Structures algébriques dans les théories à deux dimensions

Eric Ragoucy

▶ **To cite this version:**

Eric Ragoucy. Structures algébriques dans les théories à deux dimensions. Physique mathématique [math-ph]. Université de Savoie, 2004. ⟨tel-00404155⟩

HAL Id: tel-00404155

https://theses.hal.science/tel-00404155v1

Submitted on 15 Jul 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HAL Authorization

Université de Savoie

Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTH

Habilitation à Diriger des Recherches

Présentée par **Éric Ragoucy-Aubezon**

Structures algébriques dans les théories à deux dimensions

Soutenue le 15 septembre 2004

Membres du jury:

Luis ALVAREZ-GAUMÉ	
Luc FRAPPAT	(président)
Jean-Michel MAILLET	(rapporteur)
Mihail MINTCHEV	(rapporteur)
Claude ROGER	(rapporteur)
Philippe ROCHE	

Remerciements

Merci à tous ceux qui m'ont fait un brin de parcours, ont longé le chemin avec moi,
Ceux d'abord qui furent des premiers jours, qui m'abordèrent pour ma plus grande joie,
Éric (le buffle noir), François (tel un duc), JC (léger), Paul, Philippe, Robert (coq-héros),
Sans oublier, au-delà des frontières, ces étranges pays
Où je vais, d'où ils viennent, où je retournerai sans ennui,
Ascold (pré aux mots russe), Alex (savarin hollandais), Holstein (eau gazeuse norvégienne),
Jens (mat de misaine danois), Klaus (corn flakes allemands), Marco (rosé italien),
Philippe (zorro suisse).
Merci aussi à ceux qui me suivent encore sur nos chemins aléatoires
À la recherche d'un hypothétique soleil levant dans la nuit noire
Daniel (de l'art au don), Frank (tu es yéyé), Luc, Anastasia et Jean (le doigt avant le cou),
Laurent (au trot), Mihail, Alexander (mauve Leffe), Junichi (chant raï d'ici),
Et tous les étudiants et tudiantes, qui nous tirent, qui nous poussent,
Qui évitent les rimes gniant-gniantes et les journées sans secousses,
Cilly (brille haut), François (bar du Bas-Rhin), Nicolas (à cran, pas épais),
Vincent (aux coudes déliés).
Vient le temps de rapporter, car c'est bien le mot, de nouveaux mercis,
Claude (reçu et compris), Jean-Michel (man, yeah), Mihail (chef de la menthe),
À ceux qui se sont échinés, tous les membres de mon jury,
Philippe (tu es pierre...), Luc (f'ra-t-y pas?), Luis (halva de Fez gommé).
Encore merci à tous mes collègues, aux étudiant(e)s et post-docs,
Laborantins ancileviens, physiciens très hauts, pas chiens
Dont les rires couvrent la pluie, ses flaques et ses flocs,
Pour leur chaleur qui est là même quand l'hiver survient;
Aux directeurs qui nous permettent de jour et de nuit
La liberté d'aller chercher la neige au milieu de la suie,
Paul et Patrick (sorbets à l'orange);
Et à celles cachées derrière nos calculs, nos papiers,
Qui font tout touner rond dans nos bureaux pas carrés,
Bethsabée, Catherine, Chantal, Claire, Dominique, Kurbet, Véronique,
Aile de lune, colle-la-vie t'oses, perles et miel, pierre rare, bien-lui-sied, hase des mers, jaune trille.

Et enfin, parce que l'essentiel, avec joie, on veut toujours l'écrire,
Des milliards de mercis à Céline et à Quentin pour leurs sourires.

Avant-propos: systèmes à 2 dimensions

À la fin du dernier millénaire, les théories à deux dimensions sont venues jouer un rôle important en physique théorique. Les raisons en sont multiples, depuis l'évidence qu'elles sont un laboratoire d'étude "simplifié" pour obtenir des informations ou des techniques importantes sur les théories à quatre dimensions, jusqu'à l'émergence en matière condensée de systèmes physiques qui sont approximativement bidimensionnels, voire unidimensionnel. La (relative) simplicité des théories en basses dimensions est bien évidemment due au faible nombre de coordonnées nécessaires pour décrire les systèmes, ce qui engendre des calculs moins fastidieux. Cependant, un autre point vient jouer en faveur des basses dimensions: la topologie. En effet, la structure des espaces en dimensions une et deux est bien plus simple que celles des espaces à trois ou quatre dimensions. Cela implique pour les premiers des techniques qui n'existent pas (au moins actuellement) pour les seconds.

Deux directions principales sont apparues dans l'étude des théories à deux dimensions: d'une part, les théories conformes (telles qu'elles apparaissent en théorie de cordes ou en physique statistique), et d'autre part les systèmes intégrables, notamment les chaînes de spins (étudiées en matière condensée). Toutes deux font appel à des techniques indisponibles aux dimensions supérieures.

C'est autour de ces deux grands thèmes que s'est développé mon travail de recherche, la liaison se faisant par un troisième point, les algèbres $\mathcal{W}$ finies, qui fait intervenir les techniques des uns et des autres.

Les théories conformes à deux dimensions

Il est connu que les cordes, lorsqu'elles se déplacent, décrivent une surface d'univers qui est bidimensionnelle. La théorie peut donc se décrire comme une théorie des champs à deux dimensions admettant une invariance sous les transformations conformes à deux dimensions. L'intérêt d'une telle description réside dans la dimension infinie de l'algèbre conforme à deux dimensions, alors qu'elle est finie dans les autres dimensions. Cela induit de sérieuses contraintes sur les théories en question, qui suffisent parfois à les résoudre. Malheureusement, les critères de sélection de théories conformes sont trop peu précis pour en permettre une description exhaustive. Seule une classe restreinte de théories conformes (les modèles minimaux) sont complètement déterminés par la symétrie conforme. Une tentative pour remédier à cette faiblesse est d'agrandir l'algèbre conforme en des "algèbres conformes étendues", ou algèbres $\mathcal{W}$. De cette façon, on obtient de nouveaux modèles minimaux. Dès lors, un objectif naturel est le classement des différentes algèbres conformes étendues et de leurs modèles minimaux. La difficultés d'une telle étude réside dans la nature même des algèbres $\mathcal{W}$, qui sont des algèbres non-linéaires. Pourtant, une large classe de ces algèbres peut être étudiée: les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Ces algèbres présentent en outre l'avantage d'être associée à des

modèles bien connus dans en physique, les modèles de Wess-Zumino-Witten et les modèle de Toda.

Les théories conformes à deux dimensions jouent aussi un rôle prépondérant en physique statistique dans l'étude des transitions de phases du second ordre. On citera pour mémoire le modèle d'Ising, dont la résolution fit faire un pas décisif dans la compréhension des matériaux ferromagnétiques. Ce modèle est un modèle minimal de l'algèbre conforme.

Les systèmes intégrables

Les systèmes intégrables ont une caractéristique qui ne peut laisser insensible un théoricien: on peut les résoudre complètement, même au niveau quantique. Les techniques employées pour les résoudre font appel à des outils mathématiques qui, pour être performants, n'en sont pas moins lourds d'emploi. Deux grands domaines sont étudiés sous cet angle: les théories des champs intégrables en dimensions 1+1, avec ou sans bord, et les systèmes de chaînes de spins, qui décrivent des modèles de matière condensée où des spins sur un réseau de dimension une ou deux interagissent.

L'intérêt de tels systèmes s'est récemment vu renforcé par les récents progrès technologiques, en particulier dans les composants électroniques, où les techniques de couches minces produisent des systèmes concrets se comportant comme des modèles à deux (voire une) dimensions.

Les algèbres $\mathcal{W}$ finies

Il est remarquable que ces deux grands domaines des théories à deux dimensions aient de nombreux points de recoupement, et que les techniques (forts différentes) de l'une puisse apporter des éléments nouveaux à l'autre. Par exemple, de nombreux modèles conformes sont aussi des systèmes intégrables. La transition (qui n'est pas un phénomène critique) de l'un vers l'autre s'organise naturellement selon l'un de leurs points de contact: les Yangiens, qui apparaissent dans des modèles conformes tels que les modèles de Wess-Zumino-Witten Ils peuvent aussi être associés aux algèbres $\mathcal{W}$ finies, et c'est un domaine où les techniques employées par l'un enrichissent les connaissances de l'autre, comme nous le verrons.

Les algèbres $\mathcal{W}$ finies ont leur propre intérêt physique, et elles peuvent être utilisées pour une définition algébrique des anyons qui autorise une généralisation aux dimensions supérieures.

Plan du mémoire

Dans une première partie, je présenterai les théories conformes à deux dimensions, notamment leur structure algébrique, centrée sur l'algèbre de Virasoro (algèbre conforme). Cette algèbre est de dimension infinie et l'étude de ses représentations unitaires irréductibles est un domaine particulièrement riche, qui fournit de nombreux modèles physiques. La généralisation de l'algèbre de Virasoro aux algèbres conformes étendues (algèbres $\mathcal{W}$) est une façon d'envisager la classification des théories unitaires de l'algèbre conforme. Les algèbres $\mathcal{W}$ interviennent comme symétrie des modèles de Toda, et nous étudierons la construction de ces modèles à partir des modèles de Wess-Zumino-Witten. L'étude et la classification des algèbres $\mathcal{W}$ obtenues par ce biais seront présentées. Une quantification par le calcul de la cohomologie BRS sera ensuite effectuée.

Dans une deuxième partie, nous étudierons une autre classe d'algèbres, directement inspirées de la construction des algèbres $\mathcal{W}$: les algèbres $\mathcal{W}$ finies. Nous insisterons sur leur rôle en physique, notamment pour l'étude des anyons. Ces algèbres sont reliées à un autre domaine de structures algébriques, les Yangiens. Nous verrons comment ces derniers peuvent être utilisés pour classer les représentations irréductibles des premières.

La troisième partie traitera des aspects mathématiques des systèmes intégrables, à savoir les algèbres de Hopf et de quasi-Hopf. Nous aborderons aussi une classe d'algèbres quadratiques, les algèbres de réflexion, qui sont construites à partir des algèbres de Hopf. Enfin, nous parlerons des algèbre de Zamolodchikov-Faddeev, qui interviennent dans les théories des champs intégrables, et de leurs généralisations (algèbres de bord et algèbres RT) pour les systèmes avec bord ou possédant une impureté.

La quatrième partie abordera la construction des systèmes intégrables à partir des structure définies dans la partie précédente. Deux grands directions seront explorées: les théories des champs intégrables, avec un éclairage particulier sur le cas des systèmes avec bord ou possédant un défaut; les chaînes de spins, qu'elles soient fermées (périodiques) ou ouvertes (avec bord).

Dans le premier cas, nous présenterons une approche algébrique de ces théories, qui permet de les résoudre complètement. Nous illustrerons la méthode sur l'exemple de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Dans le second cas, les modèles sont définis eux aussi de manière algébrique, par l'utilisation de matrices de monodromie, qui satisfont des relations d'échange propre aux groupes quantiques. Nous présenterons le calcul des énergies des chaînes de spins par l'Ansatz de Bethe analytique.

Enfin, nous conclurons sur les diverses questions encore ouvertes sur ces problèmes.

I Algèbres conformes étendues **1**

1 Théories conformes à deux dimensions **3**
1.1 Algèbre de Virasoro . . . 3
1.2 Algèbres conformes étendues . . . 4

2 Préliminaires et notations **7**
2.1 Brève revue des (super)algèbres de Lie . . . 7
2.1.1 Algèbres de Lie . . . 7
2.1.2 Inclusions de $s\ell(2)$ . . . 9
2.1.3 Superalgèbres de Lie . . . 9
2.1.4 Plongements de $osp(1|2)$ . . . 12
2.2 Algèbres de Kac-Moody . . . 13
2.3 Superalgèbres de Kac-Moody et supersymétrie . . . 13
2.4 Constructions de Sugawara et de GKO . . . 15
2.5 Crochets de Poisson et de Dirac . . . 16
2.6 OPEs et ordre normal . . . 17

3 Construction des algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$: cas classique **19**
3.1 Actions de Wess-Zumino-Witten et de Toda . . . 19
3.1.1 Jauge diagonale et action de Toda . . . 21
3.1.2 Jauge de plus haut poids et algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ . . . 22
3.1.3 Transformation de Miura . . . 22
3.1.4 Exemple: les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{G})$ . . . 23
3.2 Cas des superalgèbres $\mathcal{W}$ . . . 24

4 Classification des (super)algèbres $\mathcal{W}$ **27**
4.1 Cas des algèbres $\mathcal{W}$ basées sur $s\ell(N)$ [ERA11] . . . 28
4.1.1 Exemple: l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ . . . 29
4.2 Cas général (algèbres de Lie) [ERA12] . . . 29
4.3 Cas général (superalgèbres) [ERA12] . . . 31
4.3.1 Superalgèbres $s\ell(M|N)$ . . . 31
4.3.2 Superalgèbres $osp(M|2n)$ . . . 32
4.4 Factorisation des champs de spin $\frac{1}{2}$ . . . 32
4.5 Classification des superalgèbres $\mathcal{W}$ avec $N = 2$ supersymétries [ERA24] . . . 34
4.5.1 Cas de $\mathcal{G} = s\ell(M|N)$ . . . 34
4.5.2 Cas de $\mathcal{G} = osp(M|2n)$ . . . 35

4.6 Liens entre différentes algèbres $\mathcal{W}$ . . . 36
4.6.1 Pliage des algèbres $\mathcal{W}$ [ERA13] . . . 36
4.6.2 Diagrammes de Dynkin pour algèbres $\mathcal{W}$ [ERA14] . . . 37
4.6.3 Algèbres $\mathcal{W}$ rationnelles [ERA15] . . . 38
4.6.4 Algèbres $\mathcal{W}$ jaugées [ERA17] . . . 38

5 Cas quantique **39**
5.1 Cohomologie et suite spectrale . . . 39
5.2 Cohomologie BRS des superalgèbres $\mathcal{W}$ [ERA18] . . . 41
5.2.1 Calcul de la cohomologie . . . 41
5.2.2 Construction des générateurs W . . . 44
5.2.3 Factorisation des champs de spin $1/2$ . . . 44
5.2.4 Réductions secondaires quantiques [ERA22] . . . 45
5.3 Superalgèbres $\mathcal{W}$ et cordes . . . 45
5.3.1 Corde bosonique et algèbre superconforme $N = 2$ [102] . . . 45
5.3.2 Réduction Hamiltonienne "tordue" d'une superalgèbre . . . 47

II Les algèbres $\mathcal{W}$ finies **49**

6 Applications des algèbres $\mathcal{W}$ finies **51**
6.1 Définition des algèbres $\mathcal{W}$ finies . . . 51
6.1.1 Exemple: l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ . . . 52
6.2 Commutants et algèbres $\mathcal{W}$ finies [ERA23] . . . 53
6.2.1 Cas classique . . . 54
6.2.2 Cas quantique . . . 55
6.2.3 Exemple: $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ "localisée" . . . 56
6.2.4 $\mathcal{W}$-représentations des algèbres de Lie [ERA23] . . . 57
6.2.5 Exemple: $\mathcal{W}$-réalisation de $s\ell(3)$ . . . 58
6.3 Applications physiques . . . 58
6.3.1 Anyons . . . 58
6.3.2 Généralisation du vecteur de Pauli-Wiegner-Lubanski [ERA25] . . . 61

7 Yangiens et algèbres $\mathcal{W}$ finies **63**
7.1 Définition sommaire des Yangiens et Yangiens twistés . . . 63
7.1.1 Yangiens $Y(\mathcal{G})$ . . . 63
7.1.2 Présentation en matrice R de $Y(s\ell_N)$ . . . 64
7.1.3 Représentations de $Y(N)$ . . . 65
7.1.4 Yangiens twistés . . . 66
7.2 Yangiens et algèbres $\mathcal{W}$ finies . . . 67
7.2.1 Morphisme d'algèbres [ERA27] . . . 67
7.2.2 Matrice R pour algèbres $\mathcal{W}$ [ERA32] . . . 68
7.2.3 Yangiens twistés et algèbres $\mathcal{W}$ de $so(N)$ et $sp(2n)$ . . . 69
7.3 Cas supersymétrique . . . 69

7.3.1 Super-Yangiens $Y[g\ell(M|N)]$ . . . 69
7.3.2 Super-Yangiens twistés [ERA39] . . . 70
7.3.3 Liens avec les superalgèbres $\mathcal{W}$ [ERA45] . . . 71
7.4 Matrices R pour Yangiens orthogonaux et/ou symplectiques . . . 71
7.4.1 Yangiens twistés symplecto-orthogonaux [ERA40] . . . 72

III Groupes quantiques et algèbres de Hopf **73**

8 Généralités **75**
8.1 Algèbres de Hopf . . . 75
8.1.1 Exemple: algèbres de Lie . . . 76
8.2 Algèbres de Hopf quasitriangulaires . . . 76
8.3 Matrice $\mathcal{R}$ universelle et matrice R évaluée . . . 77
8.3.1 Doubles quantiques . . . 77

9 Algèbres quadratiques **79**
9.1 Algèbres de réflexion $\mathcal{B}(N,n)$ [ERA38] . . . 80
9.2 Cas des groupes quantiques . . . 80
9.2.1 Cas fini . . . 80
9.2.2 Yangiens "quantiques" . . . 81
9.2.3 Yangiens twistés quantiques [ERA42] . . . 82
9.3 Algèbres d'impureté [ERA43, ERA47] . . . 83

10 Algèbres de quasi-Hopf **84**
10.1 Définition . . . 84
10.2 Équation de Gervais-Neveu-Felder . . . 85
10.2.1 Exemple: $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$ . . . 86
10.3 Twists de Drinfeld . . . 86
10.3.1 Twists rigides . . . 86
10.3.2 Twists dynamiques et structure de quasi-Hopf . . . 87
10.3.3 Exemple: $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$ . . . 88
10.4 Équation ABRR . . . 88
10.4.1 Exemple: $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$ . . . 89

11 Structures de (quasi-)Hopf des Yangiens déformés **91**
11.1 Les Yangiens comme limite d'échelle . . . 91
11.2 Structure de quasi-Hopf [ERA31, ERA35] . . . 92

12 Algèbres ZF et généralisations **93**
12.1 Groupes quantiques et systèmes intégrables . . . 93
12.1.1 Algèbres de Zamolodchikov-Faddeev . . . 93
12.1.2 Représentation de Fock . . . 94
12.1.3 Opérateurs bien élevés [ERA36] . . . 95
12.2 Algèbres de bord . . . 95

12.2.1 Représentation de Fock . . . 96
12.2.2 Hiérarchie associée à l'algèbre de bord et lien avec l'algèbre ZF [ERA37] . . . 97
12.3 Algèbres de Réflexion-Transmission [ERA43, ERA47] . . . 98
12.3.1 Représentation de Fock . . . 99
12.3.2 Hiérarchie associée à l'algèbre RT et lien avec l'algèbre ZF [ERA49] . . . 99

IV Systèmes intégrables **101**

13 Généralités **103**

14 Systèmes intégrables avec impureté **104**
14.1 Champ libre et impureté . . . 104
14.1.1 Présentation du problème . . . 104
14.1.2 Introduction de l'algèbre RT [ERA47] . . . 106
14.2 Algèbres RT [ERA43, ERA47] . . . 106

15 Équation de Schrödinger non-linéaire à 2 dimensions **109**
15.1 Équation de Schrödinger sur une ligne . . . 109
15.2 Cas super-symétrique [ERA46, ERA50] . . . 111
15.3 Équation de Schrödinger sur une demie-ligne . . . 115
15.3.1 Résolution . . . 115
15.3.2 Brisure de symétrie due au bord [ERA34] . . . 116
15.4 Équation de Schrödinger avec impureté [ERA52, ERA53] . . . 117
15.4.1 Cas classique . . . 117
15.4.2 Cas quantique . . . 118
15.4.3 Comparaison avec les études précédentes . . . 119

16 Chaînes de spins **120**
16.1 Description des modèles . . . 120
16.1.1 Conditions au bord périodiques . . . 120
16.1.2 Inclusion de bords réfléchissant . . . 122
16.1.3 Cas des bords non-préservants . . . 125
16.1.4 Généralisation aux autres chaînes de spins . . . 127
16.2 Ansatz de Bethe analytique . . . 128
16.2.1 Pseudo-vide . . . 129
16.2.2 Spectre de la matrice de transfert . . . 130
16.2.3 Inclusion de bords non triviaux . . . 133
16.3 Ansätze algébrique et analytique . . . 134
16.4 Limite thermodynamique . . . 135
16.4.1 Hypothèse des cordes . . . 135
16.4.2 Résolution . . . 136
16.4.3 Validité de l'hypothèse des cordes . . . 136

A Liste complète de publication **159**
A.1 Articles parus dans des journaux à comités de lecture 159
A.2 Comptes-rendus de conférences 164

Partie I

Algèbres conformes étendues

Chapitre 1

Théories conformes à deux dimensions

La place particulière des théories des champs conformes à deux dimensions vient du fait que les transformations conformes en deux dimensions sont les changements de coordonnées analytiques et anti-analytiques. Ainsi, les systèmes à deux dimensions possèdent un groupe de transformations de dimension infinie (l'algèbre de Virasoro [234] ou algèbre conforme), alors que généralement, c'est le groupe $so(d,1)$ (de dimension finie) qui entre en jeu pour d dimensions d'espace. L'aspect dimension infinie induit de sévères contraintes sur les champs d'une théorie conforme.

1.1 Algèbre de Virasoro

Du point de vue algébrique, l'algèbre conforme se scinde en une somme directe de deux parties de dimension infinie, dont on regroupe les générateurs en deux champs chiraux $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ et $\bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{L}_n \bar{z}^{-n-2}$ qui sont les courants associés aux transformations analytiques et anti-analytiques. Chacun de ces deux champs chiraux engendre une copie de l'algèbre dite de Virasoro (algèbre $\mathcal{V}$) [234]. Dans de tels développements, on confondra les générateurs L_m (dits aussi modes du développement) avec le champ $T(z)$ qu'on appellera aussi générateur de Virasoro. Les relations de commutation de cette algèbre prennent la forme bien connue

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{m+n,0} \tag{1.1.1}$$

$$T(z)T(w) = \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \frac{c/2}{(z-w)^4} + :T(z)T(w): , \qquad |z| > |w| \tag{1.1.2}$$

où $:T(z)T(w):$ est la partie régulière (en $z-w$) du développement. c est un élément central de l'algèbre (dit charge centrale), et donc est constant dans une représentation irréductible de cette algèbre.

La deuxième équation redonne la première si on considère une double intégration en z et w dans le plan complexe sur un contour autour de 0:

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= \oint_0 dz\, z^{m+1} \oint_0 dw\, w^{n+1} T(z)T(w) - \oint_0 dw w^{n+1} \oint_0 dz z^{m+1} T(z)T(w) \\ &= \oint_0 dz\, z^{m+1} \oint_z dw\, w^{n+1} \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \frac{c/2}{(z-w)^4}\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Dans ce calcul, seule compte la partie irrégulière: dans la suite, nous donnerons uniquement ces développements en produits d'opérateurs (*OPEs*, operator product expansions), la seule utile pour les calculs abordés. Les relations de commutation de l'algèbre sous-jacente sont calculées par la même technique que ci-dessus (voir aussi la section 2.6).

Dans la suite, nous utiliserons aussi une version en crochets de Poisson de cette algèbre:

$$\{T(z)\,,\,T(w)\} = -2T(w)\,\delta'(z-w) + \partial T(w)\,\delta(z-w) + c\,\delta'''(z-w) \tag{1.1.4}$$

où les ' sont des dérivées par rapport à w.

La puissance de calcul qui découle de l'utilisation de la symétrie conforme est cependant pondérée par le manque de théorèmes sur la classification des théories conformes. Pourtant, il est des théories conformes (dites minimales) qui sont entièrement déterminées lorsqu'on en connaît les champs simples (dits primaires) [22]. Ces champs se transforment comme des formes linéaires sous l'action des changements conformes et sont donc caractérisés par deux nombres h et $\bar{h}$ (que l'on appelle poids ou dimension, ou spin conforme) correspondant à $(dz)^h(d\bar{z})^{\bar{h}}$. En langage d'OPEs, un champ primaire de dimension conforme $(h,0)$ satisfait

$$T(z,\bar{z})\Phi(w,\bar{w}) = \frac{h\,\Phi(w,\bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\Phi(w,\bar{w})}{z-w}\,. \tag{1.1.5}$$

On a pu classer, en utilisant le déterminant de Kac [138], toutes les théories minimales et donner le contenu en champs primaires (retrouvant ainsi des théories telles que le modèle d'Ising), mais seules ces théories sont entièrement connues. Les théories minimales correspondent aux représentations irréductibles de charge centrale [95]

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}\,, \qquad m = 1,2,\ldots \tag{1.1.6}$$

Les poids conformes des champs primaires de ces modèles sont donnés par

$$h_{p,q} = \frac{[(m+1)p - mq]^2 - 1}{4m(m+1)}\,,\ p = 1,2,\ldots,m-1\ ;\ q = 1,\ldots,p \tag{1.1.7}$$

1.2 Algèbres conformes étendues

Les algèbres $\mathcal{W}$ (ou algèbres conformes étendues) sont une manière d'étendre la classification des théories minimales. En effet, l'idée de base est d'agrandir l'algèbre conforme engendrée par $T(z)$ et $\bar{T}(\bar{z})$ par des champs $W(z)$ et $\bar{W}(\bar{z})$ de dimension conforme $(h,0)$ et $(0,\bar{h})$ respectivement et de regarder les théories invariantes sous cette nouvelle algèbre. La symétrie correspondante étant plus importante que la symétrie conforme, les contraintes sont encore plus sévères et ainsi certaines théories trop "complexes" du point de vue conforme deviennent "simples" (*i.e.* minimales) du point de vue conforme étendu. Du fait de l'analogie entre les secteurs analytique et anti-analytique, on ne mentionnera dans la suite qu'un seul de ces deux secteurs.

L'exemple le plus naturel d'algèbre conforme étendue vient de l'introduction de la supersymétrie. L'algèbre de symétrie est composée de $T(z)$ et d'une charge de supersymétrie $G(z)$, champ

primaire de spin conforme 3/2, fermionique. Les modèles correspondants sont invariants sous les transformations superconformes, d'où le nom d'algèbre superconforme [190, 203]. Les relations de commutations de cette algèbre sont données, outre (1.1.3), par les OPEs:

$$T(z)G(w) = \frac{3/2\,G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{z-w} \tag{1.2.1}$$

$$G(z)G(w) = \frac{T(w)}{z-w} + \frac{c/2}{(z-w)^3} \tag{1.2.2}$$

On retrouve dans la dernière OPE la caractéristique d'une algèbre de supersymétrie: l'OPE de deux charges fermioniques redonne le tenseur énergie-impulsion du modèle. La classification des théories minimales superconformes (*i.e.* des représentations irréductibles) permet alors de déterminer entièrement des théories conformes que rien ne distinguait des autres *a priori*. Elles correspondent à une série [96]

$$c = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{8}{m(m+2)}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{1.2.3}$$

de la valeur de la charge centrale.

Pour être complet, mentionnons aussi qu'on peut ajouter N de charges de supersymétrie (toutes champs primaires de spin 3/2) et demander qu'elles ferment linéairement sur une algèbre de courant (en plus du tenseur énergie-impulsion). On trouve alors les algèbres N-superconformes, ou algèbres d'Ademollo et al. [2]. Cependant, si de plus on demande que l'algèbre possède une charge centrale non nulle, le nombre N de charges supersymétriques est limité [215] à $N \leq 4$. Dans le cas de $N = 2$ charges de supersymétrie, l'algèbre contient aussi un courant $U(1)$, et les deux charges forment un doublet sous ce $U(1)$:

$$U(z)G_\pm(w) = \pm\frac{G_\pm(w)}{z-w} \quad \text{et} \quad U(z)U(w) = \frac{k}{(z-w)^2}\,. \tag{1.2.4}$$

Les charges de supersymétries ferment selon

$$G_+(z)G_-(w) = \frac{T(w)}{z-w} + \frac{U(w)}{(z-w)^2} + \frac{c/2}{(z-w)^3} \quad \text{et} \quad G_\pm(z)G_\pm(w) = 0 \tag{1.2.5}$$

Cette algèbre fournit des théories minimales de charge centrale

$$c = \frac{3m}{m+2}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{1.2.6}$$

Le cas $N = 4$ est assez similaire, l'algèbre de courant étant soit $SU(2)$ (algèbre courte) soit $SU(2) \times SU(2)$ (algèbre longue) [219].

Dans le même ordre d'idée, on peut ajouter une algèbre de courant à l'algèbre de Virasoro: on obtient alors la somme semi-directe d'une algèbre de Kac-Moody (KM), qui est une algèbre de courant associée à une algèbre de Lie, et d'une algèbre de Virasoro. Un exemple de théorie possédant une telle symétrie est fourni par les modèles de Wess-Zumino-Witten (WZW), dont l'espace de phase est formé par un groupe de Lie. On verra plus loin le rôle important que jouent ces modèles dans l'étude des algèbres $\mathcal{W}$, mais soulignons d'ores et déjà que les algèbres de KM permettent de construire les théories minimales de Virasoro via la construction GKO (elle-même reposant

sur la construction de Sugawara) sur $SU(2)_k \times SU(2)_1/SU(2)_{k+1}$, sur laquelle nous reviendrons plus loin. La série des théories minimales de l'algèbre superconforme est elle aussi obtenue par une construction GKO sur $SU(2)_k \times SU(2)_2/SU(2)_{k+2}$, tandis que la série minimale de l'algèbre superconforme $N = 2$ est obtenue par $SU(2)_k \times U(1)_1/U(1)_{k+1}$. Dans ces deux derniers cas, il faut utiliser bien sûr des fermions pour construire certaines des algèbres impliquées dans le quotient, afin de pouvoir construire les charges (fermioniques) de supersymétrie.

On peut aussi mêler les deux approches, et construire des superalgèbres de KM en somme semi-directe avec l'algèbre superconforme, l'algèbre superconforme agissant comme une algèbre de dérivation sur la superalgèbre de KM [139]. Ce point de vue a été abordé dans ma thèse, où la notion d'algèbre de KM généralisée a été définie **[ERA1, ERA2, ERA5, ERA9]**.

Le même processus a lieu lorsqu'on rajoute un champ de dimension 3 [242]. L'algèbre ainsi formée (algèbre $\mathcal{W}_3$) admet comme modèles minimaux des théories conformes "inconnues" jusqu'alors. Il faut cependant souligner que dès qu'un champ primaire de dimension supérieure à 2 intervient dans une algèbre conforme, les relations de commutation deviennent non-linéaires. Ainsi, pour l'algèbre $\mathcal{W}_3$, on obtient

$$\begin{aligned} W(z)W(w) &= \frac{c/3}{(z-w)^6} + \frac{2T(w)}{(z-w)^4} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)^3} + \frac{2b^2\Lambda(w) + \frac{3}{10}\partial^2 T(w)}{(z-w)^2} \\ &\quad + \frac{b^2\partial\Lambda(w) + \frac{1}{15}\partial^3 T(w)}{z-w} \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

où $b = \frac{16}{22+5c}$ et $\Lambda(z) =: TT : (z) - \frac{3}{10}\partial^2 T(z)$ est un champ non-primaire (descendant de $T(z)$) de dimension conforme 4.

Malgré la complexité relative de ces relations de commutation, on peut quand même étudier ces algèbres. Ainsi, l'étude des algèbres dites $\mathcal{W}_N$, qui contiennent des champs primaires de poids conforme $h = n$, avec $n = 3, 4, \ldots, N-1$, fournit des théories minimales de charge centrale [169]

$$c = (N-1)\left(1 - \frac{N(N+1)}{(m+N-1)(m+N)}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{1.2.8}$$

Remarquons que de telles valeurs de la charge centrale sont obtenues par une construction de GKO sur $SU(N)_k \times SU(N)_1/SU(N)_{k+1}$, les générateurs W étant "portés" par les Casimirs de $SU(N)$ [15].

Il devient alors clair que l'étude de toutes les théories minimales de toutes les algèbres conformes étendues va engendrer un nombre considérable de théories conformes qui vont par ce principe devenir "connues". Ce programme simple en apparence souffre d'un grave handicap: on ne sait pas classer toutes les algèbres $\mathcal{W}$! Cependant, le nouveau problème est plus "petit" (simple) que le précédent. En fait, la classification d'un sous-ensemble d'algèbres $\mathcal{W}$ (dites algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$) a déjà été effectuée: c'est autour de cette classe d'algèbres et de la connection avec l'ensemble de toutes les algèbres $\mathcal{W}$ qu'a débuté mon travail après ma thèse.

Chapitre 2

Préliminaires et notations

Les algèbre de Kac-Moody (KM) jouent un rôle prépondérant dans l'étude des théories conformes pour deux raisons essentielles: d'une part elles permettent (mathématiquement) de construire explicitement les générateurs de l'algèbre de Virasoro à partir des générateurs de KM, et d'autre part elles fournissent des modèles (physiques) qui sont invariants conformes. Nous reviendrons sur ces modèles dans la section suivante, nous concentrant dans la présente section sur les définitions mathématiques. Avant d'aborder les algèbres de KM proprement dites, nous faisons un rapide survol des algèbres de Lie, sous-jacentes à la plupart des constructions que nous étudierons.

2.1 Brève revue des (super)algèbres de Lie

2.1.1 Algèbres de Lie

Il n'est pas dans notre intention de traiter exhaustivement des algèbres de Lie [163], nous prenons excuse de la présentation de quelques unes de leurs propriétés pour rappeler la terminologie employée. Cette présentation sera aussi utile pour la comparaison avec les superalgèbres de Lie, définies plus bas.

Une algèbre de Lie est une algèbre munie d'un produit antisymétrique, satisfaisant la règle de Leibnitz (identité de Jacobi). Toute algèbre de Lie peut être vue comme la somme semi-directe d'une partie **résoluble** et d'une partie **semi-simple**, la partie résoluble définissant l'idéal maximal résoluble de l'algèbre. Par résoluble, on entend une algèbre $\mathcal{L}$ dont la série

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \qquad , \qquad \mathcal{L}_n = [\mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_{n-1}] \tag{2.1.1}$$

finit sur $\{0\}$ pour un certain n. La partie semi-simple est la somme directe d'algèbres simples qui ont été classées. On distingue dans ces dernières les algèbres exceptionnelles (G_2, F_4 et E_n, $n = 6, 7, 8$) des séries classiques $s\ell(n)$, $so(n)$ et $sp(2n)$. Nous nous concentrerons sur les algèbres simples classiques, éventuellement semi-simples, avec la notoire exception de l'algèbre $g\ell(n)$, qui est la somme d'une algèbre résoluble $g\ell(1)$, commutative de dimension 1, et de l'algèbre simple $s\ell(n)$.

Nous utiliserons essentiellement deux présentations des algèbres simples:

- Soit en relations de commutation sur les générateurs t^a, $a = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G})$: $[t^a, t^b] = if^{ab}{}_c t^c$, où $f^{ab}{}_c$ sont les constantes de structure de l'algèbre. On dénote par η^{ab} la forme de Killing,

correspondant à l'unique produit scalaire non-dégénéré invariant de l'algèbre. Cette métrique est utilisée pour monter et descendre les indices: par exemple, $f^{abd} = f^{ab}{}_c \eta^{cd}$ est totalement antisymétrique dans ses indices. Pour les algèbre simples classiques, la forme de Killing est donnée par la trace dans la représentation fondamentale.

- Soit en racines (simples) et matrice de Cartan. L'algèbre est décomposée en générateurs de Cartan (abrégés en "Cartan") h_j, $j = 1, \ldots, r_G = \text{rang}(\mathcal{G})$, et en générateurs d'échelle $e_{\pm\alpha}$, vecteurs propres des Cartans $[h_j, e_{\pm\alpha}] = \pm\alpha^j e_{\pm\alpha}$. Les racines α se décomposent sur des **racines simples** α_j, $j = 1, \ldots, r_G$, dont les produits scalaires fournissent la matrice de Cartan. La matrice de Cartan définit univoquement l'algèbre simple, et on code les produits scalaires dans un diagramme de Dynkin. A une conjugaison près, tous les systèmes de racines simples sont isomorphes, ce qui fait que le diagramme de Dynkin est unique.

De nombreuses propriétés sont connues sur les algèbres de Lie simples, notamment leurs représentations irréductibles de dimension finie (appelées ci-après *irreps finies*) ont été classées. Elles sont toutes de plus haut poids, et le produit de telles représentations est toujours complètement réductible (*i.e.* décomposable en une somme directe d'irreps finies).

On utilisera le concept d'inclusion $\mathcal{H}$ **régulière** d'une algèbre $\mathcal{G}$: $\mathcal{H}$ est inclus régulièrement dans $\mathcal{G}$ si les racines de $\mathcal{H}$ forment un sous-ensemble de celles de $\mathcal{G}$. Cela implique que dans une représentation matricielle quelconque de $\mathcal{G}$, la représentation associée de $\mathcal{H}$ sera formée de (blocs de) sous-matrices, les générateurs de $\mathcal{H}$ formant un sous-ensemble de ceux de $\mathcal{G}$ (dans la même base). À l'opposé des inclusions régulières, les inclusions **singulières** sont construites en faisant des combinaisons linéaires des générateurs de $\mathcal{G}$ et ne sont pas associées à des racines de $\mathcal{G}$. Il n'y a pas de classification de telles inclusions, bien que celles-ci conduisent à des notions très utiles, tels que par exemple les espaces symétriques. On peut donc dire que l'intérêt réside parfois dans l'irrégularité.

Étant intéressé essentiellement par les algèbres (et non les groupes) de Lie, nous ne mentionnerons pas le délicat problème de compacité, et parlerons, par exemple, de $s\ell(n) \equiv s\ell_n$ sans distinguer les formes réelles $su(n, \mathbb{R})$ ou $s\ell(n, \mathbb{R})$, de leur recouvrement $s\ell(n, \mathbb{C})$.

Nous utiliserons aussi **l'enveloppante** $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ des algèbres de Lie $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, définie comme le quotient de l'algèbre tensorielle $\oplus_n \mathcal{G}^{\otimes n}$ par l'idéal engendré par les relations $[X, Y] = X \otimes Y - Y \otimes X$, $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. Ainsi, dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, le commutateur est relié au produit par $[X, Y] = XY - YX$, et les identités de Jacobi se réduisent à l'associativité de ce produit.

Exemple: $s\ell(2)$

$s\ell(2)$ est la plus simple des algèbres...simples, et à ce titre bien connue. Nous évoquons ses différentes propriétés pour fixer quelques notations. Elle est de rang 1 (une racine simple, un générateur de Cartan), et si on note par $e_\pm$ les générateurs "racines" et e_0 le Cartan, les relations de commutations prennent la forme

$$[e_0, e_\pm] = \pm e_\pm \qquad ; \qquad [e_+, e_-] = e_0 \tag{2.1.2}$$

Les irreps finies de cette algèbre sont classées par la valeur de son (opérateur de) Casimir $c_2 = e_0^2 + e_+e_- + e_-e_+$. Les représentations sont notées $\mathcal{D}_j$, $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$, de dimension $2j + 1$, satisfaisant

$c_2 = j(j+1)$. Elles sont de plus haut poids, le vecteur de plus haut poids ayant une valeur propre j sous e_0. Le produit de deux irreps finies obéit à la formule bien connue

$$\mathcal{D}_j \otimes \mathcal{D}_k = \bigoplus_{l=|j-k|}^{j+k} \mathcal{D}_l \tag{2.1.3}$$

2.1.2 Inclusions de $s\ell(2)$

Outre ses célèbres diagrammes, Dynkin a étudié (et classé) les différents plongements inéquivalents possibles d'une algèbre $s\ell(2)$ dans une algèbre de Lie donnée [71]. Pour caractériser ces plongements, on définit tout d'abord le **plongement principal** (dit aussi $s\ell(2)$ principal) dans une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$. Si on dénote par α_j, $j = 1, \ldots, r_G$ les racines simples de $\mathcal{G}$ et $e_{\pm\alpha_j}$ les générateurs associés, on introduit un générateur $e_- = \sum_{j=1}^{r_G} e_{-\alpha_j}$. Par construction, e_- est un élément nilpotent de $\mathcal{G}$, et Dynkin a montré que cet élément peut être associé univoquement à un $s\ell(2)$ dont e_+ est le générateur de racine négative. En pratique, les autres générateurs de $s\ell(2)$ prennent la forme $e_+ = \sum_{j=1}^{r_G} a_j e_{\alpha_j}$ et $e_0 = \sum_{j=1}^{r_G} h_{\alpha_j}$, où les coefficients a_j dépendent de l'algèbre considérée et h_{α_j} est le générateur de Cartan associé à α_j. Bien évidemment, un plongement équivalent est donné en échangeant les racines positives et négatives, le choix des coefficients 1 dans e_- ayant été choisi ici en vue des constructions que nous ferons par la suite. Pour indiquer un plongement principal (de $s\ell(2)$ dans $\mathcal{G}$), on utilisera la notation $s\ell(2) \subset_{pal} \mathcal{G}$.

A l'opposé du plongement principal, il y a le **plongement régulier** de $s\ell(2)$ dans $\mathcal{G}$. Dans ce cas, le générateur e_- de $s\ell(2)$ est construit sur une racine (simple) de $\mathcal{G}$, $e_{-\alpha_j}$, ce qui correspond à un $s\ell(2)$ engendré par $e_{\pm\alpha_j}$ et h_{α_j}, porté par une boule du diagramme de Dynkin. Pour une algèbre $\mathcal{G}$ simplement lacée ($\mathcal{G} = s\ell(n)$, $so(2n)$, ou E_m, $m = 6, 7, 8$), tous les plongements réguliers sont conjugués. Lorsque l'algèbre n'est pas simplement lacée, c'est la longueur des racines qui distingue les plongements non équivalents, et il y a donc deux plongements réguliers inéquivalents pour $\mathcal{G} = so(2n+1)$, $sp(2n)$, G_2 ou F_4.

Dans le cas général, tout plongement de $s\ell(2)$ dans $\mathcal{G}$ peut être vu comme le plongement principal de $s\ell(2)$ dans une sous-algèbre de $\mathcal{G}$. Ainsi, pour décrire tous les plongements de $s\ell(2)$ dans $\mathcal{G}$, il suffit de prendre l'ensemble des sous-algèbres de $\mathcal{G}$ (à une conjugaison près) et de considérer les plongements principaux dans ces sous-algèbres. Cependant, la correspondance n'est pas bi-univoque: il existe des sous-algèbres qui ne sont pas reliées par conjugaison, mais dont les plongements principaux fournissent des $s\ell(2)$ équivalents dans $\mathcal{G}$. En particulier, on peut se restreindre à des sous-algèbres régulières dans $\mathcal{G}$, à quelques exceptions qui ont été classées par Dynkin, et qui ne se produisent que pour les algèbres $\mathcal{G} = so(2n)$ ou E_n (ce dernier cas n'étant pas abordé ici), correspondant à des sous-algèbres $so(2k+1) \oplus so(2n-2k-1)$, $0 < k < n$, irrégulières dans $so(2n)$.

Dans tous les cas, un plongement de $s\ell(2)$ sera donc défini par les inclusions $s\ell(2) \subset_{pal} \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. On peut ainsi dresser des "formulaires" de classement des plongements de $s\ell(2)$ dans une algèbre donnée à partir de ses différentes sous-algèbres (voir par exemple [168]).

2.1.3 Superalgèbres de Lie

Une superalgèbre s'écrit comme la somme de deux sous-espaces $\mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$ satisfaisant

$$\mathcal{G}_0\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_0 \quad ; \quad \mathcal{G}_0\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_1 \quad ; \quad \mathcal{G}_1\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0 \tag{2.1.4}$$

Les éléments de $\mathcal{G}_0$ (resp. $\mathcal{G}_1$) sont dits de degré 0, pairs ou bosoniques (resp. de degré 1, impairs ou fermioniques). On définit alors un supercommutateur selon

$$[a,b] = ab - (-1)^{[a][b]}ba\,, \quad \forall a,b \in \mathcal{G} \quad \text{où } [c] \text{ est le degré de } c \tag{2.1.5}$$

Par construction, $\mathcal{G}_0$ est une algèbre de Lie, tandis que $\mathcal{G}_1$ forme une représentation de cette algèbre.

L'étude des superalgèbres de Lie suit celle des algèbres de Lie, tout en étant plus complexe [91, 137]. Tout d'abord, on définit les superalgèbres résolubles, comme pour les algèbres de Lie, eq. (2.1.1). Les superalgèbres simples (respectivement semi-simples) sont ensuite définies comme des superalgèbres ne possédant pas d'idéal (respectivement d'idéal résoluble) non-trivial. Une superalgèbre de Lie peut alors être vue comme la somme semi-directe d'une superalgèbre résoluble par une superalgèbre semi-simple. Toutefois, dans le cas des superalgèbres, semi-simple se signifie plus somme directe de superalgèbres simples.

Les superalgèbres simples ont été classées, mais leur ensemble contient encore des superalgèbres dont le nom (simples) n'est pas réellement adapté à leur structure. Dans la suite nous ne considérerons que le cas des superalgèbres **simples classiques basiques** (abrégées en superalgèbres basiques). Par classique, on entend des superalgèbres dont la partie fermionique $\mathcal{G}_1$ est complètement réductible en tant que représentation de $\mathcal{G}_0$. Par basique, on signifie une superalgèbre possédant une forme bilinéaire invariante non-dégénérée (qui peut être prise comme la trace dans la fondamentale).

Les superalgèbres basiques sont les généralisations directes des algèbres de Lie simples habituelles. Elles se classent en séries de type $s\ell(m|n)$, $m \neq n$, $ps\ell(n|n)$, $osp(m|2n)$, plus trois superalgèbres exceptionnelles $D(2,1,\alpha), G(3)$ et $F(4)$. La partie paire de ces superalgèbres est donnée respectivement par $s\ell(m) \oplus s\ell(n) \oplus g\ell(1)$, $s\ell(n) \oplus s\ell(n)$, $so(m) \oplus sp(2n)$, $3s\ell(2)$, $G_2 \oplus s\ell(2)$, et $s\ell(2) \oplus so(7)$. La partie impaire de ces superalgèbres forment les représentations $(m,\overline{n}) \oplus (\overline{m},n)$, $(n,\overline{n}) \oplus (\overline{n},n)$, $(m,2n)$, $(2,2,2)$, $(2,7)$ et $(2,8)$ de ces algèbres.

Pour poursuivre le parallèle avec les algèbres de Lie, les superalgèbres de Lie basiques admettent une présentation en racines simples et diagramme de Dynkin. Cependant, de par leur nature, elles possèdent des racines (simples) fermioniques qui compliquent la structure des superalgèbres simples. Par exemple, il existe plusieurs systèmes *inéquivalents* de racines simples, car possédant des nombres différents de racines fermioniques. Une racine fermionique peut être de carré nul, ou telle que son double est aussi une racine (bosonique), contrairement aux racines bosoniques.

Au niveau des irreps finies, de nombreuses complications apparaissent aussi. Par exemple, le produit de deux irreps finies n'est plus forcément complètement réductible, des parties indécomposables pouvant apparaître (cf l'exemple de $s\ell(1|2)$ plus bas).

Exemple: $osp(1|2)$

Cette superalgèbre est la version $\mathbb{Z}_2$-graduée de $s\ell(2)$. Elle est aussi de rang 1, et possède une racine simple fermionique, une racine positive bosonique, et un générateur de Cartan. Elle contient $s\ell(2)$ comme sous-algèbre régulière. Si on note $e_{\pm,0}$ les générateurs du $s\ell(2)$, et $f_\pm$ les générateurs fermioniques, les relations de commutation, outre celles de $s\ell(2)$ données en (2.1.2), prennent la

forme:

$$[e_0, f_\pm] = \pm\frac{1}{2} f_\pm \quad ; \quad [e_\pm, f_\pm] = 0 \qquad ; \qquad [e_\mp, f_\pm] = -\frac{1}{2} f_\mp \tag{2.1.6}$$

$$\{f_+, f_-\} = e_0 \quad ; \quad \{f_\pm, f_\pm\} = \pm e_\pm \tag{2.1.7}$$

Les représentations irréductibles de dimension finie sont notées $\mathcal{R}_j$. Elles sont de dimension $4j+1$, de plus haut poids, et se décomposent sous le $s\ell(2)$ selon $\mathcal{R}_j = \mathcal{D}_j \oplus \mathcal{D}_{j-1/2}$ pour $j \neq 0$, et $\mathcal{R}_0 = \mathcal{D}_0$. Le produit de deux telles représentations est complètement réductible [23, 213]:

$$\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}_k = \bigoplus_{\substack{m=|j-k| \\ m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}}^{j+k} \mathcal{R}_m \tag{2.1.8}$$

Exemple: $s\ell(1|2)$

Nous utiliserons aussi cette superalgèbre de rang 2. Elle contient comme partie bosonique $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$, et quatre générateurs fermioniques $f_{\epsilon,\eta}$, $\epsilon, \eta = \pm$. Les relations de commutation impliquant des fermions sont données par:

$$[e_\pm, f_{\pm,\eta}] = 0 \quad ; \quad [e_\pm, f_{\mp,\eta}] = \frac{\eta}{2} f_{\pm,\eta} \quad ; \quad [e_0, f_{\pm,\eta}] = \pm\frac{1}{2} f_{\pm,\eta} \quad ; \quad [b, f_{\epsilon,\pm}] = \pm\frac{1}{2} f_{\epsilon,\pm} \tag{2.1.9}$$

$$\{f_{+,+}, f_{-,-}\} = \frac{1}{2}(b - e_0) \quad ; \quad \{f_{+,-}, f_{-,+}\} = \frac{1}{2}(b + e_0) \quad ; \quad \{f_{\pm,\mp}, f_{\pm,\pm}\} = \frac{1}{2} e_\pm \tag{2.1.10}$$

$s\ell(1|2)$ contient de manière irrégulière $osp(1|2)$, les générateurs fermioniques de cette dernière étant exprimés en fonction de ceux de $s\ell(1|2)$ selon $f_+ = f_{++} + f_{+-}$ et $f_- = f_{-+} - f_{--}$.

Les irreps finies sont notées (b, j) et se divisent en deux classes:

(i) *Représentations typiques:* $b \neq \pm j$, la représentation est de dimension $8j$ et se décompose sous $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$ en

$$(b, j) = \mathcal{D}_j(b) \oplus \mathcal{D}_{j-1/2}(b - \frac{1}{2}) \oplus \mathcal{D}_{j-1/2}(b + \frac{1}{2}) \oplus \mathcal{D}_{j-1}(b)$$

où $\mathcal{D}_k(b)$ est une représentation $\mathcal{D}_k$ de $s\ell(2)$ et de valeur propre b sous le $g\ell(1)$.

On peut aussi regarder la décomposition d'une représentation typique sous $osp(1|2)$: $(b, j) = \mathcal{R}_j \oplus \mathcal{R}_{j-1/2}$, où bien sûr la valeur du $g\ell(1)$ a été perdue dans cette opération.

(ii) *Représentations atypiques:* $b = \pm j$, la représentation est de dimension $4j+1$. Lorsque $j = 0$, on trouve la représentation triviale, et dans les autres cas, la représentation se décompose sous $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$ en

$$(\pm j, j) = \mathcal{D}_j(\pm j) \oplus \mathcal{D}_{j-1/2}\Big(\pm(j + \frac{1}{2})\Big)$$

Les représentations atypiques forment une seule représentation de $osp(1|2)$: $(\pm j, j) = \mathcal{R}_j$.

Contrairement aux cas étudiés jusqu'alors, le produit de deux représentations n'est pas toujours complètement réductible. Plus précisément, si le produit de représentations atypiques est toujours

décomposable en somme de représentations irréductibles, ce n'est plus le cas lorsqu'on étudie le produit de représentations typiques. Par exemple, on a

$$(0,\frac{1}{2})\otimes(0,\frac{1}{2}) = (0,1)\oplus\left[(0,\frac{1}{2})\otimes(0,\frac{1}{2})\right]_A$$

où, si $(0,1)$ est bien une représentation typique, le reste du produit (en fait sa partie antisymétrique) est indécomposable. C'est ce qui rend l'étude des représentations des superalgèbres de Lie beaucoup plus délicat que celle des algèbres. Fort heureusement, dans la plupart des cas abordés ici (voir section 4.5), ce sont des produits de représentations atypiques qui seront utilisés. Les décompositions de ces produits sont donnés par:

$$\begin{aligned}(\pm j,j)\otimes(\pm k,k) &= (\pm(j+k),j+k)\bigoplus_{\substack{l=|j-k|+\frac{1}{2}\\ l\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+}}^{j+k-\frac{1}{2}}(\pm(j+k+\frac{1}{2})\ ,\ l) \qquad \forall\quad j,k\geq 0\\ (j,j)\otimes(-k,k) &= (j-k,j+k)\oplus(j-k,j+k-1)\oplus\cdots\oplus(j-k,|j-k|) \qquad (2.1.11)\end{aligned}$$

2.1.4 Plongements de $osp(1|2)$

De la même façon qu'on étudie les plongements de $s\ell(2)$ dans une algèbre de Lie, on peut étudier les plongements de $osp(1|2)$ dans une superalgèbre de Lie basique [160, 213]. La construction est très similaire au cas $s\ell(2)$ et repose elle aussi sur la notion de plongement principal. Toutefois, une première différence apparaît: pour pouvoir construire le générateur fermionique f_- de $osp(1|2)$, il faut que *toutes* les racines simples de la superalgèbre soient elles aussi fermioniques. Plus précisément, étant donné la multiplicité des bases inéquivalentes de racines simples, il faut que l'une de ces bases soit construite uniquement sur des racines fermioniques. Les superalgèbres simples possédant une telle propriété ont été classées: ce sont les superalgèbres $ps\ell(n|n)$, $s\ell(n\pm 1|n)$, $osp(2n|2n)$, $osp(2n\pm 1|2n)$, $osp(2n+2|2n)$ et $D(2,1,\alpha)$. Toutes ces superalgèbres admettent effectivement un plongement principal de $osp(1|2)$ (plongement super-principal), à l'exception de $ps\ell(n|n)$. Au niveau des superalgèbres semi-simples, ce sont les sommes directes de telles superalgèbres qui seront considérées. Un plongement principal de $osp(1|2)$ sera noté $osp(1|2)\subset_{pal}\mathcal{G}$.

Une fois les plongements super-principaux définis, tous les plongements de $osp(1|2)$ dans une superalgèbre $\mathcal{G}$ basique quelconque sont obtenus en construisant les plongements super-principaux de sous-superalgèbres de $\mathcal{G}$. Comme dans le cas des algèbres, on peut se restreindre à des superalgèbres semi-simples qui sont régulières dans $\mathcal{G}$, en rajoutant les sous-superalgèbres irrégulières suivantes:

- Pour $\mathcal{G}=osp(2n\pm 2|2n)$, il faut considérer les inclusions irrégulières $osp(2k\pm 1|2k)\oplus osp(2n-2k\pm 1|2n-2k)$, avec $0<k<n$;
- Pour $\mathcal{G}=osp(2n|2n)$, il faut considérer les inclusions irrégulières $osp(2k\pm 1|2k)\oplus osp(2n-2k\mp 1|2n-2k)$, avec $0<k<n$.

Pour finir, remarquons aussi que l'on peut définir un plongement principal de $s\ell(2)$ dans des superalgèbres de Lie simples. Il est simplement définit comme le plongement principal de $s\ell(2)$ dans la sous-algèbre bosonique semi-simple $\mathcal{G}_0$. Ce plongement est toujours possible (pour toute

superalgèbre semi-simple). Les différents plongements inéquivalents de $s\ell(2)$ dans une superalgèbre seront ensuite construits en considérant les plongements de $s\ell(2)$ dans $\mathcal{G}_0$.

Bien évidemment, bien que $s\ell(2)$ soit une sous-algèbre de $osp(1|2)$, un plongement de $s\ell(2)$ ne sera "prolongeable" à un plongement de $osp(1|2)$ que dans les cas où le plongement principal de $osp(1|2)$ existe. Dans ce cas, si $s\ell(2) \subset_{pal} \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{G}_0$ définit le plongement de $s\ell(2)$, et si $osp(1|2) \subset_{pal} \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ définit celui du $osp(1|2)$, l'algèbre $\mathcal{H}_0$ ne sera rien d'autre que la partie bosonique de la superalgèbre $\mathcal{H}$.

2.2 Algèbres de Kac-Moody

Les algèbres de Kac-Moody ont été introduites par Moody et Kac [136, 181]. Mathématiquement, elles correspondent à des algèbres de Lie dont la matrice de Cartan est dégénérée et de corang 1. Elles peuvent aussi être vues comme une extension centrale d'une algèbre de boucle définie sur une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension finie. Sans entrer dans ces détails, nous donnerons simplement les relations de commutation de cette algèbre de KM. Cette algèbre, notée $\mathcal{G}_k^{(1)}$, est engendrée par les éléments t_m^a, $m \in \mathbb{Z}$, $a = 1, \ldots, \dim\mathcal{G}$ et par un élément central (*i.e.* qui commute avec l'ensemble de l'algèbre) k, soumis aux relations:

$$[t_m^a\,,\, t_n^b] = i f^{ab}{}_c\, t_{m+n}^c + k\, m\, \eta^{ab} \delta_{m+n,0} \tag{2.2.1}$$

où $f^{ab}{}_c$ sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie sous-jacente $\mathcal{G}$ et η^{ab} est sa forme de Killing. Notons que les générateurs t_0^a engendrent $\mathcal{G}$, qui est donc une sous-algèbre de $\mathcal{G}_k^{(1)}$.

Comme pour l'algèbre de Virasoro, les relations de commutation de $\mathcal{G}_k^{(1)}$ peuvent être codées en OPEs:

$$J^a(z) J^b(w) = i f^{ab}{}_c \frac{J^c(w)}{z-w} + \frac{k\,\eta^{ab}}{(z-w)^2} \tag{2.2.2}$$

$$J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} t_n^a \;\Rightarrow\; t_n^a = \oint_0 dz\, z^n\, J^a(z) \tag{2.2.3}$$

Dans la suite, nous utiliserons aussi une version classique (en crochet de Poisson) de $\mathcal{G}_k^{(1)}$, où le produit est commutatif, et la structure de Poisson est donnée par

$$\{J^a(z)\,,\, J^b(w)\} = i f^{ab}{}_c\, J^c(w)\, \delta(z-w) + k\,\eta^{ab}\, \delta'(z-w) \tag{2.2.4}$$

Les algèbres de KM peuvent être vue, du point de vue physique, comme des algèbres de courant [111]. Leurs représentations irréductibles de plus haut poids ont été classées (selon leur niveau k) par McDonald et Kac. Leur construction fait appel aux opérateurs de Vertex [93, 110, 117, 217], et à la construction dite de Kac et Wakimoto [140, 236]. Nous n'en parlerons pas ici.

2.3 Superalgèbres de Kac-Moody et supersymétrie

Nous aurons aussi besoin des versions $\mathbb{Z}_2$-graduées des algèbres de KM. Ces dernières existent sous plusieurs formes, suivant la façon dont est induite la graduation $\mathbb{Z}_2$.

Tout d'abord, on peut remplacer l'algèbre de Lie sous-jacente (de dimension finie) par une superalgèbre de Lie. À partir de ces superalgèbres, on définit des superalgèbres de KM, qui sont les algèbres de courant de ces superalgèbres. Si on note par $B^a(z)$, $a = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G}_0)$ les générateurs bosoniques et par $F^\alpha(z)$, $\alpha = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G}_1)$ les générateurs fermioniques, les OPEs d'une superalgèbres de KM sont données par

$$B^a(z)B^b(w) = if^{ab}{}_c \frac{B^c(w)}{z-w} + \frac{k_0\,\eta^{ab}}{(z-w)^2} \tag{2.3.1}$$

$$B^a(z)F^\beta(w) = if^{a\beta}{}_\gamma \frac{F^\gamma(w)}{z-w} \tag{2.3.2}$$

$$F^\alpha(z)F^\beta(w) = if^{\alpha\beta}{}_c \frac{B^c(w)}{z-w} + \frac{k_1\,\eta^{\alpha\beta}}{(z-w)^2} \tag{2.3.3}$$

Les deux premières OPEs sont associées à des commutateurs lorsqu'on revient à un calcul en modes B^a_m et F^α_m, alors que la dernière fournit un anti-commutateur, en accord avec le caractère fermionique des générateurs concernés. On mentionnera l'existence de construction en opérateurs de vertex pour ces superalgèbres [112].

Une autre façon d'obtenir une algèbre de KM $\mathbb{Z}_2$-graduée est d'utiliser un formalisme en superchamps. Pour cela, on introduit des variables de Grassmann qui anticommutent et sont de carré nul. En partant d'une algèbre de Lie, on définit des super-courants

$$J^a(Z) = J^a(z,\theta) = \psi^a(z) + \theta\, j^a(z) \tag{2.3.4}$$

où $j^a(z)$ est le courant habituel de KM, tandis que $\psi^a(z)$ est un fermion se transformant par action adjointe sous les courants $j^a(z)$. La variable de Grassmann θ ayant un caractère anticommutant, ce super-courant est globalement impair. Notons aussi que la nilpotence de θ fait que l'égalité (2.3.4) est un développement en série *complet* de cette variable. On obtient ainsi une algèbre de super-KM, dont les OPEs s'écrivent:

$$J^a(Z)J^b(W) = if^{ab}{}_c \frac{\theta-\zeta}{Z-W} J^c(W) + \frac{k\,\eta^{ab}}{Z-W} \tag{2.3.5}$$

$$\text{avec } Z=(z,\theta) \quad , \quad W=(w,\zeta) \quad , \quad Z-W = z-w+\theta\zeta \tag{2.3.6}$$

En utilisant la forme (2.3.4) et le développement (complet)

$$\frac{1}{(Z-W)^n} = \frac{1}{(z-w)^n}\left(1 - n\,\frac{\theta\zeta}{z-w}\right), \tag{2.3.7}$$

on retrouve des OPEs usuelles pour $j^a(z)$ et $\psi^a(z)$, en projetant sur les variables de Grassmann θ et ζ, à savoir:

$$j^a(z)j^b(w) = if^{ab}{}_c \frac{j^c(w)}{z-w} + \frac{k\,\eta^{ab}}{(z-w)^2} \tag{2.3.8}$$

$$j^a(z)\psi^b(w) = if^{ab}{}_c \frac{\psi^c(w)}{z-w} \tag{2.3.9}$$

$$\psi^a(z)\psi^b(w) = \frac{k\,\eta^{ab}}{z-w} \tag{2.3.10}$$

Enfin, on peut lier les deux approches pour obtenir des superalgèbres de super-KM. On part simplement d'une superalgèbre de dimension finie, et on utilise le formalisme en superchamps présenté ci-dessus. Il faut noter toutefois que les superchamps ont une parité adaptée au caractère $\mathbb{Z}_2$-gradué de la superalgèbre. Ils prennent la forme:

$$B^a(Z) = B^a(z,\theta) = \psi^a(z) + \theta\, j^a(z) \tag{2.3.11}$$
$$F^\alpha(Z) = F^\alpha(z,\theta) = \chi^\alpha(z) + \theta\, f^\alpha(z) \tag{2.3.12}$$

où cette fois-ci les courants habituels de KM sont $j^a(z)$ (bosonique) et $f^\alpha(z)$ (fermionique), tandis que $\chi^\alpha(z)$ est de caractère bosonique. Ainsi, les deux super-courants $B^a(Z)$ et $F^\alpha(Z)$ sont respectivement impairs et pairs. Les OPEs sont données par (2.3.5), où $J^a \equiv B^a$, ainsi que par

$$B^a(Z)F^\beta(W) = i f^{a\beta}{}_\gamma \frac{\theta-\zeta}{Z-W} F^\gamma(W) \tag{2.3.13}$$
$$F^\alpha(Z)F^\beta(W) = i f^{\alpha\beta}{}_c \frac{\theta-\zeta}{Z-W} B^c(W) + \frac{k\,\eta^{\alpha\beta}}{Z-W} \tag{2.3.14}$$

On notera enfin que, dans les trois cas présentés ici, si on veut définir le super-groupe [23] associé à la superalgèbre, il faut introduire des "super-paramètres", basés sur des variables de Grassmann, afin que le produit des générateurs par les "super-paramètres" soit globalement pair, et que l'on puisse prendre l'exponentiel de ces objets. Ainsi, même dans le cas d'une algèbre de courant (sans variable de Grassmann), le groupe associé fera toujours apparaître les variables de Grassmann.

2.4 Constructions de Sugawara et de GKO

La construction de Sugawara [222] permet d'obtenir les générateurs de Virasoro dans l'enveloppante d'une algèbre de KM $\mathcal{G}_k^{(1)}$. Si l'on dénote par $J^a(z)$ les générateurs de $\mathcal{G}_k^{(1)}$, les générateurs de Virasoro sont donnés par:

$$T_G(z) = \frac{1}{k+h_G^\vee}\,\eta_{ab}\ :J^a(z)J^b(z):\tag{2.4.1}$$

où $h_G^\vee$ est le nombre de Coxeter dual de $\mathcal{G}$, η_{ab} l'inverse de la métrique de Killing et $:J^a(z)J^b(z):$ est la partie régulière du produit $J^a(z)J^b(z)$, comme en (1.1.2). Un simple calcul à partir des OPEs (2.2.2) et des techniques présentées en section 2.6 montre que $T_G(z)$ satisfait l'OPE (1.1.2) avec une charge centrale

$$c_G = \frac{k\,\mathrm{dim}\mathcal{G}}{k+h_G^\vee}\tag{2.4.2}$$

En prime de cette construction, on obtient une somme semi-directe $\mathcal{G}_k^{(1)}\square\mathcal{V}$, l'action des générateurs de Virasoro sur les courants de KM prenant la forme:

$$T(z)J^a(w) = \frac{J^a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^a(w)}{z-w}\tag{2.4.3}$$

Cette dernière OPE prouve que $J^a(z)$ est un champ primaire de dimension conforme 1. Ainsi, pour chaque algèbre de KM, on peut construire une algèbre de Virasoro de charge centrale c_G. Malheureusement, les théories minimales ne font pas partie de la "série" c_G. Pour obtenir ces

théories (et d'autres), il faut modifier la construction de Sugawara: c'est la construction de Goddard-Kent-Olive (GKO) [109].

Pour cela, on considère tout d'abord une sous-algèbre $\mathcal{H}$ d'une algèbre $\mathcal{G}$. Cette inclusion s'induit au niveau des algèbres de KM: $\mathcal{H}_k^{(1)} \subset \mathcal{G}_k^{(1)}$. On construit alors à la Sugawara les générateurs de Virasoro $T_G(z)$ et $T_H(z)$. De part leur construction, $T_G(z)$ et $T_H(z)$ agissent de la même façon sur les générateurs $J^\alpha(z)$ de $\mathcal{H}_k^{(1)}$. Cette propriété permet de montrer que le générateur

$$T_{G/H}(z) = T_G(z) - T_H(z) \tag{2.4.4}$$

forme une algèbre de Virasoro de charge centrale

$$c_{G/H} = c_G - c_H = \frac{k\,\mathrm{dim}\mathcal{G}}{k+h_G^\vee} - \frac{k\,\mathrm{dim}\mathcal{H}}{k+h_H^\vee} \tag{2.4.5}$$

fournissant de nouveaux modèles invariants conformes. Cependant, pour obtenir les modèles conformes minimaux, il faut encore compliquer la construction, et considérer deux algèbres de Lie (de dimension finie) $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ contenant toutes deux une sous-algèbre $\mathcal{L}$. De cette façon, on peut construire une sous-algèbre "diagonale" $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$. Au niveau des algèbres de KM, $\mathcal{L}_{k+m}^{(1)}$ est une sous-algèbre "diagonale" de $\mathcal{G}_k^{(1)} \oplus \mathcal{H}_m^{(1)}$. On construit alors à la Sugawara les générateurs de Virasoro $T_G(z)$, $T_H(z)$ et $T_L(z)$. Comme ci-dessus, le générateur

$$T_{(G+H)/L}(z) = T_G(z) + T_H(z) - T_L(z) \tag{2.4.6}$$

engendre une algèbre de Virasoro de charge centrale

$$c_{(G+H)/L} = c_G + c_H - c_L = \frac{k\,\mathrm{dim}\mathcal{G}}{k+h_G^\vee} + \frac{m\,\mathrm{dim}\mathcal{H}}{m+h_H^\vee} - \frac{(k+m)\mathrm{dim}\mathcal{L}}{k+m+h_L^\vee} \tag{2.4.7}$$

fournissant une nouvelle "série" de charges centrales. Elle permet d'obtenir les théories minimales de l'algèbre de Virasoro et de ses extensions (comme mentionné ci-dessus). Il faut noter toutefois que cette construction en quotient n'autorise plus une action "naturelle" des générateurs de Virasoro sur les générateurs de KM (*i.e.* ces derniers ne sont plus des champs primaires).

Finalement, la même construction peut être faite dans la version classique des algèbres de KM, la seule différence reposant sur le coefficient $k + h_G^\vee$, qui devient $2k$ dans l'expression (2.4.1). Les charges centrales obtenues sont cependant nulles.

2.5 Crochets de Poisson et de Dirac

Comme il y a été fait allusion, nous allons étudier des versions classiques des algèbres $\mathcal{W}$, les crochets de Poisson originels étant donnés par l'action de WZW. Cependant, la construction repose sur l'imposition de contraintes, ce qui oblige à utiliser de nouveaux crochets, compatibles avec les contraintes que l'on a choisies: cette procédure, usuelle en systèmes contraints, a été décrite par Dirac [59], d'où le nom de crochets de Dirac donnés à ces nouveaux crochets. Nous présentons donc ici un court aperçu de cette technique.

Dans le calcul des crochets de Dirac, on distingue tout d'abord les contraintes dites de première classe, qui ont entre elles des crochets de Poisson faiblement nuls. Par faiblement nuls, on entend des

crochets qui sont nuls modulo les contraintes elles-même. Dit autrement, des crochets de Poisson sont dits faiblement nuls lorsque, *une fois qu'on les a calculés*, si on applique les contraintes au résultat, on trouve zéro. Ces contraintes de première classe définissent le groupe que l'on veut jauger, et l'annulation (faible) de leur crochet de Poison assure le caractère groupe de l'objet. À partir de ces contraintes première classe, on définit un second ensemble de contraintes, dites de seconde classe[1] telles que la matrice Δ définie par $\Delta_{ij} = \{\chi_i, \chi_j\}$, où $\{\chi_i\,, i \in J\}$ est l'ensemble des contraintes (première et seconde classe), est inversible. Ces nouvelles contraintes correspondent à une fixation de jauge. Une fois définie Δ^{-1}, les crochets de Dirac sont donnés par

$$\{A, B\}_* \simeq \{A, B\} - \{A, \chi_i\} \left(\Delta^{-1}\right)^{ij} \{\chi_j, B\} \tag{2.5.1}$$

où l'égalité est faible, *i.e.* modulo les contraintes (première et deuxième classe).

Ces nouveaux crochets (de Dirac) ont deux propriétés remarquables: d'une part, par construction, les contraintes n'apparaissent pas à droite de ces crochets, et d'autre part les contraintes sont "orthogonales" à tous les objets pour ces mêmes crochets:

$$\{A, \chi_i\}_* = 0 \qquad \forall A, \forall i \in J \tag{2.5.2}$$

Ainsi, pour ces crochets, les contraintes sont séparées des autres objets de la théorie, rendant la quantification plus aisée.

En pratique, il faut donc tout d'abord définir un ensemble de contraintes première classe (c'est-à-dire déterminer le groupe de jauge), puis trouver un deuxième ensemble de contraintes (seconde classe) qui rende Δ inversible (c'est-à-dire trouver une fixation de jauge). Ainsi, au niveau algébrique, en partant d'une algèbre en crochets de Poisson, suivant les contraintes (première et seconde classe) choisies, on trouvera des algèbres (en crochets de Dirac) différentes. Au niveau des modèles physiques, les crochets de Poisson sont les crochets canoniques d'une action originelle, et suivant le groupe que l'on veut jauger et la fixation de jauge choisie, on trouvera une action (fixée de jauge) différente.

Un exemple d'un tel calcul sera donné en section 6.1, sur un cas simple.

2.6 OPEs et ordre normal

On a déjà mentionné que seule la partie irrégulière du produit de deux générateurs était utile pour le calcul des commutateurs des modes sous-jacents. Le reste du produit, noté $: A(z)B(w) :$, est donc régulier (lorsque z tend vers w). Il permet donc de définir une régularisation du produit de $A(z)$ par $B(z)$. Cette régularisation peut aussi être écrite (en utilisant d'une part le développement des champs $A(z)$ et $B(z)$ en puissances entières de z et d'autre part le fait que les OPEs ne contiennent que des pôles d'ordre finis en $z - w$):

$$: AB : (z) =: A(z)B(z) := \oint_z \frac{dw}{z-w} A(z)B(w) \tag{2.6.1}$$

[1]Strictement parlant, Dirac utilisait *seconde classe* pour désigner l'ensemble des contraintes intervenant dans Δ (inversible). Nous préférons réserver "seconde classe" pour les contraintes *supplémentaires* qui, ajoutées au premières classes, rendent Δ inversible. Ainsi, les contraintes secondes classes de Dirac sont formées par l'ensemble des contraintes première classe et des contraintes dites ici de seconde classe.

où l'intégrale est faite sur un contour de $\mathbb{C}$ qui entoure z.

On définit le produit régularisé de plusieurs champs itérativement selon

$$:A_1A_2\cdots A_n: = :A_1: :A_2\cdots A_n::$$

Soulignons tout de suite que ce produit régularisé n'est *pas* associatif ($::AB:C:\neq:A:BC::$), *ni* commutatif ($:AB:\neq:BA:$). Pour pouvoir effectuer des calculs (commutateurs) en algèbres $\mathcal{W}$, il faut pouvoir sélectionner la partie irrégulière (l'OPE) du produit de $:AB:(z)$ par $C(w)$. Cela se fait grâce à des formules du type théorème de Wick. Pour différencier l'OPE du produit complet, nous la noterons temporairement $\underbrace{A(z)B(w)}$, si bien que le produit complet peut se décomposer en

$$A(z)B(w) = \underbrace{A(z)B(w)} + :A(z)B(w):$$

Les théorèmes de Wick prennent alors la forme (voir par exemple **[ERA4]**)

$$\begin{aligned} :AB:(z)\,C(w) &= :A(z):B(z)C(w)::+:A(z)\underbrace{B(z)C(w)}:+B(z)\underbrace{A(z)C(w)} \\ A(z)\,:BC:(w) &= :A(z):B(w)C(w)::+:B(w)\underbrace{A(z)C(w)}:+\oint_w \frac{dx}{x-w}\,\underbrace{A(z)B(x)}C(w) \end{aligned}$$

Les formules ci-dessus ont été données à titre d'exemple, pour des champs bosoniques. Les mêmes calculs peuvent aussi être faits en introduisant des fermions ou des superchamps.

Finalement, notons que ce produit régularisé peut être associé à un ordre normal sur les modes des champs:

$$:A_nB_m: = \begin{cases} A_nB_m & \text{si} \quad n \le -h_A \\ B_mA_n & \text{si} \quad n > -h_A \end{cases} \qquad \text{où } h_A \text{ est le poids conforme de } A \tag{2.6.2}$$

Chapitre 3

Construction des algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$: cas classique

Les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ apparaissent comme symétrie des modèles de Toda (en théorie des champs). Leur construction par réduction Hamiltonienne, faisant appel à la méthode développée par Drinfeld et Sokolov [70], permet de relier ces modèles à des Lagrangiens invariants conformes construits sur les algèbres de Lie: les modèles de Wess-Zumino-Witten, qui sont de type modèles σ non-linéaires.

3.1 Actions de Wess-Zumino-Witten et de Toda

On obtient les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ en construisant des Lagrangiens dont la symétrie est exactement l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Pour cela, on part d'une action de Wess-Zumino-Witten (WZW) [237, 238] qui est un modèle conforme ayant pour symétrie (à gauche et à droite) un groupe de Lie de dimension finie. L'action de WZW prend la forme suivante

$$S_0(g) = \frac{\kappa}{2}\int d^2x < g^{-1}\partial_+ g\,,\, g^{-1}\partial_- g > + \frac{\kappa}{3}\int dy d^2x < g^{-1}\partial_y g\,,\, [g^{-1}\partial_+ g\,,\, g^{-1}\partial_- g)] > \qquad (3.1.1)$$

où g est un élément du groupe de Lie G associé à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Les intégrales sont effectuées, d'une part sur une surface bidimensionnelle Σ (pour le premier terme), et d'autre part sur une surface tridimensionnelle M dont le bord est Σ (pour le second terme). L'action de WZW est indépendante du choix de M (pourvue qu'elle ait pour bord Σ) car la 3-forme intégrée est fermée. Nous avons donc bien une action définie sur une variété bidimensionnelle. Nous avons introduit les variables du cône de lumière $2x_\pm = t \pm x$, ainsi que la forme de Killing $< .,. >$ de $\mathcal{G}$. Cette action est invariante sous les transformations *globales* $g(x,t) \to u(x_-)\, g(x,t)\, v(x_+)$, où $u(x_-)$ et $v(x_+)$ sont des éléments du groupe de KM associé à $\mathcal{G}$. Ces transformations sont globales dans le sens où u et v ne dépendent pas séparément de x et t. Les courants associés sont définis par

$$J_+(x,t) = \kappa g^{-1}\partial_+ g = J_+^a(x,t)\, t_a \quad \text{et} \quad J_-(x,t) = -\kappa \partial_- g\, g^{-1} = J_-^a(x,t)\, t_a \qquad (3.1.2)$$

où t_a, $a = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G})$, sont les matrices de la représentation fondamentale de $\mathcal{G}$. Les équations du mouvement ne sont rien d'autre que l'expression de la chiralité de ces courants:

$$\partial_\pm J_\mp(x,t) = 0 \qquad (3.1.3)$$

Leurs crochets de Poisson forment deux copies d'une algèbre de KM (classique) associée à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe considéré. Du fait de l'invariance sous les transformations de KM, on déduit immédiatement que cette action est aussi invariante conforme, les transformations conformes étant engendrées par les générateurs[1]

$$T_{\pm}(x_{\pm}) = tr\left(J_{\pm}(x_{\pm})^2\right) \tag{3.1.4}$$

où tr est la trace dans la fondamentale, selon la construction de Sugawara. Ainsi, l'action de WZW fournit un cadre physique à la construction de Sugawara.

A partir de l'action de WZW, on construit tout d'abord un nouveau modèle invariant *localement* sous deux algèbres $\mathcal{G}_{\pm}$ nilpotentes de $\mathcal{G}$ par un jaugeage habituel:

$$g(x,t) \;\rightarrow\; u(x,t)g(x,t)v(x,t) \quad \text{avec} \quad u \in G_+ \;,\; v \in G_- \tag{3.1.5}$$

ce qui conduit à une action

$$\begin{aligned} S(g,A_+,A_-) \;&=\; S_0(g) + \kappa \int d^2x \left[< A_+ \,,\, \partial_- g\, g^{-1} > + < g^{-1}\partial_+ g \,,\, A_- > \right. \\ &\qquad \left. + < g^{-1} A_+ g \,,\, A_- > \right] \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Ce jaugeage est rendu possible grâce à la formule de Polyakov-Wiegmann:

$$S_0(gg') = S_0(g) + S_0(g') + \kappa \int d^2x \;< g^{-1}\partial_+ g \,,\, \partial_- g'\, g'^{-1} > \tag{3.1.7}$$

ainsi qu'au fait que $u(x,t)$ et $v(x,t)$ étant nilpotents, leur action de WZW est nulle. On trouve alors l'action (3.1.6) en posant $A_+ = u^{-1}\partial_+ u$ et $A_- = (\partial_- v)v^{-1}$. Les transformations de jauge qui laissent cette action invariante prennent la forme (3.1.5) et

$$A_+ \;\rightarrow\; u\, A_+\, u^{-1} + \kappa(\partial_+ u)u^{-1} \qquad ; \qquad A_- \;\rightarrow\; v\, A_-\, v^{-1} + \kappa v^{-1}(\partial_- v) \tag{3.1.8}$$

Cette action n'est toutefois pas l'action "finale" qui permet de construire des algèbres $\mathcal{W}$. Pour obtenir une telle action, il faut contraindre les courants de KM et choisir des algèbres nilpotentes $\mathcal{G}_{\pm}$ "adaptées". Par adaptées, nous entendons des algèbres nilpotentes qui sont duales l'une de l'autre par rapport à la forme de Killing. Ceci implique une décomposition de l'algèbre de départ $\mathcal{G}$ en une somme directe $\mathcal{G} = \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_+$, où $\mathcal{G}_0$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ qui contient au moins la sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$. Notons que nous obtenons ainsi une graduation de l'algèbre $\mathcal{G}$:

$$[\mathcal{G}_{\pm}, \mathcal{G}_{\pm}] \subset \mathcal{G}_{\pm} \quad ; \quad [\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_{\pm}] \subset \mathcal{G}_{\pm} \quad \text{et} \quad [\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0] \subset \mathcal{G}_0 \tag{3.1.9}$$

Les contraintes, elles, sont bien-sûr choisies en correspondance directe avec les sous-algèbres jaugées. Elles doivent aussi être de première classe (dans la terminologie de Dirac), c'est-à-dire que leurs crochets de Poisson doivent s'annuler. Elles prennent la forme

$$J_{\pm}(x) = \mu_{\mp} + j^{red}_{\pm}(x) \quad \text{avec} \quad j^{red}_{\pm}(x) \in (\mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_{\pm}) \;,\quad \mu_{\pm} \in \mathcal{G}_{\pm} \tag{3.1.10}$$

[1]Strictement parlant, il faut faire une rotation de Wick $t \rightarrow it$ pour retrouver les générateurs $T_+(z)$ et $T_-(\bar{z})$ de la section 1.1, avec $z = x + it$.

Les éléments $\mu_\pm$ sont des matrices constantes (en x et t) qui appartiennent à la représentation fondamentale de $\mathcal{G}$. Ils sont aussi choisis de telle sorte que l'action obtenue soit encore invariante conforme. Une façon générique de résoudre ces différentes contraintes est de considérer un plongement quelconque de $s\ell(2)$ dans l'algèbre $\mathcal{G}$: les éléments $\mu_\pm$ correspondent aux générateurs $e_\pm$ du $s\ell(2)$ lorsqu'ils sont représentés dans la représentation fondamentale de $\mathcal{G}$. Si on note $\mu_0 = [\mu_+, \mu_-]$ le représentant du générateur de Cartan de $s\ell(2)$ dans cette même fondamentale, les générateurs de l'algèbre de Virasoro s'écrivent

$$T(z) = T_G(z) - tr\,(\mu_0 J(z)) \tag{3.1.11}$$

ce qui correspond à une charge centrale $c = -\kappa\, tr(\mu_0^2)$ (en crochet de Poisson). La décomposition $\mathcal{G} = \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_+$ est associée dans ce cas à un découpage de $\mathcal{G}$ selon les espaces propres de μ_0, $\mathcal{G}_{-,0,+}$ correspondant aux valeurs propres respectivement négatives, nulles ou positives.

Remarque 3.1.1 *Strictement parlant, cette analyse n'est exacte que lorsque μ_0 définit une graduation entière de $\mathcal{G}$. Dans le cas d'une graduation demi-entière, les générateurs de grade $\pm\frac{1}{2}$ doivent être séparés en deux pour garder un ensemble de contraintes de première classe, par une procédure dite de "halving". On verra (cf section 4.1) que c'est toujours possible, grâce notamment à l'ajout d'un $g\ell(1)$ (noté y), tel que que la graduation de $\mathcal{G}$ par $e_0 + y$ soit entière. Dans la suite, nous ne traiterons que le cas de graduation entière, gardant en mémoire que la graduation est éventuellement décalée par l'ajout d'un $g\ell(1)$.*

La nouvelle action prend la forme

$$\begin{aligned} S(g, A_+, A_-) &= S_0(g) + \kappa \int d^2x \,[< A_+, (\partial_- g\, g^{-1} - \mu_-) > + < (g^{-1}\partial_+ g - \mu_+), A_- > \\ &\quad + < g^{-1} A_+ g, A_- >] \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Remarquons que les champs $A_\pm$ peuvent être vus comme des multiplicateurs de Lagrange qui implémentent les contraintes au niveau de l'action de WZW. Le passage de $S_0(g)$ à $S(g, A_+, A_-)$ est une **réduction Hamiltonienne** de (l'action basée sur) $\mathcal{G}$ [17,84,85,198].

Une fixation de jauge partielle de cette action est donnée par $A_\pm = 0$, ce qui laisse une invariance de jauge partielle associée à des transformations (3.1.5) pour des éléments de la forme $u(x_-)$ et $v(x_+)$. Pour ces transformations de jauge résiduelles, deux fixations sont habituellement retenues [70]: la jauge **diagonale** ou la jauge de **plus haut poids**, que nous décrivons ci-dessous. Le modèle obtenu est alors invariant [162,212] sous une algèbre $\mathcal{W}$ notée $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ et est de plus intégrable [11].

Au niveau algébrique, les crochets de Poisson des générateurs de $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ sont déduits de ceux des courants de KM du modèle de WZW en tenant compte des contraintes que l'on a imposées. Il faut déterminer des générateurs W tels que l'ensemble des W et des χ_i forme une base: les générateurs W ("orthogonaux" aux contraintes pour les crochets de Dirac) formeront une algèbre polynomiale qui est donc l'algèbre $\mathcal{W}$ associée aux contraintes χ_i.

3.1.1 Jauge diagonale et action de Toda

Cette jauge est utilisée pour obtenir une forme simple de l'action. Elle est aussi utilisée dans la transformation de Miura, que nous aborderons plus bas. Dans cette fixation de jauge, on utilise les

transformations de jauge résiduelles pour amener les courants $J_{\pm}^{cont}$ à être de la forme $\mu_{\mp} + j_0$, où j_0 est dans $\mathcal{G}_0$. On obtient alors une action sur $\dim(\mathcal{G}_0)$ champs, prenant la forme:

$$S_{Toda}(g_0) = S_0(g_0) + \kappa \int d^2x \ < g_0 \mu_+ g_0^{-1} \, , \, \mu_- >$$

Dans le cas où $\mu_{\pm}$ sont associés au plongement principal, l'action obtenue dépend de r_G champs et correspond à l'action de Toda en théorie des champs. Dans les autres cas, on obtient de nouveaux modèles dits Toda généralisés, dont la $\mathcal{W}$-symétrie a été montrée en [28].

3.1.2 Jauge de plus haut poids et algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$

On a vu que les crochets de Dirac permettent de définir les relations de commutation (crochets de Poisson) de l'algèbre $\mathcal{W}$. Cependant, du point de vue physique, il est plus naturel de chercher à représenter les générateurs W à partir de l'algèbre de KM de départ. C'est possible en choisissant la jauge de plus haut poids. Dans cette jauge, les transformations de jauge sont fixée en prenant une forme particulière pour les courant $j_{cont}(z)$. En effet, les groupes $G_{\pm}$ agissent sur ces courants par action coadjointe:

$$j_{cont}^{g} = g j_{cont} g^{-1} + k \, g^{-1} \partial g \tag{3.1.13}$$

Or, par définition, la forme globale de $j_{cont} = \mu_- + j_{red}$, avec $j_{red} \in \mathcal{G}_+$, est préservée par les transformations de jauge. En particulier, la seule composante de j_{cont} portée par un élément de $\mathcal{G}_-$ est μ_- et n'est pas affectée par les transformation de jauge (en accord avec les contraintes de départ). La construction reposant sur le $s\ell(2)$ de générateurs $\{\mu_{\pm}, \mu_0\}$, il est facile de voir que demander que j_{red} prenne la forme $j_{hw} = \sum_j W^j \mu_j$ où μ_j sont les plus hauts poids de ce $s\ell(2)$ (dans la représentation fondamentale de $\mathcal{G}$) va fixer tous les paramètres de jauge. Dit autrement, la fixation de jauge est obtenue en cherchant l'élément unique $g \in G_{\pm}$ (dépendant des champs initiaux) tel que la transformation (3.1.13) amène j_{cont} sous la forme $\mu_- + j_{hw}$. Dans cette jauge, les générateurs W^j (invariants de jauge) seront les représentants de l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

De plus, μ_+ est lui-même un plus haut poids, et sa "composante" sera justement le générateur de Virasoro, les autres W^j étant primaires et de poids conforme m_j+1, où les m_j sont les valeurs (sous μ_0) des plus hauts poids du $s\ell(2)$. On peut aussi montrer que cette jauge assure la polynomialité des crochets de Poisson de l'algèbre $\mathcal{W}$.

Finalement, considérant les plus hauts poids de grade 0 (lorsqu'il y en a), on peut voir que ces derniers sont associés à des générateurs W qui sont égaux aux générateurs de KM initiaux (correspondants à ces plus hauts poids). En effet, du fait de leur grade et de leur côté plus hauts poids, ces générateurs ne sont pas modifiés par les transformations de jauge. Il en découle qu'ils forment une sous-algèbre de KM à l'intérieur de l'algèbre $\mathcal{W}$. Cette sous-algèbre est appelée **algèbre de KM résiduelle**. Sa dimension est donnée par le nombre de représentations $\mathcal{D}_0$ entrant dans la décomposition de l'adjointe de $\mathcal{G}$ sous le $s\ell(2)$ considéré.

3.1.3 Transformation de Miura

La transformation de Miura [177] permet d'obtenir une construction des générateurs W en fonction de champs libres (et non plus d'une KM) [169]. Elle trouve une belle explication physique dans le cadre des modèles de WZW jaugés, ce qui a permis de la généraliser au cas des algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

Elle est à rapprocher aux constructions en opérateurs de Vertex des algèbres de KM, et ce qui permet de la relier à la construction de Feigin-Fuchs [87].

On a vu qu'il existait deux fixations de jauge "privilégiées" dans le cadre de ces modèles: la jauge diagonale et la jauge de plus haut poids. On peut passer d'une fixation à l'autre par une transformation de jauge. Cela signifie qu'il existe un élément $g \in G_+$ qui fait passer de $\mu_- + j_0$ à $\mu_+ + j_{hw}$. Cet élément g est une fonctionnelle des champs entrant dans la forme de j_0, qui sont des élément de $\mathcal{G}_0$. Ainsi, par cette transformation, on peut exprimer les générateurs W (apparaissant dans la jauge de plus haut poids) en fonction des générateurs de $\mathcal{G}_0$: c'est la transformation de Miura. Elle permet d'avoir une représentation plus simple pour l'algèbre $\mathcal{W}$ (puisque $\mathcal{G}_0$ est plus petit que $\mathcal{G}$) et en fonction des champs apparaissant dans l'action de Toda.

On remarquera aussi qu'en utilisant une graduation différente de $\mathcal{G}$, mais menant à la même algèbre $\mathcal{W}$, on obtient, par Miura, des réalisations différentes de cette algèbre $\mathcal{W}$. Cette remarque prendra toute sa saveur lorsqu'on étudiera les décompositions sous $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$ (section 4.1).

3.1.4 Exemple: les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{G})$

Nous étudions ici, à titre d'exemple, le cas des algèbres basées sur une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$ et associées au plongement principal de $s\ell(2)$. Elles sont donc notées $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{G})$, selon la terminologie présentée plus haut. Dans ce cas, les deux sous-algèbres nilpotentes (que l'on veut jauger dans le modèle de WZW) sont les sous-algèbres de Borel de $\mathcal{G}$, l'algèbre $\mathcal{G}_0$ se réduisant à la sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$. L'action devient alors une fonctionnelle sur des champs $\varphi_i(x,t)$, $i = 1,\ldots,r_G =$ rang($\mathcal{G}$) (associés aux générateurs de Cartan de $\mathcal{G}$) et le modèle (dans la jauge diagonale) obtenu est connu dans la littérature sous le nom d'action de Toda (en théorie des champs):

$$S_{Toda} = \int d^2x \left(\frac{\kappa}{<\alpha_i,\alpha_i>} K^{ij} \partial_+\phi_i \partial_-\phi_j - \sum_{i=1}^{r} m_i^2 \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} K^{ij}\phi_j\right)\right) \tag{3.1.14}$$

L'algèbre $\mathcal{W}$ associée est construite à partir des Casimirs de $\mathcal{G}$ et les dimensions conformes des générateurs sont $m_i + 1$ avec m_i exposants de $\mathcal{G}$.

Si on se restreint au cas de $\mathcal{G} = s\ell(N)$, afin de donner un cas plus concret, la réalisation des générateurs W prend la forme suivante. Tout d'abord, les générateurs du $s\ell(2)$ principal (dans la fondamentale de $s\ell(N)$) s'écrivent:

$$\mu_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mu_+ = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{N-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.15}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\mathrm{diag}\,(N-1, N-3, \ldots, -(N-3), -(N-1)) \quad ; \quad a_n = \frac{1}{2}n(N-n)$$

μ_0 induit une graduation (dite principale) de $s\ell(N)$, pour laquelle les générateurs $E_{j,j+n}$ (resp. $E_{j+n,j}$) sont de grade n (resp. $-n$). Le courant contraint prend la forme

$$J_{cont} = \begin{pmatrix} j_{1,1} & j_{1,2} & \cdots & \cdots & j_{1,N} \\ 1 & j_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & j_{N-1,N-1} & j_{N-1,N} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & j_{N,N} \end{pmatrix} \tag{3.1.16}$$

Les plus hauts poids du $s\ell(2)$ principal dans la fondamentale de $\mathcal{G}$ s'écrivent

$$\mu_j = \sum_{m=1}^{N-j} a_{j,m}\, E_{j,j+m} \quad \text{avec} \quad a_{j,m} = \frac{(j+m-1)!\,(N-m)!}{(m-1)!\,(N-j-m)!} \quad , \qquad 2 \le j \le N-1 \tag{3.1.17}$$

La jauge de plus haut poids requiert donc un courant de la forme

$$J_{hw} = \mu_- + \sum_{j=1}^{N-1} W_j\, \mu_j \tag{3.1.18}$$

où W_2 engendre Virasoro. Le passage de J_{cont} à J_{hw} est effectué par un élément g, matrice triangulaire supérieure (avec 1 sur la diagonale), en utilisant les transformations de jauge (3.1.13). Un calcul direct montre que cet élément existe et est unique. C'est une fonctionnelle des composantes j_{pq}, $p,q \ge 0$ de J_{cont}.

Si on veut au contraire choisir la jauge diagonale, il faudra calculer l'unique élément g' (triangulaire) qui amène (par transformation de jauge) J_{cont} à

$$J_{diag} = \mu_- + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j\, E_{jj} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{N} \varphi_j = 0 \tag{3.1.19}$$

Enfin, la transformation de Miura sera fournie par l'unique g'' triangulaire qui amènera J_{diag} en J_{hw}. Elle permet d'exprimer les générateurs de $\mathcal{W}_N$ en fonction des champs "libres" φ_j qui entrent dans l'action de Toda.

3.2 Cas des superalgèbres $\mathcal{W}$

La même construction peut être faite dans le cas des superalgèbres de Lie en utilisant un formalisme de superchamps **[ERA10]**. Elle conduit à une version supersymétrique (N=1) des modèles de Toda [77, 149, 191]. C'est l'utilisation d'une superalgèbre de Lie (au lieu d'une algèbre de Lie) qui permet d'obtenir un formalisme manifestement covariant pour la supersymétrie (cf ci-dessus, section 2.3) **[ERA10]**, au contraire d'approches précédentes [123] (voir aussi section 4.4). Le point de départ est une action de WZW supersymétrique (voir par exemple [60, 99, 207])

$$\begin{aligned} S_0(G) = \frac{\kappa}{2} \int d^2x d^2\eta \Big[& \Big\langle (G^{-1}D_+\hat{G}), (\hat{G}^{-1}D_-G) \Big\rangle \\ & + \int dt \Big\langle (G^{-1}\partial_t G), \Big((G^{-1}D_+\hat{G})(\hat{G}^{-1}D_-G) + (G^{-1}D_-\hat{G})(\hat{G}^{-1}D_+G) \Big) \Big\rangle \Big]. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

où $D_\pm = \theta_\pm \partial_\pm - \partial_{\theta_\pm}$ sont les dérivées covariantes associées aux variables de Grassmann $\theta_\pm$ et aux variables du cône de lumière $x_\pm$, et $\hat{G}$ est déduit de G en changeant le signe des superchamps fermioniques dans ce dernier. Les équations du mouvement s'écrivent

$$D_-(\hat{G}^{-1} D_+ G) = 0 \Leftrightarrow D_+(D_- G\, G^{-1}) = 0. \tag{3.2.2}$$

Elles correspondent à la conservation des super-courants $J_+ = \kappa (D_- G)\, G^{-1}$ et $J_- = \kappa \hat{G}^{-1} D_+ G$. L'action (3.2.1) satisfait la relation de Polyakov-Wiegmann:

$$S_0(G_1 G_2) = S_0(G_1) + S_0(G_2) + \kappa \int d^2x d^2\eta \Big\langle (G_1^{-1} D_+ \hat{G}_1), (D_- G_2\, G_2^{-1}) \Big\rangle. \tag{3.2.3}$$

Comme dans le cas non-supersymétrique, on utilise cette dernière relation pour jauger (à gauche et à droite) l'action de WZW par rapport à deux super-groupes nilpotents $\mathcal{N}_\pm$. Les superchamps de jauge sont donnés par

$$A_+ = \alpha^{-1} D_+ \hat{\alpha} \in \mathcal{A}_+, \quad A_- = D_- \beta\, \beta^{-1} \in \mathcal{A}_-, \quad \alpha \in \mathcal{N}_+,\ \beta \in \mathcal{N}_-.$$

Il faut alors trouver des contraintes qui modifient l'action de super-WZW pour obtenir un modèle de super-Toda. C'est là que le formalisme en superchamp (*i.e.* le traitement manifestement supersymétrique) induit de nouvelles contraintes. On introduit les éléments constants $\mu_\pm \in \mathcal{A}_\pm$, construits uniquement sur les racines simples fermioniques de la superalgèbre et tels que $\{\mu_\pm, \mu_\pm^2, \mu_0 = [\mu_+, \mu_-]\}$ forme une sous-algèbre $osp(1|2)$. Généralisant alors au cas supersymétrique l'imposition de contraintes sur l'action obtenue, les théories de super-Toda apparaissent décrites dans un formalisme Lagrangien. Le rôle précédemment joué par $s\ell(2)$ est à présent tenu par $osp(1|2)$. Le parallèle avec le cas non-supersymétrique devient alors plus délicat puisque seules certaines superalgèbres admettent un $osp(1|2)$ principal (cf section 2.1.4). Seules ces dernières autorisent la construction d'un modèle de Toda supersymétrique.

L'action menant au modèle de Toda supersymétrique prend alors la forme:

$$\begin{aligned} S(G, A_+, A_-) = S_0(G) + \kappa \int d^2x d^2\eta \Big[&\Big\langle A_+, (D_- G\, G^{-1} - \mu_-) \Big\rangle \\ &+ \Big\langle (G^{-1} D_+ \hat{G} - \mu_+), A_- \Big\rangle + \Big\langle G^{-1} A_+ \hat{G}, A_- \Big\rangle \Big], \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Les transformations de jauge supersymétriques infinitésimales sont alors données par:

$$\begin{aligned} &\delta_{\Lambda,\Omega} G = \Lambda G + G\Omega, \\ &\delta_{\Lambda,\Omega} \alpha = -\alpha\Lambda \Rightarrow \delta_{\Lambda,\Omega} A_+ = -D_+ \hat{\Lambda} + \Lambda A_+ - A_+ \hat{\Lambda}, \\ &\delta_{\Lambda,\Omega} \beta = -\Omega\beta \Rightarrow \delta_{\Lambda,\Omega} A_- = -D_- \Omega + A_- \Omega - \hat{\Omega} A_-, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

où les superchamps Λ (et Ω) appartiennent à l'algèbre $\mathcal{A}_+$ (et $\mathcal{A}_-$).

Le reste des calculs se mène alors comme dans le cas non-supersymétrique (mis à part le fait que ces calculs sont faits en superchamps). On fixe partiellement la jauge en demandant $A_\pm = 0$, puis il reste une invariance partielle de la forme

$$J_+ \to \hat{U}\, J_+\, U^{-1} + (D_- U)\, U^{-1} \tag{3.2.6}$$

$$J_- \to \hat{V}^{-1}\, J_-\, V + \hat{V}^{-1}\, D_+ V \tag{3.2.7}$$

où les éléments U et V des supergroupes $\mathcal{G}_+$ et $\mathcal{G}_-$ (respectivement) dépendent des variables (x_-, θ_-) et (x_+, θ_+).

Deux fixations de jauge sont alors préférées: diagonale ou de plus haut poids. Dans la jauge diagonale, l'action obtenue est fonction des superchamps de $\mathcal{G}_0$. Dans la jauge de plus haut poids, les supercourants n'ont de composantes non-nulles que suivant les plus hauts poids du $osp(1|2)$ considéré. Ils correspondent aux "super-générateurs" de la superalgèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Cette dernière contient l'algèbre superconforme, et les générateurs W sont des champs "super-primaires". Leur "super-poids conforme" est donné par la décomposition de l'adjointe de $\mathcal{G}$ en représentations du $osp(1|2)$, *i.e.* ils sont de la forme $j + \frac{1}{2}$ pour une représentation $\mathcal{R}_j$ entrant dans la décomposition de l'adjointe de $\mathcal{G}$. Au niveau des champs composants, chaque super-champ de spin s fournira un champ de spin s et un champ de spin $s + \frac{1}{2}$.

Les (super-)générateurs de spin $\frac{1}{2}$, correspondant aux représentations $\mathcal{R}_0$ de l'adjointe de $\mathcal{G}$, forment une sous-superalgèbre de KM (dite superalgèbre de KM résiduelle). Leurs composantes sont des champs de spin 1, formant une superalgèbre de KM, et des champs de spin $\frac{1}{2}$, se transformant sous l'adjointe de cette dernière.

Chapitre 4

Classification des (super)algèbres $\mathcal{W}$

La classification des algèbres $\mathcal{W}$ est un sujet très complexe, non encore résolu. Dans le cas général d'une algèbre $\mathcal{W}$ qui n'est pas forcément de type $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$, la seule technique utilisée à ce jour est l'étude des identités de Jacobi de l'algèbre [121, 141, 142]. Pour ce faire, on commence par se donner le nombre de champs primaires (sous Virasoro) de l'algèbre (les générateurs W), et on écrit en toute généralité la forme possible des OPEs entre ces générateurs (respectant la covariance sous action de Virasoro). On demande alors que toutes les identités de Jacobi soient satisfaites, ce qui fixe les paramètres qu'on a introduit. On obtient alors les différentes algèbres $\mathcal{W}$ ayant un contenu en champs primaires donné. Cette procédure est extrêmement lourde, et seules les algèbres ayant 3 ou 4 champs primaires ont pu être classées. Il est à remarquer toutefois que cette classification (partielle) a fourni deux résultats importants. D'une part, elle a prouvé que le contenu en champs primaires ne suffit pas à caractériser univoquement une algèbre $\mathcal{W}$. Par exemple, les algèbres notées $\mathcal{W}(2,4,6)$, ayant (en plus de Virasoro) un générateur de spin 4 et un générateur de spin 6, sont au nombre de 3. D'autre part, elle a prouvé que les algèbres de type $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ ne fournissent pas l'ensemble des algèbres $\mathcal{W}$. Ainsi, parmi les algèbres $\mathcal{W}(2,4,6)$, deux d'entre elles sont les algèbres $\mathcal{W}(sp(6),sp(6))$ et $\mathcal{W}(so(7),so(7))$, mais la dernière n'est pas de type $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$: elle peut être vue comme la projection bosonique de l'algèbre superconforme.

Cependant, la construction précédente fournit une large classe de modèles et d'algèbres $\mathcal{W}$ associées. Il est donc primordial d'avoir le maximum d'informations sur ces algèbres, afin de les caractériser précisément, tout en évitant de recourir aux identités de Jacobi. On cherche donc à obtenir le maximum d'information sur une algèbre $\mathcal{W}$ en utilisant la covariance vis-à-vis de l'invariance conforme [4, 31, 38, 218], ainsi que sous la sous-algèbre de KM contenue dans l'algèbre $\mathcal{W}$ [16]. La technique utilise d'une part les résultats obtenus de la jauge de plus haut poids (les générateurs W sont associés univoquement aux représentation $\mathcal{D}_j$ entrant dans la décomposition de l'adjointe de $\mathcal{G}$), et d'autre part le fait que pour les algèbres de Lie simples $\mathcal{G} = s\ell(N)$, $so(N)$ et $sp(2N)$, l'adjointe est dans le produit de la fondamentale par sa contragrédiente. Par commodité, nous noterons $\underline{\mathcal{G}}$ la représentation adjointe de $\mathcal{G}$.

Anticipant sur l'étude de la quantification de ces algèbres, nous faisons une présentation en OPEs, la quantification BRS de ces algèbres prouvant que leur contenu en champs primaires n'est pas modifié au niveau quantique.

4.1 Cas des algèbres $\mathcal{W}$ basées sur $s\ell(N)$ [ERA11]

On a vu que les générateurs W sont en correspondance bi-univoque avec les plus hauts poids du $s\ell(2)$ en considération, la dimension de la représentation fournissant le poids conforme du générateur W. Dans le cas d'algèbres $\mathcal{W}$ basées sur $s\ell(N)$, il est facile de calculer ces poids, mais la connaissance de ces poids ne suffit pas pour caractériser univoquement l'algèbre $\mathcal{W}$. C'est pourquoi nous avons étudié la possibilité d'une décomposition de $s\ell(N)$ par rapport à un $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$. Cette décomposition est aussi motivée par le fait que des graduations de $\mathcal{G}$ découlant d'un même $s\ell(2)$ mais obtenues par un décalage utilisant le $g\ell(1)$ vont fournir la même algèbre $\mathcal{W}$ (dans des présentations différentes). Elle permet aussi de résoudre le problème des graduations demi-entières, en leur associant une graduation demi-entière qui lève la dégénérescence des générateurs de grade $\frac{1}{2}$.

Dans le cas où le $s\ell(2)$ n'est pas principal dans $s\ell(N)$, l'inclusion d'un $s\ell(2)$ peut toujours être étendue à une inclusion $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$. On considère le cas général d'une sous-algèbre $\oplus_j n_j\, s\ell(2j+1)$ dans $s\ell(N)$. Les valeurs de j sont supposées toutes différentes (n_j correspondant à la multiplicité de la sous-algèbre $s\ell(2j+1)$) et sont entières ou demi-entières. On note $n_0 = N - \sum_j n_j$, qui peut être éventuellement nul. Dans ce cas, la représentation fondamentale se décompose sous la forme $\underline{N} = n_0\mathcal{D}_0(y_0) \oplus_j n_j\mathcal{D}_j(y_j)$ où y_j sont les valeurs propres sous le $g\ell(1)$, soumises à la condition supplémentaires $n_0 y_0 + \sum_j n_j(2j+1)y_j = 0$ qui n'est rien d'autre que la condition de trace nulle pour $s\ell(N)$. À partir de cette décomposition, on déduit celle de la représentation adjointe par le produit $\underline{N} \otimes \overline{N}$, les valeurs propres y changeant de signe lorsqu'on passe à la décomposition de la représentation contragrédiente $\overline{N}$. La représentation adjointe s'écrit donc:

$$\begin{aligned}\underline{s\ell(N)} \;=\; & \bigoplus_j \left(n_j^2 \bigoplus_{k=1}^{2j} \mathcal{D}_k(0) \right) \oplus \bigoplus_{j<k} \bigoplus_{\ell=k-j}^{j+k} n_j n_k \Big(\mathcal{D}_\ell(y_j - y_k) \oplus \mathcal{D}_\ell(y_k - y_j) \Big) \\ & \bigoplus_j n_j n_0 \Big(\mathcal{D}_j(y_j - y_0) \oplus \mathcal{D}_j(y_0 - y_j) \Big) \bigoplus \left(\sum_j n_j^2 \right) \mathcal{D}_0(0) \bigoplus (n_0^2 - 1)\, \mathcal{D}_0(0)\end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'algèbre $\mathcal{W}$ contient une sous-algèbre de KM $s\ell(n_0) \oplus_j g\ell(n_j)$. De plus, la répartition des multiplicités n_j fournissent l'action de cette KM sur les autres générateurs: un coefficient n_j indique un générateur ayant un indice dans la représentation fondamentale de $s\ell(n_j)$, tandis que n_j^2 indique un générateur avec indice dans la représentation adjointe. Si il n'y a pas de coefficient n_j, le générateur n'aura pas d'indice sous $s\ell(n_j)$. Il faut toutefois avoir à l'esprit que l'algèbre $\mathcal{W}$ n'étant pas une algèbre linéaire, l'action des générateurs de KM n'est pas entièrement déterminée par la connaissance des indices. Par contre, les termes apparaissant dans les OPEs des générateurs sont contraints par covariance sous cette KM. Bien sûr, la covariance conforme fournit elle aussi des contraintes sur les OPEs possibles (on sait par exemple que les générateurs sont primaires), si bien que l'algèbre $\mathcal{W}$ est presqu'entièrement (sinon complètement) connue.

Notons aussi que les différents $g\ell(1)$ obtenus permettent de déterminer les différentes graduations de $\mathcal{G}$ qui, par réductions Hamiltoniennes, conduiront à la même algèbre $\mathcal{W}$. En particulier, la procédure de décomposition sous $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$ permet de définir une graduation entière de $\mathcal{G}$, même si la graduation associée au $s\ell(2)$ n'est que demi-entière (voir remarque 3.1.1).

Pour illustrer les connaissances que l'on peut tirer de telles contraintes, nous donnons un exemple.

4.1.1 Exemple: l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$

Cette algèbre est la première algèbre $\mathcal{W}$ non-triviale qui ne s'appuie pas sur une inclusion d'un $s\ell(2)$ principal [200]. Elle est aussi appelée algèbre de Bershadsky, du nom de celui qui en donné une généralisation au cas de $s\ell(N)$ [24].

Nous considérons l'inclusion d'un $s\ell(2)$ régulier dans $s\ell(3)$, *i.e.* un $s\ell(2)$ basé sur une des deux racines simples de $s\ell(3)$. D'après l'étude précédente, on sait que ce $s\ell(2)$ peut être étendu à un plongement $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$, la fondamentale de $s\ell(3)$ se décomposant en $\underline{3} = \mathcal{D}_{1/2}(y) \oplus \mathcal{D}_0(-2y)$. On en déduit que l'adjointe s'écrit $\underline{s\ell(3)} = \mathcal{D}_1(0) \oplus \mathcal{D}_{1/2}(-3y) \oplus \mathcal{D}_{1/2}(3y) \oplus \mathcal{D}_0(0)$. Les générateurs de l'algèbre $\mathcal{W}$ sont donc $T(z)$ (Virasoro), $W_\pm(z)$ (champ primaire bosonique de poids conforme $3/2$) et $U(z)$ (courant $g\ell(1) \equiv U(1)$). Les OPEs avec $T(z)$ sont données par

$$T(z)T(w) = \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \frac{c/2}{(z-w)^4} \tag{4.1.1}$$

$$T(z)W_\pm(w) = \frac{3/2\, W_\pm(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial W_\pm(w)}{z-w} \tag{4.1.2}$$

$$T(z)U(w) = \frac{U(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial U(w)}{z-w} \tag{4.1.3}$$

D'autre part, les générateurs $W_\pm(z)$ ont des indices ± 1 sous le courant $U(1)$ (la valeur de y n'est pas pertinente): par analyse des dimensions conformes et des indices $U(1)$, on voit que les seules OPEs possibles sont:

$$U(z)W_\pm(w) = \pm\frac{W_\pm(w)}{z-w} \quad \text{et} \quad U(z)U(w) = \frac{k}{(z-w)^2} \tag{4.1.4}$$

Finalement, poursuivant l'analyse en covariance conforme et sous le $U(1)$, on déduit

$$W_+(z)W_-(w) = \frac{\alpha T(w) + \beta : UU : (w) + \gamma \partial U(w)}{z-w} + \frac{U(w)}{(z-w)^2} + \frac{c'}{(z-w)^3} \tag{4.1.5}$$

$$W_+(z)W_+(w) = 0 = W_-(z)W_-(w) \tag{4.1.6}$$

où α, β et γ sont des coefficients à déterminer.

Ainsi, la seule décomposition en représentations de $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$ réduit le calcul des OPEs de l'algèbre de Bershadsky à la détermination des nombres c, k, c', α, β et γ. Ces derniers sont fixés en regardant les identités de Jacobi pour l'algèbre $\mathcal{W}$, mais ce calcul devient beaucoup plus simple une fois les OPEs pré-déterminées par l'étude précédente.

4.2 Cas général (algèbres de Lie) [ERA12]

Le cas des algèbres $\mathcal{W}$ basées sur $so(N)$ et $sp(2N)$ reste à traiter. Malheureusement, l'inclusion d'un $g\ell(1)$ supplémentaire n'est pas toujours possible pour ces algèbres. Cependant, on peut mettre au point une technique permettant de calculer exactement le contenu en champs primaires de ces algèbres, chose qui n'était pas connue (à part le cas des algèbres $\mathcal{W}$ associées au plongement principal de $s\ell(2)$). En effet, il faut tout d'abord déterminer la décomposition de la fondamentale de $so(N)$ ou $sp(2N)$ en représentation d'une sous-algèbre $s\ell(2)$ quelconque, puis calculer le produit antisymétrisé

(pour $so(N)$) ou symétrisé (pour $sp(2N)$) de cette fondamentale par elle-même. Les règles sont les suivantes.

Tout d'abord, une sous-algèbre $s\ell(2)$ de $so(N)$ ($sp(2N)$ respectivement) peut être vue comme sous-algèbre principale d'une sous-algèbre formée à partir d'algèbres $so(2n_i)$, $so(2n_i+1)$ et $s\ell(2j+1)$ ($sp(2n_i)$ et $s\ell(2j+1)$ respectivement), n_i étant entier et j (demi-)entier. Chacune de ces sous-algèbres contribue alors, dans la décomposition de la fondamentale de l'algèbre de départ (sous le $s\ell(2)$ considéré), par une représentation $\mathcal{D}_{n_i}$ pour $so(2n_i+2)$ ou $so(2n_i+1)$, $\mathcal{D}_{n_i-1/2}$ pour $sp(2n_i)$ et $2\mathcal{D}_j$ pour $s\ell(2j+1)$. Ainsi, la fondamentale de $so(N)$, pour un plongement $s\ell(2)$ associé à une sous-algèbre $p\,so(2n)\oplus q\,so(2m+1)\oplus r\,s\ell(2j+1)$, s'écrira

$$\underline{N} = p\mathcal{D}_{n-1}\oplus q\mathcal{D}_m\oplus 2r\mathcal{D}_j\oplus \ell\mathcal{D}_0 \quad \text{avec} \quad \ell = N-2pn-2qm-r(2j+1)\,. \tag{4.2.1}$$

De même, dans le cas de $sp(2N)$ avec sous-algèbre $q\,sp(2n)\oplus r\,s\ell(2j+1)$, on obtient

$$\underline{2N} = p\mathcal{D}_{n-1/2}\oplus 2r\mathcal{D}_j\oplus \ell\mathcal{D}_0 \quad \text{avec} \quad \ell = 2N-2pn-r(2j+1)\,. \tag{4.2.2}$$

Il reste alors à calculer la décomposition de l'adjointe. Pour cela, il faut calculer les parties symétriques et antisymétriques du produit de la fondamentale par elle-même. Les règles sont déduites de la décomposition (connue) de l'adjointe de $so(N)$ et $sp(2N)$ en représentations du $s\ell(2)$ principal. On définit tout d'abord le produit (anti-)symétrisé d'une représentation $\mathcal{D}_j$ par elle-même:

$$(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_A = \begin{cases} \mathcal{D}_1\oplus\mathcal{D}_3\oplus\ldots\oplus\mathcal{D}_{2j-1} & \text{si } j \text{ entier} \\ \mathcal{D}_0\oplus\mathcal{D}_2\oplus\ldots\oplus\mathcal{D}_{2j} & \text{si } j \text{ demi-entier}\end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_S = \begin{cases} \mathcal{D}_0\oplus\mathcal{D}_2\oplus\ldots\oplus\mathcal{D}_{2j} & \text{si } j \text{ entier} \\ \mathcal{D}_1\oplus\mathcal{D}_3\oplus\ldots\oplus\mathcal{D}_{2j-1} & \text{si } j \text{ demi-entier}\end{cases} \tag{4.2.4}$$

qui satisfont bien sûr $(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_A\oplus(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_S = \mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j$. Plus généralement, on utilise les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
\Big\{(m\mathcal{D}_j)\otimes(m\mathcal{D}_j)\Big\}_A &= \frac{m(m+1)}{2}(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_A\oplus\frac{m(m-1)}{2}(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_S \\
\Big\{(m\mathcal{D}_j)\otimes(m\mathcal{D}_j)\Big\}_S &= \frac{m(m+1)}{2}(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_S\oplus\frac{m(m-1)}{2}(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)_A \\
\Big\{(m\mathcal{D}_j)\otimes(p\mathcal{D}_k)\oplus(p\mathcal{D}_k)\otimes(m\mathcal{D}_j)\Big\}_A &= \Big\{(m\mathcal{D}_j)\otimes(p\mathcal{D}_k)\oplus(p\mathcal{D}_k)\otimes(m\mathcal{D}_j)\Big\}_S \\
&= mp\,(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_k)
\end{aligned}$$

Avec ces règles de calculs, la décomposition de l'adjointe de $so(N)$ ou $sp(2N)$ en représentations d'une sous-algèbre $s\ell(2)$ quelconque peut facilement être déterminée, ce qui permet de calculer le spin conforme des générateurs de toute algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

Comme on l'a dit, il n'est pas toujours possible d'ajouter un $g\ell(1)$ pour compléter la connaissance de l'algèbre $\mathcal{W}$. Toutefois, lorsque la sous-algèbre $\mathcal{H}$ est de la forme $\oplus_i s\ell(n_i)$, on peut inclure un $g\ell(1)$ de la même façon que pour $\mathcal{G}=s\ell(n)$. Pour déduire la décomposition de l'adjointe de $\mathcal{G}$, on utilise les formules suivantes sur les produits (anti-)symétrisés de représentations:

$$\begin{aligned}
\Big\{n\Big[\mathcal{D}_j(y)\oplus\mathcal{D}_j(-y)\Big]\otimes n\Big[\mathcal{D}_j(y)\oplus\mathcal{D}_j(-y)\Big]\Big\}_X &= \Big\{n\mathcal{D}_j\otimes n\mathcal{D}_j\Big\}_X(2y)\oplus\Big\{n\mathcal{D}_j\otimes n\mathcal{D}_j\Big\}_X(-2y) \\
&\quad\oplus n^2\,(\mathcal{D}_j\otimes\mathcal{D}_j)(0) \quad \text{avec} \quad X=A \text{ ou } S
\end{aligned}$$

Les méthodes sont ensuite similaires à celles employées en section 4.1.

4.3 Cas général (superalgèbres) [ERA12]

Le cas des superalgèbres $\mathcal{W}$ peut être traité de la même manière. On fait alors une décomposition sous $osp(1|2) \oplus g\ell(1)$ (lorsque c'est possible). Nous présentons le cas des superalgèbres $s\ell(M|N)$ et $osp(M|2n)$, le cas des superalgèbres exceptionnelles $G(3)$, $F(4)$ et $D(2,1;\alpha)$ se traitant de manière similaire.

Ces techniques permettent de classer toutes les (super)algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ en déterminant leur contenu en spin conforme, ainsi que d'autres données permettant de préciser quel type d'algèbre est obtenu. Par exemple, elles permettent de classer précisément les algèbres superconformes et quasi-superconformes, telles qu'elles ont été introduites comme algèbres conformes étendues contenant des champs primaires de spin inférieur à 2 [90].

4.3.1 Superalgèbres $s\ell(M|N)$

Dans le cas des superalgèbres $\mathcal{W}$ basées sur $s\ell(M|N)$, on utilise les produits de représentations tels que donnés en (2.1.8). Cela fournit la valeur des spins conformes des super-générateurs W de l'algèbre. Cependant, une nouvelle complication arrive, due à la présence de superchamps bosoniques et fermioniques. Le super-spin conforme peuvent être entier ou demi-entier, sans discernement de la statistique du générateur, il faut donc introduire une nouvelle "variable" pour indiquer cette statistique. Au niveau de la superalgèbre $s\ell(M|N)$, cela se fait très naturellement en considérant la décomposition de la fondamentale sous $osp(1|2)$. En effet, deux types de superalgèbres ($s\ell(2j+1|2j)$ ou $s\ell(2j|2j+1)$, j demi-entier) fournissent une représentation $\mathcal{R}_j$ dans la décomposition de la fondamentale. Il faut distinguer ces deux représentations, et on note $\mathcal{R}_j$ dans le premier cas, et $\mathcal{R}_j^\pi$ dans le deuxième. Soulignons que ces deux représentations sont réellement différentes du point de vue de $s\ell(M|N)$: pour $\mathcal{R}_j = \mathcal{D}_j \oplus \mathcal{D}_{j-1/2}$, la représentation $\mathcal{D}_j$ se trouve dans la partie $s\ell(M)$ (et $\mathcal{D}_{j-1/2}$ dans la partie $s\ell(N)$), alors que pour $\mathcal{R}_j^\pi$, la situation est inversée. Lorsqu'on fait le produit de la fondamentale par sa contragrédiente, on retrouve la statistique des générateurs W (en fait des plus hauts poids) en appliquant les règles suivantes:

$$\mathcal{R}_{j_1} \otimes \mathcal{R}_{j_2} = \begin{cases} \oplus_{j_3} \mathcal{R}_{j_3} & \text{si } j_1+j_2 \text{ est entier} \\ \oplus_{j_3} \mathcal{R}'_{j_3} & \text{if } j_1+j_2 \text{ est demi-entier} \end{cases} \tag{4.3.1}$$

$$\mathcal{R}^\pi_{j_1} \otimes \mathcal{R}^\pi_{j_2} = \begin{cases} \oplus_{j_3} \mathcal{R}_{j_3} & \text{si } j_1+j_2 \text{ est entier} \\ \oplus_{j_3} \mathcal{R}'_{j_3} & \text{if } j_1+j_2 \text{ est demi-entier} \end{cases} \tag{4.3.2}$$

$$\mathcal{R}_{j_1} \otimes \mathcal{R}^\pi_{j_2} = \begin{cases} \oplus_{j_3} \mathcal{R}'_{j_3} & \text{si } j_1+j_2 \text{ est entier} \\ \oplus_{j_3} \mathcal{R}_{j_3} & \text{if } j_1+j_2 \text{ est demi-entier} \end{cases} \tag{4.3.3}$$

où $\mathcal{R}_j$ (dans l'adjointe) correspond à une statistique "usuelle", *i.e.* superchamps bosoniques (fermioniques) pour j entier (demi-entier), tandis que $\mathcal{R}'_j$ correspond à une statistique "inversée".

Par exemple, pour la superalgèbre basée sur le plongement principal de $s\ell(M+1|M)$ dans $s\ell(M+2|M)$ avec M impair, on a $\underline{2M+2} = \mathcal{R}_{M/2} \oplus \mathcal{R}_0$. L'adjointe s'écrit alors

$$\begin{aligned} \underline{s\ell(M+2|M)} &= (\mathcal{R}_{M/2} \oplus \mathcal{R}_0) \otimes (\mathcal{R}_{M/2} \oplus \mathcal{R}_0) \ominus \mathcal{R}_0 \\ &= \mathcal{R}_M \oplus \mathcal{R}_{M-1/2} \oplus \mathcal{R}_{M-1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_{1/2} \oplus 2\mathcal{R}'_{M/2} \end{aligned}$$

ce qui correspond à des superchamps bosoniques de super-spin M, $M-1$, ..., 2, 1, à des superchamps fermioniques de super-spin $M+\frac{1}{2}$, $M-\frac{1}{2}$, ..., $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, et à deux superchamps bosoniques de superspin $\frac{M}{2}$ et donc ayant une statistique "inversée".

Enfin, lorsqu'on considère un plongement autre que principal, on peut rajouter un $g\ell(1)$, la valeur propre de ce $g\ell(1)$ se comportant comme dans le cas $s\ell(N)$. Les règles sont les mêmes que celles données pour $s\ell(N)$, aussi nous ne les répéterons pas ici.

4.3.2 Superalgèbres $osp(M|2n)$

Pour ces superalgèbres, il faut à nouveau sélectionner les parties symétriques et anti-symétriques du produits de représentations de $osp(1|2)$. Dans la décomposition de la représentation fondamentale d'une superalgèbre $osp(M|2n)$, $osp(2k|2k)$ contribue pour $\mathcal{R}^\pi_{k-1/2}$, $osp(2k+2|2k)$ pour $\mathcal{R}_k$, $osp(2k-1|2k)$ pour $\mathcal{R}^\pi_{k-1/2}$, $osp(2k+1|2k)$ pour $\mathcal{R}_k$, avec les mêmes significations pour les représentations $\mathcal{R}_j$ et $\mathcal{R}^\pi_j$: une représentation $\mathcal{R}_j$ (resp. $\mathcal{R}^\pi_j$) correspond à $\mathcal{D}_j$ dans la partie $so(M)$ (resp. $sp(2n)$). La décomposition de l'adjointe sera alors déduite de celle de la fondamentale en faisant le produit de cette dernière par sa contragrédiente (de même décomposition). L'adjointe est obtenue en prenant la partie symétrique du produit des représentations $\mathcal{R}_j$ de la fondamentale, la partie antisymétrique du produit des représentations $\mathcal{R}^\pi_k$ (de la fondamentale), et une fois le produit des $\mathcal{R}_j$ par les $\mathcal{R}^\pi_k$.

Les règles sont les suivantes ($k, m \in \mathbb{Z}_+$):

$$(\mathcal{R}_m \otimes \mathcal{R}_m)_A = \oplus_{k=1}^{m} \left(\mathcal{R}_{2k-1} \oplus \mathcal{R}_{2k-1/2}\right) \quad (4.3.4)$$

$$\left(\mathcal{R}^\pi_{m-1/2} \otimes \mathcal{R}^\pi_{m-1/2}\right)_S = \oplus_{k=1}^{m-1} \left(\mathcal{R}_{2k-1} \oplus \mathcal{R}_{2k-1/2}\right) \oplus \mathcal{R}_{2m-1} \quad (4.3.5)$$

$$(\mathcal{R}_{m-1/2} \otimes \mathcal{R}_{m-1/2})_A = \oplus_{k=0}^{m-1} \left(\mathcal{R}_{2k} \oplus \mathcal{R}_{2k+1/2}\right) \quad (4.3.6)$$

$$(\mathcal{R}^\pi_m \otimes \mathcal{R}^\pi_m)_S = \oplus_{k=0}^{m-1} \left(\mathcal{R}_{2k} \oplus \mathcal{R}_{2k+1/2}\right) \oplus \mathcal{R}_{2m} \quad (4.3.7)$$

ainsi que (valable pour $\mathcal{R}$ et pour $\mathcal{R}^\pi$, $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$)

$$(n\mathcal{R}_j \otimes n\mathcal{R}_j)_A = \frac{n(n+1)}{2}(\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}_j)_A \oplus \frac{n(n-1)}{2}(\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}_j)_S \quad (4.3.8)$$

$$(n\mathcal{R}_j \otimes n\mathcal{R}_j)_S = \frac{n(n+1)}{2}(\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}_j)_S \oplus \frac{n(n-1)}{2}(\mathcal{R}_j \otimes \mathcal{R}_j)_A \quad (4.3.9)$$

$$\left((\mathcal{R}_{j_1} \otimes \mathcal{R}_{j_2}) \oplus (\mathcal{R}_{j_2} \otimes \mathcal{R}_{j_1})\right)_A = \left((\mathcal{R}_{j_1} \otimes \mathcal{R}_{j_2}) \oplus (\mathcal{R}_{j_2} \otimes \mathcal{R}_{j_1})\right)_S = \mathcal{R}_{j_1} \otimes \mathcal{R}_{j_2} \quad (4.3.10)$$

Enfin, on peut rajouter un $g\ell(1)$ dans le cas où la superalgèbre est réduite par rapport à une somme de $s\ell(m+1|m)$ et de $s\ell(m|m+1)$. Les règles sont les mêmes que celles données pour les algèbres $so(M)$ et $sp(2n)$, avec les règles de sélection ci-dessus pour calculer la décomposition de l'adjointe.

4.4 Factorisation des champs de spin $\frac{1}{2}$

Il faut noter que l'on peut aussi faire une réduction des superalgèbres par rapport à un $s\ell(2)$ (au lieu d'un $osp(1|2)$), les superalgèbres (et le modèle de WZW) n'étant alors plus exprimés en superchamps (mais contenant des champs fermioniques). La réduction est identique à celle effectuée

pour les algèbres de Lie, et fournit des modèles de Toda et des algèbres $\mathcal{W}$ contenant bosons et fermions (donc différents des modèles proposés en section 3.2). Bien sûr, les inclusions de $s\ell(2)$ dans les superalgèbres étant plus nombreuses que celles de $osp(1|2)$, on obtient une plus grande classe de modèles de Toda et d'algèbres $\mathcal{W}$ associées.

On peut alors se demander si les modèles supersymétriques construits grâce à $osp(1|2)$ peuvent se réduire à certains de ces modèles basés sur $s\ell(2)$. C'est effectivement le cas: lorsque le plongement de $s\ell(2)$ est prolongeable à une inclusion de $osp(1|2)$, les deux modèles concernés sont reliés **[ERA10, ERA16].** Plus précisément, on part d'un modèle supersymétrique (associé à un $osp(1|2)$), sans fixer la jauge $A_\pm = 0$ pour les superchamps de jauge, ni prendre une jauge pour les super-courants J. Ces superchamps possèdent quatre champs composants:

$$A_\pm(X_+, X_-) = b_\pm(x_+, x_-) + \theta_+\beta^+_\pm(x_+, x_-) + \theta_-\beta^-_\pm(x_+, x_-) + \theta_+\theta_- B_\pm(x_+, x_-) \tag{4.4.1}$$

qui sont fixés à zéro dans la jauge habituelle. Ici, on fixe partiellement la jauge en demandant

$$A_\pm|_{\theta_+=\theta_-=0} = 0 \quad ; \quad D_\mp A_\pm|_{\theta_+=\theta_-=0} = 0 \quad ; \quad J_\pm|_{\theta_+=\theta_-=0} \in \mathcal{G}_\pm \oplus \mathcal{G}_0 \tag{4.4.2}$$

où la dernière équation est à rapprocher de la jauge diagonale. Il reste alors au niveau des champs de jauge

$$a_\pm = D_\pm A_\pm|_{\theta_+=\theta_-=0} \quad \text{et} \quad F_\pm = D_+D_-A_\pm|_{\theta_+=\theta_-=0} \tag{4.4.3}$$

Leur équation du mouvement montre que les courants $J_\pm|_{\theta_+=\theta_-=0}$ s'écrivent $f_\mp + \chi_\pm$, où $f_\pm$ sont les générateurs fermioniques du $osp(1|2)$ considéré (dans la représentation fondamentale) et $\chi_\pm$ sont des champs (bosoniques ou fermioniques) de spin conforme $\frac{1}{2}$. Les courants (non-supersymétriques) $j_\pm = D_\pm J_\pm|_{\theta_+=\theta_-=0}$ doivent eux être de la forme:

$$j_\pm = e_\mp \mp [\chi_\mp, f_\mp] - g a_\mp g^{-1} + j^{red}_\pm \quad \text{avec} \quad j^{red}_\pm \in \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_\pm \tag{4.4.4}$$

où $e_\pm$ sont les générateurs bosoniques du $osp(1|2)$ (et donc du $s\ell(2)$).

Au niveau de l'action, si finalement on prend la jauge $a_\pm = 0$ et $j_{red} = j_{diag}$, on obtient

$$S = S_0(g_0) + \kappa \int d^2x \; < g_0 e_+ g_0^{-1}, e_- > + \int d^2x \; < \chi_+, \partial\chi_- > + < \chi_-, \partial\chi_+ > \tag{4.4.5}$$

On reconnaît l'action de Toda dans la jauge diagonale à laquelle on a ajouté une action de champs libres de spin $\frac{1}{2}$.

En résumé, partant d'une action supersymétrique associée à une inclusion de $osp(1|2)$, en "éliminant" la supersymétrie et en prenant une jauge particulière, on retrouve l'action associée à un plongement de $s\ell(2)$ (fixée de jauge) implémentée d'un terme de champs libres (de spin $\frac{1}{2}$).

De la même façon, on peut réduire (en projetant les superchamps sur leurs composantes) les algèbres $\mathcal{W}$ supersymétriques à certaines algèbres non supersymétriques modulo des champs libres de spin conforme $1/2$. Cette procédure est connue sous le nom de factorisation des champs de spin $\frac{1}{2}$. Elle généralise les résultats algébriques [50, 113] obtenus sur la factorisation des fermions de spin $\frac{1}{2}$ Au niveau algébrique, si $osp(1|2) \subset_{pal} \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ définit un plongement de $osp(1|2)$, et $s\ell(2) \subset_{pal} \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{G}_0$ celui du $s\ell(2)$ associé (*i.e.* $\mathcal{H}_0$ est la partie bosonique de $\mathcal{H}$), on aura

$$\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \sim \mathcal{U}\Big(\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}\Big)$$

où $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ est la superalgèbre formée par tous les champs de spin $\frac{1}{2}$. Dans cette égalité, $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ désigne la superalgèbre traitée en formalisme de superchamps, et $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}_0)$ celle traitée en formalisme de champs.

On peut donc à loisir étudier ces algèbres $\mathcal{W}$ tant sous l'angle non supersymétrique que sous l'angle supersymétrique. Dans le premier cas, on favorise le nombre réduit de champs, tandis que dans le second on pourra utiliser la puissance de la supersymétrie.

4.5 Classification des superalgèbres $\mathcal{W}$ avec $N = 2$ supersymétries [ERA24]

De la même façon qu'on peut classer les superalgèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ en utilisant les plongements de $osp(1|2)$, on peut classer les superalgèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ possédant deux supersymétries en étudiant les plongement de $s\ell(1|2)$ dans $\mathcal{G}$. Pour cela, il faut tout d'abord déterminer quelles sont les superalgèbres $\mathcal{W}$ qui admettent un plongement principal. Elles forment bien sûr une sous-classe des superalgèbres possédant un $osp(1|2)$, et de fait, seules les superalgèbres $s\ell(p \pm 1|p)$ autorisent un $s\ell(1|2)$ principal. Une fois ces plongements principaux définis, tout plongement de $s\ell(1|2)$ dans $\mathcal{G}$ sera vu comme le plongement principal dans une sous-superalgèbre $\mathcal{H}$ régulière dans $\mathcal{G}$ et construite comme une somme de superalgèbres $s\ell(p_i \pm 1|p_i)$. Il existe toutefois une exception dans le cas des superalgèbres $osp(M|2n)$, pour lesquelles les plongements réguliers de $osp(2|2)$ sont à considérer séparément. En effet, en tant que superalgèbre, $osp(2|2)$ est isomorphe à $s\ell(1|2)$, mais son plongement régulier dans une superalgèbre $osp(M|2n)$ est différent (voir la décomposition de la fondamentale ci-dessous) et donc doit être pris en compte dans la classification. Une fois le plongement choisi, la réduction de l'adjointe de $\mathcal{G}$ en représentations de $s\ell(1|2)$ fournira le contenu (et le spin conforme) en superchamps $N = 2$. Comme dans les cas précédents, cette décomposition est obtenue à partir de la décomposition de la fondamentale, en faisant le produit de cette dernière par sa contragrédiente.

Outre l'intérêt de la classification de superalgèbres $\mathcal{W}$ possédant une supersymétrie $N = 2$, ces superalgèbres sont aussi reliée aux théories de cordes: nous y reviendrons dans la section 5.3.

4.5.1 Cas de $\mathcal{G} = s\ell(M|N)$

Chaque sous-algèbre $s\ell(p+1|p)$ (entrant dans la détermination du plongement de $s\ell(1|2)$) contribuera par une représentation atypique $(\pm\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$, alors qu'une sous-algèbre $s\ell(p|p+1)$ fournira une représentation $(\pm\frac{p}{2}, \frac{p}{2})^\pi$. Le signe $\pm$ de la charge $g\ell(1)$ dans ces représentations est partiellement fixé en demandant que la charge totale (somme de toutes les charges de toutes les représentations atypiques) de la fondamentale de $s\ell(M|N)$ soit nulle. Le reste des indéterminations sur le signe n'est pas pertinent pour l'étude. La contragrédiente se décomposera de la même façon, avec un changement de signe de la charge $g\ell(1)$ de toutes les représentations. La décomposition de l'adjointe de $s\ell(M|N)$ sera alors calculée en utilisant les formules données en (2.1.11). Le caractère fermionique ou bosonique des superchamps de l'algèbre $\mathcal{W}$ sera calculé comme dans le cas $N = 1$, par les règles de produit entre représentation (b, j) et $(b, j)^\pi$.

Par exemple, pour la superalgèbre $\mathcal{W}[s\ell(1|3), s\ell(1|2)]$, la fondamentale de $s\ell(1|3)$ se décompose

en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^\pi \oplus (0,0)^\pi$, si bien que l'adjointe s'écrit:

$$\underline{s\ell(1|3)} = (0,1) \oplus (0,\frac{1}{2}) \oplus (0,0) \oplus (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \oplus (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \tag{4.5.1}$$

L'algèbre $\mathcal{W}$ est donc composée de trois superchamps "complets" de super-spin conforme $\frac{3}{2}$ (fermionique), 1 (bosonique) et $\frac{1}{2}$ (fermionique); d'un superchamp chiral de super-spin 1, et d'un superchamp anti-chiral de même super-spin, tous deux fermioniques.

4.5.2 Cas de $\mathcal{G} = osp(M|2n)$

La décomposition de la fondamentale de ces superalgèbres comprendra une somme $(\frac{p}{2},\frac{p}{2}) \oplus (-\frac{p}{2},\frac{p}{2})$ pour chaque sous-algèbre $s\ell(p+1|p)$ et une somme $(\frac{p}{2},\frac{p}{2})^\pi \oplus (-\frac{p}{2},\frac{p}{2})^\pi$ pour chaque $s\ell(p|p+1)$. Dans le cas particulier de sous-algèbres $osp(2|2)$ (plongées régulièrement dans $\mathcal{G}$), on aura une représentation $(0,\frac{1}{2})^\pi$.

Une fois la fondamentale décomposée, l'adjointe sera calculée en considérant la partie symétrique (respectivement antisymétrique) du produit de de représentations (b,j) (de la fondamentale) par leur contragrédiente (respectivement $(b',j')^\pi$ par leur contragrédiente), ainsi que des produits des unes par les autres. Il faut donc encore une fois sélectionner les parties symétriques et antisymétriques de produits de représentations de $s\ell(1|2)$. Les règles sont semblables à celles données pour les produits de représentations de $osp(1|2)$, aussi nous ne les écrirons pas ici. Avec ces règles, on peut déterminer le contenu en superchamps (complet, chiral ou anti-chiral, fermionique ou bosonique) de la superalgèbre $\mathcal{W}$ considérée.

Cependant, deux nouveautés se produisent dans l'étude des représentations de $s\ell(1|2)$ (voir aussi section 2.1.3): d'une part elles peuvent être typiques ou atypiques, et d'autre part le produit de ces représentations n'est pas toujours complètement réductible. En ce qui concerne l'atypicité, le lien avec les superchamps $N=2$ est clair: une représentation typique est associée à un multiplet complet $N=2$, tandis qu'une représentation atypique est associée à un superchamp (anti-)chiral.

Remarque 4.5.1 *On rappelle qu'un superchamp $N=2$ contient a priori quatre champs composants, selon*

$$\Phi(z,\theta_1,\theta_2) = \varphi(z) + \psi_1(z)\theta_1 + \psi_2(z)\theta_2 + F(z)\theta_1\theta_2$$

Ce superchamp forme une représentation de la supersymétrie $N=2$ portée par les dérivées covariantes $D_i = \theta_i\partial_z + \partial_i$, $i=1,2$ (où $\partial_i = \partial_{\theta_i}$) qui vérifient $\{D_i, D_j\} = 2\delta_{ij}\partial_z$. On peut cependant réduire cette représentation en imposant une contrainte supplémentaire portée par la dérivée covariante $D_\pm = \theta_\pm\partial_z + \partial_\mp$, où $\theta_\pm = \theta_1 \pm i\theta_2$ et $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_1 \mp i\partial_2)$. Si le superchamp satisfait $D_+\Phi = 0$, il est dit chiral; s'il vérifie $D_-\Phi = 0$, il est dit anti-chiral. Dans les deux cas, il ne contient plus que deux champs composants indépendants. On l'appelle aussi superchamp réduit, car un superchamp chiral perd ses moyens.

Il reste le problème des produits indécomposables de représentations de $s\ell(1|2)$. Il faut tout de suite remarquer que ces produits indécomposables entrant dans la décomposition de l'adjointe se décomposent en irreps lorsqu'on réduit la décomposition à une décomposition sous $osp(1|2)$. Cela assure que la superalgèbre $\mathcal{W}$ a une présentation "usuelle" en superchamps $N=1$. Au niveau $N=2$, la situation n'a pas été (à ma connaissance) clarifiée. Il serait sans aucun doute fort

intéressant d'étudier l'exemple d'un tel cas, le résultat conduisant à de nouvelles informations sur les superchamps $N = 2$.

4.6 Liens entre différentes algèbres $\mathcal{W}$

Les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ forment une classe très importante des algèbres $\mathcal{W}$. Aussi, avant de regarder la classification exhaustive des algèbres $\mathcal{W}$ on peut chercher à mettre en évidence des algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ particulières qui formeraient des sortes de systèmes fondamentaux à partir desquels on reconstruirait toutes les autres algèbres $\mathcal{W}$. Le but recherché est évidemment une description simple des algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ qui pourrait s'étendre à toutes les algèbres $\mathcal{W}$.

4.6.1 Pliage des algèbres $\mathcal{W}$ [ERA13]

On peut construire toutes les algèbres et superalgèbres de Lie classiques à partir des algèbres $s\ell(n)$ et $s\ell(m|n)$, en utilisant les automorphismes de leur diagramme de Dynkin. L'idée de base repose sur l'utilisation des automorphismes extérieurs de $\mathcal{G}$ pour sélectionner les sous-algèbres invariantes (pliage). De même, on peut étendre cette procédure au niveau des algèbres de KM. Cette procédure peut aussi être utilisée au niveau des équations de Toda, pour lesquelles les équations basées sur les algèbres $so(N)$ et $sp(2n)$ sont déduites de celles basées sur $s\ell(N)$ [196]. Il est donc naturel de s'interroger sur l'existence d'une telle construction pour les (super)algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$: partant d'algèbres $\mathcal{W}(s\ell(n),\mathcal{H})$ ou de superalgèbres $\mathcal{W}(s\ell(m|n),\mathcal{H})$ peut-on obtenir toutes les (super-)algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$? La réponse est positive et la construction se fait comme suit. Nous présentons le cas des algèbres $\mathcal{W}(s\ell(n),\mathcal{H})$, le cas des superalgèbres $\mathcal{W}(s\ell(m|n),\mathcal{H})$ se déroulant de la même façon (modulo la graduation $\mathbb{Z}_2$).

On sait qu'une algèbre $s\ell(2n)$ (ou $s\ell(2n+1)$) produit par pliage une algèbre $sp(2n)$ (ou $so(2n+1)$). Les algèbres $so(2n)$ sont produites par inclusion régulière dans les algèbres $so(2n+1)$, ce qui peut se voir comme un pliage "en deux temps" d'une algèbre $s\ell(2n+1)$.

Dans le cas d'un pliage "en un temps", les générateurs m_{ij} de l'algèbre pliée sont construits à partir de ceux, e_{ij}, de $s\ell(N)$ selon

$$m_{ij} = e_{ij} - (-1)^{i+j} e_{N+1-j,N+1-i} \tag{4.6.1}$$

Si les générateurs e_{ij} satisfont les relations de commutation de $s\ell(N)$, $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$, il est facile de voir que les générateurs m_{ij} satisfont les relations de commutation de $sp(2n)$ (si $N = 2n$) ou $so(2n+1)$ (si $N = 2n+1$) ainsi que la propriété $m_{ij} = -(-1)^{i+j} m_{N+1-j,N+1-i}$.

Dans le cas du pliage "en deux temps" de $s\ell(2n+1)$, on impose la relation supplémentaire $e_{n+1,j} = e_{j,n+1} = 0$ pour obtenir $so(2n)$. Cette relation revient au quotient de $so(2n+1)$ par la relation $m_{n+1,j} = 0$, autrement dit à sélectionner dans $so(2n+1)$ la sous-algèbre régulière engendrée par toutes ses racines simples sauf $e_{n,n+1}$.

Au niveau des algèbres $\mathcal{W}$, il faut tout d'abord s'assurer que la sous-algèbre $\mathcal{H}$ va "survivre" au pliage de $s\ell(N)$. Cette contrainte élimine certaines sous-algèbres et aussi sélectionne des sous-algèbres particulières parmi une classe donnée de sous-algèbres isomorphes (dans $s\ell(N)$). Par exemple, si on part d'une sous-algèbre $s\ell(2k)$ dans $s\ell(2n)$, on pourra considérer un plongement basé

sur les racines simples $\alpha_1, .., \alpha_{k-1}, \alpha_{2n+1-k}, \ldots, \alpha_{2n-1}$ mais pas un plongement basé sur $\alpha_1, .., \alpha_{2k-1}$, bien que ces deux sous-algèbres soient isomorphes dans $s\ell(2n)$. Le pliage fournira alors un couple $(so(2n), so(2k))$ à partir du couple $(s\ell(2n), s\ell(2k))$. On obtient donc par cette sélection un ensemble de couples $(s\ell(N), \mathcal{H})$ associés par pliage à des couples $(s\ell(N)^\pi, \mathcal{H}^\pi)$, avec par exemple $s\ell(2n+1)^\pi = so(2n+1)$.

Une fois cette sélection effectuée, on considère la réalisation de l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell(n), \mathcal{H})$ telle qu'obtenue par la jauge de plus haut poids (section 3.1.2). Elle fournit une matrice $N \times N$ de $s\ell(N)$ dont les entrées sont les générateurs de cette algèbre $\mathcal{W}$. Il suffit alors d'appliquer la procédure de pliage (4.6.1) à cette matrice: la contrainte va imposer la nullité de certains générateurs W, et imposer l'identification de certains autres (entre eux), qui étaient indépendants dans l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell(N), \mathcal{H})$ de départ. On peut alors montrer que les crochets de Poisson de cette algèbre $\mathcal{W}$ "pliée" reproduisent ceux de $\mathcal{W}(s\ell(N)^\pi, \mathcal{H}^\pi)$. Dit d'une autre manière, on a obtenu l'identification

$$[\mathcal{W}(s\ell(N), \mathcal{H})]^\pi = \mathcal{W}(s\ell(N)^\pi, \mathcal{H}^\pi)$$

La même identité a lieu pour les algèbres pliées "en deux temps", ainsi que pour les superalgèbres $\mathcal{W}$. On peut aussi construire les algèbres $\mathcal{W}$ basées sur les algèbres exceptionnelles G_2 et F_4.

Cette procédure de pliage permet de construire les constantes de structure de toutes les (super)algèbres $\mathcal{W}$ à partir de celles basées sur $s\ell(n)$ et $s\ell(m|n)$, qui sont beaucoup plus faciles à calculer (en utilisant par exemple la décomposition $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$ présentée plus haut).

4.6.2 Diagrammes de Dynkin pour algèbres $\mathcal{W}$ [ERA14]

Étant donné le lien très étroit entre les algèbres $\mathcal{W}$ et les algèbres de Lie, on peut songer à les classer par le même genre de méthode que celle utilisée pour ces dernières. De fait, les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ sont en correspondance bi-univoque avec les plongements inéquivalents de $s\ell(2)$ dans $\mathcal{G}$. Or, Dynkin a introduit la notion de diagrammes (de Dynkin) *caractéristiques* (dénotés CDD) qui classent ces plongements. Ces diagrammes sont déduits d'un diagramme de Dynkin "ordinaire" en indiquant le grade des racines simples sous l'action du générateur de Cartan du $s\ell(2)$ sous considération. Le grade de ces racines peut toujours être choisi parmi les trois valeurs 0, $\frac{1}{2}$, 1. Une analyse fine des différentes possibilités, utilisant les symétries des diagrammes de Dynkin et la forme des plongements des sous-algèbres permet de donner une forme générale pour tous les CDDs qui est en correspondance *bi-univoque* avec les plongements de $s\ell(2)$. Par exemple, les CDDs correspondant aux algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ sont construits en donnant un grade 1 à toutes les racines simples de $\mathcal{G}$. Bien que plus lourde que la notation $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, cette classification en CDDs est donc plus précise. On notera en passant que les grades des racines simples sont en correspondance directe avec les composantes du "defining vector" introduit par Dynkin, et qui permet de classer les graduations de $\mathcal{G}$.

D'autre part, on peut déduire de nombreuses informations sur $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ à partir de la simple "lecture" de ces diagrammes. Par exemple, la dimension conforme des générateurs W peut être obtenue de cette façon, ainsi que l'algèbre de KM résiduelle incluse dans l'algèbre $\mathcal{W}$. D'autre part, le pliage des algèbres $\mathcal{W}$ peut lui aussi être implémenté au niveau des CDDs par un pliage réel de ceux-ci.

Ainsi, on peut espérer étendre la construction de CDDs pour les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ à l'ensemble

des algèbres $\mathcal{W}$ à partir de principes "simples" et obtenir de cette façon une classification exhaustive de ces algèbres. Le problème reste ouvert sur ce dernier point.

4.6.3 Algèbres $\mathcal{W}$ rationnelles [ERA15]

Par analyse des dimensions conformes, les champs de spin conforme $\frac{1}{2}$ sont obligatoirement des champs libres, et on a vu qu'ils pouvaient être factorisés d'une (super)algèbre $\mathcal{W}$ (*i.e.* séparés en une somme directe des autres générateurs W). Cette procédure "simplifie" la forme et l'étude des algèbres $\mathcal{W}$ à la façon des algèbres de Lie qui se décomposent en résolubles et semi-simples.

Toujours par analyse conforme, on peut montrer que les champs de dimension conforme 1 forment une (super)algèbre de KM. On peut donc également chercher à factoriser ces champs. Cette factorisation est possible, mais elle donne naissance à des algèbres $\mathcal{W}$ admettant un nombre infini de champs (algèbres W_∞). Plus précisément, on peut éliminer les champs de KM apparaissant à droite des crochets de Poisson des autres générateurs W, mais le prix à payer est l'introduction de nouveaux champs primaires qui vont à leur tour engendrer (par crochets de Poisson) d'autres champs primaires, la procédure se poursuivant à l'infini, ce qui limite le principe simplificateur de la factorisation! On peut par contre obtenir une algèbre factorisée possédant un nombre fini de champs fondamentaux si on autorise des quotients de générateurs dans les crochets de Poisson de l'algèbre.

4.6.4 Algèbres $\mathcal{W}$ jaugées [ERA17]

Les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ sont définies par le couple $(\mathcal{G},\mathcal{H})$. On a vu comment le pliage des algèbres de Lie permet de relier des couples $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ avec des couples $(\mathcal{G}^\pi,\mathcal{H}^\pi)$. Ce lien se fait essentiellement entre algèbres $\mathcal{G}$ différentes, disons de façon "horizontale". La question suivante est alors de chercher à relier ces couples de façon "verticale", c'est-à-dire pour une algèbre $\mathcal{G}$ fixée, de relier des sous-algèbres $\mathcal{H}$ différentes. La question est d'autant plus légitime que toutes les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$, $\mathcal{G}$ fixée et $\mathcal{H}$ variant, sont construites à partir d'une unique algèbre de KM, $\mathcal{G}^{(1)}$. La construction se fait par imposition de contraintes définies par $\mathcal{H}$. Le problème peut donc se reformuler en une première question: "comment relier les différents ensembles de contraintes?" La réponse à cette interrogation est simple: par inclusion. Dans ce cas, il est clair que l'algèbre $\mathcal{W}$ définie à partir du plus petit ensemble de contraintes possède un "déficit" en contraintes, et donc qu'il va être nécessaire d'imposer de nouvelles contraintes au niveau de cette algèbre $\mathcal{W}$, pour retrouver celle manquantes.

De fait, en partant de deux algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ et $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}')$ telles que $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$, il existe une relation d'inclusion ($\Phi' \subset \Phi$) entre les contraintes Φ et Φ' conduisant aux deux algèbres $\mathcal{W}$. Il "suffit" alors d'imposer au niveau des générateurs de $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}')$ les contraintes "manquantes" $\Phi \setminus \Phi'$ pour obtenir $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. En d'autres termes, on jauge une partie de l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}')$ de telle sorte que la partie restante (invariante de jauge) soit $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Ainsi, on construit des chaînes d'algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ qui reflètent les inclusions des sous-algèbres $\mathcal{H}$ entre elles.

Chapitre 5

Cas quantique

Jusqu'alors, nous avons présenté une approche en crochets de Poisson des algèbres $\mathcal{W}$. Nous abordons maintenant la quantification au sens BRS de ces algèbres. Étant donné que les travaux que j'ai effectués portent sur la quantification des superalgèbres $\mathcal{W}$ (en formalisme de superchamps), je me concentrerai sur ces dernières, le cas non supersymétrique, traité antérieurement dans [26, 49, 86, 94, 151, 216], se faisant de la même manière.

La cohomologie BRS [21] est un moyen de quantifier les systèmes classiques contraints, alternative à la quantification directe des crochets de Dirac. En effet, bien qu'adaptés aux systèmes contraints, les crochets de Dirac sont ici lourds à quantifier parce que l'algèbre n'est pas linéaire mais hautement polynomiale (et qui plus est de dimension infinie). Pour quantifier à la BRS, on construit un opérateur qui traduit au niveau quantique les contraintes qui existaient au niveau classique. Nous présentons brièvement quelques principes de base sur la cohomologie avant d'aborder le calcul proprement dit.

On notera qu'on peut quantifier directement (par force brute) les réalisations obtenues par réductions Hamiltoniennes (classiques), en cherchant les termes correctifs qui prennent en compte les modifications quantiques, tant au niveau des constructions en algèbre de KM qu'en champs libre (voir par exemple [34, 83, 125–127, 230, 246]). Ces méthodes peuvent aussi être effectuées en formalisme de superchamps [120, 199]. Elles sont à rapprocher des recherches par identités de Jacobi mentionnées plus haut.

5.1 Cohomologie et suite spectrale

Le point de départ est un **complexe** (Ω, s), *i.e.* un espace gradué (dans notre cas, une algèbre associative graduée) $\Omega = \sum_n \Omega^n$ et une dérivation nilpotente $s : \Omega^n \to \Omega^{n+1}$, qui donc satisfait $s^2 = 0$ et $s(xy) = s(x)y - (-1)^n x s(y)$ pour $x, y \in \Omega^n$. Les éléments de Ω sont appelés **cochaînes** (de s). On introduit alors les ensembles $Z = \oplus_n Z^n$ des *cocycles* et $B = \oplus_n B^n$ des *cobords*:

$$Z^n = Ker(s) \cap \Omega^n = \{x \in \Omega^n \,,\ s(x) = 0\} \qquad , \qquad B^n = Im(s) \cap \Omega^n = \{s(x) \,,\ x \in \Omega^n\} \quad (5.1.1)$$

Les cochaînes appartenant à Z sont dites **fermées**, celles de B sont appelées **exactes**. De la nilpotence de s, on déduit que toute cochaîne exacte est fermée, *i.e.* $B^{n-1} \subset Z^n$. La question de

la cohomologie est de déterminer si B est plus petit que (ou égal à) Z, c'est-à-dire de chercher les cochaînes fermées qui ne sont *pas* exactes. En termes plus précis, la cohomologie de s est donnée par les espaces

$$\begin{aligned} H(\Omega,s) &= Ker(s)/Im(s) = \oplus_n H^n(\Omega,s) \quad \text{avec} \quad H^n(\Omega,s) = H^n = Z^n/B^{n-1} \quad i.e. \\ H^n &= \{[x]\,,\ x \in \Omega^n\} \quad \text{avec} \quad [x] = \{x + s(y),\ y \in \Omega^{n-1}\} \end{aligned}$$

Déterminer la cohomologie d'une dérivation s n'est en général pas facile. Diverses techniques ont été mises au point dans ce but. Par exemple, la **Formule de Künneth** est fort utilisée:

$$\text{Si } \Omega = A \otimes B\,,\ s(A) \subset A \text{ et } s(B) \subset B \quad \text{alors} \quad H^n(\Omega,s) = \oplus_{p+q=n} H^p(A,s) \otimes H^q(B,s) \quad (5.1.2)$$

Par la suite, nous emploierons aussi des **suites spectrales.** Pour cela, on suppose qu'il est possible de définir une **filtration** sur Ω, *i.e.* une suite de sous-espaces $F^q\Omega$ tels que

$$\{0\} \subset \cdots \subset F^{q+1}\Omega \subset F^q\Omega \subset F^{q-1}\Omega \subset \cdots \subset \Omega.$$

L'idée de la suite spectrale est de regarder la cohomologie de s dans chacun de ces "espaces filtrés" (plus petits donc plus simples) pour en déduire la cohomologie "globale" sur Ω. Pour cela, on introduit une suite de cocycles généralisés $Z_r^{p,q}$:

$$Z_r^{p,q} = F^q\Omega^{p+q} \cap s^{-1}(F^{q+r}\Omega^{p+q+1}) = \{x \in F^q\Omega^{p+q} | s(x) \in F^{q+r}\Omega^{p+q+1}\} \quad (5.1.3)$$

Ces cocycles généralisés sont donc des cochaînes appartenant à un des '"espaces filtrés" et dont l'image par s est dans un autre espace filtré (associé à l'espace de départ). On a donc "affiné" (filtré) l'action de s en considérant les différentes inclusions fournies par la filtration. De façon naturelle,

$$Z_\infty^{p,q} = F^q\Omega^{p+q} \cap Ker(s).$$

De même, on considère des cobords généralisés $B_r^{p,q}$:

$$\begin{aligned} B_r^{p,q} &= F^q\Omega^{p+q} \cap s(F^{q-r}\Omega^{p+q-1}) \\ B_\infty^{p,q} &= F^q\Omega^{p+q} \cap Im(s), \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

qui satisfont (les exposants p, q sont sous-entendus)

$$\cdots \subset B_r \subset B_{r+1} \subset \cdots \subset B_\infty \subset Z_\infty \subset \cdots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset \cdots$$

À partir de ces définitions, on peut définir une suite de cohomologies généralisées $E_r^{p,q}$:

$$\begin{aligned} E_0^{p,q} &= F^q\Omega^{p+q}/F^{q+1}\Omega^{p+q} \\ E_r^{p,q} &= Z_r^{p,q}/\left(Z_{r-1}^{p-1,q+1} + B_{r-1}^{p,q}\right) \\ E_\infty^{p,q} &= Z_\infty^{p,q}/\left(Z_\infty^{p-1,q+1} + B_\infty^{p,q}\right) \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Ces différents espaces "filtrés" permettent la construction d'une dérivation nilpotente s_r ("filtrée"), définie par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \overset{s}{} & \\ Z_r^{p,q} & \longrightarrow & Z_r^{p+1-r,q+r} \\ \eta\downarrow & & \downarrow\eta \\ E_r^{p,q} & \underset{s_r}{\longrightarrow} & E_r^{p+1-r,q+r} \end{array} \tag{5.1.6}$$

où η est la projection canonique de Z_r sur E_r. En d'autres termes, s_r est définie par son action sur $[x] \in E_r^{p,q}$ par $s_r([x]) = [s(x)]$.

Le théorème de base des suites spectrales repose sur le lien entre les cohomologies de s_r et les cohomologies généralisées:

$$E_{r+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_r; s_r) \tag{5.1.7}$$

Les espaces "filtrés" que nous avons construits sont donc bien des espaces cohomologiques pour les dérivations "filtrées" s_r.

Il reste à reconstruire la cohomologie de la dérivation de départ s à partir de la connaissance des cohomologies généralisées. Pour cela, on suppose en plus que la filtration recouvre bien tout l'espace Ω: $\Omega = \cup_n F^n\Omega$ et que les cocycles généralisés convergent (au sens inductif) vers $Z_\infty^{p,q}$, *i.e.* $Z_\infty^{p,q} = \cap_r Z_r^{p,q}$. Sous ces hypothèses, on peut démontrer le second théorème de base des suites spectrales:

$$E_\infty^{p,q} \cong F^qH^{p+q}/F^{q+1}H^{p+q} \tag{5.1.8}$$

où F^qH est la filtration de la cohomologie $H(\Omega; s)$ induite par la filtration de Ω:

$$F^qH^{p+q} = H^{p+q}(F^q\Omega; s)$$

(F^pH est la cohomologie de s pour l'espace $F^p\Omega$).

On obtient ainsi une façon de reconstruire la cohomologie $H(\Omega; s)$, à partir de la connaissance des espaces $F^qH^{p+q}/F^{q+1}H^{p+q}$. L'utilité pratique d'une suite spectrale repose sur le fait qu'elle finisse rapidement, *i.e.* que s_r soit identiquement nul pour $r > r_0$, où r_0 est un nombre petit. Dit d'une autre manière, son utilité repose sur le choix de la bonne filtration (qui fera que la suite spectrale est "courte"). Nous verrons dans le cas de la cohomologie BRS que ce choix est particulièrement crucial (voir section 5.2.1 et remarque dans la section 6.1).

5.2 Cohomologie BRS des superalgèbres $\mathcal{W}$ [ERA18]

5.2.1 Calcul de la cohomologie

Nous revenons maintenant à la construction classique des (super-)algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, que nous voulons quantifier (à la BRS). On considère l'ensemble des (super)contraintes *première classe* $\Phi^\alpha(Z) = J^\alpha(Z) - \delta_{\alpha,0}\mu_-$, où $J^\alpha(Z)$ sont les super-courants de KM de grade négatif (sous le Cartan μ_0 du $osp(1|2)$ choisi) et μ_- est le générateur fermionique de ce $osp(1|2)$ (associé à l'indice

$\alpha = 0$ par convention). On leur associe des super-fantômes (ghosts) $C_\alpha(Z)$ et $B^\alpha(Z)$, satisfaisant les OPEs

$$C_\alpha(Z)B^\beta(W) = \delta_\alpha^\beta \frac{\theta - \zeta}{Z - W} \tag{5.2.1}$$

La $\mathbb{Z}_2$-parité de $B^\alpha(Z)$ est opposée à celle de Φ^α, tandis que celle de $C_\alpha(Z)$ lui est égale. Ainsi, considérant les super-fantômes associés à μ_-, $B^0(Z)$ est de caractère bosonique, tandis que $C_0(Z)$ est fermionique. On travaille alors sur l'algèbre $F(\Omega)$ formée par l'enveloppante de la réunion de la super-KM et des super-fantômes.

Une fois les fantômes hantant le modèle, on définit le super-courant de BRS:

$$J_{BRS}(Z) = \Phi^\alpha(Z)C_\alpha(Z) + \frac{1}{2} f^{\alpha\beta}{}_\gamma : B^\gamma C_\beta C_\alpha : (Z) \tag{5.2.2}$$

où la somme sur les indices répétés est implicite. La forme de ce courant (en fait le principe de la quantification BRS) repose essentiellement sur le premier terme: les fantômes sont associés aux contraintes, et on définit un opérateur qui va indiquer si un champ "porte" ces contraintes, ou en est affranchi (en ce sens, l'approche BRS se rapproche de l'idée des crochets de Dirac). L'opérateur Q_{BRS} est défini par son action sur un champ $O(W)$:

$$Q_{BRS}O(W) = \int d\theta \oint_w dz\, J_{BRS}(Z)O(W)\ , \qquad \forall O(W) \in F(\Omega) \tag{5.2.3}$$

où $\int d\theta$ est une intégrale de Berezin, et $\oint_w dz$ est une intégrale sur un cercle (dans $\mathbb{C}$) entourant w. Le calcul de cette action est effectué en utilisant les OPEs de la super-KM et des super-fantômes. Elle est donnée par:

$$Q_{BRS}\, J^a(Z) = -k\eta^{a\alpha} DC_\alpha(Z) + f^{a\alpha}{}_b J^b C_\alpha \tag{5.2.4}$$

$$Q_{BRS}\, C_\alpha(Z) = \frac{1}{2} f^{\gamma\beta}{}_\alpha : C_\beta C_\gamma : (Z) \tag{5.2.5}$$

$$Q_{BRS}\, B^\alpha = (-1)^{[\alpha]} J^\alpha(Z) + (-1)^{[\beta]} f^{\alpha\beta}{}_\gamma : B^\gamma C_\beta : (Z) - \delta_0^\alpha \tag{5.2.6}$$

où $a, b, c, \ldots$ sont les indices de la super-KM, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont les indices de la super-KM correspondant à des grades négatifs (sous μ_0). Q_{BRS} est de carré nul (c'est la raison d'exister du deuxième terme de J_{BRS}). Comme pour tout opérateur satisfaisant cette propriété, on peut alors étudier sa cohomologie: les opérateurs "indépendants" des contraintes (*i.e.* la superalgèbre $\mathcal{W}$) sont entièrement contenus dans cette cohomologie.

L'introduction des fantômes introduit une nouvelle graduation associée au "nombre de fantôme", pour laquelle C_α, B^α et J^a ont respectivement un grade 1, -1 et 0. Sous cette graduation, Ω se décompose en espaces Ω^n, formés des élément de grade n, de même que la cohomologie:

$$H[\Omega, Q_{BRS}] = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n[\Omega, Q_{BRS}] \quad \text{avec} \quad H^n[\Omega, Q_{BRS}] = \frac{Ker^{(n)}(Q_{BRS})}{Im^{(n-1)}(Q_{BRS})}$$

$$Ker^{(n)}(Q_{BRS}) = Ker(Q_{BRS}) \cap \Omega^n\ , \qquad Im^{(n)}(Q_{BRS}) = Im(Q_{BRS}) \cap \Omega^n\ .$$

D'autre part, on sait qu'il existe une graduation "naturelle" de la super-KM par μ_0. L'idée est donc de combiner ces deux graduations pour former une bi-graduation dg (qu'on appellera degré)

de Ω qui induira une filtration de cet espace. La solution est donnée par

$$dg(J^a) = (2m_a, -2m_a) \quad (5.2.7)$$
$$dg(C_\alpha) = (-2m_\alpha, 2m_\alpha + 1) \quad (5.2.8)$$
$$dg(B^\alpha) = (2m_\alpha, -2m_\alpha - 1) \quad (5.2.9)$$

où m_a est le grade de J^a sous μ_0. On peut remarquer que le nombre de fantôme est donné par la somme des deux composantes de dg. Sous cette bi-graduation $F(\Omega)$ devient un bi-complexe $F(\Omega) = \oplus_n F^n(\Omega)$ avec $F^n(\Omega) = \oplus_{j\geq n, i\in\mathbb{Z}}\Omega^{(i,j)}$, et $F^p(\Omega^{p+q}) = \oplus_{i\geq 0}\Omega^{(p-i,q-i)}$. J_{BRS} se divise lui-aussi en deux parties, de degré $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement:

$$J_{BRS,0} = -\mu_- C_-(Z) \quad ; \quad J_{BRS,1} = J^\alpha(Z)C_\alpha(Z) + \frac{1}{2}f^{\alpha\beta}{}_\gamma : B^\gamma C_\beta C_\alpha : (Z) \quad (5.2.10)$$

Ceci implique (par analyse du degré) $Q_{BRS} = Q_0 + Q_1$ avec $Q_0^2 = Q_1^2 = Q_0Q_1 + Q_1Q_0 = 0$.

Les cohomologies généralisées sont alors données par $E_0^{p,q} = \Omega^{p,q}$ et $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = H^{p,q}(E_0, Q_0)$. Les dérivations "filtrées" sont exactement Q_0 et Q_1, d'où la "compatibilité" du degré avec l'opérateur BRS.

Pour calculer explicitement la cohomologie BRS de $F(\Omega)$, on remarque que si on modifie les super-courants selon[1]

$$\mathcal{J}^a = J^a + (-1)^{[a][\beta]} f^{a\beta}{}_\gamma : B^\gamma C_\beta : (Z)\,,$$

l'ensemble formé par $\{\mathcal{J}^\alpha, B^\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots\}$ forme un sous-complexe, c'est-à-dire qu'il est stable sous l'action de Q_{BRS}. Ce sous-complexe a une cohomologie triviale, si bien que la cohomologie de $F(\Omega)$ est entièrement contenue (en se servant de la formule de Künneth) dans $F^{red}(\Omega)$, engendré par les super-fantômes C^α et les super-courants de grade positif ou nul (sous μ_0) $\mathcal{J}^{\bar{\alpha}}$ (où par convention les indices grecs barrés sont associés à un tel grade).

Du fait de son super-courant particulièrement simple (porté par μ_-), la détermination de $H[F^{red}(\Omega), Q_0]$ se fait directement. On trouve

$$H^n[F^{red}(\Omega), Q_0] \sim \delta_{n,0} F^{hw}(\Omega) \quad (5.2.11)$$

où $F^{hw}(\Omega)$ est engendré par les super-courants $\mathcal{J}^j(Z)$ qui sont plus hauts poids du $osp(1|2)$ choisi. Cet isomorphisme est un isomorphisme d'espace vectoriel, mais pas d'algèbre. Cependant, chacun des générateurs $\mathcal{J}^j(Z)$ peut-être complété (cf ci-dessous) en utilisant les relations entre Q_0 et Q_1 pour former un générateur $W^j(Z)$, exact et non fermé sous Q_{BRS}. De cette façon, on montre que la cohomologie BRS est entièrement contenue dans $H^0[F(\Omega), Q_{BRS}]$ et est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel) à l'ensemble des plus hauts poids du $osp(1|2) \subset \mathcal{G}$:

$$H^n[F(\Omega), Q_{BRS}] \sim \delta_{n,0} F^{hw}(\Omega) \quad (5.2.12)$$

Pour finir, remarquons que la structure d'algèbre de Ω est transportée dans les espaces cohomologiques, si bien que les espaces $H^{(n)}(\Omega, Q)$ sont des algèbres, en adéquation avec l'idée de quantification d'une algèbre de Poisson.

On a donc bien une quantification de l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Il reste à construire explicitement les générateurs W de cette algèbre.

[1] On rappelle que $[a]$ est le $\mathbb{Z}_2$-grade de $J^a(Z)$.

5.2.2 Construction des générateurs W

L'utilisation de la suite spectrale permet de construire explicitement les générateurs W au niveau quantique. On a vu que $W^{(0)}_{j,p} = \mathcal{J}_{j,p}$ est dans la cohomologie de Q_0 (on rappelle que $\mathcal{J}_{j,p}$ est le plus haut poids de $\mathcal{R}_j$, p étant l'indice de multiplicité de la représentation $\mathcal{R}_j$ de $osp(1|2)$ dans la décomposition de l'adjointe de $\mathcal{G}$). C'est le point de départ de la construction dite de *tic-tac-toe*, qui n'est qu'une explicitation des idées de la suite spectrale. À partir de $W^{(0)}_{j,p}$, on construit une série de $W^{(n)}_{j,p}$ par $Q_1 W^{(n)}_{j,p} = Q_0 W^{(n+1)}_{j,p}$. L'existence de tels générateurs est assurée par la suite spectrale. Puisque $E_\infty = E_1$, seuls interviennent Q_0 et Q_1 dans cette construction, et le générateur total sera définit par $W_{j,p} = \sum_n (-1)^n W^{(n)}_{j,p}$. L'analyse des degrés montre que cette série est finie, le dernier terme non nul étant obtenu pour $n = 2j$. Il est facile de voir que ce générateur satisfait $Q_{BRS} W_{j,p} = 0$, si bien qu'on a effectivement construit un générateur dans la cohomologie de Q_{BRS}, c'est-à-dire un générateur de l'algèbre $\mathcal{W}$.

À titre d'exemple, si on considère le cas $j = 0$, le super-générateur W est $W_{0,p} = W^{(0)}_{j,p} = \mathcal{J}_{j,p}$. Ces générateurs ne sont donc pas modifiés (à part la présence des fantômes): ils forment la super-KM résiduelle de l'algèbre $\mathcal{W}$.

5.2.3 Factorisation des champs de spin 1/2

Les (super-)générateurs W ayant été quantifiés, on peut se demander si les diverses propriétés obtenues dans le cas classique sont préservées lors de la quantification. Nous commençons par la factorisation des champs de spin $\frac{1}{2}$.

Dans le cas classique, on a vu que si un plongement $s\ell(2) \subset_{pal} \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{G}$ était prolongeable en un plongement $osp(1|2) \subset_{pal} \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, les deux algèbres $\mathcal{W}$ correspondantes différaient uniquement par des champs de spin $\frac{1}{2}$, qui formaient une algèbre $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$. On avait alors la factorisation $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}) \sim \mathcal{U}(\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}_0) \otimes \mathcal{S}_{\frac{1}{2}})$.

Du point de vue cohomologique, les réductions sous $s\ell(2)$ et sous $osp(1|2)$ produisent deux cohomologies $H(\omega, s)$ et $H(\Omega, Q)$ où ω et s correspondent au traitement en champs de $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}_0)$, tandis que Ω et Q sont construits sur des superchamps. Pour comparer ces deux cohomologies, on construit une nouvelle filtration sur Ω. Cette filtration ne contient que deux éléments: $\{0\} \subset F_1 \subset F_0$, avec $F_0 = \Omega$. F_1 est constitué essentiellement des champs auxiliaires provenant de l'usage des superchamps. Plus exactement, les générateurs de F_1 sont portés par les champs de spin conforme $\frac{1}{2}$, et par les "fantômes auxiliaires" qui sont les partenaires supersymétriques des fantômes usuels. On peut modifier (à la façon $J^a \to \mathcal{J}^a$ vue précédemment) ces champs pour que F_1 devienne un sous-complexe de F_0. Par construction, F_0 étant la KM supersymétrique basée sur $\mathcal{G}$, $\bar{F} = F_0/F_1$ est la KM basée sur $\mathcal{G}$. Ainsi, $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ admet pour "super-quantification" $H^0(F_0, Q)$, tandis que $H^0(\bar{F}, s)$ est la quantification de $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}_0)$, et s le représentant de Q dans $\bar{F}$. De plus, la suite spectrale assure l'isomorphisme

$$H^0(\bar{F}, s) \sim H^0(F_0, Q)/H^0(F_1, Q) \tag{5.2.13}$$

Il est facile de voir que $H^0(F_1, Q)$ est engendré par les champs de spin conforme $\frac{1}{2}$: c'est la quantification de l'algèbre $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$ introduite en section 4.4. L'isomorphisme (5.2.13) est donc bien une version "cohomologique" de la factorisation des champs de spin $\frac{1}{2}$ dans les superalgèbres $\mathcal{W}$.

5.2.4 Réductions secondaires quantiques [ERA22]

Dans cette section, nous abordons la quantification *à la BRS* de l'approche développée classiquement pour les algèbres $\mathcal{W}$ jaugées. Le point délicat par rapport au cas classique est qu'il faut inclure les ensembles de contraintes de première classe les uns dans les autres, au lieu des ensembles de contraintes de seconde classe. Cela est dû au fait que les opérateurs BRS sont construits uniquement sur ces premières, contrairement à la construction classique (basée sur les crochets de Dirac) qui utilisait aussi les secondes (classes).

Dans ce but, on se sert d'une décomposition $s\ell(2) \oplus g\ell(1)$ de l'algèbre $\mathcal{G}$ (cf section 4.3), ce qui permet de décaler les contraintes et de réaliser ces inclusions. Plus précisément, si $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, on cherche une graduation de $\mathcal{G}$ telle que l'ensemble des contraintes première classe menant à $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ contienne l'ensemble des contraintes première classe menant à $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}')$. Dans ce cas, on peut construire un opérateur BRS sur (la quantification de) $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}')$ dont la cohomologie est exactement (la quantification de) $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Cet opérateur BRS n'est rien d'autre que le représentant de $s'' = s - s'$ dans $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H}')$, où s et s' sont les opérateurs BRS des deux algèbre $\mathcal{W}$. La preuve d'une telle identité repose encore une fois sur l'utilisation d'une suite spectrale, et nous renvoyons le lecteur à l'article original pour plus de détails. Remarquons toutefois que la procédure de "tic-tac-toe" évoquée précédemment permet ici de construire les générateurs d'une algèbre $\mathcal{W}$ en fonction d'une autre.

En application de ce formalisme BRS, on peut déduire un cadre général pour la linéarisation des algèbres $\mathcal{W}$. En effet, les contraintes que l'on impose au niveau des algèbres $\mathcal{W}$ elles-mêmes permettent de supprimer (dans certains cas) les termes non-linéaires de l'algèbres. Ensuite, la procédure de "tic-tac-toe" donne une forme explicite pour cette linéarisation, qui autrement n'est calculée que par force brute.

5.3 Superalgèbres $\mathcal{W}$ et cordes

5.3.1 Corde bosonique et algèbre superconforme $N = 2$ [102]

On part de l'action d'une corde bosonique dans la jauge conforme. Cette action comporte trois termes: un terme de Liouville, correspondant au dilaton du secteur gravitationnel; un terme correspondant au secteur fantôme, provenant du changement de la métrique $g^{ab} = e^{\phi}\eta^{ab}$, où ϕ est le champ de Liouville et η^{ab} la métrique de fond; enfin, un secteur matière, sur lequel on ne fait pas de supposition.

Le tenseur énergie-impulsion de la théorie prend la forme $T = T_L + T_{bc} + T_m$ avec

$$T_L = -\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi + \sqrt{\frac{25 - c_m}{12}}\,\partial^2\phi \tag{5.3.1}$$

$$T_{bc} = -2b\partial c - (\partial b)c \tag{5.3.2}$$

où c_m est la charge centrale du secteur matière, $c_{bc} = -26$ celle venant de la partie fantôme, tandis que la charge de Liouville est ajustée pour obtenir une charge centrale totale nulle (soit $c_L = 26 - c_m$). La charge totale étant nulle, la modèle de corde est donc bien invariante conforme au niveau quantique.

La charge BRS du modèle doit satisfaire

$$Q_{BRS}(b) = T \quad \text{avec} \quad Q_{BRS}^2 = 0 \tag{5.3.3}$$

Elle obtenue à partir d'un courant BRS $J_{BRS}(z)$, tel que

$$Q_{BRS}[F(z)] = \oint_z \frac{dx}{2\pi i} J_{BRS}(x)F(z) \tag{5.3.4}$$

Le choix le plus simple pour ce courant est $J_{BRS} = c\ (T_L + T_M + \frac{1}{2}T_{bc})$, mais, de par sa définition (5.3.4), $J_{BRS}(z)$ n'est défini qu'à des termes de dérivée totale près. On utilise cette liberté pour construire sur J_{BRS} une algèbre. En effet, pour

$$J_{BRS}(z) = c(T_L + T_M + \frac{1}{2}T_{bc}) + \alpha\partial(c\partial\phi) + \beta\partial^2 c \tag{5.3.5}$$

avec

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{1-c_m} + \sqrt{25-c_m}\right) \text{ et } \beta = -\frac{1}{12}\left(7 - c_m + \sqrt{(1-c_m)(25-c_m)}\right) \tag{5.3.6}$$

on peut vérifier que l'on a $J_{BRS}(z)J_{BRS}(w) = 0$, ainsi que

$$J_{BRS}(z)b(w) = \frac{c_2}{(z-w)^3} + \frac{U(w)}{(z-w)^2} + \frac{T}{z-w} \text{ avec } c_2 = -\frac{1}{2}\left(7 - c_m + \sqrt{(1-c_m)(25-c_m)}\right)$$

Cette dernière égalité reproduit (au niveau des courants) l'action (5.3.3). $U(w)$ est le nombre de fantôme (à une dérivée totale près):

$$U(w) = -bc - \partial\phi \ \Rightarrow\ U(z)b(w) = \frac{-b(w)}{z-w} \tag{5.3.7}$$

Ainsi, $\{T,\ J_{BRS},\ b,\ U\}$ forment une superalgèbre de courant. Cette algèbre se trouve être isomorphe à une algèbre superconforme possédant $N = 2$ supersymétrie, où on identifie J_{BRS} avec G_+, b avec G_-, et $T_{N=2} = T - \frac{1}{2}\partial U$, la charge centrale étant c_2.

L'idée est donc de se servir des algèbres superconformes ($N = 2$) pour obtenir des informations sur les théories de cordes. On remarquera en particulier que si la matière décrit un modèle minimal $c_m = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$, on obtient $c_2 = 3(1 - 2\frac{p}{q})$, qui pour $(p,q) = (1, k+2)$ donne les modèles minimaux unitaires $N = 2$, $c_2 = \frac{3k}{k+2}$.

De même, si le secteur matière est construit sur un modèle de WZW contraint basé sur $s\ell(2)$, $c_m = 1 - 6\frac{\kappa+1}{\kappa+2}$, on obtient $c_2 = 3(1 - 2(\kappa+2))$, qui est à rapprocher de la charge centrale obtenue à partir d'une réduction Hamiltonienne sur $s\ell(2|1)$, $c_2' = 3(1 - 2(\kappa+1))$.

Ces observations, bien que donnant une forte indication de corrélation, ne suffisent pourtant pas pour identifier une théorie $N = 2$ avec une théorie de corde. Pour une telle équivalence, il faut pouvoir relier les actions entre elles, ce qui implique, au niveau algébrique, de trouver une présentation de l'algèbre $N = 2$ qui se ramène à celle présentée dans le cadre de la corde bosonique (ci-dessus). Les réductions Hamiltoniennes de WZW menant aux Toda généralisés sont bien évidemment des candidats naturels pour une telle identification. Cependant, les calculs, tels que présentés dans les sections précédentes, ne conduisent *pas* aux modèles de cordes. Une façon simple de voir

cette impossibilité, est de réaliser que ces réductions Hamiltoniennes fournissent une présentation "symétrique" des générateurs de supersymétrie $G_\pm$, alors que la théorie de corde possède un $G_- = b$ particulièrement simple, tandis que $G_+ = J_{BRS}$ est "compliqué". Il faut donc modifier la réduction Hamiltonienne: c'est l'utilisation d'une autre graduation de $\mathcal{G}$ (*i.e.* l'utilisation d'un $g\ell(1)$) qui va permettre cela.

Ainsi, dans le cas d'un modèle de WZW basé sur $s\ell(2|1)$, si au lieu de prendre e_0 comme générateur graduant cette algèbre, on le modifie à l'aide du $g\ell(1)$, $e_0 + b$ (dans les notations de la section 2.1.3), la graduation va devenir entière et contenir comme sous-algèbre $\mathcal{G}_0 = \{e_0, b, f_{+-}, f_{-+}\}$. Appliquant les techniques de réduction Hamiltonienne comme en section 3.1, on va obtenir, dans la jauge diagonale, une action basée sur deux champs bosoniques φ_1, φ_2 (associés à e_0 et b) et deux fermions ψ_1, ψ_2 (associés à $f_{\pm\mp}$). La transformation de Miura donne alors les générateurs de la superalgèbre $\mathcal{W}$ (qui n'est rien d'autre que l'algèbre superconforme $N = 2$) en fonctions de ces champs: cette réalisation "tordue" (car utilisant la graduation modifiée de $e_0 + b$) est exactement celle donnée en début de section, où le secteur matière est identifié avec un modèle de WZW contraint basé sur $s\ell(2)$, *i.e.* le plus simple des modèles de Toda. Ce calcul peut être fait aussi bien en classique qu'en version quantique.

En conclusion, le modèle de corde bosonique invariant conforme dont le secteur matière est un modèle de WZW contraint basé sur $s\ell(2)$ a été identifié (au niveau quantique, opérateur BRS et fantômes de la corde compris) avec un modèle de WZW contraint basé sur $s\ell(2|1)$. Raconté à la façon algébrique, la superalgèbre $\mathcal{W}$ ($N = 2$, contenant des générateurs fermioniques) du modèle de Toda $s\ell(2|1)$ a été retranscrite en une algèbre de Virasoro d'un modèle de Toda $s\ell(2)$ (bosonique) auxquels se rajoutent le champ de Liouville, le courant BRS et les fantômes d'une théorie de corde.

D'une manière générale, l'algèbre basée sur le courant BRS étant une algèbre superconforme $N = 2$, il est naturel de chercher à relier ces théories de cordes avec des modèles de super-Toda généralisés possédant $N = 2$ supersymétries, tels qu'ils ont été introduits en section 4.5. On sait déjà que les modèles de super-Toda associés à un plongement de $s\ell(2|1)$ fournissent des algèbres $\mathcal{W}$ avec $N = 2$ supersymétries, mais, comme on vient de le voir, le point est ici de trouver une présentation (une réduction Hamiltonienne) qui autorise une interprétation du point de vue de la corde, conduisant alors à des modèles dits de $\mathcal{W}$-gravité.

5.3.2 Réduction Hamiltonienne "tordue" d'une superalgèbre

On a vu que pour obtenir une théorie de corde à partir d'un modèle de WZW contraint, il fallait décaler la graduation par l'utilisation d'un $g\ell(1)$. Ce décalage est particularisé en demandant qu'au final, les générateurs fermioniques puissent être identifiés avec les fantômes d'une théorie de corde.

Plus précisément, considérant une réduction Hamiltonienne d'une superalgèbre $\mathcal{G}$ par un plongement de $s\ell(2|1)$, il faut que pour chaque représentation (b, j) entrant dans la décomposition de l'adjointe de $\mathcal{G}$, un des (deux ou quatre) générateurs W associé puisse être identifié à un fantôme. Cela revient à demander qu'un des (deux ou quatre) générateurs de $\mathcal{G}$ composant les plus hauts poids de (b, j) sous le $s\ell(2) \subset s\ell(2|1)$ soit de grade nul sous la graduation tordue $e_0 + \alpha b$ (pour un $\alpha \in \mathbb{C}$ donné). Ceci n'est possible que lorsque $b = 0$. Il faut donc sélectionner les réductions

conduisant à des représentations irréductibles avec $b = 0$. Ces réductions sont de la forme **[ERA24]**

$$s\ell(1|2) \subset_{pal} p\, s\ell(2j+1|2j) \oplus q\, s\ell(2j|2j+1) \subset_{reg} s\ell(p(2j+1)+q(2j)|p(2j)+q(2j+1))$$
$$osp(2|2) \subset_{reg} osp(m|2n)$$

où on a utilisé $\subset_{pal}$ pour noter des plongements principaux et $\subset_{reg}$ pour des inclusions régulières.

Dans ces cas, la graduation tordue est $e_0 + 2j_{max}u_0$, où $2j_{max}+1$ est la dimension maximale des représentations de $s\ell(2)$ entrant dans la décomposition de $\mathcal{G}$. Le même traitement que ci-dessus fournit alors un modèle de corde dont la secteur matière est décrit par un modèle de Toda. L'identification précise de ces modèles est obtenue en analysant les contenus en champs de la théorie. On obtient **[ERA24]**:

Modèle de WZW contraint initial $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ avec	Secteur matière résultant $\mathcal{W}(\mathcal{K},\mathcal{L})$ avec
$\mathcal{G} = s\ell[p(2j+1)+q2j\|p2j+q(2j+1)]$ $\mathcal{H} = p\ s\ell(2j+1\|2j) \oplus q\ s\ell(2j\|2j+1)$	$\mathcal{K} = s\ell[p(2j+1)\|q(2j+1)]$ $\mathcal{L} = p\ s\ell(2j+1) \oplus q\ s\ell(2j+1)$
$\mathcal{G} = osp(m\|2n)$ $\mathcal{H}= osp(2\|2)$	$\mathcal{K} = osp(m-2\|2n)$ $\mathcal{L} = sp(2n)$

Dans le cas particulier où $q = 0$ (notant $s\ell(m|0) = s\ell(m)$), on trouve un modèle de gravité $\mathcal{W}_m$, basé sur les algèbres $\mathcal{W}_m = \mathcal{W}(s\ell_m, s\ell_m)$ [25], ainsi que les modèles de cordes possédant N supersymétries [29, 52].

Partie II

Les algèbres $\mathcal{W}$ finies

Chapitre 6

Applications des algèbres $\mathcal{W}$ finies

Dans ce chapitre, nous abordons une classe d'algèbres que se trouvent être à la frontière entre les théories conformes et les systèmes intégrables. En effet, comme leur nom l'indique, les algèbres $\mathcal{W}$ finies sont construites à la façon des algèbres conformes étendues (dites alors algèbres $\mathcal{W}$ affines), ce qui les relie aux théories conformes. Cependant, ces algèbres sont aussi reliées à une classe de groupes quantiques, les Yangiens, ce qui nous conduit aux algèbres de Hopf et aux systèmes intégrables.

Les algèbres $\mathcal{W}$ finies ont été introduites dans un but mathématique, cependant nous verrons qu'elles ont de nombreuses applications physiques.

6.1 Définition des algèbres $\mathcal{W}$ finies

Le point de départ des algèbres $\mathcal{W}$ finies est très simple: la construction des algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ reposant essentiellement sur la structure de l'algèbre de Lie finie $\mathcal{G}$, en quoi la présence d'une algèbre de KM est-elle nécessaire? En effet, rien n'empêche de contraindre l'algèbre $\mathcal{G}$ elle-même (au lieu de l'algèbre de KM associée) et de faire les mêmes constructions que celles conduisant aux algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

Explicitement, cela revient à employer les techniques présentées dans la section 3 en "oubliant" la dépendance dans la variable z, aussi nous ne reviendrons pas sur cette construction. L'algèbre ainsi construite est une algèbre polynomiale possédant un nombre fini de générateurs (grossièrement, il n'y a que les modes zéros de l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ affine), ce qui la rend beaucoup plus simple à étudier. Bien sûr, les algèbres $\mathcal{W}$ ainsi construites ne sont plus reliées directement aux théories conformes à deux dimensions (ce qui *a priori* diminue leur attrait du point de vue de la physique), mais leur simplicité en fait un bon "laboratoire d'étude" des propriétés de ces algèbres, ce qui les rend très attractives du point de vue mathématique. De fait, le calcul de la cohomologie BRS des algèbres $\mathcal{W}$ affines a été réalisé en utilisant les algèbres $\mathcal{W}$ finies. Plus précisément, une première suite spectrale introduite par Feigin et Frenkel [86] avait permis le calcul de la cohomologie associée aux algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{G})$ affines mais n'était pas généralisable au cas $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$. C'est en étudiant le cas des algèbres $\mathcal{W}$ finies que J. de Boer et T. Tjin [48] ont trouvé une nouvelle suite spectrale adaptée à toutes les algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ finies, puis l'ont généralisée au cas affine.

Remarque 6.1.1 *Pour la petite histoire, notons que la différence entre ces deux filtrations (à la*

Feigin et Frenkel ou à la de Boer et Tjin) repose uniquement sur l'échange de Q_0 et Q_1, définis en section 5.2.1: dans un cas, la suite spectrale associée est "courte" (i.e. elle finit), dans l'autre non (elle est infinie). C'est une illustration du "bon choix de filtration" mentionné en section 5.1.

Bien qu'introduites à l'origine dans le cas quantique, les algèbres $\mathcal{W}$ finies peuvent aussi être définies en crochets de Poisson, en utilisant les différentes techniques introduites précédemment (transformations de jauge, crochets de Dirac, etc...).

Bien sûr, les algèbres $\mathcal{G}$ étant de dimension finie, les algèbres $\mathcal{W}$ finies correspondantes sont tellement "simples" qu'elles deviennent parfois triviales. Par exemple, les algèbres de type $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{G})$ se trouvent n'être formées que par les Casimirs de $\mathcal{G}$, et donc commutatives. En particulier, la version finie de l'algèbre de Virasoro est isomorphe à une algèbre $g\ell(1)$. Cependant, lorsque $\mathcal{H}$ n'est pas $\mathcal{G}$, l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ finie n'est pas commutative, et donc présente un certain intérêt algébrique. Le plus simple des cas est fourni par l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ finie, que nous construisons, à titre d'exemple des techniques décrites dans la partie précédente, au niveau classique.

6.1.1 Exemple: l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$

Nous considérons l'algèbre $s\ell(3)$, de générateurs e_{ij} $(i,j=1,2,3)$ soumis aux crochets de Poisson $\{e_{ij}, e_{kl}\} = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}$. Le $s\ell(2)$ déterminant la réduction Hamiltonienne est régulier. Le point de départ est le "courant" contraint

$$J_{cont} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ 0 & e_{22} & e_{23} \\ 1 & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad e_{11}+e_{22}+e_{33}=0$$

La sous-algèbre $\mathcal{G}_0$ est engendrée par les éléments e_{jj}, $j=1,2,3$ et e_{23}, e_{32} (après décalage de la gradation pour qu'elle devienne entière). Les "transformations de jauge" (en fait des conjugaisons dans le cas fini) sont de la forme:

$$J_{cont} \to g J_{cont} g^{-1} \quad \text{avec} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_- \tag{6.1.1}$$

La jauge de plus haut poids s'écrit

$$J_{hw} = \begin{pmatrix} W_0 & W_+ & C \\ 0 & -2W_0 & W_- \\ 1 & 0 & W_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_0 = \frac{1}{6}(e_{11}+e_{33}-2e_{22}) \\ W_- = e_{23} \\ W_+ = e_{12} + \frac{1}{2}e_{32}(e_{22}-e_{11}) \\ C = e_{13} + e_{23}e_{32} - \frac{1}{4}(e_{11}-e_{33})^2 \end{cases}$$

Les crochets de Poisson de ces générateurs sont déduits de ceux du courant J_{cont}. Ces crochets de Poisson ne sont bien sûr pas compatibles avec les contraintes imposées (d'où la recherche éventuelle de crochets de Dirac, voir plus bas). Les générateurs C, $W_\pm$ et W_0 sont par contre invariants de jauge (telles que définies par (6.1.1)), et ont à ce titre des crochets de Poisson bien définis. Ils prennent la forme

$$\{W_0, W_\pm\} = \pm\frac{1}{2}W_\pm \quad , \quad \{W_+, W_-\} = -9W_0^2 + C \tag{6.1.2}$$

$$\{C, X\} = 0 \qquad X = W_\pm,\ W_0 \tag{6.1.3}$$

On reconnaît une déformation non-linéaire de $s\ell(2)$ avec extension centrale portée par C. Noter que W_0 (associé à un plus haut poids de grade 0) est dans l'algèbre $s\ell(3)$ elle-même: il engendre l'algèbre de Lie résiduelle de $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$, qui est ici une algèbre $g\ell(1)$.

Pour illustrer le formalisme des crochets de Dirac, nous profitons de la simplicité des algèbres $\mathcal{W}$ finies pour donner leur calcul. Les contraintes première et seconde classe sont

$$\Phi = (\varphi_j)_{j=1,\ldots,4} = (e_{21}, e_{31} - 1, e_{32}, h = e_{11} - e_{33}) = (0,0,0,0).$$

À partir de ces contraintes, on calcule

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{e_{21},e_{21}\} & \{e_{21},e_{31}\} & \{e_{21},e_{32}\} & \{e_{21},h\} \\ \{e_{31},e_{21}\} & \{e_{31},e_{31}\} & \{e_{31},e_{32}\} & \{e_{31},h\} \\ \{e_{32},e_{21}\} & \{e_{32},e_{31}\} & \{e_{32},e_{32}\} & \{e_{32},h\} \\ \{h,e_{21}\} & \{h,e_{31}\} & \{h,e_{32}\} & \{h,h\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.4)$$

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.5)$$

Cette matrice nous permet de calculer les crochets de Dirac, selon la formule déjà donnée dans la section 2.5:

$$\{A,B\}_* = \{A,B\} - \sum_{j,k=1}^{4} \{A,\varphi_j\}(\Delta^{-1})_{jk}\{\varphi_k,B\}$$

On retrouve l'algèbre $\mathcal{W}$ à partir des crochets de Dirac des générateurs non contraints, e_{12}, e_{13}, e_{23} et $Y = e_{11} + e_{33} - 2e_{22}$:

$$\{Y,e_{12}\}_* = 3e_{12} \quad , \quad \{Y,e_{23}\}_* = -3e_{23} \quad (6.1.6)$$

$$\{e_{12},e_{23}\}_* = e_{13} - \frac{1}{4}Y^2 \quad , \quad \{e_{12},X\}_* = 0 \qquad X = e_{12},\ Y,\ e_{13},\ e_{23} \quad (6.1.7)$$

On retrouve l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ en faisant le changement de générateurs $W_+ = e_{12}$, $W_- = e_{23}$, $W_0 = \frac{1}{6}Y$ et $C = e_{13}$. Bien sûr, par construction, on peut vérifier que l'on a

$$\{\varphi_j, X\}_* = 0 \qquad j = 1,\ldots,4\,,\ X = e_{12},\ Y,\ e_{13},\ e_{23} \quad (6.1.8)$$

ce qui clôt l'exemple.

Nous ne nous étendrons pas sur la cohomologie BRS des algèbres $\mathcal{W}$ finies, le cas affine ayant été décrit précédemment. Nous présenterons quelques unes de leurs applications (physiques et mathématiques) que ne présupposait pas leur définition.

6.2 Commutants et algèbres $\mathcal{W}$ finies [ERA23]

Pour simplifier la présentation, nous ne présentons que le cas où $\mathcal{G}_-$ est commutatif. Le cas plus général de $\mathcal{G}_-$ quelconque peut être traité de la même manière, bien que de façon plus lourde techniquement.

6.2.1 Cas classique

Revenant à la définition même de la réduction Hamiltonienne (au niveau des algèbres $\mathcal{W}$ finies), et considérant les transformations de jauge engendrées par les contraintes de première classe, on peut se demander si, dans la construction des champs W, on peut s'abstraire de ces contraintes tout en demandant encore l'invariance sous les mêmes groupes de symétrie. Au niveau algébrique, cela revient à se demander si les techniques de transformations de jauge (par un groupe G_- d'algèbre $\mathcal{G}_- \subset \mathcal{G}$) ne peuvent pas être adaptées pour construire le commutant (au sens des crochets de Poisson *et* sans imposer les contraintes) de $\mathcal{G}_-$ dans l'enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. En effet, la construction (si elle généralisable) produit des générateurs dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ qui vont être "invariants de jauge", donc qui vont commuter avec les générateurs de $\mathcal{G}_-$. Le prix à payer réside dans le relâchement des contraintes: la construction fait apparaître une division par des générateurs de $\mathcal{G}$. Cependant, cette généralisation est possible en considérant une "localisation" de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ par les éléments de $\mathcal{G}_-$. Mathématiquement, cette localisation n'est que l'agrandissement de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ par des générateurs qui correspondent aux inverses des éléments de $\mathcal{G}_-$.

Nous considérons le cas où $\mathcal{G}_-$ est Abélien, plus intuitif. En effet, si $\mathcal{G}_-$ est Abélien, il n'y aura pas de problème d'ordre entre les générateurs (de $\mathcal{G}_-$), et la technique de transformations de jauge pourra être encore utilisée sans grand changement. Du point de vue des algèbres $\mathcal{W}$, une graduation conduisant à un groupe de jauge Abélien est donné par les plongements de $s\ell(2)$ suivants:

(*i*) Le $s\ell(2)$ diagonal dans la somme directe de $p\, s\ell(2)$, $1 \leq p \leq [\frac{N}{2}]$ pour $\mathcal{G} = s\ell(N)$;

(*ii*) Le $s\ell(2)$ diagonal dans la somme directe de $p\, s\ell(2)$, $1 \leq p \leq d$, ou bien le $sp(2)$ régulier pour $\mathcal{G} = sp(2d)$;

(*iii*) Le $s\ell(2)$ diagonal dans la somme directe de $p\, s\ell(2)$, $1 \leq p \leq [\frac{N}{2}]$ pour $\mathcal{G} = so(N)$.

Sans entrer dans les détails, dans le cas où $\mathcal{G}_-$ est commutatif, on peut facilement voir qu'il existe un unique élément g de G_-, qui par conjugaison, va amener dans une forme proche de la jauge de plus haut poids. En effet, partant de

$$J = J^a t_a = J^\alpha t_\alpha + J^i t_i + J^{\bar{\alpha}} t_{\bar{\alpha}} \tag{6.2.1}$$

où t_α et $t_{\bar{\alpha}}$ ($\alpha, \bar{\alpha} = 1$, ..., dim $\mathcal{G}_+$ = dim $\mathcal{G}_-$) engendrent $\mathcal{G}_+$ and $\mathcal{G}_-$ (dans la représentation fondamentale de $\mathcal{G}$) respectivement, tandis que t_i ($i = 1$, ..., dim $\mathcal{G}_0$) forment une base de $\mathcal{G}_0$. L'élément g peut être utilisé pour avoir

$$J^g = gJg^{-1} = J^\alpha t_\alpha + W^j M_j \quad \text{avec} \quad [e_+, M_j] = 0 \tag{6.2.2}$$

où e_+ est le générateur du $s\ell(2)$ considéré, et M_j sont ses plus haut poids dans la représentation fondamentale de $\mathcal{G}$. L'unicité de g assure alors que les générateurs W^j et J^α commutent (au sens des crochets de Poisson) avec $\mathcal{G}_-$. On a ainsi une base du commutant de $\mathcal{G}_-$ dans (une localisation de) $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. La forme de J^g suggère (et cela peut effectivement être prouvé) que ce commutant est de la forme $\mathcal{U}[\mathcal{G}_- \oplus \mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})]$ où $\mathcal{H}$ défini le plongement de $s\ell(2)$ (*i.e.* de la forme (*i*)-(*iii*) donnée ci-dessus).

De cette manière on construit l'ensemble des invariants sous $\mathcal{G}_-$. L'algèbre obtenue contient l'algèbre $\mathcal{W}$ bâtie à partir de $\mathcal{G}_-$, mais aussi de nouveaux générateurs (toujours dus au relâchement des contraintes) qui se trouvent être dans le centre de l'algèbre $\mathcal{W}$.

Comme mentionné précédemment, le cas de $\mathcal{G}_-$ non-commutatif peut lui aussi être traité. On obtient alors son commutant dans une localisation de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. Ce commutant est formé d'une sous-algèbre Abélienne de $\mathcal{G}_-$ (qui se trouve être dans le centre du commutant) et d'une algèbre $\mathcal{W}$ finie. Cependant, lorsqu'on étudie cette algèbre $\mathcal{W}$, elle se trouve être du type $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mu s\ell_2)$, où $\mu \in \mathbb{Z}_+$ dépend du $\mathcal{G}_-$ considéré. Par exemple, dans le cas du plongement principal de $s\ell(2)$ dans $s\ell(N)$, correspondant à un $\mathcal{G}_-$ formé par les matrices triangulaires strictement inférieures, l'algèbre $\mathcal{W}$ du commutant est $\mathcal{W}(s\ell_N, [\frac{N}{2}]s\ell_2)$, et non pas $\mathcal{W}(s\ell_N, s\ell_N)$ comme on aurait pu s'y attendre. Bien que surprenante, cette propriété peut être justifiée (à part bien sûr le calcul direct qui le prouve) si on se rappelle que les algèbres de type $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mu s\ell_2)$ sont celles qui apparaissent à la base des algèbres $\mathcal{W}$ jaugées, desquelles on peut déduire toutes les autres algèbres $\mathcal{W}$. Il n'est donc pas étonnant qu'elles apparaissent lors d'un calcul plus général que l'imposition de contraintes.

Enfin, on remarquera que le cas des algèbres $\mathcal{W}$ affines peut lui aussi est traité par cette technique. On peut par exemple construire l'algèbre de Virasoro dans une localisation de $\mathcal{U}(\widehat{s\ell_2})$. La construction diffère de la construction de Sugawara, le générateur de Virasoro étant le quotient d'un polynôme de degré quatre par $J_-(z)^2$. Ce générateur de Virasoro commute avec $J_-(z)$.

De même, les algèbres affines $\mathcal{W}_3$ et $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ sont construites dans une localisation de $\mathcal{U}(\widehat{s\ell_3})$, alors que la construction de type GKO n'existe que pour $\mathcal{W}_3$.

6.2.2 Cas quantique

Le calcul en crochets de Poisson peut être généralisé à un calcul en commutateurs de la manière suivante. On se sert de l'isomorphisme d'algèbre qui existe entre le dual de $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$, muni des crochets de Poisson et $\mathcal{G}$ muni du commutateur. Cet isomorphisme peut être étendu, en tant qu'isomorphisme d'espaces vectoriels, aux algèbres enveloppantes $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}(\mathcal{G}^*)$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{G})$, le produit (commutatif) dans $\mathcal{U}^*$ étant associé au produit symétrisé dans $\mathcal{U}$. A partir du calcul classique du commutant (dans $\mathcal{U}^*$), on déduit alors une forme symétrisée des générateurs (dans $\mathcal{U}$). Bien que l'isomorphisme ne transporte pas les relations de commutations (de $\mathcal{U}^*$ dans $\mathcal{U}$), on peut voir par calcul direct qu'il préserve les commutants. Ainsi, on peut calculer le commutant de $\mathcal{G}_-$ dans (une localisation de) $\mathcal{U}$ par ce procédé de quantification. Les commutants au niveau classique et au niveau quantique sont donc isomorphes en tant qu'espaces vectoriels. Cependant, la structure d'algèbre n'étant pas transportée, ces commutants seront différents en tant qu'algèbres (voir l'exemple ci-dessous).

Cette technique peut être résumée dans le schéma suivant:

Classique	$\longrightarrow$	Quantique	Isomorphisme
J^a	$\to$	T^a	
$\mathcal{G}^*$	$\to$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G} \underset{alg.}{\sim} \mathcal{G}^*$
$\{J^a, J^b\}$	$\to$	$[T^a, T^b]$	
$\mathcal{U}^*$	$\to$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U} \underset{e.v.}{\sim} \mathcal{U}^*$
$J^{a_1} J^{a_2} \ldots J^{a_k}$	$\to$	$s_k(T^{a_1}, T^{a_2}, \ldots, T^{a_k})$	
$Com(\mathcal{G}_-^*)$	$\to$	$Com(\mathcal{G}_-)$	$Com(\mathcal{G}_-) \underset{e.v.}{\sim} Com(\mathcal{G}_-^*)$

Nous avons indiqué les cas où l'isomorphisme est entre algèbres ($alg.$) ou entre espaces vectoriels ($e.v.$). s_k dénote le produit symétrisé de k générateurs, normalisé par $s_k(T^a, T^a, \ldots, T^a) = (T^a)^k$.

L'avantage de cette méthode est de fournir une réalisation des algèbres $\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ finies qui utilise tous les générateurs de l'algèbre $\mathcal{G}$. Nous verrons aussi qu'elle permet l'étude des anyons. Avant cela, nous traitons un exemple simple pour donner une image plus précise des techniques employées.

6.2.3 Exemple: $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ "localisée"

Nous reprenons le cas étudié en section 6.1.1, mais sans imposer de contraintes. Le point de départ est donc le courant "complet"

$$J = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad e_{11}+e_{22}+e_{33}=0$$

sur lequel nous considérons les conjugaisons

$$J \to gJg^{-1} \quad \text{avec} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_- \tag{6.2.3}$$

Comme dans les réductions Hamiltoniennes, on cherche g pour que gJg^{-1} soit de la forme

$$gJg^{-1} = \begin{pmatrix} Y & W_{12} & W_{13} \\ e_{21} & -2Y & W_{23} \\ e_{31} & 0 & Y \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi les paramètres a et b en fonction des générateurs de $s\ell(3)$, et de e_{31}^{-1}, e_{21}^{-1}. Les générateurs du commutant s'écrivent alors (outre e_{31} et e_{21} eux-mêmes):

$$W_0 = \frac{w_0}{2e_{31}} \quad , \quad W_+ = \frac{w_{12}}{2e_{31}} \quad , \quad W_- = -\frac{w_{23}}{2e_{31}^2} \quad , \quad W_{13} = \frac{w_{13}}{4e_{31}^2} \tag{6.2.4}$$

où on a introduit les combinaisons:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{3}(e_{11}-2e_{22}+e_{33})e_{31} + e_{21}e_{32} \\
w_{12} &= -(e_{11}-e_{33})e_{32}e_{31} - (e_{11}-2e_{22}+e_{33})e_{32}e_{31} - 2e_{21}e_{32}^2 + 2e_{12}e_{31}^2 \\
w_{23} &= (e_{11}-e_{33})e_{21}e_{31} - (e_{11}-2e_{22}+e_{33})e_{21}e_{31} - e_{21}^2e_{32} + 2e_{23}e_{31}^2 \\
w_{13} &= (e_{11}-e_{33})^2e_{31}^2 - 2(e_{11}-2e_{22}+e_{33})e_{32}e_{21}e_{31} - 3e_{32}^2e_{21}^2 + \\
&\quad +4(e_{21}e_{12}+e_{32}e_{23})e_{31}^2 + 4e_{13}e_{31}^3
\end{aligned}$$

Un calcul direct en utilisant les crochets de Poisson de $s\ell(3)$ montre alors que les générateurs w commutent avec e_{31} et e_{21} et qu'ils forment l'algèbre suivante:

$$\{w_0, w_{12}\} = e_{31}\, w_{12} \quad ; \quad \{w_0, w_{23}\} = -e_{31}\, w_{23} \quad ; \quad \{w_{12}, w_{23}\} = 9\, e_{31}\, w_0^2 - e_{31}\, w_{13}.$$

si bien que les générateurs donnés en (6.2.4) forment bien l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ finie (en crochets de Poisson), le commutant de (e_{31}, e_{21}) étant formé par (une localisation de) cette algèbre à laquelle

on a ajoutée e_{31} et e_{21}. Si on impose les contraintes $e_{32} = 1$ et $e_{21} = 0$, la construction ci-dessus redonne bien sûr exactement le calcul fait en section 6.1.1.

Le cas quantique (en commutateurs) se traite de la même façon: on obtient une version en produits totalement symétrisés des générateurs w qui engendrent le commutant de (e_{31}, e_{21}). Les relations de commutation des générateurs quantiques (6.2.4) prennent la forme:

$$[W_0, W_\pm] = \pm\frac{1}{2} W_\pm \quad ; \quad [W_+, W_-] = -9\, W_0^2 + W_{13} + \frac{9}{8}.$$

On remarquera dans le dernier commutateur le terme supplémentaire dû à la quantification et qui change la charge centrale de l'algèbre ($C = W_{13} + \frac{9}{8}$).

6.2.4 $\mathcal{W}$-représentations des algèbres de Lie [ERA23]

On peut utiliser la construction des commutants décrite ci-dessus pour obtenir de nombreuses représentations des algèbres de Lie. Les représentations construites de cette façon sont particulièrement parlantes du point de vue physique, comme on le verra dans les exemples donnés ci-après. Nous décrivons tout d'abord la méthode de construction de ces représentations.

Le point de départ repose sur deux points à priori non corrélés:

Le calcul du commutant d'une sous-algèbre Abélienne $\mathcal{G}_-$ de $\mathcal{G}$. Ce commutant est formé de $\mathcal{G}_-$ elle-même et d'une algèbre $\mathcal{W}$ finie. Du fait de l'absence de contrainte, l'expression des générateurs de $\mathcal{W}$ en fonction de ceux de $\mathcal{G}$ peut être "inversée", c'est-à-dire qu'on peut choisir certains générateurs de $\mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_+$ (formant un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de dimension dim$\mathcal{W}$) et les exprimer en fonction des autres générateurs de $\mathcal{G}$ et de ceux de $\mathcal{W}$ (considérés comme indépendants de ceux de $\mathcal{G} - \mathcal{E}$).

La représentation de $\mathcal{G}$ induite par $\mathcal{G}_-$. Sans entrer dans les détails de cette technique bien connue, on considère comme espace de représentation les fonctions sur G_- à valeur dans $\mathbb{C}$. $\mathcal{G}_-$ étant Abélien, cet espace est identifié aux fonctions de dim$\mathcal{G}_-$ variables complexes y_α, l'action d'un générateur $t_\alpha \in \mathcal{G}_-$ se faisant par multiplication par y_α. Les générateurs de $\mathcal{G}_+$ sont alors construits sur les opérateurs différentiels $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$, ceux de $\mathcal{G}_0$ comme des polynômes en y_α et ∂_α.

L'idée des $\mathcal{W}$-représentations est d'utiliser des représentations matricielles (*i.e.* de dimension finie) de $\mathcal{W}$, pour généraliser la représentation différentielle induite par $\mathcal{G}_-$. En effet, $\mathcal{W}$ étant dans le commutant de $\mathcal{G}_-$, on peut considérer une représentation quelconque de $\mathcal{W}$, indépendamment de la représentation différentielle. Grâce à cette représentation, en utilisant l'expression de générateurs de $\mathcal{E}$ en fonction de $\mathcal{W}$ et des autres générateurs de $\mathcal{G}$, on obtient une nouvelle représentation de $\mathcal{G}$ dans laquelle l'espace de représentation est formé de fonctions sur G_- à valeur dans l'espace de représentation de $\mathcal{W}$.

L'interprétation physique d'une telle approche est très simple: la représentation différentielle correspond à l'espace de phase classique, les fonctions d'onde du systèmes étant fonctions des variables "d'espace" y_α. On a une action "naturelle" (induite par $\mathcal{G}_-$) des éléments de $\mathcal{G}$ sur ces fonctions d'onde. La représentation matricielle de $\mathcal{W}$ correspond aux variables de "spin" (quantiques) de ces fonctions d'onde. Les exemples ci-dessous vont corroborer cette interprétation.

6.2.5 Exemple: $\mathcal{W}$-réalisation de $s\ell(3)$

Nous continuons l'exemple de $\mathcal{W}(s\ell_3, s\ell_2)$ pour construire une réalisation de $s\ell(3)$. La sous-algèbre $\mathcal{G}_-$ est formée de e_{21} et e_{31} auxquels nous associons les variables x_2 et x_3 respectivement. La représentation différentielle de $s\ell(3)$ prend la forme:

$$e_{21} = x_2 \quad ; \quad e_{12} = -x_2\partial_2^2 - x_3\partial_2\partial_3 - \frac{3}{2}\partial_2 \quad ; \quad e_{32} = x_3\partial_2 \tag{6.2.5}$$

$$e_{31} = x_3 \quad ; \quad e_{13} = -x_3\partial_3^2 - x_2\partial_2\partial_3 - \frac{3}{2}\partial_3 \quad ; \quad e_{23} = x_2\partial_3 \tag{6.2.6}$$

$$Y = e_{11} + e_{33} - 2e_{22} = -3x_2\partial_2 - \frac{3}{2} \quad ; \quad h = e_{11} - e_{33} = -2x_3\partial_3 - x_2\partial_2 - \frac{3}{2} \tag{6.2.7}$$

La représentation étant induite par e_{21} et e_{31}, seuls les générateurs W correspondant à des Casimirs de l'algèbre doivent être non nuls. On vérifie en effet que dans cette représentation différentielle, les générateurs W sont identiquement nuls, à part W_{13}, proportionnel au Casimir d'ordre 2, et qui vaut $-\frac{9}{8}$.

On se sert ensuite de la forme des générateurs W donnés plus haut pour généraliser cette représentation. Par exemple, la forme de w_0 permet d'exprimer Y sous la forme

$$Y = \frac{3}{x_3}\Big(w_0 - s_2(e_{21}, e_{32})\Big) = -3x_2\partial_2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{x_3}w_0 \tag{6.2.8}$$

En plus de Y, les générateurs à modifier (à l'aide de w_{12}, w_{23} et w_{13}) seront e_{12}, e_{23} et e_{13}, les autres générateurs gardant leur forme différentielle initiale.

Ainsi, une représentation de l'algèbre $\mathcal{W}$ est donnée par $W_\pm = 0$, $W_0 = a$ et $W_{13} = 9a^2 - \frac{9}{8}$, avec a nombre complexe quelconque. Dans cette représentation, on change Y et, par exemple, e_{23} selon

$$Y = -3(x_2\partial_2 + \frac{1}{2}) + 6a \tag{6.2.9}$$

$$e_{23} = x_2\partial_3 + 9a\frac{x_2}{x_3} \tag{6.2.10}$$

Pour obtenir d'autres représentations de $s\ell(3)$, il faut prendre des représentations matricielles de l'algèbre $\mathcal{W}$, telle que par exemple

$$W_+ = \frac{3}{2\sqrt{2}}E_{12} \quad ; \quad W_- = \frac{3}{2\sqrt{2}}E_{21} \quad ; \quad W_0 = \frac{1}{2}E_{11} \quad ; \quad W_{13} = 0 \quad i.e. \quad C = -\frac{9}{8}(E_{11} + E_{22})$$

où E_{ij}, $i, j = 1, 2$ sont les matrices élémentaires 2×2.

6.3 Applications physiques

6.3.1 Anyons

Une belle application de l'approche ci-dessus réside dans le traitement algébrique des anyons [158] en une et deux dimensions.

Deux particules dans une dimension

Nous considérons un système de deux particules en une dimension. Les coordonnées et impulsions relatives du système sont notées:

$$x = x_{(1)} - x_{(2)} \qquad p = \frac{1}{2}\left(p_{(1)} - p_{(2)}\right) \tag{6.3.1}$$

Elles satisfont les crochets de Poisson $\{x, p\} = 1$. Les observables

$$E_+ = \frac{1}{2}\, p^2 \;\; ; \; E_- = \frac{1}{2}\, x^2 \;\; ; \; E_0 = \frac{1}{4i}(xp + px) \tag{6.3.2}$$

ferment sur l'algèbre $\mathcal{G} = s\ell(2)$:

$$\{E_0, E_\pm\} = \pm, iE_\pm \qquad \{E_+, E_-\} = -iE_0 \tag{6.3.3}$$

La quantification usuelle d'un tel système revient à remplacer les crochets de Poisson sur x et p par des commutateurs $[x, p] = i$, produisant une représentation (en commutateurs) de $s\ell(2)$, où x agit par multiplication et $p = -i\partial_x$. Elle est associée à la valeur

$$\gamma_0 = -\frac{3}{16} \tag{6.3.4}$$

de l'opérateur Casimir:

$$\Gamma = E_0^2 + \frac{1}{2}\{E_+, E_-\} \tag{6.3.5}$$

Cependant, du point de vue quantique, x et p n'étant pas des observables, il est légitime de s'interroger sur la pertinence de quantifier leurs crochets de Poisson plutôt que ceux des observables (6.3.2). C'est le point de vue adopté par Leinaas et Mirheim [159]. Nous le reformulons sous l'angle des algèbres $\mathcal{W}$. L'idée est donc de quantifier l'algèbre $s\ell(2)$, tout en préservant l'interprétation physique du système. Pour que les fonctions d'onde du système soient interprétables comme dépendant de la position, il est naturel de garder la forme de $E_- = x^2$, tout en cherchant une représentation générale de $s\ell(2)$. C'est exactement le point de vue des $\mathcal{W}$-représentations d'une algèbre de Lie: on cherche le commutant de E_- pour obtenir une algèbre $\mathcal{W}$ dont les représentations fournissent les différentes représentations de l'algèbre de Lie. Dans le cas présenté ici, le calcul est particulièrement simple (car $\mathcal{G} = s\ell(2)$), et on trouve une algèbre $\mathcal{W}$ finie Abélienne, générée par E_- et Γ.

À partir de la technique décrite plus haut, on déduit une nouvelle représentation de $s\ell(2)$, utilisant encore x et p, mais valable pour une valeur quelconque, γ, de Γ. Cela revient à diagonaliser simultanément l'observable $E_- = \frac{1}{2}x^2$ et l'opérateur Casimir Γ. Cette représentation prend la forme

$$E_0 = -(x^2\partial_{x^2} + \frac{1}{4}) \quad , \quad E_+ \to E'_+ = -\frac{1}{2}(\partial_x)^2 + (\gamma + \frac{3}{16})\frac{1}{x^2} \tag{6.3.6}$$

On reconnaît dans E_+ un Hamiltonien dépendant d'un paramètre

$$\lambda = \gamma + \frac{3}{16} \tag{6.3.7}$$

qui peut être directement relié au paramètre anyonique, le cas limite $\lambda = 0$ correspondant aux cas bosonique et fermionique. Ainsi, cette technique algébrique produit aussi un Hamiltonien naturel pour les anyons, le terme d'interaction λ/x^2 étant lié à la statistique de ce type de particules.

Deux particules en deux dimensions [ERA20]

Le même calcul peut être mené dans le cas de deux dimensions d'espace. L'algèbre de départ est maintenant engendrée par les polynômes quadratiques homogènes dans les variables relatives x_j et p_j $(j = 1, 2)$. On divise ces polynômes en trois sous-ensembles, constitués de:

- trois opérateurs coordonnées (commutants):

$$u = (x_1)^2 + (x_2)^2 \qquad v = (x_1)^2 - (x_2)^2 \qquad w = 2x_1x_2 \tag{6.3.8}$$

- trois opérateurs différentiels du second ordre (commutants):

$$U = (p_1)^2 + (p_2)^2 \qquad V = (p_1)^2 - (p_2)^2 \qquad W = 2p_1p_2 \tag{6.3.9}$$

- quatre opérateurs différentiels du premier ordre, engendrant une algèbre $s\ell(2,\mathbb{R}) \oplus g\ell(1)$:

$$\begin{array}{ll} C_s = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}(x_ip_i + p_ix_i) & C_d = \frac{1}{4}(x_1p_1 + p_1x_1 - x_2p_2 - p_2x_2) \\ L = x_1p_2 - x_2p_1 & M = x_1p_2 + x_2p_1 \end{array} \tag{6.3.10}$$

où C_s est le facteur $g\ell(1)$.

On peut reconnaître dans ces dix générateurs une présentation de l'algèbre $sp(4)$, les opérateurs (x_j, p_j) en fournissant une représentation particulière, associée à des valeurs spéciale de ses opérateurs Casimir $\Delta^{(2)} = -\frac{1}{3}$ et $\Delta^{(4)} = \frac{1}{108}$.

Comme dans le cas $d = 1$, on cherche alors une représentation générale de $sp(4)$ tout en gardant les trois opérateurs coordonnées u, v, w comme observables. C'est donc le commutant de ces générateurs que l'on cherche, à la mode algèbre $\mathcal{W}$. L'algèbre $\mathcal{W}$ "localisée" que l'on obtient est engendrée, en sus de u, v, w, par quatre générateurs $\hat{S}, \hat{R}, \hat{Q}, \mu$ avec μ central. Renormalisant ces générateurs selon

$$S = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2 - w^2}}\,\hat{S} \tag{6.3.11}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2 - w^2}\sqrt{v^2 + w^2}}\,\hat{R} \tag{6.3.12}$$

$$Q = \frac{1}{(u^2 - v^2 - w^2)\sqrt{v^2 + w^2}}\,\hat{Q} \tag{6.3.13}$$

on retrouve l'algèbre $\mathcal{W}(sp(4), 2s\ell_2)$ finie:

$$\begin{array}{lll} [S, Q] = -2iR & & [S, R] = 2iQ \\ [Q, R] = -8iS(\mu - 2S^2) & & \end{array} \tag{6.3.14}$$

Il reste à déterminer un ensemble complet de générateurs commutant. On sait que, pour l'algèbre $sp(4)$, la dimension de cet ensemble doit être de six. Le choix adapté à l'algèbre $\mathcal{W}$ se trouve être formé par μ, S et le Casimir:

$$\Delta_0 = Q^2 + R^2 + 4(\mu - 4)S^2 - 4S^4 \tag{6.3.15}$$

auxquels s'ajoutent les générateurs u, v, w. Les Casimirs de $sp(4)$ peuvent être reconstruits à partir de cet ensemble. Une représentation quelconque de $sp(4)$ sera alors donnée par les trois générateurs u, v, w (en représentation (x_i, p_i), inchangés) et par les valeurs de μ, S et Δ_0.

Introduisant la paramétrisation

$$\begin{aligned} u &= r^2 \quad ; \quad v = r^2 \sin\theta\cos 2\phi \quad ; \quad w = r^2 \sin\theta \sin 2\phi && (6.3.16)\\ C_\rho &= \cos(2\phi)\ 2C_d + \sin(2\phi)\ M \\ C_\phi &= -\sin(2\phi)\ 2C_d + \cos(2\phi)\ M && (6.3.17) \end{aligned}$$

avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \pi$, cette représentation générale sera donnée par u, v, w, L, C_s, C_ρ inchangés (en x_i, p_i) et par des modifications des autres générateurs par des termes contenant les générateurs de $\mathcal{W}(sp(4), 2s\ell_2)$, représentés sous forme matricielle. La forme exacte des générateurs modifiés est déduite des techniques de $\mathcal{W}$-représentations, par exemple:

$$\begin{aligned} C_\phi &= -\frac{i}{\sin\theta}\partial_\phi + \mathrm{cotg}\theta\ S && (6.3.18)\\ U &= \frac{1}{r^2}\left[-\partial_r r^2 \partial_r - \frac{4}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\partial_\theta + (C_\phi)^2 + S^2 + \frac{\mu - 2S^2 + \sin\theta Q}{\cos^2\theta} + \frac{3}{4}\right] && (6.3.19) \end{aligned}$$

Les fonctions d'ondes du système deviennent donc des vecteurs sur lesquels agissent les matrices représentant l'algèbre $\mathcal{W}$. C'est dans le cas de représentations matricielles non triviales que l'on obtiendra des anyons en dimension deux. Là encore, on trouve par la construction des Hamiltoniens naturels pour des particules de type anyonique (cf par exemple la forme de U).

6.3.2 Généralisation du vecteur de Pauli-Wiegner-Lubanski [ERA25]

La méthode des $\mathcal{W}$-représentations trouve une (autre) application particulièrement élégante dans l'étude du groupe $so(4,2)$ (groupe conforme à quatre dimensions) et du groupe de Poincaré. En effet, elle permet d'introduire naturellement le vecteur de Pauli-Wigner-Lubanski en tant que générateur d'une algèbre $\mathcal{W}$ finie (en ce qui concerne le groupe de Poincaré) et aussi de lui trouver un analogue conforme pour le groupe $so(4,2)$.

L'algèbre $so(4,2)$ possède quinze générateurs:

- Quatre translations: P_μ avec $\mu = 0,1,2,3$
- Trois rotations et trois boosts: M_{ij} et M_{0i} respectivement $(i,j = 1,2,3)$
- Une dilatation: D
- Quatre transformations spéciales conformes K_μ avec $\mu = 0,1,2,3$

L'algèbre de Poincaré est la sous-algèbre de $so(4,2)$ constituée des quatre translations, des trois rotations et des trois boosts. Il n'est plus nécessaire de rappeler le rôle central de ces algèbres en physique des particules [183].

La sous-algèbre $\mathcal{G}_-$ que l'on considère est formée par les quatre translations. La représentation induite (de $so(4,2)$ ou de Poincaré) associée prend la forme bien connue

$$\begin{aligned} P_\mu &= p_\mu & M_{\mu\nu} &= i(p_\mu\partial_\nu - p_\nu\partial_\mu) \\ D &= -i(p\cdot\partial + 4) & K_\mu &= (p_\mu\Box - 2p\cdot\partial\partial_\mu - 8\partial_\mu) \end{aligned} \qquad (6.3.20)$$

où $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial p^\mu}$, p est le quadrivecteur (p_μ), ∂ le quadrivecteur (∂_μ), et $\Box = \partial \cdot \partial = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial^\mu\partial_\mu$.

Pour $so(4,2)$, l'algèbre $\mathcal{W}$ dans le commutant de $\mathcal{G}_-$ est (une décompactification de) $\mathcal{W}(s\ell_4, 2s\ell_2)$. Ses relations de commutations sont $(j,k = 1,2,3)$:

$$\begin{aligned} [J_j, J_k] &= i\epsilon_{jkl} J_l \\ [J_j, S_k] &= i\epsilon_{jkl} S_l \\ [S_j, S_k] &= -i\epsilon_{jkl} \left(2(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) - C_2 - 4\right) J_l \end{aligned} \tag{6.3.21}$$

où C_2 est le Casimir d'ordre deux de $so(4,2)$.

Dans le cas de Poincaré, l'algèbre $\mathcal{W}$ est engendrée par les J_k, $k = 1,2,3$ uniquement. Ils forment une algèbre $su(2)$, qui décrit les variables de spin. Ces générateurs sont les composantes du vecteur de Pauli-Wigner-Lubanski qui sont orthogonales à p. Ainsi, le calcul de la $\mathcal{W}$-représentation fait ressortir de manière tout à fait naturel le spin des représentations massives de l'algèbre de Poincaré.

Dans le cas de représentations non massives, c'est l'algèbre $so(4,2)$ qu'il faut considérer, et on obtient alors, outre le vecteur de Pauli-Wigner-Lubanski, son analogue conforme, dont les composantes sont associées aux générateurs S_j. Il permet de reformuler de manière naturelle la classification [170] des représentations irréductibles unitaires de cette algèbre.

Chapitre 7

Yangiens et algèbres $\mathcal{W}$ finies

7.1 Définition sommaire des Yangiens et Yangiens twistés

Les Yangiens [67] sont une classe de groupes quantiques de dimension infinie, et, à ce titre, sont à rattacher aux algèbres de Hopf, sujet de la partie suivante. Nous n'utiliserons ici que leur aspect algébrique, que nous revoyons brièvement. Si nous mentionnons pour mémoire certaines de leurs propriétés "de Hopf", nous nous référerons à la partie suivante pour les définitions les concernant.

7.1.1 Yangiens $Y(\mathcal{G})$

On peut voir les Yangiens $Y(\mathcal{G})$ comme des déformations de l'algèbre $\mathcal{G}[x] = \mathcal{U}(\mathbb{C}[x]\otimes\mathcal{G})$, où $\mathbb{C}[x]\otimes\mathcal{G}$ est l'algèbre de polynômes basée sur $\mathcal{G}$. En tant que tel, $Y_\hbar(\mathcal{G})$ est engendré par les générateurs Q_0^a et Q_1^a, $a = 1, \ldots, \dim\mathcal{G}$ soumis aux relations:

$$Q_0^a \text{ engendrent } \mathcal{G} \ : \ [Q_0^a, Q_0^b] = f^{ab}{}_c\, Q_0^c \tag{7.1.1}$$

$$Q_1^a \text{ forment une rep. adjointe de } \mathcal{G} \ : \ [Q_0^a, Q_1^b] = f^{ab}{}_c\, Q_1^c \tag{7.1.2}$$

$$[Q_1^a,[Q_0^b,Q_1^c]] + [Q_1^b,[Q_0^c,Q_1^a]] + [Q_1^c,[Q_0^a,Q_1^b]] = \hbar^2\, f^a{}_{pd} f^b{}_{qx} f^c{}_{ry} f^{xy}{}_e \eta^{de}\ s_3(Q_0^p, Q_0^q, Q_0^r) \tag{7.1.3}$$

$$\begin{aligned}[[Q_1^a,Q_1^b],[Q_0^c,Q_1^d]] + [[Q_1^c,Q_1^d],[Q_0^a,Q_1^b]] \ = \\ \hbar^2 \left(f^a{}_{pe} f^b{}_{qx} f^{cd}{}_y f^y{}_{rz} f^{xz}{}_g + f^c{}_{pe} f^d{}_{qx} f^{ab}{}_y f^y{}_{rz} f^{xz}{}_g \right) \eta^{eg}\ s_3(Q_0^p, Q_0^q, Q_1^r)\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

où $f^{ab}{}_c$ sont les constantes de structure de $\mathcal{G}$, η^{ab} est sa forme de Killing (voir section 2.1.1), $\hbar \in \mathbb{C}$ est le paramètre de déformation, et $s_n(.,\ldots,.)$ est le produit totalement symétrisé de n termes. Les générateurs Q_n^a pour $n > 1$ sont définis récursivement par

$$f^a{}_{bc}[Q_1^b, Q_{n-1}^c] \ = \ c_v Q_n^a \qquad \text{avec} \qquad c_v \eta^{ab} = f^a{}_{cd} f^{bcd} \tag{7.1.5}$$

Lorsque $\mathcal{G} = s\ell(2)$, (7.1.3) est une conséquence des autres relations, tandis que pour $\mathcal{G} \neq s\ell(2)$, (7.1.4) est impliqué par (7.1.1)-(7.1.3). Lorsque $\hbar$ tend vers zéro, le Yangien devient isomorphe l'algèbre $\mathcal{U}[\tilde{\mathcal{G}}]$, avec $Q_n^a \equiv z^n Q_0^a$. Lorsque $\hbar \neq 0$, on peut renormaliser les générateurs selon $Q_n^a \to (\xi/\hbar)^{n-1} Q_n^a$ ($\xi \neq 0$) de telle sorte que $Y_\hbar(\mathcal{G})$ et $Y_\xi(\mathcal{G})$ sont isomorphes. On prend donc en général $\hbar = 1$.

Nous avons déjà mentionné que nous ne parlerons pas ici de la structure en algèbre de Hopf des Yangiens. Pour mémoire, nous noterons toutefois que le coproduit sur $Y(\mathcal{G})$ est donné dans cette présentation par

$$\Delta(Q_0^a) = 1\otimes Q_0^a + Q_0^a\otimes 1 \tag{7.1.6}$$

$$\Delta(Q_1^a) = 1\otimes Q_1^a + Q_1^a\otimes 1 + \frac{\hbar}{2} f^a{}_{bc}\, Q_0^b\otimes Q_0^c \tag{7.1.7}$$

7.1.2 Présentation en matrice R de $Y(s\ell_N)$

Une présentation alternative de $Y(\mathcal{G})$ peut être faite en utilisant une matrice R [69]. C'est une notion bien connue en systèmes intégrables, qui autorise une description particulièrement simple des propriétés (mathématiques et physiques) de ces algèbres lorsqu'on a assimilé le concept d'espaces auxiliaires. Nous traitons ici le cas de $\mathcal{G} = s\ell(N)$, les autres algèbres étant étudiées dans le chapitre suivant.

On part des générateurs $T_{ij}^{(n)}$ de $Y(s\ell_N)$, avec $i,j = 1,\ldots,N$ et $n\in\mathbb{Z}_+$, $T_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$. Ces générateurs sont groupés dans des fonctions génératrices $T_{ij}(u) = \sum_{n\geq 0} T_{ij}^{(n)} u^{-n-1}$, elles-mêmes regroupées dans des matrices $T(u) = \sum_{i,j=1}^N T_{ij}(u)\, E_{ij}$ où E_{ij} sont les matrices élémentaires de la représentation fondamentale de $g\ell(N)$. $T(u)$ est donc un objet appartenant à $\mathbb{C}[u^{-1}]\otimes Y(s\ell_N)\otimes End(\mathbb{C}^N)$, que nous appellerons (abusivement) un élément de $Y(s\ell_N)\otimes End(\mathbb{C}^N)$, voire de $Y(s\ell_N)$. À partir de $T(u)$ on construit des éléments $T_1(u) = T(u)\otimes\mathbb{I}\in Y(s\ell_N)\otimes End(\mathbb{C}^N)\otimes End(\mathbb{C}^N)$ et $T_2(u) = \mathbb{I}\otimes T(u)\in Y(s\ell_N)\otimes End(\mathbb{C}^N)\otimes End(\mathbb{C}^N)$, où $\mathbb{I}$ est la matrice unité. Les relations de définition du Yangien de $s\ell_N$ sont alors équivalentes (à un centre près, voir plus bas) à la relation dans $Y(s\ell_N)\otimes End(\mathbb{C}^N)\otimes End(\mathbb{C}^N)$:

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v) \tag{7.1.8}$$

$$\text{avec}\quad R_{12}(u) = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} - \frac{1}{u}P_{12}\in End(\mathbb{C}^N)\otimes End(\mathbb{C}^N) \tag{7.1.9}$$

On a introduit l'opérateur permutation des espaces auxiliaires

$$P_{12} = \sum_{ij=1}^N E_{ij}\otimes E_{ji}\,.$$

Par la suite, nous appellerons cette présentation une présentation RTT (pour des raison évidentes) ou FRT (de Frenkel-Reshetikhin-Takhtajan [79]). Dans cette présentation, le coproduit prend la forme

$$\Delta T(u) = T(u)\dot{\otimes}T(u)\in Y(N)\otimes Y(N)\otimes End(\mathbb{C}^N)\quad\text{soit}\quad \Delta T_{ij}(u) = \sum_{k=1}^N T_{ik}(u)\otimes T_{kj}(u)$$

Les relations FRT sont équivalentes aux relations de commutation

$$[T_{ij}^{(m)}, T_{kl}^{(n)}] = \sum_{r=0}^{\min(m,n)-1}\Big(T_{kj}^{(r)}T_{il}^{(m+n-r-1)} - T_{kj}^{(m+n-r-1}T_{il}^{(r)}\Big)$$

$$[T_{ij}(u)\,, T_{kl}(v)] = \frac{1}{u-v}\Big(T_{kj}(u)T_{il}(v) - T_{kj}(v)T_{il}(u)\Big) \tag{7.1.10}$$

Strictement parlant, cette relation définit le Yangien de $g\ell(N)$, qui contient un centre: le Yangien de $s\ell(N)$ est le quotient de $Y(g\ell_N)$ par son centre [180,197]. Ce centre est engendré par le **déterminant quantique** [128,154,180], dont l'expression est donnée par

$$qdet\, T(u) = \sum_{\sigma\in S_n} sg(\sigma)\, T_{\sigma(1),1}(u)T_{\sigma(2),2}(u-1)\ldots T_{\sigma(N),N}(u-N+1) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n u^{-n}\ , \quad (7.1.11)$$

où S_n est le groupe des permutations de N objets. Le quotient (de Hopf) de $Y(g\ell_N)$ par la relation $qdet\, T(u) = 1$ est le Yangien $Y(s\ell_N)$. En particulier, au premier niveau, la relation $c_1 = 0$ n'est rien d'autre que la condition de trace nulle qui fait passer de $g\ell(N)$ à $s\ell(N)$.

On notera que $Y(N)$ possède deux automorphismes: les dilatations $T(u) \to g(u)\, T(u)$, où $g(u) = 1+\sum_{n\geq 1} g_n u^{-n}$ est une série formelle dans $\mathbb{C}$, et les translations $T(u) \to T(u+a)$, $a \in \mathbb{C}$.

Le Yangien $Y(N)$ contient comme sous-algèbre $Y(M)$, dès que $M \leq N$, mais la structure de Hopf (notamment le coproduit) n'est pas préservée dans cette inclusion.

7.1.3 Représentations de $Y(N)$

Grâce au traitement en matrice R, l'étude des irreps finies des Yangiens $Y(g\ell_N) \equiv Y(N)$ [69,227] peut être faite de manière simple. Elle repose sur la notion de **représentation d'évaluation** [42,153] et utilise la propriété suivante:

Si t_{ij}, $i,j = 1,\ldots,N$ sont les générateurs de $g\ell(N)$, que l'on "range" dans une matrice $\mathbb{E} = \sum_{i,j} t_{ij}E_{ij}$, où E_{ij} sont les matrices élémentaires $N\times N$, alors $T(u) = \mathbb{I}+\frac{1}{u}\mathbb{E}$ satisfait la relation (7.1.8). On a donc un plongement de $Y(N)$ dans $\mathcal{U}(g\ell_N)$.

À partir d'une représentation π de l'algèbre de Lie $g\ell(N)$, de générateurs (représentés) $\pi_{ij} = \pi(t_{ij})$, on peut donc produire une représentation (dite d'évaluation) du Yangien par $\pi[T(u)] = \mathbb{I}+\frac{1}{u}\pi[\mathbb{E}]$, *i.e.* $\pi(t_{ij}^{(1)}) = \pi_{ij}$ et $\pi(t_{ij}^{(n)}) = 0$, $n > 1$.

Bien que triviales en apparence, les représentations d'évaluation sont très importantes, car elles permettent de classer les irreps finies de $Y(N)$ [43,180]. En effet, toute irrep finie est isomorphe à un produit tensoriel de représentations d'évaluation (à un quotient près dans certains cas particuliers sur lesquels nous ne nous étendrons pas). Notons au passage, que contrairement aux algèbres de Lie, le produit tensoriel de représentation d'évaluation est en général irréductible.

La notion de représentation d'évaluation existe pour tout type de Yangien $Y(\mathcal{G})$, mais leur présentation en est plus délicate, à cause de l'absence de plongement naturel de $Y(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ lorsque $\mathcal{G}$ n'est pas $s\ell(N)$ ou $g\ell(N)$. Il existe toutefois une présentation en matrice R dans tous les cas: nous y reviendrons plus loin.

Remarque 7.1.1 *La notion de représentation d'évaluation peut aussi être introduite dans la base des Q_n^a [43]: il est commun alors de lui associer, en sus de la représentation de $\mathcal{G}$, un nombre complexe a, qui est absent dans la définition ci-dessus. Le passage de l'une à l'autre définition se fait en utilisant l'invariance sous translation. Si $L(u) = \mathbb{I}+\frac{\mathbb{E}}{u}$, on peut considérer*

$$T(u) = L(u-a) = \mathbb{I}+\frac{\mathbb{E}}{u}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a}{u}\right)^n$$

qui alors satisfait $\pi(T_{ij}^{(0)}) = \pi_{ij}$ *et* $\pi(T_{ij}^{(1)}) = a\,\pi_{ij}$, *conformément à la présentation usuelle dans la base des* Q_n^a.

7.1.4 Yangiens twistés

Le Yangien $Y(N)$ contient deux sous-algèbres fort importantes pour la suite, les Yangiens twistés $Y^+(N)$ et $Y^-(2n)$ [180, 197]. Pour les définir, on introduit $\bar{\jmath} = N + 1 - j$ $(\forall j)$ et des signes θ_j:

$$\theta_j = +1\,,\ j = 1, \ldots, N \quad \text{pour} \quad Y^+(s\ell_N) \tag{7.1.12}$$

$$\theta_j = \begin{cases} +1\,,\ j = 1, \ldots, n \\ -1\,,\ j = n+1, \ldots, 2n \end{cases} \quad \text{pour} \quad Y^-(s\ell_{2n}) \tag{7.1.13}$$

On utilisera aussi $\theta_0 = \theta_j\theta_{\bar{\jmath}}$ qui vaut $+1$ pour $Y^+(N)$ et -1 pour $Y^-(2n)$, si bien que les Yangiens twistés peuvent se noter $Y^{\theta_0}(N)$.

Ces préliminaires permettent de définir une transposition sur les matrices de $End(\mathbb{C}^N)$:

$$A^t = \sum_{ij} A_{ij}\theta_i\theta_j E_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \quad \text{pour} \quad A = \sum_{ij} A_{ij}E_{ij} \tag{7.1.14}$$

Cette transposition est reliée à la transposition "usuelle" par $A^t = VA^TV$ où $V = \sum_j \theta_j E_{j\bar{\jmath}}$.

À partir de ces définitions, on peut montrer que l'application

$$T(u) \ \to \ T^t(-u)$$

est un automorphisme de $Y(N)$, *i.e.* $T^t(-u)$ satisfait les relations (7.1.8). On définit alors dans le Yangien les générateurs $S(u) = \sum_{i,j} S_{ij}(u)\,E_{ij}$ par $S(u) = T(u)T^t(-u)$. Ces générateurs obéissent aux relations:

$$R_{12}(u-v)\,S_1(u)\,R_{12}^{t_1}(u+v)\,S_2(v) = S_2(v)\,R_{12}^{t_1}(u+v)\,S_1(u)\,R_{12}(u-v) \tag{7.1.15}$$

$$S^t(-u) = S(u) + \theta_0\frac{S(u) - S(-u)}{2u} \tag{7.1.16}$$

où ^{t_1} est la transposition dans le premier espace auxiliaire. Les relations ci-dessus définissent de manière univoque les Yangiens twistés $Y^{\theta_0}(N)$. La première relation, ou relation RSRS, définit ce qu'on appelle une algèbre de réflexion (comme on en reparlera dans les parties suivantes).

Les Yangiens twistés sont des algèbres, la partie finie de ces algèbres étant $so(N)$ si $\theta_0 = +1$, et $sp(2n)$ si $\theta_0 = -1$. Ce ne sont toutefois pas des algèbres de Hopf, mais des coïdéaux de Hopf des Yangiens $Y(N)$: ils diffèrent en cela des Yangiens basés sur $so(N)$ et $sp(2n)$. Par contre, contrairement à ces derniers, les Yangiens twistés, étant inclus dans $Y(N)$, sont associés à des déformations des inclusions[1] $so(N)[x] \subset g\ell(N)[x]$ et $sp(2n)[x] \subset g\ell(2n)[x]$.

De la forme (7.1.15), on peut voir que les translations ne sont pas des automorphismes des Yangiens twistés, alors que la relation (7.1.16) impose que seules les dilatations associées à des séries paires en u en sont des automorphismes.

[1] On rappelle que $\mathcal{G}[x] = \mathcal{U}(\mathbb{C}[x] \otimes \mathcal{G})$.

Le centre des Yangiens twistés est engendré par le **déterminant de Sklyanin** [179, 180], qui peut s'exprime en fonction du déterminant quantique de $Y(N)$ selon

$$\begin{aligned} sdet\, S(u) &= \gamma_N(u)\, qdetT(u)\, qdetT(N-1-u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n u^{-n} \\ \text{avec} \quad & \begin{cases} \gamma_N(u) = 1 & \text{pour } Y^+(N) \\ \gamma_N(u) = \frac{2u+1}{2u-N+1} & \text{pour } Y^-(N) \end{cases} \end{aligned} \tag{7.1.17}$$

On peut montrer que $sdet\, S(u)$ ne dépend que des générateurs de $Y^{\pm}(N)$, *i.e.* les éléments d_n sont bien dans $Y^{\pm}(N)$, et que d_2, d_4, ... sont indépendants et engendrent son centre.

La notion de représentation d'évaluation peut être étendue aux Yangiens twistés grâce au plongement:

Si $s_{ij} = t_{ij} - \theta_i\theta_j t_{\overline{\jmath}}$, $i,j = 1,\ldots,N$ sont les générateurs de $so(N)$ ou $sp(2n)$ (selon que $\theta_0 = \pm 1$), que l'on "range" dans une matrice $\mathbb{F} = \sum_{i,j} s_{ij} F_{ij}$, où $F_{ij} = E_{ij} - \theta_i\theta_j E_{\overline{\jmath}}$, alors $S(u) = \mathbb{I} + \frac{1}{u+\frac{1}{2}}\mathbb{F}$ satisfait les relations (7.1.15)-(7.1.16). On a donc un plongement de $Y^{\theta_0}(N)$ dans $\mathcal{U}(so(N))$ ou $\mathcal{U}(sp(2n))$.

On peut alors définir les représentations d'évaluation pour les Yangiens twistés comme pour les Yangiens $Y(N)$ (contrairement aux Yangiens basés sur $so(N)$ et $sp(2n)$). Le classement des irreps finies des Yangiens twistés [178] est effectué en utilisant génériquement des produits tensoriels de représentations d'évaluation des Yangiens (et non pas des Yangiens twistés), ce qui est naturel au vu de la construction/définition des Yangiens twistés. Il faut toutefois noter que, dans le cas de $Y^+(M)$, la classification fait intervenir des représentations d'évaluation du Yangien twisté qui ne sont *pas* des représentations du Yangien. On peut le comprendre si l'on considère le Yangien twisté $Y^+(2)$, qui contient comme sous-algèbre de Lie $o(2)$: cette algèbre est Abélienne et admet une série de représentations de dimension 1, indexées par un complexe, différentes du type des représentations de $g\ell(N)$. C'est essentiellement ce type de représentations qui est à l'origine des représentations d'évaluation du Yangien twisté utilisées dans la classification.

7.2 Yangiens et algèbres $\mathcal{W}$ finies

7.2.1 Morphisme d'algèbres [ERA27]

L'étude des algèbres $\mathcal{W}$ finies permet de faire apparaître un lien surprenant entre ces algèbres et les Yangiens. En effet, on peut construire un morphisme d'algèbre entre les Yangiens $Y(s\ell_N)$ et les algèbres $\mathcal{W}$ finies de type $\mathcal{W}(s\ell(Np), N\, s\ell_p)$. Une première façon de construire ce morphisme[2] est de se placer dans la base des Q_n^a du Yangien (section 7.1.1). L'avantage de cette présentation est de ne nécessiter que les premiers "modes" (correspondants à $n = 0, 1$) pour définir complètement le Yangien. Or, les modes du Yangiens se trouvent être reliés au "spin conforme" des générateurs W. Bien sûr, dans le cas des algèbres $\mathcal{W}$ finies, il n'y a pas à proprement parler de spin conforme, mais ce spin étant relié au grade des générateurs sous le Cartan du $s\ell(2)$ considéré par la réduction

[2] Une construction dans le cas particulier de l'algèbre $\mathcal{W}(s\ell(4), 2\, s\ell_2)$ est donnée dans [105].

Hamiltonienne, il reste licite d'attribuer un "spin" $j+1$ aux générateurs W "finis" en considérant la représentation $\mathcal{D}_j$ de $s\ell(2)$ à laquelle ils sont associés (dans la jauge de plus haut poids). Ainsi, les générateurs de spin 1 et 2 correspondent respectivement à l'algèbre de Lie résiduelle et aux générateurs quadratiques (en termes de générateurs de l'algèbre de départ). On peut alors effectivement calculer explicitement ces générateurs (en utilisant leur construction en invariants de jauge) et prouver qu'ils obéissent aux relations de définition (7.1.1)-(7.1.4) du Yangien $Y(s\ell_N)$.

L'algèbre $\mathcal{W}$ étant de dimension finie, on notera que le morphisme possède un noyau de dimension infinie, *i.e.* le nombre infini de générateurs du Yangien est réduit par le morphisme à un nombre fini de générateurs indépendants. D'autre part, ce morphisme d'algèbres ne peut pas s'étendre à un morphisme d'algèbres de Hopf: la structure de coproduit du Yangien ne peut pas être transportée au niveau des algèbres $\mathcal{W}$ finies. Il permet cependant de transporter de nombreuses informations, connues dans le cadre du Yangien, au niveau des algèbres $\mathcal{W}$. Ainsi, pour les algèbres de type $\mathcal{W}(s\ell(2N), N\,s\ell_2)$, ne possédant que des générateurs de spin 1 et 2, le morphisme permet de construire et classer leurs irreps finies en partant de celles du Yangiens. Cette relation permet de montrer que les représentations d'évaluation du Yangien sont reliées à la réalisation de Miura des algèbres $\mathcal{W}$ finies.

Cependant, dans le cas général de $\mathcal{W}(s\ell(pN), N\,s\ell_p)$, qui contient des générateurs de spin allant jusqu'à p, la présentation en Q_n^a n'est pas adaptée pour l'étude des irreps finies de l'algèbre $\mathcal{W}$. Pour cela, il faut utiliser la présentation en matrice R, que nous abordons maintenant.

7.2.2 Matrice R pour algèbres $\mathcal{W}$ [ERA32]

Grâce à cette relation entre certaines algèbres $\mathcal{W}$ finies et Yangiens, nous avons établi, avec C. Briot (mon étudiante en thèse), une formulation en matrice R des algèbres $\mathcal{W}$. Pour cela on part de la formulation en relation RTT du Yangien, et on se sert de la présentation en crochets de Dirac de l'algèbre $\mathcal{W}$. La comparaison des deux algèbres montre alors que l'algèbre $\mathcal{W}(g\ell(Np), p.g\ell(N))$ apparaît comme une troncation du Yangien. En d'autres termes, le morphisme est la mise à zéro des (plus précisément le quotient par l'idéal engendré par les) générateurs $T_{ij}^{(m)}$, $m > p$ du Yangien. On obtient ainsi une présentation RTT de ces algèbres $\mathcal{W}$, la matrice R étant celle du Yangien, les fonctions génératrices pour l'algèbre prenant la forme

$$W_{ij}(u) = \sum_{m=0}^{p} W_{ij}^{(m+1)} u^{-m} \quad \text{avec} \quad W_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$$

Cette formulation permet alors de classer toutes les irreps finies de ces algèbres $\mathcal{W}$: elles sont formées par des produits tensoriels de représentations d'évaluation (au maximum p).

On aura noté que le morphisme relie la présentation en Q_n^a du Yangien à la construction en invariants de jauge de l'algèbre $\mathcal{W}$, tandis que que la présentation RTT du premier est associée à un calcul en crochets de Dirac de la deuxième. On remarquera aussi que cette présentation montre que les algèbres $\mathcal{W}$ finies considérées peuvent être vues comme des déformations de $g\ell(N)_p[u]$, où $g\ell(N)_p[u] = \mathbb{C}_p[u] \otimes g\ell(N)$ est une algèbre de polynômes sur $g\ell(N)$ dont la variable satisfait $u^{p+1} = 0$.

7.2.3 Yangiens twistés et algèbres $\mathcal{W}$ de $so(N)$ et $sp(2n)$

Le cas des algèbres $\mathcal{W}$ basées sur $so(N)$ et $sp(2n)$ peut être traité de la même façon **[ERA33].** Les algèbres concernées sont $\mathcal{W}[so[(2n+1)p], n.s\ell(p) \oplus so(k)]$, $\mathcal{W}[so(2np), n.s\ell(p)]$ et $\mathcal{W}[sp(2np), n.s\ell(p)]$. A noter que dans ce cas, la liaison se fait non pas avec des Yangiens basés sur $so(N)$ et $sp(2n)$, mais avec des Yangiens twistés. La raison repose sur la comparaison des dimensions des sous-espaces de modes $n = 0$ et 1 du Yangien et des dimensions des sous-espaces de spin 1 et 2 de l'algèbre $\mathcal{W}$. En effet, pour le Yangien, chaque sous-espace est de dimension $\frac{N(N\pm1)}{2}$ (suivant que l'on considère $so(N)$ ou $sp(2n)$), tandis que la dimension du sous-espace de spin 1 (respectivement 2) de l'algèbre $\mathcal{W}$ vaut $\frac{N(N\pm1)}{2}$ (respectivement $\frac{N(N\mp1)}{2}$). Ces dimensions sont exactement celles des sous-espaces des Yangiens twistés. On montre alors que les algèbres $\mathcal{W}$ citées ci-dessus correspondent à des troncations des Yangiens twistés. Il en découle une présentation en algèbre de réflexion (type RSRS) plutôt qu'en présentation RTT.

Là encore, cette formulation permet de classer les irreps finies des algèbres $\mathcal{W}$ correspondantes, à partir des produits tensoriels d'un nombre fini (borné par un nombre dépendant de l'algèbre $\mathcal{W}$ considérée) de représentations d'évaluation.

Pour finir, on remarquera que la construction des Yangiens twistés, reposant sur l'automorphisme $T(u) \to T^t(-u)$, correspond exactement à la construction par pliage des algèbres des algèbres $\mathcal{W}$ (cf section 4.6.1). C'est d'ailleurs par cette technique (généralisée grâce aux techniques des Yangiens twistés) que l'existence du morphisme est prouvée.

7.3 Cas supersymétrique

Comme pour les algèbres de Lie et les algèbres $\mathcal{W}$, il existe une version $\mathbb{Z}_2$-graduée des Yangiens. Nous nous concentrons là encore sur le cas de $g\ell(M|N)$, le cas orthosymplectique étant traité plus loin. Les techniques utilisées sont très similaires aux cas précédents, aussi nous passerons rapidement sur leurs propriétés.

7.3.1 Super-Yangiens $Y[g\ell(M|N)]$

On part de la superalgèbre $g\ell(M|N)$, de grade $\mathbb{Z}_2$ donné par $[i] = 0$ pour $1 \leq i \leq M$ et $[i] = 1$ pour $M+1 \leq i \leq M+N$. Le super-Yangien $Y[g\ell(M|N)] \equiv Y(M|N)$ [245] est engendré par les générateurs $T_{ij}^{(n)}$, $i, j = 1, \ldots, M+N$, $n \in \mathbb{Z}_+$, de grade $[i]+[j]$, et regroupés dans

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{M+N} T_{ij}(u)\, E_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{M+N} T_{ij}^{(n)} u^{-n-1}\, E_{ij}$$

Ces générateurs sont soumis aux relations

$$R_{12}(z-w)T_1(z)T_2(w) = T_2(w)T_1(z)R_{12}(z-w) \tag{7.3.1}$$

$$\text{avec} \quad R_{12}(u) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \frac{1}{u} P_{12} \in End(\mathbb{C}^{M+N}) \otimes End(\mathbb{C}^{M+N}) \tag{7.3.2}$$

où cette fois-ci l'opérateur de permutation est $\mathbb{Z}_2$-gradué:

$$P_{12} = \sum_{ij=1}^{M+N} (-1)^{[j]} E_{ij} \otimes E_{ji} \,.$$

De même, le produit tensoriel sur les espaces auxiliaires $End(\mathbb{C}^{M+N})$ est lui aussi $\mathbb{Z}_2$-gradué: $(A \otimes B)(C \otimes D) = (-1)^{[B][C]} AC \otimes BD$.

On peut montrer que $Y(M|N)$ est isomorphe (en tant qu'algèbre de Hopf) à $Y(N|M)$. Il contient la superalgèbre (de Hopf) $g\ell(M|N)$, ainsi que les super-Yangiens (vus comme superalgèbres, pas de Hopf) $Y(K|L)$, dès que $K \leq M$ et $L \leq N$.

Comme pour les Yangiens, les super-Yangiens sont des déformations de $g\ell(M|N)[x]$, la valeur du paramètre de déformation (dès qu'il est non nul) n'étant pas pertinente (et donc assignée à 1 par convention).

Le super-Yangien $Y(M|N)$ possède un centre, et il existe une expression pour l'équivalent du déterminant quantique, appelé ici le **Berezinien quantique** [185]. Il s'exprime en fonction des déterminants quantiques des sous-algèbres $Y(M)$ et $Y(N)$ selon

$$B(u) = qdet\, T^{[M]}(u+M-N-1)\; qdet\left(\left(T^{[N]}(u-1)\right)^{-1}\right)$$

où $T^{[M]}(u)$ (resp. $T^{[N]}(u)$) est la sous-matrice engendrant $Y(M)$ (resp. $Y(N)$). Cependant, il n'a pas été démontré que le Berezinien quantique engendre tout le centre de $Y(M|N)$.

7.3.2 Super-Yangiens twistés [ERA39]

Comme dans la section 7.1.4, on introduit des indices "barrés" $\bar{\jmath} = M+1-j$ (pour $j = 1, \ldots, M$), $\bar{\jmath} = M+2N+1-j$ (lorsque $j = M+1, \ldots, M+N$) et des signes θ_j (où $N = 2n$):

$$\theta_j = +1\,,\ j = 1, \ldots, M \qquad \text{partie } so(N) \tag{7.3.3}$$

$$\theta_j = \begin{cases} +1\,,\ j = M+1, \ldots, M+n \\ -1\,,\ j = M+n+1, \ldots, M+2n \end{cases} \qquad \text{partie } sp(2n) \tag{7.3.4}$$

On utilisera aussi $\theta_0 = (-1)^{[j]}\theta_j\theta_{\bar{\jmath}}$. La super-transposition est définie par

$$A^t = \sum_{i,j=1}^{M+N} (-1)^{[i]([j]+1)} \theta_i\theta_j\, A_{\bar{\jmath}\bar{\imath}} E_{ij} \quad \text{pour} \quad A = \sum_{i,j=1}^{M+N} A_{ij}E_{ij} \tag{7.3.5}$$

Ces définitions ne sont compatibles que pour MN pair, et on a choisi $N = 2n$ pair par convention. Dans ce cas, on peut fixer $\theta_0 = +1$, l'autre valeur de θ_0 donnant une superalgèbre isomorphe à la précédente. Il n'y a donc qu'un seul type super-Yangien twisté.

L'automorphisme est toujours $T(u) \to T^t(-u)$, et on introduit encore une fois $S(u) = T(u)T^t(-u)$, qui engendre le super-Yangien twisté $Y^+(M|N)$ avec pour relations de définition (7.1.15)-(7.1.16).

Bien que formellement identiques aux relations de définition du Yangien twisté $Y^+(M+N)$, ces relations en diffèrent par le fait que le produit tensoriel est gradué au niveau des espaces auxiliaires. Ainsi, la partie (super)algèbre de Lie du Yangien twisté est ici la superalgèbre $osp(M|2n)$, et non pas par exemple $so(M+2n)$.

Représentations des super-Yangiens twistés

La classification des irreps finies du super-Yangien twisté repose encore sur les représentations d'évaluation du super-Yangien. On a un plongement du super-Yangien dans $\mathcal{U}[osp(M|2n)]$ par le morphisme

$$S(u) \;\to\; \mathbb{I} + \frac{\mathbb{F}}{u+\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{F} = \sum_{i,j=1}^{M+N} s_{ij}F_{ij}\,,\; F_{ij} = E_{ij} - (-1)^{[j]}\theta_i\theta_j E_{\overline{j}\overline{i}} \quad \text{et} \quad s_{ij} \in osp(M|2n)$$

On notera que l'absence d'automorphisme de translation empêche la "réabsorbtion" du décalage $\frac{1}{2}$ de u dans le morphisme.

Comme pour le Yangien twisté, ce plongement permet introduire des représentations d'évaluation du super-Yangien twisté qui ne sont pas des représentations du super-Yangien et qui interviennent dans la classification. Le rôle de $Y^+(2)$ est joué ici par $Y^+(2|2)$, et les super-Yangiens twistés concernés sont de type $Y^+(2m|2n)$.

Il faut aussi remarquer que cette classification repose sur deux conjectures (sur la complétude de la classification pour $Y^+(1|2)$ et $Y^+(2|2)$) et qui n'ont à ce jour toujours pas été démontrées (ni invalidées).

7.3.3 Liens avec les superalgèbres $\mathcal{W}$ [ERA45]

On peut construire un morphisme des super-Yangiens (twistés) vers les superalgèbres $\mathcal{W}$ de $g\ell(M|N)$ et de $osp(M|2n)$. Les superalgèbres concernées sont de type $\mathcal{W}[g\ell(Mp|Np), p.g\ell(M|N)]$ pour $Y(M|N)$; $\mathcal{W}[osp(2mp+p|2np), (m+n).s\ell(p) \oplus so(p)]$ et $\mathcal{W}[osp(2mp|2np), (m+n).s\ell(p)]$ pour $Y(p(2m+1)|2np)^+$ et $Y(2mp|2np)^+$ respectivement. Les superalgèbres $\mathcal{W}$ apparaissent encore comme des troncations "aux petits modes" des super-Yangiens (twistés). On en déduit une présentation RTT pour les superalgèbres $\mathcal{W}$ basées sur $g\ell(M|N)$, et une formulation en algèbre de réflexion pour les algèbres $\mathcal{W}$ basées sur $osp(M|2n)$. Il en découle une classification des irreps finies des superalgèbres $\mathcal{W}$ correspondantes.

Remarquons que les sous-algèbres définissant le plongement du $s\ell(2)$ ne permettent pas un plongement de $osp(1|2)$: les superalgèbres $\mathcal{W}$ sous considération ne peuvent donc pas être traitées en formalisme de "super-champs". Cette observation est en accord avec l'absence de présentation en super-générateurs des super-Yangiens (twistés).

Ces travaux ont donné lieu à une courte revue, présentée dans des conférences.

7.4 Matrices R pour Yangiens orthogonaux et/ou symplectiques

Les techniques employées pour les (super)-Yangiens twistés peuvent être adaptées pour définir de façon unifiée une matrice R basée sur les (super)algèbres orthogonales, symplectiques [56, 155, 243] ou orthosymplectiques **[ERA40]** (voir aussi [19]). Nous présentons le cas orthosymplectique $Y[osp(M|2n)]$, les autres cas se déduisant en faisant $M = 0$ ou $n = 0$. La matrice R concernée prend la forme:

$$R_{12}(u) = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + \frac{P_{12}}{u} - \frac{Q_{12}}{u+\kappa} \quad \text{où} \quad Q_{12} = P_{12}^{t_1} \quad \text{et} \quad \kappa = \theta_0\frac{M-2n-2}{2} \tag{7.4.1}$$

On remarquera l'utilisation de la transposition introduite pour les (super)Yangiens twistés. À partir de cette matrice R, on définit une algèbre de Hopf $\mathcal{U}(R)$, par les relations

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v) \quad \text{où} \quad T(u) = \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{n\geq 0} u^{-n}\, T_{ij}^{(n)}\, E_{ij} \qquad (7.4.2)$$

Cette algèbre possède un centre, engendré par

$$C(u) = T(u)T^t(u-\kappa) = c(u)\,\mathbb{I}$$

où la dernière égalité est déduite des relations RTT. Le super-Yangien $Y[osp(M|2n)]$ est défini par le quotient de $\mathcal{U}(R)$ par l'idéal engendré par $c(u)-1$.

7.4.1 Yangiens twistés symplecto-orthogonaux [ERA40]

À partir de la formulation en matrice R des Yangiens basés sur les algèbres orthogonales, symplectiques et ortho-symplectiques, on peut construire des Yangiens twistés similaires à ceux de $Y(N)$. L'automorphisme utilisé est ici

$$T(u) \;\to\; T^t(-u-\kappa)$$

si bien que les générateurs des Yangiens twistés prennent alors la forme $S(u) = T(u)\,T^t(-u-\kappa)$.

On montre ensuite que ces générateurs satisfont la relation RSRS (7.1.15), avec pour matrice R celle donnée en (7.4.1). On notera que, du fait du quotient par $C(u) = \mathbb{I}$, les générateurs $S(u)$ peuvent aussi se réécrire $S(u) = T(u)T^{-1}(-u)$: nous reviendrons plus loin sur cette forme en "algèbre de réflexion".

Partie III

Groupes quantiques et algèbres de Hopf

Chapitre 8

Généralités

Nous présentons dans cette partie les aspects algébriques qui vont nous être utiles dans le traitement des systèmes intégrables, tels qu'ils apparaissent dans les modèles physiques. Bien sûr, il est difficile de séparer ces aspects mathématiques de leurs pendants physiques, aussi ce découpage pourra apparaître quelque peu arbitraire sur certains points, notamment sur la justification des notions introduites. Il faudra donc garder à l'esprit que l'utilité physique de telles notions deviendra claire dans la partie suivante, à laquelle nous nous référerons souvent.

8.1 Algèbres de Hopf

Les algèbres de Hopf sont une généralisation de la notion de groupes et algèbres (de Lie) dans laquelle les caractéristiques essentielles (du point de vue physique) ont été préservées. Par exemple, la notion de produit de représentations est naturellement comprise dans les relations de définition d'une algèbre de Hopf: on verra que cette notion (et plus généralement le formalisme FRT [79]) est essentielle pour l'étude des chaînes de spins. Le cadre algébrique liant le formalisme FRT aux algèbres de Hopf a été développé par M. Jimbo [130, 131] et Drinfeld [68].

Une algèbre de Hopf est une algèbre associative unifère munie d'une structure supplémentaire qui repose sur:

Un coproduit Δ: $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, qui est un morphisme de l'algèbre. Le coproduit assure que le produit de représentations reste une représentation: si π_1 et π_2 sont deux représentations $\pi_1 \otimes \pi_2$ est une représentation dont l'action est donnée par $(\pi_1 \otimes \pi_2) o \Delta$.

Une antipode S: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, qui est un antimorphisme de l'algèbre. C'est une généralisation de l'inverse.

Une coünité ϵ: $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$, qui est un morphisme de l'algèbre. On peut dire que la coünité "sélectionne" les éléments inversibles de l'algèbre de Hopf.

Ces trois morphismes ont des relations de compatibilité avec la multiplication, m, considérée comme un morphisme de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ (*i.e.* $m(a \otimes b) = a \cdot b$):

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\, o\, \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\, o\, \Delta \tag{8.1.1}$$

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})\, o\, \Delta = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\, o\, \Delta = \mathrm{id} \tag{8.1.2}$$

$$m\, o\, (S \otimes \mathrm{id})\, o\, \Delta = m\, o\, (\mathrm{id} \otimes S)\, o\, \Delta = i\, o\, \epsilon \tag{8.1.3}$$

où on a introduit id, l'identité sur l'algèbre, et i l'injection canonique de $\mathbb{C}$ dans l'algèbre. La première équation est appelée coassociativité.

Lorsque le coproduit satisfait $\sigma\, o\, \Delta = \Delta$, où σ est la permutation $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$, l'algèbre (ou le coproduit) est dite **cocommutative.**

Nous utiliserons aussi la notion de **coïdéal de Hopf**, qui est à la structure de Hopf ce que la notion d'idéal est à la structure d'algèbre. Un coïdéal de Hopf $\mathcal{C}$ d'une algèbre (de Hopf) $\mathcal{A}$ est un idéal de cette algèbre qui vérifie de plus $\Delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$. Cette propriété ne permet pas de définir le coproduit sur la sous-algèbre $\mathcal{C}$, mais permet de le définir sur l'algèbre $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$. Comme pour les idéaux, on définit aussi les coïdéaux à gauche, qui satisfont $\Delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, et les coïdéaux à droite, tels que $\Delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \otimes \mathcal{A}$. On notera qu'un coïdéal à gauche (ou à droite) est un coïdéal, et non pas l'inverse. Les Yangiens twistés sont à ce titre des coïdéaux à gauche des Yangiens.

8.1.1 Exemple: algèbres de Lie

L'exemple le plus naturel pour les algèbres de Hopf est fourni par les algèbres de Lie $\mathcal{G}$ (ou leur enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$). On sait que le produit tensoriel de représentations de telles algèbres est encore une représentation, et d'après l'action des générateurs sur ce produit tensoriel, on peut déduire la forme du coproduit:

$$\Delta(x) = \mathbb{I} \otimes x + x \otimes \mathbb{I}\,,\ \forall\, x \in \mathcal{G}$$

On notera que ce coproduit est cocommutatif. Dans l'enveloppante, son action sera calculée par morphisme $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$.

En ce qui concerne l'antipode, on a dit qu'elle était une généralisation de l'inverse: pour un élément g du groupe associé à $\mathcal{G}$, on a donc $S(g) = g^{-1}$. En écrivant $g = exp(x)$, $x \in \mathcal{G}$, on en déduit $S(x) = -x$. Son action sur les autres éléments de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ est étendue par (anti)morphisme: $S(xy) = S(y)S(x)$, ce qui redonne entre autre $S(g) = g^{-1}$.

La coünité, elle, est donnée par $\epsilon(x) = 0$ et étendue par morphisme. On obtient par exemple $\epsilon(g) = 1$ pour tous les éléments du groupe, en accord avec l'inversibilité de g.

On peut alors vérifier par calcul direct que les relations des algèbres de Hopf sont satisfaites par ces définitions.

8.2 Algèbres de Hopf quasitriangulaires

Parmi les algèbres de Hopf, il existe une classe particulièrement importante, reliée à la notion de matrice $\mathcal{R}$ universelle. Pour introduire une telle notion, on généralise la notion de cocommutativité: une algèbre de Hopf $\mathcal{A}$ est dite **presque cocommutative** s'il existe un élément inversible $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ tel que

$$\sigma\, o\, \Delta(a) = \mathcal{R}\, \Delta(a)\, \mathcal{R}^{-1}\,,\ \forall\, a \in \mathcal{A} \tag{8.2.1}$$

où σ est toujours la permutation de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. $\mathcal{R}$ est appelée la **matrice $\mathcal{R}$ universelle** de $\mathcal{A}$.

Une algèbre de Hopf est dite **quasitriangulaire** si $\mathcal{R}$ satisfait

$$(\Delta\, o\, \mathrm{id})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \quad \text{et} \quad (\mathrm{id}\, o\, \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{8.2.2}$$

où les égalités ci-dessus sont écrites dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, et $\mathcal{R}_{12} \equiv \mathcal{R} \otimes \mathbb{I}$, $\mathcal{R}_{23} \equiv \mathbb{I} \otimes \mathcal{R}$, etc...

L'algèbre est dite **triangulaire** si de plus $\mathcal{R}$ est unitaire:

$$\mathcal{R}_{12}\,\mathcal{R}_{21} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_{21} = \sigma\, o\, \mathcal{R}\, o\, \sigma \tag{8.2.3}$$

On peut alors montrer que la matrice $\mathcal{R}$ universelle satisfait **l'équation de Yang-Baxter (YB)**:

$$\mathcal{R}_{12}\,\mathcal{R}_{13}\,\mathcal{R}_{23} \;=\; \mathcal{R}_{23}\,\mathcal{R}_{13}\,\mathcal{R}_{12} \tag{8.2.4}$$

8.3 Matrice $\mathcal{R}$ universelle et matrice R évaluée

On a vu sur l'exemple des Yangiens (dans la partie précédente) que des algèbres (de dimension infinie) peuvent être introduites par les relations

$$R_{12}(z_1,z_2)\,T_1(z_1)\,T_2(z_2) = T_2(z_2)\,T_1(z_1)\,R_{12}(z_1,z_2) \tag{8.3.1}$$

où z, w sont appelés **paramètres spectraux**, $T(z)\in End(V)\otimes\mathcal{A}$ et $R(z)\in End(V)\otimes End(V)$, $End(V)$ définissant les espaces auxiliaires associés à l'espace de représentation V. L'associativité du produit est assurée par l'équation de Yang-Baxter (en représentation) [18, 239]

$$R_{12}(z_1,z_2)\,R_{13}(z_1,z_3)\,R_{23}(z_2,z_3) = R_{23}(z_2,z_3)\,R_{13}(z_1,z_3)\,R_{12}(z_1,z_2) \tag{8.3.2}$$

Le lien avec la matrice $\mathcal{R}$ universelle se fait en évaluant cette dernière dans la représentation (fondamentale) $R = (\pi_{z_1}\otimes\pi_{z_2})\,\mathcal{R}$, où π_z est la représentation (d'espace V) de $\mathcal{A}$, le paramètre d'évaluation z de cette représentation étant promu au rang de paramètre spectral. L'évaluation par $\pi_{z_1}\otimes\pi_{z_2}\otimes\pi_{z_3}$ de l'équation de YB universelle fournit l'équation de YB en représentation. On a aussi $T(z) = (\pi_z\otimes\mathrm{id})\mathcal{R}$, et les relations RTT sont obtenues par $\pi_{z_1}\otimes\pi_{z_2}\otimes\mathrm{id}$ agissant sur l'équation de YB universelle.

On considère souvent des matrices R satisfaisant des relations supplémentaires, telles que **l'unitarité**

$$R_{12}(z_1,z_2)\,R_{21}(z_2,z_1) = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} \tag{8.3.3}$$

et/ou la **la symétrie de croisement**

$$R^{t_1}_{12}(z_1,z_2)\,R^{t_1}_{21}(z_2,z_1) = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} \tag{8.3.4}$$

Dans cette formulation, on a $\Delta(T(u)) = T(u)\otimes T(u)$, $S(T(u)) = T(u)^{-1}$ et $\epsilon(T(u)) = 1$.

8.3.1 Doubles quantiques

Il existe une façon canonique, introduite par Drinfeld [67], de construire une matrice $\mathcal{R}$ universelle à partir d'une algèbre $\mathcal{A}$ quelconque. Pour cela, on considère l'algèbre duale de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$. À partir d'une base canonique $\{e_i\}$ de $\mathcal{A}$, on obtient une base (duale) $\{e^i\}$ de $\mathcal{A}^*$. On peut alors montrer que $\mathcal{R} = \sum_i e^i\otimes e_i$ est la matrice $\mathcal{R}$ universelle de l'algèbre $D\mathcal{A} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^*$, dite double quantique de $\mathcal{A}$. Bien sûr, la matrice $\mathcal{R}$ obtenue est celle de $D\mathcal{A}$, et non pas celle de $\mathcal{A}$. L'idée est donc, à partir d'une algèbre $\mathcal{A}$ donnée, de trouver une sous-algèbre $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ telle que $D\mathcal{B}\sim\mathcal{A}$.

Ainsi, dans le cas des groupes quantiques $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$, on considère la sous-algèbre de Borel $\mathcal{B}_+$ de $\mathcal{G}$, et son double quantique $D\mathcal{B}_+$. Grâce à l'isomorphisme entre $\mathcal{B}_+^*$ et $\mathcal{B}_-$, on peut identifier (modulo

un quotient par $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^*$) ce double avec $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$, si bien que l'on obtient la matrice $\mathcal{R}$ universelle de cette algèbre.

Dans le cas d'un Yangien $\mathcal{Y}$, qui ne possède pas de matrice $\mathcal{R}$ universelle, la procédure peut encore s'appliquer, mais sur $\mathcal{Y}$ lui-même, pour produire son double $D\mathcal{Y}$. L'avantage de cette construction réside dans l'inclusion $\mathcal{Y} \subset D\mathcal{Y}$, la matrice $\mathcal{R}$ universelle de $D\mathcal{Y}$ permettant de construire la matrice R de $\mathcal{Y}$ dans n'importe quelle représentation.

Ainsi, le double quantique du Yangien basé sur $osp(1|2)$ peut se construire (en s'appuyant sur la formulation RTT), en donnant explicitement les relations de commutation dans la base des générateurs racines et Cartan, les relations de Serre (qui n'apparaissent pas dans [115], voir remarques sur ce papier dans [58]), ainsi que le coproduit. On s'appuie pour cela sur une technique de construction du produit scalaire donnée en [235]. Grâce à cette construction, on détermine la matrice $\mathcal{R}$ universelle de ce double Yangien **[ERA44]**. Cette construction est la seule connue pour les Yangiens, avec le double du Yangien $Y(s\ell_2)$ [144] d'une matrice $\mathcal{R}$ universelle pour les (doubles) Yangiens $Y(\mathcal{G})$. Des résultats partiels sont toutefois connus dans le cas de $Y(s\ell_N)$ [124, 144]. Le cas des groupes quantiques est plus prolifique: les matrices $\mathcal{R}$ universelles des groupes quantiques $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$ est connue [209], grâce à la construction en double quantique décrite ci-dessus. Les matrices $\mathcal{R}$ universelles des groupes quantiques affines sont aussi connues [143, 145].

Chapitre 9

Algèbres quadratiques

Les algèbres définies par des relations RTT, bien qu'adaptées pour les systèmes sans bord (chaînes de spins ou modèles de théorie des champs), ne sont pas suffisantes pour décrire des systèmes physiques possédant un bord (voir partie suivante). Pour de tels systèmes, il faut considérer des algèbres quadratiques, dont les relations générales sont données par [92]:

$$A_{12}(u,v)\,S_1(u)\,B_{12}(u,v)\,S_2(v) = S_2(v)\,C_{12}(u,v)\,S_1(u)\,D_{12}(u,v)$$

L'associativité du produit est assuré par différentes relations (de type Yang-Baxter) entre A_{12}, B_{12}, C_{12} et D_{12}.

On considérera les cas particuliers $A_{12}(u,v) = D_{12}(u,v) = R_{12}(u,v)$ et $B_{12}(u,v) = C_{12}(u,v) = \overline{R}_{12}(-u,v)$, correspondant à ce que l'on dénommera par la suite **l'équation de Yang-Baxter avec bord**:

$$R_{12}(u,v)\,S_1(u)\,\overline{R}_{12}(-u,v)\,S_2(v) = S_2(v)\,\overline{R}_{12}(-u,v)\,S_1(u)\,R_{12}(u,v)$$

Ces cas comprennent:

(*i*) *Les Yangiens twistés*, déjà abordés, lorsque $\overline{R}_{12}(u,v) = R^{t_1}_{12}(u-v)$ et $R_{12}(z)$ est soit la matrice donnée en section 7.1.4, soit celle de la section 7.4.

(*ii*) *Les algèbres de réflexion* pour $\overline{R}_{12}(u,v) = R^{-1}_{12}(-u,v)$, que l'on décrit ci-dessous pour la matrice R des Yangiens $Y(N)$. Celles correspondant aux autres types de Yangiens ont été décrites en section 7.2.3.

On verra dans la suite que ces deux types d'algèbres quadratiques interviennent dans les systèmes avec bord (d'où le nom Yang-Baxter avec bord).

Les algèbres quadratiques ne sont en général pas des algèbres de Hopf. Elles peuvent, par contre, être construites en s'appuyant sur ces algèbres (comme par exemple les Yangiens twistés, déjà rencontrés auparavant). Les algèbres de Yang-Baxter avec bord sont des coïdéaux (de Hopf) des algèbres de Hopf [161, 180, 192, 193], **[ERA38].**

Une construction alternative de ce type d'algèbres peut être trouvée dans [53].

9.1 Algèbres de réflexion $\mathcal{B}(N,n)$ [ERA38]

Les algèbres de réflexion [44,221] apparaissent dans le cadre des systèmes de chaînes de spins avec bord et aussi dans le cadre de théories des champs quantiques, telles que l'équation de Schrödinger avec bord (cf la partie suivante). Ces algèbres peuvent être construites à la manière des Yangiens twistés de la façon suivante.

Dans le Yangien $Y(N)$ (engendré par $T(k)$), on construit les générateurs

$$B(k) = T(k)\,G\,T(k)^{-1} \quad \text{avec} \quad G = \Big(\sum_{j=1}^{\ell} E_{jj}\Big) - \Big(\sum_{j=\ell+1}^{N} E_{jj}\Big) \tag{9.1.1}$$

où la donnée de G (*i.e.* de $0 \leq n \leq \frac{N}{2}$) détermine des algèbres différentes (d'où la dénomination $\mathcal{B}(N,n)$).

La partie algèbre de Lie de $\mathcal{B}(N,n)$ est $g\ell(n) \oplus g\ell(N-n)$: on peut voir $\mathcal{B}(N,n) \subset Y(N)$ comme une déformation de l'algèbre de polynômes $g\ell(n)[x] \oplus g\ell(N-n)[x]$ qui respecte l'inclusion $g\ell(n)[x] \otimes g\ell(N-n)[x] \subset g\ell(N)[x]$. Cette situation est identique au cas des Yangiens twistés $Y^{\pm}(N) \subset Y(N)$ qui sont des déformations des inclusions $so(N)[x] \subset g\ell(N)[x]$ et $sp(2n)[x] \subset g\ell(2n)[x]$. On notera à ce propos que les Yangiens $Y(\ell) \oplus Y(N-\ell)$ existent mais ne sont pas contenus dans $Y(N)$ (de même que $Y[so(N)]$ et $Y[sp(2n)]$): il n'y a pas "commutativité" entre inclusion et déformation.

9.2 Cas des groupes quantiques

L'étude des systèmes de chaînes de spins avec bord et des modèles de théorie des champs avec bord fait ressortir l'importance au niveau physique des équations de réflexion. Il est donc naturel, pour obtenir d'autres modèles physiques avec bord, d'étudier ces algèbres dans le cadre des groupes quantiques. Au niveau mathématique, la version dimension finie des algèbres de réflexion apparaît aussi lors de l'étude des espaces symétriques quantiques [161,192,193].

9.2.1 Cas fini

Le point de départ est le groupe quantique fini $\mathcal{U}_q(g\ell_N)$, dont la matrice R est donnée par

$$R = q\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} E_{ij}\otimes E_{ji} \tag{9.2.1}$$

Le groupe $\mathcal{U}_q(g\ell_N)$ est engendré par t_{ij}, $\overline{t}_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,N)$ satisfaisant:

$$t_{ij} = \overline{t}_{ji} = 0\,, \quad 1 \leq i < j \leq N\,, \qquad t_{ii}\,\overline{t}_{ii} = \overline{t}_{ii}\,t_{ii} = 1\,, \quad 1 \leq i \leq N\,, \tag{9.2.2}$$

$$RT_1T_2 = T_2T_1R\,, \qquad R\overline{T}_1\overline{T}_2 = \overline{T}_2\overline{T}_1R\,, \qquad R\overline{T}_1T_2 = T_2\overline{T}_1R. \tag{9.2.3}$$

Le groupe quantique $\mathcal{U}_q(g\ell_N)$ étant une déformation de (l'enveloppante de) $g\ell_N$, on peut se demander si la construction des espaces symétriques $s\ell(N)/so(N)$ et $s\ell(2n)/sp(2n)$ admet une généralisation dans $\mathcal{U}_q(s\ell_N)$. Cela revient à "déformer" les inclusions $so(N) \subset s\ell(N)$ et $sp(2n) \subset s\ell(2n)$, ce qui devrait rappeler au lecteur attentif les Yangiens twistés. De fait, Noumi [192] a montré qu'une

"bonne" déformation des espaces symétriques est la recherche de coïdéaux de Hopf. La construction devient alors très similaire à celle des Yangiens twistés. On introduit

$$S = \overline{T}^t\, G\, T \equiv \sum_{i,j=1}^{N} s_{ij}\, E_{ij}$$

où ^{t} est ici la transposition usuelle et $G = \mathbb{I}$ pour $so(N)$, $G = q\sum_{k=1}^{n} E_{2k-1,2k} - \sum_{k=1}^{n} E_{2k,2k-1}$ pour $sp(2n)$. On montre alors

$$s_{ij} = 0\,, \quad 1 \le i < j \le N\,, \qquad\qquad s_{ii} = 1\,, \quad 1 \le i \le N\,, \tag{9.2.4}$$

$$R\, S_1 R^t S_2 = S_2 R^t S_1 R\,, \tag{9.2.5}$$

avec

$$R^t = q\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} E_{ji}\otimes E_{ji}.$$

l'algèbre engendrée par S est un coïdéal de Hopf de $\mathcal{U}_q(s\ell_N)$, dont la structure algébrique est une déformation de $so(N)$ et $sp(2n)$. Cette déformation est différente de $\mathcal{U}_q(so(N))$ et $\mathcal{U}_q(sp(2n))$: les dimensions des espaces correspondant aux modes $2n+1$ sont par exemple différentes.

On notera qu'on aurait pu définir $\overline{S} = \overline{T}\, G\, T^t$, mais on peut montrer que l'algèbre engendrée est en fait isomorphe à celle engendrée par S, en accord avec "l'unicité" des espaces symétriques. Par exemple, dans le cas $G = \mathbb{I}$, on a $\overline{S} = 1 - q + q\, S^t$. La forme de la relation est à rapprocher de la relation de symétrie (7.1.16) qui entre dans la définition des Yangiens twistés (section 7.1.4).

9.2.2 Yangiens "quantiques"

Les Yangiens quantiques sont des sous-algèbres de $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$, déformations des Yangiens usuels dans le sens où la limite d'échelle des premiers redonne les seconds. Le groupe $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$ est engendré par

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{N} t_{ij}(u)\otimes E_{ij} \quad \text{et} \quad \overline{T}(u) = \sum_{i,j=1}^{N} \overline{t}_{ij}(u)\otimes E_{ij},$$

avec

$$t_{ij}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{ij}^{(n)}\, u^{-n} \quad \text{et} \quad \overline{t}_{ij}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{t}_{ij}^{(n)}\, u^{n}$$

Les générateurs sont soumis aux relations

$$\begin{array}{ll} t_{ij}^{(0)} = \overline{t}_{ji}^{(0)} = 0\,, \quad 1 \le i < j \le N\,, & t_{ii}^{(0)}\, \overline{t}_{ii}^{(0)} = \overline{t}_{ii}^{(0)}\, t_{ii}^{(0)} = 1\,, \quad 1 \le i \le N\,, \\ R(u,v)\, T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R(u,v)\,, & R(u,v)\, \overline{T}_1(u)\overline{T}_2(v) = \overline{T}_2(v)\overline{T}_1(u) R(u,v)\,, \\ R(u,v)\, \overline{T}_1(u) T_2(v) = T_2(v)\overline{T}_1(u) R(u,v)\,, & \end{array} \tag{9.2.6}$$

où la matrice $R(u,v)$ prend la forme

$$R(u,v) \;=\; (u-v)\sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj} + (q^{-1}u - qv)\sum_i E_{ii}\otimes E_{ii} \tag{9.2.7}$$

$$+(q^{-1}-q)\, u \sum_{i>j} E_{ij}\otimes E_{ji} + (q^{-1}-q)\, v \sum_{i<j} E_{ij}\otimes E_{ji}\,. \tag{9.2.8}$$

Pour ceux habitués à une matrice R ne dépendant que de u/v, on remarquera que $R(u,v) = (u\,q^{-1} - q\,v)\,R'(u/v)$, où $R'(x)$ est la matrice "usuelle" de $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$. La matrice R employée peut aussi être vue comme une "Baxterisation" de la matrice R de $\mathcal{U}_q(s\ell_N)$ présentée dans la section 9.2.1: $R(u,v) = u\,\widetilde{R} - v\,R$, où $\widetilde{R} = R_{21}^{-1}$.

On notera que la notion de morphisme d'évaluation peut être définie pour $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$, selon

$$T(u) \mapsto T - \overline{T}\,u^{-1}, \qquad \overline{T}(u) \mapsto \overline{T} - T\,u. \tag{9.2.9}$$

où T et $\overline{T}$ engendrent le groupe quantique fini $\mathcal{U}_q(s\ell_N)$.

Les Yangiens quantiques sont les sous-algèbres de $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$ engendrées par $T(u)$ uniquement. À ce titre, on obtient des fonctions génératrices ne se développant que sur des puissance négatives de u, comme c'est le cas des Yangiens "usuels". On remarquera que la limite d'échelle du morphisme d'évaluation (9.2.9) redonne le morphisme d'évaluation du Yangien usuel. Bien sûr la même construction peut être faite en considérant $\overline{T}(u)$, donnant une algèbre isomorphe au Yangien quantique engendré par $T(u)$. Les Yangiens quantiques peuvent être vus comme des sous-algèbres de Borel de $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$, puisque $T^{(0)}$ est triangulaire et $T(u)$ ne se développe qu'en modes positifs. À ce titre ils peuvent paraître "triviaux"; la situation est différente lorsqu'on considère les Yangiens twistés quantiques, comme nous allons le voir.

9.2.3 Yangiens twistés quantiques [ERA42]

La procédure est similaire à la construction des Yangiens twistés "classiques", avec la notable exception qu'elle doit se dérouler non pas dans le Yangien quantique, mais dans $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$. En effet, les matrices $T(u)$ et $\overline{T}(u)$ correspondant à des "sous-algèbres de Borel", pour obtenir une matrice $S(u)$ "complète", il est nécessaire de les inclure toutes les deux dans la construction. On pose donc

$$S(u) = T(u)\,G\,\overline{T}(u^{-1})^t\,, \qquad G = \mathbb{I} \;\text{ ou }\; q\sum_{k=1}^{n} E_{2k-1,2k} - \sum_{k=1}^{n} E_{2k,2k-1} \;(\text{si } N = 2n)$$

où ^{t} est, comme dans le cas fini, la transposition "usuelle". Comme pour les Yangiens twistés, $S(u)$ satisfait une relation quadratique

$$R(u,v)\,S_1(u)\,R^{t_1}(u^{-1},v)\,S_2(v) = S_2(v)\,R^{t_1}(u^{-1},v)\,S_1(u)\,R(u,v)\,.$$

Les Yangiens twistés quantiques (engendrés par $S(u)$) sont des coïdéaux de Hopf de $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$.

La limite d'échelle de l'algèbre engendrée par $S(u)$ redonne bien évidemment les Yangiens twistés "classiques", présentés en utilisant la transposition usuelle. Un morphisme d'évaluation peut être construit:

$$S(u) \mapsto S + q^{-1}\,u^{-1}\,\overline{S}$$

où S et $\overline{S}$ engendrent les coïdéaux de $\mathcal{U}_q(s\ell_N)$ introduits dans la section 9.2.1.

La même construction peut être faite à partir de $\overline{S}(u) = \overline{T}(u)\,G\,T(u^{-1})^t$, cette nouvelle matrice n'étant, comme dans le cas fini, qu'un changement de base de la première.

On peut se poser la question de la charge centrale qu'on peut ajouter dans $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$. On remarquera tout d'abord que les Yangiens quantiques étant basés sur $T(u)$ triangulaire, cette charge centrale n'entre pas en compte dans leur définition. En ce qui concerne les Yangiens twistés (quantiques), on peut les définir sur $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})_c$, selon $S(u) = T(uq^{-c})\, G\, \overline{T}(u^{-1})^t$. Cependant, leur relation d'échange ne fait pas apparaître cette charge centrale, si bien que l'algèbre obtenue est isomorphe à celle obtenue sans charge centrale. Bien que décevante, cette propriété est en accord avec le cas des Yangiens (twistés) "classiques", qui n'admettent pas d'extension centrale: pour cela, il faut définir leur double quantique, ce qui, ici, revient à travailler sur $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$.

Pour finir, on remarquera que, de par sa construction, $S(u)$ ne se développe qu'en puissances négatives de u. Cette propriété est aussi en accord avec la construction des Yangiens twistés classiques.

9.3 Algèbres d'impureté [ERA43, ERA47]

Les algèbres d'impureté sont une généralisation (physique) des algèbres de réflexion. Elles interviennent dans les systèmes (intégrables) possédant un défaut qui réfléchit et transmet les particules. On en présentera la motivation physique ainsi que des exemples dans la partie suivante. Elles sont engendrées par des générateurs $r(k)$ et $t(k)$ satisfaisant les relations quadratiques suivantes:

$$S_{12}(k_1,k_2)\, t_1(k_1)\, S_{21}(k_2,k_1)\, t_2(k_2) = t_2(k_2)\, S_{12}(k_1,k_2)\, t_1(k_1)\, S_{21}(k_2,k_1) \quad (9.3.1)$$

$$S_{12}(k_1,k_2)\, t_1(k_1)\, S_{21}(k_2,k_1)\, r_2(k_2) = r_2(k_2)\, S_{12}(k_1,-k_2)\, t_1(k_1)\, S_{21}(-k_2,k_1) \quad (9.3.2)$$

$$S_{12}(k_1,k_2)\, r_1(k_1)\, S_{21}(k_2,-k_1)\, r_2(k_2) = r_2(k_2)\, S_{12}(k_1,-k_2)\, r_1(k_1)\, S_{21}(-k_2,-k_1) \quad (9.3.3)$$

Les générateurs $r(k)$ and $t(k)$ satisfont aussi les relations d'unitarité:

$$t(k)t(k) + r(k)r(-k) = 1 \quad \text{et} \quad t(k)r(k) + r(k)t(-k) = 0 \quad (9.3.4)$$

$r(k)$ et $t(k)$ décrivent la réflexion et la transmission sur une impureté (voir partie suivante). Le nom d'algèbre Réflexion-Transmission (RT) étant déjà utilisé pour des algèbres généralisant les algèbres ZF (section 12.3, plus bas) et contenant (comme sous-algèbres) les algèbres ci-dessus, nous avons choisi ici le nom d'algèbre d'impureté.

Deux cas particuliers se distinguent naturellement:

(i) Les algèbres de réflexion (déjà abordées), pour lesquelles $t(k) = 0$. Elles correpondent à des systèmes à bord réfléchissant.

(ii) Les algèbres de transmission, pour lesquelles $r(k) = 0$. Ces algèbres correspondent à des systèmes physiques dont l'impureté est purement transmitive.

On notera que, si on oublie les relations d'unitarité (9.3.4), les deux cas particuliers correspondent aussi à des sous-algèbres des algèbres d'impureté.

Chapitre 10

Algèbres de quasi-Hopf

Comme leur nom l'indique, les algèbres de quasi-Hopf [66] sont une généralisation des algèbres de Hopf. Elles interviennent dans les modèles de chaînes de spins de type XYZ, voir par exemple [18].

10.1 Définition

Une algèbre associative unifère $\mathcal{A}$ est dite algèbre de quasi-Hopf si elle possède une structure de coalgèbre donnée par un coproduit Δ, une coünité ϵ et une antipode S, ainsi que des éléments α, $\beta \in \mathcal{A}$, et un élément inversible $\Phi \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (coassociateur), qui satisfont

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))\Phi^{-1} \qquad (\forall a \in \mathcal{A}) \tag{10.1.1}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} \tag{10.1.2}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi) = (\mathbb{I} \otimes \Phi) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes \mathbb{I}) \tag{10.1.3}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{id})(\Phi) = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \tag{10.1.4}$$

$$m \circ (S \otimes \hat{\alpha}) \circ \Delta = \alpha \cdot i \circ \epsilon\,, \qquad m \circ (\hat{\beta} \otimes S) \circ \Delta = \hat{\beta}\, i \circ \epsilon \tag{10.1.5}$$

$$m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (S \otimes \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta})\Phi = \mathbb{I}\,, \qquad m \circ (m \otimes \mathrm{id}) \circ (S \otimes \hat{\alpha} \otimes \mathrm{id})\, \Phi \cdot (\beta \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) = \mathbb{I} \tag{10.1.6}$$

où $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont les multiplications par α et β (respectivement), et i est l'injection canonique de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{A}$.

L'élément Φ mesure le défaut de coassociativité du coproduit.

Une algèbre de quasi-Hopf est dite quasi-triangulaire s'il existe une élément inversible $\mathcal{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ tel que

$$\Delta'(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1} \qquad (\forall a \in \mathcal{A})$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}) = \Phi^{(312)}\, \mathcal{R}_{13}\, \Phi^{(132)^{-1}}\, \mathcal{R}_{23}\, \Phi^{(123)}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \Phi^{(231)^{-1}}\, \mathcal{R}_{13}\, \Phi^{(213)}\, \mathcal{R}_{12}\, \Phi^{(123)^{-1}}$$

Cela implique que $\mathcal{R}$ satisfait **l'équation de Yang–Baxter généralisée**:

$$\mathcal{R}_{12}\, \Phi^{(312)}\, \mathcal{R}_{13}\, \Phi^{(132)^{-1}}\, \mathcal{R}_{23}\, \Phi^{(123)} = \Phi^{(321)}\, \mathcal{R}_{23}\, \Phi^{(231)^{-1}}\, \mathcal{R}_{13}\, \Phi^{(213)}\, \mathcal{R}_{12} \tag{10.1.7}$$

Une algèbre de quasi-Hopf possédant $\Phi = \mathbb{I}^{\otimes 3}$ est une algèbre de Hopf.

10.2 Équation de Gervais-Neveu-Felder

L'équation de Yang-Baxter dynamique, connue aussi sous le nom d'équation de Gervais–Neveu–Felder (GNF) [107], est une généralisation de l'équation de YB et un cas particulier de l'équation de YB généralisée introduite pour les algèbres de quasi-Hopf. Pour la définir, on considère une algèbre de Hopf quasitriangulaire $\mathcal{A}$, possédant une sous-algèbre abélienne $\mathcal{H}$, qui joue le rôle de sous-algèbre de Cartan. L'équation GNF s'écrit

$$\mathcal{R}_{12}(-\mu+2h^{(3)})\,\mathcal{R}_{13}(-\mu)\,\mathcal{R}_{23}(-\mu+2h^{(1)}) = \mathcal{R}_{23}(-\mu)\,\mathcal{R}_{13}(-\mu+2h^{(2)})\,\mathcal{R}_{12}(-\mu) \qquad (10.2.1)$$

Cette équation est écrite dans $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, et $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_r)$ (avec $r=\dim\mathcal{H}$) est une collection de **paramètres dynamiques**. $\mathcal{R}$ est appelée **matrice $\mathcal{R}$ dynamique**.

On comprend mieux l'équation GNF lorsqu'on l'évalue sur une représentation, d'espace de représentation V, de cette algèbre $\mathcal{A}$. On considère le cas d'une algèbre de dimension finie, il n'y a donc pas de paramètres spectraux. La matrice R évaluée agit sur des vecteurs v_i de V de poids η_i sous h selon:

$$R_{12}(-\mu+2h^{(3)})(v_1\otimes v_2\otimes v_3) = R_{12}(-\mu+2\eta_3)(v_1\otimes v_2)\otimes v_3 \qquad (10.2.2)$$

où $R:\mathcal{H}^*\to End(V\otimes V)$ est maintenant une fonction (méromorphe). L'équation GNF évaluée sur $v_1\otimes v_2\otimes v_3$ devient alors:

$$R_{12}(-\mu+2\eta_3)\,R_{13}(-\mu)\,R_{23}(-\mu+2\eta_1) = R_{23}(-\mu)\,R_{13}(-\mu+2\eta_2)\,R_{12}(-\mu) \qquad (10.2.3)$$

Il faut remarquer que les paramètres dynamiques ne doivent pas être confondus avec les paramètres spectraux qui interviennent dans le cas d'algèbres de dimension infinie (on aurait dans ce cas $R(z;\mu)$).

Pour chaque solution de l'équation GNF, on peut construire des algèbres (dynamiques), définies par les relations (écrites dans $End(V)\otimes End(V)\otimes\mathcal{A}$)

$$R_{12}(\mu+2h^{(3)})\,T_1(\mu)\,T_2(\mu+2h^{(1)}) = T_2(\mu)\,T_1(\mu+2h^{(2)})\,R_{12}(\mu) \qquad (10.2.4)$$

où $h^{(1)}\in End(V)$ (respectivement $h^{(2)}\in End(V)$) est évalué sur les composantes de T_1 (respectivement T_2), tandis que $h^{(3)}$ reste un élément (non évalué) de $\mathcal{A}$.

Remarque 10.2.1 *L'équation de GNF a été introduite par Gervais et Neveu pour l'étude de la quantification de la théorie de Liouville. Elle a ensuite été généralisée par Felder [88] dans une étude des déformations quantiques de l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard (d'où le nom de q-KZB qu'on lui donne parfois). Elle joue un rôle fondamental dans l'approche en matrice R de la quantification de toute une famille de modèles, de type Calogero (-Moser ou -Sutherland) ou Ruijsenaars-Schneider [9].*

10.2.1 Exemple: $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$

On considère la matrice R dynamique (évaluée) suivante:

$$R(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s^{-1} & 0 \\ 0 & -s^{-1} & 1-s^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{10.2.5}$$

où s est le paramètre dynamique. On peut vérifier que cette matrice satisfait l'équation de YB dynamique

$$R_{12}(-s+2\eta_3)\, R_{13}(-s)\, R_{23}(-s+2\eta_1) = R_{23}(-s)\, R_{13}(-s+2\eta_2)\, R_{12}(-s) \tag{10.2.6}$$

L'algèbre $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$ est engendrée par des générateurs e, f, et h soumis aux relations

$$R_{12}(s+h_3)L_1(s)L_2(s+h_1) = L_2(s)L_1(s+h_2)R_{12}(s)$$

avec

$$L(s) = \begin{pmatrix} 1 & s^{-1}f \\ (1-s-h)^{-1}e & 1+s^{-1}(1-s-h)^{-1}ef \end{pmatrix} , \tag{10.2.7}$$

$$L_2(s+h_1) = \begin{pmatrix} L_2(s+1) & 0 \\ 0 & L_2(s-1) \end{pmatrix} , \tag{10.2.8}$$

où on a donné $L_2(s+h_1)$ pour illustrer le calcul faisant intervenir les paramètres dynamiques. On peut vérifier que ces relations sont en fait identiques à celles de l'algèbre $\mathcal{U}(s\ell_2)$. Seule la structure de Hopf est modifiée.

10.3 Twists de Drinfeld

10.3.1 Twists rigides

L'origine de la construction de twists "rigides" des algèbres de Hopf est une algèbre de Hopf quasi-triangulaire $\mathcal{A}$, dont on cherche un isomorphisme (de la structure de Hopf). Pour ce faire, on introduit un élément inversible $\mathcal{F} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ satisfaisant

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon)\mathcal{F} = (\epsilon \otimes \mathrm{id})\mathcal{F} = \mathbb{I} \tag{10.3.1}$$

ainsi que **l'équation de cocycle**

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(\mathcal{F})\ \mathcal{F}_{12} = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\mathcal{F})\ \mathcal{F}_{23} \tag{10.3.2}$$

$\mathcal{F}$ est appelé[1] **twist de Drinfeld**, ou (antinomiquement) **twist rigide.** Pour un tel objet, on construit une nouvelle matrice $\mathcal{R}$ universelle

$$\mathcal{R}^F_{12} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{R}_{12}\mathcal{F}^{-1}_{12} .$$

[1]Strictement parlant, un twist est un élément inversible satisfaisant (10.3.1), et est appelé **twist admissible** s'il satisfait l'équation de cocycle. Cependant, nous ne étudierons ici uniquement les twists admissibles (comme c'est le cas de la plupart des études existantes), que nous appellerons simplement (et abusivement) twists.

On peut alors montrer que cette nouvelle matrice $\mathcal{R}$ satisfait l'équation de YB (universelle). De plus, introduisant

$$\Delta^F(a) = \mathcal{F}_{12}\,\Delta(a)\,\mathcal{F}_{12}^{-1} \quad \text{et} \quad S^F(a) = f\,S(a)\,f^{-1} \quad \text{avec} \quad f = m\,o\,(\mathrm{id}\otimes S)(\mathcal{F}) \in \mathcal{A}$$

on peut vérifier, à l'aide de l'équation de cocycle, que l'on obtient une nouvelle structure de Hopf. Grâce aux twists de Drinfeld, on peut montrer que toute algèbre quasi-triangulaire déformation d'une enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie (finie ou infinie), est "twist-équivalente" à une algèbre de Hopf dont la matrice $\mathcal{R}$ est $\mathbb{I}$.

Remarque 10.3.1 *Les twists de Drinfeld jouent un rôle particulièrement important dans la notion de twists factorisants, dont nous ne parlerons pas ici. L'idée de base est de trouver (explicitement) un twist qui ramène une matrice $\mathcal{R}$ à $\mathbb{I}$ (comme dans le cas de $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$). Ce twist factorise donc la matrice $\mathcal{R}$ en deux parties. En évaluant cette factorisation dans une représentation quelconque, on peut (en théorie dans le cas général, explicitement pour les modèles XXX et XXZ, [146, 147, 172], retrouvant les résultats [133, 134]) calculer les fonctions de corrélation de la chaîne de spins associée.*

Remarque 10.3.2 *Il ne faut pas confondre les twists de Drinfeld avec les twists des algèbres de KM, ou avec les Yangiens twistés. Si (les doubles quantiques de) ces derniers peuvent être vus comme des déformations des algèbres de KM twistées, ce qui explique l'utilisation du même nom pour ces deux objets, le twists des algèbres de KM, basé sur les automorphismes de l'algèbre de Lie, n'ont pas de rapport avec les twists de Drinfeld qui définissent (lorsqu'ils sont rigides) des isomorphismes des algèbres de Hopf. Le seul point commun en est la notion d'isomorphisme de la structure algébrique considérée.*

10.3.2 Twists dynamiques et structure de quasi-Hopf

On peut construire des solutions universelles à l'équation de GNF en considérant les **twists de Drinfeld dynamiques.** Ces objets de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ sont des solutions de l'équation de cocycle décalée ("twisté"):

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(\mathcal{F}(x))\;\mathcal{F}_{12}(xq^{h^{(3)}}) = (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\mathcal{F}(x))\;\mathcal{F}_{23}(x) \tag{10.3.3}$$

où x est la collection de paramètres dynamiques (agissant ici multiplicativement), $h = (h_1, \ldots, h_r)$ est une base orthonormée de la sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{A}$, $xq^h = (x_1 q^{h_1}, \ldots, x_r q^{h_r})$ et $\mathcal{F} : \mathbb{C}^r \to \mathcal{A}^{\otimes 2}$ est un élément inversible de poids 0, *i.e.* $[\mathcal{F}_{12}, h\otimes 1 + 1\otimes h] = 0, \forall h \in \mathcal{H}$.

Pour chaque élément $\mathcal{F}$, on peut montrer que $\mathcal{R}^F_{12}(x) = \mathcal{F}_{21}(x)\mathcal{R}_{12}\mathcal{F}_{12}(x)^{-1}$ est une solution de l'équation de GNF lorsque $\mathcal{R}$ est un élément de $\mathcal{A}^{\otimes 2}$ qui obéit aux axiomes de quasitriangularité.

À l'aide des cocycles twistés, on peut définir une nouvelle structure de (quasi-)Hopf sur l'algèbre $\mathcal{A}$, différente de la structure de Hopf initiale. Si Δ, S et ϵ définissent la structure de Hopf (associée à $\mathcal{R}$) de $\mathcal{A}$, on introduit

$$\Delta^F(a) = \mathcal{F}_{12}(x)\,\Delta(a)\,\mathcal{F}_{12}(x)^{-1}$$

Δ^F est évidemment un morphisme d'algèbre, et on peut vérifier que ce nouveau coproduit satisfait une relation de "quasi-coassociativité" (10.1.1), avec

$$\Phi^F_{123} = \mathcal{F}_{23}(x)\mathcal{F}_{23}(xq^{h^{(1)}})^{-1}\,.$$

Plus généralement, la structure de quasi-Hopf de $\mathcal{A}$ pour Δ^F, S^F, ϵ^F et Φ^F est garantie par l'équation de cocycle décalé et les propriétés données précédemment. L'antipode et la coünité ne sont changées par cette opération.

Le problème reste de trouver explicitement de tels cocyles. Certaines solutions étaient connues depuis longtemps (pour $s\ell(2)$ [12,98] et pour $osp(1|2)$ [14]), mais une systématique restait à trouver. Avant de la présenter, nous abordons un exemple pour fixer les idées.

10.3.3 Exemple: $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$

La matrice R représentée (10.2.5) de cette algèbre peut être vue comme l'évaluation d'une matrice universelle $\mathcal{R}^F(s) = \mathcal{F}_{21}(s)\,(\mathcal{F}_{12}(s))^{-1}$, où

$$\mathcal{F}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} [(1+k-s)1 - h] \otimes 1 \right)^{-1} e^n \otimes f^n \tag{10.3.4}$$

e, f, h étant les générateurs de $s\ell(2)$. Ainsi, $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$ apparaît comme le twist de $\mathcal{U}(s\ell_2)$, dont la matrice universelle est $\mathbb{I}$.

On peut vérifier que $\mathcal{F}$ satisfait l'équation de cocycle (10.3.3), ce qui assure (en fait promeut) $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$ au rang d'algèbre de quasi-Hopf quasi-triangulaire. Le coproduit pour cette algèbre prend la forme:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= h \otimes 1 + 1 \otimes h \;\equiv\; h_1 + h_2 \,, \\ \Delta(e) &= 1 \otimes e + \frac{1 - s - h_1 - h_2}{1 - s - h_1}\, e \otimes 1 \cdot \phi(s)^{-1} \,, \\ \Delta(f) &= \left[\phi(s) \cdot f \otimes 1 + \frac{s}{s + h_1}\, 1 \otimes f \right] \phi(s-1) \,, \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

où

$$\phi(s) = \mathcal{F}_{12}(s)\mathcal{F}_{12}(s+h_3)^{-1}\Big|_{h_3=1} = 1 \otimes 1 + \frac{1}{(s+h_1)(1-s-h_1)}\, e \otimes f \,. \tag{10.3.6}$$

ce qui montre que $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$, en tant qu'algèbre de (quasi-)Hopf est différente de $\mathcal{U}(s\ell_2)$.

L'évaluation de $\mathcal{R}^F(s)$ dans la représentation fondamentale de $s\ell(2)$ redonne bien sûr la matrice R représentée (10.2.5).

À ce stade, le calcul apparaît "miraculeux": comment trouver $\mathcal{F}(s)$ en partant de la seule connaissance de $R(s)$? L'explication vient de l'utilisation d'une équation "auxiliaire", dite équation ABRR, que nous présentons maintenant.

10.4 Équation ABRR

Pour tout groupe quantique (associé à une algèbre de Lie simple ou une superalgèbre contragrédiente), on peut construire des solutions à l'équation GNF. Pour cela, on associe une solution à l'équation de cocycle shiftée à chacune des (super)algèbres précitées. Cette solution est construite grâce à une équation linéaire "auxiliaire" sur le cocycle. Partant de

$$B(x) = \prod_{j=1}^{r} (x_j^{h_j} q^{h_j^2}) = q^{\sum_{j=1}^{r} (h_j h_j - \mu_j h_j)} \,,$$

cette équation prend la forme:

$$F_{12}(x)B_2(x) = \hat{R}_{12}^{-1}B_2(x)F_{12}(x) \quad \text{avec} \quad R = K\hat{R} \text{ où } K = \prod_{j=1}^{r} q^{h_j \otimes h^j} \tag{10.4.1}$$

Cette nouvelle équation (dite équation ABRR) **[ERA26]** apparaît en fait plus fondamentale que l'équation de cocycle elle-même, puisque ses solutions (calculables) sont automatiquement des cocycles. Ces solutions sont données sous forme de produit infini:

$$F = \prod_{k=0}^{\overrightarrow{+\infty}} \left(B_2^k \hat{R}_{12}^{-1} B_2^{-k} \right) \tag{10.4.2}$$

La convergence de ce produit est assurée dans chaque irrep finie du groupe considéré.

Pour chacun des cocycles ainsi construits, on construit ainsi une nouvelle classe d'algèbres de quasi-Hopf qui dépendent de paramètres de déformation dynamiques, ainsi que d'un paramètre spectral. Une généralisation de cette approche au cas des algèbres affines, où un paramètre dynamique supplémentaire (dit nome elliptique) est introduit, a été effectuée en parallèle par un groupe japonais [132]. Elle conduit aux algèbres dite elliptiques. À noter toutefois que la convergence des produits infinis n'est pas assurée dans le cas affine.

Remarque 10.4.1 *L'origine de l'équation ABRR prend sa source dans l'étude des symboles* $6j$ *de* $\mathcal{U}_q(s\ell_2)$*. En effet, en étudiant la continuation complexe de ces symboles, qui sont reliés aux caractères des représentations irréductibles unitaires du groupe de Lorentz déformé, É. Buffenoir et Ph. Roche [37] ont montré que les conditions de régularité de ces caractères sont assurées par une équation linéaire qui n'est rien d'autre que l'équation ABRR pour* $\mathcal{U}_q(s\ell_2)$*.*

L'équation ABRR joue un rôle très important dans l'étude des groupes quantiques. On verra ci-dessous des cas simples où son utilisation permet de résoudre des problèmes liés aux structures de (quasi-)Hopf. Elle est aussi très utilisée par les mathématiciens pour résoudre des problèmes de classification des matrices R, voir par exemple [72, 76].

On notera pour finir que s'il est clair qu'une solution de l'équation ABRR fournit un twist de Drinfeld, il n'a pas été démontré (à ma connaissance) qu'un twist doit être solution d'une équation de type ABRR.

10.4.1 Exemple: $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$

Afin d'illustrer le calcul d'un twist en utilisant l'équation ABRR, nous reprenons le cas de $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$. En représentation, la matrice R de cette algèbre peut être construite par l'action du "twist"

$$F(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.4.3}$$

sur la matrice identité (vue comme matrice R de $s\ell_2$). Bien sûr, étant représentée, $F(s)$ ne peut pas, à proprement parler, être appelée un twist. Cependant, on peut vérifier que cette matrice satisfait

(une version en limite d'échelle de) l'équation ABRR représentée:

$$[X \otimes \mathbb{I}, F] = F\, r \quad \text{où} \quad X = diag(1+s, 1-s)$$

et r est la matrice R classique de $\mathcal{U}_q(s\ell_2)$, définie par

$$r = \lim_{\hbar \to 0} (R - \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad R = q^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q = e^{\hbar}$$

L'idée est donc de promouvoir cette équation représentée à une équation universelle, et de construire le twist (universel) correspondant. Pour cela, on reconnaît dans X l'évaluation de $\frac{1}{2}h^2 + s\,h$, tandis que $r = -2\,e \otimes f$. La résolution de l'équation se fait sous la forme de produit infini ou de somme infinie, qui sont deux formes équivalentes de la forme présentée en (10.3.4). Bien sûr, l'évaluation de la forme (10.3.4) redonne la forme (10.4.3).

Ce simple exemple fait ressortir un avantage indéniable de l'équation ABRR sur l'équation de cocycle: la première peut être évaluée dans une représentation, alors que la seconde, faisant intervenir le coproduit, ne peut exister qu'au niveau universel.

Chapitre 11

Structures de (quasi-)Hopf des Yangiens déformés

11.1 Les Yangiens comme limite d'échelle

On peut voir les Yangiens comme des limites particulières des groupes quantiques, dans lesquelles tous les les paramètres tendent vers 1, mais dont les rapports des logarithmes restent fixes. Ainsi, partant du groupe quantique $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$ (basé sur l'algèbre affine $\widehat{s\ell_N}$), de générateurs $T(u)$, en posant

$$q = e^{\hbar} \quad \text{et} \quad \tau(u) = (T(u\hbar) - 1)/\hbar\,,$$

la limite $\hbar \to 0$ produit le Yangien (plus exactement son double quantique) engendré par $\tau(u)$.

De fait, la limite d'échelle de la matrice R évaluée de $\mathcal{U}_q(\widehat{s\ell_N})$ où le paramètre spectral est noté $z = q^{\hbar u}$ redonne la matrice R évaluée du Yangien, avec pour paramètre spectral u. On notera toutefois qu'au niveau des matrices $\mathcal{R}$ universelles la limite d'échelle n'a pas été faite. Une des difficultés dans cette procédure vient de la manipulation de séries formelles, ce qui n'apparaît pas dans une matrice R évaluée.

Dès lors, il est légitime de considérer les limites d'échelle des algèbres de quasi-Hopf introduites au niveau des groupes quantiques. Par de telles limites, on peut donc obtenir une série d'algèbres de type Yangien, mais possédant des paramètres (dynamiques) de déformation supplémentaires [7]. Par exemple, dans le cas de $s\ell(2)$, on peut dégager une classification de toutes ces structures, les reliant par des procédures de limite d'échelle dans leur espace de paramètres ou par des twists évalués **[ERA30]**. On peut aussi inclure dans ce schéma général des limites "simples" où l'un des paramètres de déformation (à savoir q) tend vers 1, sans que les autres soient changés. On obtient alors des déformations dynamiques des algèbres usuelles (non déformées), telle l'algèbre $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$ présentée plus haut.

Bien sûr, le calcul se faisant au niveau "évalué", les structures de (quasi-)Hopf de ces nouvelles algèbres reste à prouver. C'est l'utilisation de l'équation ABRR qui permet de résoudre ce problème, comme nous allons le voir maintenant.

11.2 Structure de quasi-Hopf [ERA31, ERA35]

L'existence de la forme universelle des twists en représentation peut être prouvée pour certaines de ces déformations de Yangien. La forme des twists est calculée grâce à une équation linéaire de type ABRR, similaire à celle donnée pour $\mathcal{U}_s(s\ell_2)$. La technique employée est la même que celle présentée pour cette algèbre: à partir de la forme du twist dans la représentation fondamentale, on déduit une équation linéaire (de type ABRR), valable à priori uniquement dans la représentation fondamentale. On postule alors une forme universelle pour cette équation, ce qui permet de déterminer une forme universelle pour le twist. Une fois la forme universelle déterminée, on vérifie que l'équation de cocycle (décalé) est satisfaite. Les déformations en question admettent donc une structure de quasi-Hopf. Bien sûr, l'évaluation dans la fondamentale de la forme universelle redonne la matrice point de départ du calcul.

Cette approche, effectuée tout d'abord pour $s\ell_2$, peut être généralisée au cas d'une algèbre ou superalgèbre quelconque, toujours en utilisant différentes versions de l'équation linéaire précitée. De cette façon, la structure en algèbre de quasi-Hopf quasi-triangulaire des (super)Yangiens déformés est établie.

Remarque 11.2.1 *Dans le cas des matrices R évaluées, il a été mis en évidence des matrices de type "twists homothétiques", qui permettent de "remonter" les limites (d'échelle ou autre) considérées, i.e. de reconstruire les groupes quantiques à partir des Yangiens. Une forme universelle (hypothétique) de tels "twists homothétiques" (à définir) permettrait de relier les structures de Hopf des premiers aux seconds.*

Chapitre 12

Algèbres ZF et généralisations

Les algèbres ZF sont aux algèbres d'oscilateurs ce que les champs en interaction sont aux champs libres. À ce titre, elles jouent un grand rôle dans les théories des champs intégrables, décrivant en particulier les états asymptotiques (de type ondes planes) de ces théories. Leur généralisation permet l'étude des systèmes intégrables avec bord ou avec impureté.

12.1 Groupes quantiques et systèmes intégrables

Les groupes quantiques jouent un grand rôle dans l'étude des systèmes de type chaînes de spins. Ils interviennent aussi dans des modèles de théorie des champs quantiques. Nous présentons ici les structures algébriques qui sous-tendent les approches en théorie des champs que nous utiliserons dans la partie suivante.

12.1.1 Algèbres de Zamolodchikov-Faddeev

Les algèbres de Zamolodchikov-Faddeev (ZF) [78,244] sont des algèbres associatives unifères engendrées par des générateurs $a_j(k)$ et $a_j^\dagger(k)$, $j = 1, \ldots, N$, soumis aux relations:

$$a_1(k_1)\, a_2(k_2) = R_{21}(k_2, k_1)\, a_2(k_2)\, a_1(k_1) \tag{12.1.1}$$

$$a_1^\dagger(k_1)\, a_2^\dagger(k_2) = a_2^\dagger(k_2)\, a_1^\dagger(k_1)\, R_{21}(k_2, k_1) \tag{12.1.2}$$

$$a_1(k_1)\, a_2^\dagger(k_2) = a_2^\dagger(k_2)\, R_{12}(k_1, k_2)\, a_1(k_1) + \delta_{12}\delta(k_1 - k_2) \tag{12.1.3}$$

où on a utilisé le formalisme en espaces auxiliaires:

$$a^\dagger(k) = \sum_{i=1}^{N} a_i^\dagger(k)\, e_i^\dagger \quad , \quad a(k) = \sum_{i=1}^{N} a_i(k)\, e_i \quad \text{avec} \tag{12.1.4}$$

$$e_i^\dagger = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0) \quad , \quad e_i^\dagger \cdot e_j = \delta_{ij} \tag{12.1.5}$$

$$\delta_{12} = \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_i^\dagger \tag{12.1.6}$$

La matrice R utilisée satisfait l'équation de Yang-Baxter (ce qui assure l'associativité du produit) et doit aussi, par cohérence des relations ci-dessus, satisfaire la relation d'unitarité (8.3.3).

Si on note $R_{12}(z,w) = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + \hbar r_{12}(z,w)$, on peut voir, en étudiant la limite $\hbar \to 0$, que l'algèbre ZF est une déformation d'une algèbre d'oscillateurs. De fait, les algèbres ZF sont utilisées en physique en tant qu'algèbres associées à des états asymptotiques des théories étudiées (voir l'exemple de l'équation de Schrödinger dans la partie suivante).

Les algèbres ZF ne sont pas des algèbres de Hopf: on ne peut pas, par exemple, construire de coproduit pour celles-ci.

12.1.2 Représentation de Fock

Au niveau physique, comme pour les algèbres d'oscillateurs, c'est la représentation de Fock qui doit être considérée. Cette représentation est construite à partir d'un vide Ω, qui est plus bas poids de l'algèbre, *i.e.*

$$a_i(k)\,\Omega = 0\,, \qquad \forall\, i\,,\ \forall\, k$$

Les vecteurs de la représentation sont construits par action des opérateurs $a_i^\dagger(k)$, une base de Poincaré-Birkhoff-Witt étant donnée par les produits de ces opérateurs, ordonnés selon la grandeur des paramètres spectraux (les impulsions) k.

Une construction explicite de cette représentation est fournie par les fonctions de type $L^2(\mathbb{R})$, sur lesquelles agissent des opérateurs "habillés" (comme par exemple $a_i(f) = \int_{\mathbb{R}} dk\, f(k) a_i(k)$). Plus précisément, le point de départ est la somme directe des espaces $\mathcal{L}_0 = \mathbb{C}$ et $\mathcal{L}_n = L^2(\mathbb{R})^{\otimes n}$, $n > 0$. Sur ces espaces, la matrice R de l'algèbre ZF permet de construire une représentation du groupe de Weyl de $s\ell(n-1)$ selon ($n \geq 2$ et $i = 1, \ldots, n$):

$$[\sigma_i^{(n)}\varphi]_{1\ldots n}(k_1, ..., k_i, k_{i+1}, ..., k_n) = R_{i\,i+1}(k_i, k_{i+1})\varphi_{1\ldots n}(k_1, ..., k_{i+1}, k_i, ..., k_n)\,. \qquad (12.1.7)$$

On peut vérifier que, grâce à l'équation de YB, sur $\mathcal{H}_n$, on a

$$\sigma_i^{(n)}\,\sigma_{i+1}^{(n)}\,\sigma_i^{(n)} = \sigma_{i+1}^{(n)}\,\sigma_i^{(n)}\,\sigma_{i+1}^{(n)}\,, \qquad \left(\sigma_i^{(n)}\right)^2 = \mathbf{1}\,. \qquad (12.1.8)$$

si bien que la correspondance $\phi_n : \sigma_i \mapsto \sigma_i^{(n)}$ définit une représentation de W_n dans $\mathcal{H}_n$. Grâce à ce morphisme, l'opérateur

$$P^{(n)} \equiv \frac{1}{2^n n!} \sum_{\nu\in W_n} \phi_n(\nu) \qquad (12.1.9)$$

devient un projecteur orthogonal. L'espace de Hilbert de l'espace de Fock de l'algèbre ZF est alors donné par $\mathcal{H} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{H}_n$, avec $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ et $\mathcal{H}_n = P^{(n)}\mathcal{L}_n$. Le vide de la représentation est $\Omega = (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathcal{H}_0$, et l'action des opérateurs donnée par

$$a(f)\Omega = 0\,, \qquad (12.1.10)$$

$$[a(f)\varphi]^{(n)}_{1\ldots n}(k_1, ..., k_n) = \sqrt{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, f_0^\dagger(k)\varphi^{(n+1)}_{01\ldots n}(k, k_1, ..., k_n)\,, \qquad (12.1.11)$$

$$\left[a^\dagger(f)\varphi\right]^{(n)}_{1\ldots n}(k_1, ..., k_n) = \sqrt{n}\left[P^{(n)} f\otimes\varphi^{(n-1)}\right]_{1\ldots n}(k_1, ..., k_n)\,. \qquad (12.1.12)$$

Les opérateurs "nus" $a(k)$ et $a^\dagger(k)$ apparaissent alors comme des opérateurs à valeur distribution de $\mathcal{F}$.

12.1.3 Opérateurs bien élevés [ERA36]

Le cas de Schrödinger (que l'on traitera plus bas) suggère une approche systématique des systèmes intégrables définis via une matrice R. Ainsi, partant d'une matrice R (avec paramètre spectral) complètement arbitraire, soumise uniquement à l'équation de Yang-Baxter et à la condition d'unitarité, on peut associer une algèbre ZF et un groupe quantique.

Pour cela, on introduit des **opérateurs bien élevés**, qui appartiennent à (une fermeture de) l'algèbre ZF et agissent selon:

$$L_1(k_1)\, a_2(k_2) = R_{21}(k_2,k_1)\, a_2(k_2)\, L_1(k_1) \tag{12.1.13}$$
$$L_1(k_1)\, a_2^\dagger(k_2) = a_2^\dagger(k_2)\, R_{12}(k_1,k_2)\, L_1(k_1) \tag{12.1.14}$$

On peut construire explicitement ces opérateurs bien élevés en les prenant sous la forme $L(k) \equiv L^{ij}(k)E_{ij} \in \mathcal{A}_R \otimes \mathbb{C}^{N^2}$ où

$$L_0(k_0) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{N^n}\, tr_{12\ldots n}\left(a^\dagger_{n\ldots 1}\, L^{(n)}_{01\ldots n} a_{1\ldots n}\right) \tag{12.1.15}$$

avec

$$a^\dagger_{n\ldots 1} = a^\dagger_{\alpha_n}(k_n)\ldots a^\dagger_{\alpha_1}(k_1) \quad ; \quad a_{1\ldots n} = a_{\beta_1}(k_1)\ldots a_{\beta_n}(k_n) \tag{12.1.16}$$
$$L^{(n)}_{01\ldots n} = L^{(n)}_{0,\alpha_1,\beta_1,\ldots\alpha_n,\beta_n}(k_0,k_1,\ldots,k_n) \in \left(\mathbb{C}^{\otimes N^2}\right)^{\otimes(n+1)}(k_0,k_1,\ldots,k_n) \tag{12.1.17}$$

et où $tr_{12\ldots n}$ est la trace dans les espaces auxiliaires $1,2,\ldots,n$. La forme (12.1.15) est à rapprocher de la construction des algèbres de Lie affines en termes d'oscillateurs. Une formule de récurence entre $L^{(n)}_{01\ldots n}$ et $L^{(n-1)}_{01\ldots n-1}$ est donnée dans l'article **[ERA36]**. Elle permet de calculer ces matrices à partir de $L^{(1)}_{01}(k_0,k_1) = \mathbb{I} - R_{01}(k_0,k_1)$.

Les opérateurs bien élevés engendrent le groupe quantique de même matrice R que celle de l'algèbre ZF:

$$R_{12}(z_1,z_2)\, L_1(z_1)\, L_2(z_2) = L_2(z_2)\, L_1(z_1)\, R_{12}(z_1,z_2) \tag{12.1.18}$$

On remarquera que sur les sous-espaces $\oplus_{n\le n_0}\mathcal{L}_n$ de l'espace de Fock de l'algèbre ZF, la série définissant les opérateurs bien élevés se tronque au niveau n_0.

De plus, le groupe quantique est une symétrie de la hiérarchie naturelle associée à l'algèbre ZF:

$$[H^{(n)}_{ZF}, L(k)] = 0 \quad \text{avec} \quad H^{(n)}_{ZF} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^n\, a^\dagger(k)a(k) \quad \text{et} \quad [H^{(n)}_{ZF}, H^{(m)}_{ZF}] = 0 \tag{12.1.19}$$

Ainsi, les opérateurs bien élevés permettent, à partir d'une matrice R *quelconque* de construire une hiérarchie intégrable dont la symétrie est le groupe quantique basé sur R.

12.2 Algèbres de bord

Les algèbres de bord [165] sont des généralisations des algèbres ZF, introduites pour des systèmes physiques avec bord (réfléchissant). Ce sont des algèbres unifères engendrées par des générateurs

$$\tilde{a}(k) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{a}_j(k) e_j \quad ; \quad \tilde{a}^\dagger(k) = \sum_{j=1}^{N} a^\dagger_j(k) e^t_j \quad ; \quad b(k) = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}(k) E_{ij} \tag{12.2.1}$$

où E_{ij} est la matrice $N \times N$ ayant 1 en position (i,j). Leurs relations de définition prennent la forme suivante:

$$\tilde{a}_1(k_1)\,\tilde{a}_2(k_2) = R_{21}(k_2,k_1)\,\tilde{a}_2(k_2)\,\tilde{a}_1(k_1) \tag{12.2.2}$$
$$\tilde{a}_1^\dagger(k_1)\,\tilde{a}_2^\dagger(k_2) = \tilde{a}_2^\dagger(k_2)\,\tilde{a}_1^\dagger(k_1)\,R_{21}(k_2,k_1) \tag{12.2.3}$$
$$\tilde{a}_1(k_1)\,\tilde{a}_2^\dagger(k_2) = \tilde{a}_2^\dagger(k_2)\,R_{12}(k_1,k_2)\,\tilde{a}_1(k_1) + \frac{1}{2}\Big(\delta(k_1-k_2) + b_1(k_1)\,\delta(k_1+k_2)\Big)\,\delta_{12} \tag{12.2.4}$$
$$\tilde{a}_1(k_1)\,b_2(k_2) = R_{21}(k_2,k_1)\,b_2(k_2)\,R_{12}(k_1,-k_2)\,\tilde{a}_1(k_1) \tag{12.2.5}$$
$$b_1(k_1)\,\tilde{a}_2^\dagger(k_2) = \tilde{a}_2^\dagger(k_2)\,R_{12}(k_1,k_2)\,b_1(k_1)\,R_{21}(k_2,-k_1) \tag{12.2.6}$$
$$R_{12}(k_1,k_2)\,b_1(k_1)\,R_{21}(k_2,-k_1)\,b_2(k_2) = b_2(k_2)\,R_{12}(k_1,-k_2)\,b_1(k_1)\,R_{21}(-k_2,-k_1) \tag{12.2.7}$$
$$b(k)b(-k) = \mathbb{I} \tag{12.2.8}$$

La relation (12.2.8) assure l'existence d'un automorphisme idempotent

$$\varrho : \begin{cases} \tilde{a}(k) & \mapsto & b(k)\tilde{a}(-k) \\ \tilde{a}^\dagger(k) & \mapsto & \tilde{a}^\dagger(-k)b(-k) \\ b(k) & \mapsto & b(k) \end{cases} \tag{12.2.9}$$

La signification physique d'un tel automorphisme deviendra claire dans la partie suivante.

12.2.1 Représentation de Fock

Comme pour l'algèbre ZF, on peut construire un espace de Fock pour l'algèbre de bord [164] en considérant les fonctions $L^2(\mathbb{R})$. Cependant, la présence du générateur $b(k)$ modifie la construction: algébriquement, ceci se traduit par la valeur de $b(k)\Omega = B(k)\Omega$, où $B(k)$ est une matrice satisfaisant les relations (12.2.7) et (12.2.8). Ainsi, il y a *plusieurs* espaces de Fock $\mathcal{F}_B$, indexés par les différentes matrices $B(k)$. Dans le cas où la matrice R est celle du (super-)Yangien basé sur $s\ell(N)$ ou $s\ell(M|N)$, ces matrices ont été complètement classées: elles prennent la forme

$$B(k) = \frac{c\mathbb{I} - ik\mathbb{E}}{c+ik} \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}^2 = \mathbb{I} \quad \text{ou} \quad \mathbb{E}^2 = 0$$

D'autres classifications partielles existent pour les matrices R des Yangiens basés sur $so(N)$, $sp(2n)$ et $osp(M|2n)$ (classification pour $B(k)$ diagonale, anti-diagonale et "croisée") et pour les matrices R des groupes quantiques (classification pour $B(k)$ diagonale pour $\mathcal{U}_q(s\ell_N)$ et quelques cas de matrices "pleines" connus).

La construction explicite de l'espace de Fock $\mathcal{F}_B$ utilise encore une fois l'espace $\mathcal{H}$ introduit en section 12.1.2 et un projecteur orthogonal, basé cette fois-ci sur le groupe de Weyl WB_n de B_n (et faisant intervenir la matrice $B(k)$). L'action des générateurs $\sigma_i^{(n)}$ reste identique à celle donnée en (12.1.7), et le nouveau générateur τ de WB_n, $n \geq 1$, se représente selon:

$$\Big[\tau^{(n)}\varphi\Big]_{1\ldots n}(k_1,\ldots,k_n) = B_n(k_n)\varphi_{1\ldots n}(k_1,\ldots,k_{n-1},-k_n)\,, \tag{12.2.10}$$

Les relations (12.2.7) et (12.2.8) satisfaites par $B(k)$ montrent alors que les relations (12.1.8) sont

satisfaites, ainsi que

$$\sigma_i^{(n)}\,\tau^{(n)} = \tau^{(n)}\,\sigma_i^{(n)}, \qquad 1 \le i \le n-2 \tag{12.2.11}$$

$$\sigma_{n-1}^{(n)}\,\tau^{(n)}\,\sigma_{n-1}^{(n)}\,\tau^{(n)} = \tau^{(n)}\,\sigma_{n-1}^{(n)}\,\tau^{(n)}\,\sigma_{n-1}^{(n)}, \tag{12.2.12}$$

$$\left(\sigma_i^{(n)}\right)^2 = \left(\tau^{(n)}\right)^2 = \mathbf{1}. \tag{12.2.13}$$

Cela permet de définir le projecteur orthogonal $P^{(n)}$ comme précédemment, avec cette fois-ci une somme sur les éléments de WB_n, et d'introduire $\mathcal{L} = \oplus_{n\ge 0}\mathcal{L}_n$ avec $\mathcal{L}_n = P^{(n)}\mathcal{H}_n$. L'action des générateurs a et $a^\dagger$ est alors identique à celle donnée pour algèbre ZF, avec en plus $b(k)\Omega = B(k)\Omega$, comme déjà mentionné.

Enfin, on remarquera que dans l'espace de Fock l'automorphisme ϱ devient une identité

$$\tilde{a}(k) = b(k)\tilde{a}(-k) \quad \text{et} \quad \tilde{a}^\dagger(k) = \tilde{a}^\dagger(-k)b(-k) \quad \text{dans} \quad \mathcal{F}_B \tag{12.2.14}$$

Nous reviendrons sur cette propriété dans la partie suivante.

12.2.2 Hiérarchie associée à l'algèbre de bord et lien avec l'algèbre ZF [ERA37]

On remarquera que $b(k)$ engendre une sous-algèbre de l'algèbre de bord, qui se trouve n'être rien d'autre que l'algèbre de réflexion introduite pour l'étude des systèmes avec bord réflexif. La pertinence de l'algèbre de bord deviendra manifeste lors de l'étude de l'équation de Schrödinger (chapitre 15).

Cette sous-algèbre de réflexion est de plus la symétrie de la hiérarchie naturelle associée à l'algèbre de bord ($n, m = 0, 1, 2, \ldots$):

$$H_B^{(2n)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^{2n}\, \tilde{a}^\dagger(k)\tilde{a}(k) \quad \text{avec} \quad [H_B^{(2n)}, H_B^{(2m)}] = 0 \quad \text{et} \quad [H_B^{(2n)}, b(k)] = 0\,, \tag{12.2.15}$$

On notera que seuls les Hamiltoniens "pairs" interviennent dans cette hiérarchie. En fait, on peut définir une deuxième hiérarchie associée aux Hamiltoniens impairs, qui commutent entre eux, mais pas avec les Hamiltoniens pairs. Cependant, dans l'espace de Fock, ces Hamiltoniens impairs sont identiquement nuls, ce qui les exclut d'une hiérarchie honnête. Nous reviendrons sur ce point dans la section 15.3.

Grâce aux opérateurs bien élevés, on peut construire une algèbre de bord en partant d'une algèbre ZF:

$$\tilde{a}(k) = \frac{1}{2}\big(a(k) + b(k)a(-k)\big) \tag{12.2.16}$$

$$\tilde{a}^\dagger(k) = \frac{1}{2}\big(a^\dagger(k) + a^\dagger(-k)b(-k)\big) \tag{12.2.17}$$

$$b(k) = L(k)B(k)L(-k)^{-1} \tag{12.2.18}$$

où $a(k)$ et $a^\dagger(k)$ engendrent une algèbre ZF, $L(k)$ sont leurs opérateurs bien élevés, et $\tilde{a}(k)$, $\tilde{a}^\dagger(k)$, $b(k)$ engendrent une algèbre de bord. $B(k)$, dite matrice de réflexion, est une matrice satisfaisant

l'équation RSRS. Dans le cas où R est la matrice Yangienne, un exemple d'une telle matrice est donnée par la matrice identité $\mathbb{I}$.

Dans cette présentation, on peut relier les hiérarchies avec et sans bord, selon:

$$H_B^{(2n)} = H_{ZF}^{(2n)} + \int_{-\infty}^{\infty} dk\, a^\dagger(k) b(k) a(k) \tag{12.2.19}$$

Ainsi, les Hamiltoniens du cas avec bord sont constitués d'un terme de volume (bulk term), qui correspond à l'Hamiltonien du cas sans bord, auquel s'ajoute un terme de bord. On obtient de nouveau, à partir d'une matrice R *quelconque*, une hiérarchie intégrable de modèles avec bord dont la symétrie est l'algèbre de réflexion basée sur R.

12.3 Algèbres de Réflexion-Transmission [ERA43, ERA47]

Le cas des algèbres RT (associées à une impureté, voir ci-dessous) peut lui aussi être traité de la même manière. La notation R et T étant réservée aux générateurs associés à la réflexion et à la transmission, on notera ici $S_{12}(k_1, k_2)$ la matrice R (matrice de diffusion) de l'algèbre RT.

Une algèbre RT admet pour générateurs $A(k)$, $A^\dagger(k)$, $t(k)$ and $r(k)$ qui satisfont:

$$\begin{aligned}
A_1(k_1)A_2(k_2) &= S_{21}(k_2,k_1)A_2(k_2)A_1(k_1) && (12.3.1)\\
A_1^\dagger(k_1)A_2^\dagger(k_2) &= A_2^\dagger(k_2)A_1^\dagger(k_1)S_{21}(k_2,k_1) && (12.3.2)\\
A_1(k_1)A_2^\dagger(k_2) &= A_2^\dagger(k_2)S_{12}(k_1,k_2)A_1(k_1) + \delta(k_1-k_2)\delta_{12}\Big(1+t_1(k_1)\Big) \\
&\quad +\delta_{12}\, r_1(k_1)\delta(k_1+k_2) && (12.3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1(k_1)t_2(k_2) &= S_{21}(k_2,k_1)t_2(k_2)S_{12}(k_1,k_2)A_1(k_1) && (12.3.4)\\
A_1(k_1)r_2(k_2) &= S_{21}(k_2,k_1)r_2(k_2)S_{12}(k_1,-k_2)A_1(k_1) && (12.3.5)\\
t_1(k_1)A_2^\dagger(k_2) &= A_2^\dagger(k_2)S_{12}(k_1,k_2)t_1(k_1)S_{21}(k_2,k_1) && (12.3.6)\\
r_1(k_1)A_2^\dagger(k_2) &= A_2^\dagger(k_2)S_{12}(k_1,k_2)r_1(k_1)S_{21}(k_2,-k_1) && (12.3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12}(k_1,k_2)\,t_1(k_1)\,S_{21}(k_2,k_1)\,t_2(k_2) &= t_2(k_2)\,S_{12}(k_1,k_2)\,t_1(k_1)\,S_{21}(k_2,k_1) && (12.3.8)\\
S_{12}(k_1,k_2)\,t_1(k_1)\,S_{21}(k_2,k_1)\,r_2(k_2) &= r_2(k_2)\,S_{12}(k_1,-k_2)\,t_1(k_1)\,S_{21}(-k_2,k_1) && (12.3.9)\\
S_{12}(k_1,k_2)\,r_1(k_1)\,S_{21}(k_2,-k_1)\,r_2(k_2) &= r_2(k_2)\,S_{12}(k_1,-k_2)\,r_1(k_1)\,S_{21}(-k_2,-k_1) && (12.3.10)
\end{aligned}$$

où $r(k)$ and $t(k)$, à valeur matricielle dans l'espace auxiliaire, satisfont:

$$t(k)t(k) + r(k)r(-k) = 1 \quad ; \quad t(k)r(k) + r(k)t(-k) = 0 \tag{12.3.11}$$

Du point de vue algébrique, les relations (12.3.11) assurent l'existence d'un automorphisme idempotent donné par

$$\rho_{RT} : \begin{cases} A(k) & \mapsto \; t(k)A(k) + r(k)A(-k) \\ A^\dagger(k) & \mapsto \; A^\dagger(k)t(k) + A^\dagger(-k)r(-k) \\ r(k) & \mapsto \; r(k) \\ t(k) & \mapsto \; t(k) \end{cases} \tag{12.3.12}$$

La signification physique d'un tel automorphisme deviendra claire dans la partie suivante.

12.3.1 Représentation de Fock

La construction de l'espace de Fock des algèbres RT est très similaire à celle des algèbres de bord et utilise deux matrices $R(k)$ et $T(k)$ associée aux générateurs $r(k)$ et $t(k)$. Ces deux matrices forment une représentation de l'algèbre d'impureté, *i.e.* elles satisfont ses relations de définition (9.3.1)-(9.3.4). Elles caractérisent les différents espaces de Fock $\mathcal{F}_{RT}$ de l'algèbre RT, selon $r(k)\Omega = R(k)\Omega$ et $t(k)\Omega = T(k)\Omega$.

Le projecteur utilisé est encore une fois associé au groupe de Weyl de B_n, mais sa construction explicite est différente. La modification porte sur l'élément τ de WB_n:

$$\Big[\tau^{(n)}\varphi\Big]_{1\ldots n}(k_1,...,k_n) \;=\; T_n(k_n)\varphi_{1\ldots n}(k_1,...,k_{n-1},k_n) + R_n(k_n)\varphi_{1\ldots n}(k_1,...,k_{n-1},-k_n) \quad (12.3.13)$$

La suite de la construction est identique à celle donnée en section 12.2.1. En particulier, l'automorphisme ρ_{RT} devient une identité dans l'espace de Fock.

12.3.2 Hiérarchie associée à l'algèbre RT et lien avec l'algèbre ZF [ERA49]

On aura reconnu dans $r(k)$ et $t(k)$ les générateurs d'une algèbre d'impureté, qui est donc une sous-algèbre de l'algèbre RT. Cette sous-algèbre d'impureté est la symétrie de la hiérarchie naturelle associée à l'algèbre RT:

$$H_{RT}^{(2n)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^{2n}\, A^\dagger(k)A(k) \quad , \quad [H_{RT}^{(2n)}, H_{RT}^{(2m)}] = 0 \quad \text{et} \quad [H_{RT}^{(2n)}, r(k)] = [H_{RT}^{(2n)}, t(k)] = 0$$

Toujours en utilisant les opérateurs bien élevés $L(k)$, on construit un morphisme d'algèbre qui permet de réaliser les générateurs de l'algèbre RT en fonction de ceux de l'algèbre ZF. La sous-algèbre d'impureté est donnée par

$$t(k) = L(k)T(k)L^{-1}(k) \quad \text{et} \quad r(k) = L(k)R(k)L^{-1}(-k) \quad (12.3.14)$$

où $R(k)$ et $T(k)$ sont des matrices obéissant aux relations de définition de l'algèbre d'impureté.

Les autres générateurs de l'algèbre RT s'expriment selon:

$$A(k) \;=\; \frac{1}{2}\Big([1+t(k)]a(k) + r(k)a(-k)\Big) \quad (12.3.15)$$

$$A^\dagger(k) \;=\; \frac{1}{2}\Big(a^\dagger(k)[1+t(k)] + a^\dagger(-k)r(-k)\Big) \quad (12.3.16)$$

On montre alors que $A(k)$, $A^\dagger(k)$, $t(k)$ and $r(k)$ forment une algèbre RT.

Les Hamiltoniens s'expriment alors en terme de ceux de l'algèbre ZF:

$$H_{RT}^{(n)} = \int_{\mathbb{R}} dk\, k^n\, A^\dagger(k)A(k) = H_{ZF}^{(n)} + \int_{\mathbb{R}} dk\, k^n\, a^\dagger(k)\Big(r(k)a(-k) + t(k)a(k)\Big) \quad (12.3.17)$$

On reconnaît encore une fois l'Hamiltonien d'un système sans bord auquel est ajouté un terme d'interaction avec l'impureté. Ainsi, à nouveau, on obtient, à partir d'une matrice R *quelconque*, une hiérarchie intégrable de modèles avec impureté dont la symétrie est l'algèbre d'impureté basée sur R.

Remarque 12.3.1 *Les relations d'échange de l'algèbre d'impureté impliquent que dans la construction précédente, on peut toujours prendre* $T(k) = \mathbb{I}$*, alors que* $R(k) = \mathbb{I}$ *dépend du type de matrice* R *considérée. Cependant, dans les deux cas, les relations d'unitarité impliquent alors* $R(k) = 0$ *ou* $T(k) = 0$ *(respectivement). La construction conduit alors aux cas particuliers d'algèbre de réflexion ou d'algèbre de transmission. Pour obtenir une algèbre d'impureté dans toute sa splendeur, il faut prendre des matrices* $R(k)$ *et* $T(k)$ *effectivement non-triviales.*

Il existe toutefois un cas "quasi-trivial", lorsque la dimension de l'espace auxiliaire est paire et que la matrice S *possède des propriétés supplémentaires, telle que* $S_{12}(k_1, k_2)\, S_{21}(k_2, -k_1) = S_{12}(k_1, -k_2)\, S_{21}(-k_2, -k_1)$ *Il est fournit par*

$$R(k) = \mu(k)\cos(\theta(k))\,\mathbb{I}_{2n} \quad \textit{et} \quad T(k) = \sin(\theta(k)) \begin{pmatrix} 0 & \mu(k)\mathbb{I}_n \\ \mu(-k)\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

où $\theta(k)$ *est une fonction impaire et* $\mu(k)\mu(-k) = 1$*, ces conditions assurant que les relations d'unitarité sont satisfaites. Bien que paraissant trivial, cet exemple joue un rôle important au niveau physique (cf partie suivante).*

Partie IV

Systèmes intégrables

Chapitre 13

Généralités

On peut dire que l'idée de base des systèmes intégrables est d'utiliser au maximum les structures mathématiques sous-jacentes d'un problème physique pour le résoudre. Ce point de vue remonte (au niveau classique) à Liouville [129, 167] et sa notion d'intégrabilité: la construction des variables action-angle permet de résoudre complètement le système concerné par la connaissance de ses intégrales du mouvement. C'est donc la connaissance de quantités conservées (en nombre suffisant) qui va assurer la résolution du système.

Dans le cas d'un système de dimension infinie, le problème devient plus délicat, mais l'existence d'un nombre infini (dénombrable) de quantités conservées est encore appelé l'intégrabilité (au sens de Liouville). Bien sûr, l'intégrabilité n'assure plus dans ce cas la résolution automatique du système, mais elle permet d'obtenir de nombreuses informations physiques. la résolution complète du système reste possible, en utilisant par exemple la méthode de diffusion inverse [101, 106, 173], qui est l'équivalent dans le cas infini de la transformation en variables action-angle. Cependant, elle fait appel à de lourds outils mathématiques (paire de Lax [157], matrice r, etc...), pas toujours disponibles suivant le modèle, et sur lesquels nous reviendrons.

Le problème se complexifie plus encore lorsqu'on aborde les versions quantiques des modèles. Deux approches essentielles se dégagent: dans une première approche, on cherche à quantifier les méthodes obtenues dans le cas classique des systèmes infinis (méthode de diffusion inverse quantique, par exemple voir [81, 82]), alors que dans l'autre on réduit d'abord la dimension du modèle (par discrétisation) pour le traiter directement au niveau quantique et prendre ensuite des limites du continu (Ansatz de Bethe par exemple). Les deux approches sont étroitement liées dans leur méthodologie: par exemple, dans l'équation de Schrödinger non-linéaire, que l'on peut *complètement* résoudre dans l'approche de diffusion inverse (quantique), certains résultats sont obtenus par discrétisation puis par passage au continu; réciproquement, dans le modèle XXZ, qui est un modèle sur réseau dont on obtient l'énergie du fondamental et des premiers excités par les équations (de l'Ansatz) de Bethe, c'est uniquement dans la limite thermodynamique que l'on peut résoudre ces équations.

D'une façon générale, ce qu'on cherche à mettre en évidence est une riche structure mathématique, telle qu'une algèbre de (quasi-)Hopf. Par exemple, c'est une algèbre de Hopf qui apparaît dans le traitement en paire de Lax. C'est aussi grâce au coproduit des algèbres de Hopf que l'on peut construire des (nouveaux) modèles sur réseau ayant ces algèbres comme symétrie.

Chapitre 14

Systèmes intégrables avec impureté

Les systèmes intégrables de théorie des champs possèdant des bords ou des impuretés font l'objet de nombreuses études. Dans le cas d'un bord, l'intégrabilité et la factorisation conduisent, suivant les travaux de Cherednik [44] à la notion d'opérateur de bord [97, 108]. Ce dernier mène naturellement à la notion d'algèbre de bord [165], une généralisation de l'algèbre ZF qui préserve la notion d'intégrabilité et l'unitarité de la matrice de diffusion du système. C'est dans le cadre général de l'intégrabilité, de la factorisation et de l'unitarité de la matrice de diffusion que les algèbres RT sont introduites pour traiter des systèmes avec impureté. Une autre approche peut être trouvée dans [51, 97], mais ses conclusions sont plutôt négatives [41] et le cadre ne semble pas adapaté pour préserver l'unitarité de la matrice S. Des exemples d'impuretés purement transmitives ont été donnés dans [32, 33, 152]

14.1 Champ libre et impureté

À titre d'exemple pour motiver l'introduction des algèbres RT, nous traitons ici le cas d'un champ libre interagissant avec une impureté (ou défaut) situé à l'origine. Un exemple plus complexe sera donné par l'équation de Schrödinger non-linéaire, dans le chapitre suivant.

14.1.1 Présentation du problème

Le point de départ est l'Hamiltonien libre

$$H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \tag{14.1.1}$$

défini sur un domaine de $L^2(\mathbb{R}, dx)$ formé des fonctions deux fois différentiables sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cet Hamiltonien décrit une particule bosonique (de masse unité) et ses extensions auto-adjointes sur $\mathbb{R}$ vont décrire les différents types d'impuretés "intégrables" que l'on peut mettre en 0. Ces extensions ont été étudiées [30, 45, 214], et elles peuvent être décrites par les conditions en 0_+ et 0_- que doivent satisfaire les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$: elles sont classées par l'ensemble

$$\Gamma = \{a, ..., d \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{C} : ad - bc = 1, \overline{\omega}\omega = 1, \}, \tag{14.1.2}$$

correspondant aux conditions:

$$\begin{pmatrix} \varphi(t,0_+) \\ \partial_x\varphi(t,0_+) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t,0_-) \\ \partial_x\varphi(t,0_-) \end{pmatrix}, \tag{14.1.3}$$

Afin d'éviter la présence d'états liés, nous ne considérerons que le sous-ensemble

$$\Gamma_0 = \begin{cases} a+d+\sqrt{(a-d)^2+4} \le 0\,, & b<0\,, \\ c(a+d)^{-1} \ge 0\,, & b=0\,, \\ a+d-\sqrt{(a-d)^2+4} \ge 0\,, & b>0\,. \end{cases} \tag{14.1.4}$$

correspondant à un domaine $\mathcal{D}_0 \subset L^2(\mathbb{R}, dx)$ satisfaisant (14.1.3). Une base orthonormée $\Psi = \{\psi_k^{\pm}(x,t)\,,\ k \in \mathbb{R}_{\mp}\}$ de $\mathcal{D}_0$ est fournie par

$$\psi_k^+(x) = \theta(-x)T_-^+(k)e^{ikx} + \theta(x)\left[e^{ikx} + R_+^+(-k)e^{-ikx}\right], \quad k<0\,, \tag{14.1.5}$$

$$\psi_k^-(x) = \theta(x)T_+^-(k)e^{ikx} + \theta(-x)\left[e^{ikx} + R_-^-(-k)e^{-ikx}\right], \quad k>0\,, \tag{14.1.6}$$

où $\theta(k)$ est la fonction de Heaviside et

$$R_+^+(k) = \frac{bk^2+i(a-d)k+c}{bk^2+i(a+d)k-c}\,, \qquad T_+^-(k) = \frac{2i\omega k}{bk^2+i(a+d)k-c}\,, \tag{14.1.7}$$

$$R_-^-(k) = \frac{bk^2+i(a-d)k+c}{bk^2-i(a+d)k-c}\,, \qquad T_-^+(k) = \frac{-2i\bar{\omega}k}{bk^2-i(a+d)k-c}\,, \tag{14.1.8}$$

sont les coefficients de réflexion et de transmission par l'impureté. On peut vérifier par calcul direct que ces fonctions vérifient les conditions aux limites (14.1.3) et sont fonctions propres de l'Hamiltonien (d'énergie $E(k) = \frac{1}{2}k^2$).

La famille $\bar{\Psi} = \{\overline{\psi}_{-k}^{\pm}(x) \,:\, k \in \mathbb{R}\}$, où la barre dénote la conjugaison complexe, est aussi orthonormale. Les systèmes Ψ (respectivement $\bar{\Psi}$) représentent des ondes entrantes (respectivement sortantes) asymptotiques se dirigeant vers (depuis) l'impureté. On prend donc comme base d'états entrants et sortants, les états

$$|k\rangle^{\text{in}} = \psi_k^+(x) + \psi_k^-(x) \quad \text{et} \quad |k\rangle^{\text{out}} = \overline{\psi}_{-k}^{\,+}(x) + \overline{\psi}_{-k}^{\,-}(x)\,. \tag{14.1.9}$$

En conséquence, à partir de l'opérateur de diffusion à une particule défini par $S^{(1)}\,|k\rangle^{\text{out}} = |k\rangle^{\text{in}}$, les amplitudes de diffusion sont données par

$$\begin{aligned} {}^{\text{out}}\langle p|k\rangle^{\text{in}} = {}^{\text{out}}\langle p|S^{(1)}|k\rangle^{\text{out}} &= [\theta(p)T(p)+\theta(-p)T(-p)]2\pi\delta(p-k) \\ &\quad +[\theta(p)R(p)+\theta(-p)R(-p)]2\pi\delta(p+k)\,. \end{aligned} \tag{14.1.10}$$

Cette forme confirme la signification physique de T et R en tant qu'amplitudes de transmission et de réflexion (par l'impureté).

On remarquera que, bien que les particules n'interagissent pas entre elles, l'amplitude de diffusion n'est pas triviale du fait de la présence de l'impureté qui, elle, interagit avec les particules. On notera aussi que par construction, l'opérateur $S^{(1)}$ est unitaire, comme il se doit.

La solution complète du champ libre se développe sur la base des $\psi_k^{\pm}(x)$:

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} dk \left\{ \beta_-(k)\, \psi_k^-(x) + \beta_+(k)\, \psi_k^+(x) \right\} \tag{14.1.11}$$

Cette solution peut se réécrire sur la base des ondes planes e^{ikx}:

$$\phi(x) = \theta(-x) \int_{\mathbb{R}} dk\, \lambda_-(k)\, e^{ikx} + \theta(x) \int_{\mathbb{R}} dk\, \lambda_+(k)\, e^{ikx} \tag{14.1.12}$$

où les fonctions $\lambda_\pm$ sont construites sur $\beta_\pm$. De par leur construction, ces fonctions satisfont:

$$\lambda_\epsilon(k) = R_\epsilon^\epsilon(k)\, \lambda_\epsilon(-k) + T_\epsilon^{-\epsilon}(k)\, \lambda_{-\epsilon}(k) \tag{14.1.13}$$

qui peut être vu comme l'équivalence entre un état asymptotique et une superposition d'un état transmis et d'un état réfléchi. Cette égalité est aussi à rapprocher de l'automorphisme ρ_{RT} introduit en section 12.3, et qui en est l'équivalent quantique.

14.1.2 Introduction de l'algèbre RT [ERA47]

L'idée de base est de présenter un cadre algébrique qui permette de rendre compte des calculs précédents, à la manière dont l'algèbre ZF prend en charge les diffusions dans le problème sans bord. L'algèbre recherchée est donc une généralisation de cette algèbre ZF qui inclut les interactions avec l'impureté.

L'algèbre concernée a été introduite précédemment: c'est l'algèbre RT de la section 12.3, pour laquelle on fait ici $S_{12}(k_1, k_2) = \mathbb{I}$, les particules n'interagissant pas entre elles dans cet exemple. Du point de vue algébrique, l'émergence de l'algèbre RT est assez naturelle: les opérateurs $a(k)$ (resp. $a^\dagger(k)$) représentant des opérateurs annihilation (resp. création) d'états asymptotiques (*i.e.* loin de l'impureté), leur échange ne doit pas être modifié par la présence de l'impureté, d'où la forme correspondant à une algèbre d'oscillateurs. Par contre, la présence *doit* intervenir dans l'échange d'un type avec l'autre, d'où l'émergence des opérateurs $r(k)$ et $t(k)$. Le reste des relations peut être obtenu en demandant l'associativité du produit (pour $a(k_1)a(k_2)a^\dagger(k_3)$ et $a(k_1)a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_3)$), de même que l'équation de YB est obtenue en demandant l'associativité du produit de trois opérateurs création (ou annihilation).

Une fois le cadre algébrique mis en place, on identifie les états entrants et sortants du modèle physique grâce à une représentation de Fock de l'algèbre RT, ainsi qu'on l'a introduite dans la section 12.3.1. Ici, la présence des matrices R et T définissant l'espace de Fock prend une justification physique: ce sont les coefficients de transmission et de réflexion du modèle, tels que présentés dans la section 14.1.1.

14.2 Algèbres RT [ERA43, ERA47]

Le cadre algébrique mis en place dans le cas d'un champ libre peut se généraliser à un système intégrable quelconque. L'idée de base est "d'étendre" l'algèbre ZF de manière à inclure les générateurs

traduisant l'interaction (réflexion et transmission) avec l'impureté. De l'étude du champ libre et de la définition de l'algèbre ZF, il est naturel de considérer un premier jeu de relations:

$$A_1(k_1)A_2(k_2) = S_{21}(k_2,k_1)A_2(k_2)A_1(k_1) \quad (14.2.1)$$

$$A_1^\dagger(k_1)A_2^\dagger(k_2) = A_2^\dagger(k_2)A_1^\dagger(k_1)S_{21}(k_2,k_1) \quad (14.2.2)$$

$$A_1(k_1)A_2^\dagger(k_2) = A_2^\dagger(k_2)S_{12}(k_1,k_2)A_1(k_1) + \delta(k_1-k_2)\delta_{12}\Big(1+t_1(k_1)\Big) + \delta_{12}\, r_1(k_1)\delta(k_1+k_2) \quad (14.2.3)$$

L'interprétation physique de telles relations est claire: les deux premières relations traduisent les interactions d'états asymptotiques (donc loin de l'impureté), et sont similaires à celles de l'algèbre ZF. Par contre, la relation faisant intervenir un opérateur création (*i.e.* à $t=-\infty$) et un opérateur annihilation (*i.e.* à $t=+\infty$) doit faire apparaître l'interaction avec l'impureté (comme dans le cas du champ libre).

Une fois ces relations postulées, les autres relations (12.3.4)-(12.3.10), données dans la section 12.3, apparaissent comme assurant l'associativité du produit. Plus précisément, l'associativité des produits $A_1(k_1)A_2(k_2)A_3^\dagger(k_3)$ et $A_1(k_1)A_2^\dagger(k_2)A_3^\dagger(k_3)$ est garantie par les relations (12.3.4)-(12.3.7), tandis que les relations (12.3.8)-(12.3.10) assurent l'associativité de $A_1(k_1)t_2(k_2)A_3^\dagger(k_3)$ et $A_1(k_1)r_2(k_2)A_3^\dagger(k_3)$.

On notera que ces algèbres sont associées à une hiérarchie d'Hamiltoniens commutant de plus avec les générateurs $r(k)$ et $t(k)$ (cf section 12.3), ce qui justifie l'aspect "intégrable" de ces algèbres.

Un cas particulier des algèbres RT est donné par

$$t(k) = \begin{pmatrix} 0 & t_+(k) \\ t_-(k) & 0 \end{pmatrix} \;;\; r(k) = \begin{pmatrix} r_+(k) & 0 \\ 0 & r_-(k) \end{pmatrix} \quad (14.2.4)$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} a_+(k) \\ a_-(k) \end{pmatrix} \;;\; A^\dagger(k) = \Big(a_+^\dagger(k); a_-^\dagger(k)\Big) \quad (14.2.5)$$

$$S(k_1,k_2) = \begin{pmatrix} s_{12}(k_1-k_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{12}(k_1+k_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{12}(-k_1-k_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{12}(k_2-k_1) \end{pmatrix} \quad (14.2.6)$$

Pour ce type d'algèbres RT, on peut interpréter les systèmes $(a_+(k), a_+^\dagger(k), r_+(k), s_{12}(k_1-k_2))$ d'une part et $(a_-(k), a_-^\dagger(k), r_-(k), s_{12}(k_2-k_1))$ d'autre part comme des systèmes réflexifs situés de part et d'autre de l'impureté, et interagissant entre eux par la transmission $t_\pm(k)$. Cependant, il faut garder en mémoire que les systèmes sont définis sur toute la ligne, et à ce titre interagissent (via la matrice $s(k_1+k_2)$). Cela peut être vu aussi dans les relations d'unitarité

$$r_\pm(k)r_\pm(-k) + t_\pm(k)t_\pm(k) = 1 \quad \text{et} \quad r_\pm(k)t_\pm(-k) + t_\pm(k)r_\mp(k) = 0$$

qui diffèrent de celle donnée pour une algèbre de bord.

Cette interaction est naturelle au vu de l'automorphisme ρ_{RT}, qui traduit l'équivalence entre un état $a^\dagger(k)$ et la superposition d'un état réfléchi et d'un état transmis. De par cette équivalence, on ne peut donc pas séparer les deux systèmes: on a bien un seul système avec une impureté.

On remarquera aussi que du fait de l'impureté (située à l'origine), l'invariance sous translation ne se justifie pas pour le système complet, et donc la matrice $S(k_1, k_2)$ dépend (en toute généralité) séparément de deux paramètres spectraux. Par contre, pour les interactions situées purement d'un côté de l'impureté, il peut paraître naturel de demander une telle invariance. C'est ce qui se passe dans le cas particulier (14.2.6), où les deux "sous-systèmes" possèdent une matrice $s(k_1 - k_2)$, invariante sous translation.

Un exemple de système intégrable avec impureté et matrice S non triviale sera donné plus loin dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-linéaire.

Chapitre 15

Équation de Schrödinger non-linéaire à 2 dimensions

L'équation de Schrödinger non-linéaire à deux dimensions est une des bases des études des systèmes intégrables. C'est dans ce cadre que les diverses techniques développées pour résoudre ces systèmes ont vu le jour. Du point de vue physique, cette équation correspond à la seconde quantification d'un gaz unidimensionnel de bosons ou de fermions dont l'interaction est de type delta. Elle intervient aussi en optique non-linéaire.

15.1 Équation de Schrödinger sur une ligne

Le modèle de Schrödinger non-linéaire N-vectoriel (NLS) peut être décrit par un champ $\Phi(x,t)$ à N composantes $\varphi_j(x,t)$, $j=1,\ldots,N$ satisfaisant

$$(i\partial_t+\partial_x^2)\Phi(x,t)=2g\,\Phi^\dagger(x,t)\Phi(x,t)\,\Phi(x,t)\,,\ g>0 \quad \text{et} \quad \Phi(x,t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,t)\\ \vdots\\ \varphi_N(x,t)\end{pmatrix} \tag{15.1.1}$$

et la condition aux limites

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Phi(x,t)=0\,. \tag{15.1.2}$$

Cette équation peut être déduite de l'évolution de $\Phi(x,t)$ par l'Hamiltonien

$$H=\int dx\left(\frac{\partial\varphi^{\dagger j}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}-g\varphi^{\dagger k}\varphi^{\dagger j}\varphi_k\varphi_j\right), \tag{15.1.3}$$

On choisit ici de ne traiter que le cas d'une constante de couplage $g>0$: dans le cas $g<0$, il faut prendre en compte un état lié, que la présentation algébrique (quantique) ci-dessous ne prend pas en compte.

La solution classique de ce modèle est connue depuis longtemps [208]: elle prend la forme d'une série dans la constante de couplage g. La version quantique peut se résoudre essentiellement par deux approches: soit en utilisant la méthode diffusion inverse quantique (QISM, Quantum Inverse Scattering Method) [80, 201, 202, 220, 228], ce qui conduit aux paires de Lax quantiques, soit en

"quantifiant" la série définissant la solution classique [46,47,119,229], ce qui conduit naturellement aux algèbres ZF. Ces deux approches ne sont pas décorrélées, et, par exemple, l'algèbre ZF apparaît aussi dans la première approche. Nous présentons ici la deuxième approche, la méthode de diffusion inverse étant présentée dans le cas supersymétrique (section 15.2).

Le but est donc de quantifier la solution de Rosales, qui prend la forme d'une série en la constante de couplage g:

$$\varphi_i(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n \varphi_i^{(n)}(x,t)\,, \tag{15.1.4}$$

avec

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{(n)}(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} d^n\vec{p}\, d^{n+1}\vec{q}\, \bar{\lambda}^{k_1}(p_1)\cdots\bar{\lambda}^{k_n}(p_n)\lambda_{k_n}(q_n)\cdots\lambda_{k_1}(q_1)\lambda_i(q_0)\frac{e^{i\Omega_n(x,t;\vec{p},\vec{q})}}{Q_n(\vec{p},\vec{q},0)} \\
\Omega_n(x,t;\vec{p},\vec{q}) &= \sum_{j=0}^{n}(q_j x - q_j^2 t) - \sum_{i=1}^{n}(p_i x - p_i^2 t) \qquad (15.1.5)\\
Q_n(\vec{p},\vec{q},\varepsilon) &= \prod_{i=1}^{n}(p_i - q_{i-1} + i\varepsilon)(p_i - q_i + i\varepsilon)\,; \qquad d^n\vec{p}\, d^{n+1}\vec{q} = \prod_{\substack{i=1\\ j=0}}^{n}\frac{dp_i}{2\pi}\frac{dq_j}{2\pi}
\end{aligned}$$

où on note $\vec{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ et $\vec{q} = (q_0,\ldots,q_n)$. $\lambda_j(q)$ (et leur conjuguée complexe $\bar{\lambda}_j(p)$) sont des fonctions quelconques, telles que la série et l'intégrale ci-dessus convergent (par exemple, une fonction de Schwarz). On notera au passage que le développement en série peut aussi être vu comme un développement sur les ondes planes $\exp(ikx - ik^2t)$, solutions de l'équation libre ($g = 0$).

Comme une algèbre d'oscillateurs permet de quantifier un champ libre développé sur les ondes planes, il est donc naturel de chercher une déformation de cette algèbre pour quantifier la série ci-dessus. C'est ici que l'algèbre ZF entre en jeu. De fait, si on introduit l'algèbre ZF (de générateurs $a_j(k)$ et $a_j^\dagger(k)$) associée à la matrice R du Yangien, on peut montrer que la série de Rosales, où on remplace formellement $\lambda_j(q)$ par $a_j(q)$ et $\bar{\lambda}_j(p)$ par $a_j^\dagger(p)$, reste une solution au niveau quantique (à des régularisations en $i\epsilon$ près). Plus précisément, on peut montrer que dans l'espace de Fock de l'algèbre ZF (tel que construit dans la section 12.1.2) les champs $\Phi(x,t)$ et $\Phi^\dagger(x,t)$ ont des commutateurs canoniques,

$$[\Phi(x,t)\,,\,\Phi(y,t)] = 0 = [\Phi^\dagger(x,t)\,,\,\Phi^\dagger(y,t)] \quad \text{et} \quad [\Phi(x,t)\,,\,\Phi^\dagger(y,t)] = i\delta(x-y)\mathbb{I}\,,\ \ \forall\, x,y$$

et satisfont une version quantique de l'équation NLS. Ainsi l'algèbre de ZF sert de cadre algébrique à la quantification de NLS. Elle permet de calculer les fonctions de corrélation du modèle de façon algébrique en ne se servant que des relations d'échange de cette algèbre. À titre d'exemple, la fonction de corrélation à deux points peut facilement se calculer, elle prend la forme

$$\langle\Omega, \Phi_1(t_1,x_1)\Phi_2^\dagger(t_2,x_2)\Omega\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ik^2t_{12}}e^{ikx_{12}}\ \mathbb{I} \tag{15.1.6}$$

où Ω est le vide de l'espace de Fock.

On notera que la hiérarchie quantique de NLS prend une forme particulièrement simple lorsqu'on l'exprime en fonction des générateurs de l'algèbre ZF. Elle est donnée par

$$H_n = \int_{\mathbb{R}} dk\, k^n\, a^\dagger(k)a(k)\,,\ n = 0,1,2,\ldots$$

H_0, H_1 et H_2 sont respectivement les opérateurs nombre de particules, impulsion et Hamiltonien de l'équation de NLS. On peut à ce titre vérifier que les (versions quantiques des) champs (15.1.5) ont une évolution temporelle donnée par H_2. Le lien avec les Hamiltoniens construits dans l'étude des opérateurs bien élevés de la section 12.1.3 est assez claire: nous allons y revenir sous peu.

L'émergence de la matrice R du Yangien $Y(N)$ amène naturellement à se poser la question du rôle du Yangien dans NLS. Effectivement, on peut montrer (de différentes façons) que le Yangien est symétrie de la hiérarchie quantique du modèle [184,201,202]. On verra plus loin comment cela peut être démontré en utilisant une paire de Lax. Les solutions de l'équation de NLS quantique s'exprimant en fonction de l'algèbre ZF, il est alors légitime de chercher une construction des générateurs du Yangien $Y(N)$ en fonction de cette même algèbre. Une première construction **[ERA29]** (la plus naturelle à priori et aussi la première chronologiquement) se fait dans la base des Q_n^a, puisque seuls les niveaux $n = 0, 1$ sont nécessaires dans cette présentation (cf section 7.1.1). Les générateurs de $Y(N)$ se présentent comme des séries dans les opérateurs $a(k)$ et $a^\dagger(k)$, dont on peut vérifier directement qu'elles satisfont aux relations de définition (7.1.1)-(7.1.4). Bien sûr, on peut aussi montrer que ces séries commutent avec les Hamiltoniens H_n, confirmant la symétrie Yangienne de la hiérarchie.

Le calcul précédent peut être "court-circuité" lorsqu'on considère les opérateurs bien élevés. En effet, une fois identifié l'Hamiltonien H_2 de l'équation NLS, le cadre mis en place pour les opérateurs bien élevés permet immédiatement de conclure que ces opérateurs, qui engendrent le Yangien $Y(N)$, sont une symétrie de toute la hiérarchie **[ERA36].**

Remarque 15.1.1 *Le Yangien commutant avec la hiérarchie NLS, on peut considérer la restriction des opérateurs bien élevés aux sous-espaces propres $\mathcal{H}_n$ du nombre de particule H_0. Sur ces sous-espaces, la série définissant les opérateurs bien élevés se tronque au niveau n, si bien que l'on obtient sur $\mathcal{H}_n$ une troncation du Yangien $Y(N)$. On reconnaît dans cette construction, celle introduite pour les algèbres $\mathcal{W}(sl(Nn), N\,sl_n)$ finies (section 7.2). Ainsi, l'étude des symétries de NLS fait apparaître de manière naturelle les algèbres $\mathcal{W}$ finies comme troncation du Yangien.*

15.2 Cas super-symétrique [ERA46, ERA50]

Avec mon étudiant en thèse V. Caudrelier, nous avons étudié et résolu l'équation de super-Schrödinger non-linéaire, tant au niveau classique qu'au niveau quantique. Bien que ne possédant pas une supersymétrie au sens usuel du terme, elle correspond à un système d'équations pour un boson et un fermion, tout en restant intégrable. Cette équation peut aussi être vue comme une quantification d'un gaz mélangeant bosons et fermions et interagissant ponctuellement.

La forme de l'équation de super-Schrödinger non-linéaire prend formellement la forme (15.1.1), avec ici $\Phi(x,t)$ un vecteur de taille $K = M+N$, dont les M premières composantes sont bosoniques alors que les N dernières sont fermioniques. Ils satisfont des crochets de Poisson (ou des commutateurs au niveau quantique) qui sont $\mathbb{Z}_2$-gradués. Ainsi que nous l'avons écrit, bien que le cas de super-Schrödinger puisse lui aussi se traiter en formalisme de superalgèbre ZF, nous présentons ici un formalisme en paire de Lax (qui aurait pu, lui, être utilisé pour l'équation de Schrödinger non supersymétrique).

Le point de départ du formalisme des paires de Lax est la linéarisation d'un système par l'utilisation de matrices. On définit:

$$L(\lambda;x) = \frac{i\lambda}{2}\Sigma + \Omega(x) \quad \text{avec} \quad \Sigma = \mathbb{I}_{K+1,K+1} - 2E_{K+1,K+1} \tag{15.2.1}$$

$$\text{et} \qquad \Omega(x) = i\sqrt{g}\sum_{j=1}^{K}\left(\varphi_j(x)E_{j,K+1} - \varphi_j^\dagger(x)E_{K+1,j}\right) \tag{15.2.2}$$

$$M(\lambda;x,t) = -\frac{i\lambda^2}{2}\Sigma + ig\,\Omega(x,t)\Sigma\Omega(x,t) - \sqrt{g}\,(\Sigma\partial_x + i\lambda)\,\Omega(x,t) \tag{15.2.3}$$

Le paramètre spectral λ apparaît ici comme un paramètre auxiliaire qui va permettre de résoudre le système. Les matrices élémentaires E_{jk} sont $\mathbb{Z}_2$-graduées, avec $[E_{jk}] = [j] + [k]$, $[j] = 0$ pour $1 \le j \le M$, $[K+1] = 0$, et $[j] = 1$ pour $M < j \le K$. Dans cette convention, la superalgèbre $g\ell(M+1|N)$ prend une forme inhabituelle

$$\left(\begin{array}{c|c|c} M\times M & & M\times 1 \\ \hline & N\times N & \\ \hline 1\times M & & 1\times 1 \end{array}\right)$$

où la taille des sous-matrices à caractère bosonique (engendrant $g\ell(M+1)\oplus g\ell(N)$) a été indiquée.

La paire de Lax est une reformulation des équations du mouvement comme la commutativité des opérateurs différentiels

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - L(\lambda;x,t), \frac{\partial}{\partial t} - M(\lambda;x,t)\right] = 0 \tag{15.2.4}$$

ce qui revient à demander la compatibilité du système auxiliaire

$$\partial_x u = L(\lambda;x,t)\,u \quad \text{et} \quad \partial_t u = M(\lambda;x,t)\,u \tag{15.2.5}$$

La condition (15.2.4) est équivalente à

$$\left(i\Sigma\partial_t + \partial_x^2\right)\Omega(x,t) = 2g\,|\Phi(x,t)|^2\,\Omega(x,t) \tag{15.2.6}$$

ce qui revient effectivement aux équations du mouvement de $\Phi(x,t)$ et $\Phi^\dagger(x,t)$. On notera que pour obtenir l'équation de super-Schrödinger en dimension $K = M+N$, on utilise des matrices de taille $(K+1)\times(K+1)$.

On associe au système la matrice de transition définie par l'équation

$$\partial_x T(\lambda;x,y) = L(\lambda;x)T(\lambda;x,y),\ x > y \tag{15.2.7}$$

et la condition initiale $T(\lambda;x,x) = \mathbb{I}$. Les démonstrations (que nous ne reproduirons pas ici) s'appuient alors sur l'idée que deux quantités sont égales si et seulement si elles satisfont la même équation différentielle (du premier ordre), et la même condition initiale.

La matrice de monodromie satisfait l'équation

$$T(\lambda;x,y) = E(\lambda;x-y) + E(\lambda;x)\int_y^x dz\,\Omega(z)E(\lambda;z)T(\lambda;z,y) \tag{15.2.8}$$

où on a introduit

$$E(\lambda;x) = \exp\left(\frac{ix\lambda}{2}\Sigma\right) = e^{ix\lambda/2}\,\mathbb{I}_{K+1} + \left(e^{-ix\lambda/2} - e^{ix\lambda/2}\right)E_{K+1,K+1} \tag{15.2.9}$$

ce qui montre que la matrice de monodromie

$$T(\lambda) \;=\; \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to-\infty}} E(\lambda;-x)T(\lambda;x,y)E(\lambda;y) \tag{15.2.10}$$

est bien définie. Les crochets de Poisson canoniques des composantes de $\Phi(x,t)$ impliquent (après quelques étapes)

$$\{T_1(\lambda), T_2(\mu)\} = r_+(\lambda-\mu)T(\lambda)\otimes T(\mu) - T(\lambda)\otimes T(\mu)r_-(\lambda-\mu) \tag{15.2.11}$$

avec

$$\begin{aligned}
r_+(\lambda-\mu) &= \frac{g}{\lambda-\mu}\,(P_{12} + E_{K+1,K+1}\otimes E_{K+1,K+1}) + i\pi g\delta(\lambda-\mu)\,(\pi_{12}-\pi_{21})\\
r_-(\lambda-\mu) &= \frac{g}{\lambda-\mu}\,(P_{12} + E_{K+1,K+1}\otimes E_{K+1,K+1}) - i\pi g\delta(\lambda-\mu)\,(\pi_{12}-\pi_{21})\\
\pi_{12} &= \sum_{j=1}^{K} E_{j,K+1}\otimes E_{K+1,j}
\end{aligned}$$

où P_{12} est la matrice de super-permutation dans l'espace des matrices $K\times K$.

La matrice de monodromie contient toutes les informations physiques du modèle. Ainsi, si on introduit $t(\lambda)$, la sous-matrice $K\times K$ de $T(\lambda)$ correspondant aux indices $i,j < K+1$, et $D(\lambda) = T_{K+1,K+1}(\lambda)$, on a

$$\{t_1(\lambda), t_2(\mu)\} \;=\; \frac{g}{\lambda-\mu}\,[P_{12}\,,\, t(\lambda)\otimes t(\mu)] \tag{15.2.12}$$

$$\{D(\lambda), D(\mu)\} \;=\; 0 \tag{15.2.13}$$

$$\{D(\lambda), t(\mu)\} \;=\; 0 \tag{15.2.14}$$

On reconnaît dans la relation (15.2.12) une version classique du super-Yangien $Y(g\ell(M|N))$. Les crochets de Poisson (15.2.13) montrent que $D(\lambda)$ correspond à une hiérarchie d'Hamiltoniens commutants, dont la symétrie est le super-Yangien, comme l'indique (15.2.14).

Les premiers Hamiltoniens engendrés par $D(\lambda)$

$$D^{(1)} \;=\; igN \quad\text{avec}\quad N = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Phi^\dagger(x)\,\Phi(x) \quad \text{(nombre de particules)} \tag{15.2.15}$$

$$D^{(2)} \;=\; -\frac{1}{2}g^2N^2 + gP \quad\text{avec}\quad P = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Phi^\dagger(x)\,\partial\Phi(x) \quad \text{(impulsion)} \tag{15.2.16}$$

$$D^{(3)} \;=\; -\frac{ig^3}{6}N^3 + ig^2\,NP + igH \quad\text{avec} \tag{15.2.17}$$

$$H \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\partial\Phi^\dagger(x)\,\partial\Phi(x) + g\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\left(\Phi^\dagger(x)\,\Phi(x)\right)^2 \tag{15.2.18}$$

montrent qu'on a bien la hiérarchie associée à super-Schrödinger.

On aura remarqué que la construction précédente repose uniquement sur $L(\lambda;x)$ (si bien qu'à strictement parler, on suit plutôt le schéma de Zakharov-Shabbat [241] que le formalisme de paire de Lax). L'élément $M(\lambda;x)$, lui, est associé à l'évolution temporelle du système. Ainsi, les matrices de transition et de monodromie évoluent selon

$$\begin{aligned} \partial_t T(\lambda;x,y,t) &= M(\lambda;x,t)T(\lambda;x,y,t) - T(\lambda;x,y,t)M(\lambda;y,t) && (15.2.19)\\ \partial_t T(\lambda;t) &= -\frac{i\lambda^2}{2}\,[\Sigma, T(\lambda;t)] && (15.2.20) \end{aligned}$$

Pour conclure cette partie classique, notons que la dernière équation implique

$$T(\lambda;x,y,t) = e^{it\lambda^2\Sigma/2}\,T(\lambda;x,y,0)\,e^{-it\lambda^2\Sigma/2} \qquad (15.2.21)$$

en accord avec la formulation en algèbre ZF de l'Hamiltonien.

La même présentation peut être faite au niveau quantique, avec la différence notable qu'il faut utiliser un ordre normal sur les champs. Les calculs, bien que techniquement plus délicats, sont essentiellement identiques. Bien sûr, de nouveaux termes apparaissent (dus à l'ordre normal), et on calcule des commutateurs au lieu de crochets de Poisson. À titre d'exemple, la version quantique de la matrice de monodromie satisfait les relations de commutations

$$\mathcal{R}^{+}_{12}(\lambda-\mu)\mathcal{T}_1(\lambda)\mathcal{T}_2(\mu) = \mathcal{T}_1(\mu)\mathcal{T}_2(\lambda)\mathcal{R}^{-}_{12}(\lambda-\mu) \qquad (15.2.22)$$

où $\mathcal{T}(\lambda)$ est la version quantique de la matrice de monodromie et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\pm}_{12}(\lambda-\mu) &= \frac{-ig}{(\lambda-\mu)}\,\mathbb{I}_K\otimes\mathbb{I}_K + P_{12} + \pi_{21} + \frac{(\lambda-\mu)^2+g^2}{(\lambda-\mu+i\varepsilon)^2}\,\pi_{12}\\ &\quad + \frac{\lambda-\mu-ig}{\lambda-\mu}\,E_{K+1,K+1}\otimes E_{K+1,K+1}\\ &\quad \pm\pi g\delta(\lambda-\mu)\Big(\mathbb{I}_K\otimes E_{K+1,K+1} - E_{K+1,K+1}\otimes\mathbb{I}_K\Big) \end{aligned}$$

Comme dans le cas classique, les entrées de la matrice de monodromie $(i,j=1,\ldots,K)$:

$$t_{ij}(\lambda) = (\mathcal{T}(\lambda))_{ij} \quad \text{et} \quad D(\lambda) = (\mathcal{T}(\lambda))_{K+1,K+1} \qquad (15.2.23)$$

engendrent la hiérarchie de super-Schrödinger et sa symétrie super-Yangienne:

$$\begin{aligned} \Big[\!\Big[t_{ij}(\lambda), t_{kl}(\mu)\Big]\!\Big] &= ig\,(-1)^{[j][k]+[i]([j]+[k])}\,\frac{t_{kj}(\lambda)t_{il}(\mu) - t_{kj}(\mu)t_{il}(\lambda)}{\lambda-\mu} && (15.2.24)\\ t_{ij}(\lambda)D(\mu) &= D(\mu)t_{ij}(\lambda) && (15.2.25)\\ D(\lambda)D(\mu) &= D(\mu)D(\lambda) && (15.2.26)\\ & && (15.2.27) \end{aligned}$$

où $[\![.,.]\!]$ est un super-commutateur. Le développement de $D(\lambda)$

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= 1+\frac{ig}{\lambda}N+\frac{g}{\lambda^2}\left(P-\frac{g}{2}N(N-1)\right) \\ &\quad +\frac{ig}{\lambda^3}\left(H+g(N-1)P-\frac{g^2}{6}N(N-1)(N-2)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \end{aligned}$$

confirme le lien avec l'équation de super-Schrödinger.

Pour conclure, notons qu'on peut lier la résolution en paire de Lax avec l'approche en (super)algèbre ZF en considérant les entrées $b_j(\lambda) = (\mathcal{T}(\lambda))_{j,K+1}$ de la matrice de monodromie, qui satisfont

$$b_j(\lambda)b_k(\mu) = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda-ig}(-1)^{jk}b_k(\mu)b_j(\lambda)-\frac{ig}{\mu-\lambda-ig}b_j(\mu)b_k(\lambda) \tag{15.2.28}$$

$$b_j(\lambda)D(\mu) = \frac{\lambda-\mu-ig}{\lambda-\mu-i\varepsilon}D(\mu)b_j(\lambda) \tag{15.2.29}$$

On reconnaît dans les générateurs $b_j(\lambda)D(\lambda)^{-1}$, les générateurs $a_j(\lambda)$ de l'algèbre ZF. Cependant, pour compléter cette image, ce ne sont pas les entrées $(\mathcal{T}(\lambda))_{K+1,j}$ qu'il faut considérer, mais celles d'une nouvelle matrice $\overline{\mathcal{T}}(\lambda)$, qui peut être vue comme l'adjointe de la matrice de monodromie. Une fois cette précaution prise, on peut reconstruire la superalgèbre ZF et lier les deux approches présentées ici.

15.3 Équation de Schrödinger sur une demie-ligne

15.3.1 Résolution

L'étude précédente peut se prolonger au cas d'un modèle de Schrödinger défini sur une demie-ligne. Classiquement, le système est décrit par l'équation du mouvement (écrite ici en composantes)

$$(i\partial_t+\partial_x^2)\varphi_j(x,t) = 2g\,\varphi^{\dagger k}(x,t)\varphi_k(x,t)\varphi_j(x,t)\ ,\ x>0\ ,\ g>0 \tag{15.3.1}$$

à laquelle on ajoute les conditions aux limites

$$\lim_{x\to 0^+}(\partial_x-\eta)\varphi_j(x,t)=0\ ,\quad \eta\geq 0\ ; \tag{15.3.2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_j(x,t)=0\ . \tag{15.3.3}$$

Les cas $\eta\to 0,\ \infty$ donnent les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet (respectivement). Nous reviendrons sur des conditions plus générales dans le cas quantique.

Un fait remarquable de la solution de Rosales (15.1.5) est que, non contente de se préserver au niveau quantique sur une ligne, elle reste valide également dans le cas d'une demie-ligne. L'introduction des conditions aux limites se voit (au niveau classique) dans les fonctions $\lambda_j(k)$ qui doivent maintenant satisfaire la relation supplémentaire

$$\lambda_j(-k) = B(-k)\lambda_j(k) \quad \text{avec} \quad B(k)=\frac{k-i\eta}{k+i\eta}\,. \tag{15.3.4}$$

La quantification de cette solution [103] se fait grâce à une algèbre de bord, dont la matrice R est celle du Yangien. Comme dans le cas sans bord, on construit dans l'espace de Fock de cette algèbre des champs canoniques

$$[\Phi(x,t)\,,\,\Phi(y,t)] = 0 = [\Phi^\dagger(x,t)\,,\,\Phi^\dagger(y,t)] \quad \text{et} \quad [\Phi(x,t)\,,\,\Phi^\dagger(y,t)] = i\delta(x-y)\mathbb{I}\,,\ \ \forall\, x,y>0\,,\ \forall t$$

satisfaisant l'équation du mouvement et les conditions aux limites. On aura noté que les champs satisfont des commutateurs canoniques uniquement dans $\mathbb{R}_+$, en accord avec le système physique (qui n'est défini que sur $\mathbb{R}_+$).

L'Hamiltonien (quantique) du système est l'Hamiltonien naturel (tel que donné dans la section 12.2.2) de cette algèbre de bord. On a donc une hiérarchie d'Hamiltoniens $H_B^{(2n)}$ associée au système, ce qui prouve l'intégrabilité du modèle. On a déjà remarqué plus haut que, par rapport au cas de l'algèbre ZF associée au système sans bord, seuls les Hamiltoniens pairs définissent cette hiérarchie: ce n'est pas surprenant, l'invariance sous translation (de générateur $H_B^{(1)}$) étant brisée par la présence du bord. Plus généralement, la transformation de parité $x \to -x$ n'est plus une symétrie du modèle, d'où le rejet des Hamiltoniens impairs.

Le coefficient $B(k)$ (plus exactement la matrice $B(k)\mathbb{I}$) est alors interprété(e) comme la valeur dans le vide (d'un espace de Fock $\mathcal{F}_B$) du nouveau générateur $b(k)$ traduisant l'interaction avec le bord. La classification des espaces de Fock de l'algèbre de bord (telle que présentée dans la section 12.2.1) permet alors de donner l'ensemble des conditions au bord qui préserve l'intégrabilité du système. Elles prennent la forme

$$D_B\,\Phi(x,t)|_{x=0} = 0 \tag{15.3.5}$$

où D_B est un opérateur différentiel (à valeur matricielle) dont la forme dépend de $B(k)$. À titre d'exemple, pour une matrice $B(k) = \frac{\eta\mathbb{I}-ik\mathbb{E}}{\eta+ik}$ avec $\mathbb{E} = \mathrm{diag}(\pm 1)$, on aura

$$D_B \;=\; \frac{\mathbb{I}+\mathbb{E}}{2} - \frac{\mathbb{I}-\mathbb{E}}{2}\Big(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial_x} - i\Big) \tag{15.3.6}$$

On reconnaîtra dans le cas $\mathbb{E} = -\mathbb{I}$ les conditions données en début de section.

Ainsi, l'algèbre de bord permet non seulement de résoudre quantiquement le système, mais ses représentations (en espace de Fock) permettent de classer les différentes conditions au bord possibles préservant l'intégrabilité du modèle. Elle permet aussi de calculer les fonctions de corrélation du modèle. Par exemple, la fonction à deux points prend la forme:

$$\langle\Omega, \Phi_1(t_1,x_1)\Phi_2^\dagger(t_2,x_2)\Omega\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ik^2t_{12}}\Big\{e^{ikx_{12}}\mathbb{I} + B(k)e^{ik\widetilde{x}_{12}}\Big\} \tag{15.3.7}$$

où $t_{12} = t_1 - t_2$, $x_{12} = x_1 - x_2$ et $\widetilde{x}_{12} = x_1 + x_2$. On voit dans cette fonction de corrélation le terme sans bord, auquel vient s'ajouter le terme de réflexion, en accord avec l'interprétation de $B(k)$ en tant que coefficient de réflexion.

15.3.2 Brisure de symétrie due au bord [ERA34]

On a vu dans la partie algébrique que $b(k)$, non content de traduire l'interaction avec le bord, s'autorise aussi à contenir les symétries du modèle. De ce point de vue, on a une première "brisure"

de symétrie par rapport au modèle sans bord: on passe de la symétrie Yangienne du cas sans bord à l'algèbre de réflexion, qui est une sous-algèbre du Yangien (comme on l'a déjà dit). Cependant, au niveau physique, la construction algébrique n'est pas suffisante: il faut aussi définir l'espace de Fock, qui va définir les conditions aux bord satisfaites par les champs canoniques. L'espace de Fock étant associé à la valeur dans le vide du générateur $b(k)$, on a une brisure spontanée de symétrie induite par le vide. Ainsi, les conditions au bord brisent la symétrie générale, *i.e.* l'algèbre de réflexion en sa sous-algèbre qui préserve le vide. Par exemple, dans le cas

$$B(k) = \frac{k - i\eta}{k + i\eta}\mathbb{I} = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-i\eta}{k})^n\right)\mathbb{I} = \sum_{n=0}^{\infty} k^{-n}\,\langle\Omega, b_n\Omega\rangle$$

seule $tr\, b(k)$ est brisée, et on a comme symétrie "résiduelle" le quotient de l'algèbre de réflexion par son centre.

On remarquera que si, du point de vue algébrique, la matrice $B(k)$ plus être multipliée par une fonction $\beta(k)$ satisfaisant $\beta(k)\beta(-k) = 1$, une telle fonction joue un rôle au niveau physique. En effet, elle change les conditions aux limites satisfaites par $\Phi(x,t)$ (car elle modifie l'opérateur différentiel D_B), ainsi que la symétrie résiduelle du système (car elle modifie la valeur dans le vide de $b(k)$).

15.4 Équation de Schrödinger avec impureté [ERA52, ERA53]

L'approche précédente peut être généralisée au cas d'un système intégrable possédant une impureté qui réfléchit et transmet les particules. Nous présentons ici le cas d'un champ scalaire, le cas vectoriel est en ce moment à l'étude.

15.4.1 Cas classique

Au niveau classique, le modèle est décrit par

$$(i\partial_t + \partial_x^2)\phi(x,t) = 2g\,\phi^\dagger(x,t)\phi(x,t)\,\phi(x,t)\,,\ g > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \tag{15.4.1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\phi(x,t) = 0 \tag{15.4.2}$$

$$\begin{pmatrix} \phi(t,0+) \\ \partial_x\phi(t,0+) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(t,0-) \\ \partial_x\phi(t,0-) \end{pmatrix}, \tag{15.4.3}$$

où les paramètres a, b, c, d, ω obéissent aux mêmes règles qu'en section 14.1.1.

La résolution s'appuie sur les solutions du cas sans bord: on prend deux solutions $\varphi_\pm(x,t)$ de ce cas, associées à des fonctions $\lambda_\pm(k)$. Ces solutions satisfont donc l'équation du mouvement pour tout x. On définit alors

$$\phi(x,t) = \theta(-x)\,\varphi_-(x,t) + \theta(x)\,\varphi_+(x,t)\,, \tag{15.4.4}$$

où θ est la fonction de Heaviside. Par construction, $\phi(x,t)$ satisfait l'équation NLS lorsque $x \neq 0$. Pour obtenir une solution qui obéit aux conditions aux limites du modèle, on relie alors les fonctions $\lambda_\pm$ par des relations du type (14.1.13). On peut alors montrer que le champ $\phi(x,t)$ satisfait les conditions aux limites, si bien qu'on a une solution à l'équation de NLS avec impureté.

On remarquera que, contrairement au cas sans bord ou avec bord réfléchissant, il n'y a pas un développement unique à la Rosales, mais deux développements, chacun d'eux n'étant "valable" (de par les fonctions de Heaviside) que sur une partie de $\mathbb{R}$. Cette "discontinuité" est bien sûr naturelle, étant donnée la position de l'impureté à l'origine. À ce titre, le cas avec bord réfléchissant obéit lui aussi à cette règle, puisque les champs, même s'ils sont définis sur tout $\mathbb{R}$, ne sont canoniques que dans $\mathbb{R}_+$, comme mentionné dans la section 15.3. Nous reviendrons sur ce point dans le cas quantique, que nous abordons maintenant.

15.4.2 Cas quantique

La quantification se déroule de la même façon que pour les autres équations NLS: la forme classique à la Rosales est conservée et on remplace les fonctions $\lambda_\pm$ par les générateurs $a_\pm$ d'une algèbre RT. Plus précisément, l'algèbre que l'on considère est engendrée par les générateurs $a_\pm(k)$, $a_\pm^\dagger(k)$, $r_\pm(k)$ et $t_\pm(k)$ ayant pour relations d'échange:

$$\begin{aligned}
a_{\alpha_1}(k_1)\, a_{\alpha_2}(k_2) &= S(\alpha_2 k_2 - \alpha_1 k_1)\, a_{\alpha_2}(k_2)\, a_{\alpha_1}(k_1)\,, \qquad S(k) = \frac{k - ig}{k + ig}\,,\\
a^{\dagger\alpha_1}(k_1)\, a^{\dagger\alpha_2}(k_2) &= a^{\dagger\alpha_2}(k_2)\, a^{\dagger\alpha_1}(k_1)\, S(\alpha_2 k_2 - \alpha_1 k_1)\,,\\
a_{\alpha_1}(k_1)\, a^{\dagger\alpha_2}(k_2) &= a^{\dagger\alpha_2}(k_2)\, S(\alpha_1 k_1 - \alpha_2 k_2)\, a_{\alpha_1}(k_1) + 2\pi\,\delta(k_1 - k_2)\,\left[\delta_{\alpha_1}^{\alpha_2}\,\mathbf{1} + \epsilon_{\alpha_1}^{\alpha_2}\, t_{\alpha_1}(k_1)\right]\\
&\quad + 2\pi\,\delta(k_1 + k_2)\,\delta_{\alpha_1}^{\alpha_2}\, r_{\alpha_1}(k_1)\,,\\
a_{\alpha_1}(k_1)\, r_{\alpha_2}(k_2) &= S(\alpha_2 k_2 - \alpha_1 k_1)\, r_{\alpha_2}(k_2)\, S(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2)\, a_{\alpha_1}(k_1)\,,\\
r_{\alpha_1}(k_1)\, a^{\dagger\alpha_2}(k_2) &= a^{\dagger\alpha_2}(k_2)\, S(\alpha_1 k_1 - \alpha_2 k_2)\, r_{\alpha_1}(k_1)\, S(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2)\,,\\
a_{\alpha_1}(k_1)\, t_{\alpha_2}(k_2) &= S(\alpha_2 k_2 - \alpha_1 k_1)\, t_{\alpha_2}(k_2)\, S(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2)\, a_{\alpha_1}(k_1)\,,\\
t_{\alpha_1}(k_1)\, a^{\dagger\alpha_2}(k_2) &= a^{\dagger\alpha_2}(k_2)\, S(\alpha_1 k_1 - \alpha_2 k_2)\, t_{\alpha_1}(k_1)\, S(\alpha_2 k_2 + \alpha_1 k_1)\,,
\end{aligned}$$

Due à la forme particulière utilisée ici, on a aussi

$$\begin{aligned}
&[r_{\alpha_1}(k_1), r_{\alpha_2}(k_2)] = 0\,, \quad [r_{\alpha_1}(k_1), t_{\alpha_2}(k_2)] = 0\,, \quad [t_{\alpha_1}(k_1), t_{\alpha_2}(k_2)] = 0\,,\\
&t_\alpha(k) t_{-\alpha}(k) + r_\alpha(k) r_\alpha(-k) = 1\,, \quad \text{et} \quad t_\alpha(k) r_{-\alpha}(k) + r_\alpha(k) t_\alpha(-k) = 0\,.
\end{aligned}$$

On remarquera que l'algèbre utilisée est du type présenté à la fin de la section 14.2.

La version quantique du champ $\phi(x,t)$ prend la forme (15.4.4), et on peut montrer que dans la représentation de Fock $\mathcal{F}_{RT}$ définie par

$$\langle \Omega\,,\, r_\alpha(k)\Omega\rangle = R_\alpha(k) = \frac{bk^2 + i(a-d)k + c}{bk^2 + i\alpha(a+d)k - c} \tag{15.4.5}$$

$$\langle \Omega\,,\, t_\alpha(k)\Omega\rangle = T_\alpha(k) = \omega^\alpha\,\frac{2ik}{bk^2 + i\alpha(a+d)k - c} \tag{15.4.6}$$

ce champ satisfait l'équation NLS, les conditions aux bords données ci-dessus et des commutateurs canoniques.

Grâce aux relations d'échange de l'algèbre RT, on peut calculer les fonctions de corrélation du

système. Par exemple, on peut facilement obtenir

$$\begin{aligned}\langle\Omega,\phi(t_1,x_1)\phi^\dagger(t_2,x_2)\Omega\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ik^2t_{12}}\Big\{\theta(x_1)\theta(x_2)\left[e^{ikx_{12}}+R_+(k)e^{ik\widetilde{x}_{12}}\right]\\ &\quad+\theta(-x_1)\theta(-x_2)\left[e^{ikx_{12}}+R_-(k)e^{ik\widetilde{x}_{12}}\right]\\ &\quad+\theta(x_1)\theta(-x_2)T_+(k)e^{ikx_{12}}+\theta(-x_1)\theta(x_2)T_-(k)e^{ikx_{12}}\Big\}, \qquad (15.4.7)\end{aligned}$$

où $t_{12}=t_1-t_2$, $x_{12}=x_1-x_2$ et $\widetilde{x}_{12}=x_1+x_2$. Le résultat corrobore l'interprétation de $T(k)$ et $R(k)$ en tant que coefficients de transmission et réflexion (respectivement).

15.4.3 Comparaison avec les études précédentes

On peut remarquer que lorsque $\omega=1$, $a=d=1$, $b=0$ et $c=2\eta$, le champ $\phi(x,t)$ devient continu en 0, et satisfait

$$\partial_x\phi(0^+,t)-\partial_x\phi(0^-,t)=2\eta\,\phi(0,t) \quad \text{avec} \quad \phi(0,t)=\phi(0^+,t)=\phi(0^-,t)\,.$$

On peut être tenté de comparer ces conditions avec celles données pour un bord purement réfléchissant, en ne considérant que $x>0$. Cependant, contrairement au cas avec bord, le champ défini ici satisfait des relations de commutation canonique pour tout $x\neq 0$, et les coefficients de réflexion et de transmission diffèrent du cas avec bord:

$$R_\alpha(k)=\frac{-i\eta}{\alpha k+i\eta} \quad \text{et} \quad T_\alpha(k)=\frac{-k}{\alpha k+i\eta}\,, \quad \alpha=\pm \qquad (15.4.8)$$

Par exemple, la fonction à deux points (15.4.7) devient pour $x_1,x_2>0$

$$\langle\Omega,\phi(t_1,x_1)\phi^\dagger(t_2,x_2)\Omega\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ik^2t_{12}}\Big\{e^{ikx_{12}}+R_+(k)e^{ik\widetilde{x}_{12}}\Big\} \qquad (15.4.9)$$

qui rappelle formellement celle donnée dans le cas avec bord, mais en diffère de par la forme de $R_+(k)$.

Pour obtenir le cas purement réfléchissant, il faut pouvoir mettre $t_\alpha(k)$ à zéro *dans l'algèbre RT*, et donc se trouver dans un espace de Fock compatible avec cette condition. On obtient un tel espace de Fock par une limite sur les paramètres a,b,c,d et ω. On pose $\omega=1$, $a=1/\beta$, $d=\beta(1+\eta\beta)$, $c=\eta/\beta$ et $b=\beta^2$. Dans la limite $\beta\to 0$, on trouve $T_\alpha(k)=0$, $R_-(k)=-1$ et $R_+(k)=\frac{k-i\eta}{k+i\eta}$.

De même, on peut retrouver le cas sans bord en posant $a=d=1$, $b=c=0$ et $\omega=1$, qui définit un espace de Fock pour une algèbre RT où $r_\alpha(k)=0$. Pour ce type d'algèbre RT, $\mathcal{A}_+=\{A_+(k),A_+^\dagger(k),S_{12}(k)\}$ d'une part, et $\mathcal{A}_-=\{A_-(k),A_-^\dagger(k),S_{12}(-k)\}$ d'autre part forment des sous-algèbres ZF de l'algèbre RT. Ainsi, par construction, on retrouve pour $x>0$ une construction à la Rosales (sur $\mathcal{A}_+$), et pour $x<0$ la même construction mais sur $\mathcal{A}_-$. Ces deux constructions sont reliées par parité, ce qui explique la forme des matrices S pour les deux sous-algèbre ZF.

Chapitre 16

Chaînes de spins

16.1 Description des modèles

Les chaînes de spins sont des modèles unidimensionnels décrivant des spins fixes interagissant localement entre eux. Les exemples les plus connus de tels modèles sont les chaînes XXX et XXZ (chaîne de Heisenberg [118]). Ils interviennent en matière condensée, lorsque la longueur de corrélation est bien plus petite selon une direction que selon les autres. Les modèles peuvent être aussi bidimensionnels lorsqu'on étudie des chaînes alternées, suivant la façon dont on interprète les différentes matrices R utilisées (voir par exemple [6]). De tels modèles interviennent aussi comme limites (type modèle t-J) du modèle de Hubbard [122]; ils ont aussi des liens avec les modèles de Yang-Mills supersymétriques [20, 176]. On notera également que ces modèles peuvent apparaître comme des limites discrètes des modèles de théorie des champs (voir par exemple [128]). Nous ne parlerons pas ici des modèles dynamiques dans lesquels les spins sont mobiles (par exemple modèles de type Sutherland [223] ou Calogero [39]).

On décrira ici une chaîne de spins associée à la représentation fondamentale du Yangien $Y(N)$. Le même type d'analyse peut être (et a été) fait pour des chaînes de spins associées aux autres Yangiens, aux super-Yangiens, ainsi que pour les groupes quantiques. Le but recherché est la diagonalisation de l'Hamiltonien, ou au moins le calcul de ses valeurs propres (énergies). La méthode employée ici fait partie du célèbre groupe des Ansätze de Bethe, et plus précisément nous aborderons l'Ansatz de Bethe analytique. L'Ansatz de Bethe algébrique sera abordé en fin de chapitre, mais nous ne parlerons pas de l'Ansatz de Bethe en coordonnées (bien qu'il soit l'Ansatz originel) [27], ni de l'Ansatz de Bethe fonctionnel.

16.1.1 Conditions au bord périodiques

On considère L spins, portés par la représentation fondamentale de $s\ell(N)$ et répartis sur un cercle. Ce système est décrit par la **matrice de monodromie**

$$T_a(\lambda) = R_{aL}(\lambda) \dots R_{a1}(\lambda) \tag{16.1.1}$$

où l'espace auxiliaire est noté a, tandis que les espaces quantiques $1, \dots, L$ portent les variables de spin physiques. Cette matrice de monodromie est interprétée comme codant les interactions d'une "particule-sonde" (associée à l'espace auxiliaire a, portant un spin lui aussi dans la représentation

fondamentale), dont l'impulsion est λ, et qui interagit avec les spins (fixes) via la matrice R. La particule auxiliaire joue donc le rôle d'un "observateur" et le résultat de ses interactions avec les différents spins informe sur les interactions entre spins. Ainsi, suivant l'interaction (*i.e.* la matrice R) choisie, on décrira un modèle de chaîne de spins différent. La matrice R utilisée ici est celle de $Y(N)$, que l'on normalise comme

$$R_{ab}(\lambda) = \lambda + iP_{ab}$$

pour des raisons qui deviendront claires plus bas.

La matrice de monodromie satisfait une relation FRT:

$$R_{ab}(\lambda_a - \lambda_b)\ T_a(\lambda_a)\ T_b(\lambda_b) = T_b(\lambda_b)\ T_a(\lambda_a)\ R_{ab}(\lambda_a - \lambda_b), \tag{16.1.2}$$

où a et b décrivent des espaces (particules) auxiliaires différent(e)s. De cette relation, on déduit que la **matrice de transfert**

$$t(\lambda) = tr_a\, T_a(\lambda) \tag{16.1.3}$$

obéit à

$$[t(\lambda)\,,\, t(\mu)] = 0\,. \tag{16.1.4}$$

La matrice de transfert $t(\lambda)$ est un polynôme monique de degré L, elle engendre donc une hiérarchie (finie) d'Hamiltoniens commutants.

On notera aussi que la commutativité des matrices de transfert peut être interprétée comme "l'innocuité" des "particules-sondes", puisque les Hamiltoniens déduits du test du système par la particule (a, λ) ne dépendent pas de la préséance du test par la particule (b, μ).

De même, le "type" de particule employée ne modifie pas la série d'Hamiltoniens associés au système. Par exemple, si on sonde le système avec une "anti-particule" $(\bar{a}, -\lambda - i\rho)$, où $\bar{a}$ décrit un espace auxiliaire porté par la représentation $\overline{N}$, les interactions de cette particule avec les spins vont être codées par la matrice

$$\bar{R}_{aj}(\lambda) = R_{\bar{a}j}(\lambda) = R^{t_a}_{aj}(-\lambda - i\rho)\,,\ j = 1, \ldots, L \tag{16.1.5}$$

où ^{t_a} est une transposition dans l'espace auxiliaire a. Par commodité, nous garderons comme transposition celle introduite pour les Yangiens twistés (7.1.4). La matrice de monodromie associée prend donc la forme

$$T_{\bar{a}}(\lambda) \;=\; R_{\bar{a}L}(\lambda) \ldots R_{\bar{a}1}(\lambda) = T_a(-\lambda - i\rho)^{t_1 \ldots t_L} \tag{16.1.6}$$

où dans la dernière égalité, on s'est servi de l'invariance CP

$$R^{t_a t_b}_{ab}(\lambda) = R_{ba}(\lambda)\,. \tag{16.1.7}$$

Ainsi, la matrice de transfert associée satisfait

$$\bar{t}(\lambda) = tr_{\bar{a}} T_{\bar{a}}(\lambda) = t(-\lambda - i\rho)^{t_q}$$

où t_q est la transposition sur tous les espaces quantiques.

Les vecteurs propres de $t(\lambda)$ et de $\bar{t}(\lambda)$ sont donc identiques, et les valeurs propres reliées par parité (en accord avec l'image de "l'anti-particule").

L'Hamiltonien proprement dit du système fait partie de la hiérarchie engendrée par $t(\lambda)$. On choisit habituellement

$$\mathcal{H} \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\lambda}\ln t(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \sim \sum_{n=1}^{L} P_{n,n+1} \quad \text{avec} \quad P_{L,L+1} = P_{1,L} \tag{16.1.8}$$

On notera que cet Hamiltonien est local, au sens où chaque spin interagit avec un nombre fini (ici ses plus proches) voisins. Cette localité est garantie par $R_{12}(0) \sim P_{12}$.

Dans le cas de $s\ell(2)$, on retrouve l'Hamiltonien du modèle XXX, $\mathcal{H} \sim \sum_n \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_{n+1}$, où $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont les matrices de Pauli, l'indice n indiquant le site et $\vec{\sigma}_{L+1} = \vec{\sigma}_1$.

Symétrie du modèle

Pour finir, on remarquera que la relation (16.1.2) implique (en prenant la trace dans l'espace auxiliaire a puis le terme sous-dominant en λ_b) que la matrice de transfert commute avec l'algèbre $g\ell(N) \subset Y(N)$. Les Hamiltoniens sont donc invariants sous $g\ell(N)$. On notera que le Yangien est présent dans le modèle via la matrice de monodromie, mais qu'il n'est pas une symétrie de ce modèle. Pour des exemples de chaînes de spins admettant une symétrie Yangienne, voir par exemple [10, 116, 226].

Ainsi, les sous-espaces propres de $t(\lambda)$ forment des représentations de $g\ell(N)$. Il suffit donc de calculer les valeurs propres des plus hauts poids de ces représentations pour obtenir l'ensemble des valeurs propres: ce point sera utilisé plus bas.

16.1.2 Inclusion de bords réfléchissant

Une généralisation naturelle du système ci-dessus est de remplacer le cercle (sur lequel sont placés les spins) par un segment délimité par deux bords. Les spins et les particules-sondes vont interagir avec ces bords. On code ces interactions par des matrices numériques $K_a^{\pm}(\lambda_a)$, chacune solution d'une équation de réflexion. La matrice K_a^- correspondant au bord droit satisfait [44]

$$R_{ab}(\lambda_a - \lambda_b)\, K_a(\lambda_a)\, R_{ba}(\lambda_a + \lambda_b)\, K_b(\lambda_b) = K_b(\lambda_b)\, R_{ab}(\lambda_a + \lambda_b)\, K_a(\lambda_a)\, R_{ba}(\lambda_a - \lambda_b), \tag{16.1.9}$$

tandis que K_a^+ (pour l'autre bord) satisfait l'équation duale

$$\begin{aligned} &R_{ab}(\lambda_b - \lambda_a)\, K_a^+(\lambda_a)^t\, R_{ba}(-\lambda_a - \lambda_b - 2i\rho)\, K_b^+(\lambda_b)^t = \\ &\qquad K_b^+(\lambda_b)^t\, R_{ab}(-\lambda_a - \lambda_b - 2i\rho)\, K_a^+(\lambda_a)^t\, R_{ba}(\lambda_b - \lambda_a)\;. \end{aligned} \tag{16.1.10}$$

Dans cette généralisation, les particules-sondes interagissent avec les bords, qui change la composante de leur spin (porté par l'espace auxiliaire), mais pas leur nature (la particule-sonde après réflexion garde un spin porté par la fondamentale $\underline{N}$).

Le système est maintenant décrit par une matrice de monodromie incluant les bords [221]:

$$\mathcal{T}_a(\lambda) \;=\; K_a^+(\lambda)\, T_a(\lambda)\, K_a^-(\lambda)\, \widehat{T}_a(\lambda) \quad \text{avec} \tag{16.1.11}$$

$$T_a(\lambda) \;=\; R_{aL}(\lambda) \ldots R_{a1}(\lambda)\,, \qquad \widehat{T}_a(\lambda) = R_{1a}(\lambda) \ldots R_{La}(\lambda) = T_a(\lambda)^{-1}\;. \tag{16.1.12}$$

Elle décrit une particule-sonde qui se réfléchit sur un bord, "teste" les spins, rebondit sur l'autre bord avant de tester de nouveau les spins, mais en sens inverse. Cette matrice satisfait une équation de réflexion

$$R_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ \mathcal{T}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_b(\lambda_b) = \mathcal{T}_b(\lambda_b)\ R_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a-\lambda_b) \qquad (16.1.13)$$

qui assure encore une fois que la matrice de transfert

$$t(\lambda) = tr_a \mathcal{T}_a(\lambda), \qquad (16.1.14)$$

définit bien une hiérarchie d'Hamiltoniens, puisque $[t(\lambda), t(\mu)] = 0$.

L'existence du bord induit à priori une différenciation entre les particules-sondes (portées par la fondamentale $\underline{N}$) et les "anti-particules" (portées par $\overline{N}$). Cependant, comme dans le cas sans bord, "l'invariance CP" de la matrice R garantit l'indépendance du modèle vis-à-vis du type de particules-sondes. En effet, cette invariance assure que les matrices $\bar{K}^{\pm}_{\bar{a}}(\lambda) = K^{\pm}_{a}(\lambda)$ codant les interactions avec le bord satisfont les mêmes relations (16.1.9) et (16.1.10), si bien que l'on peut prendre

$$\bar{K}^{\pm}_{a}(\lambda) = K^{\pm}_{a}(-\lambda - i\rho)^t\,, \qquad (16.1.15)$$

avec, dans le cas de $s\ell(N)$, $\rho = \frac{N}{2}$.

De fait, si la matrice de monodromie associée au test par une anti-particule prend la forme

$$\overline{\mathcal{T}}_a(\lambda) = K^{+}_{\bar{a}}(\lambda)\ T_{\bar{a}}(\lambda)\ K^{-}_{\bar{a}}(\lambda)\ \widehat{T}_{\bar{a}}(\lambda) \qquad (16.1.16)$$

$$T_{\bar{a}}(\lambda) = \bar{R}_{aL}(\lambda)\ldots\bar{R}_{a1}(\lambda) \qquad \widehat{T}_{\bar{a}}(\lambda) = \bar{R}_{1a}(\lambda)\ldots\bar{R}_{La}(\lambda)\,, \qquad (16.1.17)$$

où $\bar{R}_{aj}(\lambda)$ garde la même définition (16.1.5), la matrice de transfert associée satisfait

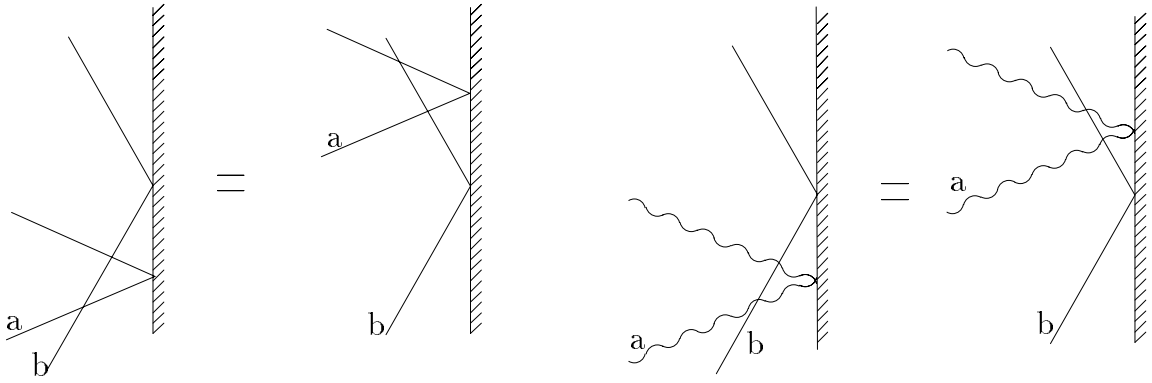
$$\bar{t}(\lambda) = tr_a \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda) = t(-\lambda - i\rho)\,. \qquad (16.1.18)$$

Pour obtenir un tel résultat, on se sert de l'invariance CP. D'où une conclusion similaire au cas sans bord. Les bords présentés ici sont dits *préservants*.

Plus généralement, sans prendre $K^{\pm}_{\bar{a}}(\lambda) = K^{\pm}_{a}(-\lambda - i\rho)^t$, on peut choisir des matrices K compatibles avec la notion de particules et anti-particules sondes. Cette compatibilité se lit (outre la relation (16.1.9) pour K_a et $K_{\bar{a}}$) dans la relation (écrite pour K^-)

$$\bar{R}_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ K_{\bar{a}}(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ K_b(\lambda_b) = K_b(\lambda_b)\ \bar{R}_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ K_{\bar{a}}(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a-\lambda_b) \qquad (16.1.19)$$

Ces deux équations (16.1.9) et (16.1.19) peuvent se représenter au niveau du bord par les diagrammes



Les équations de réflexions pour les matrices K induisent des relations équivalentes pour les matrices de monodromie:

$$R_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ \mathcal{T}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_b(\lambda_b) = \mathcal{T}_b(\lambda_b)\ R_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a-\lambda_b) \quad (16.1.20)$$

$$R_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_b(\lambda_b) = \overline{\mathcal{T}}_b(\lambda_b)\ R_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a-\lambda_b) \quad (16.1.21)$$

$$\bar{R}_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_b(\lambda_b) = \mathcal{T}_b(\lambda_b)\ \bar{R}_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a-\lambda_b)\ . \quad (16.1.22)$$

Ces relations sont suffisantes pour garantir

$$[t(\lambda),t(\mu)]=0 \quad , \quad [\bar{t}(\lambda),\bar{t}(\mu)]=0 \quad \text{et} \quad [t(\lambda),\bar{t}(\mu)]=0\ . \quad (16.1.23)$$

On reconnaîtra aussi dans l'équation (16.1.13), satisfaite par $\mathcal{T}_a(\lambda)$, la relation d'échange d'une algèbre de réflexion basée sur $Y(N)$, comme on aurait dû s'y attendre avec des bords réfléchissants.

L'Hamiltonien proprement dit du système est donné par (lorsque $K^+=\mathbb{I}$)

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\ \frac{d}{d\lambda} t(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \quad (16.1.24)$$

La matrice de monodromie prenant la forme (16.1.11), qui inclut à la fois $T(\lambda)$ et $T(\lambda)^{-1}$, la localité repose ici sur la propriété $R_{12}(0)=P_{12}$ et sur l'équation de réflexion satisfaite par $K(\lambda)$.

Classification des bords

Chaque bord étant associé à des matrices $K_a^{\pm}(\lambda)$ et $\bar{K}_a^{\pm}$, il est essentiel de classer les différentes matrices possibles pour connaitre l'ensemble des modèles intégrables avec bords préservants que l'on décrit. Chaque solution $K_a^-(\lambda)$ fournissant une solution pour la matrice $K_a^+(\lambda)$ par la relation (16.1.15), qui est inversible, il suffit de classer les premières pour obtenir une classification des secondes.

Or, les matrices $K_a^-(\lambda)$ satisfont les relations d'échange des algèbres de réflexion, si bien que les classifications effectuées dans le cadre des modèle de théorie des champs avec bord peuvent être utilisées. Dans le cas de modèles basés sur $g\ell(N)$, les matrices prennent la forme (nous ne donnons ici que les formes diagonalisables):

$$K(\lambda) = i\xi\mathbb{I}+\lambda\mathbb{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}^2=\mathbb{I} \quad (16.1.25)$$

Les matrices $K_{\bar{a}}(\lambda)$ obéissant aux mêmes relations, elles sont elles aussi de la forme décrite ci-dessus.

Il reste à étudier la relation de compatibilité entre les matrices $K_a(\lambda)$ et $K_{\bar{a}}(\lambda)$. Pour des matrices données par les formules ci-dessus, on obtient

$$K_{\bar{a}}(\lambda) = i\xi'\mathbb{I}+\lambda\mathbb{E}' \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}'=\mathbb{E} \quad \text{et} \quad \xi'+\xi = tr\mathbb{E} \quad (16.1.26)$$

On obtient ainsi des couples $(K_a^-,K_{\bar{a}}^-)$ de matrices de réflexion. L'ensemble des matrices K^+ est donné par des relations similaires grâce à la relation (16.1.15). Un modèle de chaîne de spins sera défini par la donnée de deux couples $(K_a^-,K_{\bar{a}}^-)$ et $(K_a^+,K_{\bar{a}}^+)$. Les deux couples étant indépendants l'un de l'autre, on choisit en général $(K_a^+,K_{\bar{a}}^+)=(\mathbb{I},\mathbb{I})$, laissant l'autre quelconque pour décrire différents modèles.

Symétrie du modèle

La symétrie de la matrice de transfert dépend des formes des matrices de réflexion. Dans le cas diagonal, on a:

$$K^-(\lambda) = i\xi\mathbb{I} + \lambda\mathbb{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{E} = diag(\underbrace{+1,...,+1}_{m},\underbrace{-1,...,-1}_{n}) \tag{16.1.27}$$

Dans ce cas, la matrice de monodromie engendre une algèbre $B(N,n)$, telle que présentée en section 9.1. En prenant la trace dans l'espace a et le terme sous dominant en λ, on obtient que la matrice de transfert commute avec l'algèbre $g\ell(m) \oplus g\ell(n)$, sous-algèbre de Lie de $B(N,n)$.

16.1.3 Cas des bords non-préservants

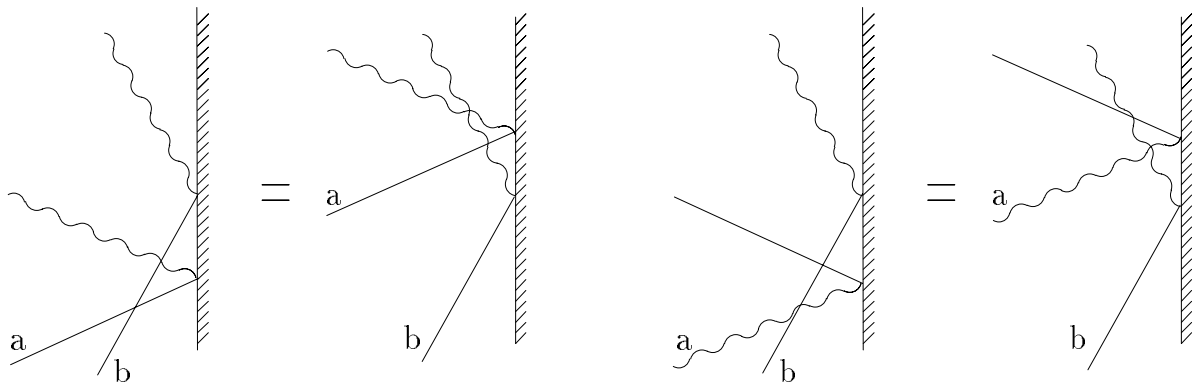
D'autres types de bords, préservant l'intégrabilité du système, peuvent être considérés. Gardant l'image des particules-sondes, on peut rechercher des matrices $\widetilde{K}$ ne préservant pas le type de particules, mais changeant une particule en une anti-particule (et vice versa). On appellera de tels bords des *bords non-préservants*. L'équation de réflexion correspondante prend la forme

$$R_{ab}(\lambda_a - \lambda_b)\ \widetilde{K}_a(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a + \lambda_b)\ \widetilde{K}_b(\lambda_b) = \widetilde{K}_b(\lambda_b)\ \bar{R}_{ab}(\lambda_a + \lambda_b)\ \widetilde{K}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a - \lambda_b). \tag{16.1.28}$$

$\widetilde{K}$ décrit une particule réfléchie par le bord, et revenant sous forme d'anti-particule. De même, on introduit $\widetilde{K}_{\bar{a}}$, qui décrit une anti-particule réfléchie sous forme de particule, et qui satisfait (par invariance CP) la même équation (16.1.28). La compatibilité entre les deux types de particules-sondes se lit dans l'équation

$$\bar{R}_{ab}(\lambda_a - \lambda_b)\ \widetilde{K}_{\bar{a}}(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a + \lambda_b)\ \widetilde{K}_b(\lambda_b) = \widetilde{K}_b(\lambda_b)\ R_{ab}(\lambda_a + \lambda_b)\ \widetilde{K}_{\bar{a}}(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a - \lambda_b)\ . \tag{16.1.29}$$

Les deux nouvelles équations de réflexion admettent une représentation graphique



Comme dans le cas précédent, la réflexion sur l'autre bord est caractérisée par des matrices $\widetilde{K}_a^+$ et $\widetilde{K}_{\bar{a}}^+$, solutions de:

$$\begin{aligned} R_{ab}(-\lambda_a+\lambda_b)\ \widetilde{K}_a^+(\lambda_a)^t\ \bar{R}_{ba}(-\lambda_a-\lambda_b-2i\rho)\ \widetilde{K}_b^+(\lambda_b)^t \\ = \widetilde{K}_b^+(\lambda_b)^t\ \bar{R}_{ab}(-\lambda_a-\lambda_b-2i\rho)\ \widetilde{K}_a^+(\lambda_a)^t\ R_{ba}(-\lambda_a+\lambda_b) \qquad (16.1.30) \\ R_{ab}(-\lambda_a+\lambda_b)\ \widetilde{K}_{\bar{a}}^+(\lambda_a)^t\ \bar{R}_{ba}(-\lambda_a-\lambda_b-2i\rho)\ \widetilde{K}_{\bar{b}}^+(\lambda_b)^t \\ = \widetilde{K}_{\bar{b}}^+(\lambda_b)^t\ \bar{R}_{ab}(-\lambda_a-\lambda_b-2i\rho)\ \widetilde{K}_{\bar{a}}^+(\lambda_a)^t\ R_{ba}(-\lambda_a+\lambda_b) \qquad (16.1.31) \\ \bar{R}_{ab}(-\lambda_a+\lambda_b)\ \widetilde{K}_{\bar{a}}^+(\lambda_a)^t\ R_{ba}(-\lambda_a-\lambda_b-2i\rho)\ \widetilde{K}_b^+(\lambda_b)^t \\ = \widetilde{K}_b^+(\lambda_b)^t\ R_{ab}(-\lambda_a-\lambda_b-2i\rho)\ \widetilde{K}_{\bar{a}}^+(\lambda_a)^t\ \bar{R}_{ba}(-\lambda_a+\lambda_b) \qquad (16.1.32) \end{aligned}$$

La réponse du système aux deux types de particules est codée dans les deux matrices de monodromie

$$\mathcal{T}_a(\lambda)=\widetilde{K}_a^+(\lambda)\ T_a(\lambda)\ \widetilde{K}_a^-(\lambda)\ \widehat{T}_{\bar{a}}(\lambda) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda)=\widetilde{K}_{\bar{a}}^+(\lambda)\ T_{\bar{a}}(\lambda)\ \widetilde{K}_{\bar{a}}^-(\lambda)\ \widehat{T}_a(\lambda)\ , \qquad (16.1.33)$$

où maintenant

$$\begin{aligned} T_a(\lambda)&=R_{a,2L}(\lambda)\bar{R}_{a,2L-1}(\lambda)\dots R_{a2}(\lambda)\bar{R}_{a1}(\lambda)\ , & \widehat{T}_{\bar{a}}(\lambda)&=R_{1a}(\lambda)\bar{R}_{2a}(\lambda)\dots R_{2L-1\,a}(\lambda)\bar{R}_{2La}(\lambda)\ , \\ T_{\bar{a}}(\lambda)&=\bar{R}_{a,2L}(\lambda)R_{a,2L-1}(\lambda)\dots \bar{R}_{a2}(\lambda)R_{a1}(\lambda)\ , & \widehat{T}_a(\lambda)&=\bar{R}_{1a}(\lambda)R_{2a}(\lambda)\dots \bar{R}_{2L-1\,a}(\lambda)R_{2La}(\lambda)\ , \end{aligned}$$

et $\bar{R}$ est donné par (16.1.5). On notera que dans ce cas, pour garantir un Hamiltonien local, on a dû changer le modèle de chaîne de spins, et prendre une chaîne alternée[1], où les spins appartiennent alternativement à la représentation fondamentale $\underline{N}$ puis à sa contragrédiente $\overline{N}$. Le nombre de sites doit donc être pair $(2L)$. Ces matrices de monodromie satisfont

$$\begin{aligned} R_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ \mathcal{T}_a(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_b(\lambda_b) &= \mathcal{T}_b(\lambda_b)\ \bar{R}_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a-\lambda_b)\ , \quad (16.1.34) \\ R_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_b(\lambda_b) &= \overline{\mathcal{T}}_b(\lambda_b)\ \bar{R}_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a-\lambda_b)\ , \quad (16.1.35) \\ \bar{R}_{ab}(\lambda_a-\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ R_{ba}(\lambda_a+\lambda_b)\ \mathcal{T}_b(\lambda_b) &= \mathcal{T}_b(\lambda_b)\ R_{ab}(\lambda_a+\lambda_b)\ \overline{\mathcal{T}}_a(\lambda_a)\ \bar{R}_{ba}(\lambda_a-\lambda_b)\ . \quad (16.1.36) \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit que les matrices de transfert

$$t(\lambda)=tr_a\mathcal{T}_a(\lambda) \quad \text{et} \quad \bar{t}(\lambda)=tr_a\overline{\mathcal{T}}_a(\lambda) \qquad (16.1.37)$$

commutent:

$$[t(\lambda),t(\mu)]=0 \quad , \quad [\bar{t}(\lambda),\bar{t}(\mu)]=0 \quad \text{and} \quad [t(\lambda),\bar{t}(\mu)]=0\,. \qquad (16.1.38)$$

Ces matrices satisfont en outre

$$t(\lambda)=t(-\lambda-i\rho) \quad \text{et} \quad \bar{t}(\lambda)=\bar{t}(-\lambda-i\rho)\ . \qquad (16.1.39)$$

Cependant, les "tests" par les particules et par les anti-particules donnant des réponses différentes, la matrice de transfert "réelle" du système est $t^0(\lambda)=t(\lambda)\ \bar{t}(\lambda)$, ce qui se voit dans la forme de l'Hamiltonien du système

$$\mathcal{H}=-\frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}t(\lambda)\ \bar{t}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}\ . \qquad (16.1.40)$$

[1]Plus exactement, si la chaîne n'est pas alternée, l'Hamiltonien n'est pas local, et le choix d'une chaîne alternée est une condition suffisante pour obtenir la localité.

La localité est encore une fois assurée par $R_{12}(0) = P_{12}$.

Comme pour le cas des bords préservants, on peut classer les matrices de réflexion associées au modèle. On obtient

$$\widetilde{K}(\lambda) = \mathbb{K} \quad \text{avec} \quad \mathbb{K}^t = \pm\,\mathbb{K} \tag{16.1.41}$$

La matrice $\widetilde{K}_{\bar{a}}(\lambda)$ obéit à une relation de même type. La relation de compatibilité entre les matrices $\widetilde{K}_a(\lambda)$ et $\widetilde{K}_{\bar{a}}(\lambda)$ conduit à

$$\widetilde{K}_{\bar{a}}(\lambda) = \mathbb{K}' \quad \text{avec} \quad \mathbb{K}'\,\mathbb{K} = \alpha\,\mathbb{I}\,,\ \alpha \in \mathbb{C} \tag{16.1.42}$$

On obtient ainsi des couples $(K_a^-, K_{\bar{a}}^-)$ de matrices de réflexion. Un modèle de chaîne de spins sera défini par la donnée de deux couples $(\widetilde{K}_a^-, \widetilde{K}_{\bar{a}}^-)$ et $(\widetilde{K}_a^+, \widetilde{K}_{\bar{a}}^+)$. De même que pour les bords préservants, on choisit en général $(\widetilde{K}_a^+, \widetilde{K}_{\bar{a}}^+) = (\mathbb{I}, \mathbb{I})$, le bord non-trivial étant porté par $(\widetilde{K}_a^-, \widetilde{K}_{\bar{a}}^-)$.

Enfin, on aura identifié dans la relation (16.1.34) la relation d'échange du Yangien twisté $Y^{\pm}(N)$. De fait, la symétrie du système (pour $K = \mathbb{I}$), qui est donnée par le terme sous-dominant de la matrice de monodromie, est l'algèbre $so(N)$ (pour $\theta_0 = +1$ dans la définition de la transposition donnée précédemment) ou bien $sp(2n)$ (pour $\theta_0 = -1$ et $N = 2n$).

16.1.4 Généralisation aux autres chaînes de spins

Comme on l'a dit, les modèles présentés pour la matrices R du Yangien $Y(N)$ peuvent être aussi construits pour d'autres matrices R. Les techniques sont essentiellement les mêmes, pourvu que la matrice R obéisse aux propriétés suivantes:

Équation de YB que nous répéterons pas ici.

Invariance CP $R_{12}^{t_1 t_2}(\lambda) = R_{21}(\lambda)$

Unitarisabilité $R_{12}(\lambda) R_{21}(-\lambda) = \zeta(\lambda)\,\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}\,, \quad \zeta(\lambda) \in \mathbb{C}$

Symétrie de croisement $\left(\left(\left(R_{12}^{-1}(\lambda)\right)^{t_1}\right)^{-1}\right)^{t_1} = M_1\, R_{12}(q\lambda)\, M_1^{-1}$ écrite ici pour les groupes quantiques ($q = 1$ pour les Yangiens).

Régularité $R_{12}(0) = \alpha\, P_{12}\,,\ \alpha \in \mathbb{C}$

À partir de ces données, et suivant les matrices de réflexion utilisées, de nombreuses études (plus ou moins complètes) ont eu lieu. Elle portent tant sur les chaînes de spins proprement dites (dans le cadre de l'Ansatz de Bethe, développé plus bas) que sur les matrices de réflexion (dans des cadres différents, tels que les théories des champs intégrables avec bord).

Ci-dessous, j'essaye de les nommer toutes (en incluant mes propres contributions), tout en sachant, j'en suis désolé, que je ne serai sans doute pas exhaustif.

On peut ainsi étudier des chaînes de spins fermées associées aux groupes quantiques $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ algèbre de KM éventuellement twistée [13, 206]; aux (super) Yangiens $Y(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ (super)algèbre de Lie classique [204, 205, 211, 231, 233], **[ERA54]**, voire exceptionnelle [194, 195].

En ce qui concerne les chaînes ouvertes à bords préservants, les cas suivant ont été traités: pour les groupes quantiques $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ algèbre de KM classique (twistée) [8,61,63,64,174,186]; pour les (super) Yangiens $Y(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}$ (super)algèbre de Lie classique [3,65], **[ERA54, ERA51, ERA48].**

Dans le cas de chaînes avec bords non-préservants, $\mathcal{U}_q(A_2^{(1)})$ a été étudié en [62], voir aussi [32]. Lorsqu'on considère des chaînes basées sur des Yangiens $Y(\mathcal{G})$, seuls $\mathcal{G} = g\ell(N)$ ou $g\ell(M|N)$ fournissent de nouvelles chaînes **[ERA54].** Dans les autres cas, la représentation fondamentale étant réelle, les particules-sondes sont leur propre anti-particule, et on n'obtient pas de nouveaux modèles. Ceci est confirmé, dans le cas des Yangiens, par l'identité entre algèbres de réflexion et algèbres twistées (comme déjà mentionné plus haut) **[ERA40].**

Suivant les cas, la classification des matrices de réflexion à bords préservants a été (partiellement) achevée.

Dans le cas des (super)Yangiens $Y(\mathcal{G})$, lorsque $\mathcal{G} = s\ell(N)$ les solutions diagonales sont connues depuis longtemps [57], ainsi que quelques solutions non-diagonales [1] et une classification complète est donnée dans **[ERA34]**; lorsque $\mathcal{G} = so(N)$, $sp(2n)$ ou $osp(N|2n)$, une classification des solutions diagonales, anti-diagonales et croisées peut être trouvée dans **[ERA48],** elle contient et agrandit les solutions déjà connues [171,182]. Enfin, pour $\mathcal{G} = g\ell(M|N)$, une classification complète est effectuée en **[ERA54].**

Dans le cas des groupes quantiques $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$, les solutions diagonales ont été classées pour $\mathcal{G} = A_n^{(1)}$, et quelques solutions non-diagonales sont aussi connues pour ce groupe [100,188]; des classifications complètes existent pour certains groupes quantiques particuliers [166]. Il existe aussi des études pour des matrices de réflexion appartenant à des représentations autres que la fondamentale [54].

Les matrices de réflexion à bords non-préservants ont été complètement classées pour $Y(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} = g\ell(N)$ et $g\ell(M|N)$ **[ERA54].**

Finallement, on notera que les équations de Bethe (et les matrices de réflexion) interviennent aussi dans les modèles de type *t-J* (éventuellement supersymétriques), voir par exemple [35,36,73–75,104,114,247].

16.2 Ansatz de Bethe analytique

Une fois que le modèle de chaîne de spins a été défini, on cherche à le résoudre, c'est-à-dire à connaître les "énergies" des états propres du système. Les "énergies" sont les valeurs propres $\Lambda(\lambda)$ de la matrice de transfert, qui comprennent la "véritable" énergie (associée à l'Hamiltonien du système) lorsqu'on fait un développement selon le paramètre spectral λ. Pour cela, différentes techniques sont utilisées: on parlera ici de **l'Ansatz de Bethe analytique,** qui permet de déterminer ces valeurs propres de manière assez simple. Il ne permet pas toutefois de construire les états propres (sauf un): il faut pour cela recourir à l'Ansatz de Bethe algébrique, plus lourd, mais qui construit explicitement les états, justifiant alors le calcul analytique.

16.2.1 Pseudo-vide

Le point de départ de tous les Ansätze de Bethe est un état propre particulier, le pseudo-vide, que l'on connaît exactement et dont on calcule la valeur propre $\Lambda_0(\lambda)$ [239,240]. Cet état est donné par

$$|\omega_+\rangle = \bigotimes_{i=1}^{L} |+\rangle_i \qquad \text{avec} \qquad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N . \tag{16.2.1}$$

C'est donc l'état ferromagnétique du système. Bien sûr, ce n'est pas le vide puisque son énergie n'est pas minimale. Sa valeur propre dépend du type de la chaîne considérée.

Cas des chaînes périodiques

Le pseudo-vide est tel que la matrice (dans l'espace auxiliaire a) $T_a(\lambda)|\omega_+\rangle$ est triangulaire, ce qui permet de montrer, dans le cas périodique, qu'il est état propre de $t(\lambda)$. Le calcul direct montre que sa valeur propre prend la forme

$$\Lambda_0(\lambda) = a(\lambda)^L + (N-1)\, b(\lambda)^L \tag{16.2.2}$$

avec

$$a(\lambda) = \lambda + i, \quad b(\lambda) = \lambda, \tag{16.2.3}$$

Cette expression peut aussi être écrite

$$\Lambda_0(\lambda) = a(\lambda)^L g_0(\lambda) + b(\lambda)^L \sum_{l=1}^{N-2} g_l(\lambda) + b(\lambda)^L g_{N-1}(\lambda). \tag{16.2.4}$$

où les fonctions $g_l(\lambda)$ sont données par

$$g_l(\lambda) = 1 \tag{16.2.5}$$

Une telle décomposition (si l'on peut dire dans le cas présenté ici) se justifie en étudiant des chaînes dont les spins sont portés par des représentations différentes de $g\ell(N)$ (tout en gardant la matrice R du Yangien). La valeur propre du pseudo-vide garde la forme (16.2.4), mais avec des fonctions $g_l(\lambda)$ différentes. Elle sert de point de départ à l'Ansatz de Bethe analytique, que nous aborderons après avoir étudié le pseudo-vide des chaînes de spins avec bord.

On remarquera que la normalisation de la matrice R implique l'analyticité de $\Lambda_0(\lambda)$ en tant que fonction de λ, un point important dans l'Ansatz.

Chaînes avec bords

Dans le cas des chaînes avec bord, le calcul s'avère plus délicat. Nous considérons pour simplifier le cas où les matrices de réflexion sont toutes égales à $\mathbb{I}$. Le calcul peut se généraliser au cas où les matrices de réflexion sont diagonales. En effet, si le pseudo-vide rend toujours $T_a(\lambda)\omega_+$ triangulaire supérieure, la matrice de monodromie utilise aussi $K^{\pm}$ et $T_a(\lambda)^{-1}$, si bien que $\mathcal{T}_a(\lambda)\omega_+$ n'est pas

triangulaire. Cependant, on peut encore montrer (lorsque $K^{\pm}$ sont diagonales) qu'il est état propre de $t(\lambda)$, sa valeur propre prenant maintenant la forme

$$\Lambda_0(\lambda) = \alpha(\lambda)^L g_0(\lambda) + \beta(\lambda)^L \sum_{l=1}^{N-2} g_l(\lambda) + \gamma(\lambda)^L g_{N-1}(\lambda) \tag{16.2.6}$$

avec dans le cas de (on rappelle qu'ici $\rho = \frac{N}{2}$):

(i) *Bords préservants et L sites*

$$\alpha(\lambda) = a^2(\lambda)\,, \quad \beta(\lambda) = \gamma(\lambda) = b^2(\lambda), \quad a(\lambda) = \lambda + i, \quad b(\lambda) = \lambda, \tag{16.2.7}$$

$$g_l(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda + i\rho)}{(\lambda + \frac{il}{2})(\lambda + \frac{i(l+1)}{2})}\,, \quad l = 0, \ldots, N-1 \tag{16.2.8}$$

$$g_l(\lambda) = g_{N-l-1}(-\lambda - i\rho). \tag{16.2.9}$$

La dernière égalité étant une propriété des $g_l(\lambda)$.

(ii) *Bords non–préservants et 2L sites*

$$\alpha(\lambda) = \Big(a(\lambda)\bar{b}(\lambda)\Big)^2, \quad \beta(\lambda) = \Big(b(\lambda)\bar{b}(\lambda)\Big)^2, \quad \gamma(\lambda) = \Big(\bar{a}(\lambda)b(\lambda)\Big)^2 \tag{16.2.10}$$

$$\bar{a}(\lambda) = a(-\lambda - i\rho), \quad \bar{b}(\lambda) = b(-\lambda - i\rho) \tag{16.2.11}$$

$$g_l(\lambda) = \frac{\lambda + \frac{i(\rho - \theta_0)}{2}}{\lambda + \frac{i\rho}{2}}, \qquad 0 \le l < \frac{N-1}{2}$$

$$g_{\frac{N-1}{2}}(\lambda) = 1, \qquad \text{lorsque } N \text{ est impair}$$

$$g_l(\lambda) = g_{N-l-1}(-\lambda - i\rho). \tag{16.2.12}$$

La dernière égalité servant de définition pour $g_l(\lambda)$, $l > \frac{N}{2}$.

Comme dans le cas périodique, l'introduction des fonctions $g_l(\lambda)$ est justifiée par l'étude de représentations différentes portant les spins et sert de point de départ à l'Ansatz. La valeur propre du pseudo-vide est aussi analytique.

Nous mentionnerons enfin l'existence d'autres méthodes de calcul qui n'utilisent pas le pseudo-vide [187,189], ce qui permet d'inclure les cas de matrices $K(\lambda)$ non diagonales, un point important lorsqu'on ne regarde pas le cas des Yangiens basés sur $s\ell(N)$ ou $s\ell(M|N)$. Une autre méthode consiste à faire des transformations de jauge locales (en chaque site) pour calculer le pseudo-vide même lorsque $K(\lambda)$ n'est pas diagonale [40]. On rappelle que dans le cas de ces Yangiens, les équations de réflexion impliquent que les matrices $K(\lambda)$ commutent et donc sont simultanément diagonalisables (ou triangularisables) **[ERA34, ERA54]**.

16.2.2 Spectre de la matrice de transfert

Fonctions d'habillage

À partir de la forme de $\Lambda_0(\lambda)$, on postule la forme suivante pour l'ensemble des valeurs propres:

$$\Lambda(\lambda) = \alpha(\lambda)^L g_0(\lambda) A_0(\lambda) + \beta(\lambda)^L \sum_{l=1}^{N-2} g_l(\lambda) A_l(\lambda) + \gamma(\lambda)^L g_{N-1}(\lambda) A_{N-1}(\lambda) \tag{16.2.13}$$

où les **fonctions d'habillage** $A_i(\lambda)$ paramètrent les différentes valeurs propres. Ces fonctions (rationnelles en λ) sont déterminées en demandant que $\Lambda(\lambda)$ satisfasse des contraintes de base, telles qu'être analytique (puisque $t(\lambda)$ l'est). Dans le cas de bords non préservants, la relation de croisement sur $t(\lambda)$ implique que la moitié des fonctions d'habillage est déterminée par la connaissance de l'autre moitié. On obtient de cette manière un nombre minimal de fonctions d'habillage à déterminer. Ce nombre correspond au rang de l'algèbre de symétrie du modèle. On demande en outre que les pôles de A_i (factices du point de vue de $\Lambda(\lambda)$) soient tous simples et différents de ceux de A_j, $j \neq i, i+1$. Dit d'une autre manière, les pôles de A_i ne sont communs qu'avec certains de ceux de A_{i-1} et de A_{i+1}: on peut donc dire que les fonctions d'habillage se tiennent par les pôles [5]. Cette contrainte est une contrainte minimale (sur les pôles des A_i) pour avoir une valeur propre globalement analytique.

Relation de fusion

L'analyse sur les pôles introduits par les fonctions g_l ne suffit pas pour déterminer la structure globale des fonctions d'habillage. Pour cela, il faut utiliser des relations supplémentaires, dites relations de fusion, et qui dépendent du modèle considéré. L'idée de base repose sur la construction de matrices R dans des représentations différentes de la fondamentale $\underline{N}$ à partir de cette fondamentale. On obtient ainsi de nouvelles chaînes dont les particules-sondes ont des spins dans des représentations différentes. Les interactions se font à partir de matrices R "fusionnées", construite comme des produits de matrices R dans la fondamentale. On relie de cette façon la matrice de transfert du nouveau modèle à partir de celle, $t(\lambda)$, du modèle initial. En particulier, si la nouvelle chaîne correspond à un test par une particule "sans spin" (*i.e.* appartenant à la représentation triviale de $g\ell(N)$), il n'y aura pas interaction avec les spins de la chaîne. La matrice de transfert va donc d'une part être triviale, et d'autre part être construite à partir de $t(\lambda)$: on obtient ainsi des relations supplémentaires sur cette dernière et par voie de conséquence sur les fonctions d'habillage.

La façon dont on va construire la représentation triviale dépend du modèle considéré, et elle consiste essentiellement à la recherche d'un projecteur unidimensionnel construit sur les matrices R de la fondamentale.

Dans le cas fermé, c'est le produit de N représentations fondamentales qui va produire la représentation triviale. Le projecteur associé est l'antisymétriseur (sur N espaces), et la relation de fusion revient à la construction du déterminant quantique pour le Yangien. L'expression de ce déterminant induit la relation

$$A_0(\lambda + i(N-1))\, A_1(\lambda + i(N-2)) \ldots A_{N-1}(\lambda) = 1 \tag{16.2.14}$$

De cette relation et de l'analyse sur les pôles de g_l, on déduit que les fonctions d'habillage prennent la forme

$$\begin{aligned} A_0(\lambda) &= \prod_{j=1}^{M^{(1)}} \frac{\lambda - \lambda_j^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda - \lambda_j^{(1)} + \frac{i}{2}} \\ A_l(\lambda) &= \prod_{j=1}^{M^{(l)}} \frac{\lambda - \lambda_j^{(l)} + \frac{il}{2} + i}{\lambda - \lambda_j^{(l)} + \frac{il}{2}} \prod_{j=1}^{M^{(l+1)}} \frac{\lambda - \lambda_j^{(l+1)} + \frac{il}{2} - \frac{i}{2}}{\lambda - \lambda_j^{(l+1)} + \frac{il}{2} + \frac{i}{2}}\,, \qquad l = 1, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{16.2.15}$$

Dans les cas de bord réfléchissant, la situation se simplifie, car la représentation contragrédiente est implicitement dans le modèle, et c'est le produit $\underline{N} \otimes \overline{N}$ qui fournit la représentation triviale. Le projecteur associé est (à une normalisation près) $Q_{12} = P_{12}^{t_1}$, ce qui induit une relation

$$A_0(\lambda + i\rho) A_{N-1}(\lambda) = 1$$

qui suffit (avec l'analyse sur les pôles) pour construire les fonctions d'habillage (voir par exemple [175]). Par exemple, dans le cas de bords préservants, on obtient

$$\begin{aligned} A_0(\lambda) &= \prod_{j=1}^{M^{(1)}} \frac{\lambda + \lambda_j^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda + \lambda_j^{(1)} + \frac{i}{2}} \, \frac{\lambda - \lambda_j^{(1)} - \frac{i}{2}}{\lambda - \lambda_j^{(1)} + \frac{i}{2}} \\ A_l(\lambda) &= \prod_{j=1}^{M^{(l)}} \frac{\lambda + \lambda_j^{(l)} + \frac{il}{2} + i}{\lambda + \lambda_j^{(l)} + \frac{il}{2}} \, \frac{\lambda - \lambda_j^{(l)} + \frac{il}{2} + i}{\lambda - \lambda_j^{(l)} + \frac{il}{2}} \prod_{j=1}^{M^{(l+1)}} \frac{\lambda + \lambda_j^{(l+1)} + \frac{il}{2} - \frac{i}{2}}{\lambda + \lambda_j^{(l+1)} + \frac{il}{2} + \frac{i}{2}} \, \frac{\lambda - \lambda_j^{(l+1)} + \frac{il}{2} - \frac{i}{2}}{\lambda - \lambda_j^{(l+1)} + \frac{il}{2} + \frac{i}{2}} \\ & \quad l = 1, \ldots, N-1 \end{aligned}$$

Des formules similaires existent dans le cas de bords non-préservants.

Dans tous les cas, on a donc un paramétrage des fonctions d'habillage à partir des entiers $M^{(n)}$ et des constantes $\lambda_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, M^{(n)}$ et $n = 1, \ldots, N-1$.

Équations de Bethe

Les formes données assurent que les résidus de $\Lambda(\lambda)$ s'annulent aux pôles des fonctions g_l. Pour que cette valeur propre soit globalement analytique, il reste à considérer les résidus en $\lambda = \lambda_j^{(n)}$. L'annulation de ces résidus conduit aux **équations de Bethe.** Elles prennent la forme

$$\begin{aligned} e_1(\lambda_i^{(1)})^L &= -\prod_{j=1}^{M^{(1)}} e_2(\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(1)}) \prod_{j=1}^{M^{(2)}} e_{-1}(\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(2)}) \\ 1 &= -\prod_{j=1}^{M^{(l)}} e_2(\lambda_i^{(l)} - \lambda_j^{(l)}) \prod_{\epsilon=\pm 1} \prod_{j=1}^{M^{(l+\epsilon)}} e_{-1}(\lambda_i^{(l)} - \lambda_j^{(l+\epsilon)}) \\ & \quad l = 2, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{16.2.16}$$

où on a introduit la fonction

$$e_x(\lambda) = \frac{\lambda + \frac{ix}{2}}{\lambda - \frac{ix}{2}}$$

Dans le cas de bords préservants, les équations de Bethe deviennent

$$\begin{aligned} e_1(\lambda_i^{(1)})^L &= -\prod_{j=1}^{M^{(1)}} e_2(\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(1)}) \, e_2(\lambda_i^{(1)} + \lambda_j^{(1)}) \prod_{j=1}^{M^{(2)}} e_{-1}(\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(2)}) \, e_{-1}(\lambda_i^{(1)} + \lambda_j^{(2)}) \,, \\ 1 &= -\prod_{j=1}^{M^{(l)}} e_2(\lambda_i^{(l)} - \lambda_j^{(l)}) \, e_2(\lambda_i^{(l)} + \lambda_j^{(l)}) \prod_{\epsilon=\pm 1} \prod_{j=1}^{M^{(l+\epsilon)}} e_{-1}(\lambda_i^{(l)} - \lambda_j^{(l+\epsilon)}) \, e_{-1}(\lambda_i^{(l)} + \lambda_j^{(l+\epsilon)}) \\ & \quad l = 2, \ldots, N-1, \end{aligned} \tag{16.2.17}$$

Des équations de type similaire sont trouvées lorsque l'on considère des bords non-préservants.

Dans tous les cas, il faut ajouter des contraintes sur les nombres $M^{(n)}$: ces nombres sont bornés. Ces conditions ne sont pas contenues dans la méthode analytique, elles viennent d'une analyse de l'Ansatz de Bethe algébrique (voir plus bas). On peut d'ailleurs vérifier (par ordinateur sur de petits nombres de sites) qu'il existe des solutions aux équations de Bethe qui ne satisfont pas ces contraintes et qui ne correspondent pas à des valeurs propres de $t(\lambda)$. En cela, l'Ansatz de Bethe analytique n'est pas complet et doit être complété (au moins partiellement) par l'Ansatz de Bethe algébrique.

Il reste alors à résoudre ces équations: à chaque solution (dont les $M^{(n)}$ sont bornés) correspondra une valeur propre de la matrice de transfert. Malheureusement, on ne sait pas résoudre ces équations dans le cas de chaînes avec un nombre fini mais arbitraire de sites. Des calculs symboliques sur ordinateur (à l'aide de Maple et/ou de FORM [232]) sur un petit nombre de sites montrent par diagonalisation directe de l'Hamiltonien d'une part, et résolution des équations de Bethe d'autre part, que l'Ansatz de Bethe décrit effectivement toutes les valeurs propres de la matrice de transfert.

Un autre cas bien connu où la résolution de l'Ansatz peut être effectuée est la limite thermodynamique, lorsque le nombre de sites devient infini. Nous effleurons ce sujet dans la section 16.4.

On remarquera la structure particulière des membres de droite des équations de Bethe, qui fait apparaître la matrice de Cartan de $g\ell(N)$. Cette propriété est générale: les indices des fonctions $e_n(\lambda)$ intervenant dans la $k$ème équation de Bethe correspondent aux entrées de la $k$ème ligne de la matrice de Cartan de l'algèbre de Lie considérée.

De fait, on peut interpréter les membres de droite des équations comme traduisant les interactions liées au type de spins intervenant dans la chaîne, tandis que les membres de gauche sont reliés aux effets des bords.

16.2.3 Inclusion de bords non triviaux

Lorsqu'on introduit des bords non triviaux ($K \neq \mathbb{I}$), le calcul de la valeur propre du pseudo-vide montre que sa structure reste la même, et que seules les fonctions $g_l(\lambda)$ sont modifiées en de nouvelles fonctions $\widetilde{g}_l(\lambda)$. On postule donc pour une valeur propre quelconque la même structure avec les mêmes fonctions d'habillage. Sous cette hypothèse, seuls les membres de gauche des équations de Bethe sont modifiées, en accord avec l'interprétation donnée dans la section précédente.

Ainsi, dans le cas de bords préservants définis par $K^+ = \mathbb{I}$ et $K^-(\lambda) = i\xi\mathbb{I} - \lambda\mathbb{E}$ avec $\mathbb{E} = diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{n_1},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{N-n_1})$, on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_l(\lambda) &= (-\lambda + i\xi)\, g_l(\lambda), \qquad l = 0,\ldots,n_1-1 \\ \widetilde{g}_l(\lambda) &= (\lambda + i\xi + in_1)\, g_l(\lambda), \qquad l = n_1,\ldots,N-1 \end{aligned} \tag{16.2.18}$$

Seule la $n_1$ème équation de Bethe est changée. Elle devient (on suppose $n_1 \neq 1$)

$$e_{2\xi+n_1}^{-1}(\lambda_i) = \prod_{j=1}^{M} e_2(\lambda_i - \lambda_j)\, e_2(\lambda_i + \lambda_j) \prod_{\epsilon=\pm} \prod_{j=1}^{M^\epsilon} e_{-1}(\lambda_i - \lambda_j^{(\epsilon)})\, e_{-1}(\lambda_i + \lambda_j^{(\epsilon)}) \tag{16.2.19}$$

avec ici $M \equiv M^{(n_1)}$, $\lambda_j \equiv \lambda_j^{(n_1)}$, $M^\pm \equiv M^{(n_1 \pm 1)}$, et $\lambda_j^{(\pm)} \equiv \lambda_j^{(n_1 \pm 1)}$.

16.3 Ansätze algébrique et analytique

L'interprétation physique des paramètres $M^{(n)}$ et $\lambda_j^{(n)}$ devient plus claire lorsqu'on se réfère à l'Ansatz de Bethe algébrique. Comme déjà précisé, cette méthode permet d'obtenir certains vecteurs propres de la matrice de transfert. Nous ne la décrivons que rapidement (pour une revue voir par exemple [150]), uniquement dans le but d'interpréter les paramètres de l'Ansatz de Bethe. Nous considérons le cas de la chaîne fermée.

Le point de départ est la recherche de vecteurs propres construits à partir de l'action de certaines entrées de la matrice de monodromie sur le pseudo-vide. Pour cela, on développe la matrice de monodromie selon l'espace auxiliaire:

$$\mathcal{T}_a(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes B_{ij}^{1,\dots L}(\lambda) \tag{16.3.1}$$

où $B_{ij}^{1,\dots L}(\lambda)$ sont des opérateurs sur les espaces quantiques $1, \dots, L$. Leurs relations d'échange sont celles du Yangien:

$$[B_{ij}(\lambda)\,, B_{kl}(\mu)] = \frac{i}{\lambda - \mu}\Big(B_{kj}(\lambda)B_{il}(\mu) - B_{kj}(\mu)B_{il}(\lambda)\Big) \tag{16.3.2}$$

et la matrice de transfert s'écrit

$$t(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} B_{ii}(\lambda)\,.$$

Sans entrer dans les détails[2], on construit des états

$$|\{\lambda_j^{(n)}\}\rangle = \prod_{n=1}^{N-1} \prod_{j=1}^{M^{(n)}} \mathcal{B}_n(\lambda_j^{(n)})\, |\omega_+\rangle$$

où $\mathcal{B}_n(\lambda) = B_{n,n+1}(\lambda)$. On recherche alors des conditions sur les paramètres $\lambda_j^{(n)}$ pour que les états ci-dessus soient des états propres de $t(\lambda)$: ces conditions ne sont rien d'autre que les équations de Bethe.

Les complexes $\lambda_j^{(n)}$ sont alors interprétés comme les rapidités des "opérateurs création" $\mathcal{B}_n(\lambda_j^{(n)})$ agissant sur le pseudo-vide pour créer l'état considéré, associé à la valeur propre $\Lambda(\lambda)$ obtenue par l'Ansatz de Bethe analytique.

[2] Il faudrait mentionner par exemple l'Ansatz de Bethe emboîté pour le cas de $s\ell(N)$, $N > 2$.

Les entiers $M^{(j)}$ sont reliés à la symétrie du modèle: ils correspondent aux valeurs propres S_j des générateurs de Cartan de $g\ell(N)$ sur l'état propre en question. Des relations de commutations des opérateurs $\mathcal{B}_n(\lambda_j^{(n)})$ et sachant que $|\omega_+\rangle$ est un état de plus haut poids pour $g\ell(N)$, on déduit que les états propres construits ci-dessus sont des vecteurs de plus haut poids d'une représentation de $g\ell(N)$, sous-espace propre de $t(\lambda)$. On peut calculer $S_j = M^{(j)} - M^{(j+1)}$ et l'état étant le plus haut poids d'une représentation de $g\ell(N)$, on déduit une contrainte

$$0 \leq M^{(N-1)} \leq \ldots \leq M^{(1)} \leq N\,.$$

Comme déjà remarqué, cette contrainte est essentielle dans le calcul des valeurs propres à la mode analytique, et est justifiée par un raisonnement algébrique.

L'Ansatz de Bethe algébrique permet de calculer les fonctions de corrélation des systèmes étudiés, notamment par la méthode des matrices F factorisantes (voir remarque 10.3.1). Il permet aussi le lien avec les modèles intégrables de théories des champs (comme l'équation de Schrödinger non-linéaire présentée plus haut) par des limites au continu.

16.4 Limite thermodynamique

Alors qu'une résolution complète des équations de Bethe reste à trouver, la situation se simplifie lorsqu'on considère la limite thermodynamique du système. Dans cette limite, le nombre de spins tend vers l'infini, la longueur du segment restant finie: la distance entre sites devient donc nulle, et on obtient un "gaz" de spins.

16.4.1 Hypothèse des cordes

L'hypothèse des cordes est un modèle qu'on forme sur la structure des solutions des équations de Bethe. Une analyse de la divergence des facteurs entrant dans les équations de Bethe lorsque le nombre de sites L tend vers l'infini laisse à penser[3] que s'il existe un pôle λ_j de partie imaginaire strictement positive, alors dans la limite $L \to \infty$, il doit exister un autre pôle de forme $\lambda_j - i$. On arrive de cette manière au concept de **cordes**. Une n-corde (ou corde de longueur n) est un ensemble de n solutions (complexes) $\lambda_j^{[n,l]}$ possédant toutes la même partie réelle, et dont les parties imaginaires sont distantes de i:

$$\lambda_j^{[n,l]} = \lambda_j^{[0]} + i\left(\frac{n+1}{2} - l\right)\,,\ l = 1, 2, \ldots, n\,, \quad \lambda_j^{[0]} \in \mathbb{R}$$

La forme des cordes est aussi soutenue par l'observation que si $\lambda_j^{(n)}$ est une solution des équations de Bethe, alors son conjugué complexe l'est également.

On postule que, dans la limite où le nombre de sites tend vers l'infini, *toutes* les solutions des équations de Bethe se regroupent sous forme de cordes.

[3] Nous y reviendrons plus bas.

16.4.2 Résolution

Sous l'hypothèse des cordes, on peut reformuler les équations de Bethe en des équations ne portant que sur les parties réelles $\lambda_j^{[0]}$, centres des cordes. Dans la limite thermodynamique, un état est donc caractérisé par les densités $\rho_n(\lambda)$ des solutions (en n-cordes) $\lambda_j^{[0]}$ aux équations de Bethe. On recherche alors l'état fondamental dans cette limite. Les solutions des équations de Bethe contribuant de manière négative à l'énergie, l'état fondamental est une mer de Fermi, dont les solutions aux équations de Bethe forment une densité de racines sur l'axe réel. Les premières excitations du système correspondent à des "trous" dans la mer de Fermi, auxquels on associe des densités $\tilde{\rho}_n(\lambda)$ de solutions "manquantes" (en n-cordes, par rapport à l'état fondamental).

Toujours dans la limite thermodynamique (*i.e.* en particulier en transformant les sommes discrètes en intégrales), les transformées de Fourier des équations de Bethe forment un système linéaire d'équations couplées sur les densités ρ_n et $\tilde{\rho}_n$, que l'on peut résoudre. Les matrices de diffusion des états excités peuvent alors être calculées. Elles montrent que la matrice R du système d'une part, et les matrices $K(\lambda)$ d'autre part, correspondent bien à la diffusion des états excités dans la chaîne et sur les bords respectivement.

De tels calculs pour les modèles de chaînes de spins ouvertes avec bords préservants, et pour $Y(\mathcal{G})$, avec $\mathcal{G} = so(N)$, $sp(2n)$ et $osp(1|2n)$ sont présentés dans les références **[ERA48, ERA51]**.

16.4.3 Validité de l'hypothèse des cordes

Il faut garder en mémoire que la structure en cordes n'est qu'une hypothèse. En particulier, l'argument de divergence des équations de Bethe présuppose que le nombre de solutions reste fini lorsque $L \to \infty$. Ce n'est en fait pas le cas, comme l'ont montré des calculs sur le modèle XXX [13]. En fait, la compensation des divergences telle que présentée pour justifier l'hypothèse des cordes n'est valable que pour les pôles "proches" (de partie imaginaire petite), mais elle n'est pas nécessaire dans le cas de racines "éloignées". Ainsi, il y a perte de certaines solutions lorsqu'on fait l'hypothèse des cordes (même dans la limite $L \to \infty$). Cependant, on peut montrer que les contributions aux grandeurs physiques (telle que l'énergie) des solutions "manquantes" est nulle, si bien que l'hypothèse des cordes reste valable pour le calcul de ces quantités [89].

D'autre part, l'hypothèse des cordes est aussi utilisée dans le cas de nombre fini de sites, car elle permet une bonne compréhension intuitive des solutions aux équations de Bethe. En particulier, le calcul sur ordinateur montre qu'elle donne une bonne approximation des solutions.

D'autres méthodes ont été développées pour s'abstraire de l'hypothèse des cordes. En particulier, on notera la méthode de la **matrice de transfert quantique** (QTM) qui fait appel à un réseau alterné [55,156,210,224,225]. Dans cette approche, on associe au modèle (unidimensionnel) de chaîne de spins, un réseau (bidimensionnel) pour lequel les espaces quantiques jouent le rôle d'espaces auxiliaires dans la direction orthogonale au modèle originel. L'étude de la matrice de transfert totale du réseau dans la limite $L \to \infty$ permet alors de calculer toutes les excitations du modèle originel à partir de l'état fondamental d'une chaîne inhomogène (par une inversion des limites).

Un autre traitement de la QTM mène au concept d'équation de Bethe thermodynamique (TBA) [135, 148].

Conclusion et prospectives

Dans ce mémoire, nous avons présenté différents aspects algébriques des modèles physiques intervenant en dimensions une et deux. Les structures algébriques reliées à ces modèles peuvent se regrouper selon deux grand thèmes: les théories conformes et les systèmes intégrables. Ces deux domaines sont encore en pleine activité, et de nombreux points restent à éclaircir ou à développer, que ce soit dans une approche physique ou une approche plus mathématique. Nous présentons quelques-uns de ces points ci-après, en insistant sur ceux que je cherche à développer.

Si l'éclat des algèbres $\mathcal{W}$ "affines" s'est terni du point de vue des cordes, avec l'apparition des branes, il ne faudrait pourtant pas oublier le rôle qu'elles peuvent jouer dans la classification des théories conformes unitaires. Les théories conformes sont également importantes en physique statistique dans l'étude des transitions de phases du second ordre. Une classification de leurs représentations unitaires, reliée à une symétrie pertinente des modèles associés, permettrait la mise en évidence de nouveaux modèles. À ce titre, la définition d'un diagramme de type Dynkin (voir les CDDs présentés ici) associé à une théorie conforme arbitraire est sans doute un axe à explorer. On remarquera à ce propos la généralisation des algèbres de Lie $g\ell(n)$ au cas où n est complexe: si des algèbres $\mathcal{W}$ peuvent être construites pour de telles algèbres, on obtiendrait une classe de théories minimales indexées par un paramètre continu, à rapprocher de la charge centrale des théories conformes. D'autre part, les modèles de $\mathcal{W}$-gravité pourraient aussi être un bon laboratoire d'étude d'une théorie quantique de la gravité.

On mentionnera aussi l'intérêt que leur portent actuellement les mathématiciens, ainsi que le regain d'intérêt des physiciens de la matière condensée pour les théories conformes, par exemple dans le cadre des systèmes critiques fortement anisotropiques, en vue du calcul de fonctions de corrélation (à deux ou trois points notamment).

L'aspect physique des algèbres $\mathcal{W}$ finies devrait être poursuivi, notamment dans l'étude des anyons. Des calculs préliminaires que j'ai menés indiquent qu'elles pourraient permettre de définir des anyons dans des dimensions supérieures à deux. Bien sûr, dans un tel cadre, ce ne sont plus des objets ponctuels. De tels objets pourraient être assimilés à des défauts (ou des perturbations) dans des théories de basses dimensions et qui les mèneraient à des systèmes de dimensions plus élevées.

Du point de vue mathématique (et physique du point de vue des anyons), la technique des $\mathcal{W}$-représentations des algèbres de Lie est sans doute une approche intéressante pour construire des représentations de type Kac-Wakimoto, avec un lien vers la théorie des représentations induites.

Le lien avec les Yangiens n'est pas non plus à négliger. D'une part, il pourrait permettre de définir une généralisation du Yangien à travers l'étude de l'ensemble des algèbres $\mathcal{W}$ finies, ce qui dans un

deuxième temps mènerait à de nouveaux modèles de chaînes de spins intégrables. D'autre part, il existe une notion de Yangiens "affines" (basés sur des algèbres de KM): l'étude des représentations de ces Yangiens pourrait être une piste pour la classification des algèbres $\mathcal{W}$ affines, et donc fournir de nombreux renseignements sur les théories conformes, en liaison avec le premier point décrit ici.

On mentionnera aussi la possibilité de construire des théories de jauge basées sur les algèbres $\mathcal{W}$ finies. Elle constitue une manière originale de perturber les théories de jauge des modèles de physique des particules.

Le domaine des systèmes intégrables est un secteur riche, toujours en effervescence, qui devrait avoir encore de nombreuses applications. C'est dans ce domaine (et ses connections avec la matière condensée, voir plus bas) que je compte développer l'essentiel de mes recherches futures.

En théorie des champs, les systèmes avec impureté forment un secteur émergent en plein développement. La résolution de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec impureté a prouvé la validité du cadre algébrique défini par les algèbres RT. De nouveaux modèles peuvent être résolus par les mêmes techniques, en s'appuyant sur les algèbres ZF et leurs généralisations (algèbres de bord et algèbres RT). D'après mes premières études, les modèles non-relativistes ne semblent pas devoir poser de problèmes techniques insurmontables. Je voudrais aussi m'intéresser à des modèles relativistes, tels que le modèle de Thirring (qui reste à résoudre même dans le cas sans impureté). Si dans ces derniers cas, la résolution est plus délicate, l'expérience acquise dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-linéaire et des modèles voisins pourrait permettre d'apporter des éléments nouveaux et originaux à ces problèmes.

En modèles de chaînes de spins, à court terme, un traitement "universel" de l'Ansatz de Bethe analytique, où les spins appartiennent à une représentation quelconque de l'algèbre de Lie, est possible. Il permet de calculer de façon synthétique les valeurs propres des matrices de transfert de ces modèles. Le cas des chaînes de spins (avec ou sans bord) basées sur les Yangiens de $s\ell(N)$ est en cours d'achèvement. Je compte tenter de la généraliser aux autres Yangiens ainsi qu'aux groupes quantiques. Cette méthode devrait jeter un pont intéressant (et nouveau) avec l'Ansatz de Bethe analytique. Bien sûr, le but ultime est de calculer les fonctions de corrélation de ces modèles. À ce titre, l'Ansatz de Bethe algébrique semble plus performant, puisqu'il permet une construction d'états propres de la matrice de transfert. Cependant la difficulté technique des calculs pourrait se voir simplifier par une première approche plus systématique des valeurs propres par le biais de l'Anstaz analytique.

Des systèmes de chaînes de spins avec impureté devraient aussi voir le jour, maintenant que le cadre algébrique a été défini en théorie des champs. L'intérêt en est évident du point de vue de la modélisation de systèmes physiques concrets. En particulier, un Ansatz de Bethe (analytique dans un premier temps, algébrique par la suite) semble tout-à-fait réalisable. Les étudiants de notre groupe y travaillent actuellement.

Pour tous ces points, les applications à des modèles réalistes de matière condensée sont sans aucun doute possibles. Le rôle qu'a joué la résolution du modèle d'Ising dans les systèmes ferromagnétiques est un bon exemple de l'apport que peuvent donner les systèmes intégrables aux modèles étudiés en matière condensée. L'apparition récente de systèmes physiques unidimensionnels en matière condensée pourrait être un point de contact naturel entre matière condensée et

systèmes intégrables. En particulier, les résultats connus dans le cadre des spins devraient être exploités plus clairement vis-à-vis des expériences menées dans ces domaines.

Une autre approche possible est l'exploitation des résultats obtenus dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-linéaire: cette équation est reliée à l'équation de Gross-Pitaevski fort utilisée en matière condensée dans l'étude des condensats de Bose pour des gaz atomiques.

Ces points, que je développe avec mon étudiant en thèse, constituent un des axes principaux de mes recherches actuelles.

Finalement, je pense que le rôle des opérateurs bien élevés est à poursuivre. Il semble, d'après des calculs préliminaires, que les techniques employées pour construire ces opérateurs peuvent permettre de définir des champs canoniques pour toute matrice $R(z)$. La matrice $R(z)$ étant a priori quelconque (modulo des hypothèses raisonnables, telles que l'unitarité ou l'existence d'une matrice r classique), cela apporterait de nouveaux résultats pour une foule de modèles. On peut envisager une résolution complète des systèmes correspondants et le calcul de leurs fonctions de corrélation. À tout le moins, les opérateurs bien élevés commutant avec la hiérarchie des Hamiltoniens, cela montrerait de manière définitive la symétrie quantique des modèles concernés, et donnerait un moyen de calculer l'action des groupes de symétrie sur les objets physiques de la théorie. Là encore, les applications en matière condensée devraient être importantes.

À plus long terme, l'étude des matrices R dynamiques sous ce même angle apporterait un éclairage nouveau à des modèles de type XYZ, et pourrait permettre de les résoudre. Des liens avec les constructions des opérateurs de vertex de ces modèles semblent probables. La comparaison entre ces deux techniques ferait sans doute progresser la compréhension de ces systèmes. La construction d'opérateurs bien élevés dynamiques serait alors une manière élégante de prouver la symétrie en algèbres elliptiques de ces modèles.

Bibliographie

[1] J. Abad and M. Rios, *Nondiagonal solutions to reflection equations in $SU(N)$ spin chains,* Phys. Lett. **B352** (1995) 92; `hep-th/9502129`.

[2] M. Ademollo et al., *Supersymmetric strings and color confinement*, Phys. Lett. **B62** (1976) 105.

[3] I. Affleck, M. Oshikawa, H. Saleur, *Boundary critical phenomena in $SU(3)$ spin chains*, `cond-mat/0011454`.

[4] H. Aratyn, C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, *Higher spin symmetries of the conformal affine toda model*, Phys. Lett. **B281** (1992) 245;

[5] D. Arnaudon, private communication.

[6] D. Arnaudon, A. Sedrakyan and T. Sedrakyan, *Multi-leg integrable ladder models*, Nucl. Phys. **B676** (2004) 615; `hep-th/0210087`.

[7] D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat, M. Rossi, *Deformed double Yangian structures,* Rev. Math. Phys. **12** (2000) 945; `math.QA/9905100`.

[8] S. Artz, L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, *Analytical Bethe Ansatz for $A^{(2)}_{2n-1}, B^{(1)}_n, C^{(1)}_n, D^{(1)}_n$ quantum-algebra-invariant open spin chains,* J.Phys. **A28** (1995) 5131; `hep-th/9504085`.

[9] J. Avan, O. Babelon, E. Billey, *The Gervais–Neveu–Felder equation and the quantum Calogero–Moser systems,* Comm. Math. Phys. **178** (1996) 281; `hep-th/9505091`.

[10] J. Avan, O. Babelon, E. Billey, *Exact Yangian symmetry in the classical Euler-Calogero-Moser model,* `hep-th/9401117`.

[11] O. Babelon, *Extended conformal algebra and Y.-B. equation*, Phys. Lett. **B215** (1988) 523.

[12] O. Babelon, *Universal Exchange Algebra for Bloch Waves and Liouville Theory*, Comm. Math. Phys. **139** (1991) 619.

[13] O. Babelon, H.J. de Vega and C.M. Vialet, *Analysis of the Bethe Ansatz equations of the XXX model*, Nucl. Phys. **B220** (1983) 13.

[14] O. Babelon, F. Toppan, unpublished.

[15] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge and K. Schoutens, *Extensions of the Virasoro algebra constructed from Kac-Moody algebras using higher order Casimir invariants*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 348; *Coset construction for extended Virasoro algebras*, ibid 371.

[16] F.A. Bais, T. Tjin and P. van Driel, *Covariantly coupled chiral algebras*, Nucl. Phys. **B357** (1991) 632.

[17] J. Balog, L. Feher, P. Forgacs, L. O'Raifeartaigh and A. Wipf, *Liouville and Toda theories as conformally reduced WZNW theories*, Phys. Lett. **B227** (1989) 214;
Kac-Moody realization of $\mathcal{W}$ algebras, ibid **B244** (1990) 435;
Toda theory and $\mathcal{W}$ algebra from a gauged WZNW point of view, Ann. Phys. **203** (1990) 76.

[18] R.J. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model,* Ann. Phys. **70** (1972) 193; J. Stat. Phys. **8** (1973) 25; *Exactly solved models in statistical mechanics,* (Academic Press, 1982)

[19] V.V. Bazhanov and A.G. Shadrikov, *Quantum triangle equations and Lie superalgebras,* Theor. Math. Phys. **73** (1988) 1302.

[20] N. Beisert and M. Staudacher, *The N=4 SYM integrable super spin chain,* Nucl. Phys **B670** (2003) 439; `hep-th/0307042`.

[21] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *The Abelian Higgs-Kibble model. Unitarity of the s operator*, Phys. Lett. **B52** (1974) 344;
Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble model, Comm. Math. Phys. **42** (1975) 127;
Renormalization of gauge theories, Annals Phys. **98** (1976) 287.

[22] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theories*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333.

[23] F.A. Berezin and V.N. Tolstoy, *The group with Grassmann structure UOSP(1.2)*, Comm. Math. Phys. **78** (1981) 409.

[24] M. Bershadsky, *Conformal field theories via Hamiltonian reduction*, Comm. Math. Phys. **139** (1991) 71.

[25] M. Bershadsky, W. Lerche, D. Nemeschansky and N.P. Warner, *Extended N=2 superconformal structure of gravity and $\mathcal{W}$ gravity coupled to matter*, Nucl. Phys. **B401** (1993) 304; `hep-th/9211040`.

[26] M. Bershadsky and H. Ooguri, *Hidden sl(N) symmetry in conformal field theories*, Comm. Math. Phys. **126** (1989) 49.

[27] H. Bethe, *Zur theorie der metalle. Eigenwerte und eingenfunktionen atomkete,* Zeitschrift für Physik **71** (1931) 205.

[28] A. Bilal and J.L. Gervais, *Systematic approach to conformal systems with extended Virasoro symmetries*, Phys. Lett. **B206** (1988) 412;

Systematic construction of conformal theories with higher spin Virasoro symmetries, Nucl. Phys. **B318** (1989) 579;
Extended $c = \infty$ conformal systems from classical Toda field theories, **B314** (1989) 646.

[29] A. Boresch, K. Landsteiner, W. Lerche and A. Sevrin, *Superstrings from Hamiltonian reduction*, Nucl. Phys. **B436** (1995) 609; `hep-th/9408033`.

[30] G. Bonneau, J. Faraut and G. Valent, *Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics*, Am. J. Phys. **69** (2001) 322; `quant-ph/0103153`

[31] P. Bowcock, *Exceptional superconformal algebras*, Nucl. Phys. **B381** (1992) 415; `hep-th/9202061`.

[32] P. Bowcock, E. Corrigan, P.E. Dorey and R.H. Rietdijk, *Classically integrable boundary conditions for affine Toda field theories*, Nucl. Phys. **B445** (1995) 469; `hep-th/9501098`.

[33] P. Bowcock, E. Corrigan and C. Zambon, *Classically integrable field theories with defects*, `hep-th/0305022`.

[34] P. Bowcock and G.M.T. Watts, *On the classification of quantum $\mathcal{W}$ algebras*, Nucl. Phys. **379** (1992) 63; `hep-th/9111062`.

[35] A. Bracken, X.Y. Ge, Y.Z. Zhang and H.Q. Zhou, *Integrable open-boundary conditions for the q-deformed supersymmetric U model of strongly correlated electrons,* Nucl. Phys. **B516** (1998) 588; `cond-mat/9710141`.

[36] A. Bracken, X.Y. Ge, Y.Z. Zhang and H.Q. Zhou, *An open-boundary integrable model of three coupled XY spin chains,* Nucl. Phys. **B516** (1998) 603; `cond-mat/9710171`.

[37] E. Buffenoir and Ph. Roche, *Harmonic Analysis on the Quantum Lorentz Group,* `q-alg/9710022`.

[38] N. Burroughs, M. de Groot, T. Hollowood and L. Miramontes, *Generalized $\mathcal{W}$ algebras and integrable hierarchies*, Phys. Lett. **B277** (1992) 89; `hep-th/9110024`.

[39] F. Calogero, *Ground state of one-dimensional N body system*, J. Math. Phys **10** (1969) 2191.

[40] J. Cao, H. Lin, K. Shi and Y. Wang, *Exact solutions and elementary excitations in the XXZ spin chain with unparallel boundary fields,* `cond-math/0212163`.

[41] O.A. Castro-Alvaredo, A. Fring and F. Gohmann, *On the absence of simultaneous reflection and transmission in integrable impurity systems*, `hep-th/0201142`.

[42] V. Chari and A. Pressley, *Yangians and R-matrices,* L'Enseignement Math. **36** (1990) 267.

[43] V. Chari and A. Pressley, *Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices,* J. reine angew. Math. **417** (1991) 87.

[44] I.V. Cherednik, *Factorizing particles on a half line and root systems,* Theor. Math. Phys. **61** (1984) 977.

[45] F. A. B. Coutinho, Y. Nogami and L. Tomio, *Many body system with a four-parameter family of point interactions in one dimension*, J. Phys. A **32** (1999) 4931; quant-ph/9903098.

[46] D.B. Creamer, H.B. Thacker and D. Wilkinson, *Gelfand-Levitan method for operator fields*, Phys. Rev. **D21** (1980) 1523.

[47] B. Davies, *Second quantization of the nonlinear Schrodinger equation*, J. Phys. **A14** (1981) 2631.

[48] J. de Boer and T. Tjin, *Quantization and representation theory of finite $\mathcal{W}$ algebras*, Comm. Math. Phys. **158** (1993) 485; hep-th/9211109.

[49] J. de Boer and T. Tjin, *The relation between quantum $\mathcal{W}$ algebras and Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **160** (1994) 317; hep-th/9302006.

[50] A. Deckmyn and K. Thielemans, *Factoring out Free Fields*, preprint KUL-TH-93-26; hep-th/9306129.

[51] G. Delfino, G. Mussardo and P. Simonetti, *Scattering Theory and Correlation Functions in Statistical Models with a Line of Defect,* Nucl. Phys. **B432** (1994) 518; hep-th/9409076.

[52] G.W. Delius, M.T. Grisaru, P. Van Nieuwenhuizen, *Induced (N,0) supergravity as a constrained osp(N/2) WZNW model and its effective action*, Nucl. Phys. **B389** (1993) 25; hep-th/9205093.

[53] G.W. Delius and N.J. MacKay, *Quantum group symmetry in sine-Gordon and affine Toda field theories on the half-line,* Commun. Math. Phys. **233** (2003) 173; hep-th/0112023.

[54] G.W. Delius and R.I. Nepomechie, *Solutions of the boundary Yang–Baxter equation for arbitrary spin,* J. Phys. **A35** (2002) L341; hep-th/0204076.

[55] C. Destri and H.J. de Vega, *New thermodynamic Bethe Ansatz equations without strings*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2313;
Yang-Baxter symmetry in integrable models: new light from the Bethe Ansatz solution, Nucl. Phys. **B406** (1993) 566; hep-th/9303052.

[56] H.J. De Vega, H. Eichenherr and J.M. Maillet, *Classical and quantum algebras of non-local charges in σ models*, Comm. Math. Phys. **92** (1984) 507.

[57] H.J. de Vega and A. González-Ruiz, *Boundary K matrices for the six vertex and the $N(2N-1)$ $A(N-1)$ vertex models,* J. Phys. **A26** (1993) L519; hep-th/9211114.

[58] J. Ding, *A remark on the FRT realization and Drinfeld realization of quantum affine Superalgebra $U_q(\widehat{osp}(1,2))$*, math.QA/9905086.

[59] P.A.M. Dirac, *Lecture on Quantum Mechanics*, Academic Press Inc. (NY).

[60] P. Di Vecchia, V.G. Knizhnik, J.L. Petersen and P. Rossi, *A supersymmetric Wess-Zumino lagrangian in two-dimensions*, Nucl. Phys. **B253** (1985) 701.

[61] A. Doikou, *Fusion and analytical Bethe Ansatz for the $A^{(1)}_{n-1}$ open spin chain,* J. Phys. **A33** (2000) 4755; `hep-th/0006081`.

[62] A. Doikou, *Quantum spin chain with "soliton nonpreserving" boundary conditions,* J. Phys. **A33** (2000) 8797; `hep-th/0006197`.

[63] A. Doikou, L. Mezincescu and R. Nepomechie, *Boundary S matrix for the XXZ chain*, J. Phys. **A31** (1998) 53; `hep-th/9708145`.

[64] A. Doikou and R.I. Nepomechie, *Duality and quantum algebra symmetry of the $A^{(1)}_{n-1}$ open spin chain with diagonal boundary fields,* Nucl. Phys. **B530** (1998) 641; `hep-th/9807065`.

[65] A. Doikou and R.I. Nepomechie, *Bulk and boundary S matrices for the su(N) chain,* Nucl. Phys. **B521** (1998) 547; `hep-th/9803118`;

[66] By V.G. Drinfel'd, *Quasi Hopf algebras*, Lengingrad Math. J. **1** (1990) 1419; Alg. Anal. **1N6** (1989) 114.

[67] V. G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang–Baxter equation,* Soviet. Math. Dokl. **32** (1985) 254; Dokl. Akad. Nauk. **283** (1985) 1060.

[68] V.G. Drinfel'd, *Quantum Groups,* Proceedings Int. Cong. Math. Berkeley, California, USA (1986) 798; J. Sov. Math. **41** (1988) 898; Zap. Nauchn. Semin. **155** (1986) 18.

[69] V.G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras,* Soviet. Math. Dokl. **36** (1988) 212.

[70] V. Drinfeld and V. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, J. Sov. Math. **30** (1984) 1975.

[71] E. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. II Ser. 6 (1957) 111; *Maximal subgroups of the classical groups*, ibid. 245.

[72] B. Enriquez and P. Etingof, *Quantization of classical dynamical r-matrices with nonabelian base*, `math.QA/0311224`.

[73] F.H.L. Eßler, *The supersymmetric t-J model with a boundary,* J. Phys. **A29** (1996) 6183; `cond-mat/9605180`.

[74] F.H.L. Eßler and V. Korepin, *Spectrum and low lying excitations in a supersymmetric extended Hubbard model,* `cond-mat/9307019`.

[75] F.H.L. Eßler, V. Korepin and K. Schoutens, *Exact solution of an electronic model of superconductivity in $1+1$ dimensions,* `cond-mat/9211001`.

[76] P. Etingof, T. Schedler and O. Schiffmann, *Explicit quantization of dynamical r-matrices for finite dimensional semisimple Lie algebras*, J. Am. Math. Soc. **13** (2000) 595-609; `math.QA/9912009`.

[77] J. Evans and T. Hollowood, *Supersymmetric Toda field theories*, Nucl. Phys. **B352** (1991) 723; erratum-ibid **B382** (1992) 662.

[78] L.D. Faddeev, *Quantum completely integrable models in field theory,* Sov. Sci. Rev. **C1** (1980) 107.

[79] L.D. Faddeev, N.Y . Reshetikhin and L.A . Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras,* Leningrad Math. J. **1** (1990) 193.

[80] L.D. Faddeev and E.K. Sklyanin, *Quantum mechanical approach to completely integrable field theory models,* Sov. Phys. Dokl. **23** (1978) 902.

[81] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin and L.A. Takhtajan, *Quantum inverse problem method,* Theor. Math. Phys. **40** (1979) 194.

[82] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, *Quantum inverse scattering method,* Sov. Sci. Rev. Math. **C** (1981) 1.

[83] V.A. Fateev and S.L. Lukyanov, *The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $\mathbb{Z}_n$ symmetry*, Int. J. Mod. Phys. **A3** (1988) 507.

[84] L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I Tsutsui, *On the completeness of the set of classical $\mathcal{W}$ algebras obtained from DS reductions*, Comm. Math. Phys. **162** (1994) 399; `hep-th/9304125`

[85] L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, *Generalized Toda theories and $\mathcal{W}$ algebras associated with integral gradings*, Ann. Phys. **213** (1992) 1.

[86] B.L. Feigin and E. Frenkel, *Quantization of the Drinfeld-Sokolov reduction*, Phys. Lett. **B246** (1990) 75.

[87] B.L. Feigin and D.B. Fuchs, *Verma modules over the Virasoro algebra*, Lect. Notes Math. **1060** (1984) 114.

[88] G. Felder, *Elliptic quantum groups,* Proceedings of the ICMP, Paris 1994.

[89] P. Fendley and H. Saleur, *Deriving boundary S matrices*, Nucl. Phys. **B428** (1994) 681; `hep-th/9402045`.

[90] E.S. Fradkin and V.Y. Linestsky, *Classification of superconformal and quasisuperconformal algebras in two-dimensions*, Phys. Lett. **B291** (1992) 71.

[91] L. Frappat, A. Sciarrino and P. Sorba, *Structure of basic Lie superalgebras and of their affine extensions*, Comm. Math. Phys. **121** (1989) 457.

[92] L. Freidel and J.M. Maillet, *Quadratic algebras and integrable systems*, Phys. Lett. **B262** (1991) 278.

[93] E. Frenkel and V. Kac, *Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models*, Inv. Math. **62** (1980) 23.

[94] E. Frenkel, V. Kac and M. Wakimoto, *Characters and fusion rules for $\mathcal{W}$ algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reductions*, Comm. Math. Phys. **147** (1992) 295.

[95] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker, *Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575.

[96] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker, *Superconformal invariance in two-dimensions and the tricritical Ising model*, Phys. Lett. **B151** (1985) 37.

[97] A. Fring and R. Köberle, *Affine Toda field theory in the presence of reflecting boundaries*, Nucl. Phys. **B419** (1994) 647; `hep-th/9309142`
Factorized scattering in the presence of reflecting boundaries, ibid. **B421** (1994) 159; `hep-th/9304141`.

[98] C. Frønsdal, *Quasi Hopf Deformations of Quantum Groups,* Lett. Math. Phys. **40** (1997) 117; `q-alg/9611028`.

[99] J. Fuchs, *More on the super WZW theory*, Nucl. Phys. **B318** (1989) 631.

[100] G.M. Gandenberger, *New non-diagonal solutions to the $A_n^{(1)}$ boundary Yang–Baxter equation,* `hep-th/9911178`.

[101] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation,* Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095.

[102] B. Gato-Rivera and A.M. Semikhatov, *$D \leq 1$ U $D \geq 25$ and $\mathcal{W}$ constraints from BRST invariance in the $c \neq 3$ topological algebra*, Phys. Lett. **B293** (1992) 72; Theor. Math. Phys. **95** (1993) 536; Teor. Mat. Fiz. **95** (1993) 239; `hep-th/9207004`.

[103] M. Gattobigio, A. Liguori and M. Mintchev, *Quantization of the nonlinear Schrodinger equation on the half line*, Phys. Lett. **B428** (1998) 143; `hep-th/9801094`;
The nonlinear Schrodinger equation on the half line, J. Math. Phys. **40** (1999) 2949; `hep-th/9811188`.

[104] X.Y. Ge, M.D. Gould, Y.Z. Zhang and H.Q. Zhou, *Integrable eight-state supersymmetric U model with boundary terms and its Bethe Ansatz solution,* `cond-mat/9709308`.

[105] X.Y. Ge, K. Xue and Y.M. Cho, *Realizations of Yangians in quantum mechanics and applications*, preprint NIM-TP-97-12.

[106] I.M. Gel'fand and B.M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Am. Math. Soc., Transl., II. Ser. 1 (1955) 253.

[107] J.L. Gervais, A. Neveu, *Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string field theory,* Nucl. Phys. **B 238** (1984) 125.

[108] S. Ghoshal and A.B. Zamolodchikov, *Boundary S matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory,* Int. Journ. Mod. Phys. **A9** (1994) 3841 [Erratum, ibid. **A9** (1994) 4353]; `hep-th/9306002`.

[109] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, *Virasoro algebras and coset space models*, Phys. Lett. **B152** (1985) 88;
Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras, Comm. Math. Phys. **103** (1986) 105.

[110] P. Goddard, W. Nahm, D.I. Olive, A. Schwimmer, *Vertex operators for nonsimply laced algebras*, Comm. Math. Phys. **107** (1986) 179.

[111] P. Goddard and D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics*, Int. J. Mod. Phys. **A1** (1986) 303.

[112] P. Goddard, D.I. Olive and A. Waterson, *Superalgebras, symplectic bosons and the Sugawara construction*, Comm. Math. Phys. **112** (1987) 591.

[113] P. Goddard and A. Schwimmer, *Factoring out free fermions and superconformal algebras*, Phys. Lett. **B214** (1988) 209.

[114] A. González-Ruiz, *Integrable open-boundary conditions for the supersymmetric t-J model. The quantum group invariant case,* Nucl. Phys. **B424**(1994) 468; `hep-th/9401118`.

[115] M.D. Gould and Y. Zhang, *On super RS algebra and Drinfeld realization of quantum affine superalgebra,* `q-alg/9712011`.

[116] F.D.M. Haldane, Z.N.C. Ha, J.C. Talstra, D. Bernard and V. Pasquier, *Yangian symmetry of integrable quantum chains with long-range interactions and a new description of states in conformal field theory,* Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2021.

[117] M.B. Halpern, *Quantum 'solitons' which are SU(N) fermions*, Phys. Rev. **D12** (1975) 1684.

[118] W. Heisenberg, *Zur theorie der ferromagnitismus,* Zeitschrift für Physik **49** (1928) 619.

[119] J. Honerkamp, P. Weber, A. Wiesler, *On the connection between the inverse transform method and the exact quantum eigenstates*, Nucl. Phys. **B152** (1979) 266.

[120] K. Hornfeck, *The minimal supersymetric extensions of* $\mathcal{W}A_{n-1}$, Phys. Lett. **B275** (1992) 355.

[121] K. Hornfeck, $\mathcal{W}$ *algebras with set of primary fields of dimensions (3, 4, 5) and (3, 4, 5, 6)*, Nucl. Phys. **B407** (1993) 217; `hep-th/9212104`.

[122] J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. Ser. A **276** (1963) 238.

[123] T. Inami and K.I. Izawa, *Super Toda theory from WZNW theories*, Phys. Lett. **B255** (1991) 521.

[124] K. Iohara, *Bosonic representations of Yangian Double* $\mathcal{D}Y_\hbar(g)$ *with* $g = gl_N, sl_N$, J. Phys. **A29** (1996) 4593; `q-alg/9603033`.

[125] K. Ito, *Quantum Hamiltonian reduction and* $\mathcal{W}B$ *algebra*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 4885.

[126] K. Ito, J.O. Madsen and J.L. Petersen, *String Theory, Quantum Gravity and the Unification of the Fundamental Interactions*, M. Bianchi, F. Fucito, E. Marinari and A. Sagnotti (eds.), World Scientific 1993, p. 302; `hep-th/9211019`
K. Ito, J.O. Madsen and J.L. Petersen, *Extended superconformal algebras and free field realizations from Hamiltonian reduction*, Phys. Lett. **B318** (1993) 315; `hep-th/9307189`.

[127] K. Ito, J.O. Madsen and J.L. Petersen, *Free field representations of extended superconformal algebras*, Nucl. Phys. **B398** (1993) 425; `hep-th/9207009`.

[128] A.G. Izergin and V.E. Korepin, *A lattice model related to the nonlinear Schrodinger equation,* Sov. Phys. Dokl. **26** (1981) 653.

[129] C.G.J. Jacobi, J. de Crelle **17** (1837).

[130] M. Jimbo, *A q-analoque of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation,* Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63.

[131] M. Jimbo, *Quantum R-matrix for the generalized Toda system,* Commun. Math. Phys. **102** (1986) 537.

[132] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, J. Shiraishi, *Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups*, Transform. Groups **4** (1999) 303; `q-alg/9712029`.

[133] M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models,* RIMS-981, (AMS, 1995).

[134] M. Jimbo and T. Miwa, *QKZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime,* J. Phys. **A29** (1996) 2923; `hep-th/9601135`.

[135] G. Jüttner, A. Klümper and J. Suzuki, *From fusion hierarchy to excited state TBA*, Nucl. Phys. **B512** (1998) 581; `hep-th/9707074`.

[136] V.G. Kac, *Simple graded algebras of finite growth,* Funct. Anal. Appl. **1** (1967) 328.

[137] V.G. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math **26** (1977) 8.

[138] V.G. Kac, *Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras*, Lect. Notes Phys. **94** (1979) 441.

[139] V.G. Kac and I.T. Todorov, *Superconformal current algebras and their unitary representations*, Comm. Math. Phys. **102** (1985) 337.

[140] V.G. Kac and M. Wakimoto, *Modular and conformal invariance constraints in representation theory of affine algebras*, Adv. Math. **70** (1988) 156;
Modular invariant representations of infinite dimensional Lie algebras and superalgebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **85** (1988) 4956.

[141] H.G. Kausch, Ph.D thesis, Cambridge University (1991).

[142] H.G. Kausch and G.M.T. Watts, *A study of $\mathcal{W}$ algebras using Jacobi identities*, Nucl. Phys. **B354** (1991) 740.

[143] S.M. Khoroshkin and V.N. Tolstoy, *Universal R-matrix for quantized (super)algebras*, Commun. Math. Phys. **141** (1991) 599.

[144] S.M. Khoroshkin and V.N. Tolstoy, *Yangian double and rational R-matrix*, Lett. Math. Phys. **36** (1996) 373; `hep-th/9406194`.

[145] S.M. Khoroshkin and V.N. Tolstoy, *Twisting of quantum (super)algebras. Connection of Drinfeld's and Cartan–Weyl realizations for quantum affine algebras,* `hep-th/9404036`.

[146] N. Kitanine, J.M. Maillet and V. Terras, *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain,* Nucl. Phys. **B554** (1999) 647; `math-ph/9807020`;
Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field, Nucl. Phys. **B567** (2000) 554; `math-ph/9907019`.

[147] N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov and V. Terras, *Spin spin correlation functions of the XXZ - 1/2 Heisenberg chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. **B641** (2002) 487; `hep-th/0201045` ;
Correlation functions of the XXZ spin - 1/2 heisenberg chain at the free fermion point from their multiple integral representations, Nucl. Phys. **B642** (2002) 433; `hep-th/0203169`.

[148] A. Klümper, Ann. Physik **1** (1992) 540.

[149] S. Komata, K. Mohri and H. Nohara, *Classical and quantum extended superconformal algebra*, Nucl. Phys. **B359** (1991) 168.

[150] V.E. Korepin, G. Izergin and N.M. Bogoliubov, *Quantum inverse scattering method, correlation functions and algebraic Bethe Ansatz,* Cambridge University Press, (1993).

[151] B. Kostant and S. Sternberg, *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite dimensional Clifford algebras*, Ann. Phys. **176** (1987) 49.

[152] R. Konik and A. LeClair, *Purely Transmitting Defect Field Theories*, Nucl. Phys. **B538** (1999) 587; `hep-th/9703085`.

[153] P.P. Kulish, N.Y. Reshetikhin and E.K. Sklyanin *Yang-Baxter equation and representation theory,* Lett. Math. Phys. **5** (1981) 393.

[154] P.P. Kulish and E.K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method: recent developments*, Lect. Notes Phys. **151** (1982) 61.

[155] P.P. Kulish and E.K. Sklyanin, *Solutions of the Yang–Baxter equation,* Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **95** (1980) 129; J. Sov. Math. **19** (1982) 1596.

[156] A. Kuniba, K. Sakai and J. Suzuki, *Continued fraction TBA and functional relations in XXZ model at root of unity*, Nucl. Phys. **B 525** (1998) 597; `math.QA/9803056`.

[157] P.D. Lax, *Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968) 467.

[158] J.M. Leinaas and J. Myrheim, *On the theory of identical particles*, Nuovo Cim. **B37** (1977) 1.

[159] J.M. Leinaas and J. Myrheim, *Quantum theories for identical particles*, Int. J. Mod. Phys. **B5** (1991) 2573;
Heisenberg quantization for systems of identical particles, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993) 3649;
Intermediate statistics for vortices in superfluid films, Phys. Rev. **B37** (1988) 9286.

[160] D.A. Leites, M.V. Saveliev and V.V. Serganova, in *Proceedings of the Third Yurmale Seminar* (VUN Science, Utrecht, The Netherlands, 1986), p. 255.

[161] G. Letzter, *Symmetric pairs for quantized enveloping algebras*, J. Algebra **220** (1999) 729;
Coideal Subalgebras and Quantum Symmetric Pairs, MSRI volume 1999, Hopf Algebra Workshop, `math.QA/0103228`.

[162] A.N. Leznov and M.V. Saveliev, *Two-dimensional exactly and completely integrable dynamical systems*, Comm. Math. Phys. **89** (1983) 59;
A.N. Leznov and M.V. Saveliev, *Exactly and completely integrable nonlinear dynamical systems*, Act. Appl. Math. **16** (1989) 1.

[163] S. Lie, *Theorie der transformationsgruppen,* Teubner, Leipzig **1** (1888), **2** (1890), **3** (1893).

[164] A. Liguori, M. Mintchev and M. Rossi, *Fock representations of exchange algebras with involution*, J. Math. Phys. **38** (1997) 2888.

[165] A. Liguori, M. Mintchev and L. Zhao, *Boundary exchange algebras and scattering on the half-line,* Commun. Math. Phys. **194** (1998) 569; `hep-th/9607085`.

[166] A. Lima-Santos, *Reflection K Matrices for 19-vertex models,* Nucl. Phys. **B558** (1999) 637; `solv-int/9906003`.

[167] J. Liouville, J. Math **18** (1853).

[168] M. Lorente and B. Gruber, *Classification of semisimple subalgebras of simple Lie algebras*, J. Math. Phys. **13** (1972) 1639.

[169] S.L. Lukyanov and V.A. Fateev, *Additional symmetries and exactly soluble models in two-dimensional field theory*, Soviet Scientific Reviews **A15**, Physics (1990) 2.

[170] G. Mack, *All unitary ray representations of the conformal group SU(2,2) with positive energy*, Comm. Math. Phys. **55** (1977) 1.

[171] N.J. MacKay and B.J. Short, *Boundary scattering, symmetric spaces and the principal chiral model on the half-line,* Commun. Math. Phys. **233** (2003) 313; `hep-th/0104212`.

[172] J.M. Maillet and J. Sanchez de Santos, *Drinfel'd twists and algebraic Bethe Ansatz*, `q-alg/9612012`.

[173] V.A. Marchenko, *On the reconstruction of the potenial energy from phases of the scattered waves* (en russe) Dokl. Akad. Nauk SSSR **104** (1955) 695.

[174] L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, *Analytical Bethe Ansatz for quantum algebra invariant spin chains,* Nucl. Phys. **B372** (1992) 597; `hep-th/9110050`.

[175] L. Mezincescu and R.I. Nepomechie, *Fusion procedure for open chains,* J. Phys. **A25** (1992) 2533.

[176] J.A. Minahan and K. Zarembo, *The Bethe-Ansatz for N=4 Super Yang-Mills,* JHEP 0303 (2003) 013; `hep-th/0212208`.

[177] R.M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. I: A remarkable explicit nonlinear transformation*, J. Math. Phys. **9** (1968) 1202.

[178] A. Molev, *Finite-dimensional irreducible representations of twisted Yangians*, J. Math. Phys. **39** (1998) 5559, `q-alg/9711022`.

[179] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995) 923, `hep-th/9409036`.

[180] A. I. Molev, M. Nazarov and G. Olshanski, *Yangians and classical Lie algebras,* Russ. Math. Surveys **51** (1996) 205; `hep-th/9409025`.

[181] R.V. Moody, *Lie algebras associated with generalized Cartan matrices,* Bull. Amer. Math Soc. **73** (1967) 217.

[182] M. Moriconi, *Integrable boundary conditions and reflection matrices for the $O(N)$ nonlinear sigma model,* Nucl. Phys. **B619** (2001) 396; `hep-th/0108039`.

[183] P. Moussa and R. Stora, *Angular analysis of elementary particles reactions*, in *Methods in Subnuclear Physics*, Gordon and Breach, Herceg-Novi Summer School, 1966.

[184] S. Murakami and M. Wadati, *Connection between Yangian symmetry and the quantum inverse scattering method,* J. Phys. **A29** (1996) 7903.

[185] M.L. Nazarov, *Quantum Berezinian and the classical Capelli identity,* Lett. Math. Phys. **21** (1991) 123.

[186] R.I. Nepomechie, *Bethe Ansatz solution of the open XXZ chain with nondiagonal boundary terms,* J. Phys. **A37** (2004) 433; `hep-th/0304092`.

[187] R.I. Nepomechie, *Functional relations and Bethe Ansatz for the XXZ chain,* J. Stat. Phys. **111** (2003) 1363; `hep-th/0211001`.

[188] R.I. Nepomechie, *Boundary quantum group generators of type A,* Lett. Math. Phys. **62** (2002) 83; `hep-th/0204181`.

[189] R.I. Nepomechie and F. Ravanini, *Completeness of the Bethe Ansatz solution of the open XXZ chain with nondiagonal boundary terms,* J. Phys. **A36** (2003) 11391; `hep-th/0307095`.

[190] A. Neveu and J.H. Schwarz, *Factorizable dual model of pions*, Nucl. Phys. **B31** (1971) 86.

[191] H. Nohara and K. Mohri, *Extended superconformal algebra from superToda field theory*, Nucl. Phys. **B349** (1991) 253.

[192] M. Noumi, *Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces,* Adv. Math. **123** (1996) 16; `math.QA/9503224`.

[193] M. Noumi and T. Sugitani, *Quantum symmetric spaces and related q-orthogonal polynomials*, in Group Theoretical Methods in Physics (ICGTMP) (Toyonaka, Japan, 1994), World Sci. Publishing, River Edge, N.J. (1995); `math.QA/9503225`.

[194] E. Ogievetsky, N.Yu. Reshetikhin and P. Wiegmann, *The principal chiral field in two-dimensions on classical Lie algebras: the Bethe Ansatz solution and factorized theory of scattering,* Nucl. Phys. **B280** (1987) 45.

[195] E. Ogievetsky and P. Wiegmann, *Factorized S matrix and the Bethe Ansatz for simple lie groups*, Phys. Lett. **B168** (1986) 360.

[196] D. Olive and N. Turok, *The symmetries of Dynkin diagrams and the reduction of Toda field equations*, Nucl. Phys. **B215** (1983) 47.

[197] G.I. Olshanski, *Twisted Yangians and infinite dimensional Lie algebras*, dans "Quantum groups", Lecture Notes in Math. **1510** (P. Kulish ed.) 104.

[198] L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, *$\mathcal{W}$ algebras for generalized Toda theories*, Comm. Math. Phys. **143** (1992) 333.

[199] S. Penati and D. Zanon, *Supersymmetric, integrable Toda field theories: the B(1,1) model*, Phys. Lett. **B288** (1992) 297; `hep-th/9205045`.

[200] A.M. Polyakov, *Gauge transformations and diffeomorphisms*, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 833.

[201] F. Pu, Y. Wu, B. Zhao, *Quantum inverse scattering method for multicomponent nonlinear Schrödinger model of bosons or fermions with repulsive coupling*, J. Phys. **A20** (1987) 1173.

[202] F. Pu and B. Zhao, *Quantum Gelfand-Levitan equations for nonlinear Schrödinger model of spin 1/2 particles*, Phys. Rev. **D30** (1984) 2253.

[203] P. Ramond, *Dual theory for free fermions*, Phys. Rev. **D3** (1971) 2415.

[204] N.Y. Reshetikhin, *A method of functional equations in the theory of exactly solvable quantum systems,* Lett. Math. Phys. **7** (1983) 205.

[205] N.Y. Reshetikhin, *Integrable models of quantum one-dimensional magnets with $O(n)$ and $Sp(2k)$ symmetry,* Theor. Math. Phys. **63** (1985) 555.

[206] N.Y. Reshetikhin, *The spectrum of the transfer matrices connected with Kac-Moody algebras,* Lett. Math. Phys. **14** (1987) 235.

[207] M. Rocek, K. Schoutens and A. Sevrin, *Off-shell WZW models in extended superspace*, Phys. Lett. **B265** (1991) 303.

[208] R.R. Rosales, *Exact solutions of some nonlinear evolution equations*, Stud. Appl. Math. **59** (1978) 117.

[209] M. Rosso, *An analogue of P.B.W. theorem and the universal R-matrix*, Commun. Math. Phys. **124** (1989) 307.

[210] K. Sakai, *Excited state TBA and functional relations in spinless fermion model*, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 1789; `cond-mat/9903112`.

[211] H. Saleur, *The continuum limit of $SL(N/K)$ integrable super spin chains*, Nucl. Phys. **B578** (2000) 552; `solv-int/9905007`.

[212] M.V. Saveliev, *Integrable graded manifolds and nonlinear equations*, Comm. Math. Phys. **95** (1984) 199;
On some connections and extensions of $\mathcal{W}$-algebras, Mod. Phys. Lett. **A5**, 27 (1990) 2223.

[213] M. Scheunert, W. Nahm and V. Rittenberg, *Irreducible representations of the osp(2,1) and spl(2,1) graded Lie algebras*, J. Math. Phys. **18** (1977) 155.

[214] A. G. M. Schmidt, B. K. Cheng and M. G. E. da Luz, *Green functions for generalized point interactions in one dimension: A scattering approach*, Phys. Rev. A **66** (2002) 062712; `quant-ph/0211193`.

[215] K. Schoutens, *$O(N)$-extended superconformal field theory in superspace*, Nucl. Phys. **B295** (1988) 634.

[216] K. Schoutens, A. Sevrin and P. van Nieuwenhuizen, *Quantum BRST charge for quadratically nonlinear Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **124** (1989) 87.

[217] G. Segal, *Unitarity representations of some infinite dimensional groups*, Comm. Math. Phys. **80** (1981) 301.

[218] A. Sevrin and W. Troost, *Extensions of the Virasoro algebra and gauged WZW models*, Phys. Lett. **B315** (1993) 304; `hep-th/9306033`.

[219] A. Sevrin, W. Troost and A. Van Proeyen, *Superconformal algebras in two-dimensions with N=4*, Phys. Lett. **B208** (1988) 447.

[220] E.K. Sklyanin, *Method of inverse scattering problem and the non-linear quantum Schrödinger equation*, Sov. Phys. Dokl. **24** (1979) 1979.

[221] E.K. Sklyanin, *Boundary conditions for integrable quantum systems*, J. Phys. **A21** (1988) 2375.

[222] H. Sugawara, *A field theory of currents*, Phys. Rev. **170** (1968) 1659.

[223] B. Sutherland, *Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II,* Phys. Rev **A5** (1972) 1372.

[224] J. Suzuki, *Quantum Jacobi-Trudi formula and E(8) structure in the Ising model in a field*, Nucl. Phys. **B528** (1998) 683; `cond-mat/9805241`.

[225] M. Suzuki, *Transfer-matrix method and Monte Carlo simulation in quantum spin systems* Phys. Rev. **B 31** (1985) 2957.

[226] K. Takemura, *The Yangien symmetry in the spin Calogero model and its applications,* `solv-int/9701015`.

[227] V.O. Tarasov, *Structure of quantum L-operator for the R-matrix of the XXZ model*, Theor. Math. Phys. **61** (1984) 1065;
Irreducible monodromy matrices for the R-matrix of the XXZ model and lattice local quantum Hamiltonian, ibid. **63** (1985) 440.

[228] H.B. Thacker, *Exact integrability in quantum field theory and statistical systems*, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.

[229] H.B. Thacker and D. Wilkinson, *Inverse scattering transform as an operator method in quantum field theory,* Phys. Rev. **D19** (1979) 3660.

[230] F. Toppan, Y.-Z. Zhang, *Superconformal affine Liouville theory*, Phys. Lett. **B292** (1992) 67.

[231] Z. Tsuboi, *A note on the $osp(1/2s)$ thermodynamic Bethe ansatz equations,* Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002) 2351; `cond-mat/0108358`.

[232] J. Vermaseren, *New features of FORM*, `math-ph/0010025`.

[233] V.I. Vichirko and N.Y. Reshetikhin, *Excitation spectrum of the anisotropic generalization of an su_3 magnet,* Theor. Math. Phys. **56** (1983) 805.

[234] M.S. Virasoro, *Subsidiary conditions and ghosts in dual resonance models*, Phys. Rev. **D1** (1970) 2933.

[235] A.A. Vladimirov, *A method for obtaining quantum doubles from the Yang-Baxter R-matrices*, `hep-th/9302042`.

[236] M. Wakimoto, *Fock representations of the affine Lie algebra $A1^{(1)}$*, Comm. Math. Phys. **104** (1986) 605.

[237] J. Wess and B. Zumino, *Consequences of anomalous Ward identities*, Phys. Lett. **B37** (1971) 95.

[238] E. Witten, *Nonabelian bosonization*, Comm. Math. Phys. **92** (1984) 455.

[239] C.N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction,* Phys. Rev. Lett **19** (1967) 1312.

[240] C.N. Yang and C.P. Yang, *One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I- Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system*, Phys. Rev. **150** (1966) 321; *II- Properties of the ground state energy per alttice site for an infinite system*, ibid. 327.

[241] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. - JHEP **34** (1972) 62;

[242] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two-dimensional quantum field theory*, Theor. Math. Phys. **65** (1985) 1205; Teor. Mat. Fiz. **65** (1985) 347.

[243] Al. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Relativistic factorized S-matrix in two dimensions having $O(N)$ isotropic symmetry,* Nucl. Phys. **B133** (1978) 525.

[244] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models,* Ann. Phys. (NY) **120** (1979) 253.

[245] R.B. Zhang, *The $gl(M|N)$ super Yangian and its finite dimensional representations,* Lett. Math. Phys. **37** (1996) 419; `q-alg/9507029`.

[246] Y.-Z. Zhang, *N extended superLiouville theory from osp(N/2) WZNW model*, Phys. Lett. **B283** (1992) 237.

[247] Y. Z. Zhang and H. Q. Zhou, *New integrable boundary conditions for the q-deformed supersymmetric U model and Bethe Ansatz equations,* Phys. Lett. **A244** (1998) 427; `cond-mat/9711238`.

Quelques revues sur les sujets abordés

O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge Monographs on Math. Phys., Cambridge University Press (2003).

F. Barbarin, *Algèbres W et applications*, thèse de l'Université de Savoie, Octobre 1996.

P. Bouwknegt and K. Schoutens, *W symmetry in conformal field theory*, Phys. Rep. **223** (1993) 183; `hep-th/9210010`.

V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups,* Cambridge University press (1995).

N. Crampé, *Approches algébriques dans les systèmes intégrables*, thèse de l'Université de Savoie, Juin 2004.

J. de Boer, F. Harmsze and T. Tjin, *Nonlinear finite W symmetries and applications in elementary systems*, Phys. Rep. **272** (1996) 139; `hep-th/9503161`.

V.G. Drinfel'd, *Quantum Groups,* Proceedings Int. Cong. Math. Berkeley, California, USA (1986) 798; J. Sov. Math. **41** (1988) 898; Zap. Nauchn. Semin. **155** (1986) 18.

L.D. Faddeev, *How algebraic Bethe Ansazt works for integrable models*, Les Houches lectures (1982); `hep-th/9605187`.

L. Fehér, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle and I. Tsutsui, *On the general structure of Hamiltonian reductions of the WZNW theory*, *Phys. Rep.* **222** (1992) 1; `hep-th/9402022`.

L. Frappat, A. Sciarrino and P. Sorba, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras,* Academic Press, London (2000).

E. Gutkin, *Quantum nonlinear Schrödinger equation: two solutions*, Phys. Rep. **167** (1988) 1.

V.G. Kac, *A sketch of Lie superalgebra theory*, Comm. Math. Phys. **53** (1977) 31.

V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1990).

P.P. Kulish and E.K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method: recent developments*, Lect. Notes Phys. **151** (1982) 61.

J.M. Leinaas, *Identical particles and fractional statistics*, Phys. Rept. **242** (1994) 371.

J. McCleary, *User's Guide To Spectral Sequences*, Publish or Perish, Wilmington (Del.), 1985.

A.I. Molev, *Yangians and their applications*, Handbook of Algebra, vol. 3, (M. Hazewinkel, Ed.), Elsevier, 2003, 907, `math-QA/0211288`.

M.A. Olshansky and A.M. Perelomov, *Classical finite dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71** (1981) 314;
Quantum integrable systems related to Lie algebras, Phys. Rep. **94** (1983) 313.

A. Pressley and G. Segal, *Loop groups*, Oxford, UK: Clarendon (1988) (Oxford math. monographs).

R. Slansky, *Group theory for unified model building*, Phys. Rep. **79** (1981) n^o 1.

V. Terras, *Méthode du problème inverse, groupes quantiques et fonctions de corrélation des modèles intégrables quantiques*, thèse de l'École normale supérieure de Lyon, Janvier 2000.

J.W. Van der Leur, *Contragredient Lie superalgebras of finite growth*, Utrecht thesis, 1985.

P. Zinn-Justin, *Quelques applications de L'Ansatz de Bethe*, thèse de l'Université de Paris 6, 1998.

Appendice A

Liste complète de publication

A.1 Articles parus dans des journaux à comités de lecture

[ERA1] *Extended Super-Kac-Moody Algebras and their Super-Derivation Algebras*
R. Coquereaux, L. Frappat, E. Ragoucy and P. Sorba;
Comm. Math. Phys. **133** (1990) 1.

[ERA2] *Generalized Kac-Moody Algebras and the Diffeomorphism Group of a Closed Surface*
L. Frappat, H. Hogaasen, E. Ragoucy, P. Sorba and F. Thuillier;
Nucl. Phys. **B334** (1990) 250.

[ERA3] *A Coset Construction for the Super-$\mathcal{W}_3$ Algebra*
K. Hornfeck and E. Ragoucy;
Nucl. Phys. **B340** (1990) 225.

[ERA4] *A Wick Theorem for Local Chiral Conformal Fields*
E. Ragoucy and F. Thuillier;
Preprint LAPP-TH-283.

[ERA5] *Super-Kac-Moody Algebras and the $N = 2$ Superconformal Case*
E. Ragoucy and P. Sorba;
Phys. Lett. **B245** (1990) 245.

[ERA6] *An attempt to relate area-preserving diffeomorphisms to Kac-Moody Algebras*
E. Ragoucy and P. Sorba;
Lett. Math. Phys. **21** (1991) 329.

[ERA7] *New realizations of the super Virasoro algebra at $c = \frac{3}{2}$*
E. Ragoucy and P. Sorba;
Phys. Lett. **B256** (1991) 30.

[ERA8] *General construction of the Virasoro algebra from superalgebras*
L. Frappat, E. Ragoucy and F. Thuillier;
Phys. Lett. **B262** (1991) 271.

[ERA9] *Extended Kac-Moody Algebras and Applications*
E. Ragoucy and P. Sorba;
Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 2883.

[ERA10] *Super Toda theories and $\mathcal{W}$-algebras from superspace Wess-Zumino-Witten models*
F. Delduc, E. Ragoucy and P. Sorba;
Comm. Math. Phys. **146** (1992) 403.

[ERA11] *Towards a classification of $\mathcal{W}$-algebras arising from non Abelian Toda theories*
F. Delduc, E. Ragoucy and P. Sorba;
Phys. Lett. **B279** (1992) 319.

[ERA12] *$\mathcal{W}$-algebras and superalg. from constrained WZW models: a group theoretical classification*
L. Frappat, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9207102
Comm. Math. Phys. **157** (1993) 499.

[ERA13] *Folding the $\mathcal{W}$-algebras*
L. Frappat, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9301040
Nucl. Phys. **B404** (1993) 805.

[ERA14] *Characteristic Dynkin diagrams and $\mathcal{W}$-algebras*
E. Ragoucy; hep-th/9301011
Nucl. Phys. **409** (1993) 213.

[ERA15] *Rational $\mathcal{W}$-algebras from composite operators*
F. Delduc, L. Frappat, E. Ragoucy, P. Sorba and F. Toppan; hep-th/9307106
Phys. Lett. **B318** (1993) 457.

[ERA16] *$OSp(1|2)$ and $Sl(2)$ reductions in super-Toda models and factorization of spin 1/2 fields*
E. Ragoucy; hep-th/9306079
Nucl. Phys. **B411** (1994) 778.

[ERA17] *Gauged $\mathcal{W}$-algebras*
F. Delduc, L. Frappat, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9404037
Phys. Lett. **B335** (1994) 151.

[ERA18] *Quantum Hamiltonian reduction in superspace formalism*
J.O. Madsen and E. Ragoucy; hep-th/9403012
Nucl. Phys. **B429** (1994) 277.

[ERA19] *Currents on Grassmann algebras*
R. Coquereaux and E. Ragoucy; hep-th/9310147
J. Geom. Phys. **15** (1995) 333.

[ERA20] *Finite $\mathcal{W}$-algebras and intermediate statistics*
F. Barbarin, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9410114
Nucl. Phys. **B442** (1995) 425.

[ERA21] *Slave-particle quantization and sum rules in the t-J model*
J.C. Le Guillou and E. Ragoucy; hep-cond-mat/9508042
Phys. Rev. **B52** (1995) 2403.

[ERA22] *Secondary quantum Hamiltonian reduction*
J.O. Madsen and E. Ragoucy; hep-th/9503042
Comm. Math. Phys. **185** (1997) 509.

[ERA23] *Non-polynomial realizations of $\mathcal{W}$-algebras*
F. Barbarin, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9509088
Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 2835.

[ERA24] *Strings from $N = 2$ gauged Wess-Zumino-Witten models*
E. Ragoucy, A. Sevrin and P. Sorba; hep-th/9511049
Comm. Math. Phys. **181** (1996) 91.

[ERA25] *$\mathcal{W}$-realization of Lie algebras: application to $so(4,2)$ and Poincaré algebras*
F. Barbarin, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9606014
Comm. Math. Phys. **186** (1997) 393.

[ERA26] *Universal solutions of quantum Yang-Baxter equation*
D. Arnaudon, E. Buffenoir, E. Ragoucy and Ph. Roche; q-alg/9712037
Lett. Math. Phys. **44** (1998) 201.

[ERA27] *Yangian realisation from finite $\mathcal{W}$-algebras*
E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9803243
Comm. Math. Phys. **203** (1999) 551.

[ERA28] *Explicit solution of the quantum three-body Calogero-Sutherland model*
A.M. Perelomov, E. Ragoucy and Ph. Zaugg; hep-th/9805149
J. Phys. **A31** (1998) L559.

[ERA29] *Yangian symmetry in the nonlinear Schrödinger hierarchy*
M. Mintchev, E. Ragoucy, P. Sorba and Ph. Zaugg; hep-th/9905105
J. Phys. **A32** (1999) 5885.

[ERA30] *Toward a cladistics of double Yangians and elliptic algebra*
D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat, E. Ragoucy and M. Rossi; math.QA/9906189
J. Phys. **A33** (2000) 6279.

[ERA31] *On the quasi-Hopf structure of deformed double Yangians*
D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat, E. Ragoucy and M. Rossi; math.QA/0001034
Lett. Math. Phys. **51** (2000) 193.

[ERA32] *RTT presentation of finite $\mathcal{W}$-algebras*
C. Briot and E. Ragoucy; math.QA/0005111
J. Phys. **A34** (2001) 7287.

[ERA33] *Twisted Yangians and folded $\mathcal{W}$-algebras*
E. Ragoucy; math.QA/0012182
Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 2411.

[ERA34] *Spontaneous symmetry breaking in the gl(N)-NLS hierarchy on the half-line*
M. Mintchev, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/0104079
J. Phys. **A34** (2001) 8345.

[ERA35] *Yangians and quantum universal solutions of Gervais-Neveu-Felder equations*
D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat and E. Ragoucy; math.QA/0104181
Comm. Math. Phys. **226** (2002) 183.

[ERA36] *Vertex operators for quantum groups and application to integrable systems*
E. Ragoucy; math.QA/0108207
J. Phys. **A35** (2002) 7929.

[ERA37] *Vertex operators for boundary algebras*
E. Ragoucy; math.QA/0108221
Lett. Math. Phys. **58** (2001) 249.

[ERA38] *Representations of reflection algebras*
M. Molev and E. Ragoucy; math.QA/0107213
Rev. Math. Phys. **14** (2002) 317.

[ERA39] *Twisted super-Yangians and their representations*
C. Briot and E. Ragoucy; math.QA/0111308
J. Math. Phys. **44** (2003) 1052.

[ERA40] *R-matrix presentation for super-Yangians $Y(osp(m|2n))$*
D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, L. Frappat and E. Ragoucy; math.QA/0111325
J. Math. Phys. **44** (2003) 302.

[ERA41] *Quantum group symmetry of integrable systems with or without boundary*
E. Ragoucy; math.QA/0202095
Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002) 3649.

[ERA42] *Coideal subalgebras in quantum affine algebras*
A. Molev, E. Ragoucy and P. Sorba; math.QA/0208140
Rev. Math. Phys. **15** (2003) 789.

[ERA43] *Scattering in the presence of a Reflecting and Transmitting Impurity*
M. Mintchev, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/0209052
Phys. Lett. **B547** (2002) 313.

[ERA44] *Super Yangian $Y(osp(1|2))$ and the Universal R-matrix of its Quantum Double*
D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, L. Frappat and E. Ragoucy; math.QA/0209167
Comm. Math. Phys. **240** (2003) 31.

[ERA45] *$\mathcal{W}$-superalgebras as truncations of super-Yangians*
C. Briot and E. Ragoucy; math.QA/0209339
J. Phys. **A36** (2003) 1057.

[ERA46] *Quantum resolution of the nonlinear super-Schrödinger equation*
V. Caudrelier and E. Ragoucy; math-ph/0306010
Int. J. Mod. Phys. **A19** (2004) 1559.

[ERA47] *Reflection-Transmission algebras*
M. Mintchev, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/0303187
J. Phys. **A36** (2003) 10407.

[ERA48] *Classification of reflection matrices related to (super)Yangian and application to open spin chain models* math.QA/0304150
D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat and E. Ragoucy;
Nucl. Phys. **B668 [FS]** (2003) 469.

[ERA49] *Interplay between Zamolodchikov-Faddeev and Reflection-Transmission algebras*
M. Mintchev and E. Ragoucy math.QA/0306084
J. Phys. **A37** (2004) 425.

[ERA50] *Lax pair and super-Yangian symmetry of the non-linear super-Schrödinger*
V. Caudrelier and E. Ragoucy; math.QA/0306115
J. Math. Phys. **44** (2003) 5706.

[ERA51] *Bethe Ansatz equations and exact S matrices for the osp($M|2n$) open super spin chain*
D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat, and É. Ragoucy.
Nucl. Phys. **B687 [FS]** (2004) 257 math-ph/0310042.

[ERA52] *The quantum non-linear Schrödinger model with point-like defect*
V. Caudrelier, M. Mintchev, É. Ragoucy, hep-th/0404144
J. Phys. A Lett. to appear

[ERA53] *Solving the quantum non-linear Schrödinger equation with δ-type impurity*
V. Caudrelier, M. Mintchev, É. Ragoucy, math-ph/0404047
Preprint **LAPTH**-1038/04

[ERA54] *General boundary conditions for the $sl(N)$ and $sl(M|N)$ open spin chains*
D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat, and É. Ragoucy. math-ph/0406021
Preprint LAPTH-1050/04

A.2 Comptes-rendus de conférences

[CF1] *Kac-Moody Algebras, Superconformal Symmetries and p-brane Diffeomorphisms*
E. Ragoucy and P. Sorba;
Proceedings of *The 3rd Hellenic School on Elementary Particule Physics*, Greece (Sept. 89).

[CF2] *Some applications of Kac-Moody Algebras defined on a super manifold*
E. Ragoucy and P. Sorba;
Proceedings of *Quark 90*, Georgia USSR (May 90); *Current Problems in Particle Physics and Cosmology*, Greece (June 90); *John Hopkins Workshop* Hungary (August 90).

[CF3] *Continuous realizations of extended conformal algebras*
E. Ragoucy;
Proceedings of *Top. and Geom. Methods in Fields Theory*, Turku, Finland, May 1991.

[CF4] *(Super) $\mathcal{W}$-algebras from non Abelian (super) Toda theories*
L. Frappat, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9209123
Proceedings of *XIX ICGTMP*, Salamanca (Spain), July 1992.

[CF5] *General properties of classical $\mathcal{W}$-algebras*
F. Delduc, L. Frappat, E. Ragoucy, P. Sorba and F. Toppan; hep-th/9312041
Proceedings of *XXIIth ICDGMTP*, Mexico, September 1993.

[CF6] *Secondary reduction of classical $\mathcal{W}$-algebras*
F. Delduc, L. Frappat, E. Ragoucy and P. Sorba;
Proceedings of *XXth ICGTMP*, Osaka (Japan), July 1994.

[CF7] *$N = 2$ super $\mathcal{W}$-algebras and BRS operator in $\mathcal{W}$-strings*
E. Ragoucy;
Proceedings of *$\mathcal{W}$-95*, Marseille (France), July 95.

[CF8] *Linearization of $\mathcal{W}$-algebras and $\mathcal{W}$-superalgebras*
J.O. Madsen and E. Ragoucy; hep-th/9510061
Proceedings of *Simi 96*, Tbilisi (Georgia), Sept. 96.

[CF9] *$\mathcal{W}$-strings from $N = 2$ Hamiltonian reduction and classification of $N = 2$ super $\mathcal{W}$-algebras*
E. Ragoucy; hep-th/9612071
Proceedings of *Extended and Quantum Alg. and their Appl. to Phys.*, China, August 96.

[CF10] *Remarks on finite $\mathcal{W}$-algebras*
F. Barbarin, E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9612070
Proceedings of - *Vth Int. Colloq. on Quantum Groups and Integ. Syst.*, Prague June 96;
- *Ext. and Quantum alg. and their appl. to phys.*, China, August 96;
- *Simi 96*, Tbilisi (Georgia), September 1996.

[CF11] *A remarkable connection between Yangians and finite $\mathcal{W}$-algebras*
E. Ragoucy and P. Sorba; hep-th/9803242
Proceedings of - *NEEDS'97*, Creta, June 1997
- *VIIIth Regional Conf. on Math. Phys.*, Armenia, July 97;
- *Vth Wiegner Symposium*, Wien, August 1997;
- *3rd Bologna Workshop on CFT and IM*, Bologna, Oct. 97;
- 7th Colloq. *Quantum groups and integrable systems*, Prague, June 98.
Czech. J. Phys **48** (1998) 1483.

[CF12] *Yangians, finite $\mathcal{W}$-algebras and the Non-linear Schrödinger hierarchy*
M. Mintchev, E. Ragoucy, P. Sorba and Ph. Zaugg; hep-th/9812186
Proceedings of APCTP-Nankai Symposium, *Yang-Baxter systems, non-linear models and their applications*, Séoul, Oct. 98.

[CF13] *On elliptic algebras and double Yangians*
D. Arnaudon, L. Frappat, E. Ragoucy, J. Avan and M. Rossi;
Proceedings of 8^{th} Colloq. *Quantum groups and integrable systems*, Prague, June 99.
Czech. J. Phys **50** (2000) 5.

[CF14] *Deformed oscillators alg. formulation of the nonlinear Schrödinger hierarchy and its symmetry*
E. Ragoucy; `hep-th/9907218`
Proceedings of 8^{th} Colloq. *Quantum groups and integrable systems*, Prague, June 99.
Czech. J. Phys **50** (2000) 163.

[CF15] *Yangians and $\mathcal{W}$-algebras*
C. Briot and E. Ragoucy;
Proceedings of –*NEEDS'2000*, Gokova (Turquie) July 2000;
–*XXIII IGTMP*, Dubna (Russie) August 2000.

[CF16] *Yangians symmetry and the Non-linear Schrodinger hierarchy*
M. Mintchev, E. Ragoucy, P. Sorba and Ph. Zaugg;
Proceedings of Tbilisi meeting, *New trends in math. physics*, Tbilisi (Georgia), Sept. 2000.

[CF17] *Boundaries and symmetry breaking in the nonlinear Schrödinger hierarchy*
M. Mintchev, É. Ragoucy and P. Sorba;
Proceedings of *INTAS meeting*, **LAPTH**, Annecy-le-Vieux (France), 21-25 mai 2001.

[CF18] *Deformed double Yangians and quasi-Hopf algebras*
D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat and E. Ragoucy;
Proceedings of *68ème Rencontre entre Phys. Théo. et Math.*, IRMA, Strasbourg, June 01.

[CF19] *Yangians, Quantum Groups and Solutions of the Quantum Dynamical Yang–Baxter Equation*
D. Arnaudon, J. Avan, L. Frappat, E. Ragoucy and M. Rossi;
Proceedings of 10^{th} Colloq. *Quantum groups and integrable systems*, Prague, June 01.
Czech. J. Phys. **51** (2001) 1254.

[CF20] *RTT presentation of ortho-symplectic super Yangians. Quasi-Hopf Deformation*
D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampé, L. Frappat and É. Ragoucy;
Proceedings of *Group 24 (ICGTMP)*, Paris, July 15-20, 2002.

[CF21] *Integrable systems with impurity*
É. Ragoucy, `math-ph/0401024`
Proceedings of *Vth International workshop on Lie theory and its applications in physics*, Varna (Bulgaria), June 2003

Résumé:

Cette habilitation est consacrée aux structures algébriques intervenant dans les systèmes uni- et bi-dimensionnels étudiés en physique. Nous y montrons comment ces structures peuvent être utilisées pour obtenir une meilleure compréhension des systèmes physiques qu'elles sous-tendent. Nous y décrivons aussi certains de leurs aspects mathématiques.

Quatre parties composent cette présentation. Elles décrivent différents domaines de la physique que j'ai étudiés, et dans lesquels les cadres algébriques peuvent s'appliquer, à savoir:

- Les théories conformes à deux dimensions, en particulier les algèbres $\mathcal{W}$. Nous présentons la classification de ces dernières et leur quantification en cohomologie BRS.

- Les algèbres $\mathcal{W}$ finies et leur application en physique (anyons et généralisations) et en mathématique (représentations des algèbres de Lie).

- Les structures d'algèbres de Hopf et leur généralisation dynamique, cadre mathématique utilisé dans la partie suivante.

- Les systèmes intégrables, avec deux éclairages différents. D'une part, les chaînes de spins, qui décrivent des modèles unidimensionnels de spins en interaction. Nous parlerons des systèmes périodiques, et des systèmes avec bords. D'autre part, les systèmes intégrables en théorie des champs, avec une attention particulière aux systèmes avec bord ou avec impureté.

Abstract:

We present algebraic structures in relation with one and two dimensional systems, as they are studied in physics. We show how these structures can be used to obtain a better understanding of the physical models they deal with.

This manuscript is divided into four parts, each of them describing a particular domain of physics in which the algebraic framework can apply, namely:

- Two-dimensional conformal field theories, and especially $\mathcal{W}$-algebras. We present the classification of the laters and their quantization using BRS cohomology.

- Finite $\mathcal{W}$-algebras and their physical applications (such as anyons) as well as their mathematical interest (for Lie algebras representations for instance).

- Hopf algebras and their dynamical generalization. This mathematical framework is used in the following part.

- Integrable systems, with two main topics. On the one hand, spin chains, which describe unidimensional systems of spins in interaction. We will deal with periodic systems and models with boundaries. On the other hand, integrable field theories, with a special care on systems with boundaries or defects.