y + \sigma_2) + \gamma_2(t + \tau)}{1 - \varepsilon(t + \tau)}$$

$$u \longmapsto \bar{u} = u(1 - \varepsilon(t + \tau)) + \varepsilon(x + \sigma_1) + \gamma_1$$

$$v \longmapsto \bar{v} = v(1 - \varepsilon(t + \tau)) + \varepsilon(y + \sigma_2) + \gamma_2$$

## Schéma numérique

On considère une discrétisation Euler explicite:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{k} + u_{i,j}^n \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + v_{i,j}^n \left( \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) \\ & = \nu \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{k} + u_{i,j}^n \left( \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2h_x} \right) + v_{i,j}^n \left( \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2h_y} \right) \\ & = \nu \left( \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right) \end{aligned}$$

## Le problème

On considère l'équation de Burgers  $2D$  sur le domaine  $\Omega = ]0; 1[ \times ]0; 1[$  et un intervalle de temps  $[0; 1]$ .

Les conditions de bord et la condition initiale sont données par la solution exacte:

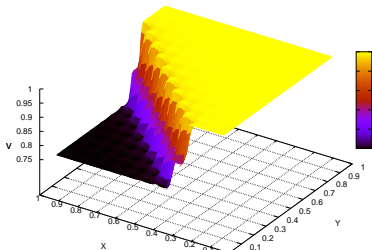
$$u_{\text{exact}}(x, y, t) = \frac{3}{4} - \left[ 4 \left( 1 + \exp\left(-\frac{4x - 4y + t}{32\nu}\right) \right) \right]^{-1}$$
$$v_{\text{exact}}(x, y, t) = \frac{3}{4} + \left[ 4 \left( 1 + \exp\left(-\frac{4x - 4y + t}{32\nu}\right) \right) \right]^{-1}$$

La viscosité est fixée à  $\nu = 8 \cdot 10^{-4}$ .

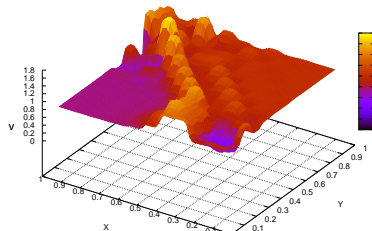


## Burgers 2D: FTCS classique

On se place dans des conditions volontairement désastreuses pour le schéma classique. Le pas de temps est fixé à  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$ , et les pas d'espace dans les deux directions à  $\Delta x = \Delta y = 5 \cdot 10^{-2}$ . Le temps d'intégration est  $T = 1$ .



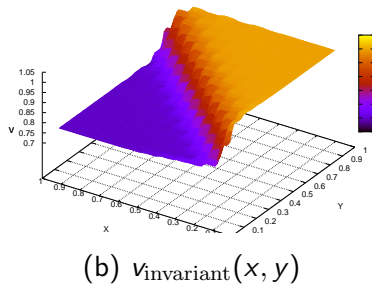
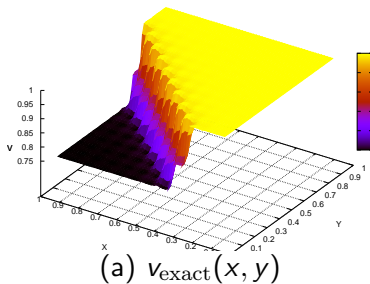
(a)  $v_{\text{exact}}(x, y)$



(b)  $v_{\text{FTCS}}(x, y)$

# Burgers 2D: FTCS invariant

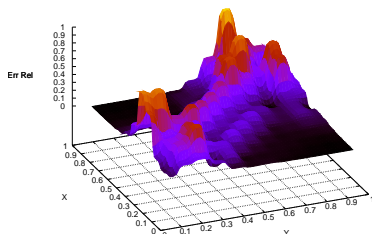
Solution du schéma invariant.



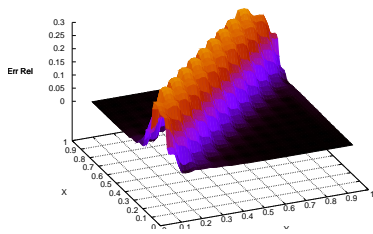
## Burgers 2D: résultat numérique

Erreur moyenne sur la seconde composante au temps  $T = 1$ :

$$Err_v(x, y) = \left| \frac{v_{\text{exact}}(x, y) - v_{\text{num}}(x, y)}{v_{\text{exact}}(x, y)} \right|$$



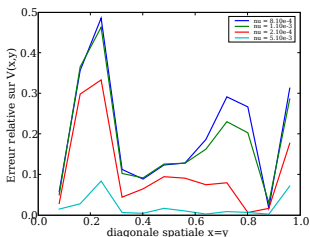
$v_{\text{FTCS}}(x, y)$



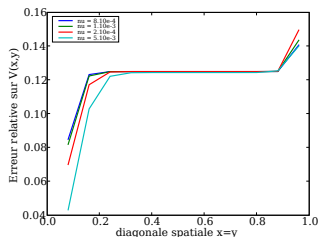
$v_{\text{invariant}}(x, y)$

## Burgers 2D: résultat numérique

Erreur moyenne sur la seconde composante le long de la diagonale  $\{x = y\}$  au temps  $T = 1$ :



$v_{\text{FTCS}}(x, y)$



$v_{\text{invariant}}(x, y)$

## Bilan

Dans la cadre de notre investigation expérimentale:

### Sur le procédé d'invariance:

- Gain en robustesse
- Oscillations éliminées grâce à la capture de la solution autosimilaire
- Invariance galiléenne

### Sur la méthode développée:

- Permet de symétriser tout schéma écrit en différences finies
- Permet de prendre en compte n'importe quelle symétrie continue
- Permet de garder le même ordre de consistance que le schéma d'origine

## Bilan

Dans la cadre de notre investigation expérimentale:

### Sur le procédé d'invariance:

- Gain en robustesse
- Oscillations éliminées grâce à la capture de la solution autosimilaire
- Invariance galiléenne

### Sur la méthode développée:

- Permet de symétriser tout schéma écrit en différences finies
- Permet de prendre en compte n'importe quelle symétrie continue
- Permet de garder le même ordre de consistance que le schéma d'origine

# Conclusion

## Construction du schéma

On peut construire des schémas invariants de façon algorithmique ayant un ordre de consistance fixé

## Sur des maillages larges

L'étude conforte l'hypothèse de la robustesse des schémas invariants sur des gros maillages

## Sur des maillages fins

Mais même sur des maillages fins où intervient l'invariance galiléenne (problèmes d'Interaction Fluide-Structure), les schémas invariants peuvent être efficaces!

# Perspectives

Quelques perspectives à courts et à moyen terme:

## Applications

- Intégrateur variationnel multisymplectique pour l'équation des ondes,
- Schéma invariant pour les équations de Navier-Stokes,

## Développement de la méthode

- Schémas invariants: rajouter d'autres contraintes numériques (stabilité, dispersion, ...),
- Intégrateur variationnel dont le Lagrangien discret est invariant par les symétries du Lagrangien,



# Perspectives

Quelques perspectives à courts et à moyen terme:

## Applications

- Intégrateur variationnel multisymplectique pour l'équation des ondes,
- Schéma invariant pour les équations de Navier-Stokes,

## Développement de la méthode

- Schémas invariants: rajouter d'autres contraintes numériques (stabilité, dispersion, ...),
- Intégrateur variationnel dont le Lagrangien discret est invariant par les symétries du Lagrangien,