HAL
open science

Etude analytique des performances des systèmes radio-mobiles en présence d'évanouissements et d'effet de masque

Philippe Mary

To cite this version:

Philippe Mary. Etude analytique des performances des systèmes radio-mobiles en présence d'évanouissements et d'effet de masque. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. INSA de Lyon, 2008. Français. NNT : . tel-00406310

HAL Id: tel-00406310

https://theses.hal.science/tel-00406310v1

Submitted on 21 Jul 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N d'ordre 2008-ISAL-0008
Année 2008

Thèse

Etude analytique des performances des systèmes radio-mobiles en présence d'évanouissements et d'effet de masque

Présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

Le grade de docteur

Par

Philippe Mary
Projet INRIA ARES, Laboratoire CITI, INSA de Lyon

Ecole doctorale : EEA
Spécialité : Images et Systèmes

Soutenue le 11 Février 2008 devant la Commission d'examen

Jury

Pierre Duhamel	Directeur de Recherche (CNRS)	Président du Jury
Inbar Fijalkow	Professeur (ENSEA, Cergy)	Rapporteur
Jean-Claude Belfiore	Professeur (ENST, Paris)	Rapporteur
Christian Gontrand	Professeur (INSA, Lyon)	Directeur de thèse
Jean-Marie Gorce	Maître de conférence, HDR (INSA, Lyon)	Co-Directeur de thèse
Mischa Dohler	Docteur (France Telecom, Grenoble)	Co-Encadrant
Jean-Marc Brossier	Professeur (INPG, Grenoble)	Examinateur
Guillaume Villemaud	Maître de conférence, (INSA, Lyon)	Examinateur

Remerciements

Cette thèse est le fruit d'une coopération entre France Telecom R&D et le laboratoire CITI de l'INSA de Lyon. Je tiens à remercier Marylin Arndt de m'avoir accepté en thèse dans son équipe et toujours laissé libre d'explorer les pistes de recherche que je souhaitais.

J'exprime ici toute ma gratitude à Jean-Marie Gorce pour avoir encadré cette thèse à l'INSA de Lyon et avoir montré autant d'enthousiasme devant mon travail. Sa disponibilité, ses remarques toujours pertinentes et le recul dont il a su faire preuve ont grandement contribué à la réalisation finale de ce mémoire. Je remercie Christian Gontrand pour avoir suivi ces travaux en tant que directeur de thèse.

Mes remerciements les plus chaleureux sont adressés à Mischa Dohler pour avoir encadré cette thèse à France Telecom, malgré une "coopération" assez tardive. Je rend hommage en premier lieu à l'excellent scientifique avec qui j'ai eu le privilège d'étudier. Il a su me guider sur les sentiers de la recherche, m'enseigner l'art de distinguer les choses importantes du détail, montrer de l'intérêt pour mon travail et toujours me tirer vers le haut lors des phases de découragement que tout thèsard a un jour connu. Sans sa disponibilité et sa rigueur, cette thèse n'aurait jamais été ce qu'elle est aujourd'hui et je ne le remercierai jamais assez. Plus qu'un collègue, je n'oublie pas l'ami que j'ai gagné en te rencontrant. Je te remercie pour ton éternelle bonne humeur et ton enthousiasme, pour les sortis au pub, au ski et les bons saucissons que tu nous ramenais de tes expéditions à Barcelone : *In der Freundschaft !*

Je tiens à remercier sincèrement Pierre Duhamel directeur de recherche au CNRS de m'avoir fait l'honneur de présider ce Jury. J'adresse mes remerciements aux deux personnes qui ont accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs : Inbar Fijalkow qui n'a pas hésité une seconde devant cette lourde tâche et qui a manifesté dès la première rencontre, un vif intérêt pour ces travaux ; Jean-Claude Belfiore, qui a accepté de venir porter un regard d'expert en analyse de performance sur ce mémoire et d'en faire une critique positive. Merci également à Jean-Marc Brossier et Guillaume Villemaud d'avoir accepté de participer au Jury de soutenance et d'en être les examinateurs.

Je remercie tous les membres de l'URD WISE pour l'ambiance de travail dont ils m'ont entouré pendant ces trois années. Mes chers amis Lahouari, Mohamed, Dave pour les moments partagés. Les thèsards, post-doc, permanents ou stagiaires pour les repas détendus au LRP : Thomas, Ludovic, Abdelmalik, Jérémie, Nicolas, Manu, Matthieu, Benoît (merci pout tout), Apostolos, Jean, Fred, Jordi... et tous les autres. Aux co-voitureurs de Tencin : Agnès, Vincent, Denis pour le transport de notre contrée reculée jusqu'à FT. Je voudrais également adresser mes remerciements à tous mes collègues du CITI, Pierre-François, Katia, Guillaume, Fabrice... pour m'avoir accueilli si chaleureusement. Enfin je n'oublie pas Gemma et la petite Noa pour nous avoir attendri avec Sophie.

Merci à mes parents, mon frère Eric, pour leur soutien dans toute cette entreprise et pour l'éducation qu'ils ont su me faire découvrir, sans oublier toute la belle famille qui m'a toujours soutenu.

Pour terminer, je dédie ce manuscrit à ma femme Sophie dont le soutien ne s'est jamais évanoui une seule fois. Elle a su me soutenir dans les moments les plus difficiles et sait plus que quiconque qu'une thèse se réalise à deux. Je tenais à lui exprimer ici tout mon amour renouvelé.

Table des matières

Remerciements **iii**

Acronymes **vii**

Notations **ix**

Introduction **1**

1 Modèle du canal et prérequis **6**

1.1 Modélisation du canal radio 6
1.1.1 Aspects physiques de la propagation 6
1.1.2 Caractérisation des canaux à évanouissements 7
1.1.3 Modélisation des canaux plats 8
1.1.4 modélisation des canaux sélectifs 13
1.2 Critères d'analyses de performance des systèmes 13
1.2.1 SNR moyen dans un canal à évanouissements rapides 13
1.2.2 Probabilité d'erreur moyenne 14
1.2.3 Probabilité de coupure symbole 14
1.3 Fonctions spéciales utilisées 15
1.3.1 Fonction Gamma 16
1.3.2 Fonction Beta 16
1.3.3 Fonction hypergéométrique de Gauss 16
1.3.4 Fonction hypergéométrique d'Appell de première espèce 17
1.3.5 Fonction Beta incomplète 18
1.4 Méthodes mathématiques d'approximation 18
1.4.1 Approximation de Laplace 18
1.4.2 Expression asymptotique 21
1.5 Techniques MIMO 23
1.5.1 Modèle de canal MIMO 24
1.5.2 Systèmes multi-antennes à codage blocs orthogonaux 26
1.5.3 Multiplexage spatial 29
1.6 Codage canal 30
1.6.1 Codes blocs 30
1.6.2 Codes convolutifs 32
1.7 Conclusion 34

2 Performance des systèmes SISO **35**
2.1 Introduction . . . 35
2.2 Probabilité d'erreur moyenne et probabilité de coupure : état de l'art . . . 36
2.2.1 Analyse du SEP . . . 36
2.2.2 Analyse du SEO . . . 38
2.3 Estimation du SEP et du SEO . . . 40
2.3.1 Nakagami-m, M-PSK . . . 40
2.3.2 Nakagami-m, M-QAM . . . 47
2.3.3 Canal de Rice et modulation M-PSK . . . 51
2.3.4 Canal de Rice et modulation M-QAM . . . 55
2.4 Performance en présence de codage canal . . . 58
2.4.1 Codes correcteurs d'erreur en bloc . . . 59
2.4.2 Codes correcteurs d'erreur convolutifs . . . 64
2.5 Conclusion . . . 67

3 Systèmes MIMO **69**
3.1 Introduction . . . 69
3.2 Estimation du SEP et du SEO pour les systèmes STBC MIMO . . . 70
3.2.1 Hypothèses . . . 70
3.2.2 Canal de Nakagami et M-PSK . . . 70
3.2.3 Canal de Nakagami et M-QAM . . . 74
3.2.4 Canal MIMO Nakagami-m Corrélé . . . 75
3.2.5 Canal de Rice et M-PSK . . . 78
3.2.6 Canal de Rice et M-QAM . . . 81
3.3 Estimation du SEP et du SEO pour les systèmes à multiplexage spatial . . . 84
3.3.1 Hypothèses . . . 84
3.3.2 Canal de Rayleigh et M-PSK . . . 85
3.3.3 Canal de Rayleigh et M-QAM . . . 89
3.3.4 Canal MIMO corrélé en émission et en réception . . . 90
3.3.5 Canal de Rice et M-PSK . . . 93
3.3.6 Canal de Rice et M-QAM . . . 94
3.4 Conclusion . . . 95

4 Performance en présence d'interférence **96**
4.1 Introduction . . . 96
4.2 Etat de l'art . . . 96
4.3 Performance d'un système SISO en présence d'un interférent . . . 98
4.3.1 Rayleigh/Rayleigh . . . 100
4.3.2 Nakagami-m/Nakagami-m . . . 109
4.3.3 Rice/Rice . . . 114
4.4 Système à antennes multiples. . . . 116
4.4.1 Système à diversité SIMO et présence d'un interférent. . . . 116
4.4.2 Présence d'interférents multiples de même puissance. . . . 121
4.4.3 Interférents multiples et de puissances arbitraires. . . . 123
4.4.4 Systèmes MIMO et interférents multiples. . . . 123
4.5 Conclusion . . . 124

5 Détection Multi utilisateurs **126**
5.1 Introduction et position du problème 126
5.2 Annulation d'interférence et récepteur multi-utilisateurs 127
5.3 Système à réjection d'interférence par maximum de vraisemblance 128
5.3.1 Modèle et équations du récepteur 128
5.3.2 Performance en terme de probabilité d'erreur 130
5.3.3 SEO pour le signal d'intérêt. 136
5.3.4 Etude dans le cas général : présence d'IES. 137
5.4 Réjection d'interférence en WLAN 138
5.4.1 Détecteur MUD-MLSE sans étalement de spectre 138
5.4.2 Application à des signaux DSSS. 144
5.5 Conclusion 149

Conclusion et perspectives **150**

Annexes **156**
A.1 Approximation du SEP en canal de Rice 156
A.2 Calcul de $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ 157
A.3 Preuve du théorème sur le SEO avec interférent 159
A.4 Calcul de la probabilité de réalisation de l'événement ε_3 161

Acronymes

AWGN	Additive White Gaussian Noise
BCH	Bose-Chaudhury-Hocquenghem
BSC	Binary Symmetric Channel
BEP	Bit Error Probability
BER	Bit Error Rate
BLAST	Bell Laboratories Layered Space Time
BPSK	Binary Phase Shift Keying
QPSK	Quaternary Phase Shift Keying
CDMA	Code Division Multiple Access
CSMA/CA	Carrier Sense Multiple Access/Collision Avoidance
DAB	Digital Audio Broadcasting
DVB	Digital Video Broadcasting
dB	Decibel
GSM	Global System for Mobile Communications
HSDPA	High Speed Downlink Packet Access
HSUPA	High Speed Uplink Packet Access
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
ISM	Industrial, Scientific and Medical band
LOS	Line of Sight
NLOS	non-Line of Sight
IES	Interférence Entre Symbole
M-FSK	M-ary Frequency Shift Keying
M-PAM	M-ary Pulse Amplitude Modulation
M-PSK	M-ary Phase Shift Keying
M-QAM	M-ary Quadrature Shift Keying
MGF	Moment Generating Function
MHz	Mega Hertz
MIMO	Multiple-Input-Multiple-Output
SISO	Single-Input-Single-Output
SIMO	Single-Input-Multiple-Output
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
STBC	Space-Time Block Code

d.d.p.	densité de probabilité
i.i.d.	indépendants et identiquement distribués
v.a.	variable aléatoire
CCI	Co-Channel Interference
CDF	Cumulative Distribution Function
DSSS	Direct Sequence Spread Spectrum
ETSI	European Telecommunications Standards Institute
EEP	First Event Error Probability
GHz	Giga Hertz
LMMSE	Linear Minimum Mean Square Error
MAC	Medium Access Control
MAP	Maximum A posteriori Probability
MLSE	Maximum Likelihood Sequence Estimator
MMSE	Minimum Mean Square Error
MRC	Maximum Ratio Combining
MUD	Multi-User Detection
MV	Maximum de Vraisemblance
OC	Optimum Combining
PCI	Partial Channel Interference
PEO	Packet Error Outage
PEP	Packet Error Probability
PER	Packet Error Rate
SEO	Symbol Error Outage
SEP	Symbol Error Probability
SER	Symbol Error Rate
WEP	Word Error Probability
PIC	Parallel Interference Canceller
SIC	Successive Interference Canceller
INR	Interference-to-Noise Ratio
SIR	Signal-to-Interference Ratio
SINR	Signal-to-Interference and Noise Ratio
SNR	Signal-to-Noise Ratio
TDD	Time Division Duplex
TDMA	Time Division Multiple Access
UMTS	Universal Mobile Telecommunications System
WLAN	Wireless Local Area Network
WiMax	Worldwide Interoperability for Microwave Access
ZF	Zero Forcing

Notations

a	Scalaire
$\mathbf{a}$	Vecteur
$\mathbf{a}^T$	Vecteur transposé
$\mathbf{a}^H$	Vecteur transposé hermitien
$\mathbf{A}$	Matrice
$\mathbf{A}^{-1}$	Matrice inverse
$[\mathbf{A}]_{kl}$	Élément de la $k-$ième ligne et $l-$ième colonne de $\mathbf{A}$
$vec(\mathbf{A})$	Concatène les colonnes de $\mathbf{A}$ en un vecteur
$\|\|\mathbf{A}\|\|_F$	Norme de Frobenius de $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	Determinant de $\mathbf{A}$
$tr(\mathbf{A})$	Trace de $\mathbf{A}$
$\odot$	Produit de convolution
$\otimes$	Produit de Kronecker
${}_2F_1$	Fonction hypergéométrique de Gauss
F_1	Fonction hypergéométrique d'Appell de première espèce
$\Gamma(x)$	Fonction Gamma complète
$\Gamma(a,x)$	Fonction Gamma incomplète supérieure
$B(x,y)$	Fonction Beta
$B_x(a,b)$	Fonction Beta incomplète
W	Fonction de Lambert
W_0	Fonction de Lambert restreinte à $z \geq -1/e$
$(a)_n$	Symbole de Pochhammer
arg max	Maximum sur les arguments
arg min	Minimum sur les arguments
lim	Limite d'une fonction
$\max(a,b)$	Maximum entre a et b
$\min(a,b)$	Minimum entre a et b
E	Espérance mathématique
P	Probabilité
$P_{b,s,m,p}(E)$	Probabilité d'erreur bit, symbole, mot code, paquet
$P_{s,m,p}(O)$	Probabilité de coupure symbole, mot code, paquet
$P^*_{b,s,p}$	Probabilité d'erreur cible bit, symbole, paquet
p_{γ_s}	densité de probabilité de γ_s
M_{γ_s}	Fonction génératrice des moments de γ_s
$\mathbb{C}$	Corps des complexes
$\mathbb{N}$	Corps des entiers naturels
$\mathcal{CN}$	Distribution complexe gaussienne
$\mathcal{CW}_n(m,\mathbf{0},\mathbf{S})$	Distribution de Wishart complexe à m degré de liberté

α	Atténuation du canal
ε	Événement erreur dans un détecteur MLSE
γ_s	Rapport signal à bruit symbole instantané
$\overline{\gamma}_s$	Rapport signal à bruit symbole moyen
λ_l	$l-$ième valeur propre
λ	Longueur d'onde
μ	Moyenne
σ^2	Variance
m	Facteur d'évanouissement de Nakagami
K	Facteur d'évanouissement de Rice
K	Longueur de contrainte d'un code convolutif
$g_{\text{qam,psk}}$	Constantes de modulation QAM, PSK
g	Constante de modulation QAM
M	Ordre de modulation
h	Coefficient du canal
n_r	Nombre d'antenne de réception
n_t	Nombre d'antenne d'émission

E	Événement erreur
E_1	Événement de première erreur
E_b	Énergie bit
E_s	Énergie symbole
$\mathcal{G}$	Matrice de Génération de code STBC
N_0	Densité spectrale mono-latérale du bruit
R_c	Taux de codage spatio-temporel
R_c	Taux de codage convolutif
P_e	Puissance d'émission
P_r	Puissance de réception

Introduction

Contexte

Dans les systèmes de télécommunications cellulaires, la qualité d'une communication radio est étroitement liée au canal de propagation. Les évanouissements rapides, dus aux trajets multiples dans l'environnement de propagation, engendrent des fluctuations de la puissance instantanée au récepteur, affectant directement la qualité de la transmission et la capacité du lien. Pour améliorer la liaison, le récepteur peut mettre en oeuvre des techniques de traitement du signal comme l'égalisation ou utiliser des antennes multiples, afin de s'affranchir des fluctuations de la puissance instantanée du signal. Un lien radio en présence d'évanouissement peut être caractérisé par la probabilité d'erreur symbole (SEP "Symbol Error Probability") qui permet de décrire sa qualité moyenne. C'est le critère le plus pertinent, et donc le plus largement étudié, pour l'analyse des performances sur ce type de canal. L'effet de masque ou "shadowing" est responsable des variations à long terme de la puissance moyenne au récepteur. Il est du à la présence d'obstacles importants entre l'émetteur et le récepteur (immeubles ou forêts). Parce que la vitesse de déplacement des mobiles est limitée, la variation de puissance liée à ces obstacles est considérée comme lente par rapport à la durée symbole. D'autre part, parce que seule une approche statistique permet de modéliser de façon générale un tel environnement, le shadowing est souvent décrit sous la forme d'une variable aléatoire, de type log-normale. Les variations de puissance dues au shadowing engendrent une variation de la qualité du lien radio au court du temps. Il devient alors caduque de chercher à caractériser un tel lien par une probabilité d'erreur moyenne qui traduit assez mal la réalité de la communication radio. Pour tenir compte de ces variations on préfère utiliser un critère de probabilité de coupure (outage) qui exprime la probabilité qu'un lien radio se retrouve dans un état où la probabilité d'erreur dépasse un certain seuil cible. Ainsi, les critères d'analyse des effets à court terme et à long terme sont assez différents, le SEP étant basé sur une estimation moyenne des performances, alors que l'outage caractérise la probabilité de dépassement d'erreur. Il y a dans le deuxième critère la notion de variation temporelle des caractéristiques du canal qui n'est pas présente dans le critère du SEP.

Une étude de performances peut se faire de deux façons, soit analytiquement soit par simulation. La première méthode présente l'avantage de pouvoir caractériser rapidement et de façon précise un système de communication, à la condition que la modélisation du système (canal, algorithme de réception, etc) soit suffisamment réaliste. Le compromis entre réalisme et complexité du modèle est un point clef pour les méthodes analytiques qui peuvent se révéler très difficiles à mettre en oeuvre. L'approche par simulation nécessite un grand nombre de donnée avec une réalisation aléatoire du canal pour chaque symbole ou trame. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir introduire le niveau de réalisme que l'on veut dans le système, mais demande un temps de simulation en général important et est donc coûteuse. Les deux approches, analytique et simulée, sont complémentaires et

s'alimentent mutuellement. L'étude théorique en particulier permet de fournir des bornes supérieures sur les performances.

La plupart des travaux qui s'intéressent à l'analyse de performances des systèmes radio en présence d'effet de masque s'intéressent généralement à la probabilité que la puissance moyenne soit inférieure à un certain seuil. Cependant, pour pouvoir exploiter au mieux un tel résultat, il est indispensable de pouvoir convertir une telle probabilité, en la probabilité que le SEP soit supérieur à une probabilité d'erreur cible. Mathématiquement, les deux probabilités sont identiques mais passer de l'une à l'autre nécessite de pouvoir exprimer le SEP en fonction du rapport signal à bruit (SNR, "Signal-to-Noise Ratio"), et inversement, le SNR en fonction du SEP. L'intérêt d'une telle démarche est de pouvoir prédire le comportement moyen d'une liaison à partir de la simple définition d'un SEP cible. En effet, au niveau système, on est plutôt intéressé par la qualité de service (typiquement le SEP moyen) que l'on peut atteindre dans un environnement donné et avec quelle probabilité, que par la puissance moyenne disponible. C'est cette recherche de lien entre la qualité de service dans un réseau et l'environnement complexe comprenant les effets court termes et l'effet de masque, qui sous-tend le travail présenté dans ce manuscrit et qui constitue une approche originale par rapport aux travaux existants.

Objectifs

Cette thèse a donc pour but de fournir des expressions analytiques approchées des performances des systèmes radios en prenant en compte shadowing et évanouissements. Afin de pouvoir exprimer la probabilité de coupure en fonction du SEP moyen cible, il faut pouvoir inverser analytiquement la probabilité d'erreur moyenne. Pour atteindre cet objectif nous cherchons des approximations du SEP moyen précises sur une large plage de rapport signal à bruit, et qui soient de plus, inversibles ; c'est-à-dire que l'on puisse remonter au SNR analytiquement. A partir de ces expressions nous cherchons à déterminer le comportement de la probabilité de coupure en présence d'effet de masque pour des signaux bandes étroites dans des canaux plats, pour des modulations linéaires et plusieurs types de techniques multi-antennes. Nous nous intéressons également à l'impact du codage canal, qui joue un rôle essentiel dans les systèmes radio. Les résultats que nous obtenons en lien isolé (sans interférences) sont présentés au chapitre 2 étendus aux systèmes multi-antennes au chapitre 3. En plus des effets du canal sur la transmission d'un signal radio entre une station de base et un mobile, la présence d'interférences due à d'autres communications limite la qualité de service qu'un utilisateur peut tirer du réseau. De plus le lien entre les variations de la puissance moyenne de l'utilisateur interférent et celles du signal d'intérêt sur la probabilité de coupure ne sont pas ou peu étudiées dans la littérature. C'est ce que nous proposons au chapitre 4. Nous proposons quelques expressions approchées en présence d'un interférent. Parce que l'interférence est un réel facteur de perte de qualité de transmission, la mise en place de réjection d'interférence par le biais d'une détection multi-utilisateurs par exemple doit permettre d'améliorer la capacité des réseaux radios. Plusieurs travaux ont d'ailleurs montré que l'intégration de la réjection d'interférence au niveau du récepteur pouvait accroître la capacité des réseaux. Nous nous proposons d'étudier les performances d'une détection multi-utilisateurs par maximum de vraisemblance par la simulation, dans le cadre de canaux se chevauchant spectralement au chapitre 5. Ce cas de figure est un facteur limitant de la capacité des réseaux locaux sans-fils WLAN (Wireless Local Area Network), et les performances d'une communication radio en présence de canaux à recouvrement et avec réjection d'interférence n'ont pas vraiment été étudiées.

Plan des travaux de thèse

Ce manuscrit comporte 5 chapitres. Le premier chapitre introduit les différentes notions plus ou moins élémentaires dont nous aurons besoin par la suite. Le deuxième chapitre traite de l'analyse de performance des systèmes radios point-à-point mono-antenne (SISO "Single-Input-Single-Output") en présence d'un canal à évanouissement et avec effet de masque. Le troisième chapitre étend l'étude faite dans le chapitre 2 en considérant les systèmes MIMO. Le quatrième chapitre s'intéresse à l'étude de performance des systèmes radios en présence d'interférence co-canal. Le cinquième et dernier chapitre traite des performances d'un lien radio mettant en oeuvre un algorithme de réjection d'interférence.

Le premier chapitre de cette thèse introduit les éléments nécessaires à la compréhension du reste du manuscrit. On précise les modèles de canaux que l'on utilise par la suite, ainsi que les critères d'analyses de performances : le SEP moyen et le SEO. Nous abordons également les techniques d'approximations de la probabilité d'erreur que nous utilisons par la suite, notamment l'approximation de Laplace qui constitue l'outil central de notre étude. Nous passons ensuite aux systèmes de communications dits avancés, en parlant des systèmes multi-antennes en entrée-sortie (MIMO "Multiple Input Multiple Output") à codage bloc orthogonaux (STBC "Space-Time Block Codes") ainsi que des architectures à multiplexage spatial de type V-BLAST (Vertical Bell Laboratories Layered Space-Time Architecture). Nous finissons par les codes correcteurs d'erreurs blocs et convolutifs.

Le second chapitre constitue la première contribution de cette thèse. Nous considérons un lien radio simple SISO, seulement limité par le bruit additif gaussien au récepteur. Nous considérons tout d'abord un système sans codage canal. Nous étudions les performances d'un tel système dans des canaux à évanouissements rapides (Nakagami et Rice) et en présence de shadowing. Pour cela, nous proposons des approximations simples et précises (par rapport à la valeur exacte) du SEP moyen. Nous montrons que ces expressions sont inversibles par rapport au SNR moyen et nous donnons des formules simples du SNR moyen en fonction du SEP. Grâce à ces expressions nous estimons la probabilité de coupure symbole en présence de shadowing. Nous incluons ensuite la présence de codage canal dans l'étude de la probabilité de coupure. Nous considérons l'utilisation de codes correcteurs blocs et convolutifs à décision dure. Nous proposons des expressions inversibles de la probabilité d'erreur paquet (ou bloc) en canal à évanouissements rapides, qui nous permettent d'étudier la probabilité de coupure bloc ou paquet en présence de shadowing.

Le troisième chapitre étend l'étude théorique menée dans le deuxième chapitre aux systèmes multi-antennes. Nous étudions deux systèmes MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output) : les systèmes spatio-temporels à codage blocs orthogonaux (STBC), et les systèmes à multiplexage spatial. Pour les systèmes STBC, nous dérivons des approximations précises à tous les SNR de la probabilité d'erreur dans un canal de Nakagami et Rice ne présentant pas de corrélation. Nous inversons analytiquement ces expressions afin de calculer la probabilité de coupure symbole en présence de shadowing. Pour les systèmes à multiplexage spatial, nous considérons un traitement ZF (Zero Forcing) à la réception. Nous dérivons une approximation du SEP moyen en canal de Rayleigh et de Rice, en présence de corrélation à l'émission. Une inversion analytique peut également être obtenue dans ce cas.

Le quatrième chapitre étend l'étude théorique menée dans les chapitres précédents lorsque l'on se trouve en présence d'interférence. Une approximation assez précise et inversible de la probabilité d'erreur peut être dérivée dans le cas où le signal d'intérêt et le signal interférent subissent tous deux des évanouissements de Rayleigh. On propose ensuite un théorème pour calculer la probabilité de coupure symbole lorsque la puissance moyenne du signal d'intérêt et interférent varie de façon aléatoire. Nous étudions ensuite le cas d'un canal de Nakagami-m où une approximation asymptotique (lorsque le SNR tend vers l'infini) de la probabilité d'erreur est dérivée. L'étude se poursuit sur le cas où l'on a plusieurs antennes à la réception mettant en oeuvre un algorithme de combinaison optimale (OC "Optimum Combining") capable, sous certaines conditions, de rejeter les interférents. Dans le cas où un interférent est présent une approximation précise de la probabilité d'erreur peut être dérivée pour un canal de Nakagami-m. Lorsque le nombre d'interférents augmente, on obtient beaucoup moins de résultats sauf si ils sont inférieurs au nombre d'antennes où l'on obtient une approximation similaire au cas mono-interférent, mais toujours pas inversible par rapport au SNR.

Le cinquième chapitre aborde l'analyse de performance d'un système à détection multi-utilisateurs par maximum de vraisemblance. La présence d'interférence étant très nuisible à la qualité d'une transmission radio, nous cherchons à évaluer les performances d'un système capable de les prendre en compte. Nous nous plaçons dans un cadre de réseaux locaux sans fils (WLAN "Wireless Local Area Network") où plusieurs canaux se chevauchent en fréquence. Dans un premier temps, nous essayons d'analyser théoriquement les performances d'un récepteur multi-utilisateurs à maximum de vraisemblance lorsque le récepteur est capable de démoduler ces canaux. En étendant les travaux de Forney et Ungerboeck sur l'analyse de performance des récepteurs MLSE (Maximum Likelihood Sequence Estimator) sur les canaux sélectifs, nous dérivons une borne sur la probabilité d'erreur d'un récepteur multi-utilisateurs MLSE. Malheureusement, cette borne n'est pas très exploitable en pratique dans le cas général. Nous nous orientons donc, sur l'étude de ses performances en simulation. Nous considérons deux utilisateurs d'un réseau de type IEEE 802.11 dont les canaux se chevauchent, et étudions le taux d'erreur symbole dans différents scénarios.

Publications

P. Mary, M. Dohler, J.-M. Gorce, G. Villemaud, M. Arndt, "BPSK Bit Error Outage over Nakagami-m Fading Channels in Lognormal Shadowing Environments," *IEEE Communications Letters*, vol. 11, no. 7, pp. 565-567, July 2007.

P. Mary, M. Dohler, J.-M. Gorce, G. Villemaud, M. Arndt, "Estimation du taux de coupure d'une liaison radio MIMO dans un canal de Nakagami avec effet de masque," in *GRETSI 2007*, Troyes France, Septembre 2007, CD-ROM.

P. Mary, J.-M. Gorce, G. Villemaud, M. Dohler, M. Arndt, "Reduced Complexity MUD-MLSE Receiver for Partially-Overlapping WLAN-Like Interference," in *Vehicular Technology Conference, 2007. VTC2007-Spring. IEEE 65th*, Dublin Ireland, April 2007, pp. 1876-1880.

P. Mary, J.-M. Gorce, G. Villemaud, M. Dohler, M. Arndt, "Performance Analysis of Mitigated Asynchronous Spectrally-Overlapping WLAN Interference," in *Wireless Communications and Networking Conference, 2007. WCNC 2007, IEEE*, Hong Kong, March 2007,

pp. 2097-2102

P.-F. Morlat, P. Mary, G. Villemaud, J.-M. Gorce, M. Arndt, “Performance Validation of a Multi-Standard and Multi-Antenna Receiver," in *EUCAP 2006*, Nice France, Novembre 2006, CD-ROM.

CHAPITRE

1 Modèle du canal et prérequis

1.1 Modélisation du canal radio

Dans les systèmes de télécommunication sans fils, l'information est transportée par une onde électromagnétique se propageant à travers un canal de propagation. La propagation des ondes radios dans les canaux sans fils terrestres est un phénomène compliqué caractérisé par une multitude d'effets [1], [2] qui font varier la puissance du signal mesurée.

1.1.1 Aspects physiques de la propagation

Les phénomènes à grande échelle

Cette classe comprend deux effets : l'affaiblissement en distance et les effets de masquage [3]. La première cause de perte de puissance est dûe à la propagation en espace libre de l'onde électromagnétique, qui s'explique par la dispersion isotrope de l'énergie transmise suivant les trois dimensions spatiales. Les pertes en espace libre augmentent avec la fréquence et avec la distance. L'effet de masquage est dû à la présence d'obstacle (bâtiment, forêt...) entre l'émetteur et le récepteur. Aux fréquences auxquelles opèrent les systèmes de télécommunication, l'onde électromagnétique traverse ces obstacles, mais subit une atténuation de puissance fonction de la nature du matériau traversé. Dans la littérature anglo-saxonne, cet effet est désigné sous le terme "shadowing". Dans la suite, c'est celui-ci que nous utiliserons.

Les phénomènes à petite échelle

Les variations de la puissance à petite échelle, que l'on appelle évanouissements, sont mesurées sur un intervalle de temps suffisamment court pour négliger une variation des phénomènes à grande échelle [4]. Les variations de puissance observées ont pour origine la présence d'objets dans l'environnement qui engendrent plusieurs répliques du signal transmis pouvant s'additionner de manière constructive ou destructive au niveau du récepteur. Il y a trois principaux mécanismes qui caractérisent les intéractions de l'onde électromagnétique avec son environnement :

- **La réflexion** : L'onde électromagnétique rencontre un obstacle dont les dimensions sont grandes comparées à la longueur d'onde. Une partie de l'énergie de l'onde est réfléchie par l'obstacle avec un angle égal à celui d'arrivée. L'autre partie de l'énergie est absorbée par l'obstacle suivant le phénomène de réfraction.
- **La diffraction** : L'onde électromagnétique rencontre un obstacle imperméable à celle-ci, mais présentant des dimensions de l'ordre de la longueur d'onde ou présentant des arrêtes vives. D'après le principe de Huyghens chaque point de l'arrête par exemple, se comporte comme une source secondaire qui rayonne à nouveau l'onde dans toutes les directions.
- **La diffusion ("scattering")** : Lorsque l'onde électromagnétique rencontre sur son trajet un grand nombre d'objets dont la taille est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde ou plus petite, son énergie est dispersée dans toutes les directions.

Ces deux grandes classes d'effets font varier la puissance reçue au niveau du récepteur dans une communication radio. Pour modéliser cette puissance reçue on utilise couramment le modèle suivant, constitué de 3 composantes :

$$P_r = P_e G_e G_r k \frac{\lambda^2}{r^\beta} \alpha_{shad} \alpha_{fading}^2, \tag{1.1}$$

Notons que cette équation est valable pour des antennes filaires identiques, où P_r est la puissance reçue à la distance r, P_e la puissance émise, G_e (respectivement G_r) le gain de directivité de l'antenne d'émission (respectivement de réception). Pour des antennes omnidirectionnelles le gain vaut 1. La perte en espace libre est caractérisée par le terme $k\lambda^2/r^\beta$, où λ est la longueur d'onde, r la distance entre l'émetteur et le récepteur, k est une constante et β est un coefficient d'atténuation compris entre 2 et 6 dépendant de l'environnement de propagation. Enfin, α_{shad} et α_{fading} sont des variables aléatoires (v.a.) continues positives. La première caractérise les variations de puissance au récepteur dues à la présence d'obstacle dans l'environnement de propagation (effet grande échelle décrit plus haut). La seconde traduit les variations locales de puissance au récepteur dues aux multi-trajets. C'est la richesse des intéractions de l'onde électromagnétique avec son milieu qui implique une modélisation probabiliste des évanouissements, qu'ils soient courts ou longs termes. Les grandeurs P_r (éventuellement P_e), β, α_{shad} et α_{fading} dépendent du temps t, omis par soucis de clarté. Les ordres de grandeur de temps des variations de ces deux effets ne sont généralement pas comparables ; α_{shad} varie beaucoup plus lentement que α_{fading} [4] (sauf dans certains environnements comme nous le verrons plus loin).

1.1.2 Caractérisation des canaux à évanouissements

La propagation du signal à travers le canal sans fil, engendre des variations de l'amplitude du signal ainsi que de la phase. Pour les modulations cohérentes que l'on considère dans ce manuscrit (M-PSK, M-QAM), les variations de la phase du signal dégradent les performances à moins qu'elles soient compensées au récepteur, puisque l'information est transmise par la phase et l'amplitude de la porteuse. Dans ce manuscrit, on suppose que l'on utilise un récepteur cohérent idéal [5], dans lequel les variations de phase sont parfaitement compensées. Nous considérerons par la suite que les performances d'un récepteur sont donc complètement déterminées par la statistique de l'amplitude de l'enveloppe du signal.

Canal à évanouissement rapide et à évanouissement lent. Ces caractéristiques, désignées sous le terme anglo-saxon par "fast fading" et "slow fading" respectivement, font référence aux effets court terme évoqués plus haut. Elles sont très importantes pour la modélisation mathématique du canal et l'évaluation de performance des systèmes opérant dans ces canaux. La classification d'un canal en évanouissement rapide ou évanouissement lent est reliée à la notion de temps de cohérence du canal T_{coh} qui est la mesure de la séparation temporelle minimale pour laquelle les réponses impulsionnelles du canal à l'émission d'une fréquence pure sont considérées décorrélées. Le temps de cohérence est inversement proportionnel à l'étalement Doppler Δf_d :

$$T_{coh} \propto \frac{k_1}{\Delta f_d}, \tag{1.2}$$

où k_1 est une constante dépendant de l'environnement. L'étalement est le décalage en fréquence de l'onde reçue, à cause du déplacement du récepteur (ou de l'émetteur). Un canal est dit à évanouissement rapide si la durée d'un symbole transmis T_s est égale ou plus

grande que le temps de cohérence du canal. La réalisation du canal change donc d'un symbole à l'autre voir même durant le temps symbole[1]. Un canal est dit à évanouissement lent si le temps de cohérence du canal est beaucoup plus grand que la durée symbole. Autrement dit, la réalisation du canal est la même pour plusieurs symboles transmis. Par conséquent un très faible niveau de signal peut être observé sur la durée de plusieurs symboles consécutifs, menant à une série d'erreurs. Notons que dans ce cas, les évanouissements peuvent être superposés aux effets plus long terme (shadowing). On parle alors de canal composite, nous en dirons un mot plus tard. On remarque donc que la caractéristique "canal à évanouissement rapide ou lent" est intrinsèque au système de transmission : ce ne sont pas des caractéristiques du médium de propagation.

Canal sélectif et non sélectif en fréquence. La sélectivité en fréquence est l'autre paramètre extrêmement important des canaux de propagation. Cette caractéristique est liée à la bande de cohérence du canal B_{coh} (paramètre dual du temps de cohérence). C'est la mesure de la séparation fréquentielle minimale pour laquelle les réponses du canal à deux fréquences pures différentes sont considérées décorrélées. La bande de cohérence est inversement proportionnelle à l'étalement temporel statistique du canal τ_{rms} :

$$B_{coh} \propto \frac{k_2}{\tau_{rms}}, \tag{1.3}$$

où k_2 est une constante dépendant de l'environnement, et τ_{rms} est une mesure de l'étalement temporel des retards des multi-trajets. Si l'amplitude et la phase de toutes les composantes spectrales d'un signal sont affectées de la même manière par le canal (la bande du signal est inférieure ou égale à la bande de cohérence), celui-ci est considéré comme non sélectif en fréquence, également dénommé canal plat. Dans le cas contraire, lorsque les composantes spectrales du signal sont affectées de façon inhomogène par le canal de propagation, celui-ci est dit sélectif en fréquence : certaines composantes fréquentielles subissent des atténuations et des distorsions de phase différentes d'une fréquence à l'autre. Notons également, que la sélectivité d'un canal est encore relative aux caractéristiques d'un système de communication.

1.1.3 Modélisation des canaux plats

Dans ce manuscrit nous utilisons la représentation bande de base bien connue pour les signaux et le canal [5]. Dans le cas d'un système mono-antenne (single-input single-output : SISO), le canal se modélise par un coefficient complexe h qui relie les symboles complexes émis d (M-PSK et M-QAM) au signal complexe reçu r. Le signal bande de base discret au temps symbole équivalent d'une transmission est modélisé par :

$$r(k) = h(k)d(k) + n(k), \tag{1.4}$$

où n est le bruit additif thermique généré par la radio du récepteur, blanc gaussien et de densité spectrale monolatérale N_0 [6] et supposée indépendant de la réalisation du canal, k est l'indice discret correspondant au temps symbole. Le coefficient $h = \alpha e^{j\phi}$ inclue les défauts de la partie radio-fréquence, considérés comme linéaires. La phase ϕ est uniformément distribuée dans $[0, 2\pi]$. Le module α est l'amplitude de l'évanouissement du canal et c'est une variable aléatoire de densité de probabilité $p_\alpha(\alpha)$ dont la forme dépend du canal de propagation. Puisque le modèle de signal est décrit au temps symbole, ce

[1] Dans ce dernier cas, pour que le système puisse fonctionner il faudrait que l'estimation du canal soit faite plusieurs fois pendant le temps symbole. Nous ne considérerons pas ce cas dans la suite.

coefficient fait référence aux évanouissements court terme du canal. Les performances des systèmes de communications numériques sont donc dépendantes de la statistique de α, ou de façon équivalent du rapport signal à bruit instantané par symbole (SNR) défini comme $\gamma_s = \alpha^2 E_s/N_0$ avec $E_s = E\left(|d|^2\right)$ l'énergie moyenne d'un symbole et $E(.)$ est l'espérance mathématique. Pour l'analyse des systèmes, il est donc équivalent d'utiliser la densité de probabilité du SNR instantané en faisant un changement de variable :

$$p_{\gamma_s}\left(\gamma_s\right) = \frac{p_\alpha\left(\sqrt{\frac{\Omega\gamma_s}{\overline{\gamma}_s}}\right)}{2\sqrt{\frac{\gamma_s\overline{\gamma}_s}{\Omega}}}, \tag{1.5}$$

avec $\Omega = E\left(\alpha^2\right)$, le moment d'ordre deux de la variable aléatoire α qui représente l'énergie moyenne du canal, et $\overline{\gamma}_s = \Omega E_s/N_0$ le rapport signal à bruit moyen.

La fonction génératrice des moments ("moment generating function" MGF) $M_{\gamma_s}(s)$ de la variable aléatoire γ_s est associée à la densité de probabilité $p_{\gamma_s}\left(\gamma_s\right)$:

$$M_{\gamma_s}\left(s\right) = \int_0^\infty p_{\gamma_s}\left(\gamma_s\right) e^{\gamma_s \cdot s} d\gamma_s \tag{1.6}$$

Caractérisation probabiliste des évanouissements courts termes

Selon la nature de l'environnement radio (aéré, obstrué, intérieur, extérieur, etc), il existe différents modèles décrivant le comportement statistique de l'amplitude du canal α et donc du SNR instantané γ_s.

Canal de Rayleigh. C'est la distribution que l'on utilise pour modéliser les évanouissements dus aux multi-trajets incohérents lorsque l'émetteur et le récepteur ne sont pas en vue directe. C'est un des canaux de propagation les plus difficiles, mais assez courant en milieux urbains denses [1]. La densité de probabilité de α est une loi de Rayleigh :

$$p_\alpha\left(\alpha\right) = \frac{2\alpha}{\Omega}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{\Omega}\right), \qquad \alpha \geq 0 \tag{1.7}$$

Grâce au changement de variable indiqué en (1.5), on peut obtenir la distribution équivalente du SNR dont la densité de probabilité et la MGF sont données dans le tableau 1.1. La densité de probabilité du SNR est une loi du χ^2 centrée.

Canal de Rice. Ce modèle est souvent utilisé pour caractériser un environnement de propagation comprenant une composante spéculaire forte due à une vue directe entre l'émetteur et le récepteur, et une multitude de trajets incohérents dus aux diffuseurs de l'environnement [7]. La densité de probabilité de l'amplitude du coefficient complexe du canal suit une loi de Rice [8] :

$$p_\alpha(\alpha) = \frac{2\left(1+K\right)e^{-K}\alpha}{\Omega}\exp\left(-\frac{\left(1+K\right)\alpha^2}{\Omega}\right) I_0\left(2\alpha\sqrt{\frac{K\left(1+K\right)}{\Omega}}\right), \qquad \alpha \geq 0, \tag{1.8}$$

avec K le paramètre de Rice, correspondant au rapport entre la puissance de la composante spéculaire (trajet LOS) et la puissance moyenne des multi-trajets de la composante diffuse, et varie donc entre 0 et $+\infty$. La fonction $I_0(.)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0 [9]. En appliquant le changement de variable en (1.5), le SNR par symbole est distribuée suivant une loi du χ^2 non centrée donnée dans le tableau 1.1.

La situation "vue directe" est assez courante dans les micro-cellules (petite surface couverte par une station de base) ou en environnement ouvert (de type rural par exemple) pour les communications téléphoniques extérieures [10]. Cela correspond également assez bien aux environnements indoor dits pico-cellulaires [11] (la zone de couverture du point d'accès est de l'ordre de quelques mètres, et la vue directe est disponible), mais aussi aux environnements "large open-space" du style entrepôt d'usine [12].

Notons que lorsque $K = 0$ la distribution de Rice devient une distribution de Rayleigh, et traduit l'évanouissement de la composante spéculaire. A l'inverse, si K tend vers l'infini, le canal devient sans évanouissement et la transmission se fait juste sur un bruit additif blanc gaussien.

Canal de Nakagami-m. La loi de Nakagami-m a été proposée par l'auteur du même nom afin d'englober un large panel de sévérité d'évanouissement. La densité de probabilité d'une loi de Nakagami est donnée en [8] :

$$p_\alpha(\alpha) = \frac{2m^m \alpha^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m\alpha^2}{\Omega}\right), \qquad \alpha \geq 0, \tag{1.9}$$

avec m le paramètre d'évanouissement de la distribution. Il peut varier entre $\frac{1}{2}$ et $+\infty$ et peut donc caractériser un canal à évanouissement gaussien mono-latéral ($m = \frac{1}{2}$) jusqu'au canal "parfait" (sans évanouissements) ($m \to +\infty$) en passant par le canal de Rayleigh ($m = 1$).

Il a été observé que la distribution de Nakagami-m correspondait très bien aux canaux radio-mobiles outdoor [13, 14, 15], mais aussi indoor à trajets multiples [16].

Caractérisation probabiliste des évanouissements longs termes

On a noté $\gamma_s(t)$ (en omettant l'indice t) le SNR instantané. Le SNR moyen $\overline{\gamma}_s = E(\gamma_s(t))$ est le SNR moyenné relativement aux effets court terme du canal, sans considérer l'effet de shadowing. Il s'agit donc d'une valeur moyenne court terme, sujette à des variations plus long terme. Le SNR moyen $\overline{\gamma}_s$ contient le terme α_{shad} responsable de son caractère aléatoire. Si on considère que les effets des trajets multiples sont compensés au récepteur, alors les performances des systèmes de communication sans fils dépendent seulement des variations de $\overline{\gamma}_s$.

Des campagnes de mesures intensives ont permis de modéliser α_{shad} comme une v.a. de distribution log-normale et ce pour plusieurs environnements intérieurs et extérieurs [17,18, 19, 20]. Si l'on intègre la puissance d'émission et l'atténuation en espace libre de (1.1) dans la variable α_{shad}, le SNR moyen $10\log_{10}\overline{\gamma}_s$ suit une loi normale de moyenne μ non nulle ($\mu = E(10\log_{10}\overline{\gamma}_s)$) et d'écart type σ en dB. La moyenne sur le long terme μ contient donc la puissance d'émission ainsi qu'une valeur moyenne de la perte en espace libre. La densité de probabilité et la MGF de cette v.a. est donnée dans le tableau 1.1. Dans l'expression de la MGF x_n et H_{x_n} sont respectivement les zéros et les coefficients du polynôme d'Hermite d'ordre N_p [9].

Caractérisation hybride : multi-trajets / shadowing. Nous avons considéré jusqu'ici que l'ordre de grandeur de temps des variations des évanouissements court terme était très inférieur à celui des variations de la puissance moyenne. Cette hypothèse nous conduit à séparer ces deux effets. Lorsque l'environnement est dit à évanouissement lent, on ne peut plus les séparer. Dans ce cas on peut considérer que le SNR instantané est stationnaire à court terme et on a $\overline{\gamma}_s = \gamma_s$. Ainsi à court terme (durée trame ou paquet), le canal

est vu comme un canal AWGN. Par contre sur une durée de plusieurs trames ou paquets, $\overline{\gamma}_s$ varie, mais les variations de shadowing et de fading se superposent. On modélise alors la variation du SNR avec une loi composite qui combine les deux effets. C'est un scénario que l'on rencontre dans les environnements urbains congestionnés avec des obstacles (piétons, véhicules) variant lentement [21, 22].

La loi composite Nakagami-m/log-normale fut introduite par Ho et Stüber [22] pour les environnements présentant des évanouissements lents de type Nakagami-m, et en présence de shadowing. La densité de probabilité et la MGF du SNR moyen sont données dans 1.1.

Notons que d'autres modèles existent. Par exemple pour les environnements avec une vue directe entre l'émetteur et le récepteur partiellement masquée par des arbres ou des immeubles, il existe la distribution composite Rice/gamma proposée par Abdi *et al.* [23], et qui correspond aux mesures effectuées sur des environnements mobiles extérieurs. La densité de probabilité de l'amplitude de l'évanouissement α est donnée en [23]. Pour les environnements sans vue directe en présence de shadowing, Abdi *et al.* ont proposé un mélange d'une loi de Rayleigh (pour l'évanouissement court terme) et une loi gamma pour le shadowing [24], dénommé : distribution K.

Type de canal	Paramètre d 'évanouissement	Densité de probabilité	Fonction génératrice des moments
Rayleigh		$\frac{1}{\overline{\gamma}_s}\exp\left(-\frac{\gamma_s}{\overline{\gamma}_s}\right)$	$(1-s\overline{\gamma}_s)^{-1}$
Nakagami-m	$m \geq \frac{1}{2}$	$\frac{m^m\gamma_s^{m-1}}{\overline{\gamma}_s^m\Gamma(m)}\exp\left(-\frac{m\gamma_s}{\overline{\gamma}_s}\right)$	$\left(1-\frac{s\overline{\gamma}_s}{m}\right)^{-m}$
Rice	$K \geq 0$	$\frac{(1+K)e^{-K}}{\overline{\gamma}_s}\exp\left(-\frac{(1+K)\gamma_s}{\overline{\gamma}_s}\right)$	$\frac{1+K}{1+K-s\overline{\gamma}_s}\exp\left(\frac{Ks\overline{\gamma}_s}{1+K-s\overline{\gamma}_s}\right)$
Log-normal shadowing	$\sigma \geq 0$	$\frac{10}{\log 10\sqrt{2\pi}\sigma\overline{\gamma}_s}\exp\left(-\frac{(10\log_{10}\overline{\gamma}_s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{N_p}H_{x_n}\exp\left(10^{\left(\sqrt{2}\sigma x_n+\mu\right)/10}s\right)$
Composite Nakagami-m/ Log-normal	m et $\sigma \geq 0$	$\int_0^\infty \frac{m^m\gamma_s^{m-1}}{\overline{\gamma}_s\Gamma(m)}\exp\left(-\frac{m\gamma_s}{\overline{\gamma}_s}\right)\frac{10}{\log 10\sqrt{2\pi}\sigma\overline{\gamma}_s}$ $\times\exp\left(-\frac{(10\log_{10}\overline{\gamma}_s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)d\overline{\gamma}_s$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{N_p}H_{x_n}\left(1-10^{\left(\sqrt{2}\sigma x_n+\mu\right)/10}s/m\right)^{-m}$

TAB. 1.1 – Densité de probabilité et MGF du SNR des canaux à évanouissements

1.1.4 modélisation des canaux sélectifs

Lorsque la largeur de bande du signal est supérieure à la bande de cohérence du canal, les composantes spectrales du signal sont affectées de manière différente les unes des autres en amplitude et en phase. Cela se traduit par de la sélectivité en fréquence (certaines fréquences sont atténuées voir annulées) et de l'interférence entre symboles dans le domaine temporel. C'est-à-dire que la durée d'un symbole T_s est inférieure à l'étalement temporel du canal τ_{rms}. Ce type de canal est modélisé par un filtre linéaire de réponse impulsionnelle complexe (en bande de base) :

$$h(t) = \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i e^{j\phi_i} \delta\left(t - \tau_i\right), \tag{1.10}$$

où $\delta(.)$ est la distribution de dirac et $\{\alpha_i\}_{i=0}^{L-1}$, $\{\phi_i\}_{i=0}^{L-1}$, $\{\tau_i\}_{i=0}^{L-1}$ sont les amplitudes, les phases et les retards associés aux différents trajets respectivement. L est le nombre de trajet que le système peut résoudre, c'est-à-dire le nombre de trajet qu'il peut différencier. La capacité de résolution du système est liée à sa largeur de bande [25].

Les différents trajets sont générés par une multitude de micro-trajets dus aux différents diffuseurs de l'environnement (on parle alors de macro-trajet pour les coefficients de la réponse impulsionnelle). Si les macro-trajets sont générés par des diffuseurs différents, on peut considérer que les amplitudes $\{\alpha_i\}_{i=0}^{L-1}$ ne sont pas corrélés [26], mais des modèles de corrélation existent également.

En reprenant la notation introduite pour les canaux plats, l'amplitude de l'évanouissement du $i-$ème trajet α_i est une variable aléatoire de densité de probabilité $p_{\alpha_i}(\alpha_i)$ l'une de celles introduites plus haut. De même que pour les canaux plats, un signal reçu souffre également de l'addition d'un bruit additif blanc gaussien de densité spectrale mono-latérale N_0 et indépendant de l'évanouissement du canal. Ainsi, le SNR instantané par symbole et pour le canal i reflète l'évolution de l'évanouissement du signal et s'écrit $\gamma_{s_i} = \alpha_i^2 E_s/N_0$. Le SNR moyen par symbole est : $\overline{\gamma}_{s_i} = \Omega_i E_s/N_0$, avec $\Omega_i = E\left(\alpha_i^2\right)$.

Un canal sélectif en fréquence est caractérisé par la suite $\{\Omega_i\}_{i=0}^{L-1}$ qui correspond au profile de puissance des trajets ou "power delay profile" (PDP) du canal. La PDP du canal peut prendre différente forme selon que l'environnement soit intérieur ou extérieur. Dans le chapitre 5, où nous considérons des canaux sélectifs en fréquence, nous prenons les PDP établies par l'ETSI pour les réseaux locaux sans fils.

1.2 Critères d'analyses de performance des systèmes

1.2.1 SNR moyen dans un canal à évanouissements rapides

Le SNR est probablement l'indicateur le plus connu pour mesurer les performances d'un système de communication numérique, notamment des systèmes à diversité d'espace à la réception. Le plus souvent évalué en sortie de traitement, il est directement relié au processus de détection des données et constitue donc un bon indice sur la performance court terme d'un lien radio. Le SNR moyen est le moment d'ordre 1 de la variable aléatoire "SNR instantané" qui dépend de la statistique de l'évanouissement du canal et s'écrit simplement :

$$\overline{\gamma}_s = \int_0^{\infty} \gamma_s p_{\gamma_s}\left(\gamma_s\right) d\gamma_s, \tag{1.11}$$

où $p_{\gamma_s}(\gamma_s)$ est la densité de probabilité du SNR instantané introduite dans les sections ci-dessus.

Cependant en présence d'un canal sélectif, la bonne détection des symboles reçus ne dépend plus uniquement de la valeur de $\overline{\gamma}_s$, mais également de l'interférence entre symbole présente au moment de la décision. Ce n'est donc plus un critère suffisant pour caractériser la qualité d'une communication.

1.2.2 Probabilité d'erreur moyenne

Evanouissements rapides

Il est assez naturel de caractériser les variations court termes par la probabilité d'erreur symbole moyenne ou "symbol error probability" (SEP). C'est indéniablement le critère le plus pertinent, et donc le plus largement étudié pour l'analyse de performances des systèmes de communications numériques. Dans ce manuscrit, le SEP moyen est mathématiquement désigné par $P_s(E)$ et renvoie à la probabilité que l'événement E "une erreur sur la détection du symbole est commise" soit réalisé. Son expression sans codage, est :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) = \int_0^\infty P_s(E|\gamma_s, \overline{\gamma}_s)\, p_{\gamma_s}(\gamma_s)\, d\gamma_s. \tag{1.12}$$

C'est aussi le plus délicat à obtenir analytiquement. Cela tient principalement au fait que la probabilité d'erreur conditionnelle $P_s(E|\gamma_s, \overline{\gamma}_s)$ est généralement une fonction non linéaire du SNR instantané et dont la forme dépend de la modulation et du type de détection effectuée par le récepteur. L'équation (1.12) est l'expression rigoureuse de la probabilité d'erreur symbole. Elle traduit le fait que le SEP moyen dépend du SNR moyen. Notons qu'en présence de shadowing, $\overline{\gamma}_s$ est une variable aléatoire, donc $P_s(E|\overline{\gamma}_s)$ également.

Evanouissements lents

Lorsque le canal varie très lentement, les deux effets évanouissements et shadowing se superposent et sont consédérés comme des phénomènes long termes (au regard de la durée symbole). Comme le canal à court terme est vu comme un canal AWGN (et non plus comme un canal à évanouissement), la formulation en (1.12) doit être adaptée. Puisque le SNR est stationnaire à court terme ($\overline{\gamma}_s = \gamma_s = \frac{E_s}{N_0}$), alors $P_s\left(E \middle| \frac{E_s}{N_0}\right)$ est la probabilité d'erreur en canal AWGN. Pour les modulations que nous considérons dans ce manusrit (M-PSK, M-QAM), elle s'exprime en fonction de la fonction gaussienne d'erreur ou une combinaison de celle-ci, mais nous y reviendrons au chapitre suivant.

1.2.3 Probabilité de coupure symbole

Evanouissements rapides et shadowing

Parceque le SEP moyen varie à cause de l'effet shadowing, et n'est plus représentatif de l'état d'une communication, il est intéressant de caractériser un lien par la probabilité que le SEP atteigne une valeur cible au cours du temps. Conti *et al.* appellent probabilité de coupure symbole ou "symbol error outage" (SEO), la probabilité que l'événement O "le SEP moyen dépasse une valeur seuil, connaissant la moyenne du shadowing" soit réalisé. Elle est définie mathématiquement par [27, 28] :

$$P_s(O|\mu) = P\left(P_s(E|\overline{\gamma}_s) \geq P_s^*(E|\overline{\gamma}_s)\,|\mu\right), \tag{1.13}$$

avec $P_s^*(E|\overline{\gamma}_s)$ la probabilité d'erreur seuil. Pour résoudre cette équation de façon analytique, il serait intéressant de travailler en SNR. En effet, le SEO n'est pas sans rappeler la probabilité de coupure simple ou "outage probability", très étudié dans la littérature [29] qui est la probabilité que le SNR moyen tombe en dessous d'un certain seuil :

$$P_{\overline{\gamma}_s}(O|\mu) = P(\overline{\gamma}_s \leq \overline{\gamma}_{th}|\mu). \tag{1.14}$$

En fait, ces deux probabilités sont égales car la fonction reliant le SNR au SEP est bijective (à la condition que l'on ait pas d'interférence entre symboles). Par conséquent il suffit d'arriver à exprimer le SNR cible correspondant au seuil SEP :

$$\overline{\gamma}_{th} = f(P_s^*(E)), \tag{1.15}$$

où $f(P_s^*(E)) = P_s^*(E|\overline{\gamma}_s)^{-1}$. Dés lors, l'expression en (1.13) devient :

$$\begin{aligned} P_s(O|\mu) &= P(\overline{\gamma}_s \leq \overline{\gamma}_{th}|\mu) && (1.16)\\ &= \int_0^{\overline{\gamma}_{th}=(P_s^*(E))^{-1}} p_{\overline{\gamma}_s}(\overline{\gamma}_s|\mu)\, d\overline{\gamma}_s, && (1.17) \end{aligned}$$

ce qui est beaucoup plus simple à obtenir, puisqu'il suffit de connaitre la distribution du SNR moyen en fonction de la valeur moyenne du shadowing : $p_{\overline{\gamma}_s}(\overline{\gamma}_s|\mu)$. Cette loi, introduite ci-avant est en générale considérée comme log-normale. Autrement dit, la probabilité de coupure symbole s'obtient en évaluant la fonction de répartition d'une variable aléatoire log-normale en $\overline{\gamma}_{th}$ s'exprimant à l'aide du SEP cible moyen. On connaît sous forme exacte cette évaluation [27] :

$$P_s(O) = Q\left(\frac{\mu_{dB} - 10\log_{10}\overline{\gamma}_s(P_s^*(E))}{\sigma_{dB}}\right), \tag{1.18}$$

avec μ_{dB} et σ_{dB} la moyenne et l'écart type de la loi log-normale. Cependant l'inversion de la probabilité d'erreur n'est pas un problème trivial, et c'est une des contributions importantes que nous développerons dans la suite du manuscrit.

Evanouissements lents et shadowing

Dans ce cas l'expression de la probabilité de coupure symbole en (1.17) est toujours valable, mais $(P_s^*(E))^{-1}$ est l'inverse de la probabilité d'erreur en canal AWGN. De plus la distribution $p_{\overline{\gamma}_s}(\overline{\gamma}_s|\mu)$, pour calculer la probabilité de coupure symbole, intégre à la fois l'évanouissement et le shadowing avec une loi composite Nakagami-m/log-normale par exemple.

1.3 Fonctions spéciales utilisées

Dans ce manuscrit, nous utilisons plusieurs fonctions spéciales pour exprimer la probabilité d'erreur moyenne. Bien que convenablement documentées, dans un soucis de clarté, nous donnons brièvement les définitions et représentation des fonctions gamma, beta, hypergéométrique de Gauss et hypergéométrique d'Appell.

1.3.1 Fonction Gamma

La fonction gamma permet d'étendre la définition de factorielle aux nombre réels et complexes. Elle est définie par l'intégrale de Euler de première espèce :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.19}$$

avec $z \in \mathbb{C}$ et $Re(z) > 0$. Pour les nombres entiers naturels on a la définition suivante :

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.20}$$

où ! désigne la notation factorielle.

1.3.2 Fonction Beta

Cette fonction est définie par l'intégrale suivante :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \tag{1.21}$$

avec $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ et $Re(x) > 0$, $Re(y) > 0$. Il existe une relation fonctionnelle entre la fonction beta et la fonction gamma [9] :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x). \tag{1.22}$$

1.3.3 Fonction hypergéométrique de Gauss

Définition. La série hypergéométrique de Gauss est une série de la forme :

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} && (1.23) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} && (1.24) \end{aligned}$$

avec $(z)_n$ est le symbole de Pochhammer défini par $(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$.

La série hypergéométrique converge si a ou b sont des entiers négatifs ou nuls. La série de Gauss se réduit à un polynôme de degré n si a ou b sont égaux à $-m$, $m \in \mathbb{N}$. La série diverge si $c = -n$, $n \in \mathbb{N}$ et si ni a ni b ne sont égaux à $-m$ avec $m < n$.

Si ces valeurs de a, b et c sont exclues la série converge à l'intérieur du cercle unité $|x| < 1$. Sur le cercle unité $|x| = 1$, le comportement de la série est assurée par les conditions suivantes :

1. si $1 > Re(a+b-c) \geq 0$ la série converge sur le cercle unité sauf en $x = 1$,
2. si $Re(a+b-c) < 0$ la série converge absolument sur le cercle unité,
3. si $Re(a+b-c) \geq 1$ la série diverge sur le cercle unité,

Représentation intégrale. Si $Re(c) > Re(b) > 0$ alors la fonction hypergéométrique de Gauss se définit comme :

$$ {}_2F_1\left(a,b;c;x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}dt. \tag{1.25} $$

De plus, si $|x| < 1$, $Re(a) > 0$ et $Re(c-a) > 0$ alors il existe une autre représentation valide de la fonction hypergéométrique de Gauss, utilisée par Butler et Wood [30] :

$$ {}_2F_1\left(a,b;c;x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b}dt. \tag{1.26} $$

Relations fonctionnelles. Il existe plusieurs transformations sur la fonction hypergéométrique de Gauss appelées relations d'Euler [9]. Nous donnons ici deux relations qui nous sont utiles pour la suite :

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;x) &= (1-x)^{-b}\,{}_2F_1(c-a,b;c;\frac{x}{x-1}) && (1.27)\\ &= (1-x)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c;x). && (1.28) \end{aligned} $$

1.3.4 Fonction hypergéométrique d'Appell de première espèce

La fonction hypergéométrique d'Appell (du nom du mathématicien français qui la découvrit) est une extension à deux variables de la fonction hypergéométrique de Gauss.

Définition. Il s'agit d'une série à deux variables x et y :

$$ F_1\left(a,b,b';c;x,y\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b)_m\,(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}. \tag{1.29} $$

La série est absolument convergente si $|x| < 1$ et $|y| < 1$, mais la nature et la position des singularités ne sont pas évidentes à déterminer.

Représentation intégrale. La série hypergéométrique d'Appell peut s'exprimer sous la forme d'une double intégrale [31] mais également à l'aide d'une seule intégrale pourvu que $Re(c) > Re(a) > 0$ et $|x| < 1$, $|y| < 1$:

$$ F_1\left(a,b,b';c;x,y\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}(1-yt)^{-b'}dt. \tag{1.30} $$

Transformation linéaire et valeurs particulières utiles. Plusieurs relations fonctionnelles sont disponibles pour la fonction hypergéométrique d'Appell, mais nous n'utiliserons qu'une seule de celles données dans [31] :

$$ F_1\left(a,b,b';c;x,y\right) = (1-x)^{-a}\,F_1\left(a,c-b-b',b';c;\frac{x}{x-1},\frac{y-x}{1-x}\right). \tag{1.31} $$

De plus, la fonction hypergéométrique d'Appell se réduit à une fonction hypergéométrique de Gauss dans les cas suivants :

$$F_1\left(a,b,b';c;0,y\right) = {}_2F_1\left(a,b';c;y\right), \tag{1.32}$$
$$F_1\left(a,b,b';c;x,0\right) = {}_2F_1\left(a,b;c;x\right), \tag{1.33}$$
$$F_1\left(a,b,b';c;x,x\right) = {}_2F_1\left(a,b+b';c;x\right). \tag{1.34}$$

1.3.5 Fonction Beta incomplète

La fonction beta incomplète, notée $B_x(a,b)$, est définie par l'intégrale :

$$B_x(a,b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \tag{1.35}$$

avec $x \in \mathbb{R}$. La fonction beta incomplète est reliée à la fonction hypergéométrique de Gauss par la relation :

$$B_x(a,b) = \frac{x^a}{a}{}_2F_1\left(a,1-b;a+1;x\right). \tag{1.36}$$

1.4 Méthodes mathématiques d'approximation

La probabilité d'erreur moyenne s'exprimant souvent à l'aide des fonctions spéciales introduites ci-dessus, il est nécessaire d'en trouver des approximations pour obtenir une expression simple et inversible du SEP. La première section présente la méthode de Laplace permettant d'approcher la fonction hypergéométrique de Gauss. Une autre méthode pouvant mener à l'obtention d'expression inversible du SEP est de considérer le comportement de la probabilité d'erreur moyenne à fort SNR. C'est l'objet de la deuxième section qui présente la méthode de Wang et Giannakis [32].

1.4.1 Approximation de Laplace

Cette méthode est également appelée approximation en point de selle ou "saddle-point approximation" (SPA) par les physiciens.

Méthode générale. Soit l'intégrale suivante à évaluer :

$$I = \int_a^b e^{-Tf(t)}dt, \tag{1.37}$$

avec $T \in \mathbb{R}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. De plus, f possède un minimum unique t_0 sur l'ensemble d'intégration $[a,b]$. L'idée générale de la méthode de Laplace réside dans le fait que pour de grandes valeurs du paramètre T, la plus importante contribution à la valeur de l'intégrale I est apportée par les valeurs de t voisins de t_0. La fonction f possède un développement en série de Taylor en t_0 dont les premiers termes sont :

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + O\left((t-t_0)^3\right), \tag{1.38}$$

avec :

$$f'(t_0) = \left.\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}, \text{ et } f''(t_0) = \left.\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_0}, \tag{1.39}$$

les dérivés première et seconde de f respectivement, prisent en t_0. Puisque t_0 est un minimum global de f, alors $f'(t_0) = 0$. Par conséquent, la fonction f peut s'approcher par :

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2. \tag{1.40}$$

En remplaçant (1.40) dans (1.37), on obtient une forme approchée de l'intégrale I :

$$I \approx e^{-Tf(t_0)} \int_a^b e^{-\frac{T}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2} dt. \tag{1.41}$$

Lorsque $T \to \infty$ la valeur de l'exponentielle décroît très vite quand on s'éloigne de t_0, et les bornes de l'intégrale peuvent s'étendre de manière heuristique à $-\infty$ et $+\infty$. Avec le changement de variable $y = (t - t_0)\sqrt{Tf''(t_0)/2}$, il apparaît l'intégrale de Gauss dont la valeur est $\sqrt{\pi}$. Il en découle l'expression de l'approximation de Laplace que l'on trouve communément dans la littérature [30, 33] :

$$I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{Tf''(t_0)}} e^{-Tf(t_0)}. \tag{1.42}$$

Lorsque $T \to \infty$, l'approximation a un terme d'erreur en $O\left(T^{-1}\right)$. Nous avons donné les étapes permettant d'obtenir l'approximation de Laplace d'une intégrale de manière qualitative, mais la preuve rigoureuse de (1.42) peut se trouver en [34]. De plus le comportement de l'erreur a fait l'objet de nombreuses discussions et le lecteur intéressé pourra se reporter à [35, 36].

En fait, la méthode de Laplace peut s'appliquer à l'intégrale plus générale :

$$I = \int_a^b h(t) e^{-Tg(t)} dt, \tag{1.43}$$

avec $T \in \mathbb{R}$ et g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ présentant un minimum unique en $t_0 \in [a, b]$. La fonction $h(t)$ est continue sur $[a, b]$, non nulle en t_0 et de signe constant sur $[a, b]$. L'approximation de Laplace donne pour I [30] :

$$\tilde{I} = \sqrt{\frac{2\pi}{Tg''(t_0)}} h(t_0) e^{-Tg(t_0)}, \tag{1.44}$$

et $I = \tilde{I}\left\{1 + O\left(T^{-1}\right)\right\}$ si $T \to \infty$. La précision de l'approximation dépend de deux paramètres importants : le choix de la représentation $(h; g)$ de l'intégrande et la possibilité de calibrer l'approximation, permettant d'augmenter la précision de la méthode de Laplace même pour des valeurs de T faibles ; typiquement $T = 1$.

Représentation de l'intégrande avec $(h; g)$. Le choix du couple $(h; g)$ doit être tel que l'intégrale I soit invariante par transformation bijective de t. Soit une fonction $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ bijective telle que $u = q(t)$. Il existe une fonction $q^{-1} : \mathbb{R} \to [a, b]$ telle que $t = q^{-1}(u)$. En prenant $T = 1$, l'intégrale I peut s'écrire :

$$I_u = \int_{u \in q([a,b])} h_1(u) e^{-g_1(u)} du, \tag{1.45}$$

avec :

$$h_1(u) = h\left(q^{-1}(u)\right) \frac{dy}{du} \text{ et } g_1(u) = g\left(q^{-1}(u)\right). \tag{1.46}$$

On peut vérifier que les intégrales en (1.43) et (1.45) sont équivalentes et par conséquent que les approximations de Laplace de ces deux expressions le sont aussi. Ce résultat n'est pas immédiat et une preuve est disponible en [37]. Pour plus de précision sur l'approximation de Laplace et "saddle-point" le lecteur peut également se référer à [38] et [39].

Calibration. Butler et Wood [30] suggèrent que la précision de l'approximation de Laplace en (1.44) peut être améliorée lorsque T ne tend pas vers l'infini, notamment en procédant à une normalisation de $\tilde{I}$. L'approximation de Laplace de la fonction hypergéométrique de Gauss par (1.44) se note ${}_2\tilde{F}_1(a,b;c;x)$. On procédera à une calibration pour l'approximation de la fonction hypergéométrique de Gauss en $x = 0$: ${}_2\hat{F}_1(a,b;c;x) = {}_2\tilde{F}_1(a,b;c;x)/{}_2\tilde{F}_1(a,b;c;0)$ [30].

Approximation de la fonction hypergéométrique de Gauss. Avec la relation (1.26), on applique la méthode de Laplace sur la fonction hypergéométrique de Gauss. En choisissant le couple de fonction $(h;g)$ suivant pour l'intégrale :

$$h(t) = B(a,c-a)^{-1}t^{-1}(1-t)^{-1} \tag{1.47}$$

$$g(t) = -\left\{a\ln(t) + (c-a)\ln(1-t) - b\ln(1-xt)\right\}, \tag{1.48}$$

la fonction hypergéométrique de Gauss s'écrit :

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \int_0^1 h(t)e^{-g(t)}dt = I. \tag{1.49}$$

Cette forme d'intégrale peut s'approcher avec la méthode de Laplace. La fonction $g(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Ses dérivées premières et secondes sont :

$$g'(t) = \frac{c-a}{1-t} - \frac{a}{t} - \frac{bx}{1-xt} \tag{1.50}$$

$$g''(t) = \frac{c-a}{(1-t)^2} + \frac{a}{t^2} - \frac{bx^2}{(1-xt)^2}. \tag{1.51}$$

La fonction g possède un minimum global t_0 sur son ensemble de définition $[0,1]$. Le point t_0 est obtenu en résolvant l'équation $g'(t) = 0$:

$$t_0 = \frac{2a}{\sqrt{\tau^2 - 4ax(c-b)} - \tau}, \tag{1.52}$$

avec $\tau = x(b-a) - c$. Il s'agit de l'unique solution de l'équation $g'(t) = 0$ sur $[0,1]$ si $0 < a < c$, $b \geq 0$ et $x \in [0,1)$. Cependant, seules les conditions sur a et c sont nécessaires, et on peut étendre la méthode à $x < 0$ en utilisant (1.27) et/ou $b < 0$ avec (1.28).

On applique la relation (1.44) pour obtenir l'approximation de Laplace non calibrée de la fonction hypergéométrique de Gauss :

$${}_2\tilde{F}_1(a,b;c;x) = (2\pi)^{1/2}B(a,c-a)^{-1}\kappa^{-1/2}t_0^a(1-t_0)^{c-a}(1-xt_0)^{-b}, \tag{1.53}$$

où κ est une fonction dépendant de a, b, c et x et définie par :

$$\kappa \equiv \kappa(a,b,c,x) = a(1-t_0)^2 + (c-a)t_0^2 - bx^2t_0^2\frac{(1-t_0)^2}{(1-xt_0)^2}. \tag{1.54}$$

La précision de l'approximation en (1.53) peut être grandement améliorée en normalisant par ${}_2\tilde{F}_1(a,b;c;0)$. Ainsi, l'approximation de Laplace normalisée de la fonction hypergéométrique de Gauss est donnée par :

$$ {}_2\hat{F}_1\left(a,b;c;x\right) = c^{c-1/2} r_{2,1}^{-1/2} \left(\frac{t_0}{a}\right)^a \left(\frac{1-t_0}{c-a}\right)^{c-a} (1-xt_0)^{-b}, \tag{1.55} $$

avec

$$ r_{2,1} = \frac{t_0^2}{a} + \frac{(1-t_0)^2}{c-a} - \frac{bx^2}{(1-xt_0)^2}\frac{t_0^2}{a}\frac{(1-t_0)^2}{c-a}. \tag{1.56} $$

Cette approximation de la fonction hypergéométrique sera utilisée pour approcher à son tour la probabilité d'erreur. Une autre méthode consiste à essayer d'approcher la probabilité d'erreur directement, comme présenté dans la section suivante.

1.4.2 Expression asymptotique

L'idée est de regarder comment se comporte la probabilité d'erreur moyenne lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$. Wang et Giannakis [32] ont proposé une méthode permettant de prédire les comportements asymptotiques (aux larges SNR) de quasiment tous les systèmes (mono ou multi-antennes) avec ou sans codage canal, utilisant une modulation cohérente ou non et dans quasiment tous les environnements de propagation auxquels peuvent être soumis les signaux de télécommunication. Ils supposent une transmission sur canal plat à évanouissement, et font les trois suppositions suivantes :

1. Le SNR instantané au récepteur est fonction du SNR moyen $\gamma_s = \beta\overline{\gamma}_s$, avec β une variable aléatoire dépendant du canal et $E(\beta) = 1$.
2. Le SEP instantané dépend de β par la fonction gaussienne Q et $P_s(E|\beta) = Q\left(\sqrt{k\beta\overline{\gamma}_s}\right)$. k est une constante positive dépendant de la modulation et du type de détecteur.
3. La densité de probabilité $p(\beta)$ peut être approché par un terme polynomial lorsque $\beta \to 0^+$ comme $p(\beta) = a\beta^t + O\left(\beta^{t+\epsilon}\right)$, où $\epsilon > 0$ et a est une constante positive.

Ils démontrent que la probabilité d'erreur moyenne d'une communication sans fils aux forts rapports signal sur bruit est de la forme :

$$ P_s(E) \approx \left(G_c\overline{\gamma}_s\right)^{-G_d}, \tag{1.57} $$

avec G_c le gain de codage et G_d le gain de diversité. Ce dernier détermine la pente du SEP moyen aux forts SNR dans une échelle log-log. Le gain de diversité peut-être celui apporté par la diversité d'espace (plusieurs antennes en réception), ou temporelle (en exploitant les multi-trajets de l'environnement). Quant au gain de codage, il détermine le décalage du SEP moyen par rapport à la courbe de référence $\left(\overline{\gamma}_s\right)^{-G_d}$.

La première hypothèse correspond au modèle du SNR introduit à la section 1.1.3. Le SNR instantané et moyen sont : $\gamma_s = \alpha^2 E_s/N_0$ et $\overline{\gamma}_s = E\left(\alpha^2\right) E_s/N_0$. Dans l'hypothèse 1 on a juste posé $\beta = \alpha^2$ et $E\left(\alpha^2\right) = 1$. La seconde hypothèse traduit le fait de la présence d'un bruit additif blanc gaussien et une modulation BPSK. Cependant, pour des modulations d'ordres supérieures, la probabilité d'erreur conditionnelle est bien souvent une somme de fonction gaussienne Q. La troisième hypothèse n'est pas très forte et est largement applicable. En effet, si la fonction $p(\beta)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage V autour de $\beta = 0$, alors elle admet un développement de Taylor-MacLaurin en ce point. Autrement dit on peut approcher le comportement de la densité de probabilité de β par un polynôme au voisinage de 0.

SEP moyen aux forts SNR. Les auteurs démontrent [32] que pour un signal BPSK et lorsque le SNR moyen tend vers l'infini, la probabilité d'erreur moyenne est donnée par :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s \to \infty\right) = \frac{2^t a\Gamma\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(t+1)}\left(k\overline{\gamma}_s\right)^{-(t+1)} + O\left(\overline{\gamma}_s^{-(t+1)}\right). \tag{1.58}$$

Ce résultat est obtenu en considérant le développement de $p(\beta)$ en 0 de l'hypothèse 3. Il en résulte que le SEP moyen peut se modéliser par (1.57) avec comme gain de diversité et de codage :

$$G_d = t+1 \tag{1.59}$$

$$G_c = k\left(\frac{2^t a\Gamma\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(t+1)}\right)^{-\frac{1}{t+1}}. \tag{1.60}$$

Les valeurs des paramètres t et a dépendent du type de canal et son rappelées dans [32]. L'idée intuitive derrière ce théorème est que lorsque le rapport signal à bruit moyen est fort, les performances du système vont être dominées par l'événement, à faible probabilité de réalisation, que le SNR instantané devienne faible. Donc seul le comportement à l'origine de $p(\beta)$ détermine le comportement du SEP lorsque le SNR moyen est grand. En fait, alors que $\overline{\gamma}_s \to \infty$, $Q\left(\sqrt{\beta\overline{\gamma}_s}\right)$ se rapproche du dirac à l'origine. De ce fait les auteurs suggèrent que l'on peut étendre ce résultat à des modulations dont la probabilité d'erreur conditionnelle ne s'exprime pas seulement à l'aide d'une fonction Q. Pour toutes fonctions ayant un comportement proche d'un dirac lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$, le résultat énoncé ci-dessus est valable. Ce qui est le cas de fonction du genre $\gamma_s^p Q^q(.)$, $\gamma_s^p \exp(-q\gamma_s)$ ou toutes combinaisons linéaires de ces fonctions avec p et q des nombres positifs. Cela permet d'étendre le résultat à des modulations de type M-QAM à réception cohérente ainsi que M-FSK à démodulation non-cohérente.

C'est ainsi que les auteurs dérivent la probabilité d'erreur asymptotique d'un signal modulé M-PSK et M-QAM respectivement à réception cohérente :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s \to \infty\right) \approx \frac{a\Gamma(t+1)}{\pi g_{psk}^{t+1}}\left[\int_0^{(M-1)\pi/M} \sin^{2(t+1)}\theta d\theta\right]\frac{1}{\overline{\gamma}_s^{t+1}} \tag{1.61}$$

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s \to \infty\right) \approx \frac{4a\Gamma(t+1)g}{\pi g_{qam}^{t+1}}\left[\int_0^{\pi/2} \sin^{2(t+1)}\theta d\theta - g\int_0^{\pi/4} \sin^{2(t+1)}\theta d\theta\right]\frac{1}{\overline{\gamma}_s^{t+1}}. \tag{1.62}$$

D'autres résultats sont disponibles dans [32], notamment des formes asymptotiques de la probabilité de coupure. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article pour de plus amples détails.

Cette méthode permet d'approcher le comportement de la probabilité d'erreur pour un SNR très grand. Pour des systèmes sans codage canal, le SNR d'intérêt est celui correspondant à une probabilité d'erreur comprise entre 10^{-1} et 10^{-4}. Pour ces valeurs du rapport signal sur bruit, les formes asymptotiques de la probabilité d'erreur ne sont pas très précises. Notamment, dans des canaux comme Nakagami-m ou Rice lorsque le paramètre d'évanouissement devient important. On peut constater dans [32] que pour $m > 2$, l'approximation n'est pas précise dans les domaines de SNR d'intérêts. Les courbes de

SEP moyen sont généralement concaves avec le SNR, le cas de Rice étant une exception et présentant un point d'inflexion dans la courbe. En effet, nous verrons que la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK en canal de Rice est obtenue en intégrant sur la variable θ la MGF du SNR (rappelée dans le tableau 1.1), avec $s = -g_{psk}/\sin^2\theta$ et où g_{psk} est une constante dépendant de l'ordre de la modulation. En régime non asymptotique (lorsque K n'est pas négligeable devant $\overline{\gamma}_s$), le terme exponentiel tend plus rapidement vers 0 que la fraction rationnelle, et l'évolution du SEP est dictée par l'intégrale de l'exponentielle, ce qui donne une forme concave à la courbe. Mais lorsque $\overline{\gamma}_s$ tend vers l'infini, le terme exponentiel tend vers une constante et le terme en fraction rationnelle tend vers $(1+K)\sin^2\theta/(g_{psk}\overline{\gamma}_s)$. Le SEP est donc proportionnel à $1/\overline{\gamma}_s$, et celui-ci se voit décroître linéairement avec le SNR en échelle log-log, d'où la présence d'un point d'inflexion. De ce fait l'approche des auteurs de [32] est très limitée dans le cas d'un canal de Rice. Sur la figure 1.1, on a tracé l'évolution de la probabilité d'erreur moyenne d'une M-PSK en canal de Rice pour trois valeurs du paramètres K. Si $K = 0$dB, la description de Wang et Giannakis est suffisante pour estimer le SEP moyen car l'approximation donnée en (1.61) est proche de la valeur exacte pour toutes les valeurs du SNR. Cependant lorsque K augmente, ce n'est plus du tout le cas et si l'on veut une description précise et simple de la probabilité d'erreur aux faibles SNR, il faut abandonner cette méthode.

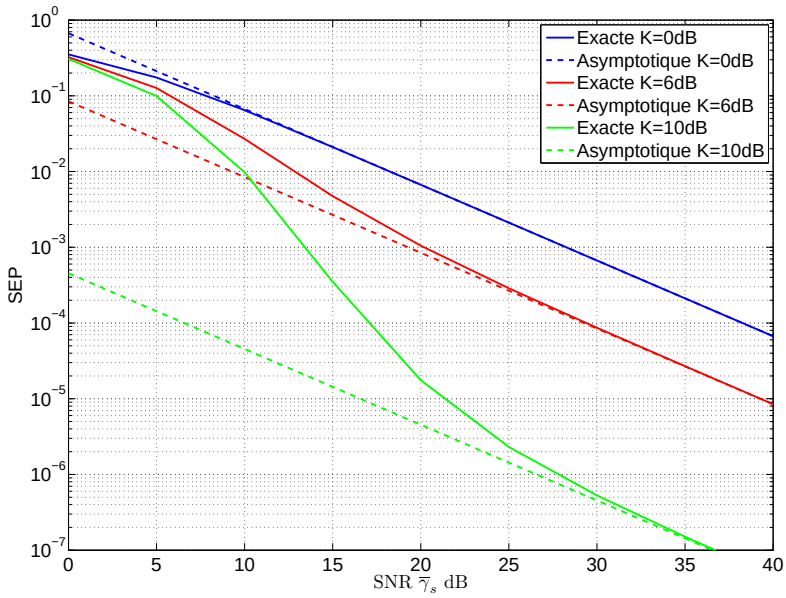


FIG. 1.1 – SEP d'un signal QPSK en canal de Rice. Expression exacte et comportement asymptotique (1.61).

1.5 Techniques MIMO

L'utilisation d'antennes multiples dans un système de communication remonte à quelques décennies. Leur implantation s'est d'abord cantonnée aux stations de bases pour des questions de consommation et de place. Les antennes multiples permettent en particulier d'améliorer la séparation des utilisateurs dans le domaine spatial et d'exploiter la diversité en

émission ou en réception pour lutter contre les évanouissements du canal de propagation. La diversité introduite provient du fait de la présence de la "copie" d'un même message sur les différentes antennes de l'émetteur ou du récepteur.

Depuis quelques années l'idée d'installer plusieurs antennes au niveau du terminal s'est également répandue, encouragée par l'augmentation de la puissance de calcul des terminaux. Dès lors que l'on dispose de plusieurs antennes en émission et en réception, on est en présence d'un système dit MIMO pour "multiple-input multiple-output". Ces systèmes peuvent permettre d'augmenter la capacité du lien radio classique de façon assez spectaculaire [40, 41].

Les systèmes MIMO permettent d'exploiter deux types de gains. Le premier est le gain en diversité, dont le but est l'augmentation de la qualité du lien radio où l'on transmet la même information plusieurs fois. Cela a pour conséquence de se prémunir contre les évanouissements du canal. Le deuxième type de gain est l'augmentation du débit. Pour ce faire on utilise les canaux multiples comme un moyen de transmettre simultanément des données différentes.

Dans cette section, nous présentons les principes fondamentaux des systèmes multi-antennes MIMO que nous utilisons dans la suite du document. Nous commençons par présenter les systèmes MIMO à codage blocs orthogonaux également appelés systèmes STBC pour "space-time block codes". Dans un second temps, nous présentons les systèmes MIMO à multiplexage spatio-temporel plutôt privilégiés pour leur débit. Mais tout d'abord, nous décrivons le modèle mathématique du canal MIMO que nous utilisons par la suite.

1.5.1 Modèle de canal MIMO

Beaucoup de campagnes de mesures ont été effectuées ces dernières années pour caractériser le canal de propagation multi-antennes et c'est encore un domaine de recherche très actif car il est essentiel d'avoir des modèles probabilistes fiables donnant les caractéristiques importantes du canal de propagation sans avoir à le mesurer à chaque fois. Les caractéristiques du canal de propagation MIMO ont été énormément étudiées par les groupes de travail européens comme COST (pour "european COoperation in the field of Scientific and Technical research"), chargés de caractériser entre autres les canaux de propagation MIMO (COST-231 [42]).

Pour les canaux MIMO, nous retrouvons les mêmes caractéristiques physiques que celles introduites à la section 1.1.1. Le canal est représenté mathématiquement par une matrice $\mathbf{H}$ traduisant la dimension spatiale. Dans la suite nous nous intéresserons au canal non sélectif en fréquence, c'est-à-dire que chaque entrée de la matrice $\mathbf{H}$ est un coefficient complexe, variant dans le temps :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n_t} \\ h_{21} & h_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n_r1} & h_{n_r2} & \cdots & h_{n_rn_t} \end{pmatrix}, \tag{1.63}$$

avec $h_{k,l} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n_r$, $1 \leq l \leq n_t$ et $h_{k,l} = \alpha_{k,l}e^{j\phi_{k,l}}$. La variable aléatoire $\alpha_{k,l}$ est l'amplitude de l'évanouissement du canal entre la $l-$ième antenne d'émission et la $k-$ième antenne de réception que l'on supposera identiquement distribué et $\phi_{k,l}$ sont les phases des coefficients complexes également identiquement distribuées. Les amplitudes de l'évanouissement peuvent être distribuées suivant des lois de Rayleigh, Nakagami-m ou Rice introduites au début de ce chapitre à la section 1.1.3.

Coefficients indépendants et identiquement distribués (i.i.d). Si l'environnement radio est suffisamment riche en diffuseurs, et que les antennes sont suffisamment espacées les unes des autres, les coefficients $h_{k,l}$ peuvent être supposés décorrélés et identiquement distribués [43, 44]. C'est le modèle le plus largement utilisé dans la littérature sur les systèmes MIMO. Les modules $\alpha_{k,l}$ sont les amplitudes des évanouissements du canal et suivent l'une des lois introduites dans ce chapitre pour tout couple (k, l). Les phases des coefficients complexes du canal $\phi_{k,l}$ sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 2\pi)$. Le cas d'un canal MIMO Rayleigh i.i.d correspond à la situation où aucune vue directe n'est disponible entre l'émetteur et le récepteur, et que les deux extrémités du lien MIMO sont entourées d'un grand nombre de diffuseurs.

Corrélation spatiale. Dans la réalité, les environnements peu riches en diffuseurs et/ou un faible espacement spatial entre les antennes (au regard de la longueur d'onde) entraînent l'apparition de corrélation spatiale entre les variables aléatoires $h_{k,l}$. On peut donc définir une matrice de corrélation spatiale (qui est une matrice de covariance) entre les coefficients du canal :

$$\mathbf{\Sigma} = E\left(vec\left(\mathbf{H}\right) vec\left(\mathbf{H}\right)^H\right), \tag{1.64}$$

avec $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{n_r n_t \times n_r nt}$ hermitienne définie positive. L'opérateur $vec\left(\mathbf{A}\right) \in \mathbb{C}^{mn\times 1}$ transforme en un vecteur colonne la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. On définit également deux autres matrices hermitiennes définies positives, que l'on appelle matrice de corrélation d'émission et matrice de corrélation de réception :

$$\mathbf{\Sigma}_{n_t} = E\left(\mathbf{H}^H\mathbf{H}\right), \tag{1.65}$$

$$\mathbf{\Sigma}_{n_r} = E\left(\left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H\right)^T\right). \tag{1.66}$$

Sous les conditions que la matrice de corrélation d'émission est identique vue de tous les capteurs de réception et inversement, et que les éléments diagonaux de $\mathbf{\Sigma}$ s'expriment avec le produit des coefficients de corrélation de l'émission et de la réception, alors la matrice de corrélation du canal MIMO peut se mettre sous la forme [44] :

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_{n_r} \otimes \mathbf{\Sigma}_{n_t}, \tag{1.67}$$

avec $\otimes$ le produit de Kronecker. Cette modélisation est appelée modèle de Kronecker. Pour un canal MIMO Rayleigh corrélé, on peut écrire :

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Sigma}_{n_r}^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{1/2}, \tag{1.68}$$

avec les coefficients de $\mathbf{H}_w$ gaussiens indépendants et identiquement distribués. Notons que le modèle de Kronecker est le modèle généralement admis pour modéliser des environnements MIMO NLOS, avec corrélation [44], [45]. Ce modèle semble avoir une dépendance importante par rapport à la configuration des réseaux d'antennes utilisés pour le système MIMO [46]. Notons également que ce modèle est utilisé par des auteurs pour modéliser une corrélation spatiale lorsque les amplitudes des coefficients de $\mathbf{H}$ suivent une loi de Nakagami-m [47], [48]. Cependant rien ne semble pouvoir afirmer que ce modèle est encore correcte pour des évanouissements de Nakagami-m [49].

Le phénomène de corrélation spatiale apparaît dans l'environnement décrit plus haut. L'onde électromagnétique arrive (respectivement part) sur les antennes de réception (respectivement d'émission) avec un certain angle d'arrivée (AA) (respectivement de départ

(AD)). A cause de la présence de diffuseur dans l'environnement on observe un étalement angulaire des angles d'arrivés et de départs, modélisé par une variable aléatoire gaussienne (dans le plan azimuthal) qui correspond bien à ce que l'on peut observer [50]. La corrélation spatiale sur les antennes dépend de l'espacement entre celles-ci suivant une combinaison linéaire de fonctions de Bessel, mais également de l'écart type de la distribution gaussienne de l'étalement angulaire et de sa moyenne. Plusieurs études, notamment celle de Luo *et al.* ont montré que la corrélation de l'enveloppe de l'onde incidente diminue dès lors que l'étalement angulaire dans lequel arrivent (ou partent) les signaux augmente [51]. A l'extrême si le récepteur (ou l'émetteur) se trouve dans un environnement isotrope, on retrouve l'expression de Jakes pour le coefficient de corrélation [4] : $\rho \propto J_0^2\left(2\pi\frac{\Delta d}{\lambda}\right)$. Il est proportionnel au carré de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, et Δd est l'espacement inter-capteurs, λ est la longueur d'onde.

La présence de corrélation à l'émission et/ou à la réception vont venir dégrader la diversité que peut offrir un système MIMO et par la même, les performances du système. Cependant les études en [52, 53] ont montré que la dégradation des performances était faible même pour des coefficients de corrélation de l'ordre de 0.7. Par contre, Gesbert *et al.* ont montré qu'un phénomène de "trou de serrure" était très néfaste pour la capacité que pouvait atteindre un système MIMO [54, 55]. Les diffuseurs autour du mobile et de la station de base créent une sorte d'anneau de diffusion caractérisé par un rayon dépendant de la distance maximale entre les diffuseurs et le mobile (cela est appelée "scattering radius" en anglais). Le phénomène "trou de serrure" (ou "keyhole") apparaît lorsque le rayon de diffusion autour du mobile et de la station de base est trop faible comparé à la distance entre ces deux anneaux, ce qui a pour effet de diminuer le rang de la matrice canal et donc la capacité du système. Nous supposerons dans la suite que nos communications ne se trouvent pas dans cette configuration.

Notons également que la proximité spatiale des antennes peut également provoquer des effet de couplage électromagnétique entre elles. La prise en compte de ces effets sort du cadre de notre étude, mais les travaux de Luo *et al.* [51], ainsi que Diouris *et al.* [56] ont étudié l'impact des effets de couplage sur les performances d'un système. Sous certaines conditions, le couplage peut entraîner une modification du diagramme de rayonnement des antennes, et ainsi apporter une diversité améliorant les performances du système.

1.5.2 Systèmes multi-antennes à codage blocs orthogonaux

Codage STBC. Les systèmes MIMO STBC orthogonaux présentent un compromis optimal entre diversité (donc qualité du lien radio) et débit. Ils utilisent des symboles complexes issus d'une constellation codés à la fois en espace (plusieurs antennes d'émission) et en temps (redondance) suivant une matrice de codage $\mathcal{G}$ propre à chaque type de code. La figure 1.2 illustre une chaîne MIMO STBC. La matrice $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{p\times n_t}$ et ses colonnes sont orthogonales les unes par rapport aux autres au sens du produit scalaire :

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n_t} \\ g_{21} & g_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{p1} & g_{p2} & \cdots & g_{pn_t} \end{pmatrix}, \tag{1.69}$$

dont chaque entrée $g_{k,j}$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq j \leq n_t$, est une combinaison linéaire des symboles $\{d_n\}_{n=1}^{N}$ et de leur conjugué. A chaque instant k, le vecteur signal $\{g_{k,j}\}_{j=1}^{n_t}$ est transmis au moyen des n_t antennes d'émission. Pour transmettre N symboles il faut une durée

équivalente à p symboles. Le taux de codage du système se définit donc par $R_c = N/p$ et il est nécessairement inférieur à 1 si l'on veut garder l'orthogonalité des codes pour une taille de système supérieure à 2 [57].

En 1998, Alamouti est le premier à proposer un code espace-temps orthogonal en blocs pour deux antennes d'émission à rendement unitaire [58]. La matrice de codage spatio-temporel est :

$$\mathcal{G}_2 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ -d_2^* & d_1^* \end{pmatrix}. \tag{1.70}$$

Tarokh *et al.* ont proposé dès 1999 une méthodologie permettant de construire des codes orthogonaux pour un nombre d'antennes à l'émission supérieur à 2 [57]. Ces codes se nomment $\mathcal{G}_3$ et $\mathcal{G}_4$ pour trois et quatre antennes. Ils ont un rendement $R_c = 1/2$. Des codes de rendement supérieure $R_c = 3/4$ ont également été trouvés par Tarokh et se nomme $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ pour 3 et 4 antennes [59].

Tarokh *et al.* ont également montré qu'il était impossible de construire des schémas de codage spatio-temporel à blocs orthogonaux à rendement unitaire pour plus de deux antennes en émission. A partir de ce constat beaucoup d'auteurs ont cherché à construire des codes permettant d'atteindre un rendement unitaire au détriment de l'orthogonalité. Les travaux sur la conception de codes quasi-orthogonaux à rendement unitaire sont légion et le sujet continu d'attirer beaucoup d'attention de la part du monde académique et industriel. Cependant, la conclusion de Tarokh *et al.* est valable pour une construction de codes blocs spatio-temporels basée sur le critère du rang. Le rang de la matrice construite avec les différences entre chaque pair distincte de codes, doit être maximal. Belfiore *et al.* ont montré que l'on pouvait construire d'autres codes spatio-temporels aux propriétés très intéressantes [60]. En se basant sur des résultats de la théorie des nombres, les auteurs construisent un code bloc spatio-temporel à diversité maximale et débit maximal pour 2 antennes de transmission et sur 2 périodes symbole. Ils montrent que le code proposé dépasse les performances du code d'Alamouti aux faibles et forts SNR lorsque le nombre d'antennes de réception est supérieur à 1. En [61] les auteurs généralisent l'approche de la construction de codes spatio-temporels basé sur la théorie de Galois, à des systèmes MIMO d'ordre supérieur. En 2004, Belfiore *et al.* ont découvert le "Golden Code", basé sur le fameux nombre d'Or de l'antiquité $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce code présente une diversité maximale et un débit maximal pour des systèmes 2×2 et surpasse en performance les autres codes connus [62,63]. Bien que ces nouveaux codes soient d'un réel intérêt, le formalisme complexe inhérent à leur manipulation font que nous avons considéré les codes STBC introduits par Tarokh *et al.* et ce sont eux dont on parle dans la suite.

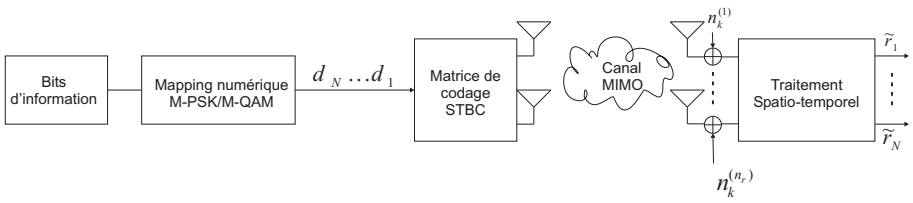


FIG. 1.2 – Schéma bloc d'un système MIMO à codage bloc orthogonaux.

Traitement en réception. Le signal reçu par la $i-$ème antenne à l'instant k est :

$$r_k^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_t} h_{ij} g_{kj} + n_k^{(i)}, \tag{1.71}$$

avec $n_k^{(i)}$ est un bruit additif blanc gaussien de densité spectrale mono-latérale N_0. Un récepteur à maximum de vraisemblance avec une connaissance parfaite du canal, calcul la métrique suivante [64] :

$$D = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_r} \left| r_k^{(i)} - \sum_{j=1}^{n_t} h_{ij} g_{kj} \right|^2, \tag{1.72}$$

pour tous les mots codes possibles (c'est-à-dire les colonnes de $\mathcal{G}$) et choisit celui qui minimise D. Grâce à l'orthogonalité des colonnes de $\mathcal{G}$, la minimisation de (1.72) est équivalent à la minimisation de la métrique pour chaque symbole d_n, $n = 1, .., N$ séparément. Ainsi (1.72) est équivalent à [64, 65] :

$$\hat{d}_n = \arg\min_{d \in \mathcal{A}} \left| \underbrace{\left(\kappa ||\mathbf{H}||_F^2 d_n + \eta_n\right)}_{\triangleq \tilde{r}_n} - \kappa ||\mathbf{H}||_F^2 d \right|^2, \tag{1.73}$$

où $\tilde{r}_n$ est la sortie de traitement bloc et $\eta_n \hookrightarrow \mathcal{CN}\left(0, \kappa ||\mathbf{H}||_F^2 N_0\right)$ est le bruit gaussien en sortie de traitement bloc [65]. De plus $||\mathbf{H}||_F^2$ est le carré de la norme de Frobenius[2] de $\mathbf{H}$. La constante κ dépend du type de la matrice de codage utilisée et vaut 1 pour $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$ et 2 pour $\mathcal{G}_3$ et $\mathcal{G}_4$ [64]. Et $\mathcal{A}$ est la constellation considérée (M-PSK, M-QAM).

En fait Tarokh a montré que le codage spatio-temporel en blocs orthogonaux et leur décodage par maximum de vraisemblance, permettaient de transformer un canal MIMO en son équivalent SISO ; c'est ce que transcrit l'équation (1.73). De cela on peut tirer le rapport signal à bruit instantané en sortie de traitement [66] :

$$\gamma_{STBC} = \kappa ||\mathbf{H}||_F^2 \frac{E_s}{N_0}, \tag{1.74}$$

avec E_s l'énergie moyenne par symbole de la constellation. L'énergie moyenne émise par antenne est E_m/n_t, par conséquent la puissance moyenne du signal reçue sur chaque antenne est $(E_m/n_t) \sum_{j=1}^{n_t} E\left(|h_{ij}|^2\right) = E_m$. Il en résulte que le SNR moyen reçu sur chaque antenne est $\overline{\gamma}_s = E_m/N_0$. Grâce à l'orthogonalité des colonnes de $\mathcal{G}$, on peut lier l'énergie moyenne émise E_m et l'énergie moyenne par symbole E_s [57] :

$$E_s = \frac{E_m}{n_t \kappa R_c}. \tag{1.75}$$

Par conséquent, on peut exprimer le rapport signal à bruit instantané par symbole après décodage en fonction du rapport signal à bruit moyen reçu sur chaque antenne :

$$\gamma_{STBC} = \frac{||\mathbf{H}||_F^2}{n_t R_c} \overline{\gamma}_s. \tag{1.76}$$

[2]Le carré de la norme de Frobenius d'une matrice $\mathbf{A}$ $p \times q$ est défini comme

$$||\mathbf{A}||_F^2 \triangleq tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^H) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |a_{i,j}|^2$$

où $tr(.)$ et H correspondent à l'opérateur trace et hermitien respectivement.

1.5.3 Multiplexage spatial

Les systèmes à codage blocs orthogonaux offrent un compromis entre diversité et débit. Le multiplexage spatial mise sur le débit que l'on peut obtenir avec un système multi-antennes. Le principe d'un système MIMO à multiplexage spatial avec n_t antennes d'émission et n_r antennes de réception est représenté sur la figure 1.3.

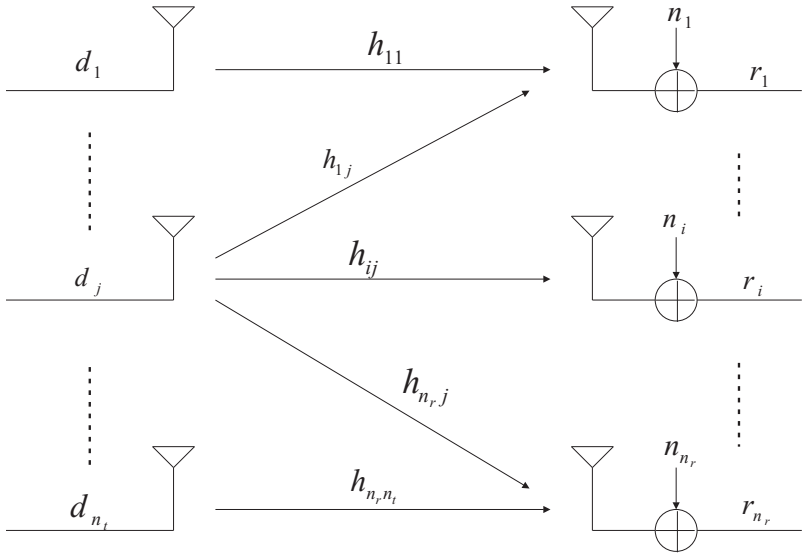


FIG. 1.3 – Modèle synoptique d'un système MIMO à n_t antennes en émission et n_r antennes en réception.

Dans ce schéma, on présente un vecteur de symboles différents sur chaque antenne d'émission. La transmission de données se modélise par l'équation suivante :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{n}, \tag{1.77}$$

avec $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^{n_t \times 1}$, le vecteur de symbole émis à chaque instant, $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{n_r \times 1}$ le signal reçu et $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{n_r \times 1}$ un bruit additif gaussien suivant une loi normale multivariée $\mathbf{n} \hookrightarrow \mathcal{CN}(\mathbf{0}, N_0 \mathbf{I}_{n_r})$. Les variables aléatoires n_i, $1 \leq i \leq n_r$ sont indépendantes les unes des autres ainsi que des données. On omet volontairement l'indice temporel pour des raisons de simplicité d'écriture.

Ici on considère que l'émetteur n'a pas de connaissance a priori sur le canal. Dans ce cas la stratégie optimale d'émission (celle qui maximise la capacité du lien à condition d'utiliser un récepteur MV) est d'affecter la même puissance à toutes les antennes. Ce résultat démontré par Telatar en 1995 [67], correspond à la stratégie BLAST (Bell Laboratories Layered Space-Time) [43]. Plusieurs stratégies de multiplexage ont été proposées par les "Bell Labs" notamment par Foschini en 1996 qui inventa le D-BLAST (Diagonal-BLAST) [68]. Cette architecture permet de détecter les symboles de manière diagonale avec une technique d'annulation d'interférence du genre SIC ou PIC. Cependant l'architecture D-BLAST est un peu lourde et une version simplifiée a été inventée : V-BLAST (Vertical-BLAST). Dans ce cas, les symboles sont émis de manière verticale et détectés suivant un critère ZF (zero forcing) par exemple. Mais dans ce cas, la réception requiert un nombre d'antenne supérieur à celui de l'émission.

Traitement de réception. Dans la suite du manuscrit nous supposons que la technique de multiplexage spatial utilisée est de type V-BLAST. Plusieurs algorithmes de réception peuvent être mis en oeuvre dans ce système. L'optimal en terme de probabilité d'erreur étant le récepteur à MV. D'une complexité très lourde, il n'est pas sérieusement envisagé dans la pratique. On lui préfère des techniques sous optimales à inversion de matrice comme le ZF ou MMSE, ou encore les techniques d'annulation d'interférence comme SIC et PIC [44].

Dans la suite nous considérerons que l'égalisation se fait avec un critère ZF, permettant d'obtenir l'annulation d'interférences entre symboles sans bruit. Le système MIMO considéré est tel que $n_r \geq n_t$. En supposant que le récepteur connaisse la matrice canal, la matrice d'égalisation à appliquer au vecteur reçu est le pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice canal : $\mathbf{H}^{\dagger} = \left(\mathbf{H}^H\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^H$. Le multiplexage spatial V-BLAST transforme le canal MIMO en $n_t = \min(n_t, n_r)$ sous canaux SISO et le récepteur ZF permet d'atteindre un ordre de diversité spatiale de $n_r - n_t + 1$ [69]. Pour prédire les performances d'un détecteur ZF dans un système à multiplexage spatial, il faut connaître la forme du SNR en sortie de traitement par sous-canal. On montre [69, 70] que le SNR instantané en sortie de traitement sur le $j-$ème sous canal s'écrit :

$$\gamma_j = \frac{\overline{\gamma}_s}{[\mathbf{H}^H\mathbf{H}]_{jj}^{-1}}, \tag{1.78}$$

avec $[\mathbf{A}]_{ij}$, le (i,j)ème élément de $\mathbf{A}$. Le rapport signal à bruit moyen sur chaque antenne de réception est $\overline{\gamma}_s = E_s/N_0$, avec $E_s = E\left(|d_j|^2\right)$ l'énergie moyenne d'un symbole.

1.6 Codage canal

Le codage canal est une opération faite au niveau du transmetteur qui a pour but de fournir de la redondance sur les données à transmettre à travers le canal de communication. Dans cette section nous introduisons la notation et le formalisme des deux types de codage canal que nous utilisons dans ce manuscrit : les codes correcteurs d'erreurs blocs et les codes convolutifs.

1.6.1 Codes blocs

Nous nous intéressons aux codes correcteurs d'erreurs linéaires. Ceux-ci consistent en un vecteur de bits appelé "mot code". La longueur du mot code est le nombre de bit n qu'il contient. Notons que les mots codes ne sont pas nécessairement des bits, mais peuvent être des symboles pris dans un certain alphabet. C'est le cas des codes Reed-Solomon par exemple [5], mais nous ne les considérerons pas ici. Avec des codes binaires, on peut donc créer 2^n mots codes différents. Pour construire un code bloc, k bits d'information $k < n$ sont associés à un mot code de longueur n choisi parmi un ensemble de 2^k mots codes. On obtient un code bloc que l'on note généralement (n, k) et le rapport $R_c = k/n$ constitue le taux de codage. Il renseigne sur la redondance du code.

Un autre paramètre important est le *poids* du code qui est simplement le nombre d'éléments non nuls qu'il contient. Chaque mot code a son propre poids. L'ensemble de tous les poids d'un code constitue la distribution des poids du code.

Distance de Hamming. Ce paramètre très important dans la théorie du codage, mesure la distance entre deux mots codes $\mathbf{c}_i$ et $\mathbf{c}_j$ d'un code bloc (n, k) et est notée d_{ij}. Cela correspond au nombre d'éléments que les deux mots codes n'ont pas en commum. Pour

$i \neq j$, la distance de Hamming satisfait la condition $0 < d_{ij} \leq n$. La plus petite valeur de d_{ij} sur l'ensemble des 2^k mots codes est appelée *distance minimale* d_{min}. Cette valeur est très importante car elle conditionne la capacité du code à détecter et corriger des erreurs.

Construction des codes. Un codeur bloc transforme k bits d'information mis sous forme vectoriel $\mathbf{x}_m = [x_{m1}\ x_{m2}\ ...\ x_{mk}]$, en n bits codés $\mathbf{c}_m = [c_{m1}\ c_{m2}\ ...\ c_{mn}]$. Cette transformation est linéaire et s'effectue au moyen d'une matrice de codage $\mathbf{G}$ ne contenant que deux éléments 0 et 1, de taille $k \times n$. Par des opérations linéaires sur les lignes et les colonnes de la matrice, on peut transformer celle-ci de telle manière à ce qu'elle soit la juxtaposition d'une matrice identité de dimension $k \times k$ et d'une matrice dite de parité de taille $k \times n - k$. Chaque mot code $\mathbf{c}_m$ est alors composé de la série des k bits d'informations auxquels on accole $n - k$ bits de parités. Le code bloc (n, k) qui en résulte est appelé *code systématique* [5].

Code de Hamming et Golay. Le code de Hamming est une classe de code binaire linéaire avec la propriété suivante :

$$(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m)\,, \tag{1.79}$$

où m est un entier positif. Les $n = 2^m - 1$ mots codes possibles sont constitués de tous les vecteurs binaires possibles à $n - k = m$ éléments, sauf le vecteur nul. Une autre propriété importante des codes de Hamming est que $d_{min} = 3$ [5].

Le code de Golay est le code binaire linéaire $(23, 12)$, avec $d_{min} = 7$. Nous rentrerons pas dans le détail de sa construction qui peut être trouvée en [5].

Il existe d'autres types de codes binaires comme les codes d'Hadamard ou de Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (BCH). Ces derniers comprennent une large variété de codes binaires et non binaires. Par exemple, les codes de Hamming font partie des codes BCH. Les codes populaires Reed-Solomon sont également un cas particulier de code BCH non binaires [5].

Décodage par décision dure. Le décodage à décision dure s'oppose à décision souple pour laquelle les entrées du décodeur bloc sont des valeurs quantifiées des données. Dans le décodage à décision dure, la décision sur les données transmises (un bit 0 à été émis par exemple) a déjà été effectuée en amont. Reste à savoir si une erreur a été commise ou non.

Une série de n bits est donc transmise au décodeur. Celui-ci compare le mot code reçu aux 2^k mots codes potentiellement émis et opte pour celui qui possède la distance de Hamming la plus petite avec le mot code reçu. L'algorithme de décodage utilise des propriétés élémentaires d'algèbre linéaire pour produire un vecteur $\mathbf{s}$ appelé *syndrome*. Les composantes du syndrome sont nulles si les bits de parité sont retrouvés et non nulles sinon. On peut montrer [5] que le syndrome est une caractéristique de l'erreur commise et non pas propre au mot code transmis. Il y a 2^n erreurs possibles et seulement 2^{n-k} syndromes ; Un même syndrome correspond donc à plusieurs erreurs différentes.

Pouvoir de détection et de correction d'un code. Imaginons que le syndrome soit le vecteur nul. Le mot code reçu est l'un des 2^k mots codes possibles. Puisque la séparation minimale entre deux mots codes est d_{min}, il est possible qu'un vecteur d'erreur $\mathbf{e}$ de poids égale à d_{min}, transforme un des 2^k mots codes en un autre appartenant au même ensemble sans que cela soit détecté. Un code bloc (n, k) est capable de déceler la présence de $d_{min} - 1$ erreurs au plus.

Le pouvoir de correction du code dépend également de la distance minimale de celui-ci. Il est pratique de voir les 2^k mots codes comme des points d'un espaces à n dimensions. Si on considère que chaque mot code est une sphère de rayon t (correspondant à une distance de Hamming), la plus grande valeur de t pour laquelle il n'y a pas d'intersection entre les 2^k sphères est $t = \lfloor \frac{1}{2}(d_{min} - 1) \rfloor$. Avec $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Un code bloc (n, k) peut corriger au plus t erreurs.

Probabilité d'erreur par mot code. La probabilité d'erreur d'un mot code est la probabilité qu'un ou plusieurs bits soit faux. Elle dépend donc de la probabilité d'erreur bit du canal, c'est-à-dire la probabilité de transition entre un 0 et un 1 (ou l'inverse) dans le modèle d'un canal binaire symétrique (Binary Symmetric Channel - BSC) [5]. Le canal étant considéré sans mémoire les erreurs sur les bits apparaissent indépendamment les unes des autres. La probabilité d'erreur d'un mot code est majorée par [5] :

$$P_m(E) \leq \sum_{m=t+1}^{n} \binom{n}{m} P_b(E)^m (1 - P_b(E))^{n-m}, \tag{1.80}$$

avec $P_b(E)$ la probabilité d'erreur bit du canal. Pour les codes dits parfaits, toutes les sphères de rayon t autour des 2^k mots codes possibles sont disjointes, et chaque mot code reçu est à l'intérieur d'une des sphères. Donc chaque mot code reçu est au plus à la distance de Hamming t des mots codes possibles. Pour ces codes seulement l'expression ci-dessus se réduit à l'égalité. Les codes de Hamming et de Golay sont les deux seuls codes non triviaux parfaits.

1.6.2 Codes convolutifs

Un codage convolutif est généré en envoyant le flux de bits d'information à travers un registre à décalage linéaire. Il consiste en $K - 1$ éléments mémoriels (K est la longueur de contrainte) avec n fonctions algébriques linéaires, généralement une sommation modulo-2. La sortie des sommateurs produit la suite de bits codés à transmettre. On définit également un taux de codage élémentaire pour le code convolutif qui est le rapport entre le nombre d'entrée et celui de sortie. Nous considérerons une seule entrée, mais des codeurs plus généraux à entrées multiples peuvent être conçus [5]. La figure 1.4 donne un exemple de codeur convolutif avec une longueur de contrainte de $K = 3$ et un taux de codage de $R_c = 1/3$; pour un bit d'information, sortent trois bits codés.

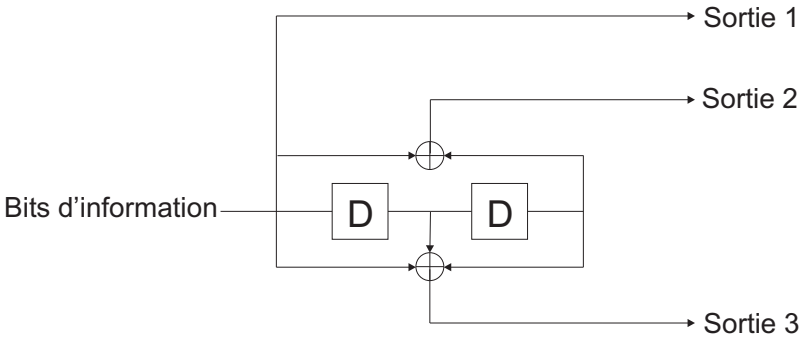


FIG. 1.4 – Codeur convolutif de contrainte $K = 3$ et de taux de codage $R_c = 1/3$.

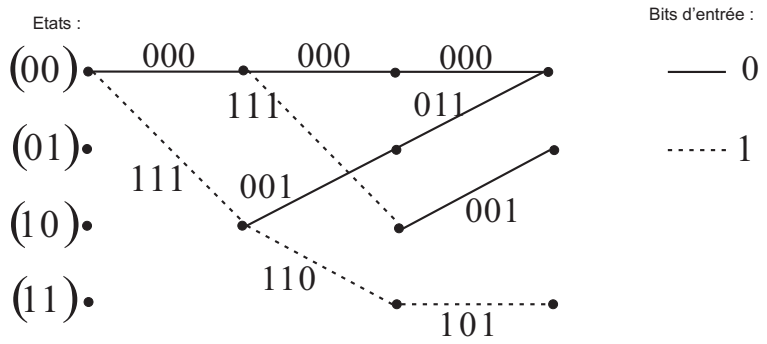


FIG. 1.5 – Diagramme en Treillis pour un codeur convolutif de longueur de contrainte $K = 3$ et de taux de codage $R_c = 1/3$.

Pour décrire un code convolutif, on utilise généralement un diagramme en treillis qui donne l'évolution, en fonction du temps, des états du registre à décalage ainsi que les valeurs des bits de sorties. D'un état, il y a deux transitions possibles correspondant à l'entrée du bit 0 dans le codeur ou du bit 1. Sur chacune des branches sont indiquées les valeurs des bits de sortie du codeur en fonction de l'entrée et de l'état du registre à décalage. La figure 1.5 illustre ce principe pour le codeur convolutif pris en exemple. Il y a quatres états possibles pour le codeur. Une autre description très utile est celle de diagramme à état, avec lequel on peut tirer les propriétés de distance du code ainsi que sa fonction de transfert [5].

Distance de Hamming. Pour un code convolutif la distance de Hamming est la distance entre deux blocs de bits en sortie du codeur. Dans notre exemple, la distance de Hamming entre 011 et 101 est 2. Par extension, on définit la distance entre deux séquences codées, dont l'une peut être la séquence nulle sans perte de généralité. Prenons comme référence la séquence nulle 000 000 000 qui s'étend sur une période de 3 unités de temps. La séquence 001 110 010 est à une distance $d = 4$ de la séquence nulle.

Fonction de transfert et distance libre minimale. Un paramètre très important est la distance libre minimale que l'on note également d_{min}. C'est la distance minimale nécessaire pour qu'une séquence qui s'écarte de la séquence nulle la rejoigne. Par exemple, on vérifie sur la figure 1.5 que $d_{min} = 6$ pour le codeur convolutif pris en exemple. La séquence qui converge à nouveau vers la séquence nulle en un minimum de temps est 111 001 011, et elle est unique dans ce cas.

La fonction de transfert d'un code est définie comme suit et peut être déduite du diagramme d'état du code convolutif :

$$T(D) = \sum_{k=d_{min}}^{\infty} a_k D^k, \tag{1.81}$$

où k correspond à la distance de Hamming entre un chemin particulier et la séquence nulle pendant la même durée et a_k, représente le nombre de séquences possibles ayant la distance de Hamming k.

Taux de codage élevés. Comme en général, les codes convolutifs sont utilisés avec une seule entrée, le taux de codage est de la forme $R_c = 1/n$ avec n le nombre de sortie du

codeur. Plus n est grand et plus le nombre d'erreurs que l'on pourra corriger sera important, mais le débit utile diminuera d'autant. On peut cependant trouver un moyen d'augmenter le taux de codage tout en ayant une seule entrée au codeur convolutif : c'est le poinçonnage. Cette technique consiste en la suppression de certains bits en sortie du codeur suivant une fréquence plus ou moins importante suivant le taux que l'on désire obtenir [71].

Décodage et probabilité de première erreur. La manière optimale de décoder un code convolutif est d'utiliser l'algorithme de Viterbi [72]. Le critère essentiel pour analyser les performances d'un code convolutif est la probabilité de première erreur (First Event Error Probability ; EEP). En [72], la EEP, $P(E_1)$, est définie comme la probabilité que la séquence détectée dans le treillis dévie pour la première fois de la séquence codée dans une section arbitraire j du treillis. Cette probabilité est supposée identique pour toutes les sections du treillis. Pour n'importe quel code convolutif (y compris les codes avec une adaptation du taux de codage par poinçonnage), la EEP est majorée par [71] :

$$P\left(E_1\right) \leq \frac{1}{T} \sum_{k=d_{min}}^{\infty} a_k P_k, \tag{1.82}$$

où T est la période de poinçonnage (si il n'y a pas de poinçonnage $T = 1$), et P_k la probabilité qu'une séquence erronée de distance de Hamming k soit choisie à la place de la séquence codée. Avec une décision dure sur les données, on peut exprimer P_k comme [72] :

$$P_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{e=\frac{k+1}{2}}^{k} \binom{k}{e} P_b^e \left(1-P_b\right)^{k-e} & \text{pour } k \text{ impair } k \geq d_{min} \\ \displaystyle\frac{1}{2}\binom{k}{\frac{k}{2}} P_b^{\frac{k}{2}} \left(1-P_b\right)^{\frac{k}{2}} + \sum_{e=\frac{k}{2}+1}^{k} \binom{k}{e} P_b^e \left(1-P_b\right)^{k-e} & \text{pour } k \text{ pair } k \geq d_{min} \end{cases} \tag{1.83}$$

1.7 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons décrit les éléments principaux des systèmes radios de communications numériques. Nous avons introduit les notations et les modèles qui serviront de base à notre travail, présenté dans les chapitres suivants. Nous avons rappelé les formules associées aux différents modèles de canaux et avons précisé les hypothèses sous lesquelles nous allons nous placer. Pour caractériser les performances, nous avons choisi de travailler sur le SEP mais également sur la notion de probabilité de coupure (outage), que nous avons défini. Nous avons également présenté les outils mathématiques que nous manipuleront dans la suite, en particulier les méthodes d'approximation des fonctions hypergéométriques. Pour finir, nous avons expliqué sous quelles conditions nous allions introduire les systèmes MIMO et le codage dans notre travail. Les chapitres suivant vont donc naturellement s'appuyer sur l'ensemble de ces outils pour conduire à l'obtention d'expressions analytiques du taux de coupure en présence d'évanouissement et de shadowing.

CHAPITRE

2 Performance des systèmes SISO

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons défini les différents effets auxquels était soumis le signal de communication radio. Nous avons également introduit la méthode permettant de calculer la probabilité de coupure symbole, lorsque le signal d'un système de communication est soumis à des évanouissements (rapides ou lents) et du shadowing. Notre travail porte sur le cas où les évanouissements sont considérés comme rapides et en présence de shadowing. Ce cas a été très peu abordé dans la littérature, excepté par les travaux de Conti *et al.* [27, 28, 73]. Nous avons également vu au chapitre précédent que le calcul du SEO sous forme analytique nécessitait l'inversion du SEP moyen pour remonter au SNR. Si une telle inversion est réalisable numériquement, l'expression analytique exacte correspondante n'existe pas, même pour les modulations les plus conventionnelles. Notre contribution dans ce chapitre est de donner des formes analytiques précises du SNR moyen en fonction du SEP moyen, pour différentes modulations et pour différents canaux de propagation. Nous faisons une étude théorique dans un premier temps sans codage, puis nous intégrons ensuite le codage canal à l'analyse de la probabilité de coupure.

Après un état de l'art rappelant les principales contributions sur l'obtention de formes exactes et approchées du SEP moyen ainsi que la contribution de Conti *et al.* [27, 28] sur l'estimation du SEO, nous présentons de nouvelles approximations précises de la probabilité d'erreur permettant d'obtenir le SEO sous forme exacte dans un canal à évanouissements rapides et en présence de shadowing.

En effet, notre approche originale part de l'expression de la probabilité d'erreur moyenne sous forme de fonction hypergéométrique proposé par Shin *et al.* dans [74]. Nous utilisons ensuite la méthode de Laplace pour approcher les fonctions hypergéométriques présentent dans la probabilité d'erreur moyenne. Nous montrons que les approximations proposées sont très précises pour une large gamme de SNR. Les approximations de la probabilité d'erreur proposées dans ce chapitre sont inversibles par rapport au SNR. Nous formulons explicitement le SNR moyen en fonction du SEP moyen, pour les canaux à évanouissements rapides de Rice et Nakagami-m ainsi que pour des signaux à modulation de phase (M-PSK) et à modulation d'amplitude et de phase (M-QAM), qui sont les plus employées dans les systèmes de télécommunications (WiMax, WLAN, UMTS) ou de diffusion (DAB, DVB).

L'expression du SNR moyen en fonction du SEP moyen, nous permet de remonter à la probabilité de coupure symbole lorsque du shadowing est présent. Enfin, notre analyse de performance intègre la présence de codage canal. Nous considérons un système en mode paquet (comme par exemple le WLAN ou HSDPA), et nous nous intéressons à la probabilité de coupure paquet. Nous envisageons deux types de codage : les codes correcteurs blocs et les codes correcteurs convolutifs. Pour ces deux types de codes, nous donnons une forme inversible de la probabilité d'erreur paquet moyenne en fonction de la probabilité d'erreur bit à l'entrée du décodeur. Cette dernière est également inversible par rapport au SNR moyen avec les formules que nous donnons tout au long du chapitre. Ainsi nous pouvons lier la probabilité de coupure paquet au SNR en entrée du récepteur, ce qui est un résultat original et très important pour la fiabilité de lien en présence de shadowing.

2.2 Probabilité d'erreur moyenne et probabilité de coupure : état de l'art

2.2.1 Analyse du SEP

Afin de limiter les campagnes intensives de simulation, complexes et consommatrices de temps, un effort de recherche important a été consacré à l'obtention de formes exactes du SEP ou du moins, de bornes supérieures et/ou inférieures.

L'équation générale du SEP moyen en (1.12) nécessite la connaissance de la probabilité d'erreur conditionnelle sur γ_s (autrement dit de la probabilité d'erreur en canal AWGN). Celle-ci s'exprime à l'aide d'une fonction gaussienne Q du SNR instantané pour un signal M-PSK. Pour un signal M-QAM c'est la somme d'une fonction gaussienne Q et du carré d'une fonction gaussienne Q^2. En 1991, Craig propose d'écrire la fonction gaussienne Q d'une manière différente de celle de l'époque [75] :

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy, \text{ forme classique} \tag{2.1}$$

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta, \text{ forme alternative.} \tag{2.2}$$

Grâce à cette forme, Craig a obtenu la probabilité d'erreur d'une M-PSK en canal AWGN :

$$P_s\left(E\left|\frac{E_s}{N_0}\right.\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right) d\theta, \tag{2.3}$$

avec $g_{psk} = \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$ et M l'ordre de la modulation. Cette expression est donc la probabilité d'erreur conditionnelle (sur γ_s) de (1.12). Les travaux de Simon et Alouini, qui proposent une approche unifiée de l'étude des systèmes sans fils sur des canaux à évanouissements [76,77,78], repose sur cette représentation alternative de Q. Les deux auteurs arrivent à exprimer la probabilité d'erreur moyenne comme une intégrale de la fonction génératrice des moments du SNR, plus simple à calculer. En effet, la probabilité d'erreur d'une M-PSK dans un canal à évanouissement est obtenue en remplaçant E_s/N_0 par γ_s dans (2.3) et dans (1.12) :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \int_0^{\infty} \exp\left(-\gamma_s \frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right) p_{\gamma_s}\left(\gamma_s\right) d\gamma_s d\theta \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_s}\left(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right) d\theta, \tag{2.5}$$

avec M_{γ_s} la MGF du SNR instantané dont la forme peut-être l'une de celles données dans le tableau 1.1. De la même manière, en utilisant la forme alternative de la fonction Q^2, on trouve la probabilité d'erreur d'une M-QAM en canal AWGN :

$$P_s\left(E\left|\frac{E_s}{N_0}\right.\right) = \frac{4g}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\frac{g_{qam}}{\sin^2\theta}\right) d\theta - \frac{4g^2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\frac{g_{qam}}{\sin^2\theta}\right) d\theta, \tag{2.6}$$

avec $g = 1 - 1/\sqrt{M}$ et $g_{qam} = 3/(2(M-1))$. En remplaçant E_s/N_0 par γ_s dans (2.6) et (1.12) on obtient la probabilité d'erreur d'une M-QAM dans un canal à évanouissement :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s\right) = \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/2} M_{\gamma_s}\left(-\frac{g_{qam}}{\sin^2\theta}\right)d\theta - \frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4} M_{\gamma_s}\left(-\frac{g_{qam}}{\sin^2\theta}\right)d\theta. \tag{2.7}$$

Cette approche par la fonction génératrice des moments permet l'obtention de formes exactes du SEP pour de nombreux systèmes de communications numériques et confère une certaine forme d'universalité dans l'expression du SEP moyen.

En 2004, Shin et Lee [74] ont proposé une nouvelle forme exacte pour la probabilité d'erreur des modulations linéaires M-PSK et M-QAM dans un canal de Nakagami-m, à l'aide des fonctions spéciales hypergéométriques de Gauss et d'Appell. Ces expressions sont exactes et valables quelque soit la valeur de m. Notons que pour m entier, Eng et Milstein [79] avaient dérivé dès 1995, une expression exacte pour la probabilité d'erreur dans un canal de Nakagami-m à trajets multiples (dans un contexte CDMA), qui ne faisait pas intervenir de fonctions spéciales. La même année Chennakeshu et Anderson ont donné une expression similaire pour une M-PSK en canal de Rayleigh et à diversité en réception [80]. Ces résultats importants sont résumés dans [6, page 257, eq(8.115)].

Les performances exactes en canal de Rice sont plus compliquées à obtenir analytiquement. Dans cet environnement, nous ne disposons pas, pour le SEP, de forme exacte autre qu'avec une ou plusieurs intégrales. La probabilité d'erreur d'un signal M-PSK en canal de Rice est une intégrale de la MGF du SNR γ_s [81, 6], tandis que le SEP d'une modulation M-QAM est la somme de deux intégrales de la MGF.

Bornes et expressions asymptotiques. Beaucoup d'études ont cherché à déterminer le comportement asymptotique des systèmes de communications qu'ils soient mono ou multi-antennes et ce dans différents environnements de propagation. On peut citer notamment les travaux de Wang et Giannakis [32] que l'on a vue au chapitre 1.

Dans le cas d'un signal M-PSK et un canal de Nakagami-m, On peut trouver des bornes inférieures et supérieures assez simplement [6]. Dans ce type de canal, la probabilité d'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned} P_s\left(E|\overline{\gamma}_s\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_s}^{Naka}\left(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right)d\theta & (2.8)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{psk}}{m}\overline{\gamma}_s}\right)^m d\theta. & (2.9)\end{aligned}$$

En remplaçant $\sin^2\theta$ par sa valeur minimale et maximale ($\sin^2 0 = 0$ et $\sin^2(\pi/2) = 1$) dans le dénominateur de l'intégrande en (2.9), on obtient une borne supérieure et inférieure respectivement du SEP moyen :

$$\frac{S(m)}{\left(1+\frac{g_{psk}}{m}\overline{\gamma}_s\right)^m} \leq P_s\left(E\right) \leq \frac{S(m)}{\left(g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)^m}, \tag{2.10}$$

avec

$$\begin{aligned} S(m) &= \frac{M-1}{M}\left[2^{-2m}\begin{pmatrix}2m\\ m\end{pmatrix} + \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\right.\\ &\quad \left.\times\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\begin{pmatrix}2m\\ k\end{pmatrix}\frac{\sin((2m-2k)\Theta)}{(2m-2k)\Theta}\right], & (2.11)\end{aligned}$$

où $\Theta = (M-1)\pi/M$. Conti *et al* ont proposé une classe améliorée de bornes supérieure et inférieure à partir de celles ci-dessus pour les signaux M-PSK en canal de Rayleigh et avec un récepteur MRC [27, 28]. Cependant leur analyse n'est pas limitée au canal de Rayleigh mais peut s'étendre au canal de Nakagami-m, mais avec m entier :

$$\frac{S(m)}{\left(\frac{S(m+1)}{S(m)} + \frac{g_{psk}}{m}\overline{\gamma}_s\right)^m} \leq P_s(E) \leq \frac{S(m)}{\left(\left(\frac{M}{M-1}S(m)\right)^{1/m} + \frac{g_{psk}}{m}\overline{\gamma}_s\right)^m}. \tag{2.12}$$

Les bornes sont également valables si on considère un système à diversité MRC sans corrélation. Les MGF des SNRs sur chaque branche sont multipliées entre elles, si en plus on considère que les statistiques du canal sont les mêmes sur chaque branche (typiquement même valeur du coefficient m), alors il suffit de remplacer m par mn_r dans (2.12) où n_r est le nombre d'antennes du récepteur.

Ces bornes sont beaucoup plus précises que celles données en (2.10) et pour une large plage de SNR. Récemment Conti *et al* ont également proposé des bornes pour la probabilité d'erreur bit d'un signal M-QAM en canal de Rayleigh [73]. En utilisant l'approximation du BEP d'un signal M-QAM en canal AWGN obtenue par [82] et en intégrant sur la d.d.p. du SNR en sortie de traitement dans un canal de Rayleigh, ils obtiennent les bornes :

$$\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}\log_2(\sqrt{M})}\left(1-\sqrt{\frac{\overline{\gamma}_b}{\frac{1}{g_{qam}\log_2(M)}+\overline{\gamma}_b}}\right) \leq P_b(E) \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{T(M)}{\overline{\gamma}_b}\right\}, \tag{2.13}$$

avec :

$$\begin{aligned} T(M) &= \frac{2(M-1)}{\sqrt{M}\left[\log_2(M)\right]^2} \sum_{k=1}^{\log_2(\sqrt{M})} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{i.2^{k-1}}{\sqrt{M}} \right\rfloor}}{3(2i+1)^2} \\ &\quad \times \left(2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i.2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

avec $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. La précision de ces bornes est très bonne pour une large plage de SNR en canal de Rayleigh.

Comme travaux assez proches des nôtres, nous trouvons ceux qui ont trait à l'approximation de la probabilité d'erreur par la méthode du point de selle également appelée "saddle-point approximation" en Anglais ; celle-ci et la méthode de Laplace étant équivalentes. La méthode du point de selle fût utilisée séparément en [83] et en [84] pour étudier la probabilité d'erreur par mot code en canal de Rice. Tellambura *et al* [83] obtiennent même des expressions lorsque un phénomène de shadowing est présent.

2.2.2 Analyse du SEO

Canal à évanouissements rapides et avec shadowing. Pour autant que nous sachions, seuls Conti *et al* ont proposé des bornes inversibles de la probabilité d'erreur [27, 28, 73], pour s'intéresser au SEO. Ils déterminent grâce à (2.12), un encadrement du SEO $P_s(O)$ lorsque le SNR moyen par symbole $\overline{\gamma}_s$ est une variable aléatoire distribuée suivant une loi log-normale. Leur étude peut s'étendre au canal de Nakagami-m sans difficulté comme nous l'avons montré ci-dessus, mais à la condition que $m \in \mathbb{N}$. Par contre, il semble que ce soit plus difficile pour le cas Rice. Leur approche a l'originalité de proposer des bornes inversibles et précises du SEP à tous les SNR. Chose remarquable car les formes du

SEP provenant d'autres travaux sont inversibles (et précises) seulement en régime asymptotique, c'est-à-dire pour des probabilités d'erreur de l'ordre ou inférieures à 10^{-4}.

Canal à évanouissements lents et avec shadowing. Dans cet environnement, comme le canal est stationnaire à court terme (pendant la durée d'une trame, voir chapitre 1), la probabilité d'erreur moyenne (sur le court terme) est la probabilité d'erreur en canal AWGN. Autrement dit c'est l'une des deux formules (2.3) ou (2.6) selon que l'on considère un signal M-PSK ou M-QAM. Par conséquent, le calcul du SEO nécessite l'inversion de ces expressions pour remonter à $\overline{\gamma}_s$. Le calcul du SEO nécessite l'intégration de la densité de probabilité d'une loi composite (par exemple Nakagami-m/log-normale). Miorandi *et al.* ont donné les expressions de la probabilité de coupure (en fonction du SNR cible) dans le cas où l'on a un canal composite Rayleigh/log-normale [85].

2.3 Estimation du SEP et du SEO

Une autre approche que celle de Conti *et al* est possible pour remonter au SEO. La méthode de Laplace permet d'obtenir des approximations inversibles du SEP moyen pour plusieurs environnements : Nakagami-m, Rice, ainsi que pour une large gamme de modulation linéaire.

2.3.1 Nakagami-m, M-PSK

Approximation du SEP. Grâce à l'approche généralisée de la MGF pour le calcul du SEP en canal à évanouissement, le SEP d'un système SISO à réception cohérente s'écrit [6] :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_s}^{Naka}\left(-\frac{g_{psk}}{sin^2\theta}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} M_{\gamma_s}^{Naka}\left(-\frac{g_{psk}}{sin^2\theta}\right)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_s}^{Naka}\left(-\frac{g_{psk}}{sin^2\theta}\right)d\theta, \end{aligned}$$

avec $M_{\gamma_s}^{Naka}$ la fonction génératrice des moments du SNR par symbole en canal de Nakagami-m. Les auteurs en [74] ont montré que le SEP exact peut s'exprimer à l'aide de fonctions transcendantes hypergéométriques introduite dans le chapitre 1 :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s) &= M_{\gamma_s}^{Naka}(-g_{psk})\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)}{}_2F_1\left(m,\frac{1}{2};m+1;\frac{1}{1+g_{psk}\overline{\gamma}_s/m}\right)\right. \\ &\left. +\frac{\sqrt{1-g_{psk}}}{\pi}F_1\left(\frac{1}{2},m,\frac{1}{2}-m;\frac{3}{2};\frac{1-g_{psk}}{1+g_{psk}\overline{\gamma}_s/m},1-g_{psk}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

L'équation (2.15) obtenue par [74] est très élégante mais n'est pas inversible par rapport au SNR moyen par symbole. Il est donc nécessaire d'approcher les valeurs des fonctions hypergéométriques avec des formes analytiques permettant une inversion du SEP. Nous avons vu au chapitre précédent que la fonction hypergéométrique de Gauss pouvait s'approcher grâce à la méthode de Laplace moyennant un choix judicieux de fonctions. Avec nos paramètres la forme intégrale de la fonction hypergéométrique de Gauss est :

$${}_2F_1\left(m,\frac{1}{2};m+1;x\right) = B(m,1)^{-1}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{m+1-m-1}(1-tx)^{-1/2}dt, \tag{2.16}$$

dans laquelle $x = 1/(1+g_{psk}\overline{\gamma}_s/m)$. Notons que $|x| < 1$ pour toutes les valeurs de SNR, ce qui rend possible l'expression de la fonction hypergéométrique de Gauss en terme d'intégrale. La méthode de Laplace introduite au chapitre 1 permet d'approcher (2.16) avec ([30]) :

$${}_2\hat{F}_1\left(m,\frac{1}{2};m+1;x\right) = (m+1)^{m+1/2}r_{2,1}^{-1/2}\left(\frac{\hat{t}}{m}\right)^m(1-\hat{t})(1-x\hat{t})^{-1/2}, \tag{2.17}$$

avec

$$r_{2,1} = \frac{\hat{t}^2}{m} + (1-\hat{t})^2 - \frac{x^2}{2(1-x\hat{t})^2}\frac{\hat{t}^2}{m}(1-\hat{t})^2, \tag{2.18}$$

$$\hat{t} = \frac{2m}{\sqrt{\tau^2 - 4m(m+\frac{1}{2})x} - \tau}, \tag{2.19}$$

$$\tau = x\left(\frac{1}{2} - m\right) - (m+1). \tag{2.20}$$

Avec cette expression on peut d'ores et déjà exprimer la probabilité d'erreur symbole d'une modulation M-PSK de la façon suivante :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \approx x^m \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+1/2)(m+1)^{m+1/2}}{\Gamma(m+1)m^m} \frac{\hat{t}^m(1-\hat{t})}{\sqrt{r_{2,1}(1-x\hat{t})}} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} F_1(\frac{1}{2}, m, \frac{1}{2} - m; \frac{3}{2}; y, z) \right\}, \tag{2.21}$$

avec $y = (1-g_{psk})/(1+g_{psk}\overline{\gamma}_s/m)$, $z = 1-g_{psk}$ et en remarquant que $M_{\gamma_s}^{Naka}(-gpsk) = x^m$. On peut noter que pour le cas particulier d'un signal BPSK, il n'y a pas le terme contenant la fonction hypergéométrique d'Appell, puisque celui-ci apparaît avec l'intégrale de $\pi/2$ à $(M-1)\,\pi/M$ de la fonction génératrice des moments en (2.15). Autrement dit la probabilité d'erreur symbole (bit) d'un signal BPSK est extrêmement bien approchée par l'expression suivante :

$$P_b(E|\overline{\gamma}_s) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+1/2)(m+1)^{m+1/2}}{\Gamma(m+1)m^m} \frac{(\hat{t}x)^m(1-\hat{t})}{\sqrt{r_{2,1}(1-x\hat{t})}}. \tag{2.22}$$

La figure 2.1 représente l'évolution du BEP d'un système SISO à réception cohérente dans un canal plat de Nakagami-m, d'une BPSK. La valeur exacte du BEP est représentée par les courbes "BEP exact" calculées par (2.15) sans le deuxième terme. La valeur approchée du BEP par la méthode de Laplace est représentée par les courbes "Laplace approx" calculées avec (2.22) et ce pour des valeurs entières du paramètre d'évanouissement m comprises entre 1 et 7. Notons que les expressions ci-dessus sont valables même pour des valeurs non entières de m. L'expression trouvée en (2.22) est extrêmement précise. En effet, l'approximation possède une erreur quadratique moyenne relative inférieure à 0.90% dans le domaine d'intérêt c'est-à-dire pour un BEP compris entre 10^{-1} et 10^{-4}. On peut également noter que l'approximation ne diverge pas pour des SNR inférieur à 0dB. Celle-ci ne tend pas vers 0.5 lorsque le SNR tend vers $-\infty$ mais conserve la même tendance que la probabilité d'erreur exacte. L'expression (2.22) n'est toujours pas inversible en x et à fortiori en $\overline{\gamma}_s$, il s'agira donc de procéder à de plus amples simplifications pour résoudre l'équation en x, mais nous y reviendrons.

En ce qui concerne les modulations M-PSK, la fonction hypergéométrique d'Appell contient toujours la variable y dépendant du SNR moyen par symbole $\overline{\gamma}_s$. Il faut donc en trouver une approximation. La première idée qui vient naturellement à l'esprit est d'appliquer la même méthode que pour la fonction hypergéométrique de Gauss. On exprime la fonction hypergéométrique d'Appell à l'aide d'une simple intégrale comme en (1.30) et on choisit deux fonctions h et g convenables permettant d'approcher F_1 avec suffisamment de précision. Malheureusement, cette approche se révèle assez délicate à mettre en oeuvre et

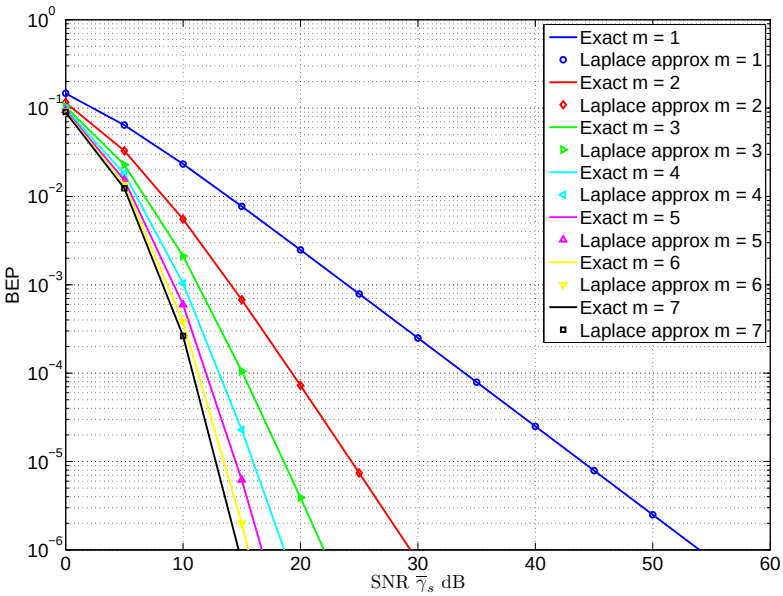


FIG. 2.1 – BEP exacte d'un signal BPSK dans un canal de Nakagami-m et son approximation de Laplace (2.22)

inefficace pour ce que l'on a pu en juger. En effet, la base de fonction (h, g) naturelle (au regard de celles prises pour ${}_2F_1$) est :

$$h(t) = t^{-1}(1-t)^{-1}, \tag{2.23}$$

$$g(t) = -\left\{a \ln t + (c-a)\ln(1-t) - b\ln(1-yt) - b' \ln(1-zt)\right\}, \tag{2.24}$$

avec $a = \frac{1}{2}$, $b = m$, $b' = \frac{1}{2} - m$ et $c = \frac{3}{2}$. Pour que l'on puisse appliquer la méthode de Laplace, il est nécessaire de connaître le point $\hat{t}$ où $g(t)$ est minimum. Cela conduit à la résolution d'une équation du troisième degré en t, ce qui n'est pas réellement en soit un problème puisqu'il existe des expressions analytiques pour les solutions de ces équations. Par contre la précision obtenue avec la méthode de Laplace n'est pas très satisfaisante, et aucun choix de calibration ne semble efficace. Tous les autres choix pour les fonctions h et g n'ont pas donné de meilleurs résultats.

Cependant, une autre approche est possible. On utilise la relation fonctionnelle (1.31) pour la fonction hypergéométrique d'Appell, et on obtient :

$$F_1\left(\frac{1}{2}, m, \frac{1}{2} - m; \frac{3}{2}; y, z\right) = (1-y)^{-1/2} F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} - m; \frac{3}{2}; y', z'\right), \tag{2.25}$$

avec $y' = -(1-g_{psk})/(g_{psk}(1+\overline{\gamma}_s/m))$ et $z' = g_{psk}\overline{\gamma}_s(1-g_{psk})/(mg_{psk}(\overline{\gamma}_s/m+1))$. Cette relation n'enlève pas le fait que F_1 dépend toujours de $\overline{\gamma}_s$, et elle n'est pas inversible. Mais nous allons regarder le comportement de cette expression asymptotiquement (lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$).

Expression asymptotique. Certains termes de l'approximation en (2.21) vont se simplifier. En effet, lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$ alors $x \to 0$ et les relations (2.18), (2.19), (2.20) se

simplifient :

$$\hat{t} \rightarrow \frac{m}{m+1} \triangleq \tilde{t}, \tag{2.26}$$

$$r_{2,1} \rightarrow \frac{1}{1+m}, \tag{2.27}$$

$$\tau \rightarrow -(m+1). \tag{2.28}$$

De plus, $y' \rightarrow 0$ et $z' \rightarrow z$. Or lorsque l'une des variables y' ou z' de F_1 s'annule, celle-ci tend vers une fonction hypergéométrique de Gauss (ch.2) :

$$F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} - m; \frac{3}{2}; y', z'\right) \rightarrow {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m; \frac{3}{2}; z\right), \tag{2.29}$$

finalement en régime asymptotique l'expression (2.21) devient :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s \rightarrow \infty) \approx x^m \left\{ \frac{\Gamma(m+1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)} \frac{1}{\sqrt{1-x\tilde{t}}} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m; \frac{3}{2}; z\right)}{\sqrt{1-y}} \right\}. \tag{2.30}$$

L'approximation obtenue en (2.30) est très précise pour tous les régimes de SNR et quelque soit la valeur du paramètre d'évanouissement m. Mais l'expression possède encore le terme y qui dépend du SNR, et on ne peut donc pas encore l'inverser analytiquement pour une valeur de m quelconque.

Pour des ordres de modulations suffisamment importants, y est peu différent de x. De plus $\tilde{t}$ va tendre vers 1 à mesure que m va devenir important. On fait donc l'approximation suivante $y \approx x\tilde{t}$ qui conduit à une bonne approximation de (2.30) :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s \rightarrow \infty) \approx k_{psk} \frac{x^m}{\sqrt{1-x\tilde{t}}}, \tag{2.31}$$

avec :

$$k_{psk} = \frac{\Gamma(m+1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m; \frac{3}{2}; z\right). \tag{2.32}$$

La figure 2.2 montre la précision de l'approximation (2.31) pour deux ordres de modulations (QPSK et 8−PSK) et pour trois valeurs du paramètre d'évanouissement $m = 1, 3, 6$. L'approximation est comparée à la valeur exacte calculée avec (2.15) et l'erreur commise par l'approximation est minime puisque inférieure à 4.2% dans la plage du SNR d'intérêt.

La dernière expression pourrait être inversible de façon analytique pour $m \leq 2$. En effet, une élévation au carré de (2.31) conduirait à la résolution d'une équation de degré 4 tout au plus en x, dont les solutions sont connues [9]. Mais pour $m \geq 3$, on ne peut pas trouver d'expression formelle à l'aide de radicaux pour l'équation engendrée.

Une expression inversible du SEP. On peut remarquer que pour $0 < x \leq 1$, alors $x^m \leq x$. La probabilité d'erreur est donc minorée par :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s \rightarrow \infty) \geq P_s^*(E) = k_{psk} \frac{x^m}{\sqrt{1-x^m\tilde{t}}}, \tag{2.33}$$

avec $P_s^*(E)$ la probabilité d'erreur cible que l'on se fixe. Cette borne inférieure est d'autant plus grossière que m est grand et le SNR considéré faible. En effet, pour un paramètre

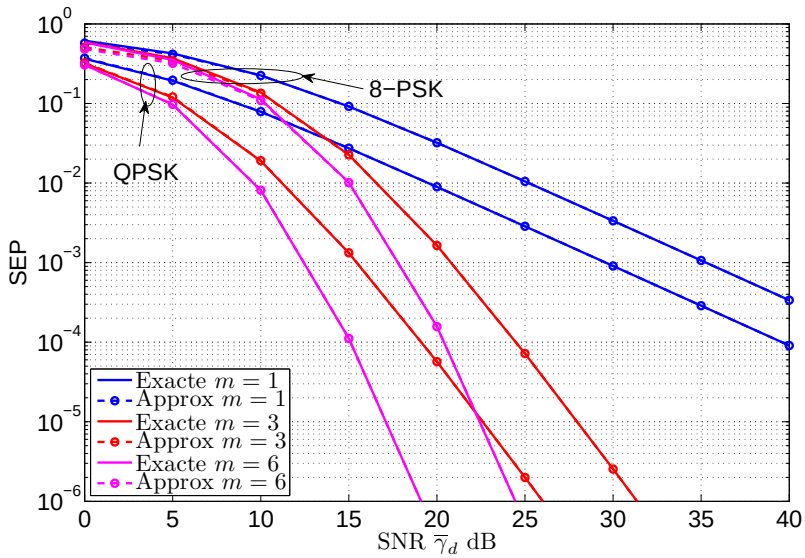


FIG. 2.2 – Approximation du SEP avec l'équation (2.31) pour un signal QPSK et 8-PSK

d'évanouissement $m = 6$, l'erreur commise par l'approximation est d'environ 42% pour une probabilité d'erreur comprise entre 10^{-1} et 10^{-4} et pour un signal QPSK. Néanmoins cela permet d'inverser la probabilité d'erreur symbole. En élevant au carré l'équation (2.33), on peut la résoudre et on obtient la borne inférieure suivante pour le SNR moyen par symbole :

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E)) = \frac{m}{g_{psk}} \left[\sqrt[m]{\frac{\tilde{t}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{k_{psk}}{P_s^*(E)}\right)^2}} - 1 \right]. \tag{2.34}$$

La borne obtenue pour le SNR est originale et beaucoup plus simple que celle proposée par [28], cependant peu précise lorsque m augmente.

Formule inverse améliorée pour les ordres m élevés. Repartons de l'équation (2.31) et élevons-la au carré :

$$(k_{psk})^2 x^{2m} + (P_s^*(E))^2 \tilde{t}x - (P_s^*(E))^2 \approx 0, \tag{2.35}$$

Puisque $x \in]0, 1[$ et que $\hat{t} < 1$, on néglige dans un premier temps le terme en x de l'équation ci-dessus devant le terme constant : $(P_s^*(E))^2$. En supposant donc que le terme du milieu soit nul, on peut évaluer x :

$$x \approx \sqrt[m]{\frac{P_s^*(E)}{k_{psk}}}. \tag{2.36}$$

Pour une valeur $P_s^*(E)$ fixé, le terme en x dans l'équation (2.35) ne varie pas beaucoup lorsque x parcours son domaine de définition. On peut donc le remplacer par sa valeur

approchée (2.36) dans l'équation (2.35), et on obtient pour $\overline{\gamma}_s$:

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E)) = \frac{m}{g_{psk}} \left[\left[\frac{P_s^*(E)}{k_{psk}} \sqrt{1 - \tilde{t} \sqrt[m]{\frac{P_s^*(E)}{k_{psk}}}} \right]^{-\frac{1}{m}} - 1 \right], \tag{2.37}$$

que l'on peut exprimer de façon plus compact :

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E)) = c_0 \left(P_s^*(E)^{-\frac{1}{m}} \left(1 - c_1 P_s^*(E)^{\frac{1}{m}}\right)^{-\frac{1}{2m}} - k_{psk}^{-\frac{1}{m}} \right), \tag{2.38}$$

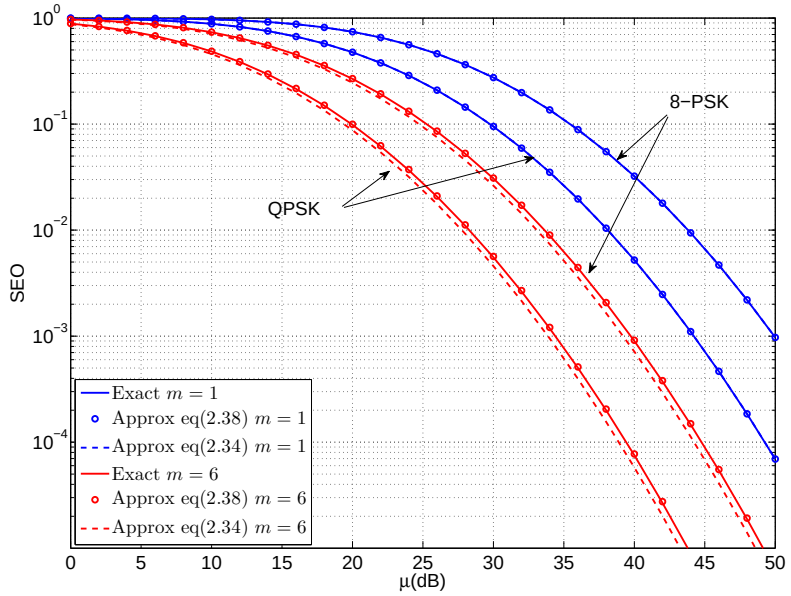
avec

$$c_0 = \frac{m \sqrt[m]{k_{psk}}}{g_{psk}}, \tag{2.39}$$

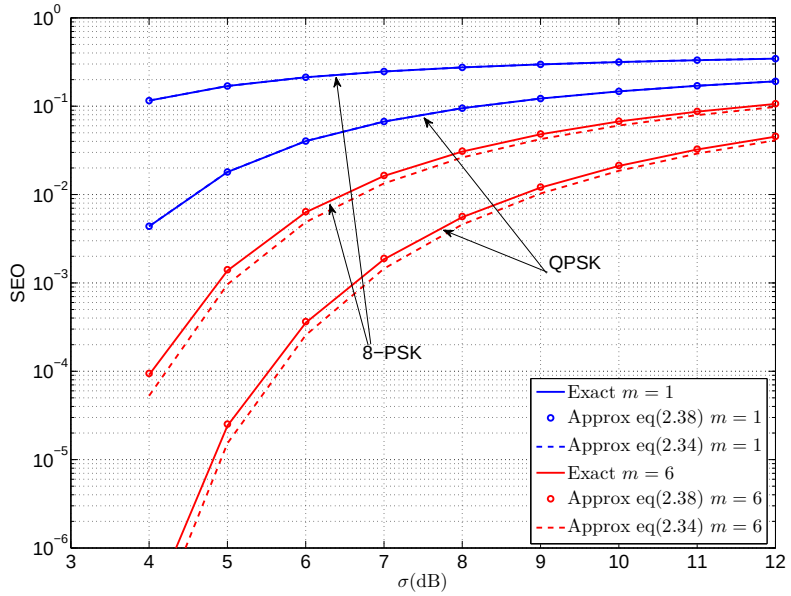
$$c_1 = \frac{\tilde{t}}{\sqrt[m]{k_{psk}}}. \tag{2.40}$$

Estimation du SEO. Maintenant que nous avons le SNR moyen en fonction du SEP cible, nous pouvons intégrer la présence de shadowing. Le SNR moyen varie selon une loi log-normale de paramètre μ_{dB} et σ_{dB}. Grâce à (1.18), le SEO se calcule de manière exacte en utilisant l'expression du SNR moyen en (2.38).

La figure 2.3 montre l'évaluation du SEO avec (2.34) et avec (2.37) comparées à la valeur exacte (obtenue en inversant numériquement (2.15)). Sur la figure 2.3(a) le SEO de deux modulations (QPSK et 8−PSK) est tracé en fonction de la valeur moyenne de la loi log-normale, pour $\sigma = 8$dB et pour deux valeurs de l'évanouissement $m = 1, 6$. Sur la figure 2.3(b), il est tracé en fonction de l'écart type du shadowing et pour $\mu = 30$dB. L'écart type d'une loi de shadowing est généralement considéré comme variant de 4 à 12dB pour l'ensemble des environnements (rural à indoor). La probabilité d'erreur moyenne cible est dans les deux cas de 10^{-2}. On remarque que pour le cas particulier où $m = 1$ (canal de Rayleigh), le calcul du SEO est identique avec (2.34) et (2.37) et est confondue avec l'inversion numérique de (2.15). Par contre, il est clair que l'obtention du SEO avec (2.37) est plus performante pour des plus grandes valeurs du paramètre d'évanouissement m. L'estimation du SEO avec cette formule est confondue avec l'inversion numérique exacte de la probabilité d'erreur, et ce pour les variations des deux paramètres de la loi log-normale. Dorénavant, dès que cela sera possible, nous utiliserons la méthode qui nous a conduit à l'approximation obtenue en (2.37).



(a) SEO $= f(\mu_{dB})$



(b) SEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 2.3 – SEO de deux signaux PSK en présence de shadowing en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale. Obtention du SEO à l'aide de l'inversion numérique de (2.15), à l'aide de (2.34) et (2.38).

2.3.2 Nakagami-m, M-QAM

On peut étendre l'étude faite ci-dessus pour des signaux modulés en quadrature. Shin et Lee ont également donné l'expression du SEP moyen d'un signal M-QAM en canal de Nakagami-m [74] :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s) &= \frac{2gM_{\gamma_s}^{Naka}(-g_{qam})}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)}{}_2F_1\left(m,\frac{1}{2};m+1;\frac{1}{1+g_{qam}\overline{\gamma}_s/m}\right)- \\ &\quad \frac{g^2}{\pi}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}M_{\gamma_s}^{Naka}(-2g_{qam})F_1\left(1,m,1;m+\frac{3}{2};\frac{1+\frac{g_{qam}\overline{\gamma}_s}{m}}{1+\frac{2g_{qam}\overline{\gamma}_s}{m}},\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

avec $g = 1-1/\sqrt{M}$, $g_{qam} = 3/(2(M-1))$. De plus, on pose $x_1 = 1/(1+g_{qam}\overline{\gamma}_s/m)$ et $x_2 = 1/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_s/m)$, et on remarque que $M_{\gamma_s}^{Naka}(-g_{qam}) = x_1^m$ et $M_{\gamma_s}^{Naka}(-2g_{qam}) = x_2^m$. Nous redéfinissons également les variables y et z définies dans les paragraphes précédents par $y = (1+g_{qam}\overline{\gamma}_s/m)/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_s/m)$ et $z = 1/2$. Dans le cas M-QAM, la méthodologie reste la même que pour les modulations de phase : approcher la fonction hypergéométrique de Gauss par la méthode de Laplace et travailler en régime asymptotique. La fonction hypergéométrique de Gauss a exactement la même approximation que précédemment à savoir $1/\sqrt{1-x_1\tilde{t}}$.

Expression du SEP asymptotique. F_1 va devenir une fonction hypergéométrique de Gauss constante. En effet :

$$\lim_{\overline{\gamma}_s\to+\infty} y = \frac{1}{2},$$

et en utilisant les relations fonctionnelles sur les fonctions hypergéométriques et notamment (1.34) :

$$\lim_{\overline{\gamma}_s\to+\infty} F_1\left(1,m,1;m+\frac{3}{2};y,z\right) = F_1\left(1,m,1;m+\frac{3}{2};z,z\right), \tag{2.42}$$

$$= {}_2F_1\left(1,m+1;m+\frac{3}{2};z\right). \tag{2.43}$$

Par conséquent lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$, on obtient la forme suivante pour le SEP asymptotique d'un signal M-QAM en canal de Nakagami-m :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s\to\infty) &\approx \frac{x_1^m}{\sqrt{1-x_1\tilde{t}}}\left(\frac{2g\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)}-\frac{g^2\Gamma(m+1/2)}{\pi\Gamma(m+3/2)}\times\right. \\ &\quad \left.{}_2F_1\left(1,m+1;m+\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m\sqrt{1-x_1\tilde{t}}\right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Expression inversible du SEP. De plus lorsque le SNR tend vers l'infini, le rapport x_2/x_1 tend vers 1/2 et $\sqrt{1-x_1\tilde{t}}$ tend vers 1. Avec ces commentaires, une approximation extrêmement précise de la probabilité d'erreur d'un signal M-QAM en canal de Nakagami-m est donnée par :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s\to\infty) \approx P_s^*(E) = k_{qam}\frac{x_1^m}{\sqrt{1-x_1\tilde{t}}}, \tag{2.45}$$

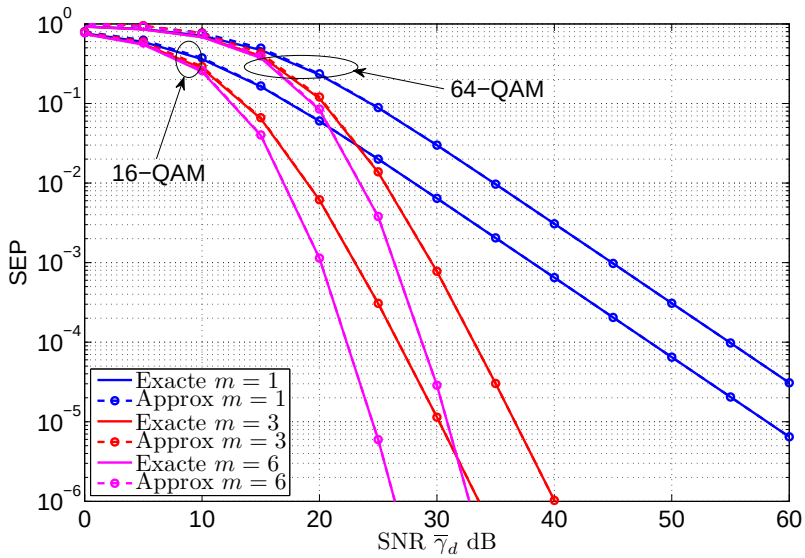


FIG. 2.4 – Approximation du SEP d'un signal de deux signaux M-QAM avec l'équation (2.45) et comparaison avec la valeur exacte en (2.41)

avec :

$$k_{qam} = \frac{2g\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)} - \frac{g^2\Gamma(m+1/2)}{2^m\pi\Gamma(m+3/2)}{}_2F_1\left(1, m+1; m+\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right). \tag{2.46}$$

La figure 2.4 illustre la précision de l'approximation du SEP obtenu en (2.45) par rapport à la valeur exacte en (2.41). L'approximation est excellente pour la plage de probabilité d'erreur sans codage (10^{-1} à 10^{-4}), pour les deux modulations 16−QAM et 64−QAM et une large plage de paramètres d'évanouissements $m = 1, 3, 6$. En effet, la valeur exacte de la probabilité d'erreur et son approximation sont quasiment confondues pour les valeurs du SEP inférieures à 10^{-1}.

Inversion du SEP et estimation du SEO. L'approximation du SEP en (2.45) est inversible de la même manière que pour les signaux modulés en phase. En appliquant la même méthode que pour l'équation (2.35) on obtient le SNR moyen par symbole en fonction de la probabilité d'erreur cible $P_s^*(E)$, pour une modulation M-QAM et un canal de Nakagami-m :

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E)) = c_0\left(P_s^*(E)^{-\frac{1}{m}}\left(1 - c_1 P_s^*(E)^{\frac{1}{m}}\right)^{-\frac{1}{2m}} - k_{qam}^{-\frac{1}{m}}\right), \tag{2.47}$$

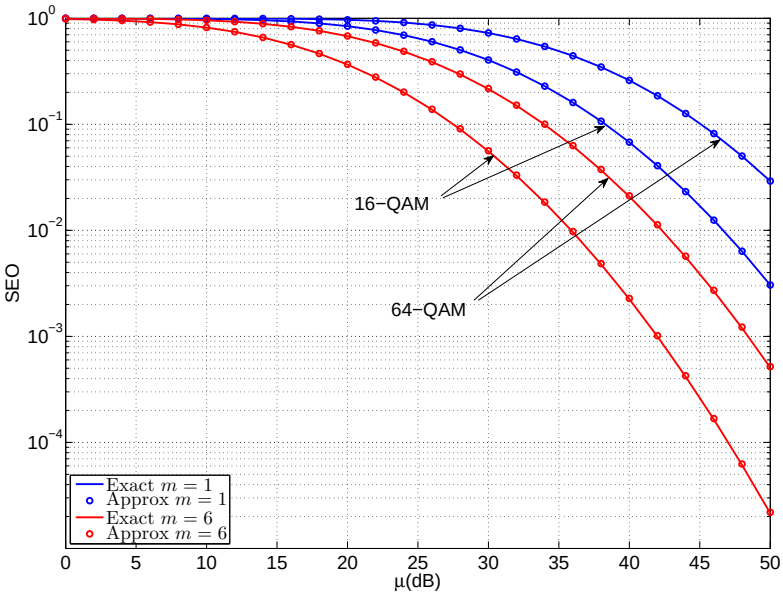
avec

$$c_0 = \frac{m\sqrt[m]{k_{qam}}}{g_{qam}}, \tag{2.48}$$

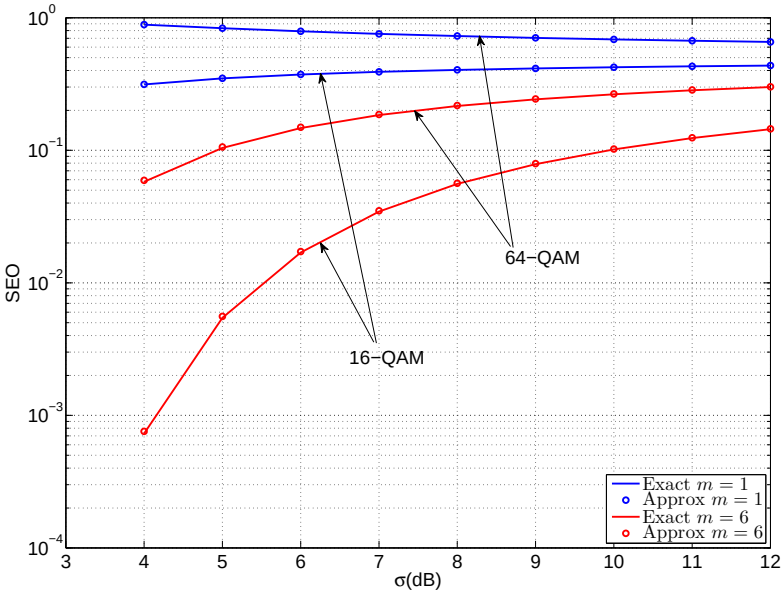
$$c_1 = \frac{\tilde{t}}{\sqrt[m]{k_{qam}}}. \tag{2.49}$$

Grâce à cette expression ainsi qu'à l'équation (1.18), on peut estimer le SEO d'un signal modulé en quadrature dans un canal de Nakagami-m, soumis à un effet de shadowing long

terme. Sur la figure 2.5 nous traçons l'évolution du SEO avec l'inversion analytique du SEP moyen obtenu en (2.47) ainsi que sa valeur exacte pour une probabilité d'erreur cible de $P_s^*(E) = 10^{-2}$. Nous pouvons remarquer que le SEO estimé grâce à l'inversion de la probabilité d'erreur est identique à sa valeur réelle, et ce pour deux ordres de modulation QAM (16 et 64). Sur la figure 2.5(a), le SEO évolue en fonction de la puissance moyenne de la loi log-normale avec un écart type de 8dB, et sur la figure 2.5(b) il est tracé en fonction de l'écart type du shadowing avec une moyenne de 30dB. On peut constater un comportement contre-intuitif de la probabilité de coupure pour un signal 64-QAM et pour $m = 1$ sur la figure 2.5(b). En effet, on observe un SEO plus élevé pour les faibles valeurs de σ, ce qui est un comportement contraire par rapport aux autres courbes. Cela est dû au fait que l'on a choisi un SEP moyen cible de 10^{-2}. Pour atteindre cette valeur lorsque l'on utilise un signal 64-QAM dans un canal de Rayleigh ($m = 1$), le SNR moyen requit est supérieur à la puissance moyenne reçue à cause du shadowing (μ). L'écart type du shadowing traduit la dispersion de la puissance autour de sa valeur moyenne. Une faible valeur de ce paramètre induit donc de faibles variations autour de μ et donc une probabilité plus faible d'atteindre le SNR nécessaire au SEP cible fixé. Par conséquent une probabilité de coupure plus importante. Au contraire, si l'écart type augmente, la probabilité de coupure peut se faire un peu plus faible.



(a) SEO $= f(\mu_{dB})$



(b) SEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 2.5 – SEO de deux signaux QAM en présence de shadowing en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale.

2.3.3 Canal de Rice et modulation M-PSK

Forme exacte du SEP. Les performances en canal et Rice sont légèrement plus compliquées à obtenir analytiquement. En effet, dans ce canal, nous ne disposons pas, pour le SEP, de forme exacte autre que l'intégrale de la MGF du SNR. En effet, La probabilité d'erreur d'un signal M-PSK en canal de Rice est donnée par [6] :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} \frac{(1+K)sin^2(\theta)}{(1+K)sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{(1+K)sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right)d\theta, \end{aligned} \tag{2.50}$$

l'intégrande de cette expression n'étant rien d'autre que la MGF $M_{\gamma_s}^{Rice}(s)$ du SNR.

Approximation du SEP. Une première technique pour rendre cette forme un peu plus manipulable mathématiquement est d'analyser son comportement asymptotique, lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$. L'approche de Wang et Giannakis [32], présentée au chapitre 1, permet d'exprimer cette probabilité d'erreur en régime asymptotique. Pour un signal M-PSK, la probabilité d'erreur asymptotique a été donnée en (1.61). Cette méthode donne un résultat proche de la valeur exacte seulement à fort SNR, ce qui n'est pas très souhaitable en canal de Rice lorsque K n'est pas négligeable (c'est-à-dire $K \geq 3$dB) car cela ne rend pas du tout compte du comportement du SEP moyen sur une large plage du SNR.

Une autre façon de procéder consiste à appliquer la méthode de Laplace pour approcher l'intégrale en (2.50). En choisissant la base de fonction (h, g) suivante :

$$h(\theta) = \frac{1}{\pi}, \tag{2.51}$$

$$g(\theta) = -\ln\left(\frac{(1+K)sin^2(\theta)}{(1+K)sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{(1+K)sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right)\right), \tag{2.52}$$

on obtient l'approximation suivante pour le SEP (voir annexe A.1) :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \approx \frac{1+K}{\sqrt{\pi g_{psk}\overline{\gamma}_s\left((1+K)^2+g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)}}\exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{1+K+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right). \tag{2.53}$$

L'approximation obtenue en (2.53) est relativement précise comme on peut le constater sur la figure 2.6 et s'exprime sans intégrale. Malheureusement cette forme est non inversible en $\overline{\gamma}_s$ avec des fonctions usuelles.

Approximation inversible du SEP. On peut cependant espérer inverser le SEP si l'on arrive à se ramener à l'équation $ze^z = f(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$. En effet, on sait trouver la fonction réciproque de f qui est la fonction W de Lambert. Dans le cas général, c'est-à-dire dans le corps des réels ou des complexes, la fonction W est multiforme, c'est-à-dire que plusieurs images sont associées à un même antécédent. Cependant, si l'on restreint l'ensemble de définition aux arguments réels $z \geq -1/e$ alors il existe une unique fonction W_0 telle que $W_0(0) = 0$ et $W_0(-1/e) = -1$. On vérifie que l'expression suivante constitue

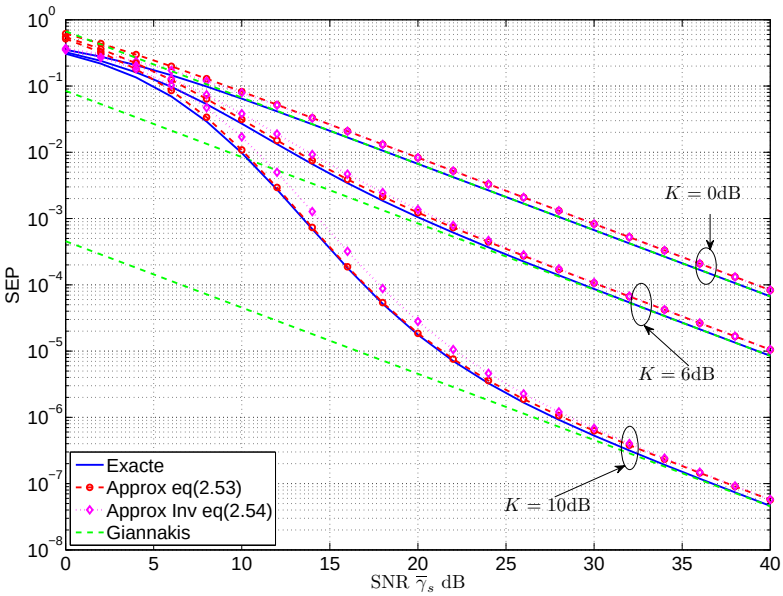


FIG. 2.6 – Comparaison entre le SEP d'un signal QPSK en canal de Rice évalué avec l'expression exacte (2.50), une approximation non inversible (2.53), une approximation inversible (2.54) et son expression asymptotique.

une approximation un peu moins précise de la probabilité d'erreur d'une M-PSK en canal de Rice :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \approx P_s^*(E) = \frac{1+K}{\sqrt{\pi}\,(1+K+g_{psk}\overline{\gamma}_s)} \exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{1+K+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right). \tag{2.54}$$

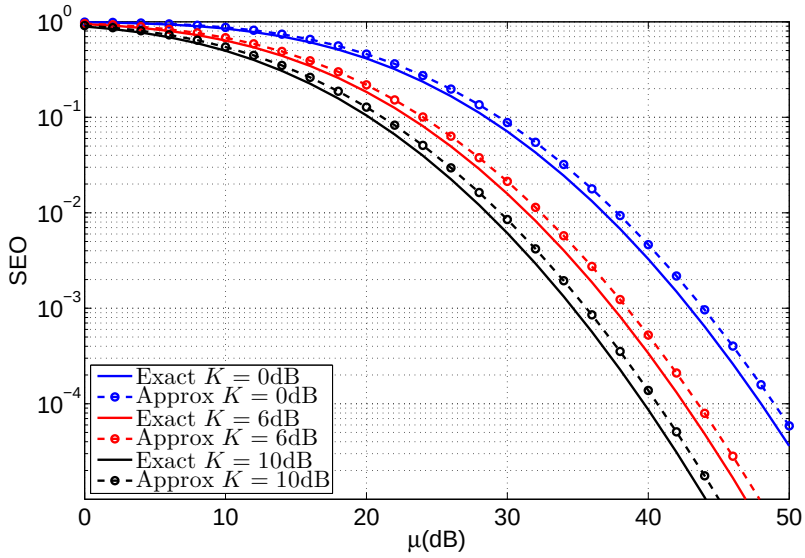
Sur la figure 2.6, on compare la précision de la borne obtenue en (2.54) (représentée par les courbes "Approx Inv") à celle en (2.53) (représentée par les courbes "Approx"), et à la valeur exacte bien sûr en (2.50) pour un signal QPSK et pour plusieurs valeurs de K. On trace également, l'approximation asymptotique de Giannakis [32]. Les deux approximations du SEP en (2.53) et (2.54) sont d'autant plus précises que le paramètre d'évanouissement K est grand. Ceci vient du fait que lorsque K devient important, on se rapproche du cas gaussien et l'approximation de Laplace est d'autant meilleure que la fonction sous l'intégrale est proche d'une gaussienne. L'approximation en (2.54) est un peu moins précise que celle en (2.53) (environ 1dB d'écart). Cependant elle présente l'avantage d'être inversible à l'aide de la fonction W_0 de Lambert introduite ci-dessus. L'expression en (2.54) semble être une borne supérieure du SEP exact pour les valeurs des paramètres illustrées sur cette figure. Néanmoins rien ne permet de l'affirmer simplement. Pour certaines valeurs du SNR et de K, l'approximation pourrait passer en "dessous" de la courbe exacte.

Inversion du SEP. On peut montrer que l'équation (2.54) ci-dessus admet l'unique solution suivante :

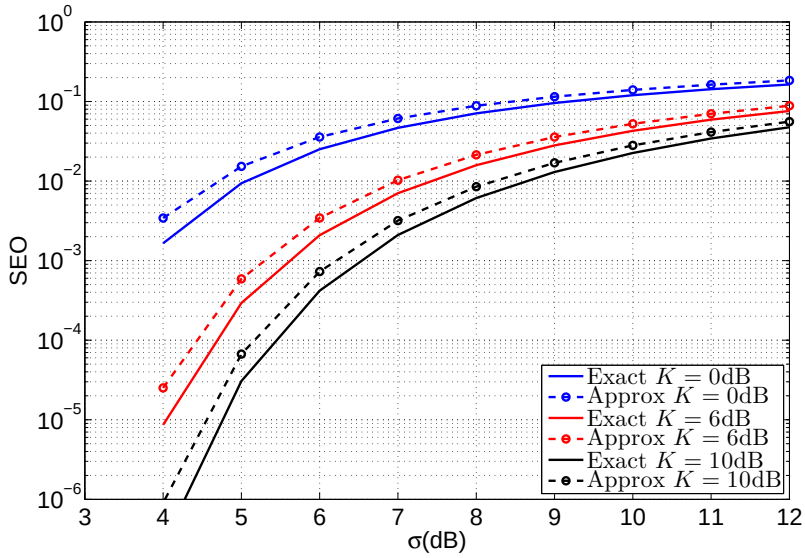
$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E)) = \frac{K+K^2}{g_{psk}W_0\left(\sqrt{\pi}P_s^*(E)Ke^K\right)} - \frac{1+K}{g_{psk}}. \tag{2.55}$$

L'expression ci-dessus donne donc le SNR moyen nécessaire pour atteindre une certaine probabilité d'erreur cible en canal de Rice.

Estimation du SEO. Cette forme nous permet de donner une approximation du SEO en présence de shadowing. En utilisant l'équation (2.55) avec (1.18) pour un SEP cible $P_s^*(E) = 10^{-2}$, on obtient les courbes données sur la figure 2.7. La figure 2.7(a) montre l'évolution du SEO et de son approximation en fonction de la moyenne de la loi log-normale pour $\sigma = 8$dB et pour $K = 0, 6, 10$dB. La figure 2.7(b) illustre le SEO en fonction de l'écart type pour $\mu = 30$dB. L'approximation obtenue est une borne supérieure du SEO exact pour les valeurs des paramètres considérées ainsi que la probabilité d'erreur cible choisie. La borne est assez proche de la valeur exacte avec une différence inférieure à 1dB en μ. On peut remarquer que l'approximation du SEO est moins bonne lorsque l'écart type de la loi log-normale est faible (correspondant plutôt à des environnements avec peu d'obstacles). En effet, pour de faibles valeurs de σ, le SEO peut-être assez sur estimé. Par exemple, pour un paramètre d'évanouissement $K = 6$dB et $\sigma = 4$dB, le SEO estimé est d'environ de 3.10^{-5} au lieu de 10^{-5}, soit un facteur 3. Cependant le niveau de coupure étant très faible, cela ne fait pas une grosse différence dans la pratique.



(a) SEO $= f(\mu_{dB})$



(b) SEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 2.7 – SEO d'un signal QPSK en canal de Rice et son approximation obtenue à l'aide de (2.55), en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale.

2.3.4 Canal de Rice et modulation M-QAM

Forme exacte du SEP. De la même manière que pour les modulations de phase, la probabilité d'erreur d'un signal modulé en quadrature dans un canal de Rice n'est pas simple à dériver et il n'en existe d'ailleurs pas de forme exacte autre qu'intégrale. La forme exacte de la SEP d'un signal modulé en quadrature peut s'exprimer à l'aide de la MGF du SNR par symbole :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/2} M_{\gamma_s}^{Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta - \frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4} M_{\gamma_s}^{Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta. \tag{2.56}$$

Approximation du SEP. On ne peut malheureusement pas appliquer la méthode de Laplace pour approcher les intégrales du SEP comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent. En effet, en choisissant comme base de fonction (h, g) celles données au paragraphe précédent, la dérivée $g'(\theta)$ s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. La première intégrale ici pourrait être approchée par cette méthode puisque l'abscisse du point où s'annule $g'(\theta)$ fait partie des bornes de l'intégrale, cependant la deuxième intégrale ne peut pas l'être.

Nous procédons à une première approximation, qui est de remplacer le deuxième terme de (2.56) par une borne supérieure :

$$\frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4} M_{\gamma}^{Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta \leq \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/4} M_{\gamma}^{Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta, \tag{2.57}$$

on peut ainsi factoriser la constante $(4g)/\pi$ et remarquer que les deux intégrales ont le même intégrande. En décomposant la première intégrale par la relation de Chasles, on peut simplifier l'expression du SEP et la probabilité d'erreur est bornée par :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \geq \frac{4g}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} M_{\gamma}^{Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta,^{1} \tag{2.58}$$

En appliquant la méthode de Laplace à (2.58) on obtient une expression similaire à celle dérivée pour les modulations de phase :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \approx \frac{4g}{\sqrt{\pi}}\frac{1+K}{\sqrt{g_{qam}\overline{\gamma}_s\left((1+K)^2 + g_{qam}\overline{\gamma}_s\right)}}\exp\left(-\frac{g_{qam}K\overline{\gamma}_s}{1+K+g_{qam}\overline{\gamma}_s}\right). \tag{2.59}$$

Cette approximation ne se révèle pas très précise. On remarque "expérimentalement" que la courbe correspondant à l'expression (2.59) est décalée d'un "offset" d'environ 4dB aux larges SNR et pour toutes les valeurs de K. L'idée consiste donc, à supprimer la constante $4g$ qui vaut approximativement 4dB, pour obtenir la nouvelle approximation de la probabilité d'erreur :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1+K}{\sqrt{g_{qam}\overline{\gamma}_s\left((1+K)^2 + g_{qam}\overline{\gamma}_s\right)}}\exp\left(-\frac{g_{qam}K\overline{\gamma}_s}{1+K+g_{qam}\overline{\gamma}_s}\right). \tag{2.60}$$

On constate par la simulation que l'approximation se rapproche de la courbe théorique exacte.

[1] A partir de cette forme, on peut trouver une nouvelle approximation du SEP s'exprimant à l'aide de la fonction hypergéométrique d'Appell de première espèce.

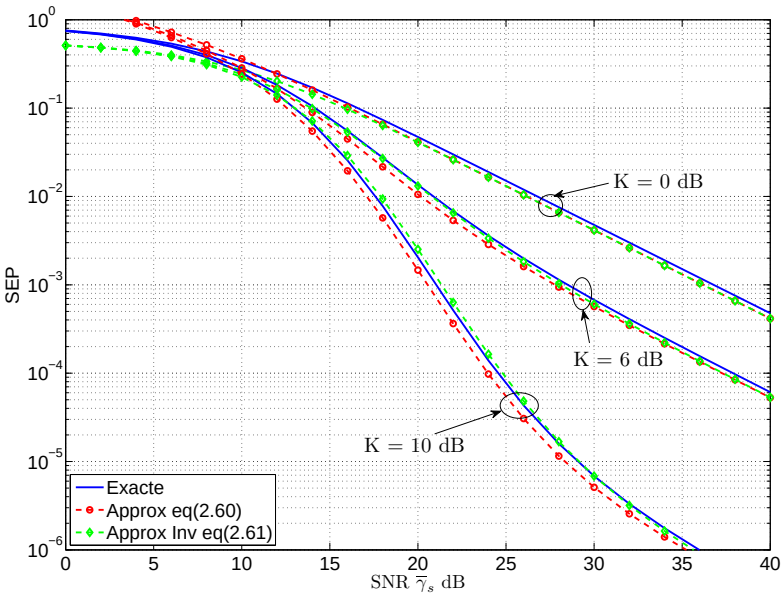


FIG. 2.8 – Comparaison entre le SEP exact (2.56), une approximation non inversible (2.60) et une approximation inversible (2.61) d'un signal 16-QAM en canal de Rice.

Approximation inversible. De la même manière que pour le cas M-PSK, une forme inversible de la probabilité d'erreur d'un signal M-QAM peut-être donnée :

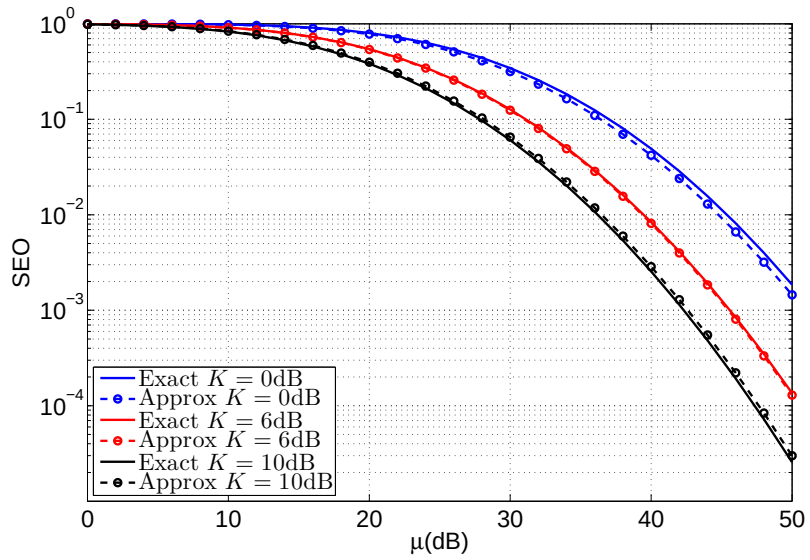
$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \approx P_s^*(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1+K}{1+K+g_{qam}\overline{\gamma}_s} \exp\left(-\frac{g_{qam}K\overline{\gamma}_s}{1+K+g_{qam}\overline{\gamma}_s}\right). \tag{2.61}$$

La figure 2.8 illustre le comportement des différentes expressions du SEP d'un signal modulé 16-QAM en canal de Rice. L'approximation du SEP inversible obtenue ici est assez bonne puisque qu'il n'y a pas plus de 1dB d'écart entre le SEP exact et l'approximation pour toutes les valeurs de K testées 0, 6 et 10dB et une large plage de SNR.

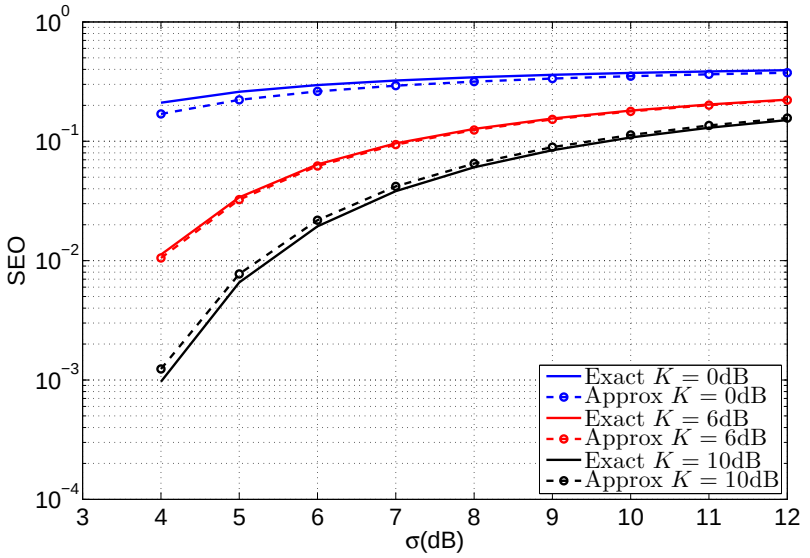
Inversion du SEP et estimation du SEO. La résolution de l'équation ci-dessus en $\overline{\gamma}_s$ se fait à l'aide de la fonction spéciale W_0 de Lambert. La forme du SNR moyen en fonction de la probabilité d'erreur cible est similaire à (2.55) avec la constante g_{qam} qui remplace g_{psk} :

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E)) = \frac{K+K^2}{g_{qam}W_0\left(\sqrt{\pi}P_s^*(E)Ke^K\right)} - \frac{1+K}{g_{qam}}. \tag{2.62}$$

Sur la figure 2.9, on trace la probabilité de coupure symbole exacte et son approximation obtenue avec (2.62). La probabilité d'erreur cible est fixé à 10^{-2}. Sur la figure 2.9(a), le SEO est tracé en fonction de la moyenne de la loi log-normale et pour un écart type de 8dB, tandis que sur la figure 2.9(b), la moyenne est fixée à 30dB et le SEO varie en fonction de σ. Sur ces deux figures quelque soit la valeur du paramètre d'évanouissement considéré, l'erreur commise sur le SEO est inférieure à 1dB.



(a) SEO = $f(\mu_{dB})$



(b) SEO = $f(\sigma_{dB})$

FIG. 2.9 – SEO d'un signal 16QAM en canal de Rice et son approximation obtenue avec (2.62), en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale.

2.4 Performance en présence de codage canal

L'analyse de performance que l'on a présenté jusqu'ici ne tenait pas compte du codage canal. C'est pour cette raison que la plage du SNR d'intérêt est celle pour laquelle le système atteint un SEP compris entre 10^{-1} et 10^{-4}. En réalité beaucoup de systèmes intègrent des codes correcteurs d'erreur pour lutter contre les évanouissements du canal. Grâce à ces codes les performances en termes de BER et de PER s'améliorent considérablement, ce qui se traduit, asymptotiquement du moins, par un gain de codage et donc un décalage des courbes de performances vers les faibles SNR.

Il existe deux grandes familles de codes correcteurs d'erreurs : les codes blocs et les codes convolutifs. Berrou et Glavieux [86] ont introduit un troisième type de code correcteur d'erreur : les turbo-codes. Ceux-ci présentent des performances impressionnantes proches de la limite de Shannon. Nous ne traiterons pas de ce cas dans la suite.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la probabilité d'erreur par paquet (PEP "Packet Error Probability"). Pour les codes blocs, on considère un code capable de corriger n bits parmi m. En partant de la probabilité d'erreur par mot code que l'on souhaite obtenir, on peut remonter à la probabilité d'erreur bit nécessaire à l'entrée du décodeur pour l'atteindre, lorsque l'on considère un décodeur à décision dur. A partir de cette dernière probabilité on peut remonter au SNR moyen avec les résultats que l'on a vus jusqu'ici. En ce qui concerne les codes convolutifs, on travaille sur la probabilité de première erreur définie au chapitre 1, et pour laquelle il existe dans la littérature des expressions asymptotiques faisant intervenir la probabilité d'erreur bit à l'entrée du décodeur. Nous verrons comment à partir de la probabilité de première erreur, on peut approcher la probabilité d'erreur par paquet. Dans ce qui suit nous supposons l'utilisation d'un entrelaceur parfait garantissant l'absence de burst d'erreurs, c'est-à-dire que les erreurs sur les bits sont indépendantes les unes des autres et uniformément réparties sur le paquet. Cette hypothèse revient à supposer que le canal varie rapidement d'un symbole à l'autre.

Notons que nous avons besoin de la probabilité d'erreur bit pour calculer la probabilité d'erreur d'un mot code ou d'un bloc (selon que l'on utilise un codage bloc ou convolutif) or dans les sections précédente nous avons dérivé des approximations inversibles de la probabilité d'erreur symbole. Cependant en supposant un codage de Gray pour les modulations linéaires que nous considérons (M-PSK, M-QAM), on peut à partir des travaux de Lu *et al* [82] obtenir des approximations du BEP très proches de la probabilité d'erreur bit réelle, dans un canal à évanouissements [6]. La probabilité d'erreur bit d'un signal M-PSK est très bien approchée par :

$$P_b\left(E\right) \approx \frac{2}{\pi \max\left(\log_2 M, 2\right)} \sum_{i=1}^{\max(M/4,1)} \int_0^{\pi/2} M_{\gamma_s}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\sin^2\frac{\left(2i-1\right)\pi}{M}\right) d\theta, \qquad (2.63)$$

où $M_{\gamma_s}\left(s\right)$ est la fonction génératrice des moments du SNR instantané. L'intégrale peut s'exprimer sous une forme exacte avec la fonction hypergéométrique de Gauss (si on considère un canal de Nakagami), dont on sait trouver une approximation inversible. Le problème est que pour $M > 4$, il y a une somme de fonction hypergéométrique que l'on ne pourra pas inverser. On procède donc à une simplification supplémentaire : le calcul du BEP moyen se fera en considérant seulement le premier terme de la somme quelque soit M :

$$P_b\left(E\right) \approx \frac{2}{\pi \max\left(\log_2 M, 2\right)} \int_0^{\pi/2} M_{\gamma_s}\left(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right) d\theta. \qquad (2.64)$$

Lu *et al.* proposent aussi une approximation de la probabilité d'erreur bit d'un signal M-QAM en canal AWGN, que l'on peut aisément étendre aux canaux à évanouissements :

$$P_b(E) \approx \frac{4g}{\pi \log_2 M} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} \int_0^{\pi/2} M_{\gamma_s}\left(-\frac{(2i-1)^2 g_{qam}}{\sin^2\theta}\right) d\theta. \tag{2.65}$$

Ici encore, pour des ordres de modulations supérieures strictement à 4, on ne pourra pas inverser l'expression pour remonter au SNR. Par conséquent, on ne considérera que le premier terme de la somme pour l'évaluation de la probabilité d'erreur bit :

$$P_b(E) \approx \frac{4g}{\pi \log_2 M} \int_0^{\pi/2} M_{\gamma_s}\left(-\frac{g_{qam}}{\sin^2\theta}\right) d\theta. \tag{2.66}$$

Si l'on considère un canal à évanouissement de Nakagami-m, les deux intégrales ci-dessus s'expriment avec une fonction hypergéométrique de Gauss :

$$P_b^{psk}(E) \approx \frac{M_{\gamma_s}(-g_{psk})}{\sqrt{\pi}\max(\log_2 M, 2)} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} {}_2F_1\left(m, \frac{1}{2}; m+1; \frac{1}{1+\frac{g_{psk}\overline{\gamma}_s}{m}}\right), \tag{2.67}$$

$$P_b^{qam}(E) \approx \frac{2gM_{\gamma_s}(-g_{qam})}{\sqrt{\pi}\log_2 M} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} {}_2F_1\left(m, \frac{1}{2}; m+1; \frac{1}{1+\frac{g_{qam}\overline{\gamma}_s}{m}}\right). \tag{2.68}$$

Comme nous l'avons vu tout au long de ce chapitre, cette fonction hypergéométrique possède une forme très simple et très précise en $1/\sqrt{1-x\tilde{t}}$ avec $\tilde{t} = m/(m+1)$ et $x = 1/(1+g_{mod}\overline{\gamma}_s/m)$ (g_{mod} valant soit g_{psk} ou g_{qam} selon que l'on considère une M-PSK ou une M-QAM). L'expression du SNR moyen en fonction de la probabilité d'erreur bit moyenne est :

$$\overline{\gamma}_s(P_b^*(E)) = \frac{m}{g_{mod}} \left[\left[\frac{P_b^*(E)}{k_{mod}} \sqrt{1-\tilde{t}\sqrt[m]{\frac{P_b^*(E)}{k_{mod}}}}\right]^{-\frac{1}{m}} - 1\right], \tag{2.69}$$

avec k_{mod} une constante dépendant de la modulation utilisée :

$$k_{psk} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\max(\log_2 M, 2)} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}, \tag{2.70}$$

$$k_{qam} = \frac{2g}{\sqrt{\pi}\log_2 M} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}. \tag{2.71}$$

2.4.1 Codes correcteurs d'erreur en bloc

La probabilité d'erreur d'un mot code BCH (WEP pour "Word Error Probability") avec un détecteur à décision dure est donnée par [5], [87] :

$$P_m(E) = \sum_{j=t+1}^{J} \binom{J}{j} P_b^j (1-P_b)^{J-j}, \tag{2.72}$$

avec J la longueur du mot code en bit et P_b la probabilité d'erreur bit du canal de propagation considéré (Nakagami-m, Rice), équivalent ici à la probabilité de transition d'un canal

BSC. Cette hypothèse est valide si on considère que les bits d'un symbole sont affectés de la même manière par le canal de propagation, ce qui est le cas si l'entrelaceur est parfait. Les paramètres J, t, d_{min} sont rappelés dans le tableau 2.1 pour 4 types de codes BCH. Le paramètre "taux de codage" correspond au rapport du nombre de bits non codés sur le nombre de bits codés. $P_m(E)$ est donc la probabilité d'obtenir strictement plus de t bits faux sur J bits.

Approximation du WEP. La probabilité d'erreur d'un mot code dépend du BEP qui lui-même dépend du SNR. Nous avons donné dans la précédente section des formules permettant de calculer $\overline{\gamma}_s$ en fonction de la probabilité d'erreur à atteindre pour différents environnements. En présence de codage, il suffit donc de pouvoir inverser la probabilité d'erreur d'un mot code en fonction de la probabilité d'erreur bit puisque celle-ci est inversible en fonction du SNR. L'équation (2.72) n'est malheureusement pas inversible de façon exacte puisqu'il s'agit d'un polynôme en P_b de degré supérieur à 5 pour les paramètres donnés dans le tableau 2.1.

Cependant, on peut mettre (2.72) sous la forme d'une fonction hypergéométrique de Gauss :

$$P_m(E) = \frac{B_{P_b}(t+1, J-t)}{B(t+1, J-t)} \tag{2.73}$$

$$= \frac{P_b^{t+1}}{(t+1)B(t+1, J-t)} {}_2F_1(t+1, 1+t-J; t+2; P_b), \tag{2.74}$$

avec $B_{P_b}(t+1, J-t)$ la fonction Beta incomplète et $B(t+1, J-t)$ la fonction Beta [31]. La variable de la fonction hypergéométrique de Gauss est la probabilité d'erreur bit en entrée du décodeur. La méthode de Laplace donne l'approximation suivante pour la probabilité d'erreur par mot code :

$$P_m(E) \approx \frac{(t+2)^{t+3/2} r_{2,1}^{-1/2} \hat{y}^{t+1}(1-\hat{y})}{(t+1)^{t+2} B(t+1, J-t)} \frac{P_b^{t+1}}{(1-P_b\hat{y})^{1+t-J}}, \tag{2.75}$$

avec

$$r_{2,1} = \frac{\hat{y}^2}{t+1} + (1-\hat{y})^2 - \frac{(1+t-J)P_b^2}{(1-P_b\hat{y})^2} \frac{\hat{y}^2}{t+1}(1-\hat{y})^2, \tag{2.76}$$

$$\hat{y} = \frac{2(t+1)}{\sqrt{\tau^2 - 4(t+1)(1+J)P_b} - \tau}, \tag{2.77}$$

$$\tau = -JP_b - (t+2). \tag{2.78}$$

Code	J	k	d_{min}	taux de codage	t
Hamming	7	4	3	0.57	1
Golay	23	12	7	0.52	3
Shortened Hamming	6	3	3	0.5	1
Extended Golay	24	12	8	0.5	3

TAB. 2.1 – Paramètres des codes BCH

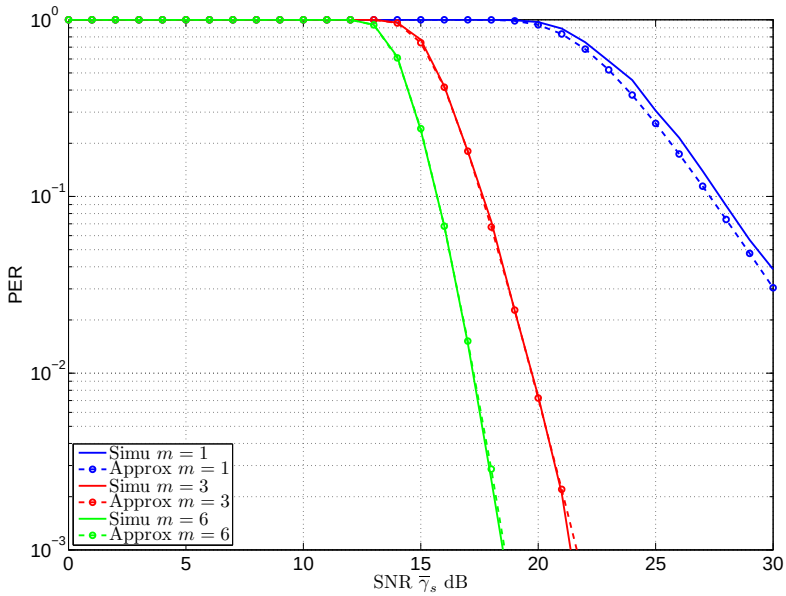


FIG. 2.10 – Evolution du PER dans un canal de Nakagami-m pour un code de Hamming. La modulation utilisée est une 8−PSK.

Approximation asymptotique du WEP. L'approximation en (2.75) est très précise pour toutes les valeurs du BEP. Cependant cette forme n'est pas encore inversible en P_b et donc encore moins en $\overline{\gamma}_s$. Pour les faibles valeurs de P_b, l'équation (2.75) va se simplifier. En effet, lorsque $P_b \to 0$, les relations (2.76), (2.77) et (2.78) deviennent :

$$\hat{y} \rightarrow \frac{t+1}{t+2} \triangleq \tilde{y}, \tag{2.79}$$

$$r_{2,1} \rightarrow \frac{1}{t+2}, \tag{2.80}$$

$$\tau \rightarrow -(t+2). \tag{2.81}$$

Par conséquent, la probabilité d'erreur d'un mot code en régime asymptotique s'approche très bien par :

$$P_m\left(E|P_b \to 0\right) \approx \frac{1}{(t+1)B\left(t+1, J-t\right)} \frac{P_b^{t+1}}{\left(1-P_b\tilde{y}\right)^{1+t-J}}. \tag{2.82}$$

Probabilité d'erreur paquet. Lorsque l'on cherche à caractériser la fiabilité d'un réseau de communication tel que le GSM, l'UMTS ou le WLAN, on s'intéresse davantage à la probabilité d'erreur paquet (trame) que par symbole ou bit. Un paquet est faux, lorsqu'au moins un bit du paquet est faux. Toujours sous l'hypothèse d'entrelacement parfait, les erreurs sont réparties uniformément sur le paquet, et la probabilité d'erreur sur les mots codes est identique pour tous les mots codes tout au long du paquet. Par conséquent la probabilité d'erreur par paquet se déduit de celle par mot code comme suit :

$$P_p\left(E\right) = 1 - \left(1 - P_m\left(E\right)\right)^{N/k}, \tag{2.83}$$

avec N la longueur d'un paquet en bit et k le nombre de bits d'informations d'un mot code. On approche donc le PEP en utilisant (2.82) dans (2.83). La figure 2.10 illustre la précision de l'approximation du PEP obtenue en calculant la probabilité d'erreur bit avec (2.64). L'approximation est comparée avec le taux d'erreur par paquet obtenu par la simulation dans différentes conditions d'évanouissement ($m = 1, 3, 6$), pour un code de Hamming et une modulation 8−PSK. La taille des paquets est de 4608 bits d'information. On peut constater une bonne précision de l'approximation du PEP en (2.83) en utilisant (2.82) avec la simulation. La précision la moins bonne étant pour le canal de Rayleigh, mais l'erreur est inférieure à 1dB en SNR, et les deux courbes convergent pour les très grands SNR. L'approximation du PER est très bonne rapidement lorsque le canal devient moins évanouit ($m = 3, 6$). En canal de Rayleigh, la probabilité d'erreur bit tend "plus doucement" vers 0, d'où une convergence un peu plus lente entre la courbe asymptotique et la simulation.

Inversion du WEP et PEO Pour obtenir une forme inversible du WEP tout en gardant une précision acceptable, on utilise la méthode que l'on a détaillée à la section 2.3.1. Pour les faibles valeurs de P_b, on a $(1 - P_b\tilde{y}) \approx 1$. Par conséquent, on peut déduire la valeur de P_b en régime asymptotique :

$$P_b \approx \left[P_m^*(E)(t+1)B(t+1, J-t)\right]^{\frac{1}{t+1}}. \tag{2.84}$$

En remplaçant P_b par sa valeur asymptotique dans le terme $(1 - P_b\tilde{y})$ de l'équation (2.82), on peut inverser la probabilité d'erreur par mot code en fonction de la probabilité d'erreur bit :

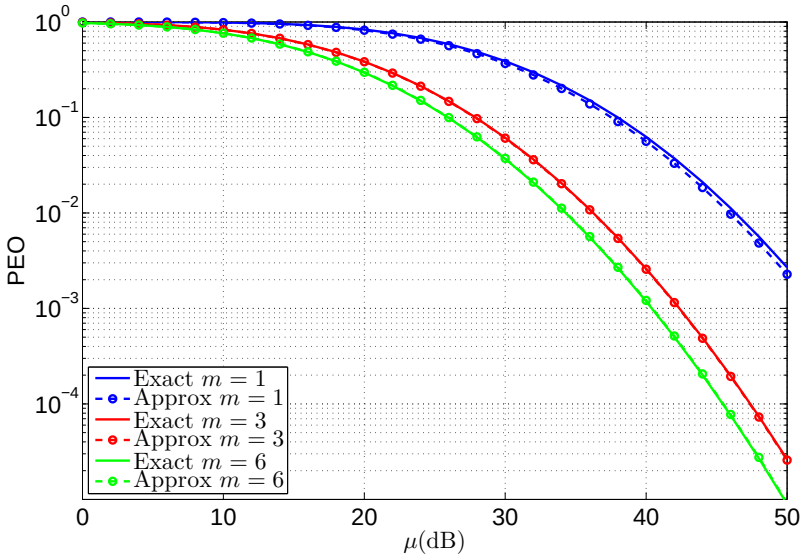
$$P_b = \left(\frac{P_m^*(E)(t+1)B(t+1, J-t)}{\left(1 - \left[P_m^*(E)(t+1)B(t+1, J-t)\right]^{\frac{1}{t+1}}\tilde{y}\right)^{J-t-1}}\right)^{\frac{1}{t+1}} \tag{2.85}$$

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, si on s'intéresse à la probabilité d'erreur par paquet on est également intéressé par la probabilité de coupure paquet. En effet, lors du déploiement d'un réseau de télécommunication, la probabilité qu'un paquet soit perdu à cause des fluctuations de la puissance moyenne, caractérise la fiabilité du réseau au niveau qualité de service. La probabilité de coupure paquet PEO (Packet Error Outage) en présence de shadowing se définit comme le SEO ; il est nécessaire de remonter au SNR moyen en fonction de la probabilité d'erreur paquet que l'on souhaite atteindre. Cela se fait facilement avec les expressions que l'on a dérivées ci-dessus. Le SNR moyen s'exprime en fonction de la probabilité d'erreur bit avec (2.69), qui s'exprime en fonction de la probabilité d'erreur par mot code (2.85), elle même fonction du PEP moyen avec (2.83). Le PEO en présence de shadowing s'écrit :

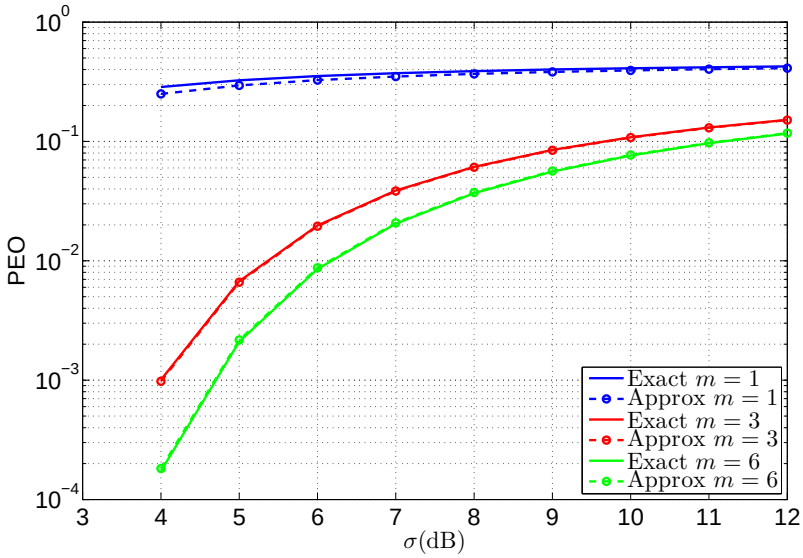
$$P_p(O) = Q\left(\frac{\mu_{dB} - 10\log_{10}\overline{\gamma}_s\left(P_p^*\right)}{\sigma_{dB}}\right), \tag{2.86}$$

avec P_p^* la probabilité d'erreur paquet cible que l'on souhaite atteindre. La figure 2.11 compare le PEO théorique dérivé en utilisant les formules ci-dessus avec celui obtenu par inversion numérique de la simulation pour une probabilité d'erreur paquet cible de 10^{-1}. Sur la figure 2.11(a), le PEO est tracé en fonction de la puissance moyenne reçue au récepteur pour un écart type de 8dB. La prédiction est conforme avec l'inversion numérique de la simulation. Même remarque pour la figure 2.11(b), où le PEO est fonction de l'écart type σ pour une moyenne $\mu = 30$dB. Le PEO est légèrement sous-estimé pour un canal de

Rayleigh. Si les services à fournir ne sont pas pas très exigeant en terme de qualité, le réseau est plutôt planifié pour des probabilité de coupure de l'ordre de 10%. Pour cette probabilité, la prédiction est excellente pour tous les paramètres envisagés ici. Pour des services un peu plus gourmand en qualité comme la vidéo, ou le streaming en HSDPA par exemple, des probabilités de coupure plus faibles peuvent être attendues.



(a) PEO $= f(\mu_{dB})$



(b) PEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 2.11 – PEO avec codage bloc de Hamming pour un PEP cible de 10^{-1} en fonction de la moyenne (a) de la loi log-normale et de l'écart type (b). Les bits codés sont mappés sur une constellation 8−PSK en codage de Gray.

2.4.2 Codes correcteurs d'erreur convolutifs

Expressions asymptotiques de la probabilité de première erreur. La probabilité de première erreur est majorée par l'expression donnée en (1.82). Lorsque P_b devient très petit, la borne supérieure du EEP fait intervenir peu de termes de la probabilité P_k. Les auteurs de [88] ont montré que la EEP pouvait s'exprimer simplement lorsque $P_b \to 0$:

$$\lim_{P_b \to 0} P(E_1) \approx \begin{cases} \frac{1}{2T} a_{d_{min}} \begin{pmatrix} d_{min} \\ \frac{d_{min}}{2} \end{pmatrix} P_b^{\frac{d_{min}}{2}} & \text{pour } d_{min} \text{ pair} \\ \frac{1}{T} \left(a_{d_{min}} + a_{d_{min}+1}\right) \begin{pmatrix} d_{min} \\ \frac{d_{min}+1}{2} \end{pmatrix} P_b^{\frac{d_{min}+1}{2}} & \text{pour } d_{min} \text{ impair,} \end{cases} \tag{2.87}$$

avec $a_{d_{min}}$ le nombre de séquences étant à la distance d_{min} de la séquence codée.

Probabilité d'erreur block. On considère que le décodeur implémente un algorithme de Viterbi sur un bloc de longueur J. La probabilité d'erreur bloc est définie comme la probabilité de la réalisation de l'événement : "la séquence la plus vraisemblable donnée par le Viterbi n'est pas la séquence codée pour le bloc de longueur J". La probabilité que la séquence la plus vraisemblable dévie pour la première fois de la séquence codée à la $j-$ième section du treillis est majorée par (1.82). Une erreur bloc peut avoir pour origine n'importe quelle section avec la même probabilité : la borne est valide pour toutes les J sections du treillis. Ainsi, la probabilité d'erreur bloc $P_B(E)$ peut-être approchée par la sommation de la EEP sur les J sections du treillis. Donc pour tous les codes convolutifs, il existe une borne supérieure de la probabilité d'erreur bloc :

$$P_B(E) \leq \frac{J}{T} \sum_{k=d_{min}}^{\infty} a_k P_k. \tag{2.88}$$

En utilisant les expressions asymptotiques données plus haut pour la EEP, on peut donner les expressions asymptotiques de la probabilité d'erreur bloc pour tous les types de codes convolutifs :

$$\lim_{P_b \to 0} P_B(E) \approx J \lim_{P_b \to 0} P(E_1). \tag{2.89}$$

K	R_c	T	d_{min}	$a_{d_{min}}$	$a_{d_{min}+1}$	PEP asymptotique
4	1/2	1	6	1	–	$10JP_b^3$
4	2/3	2	4	3	–	$\frac{9}{2}JP_b^2$
4	3/4	3	4	29	–	$29JP_b^2$

TAB. 2.2 – PEP asymptotique avec le codeur convolutif $K = 4$, et comme polynôme générateur $15)_8$ et $17)_8$ en octal.

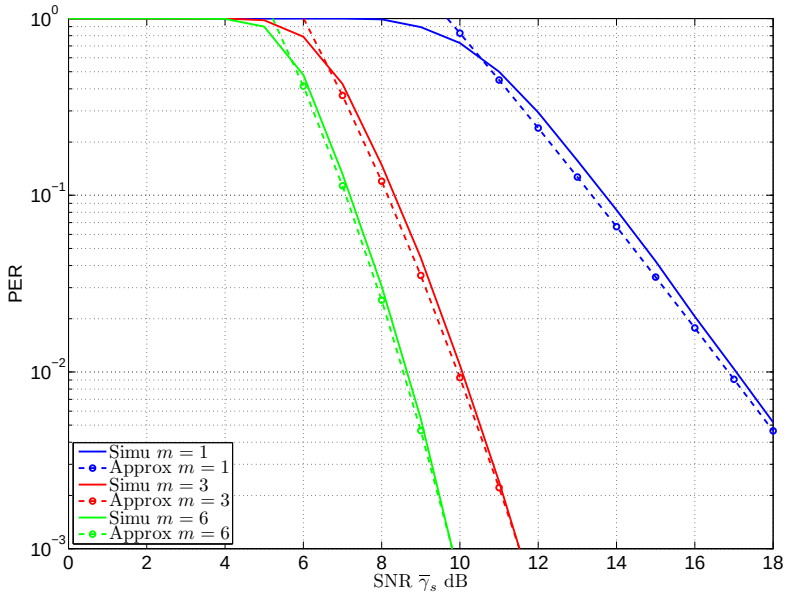
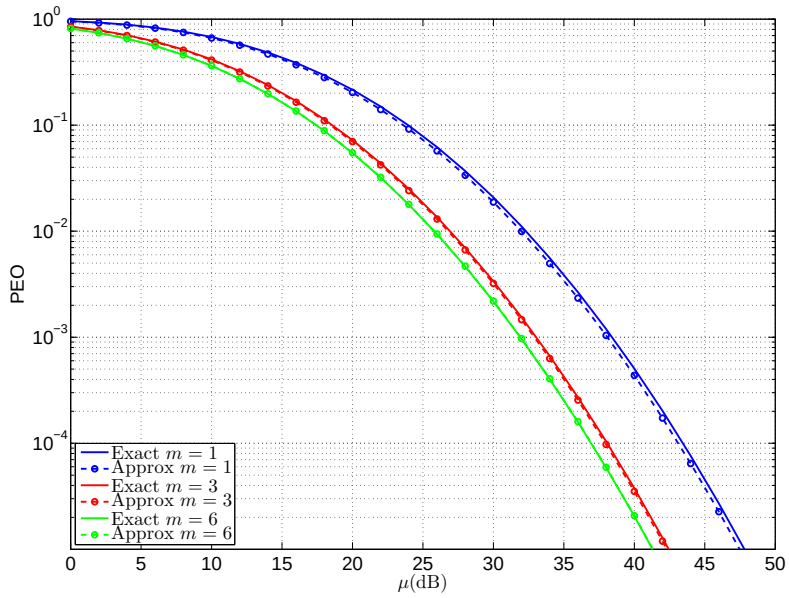


FIG. 2.12 – Evolution du PER dans un canal de Nakagami-m pour un code convolutif de longueur de contrainte $K = 4$ et de taux de codage 1/2.

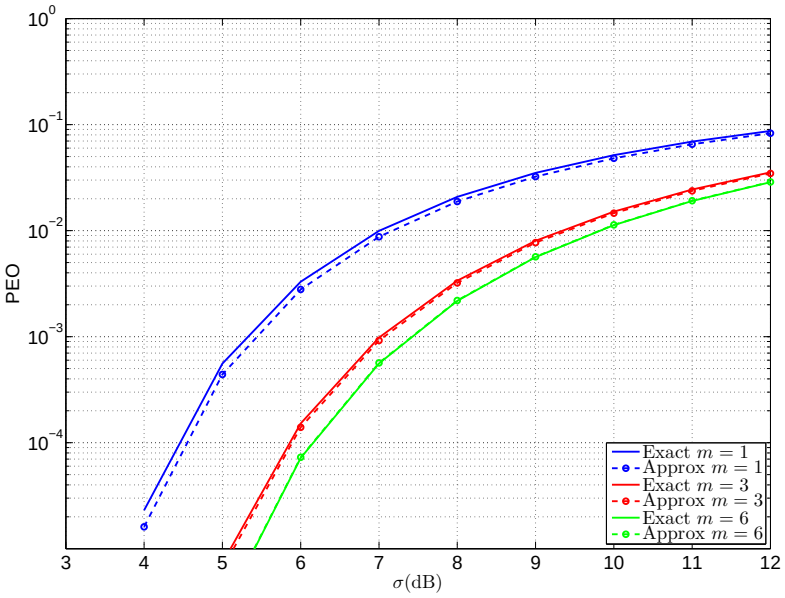
Notons que si l'on considère une profondeur J très grande pour le décodeur de Viterbi, c'est-à-dire la longueur d'un paquet, alors la probabilité d'erreur bloc devient la probabilité d'erreur par paquet. Cette approximation n'est cependant valable que si l'entrelaceur garantie l'indépendance des erreurs d'un bit à l'autre sur l'ensemble du paquet. Nous vérifions sur un exemple la précision de la formule ci-dessus. On considère le codeur convolutif de longueur de contrainte $K = 4$ et de polynômes générateurs $15)_8$ et $17)_8$ (en octal). Le taux de codage élémentaire est $R_c = 1/2$. Cependant, grâce à une opération de poinçonnage on peut porter le taux de codage à $R_c = 2/3$ et $R_c = 3/4$. Les périodes de poinçonnage T sont respectivement pour les trois taux 1, 2 et 3. Les valeurs d_{min} et $a_{d_{min}}$ sont tabulées dans [89] et [90]. En utilisant (2.89) et (2.87) selon que d_{min} soit pair ou impair, on obtient la probabilité d'erreur par paquet asymptotique pour ce codeur convolutif. Le tableau 2.2 rappelle les valeurs du PEP pour les trois taux de codage.

La figure 2.12 illustre l'approximation obtenue pour la probabilité d'erreur bloc pour un système employant le codeur convolutif décrit plus haut avec un taux de codage de 1/2. La modulation utilisée est une QPSK et le canal est à évanouissement de Nakagami-m ($m = 1, 3, 6$). La longueur des paquet est de $J = 1000$ bits. L'approximation est très précise asymptotiquement (lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$ et donc lorsque $P_b \to 0$). On peut faire la

même remarque que pour le code de Hamming, la précision est d'autant meilleure que le canal se rapproche d'un canal sans évanouissements. La raison est identique à celle donnée pour les codes blocs. Pour un canal de Rayleigh, l'erreur obtenue est inférieure à 1dB pour un PER compris entre 3.10^{-1} et 10^{-3}. Les deux courbes (asymptotiques et simulées) convergent aux très forts SNR.



(a) PEO $= f(\mu_{dB})$



(b) PEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 2.13 – PEO avec codage convolutif ($K = 4$ et $15)_8$, $17)_8$)pour un PEP cible de 10^{-1} en fonction de la moyenne (a) de la loi log-normale et de l'écart type (b). Les bits codés sont rassemblés en symbole QPSK suivant un codage de Gray.

Inversion du PEP estimation du PEO. Avec les expressions du PEP résumées dans le tableau 2.2, l'inversion du PEP en fonction de P_b est triviale. De plus nous avons déjà donné plus haut l'expression du SNR moyen $\overline{\gamma}_s$ en fonction du BEP. En utilisant l'inversion des expressions dans le tableau 2.2 et l'expression en (2.69) dans (2.86), on détermine le PEO en fonction du PEP cible moyen à atteindre.

La figure 2.13 donne la probabilité de coupure paquet selon les paramètres de la loi de shadowing et le codeur convolutif utilisé ci-dessus. La probabilité d'erreur paquet moyenne attendue est fixée à 10^{-1}. Sur la figure 2.13(a), la probabilité de coupure paquet est tracée en fonction de la moyenne du shadowing avec $\sigma = 8$dB. La précision de l'inversion analytique est très bonne pour toutes les valeurs de la moyenne du shadowing. Si l'on fait varier l'écart type de la loi log-normale, avec $\mu = 30$dB, comme sur la figure 2.13(b), l'inversion analytique de la probabilité d'erreur paquet permet de prédire le PEO exact avec une très bonne précision.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré une liaison radio point-à-point mono-antenne. Nous avons abordé le problème crucial de l'analyse de performance d'un point de vue probabilité de coupure symbole ou paquet, lorsqu'une communication radio est affecté par des évanouissements rapides et en présence de shadowing. La caractérisation de performance d'un système de ce point de vue est intéressante à plus d'un titre. Tout d'abord, lorsque l'on considère la présence de shadowing, la probabilité d'erreur moyenne ne caractérise plus les performances d'un système, puisque le SEP varie dans le temps. Il est donc nécessaire d'avoir une idée sur la "vraisemblance" d'atteindre tel SEP moyen. Ensuite, la probabilité de coupure symbole et/ou paquet s'exprime, par définition, en fonction de la probabilité d'erreur moyenne (plutôt que du SNR moyen comme dans les approches classiques). Cette différence est essentielle puisque c'est la probabilité d'erreur moyenne qui caractérise la qualité de service d'une application.

Notre contribution dans ce chapitre tient en plusieurs points :

1. D'abord pour une communication radio sans codage canal et pour les modulations linéaires les plus utilisées (M-PSK, M-QAM), nous fournissons de nouvelles approximations de la probabilité d'erreur moyenne dans des canaux à évanouissements rapides de Nakagami-m et Rice. Ces approximations se révèlent très précises (moins de 1dB d'écart) non seulement asymptotiquement (larges SNR), mais aussi pour un faible SNR, ce qui n'est pas le cas pour les approximations déjà existantes dans la littérature.

2. Nous montrons que ces approximations sont inversibles par rapport au SNR, et nous donnons des formules originales, simples et précises de celui-ci en fonction de la probabilité d'erreur moyenne et des paramètres du système considéré. De plus, une certaine généralité dans l'expression du SNR moyen est mis en avant, puisque le SNR moyen $\overline{\gamma}_s$ à la forme générale suivante (dans les canaux de Nakagami-m) :

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*) = c_0 \left(P_s^{*-\frac{1}{m}} \left(1 - c_1 P_s^{*\frac{1}{m}}\right)^{-\frac{1}{2m}} - c_2^{-\frac{1}{m}} \right),$$

   où c_0, c_1 et c_2 sont des constantes dépendant de la modulations et de la valeur de l'évanouissement du canal. Les résultats sur le canal de Rice sont plus particuliers mais n'en sont pas moins originaux, puisque nous exprimons le SNR moyen à l'aide

de la fonction spéciale de Lambert W_0. Pour ce que l'on a pu en juger, c'est la seule inversion disponible aujourd'hui de la probabilité d'erreur en canal de Rice.

3. Les approximations et les inversions de la probabilité d'erreurs réalisées, permettent d'estimer la probabilité de coupure symbole de manière très précise et ce pour de larges variations des paramètres de la loi log-normale.
4. Enfin, notre méthodologie permet de prendre en compte le codage pour l'évaluation de la probabilité de coupure bloc (ou paquet), à condition d'utiliser un décodeur à décision dure. Nous donnons l'estimation de la probabilité de coupure paquet pour un système utilisant un codage bloc de Hamming, puis un codeur convolutif.

Notre étude ne se focalise pas sur un système de télécommunication particulier, mais considère une liaison radio sur un canal plat à évanouissement. De part cette caractéristique, on pourrait facilement appliquer l'étude faite ici à des systèmes OFDM, ne présentant pas d'interférences entre porteuses. Cela donnerait donc des bornes pour l'étude des performances de ces systèmes. On pourrait également étendre l'analyse aux systèmes à étalement de spectre. En considérant les trajets multiples décorrélés (ce qui est une hypothèse couramment admise pour les systèmes larges bandes) et un récepteur de type RAKE, on se ramène à un système à diversité spatiale dont l'étude est analogue à celle menée ici. Cependant, l'étude menée ici n'est pas facilement extensible dans le cas où l'étalement temporel du canal affecte plusieurs symboles. La statistique d'interférence entre symboles devant être prise en compte dans l'étude, cela pourrait faire l'objet de recherches ultérieures.

Un autre point peut être soulevé au niveau de l'étude avec codage. L'utilisation de décodeur à décision dure, permet de partitioner le problème de la recherche de la probabilité de coupure paquet. Que ce soit en code bloc ou convolutif, la probabilité d'erreur bloc en sortie de codeur dépend de la probabilité d'erreur bit en entrée. Grâce à l'inversion de cette relation, on peut remonter au SNR. Cependant si on considère des décodeurs à décision souples, la probabilité d'erreur en sortie dépend des caractéristiques du codeur mais également du SNR. L'étude de la probabilité de coupure dans ce cas, devrait se faire de façon globale, en prenant en compte le codage directement après la sortie du canal.

CHAPITRE

3 Systèmes MIMO

3.1 Introduction

De nos jours, les performances et la fiabilité du lien radio peuvent être grandement améliorées en exploitant la diversité de canaux qu'offre les systèmes MIMO. Les techniques de codage spatio-temporel et de multiplexage spatial constituent un domaine de recherche encore très actif. Il est donc primordiale de chercher à analyser l'impact du shadowing sur ce type de système, ce que nous proposons de faire dans ce chapitre. Comme pour le cas SISO, nous avons besoin d'approcher le SEP moyen pour pouvoir l'inverser. Il est donc primordiale pour nous d'avoir des expressions du SEP que l'on puisse approcher avec les méthodes introduites au chapitre 1.

De nombreuses études ont cherché à caractériser les performances en SEP moyen de tels systèmes de communications. En [91], Shin et Lee étudient le SEP exacte pour les systèmes MIMO à codage bloc dans un canal de Rayleigh sans corrélation et en [66] ils s'intéressent aux performances des systèmes MIMO STBC dans des canaux Nakagami-m mais avec un phénomène "trou de serrure", environnement pour lequel la matrice du canal n'est pas de rang plein. D'autres études ont cherché à prendre en compte le phénomène de corrélation lorsqu'étaient utilisées des techniques de diversités spatiales. Les performances en terme de SEP moyen d'un système STBC dans un canal de Nakagami-m présentant de la corrélation a été étudié dans [47], qui est en fait une extension de l'étude faite par les auteurs de [51], sur les performances d'un système d'antennes à réception MRC dans un canal de Nakagami-m corrélé. Les auteurs donnent une forme exacte de la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK et M-QAM valable pour n'importe quel type de codes orthogonaux et n'importe quel modèle de corrélation. Le SEP d'un signal M-PSK (respectivement M-QAM) s'exprime comme combinaison linéaire d'une (respectivement 2) intégrale(s) faisant intervenir les valeurs propres (et leur multiplicité) de la matrice de covariance du canal MIMO. On peut citer d'autres travaux antérieurs à ceux-là et qui se sont intéressés aux performances des systèmes multi-antennes en présence de corrélation. Déjà en 1999, Lombardo *et al.* ont étudié les performances d'un signal BPSK avec un système à diversité MRC dans un canal de Nakagami-m corrélé dans [92]. Ensuite Gozali *et al.* ont donné une valeur approchée de la probabilité d'erreur d'un système STBC en [93] dans le cas d'un canal de Rayleigh puis Femenias étendit les résultats au canal de Nakagami-m en [94]. En [95] le SEP exact d'un système STBC fut dérivé pour différentes modulations cohérentes sur un canal de Nakagami-m avec des valeurs entières de m.

Le cas d'un système MIMO à multiplexage spatial, avec un récepteur ZF, permet de trouver des solutions sous forme exacte, autre qu'intégrale, de la probabilité d'erreur, notamment à l'aide de fonctions spéciales. Gore *et al.* donnent l'expression du SNR en sortie de traitement d'un égaliseur ZF [70]. Dans cet article, les auteurs considèrent la présence de corrélation à l'émission et un canal de Rayleigh. En [96] les auteurs étendent l'étude à un canal de Rice et en considérant également une corrélation à l'émission. Grâce à la distribution du SNR en sortie du traitement, les auteurs sont capables de donner une forme exacte de la probabilité d'erreur en terme de fonction hypergéométrique.

Dans ce chapitre, nous étendons l'approche originale étudiée au chapitre précédent aux

systèmes MIMO à codage blocs orthogonaux et à multiplexage spatial. Nous complétons et étendons ainsi les résultats de Conti *et al.* qui proposèrent des bornes inversibles et précises de la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK dans un environnement de Rayleigh et un système à diversité spatial en réception. Nous commençons par considérer les systèmes STBC. Pour les modulations M-PSK et M-QAM, nous trouvons des approximations simples et précises de la probabilité d'erreur exacte en canal de Nakagami-m et Rice, dans le cas où aucune corrélation n'est présente à l'émission et à la réception. Nous montrons qu'elles sont inversibles et permettent de calculer le SEO dans les configurations ci-dessus. Nous traitons ensuite des systèmes à multiplexage spatial et pour lesquels nous pouvons dériver des approximations simples et inversibles du SEP moyen en canal de Rayleigh corrélé en émission. Nous traitons également du canal de Rice où nous donnons des résultats sur l'approximation du SEP et son inversion.

3.2 Estimation du SEP et du SEO pour les systèmes STBC MIMO

3.2.1 Hypothèses

Nous proposons des approximations et des inversions de la probabilité d'erreur moyenne lorsque le système ne présente pas de corrélation. Cependant la présence de corrélation due à un environnement pauvre en diffuseur et/ou un faible espacement entre les antennes, rend l'étude très délicate. Nous en dirons un mot dans cette section.

Distribution du SNR en sortie du traitement. Nous avons vu au chapitre 1 que la structure MIMO STBC permettait d'implémenter un récepteur à MV symbole par symbole d'une complexité linéaire. Le SNR instantané par symbole après le décodage bloc s'écrit :

$$\gamma_{STBC} = \frac{||\mathbf{H}||_F^2}{n_t R}\overline{\gamma}_s, \tag{3.1}$$

avec $\overline{\gamma}_s = E_m/N_0$ le SNR moyen reçu sur chaque antenne. Les performances d'un décodeur MIMO à codes orthogonaux dépendent des propriétés statistiques de la norme de Frobenius au carré de la matrice canal. Autrement dit les performances vont dépendre si on considère un canal MIMO corrélé spatialement ou non.

Canal MIMO non corrélé. Dans le cas où les gains complexes de la matrice canal sont supposés i.i.d, $||\mathbf{H}||_F^2$ est la somme de $n_t n_r$ variables gamma identiquement distribuées et la MGF du SNR en sortie de traitement est [66] :

$$M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Naka}(-s) = \left(1 + s\frac{\overline{\gamma}_s}{mn_t R}\right)^{-q}, \tag{3.2}$$

avec $q = mn_t n_r$. On peut remarquer l'analogie entre (3.2) et la MGF de γ_s d'un canal de Nakagami-m mono-antenne : le nombre de degré de liberté a augmenté, il est passé de m à q. Dans ce qui suit nous considérons que le canal ne présente pas de corrélation.

3.2.2 Canal de Nakagami et M-PSK

Le SEP d'un signal M-PSK pour un système MIMO à code orthogonaux sans corrélation dans un canal de Nakagami-m fut donnée par Shin et Lee dans [66] :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) = M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Naka}(-g_{psk}) \left\{ \frac{\Gamma(q+1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(q+1)} {}_2F_1\left(q, \frac{1}{2}; q+1; x\right) + \frac{\sqrt{z}}{\pi} F_1\left(\frac{1}{2}, q, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; y, z\right) \right\}, \quad (3.3)$$

avec $x = 1/(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_s/(mn_tR))$, $y = (1 - g_{psk})/(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_s/(mn_tR))$ et $z = 1 - g_{psk}$. On peut remarquer que l'expression de la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK d'un système spatio-temporel à codage blocs orthogonaux, en canal de Nakagami, est similaire à l'expression du SEP mono-antenne en (2.15). De ce fait, la méthodologie d'approximation obtenue pour cette dernière va s'appliquer ici également.

Approximation du SEP. En appliquant la méthode de Laplace pour la fonction ${}_2F_1$ et en régime asymptotique, l'équation (3.3) tend vers :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s \to \infty) \approx x^q \left\{ \frac{\Gamma(q+1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(q+1)} \frac{1}{\sqrt{1-x\tilde{t}}} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; z\right)}{\sqrt{1-y}} \right\}, \quad (3.4)$$

avec $\tilde{t} = q/(q+1)$ et en remarquant que $M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Naka}(-g_{psk}) = x^q$. On peut approcher (3.4) par :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s \to \infty) \approx k_{psk}^{stbc} \frac{x^q}{\sqrt{1-x\tilde{t}}}, \quad (3.5)$$

avec :

$$k_{psk}^{stbc} = \frac{\Gamma(q+1/2)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(q+1)} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-q; \frac{3}{2}; z\right). \quad (3.6)$$

La figure 3.1, montre la précision de (3.5) pour une modulation 8-PSK, trois paramètres d'évanouissement $m = 1, 3, 6$. On s'intéresse à la précision de cette approximation selon la taille du système MIMO utilisé. Ici on considère un système MIMO 2×2 avec un code bloc d'Alamouti et un système 3×3 avec un code de Tarokh $\mathcal{G}_3$.

L'approximation donnée en (3.5) est très précise sur une large plage de SNR et surtout pour des valeurs du SEP compris entre 10^{-1} et 10^{-4}. L'expression permet de remonter au SNR comme nous l'avons vu pour les systèmes mono-antennes.

Inversion du SEP et estimation du SEO. En élevant au carré l'équation (3.5), on remonte au SNR moyen par symbole en fonction de la probabilité d'erreur cible $P_s^*(E)$:

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E)) = c_0 \left(P_s^*(E)^{-\frac{1}{q}} \left(1 - c_1 P_s^*(E)^{\frac{1}{q}}\right)^{-\frac{1}{2q}} - \left(k_{psk}^{stbc}\right)^{-\frac{1}{q}} \right), \quad (3.7)$$

avec

$$c_0 = \frac{mn_tR\sqrt[q]{k_{psk}^{stbc}}}{g_{psk}}, \quad (3.8)$$

$$c_1 = \frac{\tilde{t}}{\sqrt[q]{k_{psk}^{stbc}}}. \quad (3.9)$$

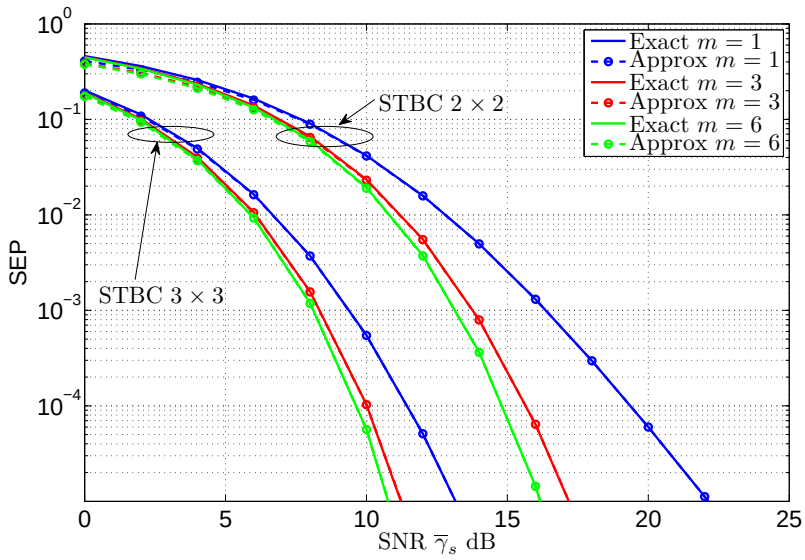
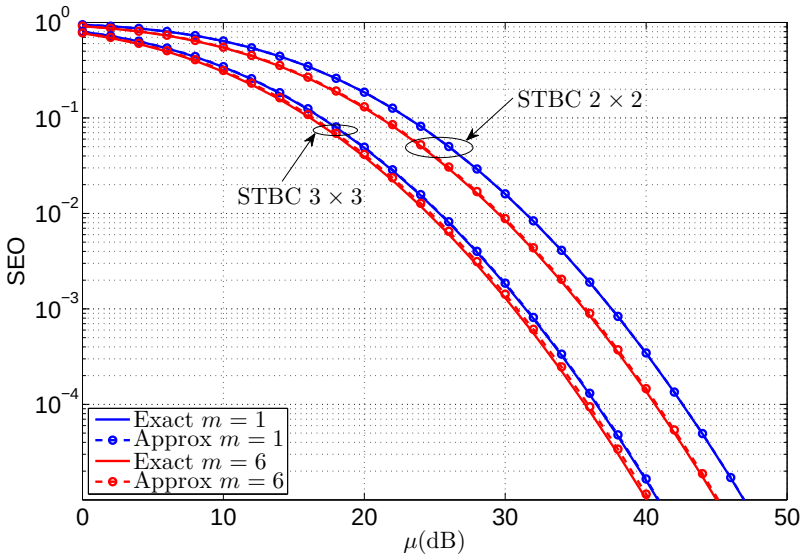
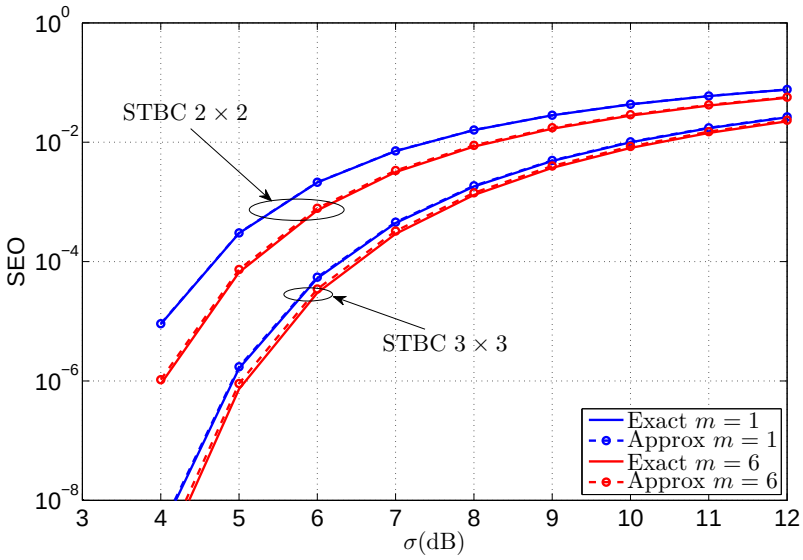


FIG. 3.1 – Approximation du SEP pour un signal 8-PSK dans un canal de Nakagami et deux systèmes MIMO à codes orthogonaux

Enfin en utilisant (1.18) on peut estimer le SEO en présence de shadowing. La figure 3.2 nous donne l'évolution du SEO pour les deux systèmes MIMO à codes orthogonaux cités ci-dessus. Comme précédemment, sur la figure 3.2(a) l'écart type de la loi de shadowing est de 8dB et pour la figure 3.2(b) la puissance moyenne du shadowing est de 30dB. La probabilité d'erreur moyenne cible recherchée est de 10^{-2}. L'estimation du SEO à l'aide de l'inversion analytique du SEP moyen correspond quasiment à la valeur exacte de la probabilité de coupure pour les deux systèmes MIMO considérés et tous les paramètres d'évanouissements du canal. On observe, comme on peut s'y attendre, une probabilité de coupure plus faible pour une taille de système plus importante du fait de l'augmentation de la diversité.



(a) SEO $= f(\mu_{dB})$



(b) SEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 3.2 – SEO pour deux systèmes MIMO à codes orthogonaux et pour une modulation 8-PSK. MIMO 2×2 à codage d'Alamouti et MIMO 3×3 à codage de Tarokh $\mathcal{G}_3$.

3.2.3 Canal de Nakagami et M-QAM

D'après [66], le SEP d'un système MIMO à codes orthogonaux dans un canal de Nakagami, pour un signal M-QAM est :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s) &= \frac{2gM_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Naka}(-g_{qam})}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(q+1/2)}{\Gamma(q+1)}{}_2F_1\left(q,\frac{1}{2};q+1;x_1\right) \\ &\quad -\frac{g^2\Gamma\left(q+1/2\right)}{\pi\Gamma\left(q+3/2\right)}M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Naka}(-2g_{qam})F_1\left(1,q,1;q+\frac{3}{2};y,z\right), \quad (3.10) \end{aligned}$$

avec $x_1 = 1/(1+g_{qam}\overline{\gamma}_s/(mn_tR))$, $y = (1+g_{qam}\overline{\gamma}_s/(mn_tR))/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_s/(mn_tR))$ et $z = 1/2$. De plus on pose $x_2 = 1/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_s/(mn_tR))$. Le problème étant similaire au cas SISO M-QAM (puisque l'on considère un canal MIMO sans corrélation), on procède exactement de la même manière que précédemment. La fonction hypergéométrique de Gauss est remplacée par son approximation de Laplace et la fonction hypergéométrique d'Appell par son expression asymptotique.

Approximation asymptotique. La probabilité d'erreur exacte en (3.10) devient :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s\to\infty) &\approx \frac{x_1^q}{\sqrt{1-x_1\tilde{t}}}\left\{\frac{2g\Gamma(q+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q+1)}-\frac{g^2\Gamma\left(q+1/2\right)}{\pi\Gamma(q+3/2)}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^q\times\right. \\ &\quad \left.{}_2F_1\left(1,q+1;q+\frac{3}{2};z\right)\sqrt{1-x_1\tilde{t}}\right\}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

avec x_2/x_1 qui tend vers 1/2 lorsque le SNR tend vers l'infini et $\sqrt{1-x_1\tilde{t}}$ qui tend vers 1. Par conséquent une très bonne approximation de (3.10) est :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s\to\infty)\approx k_{qam}^{stbc}\frac{x_1^q}{\sqrt{1-x_1\tilde{t}}}, \quad (3.12)$$

avec :

$$k_{qam}^{stbc}=\frac{2g\Gamma(q+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q+1)}-\frac{g^2\Gamma(q+1/2)}{2^q\pi\Gamma(q+3/2)}{}_2F_1\left(1,q+1;q+\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right). \quad (3.13)$$

La figure 3.3 valide l'approximation du SEP obtenu avec (3.12) pour un signal 16−QAM, différentes valeurs du paramètre d'évanouissement m et 2 tailles de système MIMO. Dans un canal de Nakagami-m sans corrélation entre les antennes d'émission et ou de réception, plus on augmente la taille du système et plus le gain de diversité est important (q augmente), et on se rapproche du cas gaussien, qui est un cas idéal pour l'approximation de Laplace.

Inversion du SEP et approximation du SEO. L'inversion du SEP en (3.12) à la même forme que l'équation (2.47) :

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*(E))=c_0\left(P_s^*\left(E\right)^{-\frac{1}{q}}\left(1-c_1P_s^*\left(E\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{-\frac{1}{2q}}-\left(k_{qam}^{stbc}\right)^{-\frac{1}{q}}\right), \quad (3.14)$$

avec

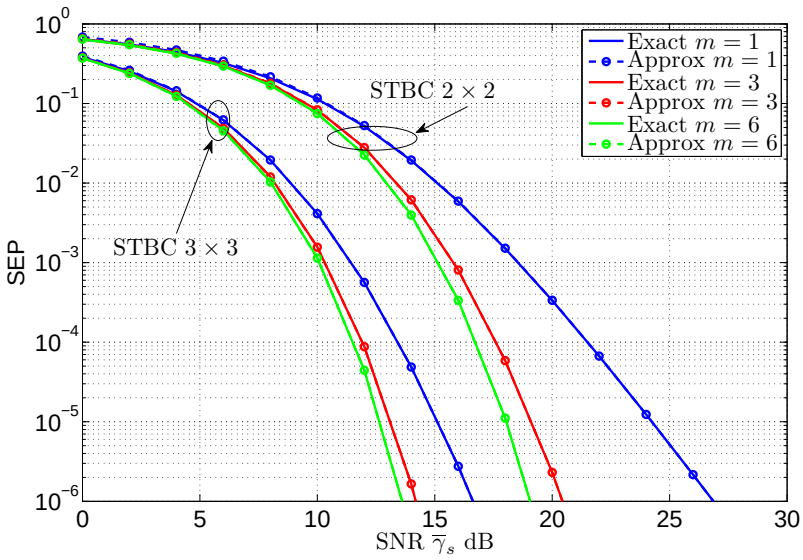


FIG. 3.3 – Approximation du SEP d'un signal 16-QAM pour deux systèmes STBC 2×2 et 3×3 avec l'équation (3.12) et comparaison avec la valeur exacte en (3.10)

$$c_0 = \frac{m n_t R \sqrt[q]{k_{qam}^{stbc}}}{g_{qam}}, \tag{3.15}$$

$$c_1 = \frac{\tilde{t}}{\sqrt[q]{k_{qam}^{stbc}}}. \tag{3.16}$$

A l'aide de (1.18) on estime la probabilité de coupure symbole en présence de shadowing pour un système MIMO STBC utilisant une modulation M-QAM. Au vu de la précision de l'approximation pour le SEP, on peut s'attendre à une bonne prédiction du SEO dans ce cas aussi, ce qui est attesté par les figures 3.4(a) et 3.4(b). Le SEO est estimé pour une probabilité d'erreur moyenne de 10^{-2}, un signal 16−QAM et deux valeurs du paramètre d'évanouissement $m = 1$ et $m = 6$. Les paramètres de shadowing étant ceux utilisés jusqu'à présent.

3.2.4 Canal MIMO Nakagami-m Corrélé

L'analyse de performance dans ce cas général est compliquée et l'obtention de formes exactes simples pour le SEP est impossible. En posant $\mathbf{h} = vec\{\mathbf{H}\} \in \mathbb{C}^{n_t n_r \times 1}$, $\mathbf{h}$ suit une loi gaussienne multivariée et est notée $\mathbf{h} \hookrightarrow \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ et $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance de $\mathbf{h}$. Le SNR en sortie de traitement s'écrit toujours :

$$\gamma_{STBC} = \frac{\overline{\gamma}_s}{n_t R} ||\mathbf{H}||_F^2 = \frac{\overline{\gamma}_s}{n_t R} \mathbf{h}^H \mathbf{h}, \tag{3.17}$$

$||\mathbf{H}||_F^2$ est une somme de $n_t n_r$ variables gamma corrélées les unes aux autres. En suivant l'approche de [51] et les propriétés des formes quadratiques gaussiennes [97], la MGF du

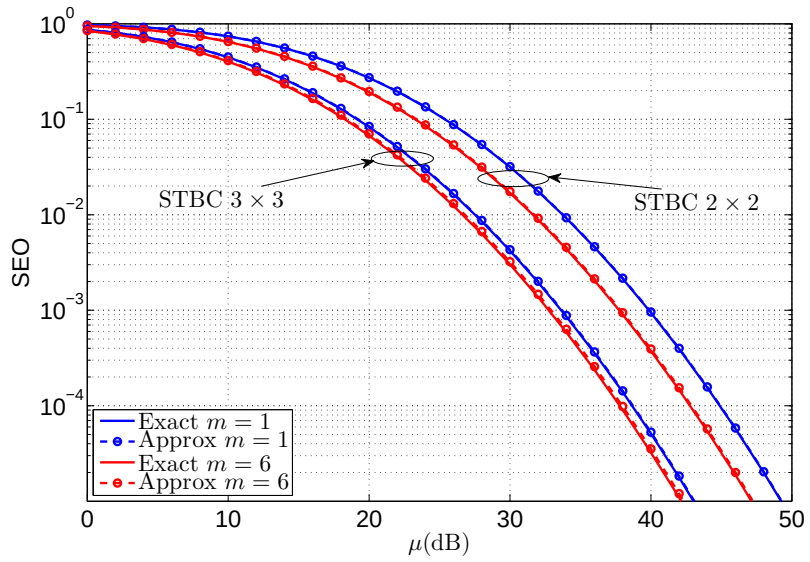
SNR en sortie de traitement pour un canal de Nakagami-m avec corrélation est :

$$M_{\gamma_{STBC}}^{CorrNaka}(-s) = \frac{1}{\det\left(\mathbf{I}_{n_t n_r} + s\frac{\overline{\gamma}_s}{m n_t R}\mathbf{\Sigma}\right)^m}, \tag{3.18}$$

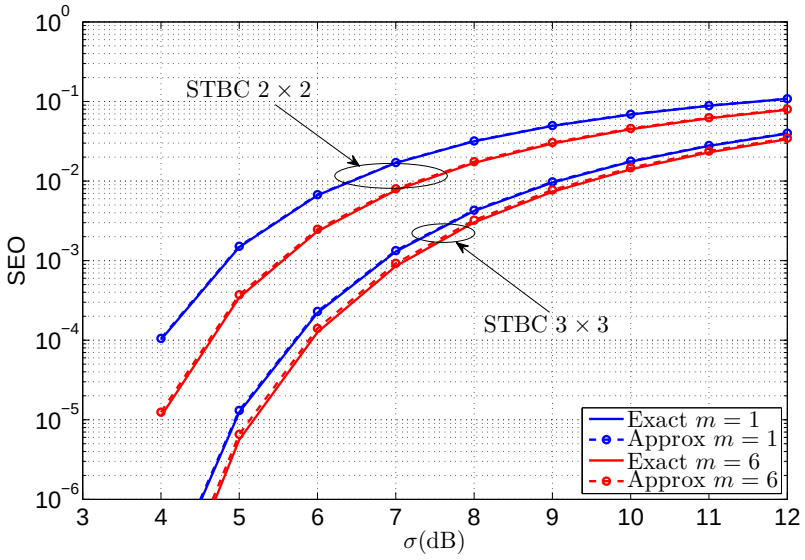
avec $\mathbf{I}_{n_t n_r}$ la matrice identité de dimension $n_t n_r \times n_t n_r$. Le résultat donné ici est également celui de Maaref [47]. Le SEP (d'une M-PSK ou M-QAM) se détermine donc en intégrant la MGF ci-dessus. La difficulté d'inverser le SEP vient du fait que le dénominateur de (3.18) produit un polynôme de degré q en $\overline{\gamma}_s$. Maaref *et al* ont donné une forme plus aboutit que la forme intégrale de la MGF, faisant apparaître les valeurs propres de la matrice de corrélation $\mathbf{\Sigma}$ [47] mais pas plus exploitable pour nous que la forme intégrale.

Pour l'approximation du SEP d'un système MIMO STBC, on peut se référer aux travaux donnés en état de l'art comme [32,98]. Bien que dans cette dernière référence l'auteur traite d'un canal de Rice, si on considère la composante spéculaire nulle on peut étendre ces résultats pour un canal de Rayleigh. Mais ces approximations sont asymptotiques et peu fiables aux SNRs pour lesquels la probabilité d'erreur est comprise entre 10^{-1} et 10^{-4}.

Nous remarquons qu'il y a ici un point à creuser pour de futures recherches. Dans le cas d'un système MIMO STBC soumis à un évanouissement de Nakagami-m présentant de la corrélation spatiale, il n'existe pas d'approximation simple et inversible du SEP.



(a) SEO $= f(\mu_{dB})$



(b) SEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 3.4 – SEO de deux signaux QAM en présence de shadowing en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale.

3.2.5 Canal de Rice et M-PSK

En canal de Rice, une composante cohérente de l'onde radio est présente entre l'émetteur et le récepteur : c'est la composante spéculaire. La matrice du canal MIMO se modélise comme suit :

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{K}{1+K}}\mathbf{H_1} + \sqrt{\frac{1}{1+K}}\mathbf{H_2}, \tag{3.19}$$

La matrice $\mathbf{H_1}$ est une matrice déterministe et se modélise par les équations classiques d'un réseau linéaire d'antenne à l'émission et à la réception ; $\mathbf{H_1} = \alpha\beta^H$ avec $\alpha = \left[1\ e^{j2\pi\frac{d_r}{\lambda}\sin\theta_r} \cdots e^{j2\pi\frac{d_r}{\lambda}(n_r-1)\sin\theta_r}\right]^T$ et $\beta = \left[1\ e^{j2\pi\frac{d_t}{\lambda}\sin\theta_t} \cdots e^{j2\pi\frac{d_t}{\lambda}(n_t-1)\sin\theta_t}\right]^T$. Avec λ la longueur d'onde du signal transmis, d_t, d_r, θ_t et θ_r sont respectivement la distance inter-capteur à l'émission, à la réception, l'angle de départ de l'onde à l'émission et celui d'arrivée à la réception. De plus $\theta_r = -\theta_t$. α et β sont les vecteurs de déphasages de l'onde incidente sur le réseau d'antenne à l'émission et à la réception respectivement. $\mathbf{H_2}$ est la composante diffuse et est constituée de coefficients complexes distribués de façon gaussienne ; leurs amplitudes suivent une loi de Rayleigh. On dit que $\mathbf{H}$ suit une loi gaussienne pour les matrices et se note $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathcal{CN}(\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma})$ avec $\mathbf{M} = E(\mathbf{H}) = \sqrt{K/(1+K)}\mathbf{H_1}$. $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de corrélation du canal MIMO définie au chapitre 1.

Pour des raisons de commodité, on transforme la matrice canal en vecteur : $\mathbf{h} = vec\{\mathbf{H}\}$. $\mathbf{h}$ suit maintenant une distribution gaussienne complexe multivariée non centrée, notée : $\mathbf{h} \hookrightarrow \mathcal{CN}(\mathbf{m}, \mathbf{\Sigma})$, avec $\mathbf{m} = vec\{\mathbf{M}\} = \sqrt{K/(1+K)}\mathbf{p}(\phi)$ et $\mathbf{p}(\phi) = vec\{\mathbf{H_1}\} = [e^{j\phi_1}, \cdots, e^{j\phi_{n_t n_r}}]^T$ qui caractérise la composante spéculaire du canal. Les phases du vecteur $\mathbf{p}(\phi)$ sont égales à :

$$\phi_i = -\frac{2\pi}{\lambda}\left[(k-1)d_r + (l-1)d_t\right]\sin\theta_t;\ \ k = 1...n_r;\ \ l = 1...n_t;\ \ i = (l-1)n_r + k. \tag{3.20}$$

La matrice $\mathbf{\Sigma}$ est la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathbf{h}$ qui dans le cas général correspond au produit de kronecker de deux matrices de corrélations. La MGF du SNR après le décodage bloc est [98] :

$$M_{\gamma_{STBC}}^{CorrRice}(s) = \frac{\exp\left\{-\mathbf{m}^H\left[\frac{n_t R}{-s\overline{\gamma}_s}\mathbf{I}_{n_t n_r} + \mathbf{\Sigma}\right]^{-1}\mathbf{m}\right\}}{\det\left(\mathbf{I}_{n_t n_r} + \frac{-s\overline{\gamma}_s}{n_t R}\mathbf{\Sigma}\right)}. \tag{3.21}$$

Dans ce cas général, il sera très difficile de trouver une forme simple, précise et inversible de la probabilité d'erreur si l'on n'en a pas trouvé pour le canal de Nakagami-m. Si on considère que la composante diffuse est constituée d'échantillons complexes indépendants et identiquement distribués selon une loi normale (les antennes d'émission et de réception ne présente aucune corrélation), la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathbf{h}$ est une matrice diagonale $\mathbf{\Sigma} = 1/(1+K)\mathbf{I}_{n_t n_r}$. La MGF devient donc :

$$M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Rice}(s) = \frac{\exp\left\{-\left[\frac{n_t R}{-s\overline{\gamma}_s} + \frac{1}{1+K}\right]^{-1}\mathbf{m}^H\mathbf{m}\right\}}{\left(1 + \frac{-s\overline{\gamma}_s}{n_t R(1+K)}\right)^{n_t n_r}}, \tag{3.22}$$

avec $\mathbf{m}^H\mathbf{m} = Kn_t n_r/(1+K)$. A partir de cette expression, on va pouvoir exprimer la probabilité d'erreur d'un système MIMO STBC en canal de Rice sans corrélation.

Forme exacte du SEP. La fonction génératrice des moments du SNR après décodage bloc pour une M-PSK en canal de Rice vaut :

$$M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Rice}(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}) = \left(\frac{(1+K)n_tR\sin^2\theta}{(1+K)n_tR\sin^2\theta+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right)^{n_tn_r} \times \exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{(1+K)n_tR\sin^2\theta+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right)^{n_tn_r}. \quad (3.23)$$

Finalement les performances d'un système STBC MIMO dans un canal de Rice sans corrélation, sont équivalentes à celles d'un système à diversité de réception muni d'un traitement MRC avec n_tn_r branches [6]. La probabilité d'erreur exacte en canal de Rice d'un système MIMO à codes orthogonaux pour une modulation M-PSK est donnée par :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Rice}\left(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right)d\theta. \quad (3.24)$$

Approximation du SEP. Nous approchons la valeur SEP par la méthode de Laplace. La base de fonction (h,g) utilisée est $h(\theta)=1/\pi$ et $g(\theta)=-\ln\left(M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Rice}\left(-g_{psk}/\sin^2\theta\right)\right)$. Dans ce cas, la variable T introduite en (1.42) vaut n_tn_r. De plus on sait que l'approximation (1.42) est d'autant meilleure que T est grand. Donc notre approximation devrait être d'autant plus précise que la taille du système MIMO est grande. L'approximation de Laplace pour le SEP d'un système MIMO à codes orthogonaux en canal de Rice pour une modulation M-PSK est :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s\right) \approx \frac{((1+K)n_tR)^q}{\sqrt{\pi q g_{psk}\overline{\gamma}_s\left(g_{psk}\overline{\gamma}_s+n_tR(1+K)^2\right)}}\frac{\exp\left\{-\frac{g_{psk}Kq\overline{\gamma}_s}{(1+K)n_tR+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right\}}{\left((1+K)n_tR+g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)^{q-1}}, \quad (3.25)$$

avec ici $q=n_tn_r$. Comme nous l'avons dit plus haut cette équation est similaire à (2.53) et n'est donc pas inversible.

Approximation inversible du SEP. Comme nous l'avons fait pour (2.53) nous pouvons proposer une approximation inversible de cette probabilité d'erreur :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s\right) \approx \frac{((1+K)n_tR)^q}{\sqrt{\pi q}\left((1+K)n_tR+g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)^q}\exp\left(-\frac{g_{psk}Kq\overline{\gamma}_s}{(1+K)n_tR+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right). \quad (3.26)$$

La figure 3.5 trace l'approximation donnée ci-dessus pour un signal QPSK. L'approximation est proche de la valeur exacte dans la plage de SEP qui nous intéresse pour $K=0,6,10$dB. On note cependant qu'elle est un peu moins précise lorsque pour un SEP d'environ 10^{-1}.

Inversion du SEP et approximation du SEO. On peut montrer que l'équation ci-dessus admet l'unique solution suivante :

$$\overline{\gamma}_s\left(P_s^*\right) = n_tR\left(1+K\right)\left(\frac{K}{g_{psk}W_0\left(n_tRK\left(1+K\right)e^K\exp\left(-\frac{\ln\left(\frac{((1+K)n_tR)^q}{\sqrt{\pi q}P_s^*}\right)}{q}\right)\right)}-\frac{1}{g_{psk}}\right), \quad (3.27)$$

avec P_s^* la probabilité d'erreur symbole cible. En injectant cette expression en (1.18), on obtient le SEO en présence de shadowing pour un système MIMO STBC et un signal M-PSK. La figure 3.6 trace l'évolution du SEO pour un signal QPSK et un système MIMO 2×2 et pour un SEP cible de 10^{-2}. L'écart type du shadowing sur la figure 3.6(a) est de 8dB et la moyenne du shadowing 30dB sur la figure 3.6(b). On peut constater une très bonne prédiction du SEO avec (3.27) pour le taux d'erreur cible considéré. Il est clair que si l'on avait voulu un SEP cible de 10^{-1}, on aurait sous estimé la probabilité de coupure (puisqu'on sous-estime le SNR et donc l'argument de la fonction Q gaussienne en (1.18) devient plus grand).

3.2.6 Canal de Rice et M-QAM

Dans le cas d'un signal modulé en quadrature dans un système MIMO à codes orthogonaux sans corrélation spatiale, le SEP exact vaut :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/2} M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta - \frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4} M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta. \quad (3.28)$$

Approximation inversible du SEP. La probabilité d'erreur d'un signal M-QAM d'un système MIMO à codes orthogonaux dans un canal de Rice est minorée par :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \geq \frac{4g}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} M_{\gamma_{STBC}}^{i.i.d.Rice}\left(-\frac{g_{qam}}{sin^2\theta}\right)d\theta. \quad (3.29)$$

En appliquant l'approximation de Laplace pour (3.29), on obtient la forme suivante inversible de la probabilité d'erreur :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_s\right) \approx \frac{((1+K)n_tR)^q}{\sqrt{\pi q}\left((1+K)n_tR + g_{qam}\overline{\gamma}_s\right)^q}\exp\left(-\frac{g_{qam}Kq\overline{\gamma}_s}{(1+K)n_tR + g_{qam}\overline{\gamma}_s}\right). \quad (3.30)$$

Sur la figure 3.5, on a également tracé l'approximation en (3.30) pour un signal 16−QAM. On peut constater que l'approximation n'est pas très bonne pour un SEP compris entre 10^{-1} et 10^{-2} et même au delà pour le cas où $K = 0$dB. Dans ce cas, l'approximation est à environ 1dB de la valeur exacte pour un SEP compris entre 10^{-2} et 10^{-4} et augmente jusqu'à 3dB pour des SEP de l'ordre de 10^{-1}.

Inversion du SEP et estimation du SEO. Le SNR en fonction de la probabilité d'erreur est identique à (3.27) avec g_{qam} qui remplace g_{psk}. La figure 3.6 montre également l'estimation du SEO pour la modulation 16−QAM, avec les mêmes paramètres que pour le signal QPSK. On remarque que l'on sous-estime le SEO pour toutes les valeurs de K testées. Cependant sur la figure 3.6(a), l'écart entre le SEO calculé avec l'inversion de (3.30) et la valeur exacte est inférieure à 1dB. Sur la figure 3.6(b), l'erreur commise sur le SEO est plus importante aux faibles valeurs de σ. Par exemple pour $\sigma = 4$dB, le SEO estimé est d'environ de 2.10^{-5}, alors qu'il est de 6.10^{-5} en réalité (soit un facteur 3). Mais il s'agit d'une probabilité de coupure très faible. La précision s'améliore si les variations de puissances augmentent autour de leur valeur moyenne (environnement urbain ou indoor) et à mesure que le canal est moins évanouit (K grand).

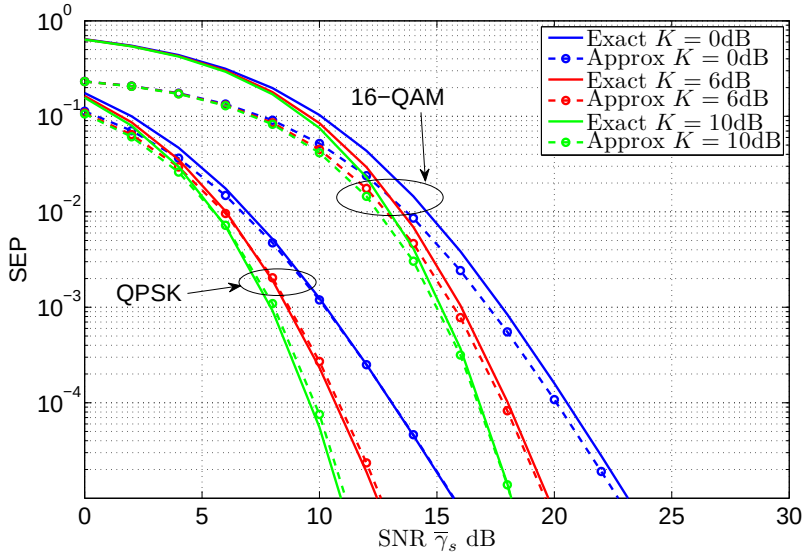
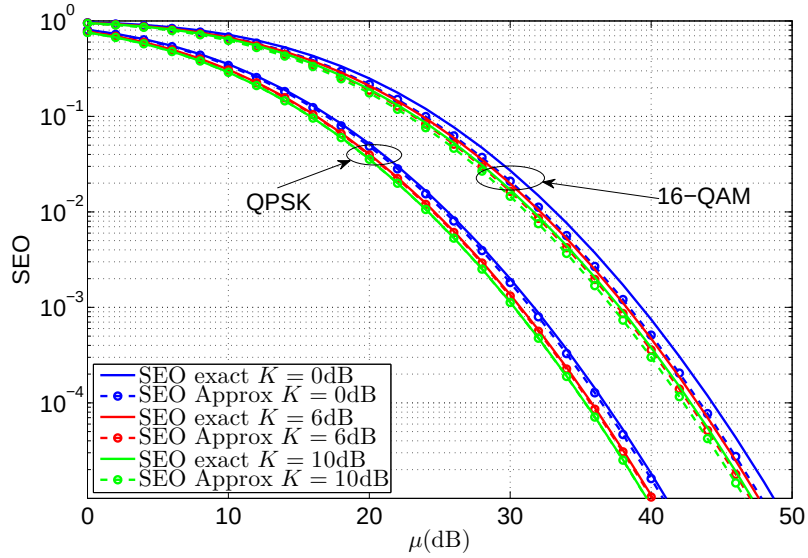
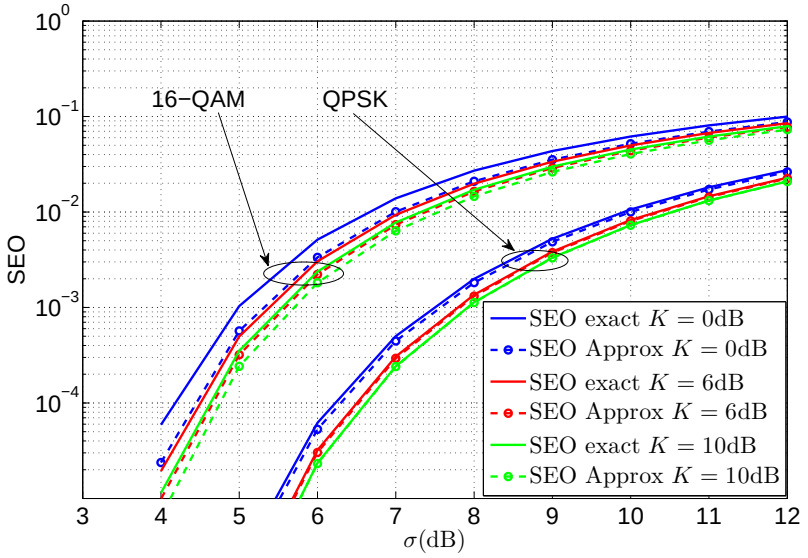


FIG. 3.5 – Probabilité d'erreur exacte et approchée d'un signal QPSK et 16-QAM d'un système MIMO STBC 2×2 à codage d'Alamouti dans un canal de Rice. Les valeurs exactes sont calculées avec (3.24) et (3.28) respectivement pour le signal QPSK et 16−QAM. Les valeurs approchées avec (3.26) et (3.30).



(a) SEO $= f(\mu_{dB})$



(b) SEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 3.6 – SEO de deux signaux QAM (QPSK 16−QAM) d'un système STBC 2×2 dans un canal de Rice et en présence de shadowing en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale.

3.3 Estimation du SEP et du SEO pour les systèmes à multiplexage spatial

3.3.1 Hypothèses

Dans cette section nous étudions un système MIMO à multiplexage spatial avec un récepteur ZF. Nous nous intéressons à l'approximation et à l'inversion de la probabilité d'erreur dans deux types de canaux à évanouissements très utilisés : Rayleigh et Rice, le cas général de Nakagami-m n'ayant pas de solution à ce jour. Contrairement au cas STBC, la forme du SNR en sortie de traitement d'un récepteur ZF permet d'envisager les cas où le canal présente des corrélations à l'émission ou à la réception. Le cas général d'une corrélation présente aussi bien en émission qu'en réception ne permet pas d'obtenir une approximation simple et inversible du SEP. Nous nous attarderons sur le cas où le canal est corrélé en émission, pour lequel des résultats intéressants peuvent être énoncés. Il convient par ailleurs de préciser que la considération théorique de la présence de corrélation seulement à l'une des deux extrémités du canal est étayée par des faits expérimentaux. Si on considère une liaison montante (du mobile vers la station de base ou le point d'accès), les dimensions d'un terminal mobile ne permettent généralement pas l'espacement des antennes de plusieurs longueurs d'ondes, il est donc raisonnable d'envisager une corrélation sur les antennes d'émission du mobile. Les contraintes de place pour une station de base sont beaucoup moins fortes que pour le mobile, et les antennes peuvent être espacées de plusieurs longueurs d'ondes facilement et donc le coefficient de corrélation peut être négligé. En toute rigueur, le coefficient de corrélation dépend de l'espacement entre les antennes mais également de l'étalement angulaire des signaux reçus (ou émis) sur le système d'antennes. La corrélation du canal sur chaque antenne diminue dès lors que le secteur angulaire dans lequel arrivent (ou partent) les signaux augmente [51]. Le cas traité ici correspond donc à une situation où la station de base se trouve dans un milieu suffisamment riche en diffuseur permettant une faible valeur du coefficient de corrélation, tandis que pour le mobile, le faible écart entre les capteurs engendre une corrélation non négligeable. Nous dirons également un mot sur le cas où un phénomène de corrélation spatiale est présent à l'émission ainsi qu'à la réception.

Forme du SNR en sortie de traitement. Le SNR en sortie de l'égaliseur linéaire ZF correspondant au $k-$ième sous canal est [96] :

$$\gamma_k = \frac{\overline{\gamma}_s}{[\mathbf{H}^H\mathbf{H}]_{kk}^{-1}}, \tag{3.31}$$

avec $\overline{\gamma}_s$ le SNR moyen reçu sur chaque antenne. L'analyse de performance d'un système à multiplexage spatial avec un récepteur ZF nécessite de connaître la distribution de γ_k qui dépend de la distribution de la matrice $\mathbf{Z} = \mathbf{H}^H\mathbf{H}$ qui elle-même dépend des caractéristiques statistiques de $\mathbf{H}$.

Canal Rayleigh MIMO corrélé en émission. Nous rappelons que la matrice du canal MIMO $\mathbf{H}$ peut se modéliser :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_w\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{1/2}, \tag{3.32}$$

avec dans le cas d'un canal de Rayleigh $\mathbf{H}_w \hookrightarrow \mathcal{CN}(0, \mathbf{I}_{n_r} \otimes \mathbf{I}_{n_t})$: les coefficients sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi gaussienne complexe. Avec ce modèle nous supposons donc que les vecteurs lignes de $\mathbf{H}$ sont indépendants ce qui traduit

l'hypothèse d'une large séparation des antennes au récepteur. Autrement dit, La matrice canal $\mathbf{H}$ suit une loi complexe gaussienne pour les matrices $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathcal{CN}\left(0, \mathbf{I}_{n_r} \otimes \mathbf{\Sigma}_{n_t}\right)$ et alors $\mathbf{Z} = \mathbf{H}^H\mathbf{H}$ suit une loi de Wishart complexe définie comme $\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathcal{CW}_{n_t}\left(n_r, \mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{n_t}\right)$, avec n_r le degré de liberté de la distribution de Wishart. La densité de probabilité de $\mathbf{Z}$ s'écrit :

$$p_z\left(\mathbf{Z}\right) = \frac{\left(\det\left(\mathbf{Z}\right)\right)^{n_r - n_t}}{\mathcal{C}\Gamma_{n_t}(n_r)\left(\det\left(\mathbf{\Sigma}_{n_t}\right)\right)^{n_r}} \exp\left(tr\left(-\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\mathbf{Z}\right)\right), \tag{3.33}$$

avec $tr\left(\mathbf{A}\right)$ l'opérateur trace de la matrice $\mathbf{A}$ et $\mathcal{C}\Gamma_{n_t}(n_r)$ la fonction gamma complexe multivariée [99]. A partir de cette distribution, Gore *et al* ont montré [70] que la densité de probabilité du SNR en sortie de traitement sur le $k-$ième sous-canal est égale à :

$$p(\gamma_k) = \frac{exp(-\gamma_k/\overline{\gamma}_{s,k})}{\overline{\gamma}_{s,k}\Gamma(n_r - n_t + 1)}\left(\frac{\gamma_k}{\overline{\gamma}_{s,k}}\right)^{n_r - n_t}, \quad k = 1, \cdots, n_t \tag{3.34}$$

avec $\overline{\gamma}_{s,k} = \overline{\gamma}_s / \left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ le SNR moyen relatif au $k-$ième sous canal et $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ l'élément de la $k-$ième ligne et $k-$ième colonne de la matrice $\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}$. A partir de la densité de probabilité de γ_k, on peut calculer la probabilité d'erreur des modulations linéaires cohérentes M-PSK et M-QAM sur le sous-canal k.

3.3.2 Canal de Rayleigh et M-PSK

Expression exacte du SEP. La probabilité d'erreur symbole relative au $k-$ième sous canal d'un signal M-PSK est :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma_k g_{psk}}{\sin^2\theta}} p(\gamma_k) d\gamma_k d\theta. \tag{3.35}$$

En effectuant le changement de variable $\gamma_k = \gamma\overline{\gamma}_{s,k}$ dans (3.35) on se ramène à l'intégrale de la MGF d'une loi gamma avec comme paramètre de forme $n_r - n_t + 1 > 0$ et un paramètre d'échelle égal à 1 :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M}\left(1 + \frac{\overline{\gamma}_{s,k} g_{psk}}{\sin^2\theta}\right)^{-(n_r - n_t + 1)} d\theta. \tag{3.36}$$

L'équation (3.36) est similaire à celle obtenue pour un système MIMO STBC [91] mais avec un ordre de diversité de $n_r - n_t + 1$. En posant $q' = n_r - n_t + 1 \in \mathbb{N}$ on peut montrer que :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = x^{q'}\left\{\frac{(2q')!}{2\left(2^{q'}q'!\right)^2}{}_2F_1(q', \frac{1}{2}; q'+1; x) + \frac{\sqrt{z}}{\pi}F_1(\frac{1}{2}, q', \frac{1}{2} - q'; \frac{3}{2}; y, z)\right\}, \tag{3.37}$$

avec $x = 1/(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_s / \left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk})$, $y = (1 - g_{psk})/(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_s / \left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk})$, $z = 1 - g_{psk}$. L'expression dérivée correspond à la probabilité d'erreur relative au sous-canal k, qui correspond à la probabilité d'erreur moyenne globale si on considère qu'en moyenne, la probabilité d'erreur est la même pour chaque sous canaux.

Une autre grandeur peut-être intéressante : la probabilité d'erreur par pair ("pairwise error probability" en anglais (PwEP)). C'est la probabilité d'avoir au moins une erreur dans la démodulation des symboles d_k. On définit un vecteur symbole $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^{n_t \times 1}$ formé par l'ensemble des symboles envoyés sur chaque antenne à l'émission, $\{d_k\}_{k=1,\ldots,n_t}$. En supposant que les n_t flux sont détectés de façon indépendante après le traitement linéaire

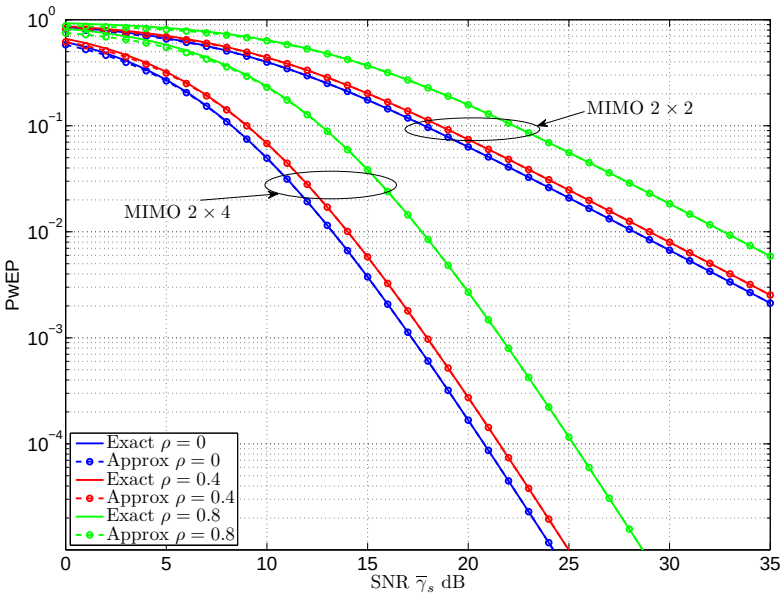


FIG. 3.7 – Probabilité d'erreur par pair d'un signal 8-PSK de deux systèmes MIMO à multiplexage spatial 2×2 et 2×4 dans un canal de Rayleigh, pour différentes valeurs de la corrélation.

ZF à la réception, la probabilité d'erreur par pair, noté $P(E)$, se déduit de la probabilité d'erreur symbole par sous canaux $P_{sk}(E)$ comme suit [100] :

$$P(E) = 1 - \prod_{k=1}^{n_t} \left(1 - P_{sk}(E)\right). \tag{3.38}$$

Si on fait l'hypothèse que la probabilité d'erreur moyenne est identique sur chaque sous-canaux, alors la PwEP est approché par :

$$P(E) \approx 1 - \left(1 - P_{sk}(E)\right)^{n_t}. \tag{3.39}$$

L'expression en (3.37) est identique à celle obtenue dans les sections précédentes en canal de Nakagami (SISO ou STBC), et s'approche donc exactement de la même manière.

Approximation du SEP. Après avoir approchée la fonction hypergéométrique de Gauss de (3.37) par la méthode de laplace, et lorsque $\overline{\gamma}_s \to \infty$ la probabilité d'erreur sur le $k-$ième sous canal est très bien approchée par :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s \to \infty) \approx k_{psk}^{mimo} \frac{x^{q'}}{\sqrt{1 - x_1 t}}, \tag{3.40}$$

avec :

$$k_{psk}^{mimo} = \frac{(2q')!}{2\left(2^{q'} q'!\right)^2} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - q'; \frac{3}{2}; z\right). \tag{3.41}$$

La figure 3.7 montre la précision de cette approximation pour un signal 8-PSK et deux systèmes MIMO, en fonction de la corrélation entre antennes ($\rho = 0, 0.4, 0.8$). Dans le

cas particulier où aucune corrélation n'est présente à l'émission ($\rho = 0$), la matrice de covariance est une matrice identité : $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}_{n_t}$, par suite le terme $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ vaut 1 quelque soit k. La probabilité d'erreur par bloc exact est calculé avec (3.36) et (3.38) tandis que l'approximation est obtenue avec (3.40) et (3.39). Pour les deux systèmes MIMO considérés l'approximation est quasiment confondue avec la valeur exacte pour toute la plage de SNR considéré.

Ce résultat appelle toutefois une remarque. Le calcul de PwEP est identique avec (3.38) et (3.39) dans notre cas. Cela est vrai car $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ est constant quelque soit k lorsque $n_t = 2$. Si le nombre d'antenne à l'émission est plus important cela ne sera plus vrai. Par conséquent $P_{sk}(E)$ n'est pas identique quelque soit k et cela a donc un impact direct sur la valeur de la probabilité d'erreur par bloc obtenu avec (3.39) qui peut être plus ou moins important selon les valeurs de $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ (voir annexe A.2).

Inversion du SEP et probabilité de coupure bloc. A partir de (3.40), on sort le SNR moyen en fonction de la probabilité d'erreur cible par sous-canaux et des paramètres du système :

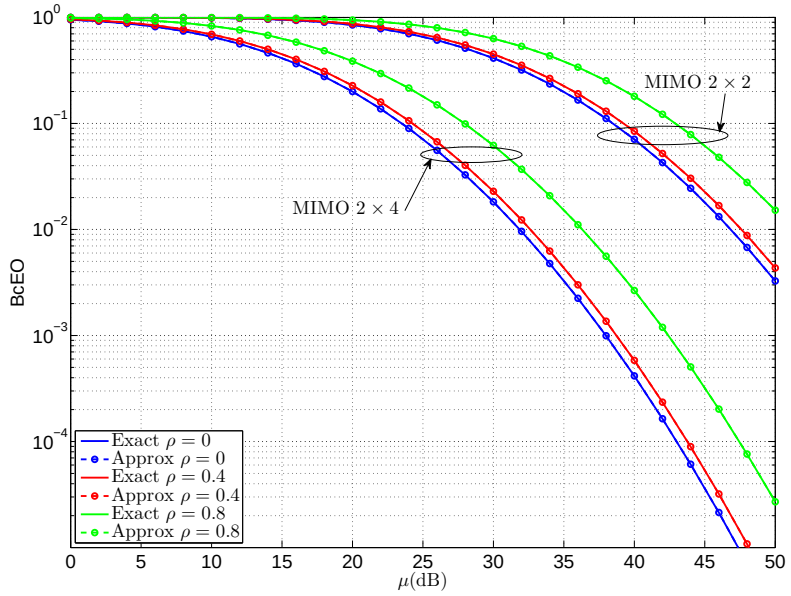
$$\overline{\gamma}_s(P_{sk}^*(E)) = c_0 \left(P_{sk}^*(E)^{-\frac{1}{q'}} \left(1 - c_1 P_{sk}^*(E)^{\frac{1}{q'}}\right)^{-\frac{1}{2q'}} - \left(k_{psk}^{mimo}\right)^{-\frac{1}{q'}} \right), \tag{3.42}$$

avec

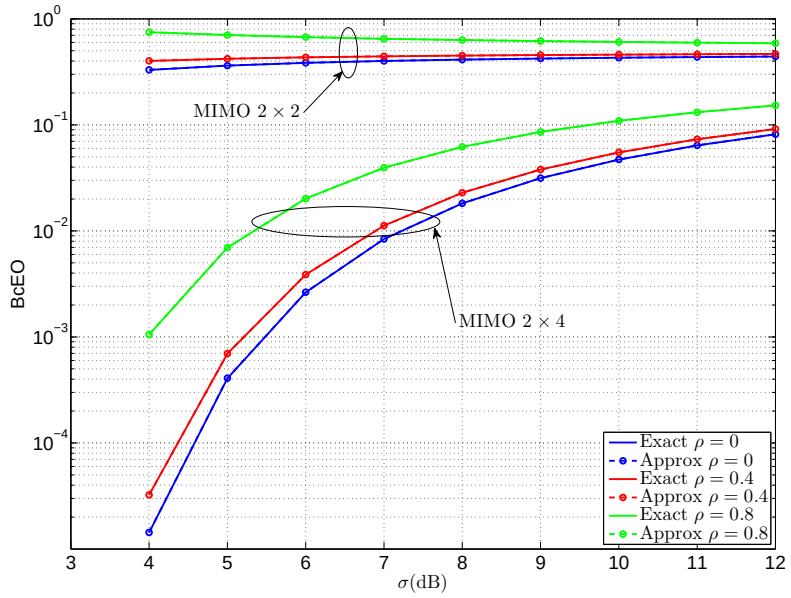
$$c_0 = \frac{\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk} \sqrt[q']{k_{psk}^{mimo}}}{g_{psk}}, \tag{3.43}$$

$$c_1 = \frac{\tilde{t}}{\sqrt[q']{k_{psk}^{mimo}}}. \tag{3.44}$$

On peut également évaluer le SNR moyen par symbole en fonction de la probabilité d'erreur bloc P^* avec (3.39), mais celui-ci sera une approximation moins bonne qu'avec la probabilité d'erreur par sous-canaux. Les courbes sur la figure 3.8 donnent la probabilité de coupure bloc (BcEO) obtenue avec (3.42) en présence de shadowing pour les deux tailles de systèmes évoquées plus haut et les trois valeurs du coefficient de corrélation ci-dessus ainsi que pour une probabilité d'erreur bloc cible de 10^{-2}. Les paramètres du shadowing sont ceux utilisés jusqu'à présent. Le BcEO estimé est parfaitement en accord avec la valeur obtenue à partir de l'expression exacte de la probabilité bloc. On constate que la probabilité de coupure est plus faible pour un système 2×4 que 2×2, puisque d'une diversité plus grande. De même, le BcEO augmente à mesure que la corrélation entre antennes augmente. La corrélation diminue le SNR disponible lors de la réception, diminuant du même coup la diversité. Notons que l'on observe à nouveau un comportement intéressant de la probabilité de coupure en fonction de σ pour un système 2×2 et un coefficient de corrélation de 0.8. Le SNR nécessaire pour atteindre la probabilité d'erreur cible étant supérieur à la moyenne du shadowing (30dB), un écart type élevé conduit à une meilleur probabilité de coupure que le contraire.



(a) BcEO $= f(\mu_{dB})$



(b) BcEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 3.8 – BcEO d'un signal 8−PSK pour deux systèmes MIMO (2×2 et 2×4) dans un canal de Rayleigh et en présence de shadowing, en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale.

3.3.3 Canal de Rayleigh et M-QAM

Forme exacte du SEP. L'expression du SNR sur le $k-$ième sous-canal ainsi que sa densité de probabilité reste inchangée. La probabilité d'erreur symbole sur le sous canal k d'un système MIMO à multiplexage spatial et à réception ZF pour un signal M-QAM est :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma_k g_{qam}}{\sin^2\theta}} p(\gamma_k)d\gamma_k d\theta - \frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma_k g_{qam}}{\sin^2\theta}} p(\gamma_k)d\gamma_k d\theta. \tag{3.45}$$

En effectuant le changement de variable $\gamma_k = \gamma\overline{\gamma}_{s,k}$ dans (3.45), le SEP sur le canal k s'exprime à l'aide de deux intégrales de la MGF d'une variable gamma de mêmes paramètres que précédemment :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{\overline{\gamma}_{s,k}g_{qam}}{\sin^2\theta}\right)^{-q'} d\theta - \frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\left(1+\frac{\overline{\gamma}_{s,k}g_{qam}}{\sin^2\theta}\right)^{-q'} d\theta. \tag{3.46}$$

Cette forme intégrale est exprimable à l'aide des fonctions hypergéométriques, et le SEP moyen par sous-canal d'un signal M-QAM pour un système MIMO à multiplexage spatial et à réception ZF est :

$$\begin{aligned} P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) &= 2gx_1^{q'}\frac{(2q')!}{(2^{q'}q'!)^2}{}_2F_1\left(q',\frac{1}{2};q'+1;x_1\right) \\ &\quad - \frac{2g^2}{\pi}\frac{x_2^{q'}}{2q'+1}F_1\left(1,q',1;q'+\frac{3}{2};y,z\right), \end{aligned} \tag{3.47}$$

avec $x_1 = 1/(1+g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})$, $x_2 = 1/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})$, $y = (1+g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})$ et $z = 1/2$.

Approximation du SEP. Cette forme est identique à celles rencontrées pour les modulations M-QAM en canal de Nakagami-m et donc les mêmes remarques s'appliquent ici pour l'approximation de la probabilité d'erreur. Le SEP (3.47) est approché par :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s \to \infty) \approx k_{qam}^{mimo}\frac{x_1^{q'}}{\sqrt{1-x_1\tilde{t}}}, \tag{3.48}$$

avec :

$$k_{qam}^{mimo} = \frac{2g(2q')!}{(2^{q'}q'!)^2} - \frac{2g^2}{2^{q'}\pi\,(2q'+1)}{}_2F_1\left(1,q'+1;q'+\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right). \tag{3.49}$$

La figure 3.9 illustre l'évolution du PwEP pour un signal 16$-$QAM et des systèmes à multiplexage spatial et pour les valeurs de la corrélation mentionnées plus haut. L'approximation est calculée avec (3.48) et (3.39), la valeur exacte avec (3.47) et (3.39). L'approximation donne encore d'excellents résultats pour les modulations QAM et les systèmes de taille 2×2 et 2×4.

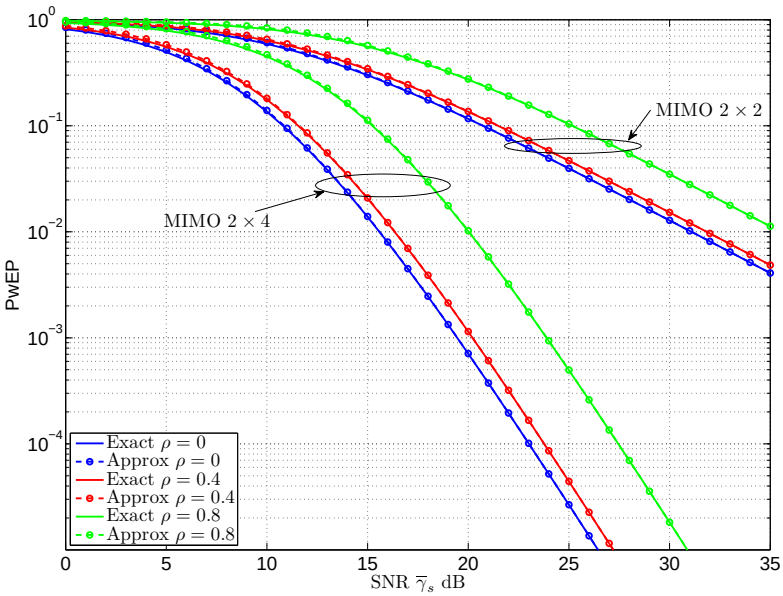


FIG. 3.9 – PwEP d'un signal 16−QAM de deux systèmes MIMO à multiplexage spatial 2×2 et 2×4 dans un canal de Rayleigh, pour différentes valeurs de la corrélation.

Inversion du SEP et approximation du BcEO. Le SNR moyen par symbole en fonction de la probabilité d'erreur cible sur chaque sous canaux k est déduite de l'expression ci-dessus :

$$\overline{\gamma}_s(P_{sk}^*(E)) = c_0 \left(P_{sk}^*(E)^{-\frac{1}{q'}} \left(1 - c_1 P_{sk}^*(E)^{\frac{1}{q'}}\right)^{-\frac{1}{2q'}} - \left(k_{qam}^{mimo}\right)^{-\frac{1}{q'}} \right), \tag{3.50}$$

avec

$$c_0 = \frac{\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk} \sqrt[q']{k_{qam}^{mimo}}}{g_{qam}}, \tag{3.51}$$

$$c_1 = \frac{\tilde{t}}{\sqrt[q']{k_{qam}^{mimo}}}. \tag{3.52}$$

Le SNR moyen en fonction de PwEP est déterminé avec (3.39). La prédiction du BcEO en présence de shadowing est conforme avec sa valeur exacte, comme l'atteste la figure 3.10. Ce résultat était prévisible au vu de la très bonne précision de l'approximation du SEP moyen. Le BcEO est évalué avec une probabilité d'erreur cible de 10^{-2} et les paramètres de shadowing sont ceux utilisés jusqu'ici.

3.3.4 Canal MIMO corrélé en émission et en réception

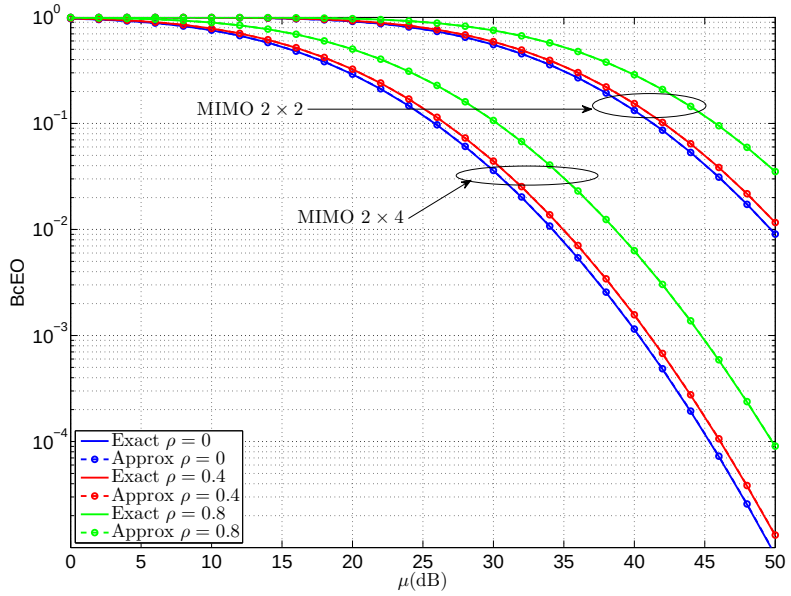
Le canal se modélise maintenant par : $\mathbf{H} = \mathbf{\Sigma}_{n_r}^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{\Sigma}_{n_t}^{1/2}$. $\mathbf{H}$ suit toujours une distribution gaussienne pour les matrices : $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathcal{CN}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{n_r} \otimes \mathbf{\Sigma}_{n_t}\right)$ [101]. La matrice $\mathbf{Z}$ définit ci-dessus, ne suit plus une loi de Wishart. Les matrices $\mathbf{\Sigma}_{n_r}$ et $\mathbf{\Sigma}_{n_t}$ étant hermitienne

définie-positive, Ratnarajah a montré un théorème très utile [102, 99] donnant la distribution de la forme quadratique $\mathbf{Z}$:

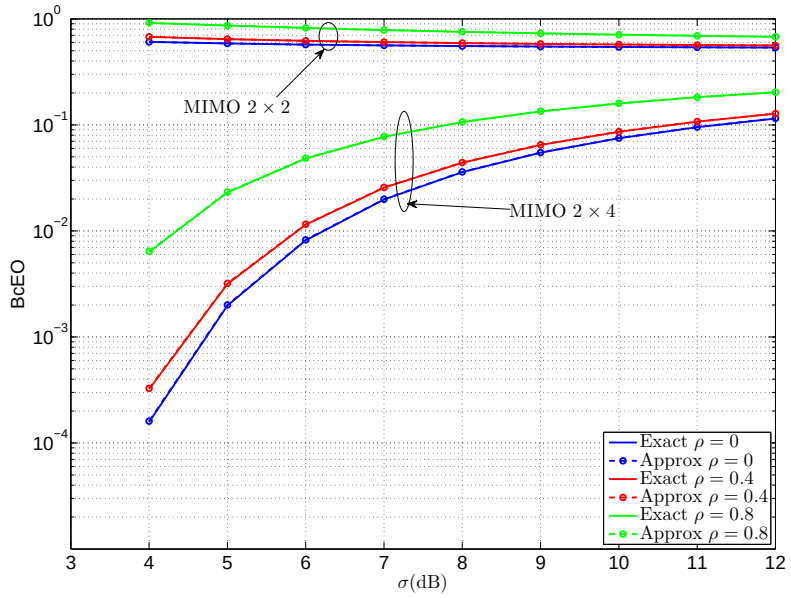
$$p_z(\mathbf{Z}) = \frac{(det(\mathbf{Z}))^{n_r - n_t}}{\mathcal{C}\Gamma_{n_t}(n_r)(det(\mathbf{\Sigma}_{n_r}))^{n_t}(det(\mathbf{\Sigma}_{n_t}))^{n_r}} {}_0F_0^{(n_t)}\left(\mathbf{\Sigma}_{n_r}^{-1}, -\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\mathbf{Z}\right), \tag{3.53}$$

avec la fonction hypergéométrique complexe à deux arguments matriciels ${}_0F_0^{(m)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Avec $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ et $n \geq m$. De plus $\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathcal{CQ}_{n_t n_r}(\mathbf{I}_{n_r}, \mathbf{\Sigma}_{n_r}, \mathbf{\Sigma}_{n_t})$ (cf Tableau 1 en [99]). Le premier argument dans la notation de la distribution vient de la définition plus générale donnée par Ratnarajah sur la distribution de la forme quadratique complexe $\mathbf{Z} = \mathbf{H}^H\mathbf{A}\mathbf{H}$ où $\mathbf{A}$ est une matrice hermitienne définie-positive. Dans ce cas, la matrice $\mathbf{A}$ remplace la matrice identité dans la notation de la distribution. Pour pouvoir exprimer la densité de probabilité du SNR γ_k comme l'a fait Gore *et al*, il faudrait pouvoir connaître la distribution de $\left[\mathbf{H}^H\mathbf{H}\right]_{kk}^{-1}$, ou du moins en trouver une approximation ce qui ne semble pas être le cas aujourd'hui.

Cependant une piste nous semble intéressante à creuser. En effet Wood et Butler, ont proposé des approximations de Laplace pour plusieurs fonctions hypergéométriques à deux arguments matriciels [103], y compris pour la fonction hypergéométrique présente ici. Malheureusement, la théorie développée par Wood et Butler est valable pour des arguments réels et il n'y a aucune évidence théorique, d'après les auteurs, que leur approximation fonctionne en remplaçant leurs variables réelles par des variables complexes. Il faudrait étendre leur approche aux arguments complexes.



(a) BcEO $= f(\mu_{dB})$



(b) BcEO $= f(\sigma_{dB})$

FIG. 3.10 – BcEO d'un signal 16−QAM pour deux systèmes MIMO (2×2 et 2×4) dans un canal de Rayleigh et en présence de shadowing, en fonction de la moyenne (a) et de l'écart type (b) de la loi log-normale.

3.3.5 Canal de Rice et M-PSK

Le canal MIMO Rice est modélisé par (3.19). La matrice $\mathbf{H}$ suit une loi gaussienne pour les matrices mais non centrée $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathcal{CN}(\mathbf{M}, \mathbf{I}_{n_r} \otimes \mathbf{\Sigma}_{n_t})$, avec $\mathbf{M} = \sqrt{K/(1+K)}\mathbf{H_1}$. La matrice $\mathbf{Z} = \mathbf{H}^H\mathbf{H}$ suit une loi de Wishart complexe non centrée à n_r degrés de liberté : $\mathbf{Z} \hookrightarrow W_{n_t}(n_r, \mathbf{M}, \mathbf{\Sigma}_{n_t})$. La distribution non centrée de Wishart peut être approchée par une distribution centrée [104] telle que $\hat{\mathbf{Z}} \hookrightarrow W_{n_t}\left(n_r, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}\right)$ où $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t} = \mathbf{\Sigma}_{n_t} + \frac{1}{n_r}\mathbf{M}^H\mathbf{M}$. La densité de probabilité de γ_k est toujours définie par (3.34), mais $\overline{\gamma}_{s,k} = \overline{\gamma}_s / \left[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$. Comme on approche la distribution de Wishart non centrée par une distribution centrée, les équations du SEP pour un système MIMO à multiplexage spatial en canal de Rice sont similaires aux équations (3.36) à (3.40). Par conséquent la probabilité d'erreur symbole relative au $k-$ième sous canal d'un signal M-PSK dans un canal de Rice est :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = x^{q'}\left\{\frac{(2q')!}{2\left(2^{q'}q'!\right)^2}{}_2F_1(q', \frac{1}{2}; q'+1; x) + \frac{\sqrt{z}}{\pi}F_1(\frac{1}{2}, q', \frac{1}{2}-q'; \frac{3}{2}; y, z)\right\}, \quad (3.54)$$

où $x = 1/(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_s / \left[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}^{-1}\right]_{kk})$, $y = (1 - g_{psk})/(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_s / \left[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}^{-1}\right]_{kk})$ et $z = 1 - g_{psk}$. L'approximation que l'on obtiendra sera identique à celle obtenue en canal de Rayleigh en (3.40). La seule différence réside dans la forme du coefficient de corrélation $\left[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ qui peut être très compliqué à obtenir. Si l'on considère que la composante diffuse du canal de Rayleigh est sans corrélation, alors le terme $\mathbf{\Sigma}_{n_t}$ est une matrice identité. Dans ce cas, il est relativement simple d'obtenir une expression analytique de $\left[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ [96], en utilisant des opérations linéaires pour calculer les déterminants comme en annexe A.2. Par conséquent la précision de l'approximation du SEP moyen ainsi que du BcEO sera aussi bonne que précédemment. La question est de savoir quelle est la validité de l'approximation de la distribution de Wishart non centrée par une distribution centrée ? Les auteurs en [96] compare le calcul du SEP moyen obtenu avec l'approximation de la distribution non centrée de Wishart par la distribution centrée, avec le SEP moyen en simulation. Bien que les courbes théoriques ne collent pas exactement avec la simulation, elles en sont relativement proches ce qui semble valider l'approximation.

3.3.6 Canal de Rice et M-QAM

Le modèle de canal ne change pas par rapport au cas précédent, autrement dit le SNR après décodage sur le sous canal k est donnée en (3.31). La probabilité d'erreur symbole relative au $k-$ième sous canal d'un signal modulé en QAM s'écrit :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma_k g_{qam}}{\sin^2\theta}} p(\gamma_k)d\gamma_k d\theta - \frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma_k g_{qam}}{\sin^2\theta}} p(\gamma_k)d\gamma_k d\theta. \tag{3.55}$$

En effectuant le changement de variable $\gamma_k = \gamma\overline{\gamma}_{s,k}$ dans (3.55) on obtient le SEP d'une modulation M-QAM en canal de Rice d'un système MIMO à multiplexage spatial à récepteur ZF :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = \frac{4g}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{\overline{\gamma}_{s,k}g_{qam}}{\sin^2\theta}\right)^{-q'} d\theta - \frac{4g^2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\left(1+\frac{\overline{\gamma}_{s,k}g_{qam}}{\sin^2\theta}\right)^{-q'} d\theta, \tag{3.56}$$

qui s'écrit de manière équivalente :

$$P_{sk}(E|\overline{\gamma}_s) = 2gx_1^{q'}\frac{(2q')!}{(2^{q'}q'!)^2}{}_2F_1\left(q',\frac{1}{2};q'+1;x_1\right) - \frac{2g^2}{\pi}\frac{x_2^{q'}}{2q'+1}F_1\left(1,q',1;q'+\frac{3}{2};y,z\right), \tag{3.57}$$

avec $x_1 = 1/(1+g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})$, $x_2 = 1/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})$, $y = (1+g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})/(1+2g_{qam}\overline{\gamma}_{s,k})$ et $z = 1/2$. L'expression ci-dessus est similaire en tout point à celle obtenue pour le canal de Rayleigh M-QAM en (3.47), ce qui était attendu puisque nous avons approché la distribution non-centrée de Wishart par une distribution centrée. Par conséquent, le SEP moyen pour le sous-canal k s'approche de la même manière qu'en (3.48) et l'inversion de la probabilité d'erreur est identique à (3.50) mais avec $\left[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ en lieu et place de $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité de l'analyse de performance des systèmes MIMO STBC et à multiplexage spatial soumis à des évanouissements et du shadowing. Nos contributions dans ce chapitre sont résumées ci-dessous :

1. Pour les systèmes MIMO STBC, nous fournissons de nouvelles approximations de la probabilité d'erreur moyenne dans des canaux à évanouissements rapides de Nakagami-m et Rice sans corrélation, pour les modulations M-PSK et M-QAM. Ces approximations sont précises quelque soit la plage de SNR considéré. L'utilisation d'un récepteur ZF pour les systèmes à multiplexage spatial, permet d'approcher le SEP en présence de corrélation à l'émission pour des canaux de Rayleigh et Rice.
2. Comme pour le cas SISO, ces approximations sont inversibles par rapport au SNR. Dans les cas traités dans ce chapitre (STBC sans corrélation et multiplexage spatial en présence de corrélation à l'émission), le SNR moyen s'exprime de façon générale par :

$$\overline{\gamma}_s(P_s^*) = c_0 \left(P_s^{*-\frac{1}{\eta}} \left(1 - c_1 P_s^{*\frac{1}{\eta}}\right)^{-\frac{1}{2\eta}} - c_2^{-\frac{1}{\eta}} \right),$$

   où c_0, c_1, c_2 et η sont des constantes dépendants de la modulations, de la valeur de l'évanouissement du canal ainsi que du système de communication considéré (STBC ou à multiplexage spatial).
3. Les approximations et les inversions de la probabilité d'erreurs réalisées, permettent d'estimer la probabilité de coupure symbole de manière très précise et ce pour de larges variations des paramètres de la loi log-normale.

Il est bien évident que tout n'a pas été étudié dans ce chapitre. Notamment notre modèle de canal MIMO ne prend pas en compte la corrélation pour les systèmes STBC. La probabilité d'erreur faisant intervenir l'intégrale d'un déterminant, il n'est pas aisé d'approcher cette expression et d'en trouver des formes inversibles. Il serait, je pense, très intéressant de se pencher sur cette étude, afin d'englober des modèles de systèmes de plus en plus réalistes. De même que pour les systèmes à multiplexage spatial, nous prenons en compte une corrélation seulement sur l'une des deux extrémités du canal MIMO. Le cas où la matrice du canal présente des corrélations à l'émission et à la réception reste encore à étudier. Toujours sur les systèmes à multiplexage spatial avec un traitement ZF à la réception, le cas où le canal est Nakagami-m, il n'est pas évident de déterminer la distribution de la matrice $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ intervenant dans l'analyse des performances, et il reste encore des études à mener pour proposer des distributions intéressantes.

Enfin, nous nous sommes penchés sur le cas d'un récepteur MIMO ZF, car il permet d'analyser le lien radio dans un cas simple. Dans la pratique ce récepteur affiche d'assez mauvaises performances à cause de sa tendance à amplifier le bruit à faible SNR. Les récepteurs à erreur quadratique moyenne minimale (MMSE) sont quant à eux, utilisés. Dans de prochains travaux, il serait intéressant d'étudier le lien radio avec ce type de récepteur voire d'autres encore plus performants comme les décodeurs à sphères.

CHAPITRE

4 Performance en présence d'interférence

4.1 Introduction

Jusqu'à présent nous avons considéré que la communication entre un mobile et une station de base (ou l'inverse), était seulement limité par le bruit blanc gaussien du récepteur (outre les effets du canal). Dans un système cellulaire, la présence de plusieurs utilisateurs dans une cellule (ainsi que les autres cellules) implique qu'un lien radio particulier va subir des interférences dues aux autres utilisateurs, bien que tout soit fait pour les éviter. Selon le système considéré (UMTS, GSM, WLAN etc) les interférences peuvent être très différentes et leur impact sur les performances du lien radio plus ou moins délicat à analyser formellement.

Nous commençons par un état de l'art sélectionné sur l'analyse de performance des systèmes radios en présence d'interférence, domaine où la communauté scientifique fut (est encore !) très prolixe. Nous cherchons à approcher et à inverser la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK et M-QAM en présence d'un ou plusieurs interférents co-canal. Nous gardons l'approche originale développée jusqu'ici, et qui s'est révélée très efficace. En effet, à partir de la probabilité d'erreur conditionnelle du signal (conditionnelle par rapport à l'interférent), qui s'exprime à l'aide de fonctions hypergéométriques, nous appliquons les approximations développées dans le chapitre précédant. Une fois la probabilité d'erreur conditionnelle approchée de façon précise, nous pouvons intégrer sur la statistique de variation de l'amplitude du signal interférent et du bruit. Nous considérons d'abord un système mono-antenne et un seul interférent. Lorsque les deux signaux subissent un canal de Rayleigh, nous proposons une inversion simple et originale de la probabilité d'erreur moyenne (M-PSK et M-QAM) en fonction du SEP moyen et de la puissance de l'interférent. Cela permet de remonter à la probabilité de coupure symbole, lorsque un phénomène de shadowing est présent pour le signal d'intérêt et interférent. Lorsque les deux signaux subissent un canal de Nakagami-m, nous donnons de nouvelles approximations asymptotiques de la probabilité d'erreurs pour des signaux M-PSK et M-QAM. Nous considérons ensuite, la présence d'antennes multiples à la réception et un traitement de type "optimum combining" (OC) permettant de rejeter des signaux interférents co-canal. Nous proposons de nouvelles approximations précises de la probabilité d'erreur grâce à l'approximation de Laplace, permettant de calculer rapidement les performances d'un tel système en condition interférente. Le cas général où l'on a des interférents multiples est également abordé ainsi que le cas MIMO.

4.2 Etat de l'art

Les performances des communications numériques limitées par des communications interférentes ont été très étudiées dans la littérature. Les rappeler toutes ici serait impossible, et nous nous limitons à celles qui nous semblent les plus pertinentes pour notre travail.

N. Beaulieu *et al.* ont largement contribué à l'analyse de la probabilité d'erreur binaire ou symbole d'une communication numérique en présence d'interférence. En [105], les auteurs analysent les performances en terme de taux d'erreur binaire d'un signal à bande

limité QPSK en présence d'un interférent co-canal. L'environnement de propagation considéré est un canal de Rayleigh. Les auteurs en [106] étudient le BER d'un signal M-PSK pour des systèmes à diversité, en présence d'interférence co-canal multiple subissant des évanouissements de Rice. De plus les auteurs supposent que les interférents sont synchronisés, ce que remettent en cause Beaulieu *et al.* dans [107]. Dans cette dernière référence, les auteurs étudient le BER d'un signal BPSK en présence de plusieurs interférents co-canal dans un environnement de Nakagami. Le signal d'intérêt et les interférents ne subissent pas le même évanouissement ; le signal utile est caractérisé par un paramètre d'évanouissement de Nakagami différent de celui affectant les signaux d'interférence. De plus, les auteurs considèrent que le signal d'intérêt et les interférences ne sont pas synchronisés ce qui correspond à un cas réaliste. Cela a pour effet d'introduire de l'interférence entre symbole modélisée par un facteur aléatoire qui complique sérieusement l'étude de la probabilité d'erreur et l'extension aux modulations d'ordre supérieur n'est pas trivial, selon les auteurs. En [108], Z. Du *et al.* proposent une étude du BEP d'un signal BPSK en présence d'un interférent co-canal asynchrone dans un environnement de Rice et analysent l'influence du paramètre K de l'interférent sur le BEP. L'expression de la probabilité d'erreur n'étant pas très simple, les auteurs étudient le BEP au moyen de l'approximation "en point de selle".

L'étude des systèmes multi-antennes en présence d'interférence a suscité beaucoup d'attention du monde académique (et industriel), principalement à cause de leur prodigieuse capacité à lutter contre les interférences. Depuis les travaux de Brennan [109] mettant en avant la capacité d'un système multi-antennes à rejeter les interférences co-canal, les travaux n'ont cessé de se multiplier. J. Winters fut le premier a étudier de façon détaillée les performances d'un récepteur OC, et analyser sa capacité à lutter contre les évanouissements du canal et les interférences co-canal [110]. Le récepteur OC maximise le SINR en sortie de traitement, et est donc plus performant qu'un simple récepteur MRC en présence d'interférence. La probabilité d'erreur bit moyenne exacte, pour un signal BPSK et un récepteur OC fut très étudiée, notamment en [111] et [112]. L'extension aux modulations d'ordre supérieure (M-PSK) est donnée sous forme d'intégrales multiples en [113] et une borne supérieure simple est donnée en [114].

Devant la complexité des formes exactes obtenues plusieurs travaux se sont attachés à trouver des techniques d'approximations pour évaluer les performances d'un système OC. En [115], l'auteur propose de considérer que les signaux interférents sont orthogonaux entre eux. Cette approximation n'est valide que lorsque le nombre d'antennes est supérieure au nombre d'interférent et l'approximation est d'autant plus précise que la différence entre le nombre d'antenne et le nombre d'interférent est élevée. On peut également citer les contributions de Annamalai *et al.* dans [116] et Kwak *et al.* dans [117]. La première propose une approximation de la probabilité d'erreur moyenne M-PSK en utilisant un traitement OC, par une somme de probabilité d'erreur moyenne d'un traitement MRC. Le papier de Kwak *et al.* donne une forme approchée de la probabilité d'erreur M-PSK, sans intégrale, pour un traitement OC en présence d'interférents multiples et dans un environnement de Rayleigh. Les auteurs obtiennent une approximation au premier ordre des valeurs propres ordonnées de la matrice de covariance du bruit et des interférences, facilitant l'obtention de la probabilité d'erreur.

4.3 Performance d'un système SISO en présence d'un interférent

Modélisation du système. Dans cette section on considère un signal bande étroite et un interférent de même nature localisé sur la même bande. On se place dans le cas général où le signal d'intérêt et le signal interférent ne sont pas synchronisés, ce qui est le cas dans la pratique. Nous supposons que les évanouissements sont suffisamment lents pour permettre une démodulation cohérente. Le signal reçu bande de base sur le récepteur d'intérêt est modélisé comme suit :

$$y(t) = \sqrt{P_d} h_d s_d(t) + \sqrt{P_i} h_i s_i(t-\tau) + w(t), \tag{4.1}$$

où $s_d(t)$ et $s_i(t)$ sont respectivement les signaux d'intérêt et interférent normalisés, de telle sorte que P_d et P_i représentent leur puissance d'émission. La variable τ représente le retard (ou l'avance) du signal interférent sur le signal d'intérêt. Ce retard est une fraction du temps symbole dont on suppose la connaissance. Il appartient à l'interval $[0, T)$, avec T la durée symbole. On a donc $\tau = \xi T$ avec $0 \leq \xi \leq 1$. Les termes h_d et h_i sont les coefficients du canal pour le signal d'intérêt et interférent respectivement. Ils ne dépendent pas du temps sur la durée de traitement considérée (temps symbole, paquet etc), mais ce sont des variables aléatoires complexes dont l'amplitude α suit une des lois introduites au chapitre 1. Enfin $w(t)$ est un bruit blanc gaussien additif de moyenne nulle et de variance σ^2. Les signaux bande de bases $s_d(t)$ et $s_i(t)$ correspondent à la mise en forme d'une modulation linéaire de type M-PSK ou M-QAM et s'écrivent :

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_d(k)\, h_f(t-kT), \tag{4.2}$$

$$s_i(t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_i(k)\, h_f(t-\tau-kT), \tag{4.3}$$

avec d_d et d_i les symboles complexes portant l'information du signal d'intérêt et interférent respectivement. La fonction $h_f(t)$ représente le filtre de mise en forme, supposée identique pour les deux signaux.

Le récepteur ne s'intéresse qu'à son propre signal, $s_d(t)$, et effectue un filtrage adapté à l'impulsion de mise en forme suivit d'un échantillonnage au temps symbole. Le signal discret en sortie du filtre adapté s'exprime :

$$\psi(n) = y(t) \odot h_f^*(-t)\,|_{t=nT}, \tag{4.4}$$

$$= \sqrt{P_d} h_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_d(k) s_{ff}(n-k) + \sqrt{P_i} h_i \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_i(k) s_{ff}(n-k-\xi) + v(n) \tag{4.5}$$

avec $\odot$ l'opérateur de convolution et s_{ff} la fonction d'autocorrélation de l'impulsion de mise en forme :

$$s_{ff}(n-k) = \int_{-\infty}^{\infty} h_f\left(t-kT\right) h_f^*\left(t-nT\right) dt, \tag{4.6}$$

$$s_{ff}(n-k-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h_f\left(t-\xi T-kT\right) h_f^*\left(t-nT\right) dt, \tag{4.7}$$

$$v(n) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) h_f^*\left(t-nT\right) dt. \tag{4.8}$$

En générale le filtre h_f est conçu pour que son autocorrélation satisfasse le critère de Nyquist c'est-à-dire pour que s_{ff} s'annule aux retards non nuls correspondant aux multiples du temps symbole (condition d'absence d'IES). De plus si h_f est normalisée alors $s_{ff}(0) = 1$. Par contre le deuxième terme de (4.5) correspond à de l'interférence entre symboles introduite par le signal interférent non synchronisé. Le signal discret $v(n)$ est la réponse échantillonnée de l'excitation du filtre $h_f^*(-t)$ par un bruit blanc gaussien complexe centré et de variance σ^2. Du moment que s_{ff} satisfait le critère de Nyquist, on vérifie facilement que la séquence $\{v(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est à moyenne nulle et de variance σ^2. Sous ces conditions, le signal en sortie du filtrage adapté à la forme d'onde devient :

$$\psi(n) = \sqrt{P_d} h_d d_d(n) + \sqrt{P_i} h_i \sum_{k=-P}^{P} d_i(k) s_{ff}(n-k-\xi) + v(n), \tag{4.9}$$

où l'on considère que l'IES introduite par l'interférence s'étale sur $2P+1$ symboles. Dans ce modèle on considère donc implicitement le cas où le canal est stable pendant au moins $2P+1$ symboles. Dans le cas contraire, il faudrait introduire le coefficient complexe du canal h_i à l'intérieure de la somme dans le deuxième terme de (4.9). En supposant que le récepteur connaisse son canal parfaitement ($\hat{h}_d = h_d$), il effectue un filtrage adapté lui permettant de maximiser le SNR (et dans le cas mono-antenne le SINR [6]). Le signal après filtrage adapté au canal s'écrit :

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{h_d^*}{|h_d|^2}\psi(n), \\ &= \sqrt{P_d} d_d(n) + \sqrt{P_i}\frac{h_d^*}{|h_d|^2} h_i \sum_{k=-P}^{P} d_i(k) s_{ff}(n-k-\xi) + \frac{h_d^*}{|h_d|^2} v(n). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans ce cas, on peut montrer que le SINR vaut :

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \frac{\left|\sqrt{P_d} d_d\left(n\right)\right|^2}{E\left(\left|\frac{h_d^*}{|h_d|^2}\left(\sqrt{P_i} h_i \sum_{k=-P}^{P} d_i\left(k\right) s_{ff}(n-k-\xi) + v(n)\right)\right|^2\right)}, \\ &= \frac{P_d\left|h_d\right|^2}{P_i\left|h_i\right|^2 \sum_{k=-P}^{P}\left|s_{ff}(n-k-\xi)\right|^2 + \sigma^2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

On pose dans cette expression $\lambda_1 = P_i|h_i|^2 \sum_{k=-P}^{P} |s_{ff}(n-k-\xi)|^2 + \sigma^2$. Le SINR total peut s'écrire [1] :

$$\gamma_t = \frac{\sigma^2}{\lambda_1}\gamma_d, \tag{4.12}$$

[1] Lorsque les deux signaux sont synchronisés $\xi = 0$ et $\lambda_1 = P_i|h_i|^2 + \sigma^2$, on retombe alors sur le modèle d'Alouini et Simon dans [6].

avec $\gamma_d = P_d|h_d|^2/\sigma^2$, le SNR instantané de l'utilisateur d'intérêt. La fonction génératrice des moments conditionnée sur la variable aléatoire λ_1 est :

$$M_{\gamma_t|\lambda_1}(s) = M_{\gamma_d}\left(\frac{\sigma^2}{\lambda_1}s\right), \tag{4.13}$$

où $M_{\gamma_d}(s)$ est la MGF du SNR d'intérêt dont la valeur moyenne est $\overline{\gamma}_d = P_d/\sigma^2$. La probabilité d'erreur en présence d'interférence s'obtient en moyennant la probabilité d'erreur conditionnée sur la variable aléatoire λ_1 par la densité de probabilité de celle-ci. Cette variable aléatoire appartient à l'interval $[\sigma^2, \infty)$. La probabilité d'erreur a la forme générale :

$$P_s(E) = \int_{\sigma^2}^{\infty} P_s(E|\lambda_1)\, p_{\lambda_1}(\lambda_1)\, d\lambda_1, \tag{4.14}$$

avec $p_{\lambda_1}(\lambda_1)$ la densité de probabilité de la variable λ_1. Son expression dépend de la statistique d'évanouissement considérée pour le signal interférent.

4.3.1 Rayleigh/Rayleigh

On étudie les performances d'un système bande étroite soumis à des évanouissements de type Rayleigh et en présence d'un interférent subissant le même type d'évanouissement. Comme nous l'avons fait pour l'étude de performance sans interférences, nous adopterons l'approche de la MGF autant que possible. Avec (4.13), la MGF conditionnée sur λ_1 a la forme suivante :

$$M_{\gamma_t|\lambda_1}(s) = \frac{1}{1 - s\frac{P_d}{\lambda_1}}. \tag{4.15}$$

Le carré de l'amplitude d'évanouissement $|h_i|^2$ suit une loi du χ^2, par conséquent λ_1 a la densité de probabilité suivante :

$$p_{\lambda_1}(\lambda_1) = \frac{1}{P_i \sum_{k=-P}^{P} |s_{ff}(n-k-\xi)|^2} e^{-\frac{\lambda_1 - \sigma^2}{P_i \sum_{k=-P}^{P} |s_{ff}(n-k-\xi)|^2}}. \tag{4.16}$$

Analyse du SEP pour une M-PSK. La probabilité d'erreur conditionnelle dans (4.14) a la même forme que celle de la probabilité d'erreur dans un canal à évanouissement sans interférence, et s'exprime à l'aide de la fonction génératrice des moments :

$$P_s(E|\lambda_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_t|\lambda_1}\left(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right) d\theta. \tag{4.17}$$

La probabilité d'erreur en tenant compte de l'interférence est donc :

$$P_s(E) = \frac{1}{\pi}\int_{\sigma^2}^{\infty}\int_0^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_t|\lambda_1}\left(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right) p_{\lambda_1}(\lambda_1)\, d\theta d\lambda_1. \tag{4.18}$$

Avec (4.15) la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK en canal de Rayleigh et en présence d'un interférent co-canal soumis aux mêmes évanouissements est :

$$P_s(E) = \int_{\sigma^2}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M}\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{\sigma^2}{\lambda_1}g_{psk}\overline{\gamma}_d}\right) d\theta p_{\lambda_1}(\lambda_1)\, d\lambda_1. \tag{4.19}$$

L'intégrale sur θ s'évalue de la même manière que celle présentée en [74]. En utilisant la relation de Chasles, cette intégrale est la somme de deux autres, l'une de 0 à $\pi/2$ et la

deuxième de $\pi/2$ à $(M-1)\pi/M$. En effectuant plusieurs changements de variable, l'intégrale sur θ finie par s'exprimer comme la somme de deux fonctions hypergéométriques :

$$P_s(E) = \int_{\sigma^2}^{\infty} x \left[\frac{1}{4} {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; 2; x\right) + \frac{\sqrt{z}}{\pi} F_1\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; y, z\right) \right] p_{\lambda_1}(\lambda_1)\, d\lambda_1, \tag{4.20}$$

avec $x = 1/\left(1 + \sigma^2 g_{psk}\overline{\gamma}_d/\lambda_1\right)$, $y = (1 - g_{psk})/\left(1 + g_{psk}\sigma^2\overline{\gamma}_d/\lambda_1\right)$ et $z = 1 - g_{psk}$. Ces variables sont similaires à celles introduites pour l'étude des performances sans interférence. D'ailleurs, l'expression obtenue pour la probabilité d'erreur est en fait celle obtenue dans le cas sans interférence (en ne considérant que les effets du canal) moyennée sur les réalisations possibles de l'interférence. L'expression en (4.20) est exacte et décrit l'évolution de la probabilité d'erreur d'une M-PSK dans un canal de Rayleigh en présence d'un interférent subissant un canal similaire. Bien que les expressions obtenues dans [6] soient différentes ; elles n'en sont pas moins équivalentes, les auteurs ayant intégré par rapport à la variable λ_1. Nous avons choisi d'inverser l'ordre d'intégration afin de d'obtenir une forme avec les fonctions hypergéométriques, que nous savons bien approcher maintenant grâce à l'étude menée dans les chapitres 2 et 3.

Approximation du SEP pour un signal M-PSK. Avec la méthode de Laplace et lorsque le SNR moyen $\overline{\gamma}_d$ tend vers l'infini, la fonction hypergéométrique de Gauss est bien approchée par $1/\sqrt{1 - x\tilde{t}}$, où $\tilde{t} = 1/2$. Pour la fonction hypergéométrique d'Appell, on utilise la relation fonctionnelle (1.31) :

$$F_1\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; y, z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y}} F_1\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; y', z'\right), \tag{4.21}$$

avec $y' = y/(y-1)$, et $z' = (z-y)/(1-y)$. De plus, lorsque $\overline{\gamma}_d \to \infty$ alors $y' \to 0$ et $z' \to z$. En considérant les grandes valeurs du SNR et en utilisant les relations (1.31) et (1.32), la fonction F_1 devient :

$$\lim_{\overline{\gamma}_d \to \infty} F_1\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; y, z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right). \tag{4.22}$$

Or $y = z \cdot x$, lorsque le SNR tend vers l'infini la probabilité d'erreur tend vers :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_d \to \infty) = \int_{\sigma^2}^{\infty} \left[\frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{1 - x\hat{t}}} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) x}{\sqrt{1 - xz}} \right] p_{\lambda_1}(\lambda_1)\, d\lambda_1, \tag{4.23}$$

Les deux fractions en x n'ont pas le même dénominateur. La constante z s'approche de 1 lorsque l'ordre de la modulation augmente et $z < 1$. De même $\tilde{t} < 1$. La probabilité d'erreur se majore donc par :

$$P_s(E) \leq k_{psk} \int_{\sigma^2}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{1-x}} p_{\lambda_1}(\lambda_1)\, d\lambda_1, \tag{4.24}$$

avec :

$$k_{psk} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{z}}{\pi} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right). \tag{4.25}$$

En remplaçant la densité de probabilité de λ_1 par son expression en (4.16), et x par sa valeur en fonction de λ_1, on obtient :

$$P_s(E) \leq k_{psk} \frac{e^{\frac{\sigma^2}{P_i \Psi}}}{P_i \Psi} \int_{\sigma^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\lambda_1} g_{psk} \overline{\gamma}_d} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\lambda_1} g_{psk} \overline{\gamma}_d}} e^{-\frac{\lambda_1}{P_i \Psi}} d\lambda_1, \tag{4.26}$$

avec $\Psi = \sum_{k=-P}^{P} |s_{ff}(n-k-\xi)|^2$. L'intégrale à évaluer dans l'équation (4.26) est du type $\int 1/\left(\sqrt{(1+a/x)a/x}\right) \exp(-cx)\, dx$ avec $x = \lambda_1$, $a = \sigma^2 g_{psk} \overline{\gamma}_d$ et $c = 1/(P_i \Psi)$. L'intégrande possède une primitive exprimable sous forme exacte [31] :

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{x}} \sqrt{\frac{a}{x}}} e^{-cx} dx = -\frac{e^{-cx}}{c^{3/2}\sqrt{a}} \left(e^{c(a+x)} \sqrt{\pi} (1-2ac)\, Q\left(\sqrt{2c(a+x)}\right) + \sqrt{c(a+x)} \right). \tag{4.27}$$

Donc la probabilité d'erreur en présence d'un interférent est majorée par :

$$\begin{aligned} P_s(E) \quad \leq \quad & k_{psk} \sqrt{\frac{\Psi P_i}{\sigma^2 g_{psk} \overline{\gamma}_d}} \left(\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2\sigma^2 g_{psk} \overline{\gamma}_d}{\Psi P_i} \right) e^{\frac{\sigma^2}{\Psi P_i}(1+g_{psk}\overline{\gamma}_d)} \times \right. \\ & \left. Q\left(\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\Psi P_i}(1+g_{psk}\overline{\gamma}_d)} \right) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Psi P_i}(1+g_{psk}\overline{\gamma}_d)} \right). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Si l'on souhaite inverser la probabilité d'erreur par rapport au SNR moyen $\overline{\gamma}_d$, cette expression n'est pas encore très appropriée pour y parvenir. Cependant la fonction gaussienne $Q(x)$ peut se majorer ou se minorer. En effet, on peut montrer que la fonction gaussienne Q est encadrée par :

$$\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} < Q(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \geq 0. \tag{4.29}$$

Le terme en facteur de la fonction gaussienne dans (4.28) est négatif pour $\overline{\gamma}_d \geq \Psi P_i / \left(2\sigma^2 g_{psk}\right)$, ce qui est le cas lorsque le SNR devient grand comparé à la puissance de l'interférence. Pour garder une borne supérieure de la probabilité d'erreur, il convient donc de choisir un minorant de la fonction gaussienne. Une borne supérieure simple de la probabilité d'erreur en présence d'un interférent co-canal dans un environnement de propagation de type Rayleigh est :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_d, \overline{\gamma}_i) \leq 2k_{psk} \sqrt{\frac{1+g_{psk}\overline{\gamma}_d}{g_{psk}\overline{\gamma}_d}} \frac{1+\overline{\gamma}_i}{\overline{\gamma}_i + 2(1+g_{psk}\overline{\gamma}_d)}, \tag{4.30}$$

avec $\overline{\gamma}_i = \Psi P_i / \sigma^2$, le rapport entre la puissance de l'interférence et le bruit au récepteur (INR, pour "Interference to Noise Ratio"). Sur la figure 4.1 nous pouvons vérifier la précision de la borne supérieure proposée en (4.30), pour une modulation QPSK. La valeur exacte de la probabilité d'erreur est calculée avec (4.19). On peut remarquer que l'approximation proposée est assez fine, puisqu'elle ne dépasse jamais 1.1dB de SNR pour une probabilité d'erreur comprise entre 10^{-1} et 10^{-4} et ce pour un INR allant de 0 à 30dB. On remarque que plus le SNR est grand comparé au INR (autrement dit plus le SIR "signal to interference ratio" est grand), meilleure est l'approximation. Cela était prévisible, étant donné que les approximations qui ont été faites pour obtenir cette forme sont valables

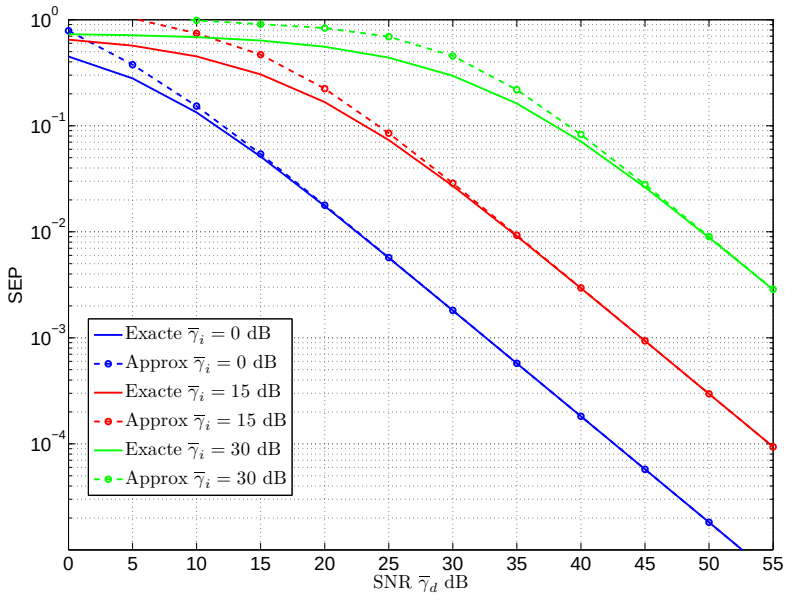


FIG. 4.1 – Approximation de la probabilité d'erreur d'un signal QPSK avec un interférent co-canal en environnement de Rayleigh.

lorsque le SNR tend vers l'infini. Si l'interférence est plus forte ou égale au signal d'intérêt, notre approximation ne se révèle pas très fiable. Par exemple, le SEP est légèrement surestimé lorsque le SIR est de 0dB d'un facteur compris entre 1.5 et 1.8 par rapport à la valeur exacte. Le plus gros écart étant observé pour un SNR de 0dB et un INR de 0dB. Cependant, rappelons que nous cherchons à remonter au SNR pour atteindre un certain taux d'erreur cible qui est compris entre 10^{-1} et 10^{-4} sans codage. Dans un environnement de Rayleigh, si la puissance de l'interférence est égale à la puissance du signal, le SEP est de toute façon supérieur à 10^{-1}, ce qui ne nous intéresse pas. Donc finalement, l'approximation que nous obtenons en (4.30) sera exploitable en pratique.

Inversion du SEP. L'approximation obtenue ci-dessus est inversible analytiquement. En effet, l'élévation au carré de (4.30) conduit à une équation du troisième degré en $\overline{\gamma}_d$, qui est résoluble à l'aide de radicaux. La résolution de cette équation conduit à trois solutions mais une seule est acceptable physiquement car elle correspond à l'unique solution réelle et positive. Sans en détailler toutes les étapes donnons néanmoins le fil conducteur permettant de remonter au SNR moyen.

Pour simplifier les calculs on pose $x = g_{psk}\overline{\gamma}_d$ et $p = P_s(E)/(2k_{psk})$. En élevant au carré (4.30) l'inversion en $\overline{\gamma}_d$ revient à résoudre en x l'équation de degré 3 suivante :

$$4p^2x^3 + 4p^2(2+\overline{\gamma}_i)x^2 + \left(p^2(2+\overline{\gamma}_i)^2 - (1+\overline{\gamma}_i)^2\right)x - (1+\overline{\gamma}_i)^2 = 0. \tag{4.31}$$

On pose dans cette équation $\alpha = 4p^2$, $\beta = 4p^2(2+\overline{\gamma}_i)$, $\gamma = p^2(2+\overline{\gamma}_i)^2 - (1+\overline{\gamma}_i)^2$ et $\delta = -(1+\overline{\gamma}_i)^2$. En divisant l'équation obtenue par $\alpha \neq 0$ et en effectuant le changement de variable $x = X - \beta/(3\alpha)$ on tombe sur l'équation de degré 3 originelle résolue par

Cardan vers 1545 [2] :

$$X^3 + PX + Q = 0, \tag{4.32}$$

avec :

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{3\alpha^2}, \tag{4.33}$$

$$Q = \frac{2\beta^3}{27\alpha^3} + \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta\gamma}{3\alpha^2}. \tag{4.34}$$

Selon le signe de $\Delta = Q^2 + 4P^3/27$, l'équation (4.31) admettra trois solutions réelles si $\Delta < 0$, une solution réelle et deux complexes conjuguées si $\Delta > 0$ ou deux solutions réelles (une simple et une double) si $\Delta = 0$. Avec les paramètres de notre système, c'est-à-dire pour des modulations BPSK, QPSK ou même 8-PSK (16-PSK n'est guère utilisée), des valeurs de l'INR allant de -20dB à 40dB et dans une plage de SEP allant de 10^{-1} à 10^{-4}, on vérifie que $\Delta < 0$. Par conséquent l'équation (4.31) possède trois solutions réelles dont une seule est physiquement acceptable. Finalement, le SNR moyen en fonction de la probabilité d'erreur du signal d'intérêt et de la puissance de l'interférent est donnée par :

$$\overline{\gamma}_d\left(P_s\left(E\right), \overline{\gamma}_i\right) = \frac{1}{g_{psk}}\left(-\frac{\beta}{3\alpha} + 2\sqrt{-\frac{P}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3Q}{2P}\sqrt{-\frac{3}{P}}\right)\right)\right), \tag{4.35}$$

avec $P < 0$. Nous avons donc une formule simple et unique permettant de remonter au SNR moyen (donc à la puissance d'émission) pour atteindre une probabilité d'erreur donnée en présence d'un interférent dans un environnement de Rayleigh. Bien entendu, pour pouvoir adapter la puissance d'émission dans un réseau en présence d'un interférent, il faudrait pouvoir également avoir une estimation de la puissance de l'interférent, ce qui pourrait être fourni par une coopération entre les deux noeuds interférents du réseau [3].

Estimation du SEO, signal M-PSK. Nous avons vu qu'en présence de shadowing, la puissance moyenne reçue va varier dans le temps. Si on considère que la puissance moyenne de l'interférent ne varie pas et que seul le signal d'intérêt est soumis à un effet de masquage, alors on peut appliquer la méthode que l'on a développée dans les chapitres précédant pour estimer la probabilité de coupure en présence de shadowing, en fonction de la probabilité d'erreur cible souhaitée. Cependant, cette hypothèse est très réductrice. En effet, si on considère que notre puissance moyenne fluctue par effet de masque, il est raisonnable de supposer que c'est également le cas pour le signal interférent. La probabilité de coupure n'est plus simplement due à la variation de la variable aléatoire SNR moyen mais une combinaison des deux variables aléatoires SNR et INR moyen. On considère que ces deux variables aléatoires sont de loi log-normale mais pas nécessairement de mêmes paramètres. On suppose également qu'elles sont indépendantes. Si l'utilisateur interférent est spatialement proche de la station mobile, les puissances moyennes reçues à la station de base par l'utilisateur d'intérêt et interférent vont subir les mêmes perturbations à grande échelle (masquage par les bâtiments, forêts etc) et les deux variables seront corrélées.

[2] L'antériorité reviendrait plutôt à Scipione del Ferro et Tartaglia mais la méthode de résolution est connue sous le nom de "méthode de Cardan".

[3] Notons que l'on aurait pu inverser la probabilité d'erreur par rapport à la puissance de l'interférent, cela eut été plus simple d'ailleurs. Dans notre démarche on suppose que l'on ne puisse pas commander à la station interférente.

Concernant le SEO, nous pouvons montrer le théorème suivant lorsqu'un interférent est présent (voir annexe A.3) :

Théorème 1 (SEO) *Soit le SNR moyen Ω_d et INR moyen Ω_i deux variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant deux lois log-normales. On note $p_{\Omega_d}(\overline{\gamma}_d)$ et $p_{\Omega_i}(\overline{\gamma}_i)$ leur densité de probabilité respective. Les paramètres μ_d, σ_d, μ_i et σ_i sont respectivement les moyennes et les écarts types (en dB) des lois log-normales des variables aléatoires Ω_d et Ω_i. Dans ces conditions la probabilité de coupure symbole d'un signal perturbé par un interférent co-canal est donnée par :*

$$P\left(P_s\left(E\right) > P_s^*\right) = \int_0^{\infty} \frac{10/\log\left(10\right)}{\sigma_i\sqrt{2\pi}\overline{\gamma}_i} e^{-\frac{\left(10\log_{10}\overline{\gamma}_i-\mu_i\right)^2}{2\sigma_i^2}} Q\left(\frac{\mu_d - 10\log_{10}\overline{\gamma}_{th}\left(P_s^*,\overline{\gamma}_i\right)}{\sigma_d}\right) d\overline{\gamma}_i,$$

où $\overline{\gamma}_{th}\left(P_s^*,\overline{\gamma}_i\right)$ est le SNR moyen nécessaire pour atteindre la probabilité d'erreur cible P_s^* étant donné le INR moyen $\overline{\gamma}_i$.

La preuve se base sur le théorème du changement de variable dans les intégrales multiples [31]. La formule ci-dessus témoigne de la complexité du calcul du SEO, où même dans un cas "simple" comme la présence d'un seul interférent co-canal, il nécessite l'évaluation d'une intégrale infinie.

La forme exacte du SNR en (4.35) peut se simplifier. En effet, pour des valeurs de $p \ll 1$ (en dessous de 10^{-1}), l'argument de la fonction arccos tend rapidement vers 0. Autrement dit l'argument de la fonction cos est presque constant et égal à $\pi/6$ et ce pour les plages de variations des paramètres mentionnées plus haut. Finalement, le SNR moyen est assez bien approché par :

$$\overline{\gamma}_d\left(P_s\left(E\right),\overline{\gamma}_i\right) \approx \frac{1+\overline{\gamma}_i}{2g_{psk}p}. \tag{4.36}$$

Cette expression peut encore être réduite si l'on considère $\overline{\gamma}_i \gg 1$. Dans ce cas on a simplement :

$$\overline{\gamma}_d\left(P_s\left(E\right),\overline{\gamma}_i\right) \approx \frac{\overline{\gamma}_i}{2g_{psk}p}. \tag{4.37}$$

Le passage à l'expression asymptotique du SNR moyen ne permettra pas d'approcher la valeur de l'intégrale du théorème 1 lorsque $\overline{\gamma}_i$ sera faible. La valeur exacte du SEO peut s'approcher par :

$$P\left(P_s\left(E\right) > P_s^*\right) \approx \int_0^{\infty} \frac{10/\log\left(10\right)}{\sigma_i\sqrt{2\pi}\overline{\gamma}_i} e^{-\frac{\left(10\log_{10}\overline{\gamma}_i-\mu_i\right)^2}{2\sigma_i^2}} Q\left(\frac{\mu_d' - 10\log_{10}\overline{\gamma}_i}{\sigma_d}\right) d\overline{\gamma}_i, \tag{4.38}$$

avec $\mu_d' = \mu_d + 10\log_{10}\left(2g_{psk}p\right)$. De plus la fonction gaussienne Q est bien approchée par [118] :

$$Q(x) \approx \frac{1}{4}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{3} + e^{-\frac{x^2}{6}}\right). \tag{4.39}$$

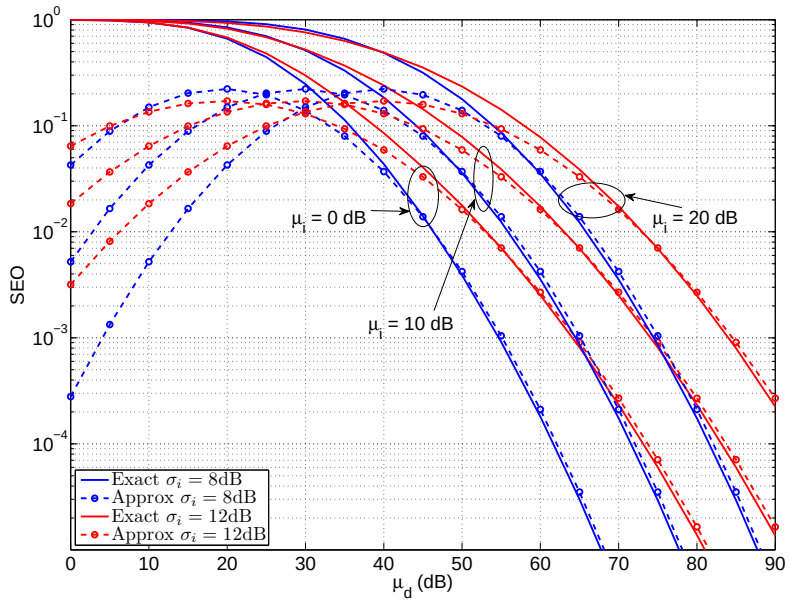


FIG. 4.2 – Probabilité de coupure d'un signal QPSK en présence d'un interférent subissant tous deux un canal de Rayleigh et du shadowing. L'écart type de la loi log-normale pour le signal d'intérêt est de 8dB. La probabilité de coupure est $P_s^* = 10^{-2}$.

En utilisant (4.39) dans (4.38), on peut intégrer l'expression (4.38) et obtenir une estimation de la probabilité de coupure symbole :

$$P\left(P_s\left(E\right) > P_s^*\right) \approx \frac{\sigma_d}{12}\left(\frac{e^{-\frac{\left(\mu_d'-\mu_i\right)^2}{2\left(\sigma_d^2+\sigma_i^2\right)}}}{\sqrt{\sigma_d^2+\sigma_i^2}} + 3\frac{e^{-\frac{2\left(\mu_d'-\mu_i\right)^2}{4\sigma_i^2+3\sigma_d^2}}}{\sqrt{\sigma_d^2+\frac{4\sigma_i^2}{3}}}\right). \tag{4.40}$$

L'équation (4.40) constitue une excellente approximation du SEO exact donné au théorème 1, mais pour des valeurs de μ_d grandes comparées à μ_i. Pour des valeurs du SEO inférieures ou égales à 10^{-1} l'approximation est très bonne comme on peut le constater sur la figure 4.2. Celle-ci montre l'évolution du SEO d'un signal modulé QPSK dans un canal de Rayleigh avec shadowing et un interférent co-canal en fonction de la moyenne de la loi log-normale du signal interférent. La probabilité d'erreur cible est fixée à 10^{-2}. L'écart type de la loi log-normale pour le signal d'intérêt est 8dB alors que celui de l'interférent est successivement 8 et 12dB. La loi de shadowing du signal interférent a une moyenne prenant les valeurs 0, 10 et 20dB. Lorsque les lois log-normales ont des écart types égaux ou du moins pas très éloignés, l'approximation est très bonne dès que l'on se fixe un SEO inférieur à 10^{-1}. Lorsque l'écart type pour le signal interférent devient important comparée au signal d'intérêt (part exemple 12dB pour 8dB comme illustré), l'approximation reste très bonne asymptotiquement mais un peu moins bonne pour des valeurs du SEO de l'ordre de 10^{-1}. Pour cette valeur de la probabilité de coupure l'écart entre la valeur exacte et approchée est d'environ 4dB pour les 3 valeurs de μ_i [4].

[4] On peut vérifier que pour des valeurs inversées des écarts types σ_i et σ_d, l'approximation est très bonne pour un SEO égale à 10^{-1} (moins de 1dB).

Il est clair que pour les faibles valeurs de μ_d l'approximation n'est pas du tout exploitable ; celle-ci prédisant un diminution de la probabilité de coupure à mesure que la puissance moyenne reçue diminue. C'est bien évidemment un comportement complètement erroné par rapport à ce que l'on pourrait observer dans la réalité. Cette approximation n'est intéressante que pour des probabilités de coupure inférieures à 10^{-1}. On recherche des taux de coupure de cet ordre de grandeur voir inférieurs lorsque l'on souhaite fournir un service de très haute qualité comme cela peut être le cas avec le HSDPA ou HSUPA.

Si l'on souhaite remonter à la puissance d'émission au travers de μ_d, cette équation n'est pas inversible analytiquement dans le cas général (pour σ_d et σ_i distinctes). Même si les deux lois de shadowing ont le même écart type, l'équation obtenue est de degré 7 et on ne peut pas exprimer les solutions sous forme de radicaux. Cependant, un système de gestion automatique de la puissance d'émission pourrait s'accommoder de cette formule qui est tout de même bien plus simple à inverser numériquement que l'intégrale dans le théorème 1. En effet, si l'on fait le choix du calcul exact, pour chaque puissance d'émission candidate, il est nécessaire d'évaluer une intégrale infinie avec une règle de troncature à définir et une précision de calcul également à définir.

Etude du cas M-QAM. On repart dans ce cas de la probabilité d'erreur conditionnelle sur λ_1 qui vaut :

$$P_s\left(E|\lambda_1\right) = \frac{4}{\pi} g \left(\int_0^{\pi/2} M_{\gamma_t|\lambda_1}\left(-\frac{g_{qam}}{\sin^2\theta}\right) d\theta - g \int_0^{\pi/4} M_{\gamma_t|\lambda_1}\left(-\frac{g_{qam}}{\sin^2\theta}\right) d\theta \right), \tag{4.41}$$

on rappelle que $g = 1 - 1/\sqrt{M}$ et $g_{qam} = 3/(2(M-1))$. En remplaçant la fonction génératrice des moments du SINR instantané par son expression, la probabilité d'erreur conditionnelle s'écrit :

$$P_s\left(E|\lambda_1\right) = \frac{4g}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{\sigma^2}{\lambda_1} g_{qam}\overline{\gamma}_d} d\theta - g \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{\sigma^2}{\lambda_1} g_{qam}\overline{\gamma}_d} d\theta \right). \tag{4.42}$$

On sait évaluer de façon exacte ces intégrales [74]. La première s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss alors que la seconde équivaut à une fonction hypergéométrique d'Appell comme dans l'équation (2.41). La probabilité d'erreur conditionnelle pour une M-QAM s'écrit :

$$P_s\left(E|\lambda_1\right) = g x_1 \cdot {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; 2; x_1\right) - \frac{2g^2}{3\pi} x_2 \cdot F_1\left(1, 1, 1; \frac{5}{2}; y, z\right), \tag{4.43}$$

avec $x_1 = 1/\left(1 + \sigma^2 g_{qam}\overline{\gamma}_d/\lambda_1\right)$, $y = \left(1 + \sigma^2\overline{\gamma}_d g_{qam}/\lambda_1\right)/\left(1 + 2g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d/\lambda_1\right)$, $x_2 = 1/\left(1 + 2\sigma^2 g_{qam}\overline{\gamma}_d/\lambda_1\right)$ et $z = 1/2$. Avant d'intégrer sur la variable λ_1 pour obtenir la probabilité d'erreur en présence de l'interférent, il faut approcher les fonctions spéciales ci-dessus.

Approximation du SEP pour une M-QAM. La même démarche va encore s'appliquer ici ; la fonction ${}_2F_1$ est approchée avec la méthode de Laplace et on regarde son comportement asymptotique (lorsque $\overline{\gamma}_d$ tend vers l'infini). Tandis que le terme avec la

fonction d'Appell est remplacé par sa forme asymptotique. L'approximation de la fonction hypergéométrique de Gauss est la même que pour le cas M-PSK : $1/\sqrt{1-x_1\tilde{t}}$, avec $\tilde{t}=1/2$. En factorisant (4.43) par $x_1/\sqrt{1-x_1\tilde{t}}$, on a :

$$P_s\left(E|\lambda_1\right) \approx \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1\tilde{t}}}\left(g-\frac{2g^2}{3\pi}\frac{x_2}{x_1}F_1\left(1,1,1;\frac{5}{2};y,z\right)\sqrt{1-x_1\tilde{t}}\right), \tag{4.44}$$

De plus avec (1.34) :

$$\lim_{\overline{\gamma}_d\to\infty} F_1\left(1,1,1;\frac{5}{2};y,z\right) = {}_2F_1\left(1,2;\frac{5}{2};z\right), \tag{4.45}$$

$$\lim_{\overline{\gamma}_d\to\infty} \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}. \tag{4.46}$$

Asymptotiquement la probabilité d'erreur conditionnelle s'écrit :

$$P_s\left(E|\lambda_1,\overline{\gamma}_d\to\infty\right) \approx k_{qam}\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1\tilde{t}}}, \tag{4.47}$$

avec :

$$k_{qam} = g\left(1-\frac{g}{3\pi}\cdot{}_2F_1\left(1,2;\frac{5}{2};z\right)\right). \tag{4.48}$$

Il faut maintenant intégrer par rapport à la variable λ_1 qui contient le terme d'interférence. Finalement, la probabilité d'erreur d'une M-QAM en présence d'un interférent en canal de Rayleigh est similaire à celle d'une M-PSK, à quelques constantes près :

$$P_s\left(E\right) \approx k_{qam}\frac{e^{\frac{\sigma^2}{\Psi P_i}}}{\Psi P_i}\int_{\sigma^2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\lambda_1}g_{qam}\overline{\gamma}_d}\sqrt{1-\tilde{t}+\frac{\sigma^2}{\lambda_1}g_{qam}\overline{\gamma}_d}}e^{-\frac{\lambda_1}{P_i}}d\lambda_1. \tag{4.49}$$

De la même manière que pour le cas M-PSK, une majoration de la probabilité d'erreur précédente peut s'obtenir en considérant que $\tilde{t}<1$. Par conséquent, en remplaçant la deuxième racine carrée du dénominateur de (4.49) par simplement $\sqrt{g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d/\lambda_1}$, on obtient une majoration de la probabilité d'erreur d'autant plus précise si le SNR est grand. Grâce à la forme obtenue, similaire à (4.26), on peut calculer l'intégrale de manière exacte et ainsi donner une majoration de la probabilité d'erreur dans le cas M-QAM :

$$P_s\left(E|\overline{\gamma}_d,\overline{\gamma}_i\right) \leq 2k_{qam}\sqrt{\frac{1+g_{qam}\overline{\gamma}_d}{g_{qam}\overline{\gamma}_d}}\frac{1+\overline{\gamma}_i}{\overline{\gamma}_i+2\left(1+g_{qam}\overline{\gamma}_d\right)}. \tag{4.50}$$

La figure 4.3 compare la probabilité d'erreur d'un signal 16-QAM en fonction du rapport signal à bruit, évaluée avec (4.50) et la valeur exacte calculée avec (4.42) puis intégrée sur la densité de probabilité de λ_1. La figure est tracée pour un signal et un interférent se propageant dans un canal de Rayleigh. Pour toute la plage de puissance d'interférence testée (INR égale à 0, 15 et 30dB), la borne supérieure obtenue est bonne pour des valeurs de la probabilité d'erreur comprise entre 10^{-1} et 10^{-4}. La borne supérieure n'est jamais éloignée de plus de 1.1dB de la valeur exacte. La moins bonne précision étant lorsque le INR est grand (30dB), et la probabilité d'erreur considérée faible (de l'ordre de 10^{-1}).

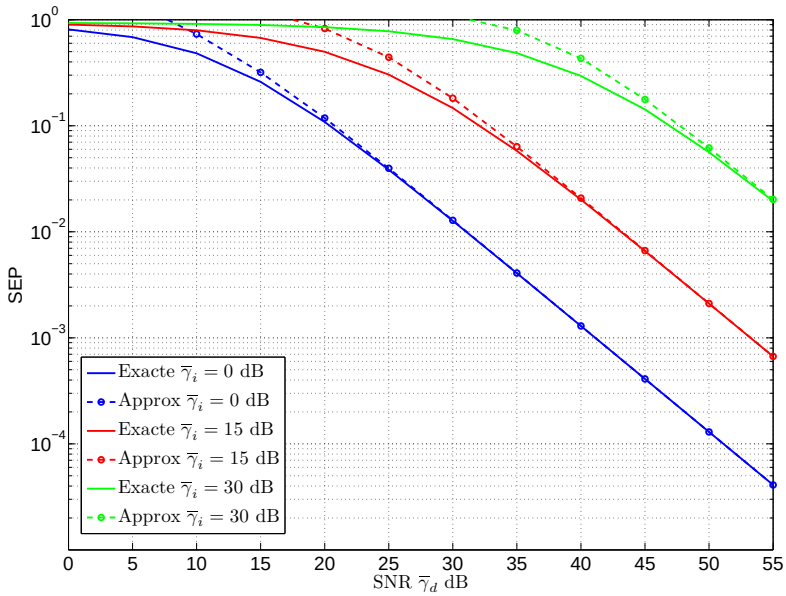


FIG. 4.3 – Approximation de la probabilité d'erreur d'un signal 16-QAM avec un interférent co-canal en environnement de Rayleigh.

Inversion du SEP et estimation du SEO. L'expression approchée de la probabilité d'erreur dans le cas M-QAM et M-PSK étant très similaire, l'inversion de celle-ci par rapport au SNR se fait de la même manière. L'élévation au carré de (4.50) conduit à la résolution d'une équation de degré 3 en $\overline{\gamma}_d$. En procédant comme indiqué ci-dessus, on peut calculer l'unique solution acceptable pour le SNR en fonction de la probabilité d'erreur et de la puissance du signal interférent. La forme est exactement celle donnée en (4.35) et les deux seuls paramètres à changer sont g_{qam} à la place de g_{psk} et p devient $p = P_s(E) / (2k_{qam})$.

L'estimation du SEO s'établit avec le théorème 1 ou son approximation (4.40) pour éviter le calcul de l'intégrale. L'expression (4.40) ne dépend pas des paramètres de modulations du signal, si ce n'est dans l'expression du SNR en fonction de la probabilité d'erreur cible. Par conséquent il est logique d'obtenir des courbes similaires à celles présentées sur la figure 4.2 même pour une modulation M-QAM et ne sont donc pas présentées. Pour des valeurs de paramètres de shadowing identiques à ceux de la figure 4.2, on vérifie que la précision de l'approximation obtenue est du même ordre que pour le cas M-PSK.

4.3.2 Nakagami-m/Nakagami-m

Dans cette section nous allons essayer d'étendre les résultats précédant à un canal de Nakagami-m pour le signal d'intérêt et interférent. L'intérêt du canal de Nakagami dans le cas interférent est de pouvoir modéliser des évanouissements de sévérités différentes pour le signal d'intérêt et perturbateur.

On garde le modèle du signal reçu introduit en (4.1). Le SINR instantané a donc la même forme qu'en (4.12), mais dans ce cas la variable aléatoire $|h_i|^2$ est une variable du χ^2 centrée à $2m_i$ degrés de liberté et de variance $1/2m_i$. La densité de probabilité de λ_1

est [6] :

$$p_{\lambda_1}(\lambda_1) = \frac{m_i^{m_i}}{\Gamma(m_i)(\Psi P_i)^{m_i}} \left(\lambda_1 - \sigma^2\right)^{m_i - 1} e^{-m_i \frac{\lambda_1 - \sigma^2}{\Psi P_i}}, \quad \lambda_1 \geq \sigma^2, \tag{4.51}$$

avec m_i le paramètre d'évanouissement du signal interférent. Dans le cas d'un canal de Nakagami-m, la fonction génératrice des moments du SINR conditionnée sur la v.a. λ_1 est :

$$\begin{aligned} M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Naka}(s) &= M_{\gamma_d}^{Naka}\left(\frac{\sigma^2}{\lambda_1} s\right), \\ &= \frac{1}{\left(1 - s\frac{\sigma^2}{m_d \lambda_1}\overline{\gamma}_d\right)^{m_d}}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

où m_d est le paramètre d'évanouissement du signal d'intérêt. La même technique que pour l'environnement Rayleigh est appliquée ici, à savoir une première évaluation de la probabilité d'erreur conditionnée sur λ_1 à partir de la MGF du SINR, puis l'intégration sur la v.a. λ_1.

SEP pour un signal M-PSK. La probabilité d'erreur conditionnelle est :

$$P_s(E|\lambda_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Naka}\left(-\frac{g_{psk}}{\sin^2\theta}\right) d\theta, \tag{4.53}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{\sigma^2}{\lambda_1}\frac{g_{psk}\overline{\gamma}_d}{m_d}}\right)^{m_d} d\theta. \tag{4.54}$$

Cette intégrale est exactement la même que celles rencontrées au chapitre précédent, sans interférence. Elle s'intègre donc de la même manière. La probabilité d'erreur conditionnelle a la même forme que (2.15) :

$$\begin{aligned} P_s(E|\lambda_1) &= x^{m_d}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(m_d + 1/2)}{\Gamma(m_d+1)} {}_2F_1\left(m_d, \frac{1}{2}; m_d + 1; x\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{z}}{\pi} F_1\left(\frac{1}{2}, m_d, \frac{1}{2} - m_d; \frac{3}{2}; y, z\right)\right\}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

Avec $x = 1/\left(1 + g_{psk}\sigma^2\overline{\gamma}_d/(m_d\lambda_1)\right)$, $z = 1 - g_{psk}$, $y = (1 - g_{psk})/\left(1 + g_{psk}\sigma^2\overline{\gamma}_d/(m_d\lambda_1)\right)$. La probabilité d'erreur est finalement obtenue en multipliant (4.55) par la densité de probabilité de λ_1 et en intégrant sur cette variable.

Approximation du SEP. La fonction hypergéométrique de Gauss est remplacée par la valeur asymptotique (aux forts SNR) de son approximation de Laplace à savoir $1/\sqrt{1 - x\tilde{t}}$ avec $\tilde{t} = m_d/(m_d + 1)$. Pour la fonction hypergéométrique d'Appell, nous utilisons la relation fonctionnelle (1.31) et (1.32) valable lorsque $\overline{\gamma}_d \to \infty$:

$$\lim_{\overline{\gamma}_d \to \infty} F_1\left(\frac{1}{2}, m_d, \frac{1}{2} - m_d; \frac{3}{2}; y, z\right) = (1 - y)^{-1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m_d; \frac{3}{2}; z\right). \tag{4.56}$$

On fait la même remarque qu'au chapitre précédant : $y \leq x$. On tend vers l'égalité lorsque l'ordre de la modulation devient très grand (8 et au-delà). De plus $\tilde{t} < 1$, et tend vers 1 à mesure que m_d croît. On remarque empiriquement que $y \approx x\tilde{t}$ et l'approximation est d'autant plus fine que le SNR est grand. Finalement la probabilité d'erreur asymptotique conditionnée sur λ_1 en canal de Nakagami-m est :

$$P_s\left(E|\lambda_1\right) \approx k_{psk}\frac{x^{m_d}}{\sqrt{1-x\tilde{t}}}, \tag{4.57}$$

avec :

$$k_{psk} = \frac{\Gamma\left(m_d+1/2\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(m_d+1\right)} + \frac{\sqrt{z}}{\pi}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-m_d;\frac{3}{2};z\right). \tag{4.58}$$

En intégrant l'expression ci-dessus par rapport à λ_1, on obtient la probabilité d'erreur en présence de l'interférence, en fonction des paramètres d'évanouissement des deux signaux :

$$P_s\left(E\right) \approx k_{psk}\frac{m_i^{m_i}e^{\frac{m_i\sigma^2}{\Psi P_i}}}{\Gamma\left(m_i\right)\left(\Psi P_i\right)^{m_i}}\int_{\sigma^2}^{\infty}\frac{\left(\lambda_1-\sigma^2\right)^{m_i-1}}{\left(1+\frac{g_{psk}\sigma^2\overline{\gamma}_d}{m_d\lambda_1}\right)^{m_d-\frac{1}{2}}\sqrt{1-\tilde{t}+\frac{g_{psk}\sigma^2\overline{\gamma}_d}{m_d\lambda_1}}}e^{-\frac{m_i\lambda_1}{\Psi P_i}}d\lambda_1. \tag{4.59}$$

L'intégrale en (4.59) ne peut pas être évaluée analytiquement. Nous sommes donc forcés d'effectuer quelques approximations pour en obtenir une forme manipulable. La première chose à laquelle nous pouvons penser c'est borner l'intégrale ou l'intégrande. Malheureusement, cette voie ne s'est pas révélée fructueuse.

Cependant, on peut au moins s'intéresser à la valeur de l'intégrale lorsque $\overline{\gamma}_d \to \infty$. Dans ce cas, l'expression en (4.59) se réduit à :

$$\begin{aligned} P_s\left(E,\overline{\gamma}_d\to\infty\right) \approx\ & k_{psk}\frac{e^{\frac{m_i\sigma^2}{\Psi P_i}}}{\Gamma\left(m_i\right)}\left(\frac{m_i}{\Psi P_i}\right)^{m_i}\left(\frac{m_d}{g_{psk}\sigma^2\overline{\gamma}_d}\right)^{m_d}\times \\ & \int_{\sigma^2}^{\infty}\lambda_1^{m_d}\left(\lambda_1-\sigma^2\right)^{m_i-1}e^{-\frac{m_i}{\Psi P_i}\lambda_1}d\lambda_1. \end{aligned} \tag{4.60}$$

En développant le polynôme dans l'intégrale à l'aide de la formule du binôme de Newton, et avec [31] et après quelques manipulations on obtient la forme asymptotique suivante pour la probabilité d'erreur en présence d'un interférent dans un canal de Nakagami-m :

$$\begin{aligned} P_s\left(E,\overline{\gamma}_d\to\infty\right) \approx\ & k_{psk}\frac{e^{\frac{m_i}{\overline{\gamma}_i}}}{\Gamma\left(m_i\right)}\left(\frac{m_d\overline{\gamma}_i}{m_i g_{psk}\overline{\gamma}_d}\right)^{m_d}\sum_{k=0}^{m_i-1}(-1)^k\begin{pmatrix} m_i-1 \\ k \end{pmatrix}\left(\frac{m_i}{\overline{\gamma}_i}\right)^k\times \\ & \Gamma\left(m_d+m_i-k,\frac{m_i}{\overline{\gamma}_i}\right), \end{aligned} \tag{4.61}$$

avec $\Gamma\left(a,x\right)$ la fonction gamma incomplète supérieure, et $\overline{\gamma}_i$ le INR moyen. Pour des valeurs non entières, on peut arrondir à l'entier le plus proche et utiliser l'expression. L'impact sur l'arrondi sera d'autant plus faible que m sera grand.

La figure 4.4 illustre le comportement asymptotique de la probabilité d'erreur en fonction du SNR, évaluée avec (4.61), et ce pour plusieurs valeurs des paramètres d'évanouissements du canal de Nakagami. Nous traçons également la probabilité d'erreur exacte évaluée

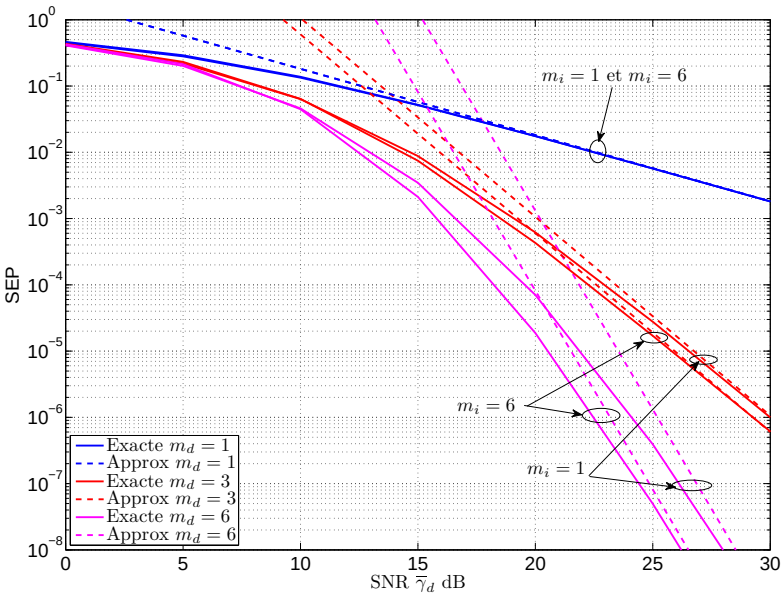


FIG. 4.4 – Probabilité d'erreur asymptotique d'un signal QPSK avec un interférent co-canal en environnement de Nakagami, pour différentes valeurs des paramètres d'évanouissements des canaux. Le rapport INR est de 0dB

en multipliant (4.54) par (4.51) et en intégrant sur λ_1. Le paramètre m_d peut prendre trois valeurs : 1, 3 et 6. Le paramètre m_i prend deux valeurs 1 et 6. Autrement dit on peut voir l'effet d'un interférent co-canal sévèrement évanouit ($m_i = 1$) ou faiblement atténué ($m_i = 6$) sur la probabilité d'erreur du signal d'intérêt. On peut vérifier qu'un signal interférent subissant une sévérité de canal élevé dégrade les performances du signal d'intérêt (le SEP augmente), ce qui est en accord avec les résultats trouvés par Beaulieu *et al.* dans [107]. Si le signal d'intérêt passe par un canal de Rayleigh ($m_d = 1$), la sévérité du canal interférent n'a que peut d'effet sur la probabilité d'erreur ; les courbes sont confondues pour $m_i = 1$ et $m_i = 6$. La formule dérivée en (4.61) est utile pour évaluer rapidement la pente de la probabilité d'erreur lorsque le SNR est fort et le SIR aussi. Par contre, comme il s'agit d'une expression "asymptotique", elle échoue à nous renseigner sur la valeur du SEP dans la région du SNR d'intérêt sans codage (10^{-1} à 10^{-4}), sauf pour des valeurs de m_d faibles où l'expression pourrait être utilisée.

Estimation du SEO. Avec (4.61), l'inversion de la probabilité d'erreur par rapport au SNR moyen est triviale et ce quelques soient les paramètres d'évanouissements m_d et m_i. A l'aide du théorème en 1, on peut obtenir une estimation de la probabilité de coupure symbole d'un signal M-PSK en présence d'un interférent co-canal et dans un canal de Nakagami-m, avec shadowing. Cependant, il est nécessaire d'avoir des probabilités d'erreur cible d'autant plus faibles que le paramètre d'évanouissement m_d est grand, si l'on veut approcher la probabilité de coupure réelle susceptible d'être atteinte. Notons que l'approximation de la probabilité d'erreur est une borne supérieure de celle-ci (très mauvaise aux faibles SNR). Par conséquent, le SNR en fonction de la probabilité d'erreur cible que l'on injecte dans la formule du théorème 1 est surestimé par rapport à sa valeur réelle. L'argument de la fonction Q gaussienne dans cette formule est donc inférieure à sa valeur

réelle et la valeur de cette même fonction est supérieure à sa vraie valeur. Donc le SEO est sur-estimé en utilisant l'inversion déduite de (4.61), et de beaucoup si la probabilité d'erreur cible n'est pas assez faible.

Pour valider l'estimation du SEO obtenue à l'aide de l'inversion de (4.61), il faudrait la comparer avec la valeur réelle du SEO. Celle-ci peut s'obtenir soit par simulation (méthode très longue !), soit numériquement, ce qui est tout aussi fastidieux ; Il faudrait déterminer le SNR nécessaire pour atteindre P_s^* pour chaque INR moyen possible (de 0 à l'infini). Une fois cela effectué, on pourrait calculer numériquement l'intégrale dans le théorème 1.

Extension au cas M-QAM. De même que pour une modulation M-PSK, une forme exacte et précise de la probabilité d'erreur à tous les régimes de SNR, est impossible avec notre approche pour une modulation M-QAM. On peut donner un comportement asymptotique de la probabilité d'erreur ce qui est tout de même très utile pour une évaluation rapide des performances.

La probabilité d'erreur conditionnelle sur λ_1 est celle donnée en (4.41) mais avec la fonction génératrice des moments du SINR en canal de Nakagami-m (4.52). L'expression de la probabilité d'erreur conditionnelle obtenue est similaire à la probabilité d'erreur d'un signal modulé M-QAM en canal de Nakagami-m sans interférence (2.41) :

$$\begin{aligned} P_s\left(E|\lambda_1\right) &= \frac{2g}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(m_d+1/2\right)}{\Gamma\left(m_d+1\right)}M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Naka}\left(-g_{qam}\right){}_2F_1\left(m_d,\frac{1}{2};m_d+1;x_1\right)- \\ &\quad \frac{g^2}{\pi}\frac{\Gamma\left(m_d+1/2\right)}{\Gamma\left(m_d+3/2\right)}M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Naka}\left(-2g_{qam}\right)F_1\left(1,m_d,1;m_d+\frac{3}{2};y,z\right), \end{aligned} \tag{4.62}$$

avec $y = \left(1+g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d/\left(m_d\lambda_1\right)\right)/\left(1+2g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d/\left(m_d\lambda_1\right)\right)$, $z = 1/2$ pour la fonction hypergéométrique d'Appell et $x_1 = 1/\left(1+g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d/\left(m_d\lambda_1\right)\right)$ pour la fonction hypergéométrique de Gauss.

La fonction hypergéométrique de Gauss a la même approximation que dans le cas M-PSK. De plus on rappelle que $M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Naka}\left(-g_{qam}\right) = x_1^{m_d}$ et $M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Naka}\left(-2g_{qam}\right) = x_2^{m_d}$, où $x_2 = 1/\left(1+2g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d/(m_d\lambda_1)\right)$. Lorsque l'on fait tendre $\overline{\gamma}_d$ vers l'infinie, la fonction hypergéométrique d'Appell tend vers une fonction hypergéométrique de Gauss avec (1.34) et les variables x_1 et x_2 se simplifient :

$$\lim_{\overline{\gamma}_d\to\infty} F_1\left(1,m_d,1;m_d+\frac{3}{2};y,z\right) = {}_2F_1\left(1,m_d+1;m_d+\frac{3}{2};z\right), \tag{4.63}$$

$$\lim_{\overline{\gamma}_d\to\infty} x_1 \to \frac{m_d\lambda_1}{g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d}, \tag{4.64}$$

$$\lim_{\overline{\gamma}_d\to\infty} x_2 \to \frac{m_d\lambda_1}{2g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d}. \tag{4.65}$$

Par conséquent, la probabilité d'erreur conditionnelle asymptotique (en $\overline{\gamma}_d$) est :

$$P_s\left(E|\lambda_1,\overline{\gamma}_d\to\infty\right) = k_{qam}\left(\frac{m_d}{g_{qam}\sigma^2\overline{\gamma}_d}\right)^{m_d}\lambda_1^{m_d}, \tag{4.66}$$

avec k_{qam} une constante dépendant de la sévérité du canal d'intérêt et des paramètres de la modulation M-QAM :

$$k_{qam} = \frac{2g}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(m_d+1/2\right)}{\Gamma\left(m_d+1\right)} - \frac{g^2}{2^{m_d}\pi}\frac{\Gamma\left(m_d+1/2\right)}{\Gamma\left(m_d+3/2\right)}{}_2F_1\left(1,m_d+1;m_d+\frac{3}{2};z\right). \tag{4.67}$$

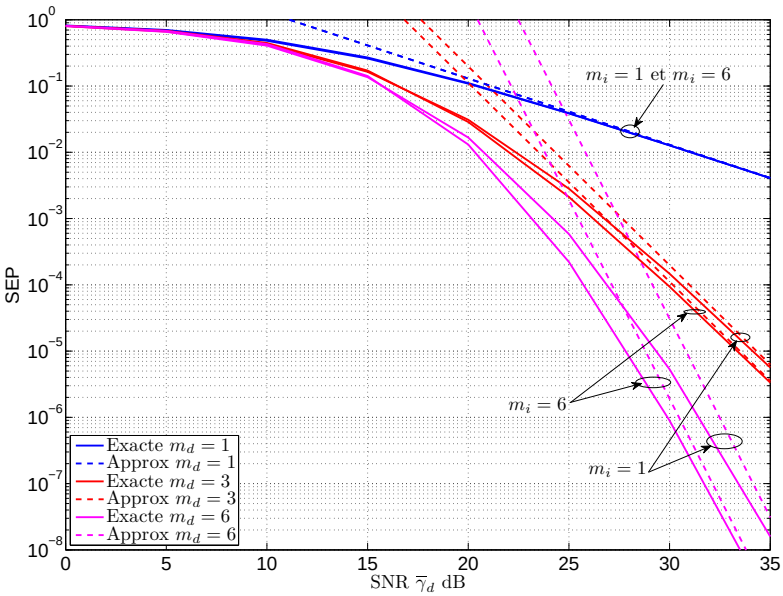


FIG. 4.5 – Probabilité d'erreur asymptotique d'un signal 16-QAM avec un interférent co-canal en environnement de Nakagami, pour différentes valeurs des paramètres d'évanouissements des canaux. Le rapport INR est de 0dB

Enfin, la probabilité d'erreur en présence d'interférence s'obtient en utilisant la densité de probabilité de λ_1 (4.51) et (4.66), puis en intégrant la variable λ_1. Finalement en régime asymptotique, la probabilité d'erreur d'un signal M-QAM en présence d'un interférent en canal de Nakagami-m est :

$$P_s\left(E, \overline{\gamma}_d \to \infty\right) \approx k_{qam} \frac{e^{\frac{m_i}{\overline{\gamma}_i}}}{\Gamma\left(m_i\right)} \left(\frac{m_d \overline{\gamma}_i}{m_i g_{qam} \overline{\gamma}_d}\right)^{m_d} \sum_{k=0}^{m_i-1} (-1)^k \left(\begin{array}{c} m_i - 1 \\ k \end{array}\right) \left(\frac{m_i}{\overline{\gamma}_i}\right)^k \times \Gamma\left(m_d + m_i - k, \frac{m_i}{\overline{\gamma}_i}\right), \quad (4.68)$$

La figure 4.5 illustre l'approximation asymptotique de la probabilité d'erreur d'un signal 16-QAM en canal de Nakagami, pour trois valeurs du paramètre m_d (1 3 et 6) et deux valeurs de m_i (1 et 6). La même précision que dans le cas M-PSK est obtenue ici. Les mêmes remarques que précédemment peuvent être faites en ce qui concerne l'estimation du SEO.

4.3.3 Rice/Rice

On considère maintenant un environnement de Rice, pour le signal d'intérêt et interférent. La fonction génératrice des moments conditionnée sur λ_1 est [6] :

$$\begin{aligned} M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Rice}(s) &= M_{\gamma_d}^{Rice}\left(\frac{\sigma^2}{\lambda_1}s\right), \\ &= \frac{1}{1-s\frac{\sigma^2}{(1+K_d)\lambda_1}\overline{\gamma}_d}\exp\left[s\frac{K_d}{1+K_d}\frac{\frac{\sigma^2}{\lambda_1}\overline{\gamma}_d}{1-s\frac{\sigma^2}{(1+K_d)\lambda_1}\overline{\gamma}_d}\right], \end{aligned} \tag{4.69}$$

avec K_d le paramètre de la composante spéculaire pour l'utilisateur d'intérêt. La variable aléatoire $|h_i|^2$ est une variable du χ^2 non centrée. De ce fait la densité de probabilité de λ_1 est donnée par :

$$p_{\lambda_1}(\lambda_1) = \frac{1+K_i}{\Psi P_i}\exp\left(-\left[K_i+(1+K_i)\frac{\lambda_1-\sigma^2}{\Psi P_i}\right]\right) I_0\left(2\sqrt{K_i(1+K_i)\frac{\lambda_1-\sigma^2}{\Psi P_i}}\right), \tag{4.70}$$

avec K_i le paramètre de la composante spéculaire pour le signal interférent, et $I_0(x)$ la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0.

Calcul du SEP. Le SEP conditionnel s'obtient avec (4.17) pour un signal M-PSK en utilisant la fonction génératrice des moments en (4.69). Pour un signal M-QAM, on évalue (4.41). Le SEP finale en présence de l'interférent se calcul en utilisant la probabilité conditionnelle obtenue, combinée avec (4.70) dans (4.14). Nous donnons à titre d'example la probabilité d'erreur exacte d'un signal M-PSK :

$$\begin{aligned} P_s(E) &= \frac{1+K_i}{\pi\Psi P_i}e^{-\left(K_i-(1+K_i)\frac{\sigma^2}{\Psi P_i}\right)}\int_{\sigma^2}^{\infty}\int_0^{(M-1)\pi/M}\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\frac{g_{psk}\sigma^2}{(1+K_d)\lambda_1}\overline{\gamma}_d} \\ &\quad\times\exp\left(-\frac{g_{psk}K_d\sigma^2\overline{\gamma}_d}{(1+K_d)\lambda_1\sin^2\theta+g_{psk}\sigma^2\overline{\gamma}_d}\right)\exp\left(-\frac{1+K_i}{\Psi P_i}\lambda_1\right) \\ &\quad\times I_0\left(2\sqrt{K_i(1+K_i)\frac{\lambda_1-\sigma^2}{\Psi P_i}}\right)d\theta d\lambda_1. \end{aligned} \tag{4.71}$$

On peut dériver de manière similaire la probabilité d'erreur pour un signal M-QAM. Elle n'est pas donnée ici, pour éviter d'alourdir l'exposé. Les expressions obtenues sont assez complexes puisqu'elles font intervenir une fonction spéciale de Bessel dans l'intégrande.

La double intégrale ci-dessus n'a pas de solution exacte. On pourrait commencer par effectuer l'approximation de Laplace sur l'intégrale en θ, mais il faudrait encore intégrer sur λ_1. Dans le cas d'un système mono-antenne perturbé par un signal interférent dans un canal de Rice, il semble délicat de trouver une forme approchée précise de la probabilité d'erreur. Cependant, pour être plus affirmatif dans nos conclusions, il faudrait voir si l'on ne peut pas trouver des approximations exploitables de la fonction de Bessel modifiée de première espèce $I_0(x)$.

4.4 Système à antennes multiples.

Lorsque l'on considère la présence d'antennes multiples, les résultats obtenus ne sont pas tous extensibles facilement. De même si plusieurs sources interférentes sont considérées, il est plus ou moins délicat d'obtenir des formes inversibles de la probabilité d'erreur.

4.4.1 Système à diversité SIMO et présence d'un interférent.

Modèle du système. Le signal reçu en réception peut s'écrire [6] :

$$\mathbf{y}(t) = \sqrt{P_d}\mathbf{h}_d s_d\,(t) + \sqrt{P_i}\mathbf{h}_i s_i\,(t) + \mathbf{n}(t), \tag{4.72}$$

avec $s_d(t)$ et $s_i(t)$ le signal d'intérêt et interférent normalisés en puissance. Les constantes P_d et P_i sont les puissances d'émissions du signal d'intérêt et interférent. On considère ici que les signaux sont synchronisés. $\mathbf{h}_d$ et $\mathbf{h}_i$ sont les vecteurs des canaux de propagation (d'intérêt et interférent) non sélectif en fréquence, tels que $h_{dl}\,\big|_{l=1}^{L}$ et $h_{il}\,\big|_{l=1}^{L}$ sont les coefficients des canaux vus de chaque capteur en réception. Ils ne dépendent pas du temps car ils sont considérés constants sur la durée du traitement qui est la durée symbole en évanouissements rapides. De plus L est le nombre d'antenne de réception. Le vecteur $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur bruit complexe tel que chaque composante est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance σ^2.

A la réception, chaque composante du vecteur $\mathbf{y}(t)$ est pondérée et combinée grâce à un vecteur de poids complexe $\mathbf{w}$. La différence entre les différents types de récepteur réside dans le choix de ce vecteur. Le récepteur MRC (Maximum Ratio Combining) choisit le vecteur $\mathbf{w}$ de manière à maximiser le rapport signal à bruit en sortie du traitement (c'est un filtre adapté au canal SIMO) et donc $\mathbf{w} = \mathbf{h}_d/\sigma^2$. En présence d'interférence, la stratégie optimale consiste à utiliser un récepteur OC (Optimum Combining). Ce récepteur choisit $\mathbf{w}$ de manière à maximiser le SINR en sortie de traitement. Dans ce cas le vecteur de traitement est $\mathbf{w} = \mathbf{R}_{ni}^{-1}\mathbf{h}_d$ où $\mathbf{R}_{ni}$ est la matrice de covariance du bruit et de l'interférence définie par [110] :

$$\mathbf{R}_{ni} = E\left\{\left(\sqrt{P_i}\mathbf{h}_i s_i\,(t) + \mathbf{n}(t)\right)\left(\sqrt{P_i}\mathbf{h}_i s_i\,(t) + \mathbf{n}(t)\right)^H\right\} = P_i\mathbf{h}_i\mathbf{h}_i^H + \sigma^2\mathbf{I}. \tag{4.73}$$

Dans ce cas, le SINR instantané en sortie de traitement est maximal et s'écrit [110] :

$$\gamma_t = P_d\mathbf{h}_d^H\mathbf{R}_{ni}^{-1}\mathbf{h}_d. \tag{4.74}$$

Le choix entre les deux types de traitement évoqués ci-dessus est dicté par les performances que l'on souhaite atteindre et surtout par les contraintes que l'on s'impose. En effet, le traitement OC requière la connaissance du canal du signal désiré et interférent, ce qui n'est évidemment pas toujours possible dans la pratique. Cependant, ce récepteur présente une supériorité en performance par rapport au traitement MRC et son étude permet donc de fournir des bornes supérieures sur les performances des systèmes multi-antennes à diversité en milieu interférent. Notre étude se porte donc sur ce type de traitement.

Pour appliquer une approche de la probabilité d'erreur par la fonction génératrice des moments, il est souhaitable d'exprimer le SINR comme une somme de SNR instantané afin que la fonction génératrice des moments du SINR global puisse être exprimée comme un produit de MGF plus élémentaires. Pour cela il faut diagonaliser la matrice de covariance $\mathbf{R}_{ni}$ par une décomposition en valeurs singulières, au moyen d'une matrice unitaire $\mathbf{U}$ telle que : $\mathbf{\Lambda} \triangleq \mathbf{U}^H\mathbf{R}_{ni}\mathbf{U}$ soit une matrice diagonale dont les éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_L$ sont les

valeurs propres de la matrice de covariance. Les lignes de $\mathbf{U}$ sont les vecteurs propres de $\mathbf{R}_{ni}$. A partir de cette transformation, on peut montrer que le SINR instantané en sortie de traitement est [6] :

$$\gamma_t = \sum_{l=1}^{L} \frac{\sigma^2}{\lambda_l} \gamma_{dl}, \tag{4.75}$$

avec $\gamma_{dl} = P_d \left|h_{dl}\right|^2 / \sigma^2$ correspond au SNR instantané élémentaire sur le l-ième capteur. Par suite, la fonction génératrice des moments conditionnée sur les valeurs propres est donnée par le produit :

$$M_{\gamma_t|\lambda_1,\ldots,\lambda_L}(s) = \prod_{l=1}^{L} M_{\gamma_d}\left(\frac{\sigma^2}{\lambda_l} s\right), \tag{4.76}$$

avec $M_{\gamma_d}(s)$ la MGF de chaque variable aléatoire SNR sur les L capteurs avec pour valeur moyenne $\overline{\gamma}_d = P_d/\sigma^2$ qui représente le SNR moyen sur chaque antenne. Il a été montré (voir par exemple [119, 110, 112, 115]) que les valeurs propres de la matrice de covariance s'écrivaient :

$$\lambda_l = \begin{cases} P_i \sum_{n=1}^{L} \left|h_{in}\right|^2 + \sigma^2, & l = 1 \\ \sigma^2, & l = 2, 3, \ldots, L \end{cases} \tag{4.77}$$

ce qui signifie que $L-1$ valeurs propres sont constantes. Seule λ_1 est une variable aléatoire. Par conséquent la MGF en (4.76) devient :

$$M_{\gamma_t|\lambda_1}(s) = \left[M_{\gamma_d}(s)\right]^{L-1} M_{\gamma_d}\left(\frac{\sigma^2}{\lambda_1} s\right). \tag{4.78}$$

Avec cette expression de la MGF, ainsi que la densité de probabilité de λ_1 qui dépend de l'environnement de propagation (Rayleigh, Rice, Nakagami), les probabilités d'erreurs exactes peuvent être dérivées [6, 112, 115]. Malheureusement ces formes sont toutes avec une ou plusieurs intégrales qui n'ont pas de solution exacte. Les formules exactes de la probabilité d'erreur en présence d'un interférent dans différents environnements peuvent être trouvées en [6]. Pour donner des formes un peu plus manipulables, on peut avoir recours à quelques simplifications dont nous allons parler dans la suite.

Canal de Rayleigh. La MGF conditionnelle sur λ_1 vaut dans ce cas :

$$M_{\gamma_t|\lambda_1}(s) = \frac{1}{\left(1 - s\overline{\gamma}_d\right)^{L-1}\left(1 - s\frac{\sigma^2}{\lambda_1}\overline{\gamma}_d\right)}, \tag{4.79}$$

et la densité de probabilité de la variable aléatoire λ_1 vaut :

$$p_{\lambda_1}(\lambda_1) = \frac{1}{\Gamma(L) P_i^L} \left(\lambda_1 - \sigma^2\right)^{L-1} \exp\left(-\frac{\lambda_1 - \sigma^2}{P_i}\right). \tag{4.80}$$

Si l'on considère une modulation M-PSK, la probabilité d'erreur conditionnelle est donnée par l'équation (4.17), dont la fonction génératrice des moments est donnée en (4.79). Enfin la probabilité d'erreur exacte en présence de l'interférence est obtenue en utilisant la probabilité d'erreur conditionnelle et la densité de probabilité en (4.80) dans l'équation (4.14). On ne peut pas obtenir une forme exacte de la double intégration obtenue. C'est

pour cette raison, que certains auteurs [110,112] ont eu l'idée de remplacer λ_1 par sa valeur moyenne, supprimant ainsi l'intégration sur cette variable. On pose donc $\lambda_1 = LP_i\Omega_{i1} + \sigma^2$, avec $\Omega_{in} = E\left(|h_{in}|^2\right)$. En faisant cela on considère donc que l'interférent ne subit pas d'évanouissement sur le court terme. Nous verrons dans quelle mesure cette approximation est valide. En considérant que $\Omega_{in} = 1$ pour tout $n \in [1; L]$, on obtient comme approximation de la probabilité d'erreur :

$$P_s(E) \approx \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + g_{psk}\overline{\gamma}_d}\right)^{L-1} \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{psk}\overline{\gamma}_d}{1+L\overline{\gamma}_i}} d\theta, \tag{4.81}$$

avec $\overline{\gamma}_i = P_i/\sigma^2$. Cette intégrale peut-être évaluée sous forme exacte [6], mais cette forme est assez complexe et ne peut pas être inversée. Elle peut être approchée par la méthode de Laplace exposée au chapitre 1. On obtient la forme approchée suivante pour la probabilité d'erreur :

$$P_s(E) \approx \frac{1 + L\overline{\gamma}_i}{(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_d)^{L-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi L g_{psk}\overline{\gamma}_d \left(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_d + L\overline{\gamma}_i\right)\left(1 + g_{psk}\overline{\gamma}_d + \overline{\gamma}_i(L-1)\right)}}. \tag{4.82}$$

Malheureusement cette équation n'est pas soluble en $\overline{\gamma}_d$ dans le cas général (L quelconque) [5]. Elle constitue cependant une approximation simple de la probabilité d'erreur d'une M-PSK, pour un système multi-antennes à la réception en présence d'un interférent.

Dans le cas où l'on considère un signal M-QAM, on utilise toujours la MGF en (4.79) dans (4.41) pour calculer la probabilité d'erreur conditionnelle. La probabilité d'erreur totale est calculée comme indiqué ci-dessus. Comme la probabilité d'erreur M-PSK, son expression est complexe et ne possède pas de forme sans intégrale. Pour l'approcher on remplace λ_1 par sa valeur moyenne dans (4.79). On obtient une somme de deux intégrales de la MGF similaire au calcul classique de la probabilité d'erreur sans interférence (seule l'expression de la MGF est différente). On approche donc la probabilité d'erreur à l'aide d'une intégrale :

$$P_s(E) \approx \frac{4g}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + g_{qam}\overline{\gamma}_d}\right)^{L-1} \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{qam}\overline{\gamma}_d}{1+L\overline{\gamma}_i}} d\theta, \tag{4.83}$$

avec, on le rappelle, $g = 1 - 1/\sqrt{M}$ et $g_{qam} = 3/(2(M-1))$. On applique la méthode de Laplace comme on l'a fait pour les signaux PSK et on obtient la forme approchée suivante dans le cas M-QAM :

$$P_s(E) \approx \frac{(1 + L\overline{\gamma}_i)}{(1 + g_{qam}\overline{\gamma}_d)^{L-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi L g_{qam}\overline{\gamma}_d \left(1 + g_{qam}\overline{\gamma}_d + L\overline{\gamma}_i\right)\left(1 + g_{qam}\overline{\gamma}_d + \overline{\gamma}_i(L-1)\right)}}. \tag{4.84}$$

Canal de Nakagami. Pour ce canal à évanouissement, chaque élément du vecteur d'interférence est une somme de m_i v.a. gaussienne i.i.d., ayant chacune une moyenne nulle et une variance $1/m_i$. La variable aléatoire $\sum_{n=1}^{L} |h_{in}|^2$ est une variable du χ^2 centrée à

[5] Elle pourrait cependant être aisément résolue en $\overline{\gamma}_i$.

$2m_iL$ degrés de liberté. Par conséquent la densité de probabilité de λ_1 est analogue à celle donnée en (4.51) mais étendue au cas multi-antennes :

$$p_{\lambda_1}(\lambda_1) = \frac{m_i^{m_iL}}{\Gamma(m_iL)(P_i)^{m_iL}} \left(\lambda_1 - \sigma^2\right)^{m_iL-1} e^{-m_i\frac{\lambda_1-\sigma^2}{P_i}}, \quad \lambda_1 \geq \sigma^2. \tag{4.85}$$

Quant à la fonction génératrice des moments conditionnée sur λ_1, elle est analogue au cas mono-antenne et vaut :

$$M_{\gamma_t|\lambda_1}^{Naka}(s) = \frac{1}{\left(1 - s\frac{\overline{\gamma}_d}{m_d}\right)^{m_d(L-1)} \left(1 - s\frac{\sigma^2}{m_d\lambda_1}\overline{\gamma}_d\right)^{m_d}}. \tag{4.86}$$

Il est évident, au vu de ce que l'on a dit pour le canal de Rayleigh, qu'une forme exacte sans intégrale pour les probabilités d'erreur (M-PSK ou M-QAM) est impossible à obtenir. Les formes approchées vont s'obtenir en remplaçant la variable aléatoire λ_1 par sa valeur moyenne.

Les probabilités d'erreur des signaux M-PSK et M-QAM peuvent s'approcher respectivement par :

$$\begin{aligned}
P_s^{psk}(E) &\approx \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{psk}\overline{\gamma}_d}{m_d}}\right)^{m_d(L-1)} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{psk}\overline{\gamma}_d}{m_d(1+L\overline{\gamma}_i)}}\right)^{m_d} d\theta, \\
P_s^{qam}(E) &\approx \frac{4g}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{qam}\overline{\gamma}_d}{m_d}}\right)^{m_d(L-1)} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{qam}\overline{\gamma}_d}{m_d(1+L\overline{\gamma}_i)}}\right)^{m_d} d\theta,
\end{aligned}$$

L'approximation de Laplace de ces deux intégrales donnent le même résultat aux constantes de modulation près. Dans un environnement de Nakagami-m, la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK (respectivement M-QAM) en présence d'un interférent et avec un traitement OC s'approche par :

$$\begin{aligned}
P_s^{psk}(E) &\approx \frac{m_d^{Lm_d}(1+L\overline{\gamma}_i)^{m_d}}{\left(m_d(1+L\overline{\gamma}_i) + g_{psk}\overline{\gamma}_d\right)^{m_d}\left(m_d + g_{psk}\overline{\gamma}_d\right)^{m_d(L-1)}} \times \\
&\quad \sqrt{\frac{\left(m_d(1+L\overline{\gamma}_i) + g_{psk}\overline{\gamma}_d\right)\left(m_d + g_{psk}\overline{\gamma}_d\right)}{\left(m_d(1+L\overline{\gamma}_i) + g_{psk}\overline{\gamma}_d - m_d\overline{\gamma}_i\right)m_dLg_{psk}\overline{\gamma}_d\pi}} \qquad (4.87) \\
P_s^{qam}(E) &\approx \frac{m_d^{Lm_d}(1+L\overline{\gamma}_i)^{m_d}}{\left(m_d(1+L\overline{\gamma}_i) + g_{qam}\overline{\gamma}_d\right)^{m_d}\left(m_d + g_{qam}\overline{\gamma}_d\right)^{m_d(L-1)}} \times \\
&\quad \sqrt{\frac{\left(m_d(1+L\overline{\gamma}_i) + g_{qam}\overline{\gamma}_d\right)\left(m_d + g_{qam}\overline{\gamma}_d\right)}{\left(m_d(1+L\overline{\gamma}_i) + g_{qam}\overline{\gamma}_d - m_d\overline{\gamma}_i\right)m_dLg_{qam}\overline{\gamma}_d\pi}}. \qquad (4.88)
\end{aligned}$$

Si $m_d = 1$, on retombe sur les expressions obtenues pour l'environnement de Rayleigh. Ces expressions ne sont pas inversibles en $\overline{\gamma}_d$. Cependant elles constituent un moyen simple d'approcher la probabilité d'erreur rapidement. On peut remarquer sur la figure 4.6 que les deux approximations obtenues ci-dessus sont très proches de la valeurs exactes du SEP lorsque l'on considère $L = 4$ à la réception et un traitement OC. La moins bonne approximation est pour le cas 16−QAM, mais l'approximation n'est jamais éloignée de plus d'un demi décibel de la valeur exacte du SEP et ce quelque soit le paramètre d'évanouissement m_d. On a tracé le SEP pour $m_i = 3$ et $\overline{\gamma}_i = 0$dB. Si le INR augmente les courbes sont décalées vers les forts SNR mais la précision reste identique.

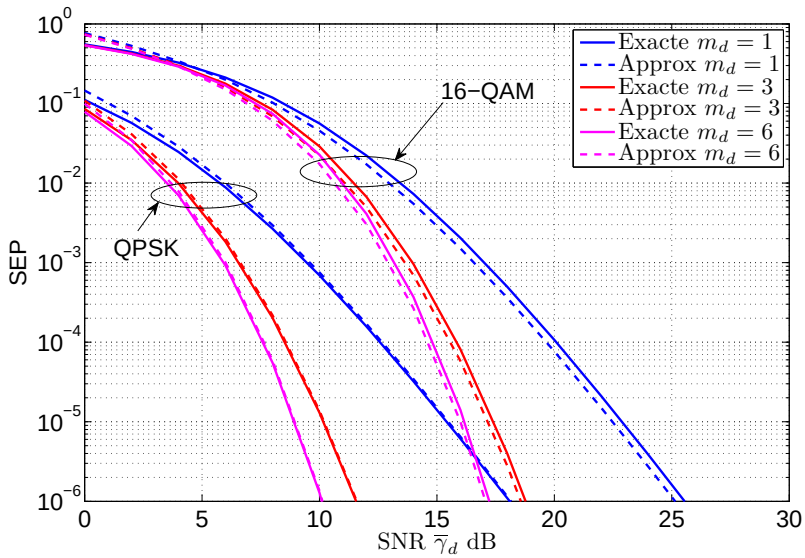


FIG. 4.6 – Probabilité d'erreur exacte et approximative d'un signal QPSK et 16-QAM avec un interférent co-canal en environnement de Nakagami. Le rapport INR est de 0dB et $m_i = 3$.

Canal de Rice. La fonction génératrice des moments conditionnelle est :

$$\begin{aligned} M^{Rice}_{\gamma_t|\lambda_1}(s) &= \frac{1}{\left(1 - s\frac{\sigma^2\overline{\gamma}_d}{(1+K_d)\lambda_1}\right)\left(1 - s\frac{\overline{\gamma}_d}{1+K_d}\right)^{L-1}} \times \\ &\quad \exp\left[\frac{K_d}{1+K_d}s\left(\frac{\frac{\sigma^2}{\lambda_1}\overline{\gamma}_d}{1 - s\frac{\sigma^2\overline{\gamma}_d}{(1+K_d)\lambda_1}} + \frac{(L-1)\,\overline{\gamma}_d}{1 - s\frac{\overline{\gamma}_d}{1+K_d}}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.89}$$

et la densité de probabilité de la valeur propre λ_1 est celle d'une variable du χ^2 non centrée :

$$\begin{aligned} p_{\lambda_1}(\lambda_1) &= \frac{1+K_i}{P_i}\left(\frac{1+K_i}{LK_i}\right)^{(L-1)/2}\left(\frac{\lambda_1 - \sigma^2}{P_i}\right)^{(L-1)/2} \\ &\quad \times \exp\left(-\left[LK_i + (1+K_i)\frac{\lambda_1 - \sigma^2}{P_i}\right]\right) \\ &\quad \times I_{L-1}\left(2\sqrt{LK_i(1+K_i)\frac{\lambda_1 - \sigma^2}{P_i}}\right), \end{aligned} \tag{4.90}$$

où $I_{L-1}(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de premier espèce d'ordre $L-1$. Comme dans les cas précédents, aucune forme exacte (autres qu'avec des intégrales) n'est disponible pour le calcul de la probabilité d'erreur.

Pour le cas mono-antenne, on n'a pas pu proposer une approximation de la probabilité d'erreur dans cet environnement. Dans le cas multi-antennes, on peut remplacer λ_1 par sa valeur moyenne dans (4.89), comme nous l'avons fait pour l'environnement Rayleigh ou Nakagami-m, et ainsi éviter l'intégration sur λ_1. Que ce soit pour un signal M-PSK

ou M-QAM, on peut donc obtenir une approximation de la probabilité d'erreur avec une seule intégrale que l'on peut ensuite approcher par la méthode de Laplace. Les expressions obtenues sont cependant très lourdes et ne sont donc pas données ici. Comme dans le cas Rayleigh ou Nakagami-m, elles ne sont pas inversibles en $\overline{\gamma}_d$.

4.4.2 Présence d'interférents multiples de même puissance.

Deux cas de figures peuvent survenir dans cette situation. Premièrement le nombre d'interférent est inférieur au nombre d'antenne en réception, ou il est supérieur. Le deuxième cas correspond typiquement à un scénario de type UMTS CDMA. Le système est généralement limité par les interférences plutôt que par le bruit AWGN du récepteur et le nombre de signaux interférent N_i est généralement bien supérieur au nombre d'antennes L. Le nombre de degré de liberté du système d'antenne est insuffisant pour permettre de distinguer l'interférence du bruit. Le récepteur OC traite le bruit et l'interférence comme une seule entité et échoue à supprimer les interférences.

Dans d'autres systèmes de télécommunications cellulaires comme par exemple le GSM, où le WLAN, l'interférence va être due seulement à quelques signaux dominants. Dans ce cas, le nombre de degré de liberté du système d'antenne peut être suffisant pour avoir un sous-espace d'observation du bruit différent de celui des interférences. Ainsi les interférents peuvent être combattus et correctement rejetés. Le cas où le nombre d'interférents est inférieur au nombre d'antenne en réception est une extension du cas mono-interférent.

Nombre d'interférent inférieur au nombre d'antennes. Le modèle du système doit maintenant intégrer la présence d'interférent multiples :

$$\mathbf{y}(t) = \sqrt{P_d}\mathbf{h}_d s_d\,(t) + \sum_{n=1}^{N_i} \sqrt{P_i}\mathbf{h}_{i_n} s_{i_n}\,(t) + \mathbf{n}(t). \tag{4.91}$$

En supposant que les N_i signaux interférents sont indépendants alors la matrice de covariance $\mathbf{R}_{ni}$ est :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ni} &= E\left\{\left(\sum_{n=1}^{N_i} \sqrt{P_i}\mathbf{h}_{i_n} s_{i_n}\,(t) + \mathbf{n}(t)\right)\left(\sum_{n=1}^{N_i} \sqrt{P_i}\mathbf{h}_{i_n} s_{i_n}\,(t) + \mathbf{n}(t)\right)^H\right\}, \\ &= P_i \sum_{n=1}^{N_i} \mathbf{h}_{i_n}\mathbf{h}_{i_n}^H + \sigma^2\mathbf{I}.\end{aligned} \tag{4.92}$$

Le SINR maximum en sortie de traitement a toujours l'expression en (4.74). Cependant la décomposition en valeur propres de $\mathbf{R}_{ni}$ conduit maintenant à N_i valeurs propres aléatoires : $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_i}$ et $L - N_i$ valeurs propres égales à σ^2. Par conséquent la fonction génératrice des moments du SINR en sortie de traitement s'exprime encore sous forme d'un produit :

$$M_{\gamma_t|\lambda_1,\ldots,\lambda_{N_i}}(s) = [M_{\gamma_d}(s)]^{L-N_i} \prod_{n=1}^{N_i} M_{\gamma_d}\left(\frac{\sigma^2}{\lambda_n}s\right), \tag{4.93}$$

avec λ_n la $n-$ième valeur propre de la matrice de covariance $\mathbf{R}_{ni}$. La difficulté consiste maintenant à déterminer les N_i valeurs propres aléatoires qui sont liées de façon complexe à la puissance totale reçue par le système d'antenne [115].

En effet, lorsque le nombre d'interférent est limité à deux et qu'un environnement de Rayleigh est considéré, les deux valeurs propres aléatoires λ_1 et λ_2 peuvent être déterminées de manières exactes (voir les travaux en [120] et [111]). Cependant leur expression dépend du coefficient de corrélation entre les vecteurs de propagations des deux signaux interférents $\mathbf{h}_{i_1}$ et $\mathbf{h}_{i_2}$, ainsi que des deux INR instantanés γ_{i_1} et γ_{i_2}. Dans un canal de Rayleigh, la MGF conditionnée sur les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 est similaire à (4.79) mais avec une valeur propre en plus. Dans le cas où les vecteurs de propagations des deux signaux interférents sont orthogonaux (les deux v.a. λ_1 et λ_2 sont décorrélées), les densités de probabilités des valeurs propres ont la même forme que (4.80). La probabilité d'erreur d'un signal M-PSK s'exprime à l'aide d'une intégrale triple dont l'une d'elle peut être calculée sous forme exacte [120]. Aucune forme exacte sans intégrale n'est cependant disponible.

Afin d'obtenir des formes de la probabilité d'erreur un peu plus simples lorsque le nombre d'interférents est inférieur au nombre d'antenne en réception, E. Villier dans [115] applique la même approche que celle vue lorsqu'il n'y avait qu'un seul interférent. Chaque valeur propre aléatoire est remplacée par sa valeur moyenne, qui est supposée être identique pour toutes les valeurs propres, soit $\overline{\lambda}_i = LP_i + \sigma^2, \;\; i = 1, 2, \ldots, N_i$. Selon l'auteur de [115], la validité de cette approximation est justifiée pour le cas où le niveau d'interférence est élevé par rapport à la puissance du signal et où $L \gg N_i$. Sous ces conditions, le produit $\prod_{n=1}^{N_i} M_{\gamma_d}\left(\frac{\sigma^2}{\lambda_n} s\right)$ dans (4.93) tend à devenir insignifiant comparé au terme $[M_{\gamma_d}(s)]^{L-N_i}$. Dans ce cas la MGF conditionnée sur $\overline{\lambda}_1$ (puisque $\overline{\lambda}_1 = \ldots = \overline{\lambda}_{N_i}$) dans un environnement Rayleigh peut s'écrire :

$$M_{\gamma_t|\overline{\lambda}_1}(s) = \frac{1}{(1 - s\overline{\gamma}_d)^{L-N_i}\left(1 - s\frac{\overline{\gamma}_d}{1+L\overline{\gamma}_i}\right)^{N_i}}, \tag{4.94}$$

et la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK peut approximativement s'écrire :

$$P_s(E) \approx \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + g_{psk}\overline{\gamma}_d}\right)^{L-N_i} \left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{g_{psk}\overline{\gamma}_d}{1+L\overline{\gamma}_i}}\right)^{N_i} d\theta. \tag{4.95}$$

On peut noter la similarité de forme entre l'expression ci-dessus et le cas où l'on a considéré un interférent dans un canal de Nakagami-m. Comme dans le cas précédent, on pourrait appliquer la méthode de Laplace sur cette intégrale et obtenir une forme approchée sans intégrale et l'expression obtenue serait très similaire à celle donnée en (4.87). La probabilité d'erreur d'un signal M-QAM s'approcherait de la même manière.

Nombre d'interférent supérieur ou égal au nombre d'antennes. Ce scénario correspond typiquement à un système UMTS en charge où le récepteur (station de base ou mobile) va être limité par les interférences plutôt que par le bruit. Ce cas a bien été traité dans la littérature. Les auteurs en [114] traitent le cas où le signal d'intérêt et les signaux interférents subissent un canal de Rayleigh. En [121, 122] le cas où le signal d'intérêt subit un canal de Rice et les interférents un canal de Rayleigh est étudié. Enfin les auteurs en [123] étendent ces derniers résultats puisqu'ils considèrent les interférents dans un canal de Nakagami-m. Dans tous ces travaux, on cherche à obtenir une expression de la densité de probabilité ou de la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire SIR γ_t. Les expressions obtenues sont assez complexes, et aucune forme simple et inversible de la probabilité d'erreur ne peut être dérivées dans ces cas.

4.4.3 Interférents multiples et de puissances arbitraires.

Jusqu'à présent les résultats que nous avons donnés ou mentionnés, sont valides lorsque les signaux interférents ont la même puissance moyenne. Lorsque ce n'est plus le cas, les résultats sont complètement différents. En [124] les auteurs étudient la probabilité d'erreur d'un signal M-PSK en présence d'interférents multiples de différentes puissances, pour un récepteur de type OC. L'expression dérivée fait intervenir une seule intégrale à borne finie. Les auteurs arrivent à trouver une forme exacte sans intégrale pour le cas d'une modulation BPSK. Cependant l'expression donnée en [124] fait intervenir une quadruple somme discrète du SNR, ce qui en fait une expression somme toute assez complexe.

4.4.4 Systèmes MIMO et interférents multiples.

Nous disons un mot sur le cas MIMO, bien que l'on ne puisse pas dériver des expressions qui nous soient intéressantes dans l'inversion de la probabilité d'erreur. On considère un système MIMO $n_t \times n_r$, limité par N_i interférents co-canal (le bruit thermique est donc négligé). Le signal discret équivalent reçu sur les antennes en réception est :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_d \mathbf{w}_t s_d + \sum_{n=1}^{N_i} \sqrt{P_i} \mathbf{H}_{i,n} s_{i,n}, \tag{4.96}$$

avec s_d et $s_{i,n}$ sont les signaux transmis du signal d'intérêt et du $n-$ième interférent. Leur puissance est normalisée à l'unité. On suppose que tous les interférents ont la même puissance moyenne P_i. On a omis l'indice temporel par commodité d'écriture. Le vecteur $\mathbf{w}_t$ représente les poids d'émission sur les antennes à l'émission avec pour contrainte $||\mathbf{w}_t||^2 = P_d$ (la puissance d'émission est plafonnée à une certaine valeur). La matrice $\mathbf{H}_d \in \mathbb{C}^{n_r \times n_t}$ représente la matrice du canal de propagation pour l'utilisateur d'intérêt. D'un autre côté, $\mathbf{H}_{i,n} = (h_{i,1,n}, h_{i,2,n}, \ldots, h_{i,n_r,n})^T$ est le vecteur du canal de propagation du signal interférent vu au récepteur. Donc les N_i interférents co-canaux peuvent être réécris de manière matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_d \mathbf{w}_t s_d + \sqrt{P_i} \mathbf{H}_i \mathbf{s}_i, \tag{4.97}$$

avec :

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} h_{i,1,1} & h_{i,1,2} & \ldots & h_{i,1,N_i} \\ h_{i,2,1} & h_{i,2,2} & \ldots & h_{i,2,N_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i,n_r,1} & h_{i,n_r,2} & \ldots & h_{i,n_r,N_i} \end{pmatrix}_{n_r \times N_i}, \tag{4.98}$$

$$\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} s_{i,1} \\ s_{i,2} \\ \vdots \\ s_{i,N_i} \end{pmatrix} \tag{4.99}$$

Traitement optimal. La recombinaison optimale (au sens du SIR maximum) au récepteur est bien connue et est donnée par :

$$\mathbf{w}_r = \alpha \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}_d \mathbf{w}_t, \tag{4.100}$$

où α est une constante qui ne change pas la valeur du SIR en sortie de traitement. De plus $\mathbf{R} = \mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^H$. Si un tel traitement est appliqué au récepteur, le SIR est maximal et vaut :

$$\gamma_t = \frac{1}{P_i}\mathbf{w}_t^H\mathbf{H}_d^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_d\mathbf{w}_t. \tag{4.101}$$

Il a été montré que la stratégie optimale d'émission (lorsqu'une connaissance de l'état du canal est disponible à l'émission) consistait à choisir le vecteur $\mathbf{w}_t$ tel que :

$$\mathbf{w}_t = \sqrt{P_d}\mathbf{u}_{\max}, \tag{4.102}$$

où $\mathbf{u}_{\max}$ ($||\mathbf{u}_{\max} = 1||$) est le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de la forme quadratique suivante : $\mathbf{F} = \mathbf{H}_d^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}_d$. Le SIR maximal en sortie de traitement est donc :

$$\gamma_t = \frac{P_d}{P_i}\lambda_{\max}, \tag{4.103}$$

où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de $\mathbf{F}$. Autrement dit les performances d'un système MIMO avec de multiples interférents co-canal sont entièrement déterminées par la statistique de $\lambda_{\max}$. Bien que la densité de probabilité de $\lambda_{\max}$ ou sa fonction génératrice des moments est connue pour un certain nombre de cas (Rayleigh, Rice), elles n'en sont pas moins très complexes, faisant intervenir des déterminants de matrices dans lesquelles apparaissent le SIR. Par conséquent, trouver des formes inversibles de la probabilité d'erreur se révèle très compromis.

4.5 Conclusion

Nous nous sommes intéressés à l'étude de la probabilité de coupure lorsque le lien radio était affecté par un ou plusieurs interférents co-canal, pour des systèmes mono ou multi-antennes. L'étude des interférences est essentielle dans l'analyse de performances des systèmes radios. C'est l'effet limitant de la capacité des réseaux cellulaires. Cependant les scénarios ou l'on peut obtenir des approximations inversibles de la probabilité d'erreur en présence d'interférence sont peu nombreux. Nous avons néanmoins pu obtenir quelques résultats qui nous paraissent importants.

1. Nous avons proposé une approximation simple et inversible de la probabilité d'erreur (M-PSK, M-QAM) d'un signal perturbé par un interférent co-canal tous deux en canal de Rayleigh. Le SNR moyen est la solution positive d'une équation du troisième degré, dont les coefficients ont été exprimés exclusivement en fonction des paramètres du système (SEP moyen cible, modulation, puissance de l'interférence).
2. L'expression du SNR moyen en fonction du SEP moyen et de la puissance moyenne de l'interférent, permet de remonter à la probabilité de coupure symbole, lorsque les deux signaux subissent deux effets de shadowing décorrélés. La probabilité de coupure symbole se calcul à l'aide d'une intégrale à borne non finie. Nous proposons une approximation de la probabilité de coupure symbole valable lorsque la puissance moyenne du signal d'intérêt reçue au récepteur est grande comparée à celle de l'interférent. Elle ne permet de prévoir que des probabilités de coupure inférieures à 1%, et à l'avantage d'éviter l'évaluation d'une intégrale infinie.
3. Lorsque le signal d'intérêt et interférent subissent tous deux un canal de Nakagami-m, nous proposons une approximation asymptotique de la probabilité d'erreur. L'expression obtenue est inversible par rapport au SNR, mais précise seulement à fort SNR.

Cela permet de caractériser rapidement le comportement asymptotique du SEP, tout en prenant en compte l'évanouissement de l'interférent.

4. Nous proposons également une nouvelle approximation précise (mais non inversible) de la probabilité d'erreur lorsque le système possède plusieurs antennes en réception et effectue un traitement OC, lorsque les interférents sont inférieurs au nombre d'antennes.

Beaucoup de scénarios restent encore à étudier. Notamment dans le cas où le signal d'intérêt et interférent subissent un évanouissement de Rice, où aucune forme simple de la probabilité d'erreur n'a pu être obtenue. Je pense personnellement que l'on pourrait essayer de chercher des approximations de la fonction de Bessel I_n. Il en existe mais il faudrait étudier leurs comportements.

Dans le cas d'un système MIMO, la probabilité d'erreur moyenne est extrêmement compliquée. Les formes exactes existent, mais font intervenir plusieurs déterminants de matrices ce qui rend l'inversion analytique par rapport au SNR assez compromis.

Le problème de l'interférence est le point limitant dans les performances des systèmes de télécommunications. Dans ce chapitre, nous avons vu l'influence de la présence d'interférence sur la probabilité d'erreur du signal d'intérêt. Le prochain et dernier chapitre étudie les performances d'un lien radio avec un algorithme de réjection d'interférence.

CHAPITRE

5 Détection Multi utilisateurs

5.1 Introduction et position du problème

L'interférence entre utilisateurs est l'effet limitant dans les réseaux cellulaires de part la structure en cellule d'un réseau de communication. Dans ce chapitre, nous nous appuyons sur l'exemple d'un réseau de type WLAN (Wireless Local Area Network), qui est fortement contraint en ressource spectrale à l'heure actuelle. En effet 14 canaux de 22MHz sont disponibles sur une bande totale de près de 83.5MHz (pour le standard 802.11g), leur utilisation est très réglementé et la législation dépend du pays considéré. Les ingénieurs de planification sont contraints d'utiliser peu de canaux non recouvrants afin de limiter les interférences entre cellules adjacentes. En Europe par exemple, seuls les canaux 1, 5, 9 et 13 sont utilisés.

Les scénarios de déploiement envisagés aujourd'hui sont très variés et vont de l'environnement intérieur au déploiement sur de larges zones en extérieur. Quelque soit le scénario envisagé, chaque point d'accès doit fournir à l'utilisateur une grande qualité de service (QoS) surtout pour des services de voix sur IP par exemple. L'allocation maximale de 4 canaux non recouvrant est clairement insuffisante pour la densité de déploiement envisagée aujourd'hui. Mais augmenter le nombre de canaux alloués c'est augmenter les interférences entre cellules. Considérons une cellule d'intérêt C_0, la planification par coloriage [125] stipule qu'au moins 4 canaux indépendants sont nécessaires pour éviter les interférences entre utilisateurs dans le premier anneau. Le premier anneau est défini comme l'ensemble des cellules directement adjacentes à la cellule C_0. Plusieurs stratégies de planification peuvent être envisagées comme illustré sur la figure 5.1. Si une réutilisation agressive de la ressource spectrale est permise, avec l'utilisation de 4 canaux non recouvrant, les cellules adjacentes à C_0 ne gênèrent pas d'interférences pour celle-ci. En effet le premier anneau compte 6 cellules (sans C_0) dans un modèle hexagonale. On dispose de 4 fréquences distinctes pour 7 cellules. On alloue la fréquence f_1 à C_0, une autre fréquence f_5 par exemple est allouée à deux cellules diamétralement opposées par rapport à C_0 5.1a). Par contre, le deuxième anneau réutilise la ressource spectrale de la cellule C_0. Autrement dit, le deuxième anneau produit de l'interférence co-canal (CCI pour "co-channel interference") importante sauf si le contrôle d'accès au médium (Medium Access Control : MAC) est capable de détecter la présence d'un interférent. Si maintenant, on dispose non plus de 4 canaux non recouvrant mais de 7 se chevauchant partiellement 5.1b), l'interférence co-canal est plus faible car plus éloignée de C_0. Par contre, les cellules adjacentes produisent de l'interférence recouvrante appelée PCI (Partial Channel Interference). Il est évident qu'une telle planification sans faire de traitement de l'interférence, ne fonctionne absolument pas. Un mobile et un point d'accès ne peuvent tenir une communication avec un interférent recouvrant sans le traiter. Il apparaît donc naturel de chercher à prendre en compte l'interférent au niveau du terminal afin d'augmenter la densité de points d'accès que l'on peut déployer tout en gardant une bonne qualité de service.

Après un état de l'art rappelant les travaux antérieurs sur la réjection d'interférence, nous nous penchons sur l'analyse théorique d'un récepteur multi-utilisateurs à maximum de vraisemblance (MUD-MLSE "Multi-User Detection Maximum Likelihood Sequence Es-

timator"), en partant de la formulation de Ungerboeck et en la généralisant au cas multi-utilisateurs. Nous dérivons une borne théorique supérieure pour la probabilité d'erreur multi-utilisateurs en canal sélectif et à évanouissements lents. Nous nous proposons ensuite d'étudier les performances d'un récepteur multi-utilisateurs à canaux recouvrants dans un contexte WLAN. Nous proposons une méthode de réduction de la complexité du récepteur MUD-MLSE, puis nous étudions les performances d'un système IEEE 802.11*b* à étalement de spectre mettant en oeuvre un détecteur MUD-MLSE où une amélioration sensible des performances est obtenue.

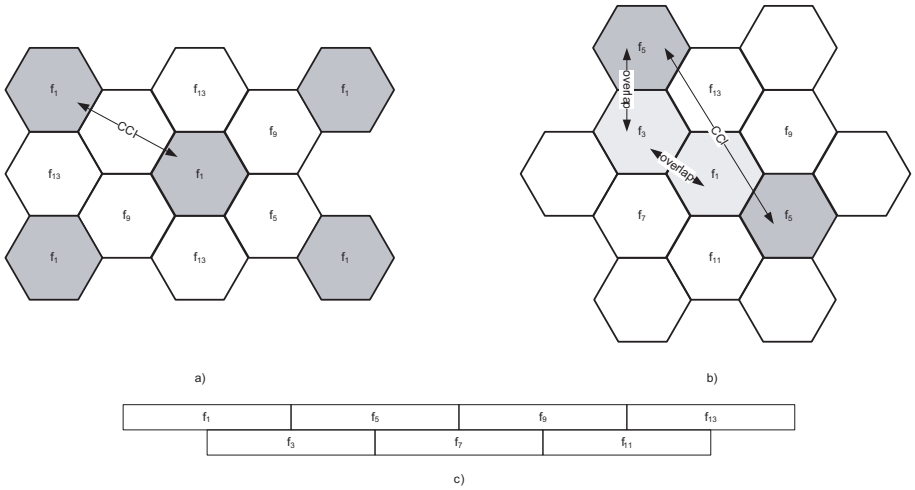


FIG. 5.1 – Différentes stratégies de planification : a) allocation de 4 canaux entraînant un fort CCI ; b) allocation de 7 canaux entraînant un chevauchement des bandes mais un plus faible CCI ; c) Allocation des canaux en Europe pour le WLAN.

5.2 Annulation d'interférence et récepteur multi-utilisateurs

Sergio Verdú a posé les bases du détecteur multi-utilisateurs dans un contexte CDMA avec plusieurs contributions majeures au début des années 80 [126]. La détection basée sur une technique MLSE confère un caractère d'optimalité à la détection (en terme de probabilité d'erreur) mais elle est d'un coût prohibitif en terme de complexité de calcul. Depuis beaucoup de travaux ont essayé d'obtenir les performances les plus proches des bornes mono-utilisateurs tout en gardant une complexité de traitement raisonnable [127, 128].

La plupart des travaux sur la réjection d'interférence essayent d'annuler des interférents co-canal. Un détecteur linéaire à erreur quadratique moyenne minimale (LMMSE) est proposé en [129] afin de luter contre la dispersion temporelle du canal et les interférences co-canal dans la bande ISM. Le détecteur proposé affiche des performances bien meilleures que le récepteur RAKE traditionnel. En [130], un détecteur MAP (Maximum A *posteriori* Probability) est utilisé avec un système MIMO afin d'éliminer l'interférence co-canal. Les auteurs expliquent que le système détection de porteuse (CSMA/CA) échoue fréquemment à éviter deux communications simultanées et ils montrent qu'un traitement de l'interférence permet de doubler la capacité du système.

Des techniques de réjection aveugles ou semi-aveugle de l'interférence, lorsque peu d'information *à priori* sur les interférences est disponible, ont également été étudiées pour éliminer les interférences co-canal [131, 132]. Les techniques multi-antennes évoquées dans

ce manuscrit sont également très étudiées pour éliminer les interférences suivant une direction spatiale donnée [133]. Cependant une telle approche trouve ses limites dans les environnements intérieurs fortement dispersifs, où le rayonnement des signaux interférents sur le récepteur est relativement isotrope.

Parallèlement à cela, peu d'attention a été accordée à la minimisation d'interférence canal adjacent ou recouvrant. Ce type d'interférence joue un rôle crucial dans la limitation des capacités des réseaux WLAN. Un travail très important pour nous a été celui de Arslan *et al.* en [134]. Les auteurs étendent le récepteur MLSE aux cas où plusieurs canaux se recouvrent partiellement pour des signaux de type GSM. Ils montrent que pour des scénarios fortement contraint par l'interférence (recouvrement important, forte puissance interférente), un gain significatif peut être atteint grâce au récepteur multi-utilisateurs MLSE. Une contribution intéressante également est celle de Dinis *et al.* dans [135], où les auteurs développent un récepteur itératif dans le domaine fréquentiel pour combattre l'interférence canal adjacent ainsi que l'interférence entre symbole introduite par le canal. Ils démontrent qu'après quelques itérations, les performances du récepteur s'approchent de la borne mono-utilisateur sans interférence.

5.3 Système à réjection d'interférence par maximum de vraisemblance

Dans cette partie, nous étudions un récepteur multi-utilisateurs basé sur le critère du maximum de vraisemblance. Nous nous appuyons sur les travaux de Arslan *et al.* [134], qui proposèrent un récepteur à maximum de vraisemblance capable de gérer les interférences co-canal et canal adjacent. Leurs travaux se basent sur la formulation de Ungerboeck [136], et s'appliquent aux signaux GSM. Nous verrons dans la section suivante que cette technique peut être très utile dans un contexte WLAN à canaux recouvrant.

5.3.1 Modèle et équations du récepteur

Récepteur multi-utilisateurs général. Dans ce qui précède, nous nous sommes limités aux canaux plats. Nous considérons ici que les canaux puissent être sélectifs en fréquence. On considère également un récepteur large bande capable de filtrer et d'échantillonner plusieurs fois sa largeur de bande (ce qui est le cas en pratique, puisqu'aucun récepteur ne travail à la fréquence de Nyquist en réception). En WLAN, par exemple on peut aller jusqu'à un suréchantillonnage de 4 à 6 fois la fréquence de Nyquist.

Si l'on considère une séquence de symbole $\{d_k(n), n = 1, \cdots, N\}$ sur la $k-$ième bande, avec N la longueur de la séquence considérée. Le signal émis sur cette bande est :

$$x_k(t) = \sum_n d_k(n) h_f(t - nT_s), \tag{5.1}$$

où T_s est le temps symbole et $h_f(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme. Les fréquences porteuses des utilisateurs k et l sont séparées de $\Delta f_{kl} = \Delta f \cdot (l - k)$ où Δf est l'écart minimum entre les porteuses. Les signaux se propagent à travers le canal de propagation de réponse impulsionnelle $h_k(t)$ (relativement à la bande k). Un bruit AWGN de densité spectrale mono-latérale N_0 est ajouté au récepteur. En supposant que l'utilisateur i soit celui d'intérêt, le signal reçu au récepteur de cet utilisateur s'écrit :

$$y(t) = \sum_n d_i(n) g_i(t - nT_s) + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \sum_n e^{j2\pi\Delta f_{ik} t} d_k(n) g_k(t - nT_s) + n(t), \tag{5.2}$$

avec $g_k(t) = h_f(t) \odot h_k(t)$. $g_k(t)$ est donc la forme d'onde globale "mise en forme + canal de propagation". Pour un système non codé, la détection optimale multi-utilisateurs est obtenue au moyen d'un détecteur à maximum de vraisemblance. En supposant la réponse du canal et l'espacement inter-porteuse connues, maximiser la vraisemblance des données reçues revient à maximiser :

$$J_H = -\int |y(t) - \tilde{y}(t)|^2 dt, \tag{5.3}$$

avec :

$$\tilde{y}(t) = \sum_n \tilde{d}_i(n) g_i(t - nT_s) + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \sum_n e^{j2\pi\Delta f_{ik} t} \tilde{d}_k(n) g_k(t - nT_s), \tag{5.4}$$

où $\tilde{d}_i$ et $\tilde{d}_k$ sont les symboles désirés du signal de la bande d'intérêt et des bandes adjacentes respectivement que l'on notera simplement par la suite d_i et d_k. En développant (5.3), on obtient une somme de 3 termes A_H, B_H et C_H qui valent respectivement :

$$\begin{aligned} A_H &= -\int |y(t)|^2 \, dt, \\ B_H &= \sum_k \sum_n Re\left\{2 d_k^*(n) \psi_k(n)\right\}, \qquad (5.5) \\ C_H &= -\sum_k \sum_l \sum_n \sum_m d_k^*(n) d_l(m) e^{j2\pi\Delta f_{kl} m T_s} s_{kl}(n-m), \qquad (5.6) \end{aligned}$$

où $\psi_k(n)$ est la sortie du filtre adapté à la bande k échantillonnée au temps symbole, $s_{kl}(n-m)$ est la fonction d'intercorrélation entre la $k-$ième et la $l-$ième bande, échantillonnée au temps symbole. De plus :

$$\begin{aligned} \psi_k(n) &= \int y(t) e^{-j2\pi\Delta f_{ik} t} g_k^*\left(t - nT_s\right) dt, \qquad (5.7) \\ s_{kl}(p) &= \int g_l(t) e^{j2\pi\Delta f_{kl} t} g_k^*\left(t - pt_s\right)) \, dt. \qquad (5.8) \end{aligned}$$

Par conséquent, le critère en (5.3) peut s'exprimer sous la forme d'une somme discrète de métrique de branche :

$$J_H = \sum_k \sum_n 2Re\left\{d_k^*(n)\psi_k(n)\right\} - \sum_k \sum_l \sum_n \sum_m d_k^*(n) e^{j2\pi\Delta f_{kl} m T_s} s_{kl}(n-m) d_l(m), \tag{5.9}$$

le terme A_H est omis car c'est un terme constant pour une observation $y(t)$ donnée et qui est commun aux sommes de J_H. La forme du critère obtenu en (5.9) est celle de [134] et est similaire à celle obtenue par Ungerboeck [136] dans le cas mono-utilisateur. Dans notre cas, c'est une généralisation au cas multi-utilisateurs et multi-bandes dans des canaux sélectifs en fréquence. Le premier terme dans la double somme ci-dessus correspond à la sortie du filtre adapté relatif à la bande k, pondérée par le symbole émis sur cette même bande à l'instant n. Le second terme dans la quadruple somme contient toutes les interférences entre symboles possibles. Il contient les interférences entre symboles relatives à la bande k (pour tous k) dues à l'étalement temporel du canal de propagation $g_k(t)$, ainsi que les interférences entre symboles entre les bandes des différents utilisateurs. Le critère ci-dessus peut être maximisé avec un algorithme de Viterbi, afin de retrouver les séquences

de symboles émis les plus vraisemblables. Notons cependant que ce critère n'est pas causal et ne se prête pas à une implémentation par un algorithme de Viterbi pour le moment, mais nous y reviendrons plus tard.

5.3.2 Performance en terme de probabilité d'erreur

Dans cette section, nous adaptons l'analyse faites par Ungerboeck, elle-même inspirée de celle de Forney [137], pour un récepteur multi-utilisateurs multi-bandes à maximum de vraisemblance. Le comportement d'un récepteur MLSE est communément représenté par un treillis. Dans notre cas, la complexité du treillis est assez importante puisque celui-ci possède $M^{K(L-1)}$ états, où M est l'ordre de la modulation, K le nombre d'utilisateurs et L est l'étalement temporel du canal de propagation en nombre de symbole, supposé identique pour tous les canaux. La métrique en (5.9) s'exprime comme une somme de métrique de branche élémentaire $M_k(n)$:

$$J_H = \sum_k \sum_n M_k(n), \tag{5.10}$$

avec :

$$M_k(n) = 2Re\left\{d_k^*(n)\psi_k(n)\right\} - \sum_l \sum_m d_k^*(n) e^{j2\pi\Delta f_{kl} m T_s} s_{kl}(n-m) d_l(m). \tag{5.11}$$

L'algorithme de Viterbi maximise la métrique (5.9) de manière à retrouver les séquences des symboles émis sur chaque canal. Comme il y a K utilisateurs, on cherche à détecter simultanément les K séquences émises :

$$\{\mathbf{d}(n)\}_{n=0}^N \triangleq \begin{pmatrix} \{d_1(n)\}_{n=0}^N \\ \{d_2(n)\}_{n=0}^N \\ \vdots \\ \{d_K(n)\}_{n=0}^N \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

A l'instant n, chaque état du treillis est défini par les $L-1$ symboles les plus récents pour chaque bande. En utilisant une notation vecteur, on peut noter l'état q du treillis multi-utilisateurs de la manière suivante (avec $q = 1...M^{K(L-1)}$) :

$$\mathbf{S}^{(q)}(n) \triangleq \begin{pmatrix} d_1^q(n-1) & d_1^q(n-2) & \dots & d_1^q(n-L+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_K^q(n-1) & d_K^q(n-2) & \dots & d_K^q(n-L+1) \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Pour éviter d'alourdir les notations par la suite, on omettra l'indice q. On appelle métrique cumulée à l'instant $N-1$, la valeur de la métrique telle que $J_{N-1} = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N-1} M_k(n)$. Une propriété intéressante de cette quantité est que son évaluation ne dépend que des valeurs des $N+L-1$ premiers symboles $d_k(-L+1), ..., d_k(N-1)$ sur chaque canal. De plus on peut écrire : $J_N = J_{N-1} + \sum_k M_k(N)$. Etant donnée une transition $\mathbf{S}(n-1) \rightarrow \mathbf{S}(n)$, les symboles probables $\mathbf{d}(n)$ émis à cet instant sont déterminés, et cela pour chaque état du treillis.

Événement erreur. Les détecteurs à maximum de vraisemblance sont très similaires au décodage de codes convolutifs à décisions souples [5]. On peut définir une séquence erreur qui correspond à une séquence estimée $\left\{\hat{\mathbf{d}}(n)\right\}$ différente de la séquence émise $\{\mathbf{d}(n)\}$:

$$\{\mathbf{e}(n)\} = \left\{\hat{\mathbf{d}}(n)\right\} - \{\mathbf{d}(n)\}\,. \tag{5.14}$$

On suppose que le chemin estimé dans le treillis diverge du chemin correcte à l'instant n et le rejoint à l'instant $n+\nu$. On a : $\hat{\mathbf{S}}(n) = \mathbf{S}(n)$ et $\hat{\mathbf{S}}(n+\nu) = \mathbf{S}(n+\nu)$ mais $\hat{\mathbf{S}}(m) \neq \mathbf{S}(m)$ pour $n < m < n+\nu$. Puisque le canal s'étend sur L symboles, on a $\nu \geq L$. Une telle réalisation est appelée "événement erreur".

De plus, pour un événement erreur on a : $\hat{\mathbf{d}}(n) \neq \mathbf{d}(n)$ et $\hat{\mathbf{d}}(n+\nu-L) \neq \mathbf{d}(n+\nu-L)$, mais $\hat{\mathbf{d}}(m) = \mathbf{d}(m)$, pour $\{n-L+1 \leq m \leq n-1\} \cap \{n+\nu-L+1 \leq m \leq n+\nu-1\}$. Un événement erreur est défini comme :

$$\varepsilon : \{\mathbf{e}(n)\} = \begin{pmatrix} e_1(n) & e_1(n+1) & \dots & e_1(n+\nu-L) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_K(n) & e_K(n+1) & \dots & e_K(n+\nu-L) \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Pour qu'un événement erreur survienne, il faut que 3 "sous-événements" se réalisent :

ε_1 **:** à l'instant n, $\hat{\mathbf{S}}(n) = \mathbf{S}(n)$;

ε_2 **:** Les symboles de chaque bande $\mathbf{d}(n), \mathbf{d}(n+1), \dots, \mathbf{d}\,(n+\nu-L)$ sont tels que l'ajout de la séquence d'erreur $\mathbf{e}(n), \mathbf{e}(n+1), \dots, \mathbf{e}\,(n+\nu-L)$ résulte en l'obtention d'une séquence $\hat{\mathbf{d}}(n), \hat{\mathbf{d}}(n+1), \dots, \hat{\mathbf{d}}\,(n+\nu-L)$ prenant ses valeurs dans l'alphabet de la modulation ;

ε_3 **:** Pour $n \leq m < n+\nu$ la somme des métriques de branches du chemin estimé excède la somme des métriques du chemin correcte.

La probabilité que l'événement ε_2 soit réalisé ne dépend que du type des constellations émises. La probabilité que ε_1 soit réalisé dépend du bruit intervenant dans la réalisation de l'événement ε_3. Mais la probabilité conditionnelle de ε_1 sur ε_3 est donnée par $P\,(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 1 - P_s\,(E)$, où $P_s\,(E)$ est la probabilité d'erreur symbole [5]. Pour des faibles valeurs de $P_s\,(E)$, la probabilité conditionnelle est majorée par 1. Par conséquent, la probabilité qu'un événement erreur ε survienne est :

$$P\,(\varepsilon) = P\,(\epsilon_3)\,P\,(\varepsilon_2)\,P\,(\varepsilon_1\,|\epsilon_3)\,, \tag{5.16}$$

$$P\,(\varepsilon) \leq P\,(\epsilon_3)\,P\,(\varepsilon_2)\,. \tag{5.17}$$

Probabilité de réalisation de ε_3. La probabilité que le sous-événement ε_3 soit réalisé est la probabilité que l'on ait :

$$J_H\left(\{\mathbf{d}(n)\}\right) < J_H\left(\{\mathbf{d}(n)\} + \{\mathbf{e}(n)\}\right). \tag{5.18}$$

On peut montrer (annexe A.4) que cette probabilité est équivalente à la probabilité que :

$$d^2\,(\varepsilon) \triangleq \sum_{k,l,n,m} e_k^*(n) e^{j2\pi\Delta f_{kl} m T_s} s_{kl}(n-m) e_l(m) < \sum_k \sum_n 2Re\left\{e_k^*(n) v_k(n)\right\}, \tag{5.19}$$

avec $d(\varepsilon)$ la distance euclidienne de l'événement erreur ε considéré et $\sum_{k,l,n,m}$ est une notation pour représenter 4 sommes simples respectivement sur k, l, n et m afin de ne pas trop alourdir les expressions. La variable $v_k(n)$ correspond au bruit filtré par le filtre adapté à la bande k et échantillonné au temps symbole. Le terme de droite dans l'inégalité (5.19) est une variable aléatoire gaussienne complexe à moyenne nulle et de variance (annexe A.4) :

$$E\left(\left|\sum_k \sum_n 2Re\left\{e_k^*(n)v_k(n)\right\}\right|^2\right) = 2\sigma^2 d^2(\varepsilon), \tag{5.20}$$

avec σ^2 la variance du bruit complexe en entrée du récepteur (5.2). Par conséquent, la probabilité que l'événement ε_3 soit réalisé est égale à la probabilité que la variable aléatoire gaussienne $\sum_k \sum_n 2Re\left\{e_k^*(n)v_k(n)\right\}$ de variance $2\sigma^2 d^2(\varepsilon)$ excède la valeur $d^2(\varepsilon)$ définie en (5.19). Cette probabilité est très connue et vaut :

$$P(\varepsilon_3) = Q\left(\frac{d(\varepsilon)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right). \tag{5.21}$$

Etude de la probabilité de ε_2. Dans [137] et repris dans [5], on trouve l'expression de $P(\varepsilon_2)$ pour une modulation M-PAM et mono-utilisateur. Dans ce cas, les symboles $\{d(n)\}$ émis et $\left\{\hat{d}(n)\right\}$ estimés, prennent leurs valeurs dans l'alphabet M-PAM. Par conséquent la suite d'erreur $\{e(n)\}$ prend ses valeurs dans $\pm 2\delta(1, 2, \ldots, M-1)$, avec δ l'amplitude minimale du signal. Si on normalise l'erreur faite par 2δ, alors pour une erreur de la forme $|e(n)| = j, j = 1, \ldots, M-1$, il y a clairement $M-j$ valeurs possibles pour choisir $\{d(n)\}$. Si par exemple, à l'instant n l'erreur normalisée vaut $M-1$ (respectivement $-(M-1)$), alors il y a 1 seule valeur possible de $d(n)$, celle située à l'extrémité négative (respectivement positive) de la constellation M-PAM ; toutes les autres conduisant à des niveaux non acceptables une fois que l'erreur leur ait été ajoutée. L'expression de $P(\varepsilon_2)$ peut être trouvée dans [137] et vaut (dans le cas M-PAM) :

$$P(\varepsilon_2) = \prod_{n=0}^{\nu-L} \frac{M - |e(n)|}{M}, \tag{5.22}$$

en supposant que les symboles d'informations sont équiprobables et que les symboles dans la séquence transmise sont statistiquement indépendants.

Dans [136], l'expression de la probabilité de l'événement ε_2 n'est pas explicitement donnée, car l'auteur ne considère plus seulement une modulation M-PAM. Dès lors où l'on a une constellation complexe, le principe est le même mais seulement on ne peut plus exprimer l'erreur simplement comme en (5.22) car on a une dimension supplémentaire (celle de l'axe imaginaire). Autrement dit, pour une "distance" d'erreur donnée, là où on l'on avait une direction possible en M-PAM (axe des réels), nous en avons plusieurs (deux ou plus selon la taille de la constellation) pour une modulation complexe. Considérons une modulation QPSK. La suite d'erreur $\{e(n)\}$ prend ses valeurs dans $\pm 2\delta(1, j, \pm 1 \pm j)$. La norme de l'erreur donne la distance euclidienne entre le symbole estimé et le symbole émis. Mais pour une erreur de la forme $||e(n)|| = j, j = 1, 2\sqrt{2}$, il n'y a pas $M-j$ valeurs possibles de choisir $\{d(n)\}$ (puisque j n'est plus forcément un entier). Cela dépend de la "multiplicité" de la distance considérée selon la forme de la constellation. Dans le cas QPSK, si la norme de l'erreur vaut 1, cela peut correspondre à une transition "verticale" ou "horizontale" ; la norme de l'erreur ne suffit plus à nous renseigner sur le nombre de choix possibles pour les symboles candidats. Si l'erreur à l'instant n vaut $e(n) = -2\delta j$, alors les

deux symboles d'affixes respectives $\delta + j\delta$ et $-\delta + j\delta$ sont des positions acceptables pour $d(n)$. Néanmoins pour une modulation M-QAM rectangulaire, si la norme de l'erreur est minimale, c'est à dire 2δ, alors il y a $M(M-1)$ valeurs acceptables pour $d(n)$.

Le problème se complique sérieusement si l'on rajoute à cela du multi-utilisateurs. Nous ne chercherons d'ailleurs pas à trouver une forme exacte de la probabilité de l'événement $P(\varepsilon_2)$, mais nous ferons une étude de cas.

Probabilité d'erreur symbole. On appelle F l'ensemble de tous les événements erreurs ε possibles commençant à l'instant n, alors la probabilité que n'importe quel événement erreur survienne à l'instant n est bornée par [137] :

$$P(F) \leq \sum_{\varepsilon \in F} P(\varepsilon). \tag{5.23}$$

Soit Δ l'ensemble des distances euclidiennes $d(\varepsilon)$ et pour chaque $d \in \Delta$, on note F_d le sous-ensemble des événements erreurs pour lesquels $d(\varepsilon) = d$. Toujours en suivant les étapes données en [137], on peut étendre le résultat de G.D. Forney au cas multi-utilisateurs :

$$P(F) \leq \sum_{d \in \Delta} Q\left(\frac{d(\varepsilon)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \sum_{\varepsilon \in F_d} P(\varepsilon_2). \tag{5.24}$$

On peut exprimer la probabilité d'erreur symbole conjointe, c'est-à-dire la probabilité que l'on commette une erreur sur $\mathbf{d}$, en reprenant les notations de [137] :

$$P_{\mathbf{d}}(E) \leq \sum_{d \in \Delta} Q\left(\frac{d(\varepsilon)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \sum_{\varepsilon \in F_d} w(\varepsilon) P(\varepsilon_2), \tag{5.25}$$

où $w(\varepsilon)$ est le nombre de "symbole vecteur" erronés par événement erreur ε. La fonction gaussienne Q décroît très vite, et pour des puissances de bruit modérées, la somme sur la fonction Q sera dominée par le terme impliquant la distance euclidienne minimale d_{min} de $d(\varepsilon)$. La probabilité d'erreur symbole conjointe est bien approchée par

$$P_{\mathbf{d}}(E) \approx Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \sum_{\varepsilon \in F_{d_{min}}} w(\varepsilon) P(\varepsilon_2), \tag{5.26}$$

avec :

$$d_{min}^2 = \min_{\varepsilon \in F} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \sum_{n=0}^{\nu-L} \sum_{m=0}^{\nu-L} e_k^*(n) e^{j2\pi\Delta f_{kl} m T_s} s_{kl}(n-m) e_l(m) \right\}. \tag{5.27}$$

L'évaluation de d_{min} ci-dessus est un problème lorsque $s_{kl}(n-m) \neq 0$ quand $n \neq m$. Ce qui est le cas lorsque l'on a de l'interférence entre symboles due à l'étalement temporel du canal, ou même avec des canaux plats mais avec de l'interférence bande adjacente comme c'est le cas ici. En effet, si l'on prend une mise en forme en racine de Nyquist par exemple, la convolution d'un racine de Nyquist avec un racine de Nyquist sur une bande adjacente ne donne pas un filtre respectant le critère de Nyquist. Donc pour déterminer d_{min} dans le cas général, il faudrait mettre en oeuvre un algorithme de recherche de type Viterbi afin de déterminer la séquence d'erreur qui minimise le critère ci-dessus. On ne peut donc pas donner de forme plus aboutie que celle-ci pour la probabilité d'erreur conjointe dans le cas général.

Canaux plats et interférences co-canal. Nous nous plaçons dans un cas où il n'y a pas d'interférences entre symboles. Tous les utilisateurs utilisent le même canal de propagation. Dans ce cas l'expression en (5.27) devient :

$$d^2_{min} = \min_{\varepsilon \in F} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} \sum_{n=0}^{\nu-L} e^*_k(n) s_{kl}(0) e_l(n) \right\}. \tag{5.28}$$

De plus, le terme résultant de la double somme sur k et l étant réel positif, tout chemin estimé dans le treillis qui s'écarte du chemin correcte à l'instant n et qui le rejoint à un instant plus grand que $n+2$ ne pourra en aucun cas être candidat à d_{min}. Autrement dit, sans interférence entre symbole on a :

$$d^2_{min} = \min_{\varepsilon \in F} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} e^*_k(n) s_{kl}(0) e_l(n) \right\}. \tag{5.29}$$

La distance minimale n'est atteinte que lorsqu'il n'y a qu'un symbol faux : $w = 1$.

2 utilisateurs BPSK. Sans perte de généralité, on considère que les deux séquences de symboles transmises sont $\{d_1(n)\}_{n=0}^{N} = 1$ pour le premier utilisateur et $\{d_2(n)\}_{n=0}^{N} = 1$ pour le second. La figure 5.2 représente plusieurs événements erreurs susceptibles d'avoir une distance minimale. Calculons les distances associées aux différents chemins représentés sur la figure 5.2.

Dans notre exemple à deux utilisateurs, la distance minimale dans (5.29) est calculée pour $K = 2$. Pour le chemin en rouge, qui correspond à une erreur sur la voie 2, on a donc $e_1 = 0$ (pas d'erreur sur cette voie) et $e_2 = -1 - 1 = -2$. Pour le chemin vert : $e_1 = -2$ et $e_2 = 0$. Enfin pour le chemin bleu : $e_1 = -2$ et $e_2 = -2$. Les distances correspondant à ces trois cas sont respectivement :

$$0 \times s_{11}(0) \times 0 + 2 \times s_{22}(0) \times 2 - 0 \times s_{12}(0) \times 2 - 2 \times s_{21}(0) \times 0 = 4 s_{22}(0), \tag{5.30}$$

$$2 \times s_{11}(0) \times 2 + 0 \times s_{22}(0) \times 2 - 2 \times s_{12}(0) \times 0 - 0 \times s_{21}(0) \times 2 = 4 s_{11}(0), \tag{5.31}$$

$$2 \times s_{11}(0) \times 2 + 2 \times s_{22}(0) \times 2 + 2 \times s_{12}(0) \times 2 + 2 \times s_{21}(0) \times 2 = 4 \left(s_{11}(0) + s_{22}(0) + s_{12}(0) + s_{21}(0) \right). \tag{5.32}$$

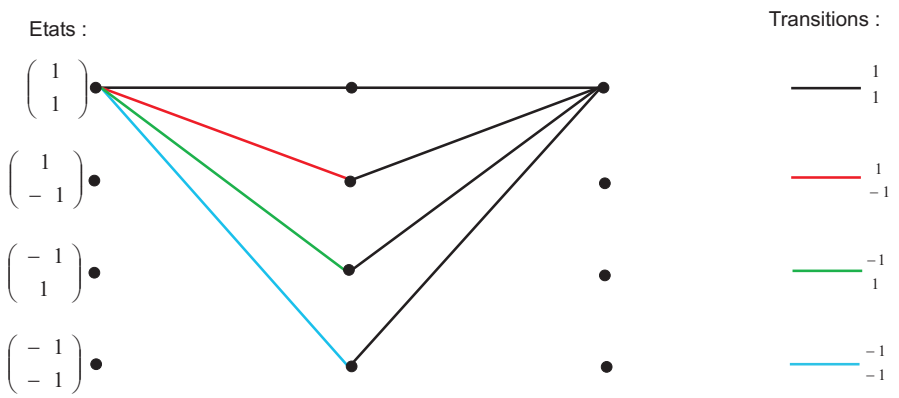


FIG. 5.2 – Treillis pour une détection conjointe de deux signaux BPSK dans un canal sans mémoire.

Notons que l'événement erreur correspondant au chemin bleu peut être celui ayant la distance euclidienne minimale, selon la valeur de la partie réelle de s_{12}. En effet dans certains cas, elle peut être inférieure à la distance euclidienne du chemin rouge ou vert.

En ce qui concerne la somme dans (5.26), on peut la calculer assez simplement dans notre cas. On peut reprendre la méthode utilisée dans [136]. La séquence erreur est réduite a un seul élément au temps n arbitraire :

$$\begin{pmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1(n) \\ \hat{d}_2(n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_1(n) \\ d_2(n) \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

on omettra par la suite l'indice n, puisqu'il n'a plus aucune importance. Notre situation revient à avoir un signal avec une "super-constellation" à M^K états, ici $2^2 = 4$ états. Pour calculer le terme avec la somme dans (5.26), il faut calculer les probabilités de transitions de distances minimales dans la "super-constellation" entre le vecteur symbole estimé $\hat{\mathbf{d}}$ et le vecteur symbole émis $\mathbf{d}$. En répertoriant tous les vecteurs d'erreurs $\mathbf{e}$ possibles pour chaque couple de symbole potentiellement émis : $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ et $(-1,-1)$, (il y en a 12 ; 3 pour chaque couple de symboles), on peut représenter les distances d'erreurs minimales et leur probabilité de réalisation comme sur la figure 5.3 (en supposant que chaque symbole sur les deux voies sont équiprobables). Par conséquent la somme dans (5.26) est (on rappelle que $w = 1$) : $\sum_{\varepsilon \in F_{d_{\min}}} P(\varepsilon_2) = 2\left(\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\right) = 2$. La probabilité d'erreur symbole conjointe est donc majorée par :

$$P_{\mathbf{d}}(E) \leq 2Q\left(\sqrt{\frac{2\min\{s_{11} + s_{22}; s_{11} + s_{22} + s_{12} + s_{21}\}}{\sigma^2}}\right). \tag{5.34}$$

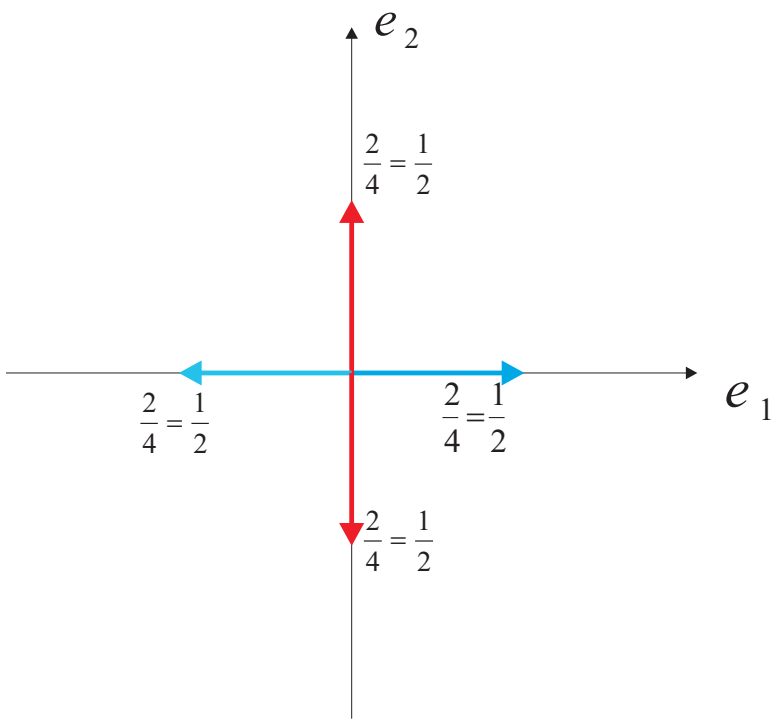


FIG. 5.3 – Distances minimales d'erreur possibles et leur probabilité d'apparition.

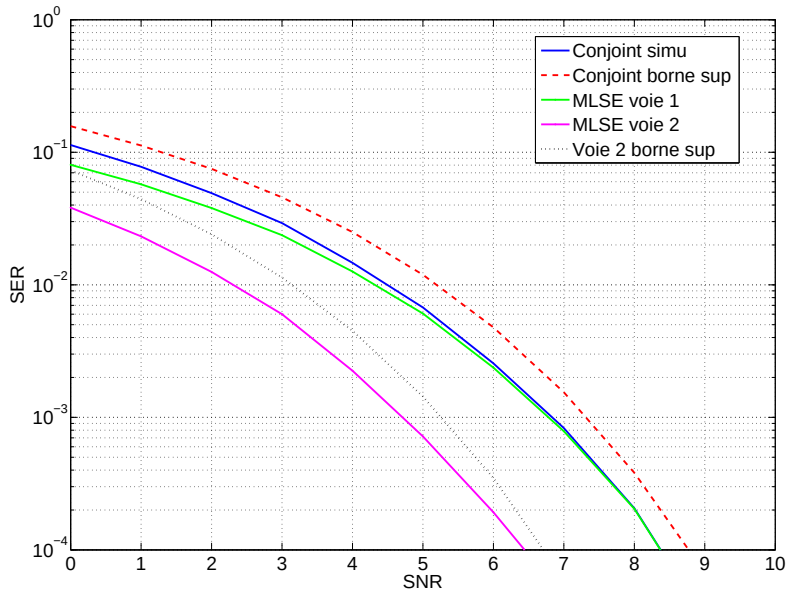


FIG. 5.4 – Borne supérieure de la probabilité d'erreur conjointe de deux signaux BPSK en canal gaussien.

Sur la figure 5.4, on trace la borne supérieure obtenue en (5.34) ainsi que les performances obtenues en simulation. On simule donc deux utilisateurs co-canal, utilisant une modulation BPSK dans un canal gaussien à un coefficient (une réalisation pour chaque utilisateur).

Notons également que l'on peut obtenir une borne supérieure pour chacune des voies si on le désire. Si l'on s'intéresse à l'utilisateur qui a la probabilité d'erreur minimale, il suffit de prendre le maximum entre s_{11}, s_{22} et $s_{11} + s_{22} + s_{12} + s_{21}$ dans l'équation (5.34) :

$$P_s^{\min}(E) \leq 2Q\left(\sqrt{2SNR_{max}}\right), \tag{5.35}$$

avec $SNR_{max} = \frac{E_s \max\{s_{11};s_{22};s_{11}+s_{22}+s_{12}+s_{21}\}}{\sigma^2}$ et $E_s = 1$ dans le cas d'une BPSK. Notons que si on prend le minimum (comme pour le conjoint) on majore les performances de l'utilisateur ayant la moins bonne probabilité d'erreur. Sur la figure 5.4, nous traçons la borne supérieure pour l'utilisateur 2. Le SNR est rajouté par rapport à la puissance de l'utilisateur 1 considéré comme l'utilisateur d'intérêt.

Il est clair que les performances que l'on retrouve ici sont similaires à un signal QPSK mono-utilisateur. Mais l'étude menée ici est extensible aux modulations d'ordres supérieures sans aucun problème. L'espace des possibles pour le calcul de la somme en (5.26) est simplement un peu plus important.

5.3.3 SEO pour le signal d'intérêt.

On peut éventuellement calculer la probabilité de coupure symbole d'un utilisateur particulier en présence de shadowing, mais seulement dans un cas simple comme celui que nous venons d'illustrer. La fonction gaussienne Q peut s'inverser avec l'approximation donnée par [118] et rappelée en (4.39). Avec le changement de variable, $X = e^{-\frac{x^2}{6}}$, on

résout par radicaux une équation du 4ème degré et on peut ainsi remonter au SNR.

5.3.4 Etude dans le cas général : présence d'IES.

Dans le cas où l'on a de l'IES ($s_{kl}(n-m) \neq 0$ lorsque $n \neq m$), l'étude théorique est beaucoup plus délicate comme mentionné plus haut. On pourrait établir des conditions suffisantes (mais non nécessaires) sur l'IES de façon à ce que la distance euclidienne minimale $d^2(\varepsilon)$ soit celle correspondant à une absence d'interférence entre symbole en procédant comme en [136]. Cependant, cela ne nous donne pas une formule théorique applicable quelque soit la forme des s_{kl}. Pour cette raison, les performances d'un système multi-utilisateurs multi-bandes peuvent être étudiées par simulation. C'est ce que nous nous proposons de faire dans la section suivante, au travers d'un exemple d'application : le WLAN.

5.4 Réjection d'interférence en WLAN

5.4.1 Détecteur MUD-MLSE sans étalement de spectre

Nous avons donné dans la section précédente le récepteur à maximum de vraisemblance que proposèrent Arslan *et al.* dans [134]. Le modèle du système est toujours celui donnée en (5.2). La métrique de branche $M_k(n)$ en (5.11) n'est cependant pas causal et ne permet pas une implémentation en l'état. Par un changement de variable $p = n - m$ et en suivant les étapes données en [138], cette métrique peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} M_k(n) &= Re\Bigg\{ d_k^*(n) \cdot \Bigg[2\psi_k(n) - d_k(n)s_{kk}(0) - 2\sum_{p>0} d_k(n-p)s_{kk}(p) \\ &\qquad - \sum_{\substack{l \\ l\neq k}} \sum_{p} d_l(n-p) \cdot e^{j2\pi\Delta f_{kl}(n-p)T_s} s_{kl}(p) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Cette métrique n'est toujours pas causale puisque la deuxième somme sur p est valable même pour des valeurs négatives de cet indice. La forme causal peut facilement être obtenue en déplaçant les termes non causals de $M_k(n)$, faisant intervenir $d_l(n-p)$ avec $p < 0$, dans $M_l(n)$, $l \neq k$. Cette opération conduit donc à la métrique modifiée causale suivante :

$$\begin{aligned} M_k^c(n) &= Re\Bigg\{ d_k^*(n) \cdot \Bigg[2\psi_k(n) - \sum_{l} d_l(n) \cdot e^{j2\pi\Delta f_{kl} n T_s} s_{kl}(0) \\ &\qquad - 2\sum_{l} \sum_{\substack{p \\ p>0}} d_l(n-p) \cdot e^{j2\pi\Delta f_{kl}(n-p)T_s} s_{kl}(p) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

La figure 5.5 représente un récepteur multi-utilisateurs à 3 canaux de traitement. Les filtres $g_0^*(-t)$, $g_1^*(-t)$ et $g_{-1}^*(-t)$ représentent respectivement les filtres adaptées à la forme d'onde globale pour le canal d'intérêt et pour deux canaux adjacents situés de part et d'autre du spectre du signal d'intérêt. Après le filtrage adapté à la forme d'onde globale, les échantillons sont traités de façon conjointe dans le détecteur à maximum de vraisemblance dont la métrique est donnée en (5.37). Dans la pratique le filtrage adapté à la forme d'onde globale par $g_k^*(-t)$ peut se séparer en deux étapes : un filtrage adapté à la mise en forme $h_f(t)$, suivit d'un échantillonnage au temps symbole et enfin un filtrage adapté au canal au rythme symbole comme cela est illustré en [134]. Avec ce partitionnement, seule la réponse impulsionnelle du canal ramenée au temps symbole est nécessaire. Pour notre analyse, nous supposerons que les canaux sont parfaitement connus au récepteur.

Réduction de la complexité du récepteur MUD-MLSE. Nous avons vu que le récepteur MUD-MLSE possède une complexité en $O(M^{K(L-1)})$, ce qui peut devenir vite important lorsque le nombre d'utilisateurs pris en compte augmente et/ou que l'étalement temporel du canal devient grand. Le signal d'intérêt et l'interférent ne vont pas subir la même réalisation instantanée du canal large bande ; les réponses impulsionnelle des canaux pour un paquet considéré peuvent introduire une importante asymétrie dans la fonction d'intercorrélation $s_{kl}(p)$. Considérons par exemple les réponses impulsionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} |h_k| &= [0.815 \quad 0.407 \quad 0.320 \quad 0.227 \quad 0.127] \\ |h_l| &= [0.227 \quad 0.460 \quad 0.688 \quad 0.460 \quad 0.227] \end{aligned} \tag{5.38}$$

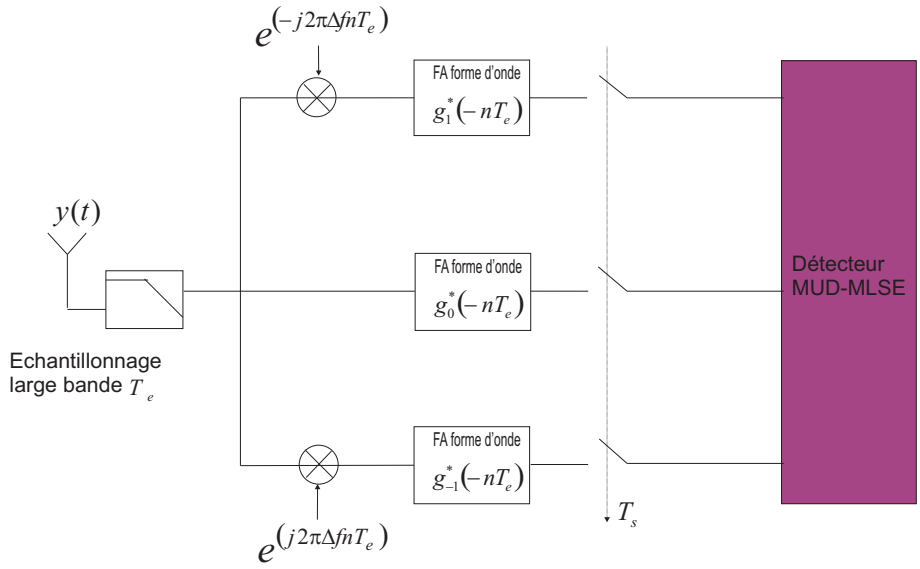


FIG. 5.5 – Récepteur multi-canaux à décodage par maximum de vraisemblance.

Sur la figure 5.6 nous traçons les coefficients des fonctions d'autocorrélation et intercorrélation généralisées s_{kk}, s_{ll}, s_{kl}, s_{lk} avec un facteur de suréchantillonnage de 6. Cette figure montre clairement que les coefficients de plus haute énergie de la fonction d'intercorrélation s_{kl} (ou s_{lk} qui est son symétrique hermitien) n'apparaissent pas au même retard que ceux de la fonction d'autocorrélation s_{kk} (ou s_{ll}). En conséquence, le $n-$ième symbole de la bande l n'est pas celui qui interfère le plus avec le $n-$ième symbole de la bande k à l'instant n.

Le détecteur conjoint basé sur (5.37) prend en compte tous les coefficients non nuls des fonctions d'auto et intercorrélation à partir du retard nul, ce qui implique un grand nombre d'état dans l'élaboration du treillis. Avec les fonctions de la figure 5.6, un nombre de $L = 5$ coefficients sont nécessaires au détecteur optimal pour que toutes les interférences entre symboles soient prises en compte, ce qui implique $2^{2\cdot 4} = 256$ états si l'on considère une modulation BPSK pour les deux signaux.

Selon la répartition d'énergie des fonctions d'intercorrélations, on peut envisager de ne pas prendre en compte tous les coefficients non nuls comme le ferait le détecteur optimal. En effet, en décodant le symbole n de la bande d'intérêt i avec le symbole $n + \nu_k$ de la bande $k \neq i$ et $\nu_k \in \mathbb{Z}$, on peut réduire le nombre d'état à implémenter dans l'algorithme de Viterbi. Sous la contrainte de causalité, et en intégrant cette nouvelle synchronisation on obtient une nouvelle métrique :

$$\begin{aligned} M_k^c(n) \quad = \quad Re\Bigg\{ d_k^*(n+\nu_k) \cdot \Bigg[2\psi_k(n+\nu_k) - \sum_l d_l(n+\nu_l) \cdot e^{j2\pi\Delta f_{kl}(n+\nu_l)T_s} s_{kl}(\nu_k - \nu_l) \\ - 2\sum_l \sum_{\substack{p \\ p>0}} d_l(n+\nu_l-p) \cdot e^{j2\pi\Delta f_{kl}(n+\nu_l-p)T_s} s_{kl}(p+\nu_k-\nu_l) \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Notons que la métrique ci-dessus est sous optimale et que l'interférence entre symbole résiduelle va limiter les performances. Cependant, si l'on accepte d'avoir un plancher d'erreur, suffisamment bas tout de même pour garantir une communication fiable, on peut réduire la complexité du détecteur de manière significative.

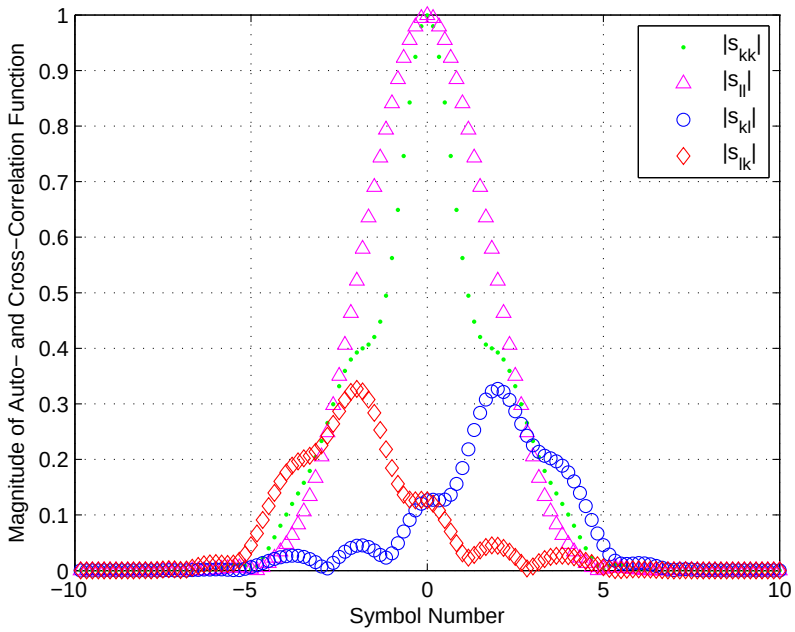


FIG. 5.6 – Fonction d'autocorrélation et d'intercorrélation généralisées entre les bandes k and l avec les réalisations instantanées des canaux en (5.38).

Choix du décalage optimal. Dans la situation où l'on ne prend pas en compte tous les coefficients d'intercorrélations, le décalage ν_k est choisi de telle manière à ce que l'énergie des coefficients des fonctions d'intercorrélations soit maximale :

$$\tilde{\nu}_k = \arg\max_{\nu_k \in Z} \sum_{p=-(L_c-1)}^{(L_c-1)} |s_{ik}(p+\nu_k)|, \tag{5.40}$$

avec $L_c < L$ le nombre de coefficients pris en compte par l'algorithme de Viterbi et $\nu_k \in \mathbb{Z}$ étant le décalage considéré.

On peut noter d'autres travaux proches de la technique introduite ici mais cependant non redondants. Les auteurs en [139] proposent un algorithme basé sur la connaissance de la réponse impulsionnelle du canal au récepteur permettant de réduire également le nombre d'état du Viterbi. L'algorithme est probabiliste et évalue à chaque instant dans le treillis, la probabilité d'éliminer un état atteignable. Selon la valeur de cette probabilité l'état est éliminé ou gardé. Notre approche simplement basée sur la répartition de l'énergie sur la réponse impulsionnelle du canal est plus simple. En [140], les auteurs proposent de réduire la mémoire du canal CDMA dans un récepteur multi-utilisateurs. Ces travaux sont les plus proches de ceux présentés ici, mais diffèrent de par leur application ainsi que par le fait que leur algorithme ne prend pas en compte l'interférence dans la réduction du nombre d'état, puisque l'organe de décision est mono-utilisateur.

Performances en simulation. Nous considérons une station mobile traitant deux utilisateurs de façon conjointe. On considère que les deux utilisateurs ont la même modulation (BPSK), qu'ils ont été détectés et que le récepteur s'est correctement synchronisé sur les deux trames. Les deux signaux passent à travers deux canaux qui n'ont pas le même profile de puissance. Le premier canal est caractérisé par une réponse impulsionnelle s'étalant sur

5 symboles et le profile suivant : [0, -2, -5, -10, -15]dB. Cet environnement modélise une communication avec vue directe entre un mobile et une station de base. Une deuxième communication est enclenchée entre un autre mobile et la même station de base sur le canal directement adjacent en fréquence au premier canal. Du point de vue du premier récepteur le signal interférent passe à travers un canal dont le profile de puissance est : [-10, -5, 0, -2, -4]dB et modélise une communication sans vue directe entre le mobile interférent et le mobile effectuant le traitement conjoint. La figure 5.7 illustre ce scénario de communication.

On considère de plus que les réponses impulsionnelles des canaux sont parfaitement connues au récepteur et sont constantes sur la durée d'un paquet et change d'un paquet à l'autre. Les deux signaux sont mis en forme par un filtre racine de Nyquist (RRC) avec un facteur de retombé de $\alpha = 0.33$. Cette valeur est arbitrairement choisie. L'expérience a montré que les performances étaient peu sensibles à ce paramètre. La longueur des paquets est fixée à 1000 symboles et la durée d'un symbole est fixée à 90ns qui correspond à la durée d'un chip dans le standard IEEE 802.11b.

La figure 5.8 illustre le BER moyen en fonction du SNR par bit à l'entrée du récepteur pour différentes valeurs L de la mémoire du canal prise en compte avec et sans décalage optimal. Le rapport signal à interférence (SIR) est fixé à 0dB et le recouvrement spectral des canaux est de 65% ($\Delta f \cdot T_s/(1+\alpha) = 0.35$). Notons qu'un recouvrement spectral de 65% correspond à un espacement entre porteuse de 5MHz pour les paramètres de notre système. Sur toutes les figures la courbe référencée "MLSE with PCI" donne les performances d'un récepteur à maximum de vraisemblance ne tenant pas compte de l'interférence canal adjacent. La figure montre clairement que sans réjection d'interférence, une communication ne peut pas avoir lieu. Un système mettant en oeuvre un décalage adaptatif en fonction de l'énergie de la fonction d'intercorrélation permet d'améliorer les performances pour des valeurs sous-optimales de L ($L < 5$). Par exemple, pour $E_b/N_0 = 15$dB et $L = 4$ le taux d'erreur bit est réduit d'un facteur 10 avec un système à décalage. Par contre on peut remarquer une saturation du BER lorsque la mémoire du canal prise en compte n'est pas

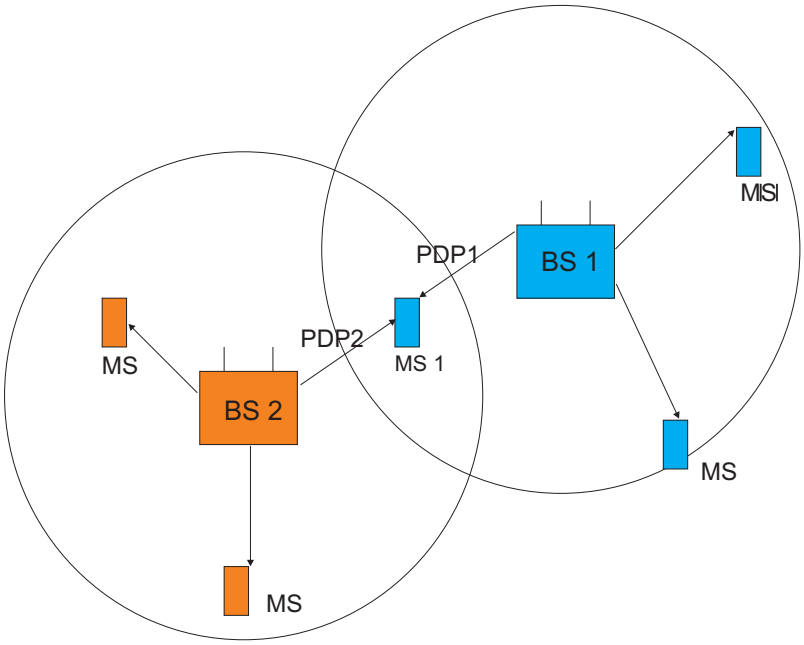


FIG. 5.7 – Scénario d'interférence entre deux utilisateurs.

optimale. Cela est dû à la présence d'interférence entre symbole non prise en compte dans le détecteur de Viterbi.

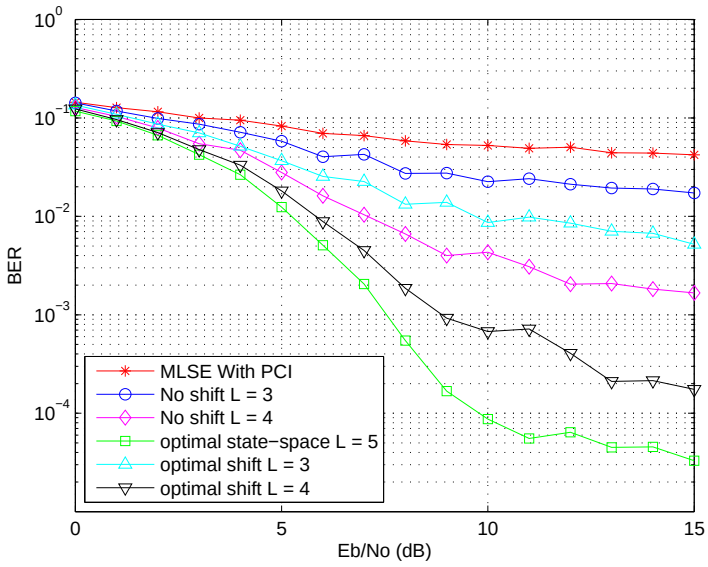


FIG. 5.8 – BER moyen en fonction de Eb/No, pour différentes valeurs de la mémoire du canal L, avec et sans réduction de la complexité. Recouvrement spectral entre canaux de 65% et $SIR = 0$dB.

Un autre paramètre intéressant, comme nous avons pu le voir dans les chapitres précédents, est la probabilité de coupure. Sur la figure 5.9 on représente la probabilité complémentaire de la probabilité de coupure qui est la CDF (Cumulative Density Function) de la variable aléatoire BER sur l'ensemble des réalisations du canal. Nous avons donc ici la probabilité que le BER soit en dessous d'une certaine valeur pour différents L et pour un détecteur avec et sans décalage, mais sans shadowing. Pour un détecteur de Viterbi à 16 états (c'est-à-dire pour $L = 3$), la probabilité d'obtenir un BER inférieur ou égale à 10^{-3} est de 68% avec un décalage optimal alors qu'elle est seulement de 40% avec l'approche standard. Si nous considérons une mémoire de canal de $L = 4$, la probabilité d'avoir un BER au plus égale à 10^{-3} est de 95% et de 85% pour l'approche sans décalage. Pour ce dernier cas de figure, la probabilité de coupure est faible (5%) si l'on met en oeuvre l'algorithme du décalage optimal, et le nombre d'état du Viterbi passe de 256 états ($L = 5$) à 64 états ($L = 4$), soit une réduction de 75% de la complexité.

La figure 5.10 donne l'évolution du BER en fonction de l'espacement entre porteuse. La puissance du signal interférent est égale à la puissance du signal d'intérêt et le SNR est 15dB. Plus le recouvrement spectral augmente et plus les performances se dégradent comme on peut s'y attendre. Cependant un gain important peut être atteint même avec un espacement entre porteuse de 3MHz. En effet avec une mémoire canal de $L = 4$, le BER est amélioré d'un facteur 10 avec la métrique dérivée en (5.39) par rapport à la métrique classique (5.37). On peut également remarquer que les BERs atteints par les détecteurs de Viterbi avec ou sans décalage convergent lorsque l'espacement entre les bandes augmente. L'interférence entre bande diminuant, les deux métriques (5.37) et (5.39) deviennent équivalentes.

Enfin nous présentons les performances du récepteur MUD-MLSE lorsque le rapport

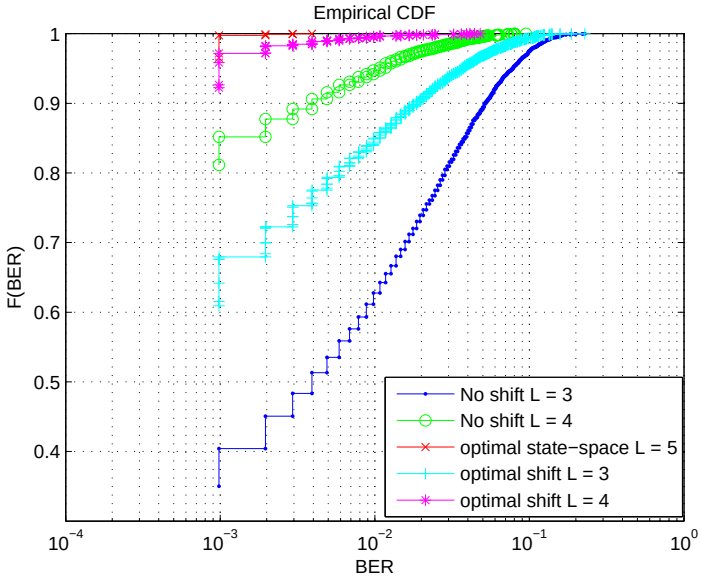


FIG. 5.9 – CDF du BER à $Eb/No = 15$dB, en fonction de la mémoire du canal L, avec et sans réduction de la complexité. Recouvrement spectral entre canaux de 65% et $SIR = 0$dB.

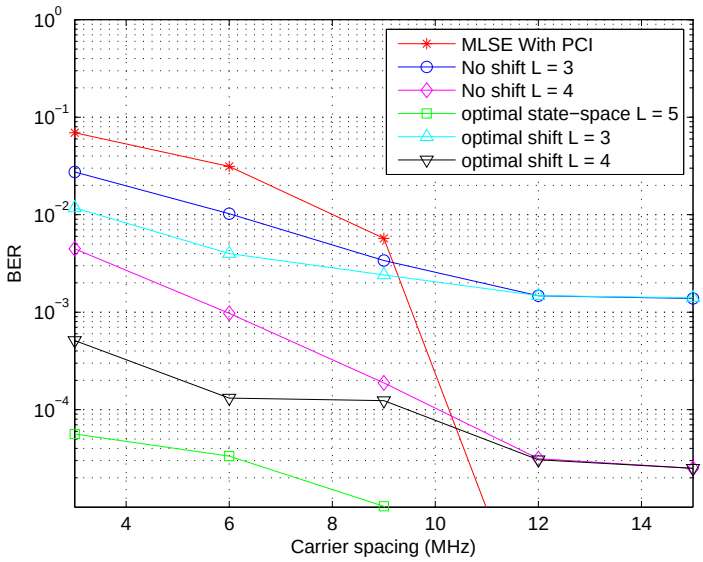


FIG. 5.10 – BER moyen en fonction de l'espacement entre porteuse, pour différentes valeurs de la mémoire du canal L, avec et sans réduction de la complexité ; $Eb/No = 15$dB, et $SIR = 0$dB.

signal à interférence varie sur la figure 5.11. Le SNR vaut 15dB et le recouvrement spectral 65%. Les performances du détecteur à décalage optimal sont meilleurs que le détecteur classique lorsque l'on se trouve à faible SIR. Par exemple pour un SIR de -5dB et une mémoire de canal de $L = 4$dB, le BER atteint est d'environ de $5 \cdot 10^{-4}$ à l'aide de la

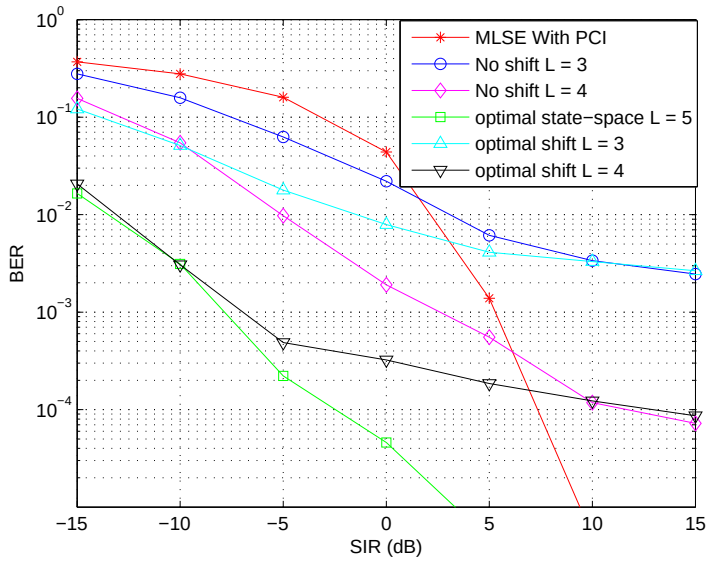


FIG. 5.11 – BER moyen en fonction du SIR, pour différentes valeurs de la mémoire du canal L, avec et sans réduction de la complexité ; Eb/No = 15dB, recouvrement spectral de 65%.

métrique en (5.39) contre 10^{-2} à peine pour la métrique classique. Les performances entre les deux métriques convergent à mesure que le signal interférent se fait plus faible.

5.4.2 Application à des signaux DSSS.

L'évaluation des performances du récepteur multi-utilisateurs multi-bandes que nous venons de présenter a été fait sur un canal sélectif en fréquence. Si l'on considère un système à étalement de spectre comme celui du IEEE 802.11b, le canal multi-trajets ne devrait pas introduire beaucoup d'interférence entre symboles. D'un point de vue complexité il est préférable de travailler au temps symbole, c'est-à-dire après le désétalement de spectre.

Dans cette partie nous considérons deux signaux BPSK à spectre étalé par une séquence de barker et nous donnons l'architecture fonctionnelle d'un récepteur multi-utilisateurs multi-bandes dans ce cas. Nous évaluons les performances d'un tel récepteur dans différentes conditions d'interférences.

Modèle du système. Les techniques à étalement de spectre par séquence directe comme le DSSS ou le CDMA pour l'UMTS, peuvent être avantageusement décrites par un modèle convolutionnel [25]. Le grand avantage de cette formulation est de pouvoir représenter toute la chaîne de communication par une cascade de filtres linéaires excitée par un train impulsif de symboles $d_k(t)$. Le signal transmis en bande de base pour l'utilisateur k s'écrit maintenant :

$$x_k(t) = h_f(t) \odot C(t) \odot D_k(t), \tag{5.41}$$

où $D_k(t) = \sum_n d_k(n) \cdot \delta(t - n \cdot T_s)$ le train de symboles, $C(t) = \sum_{q \in [0;10]} c(q) \cdot \delta(t - qT_c)$ la réponse impulsionnelle du code d'étalement c =[1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 -1] appelé séquence de barker. T_c et T_s sont la période chip et la période symbole respectivement.

Contrairement au CDMA, chaque signal transmis est étalé par le même code et l'équation (5.41) s'écrit de manière explicite :

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_n \sum_{q=0}^{Q-1} d_k(n)c(q)h_f(t - nT_s - qT_c) \\ &= \sum_n d_k(n)h_f^0(t - nT_s), \end{aligned} \tag{5.42}$$

avec $Q = 11$ et $h_f^0(t) = (h_f \odot C)(t)$. Plusieurs transmetteurs sont opérationnels et leurs spectres sont éloignés de Δf_{kl}. Les signaux des utilisateurs se propagent à travers un canal multi-trajets de réponse impulsionnelle $h_k(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j^k \delta(t - \tau_j^k)$ où N le nombre de trajets, τ_j^k le temps de propagation du $j-$ième trajet du $k-$ième canal et α_j^k est le coefficient complexe du $j-$ième trajet du $k-$ième canal. Le signal reçu s'écrit comme en (5.2) avec maintenant $g_k(t) = h_f^0(t) \odot h_k(t)$. En pratique les signaux ne sont pas synchronisés entre eux, il convient donc de rajouter un terme $t - \tau_{ik}$ dans la double somme de (5.2) où τ_{ik} est le délai relatif des signaux entre la bande k et la bande i d'intérêt. Si l'on suppose que l'on a détecté les deux paquets correctement, le délai de synchronisation peut toujours se ramener à $-\frac{1}{2}T_s \leq \tau_{ik} < \frac{1}{2}T_s$.

Récepteur MUD-MLSE DSSS. Le récepteur à maximum de vraisemblance se dérive de la même manière que dans la partie précédente, et la métrique de branche causale pour le détecteur de Viterbi a la même forme que (5.37). Dans le cas de signaux à spectre étalé, le filtre adapté à la forme d'onde globale sur la bande k est maintenant constitué d'un filtrage adapté à la mise en forme à un rythme d'échantillonnage large bande T_e, d'un filtrage adapté au code et au canal implémenter par une structure en râteau (RAKE). Le schéma fonctionnel du récepteur correspondant pour deux utilisateurs est représenté sur la figure 5.12.

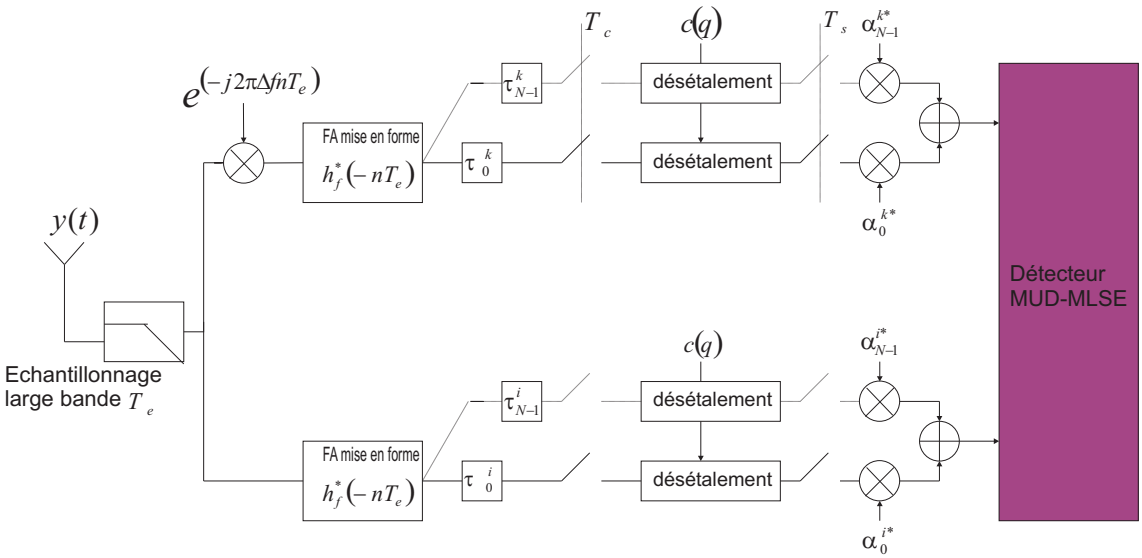


FIG. 5.12 – Récepteur multi-utilisateurs DSSS.

Au premier abord, la complexité de ce récepteur peut sembler élevée. Cependant, les systèmes commerciaux utilisent déjà un facteur de suréchantillonnage d'au moins 4, pour

permettre un bon recouvrement de la fréquence porteuse et une synchronisation symbole précise. Or un tel facteur de suréchantillonnage permet déjà de traiter la bande d'intérêt et ses plus proches voisines. La partie numérique est divisée en deux parties : la première implémente un filtrage adapté au code et au canal (RAKE) et ce pour chaque bande. La complexité de cette partie est donc K fois celle d'un récepteur traditionnel. La seconde partie implémente un détecteur à maximum de vraisemblance au temps symbole. La plupart du temps, le canal n'étant pas sélectif en fréquence (au niveau symbole), le nombre d'état du Viterbi est donc exponentiel avec le nombre d'utilisateur mais pas avec l'étalement temporel du canal. Cela permet donc de réduire considérablement le nombre d'état du détecteur.

Evaluation des performances. Les paramètres du système de transmission sont les mêmes que ceux de la partie précédente. Les deux utilisateurs utilisent des signaux BPSK étalés par une séquence de barker. Les simulations sont faites en utilisant le canal C de l'ETSI dans la bande des 2.4GHz. La figure 5.13 donne l'évolution du BER en fonction du SNR E_b/N_0 pour plusieurs valeurs de la mémoire du canal L. Etant donnée les caractéristiques des signaux DSSS du IEEE 802.11b, les canaux de l'ETSI s'étendent au maximum sur 2 symboles. Deux courbes de références sont rajoutées : les performances d'un récepteur RAKE mono utilisateur avec la présence d'un interférent bande adjacente, et d'un récepteur RAKE sans interférent bande adjacente. Le recouvrement spectrale est de 65%. Le BER du récepteur MUD-MLSE pour $L = 2$ est un peu meilleur que la courbe de référence sans interférence au fort SNR. En effet, le canal C introduit un peu d'interférence entre symbole qui n'est pas combattue par le récepteur RAKE. On peut également remarquer qu'un récepteur ne prenant en compte qu'un seul coefficient du canal ($L = 1$) surpasse largement le récepteur classique RAKE qui voit son BER saturer aux fortes valeurs de SNR. Un récepteur avec $L = 2$ possède un détecteur à 4 états pour deux utilisateurs et des signaux BPSK, ce qui est une faible complexité.

Un récepteur MUD-MLSE avec $L = 2$ est capable de tenir d'excellentes performances même lorsque le recouvrement spectral est important comme on peut le constater sur la figure 5.14. En effet, un BER de $4 \cdot 10^{-5}$ est atteint pour le récepteur multi-utilisateurs avec $L = 2$, qui est la performance d'un récepteur sans interférence. Un recouvrement spectral de 65% correspond à un espacement entre porteuse de 5MHz qui est la valeur minimale pour le système 802.11b. Nous donnons cependant le comportement du récepteur multi-utilisateurs pour des recouvrement encore plus importants. On peut remarquer que le BER remonte légèrement pour un recouvrement spectral de 80% et une mémoire de canal de $L = 1$. Cela est dû à la forme de la fonction d'intercorrélation des signaux étalés pour cette valeur du recouvrement spectral comme on peut le constater sur la figure 5.15. En effet, la fonction d'intercorrélation de deux séquences de barker mise en forme et décalées en fréquence de 3MHz (80% de recouvrement de bande) est étalée autour du retard nul de façon significative. Si le récepteur ne prend en compte que le premier coefficient du canal ($L = 1$), de l'interférence entre symboles subsiste et fait remonter légèrement le BER. Notons que lorsque la mémoire du canal prise en compte est $L = 1$, les performances obtenues sont celles utilisant l'algorithme de décalage décrit à la section précédente.

La figure 5.16 montre les performances en présence d'un canal recouvrant dont on fait varier la puissance. Un détecteur multi-utilisateurs avec $L = 2$ atteint un BER de $4 \cdot 10^{-5}$ pour une large plage de SIR avec un SNR de 23dB et un recouvrement spectral de 65%. Pour une mémoire de canal sous-optimale $L = 1$, le BER se dégrade au faible SIR mais garde un gain de 6dB comparé au récepteur RAKE traditionnel mono-utilisateur pour des SIR de -10 et -5dB.

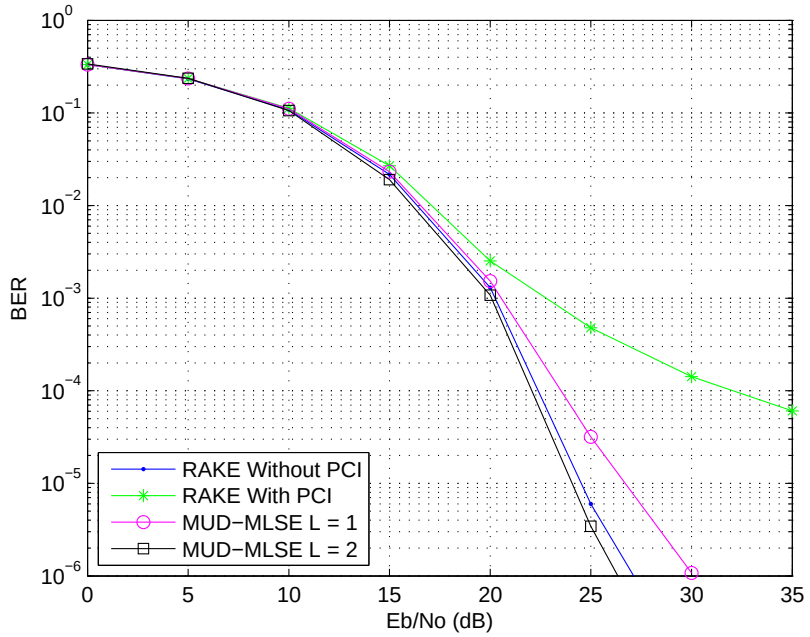


FIG. 5.13 – BER moyen vs Eb/No, pour différentes longueurs de mémoire du canal L ; recouvrement spectral de 65%, $SIR = 0$dB.

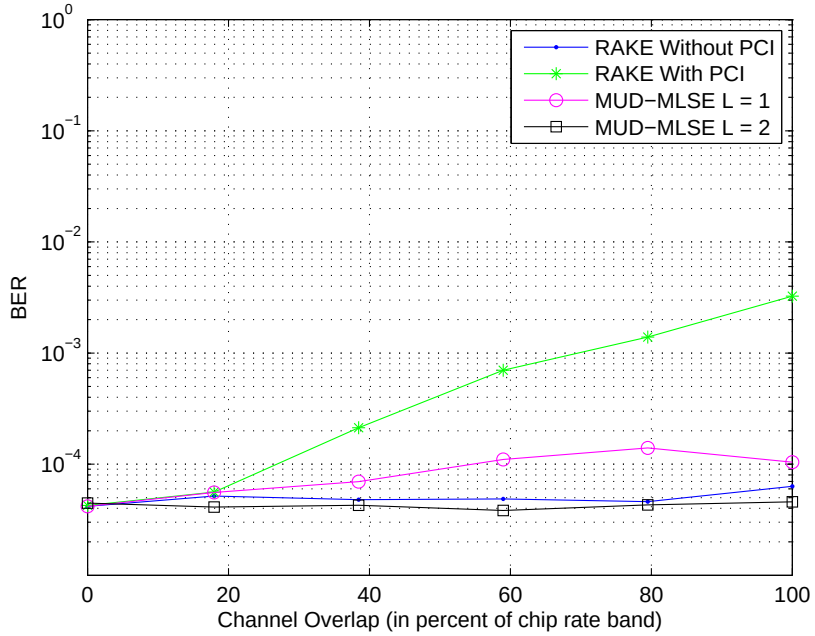


FIG. 5.14 – BER moyen vs recouvrement spectral, pour différentes longueurs de mémoire du canal L ; $E_b/N_0 = 23$dB, $SIR = 0$dB.

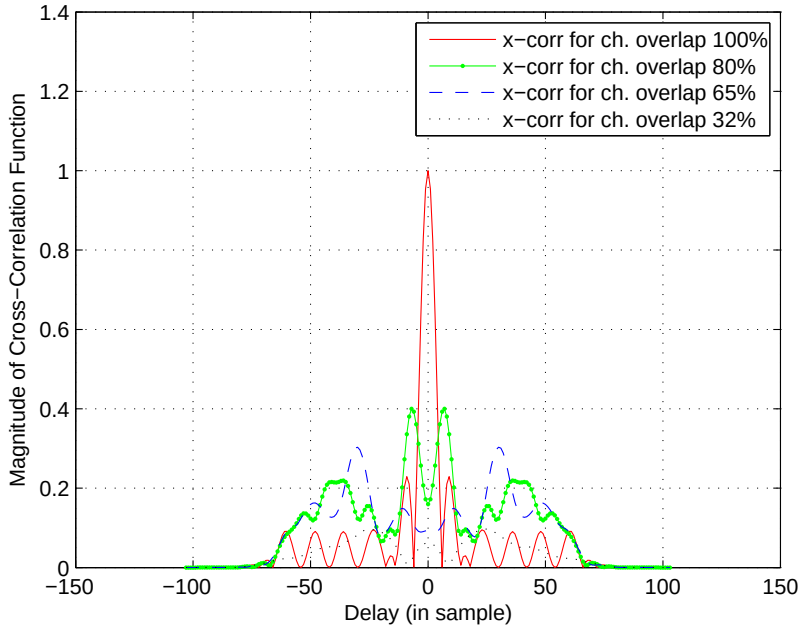


FIG. 5.15 – Intercorrélation entre deux séquences de barker mises en forme, en fonction du recouvrement spectral.

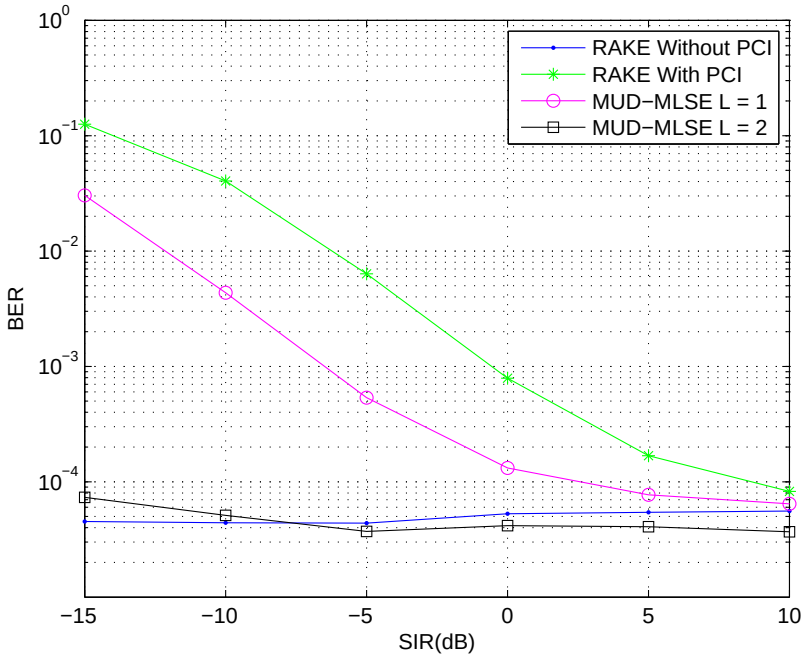


FIG. 5.16 – BER moyen vs SIR, pour différentes longueurs de mémoire du canal L ; recouvrement spectral de 65%, $E_b/N_0 = 23$dB.

5.5 Conclusion

Ce dernier chapitre, plus pragmatique, intègre la réjection d'interférence à l'analyse de la probabilité d'erreur. Plusieurs travaux ont montré l'importance de la prise en compte de l'interférence au niveau du récepteur afin d'augmenter la qualité d'un lien radio, mais aussi la capacité globale des réseaux. L'exemple du WLAN est particulièrement adapté à la problématique de la réjection d'interférence. L'allocation des canaux de la bande ISM étant très limité, la densité de déploiement de ces réseaux s'en trouve fortement pénalisée. L'idée d'allouer des ressources spectrales se chevauchant pour la planification des réseaux avec une technique de réjection d'interférence pour permettre une bonne communication nous semble une voie à approfondir, à la vue des résultats encourageant que l'on a pu illustrer dans ce chapitre.

Voici les points où nous pensons avoir contribué dans ce chapitre :

1. Nous avons étendu le formalisme de Ungerboeck à l'étude des performances d'un récepteur MUD-MLSE et proposé l'expression théorique d'une borne sur la probabilité d'erreur globale de tous les utilisateurs en canal sélectif à évanouissements lents.
2. Nous proposons une méthode de réduction de la complexité d'un détecteur MUD-MLSE lorsque l'on est en présence de canaux recouvrant et multi-trajets. Nous fournissons également une étude de performance de ce récepteur adapté aux signaux DSSS du standard IEEE 802.11b, dans le cas d'une modulation BPSK.

Notre étude sur la simulation de performance d'un récepteur MUD-MLSE pour des signaux DSSS se chevauchant en fréquence revêt un caractère idéal. Ce qui est intéressant pour fournir des bornes inférieures sur les performances du système. La phase d'estimation de canal conjointe pour les deux signaux, pourrait se révéler cruciale sur les performances du système. De plus, en mode paquet les signaux ne sont pas synchronisés. Il est donc nécessaire de mettre en place un algorithme adaptatif capable de traiter le signal d'une bande, tout en écoutant les canaux adjacents pour détecter et démoduler un ou plusieurs paquets sur ces canaux.

Conclusion et perspectives

Cette thèse avait pour objet l'étude des performances de lien radio dans des environnements présentant à la fois de l'évanouissement rapide et du shadowing. Parmis les nombreux travaux traitant de l'évaluation de performance des communications radios numériques, rares sont ceux prenant en compte les effets court termes du canal radio et les effets long termes.

Nous nous sommes intéressés principalement aux canaux à évanouissements rapides et en présence de shadowing. Ces deux effets ont un impact très différent sur les performances des systèmes radios. Les évanouissements impactent directement les performances court termes du système et modifient la probabilité d'erreur. Au contraire le shadowing entraîne des variations long termes et le calcul d'une erreur moyenne n'est plus très représentative. Les évanouissements rapides et le shadowing sont deux effets séparables dans la modélisation. En effet, sur une période de temps relativement courte par rapport à la durée de toute une communication radio, la puissance moyenne reçue au récepteur ne va pas varier significativement. Les performances du lien radio sont dans ce cas, caractérisées par la probabilité d'erreur moyenne (relativement aux effets court termes du canal). Ce critère a largement été étudié dans la littérature pour diverses statistiques d'évanouissements et tous les systèmes de télécommunications existants (OFDM, CDMA, etc). Nous nous sommes plutôt intéressés à l'effet du shadowing sur la probabilité d'erreur due aux effets court terme. Sur la durée d'une communication dans un canal à shadowing, la puissance moyenne varie mais ne prend pas tous ses états statistiques contrairement aux variations de puissance dues aux effets court terme. Par conséquent un canal à shadowing ne peut pas être considéré comme ergodique et le calcul d'une probabilité d'erreur moyenne n'a donc plus vraiment de sens.

D'un point de vue réseau, il est plus pertinent d'exploiter la probabilité de coupure symbole, définie comme la probabilité que le SEP excède une valeur seuil. Beaucoup de travaux s'intéressant aux performances en présence de shadowing, calculent la probabilité que la puissance moyenne tombe en deçà d'une valeur seuil. Ces deux probabilités sont équivalentes, mais ne s'expriment pas avec les mêmes paramètres. En effet, la première définition lie directement la probabilité de coupure à la qualité de service que l'on souhaite atteindre (c'est-à-dire le SEP moyen) alors que la seconde ne donne qu'une indication sur cette qualité de service.

Pour pouvoir exploiter la probabilité de coupure symbole de façon analytique, il est nécessaire d'inverser la probabilité d'erreur moyenne afin de remonter au SNR moyen. Cette inversion est rarement simple à faire, car la relation SEP-SNR est en générale non linéaire. Il a donc fallu dans un premier temps chercher des approximations inversibles de la probabilité d'erreur, dans plusieurs environnements et différentes technologies radios, sous la contrainte d'être suffisamment précises pour permettre une estimation de la probabilité de coupure exploitable.

Une fois cette recherche de l'inversion effectuée, la probabilité de coupure symbole s'ex-

prime simplement à l'aide d'une fonction gaussienne Q comprenant la probabilité d'erreur cible à atteindre, la puissance moyenne du shadowing (à laquelle on a intégré la puissance d'émission et la perte en espace libre) et de l'écart type de la loi de shadowing. Par conséquent nous relions la qualité de service qu'un utilisateur peut tirer de son système radio, à la probabilité de coupure dans un environnement à shadowing, en fonction de la puissance d'émission que l'on s'autorise. Nous donnons ci-dessous nos contributions détaillées par chapitre.

Dans le chapitre 2, nous étudions les performances d'un lien radio mono-antenne simple pour des modulations linéaires M-PSK et M-QAM. Nous considérons dans un premier temps la transmission sans codage canal. Grâce à l'expression exacte de la probabilité d'erreur sous forme de fonctions hypergéométriques de Gauss et d'Appell ainsi que les résultats de Wood et Butler [30] pour l'approximation de la fonction hypergéométrique de Gauss, nous proposons une approximation inversible originale de la probabilité d'erreur moyenne. Cette approximation est très précise pour les modulations linéaires dans des environnements généraux de type Rice ou Nakagami-m. Dans le cas Nakagami-m, le SNR s'exprime comme un polynôme en racine $m-$ième du SEP cible et des paramètres de la modulation. Dans un canal de Rice, le SNR moyen s'exprime à l'aide de la fonction de Lambert W_0 du SEP cible. Avec l'expression du SNR en fonction du SEP, nous pouvons calculer la probabilité de coupure en présence de shadowing, en fonction de la probabilité d'erreur à atteindre, ce qui constitue une originalité par rapport à la majorité des travaux sur la probabilité de coupure. Nous nous intéressons ensuite à l'étude de la probabilité de coupure paquet d'un système lorsque l'on considère des codes correcteurs d'erreurs. Nous considérons d'abord les codes correcteurs blocs de Hamming, pour lesquels nous donnons une approximation inversible de la probabilité d'erreur bloc en fonction de la probabilité d'erreur bit à l'entrée du décodeur. Avec les résultats obtenus dans les sections précédentes reliant le SNR moyen au BEP, on donne une expression liant le SNR moyen à la probabilité d'erreur paquet moyenne dans un canal à évanouissements rapides. Cette expression, très précise, est inversée et permet de calculer la probabilité de coupure paquet en présence de shadowing en fonction de la probabilité d'erreur paquet cible que le réseau souhaite atteindre. Le cas des codes convolutifs est également abordé, où l'on utilise les bornes connues de la littérature sur la probabilité de première erreur pour remonter à la probabilité de coupure paquet. Les résultats proposés sont vérifiés par la simulation.

Dans le chapitre 3 Nous étendons l'étude faite dans le chapitre précédent sans codage, aux systèmes MIMO. Nous considérons d'abord les systèmes MIMO STBC sans corrélation entre les antennes. Dans un canal de Nakagami et Rice, nous dérivons des approximations inversibles du SEP moyen, permettant de donner le SNR en fonction d'une probabilité d'erreur cible. Nous nous intéressons également aux systèmes MIMO à multiplexage spatial et à récepteur ZF. Nous étudions la probabilité d'erreur par sous-canaux, et nous en donnons une approximation inversible dans un canal de Rayleigh et Rice en présence de corrélation à l'émission. Ces résultats permettent le calcul analytique de la probabilité de coupure.

Dans le chapitre 4 nous analysons le cas où un ou plusieurs interférents co-canal perturbe(nt) une communication numérique point-à-point. Nous nous intéressons toujours à l'obtention de formes simples et inversibles de la probabilité d'erreur moyenne, afin de pouvoir lier la probabilité de coupure au SEP moyen en présence de shadowing et dans un milieu interférent. La quantité de résultat que l'on peut énoncer est plus réduit que dans le cas où la communication n'était limitée que par le canal et le bruit du récepteur. Cependant une approximation assez précise et inversible de la probabilité d'erreur est dérivée en présence d'un interférent et en canal de Rayleigh. Grâce à cette approximation on peut remonter au SNR avec la résolution d'une équation du troisième degré. Nous propo-

sons également un résultat permettant de calculer la probabilité de coupure en fonction du SEP cible, lorsque le shadowing affecte le signal d'intérêt et interférent. L'évaluation de la probabilité de coupure nécessitant une intégration sur un interval non borné, nous en proposons une approximation permettant son évaluation rapide. Cette approximation n'est cependant précise que pour des probabilités de coupure inférieures à 10^{-1}. Son domaine d'utilisation concerne donc les applications où l'on souhaite fournir des services de haute qualité comme la video en streaming qui demande des probabilités de coupure assez faibles. Lorsque les canaux sont plus généraux (Nakagami-m, Rice), il est très difficile d'obtenir des formes simples de la probabilité d'erreur. Dans le cas de Nakagami-m, une approximation asymptotique (lorsque le SNR tend vers l'infini) de la probabilité d'erreur a pu être dérivée. Cependant l'expression n'est pas très précise lorsque le SNR est faible et m grand. Mais le résultat demeure intéressant puisqu'il permet de caractériser rapidement le comportement asymptotique d'un signal brouillé par un interférent co-canal dans diverses situations d'évanouissements. Nous étudions ensuite le cas où plusieurs antennes sont présentes à la réception et qu'un traitement OC est mis en oeuvre. Des approximations précises du SEP peuvent être dérivées lorsque le nombre d'interférent est inférieur au nombre d'antennes et dans un canal de Nakagami-m, mais elles ne sont pas inversibles avec notre approche.

Dans le chapitre 5, nous introduisons une technique de détection multi-utilisateurs basée sur le maximum de vraisemblance (MUD-MLSE). Dans un premier temps, à partir des travaux de Forney et Ungerboeck sur l'analyse de performance des récepteurs MLSE dans des canaux sélectifs, nous dérivons une borne sur la probabilité d'erreur d'un récepteur MUD-MLSE. Cette borne n'étant pas très exploitable en pratique dans le cas général, nous étudions ce récepteur en simulation. Nous considérons un contexte WLAN, où plusieurs canaux se chevauchant seraient alloués aux utilisateurs, afin d'augmenter la capacité des réseaux locaux. L'allocation de la ressource spectrale créant des interférences, une technique de réception large bande prenant en compte deux utilisateurs couplée avec un récepteur MUD-MLSE est étudiée. Dans un canal dispersif, nous proposons une méthode de réduction de la complexité du détecteur à maximum de vraisemblance basée sur la différence des profiles de puissances des canaux, pour un signal BPSK et pour différentes conditions d'interférences (taux de recouvrement, puissances des signaux etc). Nous nous intéressons ensuite aux performances de ce récepteur pour deux signaux BPSK à étalement de spectre. Nous fournissons des courbes de probabilités d'erreurs en fonction du SNR, du SIR et du taux de recouvrements des bandes. Une amélioration sensible des performances dans des situations très interférentes est possible grâce à ce type de détecteur.

Je vois plusieurs axes d'études pour développer de futures recherches ou compléter celles-ci. Comme me l'a fait remarquer le professeur Jean-Claude Belfiore, le récepteur ZF affiche d'assez mauvaises performances de part sa tendance à amplifier le bruit à faible SNR. Il est donc rarement utilisé dans la pratique sauf lorsque l'on a la garantie d'un bon SNR moyen. Le récepteur à erreur quadratique moyenne minimale (MMSE) est, quant à lui, souvent utilisé. Il serait intéressant de reprendre les études sur les systèmes MIMO en considérant ce type de récepteur, sachant d'ores et déjà que l'étude ne sera pas évidente. D'autres récepteurs aux performances supérieures seraient à étudier. La détection a maximum de vraisemblance avec décodage par sphère offre un compromis probabilité d'erreur/complexité qui en fait un bon candidat pour les systèmes MIMO avancés. Mais ici encore, son étude ne serait pas aisée et il n'est pas certain que l'on puisse obtenir des approximations inversibles de la probabilité d'erreur.

L'étude des performances avec codage canal devrait être étendue. Dans ce travail de thèse nous avons considéré un décodage à décision dure c'est-à-dire à entrée décidée au moment du décodage. Si ce choix a permis de limiter la complexité de l'étude en décou-

pant le problème (on inverse d'abord la probabilité d'erreur par rapport au SNR en entrée du décodeur, puis on inverse la probabilité d'erreur en sortie du décodeur par rapport à celle d'entrée), il n'en est pas moins justifié. En effet, bon nombre de solutions techniques intègrent du codage canal à décision dure. Cependant il est vrai qu'un décodage à décision souple affiche de meilleurs performances. Pour étudier un tel schéma, il est nécessaire de prendre en compte le codage canal directement dans l'inversion de la probabilité d'erreur par rapport au SNR. De plus, l'utilisation de codage permet de réduire la puissance moyenne au récepteur pour une même probabilité d'erreur et donc pour une même puissance d'émission, la probabilité de coupure en présence de shadowing. Mais l'énergie consommée augmente à mesure que l'on augmente le codage. Il serait particulièrement intéressant d'étudier le compromis énergie/probabilité de coupure.

L'ouverture de ces travaux à l'étude de la connectivité en présence de shadowing dans les réseaux maillés en général nous semble un point clef à développer. Il est possible de définir un seuil de réception en fonction d'une probabilité d'erreur maximale acceptable par le réseau. On peut définir comme actifs les liens radios pour lesquels le SEP est inférieur à une probabilité cible. En utilisant nos formules on pourrait relier la connectivé aux paramètres de la couche physique. On pourrait donc ensuite comparer les différentes techniques de communications numériques dans un contexte réseau d'accès puis étendre l'approche peut-être au réseau de capteurs dont les enjeux et la problématique sont assez différents des réseaux d'accès. Je pense que c'est cette voie qui pourrait offrir le meilleur potentiel de valorisation des travaux présentés dans cette thèse.

Enfin sur la partie un peu plus applicative, une plate-forme radio multi-standards, multi-canaux, multi-antennes est en cours de montage au laboratoire CITI. Son objectif est de valider le détecteur multi-utilisateurs étudié dans cette thèse, ainsi que l'implémentation d'algorithmes moins complexes en capacité de calcul comme le SIC ou PIC (Successive Interference Canceller, Parallel Interference Canceller). Cela passe par la résolution de plusieurs problèmes clefs de traitement du signal :

1. La synchronisation. Parce que les réseaux WLAN travaillent en mode paquet et ne sont pas synchronisés, la réjection d'interférence nécessite de pouvoir adapter le traitement en cours de réception.
2. Pour pouvoir rejeter les signaux, le système doit d'abord être capable de les détecter à la volée. Il faut donc maintenir une écoute des canaux adjacents pendant la durée de traitement de la voie d'intérêt.
3. La réception de signaux hétérogènes. Les différents modes de modulations peuvent coexister sur deux bandes adjacentes se recouvrant. Il faut être capable de concevoir un algorithme de réjection capable de démoduler un signal DSSS tout en rejetant un signal OFDM par exemple.

Ces aspects sont étudiés dans le cadre de la thèse de Pierre-François Morlat et nécessitent le développement d'algorithmes non triviaux.

Annexes

A.1 Approximation du SEP en canal de Rice

On donne dans cette annexe les étapes du calcul permettant d'obtenir l'approximation du SEP moyen en (2.53). On détaille le calcul pour le cas M-PSK, mais les modulations M-QAM se traitent de manière similaire. Le SEP moyen en canal de Rice est :

$$\begin{aligned} P_s(E|\overline{\gamma}_s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{(M-1)\pi/M} \frac{(1+K)\sin^2(\theta)}{(1+K)\sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{(1+K)\sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right)d\theta. \end{aligned} \tag{A.1}$$

On va essayer d'approcher l'intégrale ci-dessus à l'aide de la formule de Laplace donnée en (1.44), avec ici $T = 1$. Pour ce faire nous choisissons le couple (h, g) suivant :

$$h(\theta) = \frac{1}{\pi}, \tag{A.2}$$

$$g(\theta) = -\ln\left(\frac{(1+K)\sin^2(\theta)}{(1+K)\sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{(1+K)\sin^2(\theta)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right)\right). \tag{A.3}$$

La fonction h est une constante et ne dépend pas de θ dans notre cas. On cherche le point $\theta_0 \in [0, (M-1)\pi/M]$ pour lequel la fonction $g(\theta)$ est minimale. C'est le point qui annule la dérivée de g :

$$g'(\theta) = -\frac{2g_{psk}\cos\theta\overline{\gamma}_s\left(\sin^2\theta\,(1+K)^2+g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)}{\sin\theta\left(\sin^2\theta\,(1+K)+g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)^2}, \tag{A.4}$$

c'est-à-dire $\theta_0 = \pi/2$. Pour appliquer la formule en (1.44), il faut évaluer la dérivée seconde de g en θ_0 ainsi que g en ce même point. Après avoir dérivée $g'(\theta)$ une nouvelle fois, et calculer sa valeur en $\theta_0 = \pi/2$, on obtient :

$$g^{(2)}(\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2g_{psk}\overline{\gamma}_s\left((1+K)^2+g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)}{(1+K+g_{psk}\overline{\gamma}_s)^2}, \tag{A.5}$$

et :

$$g(\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}} = -\ln\left(\frac{(1+K)}{(1+K)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{(1+K)+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right)\right). \tag{A.6}$$

En utilisant ces expressions dans (1.44), on obtient l'approximation suivante pour le SEP moyen en canal de Rice :

$$P_s(E|\overline{\gamma}_s) \approx \frac{1+K}{\sqrt{\pi g_{psk}\overline{\gamma}_s\left((1+K)^2+g_{psk}\overline{\gamma}_s\right)}}\exp\left(-\frac{g_{psk}K\overline{\gamma}_s}{1+K+g_{psk}\overline{\gamma}_s}\right). \tag{A.7}$$

A.2 Calcul de $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$

On dérive ici les expressions des matrices de corrélation $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ et $\left[\hat{\mathbf{\Sigma}}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$ intervenant dans le calcul de la probabilité d'erreur des systèmes MIMO à multiplexage spatial en canal de Rayleigh et de Rice.

Canal de Rayleigh

On suppose un modèle de corrélation exponentiel, c'est-à-dire que la matrice de corrélation des n_t capteurs d'émission est de la forme :

$$\mathbf{\Sigma}_{n_t} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{n_t-1} \\ \rho^* & 1 & \dots & \rho^{n_t-2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ (\rho^*)^{n_t-1} & (\rho^*)^{n_t-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

où ρ est le coefficient de corrélation du coefficient complexe du canal au niveau des antennes d'émission. On cherche à calculer le $k-$ième élément de la diagonale de la matrice inverse de $\mathbf{\Sigma_{n_t}}$. Pour calculer l'inverse d'une matrice, nous avons besoin de calculer son déterminant ainsi que la matrice des co-facteurs associés :

$$\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1} = \frac{1}{\det\left(\mathbf{\Sigma_{n_t}}\right)} C_{\mathbf{\Sigma}_{n_t}}^T, \tag{A.9}$$

avec $C_{\mathbf{\Sigma}_{n_t}}^T$, la matrice transposée des co-facteurs de $\mathbf{\Sigma}_{n_t}$:

$$C_{\mathbf{\Sigma}_{n_t}}^T = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} M_{11} & (-1)^{2+1} M_{21} & \dots & (-1)^{n_t+1} M_{n_t1} \\ (-1)^{1+2} M_{12} & (-1)^{2+2} M_{22} & \dots & (-1)^{n_t+2} M_{n_t2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n_t} M_{1n_t} & (-1)^{2+n_t} M_{2n_t} & \dots & (-1)^{n_t+n_t} M_{n_tn_t} \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

et M_{nm} est le mineur de la matrice $\mathbf{\Sigma}_{n_t}$, c'est-à-dire le déterminant de cette matrice privée de la $n-$ième ligne et $m-$ième colonne. Le $k-$ième élément de la diagonale principale de $\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}$ se déduit donc de ce qui précède par :

$$\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk} = \frac{M_{kk}}{\det\left(\mathbf{\Sigma_{n_t}}\right)}. \tag{A.11}$$

On calcul tout d'abord $\det\left(\mathbf{\Sigma}_{n_t}\right)$. On ne change pas le déterminant d'une matrice en appliquant des opérations linéaires sur ses lignes et ses colonnes. On effectue la transformation linéaire suivante sur l'ensemble des lignes de (A.8) : $L_k \leftarrow L_k - \rho L_{k+1}$ pour $k = 1, ..., n_t - 1$ et on obtient la nouvelle matrice :

$$\mathbf{\Sigma}_{n_t} = \begin{pmatrix} 1-|\rho|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \rho^*\left(1-|\rho|^2\right) & 1-|\rho|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ (\rho^*)^{n_t-1} & (\rho^*)^{n_t-2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

où dans ce cas, le déterminant est excessivement simple à calculer puisqu'il vaut :

$$\det\left(\mathbf{\Sigma}_{n_t}\right) = \left(1-|\rho|^2\right)^{n_t-1}. \tag{A.13}$$

Il s'agit maintenant de calculer M_{kk} pour $k = 1, ..., n_t$. Pour k valant 1 ou n_t, on "ampute" la matrice (A.8) de sa première ligne et première colonne ou sa dernière ligne et dernière colonne selon le cas. Cela correspond donc à un cas particulier, puisque pour ces deux valeurs de k on se ramène à la forme de (A.8) mais avec une ligne et une colonne de moins. On peut donc appliquer la même transformation sur les lignes que celle évoquée ci-dessus, et on obtient donc : $M_{kk} = \left(1 - |\rho|^2\right)^{n_t-2}$ pour $k = 1, n_t$.

Pour $k \neq 1, n_t$, en supprimant la $k-$ième ligne et $k-$ième colonne de (A.8) on obtient une nouvelle matrice de taille $n_t - 1 \times n_t - 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{k-1} & \rho^{k+1} & \dots & \rho^{n_t-1} \\ \rho^* & 1 & \dots & \rho^{k-2} & \rho^k & \dots & \rho^{n_t-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ (\rho^*)^{k-1} & (\rho^*)^{k-2} & \dots & 1 & \rho^2 & \dots & \rho^{n_t-k+1} \\ (\rho^*)^{k+1} & (\rho^*)^k & \dots & (\rho^*)^2 & 1 & \dots & \rho^{n_t-k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ (\rho^*)^{n_t-1} & (\rho^*)^{n_t-2} & \dots & (\rho^*)^{n_t-k+1} & (\rho^*)^{n_t-k-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer le déterminant de cette matrice, on peut appliquer des opérations linéaires sur ces lignes afin de la rendre triangulaire inférieure. Pour $n < k - 1$ et $n \geq k$, on effectue le pivot suivant sur la $n-$ième ligne : $L_n \leftarrow L_n - \rho L_{n+1}$. Si $n = k - 1$, alors $L_{k-1} \leftarrow L_{k-1} - \rho^2 L_k$. On obtient la matrice triangulaire inférieure suivante :

$$\begin{pmatrix} 1-|\rho|^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \rho^*\left(1-|\rho|^2\right) & 1-|\rho|^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ (\rho^*)^{k-1}\left(1-|\rho|^4\right) & (\rho^*)^{k-2}\left(1-|\rho|^4\right) & \dots & 1-|\rho|^4 & 0 & \dots & 0 \\ (\rho^*)^{k+1}\left(1-|\rho|^2\right) & (\rho^*)^{k}\left(1-|\rho|^2\right) & \dots & (\rho^*)^2\left(1-|\rho|^2\right) & 1-|\rho|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ (\rho^*)^{n_t-1} & (\rho^*)^{n_t-2} & \dots & (\rho^*)^{n_t-k+1} & (\rho^*)^{n_t-k-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant se calcul aisément : $M_{kk} = \left(1 - |\rho|^4\right)\left(1 - |\rho|^2\right)^{n_t-3}$. De là on déduit facilement $\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk}$:

$$\left[\mathbf{\Sigma}_{n_t}^{-1}\right]_{kk} = \begin{cases} \dfrac{\left(1-|\rho|^2\right)^{n_t-2}}{\left(1-|\rho|^2\right)^{n_t-1}} = \dfrac{1}{\left(1-|\rho|^2\right)} & \text{si } k = 1, n_t, \\ \dfrac{\left(1-|\rho|^4\right)\left(1-|\rho|^2\right)^{n_t-3}}{\left(1-|\rho|^2\right)^{n_t-1}} = \dfrac{1+|\rho|^2}{1-|\rho|^2} & \text{si } k \neq 1, n_t. \end{cases} \tag{A.14}$$

Ce résultat éclaire la remarque faite lorsque l'on a évalué la probabilité d'erreur bloc (ou par pair) d'un système MIMO à multiplexage spatial en canal de Rayleigh dans la section 3.3. L'approximation de la probabilité d'erreur bloc en fonction de la probabilité d'erreur par sous-canaux en (3.39), est plus ou moins grossière selon la taille du système considéré et la valeur du coefficient de corrélation ρ. Par exemple, pour $n_t = 2$, l'expression en (A.14) est identique pour les deux valeurs de k possible, donc en moyenne la probabilité d'erreur par sous-canaux est identique pour tous les sous-canaux. Ce n'est clairement plus le cas si $n_t = 3$ comme on peut le constater avec (A.14).

A.3 Preuve du théorème sur le SEO avec interférent

On appelle Ω_d la variable aléatoire SNR moyen et Ω_i la variable aléatoire INR moyen. Ces deux variables aléatoires suivent une loi log-normale et $p_{\Omega_d}(\overline{\gamma}_d)$ et $p_{\Omega_i}(\overline{\gamma}_i)$ sont leur densité de probabilité. Les deux variables aléatoires sont indépendantes. Par conséquent la densité de probabilité conjointe de (Ω_d, Ω_i) est : $p_{\Omega_d,\Omega_i}(\overline{\gamma}_d, \overline{\gamma}_i) = p_{\Omega_d}(\overline{\gamma}_d) \cdot p_{\Omega_i}(\overline{\gamma}_i)$. On définit les variables aléatoires X et Y telles que $X = \phi(\Omega_i)$ et $Y = \psi(\Omega_d, \Omega_i)$. Avec les deux fonctions ϕ et ψ telles que :

$$\psi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+2} & \longrightarrow &]0,1[\\ (\overline{\gamma}_d, \overline{\gamma}_i) & \longmapsto & y = P_s\left(E\left|\overline{\gamma}_d, \overline{\gamma}_i\right.\right) \end{array} \right) \tag{A.15}$$

avec k_{mod} et g_{mod} des constantes dépendants de la modulation (M-PSK ou M-QAM) et :

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ \overline{\gamma}_i & \longmapsto & x = \overline{\gamma}_i \end{array} \right) \tag{A.16}$$

La variable aléatoire Y a pour densité de probabilité $p_Y(y)$ et X la densité $p_X(x)$ (qui est la densité de probabilité de Ω_i). On définit également la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires X, Y : $p_{Y,X}(y, x)$. La variable aléatoire Y représente donc la probabilité d'erreur moyenne. Par conséquent la probabilité de coupure symbole est :

$$P\left(Y \geq P_s^*\right) = \int_{P_s^*}^{\infty} p_Y(y)\, dy, \tag{A.17}$$

de plus $p_Y(y)$ est la densité de probabilité marginale du couple (X, Y), donc $p_Y(y) = \int_0^{\infty} p_{Y,X}(y, x)\, dx$. Par conséquent le SEO est :

$$P\left(Y \geq P_s^*\right) = \int_{P_s^*}^{\infty} \int_0^{\infty} p_{Y,X}(y, x)\, dx dy. \tag{A.18}$$

De plus, avec les fonctions ϕ et ψ que l'on a défini plus haut, on a le changement de variable $x = \phi(\overline{\gamma}_i) = \overline{\gamma}_i$ et $y = \psi(\overline{\gamma}_d, \overline{\gamma}_i)$. Le changement de variable inverse est $\overline{\gamma}_i = \phi^{-1}(x) = x$ et $\overline{\gamma}_d = \psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}(x, y)$, où ϕ^{-1} et $\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}$ sont les fonctions réciproques de ϕ et $\psi_{\overline{\gamma}_d}$ respectivement. Cette dernière est la fonction ψ en considérant $\overline{\gamma}_d$ comme variable et $\overline{\gamma}_i$ fixé, donc bijective sur $\mathbb{R}^+$. Ce changement de variable à l'aide de ϕ et ψ est de classe C^1. On considère l'application Θ suivante :

$$\Theta : \left(\begin{array}{ccl} [0, \infty[\times [P_s^*, \infty[& \longrightarrow & [0, \infty[\times]0, \overline{\gamma}_{th}(P_s^*, \overline{\gamma}_i)] \\ (x, y) & \longmapsto & \Theta(x, y) = (\overline{\gamma}_i, \overline{\gamma}_d) \\ & & \overline{\gamma}_i = \phi^{-1}(x), \;\; \overline{\gamma}_d = \psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}(x, y) \end{array} \right) \tag{A.19}$$

Avec cette application on peut appliquer le théorème du changement de variable dans les intégrales multiples et (A.18) devient :

$$\begin{aligned} P\left(Y \geq P_s^*\right) &= \int_{\Delta} p_{Y,X}\left(\Theta^{-1}(\overline{\gamma}_i, \overline{\gamma}_d)\right) \left|J\left(\Theta^{-1}(\overline{\gamma}_i, \overline{\gamma}_d)\right)\right| d\overline{\gamma}_i d\overline{\gamma}_d, \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\overline{\gamma}_{th}(P_s^*, \overline{\gamma}_i)} p_{Y,X}\left(\psi(\overline{\gamma}_i, \overline{\gamma}_d), \phi(\overline{\gamma}_i)\right) \left|J\left(\Theta^{-1}(\overline{\gamma}_i, \overline{\gamma}_d)\right)\right| d\overline{\gamma}_i d\overline{\gamma}_d, \end{aligned} \tag{A.20}$$

avec Δ le nouveau domaine d'intégration par l'application Θ, $\overline{\gamma}_{th}$ la valeur seuil du SNR correspondant à P_s^*, pour un $\overline{\gamma}_i$ donné. Et J est le jacobien de Θ^{-1} :

$$J\left(\Theta^{-1}\left(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d\right)\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\phi(\overline{\gamma}_i)}{\partial\overline{\gamma}_d} & \frac{\partial\phi(\overline{\gamma}_i)}{\partial\overline{\gamma}_i}\\ \frac{\partial\psi(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d)}{\partial\overline{\gamma}_d} & \frac{\partial\psi(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d)}{\partial\overline{\gamma}_i}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{\partial\psi(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d)}{\partial\overline{\gamma}_d} & \frac{\partial\psi(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d)}{\partial\overline{\gamma}_i}\end{vmatrix}=-\frac{\partial\psi\left(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d\right)}{\partial\overline{\gamma}_d}.$$

Plutôt que de calculer explicitement la densité de probabilité conjointe de (X,Y), il serait souhaitable d'exprimer la probabilité de coupure en fonction des densités de probabilités conjointe des variables aléatoires Ω_d et Ω_i représentant le shadowing. Avec le changement de variable défini plus haut, les densités de probabilités $p_{Y,X}$ et p_{Ω_d,Ω_i} sont liées par :

$$p_{Y,X}\left(y,x\right)=p_{\Omega_d,\Omega_i}\left(\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}\left(x,y\right),\phi^{-1}\left(x\right)\right)\left|J\left(\Theta\left(x,y\right)\right)\right|, \tag{A.21}$$

avec $J\left(\Theta\right)$ le jacobien de la matrice jacobienne de l'application Θ :

$$J\left(\Theta(x,y)\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}(x,y)}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi^{-1}(x)}{\partial x} & \frac{\partial\phi^{-1}(x)}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}(x,y)}{\partial y}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}\left(x,y\right)}{\partial y}.$$

En utilisant (A.21) ainsi que les expressions des jacobiens des applications Θ et Θ^{-1} dans l'expression de la probabilité de coupure en (A.20), on obtient :

$$\begin{aligned}P\left(Y\geq P_s^*\right) &= \int_0^\infty\int_0^{\overline{\gamma}_{th}(P_s^*,\overline{\gamma}_i)} p_{\Omega_d,\Omega_i}\left(\psi_{\overline{\gamma}_d}^{-1}\left(\phi\left(\overline{\gamma}_i\right),\psi\left(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d\right)\right),\phi^{-1}\left(\phi\left(\overline{\gamma}_i\right)\right)\right)\\ &\qquad\times\left|J\left(\Theta(x,y)\right)\right|\left|J\left(\Theta^{-1}\left(\overline{\gamma}_i,\overline{\gamma}_d\right)\right)\right|d\overline{\gamma}_i d\overline{\gamma}_d, \qquad\text{(A.22)}\\ P\left(Y\geq P_s^*\right) &= \int_0^\infty\int_0^{\overline{\gamma}_{th}(P_s^*,\overline{\gamma}_i)} p_{\Omega_d,\Omega_i}\left(\overline{\gamma}_d,\overline{\gamma}_i\right)d\overline{\gamma}_d d\overline{\gamma}_i. \qquad\text{(A.23)}\end{aligned}$$

Or les deux variables aléatoires Ω_d et Ω_i sont indépendantes, donc :

$$P\left(Y\geq P_s^*\right)=\int_0^\infty p_{\Omega_i}\left(\overline{\gamma}_i\right)\left[\int_0^{\overline{\gamma}_{th}(P_s^*,\overline{\gamma}_i)} p_{\Omega_d}\left(\overline{\gamma}_d\right)d\overline{\gamma}_d\right]d\overline{\gamma}_i, \tag{A.24}$$

l'expression d'une densité log-normale est donnée dans le tableau 1.1. Si on s'intéresse à l'intégrale intérieure, et si on considère la variable aléatoire Ω_d en dB, c'est-à-dire $\Omega_{d_{dB}}$, alors avec le changement de variable $\overline{\gamma}_{d_{dB}}=10\log_{10}\overline{\gamma}_d$ cette intégrale s'écrit (on omet P_s^* et $\overline{\gamma}_i$ dans la borne de l'intégrale) :

$$\int_0^{\overline{\gamma}_{th}}\frac{10/\ln 10}{\sigma_d\sqrt{2\pi}\overline{\gamma}_d}e^{-\frac{\left(10\log_{10}\overline{\gamma}_d-\mu_d\right)^2}{2\sigma_d^2}}d\overline{\gamma}_d=\int_{-\infty}^{\overline{\gamma}_{th_{dB}}}\frac{1}{\sigma_d\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\overline{\gamma}_{d_{dB}}-\mu_d\right)^2}{2\sigma_d^2}}d\overline{\gamma}_{d_{dB}}. \tag{A.25}$$

Cette nouvelle intégrale correspond à la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne évaluée en $\overline{\gamma}_{th_{dB}}$. D'où finalement l'expression finale du théorème 1 :

$$P\left(Y\geq P_s^*\right)=\int_0^\infty p_{\Omega_i}\left(\overline{\gamma}_i\right)Q\left(\frac{\mu_d-10\log_{10}\overline{\gamma}_{th}\left(P_s^*,\overline{\gamma}_i\right)}{\sigma_d}\right)d\overline{\gamma}_i, \tag{A.26}$$

A.4 Calcul de la probabilité de réalisation de l'événement ε_3

Nous donnons les détails de calcul permettant d'obtenir la probabilité de réalisation du sous-événement ε_3 (5.21).

Expression de l'événement ε_3

On rappelle que la probabilité que le sous-événement ε_3 soit réalisé correspond à la probabilité que (5.18) soit réalisé. En utilisant (5.9) dans (5.18), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,n} 2Re\left\{d_k^*(n)\psi_k(n)\right\} - \sum_{k,l,n,m} d_k^*(n)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)d_l(m) \\
&< \sum_{k,n} 2Re\left\{\left(d_k^*(n)+e_k^*(n)\right)\psi_k(n)\right\} - \\
&\sum_{k,l,n,m} \left(d_k^*(n)+e_k^*(n)\right)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)\left(d_l(m)+e_l(m)\right). \qquad \text{(A.27)}
\end{aligned}$$

En développant le terme de droite de l'inégalité on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,n} 2Re\left\{e_k^*(n)\psi_k(n)\right\} - \sum_{k,l,n,m} \Big(e_k^*(n)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)e_l(m)+ \\
&d_k^*(n)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)e_l(m) + e_k^*(n)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)d_l(m)\Big) > 0. \qquad \text{(A.28)}
\end{aligned}$$

On rappelle de plus que :

$$\begin{aligned}
\psi_k(n) &= \int y(t)e^{-j2\pi\Delta f_{ik}t}g_k^*\left(t-nT_s\right)dt, \\
&= \int \left[\sum_l \sum_m e^{j2\pi\Delta f_{il}t}d_l(m)g_l\left(t-mT_s\right)+n(t)\right]e^{-j2\pi\Delta f_{ik}t}g_k^*\left(t-nT_s\right)dt, \\
&= \sum_l \sum_m d_l(m)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)+v_k(n), \qquad \text{(A.29)}
\end{aligned}$$

avec :

$$v_k(n) = \int n(t)e^{-j2\pi\Delta f_{ik}t}g_k^*\left(t-nT_s\right)dt. \qquad \text{(A.30)}$$

En remplaçant (A.29) dans (A.28) et en exprimant le terme $2Re\{\cdot\}$ comme la somme de deux complexes conjugués, on obtient la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l,n,m} 2Re\left\{e_k^*(n)v_k(n)\right\} + e_k(n)e^{-j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}^*(n-m)d_l^*(m) - \qquad \text{(A.31)} \\
&\sum_{k,l,n,m} \Big(e_k^*(n)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)e_l(m) + d_k^*(n)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)e_l(m)\Big) > 0.
\end{aligned}$$

Dans cette expression, en développant les quadruples sommes, et en remarquant que :

$$s_{kl}(n-m) = e^{j2\pi\Delta f_{kl}(n-m)T_s} s^*_{lk}(m-n), \tag{A.32}$$

le deuxième terme de la première quadruple somme se simplifie avec le deuxième terme de la deuxième quadruple somme. Ainsi on retrouve l'inégalité donnée en (5.19) :

$$d^2(\varepsilon) \triangleq \sum_{k,l,n,m} e^*_k(n) e^{j2\pi\Delta(l-k)mT_s} s_{kl}(n-m) e_l(m) < \sum_k \sum_n 2Re\left\{e^*_k(n) v_k(n)\right\}. \tag{A.33}$$

Le deuxième terme de cette inégalité est une variable aléatoire gaussienne complexe centrée, que l'on note α et dont nous nous proposons de calculer la variance.

Variance de la variable aléatoire α

La variable aléatoire α est à moyenne nulle. En effet, son espérance mathématique est :

$$\begin{aligned} E\left(\sum_k \sum_n 2Re\left\{e^*_k(n) v_k(n)\right\}\right) &= \sum_k \sum_n 2Re\left\{e^*_k(n) E\left(v_k(n)\right)\right\}, \\ &= 0, \end{aligned} \tag{A.34}$$

car le bruit blanc gaussien $n(t)$ est à moyenne nulle. Par conséquent la variance de la variable aléatoire α est égale à son moment d'ordre 2 :

$$var(\alpha) = E\left(\left|\sum_k \sum_n 2Re\left\{e^*_k(n) v_k(n)\right\}\right|^2\right), \tag{A.35}$$

$$= E\left(\left|\sum_k \sum_n e^*_k(n) v_k(n) + e_k(n) v^*_k(n)\right|^2\right), \tag{A.36}$$

$$= \sum_{k,l,n,m} E\left(\left(e_k(n) v^*_k(n) + e^*_k(n) v_k(n)\right)\left(e^*_l(m) v_l(m) + e_l(m) v^*_l(m)\right)\right), \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned} = \sum_{k,l,n,m} & e_k(n) E\left(v^*_k(n) v_l(m)\right) e^*_l(m) + e^*_k(n) E\left(v_k(n) v^*_l(m)\right) e_l(m) \\ & + e_k(n) E\left(v^*_k(n) v^*_l(m)\right) e_l(m) + e^*_k(n) E\left(v_k(n) v_l(m)\right) e^*_l(m). \end{aligned} \tag{A.38}$$

Or, en utilisant l'expression du bruit $v_k(n)$ en (A.30), et toujours à cause du fait que $n(t)$ est à moyenne nulle, on a :

$$E\left(v^*_k(n) v^*_l(m)\right) = E\left(v_k(n) v_l(m)\right) = 0. \tag{A.39}$$

Par contre on a :

$$
\begin{aligned}
E\left(v_k(n)v_l^*(m)\right) &= E\left(\int n(t)e^{-j2\pi\Delta f_{ik}t}g_k^*\left(t-nT_s\right)dt\right. \\
&\qquad \left.\times\int n^*(\tau)e^{j2\pi\Delta f_{il}\tau}g_l\left(\tau-mT_s\right)d\tau\right), \quad \text{(A.40)} \\
&= E\left(\int\int n(t)n^*(\tau)g_l\left(\tau-mT_s\right)e^{j2\pi(\Delta f_{il}\tau-\Delta f_{ik}t)}\right. \\
&\qquad \left.\times g_k^*\left(t-nT_s\right)dtd\tau\right), \quad \text{(A.41)} \\
&= \sigma^2\int\int\delta\left(\tau-t\right)g_l\left(\tau-mT_s\right)e^{j2\pi(\Delta f_{il}\tau-\Delta f_{ik}t)} \\
&\qquad \times g_k^*\left(t-nT_s\right)dtd\tau, \quad \text{(A.42)}
\end{aligned}
$$

avec $\delta\left(\tau-t\right)$, la distribution de dirac où $\delta(\tau-t)=1$, si $\tau=t$ et 0 sinon. Par conséquent, on a :

$$
\begin{aligned}
E\left(v_k(n)v_l^*(m)\right) &= \sigma^2\int g_l\left(t-mT_s\right)e^{j2\pi\Delta f_{kl}t}g_k^*\left(t-nT_s\right)dt, \quad \text{(A.43)} \\
&= \sigma^2 e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m). \quad \text{(A.44)}
\end{aligned}
$$

De là, en utilisant ce résultat dans (A.38), on obtient :

$$
\begin{aligned}
E\left(\left|\sum_{k,n}2Re\left\{e_k^*(n)v_k(n)\right\}\right|^2\right) &= \sum_{k,l,n,m}2Re\left\{e_k^*(n)\sigma^2e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)e_l(m)\right\}, \\
&= 2\sigma^2Re\left\{\sum_{k,l,n,m}e_k^*(n)e^{j2\pi\Delta f_{kl}mT_s}s_{kl}(n-m)e_l(m)\right\}, \\
&= 2\sigma^2d^2\left(\varepsilon\right), \quad \text{(A.45)}
\end{aligned}
$$

la dernière égalité est obtenue de par le fait que le terme à l'intérieur de la partie réelle est réel.

Bibliographie

[1] R. Vaughan and J. Andersen, *Channels, Propagation and Antennas for Mobile Communications*. United Kingdom : IEE Electromagnetic Waves Series 50, 2003.

[2] P. Guguen, "Techniques multi-antennes émssion-réception. Applications aux réseaux domestiques sans fil," Ph.D. dissertation, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 2003.

[3] T. Rappaport, *Wireless Communications : Principles and Practice*. Piscataway, NJ, USA : IEEE Press, 1996.

[4] W. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. Massachussets, USA : Wiley-IEEE Press, 1994.

[5] J. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1995.

[6] M. Simon and M.-S. Alouini, *Digital Communication over Fading Channels*, 2nd ed. New Jersey, USA : Wiley-IEEE Press, 2005.

[7] S. Rice, "Statistical Properties of a Sine Wave plus Random Noise," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 109–157, Jan. 1948.

[8] M. Nakagami, "The m-distribution- a General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading," *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, pp. 3–36, 1960.

[9] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New york, USA : Dover Publications, 1970.

[10] K. A. Stewart, G. P. Labedz, and K. Sohrabi, "Wideband Channel Measurements at 900 MHz," in *Vehicular Technology Conference, 1995 IEEE 45th*, vol. 1, Chicago, IL, July 1995, pp. 236–240.

[11] R. J. C. Bultitude, S. A. Mahmoud, and W. A. Sullivan, "A Comparison of Indoor Radio Propagation Characteristics at 910 MHz and 1.75 GHz," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 7, no. 1, pp. 20–30, Jan. 1989.

[12] T. S. Rappaport and C. D. McGillem, "UHF Fading in Factories," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 7, no. 1, pp. 40–48, Jan. 1989.

[13] H. Suzuki, "A Statistical Model for Urban Radio Propogation," *Communications, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, vol. 25, no. 7, pp. 673–680, July 1977.

[14] T. Aulin, "Characteristics of a Digital Mobile Radio Channel," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 30, no. 2, pp. 45–53, May 1981.

[15] W. R. Braun and U. Dersch, "A Physical Mobile Radio Channel Model," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 40, no. 2, pp. 472–482, May 1991.

[16] A. U. Sheikh, M. Abdi, and M. Handforth, "Indoor Mobile Radio Channel at 946 MHz : Measurements and Modeling," in *Vehicular Technology Conference, 1993 IEEE 43rd*, Secaucus, NJ, May 1993, pp. 73–76.

[17] G. L. Turin, F. D. Clapp, T. L. Johnston, S. B. Fine, and D. Lavry, "A Statistical Model of Urban Multipath Propagation," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 21, no. 1, pp. 1–9, Feb. 1972.

[18] H. Hashemi, "Simulation of the Urban Radio Propagation Channel," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 28, no. 3, pp. 213–225, Aug. 1979.

[19] T. S. Rappaport, S. Y. Seidel, and K. Takamizawa, "Statistical Channel Impulse Response Models for Factory and Open Plan Building Radio Communicate System Design," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, no. 5, pp. 794–807, May 1991.

[20] P. Yegani and C. D. McGillem, "A Statistical Model for the Factory Radio Channel," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, no. 10, pp. 1445–1454, Oct. 1991.

[21] F. Hansen and F. I. Meno, "Mobile Fading Rayleigh and Lognormal Superimposed," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 26, no. 4, pp. 332–335, Nov. 1977.

[22] M. J. Ho and G. L. Stuber, "Co-Channel Interference of Microcellular Systems on Shadowed Nakagami Fading Channels," in *Vehicular Technology Conference, 1993 IEEE 43rd*, Secaucus, NJ, May 1993, pp. 568–571.

[23] A. Abdi, W. C. Lau, M. S. Alouini, and M. Kaveh, "A New Simple Model for Land Mobile Satellite Channels : First- and Second-Order Statistics," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 2, no. 3, pp. 519–528, May 2003.

[24] A. Abdi and M. Kaveh, "K Distribution : an Appropriate Substitute for Rayleigh-Lognormal Distribution in Fading-Shadowing Wireless Channels," *Electronics Letters*, vol. 34, pp. 851–852, Apr. 1998.

[25] L. Ros, "Réception multi-capteur pour un terminal radio-mobile dans un système d'accès multiple à répartition par codes. Application au mode TDD de l'UMTS," Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble INPG, Décembre 2001.

[26] H. Hashemi, "Impulse Response Modeling of Indoor Radio Propagation Channels," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 11, no. 7, pp. 967–978, Sept. 1993.

[27] A. Conti, M. Z. Win, M. Chiani, and J. H. Winters, "Bit Error Outage for Diversity Reception in Shadowing Environment," *IEEE Communications Letters*, vol. 7, no. 1, pp. 15–17, Jan. 2003.

[28] A. Conti, M. Z. Win, and M. Chiani, "On the Inverse Symbol-Error Probability for Diversity Reception," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 5, pp. 753–756, May 2003.

[29] Y.-C. Ko, M. S. Alouini, and M. K. Simon, "Outage Probability of Diversity Systems Over Generalized Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, no. 11, pp. 1783–1787, Nov. 2000.

[30] R. Butler and A. Wood, "Laplace Approximations for Hypergeometric Functions with Matrix Argument," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 155, no. 2, pp. 359–382, June 2003.

[31] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 6th ed. London, England ; San Diego, USA : Academic Press, 2000.

[32] Z. Wang and G. B. Giannakis, "A Simple and General Parameterization Quantifying Performance in Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 8, pp. 1389–1398, Aug. 2003.

[33] A. Azevedo-Filho and R. Shachter, "Laplace's Method Approximations for Probabilistic Inference in Belief Networks with Continuous Variables," in *Proc. Uncertainty in Artificial Intelligence*, 1994.

[34] N. D. Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis.* New York, USA : Dover Publications ; Dover Ed edition, 1981.

[35] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals.* Boston, New York, USA ; London, England : Academic Press, 1989.

[36] O. Barndorff-Nielsen and D. Cox, *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, 1st ed. London, England : Chapman and Hall, 1989.

[37] M. Efstathiou, E. Gutierrez-Pena, and A. Smith, "Laplace Approximations for Natural Exponential Families with Cuts," *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 25, no. 1, pp. 77–92, 1998.

[38] J. Jensen, *Saddlepoint Approximations.* Oxford, England : Oxford University Press, 1995.

[39] O. Barndorff-Nielsen and A. Wood, "On Large Deviations and Choice of Ancillary for p* and r*," *Bernoulli Journal of Mathematical Statistics and Probability*, March 1998.

[40] A. Gershman and N. Sidiropoulos, *Space-Time Processing for MIMO Communications.* London, England : Wiley, 2005.

[41] J.-M. Chaufray, "Techniques de Communication sur Canal MIMO," France Telecom R&D, Tech. Rep., Juillet 2004.

[42] D. Cichon and T. Kurner, "Propagation Prediction Models," COST 231 Final Report, Tech. Rep., 1995, available online at http ://www.lx.it.pt/cost231/.

[43] G. Foschini and M. Gans, "On Limits of Wireless Communication in a Fading Environment when using Multiple Antennas," *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311–335, 1998.

[44] C. Oestges and B. Clerckx, *MIMO Wireless Communications : From Real World Propagation to Space-Time Code Design.* Oxford, England : Academic Press, 2007.

[45] D.-S. Shiu, G. J. Foschini, M. J. Gans, and J. M. Kahn, "Fading Correlation and Its Effect on the Capacity of Multielement Antenna Systems," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, no. 3, pp. 502–513, Mar. 2000.

[46] C. Oestges, "Validity of the Kronecker Model for MIMO Correlated Channels," in *Vehicular Technology Conference, 2006. VTC 2006-Spring. IEEE 63rd*, vol. 6, Melbourne, Vic., May 2006, pp. 2818–2822.

[47] A. Maaref and S. Aissa, "Performance Analysis of Orthogonal Space-Time Block Codes in Spatially Correlated MIMO Nakagami Fading Channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 5, no. 4, pp. 807–817, Apr. 2006.

[48] N. Bissias, G. P. Efthymoglou, and V. A. Aalo, "Outage Capacity of OSTBCs Over Nakagami-m Fading Channels," in *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2007. PIMRC 2007. IEEE 18th International Symposium on*, Athens, Greece, Sept. 2007, pp. 1–5.

[49] B. Holter and G. E. Oien, "On the Amount of Fading in MIMO Diversity Systems," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, no. 5, pp. 2498–2507, Sept. 2005.

[50] D. Aszetly, "On Antenna Arrays in Mobile Communication Systems : Fast Fading and GSM Base Station Receiver Algorithm," Ph.D. dissertation, Royal Institute Technology, Stockholm, Sweden, 1996.

[51] J. Luo, J. R. Zeidler, and S. McLaughlin, "Performance Analysis of Compact Antenna Arrays With MRC in Correlated Nakagami Fading Channels," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 50, no. 1, pp. 267–277, Jan. 2001.

[52] J. Salz and J. H. Winters, "Effect of Fading Correlation on Adaptive Arrays in Digital Mobile Radio," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 43, no. 4, pp. 1049–1057, Nov. 1994.

[53] F. Adachi, M. Feeney, A. Williamson, and J. Parsons, "Crosscorrelation Between the Envelopes of 900 MHz Signals Received at a Mobile Radio Base Station Site," *IEE Proceedings F*, 1986.

[54] D. Gesbert, H. Bolcskei, D. A. Gore, and A. J. Paulraj, "Outdoor MIMO Wireless Channels : Models and Performance Prediction," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 12, pp. 1926–1934, Dec. 2002.

[55] ——, "Performance Evaluation for Scattering MIMO Channel Models," in *Signals, Systems and Computers, 2000. Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on*, vol. 1, Pacific Grove, CA, Oct./Nov. 2000, pp. 748–752.

[56] J. Diouris, K. Mahdjoubi, J. Zeidler, and J. Saillard, "The Effet of Coupling in a Compact Handset Receiver," *Annales des Télécommunications*, vol. 54, no. 1-2, pp. 85–92, Jan./Feb. 1999.

[57] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank, "Space-Time Block Codes From Orthogonal Designs," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 5, pp. 1456–1467, July 1999.

[58] S. M. Alamouti, "A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1451–1458, Oct. 1998.

[59] V. Le Nir, "Etude et optimisation des systèmes multi-antennes associés à des modulations multiporteuses," Ph.D. dissertation, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, Nov. 2004.

[60] M. O. Damen, A. Tewfik, and J. C. Belflore, "A Construction of a Space-Time Code Based on Number Theory," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 3, pp. 753–760, Mar. 2002.

[61] S. Galliou and J. C. Belfiore, "A New Family of Full Rate, Fully Diverse Space-Time Codes Based on Galois Theory," in *Information Theory, 2002. Proceedings. 2002 IEEE International Symposium on*, 2002.

[62] J. C. Belfiore, G. Rekaya, and E. Viterbo, "The Golden Code : a 2 X 2 Full-Rate Space-Time Code With Non-Vanishing Determinants," in *Information Theory, 2004. ISIT 2004. Proceedings. International Symposium on*, 2004, pp. 310–310.

[63] ——, "The Golden Code : a 2 X 2 Full-Rate Space-Time Code With Nonvanishing Determinants," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 4, pp. 1432–1436, Apr. 2005.

[64] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank, "Space-Time Block Coding for Wireless Communications : Performance Results," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 17, no. 3, pp. 451–460, Mar. 1999.

[65] X. Li, T. Luo, G. Yue, and C. Yin, "A Squaring Method to Simplify the Decoding of Orthogonal Space-Time Block Codes," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 10, pp. 1700–1703, Oct. 2001.

[66] H. Shin and J. H. Lee, "Performance Analysis of Space-Time Block Codes Over Keyhole Nakagami-m Fading Channels," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 53, no. 2, pp. 351–362, Mar. 2004.

[67] I. Telatar, "Capacity of Multiantenna Gaussian Channels," AT&T Bell Laboratories, Tech. Rep., June 1995.

[68] G. Foschini, "Layered Space-Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment When Using Multi-Element Antennas," *Bell System Technical Journal*, vol. 1, no. 2, 1996.

[69] A. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore, *Introduction to Space-Time Wireless Communications.* Cambridge, England : Cambridge University Press, 2003.

[70] D. Gore, J. Heath, R. W., and A. Paulraj, "On Performance of the Zero Forcing Receiver in Presence of Transmit Correlation," in *Information Theory, 2002. Proceedings. 2002 IEEE International Symposium on*, 2002.

[71] J. Hagenauer, "Rate-Compatible Punctured Convolutional Codes (RCPC Codes) and Their Applications," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 36, no. 4, pp. 389–400, Apr. 1988.

[72] A. Viterbi, "Convolutional Codes and Their Performance in Communication Systems," *Communications, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, vol. 19, pp. 751–772, Oct. 1971.

[73] A. Conti, M. Z. Win, and M. Chiani, "Invertible Bounds for M-QAM in Rayleigh Fading," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, no. 5, pp. 1994–2000, Sept. 2005.

[74] H. Shin and J. H. Lee, "On the Error Probability of Binary and M-ary Signals in Nakagami-m Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 4, pp. 536–539, Apr. 2004.

[75] J. W. Craig, "A New, Simple and Exact Result for Calculating the Probability of Error for Two-Dimensional Signal Constellations," in *Military Communications Conference, 1991. MILCOM '91, Conference Record, 'Military Communications in a Changing World'., IEEE*, McLean, VA, Nov. 1991, pp. 571–575.

[76] M. K. Simon and M. Alouini, "A Unified Approach to the Performance Analysis of Digital Communication Over Generalized Fading Channels," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 9, pp. 1860–1877, Sept. 1998.

[77] M. K. Simon and M. S. Alouini, "A Unified Approach to the Probability of Error for Noncoherent and Differentially Coherent Modulations Over Generalized Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 12, pp. 1625–1638, Dec. 1998.

[78] M. S. Alouini and A. J. Goldsmith, "A Unified Approach for Calculating Error Rates of Linearly Modulated Signals Over Generalized Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 9, pp. 1324–1334, Sept. 1999.

[79] T. Eng and L. B. Milstein, "Coherent DS-CDMA Performance in Nakagami Multipath Fading," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 234, pp. 1134–1143, 1995.

[80] S. Chennakeshu and J. B. Anderson, "Error Rates for Rayleigh Fading Multichannel Reception of MPSK Signals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 234, pp. 338–346, 1995.

[81] S. Jonqyin and I. S. Reed, "Performance of MDPSK, MPSK, and Noncoherent MFSK in Wireless Rician Fading Channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 6, pp. 813–816, June 1999.

[82] J. Lu, K. B. Letaief, J. C. I. Chuang, and M. L. Liou, "M-PSK and M-QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 2, pp. 181–184, Feb. 1999.

[83] C. Tellambura, Q. Wang, and V. K. Bhargava, "A Performance Analysis of Trellis-Coded Modulation Schemes Over Rician Fading Channels," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 42, no. 4, pp. 491–501, Nov. 1993.

[84] E. Biglieri, G. Caire, and G. Taricco, "Approximating the Pairwise Error Probability for Fading Channels," *Electronics Letters*, vol. 31, pp. 1625–1627, Sept. 1995.

[85] D. Miorandi and E. Altman, "Coverage and Connectivity of Ad Hoc Networks Presence of Channel Randomness," in *INFOCOM 2005. 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Proceedings IEEE*, vol. 1, Mar. 2005, pp. 491–502.

[86] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding : Turbo-Codes. 1," in *Communications, 1993. ICC 93. Geneva. Technical Program, Conference Record, IEEE International Conference on*, vol. 2, Geneva, May 1993, pp. 1064–1070.

[87] H. Karvonen, Z. Shelby, and C. Pomalaza-Raez, "Coding for Energy Efficient Wireless Embedded Networks," in *Wireless Ad-Hoc Networks, 2004 International Workshop on*, May/June 2004, pp. 300–304.

[88] S. Manji and N. Mandayam, "Block Error Probability using List Viterbi Decoding with Hard Decisions." [Online]. Available : citeseer.ist.psu.edu/317496.html

[89] D. Haccoun and G. Begin, "High-Rate Punctured Convolutional Codes for Viterbi and Sequential Decoding," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 37, no. 11, pp. 1113–1125, Nov. 1989.

[90] P. Frenger, P. Orten, and T. Ottosson, "Convolutional Codes With Optimum Distance Spectrum," *IEEE Communications Letters*, vol. 3, no. 11, pp. 317–319, Nov. 1999.

[91] H. Shin and J. H. Lee, "Exact Symbol Error Probability of Orthogonal Space-Time Block Codes," in *Global Telecommunications Conference, 2002. GLOBECOM '02. IEEE*, vol. 2, Nov. 2002, pp. 1197–1201.

[92] P. Lombardo, G. Fedele, and M. M. Rao, "MRC Performance for Binary Signals in Nakagami Fading With General Branch Correlation," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 1, pp. 44–52, Jan. 1999.

[93] R. Gozali and B. D. Woerner, "On the Robustness of Space-Time Block Codes to Spatial Correlation," in *Vehicular Technology Conference, 2002. VTC Spring 2002. IEEE 55th*, vol. 2, May 2002, pp. 832–836.

[94] G. Femenias, "BER Performance of Linear STBC From Orthogonal Designs Over MIMO Correlated Nakagami-m Fading Channels," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 53, no. 2, pp. 307–317, Mar. 2004.

[95] H. Zhang and T. A. Gulliver, "On the Probability of Error for Orthogonal Space-Time Block Codes Over Correlated Rayleigh and Nakagami-m Fading Channels,"

2004. Proceedings of the IEEE 6th Circuits and Systems Symposium on Emerging Technologies : Frontiers of Mobile and Wireless Communication, vol. 2, pp. 579–582, May/June 2004.

[96] R. Xu and F. C. M. Lau, "Performance Analysis for MIMO Systems Using Zero Forcing Detector Over Fading Channels," in *Communications, IEE Proceedings-*, vol. 153, Feb. 2006, pp. 74–80.

[97] M. Schwartz, W. Bennett, and S. Stein, *Communication Systems and Techniques.* New York, USA : McGraw-Hill, 1966.

[98] Y. Ma and L. Zhao, "Achievable Performance of Orthogonal STBC Over Spatially Correlated Rician Channels," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, no. 3, pp. 1251–1261, May 2007.

[99] T. Ratnarajah, "Spatially Correlated Multiple-Antenna Channel Capacity Distributions," in *Communications, IEE Proceedings-*, vol. 153, Apr. 2006, pp. 263–271.

[100] L. Garcia-Ordonez, D. P. Palomar, A. Pages-Zamora, and J. R. Fonollosa, "Analytical BER Performance in Spatial Multiplexing MIMO Systems," in *Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2005 IEEE 6th Workshop on*, June 2005, pp. 460–464.

[101] M. Kiessling and J. Speidel, "Analytical Performance of MIMO Zero-Forcing Receivers in Correlated Rayleigh Fading Environments," in *Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2003. SPAWC 2003. 4th IEEE Workshop on*, June 2003, pp. 383–387.

[102] T. Ratnarajah and R. Vaillancourt, "Quadratic Forms on Complex Random Matrices and Multiple-Antenna Systems," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 8, pp. 2976–2984, Aug. 2005.

[103] R. Butler and A. Wood, "Laplace Approximations to Hypergeometric Functions of Two Matrix Arguments," *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 94, no. 1, pp. 1–18, May 2005.

[104] W. Tan and R. Gupta, "On Approximating the Non-Central Wishart Distribution with Wishart Distribution," *Commun. Stat. Theory and Method*, vol. 12, no. 22, pp. 2589–2600, 1983.

[105] N. C. Beaulieu and A. A. Abu-Dayya, "Bandwidth Efficient QPSK in Cochannel Interference and Fading," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, no. 9, pp. 2464–2474, Sept. 1995.

[106] Y. Ma, T. L. Lim, and S. Pasupathy, "Error Probability for Coherent and Differential PSK Over Arbitrary Rician Fading Channels With Multiple Cochannel Interferers," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 3, pp. 429–441, Mar. 2002.

[107] N. C. Beaulieu and J. Cheng, "Precise Error-Rate Analysis of Bandwidth-Efficient BPSK in Nakagami Fading and Cochannel Interference," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 1, pp. 149–158, Jan. 2004.

[108] Z. Du, J. Cheng, and N. C. Beaulieu, "BER Analysis of BPSK Signaling in Riceanfaded Cochannel Interference," in *Global Telecommunications Conference, 2005. GLOBECOM '05. IEEE*, vol. 3, Nov./Dec. 2005.

[109] D. G. Brennan, "Linear Diversity Combining Techniques," in *Proceedings of the IRE*, vol. 47, no. 6, June 1959, pp. 1075–1102.

[110] J. H. Winters, "Optimum Combining in Digital Mobile Radio With Cochannel Interference," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 33, no. 3, pp. 144–155, Aug. 1984.

[111] V. A. Aalo and J. Zhang, "Performance of Antenna Array Systems With Optimum Combining in a Rayleigh Fading Environment," *IEEE Communications Letters*, vol. 4, no. 4, pp. 125–127, Apr. 2000.

[112] A. Shah, A. M. Haimovich, M. K. Simon, and M. S. Alouini, "Exact Bit-Error Probability for Optimum Combining With a Rayleigh Fading Gaussian Cochannel Interferer," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, no. 6, pp. 908–912, June 2000.

[113] M. Chiani, M. Win, A. Zanella, and J. H. Winters, "Exact Symbol Error Probability for Optimum Combining in the Presence of Multiple Co-channel Interferers and Thermal Noise," in *Global Telecommunications Conference, 2001. GLOBECOM '01. IEEE*, vol. 2, San Antonio, TX, Nov. 2001, pp. 1182–1186.

[114] A. Shah and A. M. Haimovich, "Performance Analysis of Optimum Combining in Wireless Communications With Rayleigh Fading and Cochannel Interference," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 4, pp. 473–479, Apr. 1998.

[115] E. Villier, "Performance Analysis of Optimum Combining With Multiple Interferers in Flat Rayleigh Fading," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 10, pp. 1503–1510, Oct. 1999.

[116] A. Annamalai and C. Tellambura, "Error Rates for Nakagami-m Fading Multichannel Reception of Binary and M-ary Signals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 1, pp. 58–68, Jan. 2001.

[117] J. S. Kwak and J. H. Lee, "Closed-form Expressions of Approximate Error Rates for Optimum Combining With Multiple Interferers in a Rayleigh Fading Channel," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 55, no. 1, pp. 158–166, Jan. 2006.

[118] M. Chiani, D. Dardari, and M. K. Simon, "New Exponential Bounds and Approximations for the Computation of Error Probability in Fading Channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 2, no. 4, pp. 840–845, July 2003.

[119] V. Bogachev and I. Kiselev, "Optimum Combining of Signals in Space-Diversity Reception," *Telecommunications and Radio Engineering*, vol. 34/35, no. 10, pp. 83–85, 1980.

[120] J. Cui, D. D. Falconer, and A. U. H. Sheikh, "Analysis of BER for Optimum Combining With Two Co-channel Interferers and Maximal Ratio Combining With Arbitrary Number of Interferers," in *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 1996. PIMRC'96., Seventh IEEE International Symposium on*, vol. 1, Taipei, Oct. 1996, pp. 53–57.

[121] A. Shah and A. M. Haimovich, "Performance Analysis of Maximal Ratio Combining and Comparison With Optimum Combining for Mobile Radio Communications With Cochannel Interference," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 49, no. 4, pp. 1454–1463, July 2000.

[122] C. Chayawan and V. A. Aalo, "On the Outage Probability of Optimum Combining and Maximal Ratio Combining Schemes in an Interference-Limited Rice Fading Channel," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 4, pp. 532–535, Apr. 2002.

[123] M. Kang, M. S. Alouini, and L. Yang, "Outage Probability and Spectrum Efficiency of Cellular Mobile Radio Systems With Smart Antennas," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 12, pp. 1871–1877, Dec. 2002.

[124] D. Lao and A. M. Haimovich, "Exact Average Symbol Error Probability of Optimum Combining With Arbitrary Interference Power," *IEEE Communications Letters*, vol. 8, no. 4, pp. 226–228, Apr. 2004.

[125] R. Diestel, *Graph Theory.* New York, USA : Springer-Verlag, 2000.

[126] S. Verdú, "Optimum Multiuser Signal Detection," Ph.D. dissertation, University of Ilinois, Urbana-Champaign, August 1984.

[127] S. Moshavi, "Multi-User Detection for DS-CDMA Communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 34, no. 10, pp. 124–136, Oct. 1996.

[128] J. G. Andrews, "Interference Cancellation for Cellular Systems : a Contemporary Overview," *IEEE [see also IEEE Personal Communications] Wireless Communications*, vol. 12, no. 2, pp. 19–29, Apr. 2005.

[129] I. Oppermann, "Extending the Scope of 802.11 WLAN Through LMMSE CDMA Receiver Structures," in *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2002. The 13th IEEE International Symposium on*, vol. 2, Sept. 2002, pp. 864–868.

[130] H. R. Karimi and A. M. Kuzminskiy, "The Impact of Interference Cancellation on the Uplink Throughput of WLAN With CSMA/CA," in *Global Telecommunications Conference, 2005. GLOBECOM '05. IEEE*, vol. 5, Nov./Dec. 2005.

[131] A. M. Kuzminskiy and Y. I. Abramovick, "Adaptive Second-Order Asynchronous CCI Cancellation : Maximum Likelihood Benchmark for Regularized Semi-Blind Technique," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP '04). IEEE International Conference on*, vol. 4, May 2004, pp. 453–456.

[132] A. M. Kuzminskiy and C. B. Papadias, "Re-Configurable Semi-Blind Cancellation of Asynchronous Interference With an Antenna Array," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP '03). 2003 IEEE International Conference on*, vol. 4, Apr. 2003, pp. 696–699.

[133] M. Ahn, D. Kim, and J. S. Kenney, "Throughput Improvement in Interference Limited Multipath Environments Using a Smart Antenna for IEEE 802.11b WLAN," in *Radio and Wireless Conference, 2004 IEEE*, Sept. 2004, pp. 411–414.

[134] H. Arslan, S. C. Gupta, G. E. Bottomley, and S. Chennakeshu, "New Approaches to Adjacent Channel Interference Suppression in FDMA/TDMA Mobile Radio Systems," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 49, no. 4, pp. 1126–1139, July 2000.

[135] R. Dinis, D. Falconer, and B. Ng, "Iterative Frequency-Domain Equalizers for Adjacent Channel Interference Suppression," in *Global Telecommunications Conference, 2005. GLOBECOM '05. IEEE*, vol. 6, Nov./Dec. 2005.

[136] G. Ungerboeck, "Adaptive Maximum-Likelihood Receiver for Carrier-Modulated Data-Transmission Systems," *Communications, IEEE Transactions on [legacy, pre - 1988]*, vol. 22, no. 5, pp. 624–636, May 1974.

[137] J. Forney, G., "Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 363–378, May 1972.

[138] G. E. Bottomley and S. Chennakeshu, "Unification of MLSE Receivers and Extension to Time-Varying Channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 4, pp. 464–472, Apr. 1998.

[139] H. Zamiri-Jafarian and S. Pasupathy, "Complexity Reduction of the MLSD/MLSDE Receiver Using the Adaptive State Allocation Algorithm," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 1, no. 1, pp. 101–111, Jan. 2002.

[140] Z. Qin, K. C. Teh, and E. Gunawan, "Iterative Reduced-State Multiuser Detection for Asynchronous Coded CDMA," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 12, pp. 1892–1894, Dec. 2002.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : MARY
Prénoms : Philippe, Marcel

DATE de SOUTENANCE : 11 Février 2008

TITRE : Etude analytique des performances des systèmes radio-mobiles en présence d'évanouissements et d'effet de masque.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2008-ISAL-0008

Ecole doctorale : Electronique Electrotechnique Automatique (EEA)
Spécialité : Images et Systèmes

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RESUME :
Cette thèse a pour but l'analyse des performances d'une communication radio en présence d'évanouissements et d'effet de masque. Le masquage, du aux obstacles entre l'émetteur et le récepteur, fait varier la probabilité d'erreur moyenne ("Symbole Error Probability" SEP). L'étude de la probabilité de coupure symbole (SEO "Symbol error Outage") définie comme la probabilité que le SEP moyen excède une valeur seuil est donc plus pertinent. La difficulté de son étude réside dans le fait qu'une inversion du SEP moyen par rapport au SNR (Signal to Noise Ratio) est nécessaire. Par la méthode de Laplace nous donnons des approximations précises à tout SNR du SEP dans un canal de Nakagami-m et Rice dans le cas mono-antenne. Nous montrons ensuite que ces approximations sont inversibles par rapport au SNR et permettent d'exprimer analytiquement le SEO en fonction du SEP cible. Nous intégrons ensuite le codage canal et dérivons des expressions analytiques de la probabilité de coupure paquet pour un codage bloc puis un codage convolutif à entrée décidée. Nous étendons l'étude aux systèmes MIMO à codage bloc orthogonaux puis à multiplexage spatial où des formes exactes du SEO sont dérivées. Nous considérons le cas où des interférents sont présents. Nous dérivons une approximation précise et inversible de la probabilité d'erreur lorsque les signaux se propagent à travers un canal à évanouissements rapides de Rayleigh. Enfin parce que la prise en compte de l'interférence est un moyen avéré d'augmenter la capacité des réseaux, nous étudions les performances de la détection multi-utilisateurs à maximum de vraisemblance (MUD-MLSE), dans un contexte WLAN à canaux recouvrant.

ABSTRACT :
This thesis focuses on analytical performance studies of radiocommunication systems in shadowing environments. The shadowing implied by the presence of large scale obstacles between transmitter and receiver, induces a change in the average symbol error probability (SEP). The symbol error outage (SEO), defined as the probability to observe a given average SEP over a fading channel in a shadowing environment, is hence a more adequate metric. The most challenging issue in the SEO study is that an inversion of the SEP with respect to the signal to noise (SNR) is needed. We have studied the single input single output (SISO) case first. Thanks to the Laplace method, we derive some new tight SEP approximations in Nakagami-m and Ricean fading channels. These new expressions are tight for a large SNR range which improves results available in the open literature. We prove that our expressions are invertible w.r.t. the SNR, facilitating the SEO to be expressed in closed form as a function of the target SEP. We also derive the packet error outage (PEO) in closed form considering channel block and convolutional codes with hard decision decoding. We then extend this approach to multiple input multiple output (MIMO) systems. We derive closed form expressions for the SEO of MIMO space-time block encoded as well as spatial multiplexing systems. Finally, interfering environments are considered. A SEP invertible expression is derived when the signal of interest and the interfering one experience a Rayleigh fading channel. We also study the performance of an improved multi-user maximum likelihood sequence estimation algorithm in an interfering WLAN context.

MOTS-CLES : Communications mobiles, probabilité d'erreur symbole, probabilité de coupure symbole, probabilité de coupure paquet, shadowing, évanouissements, SEP, SEO, MIMO STBC, multiplexage spatial, MUD-MLSE.

Laboratoire de recherche : Centre d'Innovation en Télécommunication et Intégration de service (CITI)
Directeurs de thèse : M. Jean-Marie GORCE, M. Christian GONTRAND
Président de jury : Pierre DUHAMEL
Composition du jury :

M. Pierre DUHAMEL, Directeur de Recherche CNRS (Président)
M. Inbar FIJALKOW, Pr. ENSEA Cergy-Pontoise (Rapporteur)
M. Jean-Claude BELFIORE, Pr. ENST Paris (Rapporteur)
M. Christian GONTRAND, Pr. INSA Lyon (Directeur de thèse)
M. Jean-Marie GORCE, MdC INSA de Lyon (Co-Directeur de thèse)
M. Mischa DOHLER, Dr France Telecom R&D (Co-Encadrant)
M. Jean-Marc BROSSIER, Pr. INP Grenoble (Examinateur)
M. Guillaume VILLEMAUD, MdC INSA Lyon (Examinateur)