



HAL
open science

Introduction aux Résonances Orbitales Rétrogrades dans les Systèmes Multi-Planétaires

Julie Gayon-Markt

► **To cite this version:**

Julie Gayon-Markt. Introduction aux Résonances Orbitales Rétrogrades dans les Systèmes Multi-Planétaires. Astrophysique [astro-ph]. Université Nice Sophia Antipolis, 2008. Français. NNT : . tel-00404255

HAL Id: tel-00404255

<https://theses.hal.science/tel-00404255v1>

Submitted on 15 Jul 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS – OBSERVATOIRE DE LA CÔTE D’AZUR

ECOLE DOCTORALE SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Julie GAYON-MARKT

pour l’obtention du titre de

Docteur ès Sciences de l’Université de Nice Sophia Antipolis

Spécialité : Sciences de l’Univers

INTRODUCTION AUX RÉSONANCES ORBITALES RÉTROGRADES DANS LES SYSTÈMES MULTI-PLANÉTAIRES

Thèse dirigée par Eric BOIS

soutenue le 27 Novembre 2008 à l’Observatoire de la Côte d’Azur

devant le jury composé de :

Pr. A. Morbidelli	Observatoire de la Côte d’Azur	Président
Pr. R. Dvorak	Universität Wien	Rapporteur
Pr. G. Valsecchi	Istituto Nazionale di Astrofisica	Rapporteur
Dr. F. Selsis	Observatoire Aquitain des Sciences de L’Univers	Examineur
Pr. E. Bois	Observatoire de la Côte d’Azur	Directeur de thèse
Pr. H. Scholl	Observatoire de la Côte d’Azur	Co-directeur de thèse

Résumé

Depuis la détection de la première exoplanète en 1995 (autour d'une étoile de type solaire), près de 300 planètes extrasolaires et 25 systèmes multi-planétaires ont été observés à ce jour. La plupart de ces systèmes multi-planétaires se caractérisent par des planètes de type Jupiter, proches de leur étoile centrale et dont l'orbite est souvent très excentrique. Ces particularités peuvent conduire à de fortes interactions gravitationnelles entre les planètes. En conséquence, d'un point de vue dynamique, ces systèmes multi-planétaires compacts constituent une classe spécifique du problème général des N -corps. Des méthodes numériques spécifiques ont alors été développées afin d'explorer l'espace des paramètres à plusieurs dimensions de ces systèmes. Dans cette thèse, un bilan dynamique de plusieurs systèmes planétaires détectés est établi dans un premier temps, en utilisant deux méthodes d'analyse globale.

Les planètes extrasolaires sont jusqu'à présent supposées être en révolution prograde autour de leur étoile mère. Cependant, cette thèse introduit une autre *possibilité théorique* conduisant à la stabilité de certains systèmes compacts. Nous explorons selon une approche numérique, des systèmes théoriques en *résonance de moyen mouvement* (MMR) comportant deux planètes en *contre-révolution* (ce qui signifie qu'une des deux planètes a un mouvement rétrograde par rapport à l'autre). En outre, je développe l'Hamiltonien du problème des 3-corps dans ce cas particulier de MMR *rétrogrades*. La problématique des résonances orbitales rétrogrades est donc analysée d'un point de vue à la fois numérique et analytique. Par ailleurs, afin d'étudier la *consistance* entre *mécanismes théoriques* impliquant des MMR rétrogrades et *observations*, des ajustements aux observations sont effectués pour une variété de systèmes observés. Outre les possibilités théoriques et observationnelles des résonances rétrogrades, une discussion portant sur la formation de systèmes contenant des planètes en contre-révolution est proposée.

Abstract

Since the first detection of an exoplanet in 1995 (around a solar-type star), about 300 extrasolar planets and 25 multi-planetary systems have been observed until now. Most of these multi-planetary systems are characterized by hot-Jupiters close to their central star and moving on eccentric orbits. These particularities may lead to strong gravitational interactions between the planets. As a consequence, compact multi-planetary systems form a specific class of the general N -body problem. To explore the multi-dimensional parameter space of multi-planetary systems, specific numerical methods of global analysis were required in order to remedy the problem of great number of degrees of freedom of such systems. A dynamical checkup of several detected planetary system is then firstly proposed in this thesis.

Extrasolar planets are up to now a priori found in direct orbital motions about their host star. However, in this thesis, a *theoretical alternative* suitable for the stability of compact two-planet systems is investigated. Using a numerical method of global dynamics analysis, we explore theoretical systems in *Mean Motion Resonance* (MMR) harboring *counter-revolving* planets (which means that one planet moves on a retrograde orbit). Besides, I have expand the Hamiltonian of the 3-body problem for the particular case of *retrograde* MMR. Consequently, the retrograde resonance is analysed from both a numerical and an analytical point of view. Furthermore, in order to study the *observational feasibility* of retrograde MMR, observational fits are performed for different detected systems. Finally, the formation of systems harboring counter-revolving planets is discussed.

Remerciements

La rédaction de ce manuscrit me donne l'opportunité de remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont rendu cette thèse possible.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Eric Bois, mon directeur de thèse, pour avoir été mon guide, pendant mon stage de Master 2 et durant ces 3 années de thèse, et pour m'avoir fait découvrir, avec enthousiasme, la Mécanique Céleste et la dynamique des Planètes Extrasolaires. Je le remercie vivement pour sa confiance, son soutien et ses conseils inégalables qui ont permis la réalisation de ce travail. Eric, merci pour le temps et l'attention que vous m'avez consacrés.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Hans Scholl pour avoir rempli le rôle de co-encadrant de thèse, pour son aide précieuse et ses conseils.

Je remercie chaleureusement Alessandro Morbidelli, non seulement pour m'avoir fait l'honneur d'être président de jury de thèse mais également pour sa disponibilité, ses discussions toujours très instructives, ses connaissances et compétences inégalables. Alessandro, merci également pour les différentes ballades et dîners que nous avons passés ensemble, sur la Côte d'Azur ou à Boulder!

J'adresse mes remerciements à Rudolf Dvorak, Giovanni Valsecchi et Franck Selsis pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour leurs remarques pertinentes.

J'adresse également mes remerciements, pour nos discussions fructueuses, à tous les chercheurs que j'ai rencontrés, lors de colloques, collaborations ou au travers de rapports de referees. Je pense notamment à Cristián Beaugé, Rudolf Dvorak, John Hadjidemetriou, Eiikiro Kokubo, Francesco Marzari, Makiko Nagasawa, Elke Pilat-Lohinger, Harry Varvoglis.

Je souhaite maintenant remercier un grand nombre de collègues de l'Observatoire de la Côte d'Azur. Un grand merci :

- à Jacques Colin pour l'attention particulière qu'il a portée à mon travail de thèse,
- à l'ensemble de l'équipe administrative de Cassiopée (Rose Pinto, Sébastien Bott, Sylvie Goletto, Sylvie Szeles, Albert Bijaoui et Thierry Passot) pour leur dévouement,
- à l'équipe informatique (Marie-Laure et Alain Minussi, Daniel Kamm, Pierre Somlyo, Jean-Michel Mercier, Serge Blanc et Arielle Willm) sans qui le bon fonctionnement des machines de calculs ne serait possible,
- à Dominique Cruzalèbes, Jean-François Nicolas, Serge Bonhomme et Christian Baccelli pour les barbecues mémorables aux Ateliers,
- à l'équipe du restaurant (Khaled, Karima, Nora, Nadia et Michel) pour leurs repas toujours excellents et leur jovialité,
- à Dominique Schraen et Nicolas Brundu, pour leurs jeux de mots divers et variés au cours des repas à l'observatoire. Merci à tous les deux pour votre bonne humeur!

Un merci tout particulier aux “copains de l’obs” : Julien Baerenzung, Barbara Bigot, Matthieu Conjat, Aurélien Crida, Nicolas Crouzet, Marco Delbo, Chloé et Fabrice Durier, Charline Filloux, Mathieu Havel, Georges Kordopatis, Eric Lagadec, Patrick De Laverny, Alexis Matter, Jean-Christophe Mauduit, Matias Montesinos, Sébastien Peirani, Alejandra Recio-Blanco, Virginie et Paolo Tanga, Stéphane Vincent. Merci à tous pour votre présence quotidienne, les sorties plage, les soirées resto ou barbecue chez Patrick après les matches de rugby tant attendus ! Merci à Virginie et Paolo pour leur convivialité et leur grand cœur. Merci à Charline pour sa soirée Wii et pour sa présence à mes côtés le 10 octobre dernier. Un grand merci à Patrick et Alejandra pour leur écoute et les divers conseils qu’ils m’ont apportés. Merci à l’ensemble du personnel de l’OCA ; je n’oublierai jamais ces trois années de thèse passées à vos côtés !

Je remercie chaleureusement mes amis niçois (d’adoption !) : Jean-Francois Bernadac, Nathalie Lemoine, Gérard Troianowski, Christine Baud, Damien et Edwige Vannetzel pour m’avoir permis de m’évader de mon travail de temps à autres. Merci pour les diverses randonnées, sorties escalade/ski et dîners en votre compagnie. Un grand merci également à Philippe Markt pour les sorties en 505 ; je pense notamment à une formidable journée sur le lac de Serre-Ponçon !

Merci à mes amis du Master 2 à Paris, notamment à Gwenaél Boué pour sa facilité de compréhension et d’explication, à Jordi Fontdecaba-Baig pour son regard objectif et sa curiosité permanente et à Clément Baruteau pour notre passion commune et soutien mutuel lors du Master 2 et de différents colloques.

Merci à mes amis de longue date, Marie Liduena-Bodier, Benoît Quessard et Thibault Cavalié, qui ont vu en moi germer le désir de devenir astronome et qui m’ont accompagnée tout au long de mon parcours. Marie, merci d’avoir été à mes côtés le 6 décembre dernier !

Je tiens maintenant à remercier mes parents Catherine et Daniel Gayon, ma famille et ma belle-famille pour leur soutien permanent et leur écoute. Merci à mes parents d’avoir partagé mes rêves et de m’avoir permis de les réaliser. A chaque étape, vous avez été là, à m’encourager et vous m’avez aidée quoi qu’il arrive. Merci pour votre présence et votre générosité !

“Last but not least” : j’ai une pensée particulière pour Etienne Markt, mon mari, sans qui cette thèse serait bien peu de choses. Merci pour ton soutien quotidien, pour tes encouragements lors des moments difficiles. Merci également pour m’avoir supportée ; ces trois années de thèse n’ont pas toujours été un long fleuve tranquille ! Merci de croire en moi et de me donner la force, chaque jour, d’aller un peu plus loin.

A la mémoire de mes grands-parents,
Yvonne et Etienne Barbe

Table des matières

Préambule	5
1 Introduction aux Systèmes Extrasolaires	7
1.1 Panorama des techniques observationnelles	7
1.1.1 Méthodes de détection directe	7
1.1.2 Méthodes de détection indirecte	9
1.1.3 Synergie entre les différentes techniques	13
1.2 Données observationnelles	13
1.2.1 Réduction de données	13
1.2.2 Distribution des éléments orbitaux	14
1.3 Classification dynamique des systèmes planétaires	16
1.3.1 Classification de S. Ferraz-Mello <i>et al.</i>	16
1.3.2 Classification de J. Hadjidemetriou	18
2 Outils de Détection du Chaos	21
2.1 Introduction	21
2.1.1 Approches analytiques et numériques	21
2.2 Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits	22
2.2.1 Introduction au Nombre Caractéristique de Lyapunov	22
2.2.2 Principe de la méthode MEGNO	22
2.2.3 Caractérisation des comportements dynamiques	22
2.2.4 Comparaison des méthodes MEGNO et LCN	23
2.3 Megno Indicator for Planetary Systems	24
2.3.1 Application aux systèmes planétaires	24
2.3.2 Généralisation au problème des N-corps	25
2.4 Frequency Map Analysis	26
2.4.1 Principe de la méthode	26
2.4.2 Analyse de Fourier	26
2.4.3 Application aux systèmes planétaires extrasolaires	27
2.5 Comparaison des méthodes MIPS et FMA	28
2.5.1 Corrélation entre les méthodes	28
2.5.2 Avantages et inconvénients des méthodes	30
3 Mise en Evidance de Mécanismes de Stabilité	31
3.1 Introduction	31
3.2 Description d'un mécanisme de stabilité fréquent	32
3.2.1 Systèmes et mécanismes théoriques <i>vs</i> systèmes observationnels	32
3.2.2 Mise en évidence d'une résonance de moyen mouvement	33
3.2.3 Caractéristiques d'une précession synchrone apsidale	37

3.2.4	Conclusion sur le mécanisme que nous appelons MMR+ASP	39
3.3	Recherche de stabilité pour des orbites non-coplanaires	39
3.4	Dynamique d'un système hiérarchique : 55 Cancri	41
3.4.1	Petit historique du système 55 Cancri	41
3.4.2	Etat dynamique du système	42
3.4.3	Zone habitable du système 55 Cancri	42
4	Exploration de la Résonance Rétrograde de Moyen Mouvement	45
4.1	Introduction	45
4.2	A la recherche de zones de stabilité	45
4.2.1	Etats des lieux des systèmes observés HD 160691 et HD 73526	45
4.2.2	Intérêt des inclinaisons orbitales	47
4.3	Un nouveau mécanisme de stabilité impliquant une résonance rétrograde	48
4.3.1	Existence d'une MMR rétrograde	48
4.3.2	Structure fine de la résonance $2 : -1$	50
4.4	Efficacité des MMR rétrogrades	50
4.4.1	Réduction d'échelle du système HD 82943	50
4.4.2	Etude statistique sur un ensemble de systèmes à deux planètes	52
4.5	Ressources des MMR rétrogrades	53
4.5.1	Expression de la longitude apsidale relative	53
4.5.2	Précession apsidale prograde	53
4.5.3	Mise en évidence d'une précession apsidale rétrograde	54
4.5.4	Distribution des comportements apsidaux	56
4.6	Discussion sur la possibilité théorique des résonances rétrogrades	56
5	Problème des 3-Corps et Résonances Rétrogrades	57
5.1	Introduction	57
5.2	Expression du vecteur position	58
5.3	Expression générale 3-D de l'Hamiltonien	58
5.4	Jeu de variables canoniques pour des planètes en contre-révolution	59
5.5	Développement de la fonction perturbatrice	60
5.5.1	Partie directe de la fonction perturbatrice	60
5.5.2	Partie indirecte de la fonction perturbatrice	63
5.6	L'Hamiltonien moyenné et résonant	64
5.7	Expressions des variables canoniques et de leurs dérivées	65
5.8	Comparaison avec la méthode numérique	67
5.9	Surfaces de section	68
5.10	Conclusion	69
6	Planètes en Contre-Révolution et Données Observationnelles	71
6.1	Détermination des éléments orbitaux à partir des mesures de vitesses radiales	71
6.1.1	Ajustement multi-keplérien en coordonnées astrocentriques	71
6.1.2	Ajustement dynamique et utilisation de l'algorithme Pikaia	72
6.2	Réduction de données observationnelles	73
6.2.1	Application au système HD 73526	73
6.2.2	Application à une sélection de systèmes planétaires	74
6.3	Discussion sur la possibilité de planètes en contre-révolution	76

7 Discussion	77
7.1 Origine des planètes en contre-révolution	77
7.1.1 Introduction	77
7.1.2 Effet de fronde, circularisation maréale et mécanisme de Kozai	78
7.1.3 Les planètes “flottantes”	79
7.2 Conclusion et perspectives	79
Liste des Annexes	81
A Notations	83
B Caractéristiques orbitales	85
C Généralisation de la méthode MIPS	89
D Complément au développement analytique	91
E Sections de Poincaré et comportements dynamiques	93
F Liste des publications	95
Bibliographie	129

Préambule

La notion de mouvement rétrograde, au moins apparent, est née avec l’observation des planètes dans le ciel. L’explication d’un tel mouvement (cf. Fig. 1) s’est révélée être un véritable casse-tête pour les savants de l’Antiquité. L’un des premiers modèles rendant compte du mouvement apparent des planètes sur la sphère céleste a été introduit par Ptolémée (II^{ème} siècle après J.C.). Bénéficiant de plus de huit siècles d’observations, Ptolémée construisit un modèle géocentrique et introduisit, dans son célèbre traité “L’Almageste”, la notion d’épicycle (cf. Fig. 1) : les planètes évoluent sur un cercle (appelé épicycle) dont le centre se meut sur un autre cercle appelé déférent. Afin d’adapter au mieux son modèle aux observations, Ptolémée dû excentrer la Terre par rapport au centre du déférent. Notons que ce modèle ingénieux a perduré jusqu’à la fin du XVI^{ème} siècle.

Outre le mouvement rétrograde *apparent* des planètes du Système Solaire, il existe quelques corps célestes caractérisés par des mouvements rétrogrades *réels*. En effet, l’on peut noter que plusieurs comètes ont été observées en mouvement inverse par rapport aux sens de révolution des planètes autour du centre de masse du Système Solaire (cf. par exemple Fernandez 1981 ou Liou *et al.* 1998). De plus, certains petits satellites des planètes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune présentent une révolution rétrograde autour de leur planète mère respective (e.g. Gladman *et al.* 2001).¹ Notons également que certains astéroïdes ont été trouvés en rotation rétrograde autour de leur centre de masse (e.g. La Spina *et al.* 2004). Ainsi, la majorité des corps trouvés en mouvement rétrograde (que ce soit la révolution ou la rotation) sont des corps de très faibles masses. Cependant, contre toute attente, les observations radar menées sur la planète Vénus en 1962, ont permis de mettre en évidence sa rotation rétrograde !

Les mouvements rétrogrades, bien que relativement peu fréquents, existent donc au sein du Système Solaire. Qu’en est-il des mouvements de révolution rétrograde dans les systèmes multi-planétaires à haut régime gravitationnel ?

¹Le diamètre de ces petits satellites en révolution rétrograde est généralement inférieur à une centaine de kilomètres, à l’exception de Triton (2700 km environ).

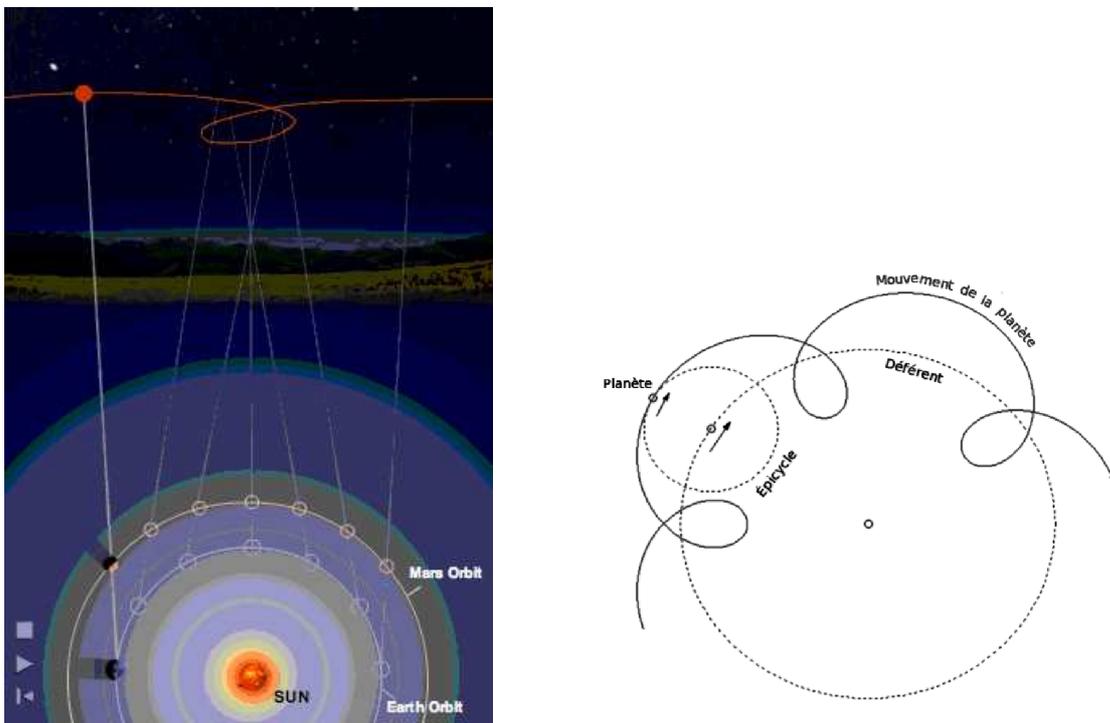


FIG. 1 – Figure de gauche : Mouvement *apparent* de la planète Mars dans le ciel. Figure de droite : Système d'épicycles introduit par Ptolémée. Les planètes se meuvent sur un cercle appelé épicycle qui lui-même se déplace sur un autre cercle appelé déférent. Ce système permet de rendre compte du mouvement rétrograde *apparent* des planètes.

Chapitre 1

Introduction aux Systèmes Extrasolaires

Je propose d'introduire, dans ce chapitre, les systèmes extrasolaires en présentant brièvement les méthodes actuelles de détection d'exoplanètes (§1.1). Ces méthodes se répartissent en deux catégories : les méthodes de détection directe, liées à des études de photométrie, et les méthodes de détection indirecte, qui font appel à des effets gravitationnels. En §1.2, nous aborderons la notion de réduction des données observationnelles, étape nécessaire à l'acquisition des paramètres orbitaux des différents systèmes. Enfin, nous verrons dans le §1.3 que les détections actuelles permettent d'ores-et-déjà d'établir différentes classes de systèmes multi-planétaires.

1.1 Panorama des techniques observationnelles

1.1.1 Méthodes de détection directe

Imagerie ou haute résolution angulaire

De façon générale, les planètes agissent comme un corps noir, c'est-à-dire qu'elles réémettent la lumière qu'elles reçoivent de leur étoile parente. La méthode de détection d'exoplanètes par imagerie directe vise alors à détecter cette lumière réémise (dans l'infrarouge) et réfléchi (dans le visible). Cette méthode reste cependant l'une des techniques les plus difficiles à mettre en œuvre puisque l'étoile parente est tellement brillante qu'elle domine l'image et peut cacher le signal de la planète. Cette méthode est néanmoins l'une des plus prometteuses puisqu'elle étend l'espace de recherche à des étoiles de tout type (i.e. de toute masse, luminosité ou encore de tout type spectral) et qu'elle permet d'accéder à des paramètres uniques, à savoir :

- la température effective, la masse, l'âge, l'albédo et la composition chimique de la planète,
- ainsi que ses paramètres orbitaux, y compris l'inclinaison orbitale.

Cette technique permet à l'heure actuelle de détecter principalement des planètes éloignées de l'étoile parente. Pour plus de détails sur cette technique, le lecteur pourra notamment se référer à Malbet (2005).

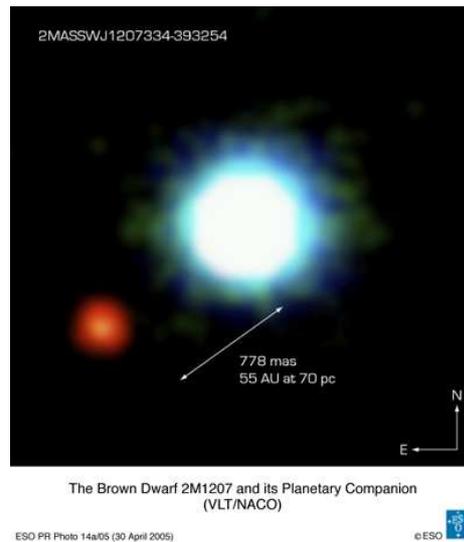


FIG. 1.1 – Première photographie d’une exoplanète. Une planète est en orbite autour de la naine brune 2M1207. L’image a été obtenue par optique adaptative (voir Chauvin *et al.* 2005 pour plus de détails).

Méthode des transits

La méthode des transits consiste à déceler l’infime baisse de luminosité d’une étoile lorsqu’une planète passe devant son disque (cf. Fig. 1.2). Cette technique est d’autant plus efficace que les planètes sont grosses et proches de leur étoile. Elle permet notamment d’estimer le rayon de la planète, sa densité, son albédo mais ne donne aucune information sur sa masse (cf. notamment Moutou & Pont 2005). Notons que dans le cas d’un transit photométrique, l’inclinaison du plan orbital sur le plan du ciel est très voisin de 90° . Par ailleurs, les planètes en transit (et les planètes détectées par imagerie) demeurent les planètes les mieux caractérisées d’un point de vue de leurs paramètres physiques.

Jusqu’à présent, relativement peu d’exoplanètes ont été détectées par cette méthode en raison de la faible probabilité d’alignement étoile-planète-observateur. Cependant, les missions spatiales CoRoT et Kepler spécialement dédiées à la recherche de planètes en transit devraient permettre de trouver de nouvelles exoplanètes.

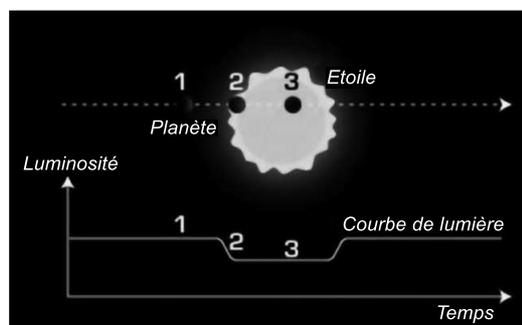


FIG. 1.2 – Méthode des transits. La planète passe entre l’observateur et son étoile parente impliquant une baisse de la luminosité de l’étoile.

Détection par microlentille gravitationnelle

L'un des premiers phénomènes prédits par la relativité générale est la déviation de la lumière d'un objet lointain par la présence d'un objet massif sur le trajet du rayon lumineux. Ainsi, une microlentille gravitationnelle consiste à faire converger les rayons lumineux d'une source lointaine par un objet intermédiaire. Lors d'une détection par microlentille gravitationnelle, l'intensité lumineuse d'une étoile de fond est par conséquent amplifiée par la courbure de l'espace-temps au voisinage d'une étoile intermédiaire et de sa (ou ses) planètes (cf. Fig. 1.3). La courbe de lumière montre alors une variation particulière du signal due à la présence de l'étoile intermédiaire et de sa (ou ses) planète.

Cette méthode est optimale pour des périodes de révolution orbitale relativement longues. Cependant, l'effet de lentille n'est observable que dans des conditions très particulières (des observations vers le bulbe galactique sont à privilégier en raison de la forte densité d'étoiles de fond dans cette direction).

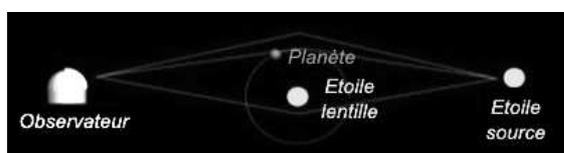


FIG. 1.3 – Détection par lentille gravitationnelle. Les rayons lumineux d'une étoile de fond sont déviés par une étoile intermédiaire et sa ou ses planètes.

1.1.2 Méthodes de détection indirecte

La détection directe des planètes extrasolaires souffre de deux difficultés majeures : une séparation angulaire minuscule et un contraste en luminosité énorme. Une solution consiste à détecter les planètes extrasolaires de manière indirecte en mesurant la perturbation gravitationnelle induite par la ou les planètes sur l'étoile parente. Comme dans tout système à N -corps, étoile et planète(s) tournent autour du centre de masse du système. Il est alors possible de repérer le déplacement périodique de l'étoile sur le ciel (astrométrie) ou de mesurer la variation périodique de vitesse projetée sur la ligne de visée (vitesse radiale). Une troisième approche utilisant les propriétés de perturbation induite par une planète est le chronométrage des pulsars millisecondes.

Méthode des vitesses radiales

La méthode des vitesses radiales repose sur l'effet Doppler-Fizeau qui relie la vitesse d'un corps mobile à la longueur d'onde à laquelle il émet. La mesure de la vitesse radiale d'une étoile est obtenue par la mesure du décalage des raies d'absorption de son spectre. Cette méthode est particulièrement sensible aux planètes massives, aux planètes proches et aux étoiles de faible masse. Elle favorise donc la détection de planètes géantes à courtes périodes orbitales telles que les Jupiter chauds. Notons que cette méthode a permis de détecter la première planète extrasolaire en orbite autour d'une étoile de type solaire (Mayor & Queloz 1995). A ce jour¹, 290 exoplanètes sur 307 ont été détectées par la méthode des vitesses radiales (249 systèmes planétaires). Néanmoins, cette technique nécessite des campagnes d'observations relativement longues puisqu'il faut plusieurs périodes orbitales pour pouvoir déterminer les éléments orbitaux des planètes. Bien que la méthode des vitesses radiales permettent de déterminer les éléments orbitaux des planètes, il est impossible de mesurer, par cette technique, l'inclinaison du plan orbital par rapport à la ligne de visée (i_l). Il subsiste alors une indétermination de la masse des planètes (m_P). Seule la masse minimale de la ou des planètes est accessible via la quantité $m_P \sin i_l$ (cf. Fig. 1.4).

¹Le 22 juillet 2008.

Pour une description plus détaillée de la méthode des vitesses radiales, le lecteur peut notamment se référer à Bouchy (2005) ou Beaugé *et al.* (2007). La détermination des éléments orbitaux via la mesure des vitesses radiales est brièvement exposée en §1.2. Une étude plus approfondie est par ailleurs présentée dans le Chapitre 6.

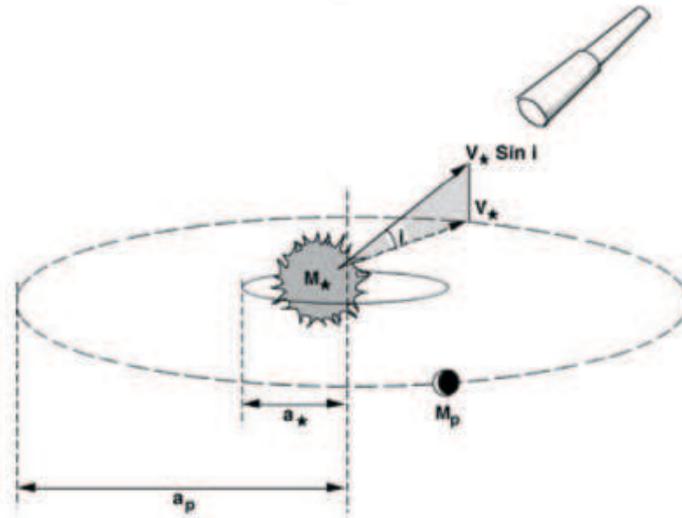


FIG. 1.4 – Méthode des vitesses radiales. Le décalage des raies spectrales d’une étoile hébergeant une ou des planètes permet la détermination de la variation de la vitesse radiale de l’étoile et par conséquent la détermination des éléments orbitaux de la ou des planètes.

Méthode astrométrique

L’astrométrie consiste à déterminer le déplacement angulaire d’une étoile dû aux interactions gravitationnelles générées par une ou plusieurs planètes (cf. Fig. 1.5). Les deux composantes du mouvement dans le plan du ciel sont mesurées et donnent une information suffisante pour déterminer les éléments orbitaux de la ou des planètes, sans avoir l’ambiguïté de l’inclinaison du plan orbital (contrairement à la détection par effet Doppler). Cette technique a donc l’avantage de permettre la détermination des masses planétaires. De plus, la méthode astrométrique peut être appliquée à tout type (spectral) d’étoile. Elle est par ailleurs particulièrement sensible aux fortes masses planétaires, aux longues périodes orbitales (autrement dit aux planètes éloignées de leur étoile) ainsi qu’aux étoiles de faible masse (cf. Beichman *et al.* 2007).

Cependant, l’atmosphère terrestre peut dégrader les mesures astrométriques. Par conséquent, plusieurs projets de détection d’exoplanètes par astrométrie (télescopes terrestres et satellites) sont à l’étude ou en construction. Le projet le plus abouti à l’heure actuelle est la mission Gaia de l’ESA dont le lancement est prévu pour décembre 2011.

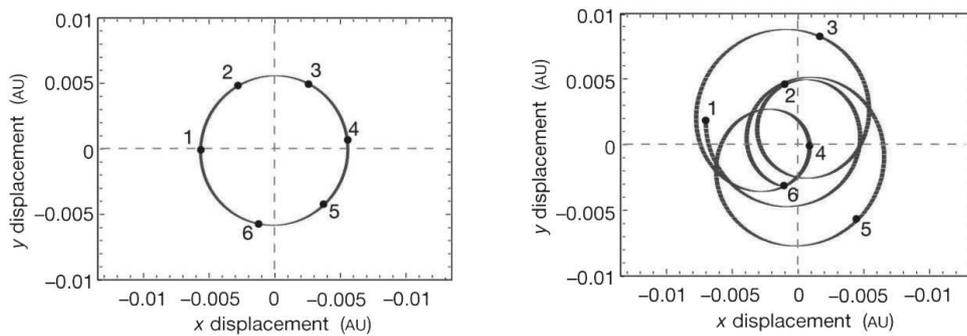


FIG. 1.5 – Méthode astrométrique. Le déplacement de l'étoile dans le ciel est causé par la présence d'une (figure de gauche) ou de plusieurs planètes (figure de droite). En l'absence de planète(s), la position de l'étoile devrait être située au centre du repère (X, Y) utilisé ici. Les nombres 1 – 6 indiquent les positions successives de l'étoile sur une durée de 50 ans. Les figures proviennent de Lissauer (2002).

Détection par chronométrage

La méthode de recherche de planètes extrasolaires par chronométrage consiste à utiliser une horloge très précise dans le système étudié et de voir si des décalages anormaux apparaissent au cours du temps. Les pulsars à rotation rapide (pulsars millisecondes) représentent l'horloge naturelle la plus précise dans l'Univers et sont donc utilisés pour détecter des exoplanètes.

Un pulsar est une étoile à neutrons qui émet un champ magnétique sous forme d'un faisceau (cf. Fig. 1.6). Il s'agit en quelque sorte d'un phare. Lorsque le faisceau est dirigé vers l'observateur, celui-ci peut alors observer périodiquement des flashes ou pulses émis, dans le domaine radio, par l'étoile à neutrons. La périodicité de ces pulses est imposée par la rotation de l'étoile à neutrons. Dans le cas d'une planète en orbite autour d'un pulsar, le pulsar subit des interactions gravitationnelles avec l'étoile. Il effectue désormais une révolution autour du centre de masse (qui n'est alors plus équivalent au centre du pulsar). En raison de ce mouvement de révolution autour du barycentre, un observateur recevra l'émission radio du pulsar avec des retards variables (mais faibles) par rapport à un pulsar seul. Il est ainsi possible de déterminer la présence de planète(s) par la mesure de ces variations temporelles d'émission (cf. Perryman 2000 pour plus de détails).

C'est avec la méthode de chronométrage que la première détection d'objets ayant la masse d'une planète a été obtenue (pulsar milliseconde PSR B1257+12 ; cf. Wolszczan & Frail 1992). Notons par ailleurs que ces planètes n'ont aucune chance d'abriter la moindre vie à cause du bombardement intense de la part de l'étoile à neutrons !

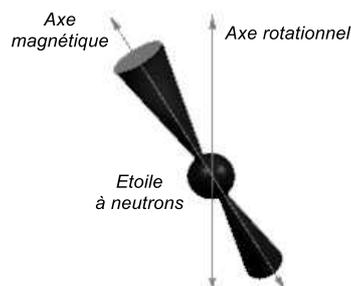


FIG. 1.6 – Détection par chronométrage de l'émission radio de pulsars rapides.

Planet Detection Methods

Michael Perryman, Rep. Prog. Phys., 2000, 63, 1209 (updated 3 October 2007)

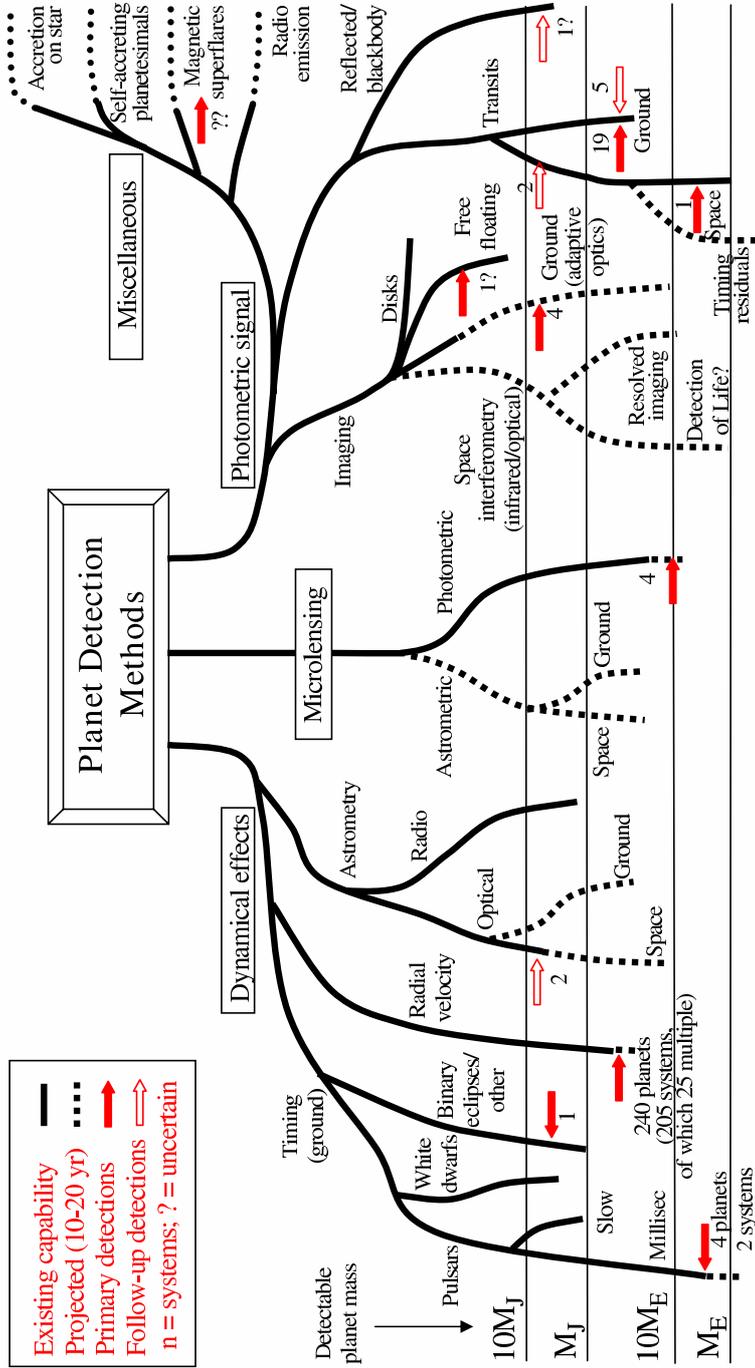


FIG. 1.7 – Résumé des méthodes actuelles de détection d'exoplanètes et leur limite de détectabilité. Figure provenant de Perryman (2000) et mise à jour le 3 octobre 2007.

1.1.3 Synergie entre les différentes techniques

La quantité de planètes (et systèmes planétaires) détectées à ce jour est présentée dans la Table 1.1 en fonction de la technique d’observation.² Bien que la méthode des vitesses radiales soit la plus efficace jusqu’à présent, d’autres méthodes (liées à l’imagerie ou au transit planétaire) sont en plein essor et devraient fournir de nombreuses nouvelles détections. De plus, un résumé de l’ensemble des techniques d’observations actuelles ainsi qu’une indication sur leur limite de détectabilité (d’un point de vue de la masse minimale des planètes) est exposé dans la Fig. 1.7.

D’ores-et-déjà, l’ensemble des détections obtenues par transit planétaire sont corrélées à des mesures de vitesses radiales. Les masses planétaires sont donc connues pour l’ensemble des systèmes concernés. La combinaison future de l’ensemble des techniques d’observation va par conséquent conduire à la détermination complète des éléments orbitaux et des masses (à travers les méthodes de vitesses radiales, de transit et d’astrométrie), à l’évaluation du rayon, de la composition planétaire et à d’autres informations physiques déduites des détections directes. Ainsi, la synergie entre les différentes techniques de détection d’exoplanètes constituera un riche domaine de la planétologie comparative (voir à ce sujet Beichman *et al.* 2007) et devrait permettre de contribuer à la compréhension des différentes étapes de formation planétaire et de l’évolution des environnements habitables.

Technique	Imagerie	Transit	Lentille Gravitationnelle	Vitesses Radiales Astrométrie	Chronométrage
Planètes	5	52	7	290	5
Systèmes	5	52	6	249	3
Syst. multiples	0	0	1	29	1

TAB. 1.1 – Nombre de planètes et systèmes planétaires détectés en fonction des techniques observationnelles. Données provenant du site internet de J. Schneider : <http://www.exoplanet.eu>. Les planètes en transit ont été également détectées par la méthode des vitesses radiales ou bien par astrométrie.

1.2 Données observationnelles

1.2.1 Réduction de données

L’obtention des différents paramètres géométriques des planètes (éléments orbitaux, masses, rayons etc.) et physiques (albédo, composition chimique etc.) nécessite diverses méthodes de réduction de données observationnelles : chaque technique de détection possède sa propre méthode de réduction de données. Le lecteur peut alors se référer aux articles mentionnés en §1.1 pour plus de précisions sur la réduction de données observationnelles (à savoir Malbet 2005, Moutou & Pont 2005, Bouchy 2005, Beaugé *et al.* 2007, Beichman *et al.* 2007, Perryman 2000) ou encore à Quirrenbach (2006).

De façon générale, la réduction des données observationnelles, dans le cas de mesures des vitesses radiales, s’effectue en considérant des orbites keplériennes, c’est-à-dire sans tenir compte des interactions gravitationnelles entre les planètes. Les ajustements aux observations peuvent faire intervenir plusieurs jeux de variables, plus ou moins adéquats, notamment les éléments osculateurs ou les coordonnées de Jacobi. Comme le mentionne l’article de Lee & Peale (2003), dans le cas d’une réduction en éléments osculateurs, il peut arriver que les coordonnées astrocentriques introduisent des variations importantes des hautes fréquences dans les éléments orbitaux (qui doivent être quasi-constants

²Données datant du 22 juillet 2008.

sur des échelles de temps de l'ordre d'une orbite). Les variations des hautes fréquences peuvent alors conduire à une sensibilité fictive au temps initial ("epoch time").

En revanche, ce problème n'apparaît pas si l'on utilise les coordonnées de Jacobi, pour lesquelles la position de la planète 1 (de masse m_1) est relative à celle de l'étoile (de masse M_*) et la position de la planète 2 (de masse m_2) est relative au barycentre des masses M_* et m_1 (et ainsi de suite pour un système à N planètes). Selon Lissauer & Rivera (2001), les coordonnées de Jacobi "imitent mieux" les hypothèses d'orbites keplériennes non-perturbées.

L'approximation keplérienne reste valable dans le cas de planètes très éloignées les unes des autres (systèmes planétaires dits hiérarchiques) : la détermination des éléments orbitaux obtenue de manière keplérienne reste proche des ajustements à N-corps (pour lesquels les interactions entre les planètes sont prises en compte). Cependant, dans le cas de systèmes compacts où les interactions gravitationnelles entre les planètes peuvent être très fortes, il est nécessaire d'effectuer des ajustements aux observations par la voie dynamique (intégrateur à N-corps), afin de déterminer de façon plus "correcte" les paramètres du système. Ceci nécessite d'utiliser d'autres jeux de variables (coordonnées cartésiennes par exemple). Précisons que depuis quelques années (environ 3-4 ans), des ajustements dynamiques sont systématiquement effectués par les observateurs dans le cas des systèmes compacts ; ce qui n'était pas le cas auparavant.

La détermination d'éléments orbitaux (que ce soit dans le cas d'ajustements keplériens ou dans le cas dynamique) nécessite de nombreuses observations d'un même système. Or, la découverte de planètes extrasolaires étant extrêmement récente, peu de systèmes (Gliese 876 par exemple) ont pu bénéficier de temps d'observations suffisamment longs pour que l'on puisse déterminer correctement les éléments orbitaux des planètes.³ Par conséquent, compte tenu des méthodes de détection effectives à ce jour et du nombre généralement insuffisant de ces observations, il serait vain de croire que l'astrométrie (dans le sens de la détermination des éléments orbitaux) de tout système reste acquise. En outre, un commentaire plus approfondi sur les déterminations successives des paramètres orbitaux (d'un même système) au cours de différentes campagnes d'observations sera apporté en §3.2.1. La réduction de données observationnelles dans le cas de la technique des vitesses radiales sera également approfondie dans le Chapitre 6 et appliquée pour une configuration particulière des orbites planétaires.

1.2.2 Distribution des éléments orbitaux

Comme nous l'avons vu, à ce jour, plus de 300 exoplanètes ont été découvertes. Les réductions de données observationnelles montrent, dans la majorité des cas, que ces planètes sont très massives, proches (et parfois très proches) de leur étoile centrale et possèdent des orbites à forte excentricité (voir les définitions des éléments utilisées dans l'Annexe A). Ainsi, il n'est pas rare de découvrir des planètes de plusieurs fois la masse de Jupiter (notée M_J) en orbite autour d'une étoile de type solaire mais à des distances souvent inférieures à la distance Soleil-Vénus (et parfois même Soleil-Mercure).⁴ Les caractéristiques des planètes extrasolaires détectées à ce jour sont donc bien différentes des planètes du Système Solaire. Rappelons que ces caractéristiques sont biaisées par les méthodes de détection effectives actuellement, comme nous l'avons vu dans la section précédente. Il est donc nécessaire de tenir compte de ce biais observationnel lorsqu'on souhaite étudier la répartition ou la proportion de planètes en fonction de leurs éléments orbitaux. La Fig. 1.8a est un exemple de répartition de planètes en fonction de leurs demi grand-axes et de leur excentricités. Notons tout de même une forte concentration pour des planètes très proches de leur étoile ($a < 0.3$ UA) et des

³Par "correctement", j'entends des barres d'erreurs faibles sur les éléments orbitaux, de l'ordre de quelques %.

⁴De telles planètes proches sont appelées des "Jupiters chauds".

excentricités faibles ou modérées (jusqu'à 0.3).⁵ A titre de comparaison, le lecteur peut se référer aux caractéristiques orbitales des planètes du Système Solaire mentionnées dans l'Annexe B.

Des diagrammes impliquant les masses planétaires sont fréquemment exposés dans les colloques ou sur un grand nombre de sites internet dédiés à la détection d'exoplanètes. En considérant le diagramme de la Fig. 1.8b représentant les masses des exoplanètes en fonction des périodes orbitales, il semblerait que peu de planètes soient à la fois très massives et très proches de leur étoile mère. On pourrait alors déduire, à tort, qu'une relation entre masses et périodes orbitales soit clairement définie. Or, comme nous l'avons vu dans la section précédente, pour la majorité des planètes détectées, seules les masses planétaires minimales sont connues (en raison de la méthode de détection par mesures de vitesses radiales). De plus, il n'est pas garanti que l'inclinaison par rapport à la ligne de visée (i_l) du plan orbital soit la même pour chaque système ou chaque exoplanète. Du fait des diverses valeurs possibles de l'inclinaison i_l , la distribution des masses réelles peut être complètement différente de la distribution des masses minimales. La Fig. 1.8b ne semble donc pas traduire la réalité des systèmes planétaires. Par conséquent, toute conclusion déduite des diagrammes actuels impliquant les masses planétaires n'est pas nécessairement correcte. Notons néanmoins que de tels diagrammes ont un sens dans le cas de planètes en transit (pour lesquelles les masses sont correctement déterminées).

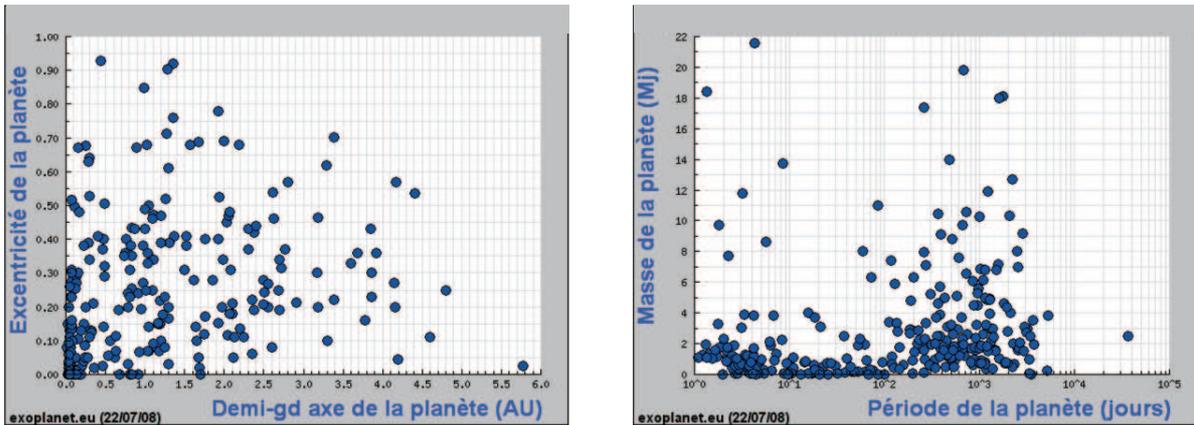


FIG. 1.8 – Distribution des planètes extrasolaires en fonction (a) de leur demi grand-axe et leur excentricité, (b) de leur masse ($m_P \sin i_l$) et leur période orbitale. (figures provenant du site de J. Schneider : <http://exoplanet.eu>)

⁵Précisons qu'il n'est pas garanti que les détections futures conduisent à des proportions similaires dans les diagrammes de répartition des planètes.

1.3 Classification dynamique des systèmes planétaires

Du fait des masses planétaires importantes, des excentricités généralement fortes et des demi grand-axes parfois faibles, les interactions entre les planètes sont généralement beaucoup plus fortes dans le cas des systèmes extrasolaires multi-planétaires (tout au moins ceux détectés à l’heure actuelle) que dans le cas du Système Solaire. La dynamique des systèmes extrasolaires comporte ainsi de nouvelles caractéristiques. Face à la difficulté de trouver une corrélation entre les éléments orbitaux des différentes planètes, il a été nécessaire de distinguer les systèmes extrasolaires par leurs caractéristiques dynamiques. Deux classifications dynamiques ont vu le jour au moment de ma thèse. Elles peuvent être définies soit à partir d’études analytiques, soit via des approches numériques. L’une est proposée par Ferraz-Mello *et al.* (2005a), l’autre par Hadjidemetriou (2002).

Ces deux classifications font intervenir des mécanismes de stabilité, notamment des Résonances de Moyen Mouvement (MMR). Ces résonances ont lieu lorsque le rapport des périodes orbitales de deux planètes est commensurable (i.e. rapport de deux entiers). Par exemple, lorsque les périodes orbitales sont de 100 jours pour la planète interne et de 200 jours pour la planète externe, l’on a une résonance de moyen mouvement (ou résonance orbitale) de rapport 2 : 1.

Un autre mécanisme pris en compte est la dynamique séculaire des systèmes planétaires. La dynamique séculaire consiste à étudier la dynamique d’un système en “négligeant” en quelque sorte les variables qui évoluent rapidement au cours du temps. Plus précisément, il s’agit de moyenniser l’Hamiltonien du système par rapport aux variables à courtes périodes (variables en lien avec les périodes orbitales). L’Hamiltonien moyenné décrit ainsi l’évolution séculaire (ou à long terme) des orbites, causée par les mouvements de précession du péricentre et du nœud (cf. Morbidelli 2002 (§7) ou Murray & Dermott 1999 (§7) pour plus de détails). Précisons que la dynamique séculaire permet de décrire *précisément* la dynamique réelle d’un système seulement dans les régions éloignées de résonances de moyen mouvement.

La dynamique séculaire se caractérise parfois par des Précessions Synchrones Apsidales (ASP), c’est-à-dire que les lignes apsidales précessent, en moyenne, au même taux (cf. Fig. 3.4 ; plus d’explications sur les ASP sont données en §3.2.3). Il arrive alors que la longitude apsidale relative (angle entre les lignes apsidales noté $\Delta\tilde{\omega}$) libre (i.e. oscille) autour de 0° ou 180° . Les lignes apsidales sont par conséquent globalement alignées ou anti-alignées (respectivement).

1.3.1 Classification de S. Ferraz-Mello *et al.*

La classification dynamique de Ferraz-Mello *et al.* (2005a) est principalement basée sur l’existence de MMR ou de ASP au sein de systèmes planétaires. Il existe quatre classes différentes de systèmes :

- *Classe Ia* : Cette classe regroupe les systèmes de planètes massives ayant des orbites excentriques dont la stabilité est nécessairement régie par une résonance de moyen mouvement. Il peut arriver que des systèmes en résonance orbitale présentent également un mécanisme d’ASP (cf. Chapitre 3).
- *Classe Ib* : Les orbites sont faiblement excentriques et les planètes sont *proches* d’une MMR. Les interactions gravitationnelles entre les différents corps sont moins importantes que dans la Classe Ia.
- *Classe II* : On retrouve dans cette classe, les systèmes non-résonants mais dont la dynamique séculaire est significative. L’ensemble des systèmes de cette catégorie présente une Précession Synchrone Apsidale (ASP).

- *Classe III* : Cette classe rassemble l'ensemble des systèmes hiérarchiques pour lesquels le rapport des périodes des planètes est très élevé et dont le comportement dynamique est régi par d'autres mécanismes de stabilité que des résonances de moyen mouvement.

Les systèmes répertoriés dans les trois premières catégories sont en réalité des systèmes compacts ; c'est-à-dire que le rapport des demi-grands axes (ou bien des périodes) entre les différentes planètes d'un même système est faible (inférieur à 5). D'une manière générale, les interactions gravitationnelles mises en jeux sont fortes. Ces systèmes sont alors très sensibles aux conditions initiales : tout changement dans les paramètres orbitaux peut faire basculer le comportement dynamique d'un système d'un état stable vers un état instable ou chaotique (et inversement). Dans la Table 1.2, sont répartis les systèmes détectés jusqu'à présent en fonction de leur classement dynamique selon Ferraz-Mello *et al.* (2005a).

Classe	Systèmes	Références
Classe Ia	HD 128311	Vogt <i>et al.</i> (2005)
	HD 82943	Israelian <i>et al.</i> (2001) - Mayor <i>et al.</i> (2004)
	Gliese 876	Rivera <i>et al.</i> (2005)
	HD 73526	Tinney <i>et al.</i> (2006)
	HD 160691	Jones <i>et al.</i> (2002) - Pepe <i>et al.</i> (2007)
	55 Cnc	McArthur <i>et al.</i> (2004)
	HD 108874	Vogt <i>et al.</i> (2005)
	HD 202206	Correia <i>et al.</i> (2005)
Classe Ib	47 UMa	Fischer <i>et al.</i> (2003)
	55 Cnc	Fischer <i>et al.</i> (2008)
	Jupiter - Saturne	JPL DE202
Classe II	HD 160691	McCarthy <i>et al.</i> (2004)
	<i>v</i> And	Fischer <i>et al.</i> (2003)
	HD 37124	Vogt <i>et al.</i> (2005)
	HD 12661	Fischer <i>et al.</i> (2003)
	HD 69830	Lovis <i>et al.</i> (2006)
	HD 169830	Butler <i>et al.</i> (2006)
	HIP 14810	Wright <i>et al.</i> (2007)
Gliese 581	Udry <i>et al.</i> (2007)	
Classe III	HD 168443	Butler <i>et al.</i> (2006)
	HD 74156	Naef <i>et al.</i> (2004)
	55 Cnc	Fischer <i>et al.</i> (2008)
	HD 38529	Fischer <i>et al.</i> (2003)
	HD 190360	Vogt <i>et al.</i> (2005)
	HD 217107	Vogt <i>et al.</i> (2005)
	HD 11964	Wright <i>et al.</i> (2007)
	HD 187123	Wright <i>et al.</i> (2007)

TAB. 1.2 – Classification de S. Ferraz-Mello.

1.3.2 Classification de J. Hadjidemetriou

La classification de Hadjidemetriou (2002) est basée sur l'étude analytique du problème des 3-corps en considérant des orbites coplanaires et une résonance de moyen mouvement 2 : 1. Les masses sont par ailleurs choisies telles que la somme des masses planétaires représentent 4% de la masse totale (soit $M_* = 0.96$ et $m_1 + m_2 = 0.04$ en unités normalisées). Dans cette étude, J. Hadjidemetriou recherche l'ensemble des familles périodiques stables et instables pour la MMR 2 : 1, en faisant varier le rapport des masses planétaires⁶ ainsi que les excentricités. Il montre que sous la seule connaissance des hiérarchies de masses et d'excentricités, l'on obtient l'assurance préalable de la stabilité ou de l'instabilité du système :

- Tout système appartenant à la hiérarchie H1, c'est-à-dire pour lequel la masse de la planète interne (m_1) est *inférieure* à celle de la planète externe (m_2) et l'excentricité de la planète interne (e_1) est *supérieure* à celle de la planète externe (e_2), est stable.
- Pour les hiérarchies H2 ($m_1 > m_2$ et $e_1 > e_2$) et H4 ($m_1 > m_2$ et $e_1 < e_2$), le comportement dynamique des systèmes est trouvé instable.
- Cette étude analytique ne permet cependant pas de déterminer l'état dynamique des systèmes appartenant à la hiérarchie H3 ($m_1 < m_2$ et $e_1 < e_2$).

La classification de J. Hadjidemetriou est résumée par la Fig. 1.9 qui mentionne l'ensemble des systèmes multi-planétaires trouvés en MMR 2 : 1 avant et au moment de ma thèse. Plusieurs ajustements observationnels (pour un même système planétaire) ont été effectués pendant cette période, ce qui explique qu'un même nom de système apparaissent parfois pour différentes hiérarchies (les systèmes HD 82943 et HD 160691 par exemple). Concernant le système HD 73526, les deux ajustements effectués (l'un keplérien, l'autre dynamique) par Tinney *et al.* (2006) placent le système dans deux hiérarchies différentes (H2 et H3).

En parallèle, j'ai effectué une étude numérique pour l'ensemble de ces systèmes en MMR 2 : 1, en utilisant l'outil MIPS décrit en §2.2 et 2.3. L'on obtient que seuls les systèmes appartenant à la hiérarchie H1 et le système HD 82943 de la hiérarchie H2 sont trouvés stables (pour des orbites coplanaires) contrairement aux autres systèmes des hiérarchies H2, H3 et H4. Bien que l'étude de J. Hadjidemetriou ne permette pas de statuer sur le comportement dynamique des systèmes de la hiérarchie H3, les résultats numériques laissent présager d'un comportement instable. Il n'est cependant pas garanti que l'ensemble des systèmes de cette hiérarchie possède la même statut dynamique. L'intégration de nombreux systèmes (théoriques ou observationnels) de la hiérarchie H3 ainsi qu'une étude statistique sur leur comportement dynamique permettraient très certainement de pouvoir caractériser cette hiérarchie de masses et d'excentricités.

Il semble donc que ces résultats numériques viennent corroborer les résultats analytiques, à l'exception du système HD 82943 (Mayor *et al.* 2004) de la hiérarchie H2 qui devrait être trouvé instable (par la voie numérique). Ce paradoxe peut s'expliquer par le fait que les masses des deux planètes sont quasi-identiques ($M_1 = 1.85 M_J$ et $M_2 = 1.84 M_J$). Le système se situe finalement entre deux hiérarchies (H1 et H2); d'où l'impossibilité de déterminer l'état dynamique d'un système dans de telles conditions. Par ailleurs, l'étude de J. Hadjidemetriou porte sur des systèmes dont le rapport des masses planétaires est relativement élevé, voire très élevé (cf. note 6), ce qui ne correspond pas exactement aux rapport de masses des systèmes observés actuellement. Au final, pour l'ensemble des systèmes étudiés, la classification de J. Hadjidemetriou semble donner une indication sur la stabilité ou l'instabilité mais ne peut prétendre affirmer de façon certaine l'état dynamique de ces systèmes (à moins bien sûr d'avoir des rapports de masses de 1/3, 1/7 ou 1/39).

⁶Les rapports de masses m_1/m_2 étudiés par Hadjidemetriou (2002) sont les suivants : 1/39, 1/7, 1/3, 3/1, 7/1, 39/1.

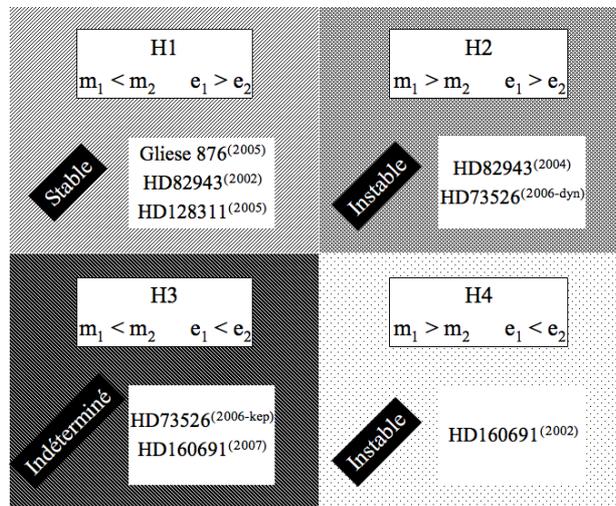


FIG. 1.9 – Classification des systèmes en résonance de moyen mouvement 2 :1 selon leur hiérarchies de masses et d'excentricités. Gliese 876 : données de Rivera *et al.* (2005). HD 128311 : Vogt *et al.* (2005). HD 82943 : Israelinian *et al.* (2002) et Mayor *et al.* (2004). HD 73526 : Tinney *et al.* (2006) - ajustement keplérien (H3) et ajustement à 3-corps (H2). HD 160691 : (H4) Jones *et al.* (2002) et (H3) Pepe *et al.* (2007). L'ensemble des conditions initiales utilisées est indiqué dans l'Annexe B dans la Table B.2.

Chapitre 2

Outils de Détection du Chaos

2.1 Introduction

2.1.1 Approches analytiques et numériques

La simplicité et le caractère insaisissable du problème général des 3-corps ont captivé les mathématiciens et astronomes pendant des siècles. Encore maintenant, à cause de sa non-intégrabilité, le problème des 3-corps demeure épineux. Il a été résolu dans quelques cas particuliers, en réduisant le nombre de degrés de liberté. Ainsi, il existe différents types de moyennisation rendant le problème restreint des 3 corps intégrable. Celui-ci se caractérise par des orbites coplanaires et circulaires ; de plus, l'une des planètes possède une masse négligeable devant les deux autres. De nombreux travaux ont été effectués sur ce sujet dans le cadre du Système Solaire ; mentionnons par exemple les travaux de Szebehely (1967), Hénon (1976) ou encore Hadjidemetriou (1976). Les orbites des planètes du Système Solaire étant faiblement excentriques et coplanaires, le problème restreint des 3-corps a été (et est encore) fréquemment choisi en première approximation. Il est bien connu que les interactions gravitationnelles mutuelles entre les planètes viennent briser la simplicité du problème intégrable des 2-corps et celui du problème restreint des 3-corps. Or, les 29 systèmes à planètes multiples observés jusqu'à présent ne peuvent même pas supporter la réduction au problème restreint des 3-corps. En effet, ces systèmes se caractérisent, en grande majorité, par des planètes géantes proches de leur étoile centrale et des excentricités grandes. La dynamique des systèmes multi-planétaires compacts correspond de la sorte à une variété du problème général des N -corps (avec $N \geq 3$) dont les solutions ne sont évidemment pas nécessairement connues.

Face au grand nombre de degrés de liberté et afin d'étudier la stabilité dynamique des systèmes multi-planétaires observés, il a donc été nécessaire de développer des méthodes numériques d'analyse globale. Aussi, la combinaison d'intégrateurs numériques et d'outils de détection du chaos permettent d'identifier rapidement et d'expliquer des mécanismes de stabilité. Au cours de ma thèse, j'ai bénéficié de deux outils numériques de détection du chaos (respectivement dérivés des Nombres Caractéristiques de Lyapunov (LCN) et de l'analyse en fréquence) : (1) le package MIPS basé sur l'indicateur rapide MEGNO, fourni par Eric Bois depuis mon stage de Master¹ et (2) la méthode FMA fournie par Hans Scholl et Francesco Marzari en fin de thèse. Ces deux méthodes sont présentées en §2.2 et §2.4, respectivement. Elles m'ont permis d'étudier la dynamique de nombreux systèmes. J'ai par ailleurs développé une approche analytique complémentaire relative aux résonances orbitales rétrogrades (Chapitre 5).

¹J'ai effectué mon stage de 2^{ème} année de Master (avril à juin 2005) à l'Observatoire de la Côte d'Azur, dans le Laboratoire Cassiopée et sous la direction d'Eric Bois.

2.2 Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits

2.2.1 Introduction au Nombre Caractéristique de Lyapunov

La méthode des Nombres Caractéristiques de Lyapunov (LCN) consiste à mesurer le taux de divergence, à un instant t , entre deux trajectoires initialement proches. La valeur maximale de l'exposant de Lyapunov (noté L), obtenue pour t tendant vers l'infini, indique si l'orbite étudiée est régulière ou chaotique. Elle est définie par :

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta p(t), \delta q(t)\|}{\|\delta p(0), \delta q(0)\|} \quad (2.1)$$

avec p et q des variables canoniques conjuguées et $\delta p(t) = p^{(2)}(t) - p^{(1)}(t)$ et $\delta q(t) = q^{(2)}(t) - q^{(1)}(t)$ exprimant "l'écart" entre les trajectoires (1) et (2) à un instant t . Malheureusement, la détermination des LCN requiert souvent des intégrations sur des temps extrêmement longs (cf. par exemple Lyapunov 1907 ou Benettin *et al.* 1976, 1980). Des méthodes convergeant beaucoup plus rapidement que la méthode des LCN sont donc absolument nécessaires ; c'est le cas par exemple de la technique MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits), entre autres.

2.2.2 Principe de la méthode MEGNO

L'outil MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits) est l'un des plus récents indicateurs rapides de chaos. MEGNO a été développé par Cincotta & Simò (2000) et adapté aux systèmes multi-planétaires par E. Bois (cf. §2.3). Il donne non seulement une information importante sur la dynamique globale et la structure fine de l'espace des phases mais également une bonne estimation du Nombre Caractéristique de Lyapunov tout en limitant le temps de calcul. Comme le précisent Cincotta *et al.* (2003), le succès de la technique MEGNO est dû aux indications détaillées fournies sur la dynamique globale des systèmes Hamiltoniens multi-dimensionnels. Par ailleurs, scannant l'espace des paramètres de systèmes dynamiques, l'on obtient une image claire des structures de résonance, la localisation des orbites quasi-périodiques ainsi qu'une mesure de l'hyperbolicité dans les régions chaotiques.

2.2.3 Caractérisation des comportements dynamiques

A partir de la forme intégrale de l'exposant de Lyapunov suivante,

$$L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(t')}{\delta(t')} dt' \quad \text{avec } \delta = \|\delta p, \delta q\|, \quad (2.2)$$

Cincotta & Simò (2000) définissent le MEGNO de la façon suivante :

$$Y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(t')}{\delta(t')} t' dt'. \quad (2.3)$$

D'où, pour une trajectoire stable, $Y(t)$ oscille autour de la valeur 2, tandis que pour une trajectoire chaotique, $Y(t)$ oscille autour de la solution linéairement divergente $y = Lt$. La moyenne temporelle de $Y(t)$ donne :

$$\langle Y \rangle (t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(t') dt', \quad (2.4)$$

ce qui permet d'avoir :

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle Y \rangle (t) = 2$ pour une orbite stable,
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle Y \rangle (t) \sim \frac{L}{2}t$ pour une orbite chaotique.

La technique MEGNO permet de distinguer les solutions quasi-périodiques stables, quasi-périodiques instables et chaotiques (i.e. irrégulières ou non quasi-périodiques) de la façon suivante :

- Dans le cas d’une solution *stable* : $Y(t)$ oscille autour de la valeur 2 avec de *faibles* amplitudes et $\langle Y(t) \rangle$ converge vers 2 (cf. Fig. 2.1a).
- Dans le cas d’une solution *chaotique* : les valeurs de $Y(t)$ et $\langle Y(t) \rangle$ augmentent linéairement en fonction du temps (respectivement à un taux égal au LCN de la solution ou à un taux de moitié). Seulement dans le cas où l’espace des phases a une structure hyperbolique, $Y(t)$ augmente avec le temps (cf. Fig. 2.1b). Sinon, $Y(t)$ atteint une valeur de saturation.

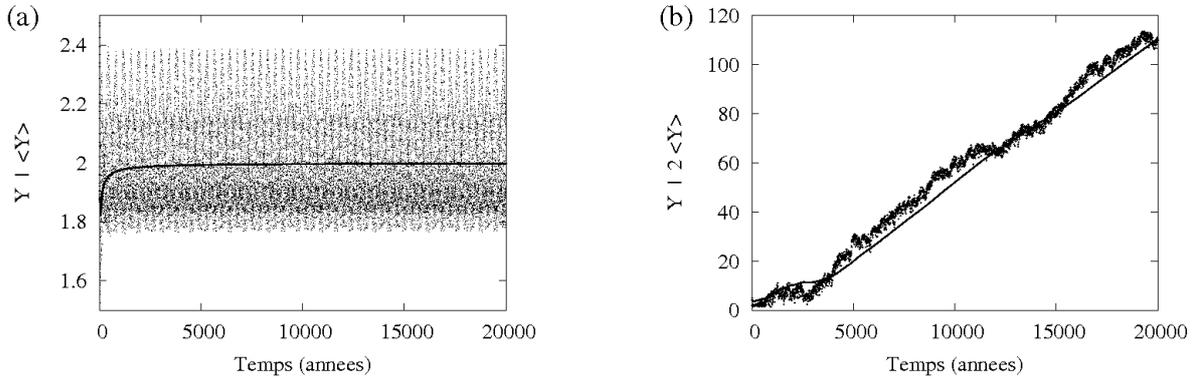


FIG. 2.1 – Evolution temporelle de l’indicateur MEGNO Y et du MEGNO moyen $\langle Y \rangle$ dans le cas (a) d’une solution stable et (b) d’une solution chaotique. Ces deux figures ont été obtenues en intégrant deux jeux de conditions initiales différents appartenant au voisinage du système à deux planètes HD 128311.

2.2.4 Comparaison des méthodes MEGNO et LCN

Compte tenu des propriétés de MEGNO, il semble, que cette méthode soit équivalente à l’exposant de Lyapunov. Cependant, Cincotta & Simò (2000) ont montré que $\langle Y(t) \rangle$ converge vers sa valeur limite plus rapidement que l’exposant de Lyapunov. En effet, l’“amplification” des effets chaotiques dans l’évolution des équations variationnelles, via la transformation de l’équation caractéristique des LCN (2.2) en l’équation caractéristique du MEGNO (2.3), favorise la détection de comportement chaotique sur un temps beaucoup plus court que ne le permettent les LCN.

Comme le montrent Cincotta *et al.* (2003), il est possible d’estimer la valeur des LCN via le tracé de $Y(t)/t$ en fonction du temps (cf. Fig. 1e de Cincotta *et al.* 2003). Ainsi, les deux méthodes conduisent à des valeurs similaires dans le cas d’orbites chaotiques : elles convergent, au même taux, vers la même valeur positive de LCN (de très faibles différences entre les deux méthodes apparaissent). En revanche, elles diffèrent dans le cas d’orbites stables : la valeur de $Y(t)/t$ diminue plus rapidement que le LCN.

2.3 Megno Indicator for Planetary Systems

2.3.1 Application aux systèmes planétaires

A partir de la technique MEGNO, Eric Bois a construit en 2001 (lors de l’encadrement d’un post-doctorant à l’Observatoire de Bordeaux) le package MIPS (acronyme de Megno Indicator for Planetary Systems) dédié spécifiquement à l’étude des systèmes à deux planètes extrasolaires et à leurs conditions de stabilité dynamique. Cette première version de MIPS a été un outil tout spécialement conçu pour l’étude de la dynamique globale des systèmes planétaires. Elle a, du reste, généré l’un des deux premiers articles d’analyse globale de la dynamique des systèmes de planètes extrasolaires (Goździewski, Bois *et al.* 2001). De plus, la première étude de *stabilité comparée* de systèmes multi-planétaires a été effectuée avec cette méthode (Kiseleva-Eggleton, Bois *et al.* 2002). L’outil MIPS a ainsi été appliqué avec succès dans une série de publications (cf. Goździewski *et al.* 2002, Kiseleva-Eggleton *et al.* 2002, Kiseleva-Eggleton *et al.* 2003, Bois *et al.* 2003, Bois *et al.* 2004, Kiseleva-Eggleton *et al.* 2004, Goździewski *et al.* 2004, Goździewski *et al.* 2006, Gayon & Bois 2008a-2008b, Gayon *et al.* 2008b-2008c-2008d).

Ce package MIPS basé sur l’indicateur rapide MEGNO permet d’intégrer numériquement un problème des 3-corps (une étoile et deux planètes).² 14 paramètres sont donc à prendre en compte : les éléments d’orbites et les 2 masses planétaires. En faisant varier conjointement les paramètres par paire, nous parvenons à scanner tous les systèmes multi-planétaires, au fur et à mesure de leur découverte, en “strates” successives dans l’espace multi-dimensionnel de leurs paramètres incluant tout particulièrement ceux indéterminés par les observations (inclinaisons orbitales et longitudes apsidales). L’on obtient une image claire des structures de résonance, la localisation des orbites quasi-périodiques ainsi qu’une mesure de l’hyperbolicité dans les régions chaotiques (i.e. le taux de divergence exponentielle).

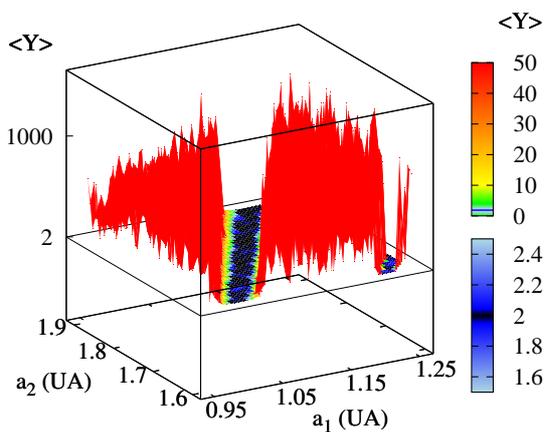


FIG. 2.2 – Carte de stabilité en 3-D tracée dans l’espace des paramètres $[a_1, a_2]$, a_1 et a_2 étant respectivement les demi grand-axes de la planète interne P_1 et de la planète externe P_2 (exprimés en UA). Les couleurs noir et bleu foncé représentent les orbites stables (avec $\langle Y \rangle = 2 \pm 3\%$ et $\langle Y \rangle = 2 \pm 5\%$ respectivement, $\langle Y \rangle$ correspondant à la valeur de l’indicateur MEGNO) tandis que les couleurs chaudes caractérisent des orbites hautement instables ou chaotiques ($\langle Y \rangle \gg 2$). La vallée de stabilité (en noir et bleu foncé) correspond à la résonance de moyen mouvement 2 : 1 (les périodes orbitales sont commensurables et le rapport des périodes est égal à 2/1).

²Les équations du mouvement sont intégrées en utilisant le code ODEX (Hairer *et al.* 1993) qui incorpore la méthode Burlish-Stoer-Gragg.

La combinaison de l'outil MIPS, d'un logiciel graphique et d'une palette de couleurs (correctement depuis mon stage de Master 2) permet de tracer des cartes de stabilité. On peut dès lors distinguer les différents comportements dynamiques dans le voisinage d'un système à deux planètes et déduire les mécanismes de stabilité sous-jacents. La Fig. 2.2 est un exemple de carte de stabilité; elle a été tracée au début de ma thèse à partir du fit keplérien du système à deux planètes HD 128311 (observations de Vogt *et al.* 2005; cf. Table B.2 en Annexe B).

En utilisant la méthode MIPS depuis mon stage de Master 2, j'ai pu établir rapidement un bilan dynamique de nombreux systèmes à deux-planètes (cf. par exemple Gayon 2005 (stage de Master), Gayon & Bois 2006 ou encore Bois & Gayon 2006). Cependant, face au nombre croissant de planètes détectées dans un même système extrasolaire, il nous est devenu nécessaire d'étendre, au cours de la thèse, le package MIPS de 2 planètes à N planètes.

2.3.2 Généralisation au problème des N-corps

L'Hamiltonien d'un système à N_p planètes de masses m_i avec $i \in [1, N_p]$ autour de l'étoile centrale de masse M_* s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} M_* \mathbf{v}_0^2 - k^2 \sum_{i=1}^{N_p} \frac{M_* m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_p} m_i \mathbf{v}_i^2 - k^2 \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{N_p} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec \mathbf{r}_0 et \mathbf{r}_i les vecteurs positions de l'étoile et de la planète i , respectivement, dans le référentiel barycentrique; \mathbf{v}_0 et \mathbf{v}_i sont les vecteurs vitesses associés. Les équations du mouvement d'une planète i dans le référentiel barycentrique sont définies par :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \mathbf{v}_i \\
 \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= -k^2 M_* \frac{\mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_i|^3} - k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_p} m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

où \mathbf{R}_i est le vecteur de position relative :

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 = \sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) \mathbf{r}_j \tag{2.7}$$

et

$$\mu_j = \frac{m_j}{M_*}. \tag{2.8}$$

J'ai donc procédé à l'extension du package MIPS pour N_p planètes (ou N-corps avec $N = N_p + 1$), ce qui permet d'étudier les conditions de stabilité de l'ensemble des systèmes multi-planétaires détectés. Le développement du calcul pour N_p planètes est proposé en Annexe C (expression des forces et équations variationnelles). Des études de la dynamique du système 55 Cancri (à 5 planètes) ainsi que des planètes telluriques du Système Solaire sont par ailleurs en préparation. Une partie des résultats obtenus pour 55 Cancri est présentée dans ce manuscrit.

2.4 Frequency Map Analysis

2.4.1 Principe de la méthode

L'idée de base de la technique FMA (Laskar *et al.* 1992 ; Laskar 1993a ; Laskar 1993b ; Sidlichovský & Nesvorný 1997) est d'analyser l'évolution temporelle d'une ou plusieurs fréquences fondamentales d'un système dynamique à partir des résultats issus de l'intégration numérique.³ Contrairement aux orbites quasi-périodiques, les orbites chaotiques n'ont pas de fréquences bien déterminées. Le principe de l'analyse en fréquence réside donc dans la détermination numérique de la valeur des fréquences fondamentales sur un certain intervalle de temps. Il est possible d'estimer les variations relatives de ces fréquences sur plusieurs fenêtres temporelles et d'en déduire le taux de diffusion des fréquences. Si les fréquences restent quasi-constantes sur les différentes fenêtres temporelles alors l'orbite considérée est régulière (i.e. quasi-périodique).

Outre la détermination des fréquences d'un système, le principal avantage de la méthode FMA est la durée relativement courte (par rapport aux méthodes d'intégration directe⁴) de l'intégration numérique des orbites nécessaire à la détermination des propriétés de stabilité du système. De plus, l'analyse en fréquence requiert généralement des temps d'intégration beaucoup plus court que les exposants de Lyapunov. En effet, il est nécessaire de calculer l'exposant de Lyapunov jusqu'à ce que son évolution temporelle atteigne sa limite asymptotique. En revanche, pour l'analyse en fréquence, le système peut être intégré sur plusieurs périodes (5-10) correspondant à la fréquence fondamentale. Comme l'outil MEGNO, la technique FMA fournit également une carte dynamique complète des propriétés de stabilité d'un système et illustre la dynamique globale du système.

2.4.2 Analyse de Fourier

La détermination des fréquences principales d'une orbite est effectuée par analyse de Fourier. La méthode FMA fournit ainsi une mesure quantitative du taux de diffusion des fréquences intrinsèques dans l'espace de Fourier. Rappelons brièvement la théorie liée à la technique FMA. Soit une fonction complexe quasi-périodique $f(t)$. On peut la représenter comme un développement de Fourier sous la forme suivante :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i(\nu_n t + \phi_n)} \quad (2.9)$$

avec a_n les amplitudes réelles dont la valeur diminue avec n , ν_n et ϕ_n les fréquences et phases correspondantes. La méthode FMA consiste à trouver un jeu de N triplets $\{a'_n, \nu'_n, \phi'_n\}$ tels que le signal reconstruit $f'(t)$, donné par :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^N a'_k e^{i(\nu'_k t + \phi'_k)} \quad (2.10)$$

approxime la fonction originale $f(t)$ jusqu'à une précision fixée. Si la fonction $f(t)$ est la solution numérique d'un système dynamique, nous avons les valeurs tabulées de $f(t)$ à des intervalles de temps réguliers (dt) sur une durée Δt . On peut calculer avec une grande précision les fréquences ν_n sur une fenêtre temporelle ("running window" en anglais) $[t_i, t_{i+1}]$ couvrant l'intervalle Δt . La dispersion des fréquences, calculée sur les "running windows" à partir de l'estimation de la déviation standard de ν_n , mesure le taux de diffusion de la solution $f(t)$ dans l'espace des actions.

³Dans cette thèse et dans le cadre de l'étude de la dynamique de systèmes multi-planétaires via la technique FMA, l'intégrateur numérique utilisé est le code SYMBA (Duncan *et al.* 1998). Il s'agit d'un intégrateur symplectique.

⁴La notion d'intégration directe consiste à intégrer numériquement les équations du problème des N-corps et à détecter du chaos en traçant l'évolution temporelle des éléments orbitaux.

2.4.3 Application aux systèmes planétaires extrasolaires

La méthode FMA a été tout d’abord appliquée aux planètes du Système Solaire (Laskar *et al.* 1992) puis aux petits corps du Système Solaire (Nesvorný & Ferraz-Mello 1997 ; Melita & Brunini 2001 ; Marzari *et al.* 2002 ; Marzari *et al.* 2003a ; Marzari *et al.* 2003b). Elle est désormais utilisée pour les systèmes extrasolaires, notamment dans l’étude du système ν Andromedae (Robutel & Laskar 2001) ou encore du système 55 Cancri (Marzari *et al.* 2005 ; Gayon *et al.* 2008b ; Gayon *et al.* 2008c).⁵

Avec l’analyse en fréquence de Laskar, seule l’évolution séculaire des systèmes planétaires est considérée ; ce qui implique la présence d’angles à variation lente uniquement, autrement dit de périodes longues ou encore de fréquences courtes. Dans le cas d’un système multi-planétaire, le signal suivant est analysé par analyse de Fourier (cf. par exemple Marzari *et al.* 2006) : $s_{\Delta\tilde{\omega}} = \cos(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) + i \sin(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)$, avec $\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$ et $\tilde{\omega}_i$ étant la longitude apsidale de la planète i ($i = 1, 2$).⁶ Le taux de diffusion (noté σ_{FMA}) de la composante Fourier principale de $s_{\Delta\tilde{\omega}}$ est mesurée à partir du logarithme négatif de la déviation standard de $s_{\Delta\tilde{\omega}}$ sur différentes fenêtres temporelles de plusieurs milliers d’années et sur une durée totale d’intégration de l’ordre du million d’années. Chaque “running window” inclut suffisamment de périodes de $\Delta\tilde{\omega}$ pour avoir une analyse de Fourier significative.

Comme le mentionnent Marzari *et al.* (2005, 2006), le choix des variables pour l’analyse de Fourier permettant de déterminer le taux de diffusion n’est pas toujours aisé et peut nécessiter une attention particulière. En effet, le signal choisi peut être affecté artificiellement par un mauvais choix de variables qui peuvent éventuellement masquer une diffusion lente ou, au contraire, suggérer une fausse diffusion.⁷ Notons, par ailleurs, que la détermination des fréquences principales ainsi que les amplitudes des éléments angulaires des planètes, permet d’acquérir une information supplémentaire quant aux excentricités “libres” des planètes et aux périodes de libration des variables angulaires les plus importantes.

Des taux de diffusion lente (grande valeur de σ_{FMA}) signifient que les orbites sont *quasi-périodiques*. Dans le cas de diffusion rapide (faible valeur de σ_{FMA}), les orbites sont *chaotiques*. La notion de faible valeur ou de grande valeur de σ_{FMA} n’est cependant pas clairement définie. La méthode FMA fournit alors en quelque sorte une mesure relative de la stabilité. Des simulations supplémentaires sur des temps de l’ordre du milliard d’années sont par conséquent nécessaires pour déterminer la période de stabilité issues de certaines conditions initiales.

⁵La méthode FMA est par ailleurs utilisée dans d’autres disciplines de l’astrophysique (dynamique galactique par exemple) et de la physique (dans le domaine des accélérateurs de particules notamment).

⁶L’intégration numérique peut s’effectuer pour un système à plus de deux planètes. En revanche, seules deux planètes sont considérées dans l’analyse en fréquence.

⁷Quand le système est en corotation apsidale (i.e. quand les angles de résonance θ_1 et θ_2 librent), les signaux plus conventionnels $s_j = h_1 + ik_j$ avec $j = 1, 2$ et où $h_j = e * \cos(\tilde{\omega}_j)$ et $k_j = e * \sin(\tilde{\omega}_j)$ peuvent avoir des variations reliées à la libration de corotation et non à la diffusion chaotique. Par conséquent, la technique FMA est de préférence appliquée au signal $s_{\Delta\tilde{\omega}}$ plutôt qu’aux signaux conventionnels s_1 et s_2 .

2.5 Comparaison des méthodes MIPS et FMA

Aucune comparaison entre les méthodes MIPS et FMA n’ayant été effectuée à leur actuelle et bénéficiant de ces deux différents outils (par E. Bois et H. Scholl), nous avons trouvé intéressant de comparer la distribution de conditions initiales par rapport aux différents indicateurs ($\langle Y \rangle$ et σ_{FMA}) et de confronter les cartes de stabilité obtenues dans les deux cas.

2.5.1 Corrélation entre les méthodes

Comme mentionné précédemment, en fournissant une évaluation du taux de diffusion des orbites (σ_{FMA}), la méthode FMA indique une sorte de “stabilité relative”. Il s’agit ainsi de savoir à quel point une trajectoire est quasi-périodique. Une solution sera donc plus stable ou plus chaotique qu’une autre solution.

Pour quelle valeur limite de σ_{FMA} , obtient-on nécessairement une solution quasi-périodique ? La méthode FMA conduisant à une stabilité relative entre plusieurs solutions, la réponse n’est donc pas triviale. De manière générale, une valeur de σ_{FMA} supérieure à 3 est caractéristique d’un système quasi-périodique alors qu’une valeur inférieure à 1 est typique d’un système chaotique. Mais que se passe-t-il entre 1 et 3 ? Peut-on déterminer une limite de quasi-périodicité (notée σ_{lim}) ? Un bon moyen de trouver la valeur de σ_{lim} consiste :

- soit à intégrer un ensemble de conditions initiales et effectuer une analyse en fréquence sur un temps beaucoup plus long (le comportement dynamique de l’ensemble des conditions initiales sur de ces nouvelles échelles de temps sera par conséquent mieux caractérisé),
- soit à utiliser en parallèle une autre méthode de détection du chaos.

Ainsi, en combinant la méthode MIPS à FMA, un diagramme de corrélation a pu être établi (Fig. 2.3, obtenue à partir du fit képlérien de Vogt *et al.* (2005) du système HD 128311 ; cf. Table B.2 en Annexe B). Un scan en éléments orbitaux [a_2, e_2] (autrement dit en demi grand-axe et excentricité de la planète externe 2) dans le voisinage du système HD 128311 a été effectué ; 256 conditions initiales ont été intégrées à la fois avec MIPS et avec FMA. Dans le cas d’éjection d’une planète au cours de l’intégration (130000 ans), FMA ne peut déterminer le taux de diffusion ; en revanche, MIPS fournit une valeur du taux de divergence des orbites.

Les résultats concernant l’éjection de planète sont représentés par des “étoiles” dans la colonne de gauche de la Fig. 2.3a. Dans le cas de non-éjection d’une planète les solutions sont représentées par des croix dans la colonne de droite de la Fig. 2.3a. La bande horizontale (obtenue pour $\langle Y \rangle = 1.95$ et $\langle Y \rangle = 2.05$) indique la zone pour laquelle MIPS trouve une solution stable. En considérant cette bande horizontale de stabilité ainsi que la répartition des solutions en fonction de la vitesse de diffusion sur la Fig. 2.3a, on peut estimer la valeur de σ_{lim} à 2.5. On obtient ainsi une bonne corrélation entre MIPS et FMA. Néanmoins, on remarque plusieurs anomalies dans les zones Z_1 et Z_2 de la Fig. 2.3b (zoom de la Fig. 2.3a). Dans la zone Z_1 , alors que la valeur du σ_{FMA} est élevée (ce qui devrait correspondre à des solutions quasi-périodiques), la valeur du MEGNO est, quant-à-elle, supérieure à 2.05 (solution vraisemblablement non stable). Le tracé de la variation temporelle des différents éléments orbitaux permet de mieux comprendre un tel paradoxe : les éléments orbitaux expriment un comportement chaotique mais borné. Il s’agit alors d’un “chaos stable” (cf. §3.4 pour plus de détails sur la notion de “chaos stable”). En ce qui concerne les quatre solutions de la zone Z_2 , une intégration sur un temps 10 fois plus long que le temps t initialement choisi permet de montrer que les fréquences principales n’avaient pu être correctement déterminées au cours du temps t (temps initial trop court pour que les fréquences principales soient trouvées). La nouvelle analyse avec un temps d’intégration de 1300000 ans est désormais en accord avec les résultats obtenus avec MIPS. Deux cartes de stabilité ont donc pu être tracées, l’une correspondant à la mesure du MEGNO, l’autre à l’analyse en fréquence (Fig. 2.4).

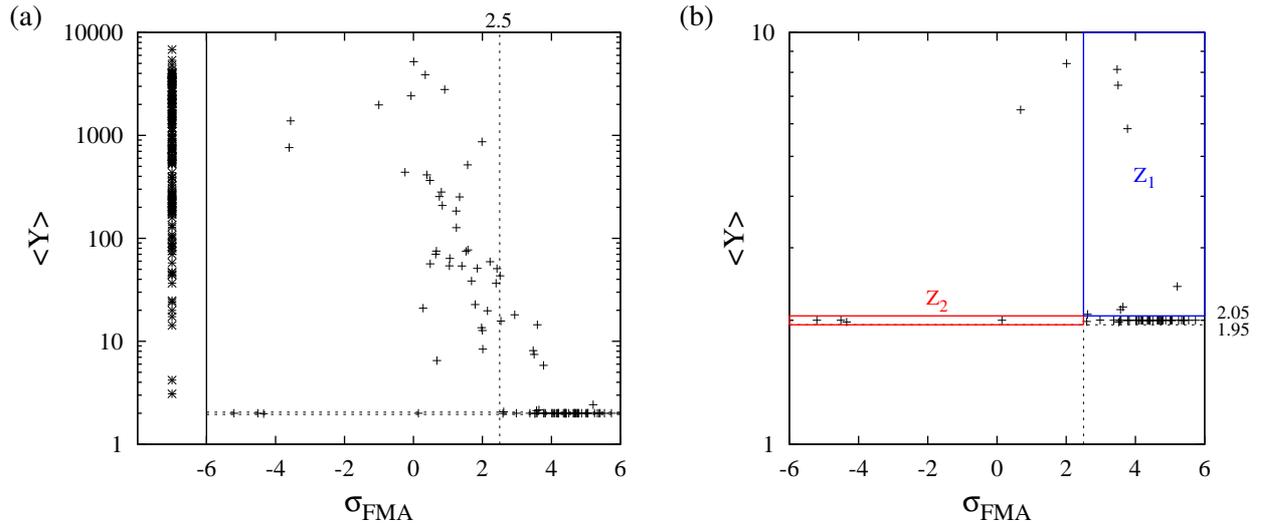


FIG. 2.3 – Corrélation entre FMA et MIPS à partir de l'étude du système HD 128311. Temps d'intégration 130 000 ans (temps basé sur la fréquence principale du système lui-même).

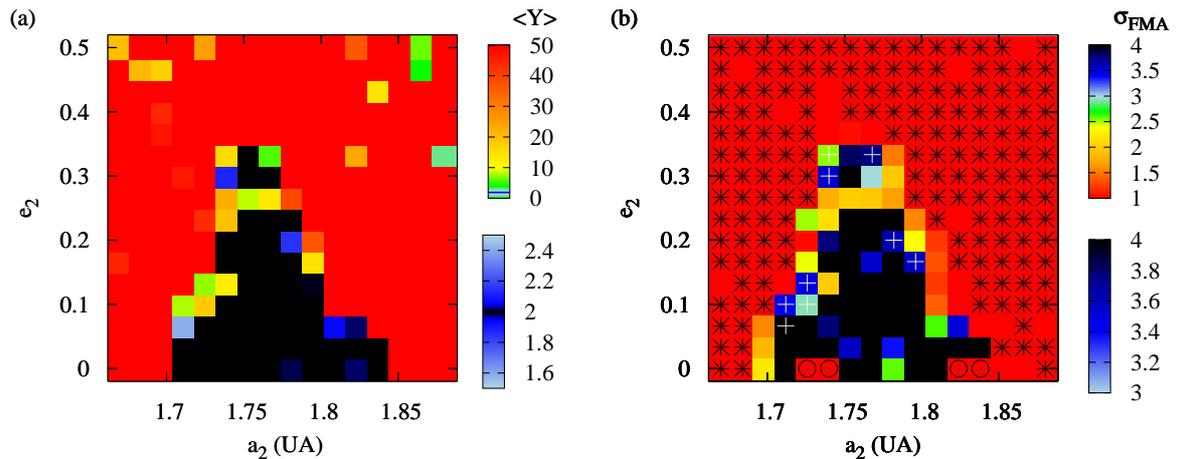


FIG. 2.4 – Cartes de stabilité obtenues avec MIPS (a) et FMA (b) pour le système HD 128311 (fit képlérien de Vogt *et al.* (2005); cf. Table B.2 en Annexe B). Figure (a) obtenue avec MIPS : Les solutions stables sont obtenues pour $\langle Y \rangle \in [1.95 : 2.05]$ et représentées en noir et bleu foncé. Figure (b) obtenue avec FMA : L'ensemble des solutions quasi-périodiques sont représentées en noir, bleu et vert ; le taux de diffusion étant le plus faible pour la couleur noire. Les solutions de la zone Z_1 (cf. Fig. 2.3b) sont localisées par les signes '+'. Les solutions *stables* apparaissent principalement en noir et bleu. Les couleurs orange et rouge caractérisent les solutions chaotiques. De plus, les symboles en forme d'étoile représentent l'éjection d'une des planètes durant le temps d'intégration (130 000 ans). Les cercles correspondent à un comportement dynamique trouvé à la fois chaotique par la méthode FMA et stable par la méthode MIPS (ces conditions initiales apparaissent dans la zone Z_2 de la Fig. 2.3b); un tel paradoxe est expliqué dans le texte.

2.5.2 Avantages et inconvénients des méthodes

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il peut arriver que les fréquences principales d'un système soient très courtes (cf. par exemple les conditions initiales de la zone Z_2 dans le Fig. 2.3b). Par conséquent, avec la technique FMA, il est *parfois* nécessaire d'intégrer une condition initiale à très long terme. Or, d'une manière générale, quelles que soient les fréquences principales d'une solution, MIPS fournit des cartes de stabilité "correctes" sur des temps d'intégration généralement plus courts que ne le permet FMA. D'un côté, MIPS détecte rapidement les cas stables et chaotiques et de l'autre, FMA donne accès aux fréquences propres. L'utilisation de l'une ou de l'autre méthode dépend alors de la teneur voulue des résultats (stabilité relative ou stabilité acquise, mesure de l'hyperbolicité des trajectoires, valeurs des fréquences principales, durée d'intégration, etc.). Aussi, la multiplicité des situations à étudier m'a amenée à trouver en l'indicateur MEGNO un bon compromis entre la rapidité et l'information acquise sur le comportement dynamique d'un ensemble de solutions.

Chapitre 3

Mise en Evidence de Mécanismes de Stabilité

3.1 Introduction

A partir de différents outils de détection du chaos, tels MIPS et FMA, il est possible de scanner l'espace des paramètres des systèmes multi-planétaires et d'établir différentes cartes de stabilité. D'une manière générale, il apparaît sur ces cartes de larges zones chaotiques encerclant de rares îlots de stabilité. Dès lors, il s'agit d'identifier les mécanismes de stabilité mis en jeu dans ces îlots. Actuellement, il existe plusieurs scénarii d'explications concernant le rôle des grandes excentricités dans la stabilisation de systèmes planétaires (cf. par exemple Namouni 2005 et Namouni & Zhou 2006). De même, l'implication des résonances de moyen mouvement (MMR) associées et préservées par des précessions synchrones des lignes des apsides (APS; Bois *et al.* (2003), (2005)) a été largement étudiée (cf. par exemple Chiang & Murray 2002; Lee & Peale 2002; Libert & Henrard 2006). Cependant cette combinaison MMR-ASP n'est pas la règle unique; nous verrons dans ce chapitre que des systèmes planétaires peuvent fonctionner sous d'autres modes de stabilité, parfois inédits.

La majorité des cartes de stabilité présentées dans cette thèse a été obtenue en utilisant la méthode MIPS (à deux ou N_p planètes). La palette de couleurs déjà adoptée en Fig. 2.2 et 2.4a est reprise pour l'ensemble des cartes de stabilité de cette thèse. Les couleurs noir et bleu-foncé représentent les orbites stables ($\langle Y \rangle = 2 \pm 3\%$ et $\langle Y \rangle = 2 \pm 5\%$ respectivement, $\langle Y \rangle$ correspondant à la valeur de l'indicateur MEGNO) et les couleurs orange/rouge les orbites hautement instables ou chaotiques. L'intersection des lignes horizontales et verticales localise le système nominal ("observationnel") ou étudié. Sur les cartes en demi-grands axes notées $[a_b, a_c]$, le voisinage des MMR est caractérisé par des flèches blanches. La résolution de la grille est en général de 50x50.

Comme mentionné en §1.1, la valeur des inclinaisons par rapport à la ligne de visée (i_l) est rarement connue. Par conséquent, les inclinaisons orbitales $i_{1,2}$ (la planète interne étant notée 1 et la planète externe 2), ainsi que les longitudes du nœud $\Omega_{1,2}$ restent actuellement et généralement des éléments non-déterminés par les observateurs et supposés nuls. Dans l'ensemble de cette étude, nous considérons que le repère de référence est donné par le plan orbital de la planète interne 1 au temps $t = 0$. Lorsque des cartes de stabilité en éléments non-déterminés (i ou Ω) sont tracées, nous choisissons, par convention, $i_1 = 0^\circ$ et $\Omega_1 = 0^\circ$ (à $t = 0$) de telle façon que l'inclinaison relative entre les orbites i_r ($i_r = i_2 - i_1$) soit égale à i_2 et que la longitude relative des nœuds Ω_r ($\Omega_r = \Omega_2 - \Omega_1$) soit équivalente à Ω_2 . Notons par ailleurs que nous choisissons de fixer les masses planétaires à leur valeur minimale; quelles que soient les inclinaisons orbitales les masses restent inchangées.

3.2 Description d'un mécanisme de stabilité fréquent

3.2.1 Systèmes et mécanismes théoriques *vs* systèmes observationnels

Les résonances de moyen mouvement, pour lesquelles le rapport des périodes orbitales est commensurable, ont été mises en évidence pour les systèmes extrasolaires dès la détection de systèmes à deux planètes. L'un des systèmes multi-planétaires caractérisé par une MMR et le mieux connu actuellement (i.e. dont les paramètres orbitaux sont les mieux déterminés) est le système nommé Gliese 876. Avec un suivi observationnel de ce système depuis 1998 et avec des périodes orbitales d'environ 30 et 60 jours pour les planètes géantes Gliese 876*b* et Gliese 876*c* (respectivement découvertes en 1998 (Marcy *et al.* 1998, Delfosse *et al.* 1998) et en 2001 (Marcy *et al.* 2001)),¹ il a été possible d'effectuer de nombreuses séries d'observations et de récolter un nombre suffisant de mesures de vitesses radiales pour pouvoir déterminer de manière relativement précise les éléments orbitaux des planètes de ce système. La détermination des paramètres orbitaux a ainsi pu être affinée au cours des différentes campagnes d'observations. Bien qu'une troisième planète ait récemment été découverte (Rivera *et al.* 2005)², la distribution des éléments orbitaux des deux autres planètes n'ont guère changé et le mécanisme de stabilité de ce système demeure le même.

L'ensemble des autres systèmes multi-planétaires détectés à ce jour ne présentent pas de périodes orbitales aussi courtes. La détermination des éléments orbitaux nécessitant des mesures de vitesses radiales sur plusieurs fois la période orbitale de la planète la plus externe, il est par conséquent difficile de caractériser de manière certaine la dynamique de la majorité des systèmes découverts jusqu'à présent. Prenons à titre d'exemple le cas du système HD 160691.

C'est en 2001 qu'une planète *b* (de période d'environ 640 jours) a été découverte en orbite autour de l'étoile HD 160691 (Bulter *et al.* 2001). Puis, de nouvelles observations effectuées jusqu'en 2002 ont permis de présenter l'existence d'une seconde planète *c* (de période 1300 jours environ) dans ce système (Jones *et al.* 2002). A partir des observations de Jones *et al.* (2002), Bois *et al.* (2003) ont effectué une étude de la dynamique de ce système. Les orbites du système HD 160691 semblaient à première vue hautement instables, mais en utilisant l'outil d'analyse de la dynamique globale MIPS, il a été possible d'identifier quelques zones de stabilité dans l'espace des paramètres incluant des éléments non-déterminés (pour rappel : i_r et Ω_r). Toutes les configurations stables trouvées étaient associées au même mécanisme de stabilité impliquant notamment une MMR 2 : 1. Avec des observations supplémentaires, McCarthy *et al.* (2004) proposèrent par la suite une nouvelle distribution des paramètres orbitaux, principalement de la planète *c*, de sorte que le système HD 160691 est passé d'une MMR 2 : 1 à un rapport de périodes orbitales proche d'une commensurabilité 5 : 1 ou 9 : 2. En parallèle, les observations de Santos *et al.* (2004) conduisirent à la détection d'une troisième planète de 14 masses terrestres et de période orbitale de 9.5 jours.³ En considérant les observations les plus récentes (Pepe *et al.* 2007), il semblerait finalement que le système HD 160691 soit constitué de quatre planètes dont deux sont en MMR 2 : 1. Bien que la période de la planète *c* ne soit plus de 1300 jours mais plutôt de 310 jours, le rapport des périodes orbitales des planètes *b* et *c* reste malgré tout égal à 2 dans les deux cas⁴ ! L'histoire de la détermination des éléments orbitaux des planètes du système HD 160691 est ainsi pleine de rebondissements ! L'histoire du système HD 160691 est un exemple éloquent parmi d'autres. Avec la découverte récente de nouveaux systèmes multi-planétaires (dont

¹Les observateurs notent les planètes par les lettres *b*, *c*, *d* etc. au fur et à mesure de leur découverte. Rappelons que la planète *b* n'est pas toujours la planète la plus interne. Dans cette thèse, nous utilisons une notation conforme avec la position des planètes par rapport à l'étoile : 1 (planète la plus interne), 2, 3 etc.

²Cette planète est notée Gliese 876*d* et possède une masse d'environ 7.5 masses terrestres et une période orbitale extrêmement courte (2 jours).

³Selon Santos *et al.* (2004), la planète *c* est toujours aussi mal contrainte.

⁴Le rapport des périodes $\frac{P_{\text{externe}}}{P_{\text{interne}}} = \frac{P_2}{P_1}$ passe alors de $\frac{P_c}{P_b} = \frac{2}{1}$ en 2001 à $\frac{P_b}{P_c} = \frac{2}{1}$ en 2007.

les périodes orbitales sont relativement élevées), il ne serait pas étonnant de rencontrer de nouveau de tels remaniements de paramètres orbitaux.

Comme on peut le voir, la détermination des éléments orbitaux n'est pas aisée lorsque le nombre de mesures de vitesses radiales est relativement faible. Seules des observations à long terme pourraient permettre de mieux connaître la "réalité" d'un système. Dans cette thèse, les jeux de paramètres orbitaux utilisés sont issus des différentes réductions d'observations. Ces jeux de paramètres sont considérés ici comme des sources de données permettant d'initier des calculs théoriques. Les mécanismes de stabilité présentés dans cette thèse constituent des mécanismes théoriques trouvés dans le voisinage des paramètres orbitaux donnés par les observateurs mais ne prétendent pas réguler la stabilité à proprement parler d'un système réel (à part pour le système bien connu Gliese 876 ; cf. §3.2.2 et §3.2.3). Malgré des données observationnelles en perpétuelle amélioration, l'utilisation de ces données consiste à mettre en évidence et à comprendre un ensemble de mécanismes théoriques de stabilité. Il n'est cependant pas exclu que de futures observations montrent que de tels mécanismes existent réellement. Dans la suite du manuscrit et par souci de simplicité dans l'appellation des jeux de paramètres orbitaux, on nommera les jeux de conditions initiales utilisés à partir du nom du système observationnel dont ils dérivent.

3.2.2 Mise en évidence d'une résonance de moyen mouvement

Les résonances de moyen mouvement sont des ingrédients relativement fréquents pour la stabilité dynamique des systèmes multi-planétaires compacts. Ces MMR se distinguent sur des cartes de stabilité dans l'espace des paramètres en demi grand-axes (notés $[a_1, a_2]$) par la présence de bandes de stabilité. Les Fig. 3.1a, 3.1c et 3.1e montrent ainsi chacune une bande de stabilité liée à la résonance 2 : 1 pour des jeux de conditions initiales liés aux systèmes Gliese 876, HD 128311 et HD 160691^a (cf. conditions initiales de la Table 3.1). Ces vallées sont suffisamment homogènes et larges (respectivement ~ 0.0125 UA (a), ~ 0.03 UA (c) et ~ 0.09 UA (e)) pour être considérées comme robustes et stables. Cependant, la commensurabilité des périodes orbitales n'est pas une condition suffisante pour qu'il y ait résonance de moyen mouvement. En effet, comme le montrent les Fig. 3.1b, 3.1d et 3.1f, ces vallées de stabilité peuvent complètement disparaître si la position relative (décrite par l'anomalie moyenne M) des deux planètes sur leur orbite n'est pas adéquate. Par exemple, un changement anodin de la valeur de l'anomalie moyenne M_2 , sans pour autant perdre le rapport de période 2 : 1, peut favoriser des rencontres proches entre les planètes et par conséquent induire des perturbations gravitationnelles fortes (cf. Fig. 3.2). Il en résulte un comportement dynamique hautement instable voire chaotique du système.

Par ailleurs, la présence d'une résonance de moyen mouvement se traduit généralement dans des cartes de stabilité en éléments orbitaux $[a, e]$ par des îlots de stabilité apparaissant au milieu de larges zones chaotiques ou hautement instables. La Fig. 3.3 montre un exemple de carte en $[a, e]$ dans le voisinage du système planétaire HD 128311. Pour ce système, les îlots de stabilité des Fig. 3.3a et 3.3b ont une largeur de 0.25 en excentricité. Mentionnons que l'orbite de la planète interne doit avoir une excentricité non nulle et suffisamment élevée pour que les deux orbites (coplanaires) ne se coupent pas et que les rencontres proches entre les planètes soient évitées. Pour les mêmes raisons, l'orbite de planète externe, quant à elle, doit avoir une excentricité faible.

Systèmes	M_* (M_\odot)	$m_P \sin i_l$ (M_J)	P (jours)	a (UA)	e	ω (deg)	M (deg)
Gliese 876	d	7.53(M_\oplus)	1.93774	0.0208067	0.0	0.0	311.8
	c	0.32	30.455	0.13065	0.2632	197.4	311.6
	b	2.53	60.83	0.20774	0.0338	185.5	165.6
HD 128311	b	1.56	464.9	1.109	0.38	80.1	257.6
	c	0.84	909.6	1.735	0.21	21.6	166.0
HD 160691 ^a	b	1.7	638	1.5	0.31	320	156.3
	c	1.08	1300	2.381	0.8	99	0.0
HD 160691 ^b	b	1.7	638	1.5	0.31	320	156.3
	c	1.08	1300	2.3	0.8	99	0.0
HD 73526	b	2.9	188.3	0.66	0.19	203	86
	c	2.5	377.8	1.05	0.14	13	82
HD 82943	c	1.85	219.4	0.75	0.38	124.0	0.0
	b	1.84	435.1	1.18	0.18	237.0	75.21
HD 202206	b	17.4	255.87	0.83	0.435	161.18	105.05
	c	1.15	2.44	1387.40	0.267	78.99	311.60

TAB. 3.1 – Paramètres orbitaux des systèmes planétaires (cf. Annexe B également) : Gliese 876 (Rivera *et al.* 2005), HD 128311 (Vogt *et al.* 2005; fit dynamique), HD 160691^a (Bois *et al.* 2003), HD 160691^b (Jones *et al.* 2002), HD 73526 (Tinney *et al.* 2006), HD 82943 (Mayor *et al.* 2004) et HD 202206 (Correia *et al.* 2005).

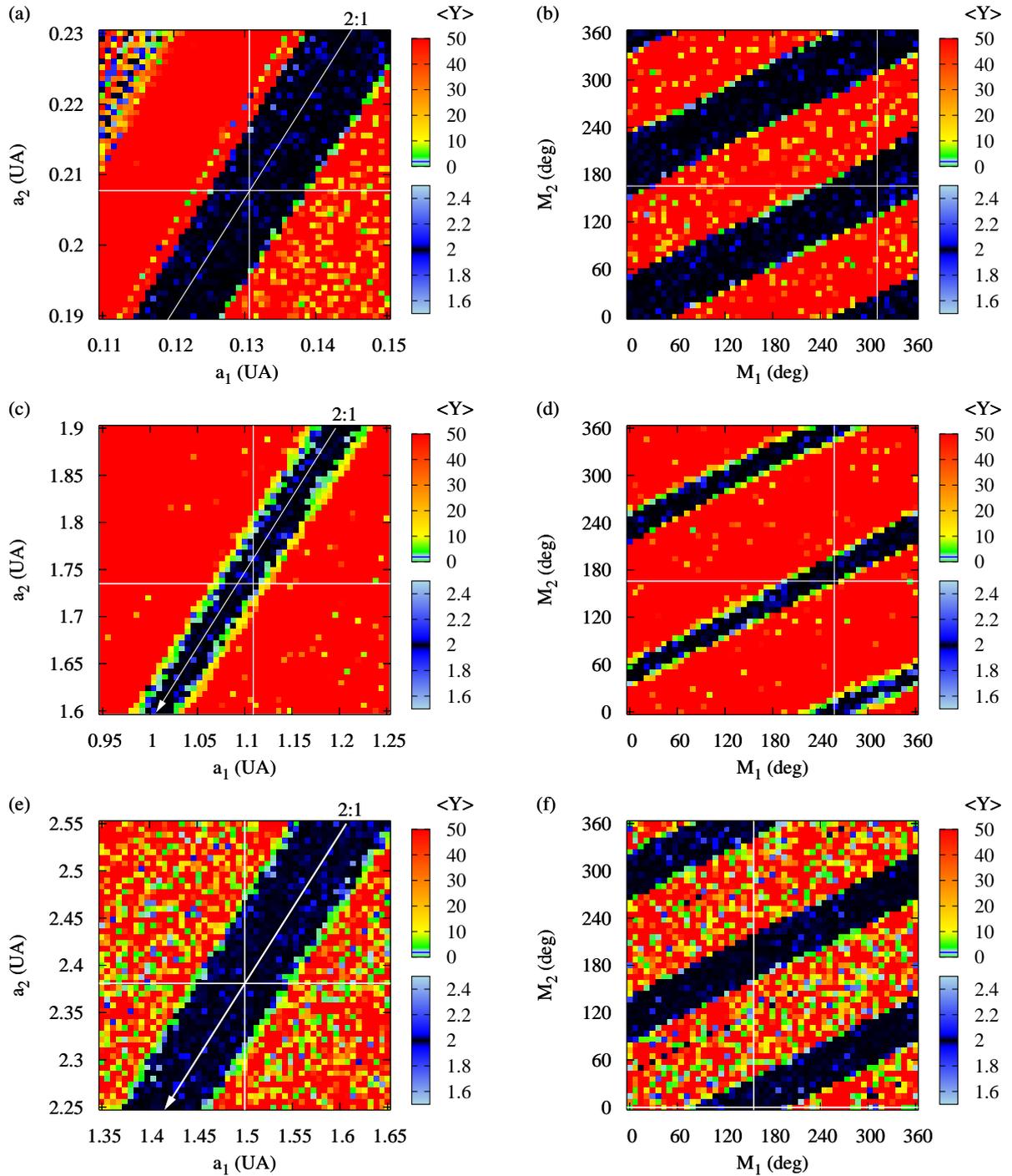


FIG. 3.1 – Cartes de stabilité dans l’espace des paramètres $[a_1, a_2]$ et $[M_1, M_2]$ obtenues à partir des conditions initiales de la Table 3.1 pour les systèmes Gliese 876, HD 128311 et HD 160691^a. Pour l’ensemble des systèmes étudiés, la planète interne est notée 1 et la planète externe 2. Notons que les conditions initiales utilisées pour le système HD 160691 datent de 2003 et qu’une nouvelle distribution des paramètres orbitaux a été obtenue depuis. Les conditions initiales utilisées dans cette étude sont un “prétexte” pour étudier un mécanisme de stabilité impliquant une résonance de moyen mouvement.



FIG. 3.2 – Positions relatives de la planète interne (allant de 1 à 3) et de la planète externe (allant de A à C) pour des configurations instables (à gauche) et stables (à droite). Dans la Figure de gauche, les deux planètes (en MMR 2 : 1) se retrouvent à un moment donné toutes les deux à leur périastre (positions 1 et A) : les interactions gravitationnelles sont très fortes et peuvent déstabiliser le système. Dans la Figure de droite, les rencontres proches sont évitées ; les planètes passent par leurs périastres respectifs à des moments différents (positions 2 et A).

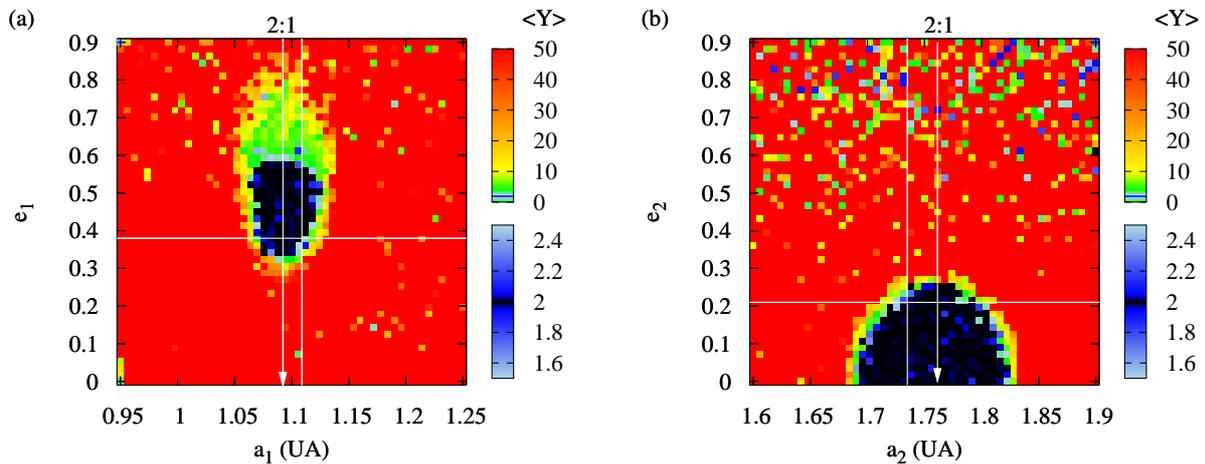


FIG. 3.3 – Cartes de stabilité dans l’espace des paramètres $[a, e]$ pour la planète interne (a) et la planète externe (b) du système HD 128311.

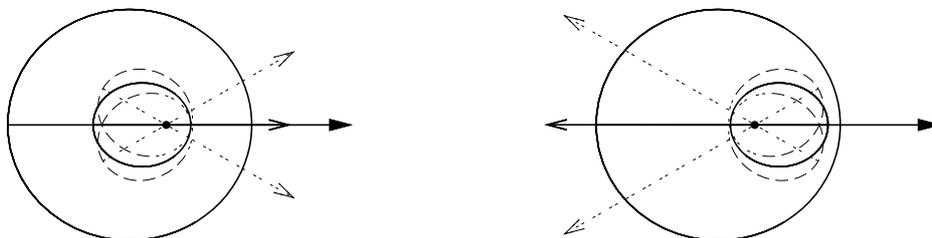


FIG. 3.4 – Précession apsidale synchrone des lignes apsidales. Sur la Figure de gauche, les lignes apsidales sont alignés (l’angle entre les lignes apsidales, noté $\Delta\tilde{\omega}$, libre (ou oscille) autour de 0°). Sur la Figure de droite, les lignes apsidales sont anti-alignées ($\Delta\tilde{\omega}$ libre autour de 180°). Il existe par ailleurs, la configuration “asymétrique” pour laquelle l’angle $\Delta\tilde{\omega}$ libre autour d’une valeur différente de 0° ou 180° .

3.2.3 Caractéristiques d’une précession synchrone apsidale

Expression des angles de précession et de résonance

Rappelons que, lors d’une Précession Apsidale Synchrone (ASP),⁵ les lignes apsidales précessent en moyenne au même taux et la longitude apsidale relative (notée $\Delta\tilde{\omega}$ avec $\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$) libre généralement autour de 0° ou 180° . Les lignes apsidales sont alors respectivement alignées ou anti-alignées (cf. Fig. 3.4). Dans de rares cas, la variable $\Delta\tilde{\omega}$ libre autour d’une valeur intermédiaire (configuration dite *asymétrique*; cf. Ferraz-Mello 2005a). De plus, dans le cas de résonance de moyen mouvement de rapport $p + q/p$, au moins l’un des deux angles de résonance suivants libre :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= p\lambda_1 - (p + q)\lambda_2 + q\tilde{\omega}_1 \\ \theta_2 &= p\lambda_1 - (p + q)\lambda_2 + q\tilde{\omega}_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dans le cas d’ASP, les deux angles de résonance (θ_1 et θ_2) librent. Rappelons par ailleurs que l’angle de précession θ_3 est égal à $\theta_1 - \theta_2$ soit : $\theta_3 = q(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)$ avec q l’ordre de la résonance. Dans le cas d’une MMR de rapport 2 : 1, notons que l’angle de précession apsidale θ_3 correspond à la longitude apsidale relative $\Delta\tilde{\omega}$.

Lecture d’une carte de stabilité en éléments $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$

A partir de carte de stabilité en éléments $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$, nous parvenons à caractériser le comportement des lignes apsidales. En effet, lorsque des bandes de stabilité apparaissent sur ces cartes de stabilité, nous pouvons conclure que le système étudié possède un régime de précession apsidale synchrone. De la position des bandes de stabilité sur ces cartes, l’on peut également déduire un alignement ou anti-alignement apsidal. Ainsi, les Fig. 3.5a et 3.5c (obtenues respectivement pour les systèmes Gliese 876 et HD 128311) expriment une ASP avec alignement apsidal tandis que la Fig. 3.5e (obtenue pour le système HD 160691) est caractéristique d’un anti-alignement apsidal.⁶ Notons, par ailleurs, qu’une autre bande de stabilité apparaît en anti-alignement apsidal dans la Fig. 3.5a pour le système Gliese 876. Il s’agit plus précisément d’une bande de stabilité éphémère. Cette bande ne persiste pas au cours du temps.

Evolution temporelle des angles de précession et de résonance

Une autre façon de connaître le comportement des lignes apsidales consiste à tracer l’évolution temporelle des angles de résonances et de précession. Cette technique “traditionnelle” a été inaugurée dans le cas de systèmes planétaires extrasolaires par Laughlin & Chambers (2001). Elle permet d’obtenir la valeur moyenne, l’amplitude et la période de libration des variables θ_1 , θ_2 et θ_3 . Nous représentons ainsi dans les Fig. 3.5b, 3.5d et 3.5f, l’évolution de ces trois variables pour les systèmes Gliese 876, HD 128311 et HD 160691 :

- pour le système Gliese 876, θ_1 , θ_2 et θ_3 librent autour de 0° avec une amplitude de $\pm 10^\circ$, $\pm 30^\circ$ et $\pm 25^\circ$ respectivement et une période de ~ 8.5 ans.
- pour le système HD 128311, les trois angles θ_1 , θ_2 et θ_3 librent autour de 0° avec une amplitude de $\pm 40^\circ$, $\pm 80^\circ$ et $\pm 100^\circ$ respectivement et une période d’environ 400 ans.
- pour le système HD 160691, θ_1 , θ_2 et θ_3 librent respectivement autour de 180° ($\pm 60^\circ$), 0° ($\pm 40^\circ$) et 180° ($\pm 40^\circ$) avec une période de ~ 2700 ans.

Par conséquent, les Fig. 3.5b, 3.5d et 3.5f sont bien en accord avec résultats déduits des cartes de stabilité.

⁵(Une ASP est également appelée corotation apsidale (ACR) dans le cas coplanaire)

⁶Dans les deux premiers cas, la bande est proche de la bissectrice; autrement dit $\Delta\tilde{\omega}$ est proche de 0° . Dans le troisième cas, la bande de stabilité apparaît pour $\Delta\tilde{\omega}$ proche de 180° .

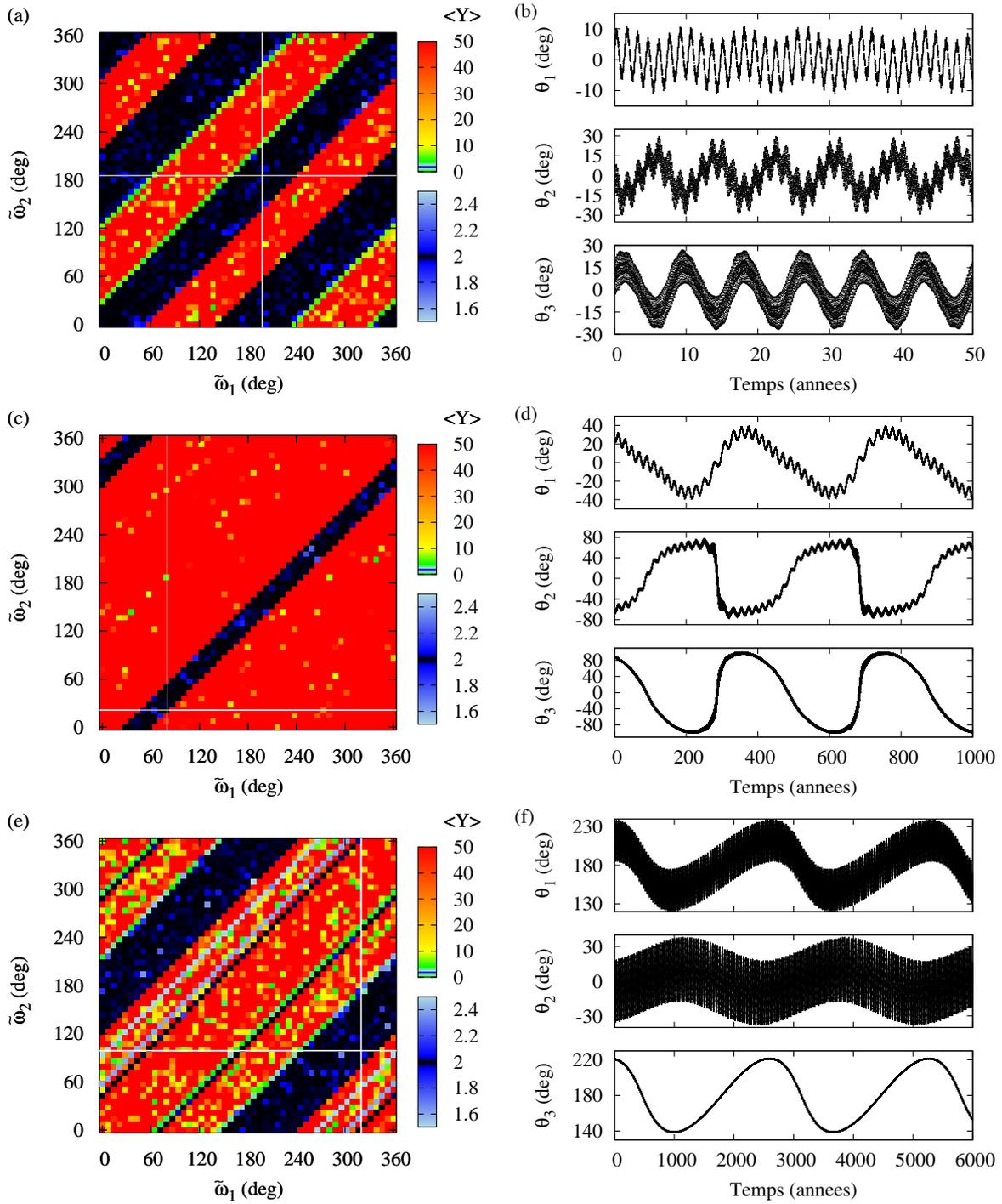


FIG. 3.5 – La colonne de gauche représente un ensemble de cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$ pour les jeux de paramètres des systèmes (en MMR 2 : 1) Gliese 876 (a), HD 128311 (c) et HD 160691 (e) mentionnés dans la Table 3.1. La colonne de droite montre le comportement des variables de résonances θ_1 , θ_2 et de l'angle de précession $\theta_3 (= \Delta\tilde{\omega})$ pour les systèmes mentionnés précédemment (figures (b),(d),(f) respectivement).

3.2.4 Conclusion sur le mécanisme que nous appelons MMR+ASP

Comme nous l’avons précédemment mentionné, une résonance de moyen mouvement requiert des anomalies moyennes adéquates. De même pour les mécanismes de précession apsidale, le choix des longitudes apsidales est fondamental ; l’enjeu étant toujours d’éviter des rencontres trop proches (et par conséquent déstabilisantes) entre les planètes. Dans les systèmes multi-planétaires compacts, les ASP permettent de préserver les MMR en évitant toute rencontre proche entre les planètes et de maintenir la stabilité du système. Par conséquent, une zone de stabilité est obtenue seulement pour une configuration géométrique particulière des orbites, c’est-à-dire pour une certaine combinaison des longitudes apsidales ($\tilde{\omega}$) et pour une position relative adéquate des deux planètes sur leur orbite (M). Un mécanisme de stabilité impliquant à la fois une MMR et une ASP est alors un mécanisme de précision où tout écart trop important des anomalies moyennes ou des longitudes apsidales peut faire basculer le système vers un état instable ou chaotique. La nécessité d’un tel “réglage” est d’autant plus important que le système est très compact et par conséquent soumis à des risques d’interactions gravitationnelles planétaires trop fortes. Ainsi, les MMR d’ordre peu élevé (ordre q pour une MMR de rapport $p + q/p$) nécessitent un réglage particulièrement fin des éléments orbitaux pour que la stabilité persiste. La configuration particulièrement compacte du système Gliese 876 ainsi que son ordre de résonance minimal (de valeur 1) expliquent par conséquent la finesse (en Fig. 3.1a) de la vallée de stabilité sur la carte en éléments $[a_1, a_2]$ (environ 0.0125 UA).

3.3 Recherche de stabilité pour des orbites non-coplanaires

Durant mon stage de Master pendant lequel il était question d’étudier la stabilité des systèmes multi-planétaires dans un espace à 3 dimensions, j’ai été amenée à scanner un ensemble de systèmes dans plusieurs espaces des paramètres, notamment les inclinaisons relatives. Nous reprenons ainsi dans cette section une partie de ce travail effectué pendant le Master et tentons de caractériser des systèmes non-coplanaires, du point de vue de leur dynamique. Bien que la détermination des masses par mesure de vitesses radiales impose une dépendance en inclinaison (par rapport à la ligne de visée), nous avons choisi de fixer les masses planétaires à leur masse minimale. Un scan dans l’espace des paramètres $[i_r, \Omega_r]$ a été effectué pour l’ensemble des systèmes suivants (cf. Table 3.1 et Annexe B) : HD 73526 (Tinney *et al.* 2006), HD 82943 (Mayor *et al.* 2004), HD 128311 (Vogt *et al.* 2006), HD 160691 (Jones *et al.* 2002) et HD 202206 (Correia *et al.* 2005).

Il apparaît sur la Fig. 3.6 des îlots de stabilité pour des inclinaisons relatives diverses et parfois assez élevées. Pour les systèmes HD 82943 (Fig. 3.6a), HD 128311 (Fig. 3.6b) et HD 202206 (Fig. 3.6c), l’îlot s’étend de 0° à 20° environ. On trouve alors que les mécanismes mis en jeu pour ces inclinaisons relatives non nulles sont similaires au cas coplanaire. Ceci permet notamment d’étendre la classification de J. Hadjidemetriou, mentionnée dans la Section 1.3, pour des inclinaisons relativement peu élevées mais tout de même non nulles.

En revanche, pour les systèmes HD 73526 et HD 160691, deux zones de stabilité sont obtenues en plein milieu d’un océan de chaos (Fig. 3.6d et Fig. 3.6e respectivement) ; plus précisément l’îlot ne prend pas sa source au niveau des inclinaisons relatives nulles contrairement aux trois autres systèmes mentionnés précédemment. Par ailleurs, les îlots s’étendent sur les intervalles suivants : $[10^\circ : 90^\circ]$ pour HD 73526 et $[10^\circ : 50^\circ]$ pour le système HD 160691. Notons par ailleurs que pour ces îlots de stabilité sont éphémères. Une intégration numérique sur un temps dix fois plus long montre en effet la disparition des îlots pour les systèmes HD 73526 et HD 160691.

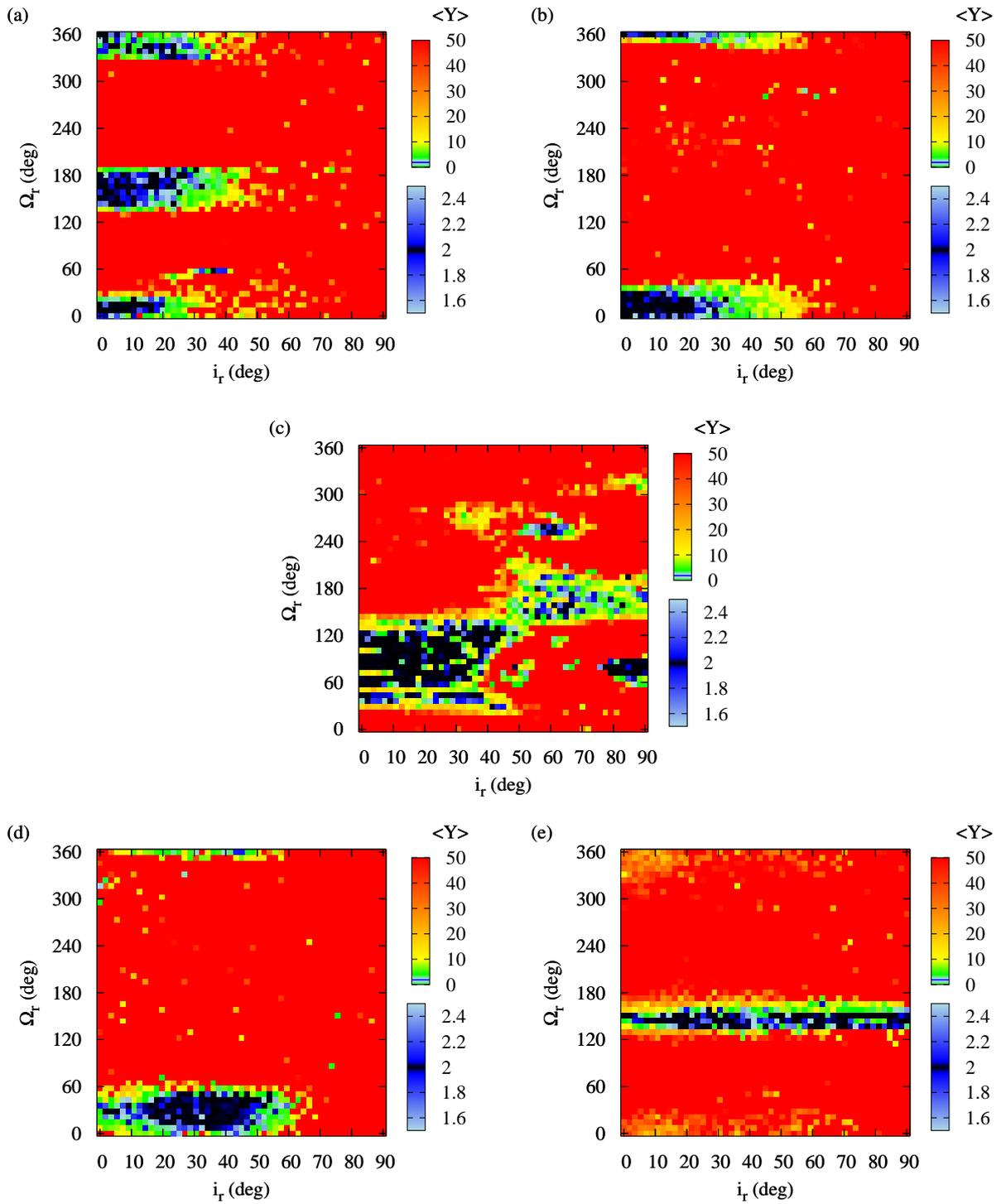


FIG. 3.6 – Cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[i_r, \Omega_r]$ pour les systèmes (a) HD 82943, (b) HD 128311, (c) HD 202206, (d) HD 160691 et (e) HD 73526.

3.4 Dynamique d'un système hiérarchique : 55 Cancri

3.4.1 Petit historique du système 55 Cancri

Jusqu'à très récemment, le système 55 Cancri comptait quatre planètes dont les planètes *b* et *c* en résonance de moyen mouvement 3 : 1. Des études approfondies de cette MMR 3 : 1 ont alors été effectuées (cf. Ji *et al.* 2003b, Zhou *et al.* 2004 ou encore Marzari *et al.* 2005). Les mesures de vitesses radiales du système 55 Cancri étant effectuées depuis 1989, la détermination des éléments orbitaux a pu être affinée au cours du temps (cf. Butler *et al.* 1997, Marcy *et al.* 2002 et McArthur *et al.* 2004). Ainsi, les dernières mesures de l'effet Doppler effectuées par Fischer *et al.* (2008) suggèrent désormais l'existence de cinq planètes en orbite autour de l'étoile avec une distribution des demi grands-axes allant de 0.038 UA à 5.901 UA. Notons que la détermination d'une cinquième planète a modifié la structure⁷ du système précédemment défini par McArthur *et al.* (2004). En particulier, les planètes *b* et *c* ne sont désormais plus en résonance de moyen mouvement 3 : 1 mais proches de cette résonance. Par ailleurs, l'excentricité de la planète *c* dans l'article de Fischer *et al.* (2008) est beaucoup plus petite, en comparaison avec la valeur trouvée par McArthur *et al.* (2004). Les éléments orbitaux indiqués par Fischer *et al.* (2008; fit dynamique) sont notés dans la Table 3.2. La planète la plus interne (notée *e*) est la planète la moins massive (de l'ordre de la masse de Neptune) tandis que la planète la plus externe (notée *d*) est la plus massive (masse minimale d'environ quatre masses de Jupiter). Selon Fischer *et al.* (2008), le système nominal à cinq planètes décrit par la Table 3.2 est dynamiquement stable au moins sur 1 million d'années.

Notons par ailleurs, que l'étoile 55 Cancri dispose d'un compagnon stellaire, une étoile naine de type M, située à une distance de 1000 UA. Ce compagnon stellaire étant de faible masse stellaire et très éloigné de l'étoile principale 55 Cnc A, les mesures de vitesses radiales ne sont vraisemblablement pas affectées par cette autre étoile. Le compagnon stellaire ne sera alors pas considéré dans cette étude.

Planètes	$M \sin i$ (M_{Jup})	Période (jours)	a (UA)	e	ω (deg)	T_p (JD-2440000)
e	0.0241	2.796744	0.038	0.2637	156.500	7578.2159
b	0.8358	14.651262	0.115	0.0159	164.001	7572.0307
c	0.1691	44.378710	0.241	0.0530	57.405	7547.5250
f	0.1444	260.6694	0.785	0.0002	205.566	7488.0149
d	3.9231	5371.8207	5.901	0.0633	162.658	6862.3081

TAB. 3.2 – Éléments orbitaux pour le système 55 Cancri (fit dynamique de Fischer *et al.* 2008). La masse de l'étoile est de $0.94 M_{\odot}$.

⁷i.e. les éléments orbitaux des quatre autres planètes.

3.4.2 Etat dynamique du système

A partir des données observationnelles de Fischer *et al.* (2008), nous avons effectué une exploration détaillée de la stabilité du système 55 Cnc (dit système observationnel ou nominal) en appliquant la méthode FMA sur 400 systèmes différents (Gayon *et al.* 2008b ; cf. Annexe F). Ces systèmes sont obtenus en variant les éléments orbitaux du système nominal et en ajoutant de façon aléatoire une inclinaison (inférieure à 5°) aux orbites keplériennes.⁸ Les orbites restent cependant coplanaires mais les masses des planètes tiennent compte des nouvelles valeurs d’inclinaison orbitale. L’on détermine ainsi la vitesse de diffusion pour un échantillon de 400 conditions initiales appartenant au voisinage du système 55 Cancr. Notons que la vitesse de diffusion est calculée en utilisant la déviation standard (σ_{FMA}) de la fréquence principale du signal, elle-même tracée sur des fenêtres temporelles de 2×10^4 ans. Rappelons (cf. §2.4) qu’une vitesse de diffusion (v_d) faible signifie une faible dispersion des fréquences dans l’intervalle de temps considéré (ce qui équivaut à une grande valeur de σ_{FMA}). Au contraire, de fortes valeurs de v_d indiquent des changements rapides des fréquences du système et, par conséquent, sont caractéristiques d’une solution chaotique. Mentionnons que les valeurs de v_d inférieures à 4 suggèrent une quasi-périodicité à long terme tandis que des valeurs supérieures traduisent du chaos.

Dans la Fig. 3.7, nous montrons la distribution de la vitesse de diffusion pour un échantillon de 400 conditions initiales. Dans la suite de notre étude, nous nous intéressons plus particulièrement aux systèmes dont la vitesses de diffusion est supérieure à la valeur 5 (solutions chaotiques représentant environ 38% de l’échantillon analysé). Lors de solutions chaotiques, la diffusion rapide des fréquences principales peut induire (en plus des variations des fréquences principales) des changements drastiques des amplitudes, en particulier des excentricités. Il peut en résulter des rencontres proches entre les planètes et l’éjection d’une ou plusieurs planètes. Or, nous trouvons que, pour l’ensemble des systèmes comportant des vitesses de diffusion supérieures à la valeur 5, les excentricités n’augmentent pas au cours du temps (intégrations effectuées sur 400 millions d’années). Malgré plusieurs “sauts” d’excentricité, la variation temporelle de l’excentricité des planètes e , b et c (cf. Fig. 3.8) reste confinée entre deux valeurs limites d’amplitude peu élevée (amplitudes de ~ 0.15 pour l’excentricité de la planète e , ~ 0.03 pour la planète b et ~ 0.06 pour la planète c). Par conséquent, ceci ne suggère, sur notre intervalle d’étude, ni une solution chaotique “habituelle”, ni une solution quasi-périodique, mais plutôt un état de “chaos stable” selon l’expression de Milani & Nobili (1992).⁹ Nous pensons que l’état de “chaos stable” pour le système 55 Cancr peut être dû à la topologie de l’espace des phases puisque les solutions quasi-périodiques à proximité d’une île chaotique peuvent agir comme des “barrières” vis-à-vis de la diffusion (Tsiganis *et al.* 2000). Ce comportement particulier de “chaos stable” pourrait ainsi être dû à la proximité du système à la résonance de moyen mouvement 3 : 1 entre les planètes b et c (cf. Gayon *et al.* 2008b pour plus de détails).

3.4.3 Zone habitable du système 55 Cancr

En appliquant les méthodes FMA et MIPS au système 55 Cancr, nous avons par ailleurs étudié la stabilité dynamique d’une planète terrestre hypothétique autour de l’étoile 55 Cancr, précisément dans la zone habitable de ce système (à 1 UA). Comme le montre la Fig. 3.9, nous trouvons que pour la planète terrestre, une orbite d’excentricité inférieure à 0.04 et d’inclinaison inférieure à 40° serait stable. Cette étude en cours devrait faire l’objet d’une prochaine lettre (Gayon *et al.* 2008c).

⁸Les anomalies moyennes et les longitudes du nœud sont choisies aléatoirement. Par ailleurs, le choix d’inclinaisons orbitales non nulles et inférieures à 5° est effectué dans le but de rendre le système plus réaliste.

⁹Le terme de “chaos stable” a été introduit par Milani & Nobili (1992) pour indiquer le comportement chaotique particulier des astéroïdes. Malgré des temps de Lyapunov courts (de l’ordre de quelques 10^3 ans), le comportement dynamique de certains astéroïdes présente une remarquable stabilité (les rencontres proches sont évitées) sur un temps de l’ordre de l’âge du Système Solaire!

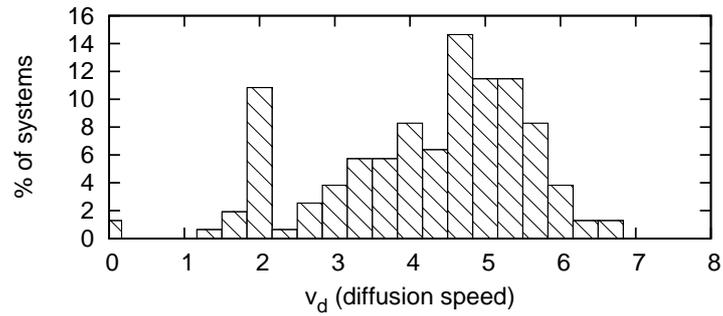


FIG. 3.7 – Histogramme montrant la distribution de la vitesse de diffusion sur un échantillon de 400 systèmes différents, proches du système planétaire 55 Cancri.

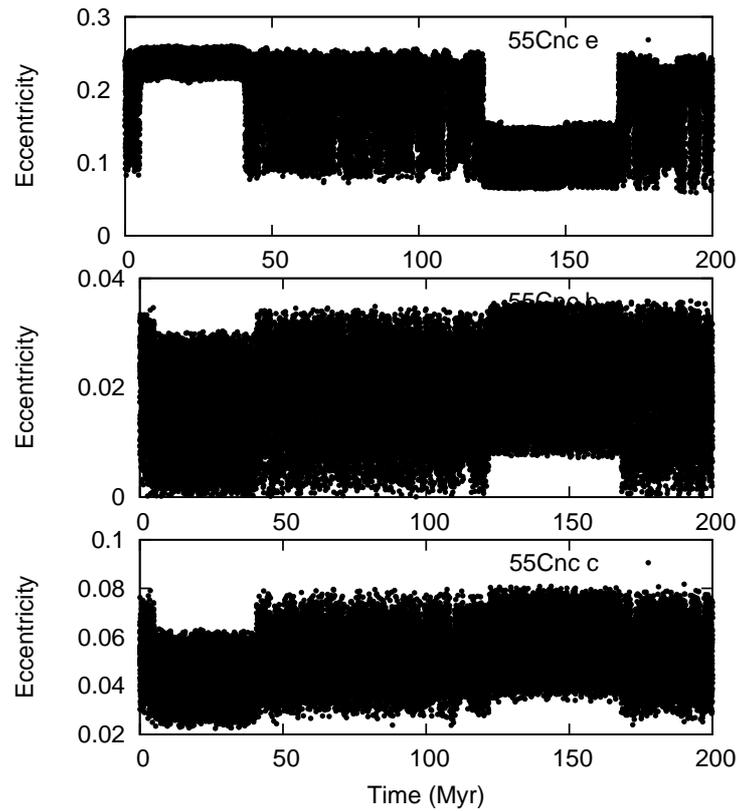


FIG. 3.8 – Evolution temporelle de l'excentricité des trois planètes internes du systèmes 55 Cnc. La figure du haut montre l'excentricité de la planète *e*, la figure du milieu celle de la planète *b* et la figure du bas représente l'excentricité de la planète *c*.

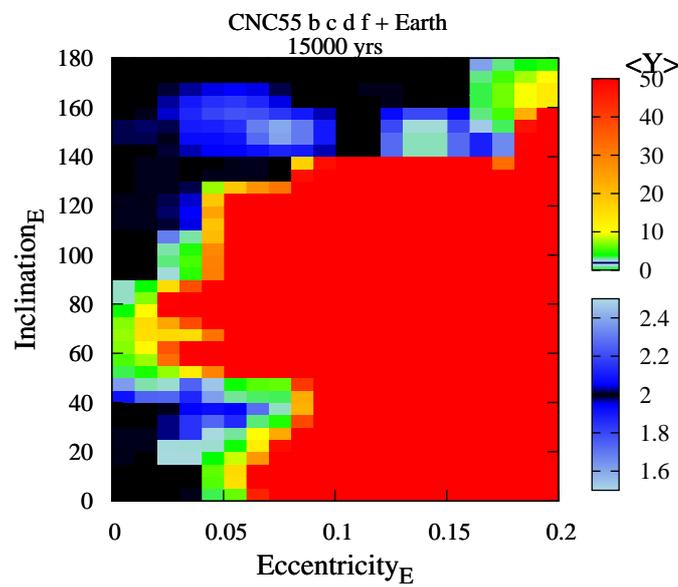


FIG. 3.9 – Carte de stabilité obtenue en considérant les 4 planètes les plus externes (planètes b , c , f , d) du système 55 Cancri ainsi qu’une planète terrestre hypothétique située dans la zone habitable ($a = 1$ UA). Cette carte est tracée dans l’espace des paramètres $[e_{Earth}, i_{Earth}]$ et a été obtenue en utilisant la méthode MIPS.

Chapitre 4

Exploration de la Résonance Rétrograde de Moyen Mouvement

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous examinons le cas de systèmes planétaires en résonance rétrograde de moyen mouvement, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels deux planètes sont à la fois en résonance de moyen mouvement et en contre-révolution. Plus particulièrement, la planète interne est supposée en mouvement prograde autour de l'étoile centrale tandis que la planète externe est en mouvement rétrograde. De tels systèmes sont obtenus au voisinage de systèmes observés (pris comme sources de données) et seront appelés par la suite des systèmes "pseudo-observationnels". Cette étude consiste à mettre en évidence de nouveaux mécanismes *théoriques* de stabilité, en mettant en jeu les inclinaisons des orbites. Précisons que les mécanismes de stabilité issus de cette étude ne régissent pas nécessairement le mode de stabilité des systèmes observés.

La mise en évidence de résonances de moyen mouvement rétrogrades ainsi que leurs caractéristiques et leurs ressources est basée sur l'étude dynamique du voisinage des systèmes à deux planètes HD 160691 (données de McCarthy *et al.* 2004) et HD 73526 (données de Tinney *et al.* 2006). Le mécanisme de stabilité lié à la configuration rétrograde du système HD 73526 est présenté sous la forme d'un article publié à *Astronomy & Astrophysics* (Gayon & Bois 2008a) et d'un proceeding référé de l'*International Astronomical Union* (Gayon & Bois 2008b).

4.2 A la recherche de zones de stabilité

4.2.1 Etats des lieux des systèmes observés HD 160691 et HD 73526

Comme nous l'avons vu en §3.2.1, l'histoire de la détermination des éléments orbitaux du système HD 160691 n'est pas sans rebondissement ! Malgré tout, nous choisissons de nous baser sur les données de McCarthy *et al.* (2004) pour étudier la faisabilité théorique des résonances rétrogrades. Nous utilisons également les données de Tinney *et al.* (2006) concernant le système HD 73526. Ces deux jeux de paramètres sont mentionnés dans la Table 4.1 (ou en Annexe B).

Les Fig. 4.1a 4.1b montrent l'état dynamique des systèmes HD 160691 et HD 73526 en fonction des demi-grands axes a_1 et a_2 . Les paramètres orbitaux proviennent de la Table 4.1, à l'exception des longitudes des nœuds qui sont fixées à 0° . Afin d'éviter un comportement dynamique limité au cas coplanaire, nous introduisons la valeur 0° et 1° pour les inclinaisons orbitales i_1 et i_2 . A cause des interactions gravitationnelles du problème des 3-corps en 3-D, l'inclinaison relative ($i_r = i_2 - i_1$) entre les deux plans orbitaux est libre d'évoluer dans l'espace 3-D.

De façon générale, la présence de résonances divise l'espace des phases en régions régulières et chaotiques. Cependant, en utilisant les paramètres orbitaux provenant des observations, l'espace des paramètres $[a_1, a_2]$ est trouvé totalement chaotique pour le système observé HD 160691 (Fig. 4.1a). Quelques points de stabilité apparaissent dans le voisinage du système observé HD 73526 mais bien au delà des barres d'erreurs proposées par les observateurs (Fig. 4.1b; erreurs de ± 0.005 en a_1 et a_2). Ces deux systèmes correspondent en réalité à un système chaotique; la valeur de l'indicateur de chaos MEGNO reste élevée à la fois pour le jeu de paramètres fournis par les observateurs ainsi qu'au voisinage de la solution. Par ailleurs, la Fig. 4.2 indique bien que la variation de l'excentricité de la planète externe du système HD 73526 est irrégulière. Cependant, les valeurs de e_2 restent relativement confinées. Ces systèmes étant trouvés chaotiques pour des orbites coplanaires, il s'avère donc nécessaire de chercher un mécanisme de stabilité dans un espace en 3-D.

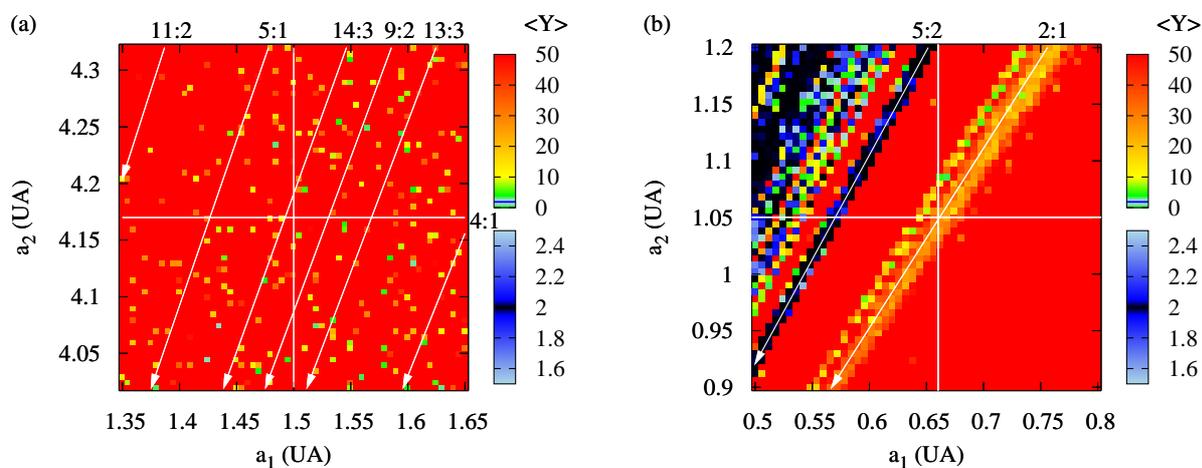


FIG. 4.1 – Cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[a_1, a_2]$ pour les systèmes à deux planètes HD 160691 (données de McCarthy *et al.* 2004) et HD 73526 (données de Tinney *et al.* 2006).

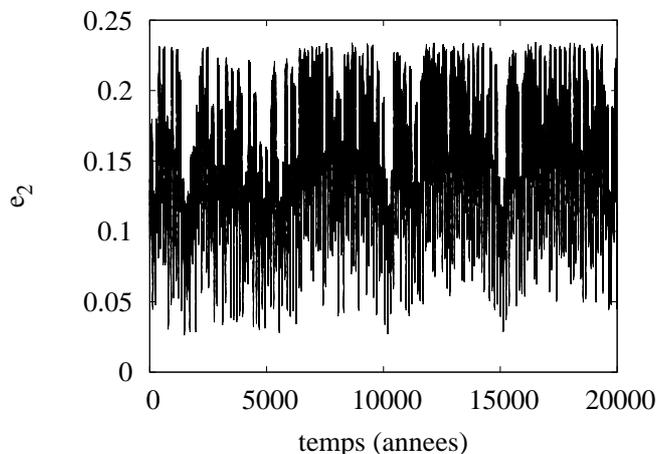


FIG. 4.2 – Variation temporelle de l'excentricité de la planète externe pour le système HD 73526. Les conditions initiales proviennent de Tinney *et al.* (2006) et conduisent à un comportement chaotique.

4.2.2 Intérêt des inclinaisons orbitales

Le stade évolutif des systèmes HD 160691 et HD 73526 (i.e. la disparition du disque de gaz et de poussière ainsi que l'âge de l'étoile de 6.41 Gyr et 5.59 Gyr respectivement) indique que ces systèmes ont désormais des comportements réguliers. Partons alors à la recherche d'un mécanisme de stabilité opérant dans ces systèmes. Les longitudes apsidales ainsi que les inclinaisons orbitales relatives étant non-déterminées (ou supposées nulles) par les observateurs, nous effectuons tout d'abord un scan dans les éléments $[i_r, \Omega_r]$. A partir des Fig. 4.3a et Fig. 4.3b, nous trouvons ainsi que la stabilité dépend fortement de ces paramètres non-déterminés.

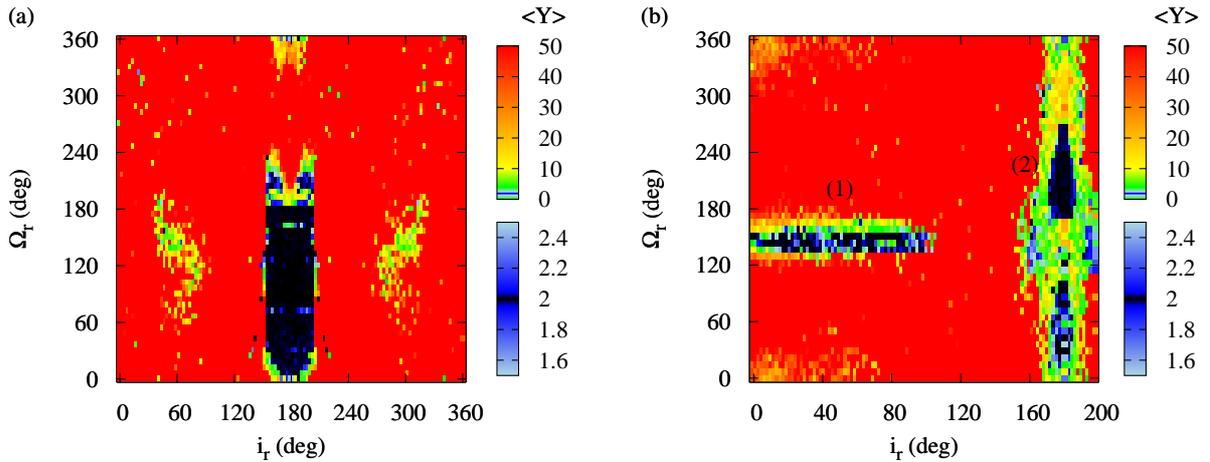


FIG. 4.3 – Cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[i_r, \Omega_r]$ obtenues dans le voisinage des systèmes (a) HD 160691 et (b) HD 73526. L'ensemble des paramètres orbitaux (à l'exception de i_r et Ω_r) proviennent de la Table 4.1.

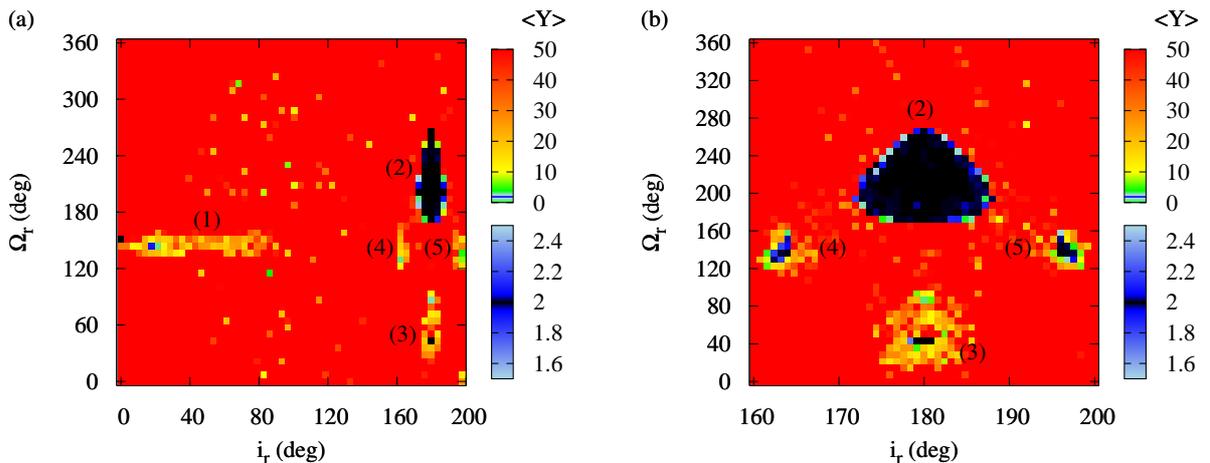


FIG. 4.4 – Cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[i_r, \Omega_r]$ obtenues dans le voisinage du système HD 73526 pour un temps d'intégration de 50000 ans. La figure (a) montre la disparition de l'îlot (1) par rapport à la Fig. 4.3b. La figure (b) est un zoom sur les îlots (2)-(5) trouvés lors de configurations rétrogrades.

Comme le montre la Fig. 4.3a, les conditions initiales dans le voisinage du système HD 160691 sont chaotiques non seulement pour des orbites coplanaires mais plus généralement pour des orbites progrades! Un seul îlot de stabilité est obtenu pour $i_r \in [156, 204]$ et $\Omega_r \in [7, 180]$. Par ailleurs, dans le cas du système HD 73526, on distingue plusieurs îlots sur la Fig. 4.3b, l'un noté (1) pour des orbites progrades des deux planètes et un autre (2) pour des orbites rétrogrades de la planète externe. En réalité, l'îlot (1) correspond à un îlot de *stabilité éphémère* (îlot équivalent dans la Fig. 3.6). Comme nous l'avons vu en §3.3, en augmentant le temps d'intégration¹ utilisé pour la Fig. 4.3b, l'îlot (1) disparaît (Fig. 4.4a; cf. Figure 1 de l'article présenté en Annexe F). L'îlot (2), s'avère être, quant-à-lui, un îlot de *stabilité à long terme*. Nous trouvons également trois petits îlots de stabilité (3)-(5) (Fig. 4.4b). L'îlot (3) est séparé de 180° en Ω_r du centre de l'îlot (2). Les deux autres îlots (4) et (5) sont, quant à eux, distribués de part et d'autre des îlots (2) et (3). En raison de la taille de chaque zone de stabilité, l'îlot (2), pour lequel $i_r \in [173^\circ, 187^\circ]$ et $\Omega_r \in [173^\circ, 266^\circ]$, contient les orbites les plus stables et les plus robustes, c'est-à-dire les moins "modèle dépendants" vis-à-vis d'éventuelles perturbations supplémentaires. Il est ainsi nécessaire de se concentrer sur l'îlot (2) pour tenter de trouver de nouveaux mécanismes de stabilité.

4.3 Un nouveau mécanisme de stabilité impliquant une résonance rétrograde

4.3.1 Existence d'une MMR rétrograde

Les cartes habituelles en demi grand-axes $[a_1, a_2]$ sont caractérisées par des bandes fines de stabilité (liées aux résonances de moyen mouvement) au sein d'un océan de chaos (voir par exemple la Fig. 3.1). Or, les Fig. 4.5a-b, tracées dans le cas d'une configuration en contre-révolution, semblent être une sorte de "négatif" avec des bandes chaotiques liées à différentes résonances rétrogrades. Par ailleurs, comme le montrent les Fig. 4.5c-d, une large gamme d'excentricités est autorisée pour des planètes en contre-révolution et proches de résonance de moyen mouvement. L'analyse de la stabilité dans l'espace des excentricités $[e_1, e_2]$ du système HD 160691 en contre-révolution (Fig. 4.5c) montre que même si les excentricités sont élevées, le système reste stable, à l'exception de l'"arc" caractérisant la MMR rétrograde 14 : 3. De même pour le système HD 73526, la résonance rétrograde 2 : 1 génère plusieurs îlots de stabilité dans la carte en $[e_1, e_2]$ (Fig. 4.5d) et montre une large gamme d'excentricités e_1 possibles telles que le système soit stable.

Tout comme les cartes en éléments $[a_1, a_2]$, les mappings en excentricités sont surprenants par leur stabilité dominante. L'on peut alors se demander quelle peut être la cause d'une telle prépondérance de la stabilité. Existe-t-il des ressources inédites liées aux résonances rétrogrades?

¹Précisons que le temps d'intégration ne correspond pas au temps de stabilité ou au temps de prédictibilité; le temps d'intégration utilisé dans la méthode MIPS exprime le temps minimal requis permettant connaître l'avenir d'une trajectoire. D'une manière générale la stabilité est acquise sur des échelles de temps bien plus longues que les temps d'intégration.

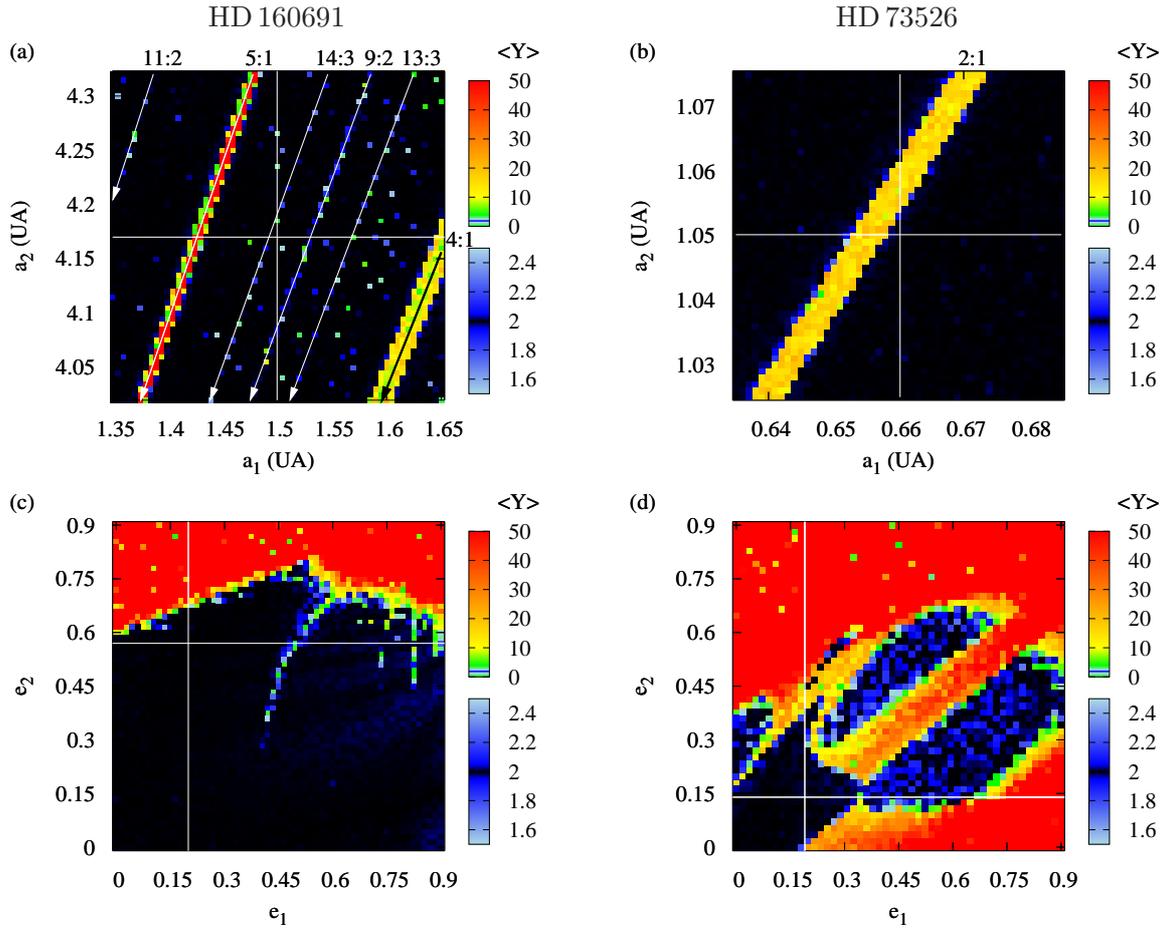


FIG. 4.5 – Cartes de stabilité dans les espaces de paramètres $[a_1, a_2]$ et $[e_1, e_2]$ pour la configuration rétrograde des systèmes planétaires HD 160691 (colonne de gauche) et HD 73526 (colonne de droite). Ces cartes sont obtenues en considérant des valeurs de i_r et Ω_r à l’intérieur des îlots stables des Fig. 4.3a et 4.3b (ex. $i_r = 179^\circ$ et $\Omega_r = 97^\circ$ pour HD 160691. $i_r = 179^\circ$ et $\Omega_r = 216^\circ$ pour HD 73526).

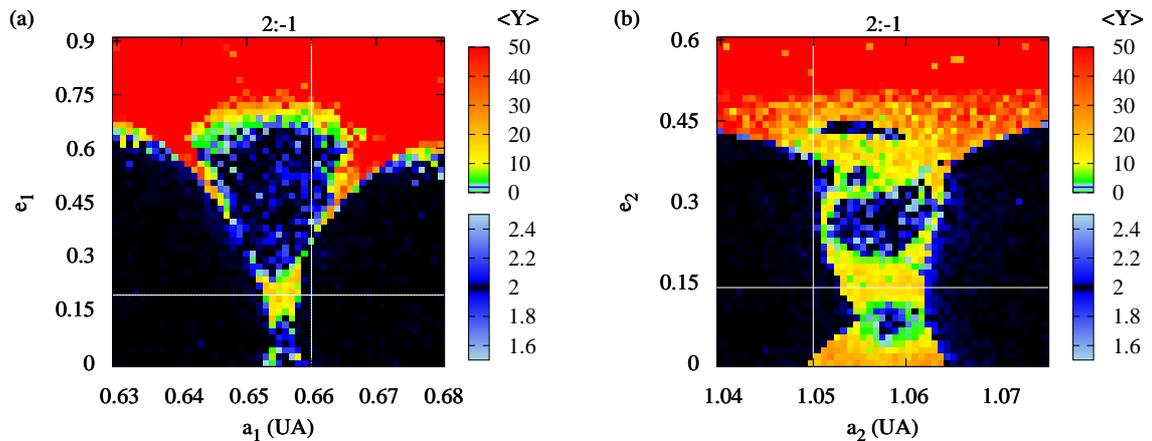


FIG. 4.6 – Cartes de stabilité dans les espaces de paramètres $[a, e]$ pour les planètes 1 (Fig. a) et 2 (Fig. b) du système HD 73526 en configuration rétrograde. Ces cartes sont obtenues en considérant des valeurs de i_r et Ω_r à l’intérieur de l’îlot stable de la Fig. 4.3b (ex. $i_r = 179^\circ$ et $\Omega_r = 216^\circ$).

4.3.2 Structure fine de la résonance 2 : -1

En raison du mouvement rétrograde de la planète externe, la résonance orbitale d'un système planétaire dont le rapport des périodes est égal à 2 (système planétaire HD 73526 par exemple) est appelée une MMR rétrograde 2 : 1 (sa notation concise est : MMR 2 : -1). L'étude de la structure fine de cette MMR fournit la clé de la compréhension de la stabilité du système. Nous supposons donc des conditions initiales prises dans l'îlot de stabilité (2) de la carte en $[i_r, \Omega_r]$ (Fig. 4.4) et nous traçons les cartes de stabilité en éléments $[a_1, e_1]$ et $[a_2, e_2]$, représentées dans la Fig. 4.6. La présence d'une MMR forte génère des zones nettes d'instabilité et de chaos ainsi qu'une importante structure en forme de V ("V-shape"). Notons que le point "pseudo-observationnel" (correspondant aux conditions initiales de l'îlot (2) de la Fig. 4.4) réside au bord de ces formes en V.² On remarque alors l'étroitesse de ces formes en V : soit une largeur d'environ 0.006 UA pour l'orbite interne lorsque $e_1 = 0$ (Fig. 4.6a) et d'environ 0.0015 UA pour la planète externe quand $e_2 = 0$ (Fig. 4.6b). A titre de comparaison, les structures en forme de V du système Soleil-Jupiter-Saturne sont cinq fois et deux fois plus larges respectivement pour Jupiter et Saturne. On peut alors se demander l'intérêt d'une telle structure fine de résonance. Les MMR rétrogrades seraient-elles efficaces pour la stabilité des systèmes multiplanétaires compacts, voire très compacts ?

4.4 Efficacité des MMR rétrogrades

L'efficacité des résonances rétrogrades de moyen mouvement est présentée dans l'article Gayon & Bois (2008b) joint en Annexe F. L'étude est principalement reprise dans cette section.

4.4.1 Réduction d'échelle du système HD 82943

La Fig. 4.7 montre des cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[i_r, \Omega_r]$ en considérant une réduction d'échelle du système planétaire HD 82943 (voir Table 4.1) selon un facteur 7.5 en demi grand-axes (les masses demeurant inchangées). Les figures de gauche (Fig. 4.7a et 4.7c) correspondent au système HD 82943 initial tandis que les figures de droite (Fig. 4.7b et 4.7d) représentent le système réduit. Les cartes de stabilité des Fig. 4.7a et 4.7b ont été obtenues avec un temps d'intégration typique de la méthode MEGNO, à savoir 6000 ans pour le système initial (Fig. 4.7a) et 2200 ans pour le système réduit (Fig. 4.7b).³ Les Fig. 4.7c et 4.7d, quant-à-elles, sont tracées pour des temps d'intégrations de 60000 ans et 6000 ans respectivement. Lorsqu'on compare les Fig. 4.7a et 4.7b, on remarque que les îles "progrades" disparaissent lors de la réduction d'échelle contrairement aux îles "rétrogrades" qui résistent aux forces gravitationnelles importantes. Même pour de très petites valeurs de demi grand-axes et des masses planétaires élevées (favorisant les interactions gravitationnelles fortes), la stabilité est robuste pour des orbites en contre-révolution.

Alors que le rapport entre les rayons de Hill des deux planètes reste identique avant et après la réduction d'échelle,⁴ il semble étonnant que les cartes de stabilité des Fig. 4.7a et 4.7b (ou bien les Fig. 4.7a et 4.7d tracées au bout du même temps d'intégration) ne soient pas identiques. En réalité, lorsque le système HD 82943 initial est intégré sur un temps 10 fois plus long que le temps a priori nécessaire pour la méthode MEGNO, on observe la disparition des îlots "progrades" (cf. Fig. 4.7c)! Autrement dit, que ce soit pour le système initial ou pour le système réduit, seuls les îlots "rétrogrades" persistent! Par ailleurs, il semble que l'indicateur MEGNO détecte plus rapidement le

²La localisation de ces conditions initiales par rapport à la résonance exacte 2 : -1 sera importante dans la suite de notre étude (§4.5.3).

³Le pas d'intégration a également été adapté en fonction du système étudié. Typiquement, un pas de $1/20^{\text{ème}}$ la période la plus petite est utilisé.

⁴Le rayon de Hill se calcule de la façon suivante : $R_H = \left(\frac{m_P}{3M_*}\right)^{1/3} a(1-e)$.

comportement chaotique d'un système très compact par rapport à un système moins compact, et ceci quelque soit le pas d'intégration utilisé. L'indicateur MEGNO semble particulièrement efficace pour détecter des zones stables pour des systèmes très compacts et en configuration de contre-révolution.

Dans le cas de la résonance rétrograde 2 : 1, les deux planètes étant en mouvements opposés, la durée de conjonction entre les planètes est très courte contrairement au cas de deux planètes en mouvement prograde. Ainsi, bien que les rencontres proches ont lieu plus souvent lors de résonance rétrograde par rapport au cas prograde (3 rencontres proches pour une MMR 2 : -1 contre 1 rencontre proche pour une MMR 2 : 1), la MMR 2 : -1 s'avère être très efficace en raison des rencontres très rapides entre les planètes. Ceci explique notamment l'étroitesse et la finesse des structures en forme de V trouvées dans la Fig. 4.6.

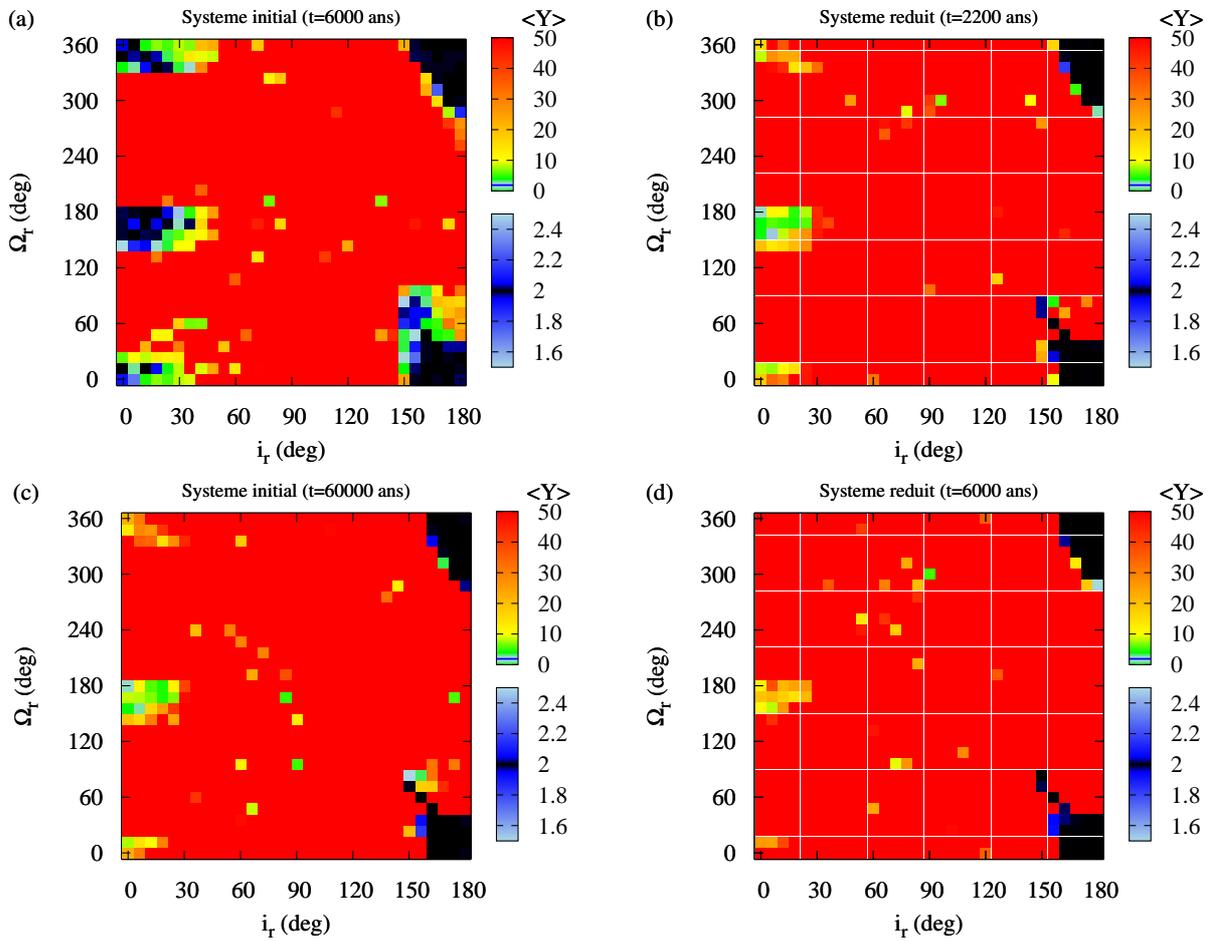


FIG. 4.7 – Cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[i_r, \Omega_r]$ pour le système planétaire HD 82943 (a-c) et pour une réduction d'échelle du même système (b-d). La réduction d'échelle a été effectuée en considérant une réduction d'un facteur 7.5 sur les demi grand-axes. Les masses planétaires des deux systèmes (initial et réduit) restent identiques. Les temps d'intégration sont respectivement de : (a) 6000 ans (temps d'intégration typique de l'indicateur MEGNO pour le système initial), (b) 2200 ans (temps d'intégration typique de l'indicateur MEGNO pour le système réduit), (c) 60000 ans et (d) 6000 ans.

Eléments	HD 73526	HD 82943	HD 128311	HD 160691	HD 202206
M_* (M_\odot)	1.08 ± 0.05	1.15	0.84	1.08 ± 0.05	1.15
$m \sin i_l$ (M_J)	2.9 ± 0.2	1.85	1.56 ± 0.16	1.67 ± 0.11	17.4
	2.5 ± 0.3	1.84	3.08 ± 0.11	3.10 ± 0.71	2.44
a (AU)	0.66 ± 0.01	0.75	1.109 ± 0.008	1.50 ± 0.02	0.83
	1.05 ± 0.02	1.18	1.735 ± 0.014	4.17 ± 0.07	2.55
e	0.19 ± 0.05	0.38 ± 0.01	0.38 ± 0.08	0.20 ± 0.03	0.435 ± 0.001
	0.14 ± 0.09	0.18 ± 0.04	0.21 ± 0.21	0.57 ± 0.1	0.267 ± 0.021
ω (deg)	203 ± 9	124.0 ± 3	80.1 ± 16	294 ± 9	161.18 ± 0.30
	13 ± 76	237.0 ± 13	21.6 ± 61	161 ± 8	78.99 ± 6.65
M (deg)	86 ± 13	0	257.6 ± 2.7	0	105.05 ± 0.48
	82 ± 27	75.21 ± 1.96	166 ± 2	12.6 ± 11.2	311.6 ± 9.5

TAB. 4.1 – Paramètres orbitaux des systèmes planétaires HD 73526, HD 82943, HD 128311, HD 160691 et HD 202206. Les données proviennent de Tinney *et al.* (2006), Mayor *et al.* (2004), Vogt *et al.* (2005), McCarthy *et al.* (2004) et Correia *et al.* (2005) respectivement. Pour chaque système et chaque élément orbital, la première ligne correspond à la planète interne et la seconde ligne à la planète externe.

Sources de données	Rapport de périodes	MMR prograde	MMR rétrograde
HD 73526	2/1	17	500
HD 82943	2/1	755	1000
HD 128311	2/1	249	137
HD 160691	5/1	ε	320
HD 202206	5/1	ε	631

TAB. 4.2 – Proportion de systèmes stables *proches* d’une MMR prograde ou d’une MMR rétrograde. A proximité de chaque type de MMR (prograde ou rétrograde), 1000 systèmes aléatoires ont été intégrés dans les barres d’erreurs observationnelles de chaque source de données. Le nombre de systèmes stables sur les 1000 systèmes intégrés est indiqué dans chaque cas. ε désigne une valeur très petite qui dépend de la taille de l’échantillon utilisée. Les sources de données proviennent de Tinney *et al.* (2006), Mayor *et al.* (2004), Vogt *et al.* (2005), McCarthy *et al.* (2004) et Correia *et al.* (2005) respectivement (voir Table 4.1).

4.4.2 Etude statistique sur un ensemble de systèmes à deux planètes

L’existence de systèmes à deux planètes stables incluant des orbites à contre-révolution apparaît dans le voisinage de quelques systèmes observés (lors de certaines phases d’observations) soit en MMR 2 : 1, soit en MMR 5 : 1. Comme nous l’avons déjà mentionné précédemment, il arrive parfois que de nouvelles observations de systèmes déjà détectés modifient la distribution de leurs éléments orbitaux. Les données utilisées ici sont alors considérées comme des systèmes *académiques*. Les résultats statistiques pour la stabilité de ces systèmes sont présentés dans la Table 4.2, à la fois dans le cas prograde ($i_r = 0^\circ$) et dans le cas rétrograde ($i_r = 180^\circ$). Pour chaque source de données, 1000 systèmes aléatoires pris à l’intérieur des barres d’erreurs des observations ont été intégrés. Parmi ces systèmes aléatoires, la proportion de systèmes stables est donné soit pour des orbites progrades, soit pour des orbites en contre-révolution. Pour toutes les sources de données utilisées, un nombre important de systèmes stables est trouvé pour des MMR rétrogrades. Il est à noter que, dans la majorité des cas, la possibilité rétrograde prédomine.

4.5 Ressources des MMR rétrogrades

Nous avons vu en §3.2 que les mécanismes de stabilité impliquant des MMR (progrades) sont généralement accompagnés de précessions synchrones apsidales. En est-il de même pour les MMR rétrogrades? Quelles sont les ressources possibles de ce type de résonance orbitale?

4.5.1 Expression de la longitude apsidale relative

En §3.2.3, nous avons mentionné que la précession apsidale synchrone de deux orbites s'exprime via la longitude apsidale relative $\Delta\tilde{\omega}$. Or, l'expression de la longitude apsidale relative $\Delta\tilde{\omega}$ ne dépend pas seulement des arguments du périastre $\omega_{1,2}$ et des longitudes du nœud $\Omega_{1,2}$, mais également des inclinaisons relatives des deux plans orbitaux. Dans le cas prograde coplanaire ($i_r = 0^\circ$), nous avons l'expression bien connue $\Delta\tilde{\omega} = (\Omega_1 + \omega_1) - (\Omega_2 + \omega_2)$. Mais lorsque $i_r = i_2 = 180^\circ$, l'on peut écrire la longitude apsidale relative de la façon suivante⁵ : $\Delta\tilde{\omega} = (\Omega_1 + \omega_1) - (\Omega_2 - \omega_2)$. Par la suite, dans le cas du mouvement rétrograde de la planète externe, nous considèrerons $\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$ avec $\tilde{\omega}_1 = \Omega_1 + \omega_1$ et $\tilde{\omega}_2 = \Omega_2 - \omega_2$.

4.5.2 Précession apsidale prograde

La Fig. 4.8 présente une carte de stabilité en $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$ à partir de la configuration en contre-révolution du système HD 160691. La bande stable exprime une relation linéaire entre les longitudes des périastes $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ lors de configurations stables. Cela signifie que les lignes apsidales sont plus ou moins alignées. La Fig. 4.9a montre que l'angle $\Delta\tilde{\omega}$ libre autour de 0° avec une amplitude de $\pm 15^\circ$, ce qui confirme la topologie alignée. Il s'agit donc d'une ASP alignée.

Les Fig. 4.9b-c révèlent que les excentricités e_1 et e_2 ont des valeurs très différentes et qu'elles varient fortement au cours du temps. Ainsi, si l'on calcule la distance au périastre de la planète externe ($a_2(1 - e_2) = 1.75$ UA à $t = 0$) et la distance à l'apoastre de la planète interne ($a_1(1 + e_1) = 1.8$ UA à $t = 0$), l'on peut montrer que les orbites des deux planètes peuvent s'intersecter. Le mécanisme d'ASP alignée permet par conséquent d'éviter toute rencontre proche en forçant l'orbite de la planète interne 1 à rester entièrement incluse dans l'orbite de la planète 2 (cf. 4.9d).

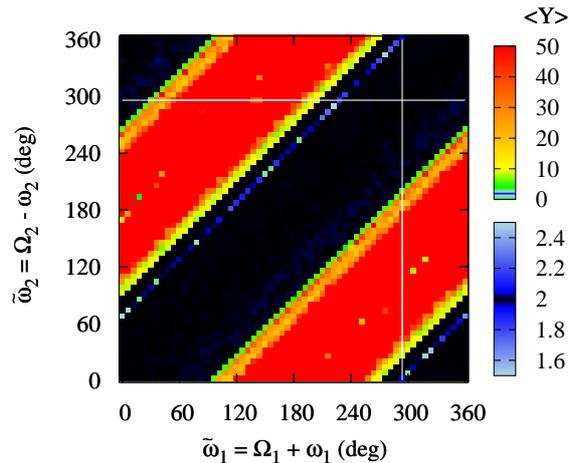


FIG. 4.8 – Cartes de stabilité dans l'espace des paramètres $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$ pour le système planétaire HD 160691 en configuration rétrograde (avec $\tilde{\omega}_1 = \Omega_1 + \omega_1$ et $\tilde{\omega}_2 = \Omega_2 - \omega_2$).

⁵Voir la démonstration en §5.2.

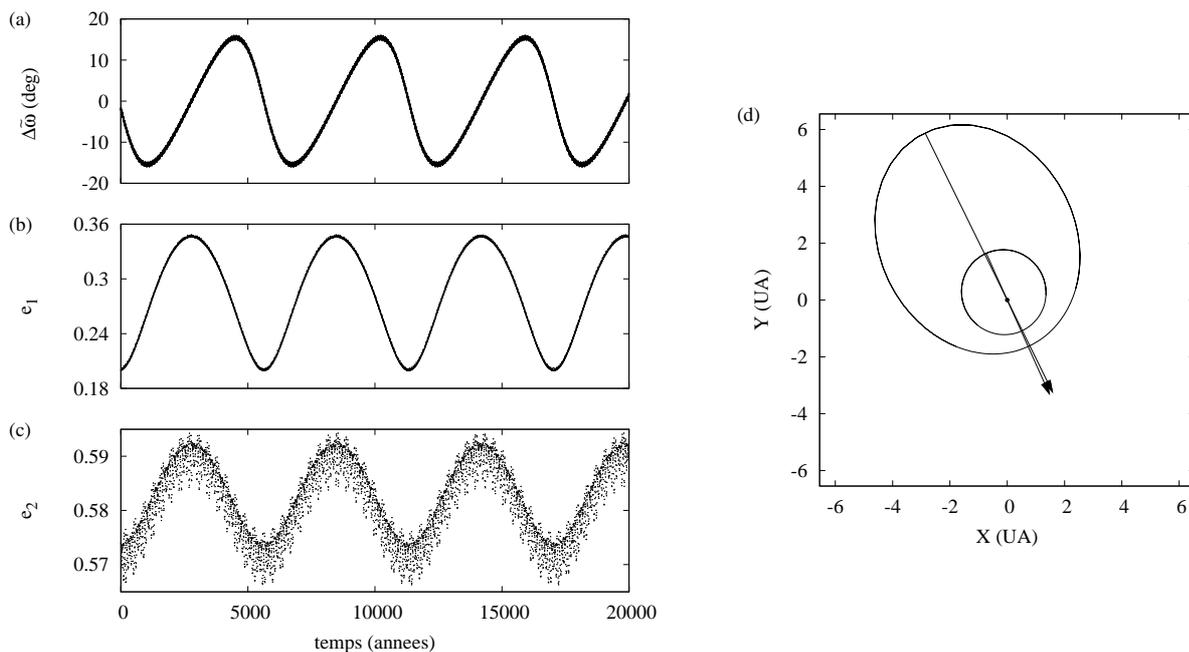


FIG. 4.9 – Figure (a) : Libration de $\Delta\tilde{\omega}$ autour de 0° (avec $\Delta\tilde{\omega} = (\Omega_1 + \omega_1) - (\Omega_2 - \omega_2)$). Le système pseudo-observationnel est en topologie alignée. Figure (b-c) : Variations temporelles des excentricités. Figure (d) : Tracé des orbites planétaires du système HD 160691 en configuration de contre-révolution (à $t = 0$).

Notons par ailleurs que les données utilisées placent le système HD 160691 à la fois proche de la MMR 14 : -3 et proche de la MMR 5 : -1 . Le système n'est cependant pas exactement en résonance de moyen mouvement. Nous avons vu précédemment que sans MMR combinée à une ASP, les rencontres proches entre planètes sont théoriquement possibles pour diverses positions des planètes sur leur orbite. Néanmoins, le mouvement de la planète externe étant rétrograde par rapport à la planète interne, cela signifie que la durée des rencontres proches “croisées” est bien plus courte que dans le cas où deux planètes se meuvent dans le même sens (les deux en mouvement prograde ou bien les deux en mouvement rétrograde). La résonance de moyen mouvement n'est alors pas un ingrédient absolument nécessaire pour la stabilité de systèmes comportant des planètes en contre-révolution.⁶

4.5.3 Mise en évidence d'une précession apsidale rétrograde

Nous avons vu que le système HD 73526 est très proche d'une MMR 2 : -1 . Regardons à présent si le mécanisme de stabilité lié à ce système fait intervenir une précession apsidale synchrone.

La Fig. 4.10 représente une carte de stabilité dans l'espace des paramètres $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$ et montre une bande de stabilité incluant le point “pseudo-observationnel”. On peut ainsi en déduire que les solutions stables sont seulement possibles quand $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ précessent en moyenne au même taux. Cependant, contre toute attente, nous nous sommes rendu compte que les deux longitudes du périastre ne précessent pas dans le même sens ! L'orbite externe est, en effet, affectée d'une précession rétrograde ($-\tilde{\omega}_2$) par rapport au sens de précession de l'orbite interne ($\tilde{\omega}_1$) (voir Fig. 4.11c *vs* 4.11b). Par conséquent, la longitude apsidale relative $\Delta\tilde{\omega}$ présente un comportement de circulation. Les deux lignes apsidales circulant dans des directions opposées, la variation temporelle de la variable $\Sigma\tilde{\omega}$ (égale à $\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2$) va permettre de mesurer la dérive entre les taux de précession des deux lignes

⁶Autrement dit, dans certains cas, un mécanisme impliquant seulement une configuration en contre-révolution et une ASP peut suffire.

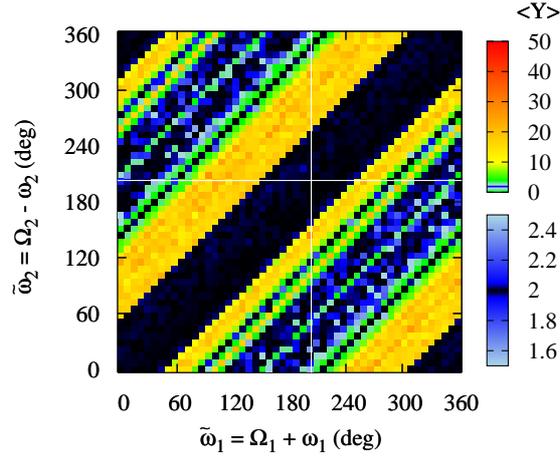


FIG. 4.10 – Carte de stabilité dans l’espace des paramètres $[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2]$ (avec $\tilde{\omega}_1 = \Omega_1 + \omega_1$ et $\tilde{\omega}_2 = \Omega_2 - \omega_2$) pour la configuration en contre-révolution du système planétaire HD 73526.

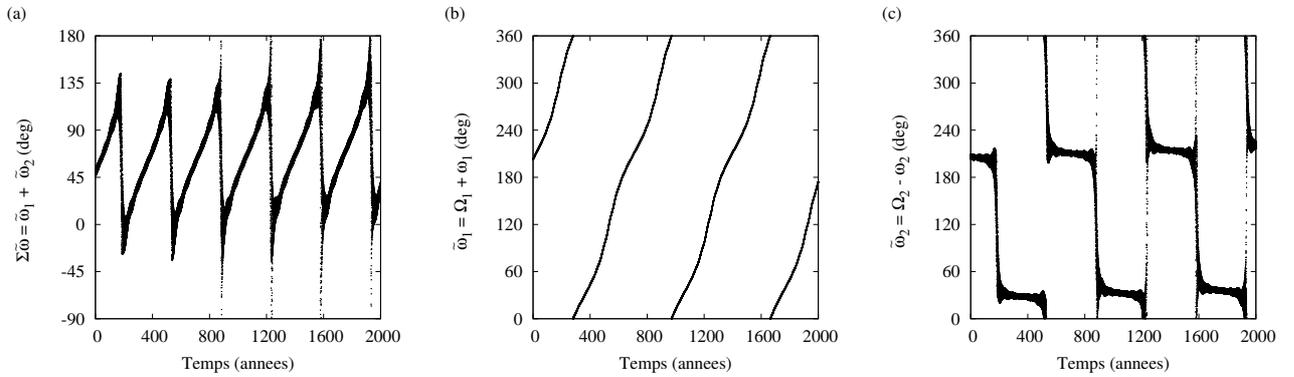


FIG. 4.11 – Variation temporelle des variables (a) $\Delta\tilde{\omega}$, (b) $\tilde{\omega}_1$ et (c) $\tilde{\omega}_2$ pour la configuration en contre-révolution du système HD 73526. Dans la Figure (b), la pente de $\tilde{\omega}_1$ est positive alors que celle de $\tilde{\omega}_2$ (Figure (c)) est négative.

apsidales. Ainsi, la Fig. 4.11a montre que l’angle $\Sigma\tilde{\omega}$ ne présente ni un comportement de circulation ni un comportement de libration. $\Sigma\tilde{\omega}$ présente un mouvement étrange composé de : (1) une phase de circulation prograde incluant des libration d’amplitude $\pm 8^\circ$, puis après une inversion rapide du sens de circulation, (2) une phase de circulation rétrograde rapide, jusqu’à atteindre une seconde inversion du sens de circulation. Ces deux phases alternent successivement selon une bascule de $\Sigma\tilde{\omega}$ (“alternation” ou “rocking” en anglais) de 180° , ce qui correspond à une sorte de rebroussement.⁷ De plus, notons que $\tilde{\omega}_2$, par rapport à $\tilde{\omega}_1$, ne circule pas *uniformément* mais présente des phases de circulation rétrograde entrecoupées de courts intervalles de libration (Fig. 4.11c *vs* 4.11b). Ainsi, malgré les sens opposés des précessions, les deux orbites précessent *en moyenne* au même taux, en valeurs absolues. Par conséquent, le système planétaire est affecté d’une précession apsidale synchrone. En considérant un comportement de bascule de l’angle $\tilde{\omega}_2$ ou la présence inhabituelle d’un point de rebroussement dans le comportement de $\Sigma\tilde{\omega}$, nous choisissons de nommer ce nouveau mécanisme de stabilité une ASP à bascule, appelée *alternating ASP* ou *rocking ASP* (RASP)⁸.

⁷Aux transitions de phase, une dispersion des points apparaît. Quand l’excentricité de l’orbite externe passe par la valeur 0, l’angle $\tilde{\omega}_2$, qui dépend du rapport $(a - r)/ae$ n’est pas défini. Notons que cette dispersion de points disparaît lorsqu’on utilise les coordonnées de Jacobi.

⁸Nous avons effectué des animations illustrant ce mécanisme de RASP. Celles-ci sont téléchargeable à l’adresse suivante : http://www.oca.eu/gayon/Extrasolar/Retro_MMR/movies.html

4.5.4 Distribution des comportements apsidaux

Il existe des relations subtiles entre l'excentricité et la longitude apsidale relative $\Delta\tilde{\omega}$. Un exemple de carte de stabilité en $[\Delta\tilde{\omega}, e_1]$, présenté en Fig. 4.12 pour la configuration en contre-révolution du système HD 73526, montre comment la MMR rétrograde 2 : 1 déploie ses ressources :

(1) A l'intérieur même de la MMR 2 : -1 (i.e. à l'intérieur de la forme en V de la carte en $[a, e]$; Fig. 4.6), les deux lignes apsidales précèdent en moyenne au même taux et dans la même direction (prograde). La MMR rétrograde 2 : 1 est alors combinée à une ASP *prograde* et uniforme (îlot (1)).

(2) Proche de la MMR 2 : -1 (i.e. à l'extérieur mais proche de la forme en V de la carte en $[a, e]$), les deux lignes apsidales précèdent en moyenne au même taux mais dans des directions opposées. La proche MMR rétrograde 2 : 1 est ainsi combinée au mécanisme de *rocking* ASP (îlot (2)).

(3) La division entre ces deux îlots est reliée au degré de proximité à la MMR rétrograde 2 : 1. Soulignons le fait que, à long terme, le troisième îlot de la carte en $[\Delta\tilde{\omega}, e_1]$, s'avère être une zone de *stabilité éphémère*. (îlot (3) où $\Delta\tilde{\omega} \in [80^\circ, 280^\circ]$).

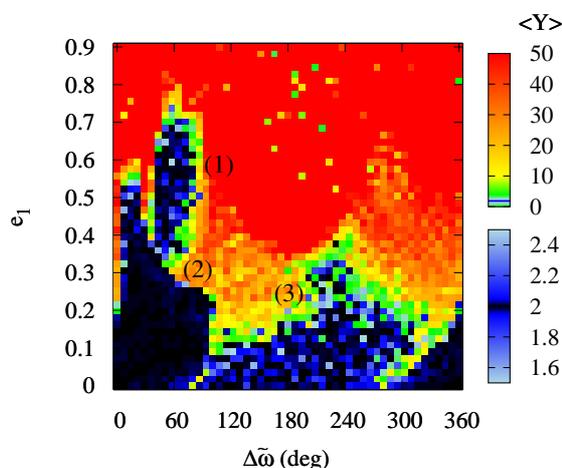


FIG. 4.12 – Carte de stabilité dans l'espace des paramètres $[\Delta\tilde{\omega}, e_1]$ pour la configuration en contre-révolution du système planétaire HD 73526.

4.6 Discussion sur la possibilité théorique des résonances rétrogrades

L'exploration numérique d'un ensemble de systèmes a permis de déceler de nouvelles possibilités théoriques. Ainsi, nous avons mis en évidence un nouveau mécanisme théorique de stabilité caractérisé par une proche MMR rétrograde, de rapport 2 : 1, combinée à une ASP particulière. Plus particulièrement, la ligne apsidale de l'orbite externe précède en sens rétrograde (contrairement à l'orbite interne). Ainsi, non seulement les lignes apsidales précèdent en moyenne au même taux mais en plus elles se meuvent en sens contraire. D'où l'appellation de précession apsidale rétrograde. Cette précession est par ailleurs caractérisée par un phénomène de bascules apsidales : une "rocking ASP".

La stabilité mise en jeu dans le voisinage des systèmes HD 160691 et HD 73526 autorise une large gamme d'excentricités (voir par exemple la planète 1 de la Fig. 4.12). De plus, les MMR rétrogrades s'avèrent être très efficaces d'un point de vue de la stabilité dynamique. Le mécanisme trouvé est donc particulièrement robuste à long terme. C'est pourquoi de tels mécanismes impliquant les ressources particulières de la résonance orbitale 2 : -1 pourraient s'avérer être relativement génériques. Ils pourraient convenir à une classe de systèmes multi-planétaires compacts pour lesquels aucune autre solution du problème des 3 corps ne serait possible.

Chapitre 5

Problème des 3-Corps et Résonances Rétrogrades

5.1 Introduction

Nous avons mentionné en §2.1.1 qu'en raison d'un nombre de degrés de liberté important dans les systèmes multi-planétaires compacts, des méthodes d'analyse globale de la dynamique ont dues être développées. Cependant, la détection de planètes extrasolaires a également lancé de nouveaux défis analytiques afin de mieux connaître les propriétés mathématiques des solutions. Des études analytiques du problème des 3 corps plan ont été effectuées pour des cas particuliers, par exemple en considérant des résonances de moyen mouvement (ex. Hadjidemetriou (2002); Callegari *et al.* (2004)). De même, la dynamique séculaire de systèmes à deux planètes a été examinée (voir par exemple Libert & Henrard 2005). En raison d'excentricités généralement élevées pour l'ensemble des planètes extrasolaires détectées à ce jour, une approche analytique nouvelle prenant en compte ces caractéristiques orbitales particulières a également vu le jour (cf. Beaugé & Michtchenko 2003).

La résolution partielle du problème des 3 corps (plan) d'un point de vue analytique est possible mais nécessite certaines approximations ou considérations. Elle permet dans certains cas particuliers d'accéder à la dynamique d'un système constitué d'une étoile et de deux planètes de façon très précise. Elle fournit également les structures majeures reliées aux propriétés de stabilité. Dans ce chapitre, nous présentons un développement hamiltonien basé sur un mécanisme de stabilité nouveau (introduit dans Gayon & Bois (2008a and 2008b) et exposé dans le Chapitre 4) impliquant une résonance rétrograde de moyen mouvement. Ainsi, une étude hamiltonienne du problème des 3 corps est effectuée en considérant deux planètes massives en révolutions contraires autour de leur étoile centrale. Plus précisément, la planète interne est supposée en mouvement prograde et la planète externe en mouvement rétrograde. L'étude analytique des résonances rétrogrades se base sur l'approche hamiltonienne de Beaugé & Michtchenko (2003), initialement développée pour des orbites à fortes excentricités, coplanaires et *progrades*. A partir de ce développement analytique, on pourra notamment exprimer correctement les angles de résonances dans le cas d'une MMR rétrograde. Une comparaison avec les résultats numériques du Chapitre 4 est également effectuée.

Le travail présenté dans ce chapitre fait l'objet d'un article soumis à *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (Gayon, Bois & Scholl 2008). Bien que l'article soit inclu dans l'Annexe F, le développement analytique a été repris dans les sections suivantes en rajoutant certains détails de calcul.

5.2 Expression du vecteur position

Rappelons tout d'abord que le mouvement orbital d'une planète peut s'exprimer en coordonnées cartésiennes, dans le référentiel héliocentrique, de la façon suivante (cf. Fig. A.1 de l'Annexe A ainsi que le §2.8 de Murray & Dermott 1999 par exemple) :

$$\begin{cases} x = r [\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I] \\ y = r [\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I] \\ z = r [\sin(\omega + f) \sin I] \end{cases} \quad (5.1)$$

Nous choisissons de considérer un système coplanaire avec deux planètes en contre-révolution tel que la planète interne (caractérisée par l'indice 1) soit en mouvement prograde et la planète externe en mouvement rétrograde (indice 2). A partir de l'expression (5.1) et pour un mouvement coplanaire et prograde de la planète 1 (i.e. $I_1 = 0^\circ$), l'on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos(\Omega_1 + \omega_1 + f_1) = r_1 \cos \psi_1 \\ y_1 = r_1 \sin(\Omega_1 + \omega_1 + f_1) = r_1 \sin \psi_1 \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_1 = \Omega_1 + \omega_1 \quad (5.2)$$

Pour un mouvement coplanaire et rétrograde de la planète 2 (i.e. $I_2 = 180^\circ$), le vecteur position s'écrit :

$$\begin{cases} x_2 = r_2 \cos(\Omega_2 - \omega_2 - f_2) = r_2 \cos \psi_2 \\ y_2 = r_2 \sin(\Omega_2 - \omega_2 - f_2) = r_2 \sin \psi_2 \\ z_2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_2 = \Omega_2 - \omega_2 \quad (5.3)$$

L'angle ψ entre les deux vecteurs position est alors défini par :

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = f_1 + f_2 + \Delta\tilde{\omega} \quad \text{avec} \quad \Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 \quad (5.4)$$

5.3 Expression générale 3-D de l'Hamiltonien

Supposons une étoile de masse M_0 ainsi que deux planètes de masses m_1 et m_2 telles que $M_0 \gg m_1, m_2$, en orbite autour de leur barycentre. On choisit d'exprimer l'Hamiltonien du système dans le référentiel héliocentrique en utilisant les variables de Delaunay suivantes :

$$\begin{aligned} M_i & \quad L_i & = & \beta_i \sqrt{\mu_i a_i} \\ \omega_i & \quad G_i & = & L_i \sqrt{1 - e_i^2} \\ \Omega_i & \quad H_i & = & G_i \cos I_i \end{aligned} \quad (5.5)$$

$a_i, e_i, I_i, \Omega_i, \omega_i, M_i$ sont les éléments orbitaux géométriques de la planète i , $\mu_i = G(M_0 + m_i)$, G correspond à la constante gravitationnelle et $\beta_i = M_0 m_i / (M_0 + m_i)$ est la masse réduite de la planète i .

L'Hamiltonien du système (noté F) est constitué d'une partie képlérienne (F_0) et d'une fonction perturbatrice (F_1) :

$$F = F_0 + F_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} \\ F_1 = -Gm_1 m_2 \frac{1}{\Delta} + \frac{m_1 m_2}{M_0} (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2) \end{cases} \quad (5.6)$$

La première partie de la fonction perturbatrice, appelée partie directe, dépend de la distance instantannée entre les deux planètes (Δ). En raison du choix de l'origine du système de coordonnées, la seconde partie de F_1 est appelée partie indirecte de la fonction perturbatrice. La partie indirecte s'exprime en fonction des vitesses barycentriques $(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$ de chaque planète.

Pour étudier le problème des 3 corps, différents jeux de variables canoniques peuvent être utilisés. Ceux-ci dépendent des simplifications effectuées pour réduire le nombre de degrés de liberté. Par exemple, Beaugé & Michtchenko (2003) ont utilisé les variables bien de Poincaré pour résoudre le problème des 3 corps dans le cas d'orbites coplanaires, progrades et à fortes excentricités. Dans le développement proposé dans ce chapitre, j'introduis un nouveau jeu de variables canoniques, spécialement dédiées aux systèmes de planètes en "contre-révolution".

5.4 Jeu de variables canoniques pour des planètes en contre-révolution

Comme nous l'avons indiqué en §5.2, nous choisissons un sens de révolution prograde pour la planète interne et un sens rétrograde pour la planète externe. A partir des variables de Delaunay précédentes (5.5), on définit les jeux de variables canoniques suivants pour les planètes 1 et 2 respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 = M_1 + \tilde{\omega}_1 & L_1 = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1} \\ -\tilde{\omega}_1 = -(\Omega_1 + \omega_1) & L_1 - G_1 = L_1 (1 - \sqrt{1 - e_1^2}) \\ -\Omega_1 & G_1 - H_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} (1 - \cos I_1) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_2 = -M_2 + \tilde{\omega}_2 & -L_2 = -\beta_2 \sqrt{\mu_2 a_2} \\ -\tilde{\omega}_2 = -(\Omega_2 - \omega_2) & G_2 - L_2 = -L_2 (1 - \sqrt{1 - e_2^2}) \\ \Omega_2 & G_2 + H_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2} (1 + \cos I_2) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Le premier jeu de variables canoniques (5.7) correspond au variables canoniques de Poincaré ; j'ai développé le second (5.8) pour un mouvement planétaire rétrograde. λ_i est la longitude moyenne de la planète i . Notons que la longitude du périastre est définie par : $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$, pour un mouvement planétaire coplanaire et *prograde* (ce qui est équivalent à considérer $I = 0^\circ$) et par $\tilde{\omega} = \Omega - \omega$, pour un mouvement planétaire coplanaire et *rétrograde* (équivalent à $I = 180^\circ$). En restreignant l'étude à un problème coplanaire mais en contre-révolution, le jeu de variables canoniques du système peut être simplifié de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 & L_1 \\ \lambda_2 & -L_2 \\ -\tilde{\omega}_1 & L_1 - G_1 \\ -\tilde{\omega}_2 & G_2 - L_2 \end{array} \quad (5.9)$$

5.5 Développement de la fonction perturbatrice

Des méthodes classiques telles que celles de Laplace (1799) ou Kaula (1962) ont été développées pour des orbites coplanaires quasi-circulaires et ont été utiles pour étudier la dynamique du Système Solaire (ou bien des systèmes hiérarchiques en général). Cependant, avec la détection de systèmes exo-planétaires à fortes excentricités, des développements nouveaux et spécifiques de la fonction perturbatrice ont été nécessaires. En conséquence, Beaugé & Michtchenko (2003) ont développé une expression de l'Hamiltonien valide pour de fortes excentricités de l'une ou des deux planètes. Pour appliquer cette méthode aux orbites en contre-révolution, nous proposons de re-développer la fonction perturbatrice provenant de l'article de Beaugé & Michtchenko (2003), en considérant désormais un mouvement prograde de la planète interne et un mouvement rétrograde de la planète externe.

5.5.1 Partie directe de la fonction perturbatrice

La partie directe de la fonction perturbatrice étant inversement proportionnelle à la distance instantannée (Δ) entre les deux planètes, elle rencontre généralement des problèmes de convergence. La distance instantannée peut s'exprimer comme une fonction des distances radiales héliocentriques r_i des deux planètes et de l'angle ψ entre les deux corps vus depuis l'étoile (voir (5.4))¹ :

$$\frac{1}{\Delta} = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \psi)^{-1/2} \quad (5.10)$$

Une expression synthétique de l'équation précédente est écrite dans l'équation (5.11) en tenant compte du rapport $\rho = r_1/r_2$ tel que :

$$\frac{r_2}{\Delta} = (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \psi)^{-1/2} \quad (5.11)$$

– **Développement du terme $\frac{r_2}{\Delta}$**

La clé de la méthode de Beaugé & Michtchenko (2003) réside dans le développement en séries de puissances d'une nouvelle variable notée x et correspondant à une mesure de la proximité des conditions initiales par rapport à la singularité en $1/\Delta$:

$$\frac{r_2}{\Delta} = (1 + x)^{-1/2} \simeq \sum_{n=0}^N b_n x^n \quad (5.12)$$

avec $x = \rho^2 - 2\rho \cos \psi$. r_2/Δ possède une singularité en $x = -1$. La détermination des coefficients b_n est effectuée par l'intermédiaire d'une régression linéaire pour des valeurs de x supérieures à $-1 + \delta$, δ étant un paramètre positif proche de zéro. Une bonne précision de la partie directe de la fonction perturbatrice peut être atteinte lors d'un compromis correct entre la valeur de δ et le choix de l'ordre N dans le développement en série. A partir de (5.12) et en utilisant l'expression explicite de x , on trouve :

$$\frac{r_2}{\Delta} \simeq \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^l b_l (-2)^k \binom{l}{k} \rho^{2l-k} \cos^k \psi \quad (5.13)$$

¹Pour deux orbites progrades, l'angle ψ est défini par : $\psi = f_1 - f_2 + \Delta\tilde{\omega}$ avec $\tilde{\omega}_i = \Omega_i + \omega_i$.

Il est à noter que la méthode de Beaugé & Michtchenko fournit une bonne évaluation de la fonction perturbatrice quand les planètes sont en rencontres proches. La solution converge ainsi en tout point de l'espace des phases à l'exception des singularités (correspondant aux collisions des planètes). De plus, le taux de convergence ne dépend pas des valeurs des excentricités mais de l'ordre de la fonction perturbatrice. En outre, en fonction du système planétaire étudié, même pour des orbites à fortes excentricités, le taux de convergence de la fonction perturbatrice peut être très rapide (cf. Beaugé & Michtchenko (2003) pour plus de détails). Par conséquent, contrairement aux méthodes classiques impliquant des séries de Fourier de la variable ψ ou des séries de puissances en ρ , non seulement le taux de convergence de cette méthode est amélioré mais également le développement de la fonction perturbatrice peut être appliqué aux systèmes de planètes à fortes excentricités.

– **Développement du terme $\frac{a_2}{\Delta}$**

A partir de l'équation (5.13) et du changement de variables suivant,

$$\sum_{L=0}^N \sum_{k=0}^L p^k q^{2L-k} = \sum_{L=0}^N \sum_{U=0}^{N-L} p^L q^{2U+L} \quad (5.14)$$

on exprime le rapport $\frac{a_2}{\Delta}$:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{r_2} &= \sum_{L=0}^N \sum_{k=0}^L b_L (-2)^k \binom{L}{k} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^{2L-k} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{-2L+k-1} \alpha^{2L-k} \cos^k \psi \\ &= \sum_{L=0}^N \sum_{U=0}^{N-L} b_{U+L} (-2)^L \binom{U+L}{L} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^{2U+L} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{-2U-L-1} \alpha^{2U+L} \cos^L \psi \end{aligned} \quad (5.15)$$

En changeant les puissances de $\cos \psi$ en multiples de ψ et en utilisant l'expression explicite de l'angle ψ , l'on obtient :

$$\begin{aligned} \text{pour } L = 2k + 1, \quad k \geq 0 : \quad \cos^{2k+1} \psi &= 2 \sum_{j=0}^k \binom{2k+1}{j} \frac{1}{2^{2k+1}} \cos[(2k+1-2j)\psi] \\ \text{pour } L = 2k, \quad k \geq 1 : \quad \cos^{2k} \psi &= 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{j} \frac{1}{2^{2k}} \cos[(2k-2j)\psi] + \binom{2k}{2} \frac{1}{2^{2k}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Par un changement de variables², l'expression de $\frac{a_2}{\Delta}$ devient :

$$\frac{a_2}{\Delta} \simeq \sum_{l=0}^N \sum_{u=0}^{N-l} 2 A_{l,u} \alpha^{2u+l} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^{2u+l} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{-2u-l-1} \cos(lf_1 + lf_2 + l\Delta\tilde{\omega}) \quad (5.17)$$

où

$$A_{l,u} = (-1)^l \sum_{t=u}^{\min(2u, N-l)} b_{l+t} \binom{l+t}{l+2t-2u} \binom{l+2t-2u}{t-u} \gamma_l \text{ et } \gamma_l = \begin{cases} 1/2 & \text{si } l = 0 \\ 1 & \text{si } l > 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

²Changement de variables : $l = L - 2j$, $u = U + j$, $t = U + 2j$

– **Développement de Fourier**

La partie directe de la fonction perturbatrice peut être exprimée en termes de l'anomalie moyenne en utilisant le développement de Fourier des fonctions suivantes (e.g. Hughes 1981) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(lf) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^{n,l} \cos(mM) \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(lf) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^{n,l} \sin(mM) \end{aligned} \quad (5.19)$$

avec $X_m^{n,l}$ le coefficient de Hansen, fonction de l'excentricité (Kaula 1962) :

$$X_m^{n,l} = e^{|l-m|} \sum_{s=0}^{\infty} Y_{s+w_1, s+w_2}^{n,l} e^{2s} \quad (5.20)$$

avec $Y_{s+w_1, s+w_2}^{n,l}$ les opérateurs de Newcomb, $w_1 = \max(0, m-l)$ et $w_2 = \max(0, l-m)$. Rappelons que les opérateurs de Newcomb obéissent à de simples relations de récurrence³ (cf. par exemple Brouwer & Clemence 1961 ; Murray & Dermott 1999).

En introduisant (5.20) dans (5.19), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(lf) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{n,l,j,m} e^j \cos(mM) \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(lf) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{n,l,j,m} e^j \sin(mM) \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec $B_{n,l,j,m} = Y_{\frac{j-|l-m|}{2}+w_1, \frac{j-|l-m|}{2}+w_2}^{n,l}$ (voir Annexe D).

– **Expression de la partie directe de l'Hamiltonien**

La partie directe de la fonction perturbatrice s'exprime par conséquent de la façon suivante :

$$\frac{a_2}{\Delta} \simeq \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^N \sum_{i=0}^{2N} A_{l,(i-l)/2} D_{i,l,j,k,m,n} \alpha^i e_1^j e_2^k \cos(mM_1 + nM_2 + l\Delta\tilde{\omega}) \quad (5.24)$$

avec $D_{i,l,j,k,m,n} = 2B_{i,l,j,m} B_{-i-1,l,k,n}$

³Les propriétés de l'opérateur de Newcomb sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Y_{0,0}^{a,b} &= 1 \\ Y_{1,0}^{a,b} &= b - a/2 \\ 4cY_{c,0}^{a,b} &= 2(2b-a)Y_{c-1,0}^{a,b+1} + (b-a)Y_{c-2,0}^{a,b+2} \quad \text{si } d=0 \\ 4dY_{c,d}^{a,b} &= -2(2b+a)Y_{c,d-1}^{a,b-1} - (b+a)Y_{c,d-2}^{a,b-2} \\ &\quad - (c-5d+4+4b+a)Y_{c-1,d-1}^{a,b} + 2(c-d+b) \sum_{j \geq 2}^{\min(c,d)-1} (-1)^j \binom{3/2}{j} Y_{c-j,d-j}^{a,b} \quad \text{si } d \neq 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } c < 0 \text{ ou } d < 0 &\quad \text{alors } Y_{c,d}^{a,b} = 0 \\ \text{Si } d > c &\quad \text{alors } Y_{c,d}^{a,b} = Y_{d,c}^{a,-b} \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.5.2 Partie indirecte de la fonction perturbatrice

A partir de (5.6), la partie indirecte de la fonction perturbatrice est donnée par la fonction T_1 :

$$T_1 = \frac{m_1 m_2}{M_0} (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2) \quad (5.25)$$

où \dot{x}_i , \dot{y}_i , et \dot{z}_i correspondent aux vitesses barycentriques de la planète i . Il s'agit des dérivées temporelles des coordonnées cartésiennes héliocentriques de la planète i . Dans le cas d'orbites coplanaires, les expressions de \dot{x}_i et \dot{y}_i prennent en compte le sens du mouvement de la planète i . On définit \dot{x}_i lors d'un mouvement prograde et d'un mouvement rétrograde par⁴ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial M_i} n_i & \text{pour un mouvement prograde} \\ \dot{x}_i = -\frac{\partial x_i}{\partial M_i} n_i & \text{pour un mouvement rétrograde} \end{cases} \quad (5.26)$$

Par conséquent, en considérant un problème coplanaire ainsi que des planètes en contre-révolution, la partie indirecte s'écrit de la façon suivante :

$$T_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{a_2} \alpha^{-1/2} \left[\frac{\partial}{\partial M_1} \left(\frac{x_1}{a_1} \right) \frac{\partial}{\partial M_2} \left(\frac{x_2}{a_2} \right) + \frac{\partial}{\partial M_1} \left(\frac{y_1}{a_1} \right) \frac{\partial}{\partial M_2} \left(\frac{y_2}{a_2} \right) \right] \quad (5.27)$$

En utilisant (5.23) et en considérant le mouvement prograde de la planète 1 ainsi que le mouvement rétrograde de la planète 2, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a_1} &= \left(\frac{r_1}{a_1} \right) \cos(\tilde{\omega}_1 + f_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{1,1,j,m} e_1^j \cos(\tilde{\omega}_1 + mM_1) \\ \frac{y_1}{a_1} &= \left(\frac{r_1}{a_1} \right) \sin(\tilde{\omega}_1 + f_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{1,1,j,m} e_1^j \sin(\tilde{\omega}_1 + mM_1) \\ \frac{x_2}{a_2} &= \left(\frac{r_2}{a_2} \right) \cos(\tilde{\omega}_2 - f_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{1,1,k,n} e_2^k \cos(\tilde{\omega}_2 - nM_2) \\ \frac{y_2}{a_2} &= \left(\frac{r_2}{a_2} \right) \sin(\tilde{\omega}_2 - f_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{1,1,k,n} e_2^k \sin(\tilde{\omega}_2 - nM_2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

En substituant ces résultats dans (5.27), on trouve :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{2N} \bar{A}_i \alpha^i \\ &\quad \times mn B_{1,1,j,m} B_{1,1,k,n} e_1^j e_2^k \cos(mM_1 + nM_2 + \Delta\tilde{\omega}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

où \bar{A}_i sont des coefficients constants tels que : $\alpha^{-1/2} = \sum_{i=0}^{2N} \bar{A}_i \alpha^i$.

En combinant (5.24) et (5.29), l'on obtient l'expression complète de la fonction perturbatrice comme suit :

$$F_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^N \sum_{i=0}^{2N} R_{i,j,k,m,n,l} \alpha^i e_1^j e_2^k \cos(mM_1 + nM_2 + l\Delta\tilde{\omega}) \quad (5.30)$$

⁴Une équation similaire est obtenue pour \dot{y}_i .

où $R_{i,j,k,m,n,l} = A_{l,(i-l)/2} D_{i,l,j,k,m,n} - \delta_{l,1} \bar{A}_i m n B_{1,1,j,m} B_{1,1,k,n}$ sont des coefficients constants. $R_{i,j,k,l,m,n,l}$ sont indépendants des conditions initiales. Nous sommes désormais capable d'exprimer les angles de résonances dans le cas d'orbites en contre-révolution, comme nous allons le voir dans la section suivante.

5.6 L'Hamiltonien moyenné et résonant

En considérant des planètes en contre-révolution proche d'une MMR, on définit le rapport des MMR par $p + q/p$ avec $p \neq 0$ et $p < 0$. Par exemple, quand deux planètes sont en contre-révolution et ont un rapport de période égal à 2, l'ordre de la résonance q vaut 3 et $p = -1$. On fixe $s = p/q$ et on définit le jeu de variables canoniques suivant, dans le cas d'une MMR rétrograde :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 & & J_1 &= L_1 + s(I_1 + I_2) \\
 \lambda_2 & & J_2 &= -L_2 - (1 + s)(I_1 + I_2) \\
 \sigma_1 = (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_1 & & I_1 &= L_1 (1 - \sqrt{1 - e_1^2}) \\
 \sigma_2 = (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_2 & & I_2 &= -L_2 (1 - \sqrt{1 - e_2^2})
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

où σ_1 et σ_2 sont des angles de résonance tandis que I_1 et I_2 sont les moments conjugués dépendant des excentricités e_1 et e_2 .

Soit θ l'angle intervenant dans la fonction perturbatrice : $\theta = mM_1 + nM_2 + l\Delta\tilde{\omega}$. En considérant le nouveau jeu de variables, l'expression de θ devient :

$$\theta = m\sigma_1 - n\sigma_2 + l(\sigma_2 - \sigma_1) + [m(p + q) - np]Q \tag{5.32}$$

où $qQ = (\lambda_1 - \lambda_2)$ est l'angle synodique. Ainsi, la fonction perturbatrice dépend des trois variables angulaires (σ_1, σ_2, Q) . En considérant le nouveau jeu de variables canoniques $(\sigma_1, \sigma_2, Q, \lambda_2; I_1, I_2, qJ_1, J_1 + J_2)$, on trouve la constante du mouvement suivante :

$$J_1 + J_2 = \text{cste} \tag{5.33}$$

En conséquence, notre système possède deux intégrales du mouvement : l'Hamiltonien F et $J_{tot} = J_1 + J_2$. Les angles λ_1 et λ_2 étant des angles à courte période, il s'ensuit que la fréquence de l'angle Q est bien plus grande que celle de σ_i . En conséquence, on considère seulement les perturbations à longue période dans l'Hamiltonien. Le système est alors moyenné par rapport à l'angle synodique, de la façon suivante :

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 dQ \tag{5.34}$$

La moyennisation sur la variable Q écrite dans l'équation (5.34) implique une troisième constante du mouvement, à savoir J_1 . En conséquence, le système est constitué de quatre degrés de liberté et de trois constantes du mouvement. Le système peut désormais être réduit à quatre variables indépendantes, à savoir σ_1, σ_2, I_1 et I_2 . En tenant compte de la condition de résonance ($n = m(p + q)/p$), l'on obtient respectivement l'expression finale de la fonction perturbatrice (5.35) et celle de l'Hamiltonien moyenné (5.36), pour une résonance rétrograde :

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_1 &= -\frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{j=0}^{j_{max}} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{i=0}^{2N} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \\
 &\quad \times \alpha^i e_1^j e_2^k \cos((m - l)\sigma_1 + (l - n)\sigma_2)
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\bar{F} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} - \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \alpha_i e_1^j e_2^k \cos((m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2) \quad (5.36)$$

En raison des propriétés de D'Alembert relatives à la fonction perturbatrice, certains coefficients sont nuls si une (ou plusieurs) des conditions suivantes est atteinte :

- 1) $j < |m-l|$
- 2) $k < |l-n|$
- 3) $(m-l)$ est pair et j est impair ou bien $(m-l)$ est impair et j est pair
- 4) $(l-n)$ est pair et k est impair ou bien $(l-n)$ est impair et k est pair.

5.7 Expressions des variables canoniques et de leurs dérivées

Suite à la moyennisation effectuée en §5.6, le jeu de variables canoniques utilisé se réduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1+s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_1 & ; & \quad I_1 = L_1(1 - \sqrt{1 - e_1^2}) \\ \sigma_2 &= (1+s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_2 & ; & \quad I_2 = -L_2(1 - \sqrt{1 - e_2^2}) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Les constantes du mouvement sont \bar{F} et :

$$\begin{aligned} J_1 &= L_1 + s(I_1 + I_2) \\ J_2 &= -L_2 - (1+s)(I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (5.38)$$

On exprime les excentricités ainsi que les demi grand-axes dans le jeu de variables canoniques de la façon suivante :

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[1 - \left(1 - \frac{I_1}{J_1 - s(I_1 + I_2)} \right)^2 \right]^{1/2} \\ e_2 &= \left[1 - \left(1 - \frac{I_2}{J_2 + (1+s)(I_1 + I_2)} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{[J_2 + (1+s)(I_1 + I_2)]^2}{\mu_2 \beta_2^2} \\ \alpha &= \frac{a_1}{a_2} = \frac{\mu_2 \beta_2^2}{\mu_1 \beta_1^2} \left[\frac{J_1 - s(I_1 + I_2)}{J_2 + (1+s)(I_1 + I_2)} \right]^2 \end{aligned}$$

A partir des expressions (5.38) et (5.39), la partie képlérienne de l'Hamiltonien devient :

$$F_0 = -\frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{2} T_0 - \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{2} T_1 \quad (5.40)$$

et la partie perturbatrice s'exprime de la façon suivante :

$$\bar{F}_1 = -Gm_1 m_2 \mu_2 \beta_2^2 T_1 \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \left(\frac{\mu_2 \beta_2^2}{\mu_1 \beta_1^2} \right)^i T_2 T_3 T_4 \cos[(m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2] \quad (5.41)$$

où les termes T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , et T_4 sont respectivement reliés à a_1 , a_2 , α , e_1 , et e_2 :

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \frac{1}{[J_1 - s(I_1 + I_2)]^2} \\
 T_1 &= \frac{1}{[J_2 + (1 + s)(I_1 + I_2)]^2} \\
 T_2 &= \left[\frac{J_1 - s(I_1 + I_2)}{J_2 + (1 + s)(I_1 + I_2)} \right]^{2i} \\
 T_3 &= \left[1 - \left(1 - \frac{I_1}{J_1 - s(I_1 + I_2)} \right)^2 \right]^{j/2} \\
 T_4 &= \left[1 - \left(1 - \frac{I_2}{J_2 + (1 + s)(I_1 + I_2)} \right)^2 \right]^{k/2}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

En utilisant les expressions générales des dérivées des variables canoniques,

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_i &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_i} = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \sigma_i} \\
 \dot{\sigma}_i &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial I_i} = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial I_i} + \frac{\partial F_0}{\partial I_i}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

on trouve, dans le cas de la résonance rétrograde :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= -Gm_1 m_2 \mu_2 \beta_2^2 T_1 \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \left(\frac{\mu_2 \beta_2^2}{\mu_1 \beta_1^2} \right)^i T_2 T_3 T_4 (m-l) \sin [(m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2] \\
 \dot{I}_2 &= -Gm_1 m_2 \mu_2 \beta_2^2 T_1 \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \left(\frac{\mu_2 \beta_2^2}{\mu_1 \beta_1^2} \right)^i T_2 T_3 T_4 (l-n) \sin [(m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2] \\
 \dot{\sigma}_1 &= -\mu_1^2 \beta_1^3 s T_0^{3/2} + \mu_2^2 \beta_2^3 (1+s) T_1^{3/2} - Gm_1 m_2 \mu_2 \beta_2^2 \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \left(\frac{\mu_2 \beta_2^2}{\mu_1 \beta_1^2} \right)^i \\
 &\quad \times \left[\frac{\partial T_1}{\partial I_1} T_2 T_3 T_4 + T_1 \frac{\partial T_2}{\partial I_1} T_3 T_4 + T_1 T_2 \frac{\partial T_3}{\partial I_1} T_4 + T_1 T_2 T_3 \frac{\partial T_4}{\partial I_1} \right] \cos [(m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2] \\
 \dot{\sigma}_2 &= -\mu_1^2 \beta_1^3 s T_0^{3/2} + \mu_2^2 \beta_2^3 (1+s) T_1^{3/2} - Gm_1 m_2 \mu_2 \beta_2^2 \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \left(\frac{\mu_2 \beta_2^2}{\mu_1 \beta_1^2} \right)^i \\
 &\quad \times \left[\frac{\partial T_1}{\partial I_2} T_2 T_3 T_4 + T_1 \frac{\partial T_2}{\partial I_2} T_3 T_4 + T_1 T_2 \frac{\partial T_3}{\partial I_2} T_4 + T_1 T_2 T_3 \frac{\partial T_4}{\partial I_2} \right] \cos [(m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2]
 \end{aligned} \right. \tag{5.44}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_1}{\partial I_1} &= -2(1+s)T_1^{3/2} \\
 \frac{\partial T_2}{\partial I_1} &= -2i[(1+s)J_1 + sJ_2]T_0^{1/2}T_1^{1/2}T_2 \\
 \frac{\partial T_3}{\partial I_1} &= j(1 - I_1 T_0^{1/2})(J_1 - sI_2) \frac{T_0 T_3}{1 - (1 - I_1 T_0^{1/2})^2} \\
 \frac{\partial T_4}{\partial I_1} &= -k(1 - I_2 T_1^{1/2})(1+s)I_2 \frac{T_1 T_4}{1 - (1 - I_2 T_1^{1/2})^2} \\
 \frac{\partial T_1}{\partial I_2} &= -2(1+s)T_1^{3/2} \\
 \frac{\partial T_2}{\partial I_2} &= -2i[(1+s)J_1 + sJ_2]T_0^{1/2}T_1^{1/2}T_2 \\
 \frac{\partial T_3}{\partial I_2} &= j(1 - I_1 T_0^{1/2})sI_1 \frac{T_0 T_3}{1 - (1 - I_1 T_0^{1/2})^2} \\
 \frac{\partial T_4}{\partial I_2} &= k(1 - I_2 T_1^{1/2})[J_2 + (1+s)I_1] \frac{T_1 T_4}{1 - (1 - I_2 T_1^{1/2})^2}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

5.8 Comparaison avec la méthode numérique

On considère les données initiales du système planétaire HD 73526 réglé en MMR rétrograde (cf. Chapitre 4). On utilise le jeu de paramètres orbitaux suivant :

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 1.08 M_\odot \\
 M_1 &= 2.9 M_{Jup} & M_2 &= 2.5 M_{Jup} \\
 a_1 &= 0.66 \text{ UA} & a_2 &= 1.05 \text{ UA} \\
 e_1 &= 0.19 & e_2 &= 0.14 \\
 \sigma_1 &= 94^\circ & \sigma_2 &= 94^\circ
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

La Fig. 5.1 montre l'évolution temporelle de l'excentricité de chacune des deux planètes. Les points rouges symbolisent la solution numérique tandis que les courbes noires représentent la solution analytique. Les deux solutions expriment le même comportement, avec une erreur relative de 1.2% et 10%, en moyenne, sur l'excentricité des orbites interne et externe, respectivement (les erreurs absolues étant de 0.002 pour e_1 et 0.005 pour e_2 en moyenne). A cause de la moyennisation de l'Hamiltonien sur les courtes périodes, les points numériques sont éparpillés des deux côtés de la solution analytique. Néanmoins, les deux méthodes (analytique et numérique) sont en très bon accord l'une avec l'autre concernant la variation temporelle des excentricités.

La Fig. 5.2 montre la variation temporelle de la variable $\Delta\sigma$. Pour la solution numérique, il apparaît, par endroits, une dispersion de points de 0 à 360 degrés. Ceci est causé par l'excentricité e_2 qui atteint périodiquement la valeur zéro. En effet, il résulte d'une excentricité nulle une indétermination numérique de la valeur de l'angle $\Delta\sigma$. En conséquence, la tracé obtenu en rouge comporte un biais numérique. La méthode analytique est par conséquent plus fiable quand l'excentricité d'une planète atteint une valeur proche de zéro.

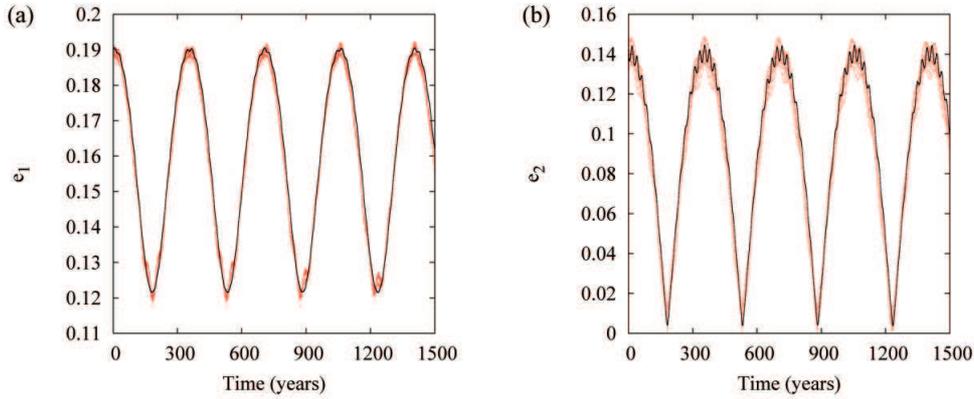


FIG. 5.1 – Variation temporelle des excentricités e_1 et e_2 pour le système planétaire HD 73526 en MMR 2 :-1. Les points rouges représentent la solution numérique et les points noirs la solution analytique. Les conditions initiales utilisées sont données par (5.46).

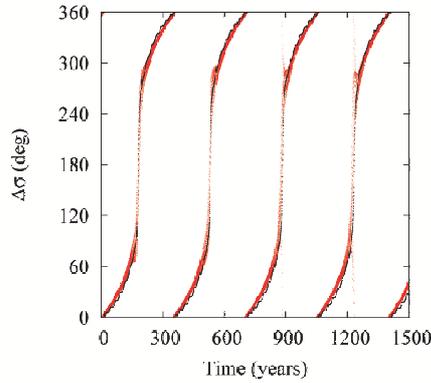


FIG. 5.2 – Variation temporelle de la variable $\Delta\sigma$ (où $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$) pour le système planétaire HD 73526 en MMR 2 :-1. La solution numérique est représentée en rouge et la solution analytique en noir. Les conditions initiales utilisées sont identiques à celles de la Fig. 5.1.

5.9 Surfaces de section

La nature des systèmes planétaires (quasi-périodicité *vs* chaoticité) peut être directement déduite du comportement des variables de résonance. Par conséquent, à partir du développement hamiltonien précédent (5.36) du problème des 3 corps, il est possible de tracer des surfaces de section et d'étudier la dynamique de deux planètes en MMR rétrograde (cf. Annexe E pour plus de détails sur les surfaces de section).

La Fig. 5.3 montre des surfaces de section tracées pour le système planétaire HD 73526 précédemment défini. Le niveau d'énergie correspondant aux conditions initiales (5.46) a été numériquement évalué à -0.13835250 (unités : UA, masse solaire, année). Avec notre développement analytique, on obtient une valeur de l'Hamiltonien de -0.13835197 , ce qui est en bon accord avec les résultats numériques (l'erreur relative étant de 3.4×10^{-6}). La Fig. 5.3a correspond à la surface de section de la planète interne; elle est tracée dans l'espace des paramètres $(e_1 \cos \sigma_1, e_1 \sin \sigma_1)$. Le plan de coupe pour la planète interne est choisi tel que $\sigma_2 = 0$. De même, la Fig. 5.3b est tracée pour la planète externe dans l'espace des paramètres $(e_2 \cos \sigma_2, e_2 \sin \sigma_2)$ et en utilisant le plan de coupe $\sigma_1 = 0$. Les conditions initiales correspondant au système (5.46) sont représentées en rouge.

Pour l'ensemble des conditions initiales requises pour tracer la Fig. 5.3, la variation *temporelle* de σ_1 et σ_2 exprime une circulation (en temps) des deux variables. Rappelons que ceci ne signifie pas forcément que ces variables circulent sur une surface de section. D'une manière générale, une surface de section met en lumière le comportement des angles de résonance en lien avec le plan de coupe choisi. Par conséquent, dans les Fig. 5.3a et 5.3b, on obtient un état de circulation des variables σ_1 et σ_2 en noir et rouge tandis que l'état de libration autour de 0° est représenté en bleu. Toutes les solutions trouvées pour $\bar{F} = -0.138352$ sont quasi-périodiques.

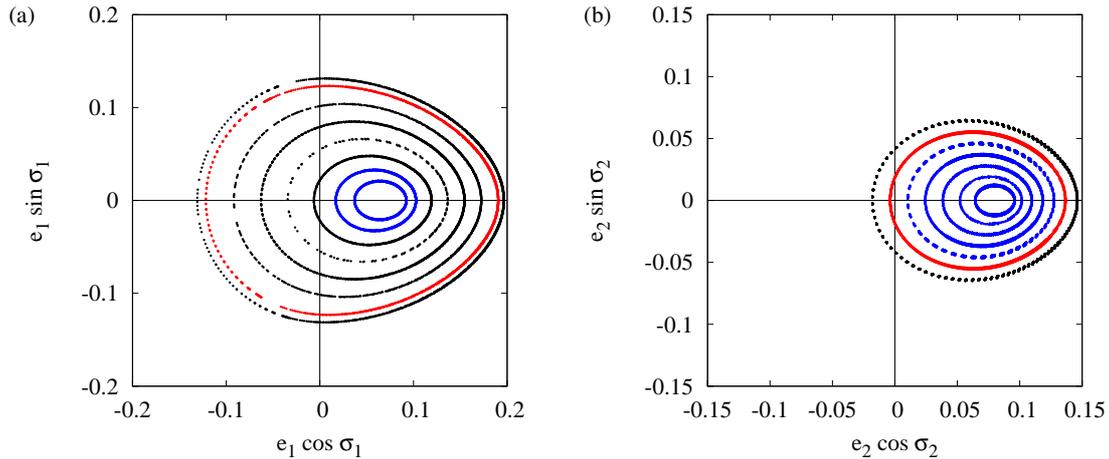


FIG. 5.3 – Surfaces de section pour la planète interne (a) et externe (b) du système HD 73526 proche d'une MMR 2 :-1. La valeur de \bar{F} est de -0.138352 . Les conditions initiales (5.46) sont représentées en rouge. Les couleurs noir et bleu correspondent respectivement à la circulation et la libration des variables σ_i variables dans le plan $\sigma_{j \neq i} = 0$.

5.10 Conclusion

Nous avons examiné le problème des 3 corps dans le cas particulier des résonances rétrogrades de moyen mouvement. L'étude dérive de l'approche hamiltonienne de Beaugé & Michtchenko (2003), qui avait été développée pour des orbites progrades, coplanaires et à fortes excentricités. Pour appliquer cette méthode au cas de MMR rétrograde, j'ai re-développé la fonction perturbatrice en considérant un mouvement prograde de la planète interne et un mouvement rétrograde de la planète externe. Un nouveau jeu de variables canoniques a donc été défini, ce qui nous a permis d'exprimer correctement les angles de résonance dans le cas d'orbites en contre-révolution.

Bien que l'exploration du problème des N-corps soit accessible par des méthodes numériques, l'acquisition d'un "rail" analytique contribue notamment à une compréhension plus profonde de l'exploration numérique. Comme montré en §5.8, la méthode analytique permet également une meilleure détermination des variables de résonance. De plus, à partir du comportement des angles de résonance tracés dans des surfaces de section, l'on peut directement déduire le comportement dynamique local d'un système à 3 corps, c'est-à-dire sa stabilité ou chaotité.

Jusqu'à présent aucun système planétaire n'a été observé avec une configuration en contre-révolution. Néanmoins, étant donné l'efficacité de la stabilité des MMR rétrogrades (cf. Chapitre 4), il n'est pas exclu qu'une telle détection se produise. Le travail présenté dans ce chapitre était

donc basé sur une étude dynamique de systèmes théoriques à deux planètes. Notons par ailleurs qu'un système dynamique composé de deux satellites en orbite autour d'une planète est un problème équivalent. Puisque des satellites de Saturne sont trouvés en mouvement rétrograde, le développement du problème des 3 corps résolu pour des configurations en contre-révolution, pourrait ainsi s'appliquer à des satellites du Système Solaire.

Chapitre 6

Planètes en Contre-Révolution et Données Observationnelles

Nous avons vu dans les Chapitres 4 et 5 que les résonances rétrogrades et la variété de leurs ressources engendrent des mécanismes théoriques de stabilité particuliers. L'on peut alors se demander si de tels mécanismes seront un jour observables. Par conséquent, je propose, dans ce chapitre, d'éprouver cette approche théorique face aux observations. Des ajustements aux observations sont ainsi effectués en considérant le mouvement rétrograde d'une des planètes.

6.1 Détermination des éléments orbitaux à partir des mesures de vitesses radiales

6.1.1 Ajustement multi-keplérien en coordonnées astrocentriques

Rappelons tout d'abord que l'ensemble des systèmes multi-planétaires observés sont détectés, jusqu'à présent, par la méthode des vitesses radiales. Comme nous l'avons mentionné dans le §1.1.2, la méthode des vitesses radiales repose sur la mesure du décalage spectral ($\delta\lambda$) des raies d'absorption de l'étoile cible. L'effet Doppler-Fizeau implique la relation suivante entre la vitesse d'un corps mobile et la longueur d'onde (λ) à laquelle il émet : $\delta v/c = \delta\lambda/\lambda$. En considérant que les orbites planétaires sont keplériennes (en première approximation), on peut exprimer la vitesse radiale de l'étoile cible sous la forme suivante :

$$V_{rad} = V_0 + \sum_j^{N_p} K_j [\cos(\nu_j(t) + \omega_j) + e_j \cos \omega_j] \quad (6.1)$$

avec V_0 la vitesse du barycentre du système à N_p planètes,¹ ν_j l'anomalie vraie et K_j la demi-amplitude de la planète j définie par :

$$K_j = \frac{m_j \sin i_j}{M^{2/3}} \frac{(2\pi G)^{1/3}}{P_j^{1/3} \sqrt{1 - e_j^2}} \quad \text{avec} \quad M = M_* + \sum_j^{N_p} m_j \quad (6.2)$$

Les variables e_j , ω_j , i_j , m_j et P_j sont respectivement l'excentricité, l'argument du périastre, l'inclinaison du plan d'orbite par rapport à la ligne de visée, la masse planétaire et la période orbitale de la planète j . M_* est la masse de l'étoile mère. G est la constante de la gravitation. Mentionnons qu'un ajustement multi-keplérien en coordonnées astrocentriques correspond à un ajustement cinématique.

¹Notons que si les orbites des N_p planètes sont toutes circulaires alors V_0 correspond à la valeur moyenne de V_{rad} .

Comme le précise l'article de Beugé *et al.* (2008), la détermination des éléments orbitaux des planètes extrasolaires à partir des mesures de vitesses radiales est relativement complexe. Les équations reliant les observations aux éléments orbitaux (ainsi qu'aux masses planétaires minimales) sont hautement non-linéaires et favorisent l'existence, dans l'espace des paramètres, de plusieurs minima locaux, donc de plusieurs ajustements possibles aux observations. De plus, il est nécessaire que le rapport entre le nombre N d'observations et le nombre M de paramètres libres soit important pour que les éléments orbitaux soient correctement déterminés. Or, il n'est pas rare que la durée des observations soit de l'ordre de quelques périodes orbitales seulement (2 à 3 fois) de la planète extérieure d'un système.

Le défi est encore plus important si un système comporte deux planètes en résonance de moyen mouvement. Ceci est dû au fait que la commensurabilité orbitale peut rajouter une périodicité non-négligeable dans la courbe de vitesses radiales et par conséquent compliquer la séparation des composantes dans le signal. D'une manière générale, les éléments les plus difficiles à déterminer sont les excentricités et les longitudes du périastre, en raison d'asymétries dans le signal. La précision sur l'estimation de ces deux variables est d'autant plus compromise dans le cas de résonance orbitale.

6.1.2 Ajustement dynamique et utilisation de l'algorithme Pikaia

Nous nous intéressons dans cette thèse au cas de systèmes à plusieurs planètes généralement massives et relativement proches de leur étoile mère. L'approximation keplérienne n'est donc plus valable. Il est alors nécessaire de procéder à un ajustement dynamique et non pas keplérien. Cependant, afin de converger rapidement vers une solution "dynamique", nous réduisons l'espace des paramètres à étudier en considérant, tout d'abord, la solution obtenue par ajustement multi-keplérien.

La détermination du meilleur fit multi-keplérien s'effectue en plusieurs étapes via l'utilisation de trois sous-routines différentes. Nous utilisons, tout d'abord, un algorithme génétique (Pikaia, voir Charbonneau 1995) avec une population (une centaine) de conditions initiales (prises aléatoirement dans l'espace des paramètres) évoluant sur environ 10^4 itérations. La propriété des algorithmes génétiques est de garantir seulement une certaine proximité du minimum global de la fonction d'ajustement, non pas une valeur précise. Afin d'améliorer le résultat obtenu, nous utilisons par la suite deux autres sous-routines (appelées "simplex" et "simulated annealing"). La troisième sous-routine est basée sur une technique de Monte Carlo. Pour une iteration donnée, deux paramètres sont choisis aléatoirement. L'amplitude de ces paramètres varie aléatoirement sans jamais dépasser une certaine valeur. Le résidu (rms) et le χ_ν^2 sont ainsi calculés pour cette nouvelle solution, en supposant une distribution gaussienne des erreurs :

$$(rms)^2 = \frac{S}{N-1} \sum_{i=1}^N \frac{(V_{r_i} - y_i)^2}{\epsilon_i^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\epsilon_i^2} \quad (6.3)$$

$$\chi_\nu^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N \frac{(V_{r_i} - y_i)^2}{\epsilon_i^2}$$

V_{r_i} étant la mesure de la vitesse radiale au temps t_i et y_i la valeur de la vitesse radiale calculée à partir de l'ajustement orbital. ϵ correspond à la précision (qui prend en compte la valeur de la variation de l'étoile appelée "stellar jitter"). N est le nombre d'observations. M est le nombre de paramètres à ajuster. $N - M$ correspond au nombre de degrés de liberté de la régression. Le χ_ν^2 , appelé aussi le χ^2 réduit, est une quantité normalisée². Un ajustement des données est d'autant meilleur que le $\sqrt{\chi_\nu^2}$ a une valeur positive la plus petite possible.

² $\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{N-M}$

La routine est effectuée sur 10^4 itérations et la solution correspondant à la plus petite valeur des résidus est sélectionnée. On obtient ainsi la valeur des paramètres orbitaux (éléments osculateurs) du meilleur ajustement multi-keplérien. Une fois cet ajustement multi-keplérien effectué, une nouvelle subroutine tenant compte des interactions gravitationnelles entre les planètes intervient. Les éléments osculateurs choisis sont transformés en coordonnées cartésiennes. L'utilisation d'un intégrateur à N-corps permet de calculer la vitesse de l'étoile ainsi que les positions et vitesses des planètes aux temps d'observations. Le calcul des résidus est par la suite effectué par la méthode des moindres carrés présentée en (6.3).

Une description complète de la méthode des vitesses radiales et de l'utilisation du code Pikaia de Charbonneau (1995) est présentée dans Beugé *et al.* (2007).³ En raison des théories actuelles de formation planétaire (dans un disque de gaz et de poussière) et d'un grand nombre de paramètres à ajuster dans le cas de mouvements orbitaux dans un espace à 3 dimensions, les ajustements dynamiques sont généralement effectués en considérant des configurations coplanaires (et progrades). Le code utilisé dans ce chapitre avait été développé pour de telles orbites progrades et coplanaires. Or, nous désirons effectuer des ajustements aux observations en considérant des systèmes coplanaires à deux planètes en contre-révolution. Il a donc fallu modifier l'ensemble des sous-routines en conséquence (i.e. à prendre en compte le mouvement rétrograde d'une des planètes). L'ensemble des résultats présentés dans la section suivante devrait faire l'objet d'un article (Gayon & Bois 2008c, en préparation).

6.2 Réduction de données observationnelles

6.2.1 Application au système HD 73526

Les barres d'erreurs des éléments orbitaux publiées par les observateurs (Tinney *et al.* 2006) pour le système HD 73526 (étudiés dans les Chapitres 4 et 5) sont relativement grandes. Il n'est donc pas exclu qu'un ajustement incluant de nouvelles observations donne des valeurs d'éléments orbitaux complètement différents. Cela étant, la réduction de données effectuée par Sándor *et al.* (2007) conduit à plusieurs solutions possibles, toutes coplanaires, progrades et stables, avec une valeur relativement correcte du $\sqrt{\chi^2_\nu}$ comprise entre 1.58 et 1.87 (avec des *rms* \in [8.04, 8.36]).⁴ Qu'en est-il de la réduction de données dans le cas de planètes en contre-révolution?⁵

En effectuant un ajustement dynamique des mesures de vitesses radiales du système HD 73526, nous trouvons des solutions stables possibles pour des configurations en contre-révolution. Plus précisément, nous trouvons une solution stable (notée dans la Table 6.1) en contre-révolution telle que $\sqrt{\chi^2_\nu} = 1.257$ et *rms* = 6.34 m.s^{-1} . Les valeurs du $\sqrt{\chi^2_\nu}$ et du *rms* sont, par conséquent, du même ordre de grandeur, voire meilleure, que celles obtenues pour les solutions stables de Sándor *et al.* et pour la solution chaotique de Tinney *et al.* La courbe de vitesses radiales du meilleur ajustement est présentée dans la Fig. 6.1. Malgré le mouvement rétrograde de la planète extérieure, la courbe reste très similaire à celle obtenue par Tinney *et al.* (2006) et Sándor *et al.* (2007). La configuration en contre-révolution est donc *consistante* avec les données observationnelles *actuelles*.

³L'ensemble des sous-routines mentionnées dans ce chapitre nous a été fourni par C. Beugé.

⁴Rappelons que l'ajustement observationnel de Tinney *et al.* (2006) correspond à un système chaotique. Les valeurs du $\sqrt{\chi^2_\nu}$ et du *rms* pour la solution chaotique de Tinney *et al.* sont de 1.7 et 7.9 m.s^{-1} respectivement.

⁵La réduction de données effectuée ici est également présentée dans Gayon & Bois (2008a).

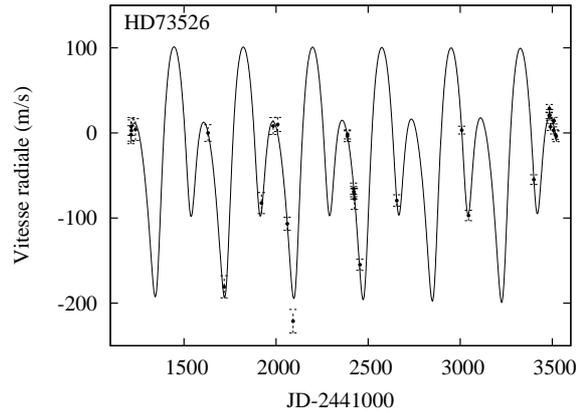


FIG. 6.1 – Ajustement dynamique pour les mesures de vitesses radiales du système planétaire HD 73526. Les mesures de vitesses radiales proviennent de Tinney *et al.* (2006). Le meilleur fit dynamique conduisant à un système stable avec deux planètes en contre-révolution est obtenu pour les éléments mentionnés dans la Table 6.1. La vitesse (V_0) du barycentre du système planétaire est de : -25.201 m.s^{-1} . Les résidus correspondants sont de $rms = 6.34 \text{ m.s}^{-1}$ et le $\sqrt{\chi_\nu^2}$ est égal à 1.257.

Quel que soit le sens du mouvement des deux planètes, la valeur du $\sqrt{\chi_\nu^2}$ demeure dans les deux cas (prograde et contre-révolution) un peu trop élevée par rapport à la valeur idéale (inférieure ou proche de 1.0). Davantage d’observations permettraient de mieux réduire les données et probablement de pouvoir départager entre les solutions progrades “habituelles” et la solution de contre-révolution. Pour le moment, il n’est donc pas exclu que le mécanisme de stabilité du système HD 73526 sous-tende une résonance rétrograde de moyen mouvement.

6.2.2 Application à une sélection de systèmes planétaires

Sachant que la résonance rétrograde de moyen mouvement constitue un mécanisme de stabilité théoriquement plausible (cf. Chapitres 4 et 5) et que la planète externe du système observé HD 73526 est compatible avec un mouvement rétrograde (au moins au niveau des réductions des données; cf. §6.2.1), il m’est apparu intéressant de chercher d’autres systèmes susceptibles d’être également compatibles avec une configuration de contre-révolution. Le choix des systèmes candidats s’est opéré de la façon suivante :

- A partir de cartes de stabilité en éléments $[i_r; \Omega_r]$ (certaines d’entre elles étant présentées dans le Chapitre 4), des systèmes susceptibles d’être régulés par des résonances rétrogrades de moyen mouvement ont été sélectionnés (systèmes HD 128311, HD 160691, HD 202206).
- L’étude s’est ensuite étendue à d’autres systèmes (coplanaires et progrades) déjà trouvés stable en MMR (système HD 108874).

Considérant des systèmes à deux planètes avec un mouvement prograde pour l’une des planètes et un mouvement rétrograde pour l’autre planète, on trouve de nouveaux ajustements dynamiques pour les systèmes HD 128311, HD 160691, HD 108874, HD 202206. Les meilleurs ajustements sont présentés dans la Table 6.1. Les rms et $\sqrt{\chi_\nu^2}$ trouvés dans la majorité des cas sont similaires à ceux obtenus dans le cas prograde (coplanaire). La Table 6.2 résume ainsi les valeurs de rms et $\sqrt{\chi_\nu^2}$ pour l’ensemble des systèmes étudiés et pour les deux types de configuration (prograde et contre-révolution). De surcroît, dans quelques cas, on note des valeurs de résidus meilleures dans le cas de la configuration en contre-révolution. Les courbes de vitesses radiales sont présentées en Fig. 6.2.

Système	M_{star} (M_{\odot})	m_P (M_{Jup})	P (jours)	a (UA)	e	i (deg)	ω (deg)	M (deg)	V_0 ($m.s^{-1}$)	rms ($m.s^{-1}$)	$\sqrt{\chi^2_b}$
HD 73526	b	2.4921	187.935	0.6593	0.2401	0.0	184.569	97.297	-25.201	6.3398	1.257
	c	2.5919	379.795	1.0538	0.2048	180.0	58.545	221.361			
HD 128311	b	1.5571	453.626	1.0908	0.3550	180.0	278.933	168.259	-0.066	15.785	1.785
	c	3.2205	941.213	1.7756	0.1485	0.0	49.517	235.211			
HD 160691	b	1.5328	624.994	1.4684	0.3547	0.0	76.468	131.374	0.550	3.469	2.439
	c	1.1699	2454.668	3.6550	0.4324	180.0	174.806	178.448			
HD 108874	b	1.2141	395.452	0.9953	0.0580	0.0	92.572	355.512	16.923	3.274	0.386
	c	0.8979	1588.626	2.5149	0.2497	180.0	17.102	27.604			
HD 202206	b	17.4168	255.794	0.8302	0.4333	0.0	161.125	353.396	14706.445	8.517	1.418
	c	2.7195	1235.281	2.3623	0.4012	180.0	277.846	71.407			

TAB. 6.1 – Nouvelles réductions des données pour des configurations en contre-révolution des systèmes planétaires : HD 73526, HD 128311, HD 160691, HD 108874, HD 202206.

Systèmes	Configuration en contre-révolution rms	$\sqrt{\chi^2_b}$	Configuration prograde rms	$\sqrt{\chi^2_b}$
HD 73526	6.34	1.257	8.04 – 8.36	1.58 – 1.87
HD 128311	15.785	1.785	18	1.9
HD 160691	3.469	2.439	4.7	1.1
HD 108874	3.274	0.386	3.7	0.74
HD 202206	8.517	1.418	9.6	1.5

TAB. 6.2 – Valeurs des rms et $\sqrt{\chi^2_b}$ pour les configurations prograde et en contre-révolution des systèmes HD 73526, HD 128311, HD 160691, HD 108874, HD 202206. Les valeurs indiquées pour la configuration prograde proviennent respectivement de : Timney *et al.* (2006), Vogt *et al.* (2005), Butler *et al.* (2006), Vogt *et al.* (2005), Udry *et al.* (2002).

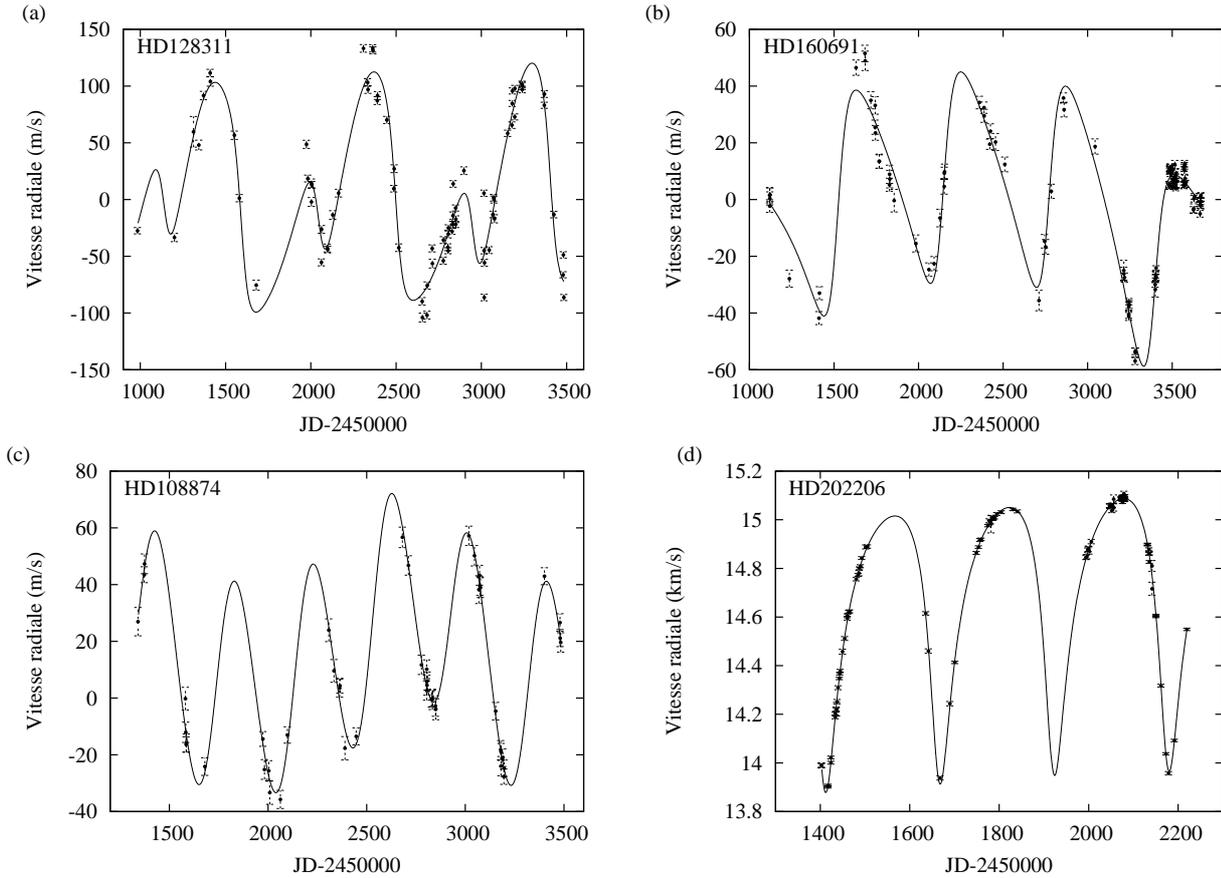


FIG. 6.2 – Ajustement dynamique pour les mesures de vitesses radiales des systèmes planétaires (a) HD 128311, (b) HD 160691, (c) HD 108874 et (d) HD 202206. Les meilleurs fits dynamiques conduisant à des systèmes stables à deux planètes sont notés dans la Table 6.1. Les mesures de vitesses radiales proviennent respectivement de (a-c) Vogt *et al.* (2005), (b) Butler *et al.* (2006) et (d) Udry *et al.* (2002).

6.3 Discussion sur la possibilité de planètes en contre-révolution

Les ajustements aux observations effectués pour les systèmes HD 73526, HD 108874, HD 128311, HD 160691 et HD 202206, tendent à montrer que la configuration de contre-révolution est consistante avec les observations. Sur cinq systèmes planétaires étudiés, quatre sont donc susceptibles de comporter une MMR rétrograde. A part le cas du système HD 160691 pour lequel l’ajustement observationnel est “mauvais”, l’ensemble des autres fits sont globalement meilleurs que les fits en configuration prograde. Il semble néanmoins nécessaire d’effectuer de nouvelles campagnes d’observations afin d’agrandir les échantillons de données observationnelles et obtenir des résultats plus précis. Par ailleurs, il serait intéressant de procéder systématiquement, lors de nouvelles détections ou campagnes d’observations, à des ajustements aux observations en 3-dimensions.

Malgré le fait que les configurations en contre-révolution et les MMR rétrogrades sont possibles à la fois d’un point de vue théorique et “observationnel” (entendons par là, la consistance avec les observations), il subsiste un doute quant à l’existence de tels systèmes. En effet, à partir des théories de formation planétaire actuelles, comment expliquer l’origine de systèmes contenant des planètes en contre-révolution ? Ceci sera discuté dans le chapitre suivant.

Chapitre 7

Discussion

7.1 Origine des planètes en contre-révolution

7.1.1 Introduction

Comme nous l'avons vu, la plupart des systèmes multi-planétaires sont caractérisés par des planètes géantes, proches de leur étoile centrale et dont les orbites comportent généralement de fortes excentricités. Bien que ces particularités peuvent conduire à des interactions gravitationnelles fortes, l'âge des étoiles mères (disparition des disques de gaz et de poussières) et le fait d'observer de tels systèmes planétaires suggèrent que de tels systèmes ont acquis un comportement dynamique stable (soit à l'issue de la formation planétaire, soit après divers processus d'évolution). Les caractéristiques dynamiques surprenantes de la plupart de ces objets ont relancé les théories de formation planétaire. Il s'agit en outre d'expliquer comment les systèmes de planètes extrasolaires ont acquis leurs structures orbitales si peu familières.

C'est à partir des travaux effectués sur la formation du Système Solaire que les théories actuelles de formation des systèmes multi-planétaires ont vu le jour. Le point de départ commun aux théories de formation planétaire est la formation de planètes au sein d'un même disque proto-planétaire en rotation autour de l'étoile.¹ Dans ce disque, il existe une limite appelée "ligne des glaces" ("snowline") à partir de laquelle l'eau condense.² Au delà de cette ligne des glaces, la matière du disque (à l'exception bien sûr de l'hydrogène et de l'hélium) est globalement sous forme solide. Or, la formation d'un cœur planétaire massif requiert une grande quantité de solides. Il semble donc que les planètes les plus massives se forment dans une région extérieure du disque, au delà de la ligne des glaces. Or, comme nous l'avons vu précédemment, des planètes extrasolaires géantes ont été détectées très près de leur étoile. L'une des explications possibles est la migration de planètes vers l'intérieur du disque.³ Une fois les planètes géantes formées au delà de la ligne des glaces, les interactions entre les planètes et le disque créent une perte de moment cinétique impliquant une migration des planètes vers l'intérieur du disque.⁴

Le plus vraisemblablement, il vient naturellement que les planètes se meuvent dans le même sens de révolution lors de la dissipation du disque. Un système est-il alors capable d'acquérir, par la suite, des planètes en mouvement rétrograde ?

¹Cf. notamment Pollack *et al.* 1996 ou Alibert *et al.* 2005 (modèles d'accrétion) et Boss 1997, 2000 (formation planétaire par instabilité gravitationnelle).

²Si l'on s'éloigne vers l'extérieur du Système Solaire, l'eau est la première molécule à se condenser. Pour une étoile de type solaire, la ligne de glace se situe à 3-5 UA.

³Notons que des migrations vers l'extérieur du système sont également possibles (e.g. Masset & Papaloizou 2003).

⁴La description proposée ici est extrêmement simplifiée. Pour plus de détails, notamment sur la formation du Système Solaire, le lecteur peut se référer à Crida (2006), Crida *et al.* (2007) ou encore Morbidelli & Crida (2007).

7.1.2 Effet de fronde, circularisation maréale et mécanisme de Kozai

Jusqu'à présent, relativement peu de travaux ont été effectués sur la formation d'orbites inclinées. Par exemple, Thommes & Lissauer (2003) ont montré qu'une migration planétaire conduisant à une capture en MMR 2 : 1 peut causer une augmentation importante des valeurs d'inclinaisons mutuelles. Cependant, la configuration résultante ne semble jamais conduire à des mouvements rétrogrades. Récemment, des études impliquant particulièrement l'évolution des inclinaisons mutuelles ont par été réalisées. Notons, à ce sujet, les travaux de Nagasawa *et al.* (2008) et de Varvoglis (2007-2008 ; discussions privées) qui ont permis d'établir deux mécanismes possibles de formation de planètes en contre-révolution. Le premier scénario (Nagasawa *et al.* 2008) combine le "planet scattering", la circularisation maréale et le mécanisme de Kozai. Le second scénario, présenté dans le §7.1.3, fait intervenir des "free-floating planets" (Varovglis 2007-2008).

Selon Nagasawa *et al.* (2008), il est possible de former des planètes en contre-révolution à partir des effets cumulés suivants :

- 1) l'effet de fronde (appelé "planet scattering") causé par une interaction gravitationnelle soudaine et particulièrement forte entre deux planètes lors de rencontres planétaires très proches⁵,
- 2) la circularisation maréale consistant en la circularisation des orbites planétaires par effet de marées entre la planète interne et l'étoile,
- 3) et le mécanisme de Kozai impliquant une variation importante de l'excentricité (e) et de l'inclinaison (i) d'une des planètes telle que la composante en z du moment angulaire (i.e. $\sqrt{1 - e^2} \cos i$) reste constante. Cette variation est causée par des perturbations séculaires engendrées par les autres planètes du système.

Les travaux de Nagasawa *et al.* (2008) reposent sur la considération d'un système initialement constitué d'une étoile de type solaire ($1 M_{\odot}$) et de 3 planètes de la masse de Jupiter, en mouvement sur des orbites circulaires. Les demi grands-axes initiaux des planètes sont respectivement de 5 UA, 7.25 UA et 9.5 UA. Les inclinaisons orbitales initialement choisies sont égales à 0.5° , 1.0° et 1.5° respectivement.

Lorsque les orbites des planètes se croisent, des rencontres proches et parfois très proches entre les planètes peuvent avoir lieu et générer des interactions gravitationnelles très fortes. Il peut en résulter un "effet de fronde" à travers l'augmentation de l'excentricité d'une des planètes. Pendant le croisement des orbites, l'excitation Kozai est répétée et l'excentricité est souvent augmentée séculairement jusqu'à des valeurs assez proches de 1 pour que la circularisation maréale puisse s'opérer. Cette circularisation orbitale dépend fortement de la distance au péricentre ($q = a(1 - e)$). Lorsque la valeur de q devient inférieure à 0.05 UA, l'orbite de la planète (temporairement très excentrique) se circularise et la planète se rapproche considérablement de l'étoile (a diminue fortement, la valeur de q variant très peu).⁶ En parallèle, l'inclinaison de l'orbite varie et peut atteindre des valeurs importantes.

Par conséquent, tenant compte de la cumulation des trois processus précédemment cités, l'intégration des équations d'un système initialement constitué de 3 planètes géantes permet, dans certains cas, d'acquérir de très grandes inclinaisons relatives et parfois même une bascule d'un des plans orbitaux. Une des planètes possède ainsi un mouvement rétrograde par rapport aux deux autres. Afin de conserver le moment cinétique du système, l'une des planètes se voit par la suite éjectée. Le système à deux planètes en contre-révolution résultant peut par la suite devenir stable.

⁵Une animation de cet effet de fronde a été effectuée par E. Ford, V. Lystad, F. Rasio et T. Schindler. Elle est téléchargeable à l'adresse internet suivante : <http://www.astro.northwestern.edu/rasio/UpsAndPR>

⁶Une planète externe peut alors devenir une planète interne!

7.1.3 Les planètes “flottantes”

Les planètes “flottantes” (“free-floating planets”) sont des objets de taille planétaire, détachées de toute étoile. Elles ont été détectées dans le milieu interstellaire, notamment par Zapatero-Osorio *et al.* (2000) et Lucas *et al.* (2005). Ces planètes “flottantes” pourraient interagir avec les systèmes planétaires avoisinants en étant soit dispersées soit capturées.

Les travaux récents de Varvoglis (2007-2008, discussions privées) montrent qu’en intégrant les trajectoires d’un corps de masse planétaire qui rencontre un système à deux corps (e.g. une étoile de type solaire et une planète de type Jupiter), la probabilité de capture de la planète flottante est importante. Par ailleurs, au moins la moitié des captures temporaires (i.e. captures à court terme) sont de type “contre-révolution”. Autrement dit, au moins 50% des planètes flottantes capturées ont un mouvement rétrograde. Or, certaines de ces planètes flottantes restent capturées et intégrées à leur nouveau système planétaire (constitué alors d’une étoile et deux planètes). Varvoglis a montré que la proportion de planètes flottantes capturées “à jamais” est supérieure dans le cas de contre-révolution (comparé au cas de révolution dans un même sens) : le pourcentage de planètes flottantes définitivement intégrées au système planétaire est de 3.5% dans le cas de contre-révolution pour 1% dans le cas de mouvements progrades !

D’un point de vue théorique, il semble donc que la capture de planètes flottantes privilégie la formation de planètes en contre-révolution. Bien que la capture de planètes flottantes demeure spéculative, cette théorie constitue un mécanisme possible pour la formation de planètes en contre-révolution. Il serait donc intéressant d’appliquer ce scénario de capture aux systèmes multi-planétaires observés.

7.2 Conclusion et perspectives

Outre l’étude de la dynamique d’un bon nombre de systèmes multi-planétaires compacts, ces recherches ont permis d’introduire la possibilité théorique et observationnelle de planètes en contre-révolution. Dans le Chapitre 4, nous avons mis en évidence un nouveau mécanisme théorique de stabilité caractérisé par une proche MMR rétrograde, de rapport 2 : 1, combinée à une ASP particulière. Plus précisément, notre étude numérique a révélé une précession apsidale rétrograde ainsi qu’un phénomène de bascules apsidales que nous appelons “*rocking ASP*” (cf. Gayon & Bois 2008a). De plus, une étude de la dynamique de systèmes extrêmement compacts a montré que les MMR rétrogrades sont très efficaces d’un point de vue de la stabilité dynamique (cf. Gayon & Bois 2008b).

En parallèle à la réussite de l’obtention des résonances orbitales rétrograde avec l’outil MIPS, j’ai effectué une approche analytique du problème des 3 corps dans le cas particulier des résonances rétrogrades de moyen mouvement. L’étude a été basée sur l’approche hamiltonienne de Beaugé & Michtchenko (2003). La considération d’un mouvement prograde de la planète interne et d’un mouvement rétrograde de la planète externe m’a conduite à introduire un nouveau jeu de variables canoniques. Dès lors, il nous a été possible d’exprimer correctement les angles de résonances dans le cas d’orbites en contre-révolution et de caractériser analytiquement la dynamique de systèmes stabilisés en résonance rétrograde (cf. Gayon *et al.* 2008a).

Par ces approches conjointes numériques et analytiques, a été introduite la *conception des résonances orbitales rétrogrades* pour les systèmes planétaires. Leurs problématiques résultantes ont donc ensuite été largement analysées au cours de la thèse. Les recherches ont mis en lumière le degré de leur *possibilité théorique et effective*. La question sur la *consistance* du point de vue des observations a nécessité la réduction de données observationnelles ajustées dans le cas de planètes en

contre-révolution. Avec des ajustements aux observations effectués pour différents systèmes à deux planètes, j’ai trouvé que dans la majorité des cas (4 systèmes sur 5) les fits obtenus en *configuration de contre-révolution* sont globalement meilleurs que les fits obtenus en configuration prograde (Gayon & Bois 2008c).

Par conséquent, en considérant l’ensemble ci-après des résultats obtenus :

- les mécanismes de stabilité reliés à une résonance de moyen mouvement rétrograde, étudiés à la fois par une approche numérique (Chapitre 4) et par une approche analytique (Chapitre 5),
- l’efficacité des MMR rétrogrades ainsi que leur possibilité statistique (§4.4),
- la structure fine des MMR rétrogrades (§4.3),
- leurs ressources impliquant notamment des comportements apsidiaux inédits (e.g. le “rocking ASP”, §4.5),
- les ajustements dynamiques consistants obtenus pour des configurations en contre-révolution d’un ensemble de systèmes à deux planètes (Chapitre 6),
- et les deux mécanismes plausibles de formation, à savoir le “planet scattering” et les “free-floating planets” (§7.1),

l’on peut désormais affirmer que les configurations en contre-révolution munies de résonances orbitales rétrogrades non seulement conduisent à des mécanismes théoriques de stabilité qui correspondent à des solutions du problème des 3 corps, mais constituent également des situations observationnelles plausibles (consistance aux observations). Le devenir de la *prédiction théorique* du principe de résonance rétrograde planétaire appartient désormais à l’avenir prometteur des observations des planètes extrasolaires.

Concernant la formation planétaire, l’acquisition d’orbites rétrogrades reste à approfondir. Par ailleurs, il serait intéressant de pouvoir relier, pour un système planétaire particulier, son mode de formation, son évolution dynamique mettant en évidence un processus d’acquisition de MMR rétrograde ainsi que sa dynamique actuelle. Par conséquent, je prévois tout d’abord d’étudier l’effet des inclinaisons orbitales sur la formation et l’évolution de systèmes multi-planétaires, à partir du scénario de capture des planètes flottantes et du modèle de “planet scattering”. La modélisation des processus de formation des systèmes en contre-révolution est prévue dans le cadre de notre projet du PNP (Programme National de Planétologie) intitulé “Formation et évolution des systèmes de planétaires” (Morbidelli *et al.* 2009), plus spécifiquement en collaboration avec E. Bois (OCA, Cassiopée) et J. Lissauer (Nasa, Ames), H. Varvoglis (Université de Thessalonique), M. Nagasawa (Institut Technologique de Tokyo). Par ailleurs, la dynamique et la formation de systèmes de planètes en orbite autour d’étoiles binaires est encore mal connue. En collaboration avec E. Bois, j’envisage, de ce fait, d’adapter l’outil MIPS aux systèmes binaires hébergeant des planètes extrasolaires. De plus, avec la détection de “Super-Terres”, l’intérêt des chercheurs sur la formation de planètes habitables n’a cessé de s’accroître. Il est prévu au cours de mon post-doctorat avec J. Lissauer (Nasa Ames) de contribuer à la détermination des conditions de formation de planètes habitables, plus particulièrement dans le cas de systèmes binaires multi-planétaires.

Liste des Annexes

Annexe A : Notations

Annexe B : Caractéristiques orbitales

Annexe C : Généralisation de la méthode MIPS

Annexe D : Complément au développement analytique

Annexe E : Sections de Poincaré et comportements dynamiques

Annexe F : Liste des publications

Annexe A

Notations

Éléments géométriques d'une orbite planétaire :

M_*	Masse de l'étoile centrale
m_i	Masse de la planète i , avec $i = 1$ pour la planète externe, $i = 2$ pour la deuxième planète etc.
a	Demi grand-axe
e	Excentricité
i	Inclinaison orbitale
i_r	Inclinaison relative entre deux plans d'orbites ($i_r = i_2 - i_1$)
Ω	Longitude du nœud
Ω_r	Longitude relative des nœuds ($\Omega_r = \Omega_2 - \Omega_1$)
ω	Argument du périastre
$\tilde{\omega}$	Longitude du périastre
$\Delta\tilde{\omega}$	Longitude apsidale relative
T_{per}	Temps de passage d'une planète au périastre
M	Anomalie moyenne
E	Anomalie excentrique
f	Anomalie vraie
r	Distance radiale
P	Période orbitale
n	Moyen mouvement
p, q	Entiers définissant une Résonance de Moyen Mouvement de rapport $p + q/p$ (avec q l'ordre de la résonance)

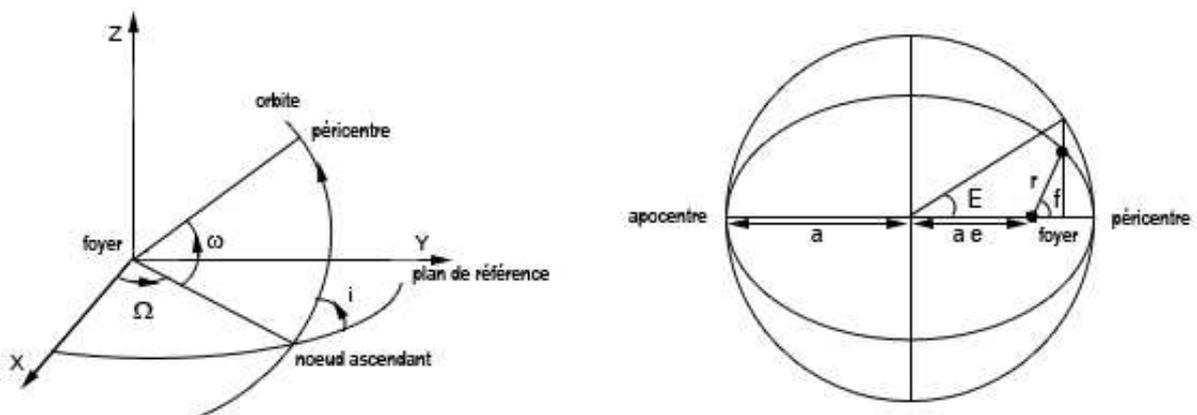


FIG. A.1 – Caractéristiques géométriques d'une orbite planétaire.

Système d'unités :

M_{\odot}	Masse Solaire
M_{Jup}	Masse de Jupiter
UA	Unités astronomiques
deg	Degrés

Acronymes :

MMR	Mean Motion Resonance
ASP	Apsidal Synchronous Precession
MEGNO	Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits
MIPS	Megno Indicator for Planetary Orbits
FMA	Frequency Map Analysis

Symboles utilisés dans les méthodes d'intégration numérique :

$Y(t)$	Valeur au temps t de l'indicateur MEGNO
$\langle Y \rangle$	Valeur moyennée de l'indicateur MEGNO
σ_{FMA}	Taux de diffusion des orbites (par la méthode FMA)
$[-, -]$	Espace des paramètres

Variables utilisées dans le développement hamiltonien :

\mathbf{r}	Vecteur position
\mathbf{v}	Vecteur vitesse
r	Distance radiale
x, y, z	Position en coordonnées cartésiennes
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	Vitesse en coordonnées cartésiennes
ρ	Rapport des distances radiales de deux planètes ($\rho = r_1/r_2$)
α	Rapport des demi grand-axes ($\alpha = a_1/a_2$)
G, k^2	Constante de la Gravitation
β	Masse réduite ($\beta = (M_*m)/(M + m)$)
μ	Masse $\mu = G(M_* + m)$
Δ	Distance instantannée entre deux planètes
ψ	Angle entre deux planètes vues depuis l'étoile
F	Hamiltonien
F_0	Partie keplérienne de l'Hamiltonien
F_1	Partie perturbatrice de l'Hamiltonien
\bar{F}	Hamiltonien moyennisé
\bar{F}_1	Partie perturbatrice moyennisée
σ	Angle de résonance
I	Moment conjugué de σ
λ	Longitude moyenne
J	Moment conjugué de λ
$X_m^{n,l}$	Coefficient de Hansen
$Y_{j,k}^{n,l}$	Opérateur de Newcomb
$\bar{R}_{i,j,k,m,n,l}$	Coefficients indépendants des excentricités s'exprimant en fonction des coefficients $b_n, A_{i,j}, B_{n,l,j,m}, D_{i,l,j,k,m,n}$ et \bar{A}_i

Annexe B

Caractéristiques orbitales

Dans cette annexe, les éléments orbitaux des planètes du Système Solaire sont présentés dans la Table B.1. Les éléments orbitaux de l'ensemble des systèmes extrasolaires étudiés dans cette thèse sont exposés dans la Table B.2.

Planète	m_P (M_{Jup})	a (UA)	e	i (deg)	Ω (deg)	ω (deg)	M (deg)
Mercur	0.00017305	0.38709893	0.20563069	7.00487	48.33167	77.45645	252.25084
Vénus	0.0025643	0.72333199	0.00677323	3.39471	76.68069	131.53298	181.97973
Terre	0.0031463	1.00000011	0.01671022	0.00005	-11.26064	102.94719	100.46435
Mars	0.00033666	1.52366231	0.09341233	1.85061	49.57854	336.04084	355.45332
Jupiter	1.0	5.202787023	0.04833790226	1.30463475	100.4706643	275.2010177	18.1
Saturne	0.29941009	9.53004985	0.05334351875	2.48644437	113.6685162	339.5198854	238.2931603
Uranus	0.0457478	19.19126393	0.04716771	0.76986	74.22988	170.96424	313.23218
Neptune	0.05395997	30.06896348	0.00858587	1.76917	131.72169	44.97135	304.88003

TAB. B.1 – Éléments orbitaux des planètes du Système Solaire. Données provenant du Jet Propulsion Laboratory (DE202).

Planète	M_* (M_\odot)	m_P (M_{Jup})	Période (jours)	a (UA)	e	ω (deg)	M (deg)	Références
Gliese 876	d	7.53(M_\oplus)	1.93774	0.0208067	0.0	0.0	311.8	(1)
	c	0.32	30.455	0.13065	0.2632	197.4	311.6	
	b	2.53	60.83	0.20774	0.0338	185.5	165.6	
HD 73526	b	2.9	188.3	0.66	0.19	203	86	(2)
	c	2.5	377.8	1.05	0.14	13	82	
HD 82943	c	1.85	219.4	0.75	0.38	124.0	0.0	(3)
	b	1.84	435.1	1.18	0.18	237.0	75.21	
HD 108874	b	1.223	394.294	1.049	0.045	255.46	0.0	(4) fit dyn.
	c	1.022	1600.099	2.67	0.0	252.18	164.557	
HD 128311	b	0.84	458.6	1.099	0.25	110.9	204.021	(4) fit kepl.
	c	3.21	928.3	1.76	0.17	195.5	0.0	
HD 128311	b	0.84	464.9	1.109	0.38	80.1	257.6	(4) fit dyn. - (5)
	c	3.08	909.6	1.735	0.21	21.6	166.0	
HD 160691	b	1.08	638	1.5	0.31	320	156.3	(6)
	c	1.0	1300	2.3	0.8	99	0.0	
HD 160691	b	1.08	638	1.5	0.31	320	156.3	(7)
	c	1.0	1300	2.381	0.8	99	0.0	
HD 160691	b	1.08	645.5	1.5	0.20	294	0.0	(8)
	c	3.1	2986	4.17	0.57	161	12.6	
HD 202206	b	1.15	255.87	0.83	0.435	161.18	105.05	(9)
	c	2.44	1387.40	2.55	0.267	78.99	311.60	

TAB. B.2 – Éléments orbitaux des systèmes extrasolaires étudiés dans cette thèse. Données provenant : (1) Rivera *et al.* (2005) - (2) Tinney *et al.* (2006) - (3) Mayor *et al.* (2004) - (4) Vogt *et al.* (2005) - (5) Sándor & Kley (2006) - (6) Jones *et al.* (2002) - (7) Bois *et al.* (2003) - (8) McCarthy *et al.* (2004) - (9) Correia *et al.* (2005).

Annexe C

Généralisation de la méthode MIPS

La généralisation de la méthode MIPS consiste à écrire les équations variationnelles pour un système à N_p planètes. Il s'agit donc de développer les expressions de $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$, $\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ et de leurs dérivées diverses. Rappelons l'expression de l'équation du mouvement d'une planète i (avec $i = 1..N_p$) dans le référentiel barycentrique :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \mathbf{v}_i \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= -k^2 M_* \frac{\mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_i|^3} - k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_p} m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{R}_i est le vecteur de position relative :

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 = \sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) \mathbf{r}_j \quad (\text{C.2})$$

et

$$\mu_j = \frac{m_j}{M_*}. \quad (\text{C.3})$$

La composante x (il en sera de même pour les composantes en y et z) des vecteurs $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ et $\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ de la planète i s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)_x &= (\mathbf{v}_i)_x \\ \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right)_x &= -k^2 M_* \sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) x_j \frac{1}{V_i^3} - k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_p} m_j \frac{x_i - x_j}{R_{ij}^3}\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

avec $V_i = \left\{ \left[\sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) x_j \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) y_j \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) z_j \right]^2 \right\}^{1/2}$

et $R_{ij} = \{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2\}^{1/2}$

Il s'agit désormais de déterminer les dérivées des différentes composantes du vecteur $\left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right)$ de la planète i par rapport à la variable de position x, y ou z de la planète q . Autrement dit, cela revient

à calculer les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_x & \frac{d}{dx_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_y & \frac{d}{dx_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_z \\
 & \frac{d}{dy_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_x & \frac{d}{dy_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_y & \frac{d}{dy_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_z \\
 & \frac{d}{dz_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_x & \frac{d}{dz_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_y & \frac{d}{dz_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_z
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Nous développerons simplement le terme suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx_q} \left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right)_x &= -k^2 M_* \frac{d}{dx_q} \left[\sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) x_j \frac{1}{V_i^3} \right] - k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_p} m_j \frac{d}{dx_q} \left[\frac{x_i - x_j}{R_{ij}^3} \right] \\
 &= -k^2 M_* \left\{ \frac{\text{Coeff}_A}{V_i^3} - \frac{\text{Coeff}_B}{V_i^6} \left[\sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) x_j \right] \right\} - k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_p} m_j \left\{ \frac{\text{Coeff}_C}{R_{ij}^3} - \text{Coeff}_D \frac{(x_i - x_j)}{R_{ij}^6} \right\}
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \text{Coeff}_A &= \left[\sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) \frac{d}{dx_q} x_j \right] = \begin{cases} \delta_{q,i} + \mu_q & \text{si } q = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \text{Coeff}_B &= \frac{d}{dx_q} (V_i^3) = 3 (\delta_{q,i} + \mu_q) \sum_{j=1}^{N_p} (\delta_{j,i} + \mu_j) x_j V_i \\
 \text{Coeff}_C &= \frac{d}{dx_q} (x_i - x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = i \\ -1 & \text{si } q = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \text{Coeff}_D &= \frac{d}{dx_q} (R_{ij}^3) = \begin{cases} 3(x_i - x_j)R_{ij} & \text{si } q = i \\ -3(x_i - x_j)R_{ij} & \text{si } q = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Par ailleurs, on calcule également l'expression des dérivées du vecteur $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ par rapport aux variables de vitesse v_x, v_y, v_z de la planète q . Pour la dérivée par rapport à x du terme $\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)_x$, on obtient :

$$\left(\frac{d}{dv_q} \right)_x \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)_x = \begin{cases} 1 & \text{si } q = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{C.8}$$

L'ensemble de ces dérivées a alors été ajouté au code MIPS en tenant compte désormais d'une intégration à N_p planètes.

Annexe D

Complément au développement analytique

Expression des coefficients $B_{n,l,j,m}$

En combinant les équations 5.19 et 5.20, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos lf &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} Y_{s+w_1, s+w_2}^{n,l} e^{2s+|l-m|} \cos mM \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Y_{\frac{j-|l-m|}{2}+w_1, \frac{j-|l-m|}{2}+w_2}^{n,l} e^j \cos mM \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin lf = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Y_{\frac{j-|l-m|}{2}+w_1, \frac{j-|l-m|}{2}+w_2}^{n,l} e^j \sin mM$$

Par conséquent, on définit le coefficient suivant :

$$B_{n,l,j,m} = Y_{\frac{j-|l-m|}{2}+w_1, \frac{j-|l-m|}{2}+w_2}^{n,l} \tag{D.2}$$

Annexe E

Sections de Poincaré et comportements dynamiques

Grâce à la notion de portrait de phase introduite par H. Poincaré, il est possible de représenter géométriquement l'aspect d'un ensemble de solutions dans l'espace des phases¹. Cette technique de "sections de Poincaré" consiste à localiser, dans l'espace des phases, les intersections successives d'une trajectoire avec un plan de coupe bien défini.

La Figure E.1 montre trois sections de Poincaré (aussi appelées surfaces de section) obtenues pour différentes amplitudes de perturbations et tracées dans l'espace des phases (ϕ_1, I_1) , avec ϕ_1 et I_1 des variables conjuguées dites "angle-action". Ainsi, dans le cas d'un système très faiblement perturbé, il apparaît sur la surface de section E.1a deux îles de libration (courbes fermées) correspondant à des solutions quasi-périodiques *stables* ainsi que des zones de circulation (courbes ouvertes) caractéristiques des solutions quasi-périodiques *instables*. Les solutions périodiques sont représentées sous la forme de points fixes appelés "centres" (pour les points fixes localisés à l'intérieur des îles de libration) et "points hyperboliques" (situés à l'intersection des trajectoires à la limite des zones stables et des zones instables). Ces trajectoires, également appelées variétés en mathématiques, sont à la fois stables et instables (cf. Fig. E.1a). Sous l'effet d'une perturbation (Fig. E.1b), il apparaît tout d'abord du chaos au niveau des points hyperboliques. De nouvelles zones de libration voient éventuellement le jour tandis que les zones de libration et de circulation précédemment mentionnées se déforment sous l'effet de la perturbation. Lorsque la perturbation est importante (Fig. E.1c), les îles de stabilité subsistantes sont entourées d'un "océan" de chaos.

¹L'espace des phases est l'espace où le corps étudié est repéré par ses positions et vitesses. Dans l'espace ordinaire, dit de configuration, il n'est localisé que par ses seules coordonnées de position.

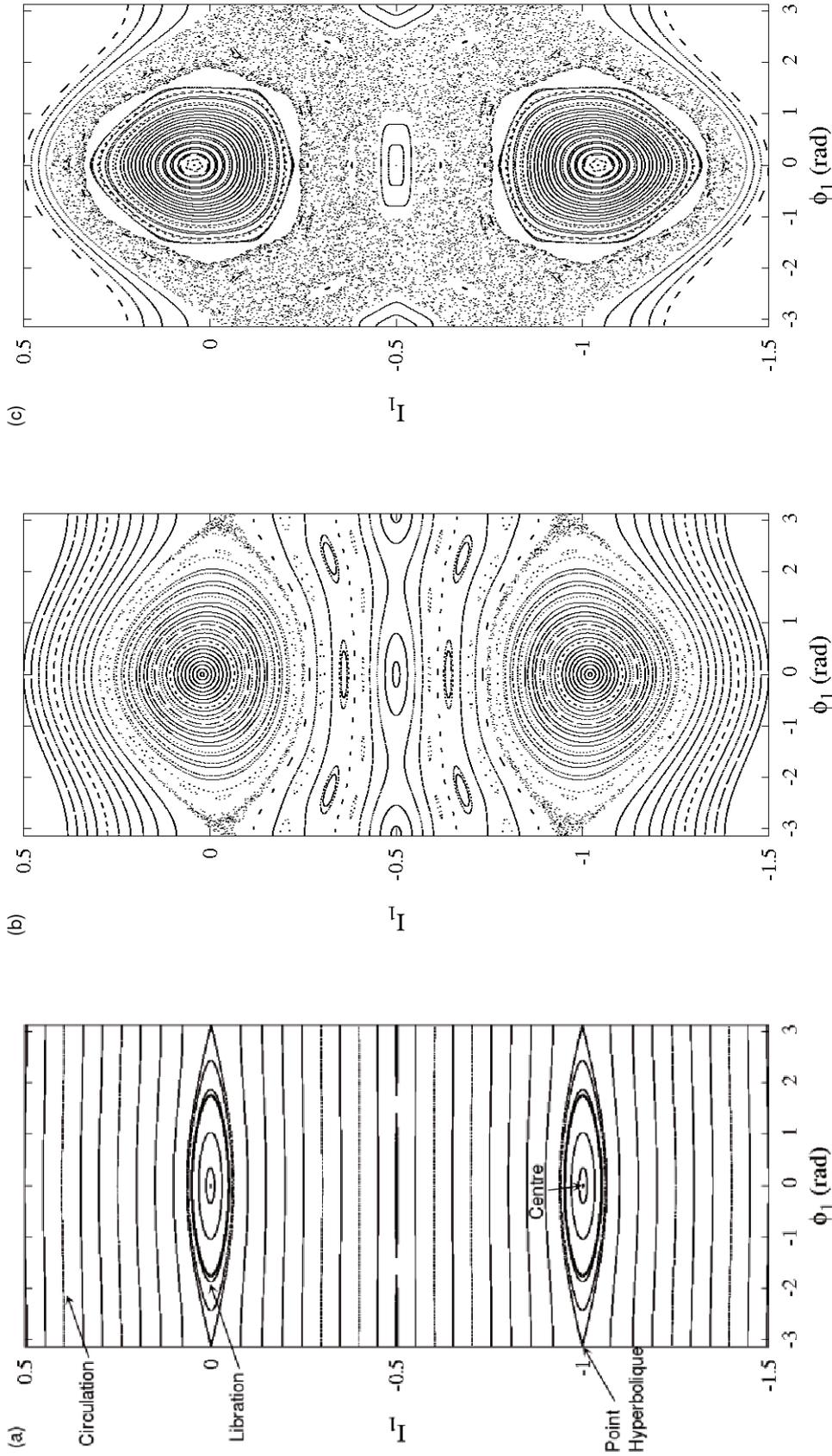


FIG. E.1 – Exemples de sections de Poincaré. Sous l'effet de différentes perturbations, les zones de libration et de circulation se déforment et du chaos apparaît. Ces figures proviennent du rapport de méthodologie (Boué & Gayon 2005) effectuée sous la direction de J. Laskar, au cours de ma deuxième année de Master, à l'Observatoire de Paris. Ces figures ont été obtenues par intégration symplectique de l'Hamiltonien suivant (dit du pendule perturbé) : $H(\phi_1, \phi_2, I_1, I_2) = A(I_1, I_2) + \alpha B(\phi_1, \phi_2)$ avec $A(I_1, I_2) = \frac{I_1^2}{2} + \omega I_2$ et la fonction perturbatrice $B(\phi_1, \phi_2) = \cos(\phi_1) + \epsilon \cos(\phi_1 + \phi_2)$. Les trois figures (a,b,c) se distinguent par des valeurs de α différentes : -0.001 , -0.02 et -0.04 respectivement, la plus forte perturbation étant obtenue pour $\alpha = -0.04$.

Annexe F

Liste des publications

- Bois E. & Gayon J., 2008, “A work on dynamical behaviors of Earth-like planets”, en préparation
- Gayon J. & Bois E., 2008a, “Are retrograde resonances possible in multi-planetary systems?”, *Astronomy & Astrophysics*, vol. 482, pp. 665-672
- Gayon J. & Bois E., 2008b, “Retrograde resonances in compact multi-planetary systems : a feasible stabilizing mechanism”, in : *Exoplanets : Detection, Formation and Dynamics*, J.S. Sun, S. Ferraz-Mello, & J.L. Zhou (Eds), *Cambridge University Press*, IAU Symposium vol. 249, pp. 511-516
- Gayon J. & Bois E., 2008c, “On fitting planetary systems in counter-revolving configurations”, *Astrophysical Journal Letters*, en préparation
- Gayon J., Bois E., & Scholl H., 2009, “Dynamics of planets in retrograde mean motion resonance”, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, accepté le 28/01/2009.
- Gayon J., Marzari F., & Scholl H., 2008, “Stable chaos in the 55 Cancri exoplanetary system?”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 389, L1-L3
- Gayon J., Scholl H., Marzari F., & Bois E., 2008, “Stability of a terrestrial planet in the habitable region of 55 Cancri”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Letters*, en préparation

Are retrograde resonances possible in multi-planet systems?*

J. Gayon and E. Bois

Nice Sophia-Antipolis University, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, Laboratoire Cassiopée, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France
e-mail: Julie.Gayon@oca.eu; Eric.Bois@oca.eu

Received 10 August 2007 / Accepted 7 January 2008

ABSTRACT

Context. Most multi-planetary systems are characterized by hot-Jupiters close to their central star, moving on eccentric orbits. From a dynamical point of view, compact multi-planetary systems form a specific class of the general N -body problem (where $N \geq 3$). Moreover, extrasolar planets are found in prograde orbits about their host star, and often in mean motion resonances (MMR).

Aims. In a first step, we study theoretically a new stabilizing mechanism suitable for compact two-planet systems. This mechanism involves counter-revolving orbits forming a retrograde MMR. In a second step, we investigate the feasibility of planetary systems hosting counter-revolving planets. Dynamical stability, observations, and formation processes of these systems are analyzed and discussed.

Methods. To characterize the dynamical behavior of multi-dimensional planetary systems, we apply our technique of global dynamics analysis based on the MEGNO indicator (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits) that provides the fine structure of the phase space. In a few cases of possible counter-revolving configurations, we carry out new fits to the observations using the Pikaia genetic algorithm. A statistical study of the stability in the neighborhood of different observed, planetary-systems is completed using a Monte-Carlo method.

Results. We analyse the observational data for the HD 73526 planetary system and find that counter-revolving configurations may be consistent with the observational data. We highlight the fine and characteristic structure of retrograde MMRs. We demonstrate that retrograde resonances open a family of stabilizing mechanisms involving new apsidal precession behaviors.

Conclusions. Considering two possible formation mechanisms (free-floating planet and Slingshot model), we conclude that counter-revolving configurations are feasible.

Key words. celestial mechanics – stars: planetary systems – methods: numerical

1. Introduction

At present, 271 extrasolar planets have been detected around 233 stars (both solar and non-solar type)¹. Among them, there are 25 multiple-planet systems: 17 two-planet systems (e.g. HD 82943, 47 UMa, HD 108874, HD 128311), 6 three-planet systems (e.g. ν And, HD 69830, Gliese 876, Gliese 581), 1 four-planet system (HD 160691) and more recently 1 five-planet system (55 CnC). Observations indicate that Mean Motion Resonances (MMR) frequently occur for planets of multiple-planet systems: Gliese 876 (e.g. Rivera et al. 2005), HD 82943 (e.g. Ji et al. 2003; Mayor et al. 2004) and HD 128311 (Vogt et al. 2005) are in 2:1 MMR, HD 202206 is in 5:1 MMR (Correia et al. 2005), while 47 UMa is close to a 7:3 (Fischer et al. 2002) or 8:3 commensurability (Fischer et al. 2003).

This work is devoted to compact multi-planetary systems, characterized by (a) giant Jupiter-like planets found close to their central star, and (b) high eccentricities. These two peculiarities lead to strong gravitational interactions between the planets and may result in an unstable, dynamical behavior. However, we observe many such planetary systems suggesting that they are stable, and raising the question of why they are stable. From a

dynamical point of view, compact multi-planetary systems form a specific class of the general N -body problem (with $N \geq 3$) whose analytical solutions are not necessarily known. A stability analysis of planetary systems, using numerical methods to explore multi-dimensional parameter space, typically leads to stability maps in which rare islands of stability can be identified amidst large chaotic zones. The underlying mechanisms for these stability zones must be identified.

In 2002, Kiseleva-Eggleton et al. (2002) showed that the currently-published, orbital parameters place the planetary systems HD 12661, HD 38529, HD 37124, and HD 160691 in very different situations from the point of view of dynamical distribution. Since this first study of the comparative stability of multi-planetary systems, many studies have been carried out in this direction. The role of the orbital mean motion resonances, in particular with a 2:1 ratio, has been intensively studied by several research groups (for example Hadjidemetriou 2002; Lee & Peale 2002, 2003; Bois et al. 2003; Ji et al. 2003; Ferraz-Mello et al. 2005b; Psychoyos & Hadjidemetriou 2005; Beaugé et al. 2006). As a result, it has been discovered that an extrasolar planetary system, even with large planetary masses and eccentricities, can be stable if planetary orbits are close to stable, resonant, and periodic orbits. It has also been established (see e.g. Chiang & Murray 2002; Lee & Peale 2002; Libert & Henrard 2006) that orbits in a large number of compact multi-planet systems,

* Movies are available in electronic form at <http://www.aanda.org>

¹ January, the 11th, 2008, <http://exoplanet.eu/catalog.php>

Table 1. Orbital parameters of the HD 73526 and HD 160691 planetary systems. Data come from Tinney et al. (2006) and McCarthy et al. (2004) respectively.

Planets	M_{star} (M_{\odot})	$m_p \sin i_i$ (M_J)	P (days)	a (AU)	e	ω (deg)	M (deg)
HD 73526b	1.08 ± 0.05	2.9 ± 0.2	188.3 ± 0.9	0.66 ± 0.01	0.19 ± 0.05	203 ± 9	86 ± 13
HD 73526c		2.5 ± 0.3	377.8 ± 2.4	1.05 ± 0.02	0.14 ± 0.09	13 ± 76	82 ± 27
HD 160691b	1.08 ± 0.05	1.67 ± 0.11	645.5 ± 3	1.50 ± 0.02	0.20 ± 0.03	294 ± 9	0
HD 160691c		3.10 ± 0.71	2986 ± 30	4.17 ± 0.07	0.57 ± 0.1	161 ± 8	12.6 ± 11.2

are locked in Apsidal Synchronous Precessions (ASP hereafter), i.e. that the apsidal lines precess, on average, at the same rate². A solution involving both MMRs and ASP describes well the stability of eccentric, compact multi-planetary systems, but may not however be unique. We note, for example, that other multi-planetary systems have been found to be mainly controlled by secular dynamics (cf. Michtchenko et al. 2006; Libert & Henrard 2006; Ji et al. 2007). In the present paper, we illustrate theoretically that other mechanisms can in addition provide the stability in multi-planetary systems.

In the case of the HD 73526 system (2:1 MMR), Tinney et al. (2006) found stability over 1 Myr. Based on the analytical classification of Hadjidemetriou (2002) established according to a hierarchy of masses and eccentricities, this system could instead be classified as unstable. Hadjidemetriou’s classification may however be too general to disprove the stability found by Tinney et al. (2006). Be that as it may, we use the same data as Tinney et al. (see Table 1) and our numerical method is outlined in the following section. Exploring the stability of the HD 73526 system in orbital parameter space, we find large chaotic regions. We find that the published data can even be described by a chaotic behavior. We note however that Tinney et al. (2006) used a different definition of stability³. Of course, we cannot exclude that the observational data were insufficient to allow a reliable orbital fit or the fit itself was not adequate. On the other hand, it is also possible that the underlying assumption of two prograde orbits is wrong. When placing one of the two planets on a retrograde orbit (which forms a system with counter-revolving planets), the stability region becomes very large. We will show below that this does not imply that the orbital fit is consistent with this stability zone. It implies that, in the neighborhood of the observational point, we can theoretically find stable solutions for counter-revolving configurations. To distinguish between two resonance cases when both planets are in prograde orbits, or when one planet is on a retrograde orbit, we call them prograde and retrograde resonances, respectively.

Presently, all known extrasolar planets in multiple systems are believed to revolve in the same direction about their corresponding central star. Most fitted, orbital elements are derived

² For the study of 3D, full 3-body problems, we introduced the terminology ASP, for expressing that the apsidal lines precess on average in a 3D space at the same rate: see Bois (2005); Bois et al. (2005). We note that in the planar case this phenomenon is also called “apsidal corotation” (ACR; Beaugé et al. 2003). In a number of papers, one may also find the incorrect expression “apsidal secular resonances” (ASR). ACR and ASP are in general not true secular resonances, as highlighted by Ferraz-Mello et al. (2005a).

³ In the paper of Tinney et al. (2006), the claim of stability is obtained from the dynamical behaviors of the resonant angles related to the 2:1 MMR, rather than by characterizations of quasi-periodicity of the orbital solution. Besides, the notion of stability is only presumed to be acquired by the simple absence of planet ejection. We use instead the usual definition of stability related to quasi-periodicity (see Sect. 2) and suitable for conservative dynamical systems.

by assuming prograde orbits. This is expected according to current theories for planetary formation in a circumstellar disk. In order to obtain a planet in retrograde resonance, an additional event is necessary such as violent, dynamical evolution of the planetary system, or a capture of the retrograde planet. In our Solar System, comets and the planetary satellites of Neptune, Saturn and Jupiter are known to have retrograde orbits. It is, therefore, important to investigate the stability of exoplanetary systems with a retrograde planet in particular if the observations do not yield a stable system when assuming all planets on prograde orbits.

In Sect. 2, we present our method of global dynamics analysis. We show that there exists theoretically initial conditions in the vicinity of observational data such that stability is only possible for a counter-revolving configuration. It raises the question of whether such a configuration is consistent with the observational data of a given system (Sect. 3). In Sect. 4, we focus on the statistical occurrence of stable solutions related to both prograde and retrograde resonances. This statistical approach is applied to three systems in 2:1 MMR and two systems in 5:1 MMR. If such systems harboring counter-revolving planets exist, we must also consider how they form: we discuss this issue in Sect. 5. By analyzing the parameter space in the vicinity of the best-fit of the HD 73526 planetary system, we highlight the fine structure of the 2:1 retrograde resonance (Sects. 6 and 7), and the nature of associated apsidal precessions (Sect. 8). In addition, we complete an analogous study for a theoretical system in 5:1 retrograde MMR (Sect. 9).

2. Method

In order to explore the stability in the parameter space of known exoplanetary system in the case of retrograde resonance, we use the MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits) method proposed by Cincotta & Simò (2000). This method provides relevant information on the global dynamics of multi-dimensional, Hamiltonian systems and the fine structure of their phase space (Cincotta et al. 2002). It simultaneously yields a good estimate of the Lyapunov Characteristic Numbers (LCN) with a comparatively small computational effort (Cincotta & Giordano 2000). It provides a clear picture of resonance structures, location of stable and unstable periodic orbits, as well as a measure of hyperbolicity in chaotic domains (i.e. the rate of divergence of unstable orbits). Using the MEGNO technique, we have built the MIPS (Megno Indicator for Planetary Systems) package specifically devoted to studying multi-dimensional planetary systems and their conditions of dynamical stability. We use the property of stability in the Poisson sense: stability is related to the preservation of a neighborhood related to the initial position of the trajectory. Moreover, in the Poincaré-Lyapunov sense applied to conservative systems, when quasi-periodic orbits remain confined within certain limits, they are called *stable*. We note that *chaotic*, in the Poincaré sense

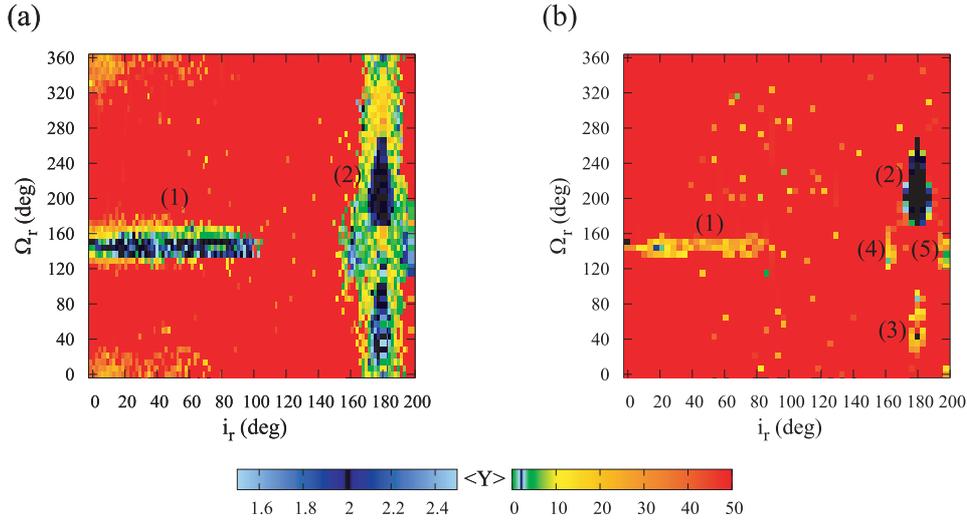


Fig. 1. Stability maps for the HD 73526 planetary system in the $[i_r, \Omega_r]$ parameter space. Panel **a**) is plotted with an integration time of 5000 yrs while panel **b**) is plotted over one order of magnitude longer, namely 50 000 years. One observes the disappearance of the stable island (1). Only the island (2) survives for longest timescales. Initial conditions come from the best fit of Tinney et al. (2006) (see Table 1). Relative inclinations and relative longitudes of nodes are defined as follows: $i_r = i_c - i_b$ and $\Omega_r = \Omega_c - \Omega_b$ (by convention, at $t = 0$, $\Omega_b = 0^\circ$ and $i_b = 0^\circ$). Resolution of the grid is 110×50 for panel **a**), 55×50 for panel **b**). Black and dark-blue colors represent highly stable orbits ($\langle Y \rangle = 2 \pm 3\%$ and $\langle Y \rangle = 2 \pm 5\%$ respectively, $\langle Y \rangle$ being the MEGNO indicator value) while warm colors refer to highly unstable orbits ($\langle Y \rangle \gg 2$).

means that the dynamical behavior is not quasi-periodic (according to the conventional definition used for conservative dynamical systems) and does not necessarily mean that the system will disintegrate during limited period of time. We have already successfully applied the MEGNO technique with the MIPS package to the study of dynamical stability of extrasolar planetary systems in a series of previous papers (see e.g. Bois et al. 2003, 2004). In the MIPS package, let us note that the $i_{b,c}$ inclination parameters refer to the dynamical, orbital-element independent of the $\sin i_l$ line-of-sight inclination factor⁴.

By applying the observational data of the HD 73526 planetary system (see Table 1)⁵, and scanning the non-determined elements, namely the i_r relative inclination ($i_r = i_c - i_b$) and the Ω_r relative longitude of nodes ($\Omega_r = \Omega_c - \Omega_b$), we find two main islands of stability, as shown in Fig. 1a. The first (1) is obtained for $i_r \in [8^\circ, 97^\circ]$, and the other (2) for very high relative inclinations, namely $i_r \in [173^\circ, 187^\circ]$. In this stability map, we highlight that stability does not allow coplanar prograde orbits.

The purpose of fast-chaos indicators, and in particular of MEGNO, is to predict dynamical behavior over a long timescale using short integration times. Our integration times do not mean *stability times* or *prediction limits* but, using the MEGNO indicator, they express the minimal times for knowing trajectory future. As a result of the principle of MEGNO, stability is generally acquired for timescales far longer than the integration times. The ratio of “prediction time” to “integration time” achieved by MEGNO, is optimal.

The MIPS maps presented in this paper were confirmed by a second global analysis technique (e.g. Marzari et al. 2006),

⁴ In the present paper, masses of planets remain untouched whatever the mutual inclinations may be. Our reference frame is related to the planetary system itself, then dynamically autonomous relative to observations. Moreover, scanning the phase space, our stability maps express the variations of two explicit parameters, without implicit and external relations.

⁵ with in addition at $t = 0$, $\Omega_b = \Omega_c = 0$, $i_b = 0$, and $i_c = 1^\circ$ (because of gravitational interactions of the whole 3-body problem, the relative inclination $i_r = i_c - i_b \neq 0$ is then free to evolve in a 3D space).

based on Laskar’s (1993) Frequency Map Analysis (FMA). The FMA method uses the diffusion rates of intrinsic frequencies as a measure for stability. The numerical values of these frequencies are provided by this method. The lowest intrinsic frequencies determine the necessary integration time. It is, therefore, possible that the FMA method requires longer integration times than MEGNO.

While the necessary integration time for FMA is provided by the lowest intrinsic frequency, one is a priori free to choose the time when applying MEGNO. The advantage is that a shorter integration time can be used. On the other hand, there is an uncertainty about the good choice of the integration time which might be too short. We, therefore, produce maps at different instant of times and consider the evolution of the most stable regions. Figures 1a and b show newly-obtained $[i_r, \Omega_r]$ maps for the HD 73526 system at 5000 and 50 000 years respectively. While the first island (1) of Fig. 1a completely disappears in Fig. 1b, the second one remains always highly stable. Continuing in time, island (2) persists. We also find three very small stable islands (3)–(5). One of the islands (3) is separated by 180° in Ω_r from the center of the large island (2). The two other islands, (4) and (5), are distributed symmetrically with respect to the islands (2) and (3). As a consequence, due to the lifetime and size of each stability zone, the large island (2) with $i_r \in [173^\circ, 187^\circ]$ and $\Omega_r \in [173^\circ, 266^\circ]$ contains the most stable orbits (i.e. the least “model dependent” on added perturbations)⁶. This does not necessarily imply that the two observational planets of the HD 73526 system are *counter-revolving planets*⁷. As a consequence, we study in the following section whether such a counter-revolving configuration is consistent with observational data.

⁶ Let us note that a relative inclination around 180° is equivalent to a planar problem where one planet has a retrograde motion with respect to the other. Therefore, considering a scale change of 180° in relative inclinations, we will use the notation $i_r^{\text{retro}} = 1^\circ$ instead of $i_r = 179^\circ$, in the following.

⁷ Counter-revolving planets mean that the orbital elements of the two planets are orbiting in opposite directions about the central star.

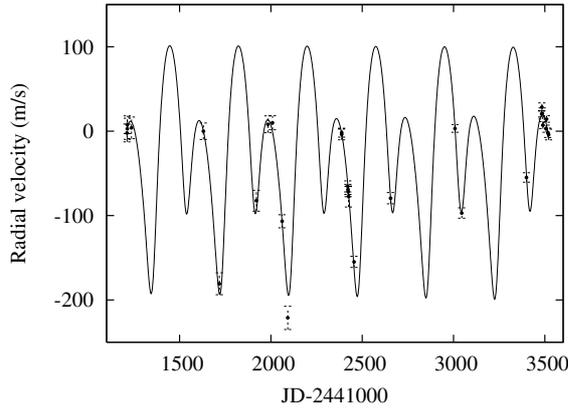


Fig. 2. Dynamical velocity fit with measured velocities of the HD 73526 planetary system. The best dynamical fit leading to a stable two-planet system is obtained for: $m_b = 2.4921 M_{\text{Jup}}$, $m_c = 2.5919 M_{\text{Jup}}$, $P_b = 187.935$ days, $P_c = 379.795$ days, $a_b = 0.6593$ AU, $a_c = 1.0538$ AU, $e_b = 0.2401$, $e_c = 0.2048$, $i_b = 0^\circ$, $i_c = 180^\circ$, $\Omega_b = 0^\circ$, $\Omega_c = 0^\circ$, $\omega_b = 184.569^\circ$, $\omega_c = 58.545^\circ$, $M_b = 97.297^\circ$, and $M_c = 221.361^\circ$. The velocity offset is: $V_0 = -25.201 \text{ m s}^{-1}$. The corresponding rms residuals are 6.34 m s^{-1} while the χ^2 reduced factor is equal to 1.257.

3. Observational data fits

Error-bars in published, orbital elements are significant and a fit including new observations may yield quite different orbital elements. By using different orbital elements that are consistent with observational data, Sándor et al. (2007) found stability for the coplanar and prograde case. On the one hand, for lowest values of χ^2 and rms ($\chi^2 = 1.57$ and rms = 7.9 m s^{-1} for the best dynamical fit of Tinney et al. 2006), we find a weak chaotic solution. On the other hand, Sándor et al. (2007) obtain four stable solutions but with values of χ^2 and rms somewhat higher than those of Tinney ($\chi^2 \in [1.58; 1.87]$ and rms $\in [8.04; 8.36]$). As a consequence, the right astrometric characterization of the HD 73526 planetary system still remains open.

We have performed orbital fits for counter-revolving configurations using a genetic algorithm (called Pikaia; see Charbonneau 1995) based on a fitting method⁸. We find stable retrograde solutions for values of χ^2 and rms smaller than the prograde fits of Tinney et al. (2006) and Sándor et al. (2007) ($\chi^2 = 1.257$ and rms = 6.34 m s^{-1}). The radial velocity curve of the best stable fit is shown in Fig. 2. It is very similar to the radial velocity curve given by Tinney et al. (2006) and Sándor et al. (2007). As a consequence, we point out that the possibility of counter-revolving planets should not be discarded in observational-data fits.

Nevertheless, whatever the directions of motions of the two planets are, the χ^2 values are significantly above the expected value of 1.0. More observations would enable better fits to be derived. However in these conditions, the possibility may not be excluded that the HD 73526 planetary system is a counter-revolving system. Anyway, the counter-revolving configuration related to the HD 73526 planetary system is consistent with the observational data. From a dynamical point of view, counter-revolving orbits are all the more plausible because they have larger highly stable regions.

Table 2. Statistical results about possibility of stable systems to be in retrograde resonance. 1000 random systems have been integrated in their errors bars and assuming prograde coplanar orbits or retrograde ones. The number of stable systems is indicated in each case. Data come from Tinney et al. (2006), Mayor et al. (2004), Vogt et al. (2005), McCarthy et al. (2004) and Correia et al. (2005; Table 4) respectively.

System sources	Period ratio	Prograde MMR	Retrograde MMR
HD 73526	2/1	17	500
HD 82943	2/1	755	1000
HD 128311	2/1	249	137
HD 160691	5/1	0	320
HD 202206	5/1	0	631

4. Statistical approach

By integrating 1000 random systems (according to a Monte-Carlo method) within the error-bars proposed by Tinney et al. (2006), we obtain statistically more stable solutions for coplanar counter-revolving orbits than for prograde ones. For prograde coplanar orbits, we find only 17 stable systems while for counter-revolving coplanar orbits, we obtain 500 stable systems.

The occurrence of stable counter-revolving systems also appears in the neighborhood of other two-planet systems. The statistical results for their stability in the prograde case and in the counter-revolving one are presented in Table 2 for two additional 2:1 and two 5:1 resonance cases. In all cases, a significant number of stable systems in retrograde resonances is found. The high statistical occurrence of stable retrograde configurations justifies the study of such solutions, whether or not they correspond at present to observational data. On the other hand, we are well aware of the cosmogonic problem for obtaining planets in retrograde resonances within the frame of current theories of planetary formation. During the early dynamical evolution of planetary systems, planets may end up on retrograde orbits (as discussed in the following section).

5. Formation of counter-revolving planets

Up to now, few works have been carried out on the formation of highly-inclined or counter-revolving orbits. For instance, Thommes & Lissauer (2003) showed that a planetary migration leading to resonance capture in 2:1 MMR may cause a significant increase in the mutual inclinations of the planets. However, the resulting configuration never seems to exhibit retrograde motions. That is why, in this section, we propose two novel mechanisms of formation of counter-revolving configurations.

It has been known for a few years that free-floating planetary-mass objects have been located in interstellar space (see for instance Zappatero Osorio et al. 2000; and Lucas et al. 2005). These free-floating planets may interact with planetary systems in their host cluster; they are either scattered or captured. The recent studies of Varvoglis (2008) show that by integrating the trajectories of planet-sized bodies that encounter a coplanar, two-body system (a Sun-like star and a Jupiter mass), the probability of capture is significant, and almost half of the temporary captures are found to be of the counter-revolving type. Although captures of free-floating planets remain speculative, this could be a feasible mechanism for generating counter-revolving orbits.

Forming close-in planets by using the slingshot model revisited by Nagasawa et al. (2008) is another possibility. Starting from a hierarchical 3-planet system and considering a migration mechanism including process of planet-planet scattering

⁸ Orbital fitting process are notably explained in Beaugé et al. (2007).

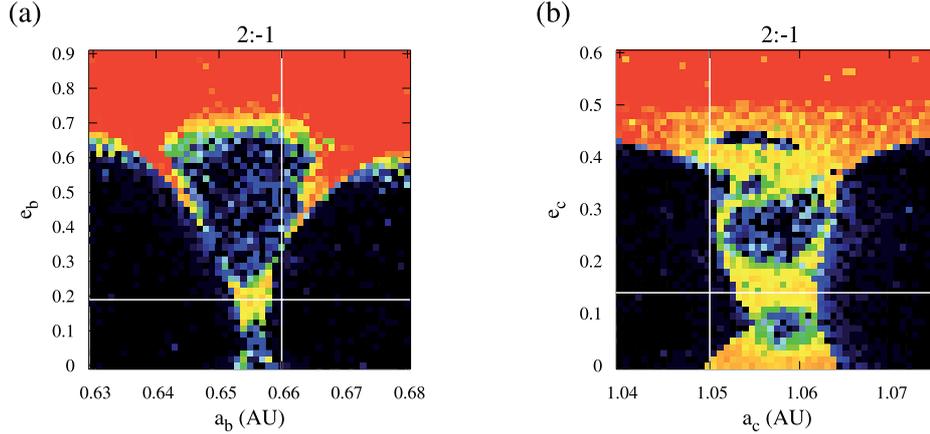


Fig. 3. Stability maps in the $[a_b, e_b]$ and $[a_c, e_c]$ parameter spaces based on the HD 73526 planetary system, taking into account initial conditions (C) ($i_r^{\text{retro}} = 1^\circ$ and $\Omega_r = 216^\circ$). Color scale is the same as in Fig. 1. Resolution of the grid is 50×50 . The pseudo-observational point is indicated by the intersection of horizontal and vertical lines. V-shape structures correspond to the 2:1 retrograde MMR (2:-1 MMR).

and tidal circularization, the authors show indeed that close-in planets may be formed. In a few cases, due to the Kozai mechanism (involving exchanges between eccentricities and inclinations), one planet enters a retrograde motion.

Considering (1) these two feasible mechanisms of formation of counter-revolving orbits, (2) the dynamical fit obtained in Sect. 3, and (3) the statistical occurrence of retrograde solutions (Sect. 4), we may say that counter-revolving theoretical configurations are serious candidates for real systems (that could be observed later). In the future, we will study these two formation processes more deeply. In the following sections, we focus on the specific dynamical behavior of systems harboring counter-revolving planets.

6. Fine structure of the resonance

Due to the retrograde motion of planet c^9 , the orbital resonance of a given planetary system (e.g. the HD 73526 planetary system) is called a 2:1 retrograde MMR (that we also annotate as a 2:-1 MMR). Studying the fine structure of this MMR provides a key to understand the stability of the system. We assume initial conditions taken from the stability island (2) of the $[i_r, \Omega_r]$ map (Fig. 1b), that is to say the elements of Table 1 and in addition $\Omega_r = 216^\circ$ and $i_r^{\text{retro}} = 1^\circ$. This set of initial conditions is noted (C)¹⁰. We then obtain the two $[a_b, e_b]$ and $[a_c, e_c]$ stability maps presented in Fig. 3. The presence of a strong MMR generates clear instability zones with a prominent V-shape structure in Fig. 3a. We note the narrowness of the V-shapes, approximately 0.006 AU wide for the inner orbit (when $e_b = 0$) and 0.0015 AU wide for the outer one (when $e_c = 0$). As a comparison, V-shape structures of the Sun-Jupiter-Saturn system are five times and twice as large respectively (for Jupiter and Saturn). We note in addition how the pseudo-observational point lies at the edge of the V-shapes (Fig. 3).

⁹ By convention, the orbital plane of the planet b is chosen as a reference plane. The planet b is supposed moving in the prograde direction while the planet c in the retrograde direction. Results remain analogous with the reverse assumption (b retrograde and c prograde).

¹⁰ For $\Omega_r = 216^\circ$ and $i_r^{\text{retro}} = 1^\circ$, the value of χ^2 obtained with the velocity offset $V_0 = -38 \text{ m s}^{-1}$ is 2.44. The rms residuals are 12.31.

7. Evidence for a retrograde resonance

Maps for extrasolar-planet systems, with stability regulated by a prograde MMR, are characterized by small islands of stability (or linear stable strips in $[a_b, a_c]$ maps) inside large zones of instability. By contrast, in the case of retrograde resonance and when assuming the initial conditions (C), we detect a dense, stable regime in a series of maps (e.g. $[a_b, a_c]$), except for one unstable zone related to the MMR. In several cases of resonant prograde systems, it has been shown that planets on highly stable orbits may avoid close approaches due to their adequate positions over their orbits and apsidal line locking (see Bois et al. 2003). This mechanism of stability is not lost during the dynamical evolution of the system when the apsidal lines on average precess at the same rate (i.e. the ASP phenomenon). Without such a protection mechanism of 2:1 MMR combined to an ASP, disturbing close approaches between the planets are theoretically possible in various planet positions. In the case of the 2:1 retrograde MMR, one planet being retrograde, orbital motions occur then in opposite directions. As a consequence, the length of time that planets spend in conjunction, is much shorter for counter-revolving orbits than for prograde ones. This could explain the narrowness of the V-shapes in Fig. 3.

In Gayon & Bois (2008), we showed that, in cases of very compact planetary systems obtained by a scale reduction of a given observed system, “retrograde” stable islands survive, in contrast to “prograde” ones that disappear. This scale reduction and the V-shapes of Fig. 3 illustrate the efficiency of retrograde MMRs for providing stability. In addition, this MMR mechanism is coupled to specific behaviors of the apsidal lines, as shown in the following section.

8. A new mechanism of apsidal precession at retrograde resonance

In the case of the 2:1 retrograde MMR (2:-1 MMR), the expressions for the resonance angles θ_1 and θ_2 , and the ASP angle θ_3 are:

$$\theta_1 = -\lambda_b - 2\lambda_c + 3\tilde{\omega}_b$$

$$\theta_2 = -\lambda_b - 2\lambda_c + 3\tilde{\omega}_c$$

$$\theta_3 = 3(\tilde{\omega}_b - \tilde{\omega}_c)$$

where λ is the mean longitude, and $\tilde{\omega}$ is the apsidal longitude, defined by $\lambda = M + \tilde{\omega}$ and $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$ respectively, for prograde

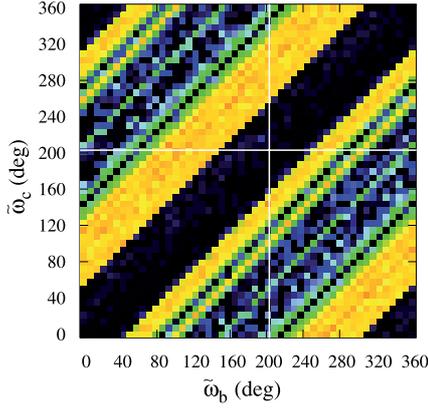


Fig. 4. Stability map in the $[\tilde{\omega}_b, \tilde{\omega}_c]$ parameter space based on the HD 73526 planetary system taking into account initial conditions (C) ($i_r^{\text{retro}} = 1^\circ$ and $\Omega_r = 216^\circ$). The pseudo-observational point is inside the stability linear strip. Color scale is the same as in Fig. 1. Resolution of the grid is 50×50 .

orbital motion of a planet; for retrograde motion, these variables are defined to be: $\lambda = -M + \tilde{\omega}$ and $\tilde{\omega} = \Omega - \omega$. The general expression for the relative apsidal longitude is: $\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_b - \tilde{\omega}_c = \theta_3/q$, where q is the order of the resonance. A more thorough investigation of retrograde resonances, using an analytical approach, is in preparation (Gayon et al. 2008).

In Fig. 4 we plot the $[\tilde{\omega}_b, \tilde{\omega}_c]$ parameter space that shows a stable linear strip, in dark-blue, including the “pseudo-observational” point. We learn that stable solutions are possible only when $\tilde{\omega}_b$ and $\tilde{\omega}_c$ precess, on average, at the same rate. The stabilizing mechanism of the system involves a synchronous precession of the apsidal lines. The two longitudes of periastron do not precess however in the same direction. The outer orbit is affected by a retrograde precession ($-\tilde{\omega}_c$) relative to the inner orbit’s precession ($\tilde{\omega}_b$) (see Figs. 5c vs. b). Writing the longitudes of periastron as directed angles, we find that the relative apsidal longitude $\Delta\tilde{\omega}$ neither circulates nor librates clearly, as shown in Fig. 5a. $\Delta\tilde{\omega}$ presents a strange motion composed of: (1) a phase of prograde circulation including librations with amplitudes of $\pm 8^\circ$, then following a sharp reversal of circulation direction, (2) a phase of fast retrograde circulation, until a second, sharp reversal. These two phases alternate successively according to alternations (or rocking) of 180° , which correspond to a sort of cusp¹¹. We note that $\tilde{\omega}_c$, in contrast to the case for $\tilde{\omega}_b$, does not *uniformly* circulate but presents retrograde circulation phases interrupted with short libration intervals (Figs. 5c vs. b). In spite of the opposite directions of their precession, both orbits precess, on average, at the same rate. As a consequence, the planetary system is affected by an apsidal synchronous precession. Considering the alternating behavior of the $\Delta\tilde{\omega}$ angle or the unusual presence of cusp in the $\Delta\tilde{\omega}$ behavior, we refer to this new stabilizing factor as either an *alternating* ASP, or a *rocking* ASP (or RASP). We have produced movies illustrating the mechanisms introduced in the present paper, in particular the phenomenon of RASP¹².

¹¹ At phase transitions, a scattering of dots appears. When the outer-orbit eccentricity goes to zero, the $\tilde{\omega}_c$ angle that depends on the $(a-r)/ae$ ratio is not defined.

¹² Movies are downloadable from: http://www.oca.eu/gayon/Extrasolar/Retro_MMR/movies.html and <http://www.aanda.org>

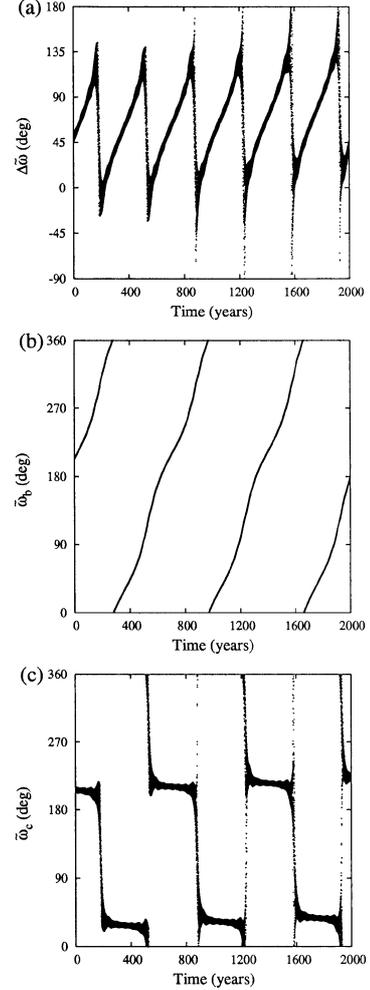


Fig. 5. Time variation of the $\Delta\tilde{\omega}$ angle **a**), $\tilde{\omega}_b$ **b**), and $\tilde{\omega}_c$ **c**) for initial conditions (C). In panel **b**), the slope of $\tilde{\omega}_b$ is positive while the one of $\tilde{\omega}_c$ (panel **c**) is negative. Panel **a**) expresses the behavior of the $\Delta\tilde{\omega}$ combination of $\tilde{\omega}_b$ and $\tilde{\omega}_c$ (see text).

Relations between the eccentricity of the inner orbit and the $\Delta\tilde{\omega}$ angle exist. In $[\Delta\tilde{\omega}, e_b]$ parameter space, we can see from Fig. 6 how the 2:1 retrograde MMR spreads out its resources:

- (1) Inside the 2:-1 MMR (i.e. inside the $[a, e]$ V-shape), both apsidal lines on average precess at the same rate and in the same prograde direction. The 2:1 retrograde MMR is then combined with a uniformly *prograde* ASP (island (1)).
- (2) Close to the 2:-1 MMR (i.e. outside but close to the $[a, e]$ V-shape), both apsidal lines on average precess at the same rate but in opposite directions. The 2:1 retrograde *near*-MMR is combined with the mechanism of *rocking* ASP (island (2)).
- (3) The division between these two islands is related to the degree of closeness to the 2:1 retrograde MMR. We highlight the fact that, for a long timescale, the third island in the $[\Delta\tilde{\omega}, e_b]$ map, is proved to be a *chaotic* zone (island (3) where $\Delta\tilde{\omega} \in [80^\circ, 280^\circ]$).

We note that a mechanism of stability involving an ASP may persist far from the MMR in the prograde case, while it disappears for short distance to the MMR in the counter-revolving case. Hence, moving away from the $[a, e]$ V-shape of the 2:-1 MMR

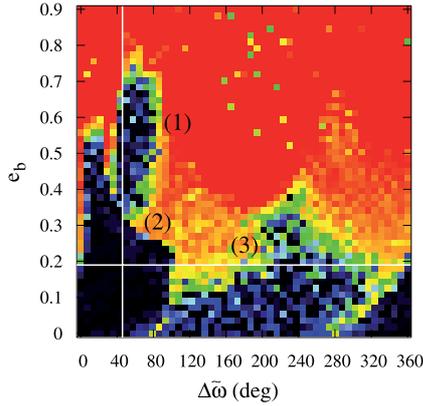


Fig. 6. Stability map in the $[\Delta\tilde{\omega}, e_b]$ parameter space based on the HD 73526 planetary system, taking into account initial conditions (C) (Table 1 with in addition $i_r^{\text{etro}} = 1^\circ$). The pseudo-observational point is inside the stability large island (2) characterized by a 2:1 retrograde near-resonance and an alternating ASP. Color scale is the same as in Fig. 1. Resolution of the grid is 50×50 .

(Fig. 3), we find that both apsidal lines precess in opposite directions but at different rates.

By studying the parameter-space in the vicinity of the best-fit of the HD 73526 planetary-system and searching for stable configurations with similar values of rms, a new, theoretical mechanism of stability has been discovered. It is characterized by a 2:1 retrograde, near-MMR combined to a rocking ASP. Such a stability also allows a large range of eccentricities (see for instance planet b in Fig. 6). Such a mechanism is particularly robust on large timescales. It is why such mechanisms involving such resources of the 2:-1 orbital resonance could prove to be relatively generic and suitable for the stability of a class of compact multi-planetary systems where other solutions of the 3-body problem are not possible.

9. The 5:1 retrograde MMR

The mechanism of stability involving both a retrograde MMR and an ASP is also found for the 5:1 orbital period ratio by scanning initial conditions in the vicinity of the HD 160691 planetary system (McCarthy et al. 2004, planets b and c, see Table 1). By detecting a fourth planet, we note that new observations of this system have modified the orbital structure of the entire system (Pepe et al. 2007). The observations of Pepe et al. (2007) show furthermore that a new coplanar fit of prograde orbits and a new fourth planet seems to solve the problem without the need for retrograde resonance. We note that in the vicinity of the best fit solution of McCarthy et al. (2004), it is possible to find an example of 5:1 retrograde resonance. We consider this possibility as an academic investigation of this order of MMR.

The important point is that this 3-body system is completely unstable for prograde orbits. Nevertheless, by scanning the non-determined parameter space, only one island of stability exists (for $i_r \in [156^\circ, 204^\circ]$ and $\Omega_r \in [7^\circ, 180^\circ]$) and after an analysis we highlight the retrograde motion of the outer planet. Moreover, scanning the $[\Delta\tilde{\omega}, e_b]$ parameter space of the system in 5:1 retrograde MMR, as for the HD 73526 planetary system in 2:1 retrograde MMR, we observe the distribution of the different apsidal behaviors (see Fig. 7). Islands (1) and (3) are characterized by an ASP with an apsidal alignment. More precisely, both longitudes of periastron ($\tilde{\omega}_b$ and $\tilde{\omega}_c$) on average precess at the same rate, both in the retrograde direction, while the

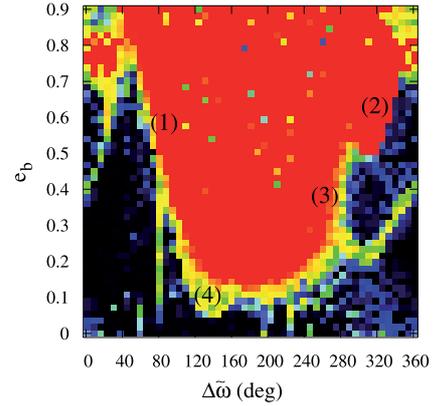


Fig. 7. Stability map in the $[\Delta\tilde{\omega}, e_b]$ parameter space based on the HD 160691 planetary system (data from McCarthy et al. (2004) shifted to the 5:1 retrograde MMR (i.e. $a_b = 1.44$ AU), see Table 1 with in addition $i_r^{\text{etro}} = 1^\circ$). Islands (1) and (3) are characterized by a 5:-1 MMR and an ASP with apsidal alignment while islands (2) and (4) by an 5:-1 MMR and a circulation of the $\Delta\tilde{\omega}$ variable. Color scale is the same as in Fig. 1. Resolution of the grid is 50×50 .

$\Delta\tilde{\omega}$ variable librates about 0° : it is a uniformly *retrograde* ASP. Within islands (2) and (4), $\tilde{\omega}_b$ and $\tilde{\omega}_c$ precess in opposite directions but according to different rates: $\Delta\tilde{\omega}$ circulates. Hence, no apsidal line locking is required for stability. We find fine, V-shape structures in $[a, e]$ maps corresponding to the 5:1 retrograde MMR. The width is 0.02 AU for the inner planet (when $e_b = 0$) and only 0.002 AU for the outer one (when $e_c = 0$). Consequently, the dynamical study of this case derived from the HD 160691 planetary system allows us to find another theoretical possibility of stability involving resources of a retrograde MMR.

10. Conclusion

We have found novel mechanisms giving rise to stability that could be suitable for a class of compact planetary systems. Such mechanisms involve counter-revolving orbits forming a retrograde MMR occurring in a quasi-identical plane. High statistical occurrence of stable counter-revolving orbits is found. Our study of retrograde MMRs indicates the large stability domains and the specific behaviors of the precession and resonant angles. We propose that these large stability domains are caused by close approaches much faster and shorter for counter-revolving configurations than for the prograde ones. Scanning the HD 73526 planetary system, we find evidence for a new type of apsidal precession (the rocking ASP). We find that the difference between the longitudes of periastron reveals a specific alternation mode at retrograde resonances. We emphasize that the counter-revolving configuration studied for the HD 73526 planetary system is consistent with the observational data. Free-floating planets or the Slingshot model might explain the origin of such counter-revolving systems.

Acknowledgements. We thank Alessandro Morbidelli, Makiko Nagasawa, Hans Scholl, and Charalampos Varvoglis for useful discussions. We particularly thank Cristián Beaugé for providing us a code performing orbital fits and, as a referee, for very constructive comments that greatly helped to improve the paper.

References

- Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2003, *ApJ*, 593, 1124
 Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2006, *MNRAS*, 365, 1160

- Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2007, in *Exoplanets*, ed. R. Dvorak (Wiley-VCH), 1
- Bois, E. 2005, ESA Science Requirements Document, to be appeared
- Bois, E., Kiseleva-Eggleton, L., Rambaux, N., & Pilat-Lohinger, E. 2003, *ApJ*, 598, 1312
- Bois, E., Rambaux, N., Kiseleva-Eggleton, L., & Pilat-Lohinger, E. 2004, *ASP Conf. Proc.* 321, ed. J. P. Beaulieu, A. Lecavelier des Etangs, & C. Terquem, 349
- Bois, E., Rambaux, N., Kiseleva-Eggleton, L., & Pilat-Lohinger, E. 2005, 1st ISSI Team Meeting, in *Evolution of habitable planets*, ed. H. Lammer, in press
- Charbonneau, P. 1995, *ApJS*, 101, 309
- Chiang, E. I., & Murray, N. 2002, *ApJ*, 576, 473
- Cincotta, P., & Simó, C. 2000, *A&AS*, 147, 205
- Cincotta, P., & Giordano, C. 2000, *Advances in Space Dynamics 2: Applications in Astronomy*, ed. O. C. Winter, & A. F. B. A. Prado (São José dos Campos: Inst. Nac. Pesquisas Espaciais), 237
- Cincotta, P., Giordano, C., & Simó, C. 2002, *Physica D*, 182, 151
- Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., et al. 2005, *A&A*, 440, 751
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, C., & Callegari, N. 2005a, *Lecture Notes Phys.*, 683, 219
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., & Beaugé, C. 2005b, *ApJ*, 621, 473
- Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Laughlin, G., & Vogt, S. S. 2002, *ApJ*, 564, 1028
- Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., et al. 2003, *ApJ*, 586, 1394
- Gayon, J., & Bois, E. 2008, *Exoplanets: detection, formation and dynamics: Proceeding of the 249th Symposium of the International Astronomical Union*, Cambridge University Press, ed. Y. S. Sun, S. Ferraz-Mello, & J. L. Zhou, to be appeared
- Gayon, J., Bois, E., & Scholl, H. 2008, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, Special Issue: Theory and Applications of Dynamical Systems, submitted
- Hadjidemetriou, J. D. 2002, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 83, 141
- Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., Li, G., & Nakai, H. 2003, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 87, 113
- Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., & Li, G. 2007, *ApJ*, 657, 1092
- Kiseleva-Eggleton, L., Bois, E., Rambaux, N., & Dvorak, R. 2002, *ApJ*, 578, L145
- Laskar, J. 1993, *Physica D*, 67, 257
- Lee, M. H., & Peale, S. J. 2002, *ApJ*, 567, 596
- Lee, M. H., & Peale, S. J. 2003, *ApJ*, 592, 1201
- Libert, A. S., & Henrard J. 2006, *Icarus*, 183, 186
- Lucas, P. W., Roche, P. F., & Tamura, M. 2005, *MNRAS*, 361, 211
- Marzari, F., Scholl, H., & Tricarico, P. 2006, *A&A*, 453, 341
- Mayor, M., Udry, S., Naef, D., et al. 2004, *A&A*, 415, 391
- McArthur, B. E., Endl, M., Cochran, W. D., et al. 2004, *ApJ*, 614, L81
- McCarthy, C., Butler, R. P., Tinney, et al. 2004, *ApJ*, 617, 575
- Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., & Beaugé, C. 2006, *Icarus*, 181, 555
- Nagasawa, M., Ida, S., & Bessho, T. 2008, *ApJ*, accepted [arXiv:0801.1368v1]
- Pepe, F., Correia, A. C. M., Mayor, M., et al. 2007, *A&A*, 462, 769
- Psychoyos, D., & Hadjidemetriou, J. D. 2005, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 92, 135
- Rivera, E. J., Lissauer, J. J., Butler, R. P., et al. 2005, *BAAS*, 37, 1487
- Sándor, Z., Kley, W., & Klagyivik, P. 2007, *A&A*, 472, 981
- Thommes, E. W., & Lissauer, J. J. 2003, *ApJ*, 597, 566
- Tinney, C. G., Butler, R. P., Marcy, G. W., et al. 2006, *ApJ*, 647, 594
- Varvoglis, C. 2008, *Exoplanets: detection, formation and dynamics: Proceeding of the 249th Symposium of the International Astronomical Union* (Cambridge University Press), ed. Y. S. Sun, S. Ferraz-Mello, & J. L. Zhou, to be appeared
- Vogt, S. S., Butler, R. P., Marcy, G. W., et al. 2005, *ApJ*, 632, 638
- Zapatero Osorio, M. R., Béjar, V. J. S., Martín, E. L., et al. 2000, *Science*, 290, 103

Retrograde resonances in compact multi-planetary systems: a feasible stabilizing mechanism

Julie Gayon and Eric Bois

Université Nice Sophia-Antipolis, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur,
Laboratoire Cassiopée, B.P. 4229, F-06304 Nice Cedex 4, France
email: julie.gayon@oca.eu - eric.bois@oca.eu

Abstract. Multi-planet systems detected until now are in most cases characterized by hot-Jupiters close to their central star as well as high eccentricities. As a consequence, from a dynamical point of view, compact multi-planetary systems form a variety of the general N -body problem (with $N \geq 3$), whose solutions are not necessarily known. Extrasolar planets are up to now found in prograde (i.e. direct) orbital motions about their host star and often in mean-motion resonances (MMR). In the present paper, we investigate a theoretical alternative suitable for the stability of compact multi-planetary systems. When the outer planet moves on a retrograde orbit in MMR with respect to the inner planet, we find that the so-called retrograde resonances present fine and characteristic structures particularly relevant for dynamical stability. We show that retrograde resonances and their resources open a family of stabilizing mechanisms involving specific behaviors of apsidal precessions. We also point up that for particular orbital data, retrograde MMRs may provide more robust stability compared to the corresponding prograde MMRs.

Keywords. celestial mechanics, planetary systems, methods: numerical, statistical

1. Introduction

To identify the dynamical state of multi-planetary systems, we use the MEGNO technique (the acronym of Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits; Cincotta & Simò 2000). This method provides relevant information about the global dynamics and the fine structure of the phase space, and yields simultaneously a good estimate of the Lyapunov Characteristic Numbers with a comparatively small computational effort. From the MEGNO technique, we have built the MIPS package (acronym of Megno Indicator for Planetary Systems) specially devoted to the study of planetary systems in their multi-dimensional space as well as their conditions of dynamical stability.

Particular planetary systems presented in this paper are only used as initial condition sources for theoretical studies of 3-body problems. By convention, the reference system is given by the orbital plane of the inner planet at $t = 0$. Thus, we suppose the orbital inclinations and the longitudes of node of the inner (noted 1) and the outer (noted 2) planets (which are non-determined parameters from observations) as follows : $i_1 = 0^\circ$ and $\Omega_1 = 0^\circ$ in such a way that the relative inclination and the relative longitude of nodes are defined at $t = 0$ as follows : $i_r = i_2 - i_1 = i_2$ and $\Omega_r = \Omega_2 - \Omega_1 = \Omega_2$. The MIPS maps presented in this paper have been confirmed by a second global analysis technique (Marzari *et al.* 2006) based on the Frequency Map Analysis (FMA; Laskar 1993).

2. Fine structure of retrograde resonance

Studying conditions of dynamical stability in the neighborhood of the HD 73526 two-planet system (period ratio: 2/1, see initial conditions in Table 1), we only find one stable and robust island (noted (2)) for a relative inclination of about 180° (see Fig. 2a). Such a relative inclination (where in fact $i_1 = 0^\circ$ and $i_2 = 180^\circ$) may be considered to a coplanar system where the planet 2 has a retrograde motion with respect to the planet 1. From a kinematic point of view, it amounts to consider a scale change of 180° in relative inclinations. Taking into account initial conditions inside the island (2) of Fig. 1a, we show that the presence of a strong mean-motion resonance (MMR) induces clear stability zones with a nice V-shape structure, as shown in Fig. 1b plotted in the $[a_1, e_1]$ parameter space. Let us note the narrowness of this V-shape, namely only about 0.006 AU wide for the inner planet (it is 5 times larger in the Jupiter-Saturn case). A similar V-shape structure is obtained in $[a_2, e_2]$ with about 0.015 AU wide. Due to the retrograde motion of the outer planet 2, this MMR is a 2:1 retrograde resonance, also noted 2:-1 MMR.

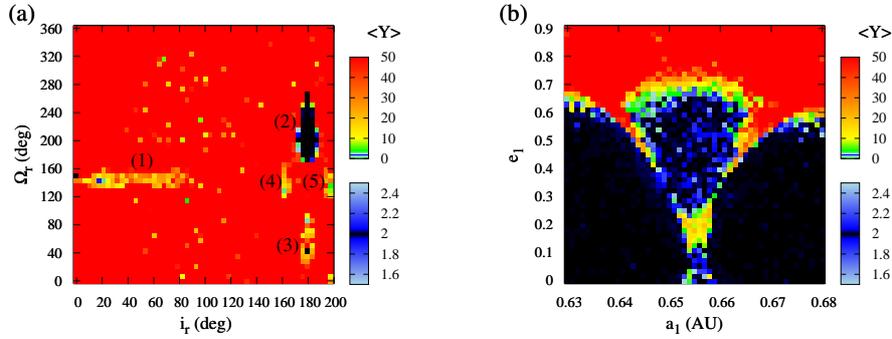


Figure 1. Panel (a): Stability map in the $[i_r, \Omega_r]$ non-determined parameter space of the HD 73526 planetary system (see Table 1). Panel (b): Stability map in the $[a_1, e_1]$ parameter space for initial conditions taken in the stable zone (2) of panel (a). Note that masses remain untouched whatever the mutual inclinations may be; they are equal to their minimal observational values. Black and dark-blue colors indicate stable orbits ($\langle Y \rangle = 2 \pm 3\%$ and $\langle Y \rangle = 2 \pm 5\%$ respectively with $\langle Y \rangle$, the MEGNO indicator value) while warm colors indicate highly unstable orbits.

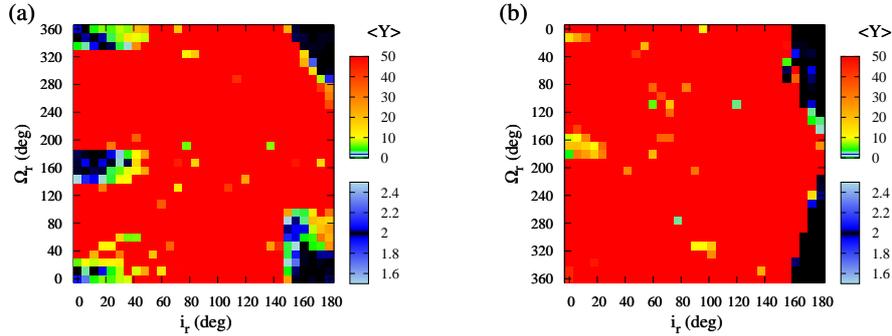


Figure 2. Stability maps in the $[i_r, \Omega_r]$ parameter space. Panel (a): initial HD 82943 planetary system (see Table 1). Panel (b): scale reduction of the HD 82943 planetary system according to a factor 7.5 on semi-major axes. Masses in Panel (a) and Panel (b) are identical. Color scale is the same as in Fig. 1.

3. Efficiency of retrograde resonances

Fig. 2 exhibits stability maps in the $[i_r, \Omega_r]$ parameter space considering a scale reduction of the HD 82943 planetary system (see Table 1) according to a factor 7.5 on semi-major axes (masses remaining untouched). The dynamical behavior of the reduced system (Fig. 2b) with respect to the initial one (Fig. 2a) points up the clear robustness of retrograde configurations contrary to prograde ones. The “prograde” stable islands completely disappear while only the “retrograde” stable island resists, persists and even extends more or less. Even for very small semi-major axes and large planetary masses, which should a priori easily make a system unstable or chaotic, stability is possible with counter-revolving orbits.

In the case of the 2:1 retrograde resonance, although close approaches happen more often (3 for the 2:-1 MMR) compared to the 2:1 prograde resonance, the 2:-1 MMR remains very efficient for stability because of faster close approaches between the planets. A more detailed numerical study of retrograde resonances can be found in Gayon & Bois (2008).

Elements	HD 73526	HD 82943	HD 128311	HD 160691	HD 202206
$M_{star} (M_{\odot})$	1.08 ± 0.05	1.15	0.84	1.08 ± 0.05	1.15
$m \sin i_l (M_J)$	2.9 ± 0.2 2.5 ± 0.3	1.85 1.84	1.56 ± 0.16 3.08 ± 0.11	1.67 ± 0.11 3.10 ± 0.71	17.4 2.44
a (AU)	0.66 ± 0.01 1.05 ± 0.02	0.75 1.18	1.109 ± 0.008 1.735 ± 0.014	1.50 ± 0.02 4.17 ± 0.07	0.83 2.55
e	0.19 ± 0.05 0.14 ± 0.09	0.38 ± 0.01 0.18 ± 0.04	0.38 ± 0.08 0.21 ± 0.21	0.20 ± 0.03 0.57 ± 0.1	0.435 ± 0.001 0.267 ± 0.021
ω (deg)	203 ± 9 13 ± 76	124.0 ± 3 237.0 ± 13	80.1 ± 16 21.6 ± 61	294 ± 9 161 ± 8	161.18 ± 0.30 78.99 ± 6.65
M (deg)	86 ± 13 82 ± 27	0 75.21 ± 1.96	257.6 ± 2.7 166 ± 2	0 12.6 ± 11.2	105.05 ± 0.48 311.6 ± 9.5

Table 1. Orbital parameters of the HD 73526, HD 82943, HD 128311, HD 160691 and HD 202206 planetary systems. Data sources come from Tinney et al. (2006), Mayor et al. (2004), Vogt et al. (2005), McCarthy et al. (2004) and Correia et al. (2005) respectively. For each system and each orbital element, the first line corresponds to the inner planet and the second one to the outer planet.

Data sources	Period ratio	Prograde MMR	Retrograde MMR
HD 73526	2/1	17	500
HD 82943	2/1	755	1000
HD 128311	2/1	249	137
HD 160691	5/1	ε	320
HD 202206	5/1	ε	631

Table 2. Statistical results. For each type of MMR (prograde or retrograde), 1000 random systems have been integrated in the error bars of each data source. The proportion of stable systems over 1000 is indicated in each case. ε designates a very small value that depends on the size of the random system size. Data sources come from Tinney et al. (2006), Mayor et al. (2004), Vogt et al. (2005), McCarthy et al. (2004) and Correia et al. (2005) respectively (see Table 1).

4. Occurrence of stable counter-revolving configurations

The occurrence of stable two-planet systems including counter-revolving orbits appears in the neighborhood of a few systems observed in 2:1 or 5:1 MMR. New observations frequently induce new determinations of orbital elements. It is the case for the HD 160691 planetary system given with 2 planets in McCarthy *et al.* (2004) then with 4 planets in Pepe *et al.* (2007). Hence, systems related to initial conditions used here (see Table 1) have to be considered as *academic* systems. Statistical results for stability of these academic systems are presented in Table 2, both in the prograde case ($i_r = 0^\circ$) and in the retrograde case ($i_r = 180^\circ$). For each data source, 1000 random systems taken inside observational error bars have been integrated. Among these random systems, the proportion of stable systems either with prograde orbits or with counter-revolving orbits is given in Table 2. In all cases, a significant number of stable systems is found in retrograde MMR. Moreover, in most data sources, retrograde possibilities predominate.

5. Resources of retrograde resonances

The 2:1 (prograde) MMRs preserved by synchronous precessions of the apsidal lines (ASPs) are from now on well understood (see for instance Lee & Peale 2002, Bois *et al.* 2003, Ji *et al.* 2003, Ferraz-Mello *et al.* 2005). The MMR-ASP combination is often very effective; however, ASPs may also exist alone for stability of planetary systems. Related to subtle relations between the eccentricity of the inner orbit (e_1) and the relative apsidal longitude $\Delta\tilde{\omega}$ (i.e. $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$), Fig. 3 permits to observe how the 2:1 retrograde MMR brings out its resources in the $[\Delta\tilde{\omega}, e_1]$ parameter space :

- In the island (1) (i.e. inside the $[a, e]$ V-shape of Fig. 1b), the 2:-1 MMR is combined with a uniformly prograde ASP (both planets precess on average at the *same rate* and in the *same prograde direction*).
- In the island (2) (i.e. outside but close to the $[a, e]$ V-shape of Fig. 1b), the 2:-1 *near*-MMR is combined with a particular apsidal behavior that we have called a *rocking* ASP (see Gayon & Bois 2008): both planets precess at the *same rate* but in *opposite directions*.
- The $[\Delta\tilde{\omega}, e_1]$ map also exposes a third island (3) that proves to be a wholly chaotic zone on long term integrations.

Let us note that the division between islands (1) and (2) is related to the degree of closeness to the 2:-1 MMR.

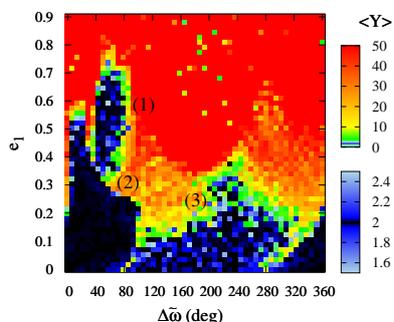


Figure 3. Stability map in the $[\Delta\tilde{\omega}, e_1]$ parameter space. A similar distribution of stable islands is obtained in $[\Delta\tilde{\omega}, e_2]$. Color scale and initial conditions are the same as in Fig. 1 with in addition the i_r and Ω_r values chosen in the island (2) of Fig. 1a.

6. Conclusion

We have found that retrograde resonances present fine and characteristic structures particularly relevant for dynamical stability. We have also shown that in cases of very compact systems obtained by scale reduction, only the "retrograde" stable islands survive. From our statistical approach and the scale reduction experiment, we have expressed the efficiency for stability of retrograde resonances. Such an efficiency can be understood by very fast close approaches between the planets although they are in greater number.

We plan to present an Hamiltonian approach of retrograde MMRs in a forthcoming paper (Gayon, Bois, & Scholl, 2008). Besides, in Gayon & Bois (2008), we propose two mechanisms of formation for systems harboring counter-revolving orbits. Free-floating planets or the Slingshot model might indeed explain the origin of such planetary systems.

In the end, we may conclude that retrograde resonances prove to be a feasible stabilizing mechanism.

Acknowledgements

We thank the anonymous referee for his comments that greatly helped to improve the paper.

References

- Bois, E., Kiseleva-Eggleton, L., Rambaux, N., & Pilat-Lohinger, E. 2003, *ApJ*, 598, 1312
- Cincotta, P. & Simó, C. 2000, *A&AS*, 147, 205
- Correia, A.C.M., Udry, S., Mayor, M., Laskar, J., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Santos, N.C. 2006, *A&A*, 440, 751
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, C., & Callegari, N. 2005, *Lecture Notes in Physics*, 683, 219
- Gayon, J. & Bois, E. 2008, *A&A*, accepted, [arXiv:0801.1089v2]
- Gayon, J., Bois, E., & Scholl, H. 2008, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Special Issue : "Theory and Applications of Dynamical Systems", to be submitted
- Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., Li, G., & Nakai, H. 2003, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 87, 113
- Laskar, J. 1993, *Physica D*, 67, 257
- Lee, M. H. & Peale, S. J. 2002, *ApJ*, 567, 596
- Mayor, M., Udry, S., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Santos, N.C., Burnet, M. 2004, *A&A*, 415, 391
- Marzari, F., Scholl, H., & Tricarico, P. 2006, *A&A*, 453, 341
- McCarthy, C., Butler, R.P., Tinney, C.G., Jones, H.R.A., Marcy, G.W. Carter, B., Penny, A.J., & Fischer, D.A. 2004, *ApJ*, 617, 575
- Pepe, F., Correia, A. C. M., Mayor, M., Tamuz, O., Couetdic, J., Benz, W., Bertaux, J.-L., Bouchy, F., Laskar, J., Lovis, C., Naef, D., Queloz, D., Santos, N. C., Sivan, J.-P., Sosnowska, D., & Udry, S. 2007, *A&A*, 462, 769
- Tinney, C.G., Butler, R.P., Marcy, G.W., Jones, H.R.A., Laughlin, G., Carter, B.D, Bailey, J.A., & O'Toole, S. 2006, *ApJ*, 647, 594
- Vogt, S.S., Butler, R.P., Marcy, G.W., Fischer, D.A., Henry, G.W., Laughlin G., Wright, J.T., Johnson, J.A. 2005, *ApJ*, 632, 638

Dynamics of planets in retrograde mean motion resonance

Julie Gayon · Eric Bois · Hans Scholl

Received: 27 May 2008 / Revised: 26 January 2009 / Accepted: 28 January 2009
© Springer Science+Business Media B.V. 2009

Abstract In a previous paper ([Gayon and Bois 2008a](#)), we have shown the general efficiency of retrograde resonances for stabilizing compact planetary systems. Such retrograde resonances can be found when two-planets of a three-body planetary system are both in mean motion resonance and revolve in opposite directions. For a particular two-planet system, we have also obtained a new orbital fit involving such a counter-revolving configuration and consistent with the observational data. In the present paper, we analytically investigate the three-body problem in this particular case of retrograde resonances. We therefore define a new set of canonical variables allowing to express correctly the resonance angles and obtain the Hamiltonian of a system harboring planets revolving in opposite directions. The acquiring of an analytical “rail” may notably contribute to a deeper understanding of our numerical investigation and provides the major structures related to the stability properties. A comparison between our analytical and numerical results is also carried out.

Keywords Hamiltonian systems · Planetary systems · Resonance · Periodic orbits · Retrograde planets · Resonant average · Hamiltonian

1 Introduction

The simplicity and elusiveness of the full three-body problem have captivated mathematicians for centuries. Still today, because of its non-integrability, the three-body problem remains tricky. It has been solved for particular cases, by reducing the number of degrees of freedom. One of the first major results is the determination of families of periodic orbits in the three-body problem under certain assumptions (see for instance [Hénon 1976](#) or [Hadjidemetriou 1976](#)).

J. Gayon (✉) · E. Bois · H. Scholl
CNRS, Observatoire de la Côte d’Azur, Laboratoire Cassiopée, Nice Sophia-Antipolis University,
B.P. 4229, 06304 Nice Cedex 4, France
e-mail: Julie.Gayon@oca.eu

Since the first observations of extrasolar systems, the interest of the general three-body problem has been boosted, mainly under the coplanar assumption. Moreover, the occurrence of bodies in Mean Motion Resonances (MMR) allowed to study the stability of several two-planet systems (see e.g. [Hadjidemetriou 2002, 2008](#) or [Callegari et al. 2004](#)). The secular behavior of two-planet systems has been investigated as well (e.g. [Henrard and Libert 2008](#)). Because most presently known extrasolar planets move on eccentric orbits, [Beaugé and Michtchenko \(2003\)](#) investigated the eccentric, coplanar three-body problem to characterize the dynamics of such two-planet systems.

Faced to the detection of multi-planetary systems (one star and 2 planets or more), and to the increasing number of degrees of freedom, numerical methods of global analysis have been performed in order to study their dynamical stability. By combining N -body integrators with numerical tools for detection of chaos (notably fast indicators or frequency analyses), the exploration of the N -body planetary problem (with $N \geq 3$) is accessible from numerical methods. As a consequence, mechanisms generating stability of multi-planetary systems can be identified and explained. For instance, mechanisms involving a MMR as well as an Apsidal Synchronous Precession¹ (ASP hereafter) have been intensively studied (e.g. [Lee and Peale 2002, 2003](#); [Bois et al. 2003](#); [Ji et al. 2003](#)). A solution involving both MMR and ASP describes well the stability of eccentric, compact multi-planetary systems, but may not however be unique. We note, for example, that other multi-planetary systems have been found to be mainly controlled by secular dynamics (e.g. [Michtchenko et al. 2006](#) or [Ji et al. 2007](#)). In [Gayon and Bois \(2008a\)](#), by using a numerical method of global analysis,² we found a novel stabilizing mechanism involving a *retrograde* MMR in a two-planet system, which means that the two planets are both in MMR and *revolve in opposite direction*.³ Let us note that the difference between a *prograde* MMR and a *retrograde* MMR does not only lie in the retrograde motion of one of the two planets. The mechanisms of stability related to a retrograde MMR and their underlying properties differ from the prograde case. Such stabilities are generally more robust (see [Gayon and Bois 2008a,b](#)).

The assumption that two giant planets are in a MMR and revolving in opposite directions around their hosting star is apparently contradicting to the most accepted formation theory of planetary systems, notably to the formation and evolution of the resonant planetary systems (core accretion mechanism combined by a planetary migration scenario). However, in [Gayon and Bois \(2008a\)](#), we present two feasible processes leading to planets revolving in opposite directions. The first scenario has been introduced by [Nagasawa et al. \(2008\)](#) and consists in the combination of a planet–planet scattering, a tidal circularization and Kozai mechanisms. Starting from a hierarchical 3-planet system and considering a migration mechanism including a process of planet–planet scattering and tidal circularization, the authors show that close-in planets may be formed. In a few cases, due to the Kozai mechanism, one planet enters a retrograde motion. The second feasible process imagined by Varvoglis (private discussions) and ourselves is related to the capture of free-floating planets. By integrating the trajectories of planet-sized bodies that encounter a coplanar two-body system (a Sun-like star and a Jupiter mass), Varvoglis finds that the probability of capture is significant, and, moreover, that the percentage of free-floating planets captured is higher for retrograde motions than for

¹ In case of ASP, the apsidal lines on average precess at the same rate.

² We used the MIPS (Megno Indicator for Planetary Systems) method based on the MEGNO technique (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits; see [Cincotta and Simó 2000](#)).

³ For instance, the inner planet has a prograde direction while the outer planet a retrograde one. In the following, we will also use the terminology of “counter-revolving configuration”.

prograde motions. As a consequence, it would be possible to find one day some planetary systems in counter-revolving configuration.

In the case of a two-planet system, analytical and numerical methods are complementary. Besides, the acquiring of an analytical “rail” contributes to a deeper understanding of the numerical exploration. As a result, the analytical approach permits to study thoroughly the numerical results. By plotting surfaces of sections, it provides the major structures related to the stability properties. As a consequence, in the present paper, we propose a Hamiltonian expansion based on this novel and feasible stabilizing mechanism introduced in Gayon and Bois (2008a,b). We therefore investigate the three-body problem in the particular case of retrograde resonances, adapting the Hamiltonian approach of Beaugé and Michtchenko (2003) firstly expanded for eccentric, coplanar, and *prograde* orbits. From this analytical expansion, we can correctly derive the expression of resonance angles in the case of a retrograde MMR. A comparison with the numerical results obtained in Gayon and Bois (2008a) is also carried out.

In the present paper, we firstly introduce the general expressions of the Hamiltonian as well as the canonical variables in the case of two massive planets moving around their host star (Sect. 2). We note that a dynamical system composed of two satellites orbiting a planet is also an equivalent problem. All the results shown in the present paper may therefore be applied to satellite systems. The consideration of planets revolving in opposite directions involves new expressions for canonical variables presented in Sect. 3. We adapt the disturbing function of the Beaugé & Michtchenko model to retrograde motions in Sect. 4. In Sect. 5, we express the Hamiltonian for retrograde resonances. An orbital fit of the HD 73526 planetary system involving a 2:1 retrograde MMR was found consistent with the observational data in Gayon and Bois (2008a). As a consequence, in Sect. 6, we apply the analytical model to the HD 73526 planetary system ruled in such conditions and compare our numerical and analytical results. Finally, in Sect. 7, our results obtained by the analytical expansion are visualized by surfaces of section.

2 General expression of the Hamiltonian

We suppose a star of mass M_0 and 2 planets of mass m_1 and m_2 such as $M_0 \gg m_1, m_2$ and moving around their barycenter. We choose to express the Hamiltonian of the system in the heliocentric frame by using the following Delaunay variables:

$$\begin{aligned} M_i \quad L_i &= \beta_i \sqrt{\mu_i a_i} \\ \omega_i \quad G_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} \\ \Omega_i \quad H_i &= G_i \cos I_i \end{aligned} \tag{1}$$

with $a_i, e_i, I_i, \Omega_i, \omega_i$, and M_i the geometrical orbital elements of the planet i , and $\mu_i = G\sqrt{M_0 + m_i}$. G is the gravitational constant. $\beta_i = M_0 m_i / (M_0 + m_i)$ is the reduced mass for the planet i .

The Hamiltonian of the system (denoted F) consists of a Keplerian part (F_0) and a disturbing function (F_1):

$$F = F_0 + F_1 \quad \text{with} \quad \begin{cases} F_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} \\ F_1 = -Gm_1m_2 \frac{1}{\Delta} + \frac{m_1m_2}{M_0} (\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2 + \dot{z}_1\dot{z}_2) \end{cases} \tag{2}$$

The leading part of the disturbing function, called the direct part, depends on the instantaneous distance between the two planets (Δ). Owing to the choice of the origin of the coordinate systems, the second part of F_1 is called the indirect part of the disturbing function. F_1 depends on the barycentric velocities ($\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$) of each planet, expressed in Cartesian coordinates.

To study the 3-body problem, different sets of canonical variables can be used, depending on the simplifications carried out for reducing the number of degrees of freedom. For instance, [Beaugé and Michtchenko \(2003\)](#) applied the so-called modified Delaunay variables to solve the coplanar, prograde and eccentric 3-body problem. In the present paper, we define a new set of canonical variables, especially devoted to planets revolving in opposite directions.

3 Set of canonical variables for planets revolving in opposite directions

In this study, we choose to set a prograde direction of revolution for the inner planet (noted 1) and a retrograde one for the outer planet (noted 2). From the previous set of Delaunay variables (1), we therefore define the two following sets of canonical variables for planets 1 and 2 respectively:

$$\begin{cases} \lambda_1 = M_1 + \tilde{\omega}_1 & L_1 = \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_1} \\ -\tilde{\omega}_1 = -(\Omega_1 + \omega_1) & L_1 - G_1 = L_1 \left(1 - \sqrt{1 - e_1^2}\right) \\ -\Omega_1 & G_1 - H_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} (1 - \cos I_1) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = -M_2 + \tilde{\omega}_2 & -L_2 = -\beta_2 \sqrt{\mu_2 a_2} \\ -\tilde{\omega}_2 = -(\Omega_2 - \omega_2) & G_2 - L_2 = -L_2 \left(1 - \sqrt{1 - e_2^2}\right) \\ \Omega_2 & G_2 + H_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2} (1 + \cos I_2) \end{cases} \quad (4)$$

The first set of canonical variables (3) corresponds to the well-known modified Delaunay canonical variables while the second one (4) is developed for retrograde planetary motion. λ_i is the mean longitude of the planet i . We note that the longitude of periastron is defined by: $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$, for a coplanar and *prograde* planetary motion (which is equivalent to consider $I = 0^\circ$) and by $\tilde{\omega} = \Omega - \omega$, for a coplanar and *retrograde* planetary motion (equivalent to $I = 180^\circ$). Restricting the study to a coplanar but counter-revolving problem, the set of canonical variables of the system can be simplified as follows:

$$\begin{matrix} \lambda_1 & L_1 \\ \lambda_2 & -L_2 \\ -\tilde{\omega}_1 & L_1 - G_1 \\ -\tilde{\omega}_2 & G_2 - L_2 \end{matrix} \quad (5)$$

4 Expansion of the disturbing function

The method used for the expansion of the disturbing function originates from [Beaugé and Michtchenko \(2003\)](#). They expanded an expression for the Hamiltonian that is valid for high eccentricities of one or both planets. Their method provides a good assessment of the disturbing function when planets are close to the collision point. Hence, the solution converges in all points of the phase space except for the singularities (corresponding to planetary

collisions). Moreover, the rate of convergence does not depend on the values of eccentricities but rather on the order of magnitude of the distribution function itself. Besides, depending on the studied planetary system, even for very eccentric orbits, the rate of convergence of the disturbing function may be relatively fast.

Classical methods such as Laplace (1979) or Kaula (1962) were used for coplanar and quasi-circular orbits and were useful for studying dynamics of the Solar System (or hierarchical systems in general). Nonetheless, due to the detection of eccentric exo-planetary systems, new and specific expansions of the disturbing function were needed. As a consequence, the Beaugé & Michtchenko method seems much more suitable for such eccentric planetary orbits. To apply this method for counter-revolving configurations, we propose to expand again the disturbing function, by considering the prograde motion of the inner planet and the retrograde motion of the outer planet.

4.1 Direct part of the disturbing function

The direct part of the disturbing function that generally encounters problems of convergence may be expressed as a function of the heliocentric radial distances r_i of both planets and the ψ angle between both bodies as seen from the star:

$$\frac{1}{\Delta} = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \psi)^{-1/2} \tag{6}$$

We note that for counter-revolving configurations, the angle ψ between both bodies is defined by:⁴

$$\psi = f_1 + f_2 + \Delta\tilde{\omega} \tag{7}$$

with f_i the true anomaly of the planet i , $\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$ and $\tilde{\omega}_{\{1,2\}}$ defined in (3) and (4). A concise expression of the previous equation is written in (8) by taking into account the ratio $\rho = r_1/r_2$ such as:

$$\frac{r_2}{\Delta} = (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \psi)^{-1/2} \tag{8}$$

The key of the Beaugé and Michtchenko (2003) method lies in the expansion in power series in a new variable noted x and corresponding to a measurement of the proximity of the initial condition to the singularity in $1/\Delta$:

$$\frac{r_2}{\Delta} = (1 + x)^{-1/2} \simeq \sum_{n=0}^N b_n x^n \tag{9}$$

with $x = \rho^2 - 2\rho \cos \psi$. r_2/Δ has a singularity at $x = -1$. The determination of the coefficients b_n is performed by the way of a linear regression for x values greater than $-1 + \delta$, δ being a positive parameter close to zero. A good precision of the direct part of the disturbing function may be reached for a good compromise between the δ value and the choice of N order in the series expansion. Contrary to classical methods involving Fourier series of the ψ variable or power series in ρ , not only the convergence rate of this method is improved but also the expansion of the disturbing function can be applied for eccentric two-planet systems. More details can be found in Beaugé and Michtchenko (2003).

⁴ For both prograde orbits, the ψ angle is defined by: $\psi = f_1 - f_2 + \Delta\tilde{\omega}$ with $\tilde{\omega}_i = \Omega_i + \omega_i$.

From (9) and by using the explicit expression of x , we find:

$$\frac{r_2}{\Delta} \simeq \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^l b_l (-2)^k \binom{l}{k} \rho^{2l-k} \cos^k \psi \tag{10}$$

Changing from powers of $\cos \psi$ to multiples of ψ and by using the explicit expression of the ψ angle, one obtains:

$$\frac{a_2}{\Delta} \simeq \sum_{l=0}^N \sum_{u=0}^{N-l} 2 A_{l,u} \alpha^{2u+l} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^{2u+l} \left(\frac{r_2}{a_2}\right)^{-2u-l-1} \cos(lf_1 + lf_2 + l\Delta\tilde{\omega}) \tag{11}$$

with $A_{l,u} = (-1)^l \sum_{t=u}^{\min(2u, N-l)} b_{l+t} \binom{l+t}{l+2t-2u} \binom{l+2t-2u}{t-u} \gamma_l$ and $\gamma_l = \begin{cases} 1/2 & \text{if } l = 0 \\ 1 & \text{if } l > 0 \end{cases}$

The direct part of the disturbing function may be expressed in terms of mean anomaly by using the Fourier expansion of the following functions (e.g. [Hughes 1981](#)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(lf) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^{n,l} \cos(mM) \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(lf) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^{n,l} \sin(mM) \end{aligned} \tag{12}$$

with $X_m^{n,l}$ the Hansen coefficient function of the eccentricity ([Kaula 1962](#)):

$$X_m^{n,l} = e^{|l-m|} \sum_{s=0}^{\infty} Y_{s+w_1, s+w_2}^{n,l} e^{2s} \tag{13}$$

with $Y_{s+w_1, s+w_2}^{n,l}$ the Newcomb operators, $w_1 = \max(0, m - l)$ and $w_2 = \max(0, l - m)$. Let us recall that the Newcomb operators obey to simple recurrence relations ([Brouwer and Clemence 1961](#); [Murray and Dermott 1999](#)).

Substituting (13) into (12), we obtain:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(lf) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{n,l,j,m} e^j \cos(mM) \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(lf) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{n,l,j,m} e^j \sin(mM) \end{aligned} \tag{14}$$

The direct part of the disturbing function is therefore expressed as follows:

$$\frac{a_2}{\Delta} \simeq \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^N \sum_{i=0}^{2N} A_{l,(i-l)/2} D_{i,l,j,k,m,n} \alpha^i e_1^j e_2^k \cos(mM_1 + nM_2 + l\Delta\tilde{\omega}) \tag{15}$$

with $D_{i,l,j,k,m,n} = 2 B_{i,l,j,m} B_{-i-1,l,k,n}$ and $B_{i,l,j,m} = Y_{\frac{j-|l-m|}{2}+w_1, \frac{i-|l-m|}{2}+w_2}^{i,l}$.

4.2 Indirect part of the disturbing function

From (2), the indirect part of the disturbing function is given by the function T_1 :

$$T_1 = \frac{m_1 m_2}{M_0} (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2) \tag{16}$$

where \dot{x}_i , \dot{y}_i , and \dot{z}_i are the barycentric velocities of the planet i , expressed in Cartesian coordinates. In the case of coplanar orbits, the expressions of \dot{x}_i and \dot{y}_i take into account the direction of motion of the planet i . We define \dot{x}_i for a prograde motion and a retrograde one as follows:⁵

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial M_i} \frac{dM_i}{dt} = \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial M_i} n_i & \text{for a prograde motion} \\ -\frac{\partial x_i}{\partial M_i} n_i & \text{for a retrograde motion} \end{cases} \tag{17}$$

Consequently, considering a coplanar problem and planets revolving in opposite directions, the indirect part is equal to:

$$T_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{a_2} \alpha^{-1/2} \left[\frac{\partial}{\partial M_1} \left(\frac{x_1}{a_1} \right) \frac{\partial}{\partial M_2} \left(\frac{x_2}{a_2} \right) + \frac{\partial}{\partial M_1} \left(\frac{y_1}{a_1} \right) \frac{\partial}{\partial M_2} \left(\frac{y_2}{a_2} \right) \right] \tag{18}$$

By using (14) and considering the prograde motion of planet 1 and the retrograde one of planet 2, one obtains:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a_1} &= \left(\frac{r_1}{a_1} \right) \cos(\tilde{\omega}_1 + f_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{1,1,j,m} e_1^j \cos(\tilde{\omega}_1 + m M_1) \\ \frac{y_1}{a_1} &= \left(\frac{r_1}{a_1} \right) \sin(\tilde{\omega}_1 + f_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{1,1,j,m} e_1^j \sin(\tilde{\omega}_1 + m M_1) \\ \frac{x_2}{a_2} &= \left(\frac{r_2}{a_2} \right) \cos(\tilde{\omega}_2 - f_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{1,1,k,n} e_2^k \cos(\tilde{\omega}_2 - n M_2) \\ \frac{y_2}{a_2} &= \left(\frac{r_2}{a_2} \right) \sin(\tilde{\omega}_2 - f_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{1,1,k,n} e_2^k \sin(\tilde{\omega}_2 - n M_2) \end{aligned} \tag{19}$$

Substituting these results into (18), we find:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{2N} \bar{A}_i \alpha^i \\ &\quad \times mn B_{1,1,j,m} B_{1,1,k,n} e_1^j e_2^k \cos(m M_1 + n M_2 + \Delta \tilde{\omega}) \end{aligned} \tag{20}$$

where \bar{A}_i are constant coefficients such as: $\alpha^{-1/2} = \sum_{i=0}^{2N} \bar{A}_i \alpha^i$.

By combining (15) and (20), we obtain the complete expression of the disturbing function as follows:

$$F_1 = -\frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{j,k=0}^{\infty} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^N \sum_{i=0}^{2N} R_{i,j,k,m,n,l} \alpha^i e_1^j e_2^k \cos(m M_1 + n M_2 + l \Delta \tilde{\omega}) \tag{21}$$

⁵ A similar equation is obtained for the expression of \dot{y}_i .

where $R_{i,j,k,m,n,l} = A_{l,(i-l)/2} D_{i,l,j,k,m,n} - \delta_{l,1} \bar{A}_i m n B_{1,1,j,m} B_{1,1,k,n}$ are constant coefficients. $R_{i,j,k,l,m,n,l}$ are independent of initial conditions and then require to be determined once. We are now able to express the angles of resonance in the case of counter-revolving configurations as shown in the following section.

5 The resonant average Hamiltonian

Considering planets close to a MMR and revolving in opposite directions, we define the MMR ratio by $p + q/p$ with $p \neq 0$ and $p < 0$. For instance, when two planets revolve in opposite direction and have a period ratio of 2, the q order of resonance is equal to 3 and $p = -1$. We set $s = p/q$ and define the following set of canonical variables in the case of a retrograde MMR:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 & & J_1 &= L_1 + s(I_1 + I_2) \\
 \lambda_2 & & J_2 &= -L_2 - (1 + s)(I_1 + I_2) \\
 \sigma_1 = (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_1 & & I_1 &= L_1 \left(1 - \sqrt{1 - e_1^2} \right) \\
 \sigma_2 = (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_2 & & I_2 &= -L_2 \left(1 - \sqrt{1 - e_2^2} \right)
 \end{aligned} \tag{22}$$

where σ_1 and σ_2 are the resonant angles while I_1 and I_2 are the conjugate momenta depending on the eccentricities e_1 and e_2 .

Let θ be the following angle of the disturbing function such as: $\theta = m M_1 + n M_2 + l \Delta \tilde{\omega}$. Considering the new set of variables, the expression of θ becomes:

$$\theta = m\sigma_1 - n\sigma_2 + l(\sigma_2 - \sigma_1) + [m(p + q) - np]Q \tag{23}$$

where $qQ = (\lambda_1 - \lambda_2)$ is the synodic angle. Hence, the disturbing function depends on three angular variables (σ_1, σ_2, Q) . Considering the new set of canonical variables $(\sigma_1, \sigma_2, Q, \lambda_2; I_1, I_2, qJ_1, J_1 + J_2)$, we find the following constant of motion:

$$J_1 + J_2 = \text{constant} \tag{24}$$

As a consequence, our system has therefore two integrals of motion: the F Hamiltonian and $J_{tot} = J_1 + J_2$. It is well known that the frequency of the angle Q is much higher than that of σ_i . As a consequence, we consider only long period perturbations in the Hamiltonian. The system is then averaged with respect to the synodic angle as follows:

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 dQ \tag{25}$$

The averaging over the Q variable written in (25) implies a third constant of motion, namely J_1 . As a consequence, the system consists of four degrees of freedom and three constants of motion. From now on, the system can be reduced to four independent variables, namely σ_1, σ_2, I_1 and I_2 . Taking into account the condition of MMR ($n = m(p + q)/p$), we obtain the final expression of the disturbing function (26) and the average Hamiltonian (27) respectively, for a retrograde resonance:

$$\bar{F}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{j=0}^{j_{max}} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{i=0}^{2N} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \times \alpha^i e_1^j e_2^k \cos((m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2) \tag{26}$$

$$\bar{F} = -\sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \alpha_i e_1^j e_2^k \cos((m-l)\sigma_1 + (l-n)\sigma_2) \tag{27}$$

Due to D’Alembert’s properties of the disturbing function, some coefficients are null if one (or more) of the following conditions is reached: (1) $j < |m - l|$, (2) $k < |l - n|$, (3) $(m - l)$ even (odd) number and j odd (even) number, (4) $(l - n)$ even (odd) number and k odd (even) number.

6 Comparison with numerical methods

Using the final expression of the Hamiltonian, the J_1 and J_2 constants of motion as well as the following set of canonical variables,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_1 & I_1 &= L_1 \left(1 - \sqrt{1 - e_1^2}\right) \\ \sigma_2 &= (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_2 & I_2 &= -L_2 \left(1 - \sqrt{1 - e_2^2}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

we can firstly integrate a two-planet system both in counter-revolving configuration and in MMR and secondly, compare the analytical results with numerical ones. Using a Bulirsch-Stoer method, we integrate numerically the following differential equations:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_i} = -\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \sigma_i} \\ \dot{\sigma}_i &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial I_i} = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial I_i} + \frac{\partial F_0}{\partial I_i} \end{aligned} \tag{29}$$

For the integration of (29), we use our initial conditions for the HD 73526 system, located very close to the 2:1 retrograde MMR (i.e. at the edge of a V-shape structure in a stability map in $[a, e]$ orbital elements; see [Gayon and Bois 2008a](#)):

$$\begin{aligned} M_0 &= 1.08 M_\odot \\ M_1 &= 2.9 M_{Jup} & M_2 &= 2.5 M_{Jup} \\ a_1 &= 0.66\text{AU} & a_2 &= 1.05\text{AU} \\ e_1 &= 0.19 & e_2 &= 0.14 \\ \sigma_1 &= 94(\text{deg}) & \sigma_2 &= 94(\text{deg}) \end{aligned} \tag{30}$$

Such initial conditions (30) are sufficiently close to the retrograde MMR to apply our analytical expansion.⁶ These initial conditions (more particularly the semi-major axes) are averaged for the analytical expansion.

⁶ We forecast to study various initial conditions in a forthcoming paper, notably for a “full” retrograde resonance.

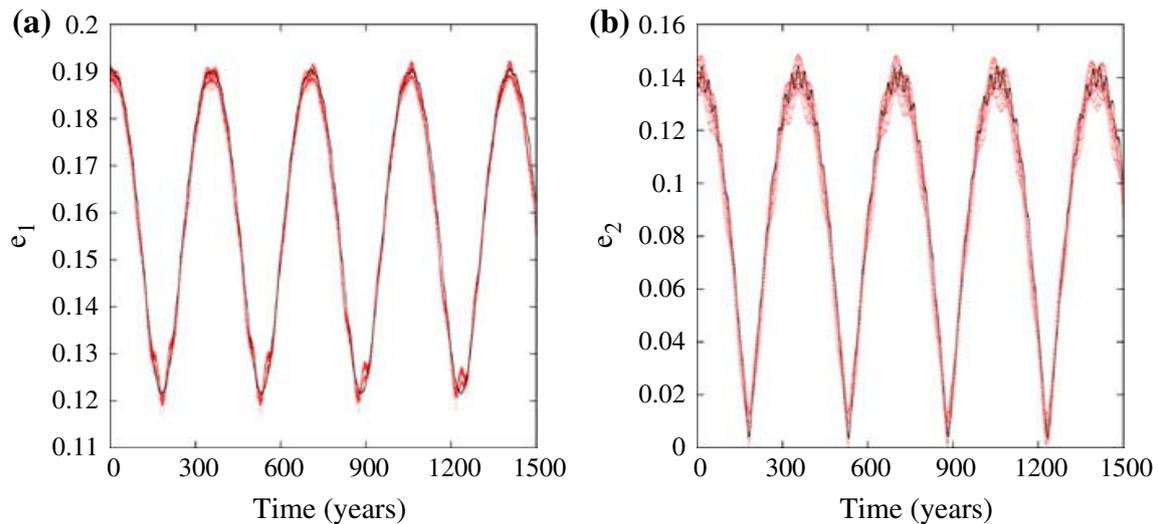


Fig. 1 Time variation of the eccentricities e_1 and e_2 for the HD 73526 planetary system in 2:-1 MMR. Red dots represent the numerical solution while black curves the analytical one. Used initial conditions are given by: $M_0 = 1.08 M_\odot$; $M_1 = 2.9 M_{Jup}$; $M_2 = 2.5 M_{Jup}$; $a_1 = 0.66$; $a_2 = 1.05$; $e_1 = 0.19$; $e_2 = 0.14$; $\sigma_1 = 94$; $\sigma_2 = 94$

Figure 1 shows the time evolution of eccentricity of both planets. Dots represent the numerical solution while black curves the analytical one.⁷ Both solutions express the same behavior, with a relative error of 1.2% and 10%, on average, over the eccentricity of the inner orbit and the outer orbit, respectively (absolute errors being 0.002 for e_1 and 0.005 for e_2 on average). Due to the averaging of the Hamiltonian over short periods, numerical dots are scattered on both sides of the analytical solution.

Figure 2 shows the time variation of the variable $\Delta\sigma$. Because the e_2 eccentricity periodically reaches the zero value, the numerical method does not always permit to determine the value of the $\Delta\sigma$ angle. This phenomenon is expressed by the vertical scattering of dots from 0 to 360 degrees. As a consequence, surfaces of section obtained numerically comprise this numerical bias. The analytical method is therefore more reliable when the eccentricity of a planet reaches values close to zero. Besides, the analytical approach ensures the properties of stability found for each planetary system.

7 Surfaces of section

Nature of planetary systems can be directly deduced from the behavior of the resonance variables. As a consequence, from the previous Hamiltonian expansion (27) of the three-body problem, we can plot surfaces of section and study the dynamics of two planets in retrograde MMR.

Figure 3 shows surfaces of section plotted for the HD 73526 planetary system previously defined. The energy level corresponding to the initial conditions (30) was numerically evaluated as -0.13835250 (units of AU, solar mass, and year). With our analytical expansion, we obtain the Hamiltonian value of -0.13835197 , which is in good agreement with our numerical results. Panel (a) of Fig. 3 corresponds to the inner planet and is plotted in the $(e_1 \cos \sigma_1, e_1 \sin \sigma_1)$ parameter space. The section plane for the inner planet is chosen such

⁷ More details on the used numerical method and corresponding results may be found in Gayon and Bois (2008a).

Fig. 2 Time variation of the $\Delta\sigma$ variable (where $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$) for the HD 73526 planetary system in 2:-1 MMR. Red dots represent the numerical solution while black curves the analytical one. Used initial conditions are the same as in Fig. 1

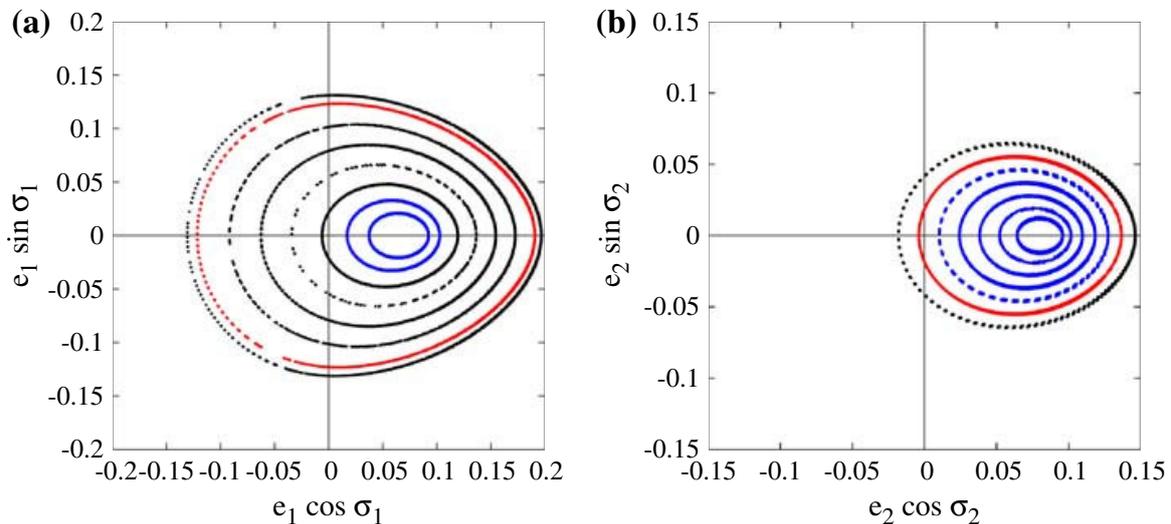
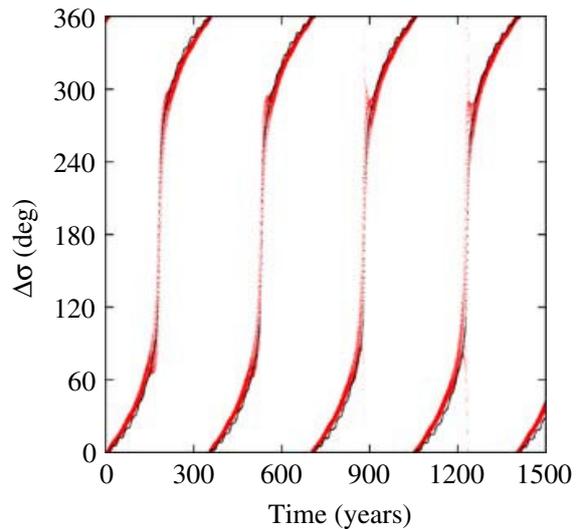


Fig. 3 Surfaces of section for the inner (a) and the outer (b) planets of the HD 73526 system found close to a 2:-1 MMR. The value of \bar{F} is -0.138352 . Initial conditions (30) are represented by the red curve. Black and blue curves respectively correspond to circulation and libration of the σ_i variables in the plane $\sigma_{j \neq i} = 0$

as $\sigma_2 = 0$. Similarly, panel (b) is plotted for the outer planet in the $(e_2 \cos \sigma_2, e_2 \sin \sigma_2)$ parameter space and using the plane $\sigma_1 = 0$. The initial conditions corresponding to (30) are plotted in red. All the solutions found for $\bar{F} = -0.138352$ are quasi-periodic.

In panels (a) and (b) of Fig. 3, we represent the *circulation* state of the σ_1 and σ_2 variables in black and red colors. The *libration* state about 0° is plotted in blue; such initial conditions are located *inside* the 2:1 retrograde MMR. Nevertheless, for all the sets of initial conditions required for plotting Fig. 3, the time variation of σ_1 and σ_2 expresses a *circulation* (in time) of both variables (not shown here). This time circulation seems contrary to the possible behavior in libration of σ_1 and σ_2 shown on our surfaces of section. Such initial condition sets inside the 2:1 retrograde MMR and their behaviors could therefore point out a particular characteristic of retrograde MMR. Such a characteristic would deserve a specific study.

8 Conclusion

In the present paper, we investigated the three-body problem in the particular case of retrograde resonances. Our study is derived from the Hamiltonian approach of [Beaugé and Michtchenko \(2003\)](#), which was expanded for eccentric, coplanar and prograde orbits. To apply this method to the retrograde MMR case, we expanded again the disturbing function, when considering a prograde motion of the inner planet and a retrograde motion of the outer planet. Hence, we defined a new set of canonical variables, which allow us to express correctly the angles of resonance in the case of counter-revolving configurations.

Although the exploration of the N -body problem is accessible from numerical methods, the acquiring of an analytical “rail” notably contributes to a deeper understanding of the numerical investigation. As shown in Sect. 6, the analytical method also permits a better determination of the resonance variables. Moreover, from the behavior of the resonance angles displayed in surfaces of section, we can directly infer the local behavior of a 3-body system, that is to say its stability or its chaoticity.

Until now, no planetary system has been truly detected in counter-revolving configuration. However, given the efficiency for stability of retrograde MMR (see [Gayon and Bois 2008b](#)), such a detection might occur. The work presented in this paper is firstly based on a dynamical study of theoretical two-planet systems. Nevertheless, a dynamical system composed of two satellites orbiting a planet is an equivalent problem. Since some satellites of Saturn are found in counter-revolving motions, our expansion of the three-body problem solved in the case of retrograde motions could then be applied for satellites of the Solar System.

Acknowledgements We thank the anonymous referees for their useful comments and suggestions that helped to improve the paper.

Appendix

This appendix shows the analytical expansion when the body moving on a retrograde orbit is the inner planet. The new set of canonical variables for the resonant averaged Hamiltonian is written as follows (equivalent to [22](#)):

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 & & J_1 &= -L_1 + s(I_1 + I_2) \\
 \lambda_2 & & J_2 &= L_2 - (1 + s)(I_1 + I_2) \\
 \sigma_1 = (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_1 & & I_1 &= -L_1 \left(1 - \sqrt{1 - e_1^2} \right) \\
 \sigma_2 = (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \tilde{\omega}_2 & & I_2 &= L_2 \left(1 - \sqrt{1 - e_2^2} \right)
 \end{aligned} \tag{31}$$

with $\lambda_1 = -M_1 + \tilde{\omega}_1$, $\lambda_2 = -M_2 - \tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_1 = \Omega_1 - \omega_1$ and $\tilde{\omega}_2 = \Omega_2 + \omega_2$.

Although the set of canonical variables changes, the expression of the resonant averaged Hamiltonian remains the same:

$$\bar{F} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{i,j,k,m,l} \bar{R}_{i,j,k,m,l} \alpha_i e_1^j e_2^k \cos((m - l)\sigma_1 + (l - n)\sigma_2) \tag{32}$$

References

- Beaugé, C., Michtchenko, T.A.: Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem, Application to the GJ876 planetary system. *MNRAS* **341**, 760–770 (2003)
- Bois, E., Kiseleva-Eggleton, L., Rambaux, N., Pilat-Lohinger, E.: Conditions of dynamical stability for the HD160691 planetary system. *Astrophys. J.* **598**, 1312–1320 (2003)
- Brouwer, D., Clemence, G.M.: *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, New York (1961)
- Callegari, N. Jr., Michtchenko, T.A., Ferraz-Mello, S.: Dynamics of two planets in the 2/1 mean-motion resonance. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **89**, 201–234 (2004)
- Cincotta, P., Simó, C.: Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials. *Astron. Astrophys. Supp.* **147**, 205–228 (2000)
- Gayon, J., Bois, E.: Are retrograde resonances possible in multi-planet systems? *Astron. Astrophys.* **482**, 665–672 (2008a)
- Gayon, J., Bois, E. Retrograde resonances in compact multi-planetary systems: a feasible stabilizing mechanism. In: Sun, Y.S., Ferraz-Mello, S., Zhou, J.L. (eds.) *Exoplanets: Detection, Formation and Dynamics (IAU Symposium 249)*, IAU Proceedings, vol. 3, pp. 511–516. Cambridge University Press, Cambridge (2008b)
- Hadjidemetriou, J.D.: Families of periodic planetary-type orbits in the three-body problem and their stability. *Astrophys. Space Sci.* **40**, 201–224 (1976)
- Hadjidemetriou, J.D.: Resonant periodic motion and the stability of extrasolar planetary Systems. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **83**, 141–154 (2002)
- Hadjidemetriou, J.D.: On periodic orbits and resonance in extrasolar planetary systems. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **102**, 69–82 (2008)
- Hénon, M.: A family of periodic solutions of the planar three-body problem and their stability. *Celest. Mech.* **13**, 267–285 (1976)
- Henrard, J., Libert, A.S.: Periodic orbits as centers of stability in the secular 3D planetary three body problem. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **102**, 177–189 (2008)
- Hughes, S.: The computation of tables of Hansen coefficients. *Celest. Mech.* **25**, 101–107 (1981)
- Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., Li, G., Nakai, H.: The apsidal antialignment of the HD82943 system. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **87**, 113–120 (2003)
- Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., Li, G.: The secular evolution and dynamical architecture of the neptunian triplet planetary system HD69830. *Astrophys. J.* **657**, 1092–1097 (2007)
- Kaula, W.M.: Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. *Astron. J.* **67**, 300–303 (1962)
- Laplace, P.S.: *Traité de Mécanique Céleste*. Imprimerie Royale, Paris (1979)
- Lee, M.H., Peale, S.J.: Dynamics and origin of the 2:1 orbital resonances of the GJ876 planets. *Astrophys. J.* **567**, 596–609 (2002)
- Lee, M.H., Peale, S.J.: Secular evolution of hierarchical planetary systems. *Astrophys. J.* **592**, 1201–1216 (2003)
- Michtchenko, T.A., Ferraz-Mello, S., Beaugé, C.: Modeling the 3-D secular planetary three-body problem. Discussion on the outer ν Andromedae planetary system. *Icarus* **181**, 555–571 (2006)
- Murray, C.D., Dermott, S.F.: *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge (1999)
- Nagasawa, M., Isa, S., Bessho, T.: Formation of hot planets by a combination of planet scattering, tidal circularization, and the Kozai mechanism. *Astrophys. J.* **678**, 498–508 (2008)

Stable chaos in the 55Cnc exoplanetary system?

J. Gayon,¹★ F. Marzari² and H. Scholl¹

¹Laboratoire Cassiopée, Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS, Observatoire de la Côte d’Azur, B.P. 4229, F-06304 Nice, France

²Department of Physics, University of Padova, Via Marzolo 8, 35131 Padova, Italy

Accepted 2008 May 23. Received 2008 May 21; in original form 2008 April 25

ABSTRACT

The five planets discovered around the main-sequence star 55Cnc may represent a case of stable chaos. By using both the Frequency Map Analysis and MEGNO, we find that about 15 per cent of the systems that can be build from the nominal orbital elements of the system are highly chaotic. However, in spite of the fast diffusion rate in the phase space, the planetary system is not destabilized over 400 Myr and close encounters between the planets are avoided.

Key words: planets and satellites: formation – stars: individual: 55Cnc – planetary systems: formation.

1 INTRODUCTION

The most crowded extrasolar planetary system discovered so far is that around the main-sequence star 55Cnc ($=\rho^1$ Cancri). Doppler shift measurements strongly suggest the existence of five planets orbiting the star with semimajor axes ranging from 0.038 to 5.901 au (Fischer et al. 2008). The innermost and smallest planet, *e*, is a Neptune-mass object while the outer and most massive one, planet *d*, has a minimum mass of about four Jupiter masses. A self-consistent dynamical fit to the stellar wobble data performed by Fischer et al. (2008) gives a set of orbital elements for the planets reported in Table 1. It is claimed (Fischer et al. 2008) that this nominal system of five planets described in Table 1 is dynamically stable at least over a time-scale of 1 Myr. We would like to point out that planets *b* and *c* are no longer in a 3:1 mean motion resonance as in the previous solution given by McArthur et al. (2004). In addition, the eccentricity of planet *c* in Fischer et al. (2008) is significantly smaller compared to that derived by McArthur et al. (2004).

We have performed a detailed exploration of the stability of the nominal system by applying the Frequency Map Analysis (FMA) method (Laskar, Froeschlé & Celletti 1992; Laskar 1993a,b; Marzari, Scholl & Tricarico 2006) on 400 varied systems. These systems are obtained by varying orbital elements of the nominal system. The varied systems are analysed by adding randomly some inclination (lower than 5°) to the Keplerian orbits to make the system more realistic. The masses of the planets are scaled accordingly. Among all the systems analysed with FMA, we obtain cases with large diffusion speed in the phase space suggesting a chaotic evolution and possible instability. However, integrating a few of these chaotic systems over time-scales of 10^8 yr, we never obtain destabilization. We, therefore, think that these chaotic systems are examples for stable chaos. This term was introduced by Milani & Nobili (1992) to indicate the peculiar behaviour of asteroids with

short Lyapunov times (of the order of some 10^3 yr) which, however, show a remarkable stability over the age of the Solar system (Milani & Nobili 1992). For the 55Cnc planetary system, we find that in about 15 per cent of all cases the orbital elements of the four inner planets exhibit a chaotic evolution on a time-scale of a few million of years. This stable chaos may be due to the topology of the phase space: quasi-periodic solutions in the proximity of a chaotic island can act like ‘quasi-barriers’ for the diffusion (Tsiganis, Varvoglis & Hadjidemetriou 2000). The chaotic evolution appears to be confined and the system does not destabilize at least on a time-scale of 400 Myr. This peculiar behaviour may be due to the closeness of the system to the planetary 3:1 mean motion resonance between planets *b* and *c* and secular resonances.

To confirm that stable chaos is not limited to the nominal case but can be retrieved also in a larger region of the phase space, we randomly varied the orbital elements of the nominal case and found a similar behaviour. For a few selected cases, we also applied the Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO) method proposed by Cincotta & Simò (2000). The results obtained by MEGNO confirm the FMA results.

2 FMA ANALYSIS

We have performed the FMA on 400 different systems derived from Table 1. Random mean anomalies, node longitudes and inclinations lower than 5° are assigned to each planet. All other orbital elements were taken from Table 1. The frequency analysis is performed over a time-scale of 2×10^4 yr. The orbital elements computed with the numerical integrator SYMBA (Duncan, Levison & Lee 1998) are Fourier analysed and the values of intrinsic frequencies are obtained over running windows. The relative changes of these frequencies are estimated and used to compute the diffusion rate in the phase space. We have applied FMA to the signal $s_{\Delta\varpi_{b,c}}$, the difference between the periaapse longitude of planets *b* and *c*, and to the more conventional signal $s = h_e + ik_e$. The usual non-singular variables $h_e = \text{ecc} * \cos(\varpi)$ and $k_e = \text{ecc} * \sin(\varpi)$

★E-mail: Julie.Gayon@oca.eu

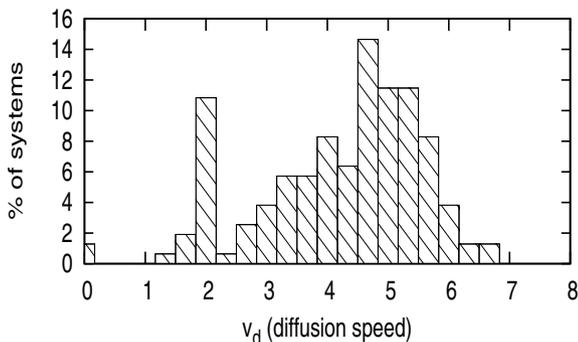
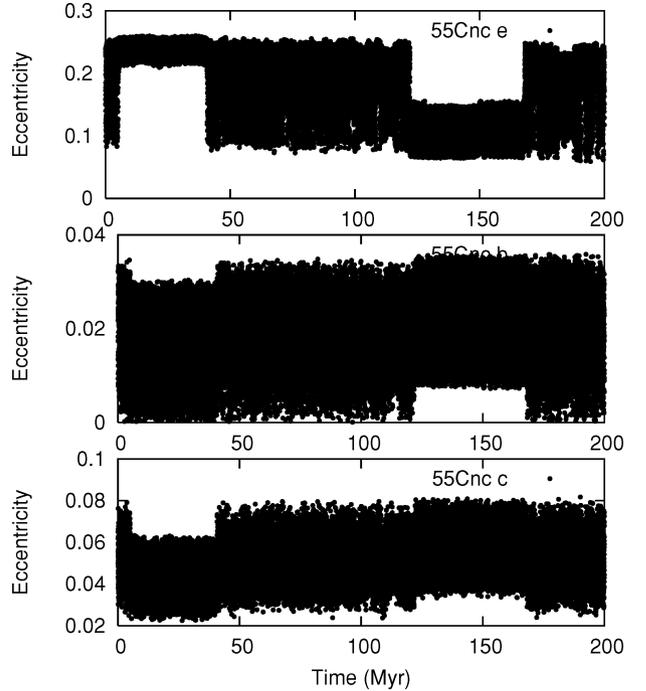
Table 1. Orbital parameters for the self-consistent dynamical fit of the 55Cnc planetary systems. These data are taken from table 4 of Fischer et al. (2008).

Planet	Period (d)	T_p (JD 2440000)	e	ω ($^\circ$)	$M \sin i$ (M_{Jup})	a (au)
b	14.651 262	7572.0307	0.0159	164.001	0.8358	0.115
c	44.378 710	7547.5250	0.0530	57.405	0.1691	0.241
d	5371.8207	6862.3081	0.0633	162.658	3.9231	5.901
e	2.796 744	7578.2159	0.2637	156.500	0.0241	0.038
f	260.6694	7488.0149	0.0002	205.566	0.1444	0.785

refer to the innermost planet e where ecc refers to its eccentricity. The diffusion rate is computed by using the standard deviation σ of the main frequency of the signal computed over the running windows. Slow diffusion rates, characterized by small values of σ , mean quasi-periodic systems, while large values of σ imply chaotic evolution. As in Marzari et al. (2006), we measure the diffusion speed by the logarithmic number $v_d = -\log_{10}(\sigma) + \log_{10}(\sigma_0)$ where σ_0 is the smallest value of σ we observed in our sample of systems. A small value of v_d means a low dispersion of the frequencies in the considered time interval and, hence, a slow diffusion speed in the phase space. Large values of v_d indicate fast changes of the system frequencies and, therefore, chaos.

In Fig. 1, we show the distribution of the diffusion speed measured by v_d in our sample of 400 55Cnc planetary systems. The values smaller than four suggest long-term stability according to our previous experience with FMA, while larger values indicate chaos. We concentrate on systems with a diffusion speed of about five or larger which represent about 15 per cent of the whole sample we analysed. These systems have major frequencies which change on short time-scales. If the fast diffusion of major frequencies also induces drastic changes of amplitudes, in particular of planetary eccentricities, close encounters between planets may occur resulting in the ejection of one or more planets. We will show in the next section that planetary eccentricities do not increase in longer time-scales which suggest a ‘stable chaos’ state for the Cnc55 system.

An additional set of FMA simulations has been performed for 400 systems where we have randomly varied the last significant digit of all the orbital elements given in Table 1. We obtain a histogram that is very similar to that shown in Fig. 1 confirming that the behaviour of stable chaos we have found for the nominal case of Table 1 is extended in phase space.

**Figure 1.** Histogram showing the distribution of the diffusion rate within our sample of 400 55Cnc planetary systems.**Figure 2.** Evolution with time of the eccentricity of the three inner planets of the system. The top plot shows the eccentricity of 55Cnc e , the middle plot that of 55Cnc b and the bottom plot that of 55Cnc c .

3 LONG-TERM EVOLUTION OF THE CHAOTIC SYSTEMS

For those systems with a large diffusion speed ($v_d > 4$), we performed numerical integrations over a time-scale of 400 Myr with SYMBA (Duncan et al. 1998). In Fig. 2, we show for a typical run the evolution of the eccentricity of the three inner planets e , b , c . The eccentricity jumps reveal the chaotic nature of the system. The jumps are obviously correlated among the three planets. The major jumps occur simultaneously. Also the eccentricity of planet f shows simultaneous but more moderate jumps. All jumps, although they appear to be significant, do not result in close approaches among the planets. The planetary system is not destabilized on this time-scale while it is chaotic.

Fig. 2 suggests that we have the case of stable chaos. The eccentricity evolution is characterized by jumps. It does not have a random walk growth but remains limited. It appears that the system is bouncing between the limited regions.

A different case with similar high diffusion speed v_d is shown in Fig. 3. The semimajor axes of the three inner planets are shown on a shorter time-scale to highlight the chaotic evolution. Also in this case, the system remains confined in a stable configuration over 400 Myr.

4 MEGNO ANALYSIS

Besides the FMA method which uses the diffusion rate of intrinsic frequencies to measure chaos, there is a large class of methods which use the divergence of nearby orbits in phase space as a measure. Exponential divergence means chaos while linear divergence means non-chaotic which guarantees stability of the dynamical system. The stability means here that, in particular, no planet is ejected out of the system. A nearly exponential divergence does not necessarily mean instability in our sense over the lifetime of the system. As

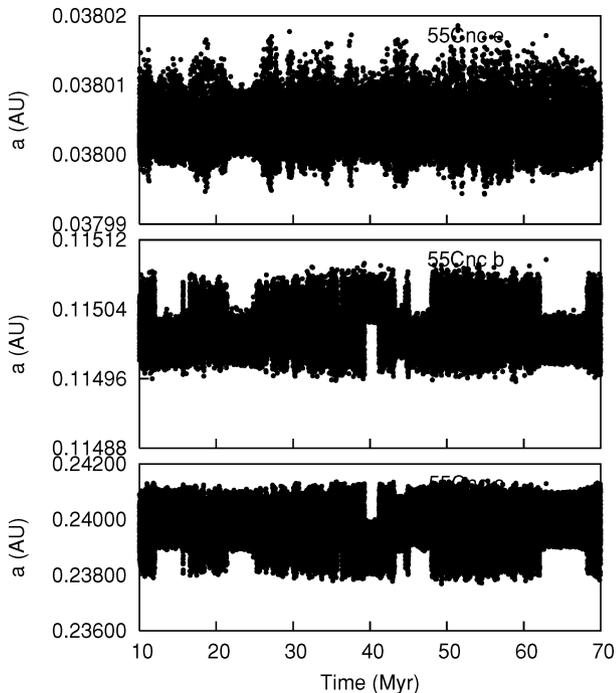


Figure 3. Semimajor axis of the three inner planets of the system over a short time-scale.

outlined above, we would qualify such a system as stable chaotic. The widely used Lyapunov characteristic numbers (LCNs) yield the necessary information about the divergence and are used to measure the chaoticity of the system. Since the computation of the LCNs is very time consuming, more rapid methods were introduced which were shown to yield a very good estimation for the LCNs. One of these fast LCN estimators is the MEGNO (Cincotta & Simó 2000) method. It was applied to several exoplanetary systems (Bois et al. 2003). We computed the MEGNO indicator for about 50 varied systems. They were obtained by varying only the eccentricities of planets *e*, *b*, *c* and *f* while taking the other orbital elements from the nominal system of Table 1. Eccentricities of planet *e* are varied between 0.22 and 0.26, of planets *b* and *c* between 0.0 and 0.10 and of planet *f* between 0.0 and 0.04. We integrated the systems over 100 000 yr. For eccentricities of planets *b* and *c* ranging from 0.0 to 0.02, we obtain weak chaos. The estimator for the maximal Lyapunov exponent is not linear but far from exponential. For larger eccentricities, the indicator has a behaviour between linear and

exponential. MEGNO shows, like FMA, that the four planetary orbits close to the nominal system are chaotic.

5 CONCLUSIONS

Among the possible dynamical configurations of the 55Cnc planetary system, there is also a stable chaos. About 15 per cent of the systems built from the nominal dynamical fit given in Fischer et al. (2008) have a high diffusion speed in the phase space. However, the chaotic island seems to be limited in extent and surrounded by quasi-periodic systems. In this way, the chaotic systems do not increase their eccentricity to planet crossing values and they are stable over a long time-scale. Systems with intermediate values of diffusion speed v_d as measured by FMA (~ 4) do not show this behaviour. They possibly populate the outer border of the chaotic region and their chaotic evolution is much slower. Systems with smaller values of v_d are possibly stable over time-scale of 10^9 yr. Additional FMA and MEGNO computations show that this behaviour is not only peculiar for the nominal system given by Table 1 but it is also extended over a wider range of orbital elements for the system. The weak resonances responsible for the stable chaos are present also for different combinations of the initial orbital elements.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank J. Hadjidemetriou for his useful comments and suggestions that helped to improve the manuscript. The MEGNO computations were performed on the ‘Mesocentre SIGAMM’ machine, hosted by the Observatoire de la Côte d’Azur.

REFERENCES

- Bois E., Kiseleva-Eggleton L., Rambaux N., Pilat-Lohinger E., 2003, *ApJ*, 598, 1312
- Cincotta P., Simó C., 2000, *A&AS*, 147, 205
- Duncan M. J., Levison H. F., Lee M. H., 1998, *AJ*, 116, 2067
- Fischer D. A. et al., 2008, *ApJ*, 675, 790
- Laskar J., 1993a, *Physica D*, 67, 257
- Laskar J., 1993b, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 56, 191
- Laskar J., Froeschlé C., Celletti A., 1992, *Physica D*, 56, 253
- McArthur B. E. et al., 2004, *ApJ*, 614, L81
- Marzari F., Scholl H., Tricarico P., 2006, *A&A*, 453, 341
- Milani A., Nobili A., 1992, *Nat*, 357, 569
- Tsiganis K., Varvoglis H., Hadjidemetriou D., 2000, *Icarus*, 146, 240

This paper has been typeset from a \LaTeX file prepared by the author.

Bibliographie

- [Alibert *et al.* 2005] Alibert, Y., Mordasini, C., Benz, W., & Winisdoerffer, C. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 434, 343
- [Aristote] Aristote IV^{ème} av. J.C., “Traité du ciel” suivi du “Traité pseudo-aristotélicien du monde”, traduction et notes par J. Tricot, Ed. J. Vrin (Paris), 1990
- [Beaugé & Michtchenko 2003] Beaugé, C. & Michtchenko, T. A. 2003, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 341, 760
- [Beaugé *et al.* 2003] Beaugé, C., Ferraz-Mello, S. & Michtchenko, T. A. 2003, *The Astrophysical Journal*, 593, 1124
- [Beaugé *et al.* 2006] Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365, 1160
- [Beaugé *et al.* 2007] Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2007, in *Exoplanets*, R. Dvorak ed., Wiley-VCH, 1
- [Beaugé *et al.* 2008] Beaugé, C., Giuppone, C. A., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385, 2151
- [Beichman *et al.* 2007] Beichman, C. A., Fridlund, M., Traub, W. A., Stapelfeldt, K. R., Quirrenbach, A. & Seager, S. 2007, *Protostars and Planets V*, 915
- [Benettin *et al.* 1976] Benettin, G., Galgani, L., & Strelcyn, J. M. 1976, *Physical Review A*, 14, 2338
- [Benettin *et al.* 1980] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., & Strelcyn, J. M. 1980, *Meccanica*, March, 21
- [Bois 2001] Bois, E. 2001, *Revue des Questions Scientifiques*, 172, 105
- [Bois 2002] Bois, E. 2002, “L’univers sans repos ou l’essence première du mouvement”, *Philosophia Naturalis et Geometricalis*, Peter Lang Ed.
- [Bois 2006] Bois, E. 2006, in “Symétries, brisures de symétries et complexité”, *Peter Lang Ed.*, 53
- [Bois *et al.* 2003] Bois, E., Kiseleva-Eggleton, L., Rambaux, N., & Pilat-Lohinger, E. 2003, *The Astrophysical Journal*, 598, 1312
- [Bois *et al.* 2004] Bois, E., Rambaux, N., Kiseleva-Eggleton, L., & Pilat-Lohinger, E. 2004, *ASP Conference Proceedings*, J. P. Beaulieu, A. Lecavelier des Etangs, & C. Terquem (Eds), 321, 349
- [Bois *et al.* 2005] Bois, E., Rambaux, N., Kiseleva-Eggleton, L., & Pilat-Lohinger, E. 2005, *1st ISSI Team Meeting*, Lammer eds, in press

- [Bois & Gayon 2006] Bois, E. & Gayon, J. 2006, Meeting quadriennal du Programme National de Planétologie, <http://www.crpq.cnrs-nancy.fr/NEWS/PNP2006/RESUMES/Bois-Gayon.pdf>
- [Boss 1997] Boss, A. P. 1997, *Science*, 276, 1836
- [Boss 2000] Boss, A. P. 2000, *The Astrophysical Journal*, 536, L101
- [Bouchy 2005] Bouchy, F. 2005, Ecole CNRS de Goutelas XXVIII : *Formation planétaire et exoplanètes*, J.L. Halbwachs, D. Egret et J.M. Hameury ed., 27
- [Boué & Gayon 2005] Boué, G. & Gayon, J. 2005, “Etude d’un système dynamique simple : le pendule perturbé”, Stage de méthodologie
- [Brouwer & Clemence 1961] Brouwer, D. & Clemence, G. M. 1961, “Methods of Celestial Mechanics”, Academic Press (New York)
- [Butler *et al.* 1997] Butler, R. P., Marcy, G. W., Williams, E., Hauser, H., & Shirts, P. 1997, *The Astrophysical Journal*, 474, L115
- [Butler *et al.* 2001] Butler, R. P., Tinney, C. G., Marcy, G. W., Jones, H. R. A., Penny, A., & Apps, K., 2001, *The Astrophysical Journal*, 555, 410
- [Butler *et al.* 2006] Butler, R. P., Wright, J. T., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Vogt, S. S., Tinney, C. G., Jones, H. R. A., Carter, B. D., Johnson, J. A., McCarthy, C., & Penny, A. J. 2006, *The Astrophysical Journal*, 646, 505
- [Callegari *et al.* 2004] Callegari N., Michtchenko, T. A. & Beaugé, C. 2004, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 89, 201
- [Charbonneau 1995] Charbonneau, P. 1995, *The Astrophysical Journal Supplement*, 101, 309
- [Chauvin *et al.* 2005] Chauvin, G., Lagrange, A. M., Dumas, C., Zuckerman, B., Mouillet, D., Song, I., Beuzit, J. L., & Lowrance, P. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 438, L25
- [Chiang & Murray 2002] Chiang, E. I., & Murray, N. 2002, *The Astrophysical Journal*, 576, 473
- [Cincotta & Giordano 2000] Cincotta, P., & Giordano C. 2000, *Advances in Space Dynamics 2 : Applications in Astronomy*, ed. O.C. Winter & A.F.B.A. Prado (São José dos Campos : Inst. Nac. Pesquisas Espaciais), 237
- [Cincotta & Simó 2000] Cincotta, P. & Simó, C., 2000, *Astronomy & Astrophysics Supplement*, 147, 205
- [Cincotta *et al.* 2003] Cincotta, P., Giordano, C. & Simó, C., 2003, *Physica D*, 182, 151
- [Copernic 1543] Copernic, N. 1543, “Révolutions des orbés célestes”, introduction, traduction et notes par A. Koyré, Ed. A. Blanchard (Paris), 1970
- [Correia *et al.* 2005] Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., Laskar, J., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., & Santos, N. C. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 440, 751
- [Couderc 1945] Couderc, P. 1945, “Histoire de l’Astronomie”, collection Que sais-je, n°165, Presse Universitaire de France (Paris), 4^{ème} édition, 1960
- [Crida 2006] Crida, A. 2006, Rapport de Thèse : “Planetary migration in Solar System formation”

- [Crida *et al.* 2007] Crida, A., Morbidelli, A., & Masset F. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 461, 1173
- [Delfosse *et al.* 1998] Delfosse, X., Forveille, T., Mayor, M., Perrier, C., Naef, D., & Queloz, D. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 338, L67
- [Duncan *et al.* 1998] Duncan, M. J., Levison, H. F., Lee, M. H., 1998, *Astronomical Journal*, 116, 2067
- [Fernandez 1981] Fernandez, J. A. 1981, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 197, 265
- [Ferraz-Mello *et al.* 2005a] Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, & Callegari N. 2005, *Lecture Notes in Physics*, 683, 219
- [Ferraz-Mello *et al.* 2005b] Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., & Beaugé, C. 2005, *The Astrophysical Journal*, 621, 473
- [Fischer *et al.* 2002] Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Laughlin, G., & Vogt, S. S. 2002, *The Astrophysical Journal*, 564, 1028
- [Fischer *et al.* 2003] Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Vogt, S. S., Henry, G. W., Pourbaix, D., Walp, B., Misch, A. A., & Wright, J. T. 2003, *The Astrophysical Journal*, 586, 1394
- [Fischer *et al.* 2008] Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Vogt, S. S., Laughlin, G., Henry, G. W., Abouav, D., Peek, K. M. G., Wright, J. T., Johnson, J. A., McCarthy, C., & Isaacson, H. 2008, *The Astrophysical Journal*, 675, 790
- [Gayon 2005] Gayon, J. 2005, “Etude de l’effet des inclinaisons relatives sur la stabilité des systèmes multi-planétaires”, Stage de Master 2^{ème} année
- [Gayon & Bois 2006] Gayon, J. & Bois, E. 2006, Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics, D. Barret, F. Casoli, G. Lagache, A. Lecavelier, & L. Paganì Eds., 407
- [Gayon & Bois 2008a] Gayon, J. & Bois, E. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 482, 665
- [Gayon & Bois 2008b] Gayon, J. & Bois, E. 2008, *IAU Symposium 249*, Cambridge University Press, Y.S. Sun, S. Ferraz-Mello, & J.L. Zhou (Eds), 511
- [Gayon & Bois 2008c] Gayon J. & Bois E., 2008, en préparation
- [Gayon *et al.* 2008a] Gayon, J., Bois, E., & Scholl, H. 2008, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, en révision
- [Gayon *et al.* 2008b] Gayon, J., Marzari, F., & Scholl, H. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389, L1
- [Gayon *et al.* 2008c] Gayon, J., Scholl, H., Marzari, F., & Bois, E. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, à soumettre
- [Gayon *et al.* 2008d] Gayon, J., Bois, E., & Scholl, H. 2008, *American Astronomical Society/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, 39

- [Gladman *et al.* 2001] Gladman, B., Kavelaars, J. J., Holman, M., Nicholson, P. D., Burns, J. A., Hergenrother, C. W., Petit, J. M., Marsden, B. G., Jacobson, R., Gray, W., & Grav, T. 2001, *Nature*, 412, 163
- [Goździewski *et al.* 2001] Goździewski, K., Bois, E., Maciejewski, A. J., & Kiseleva-Eggleton, L. 2001, *Astronomy & Astrophysics*, 378, 569
- [Goździewski *et al.* 2002] Goździewski, K., Bois, E., & Maciejewski, A. J. 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 332, 839
- [Goździewski & Konacki 2004] Goździewski, K. & Konacki, M. 2004, *The Astrophysical Journal*, 610, 1093
- [Goździewski *et al.* 2006] Goździewski, K., Konacki, M., & Maciejewski, A. J. 2006, *The Astrophysical Journal*, 645, 688
- [Hadjidemetriou 1976] Hadjidemetriou, J. D. 1976, *Astrophysics & Space Science*, 40, 201
- [Hadjidemetriou 2002] Hadjidemetriou, J. D. 2002, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 83, 141
- [Hairer *et al.* 1993] Hairer, E., Norsett, S. P., & Wanner, G. 1993, in “Solving ordinary differential equations. Nonstiff problems (2nd edition)”, *Springer Series in Computational Mathematics*, 8
- [Hénon 1976] Hénon, M. 1976, *Celestial Mechanics*, 13, 267
- [Hughes 1981] Hughes, S. 1981, *Celestial Mechanics*, 25, 101
- [Israelinian *et al.* 2001] Israelinian G., Santos N. C., Mayor M. & Rebolo R., 2001, *Nature*, 411, 163
- [Ji *et al.* 2003a] Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., Li, G., & Nakai, H. 2003, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 87, 113
- [Ji *et al.* 2003b] Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., & Li, G. 2003, *The Astrophysical Journal*, 585, L139
- [Ji *et al.* 2007] Ji, J., Kinoshita, H., Liu, L., & Li, G. 2007, *The Astrophysical Journal*, 657, 1092
- [Jones *et al.* 2002] Jones, H. R. A., Butler, R. P., Marcy, G. W., Tinney, C. G., Penny, A. J., McCarthy, C., & Carter, B. D. 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 337, 1170
- [Kaula 1962] Kaula, W. M. 1962, *Astronomical Journal*, 67, 300
- [Kepler 1609] Kepler, J. 1609, “Astronomie Nouvelle”, traduction et notes par J. Peyroux, Ed. A. Blanchard (Paris), 1979
- [Kepler 1619] Kepler, J. 1619, “Harmonies du Monde”, traduction et notes par J. Peyroux, Ed. A. Blanchard (Paris), 1979
- [Kiseleva-Eggleton *et al.* 2002a] Kiseleva-Eggleton, L., Bois, E., Rambaux, N. & Dvorak, R., 2002, *The Astrophysical Journal*, 578, L145
- [Kiseleva-Eggleton *et al.* 2002b] Kiseleva-Eggleton, L., Bois, E., Rambaux, N. Dvorak, R., & Rivera, E. J. 2002, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 34, 1144

- [Kiseleva-Eggleton *et al.* 2003] Kiseleva-Eggleton, L., Bois, E., Dauphole, B., Rambaux, N., Goździewski, K., Maciejewski, A., & Guiderdoni, B. 2003, *ASP Conference Series*, 294, 193
- [Lachièze-Rey & Luminet 1998] Lachièze-Rey, M. & Luminet, J. P. 1998, “Figures du Ciel”, Ed. Seuil/Bibliothèque Nationale de France (Paris)
- [Lammer *et al.* 2005] Lammer, H., Bois, E. and collaborators, ”Towards real comparative planetology : synergies between solar system science and the DARWIN mission”, 39th ESLAB Symposium, eds. F. Favata and A. Gimenez, in press.
- [Laplace 1799] Laplace, P. S. 1799, “Traité de Mécanique Céleste”, Imprimerie Royale (Paris)
- [Laskar 1993a] Laskar, J. 1993, *Physica D*, 67, 257
- [Laskar 1993b] Laskar J. 1993, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 56, 191
- [Laskar *et al.* 1992] Laskar J., Froeschlé C., Celletti A., 1992, *Physica D*, 56, 253
- [La Spina *et al.* 2004] La Spina, A., Paolocchi, P., Kryszczyńska, A., & Pravec, P. 2004, *Nature*, 428, 400
- [Laughlin *et al.* 2005] Laughlin G., Butler R. P., Fischer D. A., Marcy G. W., Vogt S. S. & Wolf A. S. 2005, *The Astrophysical Journal*, 622, 1182
- [Lee & Peale 2002] Lee, M. H. & Peale, S. J. 2002, *The Astrophysical Journal*, 567, 596
- [Lee & Peale 2003] Lee, M. H., & Peale, S. J. 2003, *The Astrophysical Journal*, 592, 1201
- [Lévy-Leblond 1996] Lévy-Leblond, J. M. 1996, “Aux contraires”, Ed. Gallimard (Paris)
- [Libert & Henrard 2005] Libert, A.-S. & Henrard, J. 2005, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 93, 187
- [Libert & Henrard 2006] Libert, A. S. & Henrard J. 2006, *Icarus*, 183, 186
- [Liou *et al.* 1998] Liou, J. C., Zook, H. A., Jackson, A. A. 1998, *Lunar & Planetary Institute Conference Abstracts*, 29, 1445
- [Lissauer 2002] Lissauer, J. 2002, *Nature*, 419, 355
- [Lissauer & Rivera 2001] Lissauer, J. & Rivera, E. J. 2001, *The Astrophysical Journal*, 554, 1141
- [Lucas *et al.* 2005] Lucas, P. W., Roche, P. F., Tamura, M. 2005, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 361, 211
- [Lovis *et al.* 2006] Lovis, C., Mayor, M., Pepe, F., Alibert, Y., Benz, W., Bouchy, F., Correia, A. C. M., Laskar, J., Mordasini, C., Queloz, D., Santos, N. C., Udry, S., Bertaux, J. L., & Sivan, J. P. 2006, *Nature*, 441, 305
- [Lyapunov 1907] Lyapunov, A. M. 1907, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 9, 203
- [McArthur *et al.* 2004] McArthur, B. E., Endl, M., Cochran, W. D., Benedict, G. F., Fischer, D. A., Marcy, G. W., Butler, R. P., Naef, D., Mayor, M., Queloz, D., Udry, S., & Harrison, T. E. 2004, *The Astrophysical Journal*, 614, L81
- [McCarthy *et al.* 2004] McCarthy, C., Butler, R. P., Tinney, C. G., Jones, H. R. A., Marcy, G. W., Carter, B., Penny, A. J., & Fischer, D. A. 2004, *The Astrophysical Journal*, 617, 575

- [Malbet 2005] Malbet, F. 2005, Ecole CNRS de Goutelas XXVIII : *Formation planétaire et exoplanètes*, J.L. Halbwachs, D. Egret et J.M. Hameury ed., 81
- [Marcy *et al.* 1998] Marcy, G. W., Butler, R. P., Vogt, S. S., Fischer, D., & Lissauer, J. J. 1998, *The Astrophysical Journal*, 505, L147
- [Marcy *et al.* 2001] Marcy, G. W., Butler, R. P., Fischer, D., Vogt, S. S., Lissauer, J. J., & Rivera, E. J. 2001, *The Astrophysical Journal*, 556, 296
- [Marcy *et al.* 2002] Marcy, G. W., Butler, R. P., Fischer, D., Vogt, S. S., Laughlin, G., Vogt, S. S., Henry, G. W., & Pourbaix, D. 2002, *The Astrophysical Journal*, 581, 1375
- [Marzari *et al.* 2002] Marzari, F., Tricarico P., & Scholl, H. 2002, *The Astrophysical Journal*, 579, 905
- [Marzari *et al.* 2003a] Marzari, F., Tricarico P., & Scholl, H. 2003, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 4, 1091
- [Marzari *et al.* 2003b] Marzari, F., Tricarico P., & Scholl, H. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 410, 725
- [Marzari *et al.* 2005] Marzari, F., Scholl, H., & Tricarico, P. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 442, 359
- [Marzari *et al.* 2006] Marzari, F., Scholl, H., Tricarico, P., 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 453, 341
- [Mayor & Queloz 1995] Mayor, M. & Queloz, D. 1995, *Nature*, 378, 355
- [Mayor *et al.* 2004] Mayor, M., Udry, S., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Santos, N. C., & Burnet, M. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 415, 391
- [Melita & Brunini 2001] Melita M. D. & Brunini A. 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 322, L17
- [Michel 1957] Michel, P. H. 1957, “Histoire générale des Sciences”, Tome 1, Presse Universitaire de France (Paris)
- [Michtchenko *et al.* 2006] Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., & Beugé, C. 2006, *Icarus*, 181, 555
- [Milani & Nobili 1992] Milani, A., Nobili, A., 1992, *Nature*, 357, 569
- [Morbidelli 2002] Morbidelli, A., 2002, “Modern Celestial Mechanics : Aspects of Solar System Dynamics”, Ed. Taylor & Francis
- [Morbidelli *et al.* 2007] Morbidelli, A. & Crida, A. 2007, *Icarus*, 191, 158
- [Moutou & Pont 2005] Moutou, C. & Pont, F. 2005, Ecole CNRS de Goutelas XXVIII : *Formation planétaire et exoplanètes*, J.L. Halbwachs, D. Egret et J.M. Hameury ed., 55
- [Murray & Dermott 1999] Murray C.D. & Dermott S.F., 1999, “Solar System Dynamics”, Cambridge University Press
- [Naef *et al.* 2004] Naef, D., Mayor, M., Beuzit, J. L., Perrier, C., Queloz, D., Sivan, J. P., & Udry, S. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 414, 351

- [Nagasawa *et al.* 2008] Nagasawa, M., Ida., S., & Bessho, T. 2008, *The Astrophysical Journal*, 678, 498
- [Namouni 2005] Namouni, F. 2005, *Astronomical Journal*, 130, 280
- [Namouni & Zhou 2006] Namouni, F. & Zhou, J. L. 2006, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 95, 245
- [Nesvorný & Ferraz-Mello 1997] Nesvorný, D. & Ferraz-Mello, S. 1997, *Astronomy & Astrophysics*, 320, 672
- [Newton 1687] Newton, I. 1687, “The principia : Mathematical Principles of Natural Philosophy”, traduction de B. Cohen & A. Whitman, notes de B. Cohen, University of California Press (Berkeley, Los Angeles, London), 1999
- [Pepe *et al.* 2007] Pepe, F., Correia, A. C. M., Mayor, M., *et al.* 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 462, 769
- [Perryman 2000] Perryman, M. C. A. 2000, *Reports on Progress in Physics*, 63, 1209
- [Poincaré 1892] Poincaré, H. 1892, “Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste”, volume 1, Gauthier-Villars Ed. (Paris)
- [Pollack *et al.* 1996] Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J., Podolak, M., & Greenzweig, Y. 1996, *Icarus*, 124, 62
- [Psychoyos & Hadjidemetriou 2005] Psychoyos, D., & Hadjidemetriou, J. D. 2005, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 92, 135
- [Quirrenbach 2006] Quirrenbach, A. 2006, in “Extrasolar planets”, *Saas-Fee Advanced Course*, 31,1
- [Rivera *et al.* 2005] Rivera, E. J., Lissauer, J. J., Butler R. P., Marcy G. W., Vogt, S. S., Fischer, D. A., Brown, T. M., Laughlin, G., & Henry, G. W. 2005, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 37, 1487
- [Robutel & Laskar 2001] Robutel, P. & Laskar, J. 2001, *Icarus*, 152, 4
- [Sándor *et al.* 2006] Sándor, Z., Kley, W., & Klagyivik, P. 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 451, L31
- [Sándor *et al.* 2007] Sándor, Z., Kley, W., & Klagyivik, P. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 472, 981
- [Santos *et al.* 2004] Santos, N. C., Bouchy, F., Mayor, M., Pepe, F., Queloz, D., Udry, S., Lovis, C., Bazot, M., Benz, W., Bertaux, J. L., Lo Curto, G., Delfosse, X., Mordasini, C., Naef, D., Sivan, J. P., & Vauclair, S. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 426, L19
- [Sidlichovský & Nesvorný 1997] Sidlichovský, M. & Nesvorný, D. 1997, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 65, 137
- [Szebehely 1967] Szebehely, V. G. 1967, “Theory of orbits : the restricted problem of three bodies”, *Academic Press* (New York)
- [Thommes & Lissauer 2003] Thommes, E. W. & Lissauer, J. J. 2003, *The Astrophysical Journal*, 597, 566

- [Tinney *et al.* 2006] Tinney, C. G., Butler, R. P., Marcy, G. W., Jones, H. R. A., Laughlin, G., Carter, B. D., Bailey, J. A., & O'Toole, S. 2006, *The Astrophysical Journal*, 647, 594
- [Tsiganis *et al.* 2000] Tsiganis, K., Varvoglis, H., Hadjidemetriou, D., 2000, *Icarus*, 146, 240
- [Udry *et al.* 2002] Udry, S., Mayor, M., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., Santos, N. C., & Burnet, M. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 390, 267
- [Varvoglis 2007] Varvoglis, H. 2007, *IAU Symposium 249*
- [Vogt *et al.* 2005] Vogt, S. S., Butler, R. P., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Henry, G. W., Laughlin, G., Wright, J. T., & Johnson, J. A. 2005, *The Astrophysical Journal*, 632, 638
- [Wolszczan & Frail 1992] Wolszczan, A. & Frail D. 1992, *Nature*, 355, 145
- [Wright *et al.* 2007] Wright, J. T., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Butler, R. P., Vogt, S. S., Tinney, C. G., Jones, H. R. A., Carter, B. D., Johnson, J. A., McCarthy, C., & Apps, K. 2007 *The Astrophysical Journal*, 657, 533
- [Zapatero-Osorio *et al.* 2000] Zapatero-Osorio, M. R., Béjar, V. J. S., Martín, E. L., Rebolo, R., Navascués, D. B., Bailer-Jones, C. A. L., & Mundt, R. 2000, *Science*, 290, 103
- [Zhou *et al.* 2004] Zhou, L. Y., Lehto, H. J., Sun Y. S., & Zheng, J. Q. 2004, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350, 1495

Introduction aux Résonances Orbitales Rétrogrades dans les Systèmes Multi-Planétaires

Julie GAYON-MARKT

Résumé

Depuis la détection de la première exoplanète en 1995 (autour d'une étoile de type solaire), près de 300 planètes extrasolaires et 25 systèmes multi-planétaires ont été observés à ce jour. La plupart de ces systèmes multi-planétaires se caractérisent par des planètes de type Jupiter, proches de leur étoile centrale et dont l'orbite est souvent très excentrique. Ces particularités peuvent conduire à de fortes interactions gravitationnelles entre les planètes. En conséquence, d'un point de vue dynamique, ces systèmes multi-planétaires compacts constituent une classe spécifique du problème général des N -corps. Des méthodes numériques spécifiques ont alors été développées afin d'explorer l'espace des paramètres à plusieurs dimensions de ces systèmes. Dans cette thèse, un bilan dynamique de plusieurs systèmes planétaires détectés est établi dans un premier temps, en utilisant deux méthodes d'analyse globale.

Les planètes extrasolaires sont jusqu'à présent supposées être en révolution prograde autour de leur étoile mère. Cependant, cette thèse introduit une autre *possibilité théorique* conduisant à la stabilité de certains systèmes compacts. Nous explorons selon une approche numérique, des systèmes théoriques en *résonance de moyen mouvement* (MMR) comportant deux planètes en *contre-révolution* (ce qui signifie qu'une des deux planètes a un mouvement rétrograde par rapport à l'autre). En outre, je développe l'Hamiltonien du problème des 3-corps dans ce cas particulier de MMR *rétrogrades*. La problématique des résonances orbitales rétrogrades est donc analysée d'un point de vue à la fois numérique et analytique. Par ailleurs, afin d'étudier la *consistance* entre *mécanismes théoriques* impliquant des MMR rétrogrades et *observations*, des ajustements aux observations sont effectués pour une variété de systèmes observés. Outre les possibilités théoriques et observationnelles des résonances rétrogrades, une discussion portant sur la formation de systèmes contenant des planètes en contre-révolution est proposée.

Abstract

Since the first detection of an exoplanet in 1995 (around a solar-type star), about 300 extrasolar planets and 25 multi-planetary systems have been observed until now. Most of these multi-planetary systems are characterized by hot-Jupiters close to their central star and moving on eccentric orbits. These particularities may lead to strong gravitational interactions between the planets. As a consequence, compact multi-planetary systems form a specific class of the general N -body problem. To explore the multi-dimensional parameter space of multi-planetary systems, specific numerical methods of global analysis were required in order to remedy the problem of great number of degrees of freedom of such systems. A dynamical checkup of several detected planetary system is then firstly proposed in this thesis.

Extrasolar planets are up to now a priori found in direct orbital motions about their host star. However, in this thesis, a *theoretical alternative* suitable for the stability of compact two-planet systems is investigated. Using a numerical method of global dynamics analysis, we explore theoretical systems in *Mean Motion Resonance* (MMR) harboring *counter-revolving* planets (which means that one planet moves on a retrograde orbit). Besides, I have expand the Hamiltonian of the 3-body problem for the particular case of *retrograde* MMR. Consequently, the retrograde resonance is analysed from both a numerical and an analytical point of view. Furthermore, in order to study the *observational feasibility* of retrograde MMR, observational fits are performed for different detected systems. Finally, the formation of systems harboring counter-revolving planets is discussed.