



Contrôlabilité d'équations issues de la mécanique des fluides

Marianne Chapouly

► To cite this version:

Marianne Chapouly. Contrôlabilité d'équations issues de la mécanique des fluides. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT: . tel-00407569

HAL Id: tel-00407569

<https://theses.hal.science/tel-00407569>

Submitted on 26 Jul 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS 11 - ORSAY

par

Marianne CHAPOULY

Sujet :

**CONTRÔLABILITÉ D'ÉQUATIONS ISSUES DE LA MÉCANIQUE DES
FLUIDES**

au vu des rapports de

M. Jean-Pierre PUEL
M. Enrique ZUAZUA

Soutenue le 23 juin

devant la Commission d'examen composée de :

Mme Fatiha ALABAU	Examinatrice
M. Jean-Michel CORON	Directeur de thèse
M. Jean-Pierre PUEL	Examineur
M. Jean-Pierre RAYMOND	Examineur
M. Jean-Claude SAUT	Examineur
M. Armen SHIRIKYAN	Examineur

“Messieurs-dames, contrôle des billets s’il-vous-plaît.”
Henri Retard, contrôleur SNCF.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à témoigner ma profonde reconnaissance à Jean-Michel Coron pour m'avoir donné la chance incroyable d'effectuer un stage de M2 puis cette thèse sous sa direction. Je le remercie de m'avoir proposé dès le début des sujets de recherche passionnants, je le remercie aussi pour sa patience face à mes nombreux doutes, inquiétudes ou questions, pour sa disponibilité, ses encouragements constants, ses relectures d'articles soignées et pour ses nombreux conseils. Je suis en admiration constante devant lui, tant pour ses idées mathématiques que pour les qualités pédagogiques dont il fait preuve, dans son bureau comme lors de conférences. Cher Jean-Michel, tu es formidable, merci pour tout.

Je remercie très chaleureusement Jean-Pierre Puel et Enrique Zuazua d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie aussi vivement Fatiha Alabau, Jean-Pierre Raymond, Jean-Claude Saut et Armen Shirikyan de me faire l'honneur d'être membres du jury.

Je remercie sincèrement Sergio Guerrero pour l'opportunité qu'il m'a offerte de travailler avec lui ces deux dernières années. Je le remercie pour nos discussions mathématiques toujours enrichissantes, et pour les références qu'il sait m'indiquer en un clin d'oeil. Je n'oublie pas non plus que c'est tout de même en sa compagnie que j'ai enfin acquis la bosse des maths (comment ? sens figuré ? zut...). Merci aussi à Eduardo Cerpa qui a dès le début joué son rôle de *grand frère* à la perfection.

Un grand merci à Karine Beauchard pour ses nombreux conseils, coups de mains et autres réponses humoristiques et énergiques à mes courriels angoissés. Merci aux nombreux contrôleurs croisés au gré d'instructifs vagabondages et qui ont su m'éclairer sur divers points, en particulier Olivier Glass, Mazyar Mirrahimi, Pierre Rouchon et Emmanuelle Crépeau.

Je remercie les membres du département de mathématiques d'Orsay que j'ai eu le plaisir de côtoyer depuis... sept ans déjà. Ce n'est pas sans un certain pincement au coeur que je vois s'achever cette magnifique aventure, commencée dès la licence. À cette occasion, je souhaite rendre hommage aux merveilleux enseignants que j'ai eu tout au long de cette période. Je pense notamment à Patrick Gérard, qui grâce à son cours de distributions légendaire, a éveillé en moi l'intérêt pour les edp. Je remercie chaleureusement Dominique Hulin pour son dynamisme exemplaire, son humour, ses talents pédagogiques qui font de moi une de ses fans et pour toutes nos discussions. Merci à Jean-Christophe Léger pour ses conseils sur l'enseignement. Cela a été une joie d'effectuer le monitorat en sa compagnie. Merci aussi à Pierre Pansu pour toute l'énergie qu'il déploie à donner vie à l'école doctorale. J'ai aussi une pensée pour mes copains des 400 coups avec lesquels j'ai partagé les premières années à Orsay, Marie, Violaine, Romain, Olivier, Antoine. Merci aussi à Françoise Vasseur pour son accueil chaleureux et pour les nombreux fous rires et histoires partagés dans son bureau d'alors. Enfin, merci à Valérie Lavigne et Catherine Poupon pour leur aide dans les démarches administratives.

Je remercie également l'ensemble des membres du laboratoire Jacques-Louis Lions

qui m'ont accueillie gracieusement cette dernière année.

Un grand merci aux copains thésards pour les pauses, conseils, angoisses communes, pots, barbecues, crêpes, gtt, pique-niques, ou potins (euh...). Pour n'en citer que quelques uns, Evelyne pour les nombreux services rendus, les coups de stress en parallèle cette année et la blonde attitude dans les couloirs de Chevaleret, Camille et son regard hagard quand il n'a pas réussi à contrôler l'heure de son réveil, Sylvain et ses tomates tueuses, Jean-Patrick et ses convictions, Mathieu G. et sa délicieuse tarte au citron meringuée, Alexis pour ses muffins et le super plan à New-York, Matthieu L. et son sourire matinal, Abed et sa pêche d'enfer, Thi-Thu et sa gentillesse, et aussi les anciens pour leurs nombreux conseils, Laurent, Marie S., Ismael, Antoine, Bertrand, Neil, et les nombreux autres encore... Merci à $\mathbb{R}$ d'être archimédien.

Merci à Caroline pour toutes ces années d'amitié et son soutien à distance. Merci pour les coups de fil, les discussions et les repas au coin du feu. Merci à Eduardo et Cathy pour leur fabuleuse gentillesse et pour les moments partagés à Paris, dans le Puy-de-Dôme ou à San Diego. À mes copains d'Ubu en souvenir de nos fugaces instants de gloire (!) : Michael et Aurélie pour les sorties, Mathilde pour les auteurs qu'elle m'a fait découvrir, Céline et Mathias pour les après-midi couture. À Annie et David qui m'ont fait prendre goût à l'escalade. À Maxime et David pour nos nombreux échanges électroniques et en souvenir des petits pois.

Mes derniers mots s'adressent à ceux sans qui tout ceci n'aurait aucun sens. À mes grands-parents pour tous les moments magiques que j'ai pu passer à leurs côtés entre pommier et escaliers, pour les bols d'air pur et pour leurs souvenirs. À mon frangin Olivier pour nos discussions un tantinet houleuses qui me permettent d'avancer et de remettre en question mes certitudes. À Pierre pour son soutien et sa tendresse, ses questions existentielles, ses imitations (caricaturales, avoue !) de mes *quoi* et *mais dis donc*, et tout simplement pour sa présence. Merci pour le bonheur que je vis à tes côtés. Enfin, je remercie du fond du coeur mes parents pour le soutien qu'ils m'ont toujours apporté, pour le réconfort et la confiance qu'ils me témoignent dans mes nombreux moments de doute, et pour leur philosophie. Un énorme merci, je vous dois tout. À vous qui m'êtes si chers, je dédie cette thèse.

Table des matières

I	Introduction	13
1	Introduction	15
1.1	Definitions	15
1.2	Stratégie d'étude d'un système de contrôle	16
2	Équations de Burgers	19
2.1	Introduction	19
2.2	Contrôlabilité globale exacte de l'éq. de Burgers non visqueuse .	21
2.3	Contrôlabilité glob. aux traj. de l'éq. de Burgers visqueuse . . .	25
3	Équation de Korteweg-de Vries	29
3.1	Introduction	29
3.2	Contrôlabilité globale aux trajectoires	33
3.3	Contrôlabilité exacte globale	37
3.4	Modélisation	37
3.5	Contrôlabilité d'un bac contenant un fluide modélisé par une équation de KdV non linéaire	38
4	Équations de Navier-Stokes	41
4.1	Introduction	41
4.2	Stratégie	44
5	Perspectives	53
5.1	À propos des équations de Burgers	53
5.2	À propos de l'équation de Korteweg-de Vries	54
5.3	À propos des équations de Navier-Stokes	55
II	Contrôlabilité globale d'équations de Burgers	65
6	Introduction and main results	67
7	Global controllability of nonviscous Burgers type equations	70
7.1	Main idea	70
7.2	Proof of Theorem 6.1	71
8	Global controllability of the viscous Burgers equation	87
8.1	Main idea	87
8.2	Preliminaries	87
8.3	Proof of Theorem 6.2.	89
8.4	Proof of Proposition 8.5.	91
9	Appendix A	96

3	Contrôlabilité globale d'une équation de KdV non linéaire	103
10	Introduction	105
11	Well-posedness results and smoothing effect	109
11.1	Well-posedness results for the Cauchy problem without internal force	109
11.2	Smoothing effect	111
11.3	Well posedness result for the Cauchy problem with an internal force	112
12	Proofs of Theorem 10.1 and Theorem 10.2	113
12.1	Null controllability	113
12.2	Local exact controllability to the trajectories	114
12.3	Proof of Theorem 10.1.	114
12.4	Proof of Proposition 12.3.	117
13	Linear estimates	120
14	Local well-posedness of (11.6)	122
15	Global well-posedness of (11.6)	124
4	Contrôlabilité globale à zéro d'un système de Navier-Stokes	133
16	Statement of the result	135
17	Preliminary results	137
17.1	Well posedness and smoothing effect	137
17.2	Local null controllability (Figure 1 part (e))	138
18	Proof of Theorem 16.2	139
19	Proof of proposition 18.1	143
19.1	First step: construction of a trajectory of NS which starts at y^0 and arrives close to $\bar{y}$ (Figure 1 part (b))	144
19.2	Second step: where the controllability of the Euler equation is used (Figure 1 part (c))	150
19.3	Third step: construction of a trajectory of NS which starts close to $\bar{y}$ and arrives close to 0 (Figure 1 part (d))	157
19.4	Fourth step: proof of Proposition 18.1	159
20	Appendix	160

Chapitre I

Introduction

1 Introduction

Dans cette thèse, on présente des résultats sur la contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires issues de la mécanique des fluides : des équations de type Burgers, une équation de Korteweg-de Vries et un système de Navier-Stokes 2-D. Chacune de ces équations modélise un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen de commandes, que l'on appelle les *contrôles*, et qui sont représentés par des conditions aux limites ou des forces extérieures. Nous faisons référence aux surveys [36] de E. Fernandez-Cara et E. Zuazua et [77] de E. Zuazua ainsi qu'aux livres [23] de J.-M. Coron et [72] de M. Tucsnak et G. Weiss pour des ouvrages généraux sur la théorie du contrôle.

Dans un premier temps, nous rappelons les différentes définitions de contrôlabilité qui seront considérées ultérieurement et nous décrivons la stratégie d'étude employée.

Afin de faciliter la compréhension du lecteur, nous choisissons d'illustrer nos propos sur la poussette-canne, modélisée par le système de contrôle suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\dot{(\cdot)}$ désigne la dérivée par rapport au temps.

L'état de ce système est $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et le contrôle est $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. La composante u_1 du contrôle u représente une force rectiligne et u_2 est le couple appliqué au système. Dans la suite, on fera appel au système (1.1) en l'écrivant $\dot{x} = f(x, u)$ pour plus de simplicité.

1.1 Définitions

Comme le système de contrôle considéré est non linéaire, on doit distinguer les résultats de contrôlabilité locale des résultats de contrôlabilité globale.

- On dit que le système (1.1) est *localement exactement contrôlable* (resp. *localement contrôlable à zéro*) au temps $T > 0$, si pour toutes conditions initiale x^0 et finale x^1 assez petites (resp. pour toute condition initiale x^0 assez petite), on peut trouver un contrôle u qui permet d'amener l'état x du système (1.1) de x^0 à x^1 (resp. à 0) en temps T .
- On parle de *contrôlabilité globale exacte* (resp. *globale à 0*) si la propriété ci-dessus est valable pour tous x^0 et $x^1 \in \mathbb{R}^3$ (resp. pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^3$).
- Une question intéressante est la *contrôlabilité locale* (resp. *globale*) *exacte aux trajectoires* au temps $T > 0$. Etant donnée une solution particulière (une trajectoire) $(\bar{x}, \bar{u})$ du système (1.1), et une condition initiale x^0 assez proche de $\bar{x}(0)$ (resp. x^0 quelconque), il s'agit de trouver un contrôle u qui amène l'état x du système de x^0 à $\bar{x}(T)$ en temps T .
- On peut enfin reprendre ces différentes notions de contrôlabilité *exacte* pour les transposer dans un cadre *approché*. Il ne s'agit alors plus d'atteindre exactement l'état sou-

haité x^1 ou $\bar{x}(T)$, mais de pouvoir, pour tout $\epsilon > 0$ très petit, construire un contrôle qui permet à l'état du système d'approcher cet état à une distance ϵ .

Remarque 1.1. *Dans les définitions ci-dessus, lorsque nous avons mentionné la contrôlabilité locale, nous avons implicitement sous-entendu “contrôlabilité locale autour de l'origine”. Cette définition s'étend de façon évidente au cas de la contrôlabilité autour d'un état d'équilibre quelconque du système, i.e. un état (x_e, u_e) vérifiant $f(x_e, u_e) = 0$ ou autour d'une trajectoire $(\bar{x}, \bar{u})$ du système $\dot{x} = f(x, u)$.*

1.2 Stratégie d'étude d'un système de contrôle

Lorsque l'on cherche à étudier la contrôlabilité d'un système non linéaire, on essaie souvent dans un premier temps de se “débarrasser” de la non linéarité en *linéarisant* le système autour d'un état d'équilibre du système, car on a en général une meilleure connaissance des systèmes linéaires. Ensuite, si le système linéaire est contrôlable, on essaie d'en déduire un résultat de contrôlabilité pour le système non linéaire en utilisant par exemple un théorème d'inversion locale ou de point fixe. Cette méthode - résoudre d'abord un problème linéaire puis utiliser un théorème de point fixe pour passer au non linéaire - est classique en dimension finie. En dimension infinie, si la non linéarité n'est pas trop forte, on peut parfois obtenir un résultat de contrôlabilité globale, comme l'a montré pour la première fois E. Zuazua dans [75, 76] lors de l'étude de la contrôlabilité d'une équation des ondes non linéaire.

Linéarisation autour d'un état d'équilibre Si on linéarise (1.1) autour de l'équilibre $(0, 0) \in \mathbb{R}^5$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ \dot{x}_3 = u_2, \end{cases}$$

qui n'est pas contrôlable. On doit donc utiliser une autre méthode pour linéariser le système (1.1) et pouvoir en déduire un résultat pour le système non linéaire.

Méthode du retour La méthode que nous allons employer, et qui sera appliquée par la suite pour obtenir des résultats sur la contrôlabilité globale exacte de l'équation de Burgers non visqueuse (Chapitre 2) et sur la contrôlabilité globale à zéro d'un système de Navier Stokes (Chapitre 4), est connue sous le nom de *méthode du retour*. Elle a été introduite par J.-M. Coron dans [17] pour résoudre un problème de stabilisation, et a ensuite été appliquée avec succès à l'étude de la contrôlabilité de diverses équations aux dérivées partielles, notamment par J.-M. Coron dans [18, 20, 21], par T. Horsin dans [48], par O. Glass dans [40, 41] et par K. Beauchard dans [3]; voir aussi [23] pour d'autres équations. Elle consiste à trouver des trajectoires qui partent de 0 et se rendent à 0, et qui ont de “bonnes” propriétés de contrôlabilité autour d'elles.

Illustrons ceci dans le cas du système (1.1). Pour un temps $\delta > 0$ fixé, on se donne une application $\bar{u} : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui vérifie, pour tout temps $t \in [0, \delta/2]$,

$$\bar{u}(\delta - t) = -\bar{u}(t). \quad (1.2)$$

Si $\bar{x}$ désigne la solution du système

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \\ \bar{x}(0) = 0, \end{cases}$$

(rappelons que la notation $\dot{x} = f(x, u)$ désigne le système (1.1)) alors on a l'égalité

$$\bar{x}(\delta) = 0.$$

En effet, définissons pour tout temps $t \in [0, \delta]$,

$$y(t) := \bar{x}(\delta - t).$$

Alors

$$y(\delta/2) = \bar{x}(\delta/2) \tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\dot{\bar{x}}(\delta - t) \\ &= -f(\bar{x}(\delta - t), \bar{u}(\delta - t)) \\ &= f(\bar{x}(\delta - t), -\bar{u}(\delta - t)), \end{aligned}$$

car $f(x, -u) = -f(x, u)$ (voir (1.1)). On obtient finalement en utilisant (1.2)

$$\dot{y} = f(y, \bar{u}).$$

Ainsi, $\bar{x}$ et y sont solutions de la même équation différentielle ordinaire, sont égales en $\delta/2$ (voir (1.3)) donc, pour tout temps $t \in [0, \delta]$,

$$y(t) = \bar{x}(t).$$

En particulier,

$$\bar{x}(\delta) = y(0) = \bar{x}(0) = 0.$$

On vient de construire une trajectoire de (1.1) qui part de 0 à l'instant $t = 0$ et arrive à 0 au temps $t = \delta$. Vérifions maintenant que le linéarisé du système (1.1) autour de cette trajectoire est contrôlable. Ce système est le suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos \bar{x}_3 - \bar{u}_1 x_3 \sin \bar{x}_3, \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin \bar{x}_3 + \bar{u}_1 x_3 \cos \bar{x}_3, \\ \dot{x}_3 = u_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Afin de vérifier le critère de Kalman (voir ci-dessous) pour les systèmes non stationnaires, on écrit le système (1.4) sous la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) \tag{1.5}$$

avec

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{u}_1 \sin \bar{x}_3 \\ 0 & 0 & \bar{u}_1 \cos \bar{x}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) := \begin{pmatrix} \cos \bar{x}_3 & 0 \\ \sin \bar{x}_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

On rappelle que le critère de Kalman s'énonce comme suit (voir [23, Theorem 1.18 page 11] pour deux preuves différentes de ce résultat)

Lemme 1.2. *On suppose que pour un $\bar{t} \in [0, \delta]$,*

$$\text{Vect} \{B_i(\bar{t})u, u \in \mathbb{R}^2, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^3, \quad (1.7)$$

où on a défini, par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$,

$$B_0(t) := B(t), B_i(t) := \dot{B}_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t), \forall t \in [0, \delta].$$

Alors le système de contrôle (1.5) est contrôlable sur $[0, \delta]$.

Dans le cas du système (1.4), on utilise (1.6) pour trouver

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} -\bar{u}_2 \sin \bar{x}_3 & \bar{u}_1 \sin \bar{x}_3 \\ \bar{u}_2 \cos \bar{x}_3 & -\bar{u}_1 \cos \bar{x}_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice formée par la concaténation de $B_0 = B$ et B_1 est la suivante

$$\begin{pmatrix} \cos \bar{x}_3 & 0 & -\bar{u}_2 \sin \bar{x}_3 & \bar{u}_1 \sin \bar{x}_3 \\ \sin \bar{x}_3 & 0 & \bar{u}_2 \cos \bar{x}_3 & -\bar{u}_1 \cos \bar{x}_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de choisir $\bar{u}_2 \neq 0$ et $\bar{t}$ tels que $u_2(\bar{t}) \neq 0$ pour avoir 3 colonnes indépendantes : le système (1.4) est alors contrôlable.

Contrôlabilité locale du système non linéaire L'utilisation du théorème d'inversion locale permet alors d'obtenir de façon immédiate la contrôlabilité locale du système (1.1) autour de $(\bar{x}, \bar{u})$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [23, Proof of Theorem 3.6 page 127].

Au Chapitre 2 (qui correspond à [13]), on utilise la méthode du retour puis le théorème de point fixe de Schauder pour obtenir la contrôlabilité globale d'équations de type Burgers non visqueuses. On utilise ensuite ce résultat pour obtenir un résultat de contrôlabilité approchée pour l'équation de Burgers visqueuse. Comme la contrôlabilité locale aux trajectoires a déjà été démontrée par A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov dans [37], on en déduit la contrôlabilité globale aux trajectoires de cette équation.

Au Chapitre 3, correspondant à [14], on applique la même stratégie pour obtenir la contrôlabilité globale aux trajectoires de l'équation de Korteweg-de Vries non linéaire, en utilisant cette fois un résultat local de O. Glass et S. Guerrero [42].

Enfin, au Chapitre 4 ([15]), on montre, toujours avec la méthode du retour, un résultat de contrôlabilité approchée pour un système de Navier-Stokes 2-D avec conditions de Navier et on utilise un résultat local de A. V. Fursikov et O. Imanuvilov [38] (voir aussi [45] de S. Guerrero) pour en déduire un résultat global, à zéro.

Dans la suite de l'introduction, on présente de manière plus détaillée les différentes parties de cette thèse.

2 Équations de Burgers

2.1 Introduction

On s'intéresse dans un premier temps à la contrôlabilité des équations de Burgers, non visqueuse (Bnv)

$$y_t + yy_x = 0 \quad (2.1)$$

et visqueuse (Bv)

$$y_t - \nu y_{xx} + yy_x = 0, \quad (2.2)$$

où $\nu > 0$ représente la viscosité du fluide considéré, sur un intervalle borné de longueur $L > 0$. Les équations (2.1) et (2.2), introduites par J.-M. Burgers dans [8, 9], sont en quelque sorte le “toy model” des équations de la mécanique des fluides et modélisent un écoulement de fluides en dimension 1, y représentant la vitesse du fluide considéré au temps t et au point x , ν étant sa viscosité.

Résultats de contrôlabilité antérieurs Ces résultats sont des résultats de contrôle par le bord. Rappelons dans un premier temps les deux principaux travaux qui concernent la contrôlabilité de l'équation de Burgers non visqueuse. Pour plus de simplicité, nous ne donnons pas ici la régularité des fonctions considérées et renvoyons le lecteur aux articles concernés pour cette régularité.

Dans [2], F. Ancona et A. Marson décrivent l'ensemble des états atteignables pour une loi de conservation scalaire non linéaire de la forme $y_t + \{f(y)\}_x = 0$, avec donnée initiale nulle, et pour des fonctions f strictement convexes et de classe C^2 . Ils montrent en particulier que dans le cas de l'équation de Burgers non visqueuse, partant de l'état nul, on ne peut pas atteindre un état final constant $y^1 := C > 0$ en un temps plus petit que L/C au moyen d'un seul contrôle frontière. En d'autres termes, pour tout temps $0 < T < L/C$, pour tout $u \in L^\infty(0, T)$ et pour tout $y : (0, T) \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\begin{aligned} y_t + yy_x &= 0, \\ y(0, \cdot) &= 0, \\ y(\cdot, 0) &= u(\cdot), \end{aligned}$$

on a $y(T, \cdot) \neq C$.

Dans [48], T. Horsin utilise la méthode du retour pour décrire l'ensemble des états atteignables pour l'équation de Burgers non visqueuse. Il démontre que partant de 0, tout état final constant $y^1 := C \neq 0$ peut être atteint en un temps $T \geq L/|C|$ au moyen d'un seul contrôle frontière.

Nous passons maintenant aux résultats qui concernent l'équation de Burgers visqueuse. Tout d'abord dans [37], A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov montrent que pour tous $(a, b) \in (0, L)^2$ qui satisfont $0 < a < b < L$, on n'a pas contrôlabilité approchée dans $L^2(0, L)$ vers des états “grands” du système

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + yy_x = v(t, x), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, \\ y(0, x) = y^0, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $v(t, x) \in L^2((0, T) \times (0, L))$ est telle que, pour tout $t \in (0, T)$,

$$\text{Supp } (v(t, \cdot)) \subset (a, b), \quad 0 < a < b < L.$$

Dans le même temps, J.I. Diaz, dans [28], utilise le principe du maximum pour montrer que la contrôlabilité approchée de l'équation (2.2) n'est pas vérifiée pour certains états lorsque $y(t, 0) := 0$, $t \in (0, T)$, $y^0 \in L^\infty(0, L)$ et au moyen d'un unique contrôle frontière $y(t, L) := \tilde{u}(t)$.

Dans [32], E. Fernández-Cara et S. Guerrero démontrent que le système (2.3) n'est pas contrôlable à zéro pour des temps petits. Ils donnent aussi des estimations optimales pour le temps minimal de contrôlabilité à zéro, noté $T(r)$, qui correspond à des données initiales de norme $\leq r$ dans L^2 .

Finalement, J.-M. Coron montre dans [22] l'existence d'un temps $T > 0$ tel que le problème

$$\begin{aligned} y_t - y_{xx} + yy_x &= 0, \\ y(t, 0) &= 0, \\ y(0, x) = y^0, \quad y(T, x) &= 0 \end{aligned}$$

a une solution quelle que soit la donnée initiale $y^0 \in L^2(0, L)$.

Concernant les résultats de contrôlabilité de l'équation (2.2) au moyen de deux contrôles frontière $y(t, 0$ et $y(t, L)$, rappelons tout d'abord que A.V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov obtiennent dans [37] la contrôlabilité exacte locale de (2.2) au moyen de deux contrôles frontière.

Ensuite, dans [22], J.-M. Coron utilise la transformation de Hopf-Cole pour montrer que l'on peut amener la solution de (2.2) de l'état nul à des états constants grands.

Plus récemment, dans [46], S. Guerrero et O. Yu. Imanuvilov ont montré que si l'on contrôle seulement les deux extrémités de l'intervalle, alors non seulement la contrôlabilité globale à zéro en temps petit n'est pas vérifiée, mais on n'a pas non plus contrôlabilité globale approchée pour des temps grands.

Finalement, dans [42], O. Glass et S. Guerrero montrent la contrôlabilité globale exacte de (2.2) à des états non nuls, lorsque la viscosité ν est petite. Ce résultat est obtenu pour un temps assez grand, et pour des contrôles qui tendent vers 0 comme $e^{-c/\nu}$.

Enfin, on trouve dans les travaux [31] de C. Fabre, J.-P. Puel et E. Zuazua, [29] de A. Doubova, E. Fernandez-Cara, M. Gonzalez-Burgos et E. Zuazua et [35] de E. Fernandez-Cara et E. Zuazua, et le survey [33] de E. Fernandez-Cara et S. Guerrero des résultats qui concernent plus généralement les équations paraboliques non linéaires.

Le but du Chapitre 2 est d'obtenir des résultats de contrôlabilité "positifs" pour les équations (2.1) et (2.2), c'est-à-dire que nous souhaitons obtenir des résultats globaux, valables en temps arbitrairement petit. En effet, rappelons que l'équation (2.1) est souvent considérée comme l'analogue pour la dimension 1 de l'équation d'Euler des fluides incompressibles, et nous savons d'après des travaux de J.-M. Coron [18, 20] et d'O. Glass [40, 41] que cette dernière équation est contrôlable, même en temps petit. Il semble donc naturel d'obtenir des résultats similaires pour l'équation de Burgers non visqueuse. Nous verrons que cela est possible grâce à l'introduction dans le membre de droite de l'équation d'un nouveau contrôle, dépendant seulement du temps. On peut

penser que ce nouveau contrôle joue un rôle équivalent à celui du gradient de pression dans l'équation d'Euler.

Le premier système considéré ici est le suivant

$$y_t + \alpha(x)yy_x = u(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (2.4)$$

où $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$. L'état du système au temps $t \in [0, T]$ est $y(t, \cdot) \in C^1([0, L])$ et les contrôles sont $y(t, 0)$, $y(t, L)$ et $u(t) \in \mathbb{R}$.

Le second système est

$$y_t - y_{xx} + yy_x = u(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (2.5)$$

$$y(t, 0) = v_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.6)$$

$$y(t, L) = v_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Ici, l'état au temps $t \in [0, T]$ est $y(t, \cdot) \in H^2(0, L)$ et les contrôles sont $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $u(t) \in \mathbb{R}$.

2.2 Contrôlabilité globale exacte de l'équation de Burgers non visqueuse

Étant donnés un temps arbitraire $T > 0$, une longueur $L > 0$, un état initial $y^0 \in C^1([0, L])$ et un état final $y^1 \in C^1([0, L])$ on veut construire un contrôle $u(t)$ et une solution y de (2.4) qui passe de l'état y^0 à l'état y^1 en temps T . Il s'agit d'un problème sous-déterminé puisque les conditions aux bords ne sont pas prescrites, mais ces dernières découleront naturellement de la construction de la solution y . Au Chapitre 2 on obtient le résultat suivant (Theorem 6.1)

Théorème 2.1. *Pour tous T et $L > 0$, pour tous y^0 et $y^1 \in C^1([0, L])$ et pour tout $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$, il existe $u \in C^0([0, T])$ s'annulant au voisinage de 0 et de T et il existe $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ qui satisfait (2.4) et*

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L],$$

$$y(T, x) = y^1(x), \quad x \in [0, L].$$

Stratégie On procède comme indiqué dans la section 1 de cette introduction et on commence par linéariser le système autour d'un état d'équilibre : le linéarisé de (2.4) autour de $(0, 0)$ est

$$y_t = u(t),$$

où, au temps $t \in [0, T]$, l'état du système est $y(t, \cdot) \in C^1([0, L])$ et les contrôles sont $y(t, 0)$, $y(t, L)$ et $u(t) \in \mathbb{R}$. Il est évident que ce dernier système n'est pas contrôlable. Nous allons donc utiliser la méthode du retour de J.-M. Coron, dont le principe a été rappelé précédemment. Dans un premier temps, on introduit une trajectoire particulière $(\bar{y}, \bar{u})$ autour de laquelle on linéariser le système. Soit donc $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$, telle que

$$a \equiv 0 \text{ dans un voisinage de } 0 \text{ et de } T, \quad (2.8)$$

$$\int_0^T a(t) dt > \int_0^L 1/\alpha(x) dx \quad (2.9)$$

(voir Fig. 1).

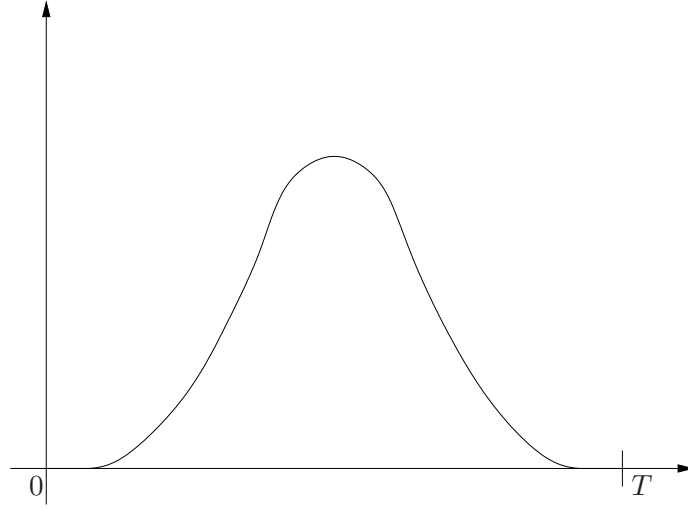


FIG. 1 – $a(t)$

Il est clair que le couple $(\bar{y}, \bar{u})$ défini par

$$\bar{y}(t, x) := a(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L],$$

et

$$\bar{u}(t) := a'(t), \quad t \in [0, T],$$

est une trajectoire du système (2.4). Le système linéarisé autour de cette trajectoire est le suivant

$$z_t + a(t)\alpha(x)z_x = v(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (2.10)$$

qui est contrôlable à zéro (avec $v \equiv 0$) d'après l'inégalité (2.9) (voir Proposition 7.4 du Chapitre 2). Remarquons que même si l'équation (2.4) a une vitesse de propagation finie, le fait de pouvoir choisir la “taille” de a permet d'avoir une vitesse de propagation aussi grande que l'on veut.

Schéma de preuve Nous commençons par quelques remarques préliminaires. Comme l'équation (2.4) est réversible par rapport au temps et comme la contrôlabilité locale de cette équation entraîne sa contrôlabilité globale (voir Chapitre 2 Lemma 7.1 et Lemma 7.3), il nous suffit d'obtenir un résultat de contrôlabilité locale à zéro pour le système (2.4). Plus exactement, nous voulons montrer que pour toute condition initiale y^0 assez petite en norme C^1 , il existe un contrôle $u(t)$ et une solution y de (2.4) qui part de y^0 au temps $t = 0$ et arrive à 0 au temps $t = T$. C'est ici que nous allons faire intervenir la trajectoire $(\bar{y}, \bar{u})$ précédemment introduite. Au lieu de montrer la contrôlabilité locale à zéro de l'équation (2.4), nous allons montrer le même résultat pour l'équation suivante

$$z_t + \alpha(x)(a(t) + z)z_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]. \quad (2.11)$$

En effet, supposons que l'on sache construire, pour tout y^0 assez petit, une solution z de (2.11) ayant comme condition initiale $z(0, \cdot) = y^0$ et comme condition finale $z(T, \cdot) = 0$. Alors définissant y et u par

$$\begin{aligned} y(t, x) &= a(t) + z(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \\ u(t) &= a'(t), \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

et utilisant l'hypothèse (2.8) et l'équation (2.11), on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} y_t + \alpha(x)yy_x &= a'(t) + z_t + \alpha(x)(a(t) + z)z_x \\ &= a'(t) \\ &= u(t), \\ y(0, \cdot) &= y^0, \\ y(T, \cdot) &= 0. \end{aligned}$$

Pour montrer la contrôlabilité locale à zéro de l'équation (2.11), nous allons utiliser le théorème de point fixe de Schauder en considérant le système suivant

$$z_t + \alpha(x)(a(t) + y(t, x))z_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (2.12)$$

$$z(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.13)$$

où $y^0 \in C^1([0, L])$ et $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ sont supposés fixés. On cherche donc à construire, en utilisant le flot de l'équation $\dot{\xi} = \alpha(\xi)(a(t) + y(t, \xi))$, une solution z de ce système qui dépende continûment de y et telle que $z(T, \cdot) = 0$.

Pour éviter certains problèmes de définition du flot, on étend y^0 (resp. y) par une fonction $C^1(\mathbb{R})$ (resp. $C^1([0, T] \times \mathbb{R})$) à support compact dans $\mathbb{R}$ (resp. $[0, T] \times \mathbb{R}$) et α en une fonction $C^1(\mathbb{R})$ bornée et à dérivée bornée (voir Chapitre 2 Paragraphe "Proof of Proposition 7.6" pour plus de précisions). Par commodité, on désigne encore par y^0 , y et α les fonctions étendues. Soit alors

$$\begin{aligned} \phi : D(\phi) \subset [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, t_2, x) &\mapsto \phi(t_1, t_2, x), \end{aligned}$$

le flot associé à l'équation différentielle ordinaire $\dot{\xi} = \alpha(\xi)(a(t) + y(t, \xi))$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) &= \alpha(\phi)(a(t_1) + y(t_1, \phi(t_1, t_2, x))), \quad (t_1, t_2, x) \in D(\phi), \\ \phi(t_2, t_2, x) &= x, \quad t_2 \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ce flot est défini sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$ et on peut définir z pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ par

$$z(t, x) := y^0(\phi(0, t, x)). \quad (2.14)$$

De rapides calculs montrent que $z \in C^1([0, T] \times [0, L])$ satisfait

$$\begin{aligned} z_t + \alpha(x)(a(t) + y(t, x))z_x &= 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \\ z(0, x) &= y^0(x), \quad x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Le point le plus délicat à vérifier est l'égalité

$$z(T, x) = 0, \quad x \in [0, L] \quad (2.15)$$

qui est démontrée dans la preuve de la Proposition 7.10 du Chapitre 2. Rappelons que par définition (voir (2.14)), $z(T, x) = y^0(\phi(0, T, x))$, et y^0 est une fonction à support compact. L'égalité (2.15) peut donc se résumer ainsi : au temps T , tout le flot est "sorti" du domaine.

Pour terminer, on montre que pour un $R > 0$ bien choisi, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : B_R &\rightarrow C^1([0, T] \times [0, L]) \\ y &\mapsto z, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où z est défini par (2.14) et

$$B_R := \{y \in C^1([0, T] \times [0, L]); |y|_{C^1([0, T] \times [0, L])} \leq R\},$$

est continue (voir Chapitre 2 Appendix A). Il ne reste plus qu'à exhiber $K \subset C^1([0, T] \times [0, L])$ convexe, compact dans $C^1([0, T] \times [0, L])$ et tel que $\mathcal{F}(K) \subset K$ pour pouvoir conclure d'après le théorème de Schauder.

On montre tout d'abord (voir Proposition 7.13 du Chapitre 2) que pour toute condition initiale y^0 assez petite, $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$. Ensuite, on introduit, pour toute fonction $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$, où Q est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, et pour tout $\rho \geq 0$, le module de continuité de g ,

$$\omega_\rho(g) := \max\{|g(\xi_2) - g(\xi_1)|; (\xi_1, \xi_2) \in Q^2 \text{ et } |\xi_2 - \xi_1| \leq \rho\},$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On prouve dans la Proposition 7.14 du Chapitre 2 l'existence d'une constante $C_0 := C_0(R, T, |\alpha|_{C^1([0, L])}, |a|_{C^1([0, T])}) > 0$ telle que pour tout $\rho > 0$, pour tout $y \in B_R$,

$$\omega_\rho(z_t) + \omega_\rho(z_x) \leq C_0 |y^0|_{C^1([0, L])}(\rho + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(\alpha')) + C_0 \omega_\rho(y_x^0),$$

où $z = \mathcal{F}(y)$.

Pour finir, on définit

$$\Omega : \rho \in [0, +\infty[\mapsto 2C_0 \omega_\rho(y_x^0) + \rho + \omega_\rho(\alpha') \in [0, +\infty[$$

et

$$K := \{y \in B_R; \text{ pour tout } \rho > 0, \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(y_x) \leq \Omega(\rho)\}.$$

Ainsi défini, K est clairement convexe, fermé et borné dans B_R . Puisque K est équicontinu dans $C^1([0, T] \times [0, L])$, il s'ensuit par le théorème d'Ascoli que K est compact dans B_R . De plus, on vérifie facilement que si $|y^0|_{C^1([0, L])}$ est assez petite, alors $\mathcal{F}(K) \subset K$. Par le théorème de Schauder, ceci implique que $\mathcal{F}$ a un point fixe. Mais si y est un point fixe de $\mathcal{F}$ alors

$$\begin{aligned} y_t + (a(t) + y)y_x &= 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \\ y(0, x) &= y^0(x), \quad x \in [0, L], \\ y(T, x) &= 0, \quad x \in [0, L], \end{aligned}$$

autrement dit le système (2.11) est localement contrôlable à zéro, et le Théorème 2.1 suit. Voyons maintenant comment déduire de ce résultat un résultat de contrôlabilité pour l'équation de Burgers visqueuse.

2.3 Contrôlabilité globale aux trajectoires de l'équation de Burgers visqueuse

Le problème est maintenant le suivant : étant donnés un temps arbitraire $T > 0$, une longueur de domaine $L > 0$, une condition initiale $y^0 \in H^1(0, L)$ et une solution

$$(\hat{y}, \hat{u}) \in (L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))) \times L^2(0, T)$$

de

$$\hat{y}_t - \hat{y}_{xx} + \hat{y}\hat{y}_x = \hat{u}(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (2.17)$$

peut-on trouver des contrôles $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $u(t)$ tels qu'il existe une solution du système (2.5)-(2.7) qui part à l'instant initial de y^0 et arrive au temps $t = T$ en $\hat{y}(T, \cdot)$?

On obtient au Chapitre 2 le résultat suivant (Theorem 6.2)

Théorème 2.2. *Pour tous T , $L > 0$, pour tout $y_0 \in H^1(0, L)$ et pour tout*

$$(\hat{y}, \hat{u}) \in (L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))) \times L^2(0, T)$$

qui satisfait (2.17), il existe $y \in L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))$, $u \in L^2(0, T)$, v_1 et $v_2 \in H^{3/4}(0, T)$ qui satisfont (2.5)-(2.7),

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in (0, L),$$

et

$$y(T, x) = \hat{y}(T, x), \quad x \in (0, L).$$

Dans [22], J.-M. Coron avait souligné le fait qu'il devait être possible de déduire des propriétés de contrôlabilité pour l'équation de Burgers visqueuse à partir de propriétés similaires pour l'équation non visqueuse. Il expliquait en effet que pour un temps fixé et des états grands, ou pour un temps petit et des états fixés, le terme non linéaire yy_x était certainement un terme clé en comparaison du terme linéaire y_{xx} . Si l'on tient l'équation de Burgers non visqueuse pour l'analogue de l'équation d'Euler des fluides incompressibles, on peut de la même manière considérer que l'équation de Burgers visqueuse est l'analogue des équations incompressibles de Navier-Stokes en 2-D. Or J.-M. Coron, dans [20], et J.-M. Coron et A. V. Fursikov, dans [25], ont obtenu des résultats de contrôlabilité pour Navier-Stokes 2-D en utilisant des résultats de contrôlabilité pour l'équation d'Euler [19, 40, 41]. On peut donc penser qu'il est possible d'obtenir des résultats pour l'équation de Burgers visqueuse en utilisant l'équation non visqueuse. Dans [37], A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov établissent le résultat suivant de contrôlabilité locale aux trajectoires

Proposition 2.3. *Pour tout $(\hat{y}, \hat{u}) \in (L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))) \times L^2(0, T)$ satisfaisant (2.17), il existe $R > 0$ tel que pour tout $y^0 \in H^1(0, L)$ qui satisfait*

$$|y^0(\cdot) - \hat{y}(0, \cdot)|_{H^1(0, L)} < R,$$

il existe des contrôles $(v_-(t), v_+(t)) \in (H^{3/4}(0, T))^2$ tels que la solution y de

$$y_t - y_{xx} + yy_x = \hat{u}(t), t \in [0, T], x \in [0, L], \quad (2.18)$$

$$y(t, 0) = v_-(t), t \in [0, T], \quad (2.19)$$

$$y(t, L) = v_+(t), t \in [0, T], \quad (2.20)$$

$$y(0, x) = y^0(x), x \in [0, L] \quad (2.21)$$

appartient à l'espace $L^2(0, T/4; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T/4; L^2(0, L))$ et satisfait l'égalité suivante

$$y(T, \cdot) = \hat{y}(T, \cdot).$$

Afin d'obtenir la contrôlabilité globale aux trajectoires du système (2.5)-(2.7), il nous suffit donc de montrer un résultat de contrôlabilité approchée pour ce système. Nous allons maintenant voir comment intervient la contrôlabilité de l'équation (2.4).

Schéma de preuve On introduit de nouveau une fonction $a \in C^\infty([0, 1]; [0, +\infty))$ telle que a s'annule dans un voisinage de 0 et dans un voisinage de 1 et telle que

$$\int_0^{1/2} a(s) ds > L, \quad (2.22)$$

$$a(t) = a(1 - t) \text{ pour tout } t \in [0, 1/2]. \quad (2.23)$$

On a montré précédemment la contrôlabilité locale à zéro de l'équation (2.11) dans l'espace $C^1([0, T] \times [0, L])$. La preuve s'adapte clairement à l'espace $C^2([0, T] \times [0, L])$. Maintenant, si on se place dans le cas où $\alpha \equiv 1$ sur $[0, L]$ et si on utilise la réversibilité de l'équation

$$z_t + (a + z)z_x = 0$$

par rapport au temps, (ayons (2.23) en mémoire), le résultat suivant (Chapitre 2 Lemma 8.9) suit immédiatement

Lemme 2.4. *Il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que pour tous $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ qui satisfont*

$$|z^0|_{C^2([0, L])} \leq \epsilon$$

et

$$|z^1|_{C^2([0, L])} \leq \epsilon,$$

il existe $z \in C^2([0, 1] \times [0, L])$ tel que

$$z_t + (a + z)z_x = 0, t \in [0, 1], x \in [0, L],$$

$$z(0, x) = z^0(x), x \in [0, L],$$

$$z(1, x) = z^1(x), x \in [0, L]$$

et

$$|z|_{C^2([0, 1] \times [0, L])} \leq C(|z^0|_{C^2([0, L])} + |z^1|_{C^2([0, L])}).$$

Un changement d'échelle adéquat donne ensuite le résultat suivant (Chapitre 2 Lemma 8.6)

Lemme 2.5. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $M > 0$ il existe un temps $\delta_0 > 0$ tel que pour tous $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ qui satisfont*

$$|z^0|_{C^2([0, L])} \leq M, \quad (2.24)$$

$$|z^1|_{C^2([0, L])} \leq M, \quad (2.25)$$

pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$, il existe $y^\delta \in C^2([0, \delta] \times [0, L])$ qui satisfait

$$\begin{aligned} y_t^\delta + (a^\delta + y^\delta)y_x^\delta &= 0, \quad t \in [0, \delta], \quad x \in [0, L], \\ y^\delta(0, x) &= z^0(x), \quad x \in [0, L], \\ y^\delta(\delta, x) &= z^1(x), \quad x \in [0, L] \end{aligned}$$

et

$$|y^\delta|_{C^0([0, \delta]; C^2([0, L]))} \leq CM,$$

où

$$\begin{aligned} a^\delta : [0, \delta] &\rightarrow [0, +\infty) \\ t &\mapsto \frac{1}{\delta} a\left(\frac{t}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Pour chaque $\delta \in (0, \delta_0]$, où δ_0 est défini dans le Lemme 2.5, on désigne par $y^{1, \delta}$ la solution de

$$\begin{cases} y_t^{1, \delta} - y_{xx}^{1, \delta} + y^{1, \delta} y_x^{1, \delta} = (a^\delta)'(t), \quad t \in (0, \delta), \quad x \in (0, L), \\ y^{1, \delta}(t, 0) = y^\delta(t, 0) + a^\delta(t), \quad y^{1, \delta}(t, L) = y^\delta(t, L) + a^\delta(t), \quad t \in (0, \delta), \\ y^{1, \delta}(0, x) = z^0(x), \quad x \in (0, L), \end{cases}$$

et on définit R^δ par

$$R^\delta := y^{1, \delta} - y^\delta - a^\delta. \quad (2.26)$$

Il est alors facile de voir que R^δ est solution du système suivant

$$\begin{aligned} R_t^\delta - R_{xx}^\delta + R^\delta y_x^\delta + R^\delta R_x^\delta + (y^\delta + a^\delta(t))R_x^\delta - y_{xx}^\delta &= 0, \quad t \in [0, \delta], \quad x \in [0, L], \\ R^\delta(0, x) &= 0, \quad x \in [0, L], \\ R^\delta(t, 0) = R_x^\delta(t, L) &= 0, \quad t \in [0, \delta]. \end{aligned}$$

On établit alors en utilisant la méthode des multiplicateurs (on prend $-2R_{xx}^\delta$ comme multiplicateur), des intégrations par parties et le lemme de Gronwall, le lemme suivant (Chapitre 2 Lemma 8.8)

Lemme 2.6. *Pour tout $M > 0$, il existe $K > 0$ et $\delta_1 \in (0, \delta_0]$, où δ_0 est défini dans le lemme 2.5. tels que pour tous $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ qui satisfont (2.24) et (2.25), pour tout $\delta \in (0, \delta_1]$ et pour tout $t \in (0, \delta]$,*

$$|R^\delta(t, \cdot)|_{H^1(0, L)} \leq K\sqrt{t}.$$

En utilisant la définition de R^δ (voir (2.26)) et le lemme précédent, on obtient la contrôlabilité approchée du système (2.5)-(2.7) pour des conditions initiale et finale assez régulières. Plus précisément, on montre le résultat suivant (Chapitre 2 Proposition 8.5)

Proposition 2.7. *Pour tout $M > 0$, il existe une constante $K > 0$ et il existe un temps $\delta_1 > 0$ tels que pour tout $0 < \delta \leq \delta_1$ et pour tous $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ qui satisfont (2.24) et (2.25), il existe $y^2 \in L^2(0, \delta; H^2(0, L)) \cap H^1(0, \delta; L^2(0, L))$ et il existe u^2, v_1^2 et $v_2^2 \in C^0((0, \delta)) \cap L^2(0, \delta)$ tels que*

$$\begin{aligned} y_t^2 - y_{xx}^2 + y^2 y_x^2 &= u^2(t), t \in [0, \delta], x \in [0, L], \\ y^2(t, 0) &= v_1^2(t), t \in [0, \delta], \\ y^2(t, L) &= v_2^2(t), t \in [0, \delta] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y^2(0, x) &= z^0(x), x \in [0, L], \\ |y^2(\delta, \cdot) - z^1(\cdot)|_{H^1(0, L)} &\leq K\sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

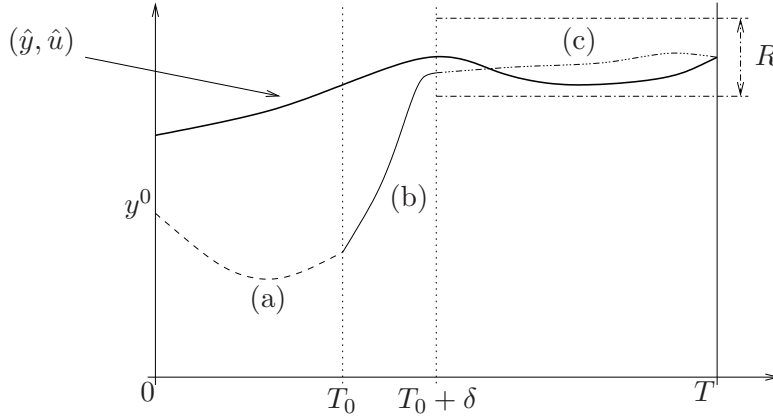


FIG. 2 – Stratégie

Afin d'obtenir la contrôlabilité globale aux trajectoires du système (2.24)-(2.25), on procède comme suit :

- partant d'une condition initiale $y^0 \in H^1(0, L)$, on utilise un effet régularisant de l'équation de Burgers visqueuse qui permet de se placer dans un cadre plus régulier (voir Chapitre 2 Proposition 8.1) (Fig 2 étape (a)),
- on utilise ensuite la Proposition 2.7 pour se rapprocher de la trajectoire prescrite $\hat{y}$

(Fig 2 étape (b)),

- on conclut avec la Proposition 2.3 pour arriver au temps T en $\hat{y}(T, \cdot)$ (Fig 2 étape (c)).

3 Équation de Korteweg-de Vries

3.1 Introduction

Modélisation En 1834, J. S. Russell observe pour la première fois un soliton, onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif. Soixante et un ans plus tard, en 1895, D. Korteweg et G. de Vries déduisent dans [54] l'équation

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, \quad (3.1)$$

qui décrit la propagation vers la droite de vagues de petite amplitude, dans un canal uniforme de faible profondeur, où $y(t, x)$ représente l'écart entre la hauteur de la vague au temps t et à l'abscisse x , et la hauteur au repos notée h_0 (voir Fig. 3).

L'équation (3.1) est désormais bien connue sous le nom d'équation de Korteweg-de Vries (KdV) mais semble pourtant avoir déjà été étudiée par Boussinesq en 1877 dans [7]. On doit au caractère dispersif et non linéaire de l'équation (3.1) l'existence de solutions particulières, calculables explicitement, qui permettent de décrire d'un point de vue théorique le phénomène naturel des solitons précédemment mentionné.

Les applications de cette équation dans des domaines variés (collision d'ondes hydro-magnétiques [39], étude des tiges élastiques [58], plasmas [5]...) ont depuis été montrées, justifiant ainsi la recherche mathématique importante dont l'équation (3.1) fait l'objet. Nous renvoyons à [73] pour l'obtention de cette équation.

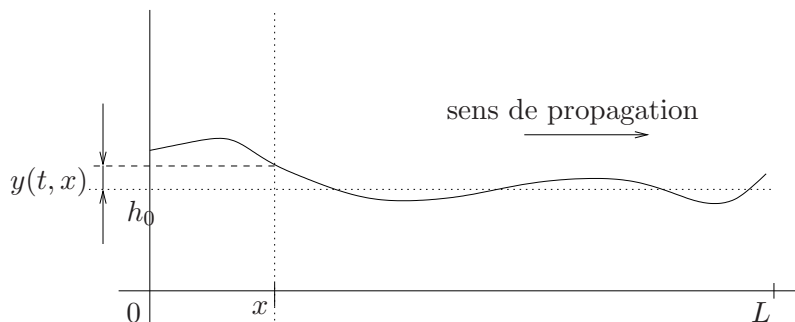


FIG. 3 – Propagation de vagues dans un canal

Problème de Cauchy L'étude du problème de Cauchy associé à l'équation (3.1) a fait l'objet de nombreux travaux dans lesquels sont principalement employées deux méthodes : la méthode du scattering inverse et les inégalités d'énergie. La plupart du temps, l'équation de KdV est considérée sur la droite réelle, sur un domaine périodique ou sur un intervalle borné. Les résultats les plus récents montrent que (3.1) est bien posée dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $s > -3/4$ (voir [53] et [16]) et dans $H^s(\mathbb{T})$ pour $s \geq -1$ (voir

[51]).

Dans cette thèse, on considère l'équation (3.1) sur un intervalle de longueur $L > 0$, et les résultats dont nous nous servirons concernent le système suivant

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = f(t, x), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), \\ y(0, x) = \phi(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

où ϕ est la condition initiale et h_1 , h_2 et h_3 sont les conditions aux bords.

On remarque que si y est une solution régulière du système (3.2), alors ϕ , h_1 , h_2 et h_3 doivent vérifier les relations de compatibilité suivantes

$$\phi_k(0) = h_1^{(k)}(0), \quad \phi_k(L) = h_2^{(k)}(0), \quad \phi'_k(L) = h_3^{(k)}(0), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où les fonctions ϕ_k , $k \in \mathbb{N}$, sont définies de manière récursive comme suit

$$\begin{cases} \phi_0(x) := \phi(x), \\ \phi_k(x) := -\phi_{k-1}^{(3)}(x) - \phi'_{k-1}(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\phi_j(x) \phi_{k-j-1}(x))'. \end{cases}$$

À partir de maintenant, pour chaque $r \in \mathbb{R}$, on désigne par $[r]$ l'unique entier tel que

$$[r] \leq r < [r] + 1.$$

Si l'on considère alors le problème de Cauchy relatif à (3.2) dans $H^s(0, L)$, $s \geq 0$ fixé, les conditions de compatibilité associées deviennent :

Définition 3.1. Soient $T > 0$ et $s \geq 0$. Un quatre-uplet $(\phi, \vec{h}) = (\phi, h_1, h_2, h_3) \in H^s(0, L) \times H^{(s+1)/3}(0, T) \times H^{(s+1)/3}(0, T) \times H^{s/3}(0, T)$ est dit s -compatible si les égalités

$$\phi_k(0) = h_1^{(k)}(0), \quad \phi_k(L) = h_2^{(k)}(0) \quad (3.3)$$

sont vérifiées pour

- $k = 0, \dots, [s/3] - 1$ lorsque $s - 3[s/3] \leq 1/2$
- $k = 0, \dots, [s/3]$ lorsque $s - 3[s/3] > 1/2$

et si l'égalité

$$\phi'_k(L) = h_3^{(k)}(0) \quad (3.4)$$

est vérifiée pour

- $k = 0, \dots, [s/3] - 1$ lorsque $s - 3[s/3] \leq 3/2$
- $k = 0, \dots, [s/3]$ lorsque $s - 3[s/3] > 3/2$.

Notons que si $s \leq 1/2$ les égalités (3.3) n'ont pas lieu, de même que (3.4) si $s \leq 3/2$.

Pour chaque $\epsilon > 0$ on définit

$$\mu_1(s) := \begin{cases} \epsilon + (5s + 9)/18 & \text{si } 0 \leq s < 3, \\ (s + 1)/3 & \text{si } s \geq 3; \end{cases}$$

$$\mu_2(s) := \begin{cases} \epsilon + (5s + 3)/18 & \text{si } 0 \leq s < 3, \\ s/3 & \text{si } s \geq 3. \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 3.2. [6, Theorem 1.3 page 1396] Pour tout $s \geq 0$, pour tous $T, L > 0$ et pour tout $(\phi, \vec{h}) \in H^s(0, L) \times H^{\mu_1(s)}(0, T) \times H^{\mu_1(s)}(0, T) \times H^{\mu_2(s)}(0, T)$ s -compatible, le système (3.2) avec $f \equiv 0$ est globalement bien posé dans l'espace

$$C^0([0, T]; H^s(0, L)) \cap L^2(0, T; H^{s+1}(0, L)).$$

La Proposition 3.3 qui suit est une conséquence immédiate du Théorème 3.2 (voir [52] et [64] pour des résultats similaires). Pour la preuve, nous renvoyons le lecteur à la Proposition 11.4 du Chapitre 3.

Proposition 3.3. Soient T et $L > 0$ et soit $y_0 \in L^2(0, L)$. Il existe $0 < \eta < T/4$ tel que la solution $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ de (3.2) avec $(\tilde{y}, \vec{h}) := (y_0, 0, 0, 0)$ et $f \equiv 0$ satisfait la propriété suivante

$$y \in C^0([\eta, T]; H^4(0, L)) \cap L^2(\eta, T; H^5(0, L)).$$

Remarque 3.4. On voit facilement que pour chaque $l \in \mathbb{N}^*$, il existe aussi $0 < \eta_l < T/4$ tel que

$$y \in C^0([\eta_l, T]; H^l(0, L)) \cap L^2(\eta_l, T; H^{l+1}(0, L)).$$

On termine ce paragraphe par le cas où une force extérieure agit sur le système (3.2) (i.e. $f \neq 0$). Le théorème suivant est démontré en Annexe du Chapitre 3

Théorème 3.5. Pour tous $T, L > 0$, pour tout $\phi \in L^2(0, L)$, pour tout $(h_1, h_2, h_3) \in H^1(0, T) \times H^1(0, T) \times L^2(0, T)$ et pour tout $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$, le problème de Cauchy associé au système (3.2) est globalement bien posé dans l'espace $C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$. De plus, la solution y de (3.2) satisfait la propriété de régularité cachée

$$y_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T).$$

Évoquons maintenant les résultats antérieurs de contrôlabilité de l'équation de KdV sur un intervalle borné.

Résultats de contrôlabilité antérieurs Ces résultats sont tous des résultats de contrôle par le bord. Considérons dans un premier temps le système de contrôle suivant

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = 0, y_x(t, L) = w(t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.5)$$

où, au temps $t \in [0, T]$, l'état du système est $y(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ et le contrôle $w(t) \in \mathbb{R}$ agit sur la condition de Neumann à droite.

- Dans [64], L. Rosier prouve l'existence d'un ensemble de longueurs critiques pour le domaine spatial,

$$\mathcal{N} := \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}; k, l \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad (3.6)$$

qui joue un rôle primordial dans la contrôlabilité du système (3.5). Il utilise la méthode des multiplicateurs, la méthode HUM introduite par J.-L. Lions et un théorème de point fixe pour montrer que le système de contrôle (3.5) est localement exactement contrôlable dans $L^2(0, L)$ autour de l'origine à condition que $L \notin \mathcal{N}$. Il démontre aussi que si $L \in \mathcal{N}$, alors le linéarisé de (3.5) autour de l'origine, à savoir,

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = 0, y_x(t, L) = w(t), t \in (0, T), \end{cases}$$

n'est pas exactement contrôlable dans $L^2(0, L)$, à cause de l'existence d'un sous-espace de dimension finie, $M \subset L^2(0, L)$, composé d'états non atteignables pour le système linéaire.

- Dans [24], J.-M. Coron et E. Crépeau utilisent un développement en série afin de jouer sur la non linéarité et démontrent la contrôlabilité exacte locale du système (3.5) dans $L^2(0, L)$, autour de l'origine, dans le cas où $\dim M = 1$.
- Dans [10], E. Cerpa emploie la même méthode pour montrer le même résultat dans le cas où le sous-espace M précédemment introduit est de dimension 2, mais pour un temps assez grand.
- E. Cerpa et E. Crépeau ont plus récemment étendu ce résultat à n'importe quel domaine critique [11].
- Enfin, L. Rosier d'une part, O. Glass et S. Guerrero d'autre part, démontrent respectivement dans [67] et dans [43] un résultat de contrôlabilité exacte locale aux trajectoires pour le système suivant

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = 0, y_x(t, L) = 0, t \in (0, T). \end{cases}$$

Dans le cas où plusieurs contrôles sont autorisés, il faut rappeler que L. Rosier montre dans [64] que le système

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), t \in (0, T), \end{cases}$$

est localement exactement contrôlable dans $L^2(0, L)$ autour de l'origine, et ce, quels que soient T et L .

- O. Glass et S. Guerrero obtiennent dans [43] la contrôlabilité exacte locale du système suivant

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = 0, t \in (0, T). \end{cases}$$

- Dans [74], B.-Y. Zhang prouve que le système

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), t \in (0, T), \end{cases}$$

est exactement contrôlable dans le voisinage de n'importe quelle solution régulière donnée de l'équation de KdV, dans $H^s(0, L)$, pour tout $s \geq 0$.

- Finalement, L. Rosier montre dans [65] que le système

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

est globalement exactement contrôlable pour un temps assez grand dépendant des conditions initiale et finale. Il soulève donc la question de l'existence d'un temps minimal de contrôlabilité pour ce dernier système.

Cette question est toujours ouverte à notre connaissance.

Remarque 3.6. *On trouvera d'autres résultats sur la contrôlabilité ou la stabilisation d'équations de KdV dans les articles [11, 60, 61, 66, 68, 69].*

Le but du Chapitre 3 est d'obtenir des résultats globaux sur la contrôlabilité de l'équation de KdV, sans condition sur le temps de contrôlabilité. Au vu des résultats énoncés précédemment, il semble judicieux de ne pas se contenter de contrôles frontière mais d'introduire un contrôle interne, par exemple dans le membre de droite de l'équation. Rappelons aussi qu'un tel contrôle permet d'obtenir des résultats de contrôlabilité globale pour des équations du type Burgers (voir section 2 de la présente introduction et le Chapitre 2), et la nonlinéarité est la même.

Le premier système de KdV que nous considérerons ici est le suivant,

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = u(t), \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \quad (3.7)$$

$$y(t, 0) = v_1(t), \quad y(t, L) = v_2(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.8)$$

$$y_x(t, L) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.9)$$

où, au temps $t \in [0, T]$, l'état du système est $y(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ et les contrôles sont $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $u(t) \in \mathbb{R}$.

Le second système qui nous intéresse est constitué de (3.7), (3.8) et

$$y_x(t, L) = w(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.10)$$

Cette fois-ci, au temps $t \in [0, T]$, l'état du système est $y(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ et les contrôles sont $v_1(t)$, $v_2(t)$, $w(t)$ et $u(t) \in \mathbb{R}$.

3.2 Contrôlabilité globale aux trajectoires

Le problème est le suivant : étant donnés un temps arbitraire $T > 0$, une longueur de domaine $L > 0$, une condition initiale $y^0 \in L^2(0, L)$ et une trajectoire de KdV $(\hat{y}, 0)$, i.e. une solution de

$$\begin{cases} \hat{y}_t + \hat{y}_x + \hat{y}_{xxx} + \hat{y}\hat{y}_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ \hat{y}(t, 0) = 0, \hat{y}(t, L) = 0, \hat{y}_x(t, L) = 0, & t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.11)$$

peut-on trouver des contrôles $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $u(t)$ tels qu'il existe une solution du système (3.7)-(3.9) qui part à l'instant initial de y^0 et arrive au temps T à $\hat{y}(T, \cdot)$? Plus précisément, on établit au Chapitre 3 le résultat suivant (Theorem 10.1)

Théorème 3.7. *Pour tous $T, L > 0$, pour tout $y_0 \in L^2(0, L)$ et pour tout $\hat{y} \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, L))$ qui satisfait*

$$\begin{cases} \hat{y}_t + \hat{y}_x + \hat{y}_{xxx} + \hat{y}\hat{y}_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ \hat{y}(t, 0) = 0, \hat{y}(t, L) = 0, \hat{y}_x(t, L) = 0, t \in (0, T), \end{cases}$$

il existe $v_1, v_2 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T)$ et il existe $u \in C^\infty([0, T])$ nulle au voisinage de 0 et de T tels qu'il existe un unique $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ solution de (3.7)-(3.9), avec

$$y(0, x) = y_0(x), x \in (0, L), \quad (3.12)$$

et

$$y(T, x) = \hat{y}(T, x), x \in (0, L).$$

Dans [43], O. Glass et S. Guerrero montrent qu'un seul contrôle sur la condition de Dirichlet gauche est suffisant pour obtenir une réponse positive pour des états initiaux y^0 suffisamment proches de $\hat{y}(0, \cdot)$. Plus précisément, ils établissent le résultat suivant (voir [17])

Proposition 3.8. *Soit $\hat{y} \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, L))$ satisfaisant (3.11). Alors il existe $R > 0$ tel que pour tout y^0 tel que*

$$|y^0 - \hat{y}(0, \cdot)|_{L^2(0, L)} \leq R, \quad (3.13)$$

il existe $v_1 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T)$ et il existe un unique

$$y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

de

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = v_1(t), y(t, L) = 0, y_x(t, L) = 0, t \in (0, T), \\ y(0, x) = y^0(x), x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.14)$$

satisfait

$$y(T, x) = \hat{y}(T, \cdot), x \in (0, L).$$

La stratégie employée pour démontrer la Proposition 3.8 est la suivante : les auteurs commencent par établir un premier résultat de contrôlabilité pour le système linéaire par des inégalités de Carleman, puis ils utilisent un théorème de point fixe pour passer au non linéaire. Cependant, il n'est pas évident d'obtenir de la même manière un résultat global, c'est-à-dire sans condition sur y^0 . Nous allons maintenant décrire brièvement la méthode employée au Chapitre 3 pour obtenir un résultat global.

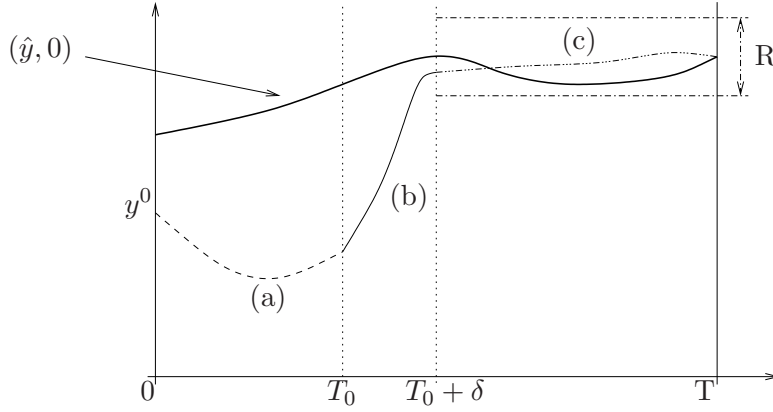


FIG. 4 – Stratégie

Idée générale L'idée est la même que celle que nous avons expliquée précédemment pour montrer la contrôlabilité globale aux trajectoires de l'équation de Burgers non visqueuse : on montre un résultat de contrôlabilité approchée pour passer du local au global. Plus précisément, dans une première étape, on utilise la Proposition 3.3 pour régulariser la condition initiale (Fig. 4 étape (a)). Ensuite, on considère que, pour des temps petits et à état fixé, le terme linéaire $y_x + y_{xxx}$ est négligeable par rapport au terme non linéaire. Ce dernier étant le même que celui de l'équation de Burgers non visqueuse, on utilise de nouveau la contrôlabilité de cette dernière équation pour “approcher” en un certain sens la solution de l'équation de KdV recherchée (Fig. 4 étape (b)). Pour finir, on applique la Proposition 3.8 (Fig. 4 étape (c)).

Contrôlabilité approchée Soit $a \in C^\infty([0, 1]; [0, +\infty))$ telle que

$$\text{supp}(a) \subset (0, 1), \int_0^{1/2} a(s) ds > L \text{ et } a(t) = a(1 - t) \text{ pour tout } t \in [0, 1/2].$$

On montre de la même manière que le Lemme 2.5 du paragraphe 2 le résultat suivant

Lemme 3.9. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $M > 0$, il existe un temps $\delta_1 > 0$ tel que pour tous $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ qui satisfont*

$$|z^0|_{C^3([0, L])} \leq M, \quad (3.15)$$

$$|z^1|_{C^3([0, L])} \leq M \quad (3.16)$$

et pour tout $\delta \in (0, \delta_1]$, il existe $y^\delta \in C^3([0, \delta] \times [0, L])$ solution de

$$\begin{cases} y_t^\delta + (a^\delta + y^\delta) y_x^\delta = 0, & t \in [0, \delta], x \in [0, L], \\ y^\delta(0, x) = z^0(x), & x \in [0, L], \\ y^\delta(\delta, x) = z^1(x), & x \in [0, L] \end{cases}$$

et

$$|y^\delta|_{C^0([0, \delta]; C^3([0, L]))} \leq C(|z^0|_{C^3([0, L])} + |z^1|_{C^3([0, L])}),$$

où

$$\begin{aligned} a^\delta : [0, \delta] &\rightarrow [0, +\infty) \\ t &\mapsto \frac{1}{\delta} a\left(\frac{t}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Pour chaque $\delta \in (0, \delta_1]$, où δ_1 est défini dans le Lemme 3.9, on désigne par $y^{2,\delta}$ la solution de

$$\begin{cases} y_t^{2,\delta} + y_x^{2,\delta} + y_{xxx}^{2,\delta} + y^{2,\delta} y_x^{2,\delta} = (a^\delta)'(t), t \in (0, \delta), x \in (0, L), \\ y^{2,\delta}(t, 0) = y^\delta(t, 0) + a^\delta(t), y^{2,\delta}(t, L) = y^\delta(t, L) + a^\delta(t), t \in (0, \delta), \\ y_x^{2,\delta}(t, L) = 0, t \in (0, \delta), \\ y^{2,\delta}(0, x) = z^0(x), x \in (0, L), \end{cases}$$

et on définit R^δ par

$$R^\delta := y^{2,\delta} - y^\delta - a^\delta. \quad (3.17)$$

Il est alors facile de voir que R^δ est solution du système suivant

$$\begin{aligned} R_t^\delta + R_x^\delta + R_{xxx}^\delta + R^\delta R_x^\delta + R^\delta y_x^\delta + (y^\delta + a^\delta(t)) R_x^\delta + y_x^\delta + y_{xxx}^\delta &= 0, t \in (0, \delta), x \in (0, L), \\ R^\delta(t, 0) &= 0, R^\delta(t, L) = 0, t \in (0, \delta), \\ R_x^\delta(t, L) &= -y_x^\delta(t, L), t \in (0, \delta), \\ R^\delta(0, x) &= 0, x \in (0, L). \end{aligned}$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs (on prend $2R^\delta$ comme multiplicateur), des intégrations par parties et le lemme de Gronwall, on obtient le lemme suivant (Chapitre 3 Lemma 12.5)

Lemma 3.10. *Pour tout $M > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tous $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ qui satisfont (3.15) et (3.16), pour tout $\delta \in (0, \delta_1]$ et pour tout $t \in (0, \delta]$,*

$$|R^\delta(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} \leq K\sqrt{t},$$

où δ_1 est défini dans le Lemme 3.9.

La Proposition 3.11 qui suit découle alors de la définition de R^δ (voir (3.17)) et du lemme précédent. (Voir Chapitre 3 Proposition 12.3)

Proposition 3.11. *Pour tout $M > 0$, il existe $K > 0$ et il existe $\delta_1 > 0$ tels que pour tout $0 < \delta \leq \delta_1$ et pour tous $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ qui satisfont (3.15) et (3.16), il existe une fonction $u \in C^\infty([0, \delta])$ nulle au voisinage de 0 et de δ et il existe v_1^2 et $v_2^2 \in H^2(0, \delta)$ tels que la solution $y^2 \in C^0([0, \delta]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, \delta; H^1(0, L))$ de*

$$\begin{cases} y_t^2 + y_x^2 + y_{xxx}^2 + y^2 y_x^2 = u(t), t \in (0, \delta), x \in (0, L), \\ y^2(t, 0) = v_1^2(t), y^2(t, L) = v_2^2(t), y_x^2(t, L) = 0, t \in (0, \delta) \end{cases}$$

et

$$y^2(0, x) = z^0(x), \quad x \in (0, L),$$

satisfait

$$|y^2(\delta, \cdot) - z^1|_{L^2(0, L)} \leq K\sqrt{\delta}.$$

Autrement dit, on a obtenu un résultat global de contrôlabilité approchée pour le système (3.7)-(3.9), pour des conditions initiale et finale assez régulières. On obtient alors le Théorème 3.7 en suivant la stratégie illustrée par la figure 4.

3.3 Contrôlabilité exacte globale

On déduit alors facilement du Théorème 3.7 le résultat suivant (Chapitre 3 Theorem 10.2)

Théorème 3.12. *Pour tous $T, L > 0$, pour tous y_0 et $y_T \in L^2(0, L)$, il existe*

$$v_1, v_2 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T),$$

il existe $w \in L^2(0, T)$ et il existe $u \in C^\infty([0, T])$ nulle au voisinage de 0 et de T tels qu'il existe un unique $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ solution de (3.7), (3.8), (3.10), (3.12) et

$$y(T, x) = y_T(x), \quad x \in (0, L).$$

En effet, il est facile de voir que le système de contrôle constitué de (3.7), (3.8) et (3.10) est réversible par rapport au temps (si (y, u, v_1, v_2, w) est une trajectoire du système (3.7), (3.8), (3.10), alors

$$(y(T-t, L-x), -u(T-t), v_2(T-t), v_1(T-t), -y_x(T-t, 0))$$

est aussi une trajectoire de ce système). Pour montrer que le système est globalement exactement contrôlable, il suffit donc de montrer qu'il est globalement contrôlable à zéro. Ceci est une conséquence triviale du Théorème 3.7.

3.4 Modélisation

Le but de ce paragraphe est de donner une interprétation possible du contrôle $u(t)$ qui intervient dans le second membre de l'équation (3.7).

Rappelons tout d'abord que l'équation de Korteweg-de Vries obtenue en suivant les lois physiques n'est pas exactement l'équation

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0$$

mais l'équation suivante (voir [73, (13.99) page 463])

$$y_t + c_0 \left(1 + \frac{3y}{2h_0} \right) y_x + \gamma y_{xxx} = 0.$$

Ici le profil spatio-temporel de profondeur est $h(x, t) = h_0 + y(x, t)$ avec $|y| \ll h_0$. $h_0 > 0$ est un paramètre constant correspondant à la profondeur d'équilibre et $c_0 = \sqrt{gh_0} > 0$ un autre paramètre constant correspondant à la vitesse des ondes sur le linéarisé autour de l'équilibre. $\gamma > 0$ est aussi un paramètre constant.

Cependant, quitte à faire des changements de variables, on peut supposer que les constantes physiques sont égales à 1.

Considérons donc maintenant l'équation (3.7), où l'on a ajouté le contrôle $u(t)$. Ici u est homogène à une vitesse. On pose

$$\frac{d}{dt}\bar{y} = u(t), \quad \frac{d}{dt}\bar{x} = \bar{y}.$$

Alors la transformation

$$(t, x, y) \mapsto (\tau = t, z = x - \bar{x}(t), w = y - \bar{y}(t))$$

donne

$$w_\tau + ww_z + w_z + w_{zzz} = 0.$$

Il s'agit de l'équation de KdV dans le repère non galiléen de vitesse $v(t) = \bar{y}(t)$ par rapport au repère galiléen associé à la variable x . La profondeur de l'eau est donnée par $h(z, t) = h_0 + w(z, t) + \bar{y}(t)$. Ainsi le contrôle $u(t) = \frac{d}{dt}v(t)$ est en fait, dans la bonne échelle, l'accélération, $\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}\bar{x}(t)$, du récipient contenant le liquide.

3.5 Contrôlabilité d'un bac contenant un fluide modélisé par une équation de KdV non linéaire

On termine cette section relative à l'équation de Korteweg-de Vries en donnant une application des résultats précédents à la contrôlabilité d'un récipient contenant un liquide modélisé par cette équation. En effet, puisque le contrôle $u(t)$ représente l'accélération du récipient, on a envie d'étudier la contrôlabilité du système suivant

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = u(t), \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \quad (3.18)$$

$$y(t, 0) = v_1(t), \quad y(t, L) = v_2(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.19)$$

$$y_x(t, L) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.20)$$

$$\dot{s}(t) = u(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.21)$$

$$\dot{D}(t) = s(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.22)$$

où $\dot{(\cdot)}$ désigne la dérivée par rapport au temps. Ce système prend en compte le déplacement D du bac et sa vitesse s . À l'instant $t \in [0, T]$, l'état du système est $(y(t, \cdot), u(t), s(t), D(t))$ et les contrôles sont $v_1(t)$ et $v_2(t) \in \mathbb{R}$. Un tel système a notamment été étudié par J.-M. Coron dans [21] dans le cadre des équations de Saint-Venant.

Le but est alors le suivant : trouver des contrôles v_1 et v_2 qui permettent d'amener le système de l'état initial

$$(y(0, \cdot), u(0), s(0), D(0)) := (y^0, 0, 0, 0), \quad (3.23)$$

où $y^0 \in L^2(0, L)$, à l'état final

$$(y(T, \cdot), u(T), s(T), D(T)) := (0, 0, 0, 0), \quad (3.24)$$

où $T > 0$ est arbitraire. On procède en deux temps. Tout d'abord, d'après le Théorème 3.7 (Chapitre 3 Theorem 10.1), on sait qu'il existe des contrôles v_1 , v_2 et u_1 tels que la solution y de

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = u_1(t), \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \quad (3.25)$$

$$y(t, 0) = v_1(t), \quad y(t, L) = v_2(t), \quad t \in (0, T), \quad (3.26)$$

$$y_x(t, L) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3.27)$$

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in (0, L), \quad (3.28)$$

vérifie

$$y(T/2, \cdot) = 0. \quad (3.29)$$

De plus, si l'on reprend la démonstration du résultat, on voit que l'on peut choisir u_1 tel que

$$\int_0^{T/2} u_1(t) dt = 0, \quad (3.30)$$

$$u_1(0) = u_1(T/2) = 0. \quad (3.31)$$

Au temps $t = T/2$, l'état du système (3.18)-(3.21) est donc

$$(y(T/2), u_1(T/2), s(T/2), D(T/2)) = (0, 0, 0, \int_0^{T/2} \int_0^t u_1(\tau) d\tau dt).$$

En effet, les deux premières égalités viennent de (3.29) et (3.31), puis d'après (3.21), (3.23) et (3.30),

$$\begin{aligned} s(T/2) &= s(0) + \int_0^{T/2} u_1(\tau) d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

et d'après (3.22)-(3.23) et l'égalité précédente,

$$\begin{aligned} D(T/2) &= D(0) + \int_0^{T/2} s(t) dt \\ &= \int_0^{T/2} (s(0) + \int_0^t u_1(\tau) d\tau) dt \\ &= \int_0^{T/2} \int_0^t u_1(\tau) d\tau dt. \end{aligned}$$

On se sert maintenant du lemme suivant

Lemme 3.13. *Il existe $u_2(t) \in C^\infty([0, T/2])$ tel que*

$$\begin{cases} u_2(0) = 0, \\ u_2(T/2) = 0, \\ \int_0^{T/2} u_2(t) dt = 0, \\ \int_0^{T/2} \int_0^t u_2(\tau) d\tau dt = - \int_0^{T/2} \int_0^t u_1(\tau) d\tau dt. \end{cases}$$

Pour construire un tel u_2 , on peut par exemple le chercher sous la forme d'un polynôme de degré 3, l'existence suit alors par calcul d'un déterminant de Cramer. Maintenant, en définissant (Y, U, S, D) par

$$Y(t, x) := \begin{cases} y(t, x) & t \in [0, T/2], x \in [0, L], \\ \int_0^{t-T/2} u_2(\tau) d\tau & t \in [T/2, T], x \in [0, L]. \end{cases}$$

$$U(t) := \begin{cases} u_1(t) & t \in [0, T/2], \\ u_2(t - T/2) & t \in [T/2, T], \end{cases}$$

$$S(t) := \begin{cases} \int_0^t u_1(\tau) d\tau & t \in [0, T/2], \\ \int_0^{t-T/2} u_2(\tau) d\tau & t \in [T/2, T], \end{cases}$$

$$D(t) := \begin{cases} \int_0^t \int_0^s u_1(\tau) d\tau ds & t \in [0, T/2], \\ \int_0^{t-T/2} \int_0^s u_2(\tau) d\tau ds + \int_0^{T/2} \int_0^s u_1(\tau) d\tau ds & t \in [T/2, T], \end{cases}$$

et V_1, V_2 par

$$V_1(t) := \begin{cases} v_1(t) & t \in [0, T/2], \\ \int_0^{t-T/2} u_2(\tau) d\tau & t \in [T/2, T], \end{cases}$$

$$V_2(t) := \begin{cases} v_2(t) & t \in [0, T/2], \\ \int_0^{t-T/2} u_2(\tau) d\tau & t \in [T/2, T], \end{cases}$$

on a construit une solution de

$$\begin{cases} Y_t + Y_x + Y_{xxx} + YY_x = U(t), (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ Y(t, 0) = V_1(t), Y(t, L) = V_2(t), t \in (0, T), \\ Y_x(t, L) = 0, t \in (0, T), \\ \dot{S}(t) = U(t), t \in (0, T), \\ \dot{D}(t) = S(t), t \in (0, T) \end{cases}$$

qui vérifie

$$(Y(T, \cdot), U(T), S(T), D(T)) := (0, 0, 0, 0).$$

4 Équations de Navier-Stokes

4.1 Introduction

En mécanique des milieux continus, les équations les plus simples pour décrire le comportement de fluides comme l'eau ou l'air sont celles de Navier-Stokes (NS). Ces équations apparaissent dans l'étude de nombreux phénomènes (écoulement de l'eau dans un tuyau, mouvements de l'air de l'atmosphère, turbulences aéronautiques) et sont obtenues à partir de l'hypothèse physique d'existence d'une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Dans la suite, on s'intéressera seulement aux fluides incompressibles.

Commençons par introduire quelques notations. Soit $T > 0$. Soit $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe non vide borné de frontière $\tilde{\Gamma}$ au moins C^2 . On désigne par n le vecteur normal sortant unitaire de $\tilde{\Gamma}$ et par τ le vecteur tangent unitaire de $\tilde{\Gamma}$ tel que (τ, n) est une base directe de $\mathbb{R}^2$. Dans la suite, ∂_i désigne la dérivée partielle par rapport à x_i , $i \in \{1, 2\}$. Pour $y = (y_1, y_2) : (0, T) \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $z = (z_1, z_2) : (0, T) \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\operatorname{div} y : (0, T) \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$\operatorname{div} y = \partial_1 y_1 + \partial_2 y_2,$$

de même $\operatorname{rot} y : (0, T) \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$\operatorname{rot} y = \partial_1 y_2 - \partial_2 y_1$$

et $(y \cdot \nabla)z : (0, T) \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est défini par

$$(y \cdot \nabla)z = (y_1 \partial_1 z_1 + y_2 \partial_2 z_1, y_1 \partial_1 z_2 + y_2 \partial_2 z_2).$$

Soit enfin $y^0 \in L^2(\tilde{\Omega})^2$ une condition initiale telle que

$$\operatorname{div} y^0 = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, \quad (4.1)$$

$$y^0 \cdot n = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}. \quad (4.2)$$

Remarque 4.1. *On rappelle que $\operatorname{div} u = 0$ implique que $u \cdot n = 0$ a un sens même si $u \in L^2(\tilde{\Omega})^2$. Ceci découle des égalités suivantes, qui ont un sens pour toute fonction scalaire $\phi \in C^1(\tilde{\Omega})$*

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div} u \cdot \phi &= \int_{\tilde{\Omega}} (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) \phi \\ &= \int_{\partial \tilde{\Omega}} (u \cdot n) \phi - \int_{\tilde{\Omega}} (u_1 \partial_1 \phi + u_2 \partial_2 \phi). \end{aligned}$$

Problème de Cauchy Dans ce paragraphe, on rappelle un résultat d'existence et d'unicité pour un système de Navier-Stokes 2-D dans un domaine borné régulier. On choisit volontairement de ne pas écrire ce résultat dans le cadre habituel de conditions aux bords de Dirichlet mais dans le cas des conditions aux bords que nous considérerons par la suite (conditions (4.5) et (4.6)).

Définition 4.2. On dit que y est une solution faible des équations de Navier-Stokes

$$y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p \text{ dans } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} y = 0 \text{ dans } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \quad (4.4)$$

$$y \cdot n = 0 \text{ sur } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \quad (4.5)$$

$$\operatorname{rot} y = 0 \text{ sur } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \quad (4.6)$$

$$y(0, \cdot) = y^0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, \quad (4.7)$$

si

$$\operatorname{div} y = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0, T) \times \tilde{\Omega})$$

et si, pour tout $\phi \in C^\infty([0, T] \times \tilde{\Omega})^2$ à support compact dans $[0, T] \times \tilde{\Omega}$ et tel que $\operatorname{div} \phi = 0$, on a

$$\int_0^T \int_{\tilde{\Omega}} (\nabla y \cdot \nabla \phi - y_i y_j \partial_i \phi_j - y \cdot \phi_t) dt dx = \int_{\tilde{\Omega}} y^0 \cdot \phi(0, \cdot) dx,$$

où l'on a adopté la convention de sommation usuelle.

On voit en particulier que cette formulation implique que (4.3) est vérifiée au sens des distributions pour un certain champ de pression qui est une distribution. On a alors le théorème suivant (voir [57, pages 129-130])

Théorème 4.3. Il existe une unique solution faible y de (4.3)-(4.7) qui satisfait :

$$y \in L^2(0, T; H^1(\tilde{\Omega}))^2 \cap C^0([0, T]; L^2(\tilde{\Omega}))^2.$$

De plus, il existe un unique

$$p \in L^2((0, T) \times \tilde{\Omega})$$

tel que

$$\int_{\tilde{\Omega}} p dx = 0$$

et tel que (4.3) a lieu au sens des distributions. Enfin, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |y(t, x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla y|^2 dx ds = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |y^0|^2.$$

Une conséquence immédiate du Théorème 4.3 est la Proposition 4.4 (voir l'annexe du Chapitre 4 pour la preuve).

Proposition 4.4. La solution y du système (4.3)-(4.7) satisfait la propriété de régularité suivante

$$y \in C^0((0, T]; H^3(\tilde{\Omega}))^2.$$

De plus, il existe $\eta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $y^0 \in L^2(\tilde{\Omega})^2$ vérifiant (4.1) et (4.2) et tel que $|y^0|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} \leq \eta$, pour tout $t \in [T/3, T]$,

$$|y(t, \cdot)|_{H^3(\tilde{\Omega})^2} \leq \alpha |y^0|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}.$$

Résultats antérieurs

Du fait du caractère dissipatif et non réversible des équations de Navier-Stokes on ne peut s'attendre à montrer un résultat de contrôlabilité exacte au sens usuel, à savoir, "étant donnés deux éléments distincts y_0 et y_1 de l'espace des états et un temps arbitraire T , il existe une trajectoire du système qui part à l'instant initial de y_0 et arrive au temps T en y_1 ".

Cependant, il est naturel de s'interroger sur la contrôlabilité locale exacte aux trajectoires d'un système de Navier-Stokes. Cette question a fait l'objet de diverses études. Citons notamment les travaux [49] de O. Yu. Imanuvilov et [34] de E. Fernandez-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov et J.-P. Puel où la contrôlabilité exacte locale aux trajectoires est établie dans le cas de conditions au bord du type Dirichlet, [38] de A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov et [45] de S. Guerrero où un résultat similaire est obtenu dans le cadre de conditions au bord de type Navier rappelées ci-dessous dans (4.8). La différence majeure entre ces articles provient des conditions demandées sur les états à atteindre. Les preuves reposent toutes sur des inégalités de Carleman.

Dans [26] J.-M. Coron et S. Guerrero obtiennent la contrôlabilité locale à zéro d'un système de Navier-Stokes 2-D sur un tore au moyen d'un seul contrôle scalaire.

Dans [19], J.-M. Coron montre la contrôlabilité globale approchée d'un système de NS 2-D avec conditions de Navier en utilisant la méthode du retour et en conjuguant ce résultat avec un résultat local, J.-M. Coron et A. V. Fursikov obtiennent dans [25] la contrôlabilité globale exacte aux trajectoires d'un système de NS 2-D sur une variété sans bord.

Dans [56], J.-L. Lions et E. Zuazua étudient la contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes 2-D et 3-D, en utilisant la méthode HUM de J.-L. Lions et un théorème de point fixe.

Dans [47], S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov et J.-P. Puel prouvent un résultat de contrôlabilité pour un système de Navier-Stokes sur un carré avec une seule condition de Dirichlet en s'inspirant de la méthode du retour.

Plus récemment, O. Yu. Imanuvilov et J.-P. Puel ont obtenu dans [50] la contrôlabilité globale à zéro de l'équation de Burgers 2-D au moyen d'un contrôle agissant sur une partie du bord, lorsque certaines conditions géométriques sont satisfaites.

Pour d'autres résultats sur la contrôlabilité et la stabilisation des équations de Navier-Stokes, voir aussi [1, 62, 63, 70, 71].

Remarque 4.5. ([59]) Rappelons que les conditions de glissement de Navier s'écrivent

$$\bar{\sigma} y \cdot \tau + (1 - \bar{\sigma}) n_i (\partial_j y_i + \partial_i y_j) \tau_j = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad (4.8)$$

où $\bar{\sigma}$ est une constante de $[0, 1)$, $n = (n_1, n_2)$ et $\tau = (\tau_1, \tau_2)$.

Dans le Chapitre 4 de ce mémoire, on s'intéresse à la contrôlabilité d'un système de Navier-Stokes sur un rectangle, avec conditions de type Navier sur les bords horizontaux : soit $L > 0$, on considère le domaine $\Omega := (0, L) \times (-1, 1)$ de frontière Γ , et on définit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ par

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$$

avec

$$\Gamma_0^+ := \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma; x_2 = 1\} \text{ et } \Gamma_0^- := \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma; x_2 = -1\}.$$

La question qui nous intéresse est alors la suivante : étant donnés un temps $T > 0$ et une condition initiale $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ qui satisfait

$$\operatorname{div} y^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.9)$$

$$y^0 \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad (4.10)$$

existe-t-il $y = (y_1, y_2) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (4.11)$$

$$\operatorname{div} y = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (4.12)$$

$$y \cdot n = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_0, \quad (4.13)$$

$$\partial_1 y_2 + \partial_2 y_1 = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_0, \quad (4.14)$$

$$y(0, \cdot) = y^0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.15)$$

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega? \quad (4.16)$$

Si un tel couple (y, p) existe, on dit que le système de contrôle (4.11)-(4.14) est globalement contrôlable à zéro.

Au Chapitre 4, on établit le résultat suivant (Theorem 16.2)

Théorème 4.6. *Le système de contrôle (4.11)-(4.14) est globalement contrôlable à zéro pour tout temps $T > 0$.*

Remarque 4.7. a) *Les contrôles n'apparaissent pas dans la formulation précédente, mais le choix le plus naturel consiste à prendre $y \cdot n$ et $\operatorname{rot} y$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_0$.*

b) *Comme le bord du domaine Ω est plat, les conditions aux limites (4.13) et (4.14) sont équivalentes aux conditions suivantes*

$$\begin{cases} y \cdot n = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{rot} y = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma_0. \end{cases}$$

c) *La condition (4.13) signifie que le fluide ne peut traverser la frontière du domaine. La condition (4.14) correspond au cas particulier des conditions de Navier où $\bar{\sigma} = 0$ (voir (4.8)). Autrement dit, on suppose que le fluide glisse sans frottement le long de la paroi.*

4.2 Stratégie

Bien que le linéarisé du système (4.11)-(4.14) autour de $(0, 0)$ soit contrôlable, il n'est pas évident d'en déduire des résultats globaux pour le système non linéaire, et nous allons donc utiliser la méthode du retour pour obtenir un résultat de contrôlabilité approchée pour le système (4.11)-(4.14). Ce dernier, combiné avec un résultat de contrôlabilité locale exacte dû à A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov donnera la propriété cherchée. (Voir Fig. 5).

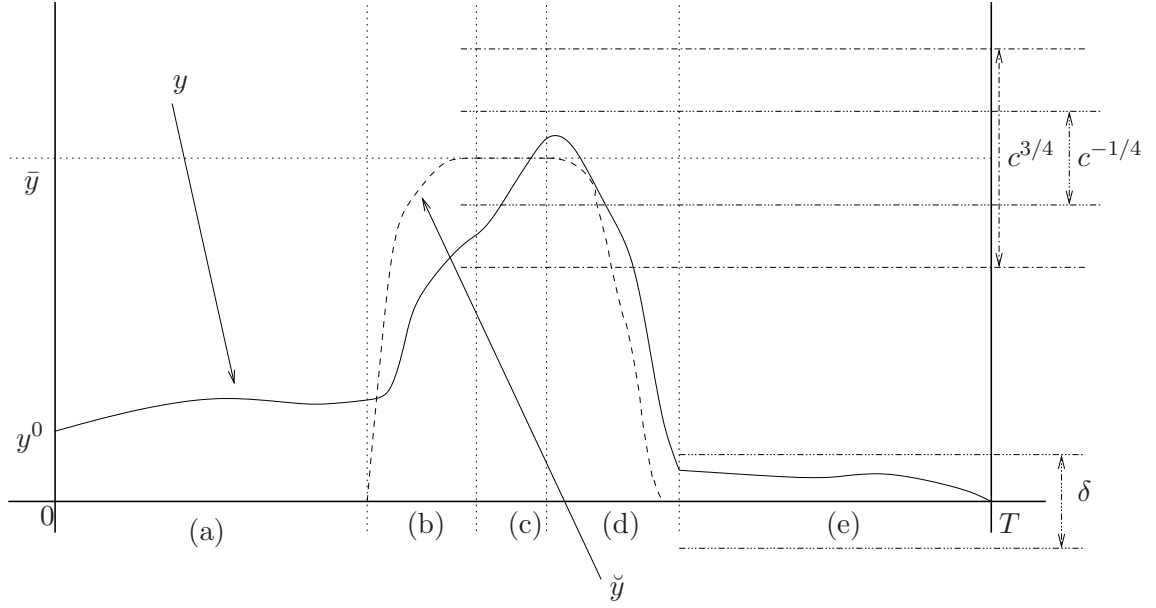


FIG. 5 – Schéma de preuve

Extension du domaine (Fig 5 (a)) Le résultat de A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov (Proposition 4.10 ci-après) est valable sur un domaine régulier (de frontière au moins C^2), ce qui n'est pas le cas du domaine Ω que l'on considère ici. On commence donc par introduire un nouveau domaine $\tilde{\Omega}$, régulier, sur lequel on se placera désormais afin de pouvoir utiliser les résultats connus sur les équations de Navier-Stokes.

Soit $\mathbb{S} := \mathbb{R}/7L\mathbb{Z}$. On définit $\tilde{\Omega}$ par

$$\tilde{\Omega} := \mathbb{S} \times (-1, 1) \quad (4.17)$$

et on appelle $\tilde{\Gamma}$ sa frontière. On peut noter que

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^+ \cup \tilde{\Gamma}^-$$

avec

$$\tilde{\Gamma}^+ := \{x = (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, x_2 = 1\} \text{ et } \tilde{\Gamma}^- := \{x = (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, x_2 = -1\}.$$

Remarque 4.8. a) Le domaine $\tilde{\Omega}$ défini par (4.17) est régulier, a un bord plat et le problème de Cauchy associé au système (4.3), (4.4), (4.7) et

$$\begin{cases} y \cdot n = 0 \text{ sur } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \partial_1 y_2 + \partial_2 y_1 = 0 \text{ sur } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

est donc bien posé (voir Théorème 4.3 et Remarque 4.7 b).

À partir de maintenant, on identifie un point $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \tilde{\Omega}$ avec son représentant x qui se trouve dans $\hat{\Omega} := (-3L, 4L) \times (-1, 1)$, et par commodité, on écrit x au lieu de $\bar{x}$. De la même manière, on définit les espaces suivants

$$L^2(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in L^2(\hat{\Omega})^2\},$$

$$H^1(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^1(\hat{\Omega})^2 : y(-3L, x_2) = y(4L, x_2), \forall x_2 \in (-1, 1)\},$$

$$H^2(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^2(\hat{\Omega})^2 : \partial_1^k y(-3L, x_2) = \partial_1^k y(4L, x_2), \forall x_2 \in (-1, 1) \text{ et } k = 0, 1\},$$

et, pour tout $\epsilon \in (0, 1/2)$,

$$H^{2+\epsilon}(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^{2+\epsilon}(\hat{\Omega})^2 : \partial_1^k y(-3L, x_2) = \partial_1^k y(4L, x_2), \forall x_2 \in (-1, 1) \text{ et } k = 0..2\},$$

$$H^{3+\epsilon}(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^{3+\epsilon}(\hat{\Omega})^2 : \partial_1^k y(-3L, x_2) = \partial_1^k y(4L, x_2), \forall x_2 \in (-1, 1) \text{ et } k = 0..3\}.$$

Enfin, on introduit les espaces H et W suivants, usuels dans les problèmes relatifs aux fluides incompressibles,

$$H := \{y \in L^2(\tilde{\Omega})^2, \operatorname{div} y = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, y \cdot n = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}\}, \quad (4.18)$$

$$W := \{y \in H^1(\tilde{\Omega})^2, \operatorname{div} y = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, y \cdot n = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}\}. \quad (4.19)$$

Nous terminons ce paragraphe par le lemme suivant, dont la preuve est donnée au Chapitre 4 (voir Lemma 18.2), qui permet d'étendre des fonctions définies sur Ω en des fonctions de la même régularité, mais définies sur $\tilde{\Omega}$.

Lemme 4.9. *Il existe un opérateur linéaire continu, Π , qui étend toute fonction $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ satisfaisant (4.9) et (4.10) en une fonction $\Pi(y^0) \in H^s(\tilde{\Omega})^2 \cap H$, et toute fonction $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$ satisfaisant (4.12) et (4.13) en une fonction $\Pi(y) \in C^0([0, T]; H^s(\tilde{\Omega}))^2$ qui satisfait $\operatorname{div} \Pi(y) = 0$ dans $\tilde{\Omega}$ et $\Pi(y) \cdot n = 0$ sur $\tilde{\Gamma}$, ceci pour tout $s \in [0, 3]$. Si $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ (resp. $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$), avec $s \in (2, 3]$, satisfait aussi $\operatorname{rot} y^0 = 0$ sur Γ_0 (resp. $\operatorname{rot} y = 0$ sur $(0, T) \times \Gamma_0$) alors $\operatorname{rot}(\Pi(y^0)) = 0$ sur $\tilde{\Gamma}$ (resp. $\operatorname{rot}(\Pi(y)) = 0$ sur $(0, T) \times \tilde{\Gamma}$). De plus, cet opérateur Π peut-être construit tel que*

$$\operatorname{rot}(\Pi(y^0)) = 0 \text{ dans } (-3L, -L/4) \times (-1, 1) \cup (2L, 4L) \times (-1, 1),$$

(resp.

$$\operatorname{rot}(\Pi(y)) = 0 \text{ dans } (0, T) \times ((-3L, -L/4) \times (-1, 1) \cup (2L, 4L) \times (-1, 1))),$$

pour tout $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ satisfaisant (4.9) et (4.10) (resp. $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$ satisfaisant (4.12) et (4.13)) et pour tout $s \in (2, 3]$. Finalement, pour tout $s \in [0, 3]$, il existe $C_s > 0$ tel que

$$|\Pi(y^0)|_{H^s(\tilde{\Omega})^2} \leq C_s |y^0|_{H^s(\Omega)^2},$$

(resp.

$$|\Pi(y)|_{C^0([0, T]; H^s(\tilde{\Omega})^2} \leq C_s |y|_{C^0([0, T]; H^s(\Omega)^2)},$$

pour tout $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ (resp. $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$).

Contrôlabilité locale exacte (Fig. 5 (e)) Définissons $\omega \subset \tilde{\Omega}$ par

$$\omega := \{x \in \tilde{\Omega}, -5L/2 < x_1 < -L/2 \text{ et } -1/2 < x_2 < 1/2\}$$

et notons $1_\omega : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de ω , i.e. $1_\omega(x) := 0$ si $x \in \tilde{\Omega} \setminus \omega$, $1_\omega(x) := 1$ si $x \in \omega$. On peut alors montrer le résultat suivant d'une manière similaire à [38, Theorem 1.2 page 98]

Proposition 4.10. *Pour tout temps $T > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute condition initiale $\tilde{y} \in H^2(\tilde{\Omega})^2 \cap W$ (où W est défini par (4.19)) qui satisfait*

$$\text{rot } \tilde{y} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}$$

et

$$|\tilde{y}|_{H^2(\tilde{\Omega})^2 \cap W} \leq \delta,$$

il existe un contrôle localement distribué $v \in L^2(0, T; L^2(\tilde{\Omega}))$ tel que la solution $z \in C^0([0, T]; H^1(\tilde{\Omega})^2 \cap L^2(0, T; H^2(\tilde{\Omega})^2)$ de

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + (z \cdot \nabla)z = -\nabla p^z + v 1_\omega \text{ dans } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \text{div } z = 0 \text{ dans } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ z \cdot n = 0 \text{ sur } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \text{rot } z = 0 \text{ sur } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ z(0, \cdot) = \tilde{y} \text{ dans } \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

existe et satisfait

$$z(T, x) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega},$$

pour un certain $p^z \in L^2(0, T; H^1(\tilde{\Omega}))$.

Contrôlabilité approchée Dans le but d'appliquer la méthode du retour, on doit trouver une trajectoire $(\tilde{y}, \tilde{p})$ du système de Navier-Stokes avec de 'bonnes' propriétés de contrôlabilité autour d'elle. On la construit en trois phases. On introduit tout d'abord une constante $c > 0$ dont la valeur sera choisie ultérieurement. Il est clair que

$$(\bar{y}, \bar{p}) := ((c, 0), 0) \tag{4.20}$$

est solution du système (4.11)-(4.14). Il s'agit du deuxième morceau de $(\tilde{y}, \tilde{p})$ (Fig. 5 partie (c)). Le premier morceau (Fig. 5 partie (b)) relie $(0, 0)$ à $\bar{y}$ et le troisième (Fig. 5 partie (d)) relie $\bar{y}$ à $(0, 0)$. Ils sont tous les deux construits indépendamment de la variable d'espace. Nous n'allons pas vérifier la contrôlabilité du système linéarisé autour de cette trajectoire, mais nous allons directement prouver que pour un choix judicieux de c , on peut montrer un résultat de contrôlabilité approchée pour le système (4.11)-(4.14) en utilisant $(\tilde{y}, \tilde{p})$. Expliquons brièvement les principales idées de la preuve.

Étape 1(Fig. 5 (b)) Nous introduisons une trajectoire de (4.11)-(4.14) qui relie $(0, 0)$ à $(\bar{c}, 0)$, et grâce à laquelle nous construisons un contrôle qui nous permet de trouver une solution de (4.11)-(4.14) qui part de 0 et arrive à une distance de l'ordre de $O(c^{3/4})$ de

$\bar{y}$ pour une norme bien choisie.

Soit $0 < T_2 < T/18$. Soit $\phi \in C^\infty([-3L; 4L])$ une fonction positive qui s'annule dans un voisinage de $-3L$ et $4L$ et qui vérifie

$$\phi \equiv 0 \text{ dans } \bar{\Omega}, \quad (4.21)$$

$$\int_{-3L}^{4L} \phi = 1. \quad (4.22)$$

On définit alors (f, p^f) par

$$f(t, x) := \begin{cases} \left(\frac{4c}{T_2} t \left(1 - \frac{t}{T_2} \right), 0 \right) & \text{si } t \in [0, T_2/2], \\ (c, 0) & \text{si } t \in [T_2/2, T_2] \end{cases}$$

et

$$p^f(t, x) := \begin{cases} \frac{4c}{T_2} \left(1 - \frac{2t}{T_2} \right) \left(7L \int_{-3L}^{x_1} \phi(s) ds - x_1 \right) & \text{si } t \in [0, T_2/2], \\ 0 & \text{si } t \in [T_2/2, T_2]. \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$(f, p^f) \in (C^0([0, T_2]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})))^2 \times L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$$

satisfait

$$\begin{cases} f_t - \Delta f + (f \cdot \nabla) f = -\nabla p^f + 7L f_t \phi(x_1) \text{ dans } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} f = 0 \text{ dans } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ f \cdot n = 0 \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{rot} f = 0 \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ f(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, \\ f(t, \cdot) = \bar{y} \text{ dans } (T_2/2, T_2) \times \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

On montre alors, en utilisant la technique des multiplicateurs, le lemme de Gronwall et des résultats d'interpolation que, pour chaque condition initiale $y^0 \in H^3(\tilde{\Omega})^2 \cap H$, si $c > 0$ est assez grand, il existe un temps T_2 et une solution (y, p^y) de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla) y = -\nabla p^y + 7L f_t \phi(x_1) \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} y = 0 \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ y \cdot n = 0 \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{rot} y = 0 \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ y(0, \cdot) = y^0 \text{ sur } \tilde{\Omega} \end{cases}$$

qui vérifie

$$|y(\delta_1, \cdot) - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq K c^{3/4}$$

pour un certain $\delta_1 \in (0, T_2)$. D'après (4.21), $7L f_t \phi(x_1) \equiv 0$ sur $[0, T_2] \times \tilde{\Omega}$. On a donc le résultat suivant (Chapitre 4 Lemma 19.2)

Lemme 4.11. *Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $y^0 \in H^3(\tilde{\Omega})^2 \cap H$, il existe une constante $\tilde{c} > 0$ telle que pour tout $c \geq \tilde{c}$, il existe un temps $T_2 \in (0, T/18)$, un temps $\delta_1 \in (0, T_2)$, un contrôle $\tilde{\phi} \in C^\infty([0, T_2] \times \tilde{\Omega})$ tel que*

$$\tilde{\phi}(t, x) = 0, (t, x) \in [0, T_2] \times \tilde{\Omega}$$

et une solution

$$(y, p) \in C^0([0, T_2]; L^2(\tilde{\Omega})^2 \cap L^2(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega}))^2 \times L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega})))$$

de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p + \tilde{\phi} \text{ dans } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} y = 0 \text{ dans } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ y \cdot n = 0 \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{rot} y = 0 \text{ sur } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ y(0, \cdot) = y^0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

telle que

$$|y(\delta_1, \cdot) - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq Kc^{3/4},$$

où $\bar{y}$ est définie par (4.20).

Étape 2 (Fig. 5 (c)) La méthode utilisée dans cette étape est la même que celle qui nous a permis d'obtenir la contrôlabilité de l'équation de Burgers visqueuse et de l'équation de Korteweg-de Vries à partir de la contrôlabilité de l'équation de Burgers non visqueuse. Il est en effet naturel de considérer que pour un temps petit et des états fixés, le terme non linéaire $(y \cdot \nabla)y$ est prépondérant par rapport au terme linéaire $-\Delta y$ (rappelons que cette stratégie a été suivie par J.-M. Coron dans [20]). Ainsi, nous allons nous servir de l'équation d'Euler des fluides incompressibles pour "approcher" l'équation de Navier-Stokes : partant d'une condition initiale à une distance $O(c^{3/4})$ de $\bar{y}$ nous voulons arriver en un temps très petit à une distance $O(c^{-1/4})$ de $\bar{y}$ (signalons ici que la constante c est supposée très grande devant 1 et l'estimation désirée est donc plus fine que celle de départ).

On commence par montrer que pour toute condition initiale $\hat{y}^0$ assez petite qui vérifie

$$\operatorname{rot} \hat{y}^0 = 0 \text{ dans } (-3L, -L/4) \times (-1, 1) \text{ et sur } \tilde{\Gamma}, \quad (4.23)$$

il existe $\hat{y} : (0, 1) \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ solution d'une équation d'Euler et dont la vorticité au temps $t = 1$ est nulle, partout dans Ω . Plus précisément, on a le lemme suivant (Chapitre 4 Lemma 19.6)

Lemme 4.12. *Il existe $\epsilon > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $\hat{y}^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ vérifiant (4.23) et tel que $|\hat{y}^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} < \epsilon$, il existe $(\hat{y}, \hat{p})$ solution de*

$$\begin{cases} \hat{y}_t + ((\hat{y} + \hat{y}) \cdot \nabla)\hat{y} = -\nabla \hat{p} \text{ dans } (0, 1) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} \hat{y} = 0 \text{ dans } (0, 1) \times \tilde{\Omega}, \\ \hat{y} \cdot n = 0 \text{ sur } (0, 1) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{rot} \hat{y} = 0 \text{ sur } (0, 1) \times \tilde{\Gamma}, \\ \hat{y}(0, \cdot) = \hat{y}^0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{rot} \hat{y}(1, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.24)$$

où

$$(\hat{y}, \hat{p}) := ((2L, 0), 0) \text{ dans } (0, 1) \times \tilde{\Omega}.$$

De plus $\hat{y} \in C^0([0, 1]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2$ et

$$|\hat{y}|_{C^0([0, 1]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \leq \beta |\hat{y}^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2}.$$

Le point clé de la preuve de ce résultat consiste à établir la dernière égalité du système (4.24). Pour cela, on montre que pour tout $x \in \Omega$,

$$\tilde{f}_1(0, 1, x) \in (-5L/2, -L/2),$$

où $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ désigne le flot de l'équation différentielle ordinaire $\dot{\xi} = \hat{y}(t, \xi) + \hat{y}(t, \xi)$ et on utilise l'identité suivante, valable pour tout $x \in \tilde{\Omega}$,

$$\text{rot } \hat{y}(1, x) = \text{rot } \hat{y}^0(\tilde{f}(0, 1, x)).$$

Le résultat suit d'après (4.23). Un changement d'échelle adéquat permet alors d'obtenir la proposition suivante (Chapitre 4 Proposition 19.5)

Proposition 4.13. *Il existe deux constantes $c_0 > 0$ et $M_0 > 0$ telles que pour tout $c \geq c_0$, pour tout $z^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ vérifiant*

$$|z^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq KC_{17/8}c^{3/4},$$

où $C_{17/8}$ est défini dans le Lemme 4.9 et K est défini au Lemme 4.11, et tel que

$$\text{rot } z^0 = 0 \text{ dans } (-3L, -L/4) \times (-1, 1) \text{ et sur } \tilde{\Gamma},$$

il existe $(\tilde{z}, \tilde{p}^z)$ solution de

$$\begin{cases} \tilde{z}_t + ((\bar{y} + \tilde{z}) \cdot \nabla) \tilde{z} = -\nabla \tilde{p}^z & \text{dans } (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Omega}, \\ \text{div } \tilde{z} = 0 & \text{dans } (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Omega}, \\ \tilde{z} \cdot n = 0 & \text{sur } (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Gamma}, \\ \text{rot } \tilde{z} = 0 & \text{sur } (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{z}(0, \cdot) = z^0 & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ \text{rot } \tilde{z}(\frac{2L}{c}, \cdot) = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

De plus, $\tilde{z} \in C^0([0, 2L/c]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2$ et

$$|\tilde{z}|_{C^0([0, 2L/c]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \leq M_0 c^{3/4}.$$

Si l'on définit alors

$$R \in (C^0([0, 2L/c]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, 2L/c; H^1(\tilde{\Omega}))^2$$

comme la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} R_t - \Delta R + (R \cdot \nabla)R + (R \cdot \nabla)\tilde{z} + (\bar{y} \cdot \nabla)R + (\tilde{z} \cdot \nabla)R - \Delta \tilde{z} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = -\nabla P \text{ dans } (0, 2L/c) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} R = 0 \text{ dans } (0, 2L/c) \times \tilde{\Omega}, \\ R \cdot n = 0 \text{ sur } (0, 2L/c) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{rot} R = 0 \text{ sur } (0, 2L/c) \times \tilde{\Gamma}, \\ R(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}, \end{array} \right. \quad (4.25)$$

et

$$|\zeta(1/c^3) - \bar{y}|_{L^2(\Omega)^2} \lesssim c^{-1/4}.$$

On a finalement obtenu le résultat suivant (Chapitre 4 Proposition 19.4)

Proposition 4.14. *Il existe $c_1 > \max(72L/T, (18/T)^{1/3})$ et $M_1 > 0$ tels que pour tout $c \geq c_1$, il existe $\delta_c > 0$ tel que pour tout $z^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ qui satisfait*

$$|z^0 - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq KC_{17/8}c^{3/4},$$

où $C_{17/8}$ est défini Lemme 4.9 et K est défini Lemme 4.11, et

$$\text{rot } z^0 = 0 \text{ dans } (-3L, -L/4) \times (-1, 1) \text{ et sur } \tilde{\Gamma},$$

il existe

$$(Z, p^Z) \in C^0([0, \delta_c]; L^2(\Omega))^2 \cap L^2(0, \delta_c; H^1(\Omega))^2 \times \mathcal{D}'((0, \delta_c) \times L^2(\Omega))$$

solution de

$$\begin{cases} Z_t - \Delta Z + (Z \cdot \nabla)Z = -\nabla p^Z & \text{dans } (0, \delta_c) \times \Omega, \\ \text{div } Z = 0 & \text{dans } (0, \delta_c) \times \Omega, \\ Z \cdot n = 0 & \text{sur } (0, \delta_c) \times \Gamma_0, \\ \text{rot } Z = 0 & \text{sur } (0, \delta_c) \times \Gamma_0, \\ Z(0, \cdot) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et qui satisfait de plus

$$|Z(\delta_c, \cdot) - \bar{y}|_{L^2(\Omega)^2} \leq \frac{M_1}{c^{1/4}}.$$

Étape 3 (Fig. 5 (d)) On montre de la même manière qu'à l'étape 1 le résultat suivant (voir Chapitre 4 Lemma 19.8)

Lemme 4.15. *Il existe deux constantes $\tilde{K} > 0$ et $c_2 > 0$ telles que pour tout $c \geq c_2$, il existe un temps $T_4 \in (0, T/18)$ et $\hat{\phi} \in C^\infty([0, T_4] \times \tilde{\tilde{\Omega}})$ satisfaisant*

$$\hat{\phi}(t, x) = 0, (t, x) \in [0, T_4] \times \bar{\Omega},$$

tels que pour tout $\tilde{y} \in H$ vérifiant $|\tilde{y} - \bar{y}|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} \leq C_0 M_1 / c^{1/4}$, où C_0 est défini au Lemme 4.9 et M_1 est défini Proposition (4.14), il existe

$$(\zeta, \rho) \in C^0([0, T_4]; L^2(\tilde{\Omega})^2 \cap L^2(0, T_4; H^1(\tilde{\Omega}))^2 \times L^2(0, T_4; L^2(\tilde{\Omega})))$$

solution de

$$\begin{cases} \zeta_t - \Delta \zeta + (\zeta \cdot \nabla)\zeta = -\nabla \rho + \hat{\phi} & \text{dans } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ \text{div } \zeta = 0 & \text{dans } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ \zeta \cdot n = 0 & \text{sur } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ \text{rot } \zeta = 0 & \text{sur } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ \zeta(0, \cdot) = \tilde{y} & \text{dans } \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

De plus,

$$|\zeta(T_4, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} \leq \tilde{K}/c^{1/4}.$$

Étape 4 On obtient finalement en utilisant la Proposition 4.4, le Lemme 4.18 et les trois étapes précédentes le résultat de contrôlabilité approchée suivant (Proposition 18.1)

Proposition 4.16. *Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ satisfaisant (4.9)-(4.10), il existe $\delta_0 \in (0, T/3)$ et il existe*

$$(y, p) \in (C^0([0, \delta_0]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \delta_0; H^1(\Omega)))^2 \times L^2((0, \delta_0) \times L^2(\Omega))$$

solution de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p & \text{dans } (0, \delta_0) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{dans } (0, \delta_0) \times \Omega, \\ y \cdot n = 0 & \text{sur } (0, \delta_0) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{rot} y = 0 & \text{sur } (0, \delta_0) \times \Gamma_0, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

tel que

$$\|y(\delta_0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \epsilon.$$

De ce dernier résultat combiné avec le résultat de contrôlabilité exacte locale de A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov on déduit le théorème 4.6.

5 Perspectives

À partir des travaux effectués dans cette thèse, certains problèmes se posent naturellement. Nous allons les décrire brièvement.

5.1 À propos des équations de Burgers

Lois de conservation scalaires Dans la première partie du Chapitre 2, on étudie la contrôlabilité de l'équation de Burgers non visqueuse dans l'espace régulier $C^1([0, T] \times [0, L])$. Les travaux antérieurs [2] et [48] concernaient le cadre plus général des lois de conservation scalaires. Considérons les solutions d'entropie de l'équation

$$y_t + yy_x = u(t).$$

Peut-on espérer montrer un résultat de contrôlabilité globale? Une méthode d'étude serait certainement la méthode de suivi de fronts (voir [44] et les références associées).

Nécessité des trois contrôles ? Toujours dans le Chapitre 2, on montre que l'équation de Burgers visqueuse est contrôlable avec 3 contrôles, le premier est un contrôle interne, $u(t)$, les deux autres sont les conditions de Dirichlet. S. Guerrero et O. Yu. Imanuvilov ont montré dans [46] que dans le cas où $u \equiv 0$, l'équation n'est plus globalement contrôlable à zéro en temps petit. On peut donc se demander ce qu'il se passe si on applique maintenant un contrôle interne $u(t)$ et un seul contrôle de type Dirichlet. Par exemple, on peut s'intéresser à la contrôlabilité globale à zéro du système suivant

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + yy_x = u(t), & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, L) = v_2(t), & t \in (0, T). \end{cases}$$

La stratégie suivie dans cette thèse ne semble pas s'appliquer pour ce nouveau système. On peut donc se demander si le système ne serait plus globalement contrôlable en temps petit. Dans ce cas, l'idée est d'utiliser la méthode employée dans [46] et de transformer le système de contrôle précédent en un problème de contrôlabilité pour une équation de la chaleur, et de passer ensuite au problème adjoint pour pouvoir utiliser des résultats de [4]. Ce travail est actuellement en cours en collaboration avec S. Guerrero.

5.2 À propos de l'équation de Korteweg-de Vries

Temps de contrôlabilité minimal Un problème intéressant concerne la contrôlabilité globale de l'équation de KdV non linéaire avec 3 contrôles frontière : on sait que ce système est globalement exactement contrôlable pour un temps qui dépend des conditions initiale et finale. Peut-on montrer le même résultat pour tout temps $T > 0$? Autrement dit, existe-t-il un temps minimal de contrôlabilité?

Une question similaire se pose pour un système avec un seul contrôle frontière. On se donne une longueur critique L ($L \in \mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est défini par (3.6)) telle que $\dim M \geq 2$, où $M \subset L^2(0, L)$ désigne l'espace des états non atteignables pour le système linéaire (voir section 3.1 paragraphe "Résultats de contrôlabilité antérieurs"). On sait que le système

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = 0, y_x(t, L) = w(t), & t \in (0, T) \end{cases}$$

est localement exactement contrôlable autour de l'origine, pour un temps assez grand dépendant des conditions initiale et finale. Peut-on montrer le même résultat pour tout temps $T > 0$?

Contrôlabilité du bac Dans la section 3.5, on a étudié la contrôlabilité au moyen de contrôles frontière d'un bac contenant un fluide modélisé par une équation de KdV non linéaire. Que se passe-t-il si l'on prend maintenant $y(t, 0) = y(t, L) = 0$, i.e., que peut-on dire quant à la contrôlabilité du système suivant

$$\begin{aligned} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x &= u(t), & (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) &= 0, y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y_x(t, L) &= 0, & t \in (0, T), \\ \dot{s}(t) &= u(t), & t \in (0, T), \\ \dot{D}(t) &= s(t), & t \in (0, T), \end{aligned}$$

où, au temps $t \in [0, T]$, l'état du système est $(y(t, \cdot), s(t), D(t))$ et le contrôle est $u(t) \in \mathbb{R}$. Voir [30] de F. Dubois, N. Petit et P. Rouchon et [21] de J.-M. Coron pour un problème similaire sur les équations de Saint-Venant.

5.3 À propos des équations de Navier-Stokes

Au Chapitre 4, on montre la contrôlabilité globale à zéro d'un système de Navier-Stokes 2-D avec les conditions

$$\begin{aligned} y \cdot n &= 0, \\ \partial_1 y_2 + \partial_2 y_1 &= 0, \end{aligned}$$

sur les bords horizontaux (voir système (4.11)-(4.14)). Ces conditions correspondent au cas où $\bar{\sigma} = 0$ dans l'expression générale des conditions de Navier

$$\bar{\sigma} y \cdot \tau + (1 - \bar{\sigma}) n_i (\partial_j y_i + \partial_i y_j) \tau_j = 0,$$

où $\bar{\sigma}$ est une constante de $[0, 1)$, $n = (n_1, n_2)$ est le vecteur normal unitaire sortant, et $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ est le vecteur tangent unitaire tel que (τ, n) est une base directe de $\mathbb{R}^2$ et où l'on a adopté la convention de sommation habituelle. Une question naturelle est donc de savoir si on peut montrer le même résultat pour tout $\bar{\sigma} \in [0, 1)$. Autrement dit, on se demande si le système

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y &= 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \\ y \cdot n &= 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \bar{\sigma} y \cdot \tau + (1 - \bar{\sigma}) n_i (\partial_j y_i + \partial_i y_j) \tau_j &= 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_0 \end{aligned}$$

est globalement contrôlable à zéro. On peut aussi se poser la question pour $\bar{\sigma} = 1$ qui correspond à la condition de non glissement de Stokes.

Bibliographie

- [1] Andrei A. Agrachev, Sergei B. Kuksin, Andrei V. Sarychev and Armen Shirikyan. On finite-dimensional projections of distributions for solutions of randomly forced 2D Navier-Stokes equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 43(4) : 399–415, 2007.
- [2] Fabio Ancona and Andrea Marson. On the attainable set for scalar nonlinear conservation laws with boundary control. *SIAM J. Control Optim.*, 36(1) : 290–312, 1998.
- [3] Karine Beauchard. Local controllability of a 1-D Schrödinger equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(7) : 851–956, 2005.
- [4] Mikhail I. Belishev. On approximating properties of solutions of the heat equation. *Control Theory of Partial Differential Equations*, 43-50, Lec. Notes Pure Appl. Math. 242, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [5] A. Yu. Berezin and V. I. Karpman. Nonlinear evolution of disturbances in plasma and other dispersive media. *Soviet Physics JETP*, 24 : 227–267, 1967.
- [6] Jerry L. Bona, Shu Ming Sun, and Bing-Yu Zhang. A Nonhomogeneous Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation Posed on a Finite Domain. *Comm. Partial Differential Equations*, 28 : 1391–1436, 2003.
- [7] Joseph Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires à l'Académie des sciences*, T. 23 et 24 : 1–680, 1877.
- [8] Johannes M. Burgers. Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence. *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, 43 : 2–12, 1940.
- [9] Johannes M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1 : 182–184, 1948.
- [10] Eduardo Cerpa. Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain. *SIAM J. Control Optim.*, 46(3) : 877–899, 2007.
- [11] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau. Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(2) : 457–475, 2009.
- [12] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous Burgers type equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 344(4) : 241–246, 2007.
- [13] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous and viscous Burgers type equations. *SIAM J. Control Optim.*, 48(3) : 1567–1599, 2009.

- [14] Marianne Chapouly. Global controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation. *To appear in Commun. Contemp. Math.*.
- [15] Marianne Chapouly. On the global null controllability of a Navier-Stokes system with Navier slip boundary conditions. *Submitted*.
- [16] James E. Colliander, Markus Keel, Gigliola Staffilani, Hideo Takaoka and Terence C. Tao. Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3) : 705–749, 2003.
- [17] Jean-Michel Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3) : 295–312, 1992.
- [18] Jean-Michel Coron. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(3) : 271–276, 1993.
- [19] Jean-Michel Coron. On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 1 : 35–75 (electronic), 1995/96.
- [20] Jean-Michel Coron. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 75(2) : 155–188, 1996.
- [21] Jean-Michel Coron. Local controllability of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 : 513–554, 2002.
- [22] Jean-Michel Coron. Some open problems on the control of nonlinear partial differential equations. In Henri Berestycki, Michiel Bertsch, Bert Peletier, and Laurent Véron, editors, *Perspectives in nonlinear partial differential equations*, 215–243, Contemp. Math., 446, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [23] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs*, Providence, Rhode Island, 2007.
- [24] Jean-Michel Coron and Emmanuelle Crépeau. Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 6(3) : 367–398, 2004.
- [25] Jean-Michel Coron and Andrei V. Fursikov. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian J. Math. Phys.*, 4(4) : 429–448, 1996.
- [26] Jean-Michel Coron and Sergio Guerrero. Local null controllability of the two-dimensional Navier-Stokes system in the torus with a control force having a vanishing component. *To appear in J. Math. Pures Appl.*.
- [27] Thierry Dauxois and Michel Peyrard. *Physics of solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [28] Jesús Ildefonso Díaz. Obstruction and some approximate controllability results for the Burgers equation and related problems. In *Control of partial differential equations and applications (Laredo, 1994)*, volume 174 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 63–76. Dekker, New York, 1996.

- [29] Anna Doubova, Enrique Fernández-Cara, Manuel Gonzalez-Burgos and Enrique Zuazua. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, 41(3) : 798–819, 2003.
- [30] François Dubois, Nicolas Petit et Pierre Rouchon. Motion planning and nonlinear simulations for a tank containing a fluid. *European Control Conference* (Karlsruhe, Germany, September 1999), 1999.
- [31] Caroline Fabre, Jean-Pierre Puel and Enrique Zuazua. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 125(1) : 31–61, 1995.
- [32] Enrique Fernández-Cara and Sergio Guerrero. Remarks on the null controllability of the Burgers equation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 341(4) : 229–232, 2005.
- [33] Enrique Fernández-Cara and Sergio Guerrero. Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM J. Control Optim.*, 45(4) : 1399–1446, 2006.
- [34] Enrique Fernández-Cara, Sergio Guerrero, Oleg Yu. Imanuvilov, and Jean-Pierre Puel. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *J. Math. Pures Appl.*, 83(12) : 1501–1542, 2004.
- [35] Enrique Fernández-Cara and Enrique Zuazua. Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 17(5) : 583–616, 2000.
- [36] Enrique Fernández-Cara and Enrique Zuazua. On the history and perspectives of control theory. *Mataplí*, 74 : 47–73, 2004.
- [37] Andrei V. Fursikov and Oleg Yu. Imanuvilov. On controllability of certain systems simulating a fluid flow. In *Flow control (Minneapolis, MN, 1992)*, volume 68 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 149–184. Springer, New York, 1995.
- [38] Andrei V. Fursikov and Oleg Yu Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Center, Seoul, 1996.
- [39] C. S. Gardner and G. K. Morikawa. Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves. *Courant Inst. Math. Sci. Res. Rep.*, NYO-9082 : 1–30, 1960
- [40] Olivier Glass. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(9) : 987–992, 1997.
- [41] Olivier Glass. Exact boundary controllability of 3-D Euler equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5 : 1–44 (electronic), 2000.
- [42] Olivier Glass and Sergio Guerrero. On the uniform controllability of the Burgers equation. *SIAM J. Control Optim.*, 46(4) : 1211–1238, 2007.
- [43] Olivier Glass and Sergio Guerrero. Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit. *Asymptotic Analysis* 60(1,2) : 61–100, 2008.

- [44] Olivier Glass and Philippe G. LeFloch. Nonlinear Hyperbolic Systems : Nondegenerate Flux, Inner Speed Variation, and Graph Solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 185 : 409–480, 2007.
- [45] Sergio Guerrero. Local exact controllability to the trajectories of the Navier-Stokes system with nonlinear Navier-slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3) : 484–544 (electronic), 2006.
- [46] Sergio Guerrero and Oleg Imanuvilov. Remarks on global controllability for the Burgers equation with two control forces. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6 : 897–906, 2007.
- [47] Sergio Guerrero, Oleg Yu. Imanuvilov and Jean-Pierre Puel. Remarks on global approximate controllability for the 2-D Navier-Stokes system with Dirichlet boundary conditions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(9) : 573–577, 2006.
- [48] Thierry Horsin. On the controllability of the Burgers equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3 : 83–95 (electronic), 1998.
- [49] Oleg Yu. Imanuvilov. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6 : 39–72 (electronic), 2001.
- [50] Oleg Yu. Imanuvilov and Jean-Pierre Puel. On global controllability of 2-D Burgers equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 23(1-2) : 299–313, 2009.
- [51] Thomas Kappeler and Peter Topalov. Global well-posedness of KdV in $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. *Duke Math. J.*, 135 (2) : 327–360, 2006.
- [52] Tosio Kato. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. In *Studies in applied mathematics*, volume 8 of *Adv. Math. Suppl. Stud.*, pages 93–128. Academic Press, New York, 1983.
- [53] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce and Luis Vega. A bilinear estimate with applications to the KdV equation *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2) : 573–603, 1996
- [54] Diederik Johannes Korteweg and Gustav de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.*, 39 : 422–443, 1895.
- [55] Jacques Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1*. Travaux et recherches mathématiques. Dunod, Paris, 1968.
- [56] Jacques Louis Lions and Enrique Zuazua. Contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.* 324, 9 : 1015–1021, 1997.
- [57] Pierre-Louis Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, volume 1. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 1996.
- [58] G. A. Nariboli. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *Iowa State Univ., Engineering Res. Inst Preprint 442*, 1969.
- [59] Claude L.M.H. Navier. Sur les lois du mouvement des fluides. *Mem. Acad. R. Sci. Inst. France*, 6 : 389–440, 1823.
- [60] Ademir Fernando Pazoto. Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11 : 473–486, 2005.

- [61] Gustavo Perla Menzala, Carlos Frederico Vasconcellos, and Enrique Zuazua. Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping. *Quart. Appl. Math.*, 60(1) : 111–129, 2002.
- [62] Jean-Pierre Raymond. Boundary feedback stabilization of the two dimensional Navier-Stokes equations. *SIAM J. Control Optim.*, 45 : 790–828 (electronic), 2006.
- [63] Jean-Pierre Raymond. Feedback boundary stabilization of the three dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *J. Math. Pures Appl.*, 87(6) : 627–669 (electronic), 2007.
- [64] Lionel Rosier. Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2 : 33–55 (electronic), 1997.
- [65] Lionel Rosier. Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation—a numerical study. In *Control and partial differential equations (Marseille-Luminy, 1997)*, volume 4 of *ESAIM Proc.*, pages 255–267 (electronic). Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1998.
- [66] Lionel Rosier. Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation on the half-line. *SIAM J. Control Optim.*, 39(2) : 331–351 (electronic), 2000.
- [67] Lionel Rosier. Control of the surface of a fluid by a wavemaker. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(3) : 346–380 (electronic), 2004.
- [68] Lionel Rosier and Bing-Yu Zhang. Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain. *SIAM J. Control Optim.*, 45(3) : 927–956, 2006.
- [69] David L. Russell and Bing-Yu Zhang. Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(9) : 3643–3672, 1996.
- [70] Armen Shirikyan. Approximate controllability for three-dimensional Navier-Stokes equations. *Comm. Math. Phys.*, 266(1) : 123–151, 2006.
- [71] Armen Shirikyan. Exact controllability in projections for three-dimensional Navier-Stokes equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 24(4) : 521–537, 2007.
- [72] Marius Tucsnak and George Weiss. *Observability and Controllability of Infinite Dimensional systems*, To appear.
- [73] Gerald Beresford Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.
- [74] Bing-Yu Zhang. Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation. *SIAM J. Control Optim.*, 37(2) : 543–565 (electronic), 1999.
- [75] Enrique Zuazua. Exact boundary controllability for the semilinear wave equation. *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Collge de France Seminar, Vol. X :357–391(Paris, 1987–1988), Pitman Res. Notes Math. Ser., 220, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

- [76] Enrique Zuazua. Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 10(1) : 109–129, 1993.
- [77] Enrique Zuazua. Controllability and observability of partial differential equations : some results and open problems. *Handbook of differential equations : evolutionary differential equations (C. M. Dafermos and E. Feireisl, eds.)*, vol. 3 : 527–621, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.

Chapitre II

Contrôlabilité globale d'équations de type Burgers visqueuses et non visqueuses

In this paper, we deal with both nonviscous and viscous Burgers type equations on a bounded interval. We study the global exact controllability of these equations when we have three controls: one control is the right member of the equation and is constant with respect to the space variable, the two others are the boundary values. In a first time, we are interested in nonviscous Burgers type equations and we prove their global exact controllability for every time $T > 0$ with such controls thanks to the return method. Then we prove the global exact controllability of the viscous Burgers equation, for every time $T > 0$.

6 Introduction and main results

Let $T, L > 0$. Let $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$. The first control system we are interested in is the following

$$y_t + \alpha(x)yy_x = u(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]. \quad (6.1)$$

This is a control system, where, at time $t \in [0, T]$, the state is $y(t, \cdot) \in C^1([0, L])$ and the controls are $y(t, 0)$, $y(t, L)$ and $u(t) \in \mathbb{R}$. One can remark that when $\alpha := 1$, (6.1) is the nonviscous Burgers equation.

The second one is

$$y_t - y_{xx} + yy_x = u(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (6.2)$$

$$y(t, 0) = v_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (6.3)$$

$$y(t, L) = v_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (6.4)$$

Here, at time $t \in [0, T]$, the state is $y(t, \cdot) \in H^2(0, L)$ and the controls are $v_1(t)$, $v_2(t)$ and $u(t) \in \mathbb{R}$. Note that (6.2) is the viscous Burgers equation.

To begin with, let us recall some results concerning the exact controllability of the nonviscous Burgers equation (i.e. $\alpha := 1$) when $u := 0$.

Two works must be pointed out (for simplicity we refer to the mentioned papers for the regularity of $y : (0, T) \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$):

- in [1], F. Ancona and A. Marson describe the attainable set for general scalar nonlinear conservation laws of the type $y_t + \{f(y)\}_x = 0$ when starting from a null initial data and where f is a strictly convex function of class C^2 . In particular, they show that for the nonviscous Burgers equation, as long as the controllability time is lower than L/C ($C > 0$ constant), we do not have exact controllability from 0 to the state $y^1 := C$ by means of a boundary control, i.e, for every $0 < T < L/C$, for every $y : (0, T) \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ and $u \in L^\infty(0, T)$ which satisfy

$$\begin{aligned} y_t + yy_x &= 0, \\ y(0, \cdot) &= 0, \\ y(\cdot, 0) &= u(\cdot), \end{aligned}$$

one has $y(T, \cdot) \neq C$.

- in [18], T. Horsin uses the return method, introduced and used by J.-M. Coron in

[3, 4, 6], to describe the attainable set of the nonviscous Burgers equation. He proves that every constant final state $y^1 := C$ can be reached from $y^0 := 0$ in a time $T \geq L/|C|$ by means of a boundary control.

Some more results have been obtained on the controllability of the viscous Burgers equation

$$y_t - \nu y_{xx} + yy_x = 0,$$

where $\nu > 0$.

First, in [13], A.V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov prove that for every $(a, b) \in (0, L)^2$ with $0 < a < b < L$, the system

$$\begin{aligned} y_t - y_{xx} + yy_x &= v(t, x), \\ y(t, 0) &= y(t, L) = 0, \\ y(0, x) &= 0, \end{aligned}$$

where $v(t, x) \in L^2((0, T) \times (0, L))$ is assumed to satisfy for every $t \in (0, T)$,

$$\text{Supp } (v(t, \cdot)) \subset (a, b), \quad 0 < a < b < L,$$

is not approximately controllable in $L^2(0, L)$.

In [10], J.I. Diaz proves, by using the maximum principle, that the approximate controllability to some states does not hold for the viscous Burgers equation with $y(t, 0) := 0$, $t \in (0, T)$ and $y^0 \in L^\infty(0, L)$ and by means of a boundary control $y(t, L) := \tilde{u}(t)$.

Finally, E. Fernández-Cara and S. Guerrero present in [12] optimal estimates for the minimal time of null controllability $T(r)$ of the initial data of norm $\leq r$ in L^2 , for the precedent control system whereas J.-M. Coron proves in [8] the existence of a time $T > 0$ such that the problem

$$\begin{aligned} y_t - y_{xx} + yy_x &= 0, \\ y(t, 0) &= 0, \\ y(0, x) = y^0, \quad y(T, x) &= 0 \end{aligned}$$

has a solution whatever $y^0 \in L^2(0, L)$ is.

For the viscous Burgers equation with two boundary controls (i.e. in the case where $u := 0$), let us first recall that A.V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov prove in [13] a theorem of local exact controllability.

Next, in [8], J.-M. Coron uses the Hopf-Cole transformation to prove that one can drive the solution of the Burgers equation with null initial data to large constant states.

More recently, S. Guerrero and O. Yu. Imanuvilov proved in [17] that not only the global exact null controllability when controlling both ends of the interval does not hold for small time, but even the exact controllability does not hold even for large time. Finally, one can find in the recent work [16] of O. Glass and S. Guerrero a proof of the global exact controllability to nonzero states for the viscous Burgers equation with a small dissipation coefficient ν . This result is obtained for a sufficiently large time and with control functions bounded independently of ν .

The aim of this paper is to prove that the global controllability of the nonviscous and viscous Burgers equations holds when three controls are acting over the system. These three controls are the boundary values and the right member of the equation which is constant with respect to the space variable.

The precise results are given in the following theorems.

Theorem 6.1. *For every $T > 0$, for every $L > 0$, for every $y^0 \in C^1([0, L])$, for every $y^1 \in C^1([0, L])$, for every $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$, there exists $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ and there exists $u \in C^0([0, T])$ vanishing on 0 and T which satisfy (6.1) and*

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (6.5)$$

$$y(T, x) = y^1(x), \quad x \in [0, L]. \quad (6.6)$$

Theorem 6.2. *Let $T, L > 0$. Let $y^0 \in H^1(0, L)$. Let*

$$(\hat{y}, \hat{u}) \in (L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))) \times L^2(0, T)$$

be a solution (also called a trajectory) of

$$\hat{y}_t - \hat{y}_{xx} + \hat{y}\hat{y}_x = \hat{u}(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]. \quad (6.7)$$

Then there exist $y \in L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))$, $u \in L^2(0, T)$, v_1 and $v_2 \in H^{3/4}(0, T)$ which satisfy (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) and

$$y(T, x) = \hat{y}(T, x), \quad x \in [0, L]. \quad (6.8)$$

Remark 6.3. *As it follows from our proof of Theorem 6.1, this theorem also holds in the case where α depends on t and x .*

Remark 6.4. *One easily sees that if Theorem 6.2 is proved, then one has the same theorem with a coefficient of dissipation $\nu > 0$ in (6.2), i.e. for the following viscous Burgers equation*

$$z_t - \nu z_{xx} + z z_x = v(t).$$

Indeed one only has to perform a scaling of the following type

$$z(t, x) := y\left(\frac{t}{\nu}, \frac{x}{\nu}\right)$$

which is valid since Theorem 6.2 holds whatever $T > 0$ and $L > 0$ are.

The paper is organised as follows.

Section 2 is dedicated to the proof of Theorem 6.1. In section 2.1, we give the main idea of the proof of this theorem. We detail in section 2.2.1 the changes of variable which allow to transform control system (6.1) into another one, whose global exact controllability is equivalent to the one of control system (6.1) but easier to obtain. In section 2.2.2, we give the proof of the global exact controllability of the control system obtained in section 2.2.1 by means of a fixed point theorem.

Section 3 is devoted to the proof of Theorem 6.2. In section 3.1, we explain why it is certainly important to have a good understanding of the controllability of the

nonviscous Burgers equation to study the one of the viscous Burgers equation. In section 3.2, we recall two results concerning the viscous Burgers equation thanks to which one can reduce the problem of global exact controllability of the viscous Burgers equation to proving a global approximate controllability result. In section 3.3, we prove Theorem 6.2 assuming that this last property holds. Finally, in section 3.4, we prove this global approximate controllability result by using the local exact controllability of the nonviscous Burgers equation.

Acknowledgments

The author would like to thank her adviser J.-M. Coron for having attracted her attention to this controllability problem and for fruitful discussions and advices on this work.

7 Global controllability of nonviscous Burgers type equations

7.1 Main idea

The nonviscous Burgers equation is often considered as the analogue in dimension 1 of the Euler equation for the incompressible inviscid fluids. We know that this last equation is globally controllable, as it has been proved by J.-M. Coron in [4, 6] and by O. Glass in [14, 15]. It thus seems strange that one does not obtain similar results for the Burgers equation (see section 1). Hence, we compared the nonviscous Burgers equation and the Euler equation of incompressible inviscid fluids and we thought that a control $u(t)$ in the right member of the nonviscous Burgers equation may play the role of the pressure in the Euler equation. This hypothesis might be true, since this control $u(t)$ is the major difference between this work and the previous ones (where it vanished). This fact should explain why the results we obtain here are of quite different nature than theirs, since we prove the global controllability of the nonviscous Burgers equation (even in arbitrary small time).

The first natural idea to study the controllability of the control system (6.1) is to look at the linearized control system around the null solution. This control system is

$$y_t = u(t),$$

where at time $t \in [0, T]$ the state is $y(t, \cdot) \in C^1([0, L])$ and the controls are $y(t, 0)$, $y(t, L)$ and $u(t) \in \mathbb{R}$. Unfortunately, this linearized control system is obviously not controllable.

Then, as the nonviscous Burgers equation has many common points with the Euler equation of incompressible inviscid fluids, one may expect from a method giving controllability results for the Euler equation of incompressible inviscid fluids to give also results for the nonviscous Burgers equation. Therefore, in this work, we use the return method, introduced by J.-M. Coron in [3] and used by him in [4, 6] and by O. Glass in [14, 15] to show global controllability results for the Euler equation of incompressible inviscid fluids. It consists in looking for trajectories going from 0 to 0 such that the linearized control systems around these trajectories are controllable (or have “good”

controllability properties around them). Therefore, we look at the linearized control system around a particular trajectory $(\bar{y}, \bar{u})$, with

$$\bar{y}(t, x) := a(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]$$

and

$$\bar{u}(t) := a'(t), \quad t \in [0, T],$$

where $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ vanishes on a neighborhood of 0 and T . As we shall see, the linear control system, $y_t + \alpha(x)a(t)y_x = v(t)$, is controllable provided that $\int_0^T a(t) dt > \int_0^L 1/\alpha(x) dx$. One may consequently hope that the nonlinear control system is, at least locally, controllable too. In fact, this holds and moreover implies the global controllability.

7.2 Proof of Theorem 6.1

Preliminaries

Lemma 7.1. *Theorem 6.1 holds if (6.1) is null controllable in arbitrary time $T > 0$ with control $u \in C^0([0, T])$ vanishing at $t = 0$ and $t = T$, i.e. if for every $L > 0$, for every $T > 0$, for every $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$ and $y^0 \in C^1([0, L])$ one can reach the origin from y^0 in time T .*

Proof of Lemma 7.1. This comes from the fact that (6.1) is time-reversible. Indeed, let us fix $T > 0$, $L > 0$, $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$, y^0 and y^1 in $C^1([0, L])$. There exist $y, z \in C^1([0, T/2] \times [0, L])$, and there exist $u^y, u^z \in C^0([0, T/2])$ vanishing on 0 and $T/2$ such that

$$y_t + \alpha(x)yy_x = u^y, \quad t \in [0, T/2], \quad x \in [0, L], \quad (7.1)$$

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (7.2)$$

$$y(T/2, x) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (7.3)$$

$$z_t + \alpha(L-x)zz_x = u^z, \quad t \in [0, T/2], \quad x \in [0, L], \quad (7.4)$$

$$z(0, x) = y^1(L-x), \quad x \in [0, L], \quad (7.5)$$

$$z(T/2, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (7.6)$$

We define Y and U by

$$Y(t, x) := \begin{cases} y(t, x) & t \in [0, T/2], \quad x \in [0, L], \\ z(T-t, L-x) & t \in [T/2, T], \quad x \in [0, L]. \end{cases}$$

$$U(t) := \begin{cases} u^y(t) & t \in [0, T/2], \\ -u^z(T-t) & t \in [T/2, T]. \end{cases}$$

Using the facts that u^y and u^z are continuous and that $u^y(T/2) = u^z(T/2) = 0$, we get the continuity of U on $[0, T]$. We get the one of Y in a similar way.

Moreover,

$$Y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (7.7)$$

$$Y(T, x) = z(0, L - x) = y^1(x), \quad x \in [0, L]. \quad (7.8)$$

Finally, the fact that Y is of class C^1 on $[0, T] \times [0, L]$ and satisfies $Y_t + \alpha Y Y_x = U$ on $[0, T] \times [0, L]$ comes from its definition and the one of U , and from (7.1), (7.3), (7.4) and (7.6). ■

We are now going to see that instead of proving the global null controllability of the control system (6.1), it suffices to prove the following local null controllability result.

Proposition 7.2. *For every $T > 0$, for every $L > 0$, for every $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$, there exists $\epsilon > 0$ such that for every $y^0 \in C^1([0, L])$ satisfying $|y^0|_{C^1([0, L])} \leq \epsilon$, there exists $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ and there exists $u \in C^0([0, T])$ vanishing on 0 and T which satisfy (6.1), (6.5), and (6.6) with $y^1 := 0$.*

Lemma 7.3. *Theorem 6.1 is a consequence of Proposition 7.2.*

Proof of Lemma 7.3. Let us fix $T > 0$, $L > 0$, $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$, $y^0 \in C^1([0, L])$. Let $0 < \lambda < 1$ be such that $|\lambda y^0|_{C^1([0, L])} \leq \epsilon$, where $\epsilon > 0$ is given by Proposition 7.2. There exists $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ and there exists $u \in C^0([0, T])$ vanishing on 0 and T such that

$$y_t + \alpha(x)yy_x = u(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (7.9)$$

$$y(0, x) = \lambda y^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (7.10)$$

$$y(T, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (7.11)$$

We define

$$\begin{aligned} z : [0, \lambda T] \times [0, L] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto z(t, x) = \frac{1}{\lambda} y\left(\frac{t}{\lambda}, x\right). \end{aligned}$$

Then $z \in C^1([0, \lambda T] \times [0, L])$ and

$$z_t + \alpha(x)zz_x = \frac{1}{\lambda^2} u\left(\frac{t}{\lambda}\right), \quad t \in [0, \lambda T], \quad x \in [0, L], \quad (7.12)$$

$$z(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (7.13)$$

$$z(\lambda T, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (7.14)$$

Since $\lambda T < T$, we can define

$$Z(t, x) := \begin{cases} z(t, x) & t \in [0, \lambda T], \quad x \in [0, L], \\ 0 & t \in [\lambda T, T] \end{cases}$$

and

$$V(t) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} u\left(\frac{t}{\lambda}\right) & t \in [0, \lambda T], \\ 0 & t \in [\lambda T, T]. \end{cases}$$

The continuity of Z and V comes from the continuity of z , u , and the facts that $z(\lambda T, \cdot) = 0$ and $u(T) = 0$.

The function Z is clearly of class C^1 on $[0, \lambda T) \times [0, L]$ and on $(\lambda T, T] \times [0, L]$. Furthermore, using its definition, (7.12) and (7.14), one sees that Z is in fact of class C^1 on $[0, T] \times [0, L]$.

Lastly, $Z_t + \alpha(x)ZZ_x = V$ comes from equation (7.12) and the definitions of Z and V . ■

We are now able to apply the return method. Let $T, L > 0$. Let $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$. Let us recall that the idea of this method is to look at the linearized control system around a trajectory vanishing at the times 0 and T .

Thus, let $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ vanish on a neighborhood of 0 and T . It is clear that $(\bar{y}, \bar{u})$ defined by

$$\bar{y}(t, x) := a(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]$$

and

$$\bar{u}(t) := a'(t), \quad t \in [0, T],$$

represents a trajectory of the control system (6.1) vanishing on 0 and T . We ask whether, for every $z^0 \in C^1([0, L])$, there exists $z \in C^1([0, T] \times [0, L])$ and there exists $v \in C^0([0, T])$ vanishing on 0 and T , such that

$$z_t + a(t)\alpha(x)z_x = v(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (7.15)$$

$$z(0, x) = z^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (7.16)$$

$$z(T, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (7.17)$$

Indeed, (7.15) is nothing but the linearized control system of (6.1) around $(\bar{y}, \bar{u})$.

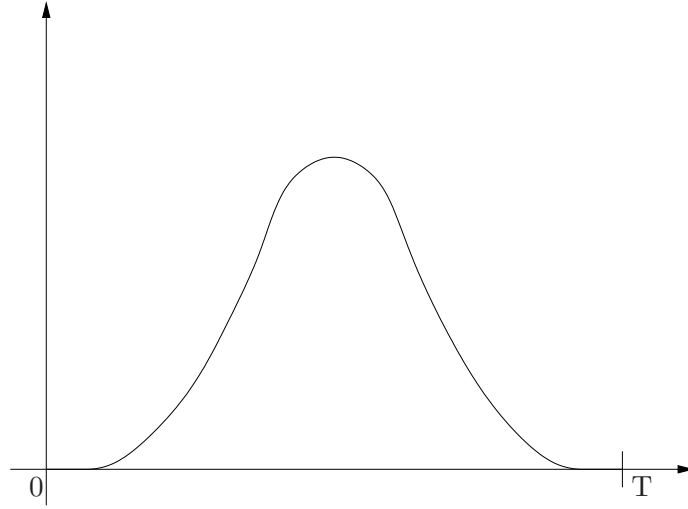
Let us also prove the following proposition.

Proposition 7.4. *Let $T > 0$, $L > 0$. Let $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$ and let $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ vanish on a neighborhood of 0 and T and be such that $\int_0^T a(s) ds > \int_0^L 1/\alpha(x) dx$. Then, for every $z^0 \in C^1([0, L])$, there exists $z \in C^1([0, T] \times [0, L])$ which satisfies (7.16), (7.17) and*

$$z_t + a(t)\alpha(x)z_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L]. \quad (7.18)$$

Remark 7.5. *The equation (6.1) has a finite speed of propagation. However, taking a as large as we do later on allows to have a finite speed of propagation as large as we want.*

Proof of Proposition 7.4. Let $T > 0$, $L > 0$, $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$. Let $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ satisfy conditions of Proposition 7.4 (see Figure 1). We fix z^0

Figure 1: $a(t)$

in $C^1([0, L])$. First of all, we extend α by $\tilde{\alpha} \in C^1(\mathbb{R}, (0, +\infty))$ bounded and such that $\tilde{\alpha}_x$ is also bounded. Let

$$0 < \eta < L/2, \quad (7.19)$$

be such that

$$\int_0^T a(s) ds > \int_{-2\eta}^L 1/\tilde{\alpha}(x) dx. \quad (7.20)$$

We define $\bar{z}^0 \in C^1([- \eta, L + \eta])$ by

$$\bar{z}^0(x) := \begin{cases} -z^0(-x) + 2z^0(0) & x \in [-\eta, 0], \\ z^0(x) & x \in [0, L], \\ -z^0(2L - x) + 2z^0(L) & x \in [L, L + \eta]. \end{cases} \quad (7.21)$$

Let

$$\chi \in C^\infty([- \eta, L + \eta]), \quad (7.22)$$

be such that

$$0 \leq \chi(x) \leq 1, \quad x \in [-\eta, L + \eta], \quad (7.23)$$

$$\chi(x) = 1, \quad x \in [0, L], \quad (7.24)$$

$$\chi(x) = 0, \quad x \in [-\eta, -\eta/2] \cup [L + \eta/2, L + \eta] \quad (7.25)$$

and let $\tilde{z}^0 \in C^1([- \eta, L + \eta])$ be defined by

$$\tilde{z}^0 := \chi \bar{z}^0. \quad (7.26)$$

The function $\tilde{z}^0$ is clearly of class C^1 on $[-\eta, L + \eta]$. We still call $\tilde{z}^0$ the function defined on $\mathbb{R}$ by

$$\tilde{z}^0(t, x) := \begin{cases} \tilde{z}^0(t, x) & \text{if } x \in [-\eta, L + \eta], \\ 0 & \text{if not.} \end{cases} \quad (7.27)$$

Then we introduce

$$\begin{aligned} \phi : D(\phi) \subset [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, t_2, x) &\mapsto \phi(t_1, t_2, x), \end{aligned} \quad (7.28)$$

the flow associated to the ordinary differential equation $\dot{\xi} = a(t)\tilde{\alpha}(\xi)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1} = a(t_1)\tilde{\alpha}(\phi), \quad (7.29)$$

$$\phi(t_2, t_2, x) = x, \quad t_2 \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.30)$$

It comes from the different properties of $\tilde{\alpha}$ that $D(\phi) = [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$. Moreover, if β is a primitive of $1/\tilde{\alpha}$ on $\mathbb{R}$, then, for every $(t_1, t_2, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$, we get

$$\phi(t_1, t_2, x) = \beta^{-1} \left(\beta(x) - \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \right). \quad (7.31)$$

Let now

$$z(t, x) := \tilde{z}^0(\phi(0, t, x)), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, L]. \quad (7.32)$$

It is clear that with such a definition, $z \in C^1([0, L])$ and satisfies (7.16) and (7.18). It remains to see that (7.17) is also satisfied. As

$$\text{Supp}(\tilde{z}^0) \subset [-\eta, L + \eta],$$

it suffices to prove that

$$\phi(0, T, L) < -\eta.$$

We know from (7.20) and (7.31) that

$$\phi(T, 0, -2\eta) > L$$

i.e.

$$\phi(0, T, L) < -2\eta \quad (7.33)$$

which gives us (7.17). ■

We have just proved the null-controllability of the linearized control system associated to the control system (6.1) around some particular trajectories vanishing on 0 and T . It is thus natural to expect that (6.1) is locally null controllable i.e. that we have the following proposition, which will be proved in the next section.

Proposition 7.6. *Let $T > 0$, $L > 0$. Let $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$. Let $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ vanish on a neighborhood of 0 and T and be such that $\int_0^T a(s) ds > \int_0^L 1/\alpha(x) dx$. Then, there exists $\epsilon > 0$ such that for every $y^0 \in C^1([0, L])$ which satisfies $|y^0|_{C^1([0, L])} \leq \epsilon$, there exists $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ such that*

$$y_t + \alpha(x)(a(t) + y)y_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (7.34)$$

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (7.35)$$

$$y(T, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (7.36)$$

Remark 7.7. *In the case where α also depends on t , it suffices to take a such that $\int_0^T a(s) ds > \int_0^L |1/\alpha(\cdot, x)|_{C^0([0, T])} dx$.*

Remark 7.8. *For related results, see Cirina [2] and Ta-tsien Li and Bo-Peng Rao [19].*

Let us point out that Proposition 7.6 implies Proposition 7.2. Indeed, let $L, T > 0$. Let $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$. Let $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ satisfy conditions of Proposition 7.6. We fix y^0 in $C^1([0, L])$ with $|y^0|_{C^1([0, L])}$ small enough to have the existence of $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ which satisfies the equations (7.34), (7.35) and (7.36).

We define z and u as follows:

$$\begin{aligned} z(t, x) &= a(t) + y(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \\ u(t) &= a'(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Then, $z \in C^1([0, T] \times [0, L])$, $u \in C^0([0, T])$, and

$$\begin{aligned} z_t + \alpha(x)zz_x &= a'(t) + y_t + \alpha(x)(a(t) + y)y_x \\ &= a'(t) \\ &= u(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(0, x) &= y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \\ z(T, x) &= y(T, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Moreover, the fact that $u(0) = u(T) = 0$ comes from the nullity of a in a neighborhood of 0 and T . ■

Proof of Proposition 7.6

Main idea Let $T, L > 0$. Let $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$ and let $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ satisfy conditions of Proposition 7.6 (see Figure 1). We consider, for $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ and $y^0 \in C^1([0, L])$ with $|y^0|_{C^1([0, L])}$ small enough, the following Cauchy problem:

$$z_t + \alpha(x)(a(t) + y(t, x))z_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \quad (7.37)$$

$$z(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L]. \quad (7.38)$$

Let us explain, first of all in a formal way, the main idea of the proof of Proposition 7.6.

We want to use Schauder's fixed point theorem, in a manner similar to the one introduced by Ta-tsien Li and Wen Ci Yu in [20]. To this aim, we need to construct at least one solution of (7.37) and (7.38) which depends continuously on y . This solution will depend on the flow of the ordinary differential equation $\dot{\xi} = \alpha(\xi)(a(t) + y(t, \xi))$. In order to avoid any problems of definition of the flow of this equation, we begin with extending $y^0 \in C^1([0, L])$ by $\tilde{y}^0 \in C^1(\mathbb{R})$, $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ by $\tilde{y} \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ and $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$ by $\tilde{\alpha} \in C^1(\mathbb{R}, (0, +\infty))$ such that $\tilde{y}^0$ and $\tilde{y}$ have compact support on $\mathbb{R}$ and $[0, T] \times \mathbb{R}$ respectively and such that $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\alpha}_x$ are bounded on $\mathbb{R}$. In this way, the flow, $\tilde{\phi}$, associated to the ordinary differential equation $\dot{\xi} = \tilde{\alpha}(\xi)(a(t) + \tilde{y}(t, \xi))$ is defined on $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$. If we now define z by, for all $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$,

$$z(t, x) := \tilde{y}^0(\tilde{\phi}(0, t, x)) \quad (7.39)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C^1([0, T] \times [0, L]) &\rightarrow C^1([0, T] \times [0, L]) \\ y &\mapsto z, \end{aligned} \quad (7.40)$$

we ask whether $\mathcal{F}$ admits a fixed point y , which moreover satisfies $y(T, \cdot) = 0$.

The point is that if $|y|_{C^1([0, T] \times [0, L])} \leq \epsilon$, with $\epsilon > 0$ small enough, we expect from the characteristics of the ordinary differential equation $\dot{\xi} = \tilde{\alpha}(\xi)(a(t) + \tilde{y}(t, \xi))$ to behave like on Figure 2, where ϕ denotes the flow associated to the ordinary differential equation $\dot{\xi} = \tilde{\alpha}(\xi)a(t)$ and $\tilde{\phi}$ the one of $\dot{\xi} = \tilde{\alpha}(\xi)(a(t) + \tilde{y}(t, \xi))$. That is, ϕ and $\tilde{\phi}$ will be “closed” in some sense and we will deduce from the behavior of ϕ the one of $\tilde{\phi}$ and thus the value of $y(T, \cdot)$.

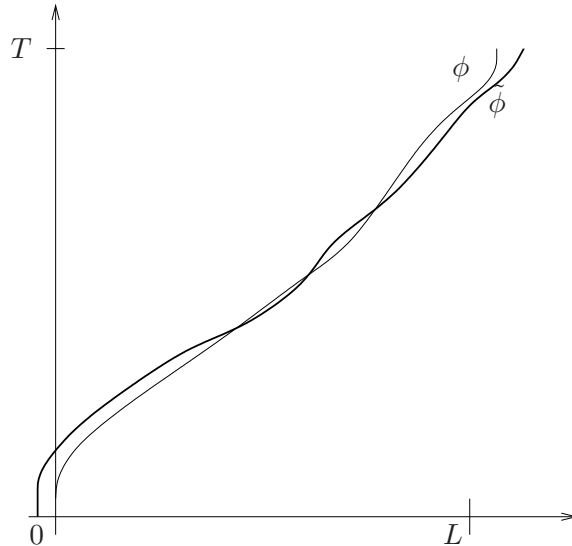


Figure 2: Behavior of ϕ and $\tilde{\phi}$

Proof of proposition 7.6 Let $T, L > 0$. Let $\alpha \in C^1([0, L], (0, +\infty))$ and let $a \in C^\infty([0, T], [0, +\infty))$ satisfy conditions of Proposition 7.6. We extend α by $\tilde{\alpha} \in C^1(\mathbb{R}, (0, +\infty))$ such that $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\alpha}_x$ are bounded on $\mathbb{R}$ and we fix $\eta > 0$ which satisfies (7.19) and (7.20). Let us recall that we have already seen in Proposition 7.4 that the flow ϕ associated to the ordinary differential equation $\dot{\xi} = a(t)\tilde{\alpha}(\xi)$ is defined on $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$.

For every $y^0 \in C^1([0, L])$, we define $\bar{y}^0 \in C^1([-\eta, L + \eta])$ by

$$\bar{y}^0(x) := \begin{cases} -y^0(-x) + 2y^0(0) & x \in [-\eta, 0], \\ y^0(x) & x \in [0, L], \\ -y^0(2L - x) + 2y^0(L) & x \in [L, L + \eta]. \end{cases} \quad (7.41)$$

Let now $\chi \in C^\infty([-\eta, L + \eta])$ satisfy (7.23), (7.24) and (7.25) and let

$$\tilde{y}^0 := \chi \bar{y}^0. \quad (7.42)$$

The function $\tilde{y}^0$ is clearly of class C^1 on $[-\eta, L + \eta]$. We still call $\tilde{y}^0$ the function defined on $\mathbb{R}$ by

$$\tilde{y}^0(t, x) := \begin{cases} \tilde{y}^0(t, x) & \text{if } x \in [-\eta, L + \eta], \\ 0 & \text{if not.} \end{cases} \quad (7.43)$$

It comes from (7.42) and (7.43) that $\tilde{y}^0 \in C_c^1(\mathbb{R})$, where

$$C_c^1(\mathbb{R}) := \{f \in C^1(\mathbb{R}); \exists K \subset \mathbb{R}, \text{ compact, such that } f \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R} \setminus K\}.$$

We can thus define

$$\|\tilde{y}^0\| := \max\{|\tilde{y}^0(x)|, x \in \mathbb{R}\} + \max\{|\tilde{y}_x^0(x)|, x \in \mathbb{R}\},$$

and according to (7.22)-(7.25), (7.41), (7.42) and (7.43),

$$\|\tilde{y}^0\| \leq 3|y^0|_{C^1([0, L])}. \quad (7.44)$$

For every $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ we define $\bar{y} \in C^1([0, T] \times [-\eta, L + \eta])$ by

$$\bar{y}(t, x) := \begin{cases} -y(t, -x) + 2y(t, 0) & t \in [0, T], x \in [-\eta, 0], \\ y(t, x) & t \in [0, T], x \in [0, L], \\ -y(t, 2L - x) + 2y(t, L) & t \in [0, T], x \in [L, L + \eta]. \end{cases} \quad (7.45)$$

Let

$$\tilde{y} := \chi \bar{y}. \quad (7.46)$$

The function $\tilde{y}$ is clearly of class C^1 on $[0, T] \times [-\eta, L + \eta]$. We still call $\tilde{y}$ the function defined on $[0, T] \times \mathbb{R}$ by

$$\tilde{y}(t, x) := \begin{cases} \tilde{y}(t, x) & \text{if } t \in [0, T], x \in [-\eta, L + \eta], \\ 0 & \text{if not.} \end{cases} \quad (7.47)$$

It comes from (7.46) and (7.47) that $\tilde{y} \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R})$, where

$$C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}) := \{f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}); \exists K \subset \mathbb{R}, \text{ compact, such that } f \equiv 0 \text{ on } [0, T] \times (\mathbb{R} \setminus K)\}.$$

Then, if we define

$$\|\tilde{y}\| := \max\{|\tilde{y}(t, x)|, t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\} + \max\{|\tilde{y}_t(t, x)|, t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\} \\ + \max\{|\tilde{y}_x(t, x)|, t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\},$$

it follows from (7.22)-(7.25), (7.45), (7.46) and (7.47) that

$$\|\tilde{y}\| \leq 3|y|_{C^1([0, T] \times [0, L])}. \quad (7.48)$$

From now on, we suppose that

$$|y|_{C^1([0, T] \times [0, L])} \leq \eta \exp\left(-\|\tilde{\alpha}\| \int_0^T a(t) dt\right) / (3T\|\tilde{\alpha}\|), \quad (7.49)$$

where, as defined above,

$$\|\tilde{\alpha}\| := \max\{|\tilde{\alpha}(x)|, x \in \mathbb{R}\} + \max\{|\tilde{\alpha}'(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

It comes from (7.48) and (7.49) that

$$\|\tilde{y}\| \leq \eta \exp\left(-\|\tilde{\alpha}\| \int_0^T a(t) dt\right) / (T\|\tilde{\alpha}\|). \quad (7.50)$$

Finally, let

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : D(\tilde{\phi}) \subset [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, t_2, x) &\mapsto \tilde{\phi}(t_1, t_2, x), \end{aligned} \quad (7.51)$$

be the flow associated to the ordinary differential equation $\dot{\xi} = \tilde{\alpha}(\xi)(a(t) + \tilde{y}(t, \xi))$:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) = \tilde{\alpha}(\tilde{\phi})(a(t_1) + \tilde{y}(t_1, \tilde{\phi}(t_1, t_2, x))), \quad (t_1, t_2, x) \in D(\tilde{\phi}), \quad (7.52)$$

$$\tilde{\phi}(t_2, t_2, x) = x, \quad t_2 \in [0, T], x \in \mathbb{R}. \quad (7.53)$$

Lemma 7.9. *The flow $\tilde{\phi}$ is defined on $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$.*

Proof of Lemma 7.9. This comes from the fact that $D(\phi) = [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$ and the following inequalities. For any $(t_1, t_2, x) \in D(\tilde{\phi}) \subset [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}$, we have,

according to (7.29) and (7.52),

$$\begin{aligned}
|\tilde{\phi}(t_1, t_2, x) - \phi(t_1, t_2, x)| &= |\tilde{\phi}(t_2, t_2, x) - \phi(t_2, t_2, x) \\
&\quad + \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_1}(s, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(s, t_2, x) \right) ds| \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_1}(s, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(s, t_2, x) \right| ds \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} |\tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(s, t_2, x))(a(s) + \tilde{y}(s, \tilde{\phi}(s, t_2, x))) \\
&\quad - \tilde{\alpha}(\phi(s, t_2, x))a(s)| ds \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} a(s) |\tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(s, t_2, x)) - \tilde{\alpha}(\phi(s, t_2, x))| ds + T \|\tilde{\alpha}\| \|\tilde{y}\| \\
&\leq \int_0^{t_1} a(s) \|\tilde{\alpha}\| |\tilde{\phi}(s, t_2, x) - \phi(s, t_2, x)| ds + T \|\tilde{\alpha}\| \|\tilde{y}\|.
\end{aligned}$$

Thus, applying now Gronwall's lemma and using (7.50) we get that,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\phi}(t_1, t_2, x) - \phi(t_1, t_2, x)| &\leq T \|\tilde{\alpha}\| \|\tilde{y}\| \exp\left(\|\tilde{\alpha}\| \int_0^T a(t) dt\right) \\
&\leq \eta.
\end{aligned} \tag{7.54}$$

■

Let now z be defined for every $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ by

$$z(t, x) := \tilde{y}^0(\tilde{\phi}(0, t, x)), \tag{7.55}$$

where $\tilde{y}^0$ is given by (7.43).

Proposition 7.10. *The function z , defined by (7.55), satisfies $z \in C^1([0, T] \times [0, L])$ and*

$$z_t + \alpha(x)(a(t) + y(t, x))z_x = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \tag{7.56}$$

$$z(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \tag{7.57}$$

$$z(T, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \tag{7.58}$$

Proof of Proposition 7.10. First of all, it comes from its definition that z is of class C^1 on $[0, T] \times [0, L]$. Moreover, we can remark that (7.56) and (7.57) are trivial. Let us now prove (7.58).

In fact, we know from (7.25), (7.42) and (7.43), that

$$\text{Supp } (\tilde{y}^0) \subset [-\eta, L + \eta].$$

Consequently, it suffices to prove that for any $x \in [0, L]$,

$$\tilde{\phi}(0, T, x) < -\eta$$

which is an obvious consequence of (7.33), (7.54) and the fact (see Figure 3) that, for any $x \in [0, L]$,

$$\tilde{\phi}(0, T, x) \leq \tilde{\phi}(0, T, L).$$

■

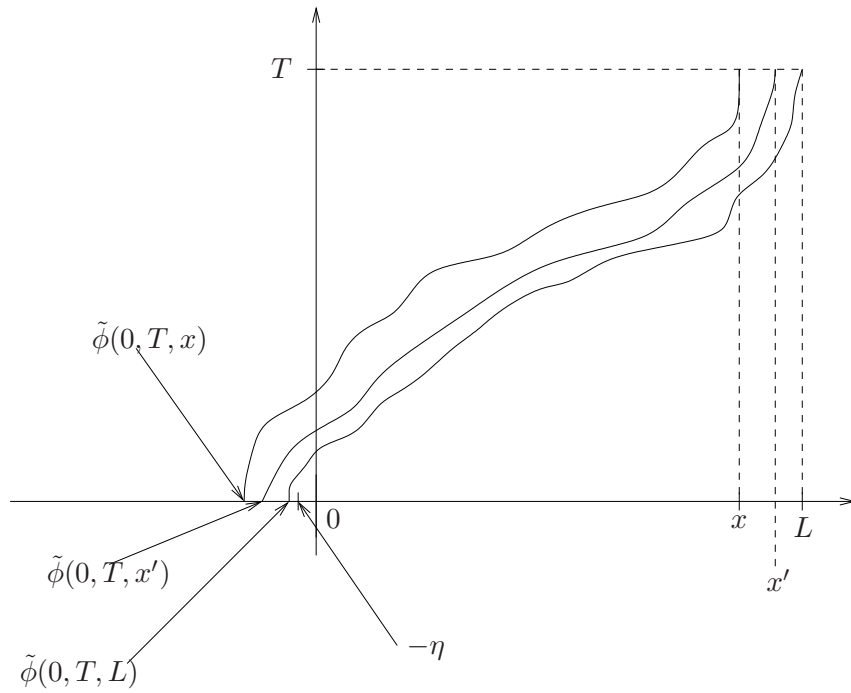


Figure 3: Behavior of the flow $\tilde{\phi}$

Let $R := \eta \exp \left(-\|\tilde{\alpha}\| \int_0^T a(t) dt \right) / (3T\|\tilde{\alpha}\|)$ and let

$$B_R := \{y \in C^1([0, T] \times [0, L]); |y|_{C^1([0, T] \times [0, L])} \leq R\}.$$

Let

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : B_R &\rightarrow C^1([0, T] \times [0, L]) \\ y &\mapsto z, \end{aligned} \tag{7.59}$$

where z is defined by (7.55).

We have the following result, whose proof is essentially given in Appendix A.

Proposition 7.11. $\mathcal{F}$ is continuous.

Let us now prove the following lemma.

Lemma 7.12. We have the following inequalities:

$$\left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_1} \right|_{\infty} \leq (|a|_{C^1([0,T])} + \|\tilde{y}\|) \|\tilde{\alpha}\|, \quad (7.60)$$

$$\left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right|_{\infty} \leq e^{T\|\tilde{\alpha}\|(|a|_{C^1([0,T])} + 2\|\tilde{y}\|)}, \quad (7.61)$$

$$\left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_2} \right|_{\infty} \leq (|a|_{C^1([0,T])} + \|\tilde{y}\|) \|\tilde{\alpha}\| e^{T\|\tilde{\alpha}\|(|a|_{C^1([0,T])} + 2\|\tilde{y}\|)}, \quad (7.62)$$

where, for every bounded function $f : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$|f|_{\infty} := \sup\{|f(t_1, t_2, x)|, t_1 \in [0, T], t_2 \in [0, T], x \in \mathbb{R}\}.$$

Proof of Lemma 7.12. Inequality (7.60) is a consequence of (7.52). From (7.52) and (7.53), we have

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t_1 \partial x} = \tilde{\alpha}'(\tilde{\phi})(a(t_1) + \tilde{y}(t_1, \tilde{\phi})) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}) \tilde{y}_x(t_1, \tilde{\phi}) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}, \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t_1, t_1, x) = 1, t_1 \in [0, T], x \in \mathbb{R}, \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t_1 \partial t_2} = \tilde{\alpha}'(\tilde{\phi})(a(t_1) + \tilde{y}(t_1, \tilde{\phi})) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_2} + \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}) \tilde{y}_x(t_1, \tilde{\phi}) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_2}, \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_1}(t_1, t_1, x) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_2}(t_1, t_1, x) = 0, t_1 \in [0, T], x \in \mathbb{R}. \quad (7.66)$$

Then,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(\tau, t, x) &= \exp\left(\int_t^{\tau} (\tilde{\alpha}'(\tilde{\phi}(\tau_1, t, x))(a(\tau_1) + \tilde{y}(\tau_1, \tilde{\phi}(\tau_1, t, x))) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(\tau_1, t, x)) \tilde{y}_x(\tau_1, \tilde{\phi}(\tau_1, t, x))) d\tau_1\right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_2}(\tau, t, x) = -\tilde{\alpha}(x)(a(t) + \tilde{y}(t, x))$$

$$\begin{aligned} &\exp\left(\int_t^{\tau} (\tilde{\alpha}'(\tilde{\phi}(\tau_1, t, x))(a(\tau_1) + \tilde{y}(\tau_1, \tilde{\phi}(\tau_1, t, x))) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(\tau_1, t, x)) \tilde{y}_x(\tau_1, \tilde{\phi}(\tau_1, t, x))) d\tau_1\right) \end{aligned}$$

and Lemma 7.12 follows easily. ■

Proposition 7.13. *There exists $C := C(R, T, \|\tilde{\alpha}\|, |a|_{C^1([0,T])}) > 0$ such that, for any $y \in B_R$,*

$$|\mathcal{F}(y)|_{C^1([0,T] \times [0,L])} \leq C |y^0|_{C^1([0,L])}. \quad (7.67)$$

Proof of Proposition 7.13. It is a trivial consequence of (7.44), (7.55), (7.59) and Lemma 7.12. ■

Thus, if $|y^0|_{C^1([0,L])} \leq R/C$, then $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$.

For any function $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ where Q is a compact subset of $\mathbb{R}^n$, for any $\rho \geq 0$, let

$$\omega_\rho(g) := \max\{|g(\xi_2) - g(\xi_1)|; (\xi_1, \xi_2) \in Q^2 \text{ and } |\xi_2 - \xi_1| \leq \rho\}, \quad (7.68)$$

where $|\cdot|$ denotes the usual euclidian norm in $\mathbb{R}^n$. One can thus use this quantity for $z := \mathcal{F}(y)$ and the compact set $Q := [0, T] \times [0, L]$.

Let us assume, for the moment, that the following lemma holds.

Lemma 7.14. *There exists $C_0 := C_0(R, T, \|\tilde{\alpha}\|, |a|_{C^1([0,T])}) > 0$ such that, for any $\rho > 0$, for any $y \in B_R$,*

$$\omega_\rho(z_t) + \omega_\rho(z_x) \leq C_0 |y^0|_{C^1([0,L])} (\rho + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')) + C_0 \omega_\rho(\tilde{y}_x^0),$$

where $z = \mathcal{F}(y)$.

Let us recall that our aim is to apply the Schauder's fixed point theorem. Consequently, we are now going to define a subset $K \subset C^1([0, T] \times [0, L])$, that we will prove to be convex, compact in $C^1([0, T] \times [0, L])$ and such that $\mathcal{F}(K) \subset K$. For that purpose, let

$$\Omega : \rho \in [0, +\infty[\mapsto 2C_0 \omega_\rho(\tilde{y}_x^0) + \rho + \omega_\rho(\tilde{\alpha}') \in [0, +\infty[.$$

One can note that $\Omega(\rho)$ does not depend on y but only on $R, T, \|\tilde{\alpha}\|$ and $|a|_{C^1([0,T])}$. Let

$$K := \{y \in B_R; \text{ for every } \rho > 0, \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(y_x) \leq \Omega(\rho)\}.$$

Note that K is bounded and closed in B_R . Let us check that K is equicontinuous in $C^1([0, T] \times [0, L])$ (and therefore, by Ascoli's theorem K is a compact subset of B_R). Let $\gamma > 0$. Let $(t_0, x_0) \in [0, T] \times [0, L]$. Let $y \in K$. Let $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$; $|(t, x) - (t_0, x_0)| \leq \beta$, with $\beta > 0$. We have

$$\begin{aligned} |y(t, x) - y(t_0, x_0)| &\leq 2\beta R, \\ |y_t(t, x) - y_t(t_0, x_0)| &\leq \omega_\beta(y_t), \\ |y_x(t, x) - y_x(t_0, x_0)| &\leq \omega_\beta(y_x). \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} |y(t, x) - y(t_0, x_0)|_{C^1([0,T] \times [0,L])} &\leq 2\beta R + \omega_\beta(y_t) + \omega_\beta(y_x) \\ &\leq 2\beta R + 2C_0 \omega_\beta(\tilde{y}_x^0) + \beta + \omega_\beta(\tilde{\alpha}'). \end{aligned}$$

Then, if we choose $\beta > 0$ such that $\beta \leq \gamma/4$, $2\beta R \leq \gamma/4$, $2C_0\omega_\beta(\tilde{y}_x^0) \leq \gamma/4$ and $\omega_\beta(\tilde{\alpha}') \leq \gamma/4$, we have

$$|y(t, x) - y(t_0, x_0)|_{C^1([0, T_2] \times [0, L])} \leq \gamma,$$

which concludes for the equicontinuity of K .

Clearly, K is convex.

Moreover, if $|y^0|_{C^1([0, L])} \leq \min(R/C, 1/(2C_0))$, then, $\mathcal{F}(K) \subset K$. Indeed,

$$\begin{aligned} \omega_\rho(z_t) + \omega_\rho(z_x) &\leq C_0|y^0|_{C^1([0, L])}(\rho + \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')) + C_0\omega_\rho(\tilde{y}_x^0) \\ &\leq C_0|y^0|_{C^1([0, L])}(\rho + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')) \\ &\quad + C_0|y^0|_{C^1([0, L])}(2C_0\omega_\rho(\tilde{y}_x^0) + \rho + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')) + C_0\omega_\rho(\tilde{y}_x^0) \\ &\leq \rho + \omega_\rho(\tilde{\alpha}') + 2C_0\omega_\rho(\tilde{y}_x^0) \end{aligned}$$

This, with Schauder's theorem, implies that $\mathcal{F}$ has a fixed point. But if y is a fixed point of $\mathcal{F}$, then

$$\begin{aligned} y_t + (a(t) + y)y_x &= 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \\ y(0, x) &= y^0(x), \quad x \in [0, L], \\ y(T, x) &= 0, \quad x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Hence, Proposition 7.6 is proved, and Theorem 6.1 follows, showing the global controllability of our control system (1). ■

It remains to prove Lemma 7.14. We first estimate $\omega_\rho(z_x)$. Let $\rho > 0$ and $((t, x), (t', x')) \in ([0, T] \times [0, L])^2$ such that $|(t, x) - (t', x')| \leq \rho$. Then,

$$|z_x(t, x) - z_x(t', x')| \leq |y^0|_{C^1([0, L])} \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(0, t, x) - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(0, t', x') \right| + \omega_\rho(\tilde{y}_x^0 \circ \tilde{\phi}) \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right|_\infty. \quad (7.69)$$

Throughout all the following, C_i , $i \geq 1$, denotes various positive constants which may vary from line to line, depend on $R, T, \|\tilde{\alpha}\|$ and $|a|_{C^1([0, T])}$ but do not depend on $y \in B_R$ and $\rho \in (0, +\infty)$.

Step 1. It follows from a property of the modulus of continuity that

$$\omega_\rho(\tilde{y}_x^0 \circ \tilde{\phi}) \leq \omega_{\omega_\rho(\tilde{\phi})}(\tilde{y}_x^0).$$

But from Lemma 7.12, for any $((t_1, t_2, x), (t'_1, t'_2, x')) \in ([0, T] \times [0, T] \times [0, L])^2$ such that $|(t_1, t_2, x) - (t'_1, t'_2, x')| \leq \rho$,

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}(t_1, t_2, x) - \tilde{\phi}(t'_1, t'_2, x')| &\leq \rho \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_1} \right|_\infty + \rho \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t_2} \right|_\infty + \rho \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right|_\infty \\ &\leq \rho(|a|_{C^1([0, T])} + \|\tilde{y}\|)\|\tilde{\alpha}\| \\ &\quad + \rho(|a|_{C^1([0, T])} + \|\tilde{y}\|)\|\tilde{\alpha}\|e^{T\|\tilde{\alpha}\|(|a|_{C^1([0, T])} + 2\|\tilde{y}\|)} \\ &\quad + \rho e^{T\|\tilde{\alpha}\|(|a|_{C^1([0, T])} + 2\|\tilde{y}\|)} \\ &\leq \rho C_1. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Thus, using this last inequality, we get

$$\omega_\rho(\tilde{y}_x^0 \circ \tilde{\phi}) \leq \omega_{\rho C_1}(\tilde{y}_x^0) \leq ([C_1] + 1)\omega_\rho(\tilde{y}_x^0) = C_2\omega_\rho(\tilde{y}_x^0), \quad (7.71)$$

where $[C_1]$ denotes the integer part of C_1 .

Step 2. Let now $\psi := \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}$. For any $(t_1, t_2, x) \in [0, T] \times [0, T] \times [0, L]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) &= (\tilde{\alpha}'(\tilde{\phi}(t_1, t_2, x))(a(t_1) + \tilde{y}(t_1, \tilde{\phi}(t_1, t_2, x))) \\ &\quad + \tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(t_1, t_2, x))\tilde{y}_x(t_1, \tilde{\phi}(t_1, t_2, x)))\psi(t_1, t_2, x). \end{aligned}$$

Then, for any $t_1 \in [0, T]$ and for any $(t, x), (t', x') \in [0, T] \times [0, L]$ such that

$$|(t, x) - (t', x')| \leq \rho,$$

it comes from Lemma 7.12 and the regularity of a , α and $\tilde{y}$, that

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, t, x) - \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, t', x') \right| &\leq C_3|\tilde{y}_x(t_1, \tilde{\phi}(t_1, t, x)) - \tilde{y}_x(t_1, \tilde{\phi}(t_1, t', x'))| \\ &\quad + C_4\rho + C_5\omega_\rho(\tilde{\alpha}') + C_6|\psi(t_1, t', x') - \psi(t_1, t, x)|. \end{aligned} \quad (7.72)$$

We now prove the following lemma.

Lemma 7.15. *There exists $C_7 := C_7(R, T, \|\tilde{\alpha}\|, |a|_{C^1([0, T])}) > 0$ such that, for any $y \in B_R$, for any $\rho > 0$, for any $t_1 \in [0, T]$ and for any $(t, x), (t', x') \in [0, T] \times [0, L]$ such that $|(t, x) - (t', x')| \leq \rho$,*

$$|\tilde{y}_x(t_1, \tilde{\phi}(t_1, t, x)) - \tilde{y}_x(t_1, \tilde{\phi}(t_1, t', x'))| \leq C_7(\rho + \omega_\rho(y_x)).$$

Proof of Lemma 7.15. Let us fix $\rho > 0$, $t_1 \in [0, T]$ and $(t, x), (t', x') \in [0, T] \times [0, L]$ such that

$$|(t, x) - (t', x')| \leq \rho. \quad (7.73)$$

Let us denote $X := \tilde{\phi}(t_1, t, x)$ and $X' := \tilde{\phi}(t_1, t', x')$.

We are going to study the two different cases which are $C_1\rho \leq \eta/2$ and $C_1\rho > \eta/2$, where C_1 is defined in (7.70).

1st case: $C_1\rho \leq \eta/2$.

If X and $X' \in (-\infty, -\eta/2) \cup (L + \eta/2, +\infty)$, there is nothing to prove, according to (7.25), (7.46) and (7.47).

If not, it comes from (7.70) and the fact that $C_1\rho \leq \eta/2$, that both X and $X' \in [-\eta, L + \eta]$. Consequently, using (7.46), it follows

$$\begin{aligned} \tilde{y}_x(t_1, X) - \tilde{y}_x(t_1, X') &= \chi'(X)\bar{y}(t_1, X) + \chi(X)\bar{y}_x(t_1, X) \\ &\quad - \chi'(X')\bar{y}(t_1, X') - \chi(X')\bar{y}_x(t_1, X') \\ &= \chi'(X)(\bar{y}(t_1, X) - \bar{y}(t_1, X')) \\ &\quad + (\chi'(X) - \chi'(X'))\bar{y}(t_1, X') \\ &\quad + \chi(X)(\bar{y}_x(t_1, X) - \bar{y}_x(t_1, X')) \\ &\quad + (\chi(X) - \chi(X'))\bar{y}_x(t_1, X'). \end{aligned} \quad (7.74)$$

Easy computations lead to the existence of $C_8 := C_8(R, T, \|\tilde{\alpha}\|, |a|_{C^1([0, T])}) > 0$ which does not depend of $y \in B_R$, $\rho > 0$, $t_1 \in [0, T]$ and $(t, x), (t', x') \in [0, T] \times [0, L]$, such that

$$|\tilde{y}_x(t_1, X) - \tilde{y}_x(t_1, X')| \leq C_8(\rho + \omega_\rho(y_x)). \quad (7.75)$$

Hence, we deduce from (7.74), (7.75) and the regularity of χ and $\bar{y}$ that there exist $C_9 > 0$ such that

$$|\tilde{y}_x(t_1, X) - \tilde{y}_x(t_1, X')| \leq C_9(\rho + \omega_\rho(y_x)). \quad (7.76)$$

2nd case: $C_1\rho > \eta/2$.

We have

$$|\tilde{y}(t_1, X) - \tilde{y}(t_1, X')| \leq 2\|\tilde{y}\| \leq 2\|\tilde{y}\|2C_1\rho/\eta.$$

It suffices to take $C_7 := \max(C_9, 4\|\tilde{y}\|C_1/\eta)$ and the proof of Lemma 7.15 is ended. ■

Applying Lemma 7.15, we obtain, according to (7.72) that

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, t, x) - \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(t_1, t', x') \right| \leq C_{10}(\rho + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')) + C_6|\psi(t_1, t', x') - \psi(t_1, t, x)|. \quad (7.77)$$

Furthermore, using the definition of ψ , (7.63) and (7.64), we get

$$\begin{aligned} |\psi(t, t, x) - \psi(t, t', x')| &= \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t, t, x) - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t', t', x') \right| \\ &\quad + \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t', t', x') - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t, t', x') \right| \\ &\leq |1 - 1| + \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t', t', x') - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t, t', x') \right| \\ &\leq \rho \left| \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t_1 \partial x} \right|_\infty \\ &\leq \rho C_{11}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Consequently, by Gronwall's lemma, (7.77) and (7.78),

$$|\psi(0, t', x') - \psi(0, t, x)| \leq C_{12}(\rho + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')).$$

Hence, (7.69), Step 1 and Step 2 allow us to conclude on the existence of $C_0 > 0$ such that

$$\begin{aligned} |z_x(t, x) - z_x(t', x')| &\leq C_0|y^0|_{C^1([0, L])}(\rho + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')) + C_0\omega_\rho(\tilde{y}_x^0) \\ &\leq C_0|y^0|_{C^1([0, L])}(\rho + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(\tilde{\alpha}')) + C_0\omega_\rho(\tilde{y}_x^0). \end{aligned}$$

It remains to estimate $\omega_\rho(z_t)$. We use (7.56) and the regularity of a and y . For any $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} \omega_\rho(z_t) &\leq C_{13}\omega_\rho(z_x) + C_{14}(\omega_\rho(a) + \omega_\rho(y)) \\ &\leq C_{13}\omega_\rho(z_x) + C_{15}\rho. \end{aligned}$$

Then it suffices to use the previous estimation of $\omega_\rho(z_x)$ to conclude our proof of Lemma 7.14. ■

8 Global controllability of the viscous Burgers equation

8.1 Main idea

In [8], J.-M. Coron had underlined the fact that it was surely important to have a good understanding of the controllability of the nonviscous Burgers equation if one wanted to study the global controllability of the viscous Burgers equation in small time. He pointed out that for large states and fixed time or fixed states and small time, the non-linear term yy_x was surely a key term compared with y_{xx} . (See also [7, section 3.5.2], for control systems in finite dimension.)

As long as the nonviscous Burgers equation is the analogue of the Euler equation of incompressible inviscid fluids in one dimension, the viscous Burgers equation can be considered as the analogue of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations. Consequently, we thought that similarly to J.-M. Coron in [5], and J.-M. Coron and A. V. Fursikov in [9] who obtained results for the global controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations by using results on the controllability of the Euler equation (see [4, 6, 15]), it may be possible to deduce controllability results of the viscous Burgers equation from controllability results of the nonviscous Burgers equation.

The proof of Theorem 6.2 uses three different properties of the viscous Burgers equation. The first one is a regularity result concerning a solution of the viscous Burgers equation with smooth controls. The second one is a local exact controllability result and the last one, but not the least, consists in a global approximate controllability result for the viscous Burgers equation when the initial and final states are smooth enough.

In a first section, we will recall the two first results we have just mentionned. Then, we will see how we can use them to reduce the proof of Theorem 6.2 to proving the third one, i.e. the global approximate controllability of the viscous Burgers equation for smooth initial and final states. Finally, we will prove this last result.

8.2 Preliminaries

Let $T, L > 0$. Let $y^0 \in H^1(0, L)$. Let us begin with the following proposition which will allow us to reduce Theorem 6.2 to the case of a smooth initial state.

Proposition 8.1. *There exists $(v_1^1, v_2^1) \in (H^{3/4}(0, T))^2$ such that the solution $y^1 \in L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))$ of (6.5),*

$$\begin{aligned} y_t^1 - y_{xx}^1 + y^1 y_x^1 &= 0, t \in [0, T], x \in [0, L], \\ y^1(t, 0) &= v_1^1(t), t \in [0, T], \\ y^1(t, L) &= v_2^1(t), t \in [0, T], \end{aligned}$$

satisfies the following regularity property

$$y^1 \in C^\infty((0, T] \times [0, L]).$$

Proof of Proposition 8.1. This is a consequence of the following lemma which one can find in [21].

Lemma 8.2. [21, Proposition 1.5 page 276] Let $M := \mathbb{T}^n$. If $y^0 \in L^\infty(M)$, then there exists a unique solution $y \in L^\infty([0, \infty) \times M) \cap C^\infty((0, \infty) \times M)$ of the following problem

$$\begin{aligned} y_t - y_{xx} + yy_x &= 0, \\ y(0, \cdot) &= y^0. \end{aligned}$$

Indeed, the fact that $y^0 \in H^1(0, L)$ implies that $y^0 \in L^\infty(0, L)$. Then, we extend y^0 by $\tilde{y}^0 \in L^\infty(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ (see Figure 4). We now apply Lemma 8.2 and Proposition 8.1 follows taking

$$\begin{aligned} v_1^1(t) &:= y(t, 0), \quad t \in [0, T], \\ v_2^1(t) &:= y(t, L), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

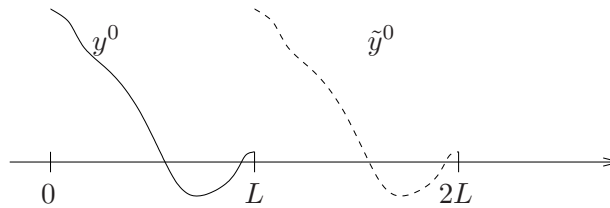


Figure 4: $\tilde{y}^0$

From now on, we denote by

$$\hat{M} := \max\{|y^1(t, \cdot)|_{C^2([0, L])}, t \in [T/4, 3T/4]\}, \quad (8.1)$$

where y^1 is given by Proposition 8.1. Let us now recall the following local exact controllability result due to A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov (see [13]).

Proposition 8.3. For any $(\hat{y}, \hat{u}) \in (L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))) \times L^2(0, T)$ satisfying (6.7), there exists $R > 0$ such that, for any $\bar{y}^0 \in H^1(0, L)$ which satisfies

$$|\bar{y}^0(\cdot) - \hat{y}(3T/4, \cdot)|_{H^1(0, L)} < R,$$

there exist controls $(v_-(t), v_+(t)) \in (H^{3/4}(0, T/4))^2$ such that the solution y of

$$y_t - y_{xx} + yy_x = \hat{u}(t + 3T/4), \quad t \in [0, T/4], \quad x \in [0, L], \quad (8.2)$$

$$y(t, 0) = v_-(t), \quad t \in [0, T/4], \quad (8.3)$$

$$y(t, L) = v_+(t), \quad t \in [0, T/4], \quad (8.4)$$

$$y(0, x) = \bar{y}^0(x), \quad x \in [0, L] \quad (8.5)$$

belongs to $L^2(0, T/4; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T/4; L^2(0, L))$ and satisfies

$$y(T/4, \cdot) = \hat{y}(T, \cdot).$$

Let also

$$(\hat{y}, \hat{u}) \in (L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))) \times L^2(0, T)$$

satisfy (6.7). We define, for any $n \geq 0$, $y_n \in C^2([0, T] \times [0, L])$ such that, as $n \rightarrow +\infty$,

$$y_n \rightarrow \hat{y} \quad \text{in} \quad L^2((0, T); H^2(0, L)) \cap H^1((0, T); L^2(0, L)). \quad (8.6)$$

We recall the following result that one can find in [11].

Lemma 8.4. [11, Theorem 4 page 288] *Let $X := L^2(0, T; H^2(0, L)) \cap H^1(0, T; L^2(0, L))$ equipped with the norm*

$$|y|_X := |y|_{L^2(0, T; H^2(0, L))} + |y|_{H^1(0, T; L^2(0, L))}.$$

Suppose that $y \in X$. Then $y \in C^0([0, T]; H^1(0, L))$ and

$$\max\{|y(t, \cdot)|_{H^1(0, L)}, t \in [0, T]\} \leq C|y|_X,$$

the constant C depending only on T and L .

From Lemma 8.4 and (8.6), one can find $n_0 \geq 0$ such that, for every $t \in [0, T]$,

$$|y_{n_0}(t, \cdot) - \hat{y}(t, \cdot)|_{H^1(0, L)} < R/2, \quad (8.7)$$

where R is as in Proposition 8.3.

We are now able to prove Theorem 6.2.

8.3 Proof of Theorem 6.2.

Let us assume, for the moment being, that the following main proposition holds.

Proposition 8.5. *For every $M > 0$, there exists $K > 0$ and there exists $\delta_1 > 0$ such that, for every $0 < \delta \leq \delta_1$, for every $z^0 \in C^2([0, L])$ and for every $z^1 \in C^2([0, L])$ which satisfy*

$$|z^0|_{C^2([0, L])} \leq M, \quad (8.8)$$

$$|z^1|_{C^2([0, L])} \leq M, \quad (8.9)$$

there exists $y^2 \in L^2(0, \delta; H^2(0, L)) \cap H^1(0, \delta; L^2(0, L))$ and there exist u^2 , v_1^2 and $v_2^2 \in C^0((0, \delta)) \cap L^2(0, \delta)$ such that

$$y_t^2 - y_{xx}^2 + y^2 y_x^2 = u^2(t), t \in [0, \delta], x \in [0, L], \quad (8.10)$$

$$y^2(t, 0) = v_1^2(t), t \in [0, \delta], \quad (8.11)$$

$$y^2(t, L) = v_2^2(t), t \in [0, \delta] \quad (8.12)$$

and

$$y^2(0, x) = z^0(x), x \in [0, L],$$

$$|y^2(\delta, \cdot) - z^1(\cdot)|_{H^1(0, L)} \leq K\sqrt{\delta}.$$

Then let $M := \hat{M} + |y_{n_0}|_{C^2([0,T] \times [0,L])}$, where $\hat{M}$ is defined by (8.1) and y_{n_0} satisfies (8.7). Let

$$0 < \delta < \min(\delta_1, R^2/(4K^2), T/2), \quad (8.13)$$

where R is as in Proposition 8.3 and where δ_1 and K are as in Proposition 8.5. From Proposition 8.5, (8.1) and (8.13), there exists $y^2 \in L^2(0, \delta; H^2(0, L)) \cap H^1(0, \delta; L^2(0, L))$ and there exist u^2, v_1^2 and $v_2^2 \in C^0((0, \delta)) \cap L^2(0, \delta)$ which satisfy (8.10), (8.11), (8.12) and such that

$$y^2(0, x) = y^1(3T/4 - \delta, x), \quad x \in [0, L], \quad (8.14)$$

$$|y^2(\delta, \cdot) - y_{n_0}(3T/4, \cdot)|_{H^1(0, L)} \leq K\sqrt{\delta} < R/2. \quad (8.15)$$

From (8.7) and (8.15), we obtain

$$|y^2(\delta, \cdot) - \hat{y}(3T/4, \cdot)|_{H^1(0, L)} < R.$$

Consequently, from Proposition 8.3 applied for $\bar{y}^0 := y^2(\delta, \cdot)$, there exist v_1^3 and v_2^3 defined on $[0, T/4]$ such that the solution y^3 of problem (8.2)-(8.5) with $\bar{y}^0 := y^2(\delta, \cdot)$, $v_- := v_1^3$ and $v_+ := v_2^3$ satisfies

$$y^3(T/4, \cdot) = \hat{y}(T, \cdot).$$

Then we define Y, U, V_1 and V_2 by

$$Y(t, x) := \begin{cases} y^1(t, x) & t \in [0, 3T/4 - \delta], x \in [0, L], \\ y^2(t - 3T/4 + \delta, x) & t \in [3T/4 - \delta, 3T/4], x \in [0, L], \\ y^3(t - 3T/4, x) & t \in [3T/4, T], x \in [0, L], \end{cases}$$

$$U(t) := \begin{cases} 0 & t \in [0, 3T/4 - \delta], \\ u^2(t - 3T/4 + \delta) & t \in [3T/4 - \delta, 3T/4], \\ \hat{u}(t) & t \in [3T/4, T] \end{cases}$$

$$V_1(t) := \begin{cases} v_1^1(t) & t \in [0, 3T/4 - \delta], \\ v_1^2(t - 3T/4 + \delta) & t \in [3T/4 - \delta, 3T/4], \\ v_1^3(t - 3T/4) & t \in [3T/4, T] \end{cases}$$

$$V_2(t) := \begin{cases} v_2^1(t) & t \in [0, 3T/4 - \delta], \\ v_2^2(t - 3T/4 + \delta) & t \in [3T/4 - \delta, 3T/4], \\ v_2^3(t - 3T/4) & t \in [3T/4, T] \end{cases}$$

It is easy to see that

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{xx} + YY_x &= U(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, L], \\ Y(t, 0) &= V_1(t), \quad t \in [0, T], \\ Y(t, L) &= V_2(t), \quad t \in [0, T], \\ Y(0, x) &= y^0(x), \quad x \in [0, L], \\ Y(T, x) &= \hat{y}(T, x), \quad x \in [0, L] \end{aligned}$$

and hence the proof of Theorem 6.2 is ended. ■

8.4 Proof of Proposition 8.5.

Let $a \in C^\infty([0, 1], [0, +\infty))$ be such that $a(t) = 0$ on a neighborhood of 0 and 1, such that $\int_0^{1/2} a(s) ds > L$ and such that for any $t \in [0, 1/2]$, $a(t) = a(T - t)$. Let us assume, for the moment being, that the two following lemmas hold.

Lemma 8.6. *There exists $C > 0$ such that, for every $M > 0$ there exists $\delta_0 > 0$ such that, for every $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ which satisfy (8.8) and (8.9), for every $\delta \in (0, \delta_0]$, there exists $y^\delta \in C^2([0, \delta] \times [0, L])$ such that*

$$y_t^\delta + (a^\delta + y^\delta)y_x^\delta = 0, \quad t \in [0, \delta], \quad x \in [0, L], \quad (8.16)$$

$$y^\delta(0, x) = z^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (8.17)$$

$$y^\delta(\delta, x) = z^1(x), \quad x \in [0, L] \quad (8.18)$$

and

$$|y^\delta|_{C^0([0, \delta]; C^2([0, L]))} \leq CM, \quad (8.19)$$

where

$$\begin{aligned} a^\delta : [0, \delta] &\rightarrow [0, +\infty) \\ t &\mapsto \frac{1}{\delta} a\left(\frac{t}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Remark 8.7. *Here, we can see that the nonviscous case is very important to deal with the viscous one.*

Lemma 8.8. *Let $M > 0$. Let C and δ_0 be as in Lemma 8.6. Let $\delta \in (0, \delta_0]$. Let $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ satisfy (8.8) and (8.9) and let y^δ , defined on $[0, \delta] \times [0, L]$, satisfy (8.16), (8.17), (8.18) and (8.19). The Cauchy problem*

$$R_t^\delta - R_{xx}^\delta + R^\delta y_x^\delta + R^\delta R_x^\delta + (y^\delta + a^\delta(t))R_x^\delta - y_{xx}^\delta = 0, \quad t \in [0, \delta], \quad x \in [0, L], \quad (8.20)$$

$$R^\delta(0, x) = 0, \quad x \in [0, L], \quad (8.21)$$

$$R^\delta(t, 0) = R_x^\delta(t, L) = 0, \quad t \in [0, \delta], \quad (8.22)$$

is well-posed in $L^2(0, \delta; H^2(0, L)) \cap H^1(0, \delta; L^2(0, L))$. Moreover, there exist $K > 0$ and $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ such that for every $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ which satisfy (8.8) and (8.9), for every $\delta \in (0, \delta_1]$ and for every $t \in (0, \delta]$,

$$|R^\delta(t, \cdot)|_{H^1(0, L)} \leq K\sqrt{t}. \quad (8.23)$$

Let us now prove Proposition 8.5. Let $M > 0$. Let K and δ_1 be as in Lemma 8.8. Let $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ satisfy (8.8) and (8.9). For every $\delta \in (0, \delta_1]$, let $y \in L^2(0, \delta; H^2(0, L)) \cap H^1(0, \delta; L^2(0, L))$ be defined on $[0, \delta] \times [0, L]$ by

$$y := R^\delta + y^\delta + a^\delta,$$

where y^δ , defined in Lemma 8.6, satisfies (8.16), (8.17), (8.18) and (8.19) on $[0, \delta] \times [0, L]$ and where R^δ denotes the solution of (8.20), (8.21) and (8.22) on $[0, \delta] \times [0, L]$. It comes from (8.16), (8.17), (8.18), (8.20), (8.21), (8.22) and the fact that

$$a^\delta(0) = a^\delta(\delta) = 0,$$

that y satisfies

$$\begin{aligned} y(0, x) &= z^0(x), \quad x \in [0, L], \\ y_t - y_{xx} + yy_x &= (a^\delta)'(t), \quad t \in [0, \delta], \quad x \in [0, L], \\ y(\delta, x) &= R^\delta(\delta, x) + z^1(x), \quad x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Moreover, thanks to (8.23), we obtain

$$|y(\delta, \cdot) - z^1(\cdot)|_{H^1(0, L)}^2 \leq K\delta.$$

This ends the proof of Proposition 8.5. ■

It remains to prove Lemma 8.6 and Lemma 8.8.

Proof of Lemma 8.6. We have the following result.

Lemma 8.9. *There exist $\epsilon > 0$ and $C > 0$ such that for every $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ which satisfy*

$$|z^0|_{C^2([0, L])} \leq \epsilon$$

and

$$|z^1|_{C^2([0, L])} \leq \epsilon,$$

there exists $z \in C^2([0, 1] \times [0, L])$ such that

$$z_t + (a + z)z_x = 0, \quad t \in [0, 1], \quad x \in [0, L], \quad (8.24)$$

$$z(0, x) = z^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (8.25)$$

$$z(1, x) = z^1(x), \quad x \in [0, L]. \quad (8.26)$$

and

$$|z|_{C^2([0, 1] \times [0, L])} \leq C(|z^0|_{C^2([0, L])} + |z^1|_{C^2([0, L])}).$$

Proof of Lemma 8.9. This is a consequence of the following lemma, which can be proved in a manner similar to the one of Proposition 7.6 (let us recall that we have assumed that $\int_0^{1/2} a(t) dt > L$).

Lemma 8.10. *There exist $\epsilon > 0$ and $C > 0$ such that for any $z^0 \in C^2([0, L])$ which satisfies*

$$|z^0|_{C^2([0, L])} \leq \epsilon,$$

there exists $z \in C^2([0, 1/2] \times [0, L])$ such that

$$z_t + (a + z)z_x = 0, \quad t \in [0, 1/2], \quad x \in [0, L], \quad (8.27)$$

$$z(0, x) = z^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (8.28)$$

$$z(1/2, x) = 0, \quad x \in [0, L] \quad (8.29)$$

and

$$|z|_{C^2([0,1/2] \times [0,L])} \leq C|z^0|_{C^2([0,L])}. \quad (8.30)$$

Let also ϵ and C be as in Lemma 8.10. Let $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ satisfy $|z^0|_{C^2([0,L])} \leq \epsilon$ and $|z^1|_{C^2([0,L])} \leq \epsilon$. From Lemma 8.10, there exists $Z^0, Z^1 \in C^2([0, 1/2] \times [0, L])$ solutions of

$$\begin{cases} Z_t^0 + (a + Z^0)Z_x^0 = 0, & t \in [0, 1/2], x \in [0, L], \\ Z^0(0, x) = z^0(x), & x \in [0, L], \\ Z^0(1/2, x) = 0, & x \in [0, L], \\ |Z^0|_{C^2([0,1/2] \times [0,L])} \leq C|z^0|_{C^2([0,L])} \end{cases} \quad (8.31)$$

and

$$\begin{cases} Z_t^1 + (a + Z^1)Z_x^1 = 0, & t \in [0, 1/2], x \in [0, L], \\ Z^1(0, x) = z^1(L - x), & x \in [0, L], \\ Z^1(1/2, x) = 0, & x \in [0, L], \\ |Z^1|_{C^2([0,1/2] \times [0,L])} \leq C|z^1|_{C^2([0,L])}. \end{cases} \quad (8.32)$$

We define z by

$$z(t, x) := \begin{cases} Z^0(t, x) & t \in [0, 1/2], x \in [0, L], \\ Z^1(1 - t, L - x) & t \in [1/2, 1], x \in [0, L]. \end{cases}$$

Lemma 8.9 follows using the definition of z , (8.31), (8.32) and the fact that $a(t) = a(1 - t)$ for any $t \in [0, T]$. ■

Let us now end the proof of Lemma 8.6. Let $\epsilon, C > 0$ be as in Lemma 8.9. Let $M > 0$. Let $0 < \delta_0 < 1$ be such that

$$\delta_0 M \leq \epsilon.$$

From Lemma 8.9, for every $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ which satisfy (8.8) and (8.9), for every $\delta \in (0, \delta_0]$, there exists z , defined on $[0, 1] \times [0, L]$, which satisfies (8.24) and

$$z(0, x) = \delta z^0(x), \quad x \in [0, L], \quad (8.33)$$

$$z(1, x) = \delta z^1(x), \quad x \in [0, L] \quad (8.34)$$

$$|z|_{C^2([0,1] \times [0,L])} \leq \delta C(|z^0|_{C^2([0,L])} + |z^1|_{C^2([0,L])}). \quad (8.35)$$

Lemma 8.6 follows by defining y on $[0, \delta] \times [0, L]$ by

$$y(t, x) := \frac{1}{\delta} z\left(\frac{t}{\delta}, x\right).$$

■

Proof of Lemma 8.8. Let $M > 0$. Let C and δ_0 as in Lemma 8.6. Let $z^0, z^1 \in C^2([0, L])$ satisfy (8.8) and (8.9). The well-posedness of the Cauchy problem is classical. We need to evaluate $R^\delta(t, \cdot)$, for $\delta > 0$ small enough and $0 < t \leq \delta$. Let also $0 < \delta \leq \delta_0$. Let us first remark that the fact that

$$R^\delta(t, 0) = 0, \quad t \in [0, \delta],$$

implies that

$$|R^\delta(t, \cdot)|_{L^\infty(0,L)} \leq \sqrt{L} \left(\int_0^L (R_x^\delta)^2 \right)^{1/2}, \quad t \in [0, \delta]. \quad (8.36)$$

We multiply (8.20) by $-2R_{xx}^\delta$ and integrate on $(0, L)$.

$$\begin{aligned} -2 \int_0^L R_{xx}^\delta R_t^\delta + 2 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 - 2 \int_0^L R_{xx}^\delta R^\delta y_x^\delta - 2 \int_0^L R_{xx}^\delta R^\delta R_x^\delta \\ - 2 \int_0^L R_{xx}^\delta y^\delta R_x^\delta - 2 \int_0^L R_{xx}^\delta a^\delta R_x^\delta + 2 \int_0^L R_{xx}^\delta y_{xx}^\delta = 0. \end{aligned} \quad (8.37)$$

One easily obtains

$$\begin{aligned} -2 \int_0^L R_{xx}^\delta R_t^\delta &= 2 \int_0^L R_x^\delta R_{tx}^\delta - 2[R_x^\delta R_t^\delta]_0^L = 2 \int_0^L R_x^\delta R_{tx}^\delta = \frac{d}{dt} \int_0^L (R_x^\delta)^2, \\ -2 \int_0^L a^\delta(t) R_x^\delta R_{xx}^\delta &= -a^\delta(t) [(R_x^\delta)^2]_0^L = a^\delta(t) (R_x^\delta(t, 0))^2 \end{aligned}$$

and the following estimates (see in particular (8.36))

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L R_{xx}^\delta R^\delta y_x^\delta &\leq |y^\delta|_{C^0([0,\delta];C^2([0,L]))} \left(\epsilon_1 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 + \frac{1}{\epsilon_1} \int_0^L (R^\delta)^2 \right) \\ &\leq |y^\delta|_{C^0([0,\delta];C^2([0,L]))} \left(\epsilon_1 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 + \frac{L^2}{\epsilon_1} \int_0^L (R_x^\delta)^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L R^\delta R_x^\delta R_{xx}^\delta &\leq \frac{1}{\epsilon_2} \int_0^L (R^\delta)^2 (R_x^\delta)^2 + \epsilon_2 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 \\ &\leq \frac{L}{\epsilon_2} \left(\int_0^L (R_x^\delta)^2 \right)^2 + \epsilon_2 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2, \end{aligned}$$

$$2 \int_0^L y^\delta R_x^\delta R_{xx}^\delta \leq |y^\delta|_{C^0([0,\delta];C^2([0,L]))} \left(\frac{1}{\epsilon_3} \int_0^L (R_x^\delta)^2 + \epsilon_3 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
2 \int_0^L y_{xx}^\delta R_{xx}^\delta &\leq \frac{1}{\epsilon_4} \int_0^L (y_{xx}^\delta)^2 + \epsilon_4 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 \\
&\leq \frac{L}{\epsilon_4} |y^\delta|_{C^0([0,\delta]; C^2([0,L]))}^2 + \epsilon_4 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2,
\end{aligned}$$

where ϵ_i , $i = 1, \dots, 4$, denote various positive constants to be chosen later. Hence, using (8.19), (8.37) and the previous estimates, we get

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^L (R_x^\delta)^2 &\leq -2 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 + \frac{L}{\epsilon_2} \left(\int_0^L (R_x^\delta)^2 \right)^2 + \epsilon_2 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 - a^\delta(t) (R_x^\delta(t, 0))^2 \\
&\quad + CM \left(\epsilon_1 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 + \frac{L^2}{\epsilon_1} \int_0^L (R_x^\delta)^2 \right) \\
&\quad + CM \left(\frac{1}{\epsilon_3} \int_0^L (R_x^\delta)^2 + \epsilon_3 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 \right) \\
&\quad + \frac{L}{\epsilon_4} C^2 M^2 + \epsilon_4 \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 \\
&\leq (-2 + CM(\epsilon_1 + \epsilon_3) + \epsilon_2 + \epsilon_4) \int_0^L (R_{xx}^\delta)^2 \\
&\quad + CM \left(\frac{L^2}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} \right) \int_0^L (R_x^\delta)^2 + \frac{L}{\epsilon_2} \left(\int_0^L (R_x^\delta)^2 \right)^2 + \frac{L}{\epsilon_4} C^2 M^2.
\end{aligned}$$

We take

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 := 1/(2CM)$$

and

$$\epsilon_2 = \epsilon_4 := 1/2.$$

It follows from the last inequality that there exists $K_1 > 0$ such that, for every z^0, z^1 which satisfy (8.8) and (8.9) and for every $\delta \in (0, \delta_0]$,

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (R_x^\delta)^2 \leq K_1 \left(1 + \int_0^L (R_x^\delta)^2 + \left(\int_0^L (R_x^\delta)^2 \right)^2 \right). \quad (8.38)$$

Using (8.38), the fact that for every $\delta \in (0, \delta_0]$, $R^\delta(0, \cdot) = 0$ and classical arguments on ordinary differential equations, we get the existence of $K_2 > 0$ and of $\delta_1 \in (0, \delta_0]$, such that, for every z^0, z^1 which satisfy (8.8) and (8.9), for every $\delta \in (0, \delta_1]$ and for every

$t \in (0, \delta]$,

$$\int_0^L (R_x^\delta(t, x))^2 dx \leq K_2 t. \quad (8.39)$$

It follows immediatly from (8.36) and (8.39) that there exists $K_3 > 0$ such that, for every z^0, z^1 which satisfy (8.8) and (8.9), for every $\delta \in (0, \delta_1]$ and for every $t \in (0, \delta]$,

$$\int_0^L (R^\delta(t, x))^2 dx \leq K_3 t.$$

This ends the proof of Lemma 8.8. ■

9 Appendix A

This part is devoted to the proof of Proposition 7.11. From the definition of z (see (7.55)), the main point consists in proving the two following lemmas.

Lemma 9.1. *Let $R > 0$ and let $f \in B_R := \{f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}), \|f\| \leq R\}$. Let*

$$\begin{aligned} \phi : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, t_2, x) &\mapsto \phi(t_1, t_2, x), \end{aligned} \quad (9.1)$$

be the flow associated to the ordinary differential equation $\dot{\xi} = f(t, \xi)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) = f(t_1, \phi(t_1, t_2, x)), \quad (t_1, t_2, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (9.2)$$

$$\phi(t_2, t_2, x) = x, \quad t_2 \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9.3)$$

Then for any $L > 0$, there exists $M(T, R, L) > 0$ such that $|\phi|_{C^1([0, T] \times [0, T] \times [0, L])} \leq M(T, R, L)$.

Lemma 9.2. *Let $R > 0$. Then*

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : B_R &\rightarrow C^1([0, T] \times [0, T] \times [0, L]) \\ f &\mapsto \phi, \end{aligned} \quad (9.4)$$

where ϕ is defined above, is continuous.

Proof of Lemma 9.1. Let $L > 0, R > 0$ and $f \in B_R$. Let $(t_1, t_2, x) \in [0, T] \times [0, T] \times [0, L]$. We want to prove that for all $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for any $(t'_1, t'_2, x') \in [0, T] \times [0, T] \times [0, L]$ such that $|(t_1, t_2, x) - (t'_1, t'_2, x')| < \delta$, then

$$\begin{aligned} &|\phi(t_1, t_2, x) - \phi(t'_1, t'_2, x')| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t'_1, t'_2, x') \right| \\ &+ \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t'_1, t'_2, x') \right| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(t'_1, t'_2, x') \right| < \epsilon. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Throughout the whole proof of Lemma 9.1, C_i , $i \geq 16$, denotes various positive constants which may vary from line to line and only depend on R and T . Let us first note that using Lemma 7.12 applied in the case where $\alpha \equiv 1$, one proves that there exists $C_{16} > 0$ such that for any $\delta > 0$, for any $((s, t, \xi), (s', t', \xi')) \in ([0, T] \times [0, T] \times [0, L])^2$ such that $|(s, t, \xi) - (s', t', \xi')| \leq \delta$,

$$|\phi(s, t, \xi) - \phi(s', t', \xi')| < C_{16}\delta. \quad (9.6)$$

This gives us the continuity of ϕ on $[0, T] \times [0, T] \times [0, L]$. Moreover,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t'_1, t'_2, x') \right| &= |f(t_1, \phi(t_1, t_2, x)) - f(t'_1, \phi(t'_1, t'_2, x'))| \\ &\leq |f(t_1, \phi(t_1, t_2, x)) - f(t'_1, \phi(t_1, t_2, x))| \\ &\quad + |f(t'_1, \phi(t_1, t_2, x)) - f(t'_1, \phi(t'_1, t'_2, x'))|. \end{aligned}$$

Using (9.6) and the fact that $f \in B_R$, we obtain the existence of $C_{17} > 0$ such that

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_1}(t'_1, t'_2, x') \right| < C_{17}\delta. \quad (9.7)$$

Then, using Lemma 7.12,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t'_1, t'_2, x') \right| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t'_2, x') \right| \\ &\quad + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t'_2, x') - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t'_1, t'_2, x') \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t'_2, x') \right| + C_{18}\delta. \end{aligned} \quad (9.8)$$

But, for any $s \in [0, T]$, for any $((t, \xi), (t', \xi')) \in ([0, T] \times [0, L])^2$ such that $|(t, \xi) - (t', \xi')| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1 \partial x}(s, t, \xi) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1 \partial x}(s, t', \xi') \right| &\leq R \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t', \xi') \right| \\ &\quad + C_{19}|f_x(s, \phi(s, t, \xi)) - f_x(s, \phi(s, t', \xi'))|. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, t, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, t', \xi') \right| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, t, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t', t', \xi') \right| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t', t', \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t', t', \xi') \right| \\ &\leq C_{20}\delta. \end{aligned}$$

Thus applying Gronwall's lemma, we get that for any $s \in [0, T]$, for any $((t, \xi), (t', \xi')) \in ([0, T] \times [0, L])^2$ such that $|(t, \xi) - (t', \xi')| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t', \xi') \right| &\leq C_{21}(\delta \\ &\quad + \int_t^s |f_x(\tau, \phi(\tau, t, \xi)) - f_x(\tau, \phi(\tau, t', \xi'))| d\tau. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Since ϕ is continuous on $[0, T] \times [0, T] \times [0, L]$, ϕ is bounded on $[0, T] \times [0, T] \times [0, L]$ by $M > 0$. Since f_x is continuous on $[0, T] \times [-M, M]$, f_x is uniformly continuous on $[0, T] \times [-M, M]$ and thus, there exists $\eta > 0$ such that for any $((\tau, X), (\tau', X')) \in ([0, T] \times [-M, M])^2$ satisfying $|(\tau, X) - (\tau', X')| < \eta$, we have $|f_x(\tau, X) - f_x(\tau', X')| < \epsilon/(8C_{21}T \max(1, R))$. Let also $\delta \leq \eta/C_{16}$. From (9.6), for any $\tau \in [0, T]$, for any $((t, \xi), (t', \xi')) \in ([0, T] \times [0, L])^2$ such that $|(t, \xi) - (t', \xi')| \leq \delta$, we have $|\phi(\tau, t, \xi) - \phi(\tau, t', \xi')| < \eta$ and consequently (9.9) becomes

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t, x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, t', x') \right| < C_{21}\delta + \frac{\epsilon}{8 \max(1, R)}. \quad (9.10)$$

We apply this last inequality for $((s, t, \xi), (s', t', \xi')) := ((t_1, t_2, x), (t'_1, t'_2, x'))$ and (9.8) becomes

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t'_1, t'_2, x') \right| \leq C_{22}\delta + \frac{\epsilon}{8 \max(1, R)}. \quad (9.11)$$

It remains to estimate $\left| \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(t'_1, t'_2, x') \right|$. Using (9.11) we get

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi}{\partial t_2}(t'_1, t'_2, x') \right| &= \left| -f(t_2, x) \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_1, t_2, x) + f(t'_2, x') \frac{\partial \phi}{\partial x}(t'_1, t'_2, x') \right| \\ &< C_{23}\delta + R \frac{\epsilon}{8 \max(1, R)} \\ &< C_{23}\delta + \frac{\epsilon}{8}. \end{aligned}$$

Lemma 9.1 follows taking

$$\delta := \min \left(\frac{\epsilon}{4C_{16}}, \frac{\epsilon}{4C_{17}}, \frac{\eta}{C_{16}}, \frac{\epsilon}{8C_{22}}, \frac{\epsilon}{8C_{23}} \right).$$

■

Proof of Lemma 9.2. Let $R > 0$ and $f^1 \in B_R$. We want to prove that for all $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for any $f^2 \in B_R$ such that $\|f^1 - f^2\| < \delta$, then, if ϕ^1 and ϕ^2 denote the flows respectively associated to the ordinary differential equations $\dot{\xi} = f^1(t, \xi)$ and $\dot{\xi} = f^2(t, \xi)$, we have

$$|\phi^1 - \phi^2|_{C^1([0, T] \times [0, T] \times [0, L])} < \epsilon. \quad (9.12)$$

Throughout the whole proof of Lemma 9.2, C_i , $i \geq 24$, denotes various positive constants which may vary from line to line and only depend on R and T . We first estimate $|\phi^1 - \phi^2|_\infty$. Since for any $(t_1, t_2, x) \in [0, T] \times [0, T] \times [0, L]$,

$$\left| \frac{\partial \phi^1}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) \right| \leq R|\phi^1(t_1, t_2, x) - \phi^2(t_1, t_2, x)| + \delta \quad (9.13)$$

and since

$$|\phi^1(t_2, t_2, x) - \phi^2(t_2, t_2, x)| = 0,$$

it follows from Gronwall's lemma that

$$|\phi^1 - \phi^2|_\infty < C_{24}\delta.$$

Then, it follows from (9.13) that

$$\left| \frac{\partial \phi^1}{\partial t_1} - \frac{\partial \phi^2}{\partial t_1} \right|_\infty < C_{25}\delta.$$

Next, for any $(t_1, t_2, x) \in [0, T] \times [0, T] \times [0, L]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \phi^1}{\partial t_1 \partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial^2 \phi^2}{\partial t_1 \partial x}(t_1, t_2, x) \right| &\leq R \left| \frac{\partial \phi^1}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial x}(t_1, t_2, x) \right| \\ &\quad + C_{26} |f_x^1(t_1, \phi^1(t_1, t_2, x)) - f_x^1(t_1, \phi^2(t_1, t_2, x))| \\ &\quad + C_{27}\delta \\ &\leq R \left| \frac{\partial \phi^1}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial x}(t_1, t_2, x) \right| \\ &\quad + C_{26}\omega_{C_{24}\delta}(f_x^1) + C_{27}\delta \\ &\leq R \left| \frac{\partial \phi^1}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial x}(t_1, t_2, x) \right| \\ &\quad + C_{26}([C_{24}] + 1)\omega_\delta(f_x^1) + C_{27}\delta, \end{aligned}$$

where the notation $\omega_\rho(g)$ was introduced in (7.68). Moreover,

$$\left| \frac{\partial \phi^1}{\partial x}(t_2, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial x}(t_2, t_2, x) \right| = 0.$$

Thus, applying Gronwall's lemma, we get that for any $(t_1, t_2, x) \in [0, T] \times [0, T] \times [0, L]$,

$$\left| \frac{\partial \phi^1}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial x}(t_1, t_2, x) \right| \leq C_{28}(\delta + \omega_\delta(f_x^1)). \quad (9.14)$$

Finally,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi^1}{\partial t_2}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial t_2}(t_1, t_2, x) \right| &= \left| -f^1(t_2, x) \frac{\partial \phi^1}{\partial x}(t_1, t_2, x) + f^2(t_2, x) \frac{\partial \phi^2}{\partial x}(t_1, t_2, x) \right| \\ &\leq C_{29}\delta + R \left| \frac{\partial \phi^1}{\partial x}(t_1, t_2, x) - \frac{\partial \phi^2}{\partial x}(t_1, t_2, x) \right| \\ &< C_{29}\delta + RC_{28}(\delta + \omega_\delta(f_x^1)). \end{aligned}$$

Lemma 9.2 follows by taking $\delta > 0$ such that

$$\max(1, R)C_{28}\omega_\delta(f_x^1) \leq \frac{\epsilon}{8}$$

and such that

$$\delta \leq \min \left(\frac{\epsilon}{4C_{24}}, \frac{\epsilon}{4C_{25}}, \frac{\epsilon}{8C_{28}}, \frac{\epsilon}{8(C_{29} + RC_{28})} \right).$$

■

Bibliography

- [1] Fabio Ancona and Andrea Marson. On the attainable set for scalar nonlinear conservation laws with boundary control. *SIAM J. Control Optim.*, 36(1):290–312, 1998.
- [2] Marco Cirinà. Boundary controllability of nonlinear hyperbolic systems. *SIAM J. Control*, 7:198–212, 1969.
- [3] Jean-Michel Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3):295–312, 1992.
- [4] Jean-Michel Coron. Contrôlabilité exacte frontière de l’équation d’Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(3):271–276, 1993.
- [5] Jean-Michel Coron. On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 1:35–75 (electronic), 1995/96.
- [6] Jean-Michel Coron. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 75(2):155–188, 1996.
- [7] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs*, Providence, Rhode Island, 2007.
- [8] Jean-Michel Coron. Some open problems on the control of nonlinear partial differential equations. In Henri Berestycki, Michiel Bertsch, Bert Peletier, and Laurent Véron, editors, *Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations: In honor of Haim Brezis*, Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, to appear.
- [9] Jean-Michel Coron and Andrei V. Fursikov. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian J. Math. Phys.*, 4(4):429–448, 1996.
- [10] Jesús Ildefonso Díaz. Obstruction and some approximate controllability results for the Burgers equation and related problems. In *Control of partial differential equations and applications (Laredo, 1994)*, volume 174 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 63–76. Dekker, New York, 1996.

- [11] Laurence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society. Springer-Verlag, Providence, Rhode Island, 1998.
- [12] Enrique Fernández-Cara and Sergio Guerrero. Remarks on the null controllability of the Burgers equation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 341(4):229–232, 2005.
- [13] Andrei V. Fursikov and Oleg Yu. Imanuvilov. On controllability of certain systems simulating a fluid flow. In *Flow control (Minneapolis, MN, 1992)*, volume 68 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 149–184. Springer, New York, 1995.
- [14] Olivier Glass. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(9):987–992, 1997.
- [15] Olivier Glass. Exact boundary controllability of 3-D Euler equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5:1–44 (electronic), 2000.
- [16] Olivier Glass and Sergio Guerrero. On the uniform controllability of the Burgers equation. *Preprint, Université de Paris 6*, 2006.
- [17] Sergio Guerrero and Oleg Imanuvilov. Remarks on global controllability for the Burgers equation with two control forces. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, to appear.
- [18] Thierry Horsin. On the controllability of the Burgers equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3:83–95 (electronic), 1998.
- [19] Ta-tsien Li and Bo-Peng Rao. Exact boundary controllability for quasi-linear hyperbolic systems. *SIAM J. Control Optim.*, 41(6):1748–1755 (electronic), 2003.
- [20] Ta-tsien Li and Wen Ci Yu. *Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems*. Duke University Mathematics Series, V. Duke University Mathematics Department, Durham, NC, 1985.
- [21] Michael E. Taylor. *Partial differential equations. III*, volume 117 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1997. Nonlinear equations, Corrected reprint of the 1996 original.

Chapitre 3

Contrôlabilité globale d'une équation de Korteweg-de Vries non linéaire

We are interested in both the global exact controllability to the trajectories and in the global exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation in a bounded interval. The local exact controllability to the trajectories by means of one boundary control, namely the boundary value at the left endpoint, has already been proved independently by L. Rosier and by O. Glass and S. Guerrero. We first introduce here two more controls: the boundary value at the right endpoint and the right member of the equation, assumed to be x -independent. Then we prove that, thanks to these three controls, one has the global exact controllability to the trajectories, for any positive time T . Finally, introducing a fourth control on the first derivative at the right endpoint, we get the global exact controllability, for any positive time T .

10 Introduction

Let $T, L > 0$. The first Korteweg-de Vries (KdV) control system we are interested in is the following one

$$y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = u(t), (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \quad (10.1)$$

$$y(t, 0) = v_1(t), y(t, L) = v_2(t), t \in (0, T), \quad (10.2)$$

$$y_x(t, L) = 0, t \in (0, T), \quad (10.3)$$

where, at time $t \in [0, T]$, the state is $y(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ and the controls are $v_1(t)$, $v_2(t)$ and $u(t) \in \mathbb{R}$.

The second control system we consider here consists in (10.1), (10.2) and

$$y_x(t, L) = w(t), t \in (0, T), \quad (10.4)$$

where, at time $t \in [0, T]$, the state is $y(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ and the controls are $v_1(t)$, $v_2(t)$, $w(t)$ and $u(t) \in \mathbb{R}$.

Equation (10.1), which is a well known example of nonlinear dispersive partial differential equation, has been introduced by D. Korteweg and G. de Vries in [19] and describes the evolution of long water waves in a canal of rectangular cross section. Numerous other applications of the KdV equation have also been found, justifying its intense study. One can cite for example various domains of science concerned with solids, liquids, gases or plasmas (see e.g. [14] and [29]).

Before coming into the details of the problems we are concerned with, that is, the global exact controllability to the trajectories of the control system (10.1)-(10.3) and the global exact controllability of the control system (10.1), (10.2), (10.4), for any time $T > 0$, let us recall previous works which deal with the controllability of a nonlinear KdV equation in the special case where $u := 0$.

Let us begin with the case where one is allowed to use only one control. More precisely, let us consider the following KdV control system

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = 0, y_x(t, L) = w(t), t \in (0, T), \end{cases} \quad (10.5)$$

where, at time $t \in [0, T]$, the state is $y(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ and the control is $w(t) \in \mathbb{R}$.

- In [23], L. Rosier proves that there actually appears a set of critical lengths for the spatial domain,

$$\mathcal{N} := \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}; k, l \in \mathbb{N}^* \right\},$$

which plays a major role in the controllability of (10.5). He proves using multipliers technique, Hilbert Uniqueness Method and a fixed point theorem that the control system (10.5) is locally exactly controllable in $L^2(0, L)$ around the origin provided that $L \notin \mathcal{N}$. He also proves that if $L \in \mathcal{N}$, then the linearized control system of (10.5) around the origin, which is

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = 0, y_x(t, L) = w(t), t \in (0, T), \end{cases}$$

is not exactly controllable in $L^2(0, L)$, because of the existence of a finite dimensional subspace $M \subset L^2(0, L)$, unreachable for the linear system.

- In [12], J.-M. Coron and E. Crépeau perform a power series expansion to deal with the nonlinearity to prove the exact local controllability of the control system (10.5) in $L^2(0, L)$, around the origin, in the case where $\dim M = 1$.

- In [2], E. Cerpa uses the same method to prove it for a sufficiently large time in the case where the subspace M previously mentioned is two-dimensional.

- Then, E. Cerpa and E. Crépeau have recently obtained in [3] the same result for any critical domain.

- Finally, L. Rosier in [26] and O. Glass and S. Guerrero in [17] prove a result of local exact controllability to the trajectories for the following control system

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = 0, y_x(t, L) = 0, t \in (0, T). \end{cases}$$

In the case where one is allowed to use more than one control, L. Rosier points out in [23] that the following control system

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0, y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), t \in (0, T), \end{cases}$$

is locally exactly controllable in $L^2(0, L)$ around the origin whatever T and L are.

- In [30], B.-Y. Zhang proves that the control system

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), t \in (0, T), \end{cases}$$

is exactly controllable in a neighborhood of a given smooth solution of the KdV equation, in $H^s(0, L)$, for any $s \geq 0$.

- O. Glass and S. Guerrero prove in [17] the local exact controllability of the following control system

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = 0, t \in (0, T). \end{cases}$$

- Finally, L. Rosier proves in [24] the global exact controllability of (KdV) by means of only boundary controls, that is the global exact controllability of the following control system

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), t \in (0, T), \end{cases}$$

holds true for a (possibly large) time depending on the initial and final states. However, the question of the existence of a minimal time for the global exact controllability of this last control system remains open.

Let us now talk about the problem we are concerned with. As one shall see, we want to study an initial boundary value problem for the KdV equation posed in a bounded interval with nonhomogenous boundary conditions. Our aim is first to prove a global exact controllability to the trajectories result of the KdV equation for any time $T > 0$, when three controls are acting over the system. These three controls are the two boundary values and the right member of the equation, assumed to be constant with respect to the space variable. Then we want to deduce from this result the global exact controllability of the KdV equation when we have four controls. These controls are the three controls previously mentionned plus the first derivative at the right endpoint.

The precise results are the following.

Theorem 10.1. *For any $T, L > 0$, for any $y_0 \in L^2(0, L)$ and for any*

$$\hat{y} \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, L))$$

which satisfies

$$\begin{cases} \hat{y}_t + \hat{y}_x + \hat{y}_{xxx} + \hat{y}\hat{y}_x = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ \hat{y}(t, 0) = 0, \hat{y}(t, L) = 0, \hat{y}_x(t, L) = 0, t \in (0, T), \end{cases}$$

there exist $v_1, v_2 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T)$ and there exists $u \in C^\infty([0, T])$ vanishing on a neighborhood of 0 and T such that there exists a unique $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ solution of (10.1)-(10.3),

$$y(0, x) = y_0(x), x \in (0, L), \quad (10.6)$$

and

$$y(T, x) = \hat{y}(T, x), x \in (0, L). \quad (10.7)$$

Theorem 10.2. *For any $T, L > 0$, for any y_0 and $y_T \in L^2(0, L)$, there exist*

$$v_1, v_2 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T),$$

there exists $w \in L^2(0, T)$ and there exists $u \in C^\infty([0, T])$ vanishing on a neighborhood of 0 and T such that there exists a unique $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ solution of (10.1), (10.2), (10.4), (10.6) and

$$y(T, x) = y_T(x), x \in (0, L). \quad (10.8)$$

The introduction of the control $u(t)$ in the right member of the equation has two motivations. The first one has already been mentioned. This is the fact that the existence of a minimal time for the global exact controllability of (KdV) by means of only boundary controls is still an open problem. The second one is that thanks to this control $u(t)$, we had obtained global exact controllability results for both the nonviscous and viscous Burgers equations (see [6] and [5]).

Let us finally conclude this part with a brief description of our strategy to prove Theorem 10.1 and Theorem 10.2. Firstly, we point out that the global null controllability of the control system (10.1), (10.2), (10.4) implies its global exact controllability. Hence, Theorem 10.2 is nothing but a consequence of Theorem 10.1. Then it only remains to prove Theorem 10.1. To prove such a global controllability result for the nonlinear control system (10.1)-(10.3), one may want to use the controllability of the linearized control system around the origin, that is, the controllability of the following control system

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = 0, t \in (0, T). \end{cases}$$

But in this way, one only obtains a local controllability result for the nonlinear control system (see [17]). (See Figure 1.)

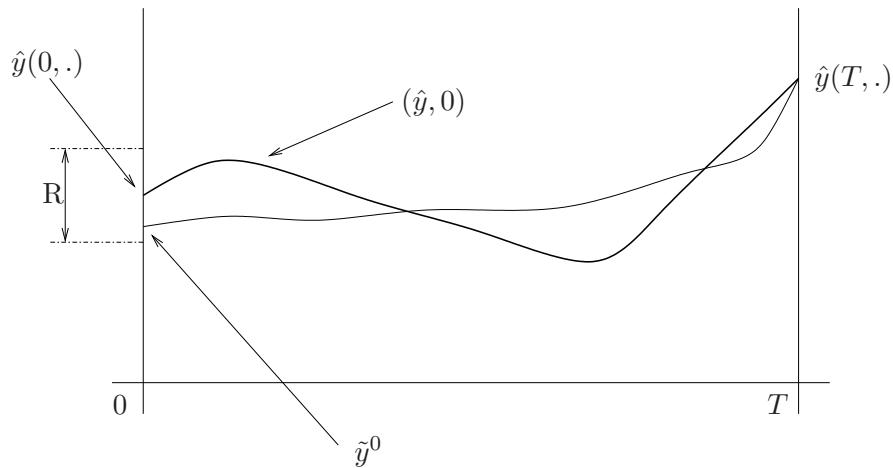


Figure 1: Local controllability of the nonlinear control system

Consequently our idea is to reduce the proof of Theorem 10.1 to proving an approximate controllability result in the case of smooth initial and final datas (part (2) on Figure 10.2). To this aim, we use two different properties of a nonlinear KdV equation.

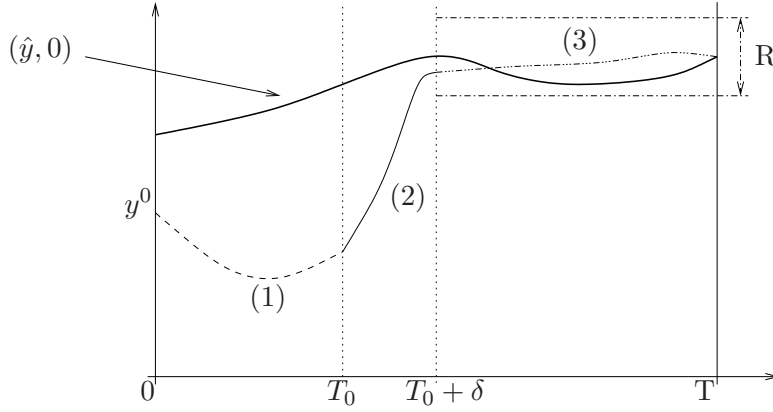


Figure 2: Strategy of the proof of Theorem 10.1

The first one is a smoothing effect that has already been mentioned by T. Kato in [18] and L. Rosier in [23]. (It corresponds to the part (1) on Figure 2.) The second one is the local exact controllability result proved by O. Glass and S. Guerrero in [17] (part (3) on Figure 2). The key point to prove such an approximate controllability result is to consider the linear term $y_x + y_{xxx}$ as perturbative compared to the quadratic term yy_x . We thus want to use the controllability of the nonviscous Burgers equation to obtain controllability results for the KdV equation. This idea is inspired by the papers [9] of J.-M. Coron and [13] of J.-M. Coron and A. Fursikov where results on the controllability of the Euler equation are used to prove global controllability results on the 2-D incompressible Navier-Stokes equations. (See also [23, section 3.5.2], for control systems in finite dimension.)

Remark 10.3. *One can find other results on the controllability or the stabilization of KdV control systems in [4, 60, 61, 66, 68, 69] and the references therein.*

Acknowledgments The author thanks J.-M. Coron for having attracted her attention on this controllability problem and advices on this work and S. Guerrero for fruitful discussions and useful comments.

11 Well-posedness results and smoothing effect

In this section, we recall some existence and uniqueness results, as well as a regularity property for the KdV equation that we shall use later.

11.1 Well-posedness results for the Cauchy problem without internal force

We consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), \\ y(0, x) = \tilde{y}(x). \end{cases} \quad (11.1)$$

Let us first remark that if y is a smooth solution of (11.1), then its initial condition $\tilde{y}$ and its boundary values have to satisfy some compatibility conditions, which are:

$$\tilde{y}_k(0) = h_1^{(k)}(0), \quad \tilde{y}_k(L) = h_2^{(k)}(0), \quad \tilde{y}'_k(L) = h_3^{(k)}(0), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

where the functions $\tilde{y}_k$, $k \in \mathbb{N}$, are defined iteratively as follows

$$\begin{cases} \tilde{y}_0(x) := \tilde{y}(x), \\ \tilde{y}_k(x) := -\tilde{y}_{k-1}^{(3)}(x) - \tilde{y}'_{k-1}(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\tilde{y}_j(x) \tilde{y}_{k-j-1}(x))'. \end{cases}$$

From now on, for any $r \in \mathbb{R}$, we denote by $[r]$ the unique integer such that

$$[r] \leq r < [r] + 1.$$

If we consider the global well-posedness of (11.1) in $H^s(0, L)$, $s \geq 0$ given, it comes the following s -compatibility conditions.

Definition 11.1. Let $T > 0$ and $s \geq 0$. A four-tuple $(\tilde{y}, \vec{h}) = (\tilde{y}, h_1, h_2, h_3) \in H^s(0, L) \times H^{(s+1)/3}(0, T) \times H^{(s+1)/3}(0, T) \times H^{s/3}(0, T)$ is said to be s -compatible if

$$\tilde{y}_k(0) = h_1^{(k)}(0), \quad \tilde{y}_k(L) = h_2^{(k)}(0) \quad (11.2)$$

hold for

- $k = 0, \dots, [s/3] - 1$ when $s - 3[s/3] \leq 1/2$
- $k = 0, \dots, [s/3]$ when $s - 3[s/3] > 1/2$

and

$$\tilde{y}'_k(L) = h_3^{(k)}(0) \quad (11.3)$$

holds for

- $k = 0, \dots, [s/3] - 1$ when $s - 3[s/3] \leq 3/2$
- $k = 0, \dots, [s/3]$ when $s - 3[s/3] > 3/2$.

Note that (11.2) is vacuous if $s \leq 1/2$ and that (11.3) is vacuous if $s \leq 3/2$.

Remark 11.2. Observe that our assumptions on h_j , $j = 1, 2, 3$ imply that

- for any $s > 1/2$, $h_j^{(k)}(0)$ makes sense for any $k = 0, \dots, [s/3] - 1$ and for any $j \in \{1, 2\}$,
- if $s - 3[s/3] > 1/2$, then $(s + 1)/3 > [s/3] + 1/2$ and so $h_j^{([s/3])}(0)$ makes also sense for any $j \in \{1, 2\}$,
- for any $s > 3/2$, $h_3^{(k)}(0)$ makes sense for any $k = 0, \dots, [s/3] - 1$,
- if $s - 3[s/3] > 3/2$, then $s/3 > [s/3] + 1/2$ and so $h_3^{([s/3])}(0)$ makes also sense.

Let $\epsilon > 0$. Let us now define

$$\mu_1(s) := \begin{cases} \epsilon + (5s + 9)/18 & \text{if } 0 \leq s < 3, \\ (s + 1)/3 & \text{if } s \geq 3; \end{cases}$$

$$\mu_2(s) := \begin{cases} \epsilon + (5s + 3)/18 & \text{if } 0 \leq s < 3, \\ s/3 & \text{if } s \geq 3. \end{cases}$$

We have the following result.

Theorem 11.3. [6, Theorem 1.3 page 1396] For any $s \geq 0$, for any $T, L > 0$ and for any s -compatible $(\tilde{y}, \vec{h}) \in H^s(0, L) \times H^{\mu_1(s)}(0, T) \times H^{\mu_1(s)}(0, T) \times H^{\mu_2(s)}(0, T)$, (11.1) is well-posed in the space

$$C^0([0, T]; H^s(0, L)) \cap L^2(0, T; H^{s+1}(0, L)).$$

11.2 Smoothing effect

As a consequence of Theorem 11.3, one has the following result (see [18] and [23] for similar results).

Proposition 11.4. Let $T, L > 0$ and let $y_0 \in L^2(0, L)$. There exists $0 < \eta < T/4$ such that the solution $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ of (11.1) with $(\tilde{y}, \vec{h}) := (y_0, 0, 0, 0)$ satisfies the following property

$$y \in C^0([\eta, T]; H^4(0, L)) \cap L^2(\eta, T; H^5(0, L)).$$

Proof of Proposition 11.4. From Theorem 11.3, there exists a unique

$$y^1 \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

solution of (11.1) with $(\tilde{y}, \vec{h}) := (y_0, 0, 0, 0)$. The fact that

$$y^1 \in L^2(0, T; H^1(0, L))$$

implies that for almost every $t \in [0, T]$,

$$y^1(t, \cdot) \in H^1(0, L).$$

Thus, one can find $t_0 \in (0, T/4)$ such that

$$y^1(t_0, \cdot) \in H^1(0, L).$$

We now apply Theorem 11.3 on the interval of time $[0, T - t_0]$ with the initial condition

$$\tilde{y}(\cdot) := y^1(t_0, \cdot)$$

and the boundary values

$$(h_1(t), h_2(t), h_3(t)) := (0, 0, 0)$$

which are obviously 1-compatible. We obtain the existence and the uniqueness of

$$y^2 \in C^0([0, T - t_0]; H^1(0, L)) \cap L^2(0, T - t_0; H^2(0, L))$$

solution of (11.1) on $(0, T - t_0) \times (0, L)$, with

$$y^2(0, \cdot) = y^1(t_0, \cdot) \tag{11.4}$$

and

$$(y^2(t, 0), y^2(t, L), y_x^2(t, L)) = (0, 0, 0), \tag{11.5}$$

for any $t \in (0, T - t_0)$.

From the fact that

$$y^2 \in C^0([0, T - t_0]; H^1(0, L)) \cap L^2(0, T - t_0; H^2(0, L))$$

and that y^2 satisfies (11.1), we get that $y^2 \in H^1(0, T - t_0; H^{-1}(0, L))$. Hence, using interpolation results (see, for example, [55, Theorem 9.6 page 49]),

$$y^2 \in H^{1/2-\epsilon}(0, T - t_0; H^{1/2+3\epsilon}(0, L)) \cap H^{1/6-\epsilon}(0, T - t_0; H^{3/2+3\epsilon}(0, L))$$

for any $0 < \epsilon < 1/6$.

Consequently, the equalities (11.4) and (11.5) hold in $H^1(0, L)$ and in $H^{1/2-\epsilon}(0, T - t_0) \times H^{1/2-\epsilon}(0, T - t_0) \times H^{1/6-\epsilon}(0, T - t_0)$, with $0 < \epsilon < 1/6$, respectively. From this and from the uniqueness of the Cauchy problem (11.1) posed on the interval of time $[0, T - t_0]$, with the initial condition

$$\tilde{y}(\cdot) := y^1(t_0, \cdot)$$

and homogeneous boundary conditions, we get that for any $t \in [0, T - t_0]$ and for any $x \in [0, L]$,

$$y^2(t, x) = y^1(t + t_0, x)$$

and the following regularity property for y^1

$$y^1 \in C^0([t_0, T]; H^1(0, L)) \cap L^2(t_0, T; H^2(0, L)).$$

We apply the same method three more times and Proposition 11.4 follows immediatly. ■

Remark 11.5. *One can see that one actually obtains that for any $l \in \mathbb{N}^*$, there exists $0 < \eta_l < T/4$ such that*

$$y \in C^0([\eta_l, T]; H^l(0, L)) \cap L^2(\eta_l, T; H^{l+1}(0, L)).$$

11.3 Well posedness result for the Cauchy problem with an internal force

Let us now consider the following problem

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = f(t, x), \\ y(t, 0) = h_1(t), y(t, L) = h_2(t), y_x(t, L) = h_3(t), \\ y(0, x) = \phi(x). \end{cases} \quad (11.6)$$

One can prove in a way similar to the proof of Theorem 11.3 the following result (see the Appendix for a sketch of the proof).

Theorem 11.6. *For any $T, L > 0$, for any $\phi \in L^2(0, L)$, for any $(h_1, h_2, h_3) \in H^1(0, T) \times H^1(0, T) \times L^2(0, T)$ and for any $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$, the Cauchy problem (11.6) is well-posed in the space $C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$. Moreover, its solution y satisfies the following hidden regularity property*

$$y_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T).$$

Let us recall that the hidden property above was first proved by L. Rosier in [23].

12 Proofs of Theorem 10.1 and Theorem 10.2

12.1 Null controllability

Let us begin with the following lemma.

Lemma 12.1. *Theorem 10.2 holds if the control system (10.1), (10.2), (10.4) is globally null controllable in arbitrary time $T > 0$, i.e. if for any $T, L > 0$ and any $y_0 \in L^2(0, L)$, one can reach the origin from y_0 in time T .*

Proof of Lemma 12.1. This comes from the fact that (10.1) is time-reversible. Indeed, let us fix $T > 0, L > 0, y_0$ and y_T in $L^2(0, L)$. There exist

$$y, z \in C^0([0, T/2]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T/2; H^1(0, L)),$$

there exist $u_y, u_z \in C^\infty([0, T/2])$ vanishing on a neighborhood of 0 and $T/2$, there exist v_{1y}, v_{1z}, v_{2y} and $v_{2z} \in H^{1/2-\epsilon}(0, T/2)$ and there exist $w_y, w_z \in L^2(0, T/2)$ such that

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = u_y, & t \in (0, T/2), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = v_{1y}(t), y(t, L) = v_{2y}(t), & y_x(t, L) = w_y(t), t \in (0, T/2), \\ y(0, x) = y^0(x), & x \in (0, L), \\ y(T/2, x) = 0, & x \in (0, L), \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_t + z_x + z_{xxx} + zz_x = u_z, & t \in (0, T/2), x \in (0, L), \\ z(t, 0) = v_{1z}(t), z(t, L) = v_{2z}(t), & z_x(t, L) = w_z(t), t \in (0, T/2), \\ z(0, x) = y^1(L - x), & x \in (0, L), \\ z(T/2, x) = 0, & x \in (0, L). \end{cases}$$

Lemma 12.1 follows easily by defining $Y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$, $U \in C^\infty([0, T])$ vanishing on a neighborhood of 0 and T , $V_1, V_2 \in H^{1/2-\epsilon}(0, T)$ and $W \in L^2(0, T)$ (see Theorem 11.6) by

$$Y(t, x) := \begin{cases} y(t, x) & t \in (0, T/2), x \in (0, L), \\ z(T - t, L - x) & t \in (T/2, T), x \in (0, L), \end{cases}$$

$$U(t) := \begin{cases} u_y(t) & t \in (0, T/2), \\ -u_z(T - t) & t \in (T/2, T), \end{cases}$$

$$V_1(t) := \begin{cases} v_{1y}(t) & t \in (0, T/2), \\ v_{2z}(T - t) & t \in (T/2, T), \end{cases}$$

$$V_2(t) := \begin{cases} v_{2y}(t) & t \in (0, T/2), \\ v_{1z}(T - t) & t \in (T/2, T) \end{cases}$$

and

$$W(t) := \begin{cases} w_y(t) & t \in (0, T/2), \\ -z_x(T - t, 0) & t \in (T/2, T). \end{cases}$$

■

As a consequence of Lemma 12.1, we just need to prove the global null controllability of the control system (10.1), (10.2), (10.4) instead of its global exact controllability. Hence Theorem 10.2 is a consequence of Theorem 10.1.

We are now going to recall a local exact controllability result which will allow us to reduce the proof of the global null controllability of the control system (10.1)-(10.3) to the proof of a global approximate controllability result.

12.2 Local exact controllability to the trajectories

Let us recall the following local exact controllability result, due to O. Glass and S. Guerrero (see [17]).

Proposition 12.2. *Let us consider $\hat{y} \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, L))$ satisfying*

$$\begin{cases} \hat{y}_t + \hat{y}_x + \hat{y}_{xxx} + \hat{y}\hat{y}_x = 0, t \in (0, T), x \in (0, L), \\ \hat{y}(t, 0) = 0, \hat{y}(t, L) = 0, \hat{y}_x(t, L) = 0, t \in (0, T). \end{cases} \quad (12.1)$$

Then there exists $R > 0$ such that, for any $\tilde{y}^0$ satisfying

$$|\tilde{y}^0 - \hat{y}(3T/4, \cdot)|_{L^2(0, L)} \leq R, \quad (12.2)$$

there exists $v_1 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T/4)$, such that the solution

$$y \in C^0([0, T/4]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T/4; H^1(0, L))$$

of

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + yy_x = 0, t \in (0, T/4), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = v_1(t), y(t, L) = 0, y_x(t, L) = 0, t \in (0, T/4), \\ y(0, x) = \tilde{y}^0(x), x \in (0, L), \end{cases} \quad (12.3)$$

satisfies

$$y(T/4, x) = \hat{y}(T, x), x \in (0, L).$$

We are now able to prove Theorem 10.1.

12.3 Proof of Theorem 10.1.

Let us assume, for the moment being, that the following main proposition holds.

Proposition 12.3. *For any $M > 0$, there exists $K > 0$ and there exists $\delta_1 > 0$ such that, for any $0 < \delta \leq \delta_1$ and any $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ which satisfy*

$$|z^0|_{C^3([0, L])} \leq M, \quad (12.4)$$

$$|z^1|_{C^3([0, L])} \leq M, \quad (12.5)$$

there exists $u \in C^\infty([0, \delta])$ vanishing on a neighborhood of 0 and δ and there exist v_1^2 and $v_2^2 \in H^2(0, \delta)$ such that the solution $y^2 \in C^0([0, \delta]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, \delta; H^1(0, L))$ of

$$\begin{cases} y_t^2 + y_x^2 + y_{xxx}^2 + y^2 y_x^2 = u(t), t \in (0, \delta), x \in (0, L), \\ y^2(t, 0) = v_1^2(t), y^2(t, L) = v_2^2(t), y_x^2(t, L) = 0, t \in (0, \delta) \end{cases} \quad (12.6)$$

and

$$y^2(0, x) = z^0(x), \quad x \in (0, L),$$

satisfies

$$|y^2(\delta, \cdot) - z^1|_{L^2(0, L)} \leq K\sqrt{\delta}.$$

Let us now prove the global exact controllability to the trajectories of the control system (10.1)-(10.3). Let $T, L > 0$. Let $y_0 \in L^2(0, L)$ and let $\hat{y} \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1_0(0, L))$ satisfy (12.1). We first define, for any $n \geq 0$, $y_n \in C^3([0, T] \times [0, L])$ such that, as $n \rightarrow +\infty$,

$$y_n \rightarrow \hat{y} \quad \text{in} \quad C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L)). \quad (12.7)$$

One can thus find $n_0 \geq 0$ such that, for any $t \in [0, T]$,

$$|y_{n_0}(t, \cdot) - \hat{y}(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} < R/2, \quad (12.8)$$

where R is as in Proposition 12.2. Let now

$$y^1 \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$$

be the solution of problem (11.1) with

$$(\tilde{y}, \vec{h}) := (y_0, 0, 0, 0).$$

From Proposition 11.4,

$$y^1 \in C^0([T/4, 3T/4]; H^4(0, L)) \cap L^2(T/4, 3T/4; H^5(0, L)).$$

From now on, we denote by

$$\hat{M} := \max\{|y^1(t, \cdot)|_{C^3([0, L])}; t \in [T/4, 3T/4]\}. \quad (12.9)$$

Then let $M := \hat{M}$, where $\hat{M}$ is defined by (12.9). Let

$$0 < \delta < \min(\delta_1, R^2/(4K^2), T/2), \quad (12.10)$$

where R is as in Proposition 12.2 and where δ_1 and K are as in Proposition 12.3. From Proposition 12.3, (12.9) and (12.10), there exists $u \in C^\infty([0, \delta])$ vanishing on a neighborhood of 0 and δ and there exist v_1^2 and $v_2^2 \in H^2(0, \delta)$ such that the solution

$$y^2 \in C^0([0, \delta]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, \delta; H^1(0, L))$$

of (12.6) and

$$y^2(0, x) := y^1(3T/4 - \delta, x), \quad x \in (0, L), \quad (12.11)$$

satisfies

$$|y^2(\delta, \cdot) - y_{n_0}(3T/4, \cdot)|_{L^2(0, L)} \leq K\sqrt{\delta} < R/2. \quad (12.12)$$

From (12.8) applied for $t = 3T/4$, (12.12) and Proposition 12.2 applied for $\tilde{y}^0 := y^2(\delta, \cdot)$, there exists $v_1^3 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T/4)$ such that the solution y^3 of (12.3) with

$$\tilde{y}^0 := y^2(\delta, \cdot)$$

and

$$v_1 := v_1^3$$

satisfies

$$y^3(T/4, \cdot) = \hat{y}(T, \cdot).$$

Then we define Y , U , V_1 and V_2 by

$$Y(t, x) := \begin{cases} y^1(t, x) & t \in (0, 3T/4 - \delta), x \in [0, L], \\ y^2(t - 3T/4 + \delta, x) & t \in (3T/4 - \delta, 3T/4), x \in (0, L), \\ y^3(t - 3T/4, x) & t \in (3T/4, T), x \in (0, L), \end{cases}$$

$$U(t) := \begin{cases} 0 & t \in (0, 3T/4 - \delta), \\ u(t - 3T/4 + \delta) & t \in (3T/4 - \delta, 3T/4), \\ 0 & t \in (3T/4, T), \end{cases}$$

$$V_1(t) := \begin{cases} 0 & t \in (0, 3T/4 - \delta), \\ v_1^2(t - 3T/4 + \delta) & t \in (3T/4 - \delta, 3T/4), \\ v_1^3(t - 3T/4) & t \in (3T/4, T), \end{cases}$$

and

$$V_2(t) := \begin{cases} 0 & t \in (0, 3T/4 - \delta), \\ v_2^2(t - 3T/4 + \delta) & t \in (3T/4 - \delta, 3T/4), \\ 0 & t \in (3T/4, T). \end{cases}$$

It is easy to see that

$$Y \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L)),$$

$$U \in C^\infty([0, T]) \text{ vanishes on a neighborhood of } 0 \text{ and } T$$

and

$$V_1, V_2 \in \bigcap_{\epsilon \in (0, 1/2)} H^{1/2-\epsilon}(0, T).$$

Moreover,

$$\begin{cases} Y_t + Y_x + Y_{xxx} + YY_x = U(t), t \in (0, T), x \in (0, L), \\ Y(t, 0) = V_1(t), Y(t, L) = V_2(t), Y_x(t, L) = 0, t \in (0, T), \\ Y(0, x) = y_0(x), x \in (0, L), \\ Y(T, x) = \hat{y}(T, x), x \in (0, L) \end{cases}$$

and hence the proof of Theorem 10.1 is complete. ■

12.4 Proof of Proposition 12.3.

Let $a \in C^\infty([0, 1], [0, +\infty))$ be such that $a(t) = 0$ on a neighborhood of 0 and 1, such that $\int_0^{1/2} a(s) ds > L$ and such that for any $t \in [0, 1/2]$, $a(t) = a(T - t)$. We have the following lemma.

Lemma 12.4. *There exists $C > 0$ such that, for any $M > 0$, there exists $\delta_1 > 0$ such that, for any $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ which satisfy (12.4) and (12.5) and for any $\delta \in (0, \delta_1]$, there exists $y^\delta \in C^3([0, \delta] \times [0, L])$ such that*

$$\begin{cases} y_t^\delta + (a^\delta + y^\delta)y_x^\delta = 0, & t \in [0, \delta], x \in [0, L], \\ y^\delta(0, x) = z^0(x), & x \in [0, L], \\ y^\delta(\delta, x) = z^1(x), & x \in [0, L] \end{cases} \quad (12.13)$$

and

$$|y^\delta|_{C^0([0, \delta]; C^3([0, L]))} \leq C(|z^0|_{C^3([0, L])} + |z^1|_{C^3([0, L])}), \quad (12.14)$$

where

$$\begin{aligned} a^\delta : [0, \delta] &\rightarrow [0, +\infty) \\ t &\mapsto \frac{1}{\delta} a\left(\frac{t}{\delta}\right). \end{aligned}$$

For the proof, we refer to [5], where we study the case of C^2 -functions. It relies on the return method which has been introduced by J.-M. Coron in [7] and used by him in [8, 20] and by O. Glass in [15, 41] to prove global controllability results for the Euler equation of incompressible inviscid fluids.

Let $M > 0$ and let $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ satisfy (12.4) and (12.5). Let C and δ_1 be as in Lemma 12.4. From Theorem 11.6, for any $\delta \in (0, \delta_1]$, there exists a unique

$$y^{2, \delta} \in C^0([0, \delta]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, \delta; H^1(0, L))$$

solution of

$$\begin{cases} y_t^{2, \delta} + y_x^{2, \delta} + y_{xxx}^{2, \delta} + y^{2, \delta} y_x^{2, \delta} = (a^\delta)'(t), & t \in (0, \delta), x \in (0, L), \\ y^{2, \delta}(t, 0) = y^\delta(t, 0) + a^\delta(t), & y^{2, \delta}(t, L) = y^\delta(t, L) + a^\delta(t), & t \in (0, \delta), \\ y_x^{2, \delta}(t, L) = 0, & t \in (0, \delta), \\ y^{2, \delta}(0, x) = z^0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (12.15)$$

where a^δ is defined in Lemma 12.4.

We define for any $\delta \in (0, \delta_1]$,

$$R^\delta := y^{2, \delta} - y^\delta - a^\delta. \quad (12.16)$$

Let us now assume, for the moment being, that the following lemma holds.

Lemma 12.5. *For any $M > 0$, there exist $K > 0$ such that for any $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ which satisfy (12.4) and (12.5), for any $\delta \in (0, \delta_1]$ and any $t \in (0, \delta]$,*

$$|R^\delta(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} \leq K\sqrt{t}, \quad (12.17)$$

where R^δ is defined by (12.16).

Let us now prove Proposition 12.3. Let K be as in Lemma 12.5. Then for any $\delta \in (0, \delta_1]$ and any $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ which satisfy (12.4) and (12.5), it comes from the third line of (12.13), (12.16) and (12.17) applied for $t = \delta$ and the fact that $a^\delta(\delta) = 0$, that

$$|y^{2, \delta}(\delta, \cdot) - z^1(\cdot)|_{L^2(0, L)} \leq K\sqrt{\delta}.$$

This ends the proof of Proposition 12.3. ■

It only remains to prove Lemma 12.5.

Proof of Lemma 12.5. Let C and δ_1 be as in Lemma 12.4. Let $z^0, z^1 \in C^3([0, L])$ satisfy (12.4) and (12.5). We need to evaluate $R^\delta(t, \cdot)$, for $\delta > 0$ small enough and $0 < t \leq \delta$. Let also $0 < \delta \leq \delta_1$.

It comes from (12.13), (12.15), (12.16) and the fact that $a^\delta(0) = 0$, that

$$R_t^\delta + R_x^\delta + R_{xxx}^\delta + R^\delta R_x^\delta + R^\delta y_x^\delta + (y^\delta + a^\delta(t))R_x^\delta + y_x^\delta + y_{xxx}^\delta = 0, \quad t \in (0, \delta), \quad x \in (0, L), \quad (12.18)$$

$$R^\delta(t, 0) = 0, \quad R^\delta(t, L) = 0, \quad t \in (0, \delta), \quad (12.19)$$

$$R_x^\delta(t, L) = -y_x^\delta(t, L), \quad t \in (0, \delta), \quad (12.20)$$

$$R^\delta(0, x) = 0, \quad x \in (0, L). \quad (12.21)$$

We multiply (12.18) by $2R^\delta$ and integrate on $(0, L)$.

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^L R^\delta R_t^\delta + 2 \int_0^L R^\delta R_x^\delta + 2 \int_0^L R^\delta R_{xxx}^\delta + 2 \int_0^L (R^\delta)^2 R_x^\delta + 2 \int_0^L (R^\delta)^2 y_x^\delta \\ & + 2 \int_0^L R^\delta R_x^\delta y^\delta + a^\delta(t) 2 \int_0^L R^\delta R_x^\delta + 2 \int_0^L R^\delta y_x^\delta + 2 \int_0^L R^\delta y_{xxx}^\delta = 0. \end{aligned} \quad (12.22)$$

One easily obtains

$$2 \int_0^L R^\delta R_t^\delta = \frac{d}{dt} \int_0^L (R^\delta)^2,$$

$$2 \int_0^L R^\delta R_x^\delta = (R^\delta)^2 \Big|_0^L = 0,$$

$$\begin{aligned}
2 \int_0^L R^\delta R_{xxx}^\delta &= 2(R^\delta R_{xx}^\delta) \Big|_0^L - 2 \int_0^L R_x^\delta R_{xx}^\delta \\
&= -(R_x^\delta)^2 \Big|_0^L \\
&= -(y_x^\delta(t, L))^2 + (R_x^\delta(t, 0))^2,
\end{aligned}$$

$$2 \int_0^L (R^\delta)^2 R_x^\delta = \frac{2}{3} (R^\delta)^3 \Big|_0^L = 0,$$

$$2 \int_0^L R^\delta R_x^\delta a^\delta = a^\delta(t) (R^\delta)^2 \Big|_0^L = 0,$$

$$\begin{aligned}
2 \int_0^L R^\delta R_x^\delta y^\delta &= - \int_0^L (R^\delta)^2 y_x^\delta + ((R^\delta)^2 y^\delta) \Big|_0^L \\
&= - \int_0^L (R^\delta)^2 y_x^\delta,
\end{aligned}$$

and the following estimates

$$\int_0^L (R^\delta)^2 y_x^\delta \leq |y^\delta|_{C^0([0, \delta]; C^3([0, L]))} \int_0^L (R^\delta)^2,$$

$$2 \int_0^L R^\delta (y_x^\delta + y_{xxx}^\delta) \leq \int_0^L (R^\delta)^2 + 2L |y^\delta|_{C^0([0, \delta]; C^3([0, L]))}^2.$$

Hence, using (12.14), (12.22) and the previous estimates, we get

$$\frac{d}{dt} \int_0^L (R^\delta)^2 \leq 4C^2 M^2 (1 + 2L) + (6CM + 1) \int_0^L (R^\delta)^2,$$

where C and M are as in Lemma 12.4.

Using (12.21), the last inequality and classical arguments on ordinary differential equations, we get the existence of C and $K_1 > 0$ such that, for any z^0, z^1 which satisfy (12.4) and (12.5), for any $\delta \in (0, \delta_1]$ and any $t \in (0, \delta]$,

$$\int_0^L (R^\delta(t, x))^2 dx \leq C(e^{K_1 t} - 1).$$

Consequently, there exist $K_2 > 0$ such that, for any z^0, z^1 which satisfy (12.4) and (12.5), for any $\delta \in (0, \delta_1]$ and any $t \in (0, \delta]$,

$$\int_0^L (R^\delta(t, x))^2 dx \leq K_2 t.$$

This ends the proof of Lemma 12.5. ■

APPENDIX

This part is devoted to the proof of Theorem 11.6. This proof is similar to the proof of the well-posedness of (11.1) that one can find in the paper [1] of J. L. Bona, S. M. Sun and B.-Y. Zhang. It consists in three parts. First we recall some estimates for the solution of the linearized system around 0, with (non)homogeneous boundary conditions, and with or without an internal force. Then, using these estimates, we prove the local well-posedness of (11.6) and finally the global well-posedness of this system will follow thanks to a global a priori H^1 estimate.

13 Linear estimates

Let us first consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \\ y(t, 0) = y(t, L) = y_x(t, L) = 0, \\ y(0, x) = \phi(x). \end{cases} \quad (13.1)$$

Let A be the linear operator defined by $Af = -f''' - f'$. We consider A as an unbounded operator on $L^2(0, L)$ with the domain $D(A) = \{f \in H^3(0, L); f(0) = f(L) = f'(L) = 0\}$. The problem (13.1) can consequently be written as the initial value problem of an abstract evolution equation in the space $L^2(0, L)$,

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y(0) = \phi.$$

Proposition 13.1. *[1, Propositions 2.1 and 2.16 pages 1400 and 1414] A is the infinitesimal generator of a C_0 semigroup $W_0(t)$ in $L^2(0, L)$ and for any $\phi \in L^2(0, L)$, $y(t) = W_0(t)\phi \in C_b^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, L))$, $y_x \in C^0([0, L]; L^2(\mathbb{R}_+))$ and satisfies, for any $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} |y(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} &\leq |\phi|_{L^2(0, L)}, \\ |y|_{L^2(0, t; H^1(0, L))} &\leq C(1 + t)^{1/2} |\phi|_{L^2(0, L)}. \end{aligned}$$

We now consider the following nonhomogeneous linear problem

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = f(t, x), \\ y(t, 0) = y(t, L) = y_x(t, L) = 0, \\ y(0, x) = 0. \end{cases} \quad (13.2)$$

The Cauchy problem (13.2) can be written in terms of the operator A ,

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f, \quad y(0) = 0.$$

We have the following proposition.

Proposition 13.2. *[1, Propositions 2.4 and 2.17 pages 1402 and 1414] For any $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(0, L))$, $y(t) := \int_0^t W_0(t-\tau)f(\tau, \cdot)d\tau \in C_b^0(\mathbb{R}_+; L^2(0, L))$ is called a mild solution of (13.2). Moreover, there exists $C > 0$ such that, for any $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(0, L))$ and any $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} |y(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} &\leq C|f|_{L^1_{loc}(0, t; L^2(0, L))}, \\ \int_0^t \int_0^L y_x^2(\tau, x) dx d\tau &\leq C(1+t)|f|_{L^1(0, t; L^2(0, L))}^2. \end{aligned}$$

Let us finally consider the following non-homogeneous boundary value problem

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \\ y(t, 0) = h_1(t), \quad y(t, L) = h_2(t), \quad y_x(t, L) = h_3(t), \\ y(0, x) = \phi(x). \end{cases} \quad (13.3)$$

From now on, for given $T > 0$ and $s \geq 0$, we define the space

$$\mathcal{H}_0 := H^{1/3}(0, T) \times H^{1/3}(0, T) \times L^2(0, T)$$

endowed with the norm

$$|\vec{h}|_{\mathcal{H}_0} := (|h_1|_{H^{1/3}(0, T)}^2 + |h_2|_{H^{1/3}(0, T)}^2 + |h_3|_{L^2(0, T)}^2)^{1/2},$$

where $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$. We also define the space

$$X_{0, T} := L^2(0, L) \times H^{1/3}(0, T) \times H^{1/3}(0, T) \times L^2(0, T),$$

endowed with its usual product topology and the space

$$Y_{0, T} := \{v \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))\} \quad (13.4)$$

where we define the norm

$$|y|_{Y_{0, T}} := (|y|_{C^0([0, T]; L^2(0, L))}^2 + |y|_{L^2(0, T; H^1(0, L))}^2)^{1/2}.$$

The following proposition asserts the well-posedness of (13.3) in $Y_{0, T}$ in the case where $\phi := 0$.

Proposition 13.3. *[1, Theorem 2.10 page 1412] For any $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{H}_0$, the Cauchy problem (13.3) with $\phi := 0$ admits a unique solution $y(t, x) = (W_b(t)\vec{h})(x)$ which belongs to the space $C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$. Moreover, there exists $C > 0$ such that, for any $\vec{h} \in \mathcal{H}_0$,*

$$|y|_{L^2(0, T; H^1(0, L))} + \sup_{0 \leq t \leq T} |y(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} \leq C|\vec{h}|_{\mathcal{H}_0}.$$

14 Local well-posedness of (11.6)

Let us begin this section with a useful lemma whose obvious proof is omitted.

Lemma 14.1. *There exists a constant C such that for any $T > 0$ and $y, z \in Y_{0,T}$,*

$$\int_0^T |(y(t, \cdot)z(t, \cdot))_x|_{L^2(0,L)} dt \leq CT^{1/2} |y|_{Y_{0,T}} |z|_{Y_{0,T}}.$$

The main result of this section is the following.

Theorem 14.2. *Let $T, L > 0$ be given. For any $(\phi, \vec{h}) \in X_{0,T}$ and for any $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$, there exists a $T^* \in [0, T]$ depending on $|(\phi, \vec{h})|_{X_{0,T}}$ and $|f|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}$ such that (11.6) admits a unique solution $y \in Y_{0,T^*}$. Moreover, for any $T' < T^*$, there exists a neighborhood U of $(\phi, \vec{h})$ in $X_{0,T}$ such that (11.6) admits a unique solution in the space $Y_{0,T'}$ for any $(\psi, \vec{h}_1) \in U$ and the corresponding solution map from U to $Y_{0,T'}$ is Lipschitz continuous.*

Proof of Theorem 14.2. We first prove the existence of solutions to the Cauchy problem (11.6). We write (11.6) in its integral form

$$y(t) = W_0(t)\phi + W_b(t)\vec{h} - \int_0^t W_0(t-\tau)(yy_x)(\tau)d\tau + \int_0^t W_0(t-\tau)f(\tau, \cdot)d\tau.$$

For given $(\phi, \vec{h}, f) \in X_{0,T} \times L^1(0, T; L^2(0, L))$, let $r > 0$ and $\theta > 0$ be constants to be determined. Let

$$S_{\theta,r} := \{z \in Y_{0,\theta}, |z|_{Y_{0,\theta}} \leq r\}.$$

The set $S_{\theta,r}$ is a closed, convex and bounded subset of $Y_{0,\theta}$ and consequently a complete metric space in the topology induced from $Y_{0,\theta}$. We define the map Γ on $S_{\theta,r}$ by

$$\Gamma(z) := W_0(t)\phi + W_b(t)\vec{h} - \int_0^t W_0(t-\tau)(zz_x)(\tau)d\tau + \int_0^t W_0(t-\tau)f(\tau, \cdot)d\tau, \forall z \in S_{\theta,r}.$$

Then it follows immediatly from the estimates given in the previous section and Lemma 14.1 that for every $z \in S_{\theta,r}$,

$$|\Gamma(z)|_{Y_{0,\theta}} \leq C_0|(\phi, \vec{h})|_{X_{0,T}} + C_1\theta^{1/2}|z|_{Y_{0,\theta}}^2 + C_2|f|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}.$$

We thus choose $r > 0$ and $\theta > 0$ such that

$$\begin{cases} r = 2C_0|(\phi, \vec{h})|_{X_{0,T}} + 2C_2|f|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}, \\ C_1\theta^{1/2}r \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

and consequently

$$|\Gamma(z)|_{Y_{0,\theta}} \leq r, \forall z \in S_{\theta,r}.$$

Thus with such r and θ , Γ maps $S_{\theta,r}$ into $S_{\theta,r}$. One can also prove with the same inequalities that

$$|\Gamma(z_1) - \Gamma(z_2)|_{Y_{0,\theta}} \leq \frac{1}{2}|z_1 - z_2|_{Y_{0,\theta}}, \forall z_1, z_2 \in S_{\theta,r}.$$

The existence of solutions to the Cauchy problem (11.6) follows by using the Banach fixed point theorem.

We now prove the uniqueness of the mild solution of our nonlinear KdV equation. We follow the strategy J.-M. Coron and E. Crépeau used in [12]. Let us assume that for given $(\phi, \vec{h}, f) \in X_{0,T} \times L^1(0, T; L^2(0, L))$, there exist $0 < T' \leq T$ and two different solutions y and z of (11.6) defined on $[0, T'] \times [0, L]$. Then $\Delta := z - y$, defined on $[0, T'] \times [0, L]$, is a mild solution of

$$\Delta_t + \Delta_x + \Delta_{xxx} = -y\Delta_x - z_x\Delta, \quad (14.1)$$

$$\Delta(t, 0) = \Delta(t, L) = \Delta_x(t, L) = 0, \quad (14.2)$$

$$\Delta(0, x) = 0. \quad (14.3)$$

Multiplying (14.1) by $2x\Delta$ and integrating by parts on $(0, L)$, we get

$$\frac{d}{dt} \int_0^L x\Delta^2 dx + 3 \int_0^L \Delta_x^2 dx = \int_0^L \Delta^2 dx - 2 \int_0^L xy\Delta\Delta_x dx + 2 \int_0^L z\Delta^2 dx + 4 \int_0^L xz\Delta\Delta_x dx. \quad (14.4)$$

(We first obtain the previous equality in the case where y and z are assumed to be smooth enough and we then use a density argument to obtain it in the general case.)

Writing

$$y = y - \int_0^L y dx + \int_0^L y dx,$$

using (14.2) and the fact that $y \in L^2(0, T'; H^1(0, L))$, one easily obtains the existence of a positive constant C_1 depending only on L and such that

$$2 \left| \int_0^L xy\Delta\Delta_x dx \right| \leq C_1(|y_x|_{L^2(0,L)} \int_0^L |x\Delta\Delta_x| dx + |y|_{L^2(0,L)} \int_0^L \Delta^2 dx).$$

Thus,

$$2 \left| \int_0^L xy\Delta\Delta_x dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_x^2 dx + 2C_1^2|y_x|_{L^2(0,L)}^2 L \int_0^L x\Delta^2 dx + C_1|y|_{L^2(0,L)} \int_0^L \Delta^2 dx. \quad (14.5)$$

Similarly, there exists $C_2 > 0$ depending only on L such that

$$4 \left| \int_0^L xz\Delta\Delta_x dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_x^2 dx + 4C_2^2|z_x|_{L^2(0,L)}^2 L \int_0^L x\Delta^2 dx + C_2|z|_{L^2(0,L)} \int_0^L \Delta^2 dx. \quad (14.6)$$

We now recall the following useful lemma.

Lemma 14.3. [12, Lemma 16 page 386] For any $\phi \in H^1(0, L)$ with $\phi(0) = 0$ and any $a \in [0, L]$,

$$\int_0^L \phi^2 dx \leq \frac{a^2}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{1}{a} \int_0^L x \phi^2 dx. \quad (14.7)$$

From Lemma 14.3, there exists $C_3 = C_3(L) > 0$ such that

$$\int_0^L \Delta^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_x^2 dx + C_3 \int_0^L x \Delta^2 dx. \quad (14.8)$$

Finally, there exist $C_4 = C_4(L) > 0$ and $C_5 = C_5(L) > 0$ such that

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^L z \Delta^2 dx \right| &\leq 2 \left| \int_0^L (z - \int_0^L z dx) \Delta^2 dx \right| + C_4 |z|_{L^2(0,L)} \int_0^L \Delta^2 dx \\ &\leq C_5 |z_x|_{L^2(0,L)} \int_0^L \Delta^2 dx + C_4 |z|_{L^2(0,L)} \int_0^L \Delta^2 dx \end{aligned}$$

Consequently, if we use Lemma 14.3 with both $a := \min\{(2C_5)^{-1/2} |z_x|_{L^2(0,L)}^{-1/2}, L\}$ and $a := \min\{(2C_4)^{-1/2} |z|_{L^2(0,L)}^{-1/2}, L\}$, we get the existence of $C_6 = C_6(L) > 0$ such that

$$2 \left| \int_0^L z \Delta^2 dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_x^2 dx + C_6 (1 + |z|_{L^2(0,L)}^2 + |z_x|_{L^2(0,L)}^2) \int_0^L x \Delta^2 dx. \quad (14.9)$$

Thus, by (14.4), (14.5), (14.6), (14.8) and (14.9), there exists $C_7 = C_7(L) > 0$ such that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L x \Delta^2 dx + \int_0^L \Delta_x^2 dx &\leq C_7 (1 + |y_x|_{L^2(0,L)}^2 + |z_x|_{L^2(0,L)}^2 \\ &\quad + |y|_{L^2(0,L)}^2 + |z|_{L^2(0,L)}^2) \int_0^L x \Delta^2 dx. \end{aligned}$$

The uniqueness of the mild solution of our Cauchy problem then follows by using Gronwall's inequality and the fact that $\Delta(0, \cdot) = 0$. ■

15 Global well-posedness of (11.6)

We first define the space

$$Z_{0,T} := L^2(0, L) \times H^1(0, T) \times H^1(0, T) \times L^2(0, T).$$

Since we already have a local well-posedness result, we only need to prove the following a priori estimate for any solution of (11.6).

Lemma 15.1. *For given $T > 0$, there exists $K > 0$ such that for any $(\phi, \vec{h}) \in Z_{0,T}$ and $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$, for any $0 < T' \leq T$ and for any solution $y \in Y_{0,T'}$ (which was introduced in (13.4)) of (11.6),*

$$|y|_{Y_{0,T'}} \leq K \exp((T+1)(\|(\phi, \vec{h})\|_{Z_{0,T}} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))})).$$

Proof of Lemma 15.1. From now on, C will denote a positive generic constant which may change from line to line but only depends on L . Let us first assume that $(h_1, h_2, h_3) \in C^1([0, T]) \times C^1([0, T]) \times C^0([0, T])$ and let us fix $0 < T' \leq T$. Then, if y denotes a solution of (11.6) on $[0, T'] \times [0, L]$, we define, for any $(t, x) \in [0, T'] \times [0, L]$,

$$z(t, x) := y(t, x) - \left(\frac{L-x}{L} h_1(t) + \frac{x}{L} h_2(t) \right).$$

One easily sees that z satisfies the following problem

$$\left\{ \begin{array}{l} z_t + z_x + z_{xxx} + zz_x + \frac{1}{L}(-h_1 + h_2)z + \frac{1}{L}((L-x)h_1 + xh_2)z_x \\ = -\frac{1}{L}((L-x)h'_1 + xh'_2) - \frac{1}{L}(-h_1 + h_2) - \frac{1}{L^2}((L-x)h_1 + xh_2)(-h_1 + h_2) + f, \\ z(t, 0) = 0, \quad z(t, L) = 0, \\ z_x(t, L) = h_3(t) - \frac{1}{L}(-h_1(t) + h_2(t)), \\ z(0, x) = \phi(x) - \frac{1}{L}((L-x)h_1(0) + xh_2(0)). \end{array} \right. \quad (15.1)$$

Let us multiply the first equation in (15.1) by z and integrate on $(0, L)$. First, from the fact that $(h_1, h_2, h_3) \in C^1([0, T]) \times C^1([0, T]) \times C^0([0, T])$, $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$ and (15.1) we get the following estimates

$$\begin{aligned} \int_0^L z z_x dx &= 0, \\ \int_0^L z z_{xxx} dx &= -\frac{1}{2} \left(h_3(t) - \frac{1}{L}(-h_1(t) + h_2(t)) \right)^2 + \frac{1}{2} (z_x(t, 0))^2, \\ \int_0^L z^2 z_x dx &= 0, \\ \left| \frac{1}{L}(-h_1(t) + h_2(t)) \int_0^L z^2 dx \right| &\leq C(|h_1|_{L^\infty(0,T)} + |h_2|_{L^\infty(0,T)}) |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{L} \int_0^L ((L-x)h_1(t) + xh_2(t))z z_x dx \right| &= \left| \frac{1}{2L} h_1(t) \int_0^L z^2 dx - \frac{1}{2L} h_2(t) \int_0^L z^2 dx \right| \\
&\leq C(|h_1|_{L^\infty(0,T)} + |h_2|_{L^\infty(0,T)}) |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2, \\
\left| -\frac{1}{L} \int_0^L ((L-x)h'_1(t) + xh'_2(t))z dx \right| &\leq \frac{L}{2} (|h'_1(t)| + |h'_2(t)|)^2 + \frac{1}{2} |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2, \\
\left| \int_0^L \left(-\frac{1}{L} (-h_1(t) + h_2(t)) - \frac{1}{L^2} ((L-x)h_1(t) + xh_2(t))(-h_1(t) + h_2(t)) \right) z dx \right| \\
&\leq \frac{C}{2} (|h_1|_{L^\infty(0,T)} + |h_2|_{L^\infty(0,T)})^2 (1 + (|h_1|_{L^\infty(0,T)} + |h_2|_{L^\infty(0,T)})^2) + \frac{1}{2} |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2, \\
\left| \int_0^L f z dx \right| &\leq |f(t, \cdot)|_{L^2(0,L)} |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)} \\
&\leq |f(t, \cdot)|_{L^2(0,L)} (1 + |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2).
\end{aligned}$$

We get that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{1}{2} z_x^2(t, 0) &\leq \frac{1}{2} \left(h_3(t) - \frac{1}{L} (-h_1(t) + h_2(t)) \right)^2 \\
&+ C(1 + |h_1|_{L^\infty(0,T)} + |h_2|_{L^\infty(0,T)} + |f(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}) |z(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2 + C(|h'_1(t)| + |h'_2(t)|)^2 \\
&+ C(|h_1|_{L^\infty(0,T)} + |h_2|_{L^\infty(0,T)})^2 (1 + (|h_1|_{L^\infty(0,T)} + |h_2|_{L^\infty(0,T)})^2) + |f(t, \cdot)|_{L^2(0,L)}^2
\end{aligned}$$

for any $t \geq 0$ and we conclude by using the facts that $(h_1, h_2, h_3) \in C^1([0, T]) \times C^1([0, T]) \times C^0([0, T])$, that $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$ and using a Gronwall's inequality. That is, we obtain the existence of $C_1 > 0$ only depending on L and such that

$$|z|_{L^\infty(0,T';L^2(0,L))} \leq C_1 \exp((T+1)(|\phi, \vec{h}|_{Z_{0,T}} + |f|_{L^1(0,T;L^2(0,L))})). \quad (15.2)$$

Hence, it remains to prove a similar inequality for $|z_x|_{L^2(0,T';L^2(0,L))}$ in order to end the proof of Lemma 15.1. We use the same multiplier that L. Rosier introduced in [23]. More precisely, we multiply the first equation of (15.1) by xz and integrate by parts on $(0, L)$. It comes that,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |x^{1/2} z(t, \cdot)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L z^2 dx + \frac{3}{2} \int_0^L (z_x)^2 dx - \frac{L}{2} (z_x(t, L))^2 - \frac{1}{3} \int_0^L z^3 dx \\
+ \frac{1}{L} (-h_1 + h_2) \int_0^L x z^2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L ((L-x)h_1 + xh_2) x z z_x dx = \\
- \frac{1}{L} \int_0^L ((L-x)h'_1 + xh'_2) x z dx - \frac{1}{L} (-h_1 + h_2) \int_0^L x z dx \\
- \frac{1}{L^2} (-h_1 + h_2) \int_0^L ((L-x)h_1 + xh_2) x z dx + \int_0^L f x z dx. \quad (15.3)
\end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2} \int_0^L z^2(t, x) dx \right| &\leq \frac{1}{2} |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2, \\
\left| \frac{1}{3} \int_0^L |z^3(t, x) dx \right| &\leq \frac{1}{3} \sup_{x \in [0, L]} |z(t, x)| |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\
&\leq \frac{\sqrt{L}}{3} |z_x(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\
&\leq \frac{\sqrt{L}\delta}{6} |z_x(t, \cdot)|_{L^2(0, L)}^2 + \frac{\sqrt{L}}{6\delta} |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^4,
\end{aligned}$$

where δ is any positive constant to be chosen later. Finally, from the fact that $(h_1, h_2, h_3) \in C^1([0, T]) \times C^1([0, T]) \times C^0([0, T])$, that $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$ and from (15.1), we obtain the following inequalities

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{L} (-h_1(t) + h_2(t)) \int_0^L x z^2(t, x) dx \right| &\leq (|h_1|_{L^\infty(0, T)} + |h_2|_{L^\infty(0, T)}) |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2, \\
\left| \frac{1}{L} \int_0^L ((L-x)h_1(t) + xh_2(t)) x z(t, x) z_x(t, x) dx \right| &\leq C(|h_1|_{L^\infty(0, T)} \\
&\quad + |h_2|_{L^\infty(0, T)}) |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2, \\
\left| \frac{1}{L} \int_0^L ((L-x)h_1'(t) + xh_2'(t)) x z(t, x) dx \right| &\leq \frac{C}{2} (|h_1'(t)| + |h_2'(t)|)^2 + \frac{1}{2} |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2, \\
\left| \frac{1}{L} \int_0^L (-h_1(t) + h_2(t)) x z(t, x) dx \right| &\leq (|h_1|_{L^\infty(0, T)} + |h_2|_{L^\infty(0, T)}) |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \\
\left| \frac{1}{L^2} \int_0^L ((L-x)h_1(t) + xh_2(t)) (-h_1(t) + h_2(t)) x z(t, x) dx \right| &\leq \\
&\quad C(|h_1|_{L^\infty(0, T)} + |h_2|_{L^\infty(0, T)})^2 |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}, \\
\left| \int_0^L f(t, x) x z(t, x) dx \right| &\leq C|f(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \\
&\leq C|f(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} (1 + |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2).
\end{aligned}$$

Then, if we plug these inequalities into (15.3) and if we take $\delta := \frac{3}{\sqrt{L}}$, we get that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |x^{1/2} z(t, x)|^2 dx + \int_0^L z_x^2(t, x) dx &\leq \\
&\quad C(1 + |h_1|_{L^\infty(0, T)} + |h_2|_{L^\infty(0, T)} + |f(t, \cdot)|_{L^2(0, L)}) |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^2 \\
&\quad + C(|h_1|_{L^\infty(0, T)} + |h_2|_{L^\infty(0, T)}) (1 + |h_1|_{L^\infty(0, T)} + |h_2|_{L^\infty(0, T)}) |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \\
&\quad + C|f(t, \cdot)|_{L^2(0, L)} + \frac{L}{2} \left(h_3(t) - \frac{1}{L} (-h_1(t) + h_2(t)) \right)^2 \\
&\quad + \frac{L}{18} |z|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))}^4 + \frac{C}{2} (|h_1'(t)| + |h_2'(t)|)^2.
\end{aligned}$$

From the fact that $(h_1, h_2, h_3) \in C^1([0, T]) \times C^1([0, T]) \times C^0([0, T])$, that $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$, using (15.2) and a Gronwall's inequality, we get the existence of $C_2 > 0$ only depending on L and such that

$$|z_x|_{L^2(0, T; L^2(0, L))} \leq C_2 \exp((T + 1)(|\langle \phi, \vec{h} \rangle|_{Z_{0, T}} + |f|_{L^1(0, T; L^2(0, L))})). \quad (15.4)$$

By an easy density argument, (15.2) and (15.4) actually hold if $(h_1, h_2, h_3) \in H^1(0, T) \times H^1(0, T) \times L^2(0, T)$ and Lemma 15.1 follows. ■

Bibliography

- [1] Jerry L. Bona, Shu Ming Sun, and Bing-Yu Zhang. A Nonhomogeneous Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation Posed on a Finite Domain. *Comm. Partial Differential Equations*, 28:1391–1436, 2003.
- [2] Eduardo Cerpa. Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain. *SIAM J. Control Optim.*, 46(3):877–899, 2007.
- [3] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau. Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(2): 457–475, 2009.
- [4] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau. Rapid exponential stabilization for a linear Korteweg-de Vries equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 11(3): 655–668, 2009.
- [5] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous Burgers type equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 344(4):241–246, 2007.
- [6] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous and viscous Burgers type equations. *SIAM J. Control Optim.*, 48(3): 1567–1599, 2009.
- [7] Jean-Michel Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3):295–312, 1992.
- [8] Jean-Michel Coron. Contrôlabilité exacte frontière de l’équation d’Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(3):271–276, 1993.
- [9] Jean-Michel Coron. On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 1:35–75 (electronic), 1995/96.
- [10] Jean-Michel Coron. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 75(2):155–188, 1996.
- [11] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs*, Providence, Rhode Island, 2007.

- [12] Jean-Michel Coron and Emmanuelle Crépeau. Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 6(3):367–398, 2004.
- [13] Jean-Michel Coron and Andrei V. Fursikov. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian J. Math. Phys.*, 4(4):429–448, 1996.
- [14] Thierry Dauxois and Michel Peyrard. *Physics of solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [15] Olivier Glass. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(9):987–992, 1997.
- [16] Olivier Glass. Exact boundary controllability of 3-D Euler equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5:1–44 (electronic), 2000.
- [17] Olivier Glass and Sergio Guerrero. Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit. *Asymptotic Analysis* 60(1-2): 61–100, 2008.
- [18] Tosio Kato. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. In *Studies in applied mathematics*, volume 8 of *Adv. Math. Suppl. Stud.*, pages 93–128. Academic Press, New York, 1983.
- [19] Diederik Johannes Korteweg and Gustav de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.*, 39:422–443, 1895.
- [20] Jacques Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1*. Travaux et recherches mathématiques. Dunod, Paris, 1968.
- [21] Ademir Fernando Pazoto. Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11:473–486, 2005.
- [22] Gustavo Perla Menzala, Carlos Frederico Vasconcellos, and Enrique Zuazua. Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping. *Quart. Appl. Math.*, 60(1):111–129, 2002.
- [23] Lionel Rosier. Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2:33–55 (electronic), 1997.
- [24] Lionel Rosier. Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation—a numerical study. In *Control and partial differential equations (Marseille-Luminy, 1997)*, volume 4 of *ESAIM Proc.*, pages 255–267 (electronic). Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1998.

- [25] Lionel Rosier. Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation on the half-line. *SIAM J. Control Optim.*, 39(2):331–351 (electronic), 2000.
- [26] Lionel Rosier. Control of the surface of a fluid by a wavemaker. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(3):346–380 (electronic), 2004.
- [27] Lionel Rosier and Bing-Yu Zhang. Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain. *SIAM J. Control Optim.*, 45(3):927–956, 2006.
- [28] David L. Russell and Bing-Yu Zhang. Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(9):3643–3672, 1996.
- [29] Gerald Beresford Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.
- [30] Bing-Yu Zhang. Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation. *SIAM J. Control Optim.*, 37(2):543–565 (electronic), 1999.

Chapitre 4

Contrôlabilité globale à zéro d'un système de Navier-Stokes avec conditions de Navier

In this paper, we deal with a two dimensional Navier-Stokes system in a rectangle with Navier slip boundary conditions on the horizontal sides. We establish the global null controllability of the system by controlling the normal component and the vorticity of the velocity on the vertical sides. The linearized control system around zero is controllable but one does not know how to deduce global controllability results for the nonlinear system. Our proof uses the return method together with a local exact controllability result by Fursikov and Imanuvilov.

16 Statement of the result

Let $L > 0$ and let $\Omega := (0, L) \times (-1, 1)$. Let Γ the boundary of Ω and let Γ_0 be the subset of Γ defined by $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$ with $\Gamma_0^+ := \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma; x_2 = 1\}$ and $\Gamma_0^- := \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma; x_2 = -1\}$. We denote by n the outward unit normal vector field on Γ and by τ the unit tangent vector field on Γ such that (τ, n) is a direct basis of $\mathbb{R}^2$. In the following, ∂_i denotes the partial derivatives with respect to x_i , $i \in \{1, 2\}$. Moreover, for $y = (y_1, y_2) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $z = (z_1, z_2) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\operatorname{div} y : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$\operatorname{div} y = \partial_1 y_1 + \partial_2 y_2$$

and $(y \cdot \nabla)z : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ is defined by

$$(y \cdot \nabla)z = (y_1 \partial_1 z_1 + y_2 \partial_2 z_1, y_1 \partial_1 z_2 + y_2 \partial_2 z_2).$$

We are interested in the problem of the global null controllability of a Navier-Stokes system with Navier slip boundary conditions: let $T > 0$ and let $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ satisfy

$$\operatorname{div} y^0 = 0 \text{ in } \Omega, \quad (16.1)$$

$$y^0 \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_0, \quad (16.2)$$

does there exist $y = (y_1, y_2) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $p : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \quad (16.3)$$

$$\operatorname{div} y = 0 \text{ in } (0, T) \times \Omega, \quad (16.4)$$

$$y \cdot n = 0 \text{ on } (0, T) \times \Gamma_0, \quad (16.5)$$

$$\partial_1 y_2 + \partial_2 y_1 = 0 \text{ on } (0, T) \times \Gamma_0, \quad (16.6)$$

$$y(0, \cdot) = y^0 \text{ in } \Omega, \quad (16.7)$$

$$y(T, \cdot) = 0 \text{ in } \Omega? \quad (16.8)$$

If such a (y, p) exists, one says that the Navier-Stokes (NS) control system (16.3)-(16.6) is globally null controllable.

Remark 16.1. a) The controls are not apparent in the previous formulation but one can take both $y \cdot n$ and $\operatorname{curl} y := \partial_1 y_2 - \partial_2 y_1$ on $\Gamma \setminus \Gamma_0$.

b) One can note that from the fact that Γ_0 is flat, the boundary conditions (16.5) and (16.6) are equivalent to the following ones

$$\begin{cases} y \cdot n = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} y = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_0. \end{cases}$$

c) Let us recall that the fact that $\operatorname{div} u = 0$ implies that $u \cdot n = 0$ makes sense even if $u \in L^2(\Omega)^2$. Indeed, this comes from the following equalities, which hold for any scalar function $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$:

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \cdot \phi &= \int_{\Omega} (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) \phi \\ &= \int_{\partial\Omega} (u \cdot n) \phi - \int_{\Omega} (u_1 \partial_1 \phi + u_2 \partial_2 \phi). \end{aligned}$$

d) The first boundary condition is the slip condition which says that the fluid does not penetrate the boundary. The second one is a special case of the Navier slip boundary condition ([20]). Indeed, this boundary condition usually takes the following form

$$\bar{\sigma} y \cdot \tau + (1 - \bar{\sigma}) n_i (\partial_j y_i + \partial_i y_j) \tau_j = 0 \text{ on } \Gamma_0, \quad (16.9)$$

where $\bar{\sigma}$ is a constant in $[0, 1]$, $n = (n_1, n_2)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ and where we have used the usual sommation convention. Note that we consider here the boundary condition (16.9) with $\bar{\sigma} = 0$ which corresponds to the case where the fluid slips on the wall without friction. This is an appropriate physical model for some flow problems ([12]).

Let us now mention some of the previous results regarding our problem. The case of the local exact controllability to the trajectories for the Navier-Stokes equations with boundary and local distributed control has been studied by A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov in [11], by O. Yu. Imanuvilov in [16], by E. Fernandez-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov and J.-P. Puel in [10] and by S. Guerrero in [15] in the case of Navier slip boundary conditions. On the other hand, J.-M. Coron in [5] proved the global approximate controllability for the 2-D Navier-Stokes equations with Navier slip boundary conditions. His proof relies on the 'return method' introduced by him in [3] and used by him in [4, 6] and by O. Glass in [13, 14] to prove global controllability results for the Euler equation of incompressible inviscid fluids. Then, in [8], combining results on global approximate controllability and local controllability results, J.-M. Coron and A. Fursikov obtained the global exact controllability for the Navier-Stokes system on a 2-D manifold without boundary. More recently, O. Yu Imanuvilov and J.-P. Puel have proved in [17] a global controllability result for the 2-D Burgers equation. See also [7] and the references therein for other applications of the return method to the controllability of nonlinear partial differential equations.

The main result of the paper is the following

Theorem 16.2. *The control system (16.3)-(16.6) is globally null controllable.*

One can note that the linearized system around $(0, 0)$ of the control system (16.3)-(16.6) is controllable. Consequently, one can expect that the non linear control system is, at least, locally controllable. However, one does not know how to obtain a global controllability result. To overcome this problem, the idea is to use the so-called return method which consists in looking for $(\check{y}, \check{p})$, such that (16.3)-(16.6) hold for $y = \check{y}$ and $p = \check{p}$,

$$\check{y}(0, \cdot) = \check{y}(T, \cdot) = 0 \text{ in } \Omega$$

and such that the linearized control system around $(\check{y}, \check{p})$ has, in some sense, a better controllability. Using this method, we obtain a global approximate controllability

result (Figure 1 parts (b)-(d)). We end the proof of the theorem using a local exact controllability result due to A. Fursikov and O. Yu Imanuvilov (see [11]) (Figure 1 part (e)).

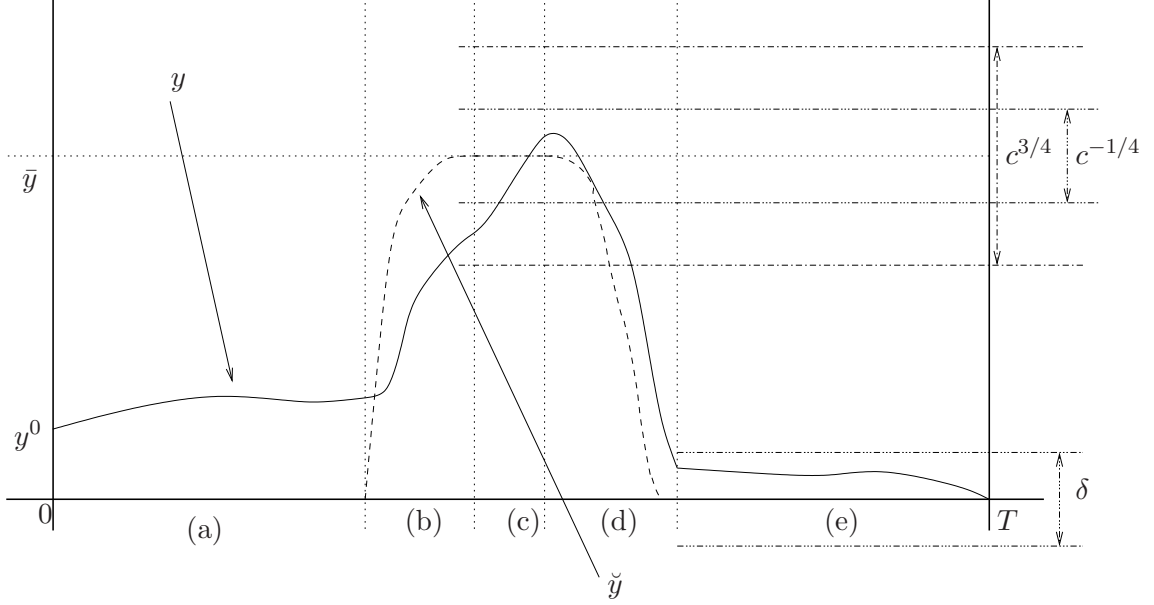


Figure 1: Sketch of proof

Remark 16.3. *As we said before, using the return method, J.-M. Coron also obtains in [5] a global approximate controllability result for the 2-D Navier-Stokes equations with Navier slip boundary conditions. The main difference between his result and the global approximate controllability result we establish here remains on the fact that we only need boundary controls whereas J.-M. Coron used controls acting both on the boundary and on a part of the domain.*

Acknowledgments The author deeply thanks J.-M. Coron and S. Guerrero for fruitful discussions and useful comments.

17 Preliminary results

17.1 Well posedness and smoothing effect

In this section we recall a result of existence and uniqueness as well as a regularity property for NS systems that we shall use later. Let $T > 0$, let $\mathbb{S} := \mathbb{R}/7L\mathbb{Z}$ and let

$$\tilde{\Omega} := \mathbb{S} \times (-1, 1). \quad (17.1)$$

From now on, we identify a point $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \tilde{\Omega}$ with its representative x which lives in $\hat{\Omega} := [-3L, 4L] \times (-1, 1)$ and for commodity, we write x instead of $\bar{x}$. In the same way, we denote

$$L^2(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in L^2(\hat{\Omega})^2\},$$

$$H^1(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^1(\hat{\Omega})^2 : y(-3L, x_2) = y(4L, x_2) \forall x_2 \in (-1, 1)\},$$

$$H^2(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^2(\hat{\Omega})^2 : \partial_1^k y(-3L, x_2) = \partial_1^k y(4L, x_2) \forall x_2 \in (-1, 1) \text{ and } k = 0, 1\},$$

and, for any $\epsilon \in (0, 1/2)$,

$$H^{2+\epsilon}(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^{2+\epsilon}(\hat{\Omega})^2 : \partial_1^k y(-3L, x_2) = \partial_1^k y(4L, x_2) \forall x_2 \in (-1, 1) \text{ and } k = 0..2\},$$

$$H^{3+\epsilon}(\tilde{\Omega})^2 := \{y \in H^{3+\epsilon}(\hat{\Omega})^2 : \partial_1^k y(-3L, x_2) = \partial_1^k y(4L, x_2) \forall x_2 \in (-1, 1) \text{ and } k = 0..3\}.$$

We denote by $\tilde{\Gamma}$ the boundary of $\tilde{\Omega}$. One can note that $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^+ \cup \tilde{\Gamma}^-$ with $\tilde{\Gamma}^+ := \{x = (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, x_2 = 1\}$ and $\tilde{\Gamma}^- := \{x = (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, x_2 = -1\}$. Let now

$$H := \{y \in L^2(\tilde{\Omega})^2, \operatorname{div} y = 0 \text{ in } \tilde{\Omega}, y \cdot n = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma}\}. \quad (17.2)$$

One can prove the following theorem exactly as for the usual Navier-Stokes equations (i.e. with the usual full Dirichlet boundary conditions) (see e.g. [19] pages 129-130)

Theorem 17.1. *For any $y^0 \in H$, there exists a unique $y \in (C^0([0, T], L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T; H^1(\tilde{\Omega})))^2$ solution of*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} y = 0 \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ y \cdot n = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} y = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ y(0, \cdot) = y^0 \text{ in } \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (17.3)$$

for some $p \in L^2(0, T; L^2(\tilde{\Omega}))$ which is also unique up to a function depending only on time.

Then one can also prove the following regularity result (see the Appendix for a sketch of the proof)

Proposition 17.2. *The solution y of system (17.3) has the following regularity property*

$$y \in C^0((0, T]; H^3(\tilde{\Omega}))^2.$$

Moreover, there exist $\eta > 0$ and $\alpha > 0$ such that for any $y^0 \in H$ with $|y^0|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} \leq \eta$, for any $t \in [T/3, 2T/3]$,

$$|y(t, \cdot)|_{H^3(\tilde{\Omega})^2} \leq \alpha |y^0|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}. \quad (17.4)$$

17.2 Local null controllability (Figure 1 part (e))

Let $\omega \subset \tilde{\Omega}$ be defined by

$$\omega := \{x \in \tilde{\Omega}, -5L/2 < x_1 < -L/2 \text{ and } -1/2 < x_2 < 1/2\} \quad (17.5)$$

and let $1_\omega : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ denotes the characteristic function of ω , i.e. $1_\omega(x) := 0$ if $x \in \tilde{\Omega} \setminus \omega$, $1_\omega(x) := 1$ if $x \in \omega$. We introduce the following space, usual in the context of problems modelling incompressible fluids,

$$W := \{y \in H^1(\tilde{\Omega})^2, \operatorname{div} y = 0 \text{ in } \tilde{\Omega}, y \cdot n = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma}\}.$$

One can prove in a manner similar to the proof of [11, Theorem 1.2 page 98] the following result

Proposition 17.3. *For any $T > 0$ there exists $\delta > 0$ such that for any $\tilde{y} \in H^2(\tilde{\Omega})^2 \cap W$ which satisfies*

$$\operatorname{curl} \tilde{y} = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma}$$

and

$$|\tilde{y}|_{H^2(\tilde{\Omega})^2 \cap W} \leq \delta, \quad (17.6)$$

there exists a local distributed control $v \in L^2(0, T/3; L^2(\tilde{\Omega}))$ such that the corresponding solution $z \in (C^0([0, T/3]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T/3; H^1(\tilde{\Omega}))^2)$ to

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + (z \cdot \nabla)z = -\nabla p^z + v1_\omega \text{ in } (0, T/3) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} z = 0 \text{ in } (0, T/3) \times \tilde{\Omega}, \\ z \cdot n = 0 \text{ on } (0, T/3) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} z = 0 \text{ on } (0, T/3) \times \tilde{\Gamma}, \\ z(0, \cdot) = \tilde{y} \text{ in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (17.7)$$

exists and satisfies

$$z(T/3, x) = 0 \text{ in } \tilde{\Omega},$$

for some $p^z \in L^2(0, T/3; L^2(\tilde{\Omega}))$.

18 Proof of Theorem 16.2

Let $T > 0$. We assume for the moment that the following proposition holds

Proposition 18.1. *For any $\epsilon > 0$, for any $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ which satisfies (16.1)-(16.2), there exists $\delta_0 \in (0, T/3)$ and there exists*

$$(y, p) \in (C^0([0, \delta_0]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \delta_0; H^1(\Omega)))^2 \times L^2(0, \delta_0; L^2(\Omega))$$

solution of

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p \text{ in } (0, \delta_0) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 \text{ in } (0, \delta_0) \times \Omega, \\ y \cdot n = 0 \text{ on } (0, \delta_0) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} y = 0 \text{ on } (0, \delta_0) \times \Gamma_0, \\ y(0, \cdot) = y^0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \quad (18.1)$$

which moreover satisfies

$$|y(\delta_0, \cdot)|_{L^2(\Omega)^2} \leq \epsilon. \quad (18.2)$$

Before beginning the proof of Theorem 16.2, let us prove the following useful lemma

Lemma 18.2. *There exists a continuous linear operator Π which extends any function $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ which satisfies (16.1) and (16.2) by a function $\Pi(y^0) \in H^s(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ and any function $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$ which satisfies (16.4) and (16.5) by a function $\Pi(y) \in C^0([0, T]; H^s(\tilde{\Omega}))^2$ which satisfies $\operatorname{div} \Pi(y) = 0$ in $\tilde{\Omega}$ and $\Pi(y) \cdot n = 0$ on $\tilde{\Gamma}$, for any $s \in [0, 3]$. If $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ (resp. $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$), for any $s \in (2, 3]$, moreover*

satisfies $\text{curl} y^0 = 0$ on Γ_0 (resp. $\text{curl} y = 0$ on $(0, T) \times \Gamma_0$) then $\text{curl}(\Pi(y^0)) = 0$ on $\tilde{\Gamma}$ (resp. $\text{curl}(\Pi(y)) = 0$ on $(0, T) \times \tilde{\Gamma}$). Furthermore, this operator Π can be constructed such that

$$\text{curl}(\Pi(y^0)) = 0 \text{ in } (-3L, -L/4) \times (-1, 1) \cup (2L, 4L) \times (-1, 1), \quad (18.3)$$

(resp.

$$\text{curl}(\Pi(y)) = 0 \text{ in } (-3L, -L/4) \times (-1, 1) \cup (2L, 4L) \times (-1, 1),) \quad (18.4)$$

for any $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ which satisfies (16.1) and (16.2) (resp. $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$ which satisfies (16.4) and (16.5)) and for any $s \in (2, 3]$. Finally, for any $s \in [0, 3]$, there exists $C_s > 0$ such that

$$|\Pi(y^0)|_{H^s(\tilde{\Omega})^2} \leq C_s |y^0|_{H^s(\Omega)^2}, \quad (18.5)$$

(resp.

$$|\Pi(y)|_{C^0([0, T]; H^s(\tilde{\Omega})^2} \leq C_s |y|_{C^0([0, T]; H^s(\Omega)^2)}, \quad (18.6)$$

for any $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ (resp. $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$).

Proof of Lemma 18.2. Let $s \in [0, 3]$. For simplicity, we prove Lemma 18.2 in the case where $y^0 \in H^s(\Omega)^2$ satisfy (16.1)-(16.2). The case where $y \in C^0([0, T]; H^s(\Omega))^2$ satisfies (16.4) and (16.5) will follow, taking $(\Pi y)(t, \cdot) = \Pi(y(t, \cdot))$. From (16.1) and the fact that Ω is simply connected, there exists a unique $\phi \in H^{s+1}(\Omega)$ such that

$$y^0 = \nabla^\perp \phi \text{ in } \Omega, \quad (18.7)$$

$$\int_{\Omega} \phi = 0, \quad (18.8)$$

where we denote $\nabla^\perp := (\partial_2, -\partial_1)$. The first step consists in the extension of ϕ to a larger domain. To this aim, we recall the following result

Lemma 18.3. *The two following systems*

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -c_0 - 2c_1 - 4c_2 - 8c_3 = 1 \\ c_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3 = 1 \\ -c_0 - 8c_1 - 64c_2 - 512c_3 = 1 \end{cases} \quad (18.9)$$

and

$$\begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 + d_3 = 1 \\ d_0 + 2d_1 + 4d_2 + 8d_3 = 1 \\ d_0 + 4d_1 + 16d_2 + 64d_3 = 1 \\ d_0 + 8d_1 + 64d_2 + 512d_3 = 1 \end{cases} \quad (18.10)$$

have respectively one and only one solution $(c_i)_{0 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^4$ and $(d_i)_{0 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^4$.

Proof of Lemma 18.3. One recognizes two Vandermonde' systems. ■

Then, let $\hat{\phi} \in H^{s+1}((-L/4, 5L/4) \times (-1, 1))$ be defined by

$$\hat{\phi}((x_1, x_2)) := \begin{cases} \sum_{i=0}^3 c_i \phi((-2^i x_1, x_2)) & \text{if } (x_1, x_2) \in (-L/4, 0) \times (-1, 1), \\ \phi((x_1, x_2)) & \text{if } (x_1, x_2) \in (0, L) \times (-1, 1), \\ \sum_{i=0}^3 d_i \phi((2^i(x_1 - L), x_2)) & \text{if } (x_1, x_2) \in (L, 5L/4) \times (-1, 1). \end{cases} \quad (18.11)$$

One easily sees that the fact that $\hat{\phi} \in H^{s+1}((-L/4, 5L/4) \times (-1, 1))$ comes from Lemma 18.3. We use the same process several times in order to obtain a function that we still denote by $\hat{\phi}$ but which is now defined on $(-3L, 4L) \times (-1, 1)$. Thus, we have constructed $\hat{\phi} \in H^{s+1}((-3L, 4L) \times (-1, 1))$ such that $\hat{\phi} \equiv \phi$ on Ω . Now, from (16.2) and (18.7), there exist c_0 and $c_1 \in \mathbb{R}$ such that

$$\phi(x) = c_0, \quad x \in \Gamma_0^+, \quad (18.12)$$

$$\phi(x) = c_1, \quad x \in \Gamma_0^-. \quad (18.13)$$

Let

$$\theta(x) := \frac{c_0 - c_1}{2} x_2 + \frac{c_0 + c_1}{2}, \quad x = (x_1, x_2) \in (-3L, 4L) \times (-1, 1) \quad (18.14)$$

and let $\chi \in C^\infty([-3L, 4L])$ satisfy

$$0 \leq \chi(x_1) \leq 1, \quad x_1 \in [-3L, 4L], \quad (18.15)$$

$$\chi(x_1) = 1 \text{ if } x_1 \in [-L/16, 17L/16], \quad (18.16)$$

$$\chi(x_1) = 0 \text{ if } x_1 \in [-3L, -L/8] \cup [9L/8, 4L]. \quad (18.17)$$

We finally define $\tilde{\phi}$ on $\tilde{\Omega}$ by

$$\tilde{\phi}(x) := \chi(x_1) \hat{\phi}(x) + (1 - \chi(x_1)) \theta(x) \text{ for any } x \in \tilde{\Omega}.$$

Using (18.11)-(18.17), one easily sees that $\tilde{\phi} \in H^{s+1}(\tilde{\Omega})$ and that

$$\tilde{\phi} = \phi \text{ in } \Omega,$$

$$\tilde{\phi} = c_0 \text{ on } \tilde{\Gamma}^+,$$

$$\tilde{\phi} = c_1 \text{ on } \tilde{\Gamma}^-,$$

$$\Delta \tilde{\phi} = 0 \text{ in } (-3L, -L/8) \times (-1, 1) \cup (9L/8, 4L) \times (-1, 1).$$

Consequently, if we define $\Pi(y^0)$ by

$$\Pi(y^0) := \nabla^\perp \tilde{\phi}$$

it follows that $\Pi(y^0) \in H^s(\tilde{\Omega}) \cap H$, where H is defined by (17.2) and also that $\Pi(y^0) = y^0$ in Ω . One can note that the linearity of Π comes from (18.8). The end of the proof of Lemma 18.2 follows easily from the construction of Π . $\blacksquare$

Let us now end the proof of Theorem 16.2. Let $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ satisfy (16.1)-(16.2), let η be defined in Proposition 17.2 and let δ be defined by (17.6). We denote by

$$\epsilon := \min(\delta, \eta). \quad (18.18)$$

From Proposition 18.1, there exists $\delta_0 \in (0, T/3)$ and there exists a solution y of (18.1) which satisfies

$$|y(\delta_0, \cdot)|_{L^2(\Omega)^2} \leq \epsilon/(C_0\alpha), \quad (18.19)$$

where α is defined in Proposition 17.2 and C_0 is defined in Lemma 18.2.

Let $\tilde{y}$ be the solution of

$$\begin{cases} \tilde{y}_t - \Delta \tilde{y} + (\tilde{y} \cdot \nabla) \tilde{y} = -\nabla \tilde{p} & \text{in } (0, \frac{2T}{3} - \delta_0) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} \tilde{y} = 0 & \text{in } (0, \frac{2T}{3} - \delta_0) \times \tilde{\Omega}, \\ \tilde{y} \cdot n = 0 & \text{on } (0, \frac{2T}{3} - \delta_0) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} \tilde{y} = 0 & \text{on } (0, \frac{2T}{3} - \delta_0) \times \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{y}(0, \cdot) = \Pi(y(\delta_0, \cdot)) & \text{in } \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

where Π is defined in Lemma 18.2. From Proposition 17.2, Lemma 18.2, (18.18) and (18.19),

$$|\tilde{y}(\frac{2T}{3} - \delta_0, \cdot)|_{H^2(\tilde{\Omega})^2} \leq \epsilon. \quad (18.20)$$

Then, from Proposition 17.3 and (18.18), there exists a control v and a solution z to (17.7) with initial condition $\tilde{y} := \tilde{y}(\frac{2T}{3} - \delta_0, \cdot)$. Let now (Y, P) be defined on $(0, T) \times \Omega$ by

$$Y(t, x) := \begin{cases} y(t, x) & \text{if } (t, x) \in [0, \delta_0] \times \Omega, \\ \tilde{y}(t - \delta_0, x) & \text{if } (t, x) \in [\delta_0, 2T/3] \times \Omega, \\ z(t - 2T/3, x) & \text{if } (t, x) \in [2T/3, T] \times \Omega \end{cases}$$

and

$$P(t, x) := \begin{cases} p(t, x) & \text{if } (t, x) \in [0, \delta_0] \times \Omega, \\ \tilde{p}(t - \delta_0, x) & \text{if } (t, x) \in [\delta_0, 2T/3] \times \Omega, \\ p^z(t - 2T/3, x) & \text{if } (t, x) \in [2T/3, T] \times \Omega. \end{cases}$$

One easily deduces from the previous computations and the fact that $\omega \cap \Omega = \emptyset$ (see (17.5)) that (Y, P) is solution of

$$\begin{cases} Y_t - \Delta Y + (Y \cdot \nabla) Y = -\nabla P & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} Y = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ Y \cdot n = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} Y = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma_0, \\ Y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega, \\ Y(T, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

This ends the proof of Theorem 16.2. ■

19 Proof of proposition 18.1

The proof of this proposition relies on the return method. We need to find a solution of our NS control system with ‘good’ controllability properties around it. This trajectory $(\check{y}, \check{p})$ consists in three pieces (see Figure 1). Let us briefly explain our choice. We first introduce a positive constant c whose value will be fixed later on. Then

$$(\bar{y}, \bar{p}) := ((c, 0), 0) \quad (19.1)$$

is obviously solution of the system (16.3)-(16.6). It corresponds to the second piece of the trajectory $(\check{y}, \check{p})$ (Figure 1 part (c)). The first piece (Figure 1 part (b)) relies $(0, 0)$ to $\bar{y}$ whereas the third and last piece (Figure 1 part (d)) relies $\bar{y}$ to $(0, 0)$. Both are chosen independent with respect to the space variable. We will not verify the exact controllability of the linearized system around $(\check{y}, \check{p})$ - which indeed holds - but we will directly prove that for a good choice of the constant c , our hopes were justified, that is, using this particular trajectory, we can prove a suitable approximate controllability result for our nonlinear NS control system.

We have the following lemma that says that we only have to prove Proposition 18.1 in the case of a regular initial condition (Figure 1 part (a))

Lemma 19.1. *Proposition 18.1 holds if the following property holds*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{For any } \epsilon > 0, \text{ for any } z^0 \in H^3(\tilde{\Omega})^2 \cap H, \text{ there exists } \tilde{\delta}_0 \in (0, T/6) \text{ and there exists} \\ (y, p) \in (C^0([0, \tilde{\delta}_0]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \tilde{\delta}_0; H^1(\Omega)))^2 \times L^2(0, \tilde{\delta}_0; L^2(\Omega)) \text{ solution of} \\ y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p \text{ in } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Omega, \\ \operatorname{div} y = 0 \text{ in } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Omega, \\ y \cdot n = 0 \text{ on } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} y = 0 \text{ on } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Gamma_0, \\ y(0, \cdot) = z^0 \text{ in } \Omega, \\ \text{and which satisfies } |y(\tilde{\delta}_0, \cdot)|_{L^2(\Omega)^2} \leq \epsilon. \end{array} \right. \quad (19.2)$$

Proof of Lemma 19.1. Let $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ satisfy (16.1)-(16.2). From Proposition 17.2, the solution $(\tilde{y}, \tilde{p})$ of

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_t - \Delta \tilde{y} + (\tilde{y} \cdot \nabla)\tilde{y} = -\nabla \tilde{p} \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} \tilde{y} = 0 \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \tilde{y} \cdot n = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} \tilde{y} = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{y}(0, \cdot) = \Pi(y^0) \text{ in } \tilde{\Omega}, \end{array} \right.$$

where Π is defined in Lemma 18.2, satisfies $\tilde{y} \in C^0((0, T]; H^3(\tilde{\Omega}))^2$. We now apply property (19.2) for $z^0 := \tilde{y}(T/6, \cdot) \in H^3(\tilde{\Omega})^2$. There exists $\tilde{\delta}_0 \in (0, T/6)$ and there exists (y, p) defined on $(0, \tilde{\delta}_0) \times \Omega$ such that $|y(\tilde{\delta}_0, \cdot)|_{L^2(\Omega)^2} \leq \epsilon$. This ends the proof of Lemma 19.1 since $T/6 + \tilde{\delta}_0 < T/3$. ■

Thus instead of proving Proposition 18.1, we will prove property (19.2).

19.1 First step: construction of a trajectory of NS which starts at y^0 and arrives close to $\bar{y}$ (Figure 1 part (b))

Lemma 19.2. *There exists $K > 0$ such that for any $y^0 \in H^3(\tilde{\Omega})^2 \cap H$, there exists $\tilde{c} > 0$, such that for any $c \geq \tilde{c}$, there exist $T_2 \in (0, T/18)$, $\tilde{\phi} \in C^\infty([0, T_2] \times \tilde{\Omega})$ such that*

$$\tilde{\phi}(t, x) = 0, (t, x) \in [0, T_2] \times \tilde{\Omega} \quad (19.3)$$

and a solution

$$(y, p) \in (C^0([0, T_2]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})))^2 \times L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$$

of

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p + \tilde{\phi} & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ y \cdot n = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} y = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (19.4)$$

such that

$$|y(T_2, \cdot) - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq Kc^{3/4}, \quad (19.5)$$

where $\bar{y}$ is defined by (19.1).

Proof of Lemma 19.2. Let $0 < T_2 < T/18$. We construct the first piece (f, p^f) of the trajectory $(\check{y}, \check{p})$. We want f to satisfy the following conditions

$$\begin{aligned} f(0, x) &= f_t(T_2/2, x) = 0, \quad x \in \tilde{\Omega}, \\ f(t, x) &= (c, 0), \quad (t, x) \in [T_2/2] \times \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

The simplest way to do this consists in looking for a quadratic in time function. Let us be more precise. Let $\phi \in C^\infty([-3L; 4L])$ be a non-negative function which vanishes in a neighborhood of $-3L$ and $4L$ and is such that

$$\phi \equiv 0 \text{ in } \bar{\Omega}, \quad (19.6)$$

$$\int_{-3L}^{4L} \phi = 1. \quad (19.7)$$

We introduce (f, p^f) defined on $(0, T_2) \times \tilde{\Omega}$ by

$$f(t, x) := \begin{cases} \left(\frac{4c}{T_2} t \left(1 - \frac{t}{T_2}\right), 0 \right) & \text{if } t \in [0, T_2/2], \\ (c, 0) & \text{if } t \in [T_2/2, T_2] \end{cases} \quad (19.8)$$

and

$$p^f(t, x) := \begin{cases} \frac{4c}{T_2} \left(1 - \frac{2t}{T_2}\right) (7L \int_{-3L}^{x_1} \phi(s) ds - x_1) & \text{if } t \in [0, T_2/2], \\ 0 & \text{if } t \in [T_2/2, T_2]. \end{cases}$$

One easily sees that

$$(f, p^f) \in (C^0([0, T_2]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})))^2 \times L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$$

satisfies

$$\begin{cases} f_t - \Delta f + (f \cdot \nabla)f = -\nabla p^f + 7Lf_t\phi(x_1) & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} f = 0 & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ f \cdot n = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} f = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ f(0, \cdot) = 0 & \text{in } \tilde{\Omega}, \\ f(t, \cdot) = \bar{y} & \text{in } (T_2/2, T_2) \times \tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (19.9)$$

Let now $(Y, P) \in (C^0([0, T_2]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})))^2 \times L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$ be solution of

$$\begin{cases} Y_t - \Delta Y + (Y \cdot \nabla)Y + (f \cdot \nabla)Y = -\nabla P & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} Y = 0 & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ Y \cdot n = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} Y = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ Y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (19.10)$$

for some $P \in L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$. Our aim is to estimate the norm of $Y(t, \cdot)$, $t \in (0, T_2)$, in some well chosen space. Indeed, as one shall see later, if one then defines $y := f + Y$, one sees firstly that y is solution of (19.4) for some $\tilde{\phi}$ depending on f and ϕ and for some $p \in L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$, and secondly that for any time $t \in (T_2/2, T_2)$, one obtains from the definition of f (see in particular the last line of (19.9)) and the estimation to be made on $|Y(t, \cdot)|$ an estimation of $|y(t, \cdot) - \bar{y}(t, \cdot)|$ in the same space. Consequently, we begin with multiplying the first equation in (19.10) by $2Y$ and integrate on $\tilde{\Omega}$. We get

$$\begin{aligned} 2 \int_{\tilde{\Omega}} Y Y_t - 2 \int_{\tilde{\Omega}} Y \Delta Y + 2 \int_{\tilde{\Omega}} Y (Y \cdot \nabla)Y + 2 \int_{\tilde{\Omega}} Y (f \cdot \nabla)Y \\ = -2 \int_{\tilde{\Omega}} Y \nabla P. \end{aligned}$$

Using integrations by parts together with (19.10), we obtain

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}} |Y|^2 + 2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla Y|^2 + 2 \int_{\tilde{\Omega}} Y (f \cdot \nabla)Y = 0. \quad (19.11)$$

Moreover,

$$2 \int_{\tilde{\Omega}} Y (f \cdot \nabla)Y \leq |f|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{\tilde{\Omega}} |Y|^2 + \epsilon \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla Y|^2 \right). \quad (19.12)$$

Taking $\epsilon = 1/|f|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}$, using (19.8), (19.11) and (19.12), we get, for any time $t \in (0, T_2]$,

$$\frac{d}{dt} |Y(t, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 \leq Cc^2 |Y(t, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2,$$

where, above and until the end, C denotes various positive constants that depend only on $\tilde{\Omega}$. Consequently, we deduce from Gronwall's lemma that for any time $t \in (0, T_2]$,

$$|Y(t, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 \leq |Y(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 e^{Cc^2t}.$$

Let us now introduce $\omega := \operatorname{curl} Y = \partial_1 Y_2 - \partial_2 Y_1$. From (19.10), ω satisfies the following system,

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta \omega + (Y \cdot \nabla) \omega + (f \cdot \nabla) \omega = 0 & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \omega = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \omega(0, \cdot) = \operatorname{curl} y^0 & \text{in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (19.13)$$

We multiply the first equation of (19.13) by 2ω and integrate on $\tilde{\Omega}$. Using an integration by parts we obtain

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}} |\omega|^2 + 2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega|^2 = 0,$$

i.e., for any time $t \in (0, T_2]$,

$$|\omega(t, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + 2|\nabla \omega|_{L^2(0,t;L^2(\tilde{\Omega}))}^2 = |\omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2. \quad (19.14)$$

Consequently,

$$\omega \in L^\infty(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega})).$$

Thus $\Delta Y = -\nabla^\perp \omega \in L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))^2$. A classical result (see the Appendix) gives that $Y \in L^2(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))^2$ and

$$|Y|_{L^2(0,T_2;H^2(\tilde{\Omega}))^2} \leq C|\Delta Y|_{L^2(0,T_2;L^2(\tilde{\Omega}))^2}. \quad (19.15)$$

Then, if we now multiply the first equation of (19.13) by $2\omega_t$ and integrate on $\tilde{\Omega}$, we get

$$2 \int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t|^2 - 2 \int_{\tilde{\Omega}} \Delta \omega \omega_t + 2 \int_{\tilde{\Omega}} (Y \cdot \nabla) \omega \omega_t + 2 \int_{\tilde{\Omega}} (f \cdot \nabla) \omega \omega_t = 0.$$

Using an integration by parts and the fact that $\omega = 0$ on the boundary, we compute

$$-2 \int_{\tilde{\Omega}} \Delta \omega \omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega|^2.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} -2 \int_{\tilde{\Omega}} (Y \cdot \nabla) \omega \omega_t &\leq 2|Y|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega|^2 + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t|^2, \\ 2 \int_{\tilde{\Omega}} (f \cdot \nabla) \omega \omega_t &\leq 2|f|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega|^2 + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t|^2 \\ &\leq 2c^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega|^2 + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t|^2. \end{aligned}$$

Consequently

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega|^2 \leq 2(|Y|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 + c^2) \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega|^2.$$

Multiplying the last inequality by $e^{-2(\int_0^s |Y|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 + c^2)s}$, where $s \in (0, T_2]$, we get

$$\begin{aligned} e^{-2(\int_0^s |Y(\tau, \cdot)|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 d\tau + c^2 s)} \int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t(s, \cdot)|^2 \\ + \frac{d}{ds} (e^{-2(\int_0^s |Y(\tau, \cdot)|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 d\tau + c^2 s)} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega(s, \cdot)|^2) \leq 0. \end{aligned}$$

In particular, for any time $t \in (0, T_2]$,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-2(\int_0^s |Y(\tau, \cdot)|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 d\tau + c^2 s)} \int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t(s, \cdot)|^2 \\ + e^{-2(\int_0^t |Y(\tau, \cdot)|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 d\tau + c^2 t)} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega(t, \cdot)|^2 \leq \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega(0, \cdot)|^2 \end{aligned}$$

and thus,

$$\int_0^t \int_{\tilde{\Omega}} |\omega_t(s, \cdot)|^2 + \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega(t, \cdot)|^2 \leq e^{2(\int_0^t |Y(\tau, \cdot)|_{L^\infty(\tilde{\Omega})^2}^2 + c^2 t)} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \omega(0, \cdot)|^2.$$

Using now (19.14) and (19.15) we obtain,

$$\begin{aligned} |w_t|_{L^2(0, t; L^2(\tilde{\Omega}))}^2 + |\nabla \omega(t, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 &\leq |\nabla \omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 e^{2(c^2 t + C \int_0^t |Y|_{H^2(\tilde{\Omega})^2}^2)} \\ &\leq |\nabla \omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 e^{2(c^2 t + C \int_0^t |\Delta Y|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2)} \\ &\leq |\nabla \omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 e^{2(c^2 t + C \int_0^t |\nabla \omega|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2)} \\ &\leq |\nabla \omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 e^{2c^2 t + C |\omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2} \end{aligned} \quad (19.16)$$

for any time $t \in (0, T_2]$ and we deduce from (19.16) that

$$\omega \in H^1(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega}))$$

and thus (see Lemma 20.1),

$$Y \in (H^1(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega})))^2$$

with the following estimate

$$|Y|_{(H^1(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega})))^2}^2 \leq C |\nabla \omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 e^{2c^2 T_2 + C |\omega(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2}.$$

From the last inequality, if we take

$$c \geq \max(1, |y^0|_{H^3(\tilde{\Omega})^2}^2 e^{C |y^0|_{H^3(\tilde{\Omega})^2}^2}) \quad (19.17)$$

and

$$T_2 \leq \min\left(\frac{T}{18}, \frac{1}{2c^2}\right),$$

then

$$|Y|_{(L^\infty(0,T_2;H^2(\tilde{\Omega})) \cap H^1(0,T_2;H^1(\tilde{\Omega})))^2} \leq C\sqrt{c}. \quad (19.18)$$

The following step consists in proving that $\omega \in L^2(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))$. To this aim, we rewrite (19.13) in the following way

$$\begin{cases} -\Delta\omega = -\omega_t - (Y \cdot \nabla)\omega - (f \cdot \nabla)\omega & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \omega = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \omega(0, \cdot) = \text{curl } y^0 & \text{in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (19.19)$$

and we note, that, from (19.16), $\omega_t \in L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$, from (19.16) and the fact that

$$\begin{aligned} |(Y \cdot \nabla)\omega|_{L^\infty(0,T_2;L^2(\tilde{\Omega}))} &\leq C|Y|_{L^\infty(0,T_2;H^2(\tilde{\Omega}))}|\nabla\omega|_{L^\infty(0,T_2;L^2(\tilde{\Omega}))}, \\ |(f \cdot \nabla)\omega|_{L^\infty(0,T_2;L^2(\tilde{\Omega}))} &\leq C|f|_{L^\infty((0,T_2)\times\tilde{\Omega})}|\nabla\omega|_{L^\infty(0,T_2;L^2(\tilde{\Omega}))}, \end{aligned}$$

then $(Y \cdot \nabla)\omega \in L^\infty(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$ and $(f \cdot \nabla)\omega \in L^\infty(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$. Consequently, $\Delta\omega \in L^2(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))$ and from the boundary condition in (19.19) and using a classical result about the Dirichlet problem, we obtain

$$\omega \in L^2(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))$$

with the following estimate

$$|\omega|_{L^2(0,T_2;H^2(\tilde{\Omega}))} \leq Kc^{3/2} \quad (19.20)$$

(let us remember that we have already chosen $c \geq 1$ (see (19.17)). Let now $h := \omega_t$. From (19.13), h is solution of

$$\begin{cases} h_t - \Delta h = -(Y_t \cdot \nabla)\omega - (Y \cdot \nabla)h - (f_t \cdot \nabla)\omega - (f \cdot \nabla)h & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ h = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ h(0, \cdot) = \Delta\omega(0, \cdot) - (Y(0, \cdot) \cdot \nabla)\omega(0, \cdot) & \text{in } \tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (19.21)$$

Since $Y(0, \cdot) \in H^3(\tilde{\Omega})^2$, then $h(0, \cdot) \in L^2(\tilde{\Omega})^2$. Let us now verify that the right member of the first equation of (19.21) belongs to $L^2(0, T_2; H^{-1}(\tilde{\Omega}))^2$. Firstly, since $Y_t \in L^2(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega}))^2$ and $\nabla\omega \in L^\infty(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega}))^2$, then

$$(Y_t \cdot \nabla)\omega \in L^2(0, T_2; H^{-1}(\tilde{\Omega})).$$

Next, $Y \in L^\infty(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))^2$ and $\nabla h \in L^2(0, T_2; H^{-1}(\tilde{\Omega}))$ give

$$(Y \cdot \nabla)h \in L^2(0, T_2; H^{-1}(\tilde{\Omega})).$$

Finally, the same arguments prove that

$$(f_t \cdot \nabla)\omega \in L^2(0, T_2; H^{-1}(\tilde{\Omega}))$$

and that

$$(f \cdot \nabla)h \in L^2(0, T_2; H^{-1}(\tilde{\Omega})).$$

Now, a classical result on the heat equation gives that $h \in L^2(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega}))$ with the following estimate (remember (19.8), (19.17) and (19.18))

$$\begin{aligned} |h|_{L^2(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega}))} &\leq C(|y^0|_{H^3(\tilde{\Omega})^2} \\ &\quad + |Y|_{H^1(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))}^2 |\omega|_{H^1(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega}))} \\ &\quad + |f|_{H^1(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))}^2 |\omega|_{H^1(0, T_2; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^\infty(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega}))}) \\ &\leq C(c^{3/2} + c) \\ &\leq Cc^{3/2}. \end{aligned}$$

Thus

$$\omega \in H^1(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega}))$$

with the following estimate

$$|\omega|_{H^1(0, T_2; H_0^1(\tilde{\Omega}))} \leq Kc^{3/2}. \quad (19.22)$$

Thus,

$$Y \in H^1(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))^2 \quad (19.23)$$

and

$$|Y|_{H^1(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))^2} \leq Kc^{3/2}. \quad (19.24)$$

Using our last computations, we prove easily using the same arguments as above that the right member of (19.19) actually belongs to $L^2(0, T_2; H^1(\tilde{\Omega}))$ and we get

$$\omega \in L^2(0, T_2; H^3(\tilde{\Omega})),$$

with the following estimate,

$$|\omega|_{L^2(0, T_2; H^3(\tilde{\Omega}))} \leq Kc^{5/2}. \quad (19.25)$$

Consequently,

$$Y \in L^2(0, T_2; H^4(\tilde{\Omega}))^2. \quad (19.26)$$

and

$$|Y|_{L^2(0, T_2; H^4(\tilde{\Omega}))^2} \leq Kc^{5/2}. \quad (19.27)$$

We recall the following result that one can find in [9].

Lemma 19.3. [9, Theorem 4 page 288] *Let*

$$\frac{1}{2} \min\left(\frac{T}{18}, \frac{1}{Cc^2}, \frac{1}{2c^2}\right) \leq T_2 \leq \min\left(\frac{T}{18}, \frac{1}{Cc^2}, \frac{1}{2c^2}\right) \quad (19.28)$$

and $X := (L^2(0, T_2; H^4(\tilde{\Omega})) \cap H^1(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega})))^2$ equipped with the norm

$$|y|_X := |y|_{L^2(0, T_2; H^4(\tilde{\Omega}))^2} + |y|_{H^1(0, T_2; H^2(\tilde{\Omega}))^2}.$$

Suppose that $y \in X$. Then $y \in C^0([0, T_2]; H^3(\tilde{\Omega}))^2$ and

$$\max\{|y(t, \cdot)|_{H^3(\tilde{\Omega})^2}, t \in [0, T_2]\} \leq C|y|_X,$$

the constant C depending only on L and not on T_2 satisfying (19.28).

As a consequence of this Lemma together with (19.23) and (19.26), we obtain

$$Y \in L^\infty(0, T_2; H^3(\tilde{\Omega}))^2$$

and from (19.24) and (19.27),

$$|Y|_{L^\infty(0, T_2; H^3(\tilde{\Omega}))^2} \leq Kc^{5/2}. \quad (19.29)$$

Now, using interpolation results (see for example, [18, Theorem 9.6 page 49]), we deduce from (19.18) and (19.29) that $Y \in L^\infty(0, T_2; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))$ and

$$|Y|_{L^\infty(0, T_2; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \leq Kc^{3/4}.$$

Finally, we deduce from the last inequality that for any $\delta_1 \in (T_2/2, T_2)$

$$|Y(T_2, \cdot)|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq Kc^{3/4}. \quad (19.30)$$

Let now $y := f + Y$. It follows from (19.9) and (19.10) that y is solution of

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = \nabla P - \nabla p^f + 7Lf_t\phi(x_1) & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{in } (0, T_2) \times \tilde{\Omega}, \\ y \cdot n = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} y = 0 & \text{on } (0, T_2) \times \tilde{\Gamma}, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \tilde{\Omega} \end{cases}$$

and from (19.9) and (19.30),

$$|y(\delta_1, \cdot) - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq Kc^{3/4}.$$

■

19.2 Second step: where the controllability of the Euler equation is used (Figure 1 part (c))

This part is in a way the most important part of the proof of Proposition 18.1. We follow the strategy introduced by J.-M. Coron in [5], then used by J.-M. Coron and A. Fursikov in [8] and more recently by M. Chapouly in [1] and [2]. That is, we consider that for small times and fixed states, the nonlinear term $(y \cdot \nabla)y$ is a key term compared to the linear term $-\Delta y$. Consequently, we use the Euler equation of incompressible inviscid fluids to ‘approach’ our Navier-Stokes control system. Our aim is to get closer to $\bar{y}$. Proposition 19.4 states more precisely that starting from an initial condition close to $\bar{y}$ up to $O(c^{3/4})$, we can arrive in a small time δ_c close to $\bar{y}$ up to $O(c^{-1/4})$.

Proposition 19.4. *There exist $c_1 > \max(72L/T, (18/T)^{1/3})$ and $M_1 > 0$ such that for any $c \geq c_1$, there exists $\delta_c > 0$ such that for any $z^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ which satisfies*

$$\operatorname{curl} z^0 = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma}, \quad (19.31)$$

$$|z^0 - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq KC_{17/8}c^{3/4},$$

where $C_{17/8}$ is defined in Lemma 18.2 and K is defined in Lemma 19.2, there exists a solution

$$(Z, P^Z) \in (C^0([0, \delta_c]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \delta_c; H^1(\Omega)))^2 \times L^2(0, \delta_c; L^2(\Omega))$$

to

$$\begin{cases} Z_t - \Delta Z + (Z \cdot \nabla)Z = -\nabla P^Z & \text{in } (0, \delta_c) \times \Omega, \\ \operatorname{div} Z = 0 & \text{in } (0, \delta_c) \times \Omega, \\ Z \cdot n = 0 & \text{on } (0, \delta_c) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} Z = 0 & \text{on } (0, \delta_c) \times \Gamma_0, \\ Z(0, \cdot) = z^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (19.32)$$

which moreover satisfies

$$|Z(\delta_c, \cdot) - \bar{y}|_{L^2(\Omega)^2} \leq \frac{M_1}{c^{1/4}}. \quad (19.33)$$

Proof of Proposition 19.4. This proof is divided in two steps. First, we construct a solution $\tilde{z}$ of the Euler equation whose vorticity vanishes in Ω at time $t = 2L/c$. Then we construct another solution of the Euler equation which brings $\tilde{z}(2L/c, \cdot)$ to $(0, 0)$ in time $1/c^3$. These two steps can be seen as the null controllability of Euler equation on the domain Ω . These solutions of the Euler equation will allow us to construct in two steps a solution of (19.32) which satisfies (19.33).

First step. Let us assume for the moment that the following proposition holds

Proposition 19.5. *There exist $c_0 > 0$ and $M_0 > 0$ such that for any $c \geq c_0$, for any $\tilde{z} \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ which satisfies*

$$\operatorname{curl} \tilde{z} = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma}, \quad (19.34)$$

$$|\tilde{z}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq KC_{17/8}c^{3/4},$$

where $C_{17/8}$ is defined in Lemma 18.2 and K is defined in Lemma 19.2, there exists a solution

$$(\tilde{z}, \tilde{p}^z) \in (C^0([0, 2L/c]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, 2L/c; H^1(\tilde{\Omega})))^2 \times L^2(0, 2L/c; L^2(\tilde{\Omega}))$$

to

$$\begin{cases} \tilde{z}_t + ((\bar{y} + \tilde{z}) \cdot \nabla)\tilde{z} = -\nabla \tilde{p}^z & \text{in } (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} \tilde{z} = 0 & \text{in } (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Omega}, \\ \tilde{z} \cdot n = 0 & \text{on } (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{z}(0, \cdot) = \tilde{z} & \text{in } \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{curl} \tilde{z}(\frac{2L}{c}, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (19.35)$$

Moreover, $\tilde{z} \in C^0([0, 2L/c]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2$ and

$$|\tilde{z}|_{C^0([0, 2L/c]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \leq M_0c^{3/4}. \quad (19.36)$$

$$\operatorname{curl} z^0 = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma}$$
$$|z^0 - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq KC_{17/8}c^{3/4},$$
$$\tilde{z} := z^0 - \bar{y}. \quad (19.37)$$
$$\operatorname{curl} \tilde{z} = 0 \text{ on } (0, 2L/c) \times \tilde{\Gamma}. \quad (19.38)$$
$$R \in (C^0([0, 2L/c]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, 2L/c; H^1(\tilde{\Omega})))^2$$
$$\begin{cases} R_t - \Delta R + (R \cdot \nabla)R + (R \cdot \nabla)\tilde{z} + (\bar{y} \cdot \nabla)R + (\tilde{z} \cdot \nabla)R - \Delta\tilde{z} \\ \quad = -\nabla P \text{ in } (0, 2L/c) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} R = 0 \text{ in } (0, 2L/c) \times \tilde{\Omega}, \\ R \cdot n = 0 \text{ on } (0, 2L/c) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} R = -\operatorname{curl} \tilde{z} = 0 \text{ on } (0, 2L/c) \times \tilde{\Gamma}, \\ R(0, \cdot) = 0 \text{ in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (19.39)$$
$$\operatorname{div} R = \operatorname{div} \tilde{z} = \operatorname{div} \bar{y} = 0.$$
$$R \cdot n = \check{z} \cdot n = \bar{y} \cdot n = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma},$$
$$\operatorname{curl} R = 0 \text{ on } \tilde{\Gamma},$$
$$\begin{aligned} -2 \int_{\tilde{\Omega}} R \Delta R &= 2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla R|^2, \\ 2 \int_{\tilde{\Omega}} R(R \cdot \nabla) R &= -2 \int_{\tilde{\Omega}} R \nabla P = 2 \int_{\tilde{\Omega}} R(\bar{y} \cdot \nabla) R = 2 \int_{\tilde{\Omega}} R(\bar{z} \cdot \nabla) R = 0. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\tilde{\Omega}} R(R \cdot \nabla) \tilde{z} &\leq C |\tilde{z}|_{C^0([0, T_3]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \int_{\tilde{\Omega}} |R|^2, \\ 2 \int_{\tilde{\Omega}} R \Delta \tilde{z} &\leq 2 \left(\int_{\tilde{\Omega}} |R|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\tilde{\Omega}} |\Delta \tilde{z}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Consequently, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |R|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 + 2 |\nabla R|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 &\leq C |\tilde{z}|_{C^0([0, T_3]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} |R|_{L^2(\tilde{\Omega})^2}^2 \\ &\quad + 2 |R|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} |\tilde{z}|_{C^0([0, T_3]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2}. \end{aligned}$$

Thus

$$\frac{d}{dt} |R|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} \leq C |\tilde{z}|_{C^0([0, T_3]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} |R|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} + 2 |\tilde{z}|_{C^0([0, T_3]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2}.$$

Using now (19.36) and applying Gronwall's lemma, we obtain for c large enough,

$$\begin{aligned} |R(2L/c, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} &\leq C(\exp(c^{3/4} 2L/c) - 1) \\ &\leq \frac{C}{c^{1/4}}. \end{aligned} \tag{19.40}$$

Let now $z \in (C^0([0, 2L/c]; L^2(\Omega))) \cap L^2(0, 2L/c; H^1(\Omega))^2$ be defined by

$$z(t, x) = R(t, x) + \tilde{z}(t, x) + \bar{y}(t, x), \quad (t, x) \in (0, 2L/c) \times \Omega. \tag{19.41}$$

One easily verifies that z is solution of

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + (z \cdot \nabla) z = -\nabla(P + p^{\tilde{z}}) \text{ in } (0, 2L/c) \times \Omega, \\ \operatorname{div} z = 0 \text{ in } (0, 2L/c) \times \Omega, \\ z \cdot n = 0 \text{ on } (0, 2L/c) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} z = 0 \text{ on } (0, 2L/c) \times \Gamma_0, \\ z(0, \cdot) = z_0 \end{cases} \tag{19.42}$$

(remember in particular (19.38)). Moreover, one deduces from (19.40) and (19.41) that

$$|z(2L/c, \cdot) - \tilde{z}(2L/c, \cdot) - \bar{y}|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \frac{C}{c^{1/4}}. \tag{19.43}$$

Second step. Now, from the facts that Ω is simply connected, that $\operatorname{curl} \tilde{z}(2L/c, \cdot) = 0$ in Ω (see (19.35)), and that $\tilde{z}(2L/c, \cdot) \in H^{17/8}(\Omega)^2$, there exists $\phi \in H^{25/8}(\Omega)$ such that

$$\tilde{z}(2L/c, \cdot) = \nabla \phi \text{ in } \Omega. \tag{19.44}$$

Let $\chi \in C^\infty([0, 1/c^3])$ be such that

$$\begin{aligned} \chi(t) &\geq 0, \quad t \in [0, 1/c^3], \\ \chi(0) &= 1, \\ \chi(1/c^3) &= 0 \end{aligned}$$

and let u be defined in $[0, 1/c^3] \times \Omega$ by, for any $(t, x) \in [0, 1/c^3] \times \Omega$,

$$u(t, x) = \chi(t) \nabla \phi(x). \quad (19.45)$$

One easily sees that $u \in C^0([0, 1/c^3]; H^{17/8}(\Omega))^2$ is solution of

$$\begin{cases} u_t + ((\bar{y} + u) \cdot \nabla)u = -\nabla p^u \text{ in } (0, 1/c^3) \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ in } (0, 1/c^3) \times \Omega, \\ u \cdot n = 0 \text{ on } (0, 1/c^3) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} u = 0 \text{ on } (0, 1/c^3) \times \Gamma_0, \\ u(0, \cdot) = \check{z}(2L/c, \cdot) \text{ in } \Omega, \\ u(1/c^3, \cdot) = 0 \text{ in } \Omega, \end{cases} \quad (19.46)$$

where

$$p^u := -\dot{\chi}(t)\phi - \frac{\chi(t)^2}{2}|\nabla \phi|^2 - c\chi(t)\partial_1 \phi \text{ in } (0, 1/c^3) \times \Omega.$$

Using Lemma 18.2, we can extend u (resp. p^u) by $\Pi(u) \in C^0([0, 1/c^3]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2$ (resp. by $\Pi(p^u) \in L^2(0, 1/c^3; L^2(\tilde{\Omega}))$). Let us recall that since

$$\operatorname{curl} u = 0 \text{ on } (0, 1/c^3) \times \Gamma_0,$$

then

$$\operatorname{curl} \Pi(u) = 0 \text{ on } (0, 1/c^3) \times \tilde{\Gamma}.$$

We denote

$$f := \Pi(u)_t + ((\bar{y} + \Pi(u)) \cdot \nabla)\Pi(u) + \nabla \Pi(p^u) \text{ on } (0, 1/c^3) \times \tilde{\Omega}. \quad (19.47)$$

One can note that

$$f \equiv 0 \text{ on } (0, 1/c^3) \times \Omega \quad (19.48)$$

(see (19.46)). Let now

$$Q \in (C^0([0, 1/c^3]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, 1/c^3; H^1(\tilde{\Omega}))^2$$

be solution of

$$\begin{cases} Q_t - \Delta Q + (Q \cdot \nabla)Q + (Q \cdot \nabla)\Pi(u) + (\bar{y} \cdot \nabla)Q + (\Pi(u) \cdot \nabla)Q - \Delta \Pi(u) \\ \hspace{15em} = -\nabla P^Q \text{ in } (0, 1/c^3) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} Q = 0 \text{ in } (0, 1/c^3) \times \tilde{\Omega}, \\ Q \cdot n = 0 \text{ on } (0, 1/c^3) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} Q = -\operatorname{curl} \Pi(u) = 0 \text{ on } (0, 1/c^3) \times \tilde{\Gamma}, \\ Q(0, \cdot) = \Pi(z(2L/c, \cdot)) - \Pi(u)(0, \cdot) - \bar{y} \text{ in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (19.49)$$

for some $P^Q \in L^2(0, 1/c^3; L^2(\tilde{\Omega}))$ and where Π is defined in Lemma 18.2, z satisfies (19.42) and u satisfies (19.46). Using similar estimations as above, (19.43), (19.44) and (19.45), we prove that for c large enough

$$\begin{aligned} |Q(1/c^3, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} &\leq C(|Q(0, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} + c^{3/4} \frac{1}{c^3}) \\ &\leq \frac{C}{c^{1/4}}. \end{aligned} \quad (19.50)$$

Let $\delta_c := 2L/c + 1/c^3$. We define now (Z, P^Z) in $(0, \delta_c) \times \Omega$ by for any $(t, x) \in (0, \delta_c) \times \Omega$,

$$Z(t, x) := \begin{cases} z(t, x) & \text{if } t \in [0, 2L/c], \\ Q(t - 2L/c, x) + \Pi(u)(t - 2L/c, \cdot) + \bar{y} & \text{if } t \in [2L/c, \delta_c] \end{cases} \quad (19.51)$$

and

$$P^Z(t, x) := \begin{cases} P(t, x) + p^z(t, x) & \text{if } t \in [0, 2L/c], \\ \Pi(p^u)(t - 2L/c, \cdot) + P^Q(t - 2L/c, \cdot) & \text{if } t \in [2L/c, \delta_c], \end{cases} \quad (19.52)$$

where P is defined in (19.39), (z, p^z) is solution of (19.42), (u, p^u) is solution of (19.46) and (Q, P^Q) is solution of (19.49). Then from (19.42), (19.46)-(19.52),

$$(Z, P^Z) \in (C^0([0, \delta_c]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \delta_c; H^1(\Omega)))^2 \times L^2(0, \delta_c; L^2(\Omega))$$

satisfies

$$\begin{cases} Z_t - \Delta Z + (Z \cdot \nabla)Z = -\nabla P^Z & \text{in } (0, \delta_c) \times \Omega, \\ \operatorname{div} Z = 0 & \text{in } (0, \delta_c) \times \Omega, \\ Z \cdot n = 0 & \text{on } (0, \delta_c) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} Z = 0 & \text{on } (0, \delta_c) \times \Gamma_0, \\ Z(0, \cdot) = z^0 & \text{in } \Omega, \\ |Z(\delta_c, \cdot) - \bar{y}|_{L^2(\Omega)^2} \leq M_1/c^{1/4}. \end{cases} \quad (19.53)$$

This ends the proof of Proposition 19.4. It remains to prove Proposition 19.5. ■

Proof of Proposition 19.5. This is a consequence of the following lemma

Lemma 19.6. *There exist $\epsilon > 0$ and $\beta > 0$ such that for any $\hat{y}^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ such that*

$$\operatorname{curl} \hat{y}^0 = 0 \text{ in } \tilde{\Gamma} \quad (19.54)$$

and such that $|\hat{y}^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} < \epsilon$, there exists $(\hat{y}, \hat{p})$ solution of

$$\begin{cases} \hat{y}_t + ((\hat{y} + \hat{y}) \cdot \nabla) \hat{y} = -\nabla \hat{p} & \text{in } (0, 1) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} \hat{y} = 0 & \text{in } (0, 1) \times \tilde{\Omega}, \\ \hat{y} \cdot n = 0 & \text{on } (0, 1) \times \tilde{\Gamma}, \\ \hat{y}(0, \cdot) = \hat{y}^0 & \text{in } \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{curl} \hat{y}(1, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (19.55)$$

where we have denoted

$$(\hat{y}, \hat{p}) := ((2L, 0), 0) \text{ in } (0, 1) \times \tilde{\Omega}. \quad (19.56)$$

Moreover $\hat{y} \in C^0([0, 1]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2$ and

$$|\hat{y}|_{C^0([0, 1]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \leq \beta |\hat{y}^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2}. \quad (19.57)$$

Indeed, let us assume for the moment that this lemma holds. Let $c_0 := (2LKC_{17/8}/\epsilon)^4$, where $C_{17/8}$ is defined in Lemma 18.2, K is defined in Lemma 19.2 and ϵ is defined in Lemma 19.6 and let $c \geq c_0$. Let $z^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ be such that $|z^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq KC_{17/8}c^{3/4}$ and $\text{curl } z^0 = 0$ in $\tilde{\Gamma}$. From Lemma 19.6, there exists a unique $(\hat{y}, \hat{p})$ solution of (19.55) with initial condition $\hat{y}^0 := \frac{2L}{c}z^0$ in $\tilde{\Omega}$. We now define

$$\tilde{z}(t, x) = \frac{c}{2L}\hat{y}\left(\frac{ct}{2L}, x\right), (t, x) \in (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Omega}$$

and

$$\tilde{p}(t, x) = \frac{c^2}{4L^2}\hat{p}\left(\frac{ct}{2L}, x\right), (t, x) \in (0, \frac{2L}{c}) \times \tilde{\Omega}$$

and Proposition 19.5 follows easily. ■

It remains to prove Lemma 19.6.

Proof of Lemma 19.6. One can prove in a manner similar to the proof of [19, Theorem 4.1 page 126], that there exist ϵ_0 and $\beta > 0$ such that for any $\hat{y}^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ such that

$$|\hat{y}^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq \epsilon_0, \quad (19.58)$$

there exists a unique $\hat{y} \in C^0([0, 1]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2$ solution of

$$\begin{cases} \hat{y}_t + ((\hat{y} + \hat{y}) \cdot \nabla)\hat{y} = -\nabla\hat{p} \text{ in } (0, 1) \times \tilde{\Omega}, \\ \text{div } \hat{y} = 0 \text{ in } (0, 1) \times \tilde{\Omega}, \\ \hat{y} \cdot n = 0 \text{ on } (0, 1) \times \tilde{\Gamma}, \\ \hat{y}(0, \cdot) = \hat{y}^0 \text{ in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (19.59)$$

where $(\hat{y}, \hat{p})$ is defined by (19.56). Moreover, we have the following inequality

$$|\hat{y}|_{C^0([0, 1]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \leq \beta |\hat{y}^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2}. \quad (19.60)$$

Let also $\hat{y}^0 \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2 \cap H$ satisfy (19.54) and

$$|\hat{y}^0|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} < \min(\epsilon_0, L/(2\beta)). \quad (19.61)$$

It only remains to prove that for any $x \in \Omega$,

$$\text{curl } \hat{y}(1, x) = 0.$$

To this aim, we introduce the flow $\tilde{f}$ of the ordinary differential equation $\dot{\xi} = (\hat{y} + \hat{y})(t, \xi)$. From the definition of $\tilde{\Omega}$ (see (17.1)) and the third equation of (19.59),

$$\tilde{f} : [0, 1] \times [0, 1] \times \tilde{\Omega} \longrightarrow \tilde{\Omega}.$$

This flow is solution of

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t_1}(t_1, t_2, x) = (\hat{y} + \hat{y})(t_1, \tilde{f}(t_1, t_2, x)), (t_1, t_2, x) \in (0, 1) \times (0, 1) \times \tilde{\Omega}, \quad (19.62)$$

$$\tilde{f}(t_2, t_2, x) = x, t_2 \in (0, 1), x \in \tilde{\Omega}. \quad (19.63)$$

Let us prove the following lemma

Lemma 19.7. *For any $x \in \Omega$, $\tilde{f}(0, 1, x) \in (-3L, -L/2) \times (-1, 1)$.*

Proof of Lemma 19.7 Let f be the flow of the ordinary differential equation $\dot{\xi} = \hat{y}(t, \xi)$. From (19.56), one computes easily that for any $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$, for any $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_2, x) &= x_1 + (t_1 - t_2)2L, \\ f_2(t_1, t_2, x) &= x_2. \end{aligned}$$

In particular, for any $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f_1(0, 1, x) &= x_1 - 2L, \\ f_2(0, 1, x) &= x_2. \end{aligned}$$

Thus for any $x \in \Omega$,

$$-2L < f_1(0, 1, x) < -L, \quad (19.64)$$

From now on, we denote by $|\tilde{f}(0, 1, x) - f(0, 1, x)| := |\tilde{f}_1(0, 1, x) - f_1(0, 1, x)| + |\tilde{f}_2(0, 1, x) - f_2(0, 1, x)|$. Then, using (19.61) we get, for any $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(0, 1, x) - f(0, 1, x)| &= \left| \int_1^0 (\hat{y} + \hat{y})(s, \tilde{f}(s, 1, x)) - \hat{y}(s, f(s, 1, x)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |\hat{y}(s, \tilde{f}(s, 1, x))| ds \\ &\leq \|\hat{y}\|_{C^0([0,1]; H^{17/8}(\tilde{\Omega}))^2} \\ &\leq \frac{L}{2}. \end{aligned} \quad (19.65)$$

Consequently, using (19.64) and (19.65), it follows for any $x \in \Omega$,

$$\tilde{f}_1(0, 1, x) \in (-5L/2, -L/2). \quad (19.66)$$

Finally, let us denote by $\hat{\omega} := \text{curl } \hat{y}$. From the fact that the equation satisfied by $\hat{\omega}$ is a transport equation we get for any $x \in \tilde{\Omega}$,

$$\hat{\omega}(1, x) = \text{curl } \hat{y}^0(\tilde{f}(0, 1, x)) \quad (19.67)$$

and thus, from (19.66) and the fact that $\hat{y}^0$ satisfies (19.54), we deduce that for any $x \in \Omega$,

$$\hat{\omega}(1, x) = 0.$$

■

19.3 Third step: construction of a trajectory of NS which starts close to $\bar{y}$ and arrives close to 0 (Figure 1 part (d))

One can prove in the same manner as in Lemma 19.2 that the following lemma holds

Lemma 19.8. *There exist $\tilde{K} > 0$ and $c_2 > 0$ such that for any $c \geq c_2$, there exist $T_4 \in (0, T/18)$ and $\hat{\phi} \in C^\infty([0, T_4] \times \tilde{\Omega})$ which satisfies*

$$\hat{\phi}(t, x) = 0, (t, x) \in [0, T_4] \times \tilde{\Omega},$$

such that for any $\tilde{y} \in H$ such that $|\tilde{y} - \bar{y}|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} \leq C_0 M_1 / c^{1/4}$, where C_0 is defined in Lemma 18.2 and M_1 is defined in Proposition (19.4), there exists

$$(\zeta, \rho) \in (C^0([0, T_4]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T_4; H^1(\tilde{\Omega})))^2 \times L^2(0, T_4; L^2(\tilde{\Omega}))$$

solution of

$$\begin{cases} \zeta_t - \Delta \zeta + (\zeta \cdot \nabla) \zeta = -\nabla \rho + \hat{\phi} \text{ in } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} \zeta = 0 \text{ in } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ \zeta \cdot n = 0 \text{ on } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} \zeta = 0 \text{ on } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ \zeta(0, \cdot) = \tilde{y} \text{ in } \tilde{\Omega}, \end{cases} \quad (19.68)$$

such that

$$|\zeta(T_4, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} \leq \tilde{K} / c^{1/4}. \quad (19.69)$$

Proof of Lemma 19.8. We only give the main idea of the proof. The details follow easily from the proof of Lemma 19.2. Let $0 < T_4 \leq T/18$. It suffices to introduce this time (g, p^g) defined on $(0, T_4) \times \tilde{\Omega}$ by

$$g(t, x) := \begin{cases} \left(\frac{4c}{T_4} t \left(-1 + \frac{t}{T_4} \right), 0 \right) & \text{if } t \in [0, T_4/2], \\ (0, 0) & \text{if not} \end{cases}$$

and

$$p^g(t, x) := \begin{cases} \frac{4c}{T_4} \left(-1 + \frac{2t}{T_4} \right) (7L \int_{-3L}^{x_1} \phi(s) ds - x_1) & \text{if } t \in [0, T_4/2], \\ 0 & \text{if not,} \end{cases}$$

where ϕ was defined in the proof of Lemma 19.2. One easily sees that (g, p^g) satisfies

$$\begin{cases} g_t - \Delta g + (g \cdot \nabla) g = -\nabla p^g + 7L g_t \phi(x_1) \text{ in } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} g = 0 \text{ in } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ g \cdot n = 0 \text{ on } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} g = 0 \text{ on } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ g(0, \cdot) = \tilde{y} \text{ in } \tilde{\Omega}, \\ g(t, \cdot) = 0 \text{ in } (T_4/2, T_4) \times \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Then if we define now $Y \in (C^0([0, T_4]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T_4; H^1(\tilde{\Omega})))^2$ as the solution of

$$\begin{cases} Y_t - \Delta Y + (Y \cdot \nabla) Y + (g \cdot \nabla) Y = -\nabla P \text{ in } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} Y = 0 \text{ in } (0, T_4) \times \tilde{\Omega}, \\ Y \cdot n = 0 \text{ on } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} Y = 0 \text{ on } (0, T_4) \times \tilde{\Gamma}, \\ Y(0, \cdot) = -\bar{y} + \tilde{y} \text{ in } \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

for some $P \in L^2(0, T_4; L^2(\tilde{\Omega}))$, the same estimations as the ones used in the proof of Lemma 19.2 give the result (define (ζ, ρ) as

$$\begin{aligned}\zeta &= g + Y, \\ \rho &= p^g + P\end{aligned}$$

and see in particular (19.13)). ■

19.4 Fourth step: proof of Proposition 18.1

From Lemma 19.1, we only have to prove that property (19.2) holds. Let $\epsilon > 0$ and let $y^0 \in H^3(\tilde{\Omega})^2 \cap H$. Let $c > \max((\tilde{K}/\epsilon)^4, \tilde{c}, c_1, c_2)$, where C_0 is defined in Lemma 18.2, $\tilde{c}$ is defined in Lemma 19.2, M_1 and c_1 are defined in Proposition 19.4 and $\tilde{K}$ and c_2 are defined in Lemma 19.8. From Lemma 19.2, there exists $T_2 \in (0, T/18)$ and there exists y solution of (19.4) which satisfies (19.5). Let now $\tilde{y}^0 := y(T_2, \cdot)$ in Ω . From Lemma 18.2, we can extend $\tilde{y}^0$ by a function $\Pi(\tilde{y}^0) \in H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2$ which moreover satisfies

$$|\Pi(\tilde{y}^0) - \bar{y}|_{H^{17/8}(\tilde{\Omega})^2} \leq C_{17/8} |\tilde{y}^0 - \bar{y}|_{H^{17/8}(\Omega)^2}.$$

Then, from Proposition 19.4 applied for $z_0 := \Pi(\tilde{y}^0)$ (let us recall that $c > c_1$ and that, since, from the fourth line of (19.4), $\text{curl } y(\delta_1, \cdot) = 0$ on Γ_0 , then from Lemma 18.2, $\text{curl } \Pi(\tilde{y}^0) = 0$ on $\tilde{\Gamma}$), there exists a solution z to (19.32) which satisfies (19.33). We use one more time Lemma 18.2 to extend the restriction of $z(\delta_c, \cdot)$ on Ω by a function $\check{y}^0 \in L^2(\tilde{\Omega})^2$. Finally, since

$$\begin{aligned}|\check{y}^0 - \bar{y}|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} &\leq C_0 |z(\delta_c, \cdot) - \bar{y}|_{L^2(\Omega)^2} \\ &\leq C_0 M_1 / \sqrt{c},\end{aligned}$$

applying Lemma 19.8 with $\tilde{y} := \check{y}^0$, we obtain the existence of $T_4 \in (0, T/18)$ and of a solution $\check{y}$ to (19.68) which satisfies (19.69), i.e.,

$$\begin{aligned}|\check{y}(T_4, \cdot)|_{L^2(\tilde{\Omega})^2} &\leq \tilde{K} / \sqrt{c} \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}\tag{19.70}$$

Let $\tilde{\delta}_0 := T_2 + \delta_c + T_4 \leq T_6$. We now define

$$(Y, P) \in (C^0([0, \tilde{\delta}_0]; L^2(\Omega) \cap L^2(0, \tilde{\delta}_0; H^1(\Omega)))^2 \times L^2(0, \tilde{\delta}_0; L^2(\Omega))$$

by, for any $(t, x) \in (0, \tilde{\delta}_0) \times \Omega$,

$$Y(t, x) := \begin{cases} y(t, x) & \text{if } t \in [0, T_2], \\ z(t - T_2, x) & \text{if } t \in [T_2, T_2 + \delta_c], \\ \check{y}(t - T_2 - \delta_c, x) & \text{if } t \in [T_2 + \delta_c, \tilde{\delta}_0], \end{cases}$$

and

$$P(t, x) := \begin{cases} p(t, x) & \text{if } t \in [0, T_2], \\ p^z(t - T_2, x) & \text{if } t \in [T_2, T_2 + \delta_c], \\ \check{p}(t - T_2 - \delta_c, x) & \text{if } t \in [T_2 + \delta_c, \tilde{\delta}_0]. \end{cases}$$

Then (Y, P) satisfies

$$\begin{cases} Y_t - \Delta Y + (Y \cdot \nabla)Y = -\nabla P \text{ in } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Omega, \\ \operatorname{div} Y = 0 \text{ in } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Omega, \\ Y \cdot n = 0 \text{ on } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Gamma_0, \\ \operatorname{curl} Y = 0 \text{ on } (0, \tilde{\delta}_0) \times \Gamma_0, \\ Y(0, \cdot) = z_0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

and from (19.70),

$$|Y(\tilde{\delta}_0, \cdot)|_{L^2(\Omega)^2} \leq \epsilon.$$

■

20 Appendix

This appendix is devoted to the proof of Proposition 17.2. We only give the main details of the proof. We begin with the following useful lemma

Lemma 20.1. *Let $y \in (C^0([0, T]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T; H^1(\tilde{\Omega})))^2$ be solution of*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y = -\nabla p \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \operatorname{div} y = 0 \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ y \cdot n = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \operatorname{curl} y = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma} \end{cases} \quad (20.1)$$

for some $p \in L^2(0, T; L^2(\tilde{\Omega}))$. Let $\omega := \operatorname{curl} y$, let $q \in [1, +\infty)$ and let $s \geq 0$. If $\omega \in L^q(0, T; H^s(\tilde{\Omega}))$ then $y \in L^q(0, T; H^{s+1}(\tilde{\Omega}))^2$.

Proof of Lemma 20.1 Since $\operatorname{div} y = 0$ in $(0, T) \times \tilde{\Omega}$ and since $\tilde{\Omega}$ is simply connected, there exists $\phi \in C^0([0, T]; H^1(\tilde{\Omega}))$ such that $y = \nabla^\perp \phi$ in $(0, T) \times \tilde{\Omega}$. From the fact that $\operatorname{curl} y \in L^q(0, T; H^s(\tilde{\Omega}))$, we get

$$\Delta \phi \in L^q(0, T; H^s(\tilde{\Omega})). \quad (20.2)$$

From the third equation of (20.1), we get

$$\partial_1 \phi = 0,$$

i.e. there exist c_0 and $c_1 \in \mathbb{R}$ such that

$$\phi(x) = c_0 \text{ on } \tilde{\Gamma}^+, \quad (20.3)$$

$$\phi(x) = c_1 \text{ on } \tilde{\Gamma}^-. \quad (20.4)$$

From (20.2), (20.3) and (20.4), we deduce that $\phi \in L^q(0, T; H^{s+2}(\tilde{\Omega}))$ and consequently

$$y \in L^q(0, T; H^{s+1}(\tilde{\Omega}))^2.$$

■

We return to the proof of Proposition 17.2. Let $\epsilon > 0$. We introduce a function $\theta \in C^\infty([0, T])$ such that

$$\theta(t) = 0 \text{ in } [0, \epsilon], \quad (20.5)$$

$$\theta(t) = 1 \text{ in } [2\epsilon, T]. \quad (20.6)$$

Then $\omega^* := \theta\omega$ satisfies the following system

$$\begin{cases} \omega_t^* - \Delta\omega^* + (y \cdot \nabla)\omega^* = \theta_t\omega \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \omega^* = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \omega^*(0, \cdot) = 0 \text{ on } \tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (20.7)$$

Multiplying the first equation in (20.7) by $2\omega^*$ and integrating by parts, we obtain $\omega^* \in C^0([0, T]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(0, T; H^1(\tilde{\Omega}))$. Thus, using (20.6), we get

$$\omega \in C^0([2\epsilon, T]; L^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(2\epsilon, T; H^1(\tilde{\Omega}))$$

and from Lemma 20.1,

$$y \in (C^0([2\epsilon, T]; H^1(\tilde{\Omega})) \cap L^2(2\epsilon, T; H^2(\tilde{\Omega})))^2. \quad (20.8)$$

Let now $\alpha \in C^\infty([0, T])$ be such that

$$\alpha(t) = 0 \text{ in } [0, 2\epsilon], \quad (20.9)$$

$$\alpha(t) = 1 \text{ in } [3\epsilon, T]. \quad (20.10)$$

Then $\tilde{\omega} := \alpha\omega$ satisfies the following system

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_t - \Delta\tilde{\omega} + (y \cdot \nabla)\tilde{\omega} = \alpha_t\omega \text{ in } (0, T) \times \tilde{\Omega}, \\ \tilde{\omega} = 0 \text{ on } (0, T) \times \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{\omega}(0, \cdot) = 0 \text{ on } \tilde{\Omega}. \end{cases} \quad (20.11)$$

We multiply the first equation of (20.11) by $-2\Delta\tilde{\omega}$ and using integrations by parts and the fact that $y \in L^2(2\epsilon, T; L^\infty(\tilde{\Omega}))^2$ (see (20.8)), we get

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla\tilde{\omega}|^2 + \int_{\tilde{\Omega}} |\Delta\tilde{\omega}|^2 \leq 2|y(t, \cdot)|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla\tilde{\omega}|^2 + C \int_{\tilde{\Omega}} |\omega|^2.$$

Applying now Gronwall's lemma we get

$$\tilde{\omega} \in C^0([2\epsilon, T]; H^1(\tilde{\Omega})) \cap L^2(2\epsilon, T; H^2(\tilde{\Omega})).$$

Using the first equation of (20.11) and the regularity already known on y and $\tilde{\omega}$ we obtain

$$\tilde{\omega}_t \in L^2(2\epsilon, T; L^2(\tilde{\Omega}))$$

and thus $\tilde{\omega} \in H^1(2\epsilon, T; L^2(\tilde{\Omega}))$. Consequently, from (20.10),

$$\omega \in C^0([3\epsilon, T]; H^1(\tilde{\Omega})) \cap L^2(3\epsilon, T; H^2(\tilde{\Omega})) \cap H^1(3\epsilon, T; L^2(\tilde{\Omega}))$$

and

$$y \in (C^0([3\epsilon, T]; H^2(\tilde{\Omega})) \cap L^2(3\epsilon, T; H^3(\tilde{\Omega})) \cap H^1(3\epsilon, T; H^1(\tilde{\Omega})))^2.$$

The next step would be to prove that $\omega \in H^1(4\epsilon, T; H^1(\tilde{\Omega}))$. This can easily be done introducing a new function $\beta(t) \in C^\infty([0, T])$ such that

$$\begin{aligned}\beta(t) &= 0 \text{ in } [0, 3\epsilon], \\ \beta(t) &= 1 \text{ in } [4\epsilon, T],\end{aligned}$$

deriving the equation satisfied by $\hat{\omega}$ with respect to the time variable (where we have denoted $\hat{\omega} := \beta\omega$) and using considerations on the heat equation similar to these we used in part 4.1. One can easily end the proof of Proposition 17.2 using the same scheme as before and using similar estimations as in part 4.1. ■

Bibliography

- [1] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous and viscous Burgers type equations. *SIAM J. Control Optim.*, 48(3):1567-1599, 2009.
- [2] Marianne Chapouly. Global controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation. *To appear in Commun. Contemp. Math.*.
- [3] Jean-Michel Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3):295–312, 1992.
- [4] Jean-Michel Coron. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(3):271–276, 1993.
- [5] Jean-Michel Coron. On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 1:35–75 (electronic), 1995/96.
- [6] Jean-Michel Coron. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 75(2):155–188, 1996.
- [7] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs*, Providence, Rhode Island, 2007.
- [8] Jean-Michel Coron and Andrei V. Fursikov. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian J. Math. Phys.*, 4(4):429–448, 1996.
- [9] Laurence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society. Springer-Verlag, Providence, Rhode Island, 1998.
- [10] Enrique Fernández-Cara, Sergio Guerrero, Oleg Yu. Imanuvilov, and Jean-Pierre Puel. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(12):1501–1542, 2004.
- [11] Andrei V. Fursikov and Oleg Yu Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Center, Seoul, 1996.

- [12] Guiseppe Geymonat and Evariste Sanchez-Palencia. On the vanishing viscosity limit to acoustic phenomena in a bounded region. *Arch. Rat. Mechanics and Analysis*, 75:257–268, 1981.
- [13] Olivier Glass. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(9):987–992, 1997.
- [14] Olivier Glass. Exact boundary controllability of 3-D Euler equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5:1–44 (electronic), 2000.
- [15] Sergio Guerrero. Local exact controllability to the trajectories of the Navier-Stokes system with nonlinear Navier-slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3):484–544 (electronic), 2006.
- [16] Oleg Yu. Imanuvilov. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6:39–72 (electronic), 2001.
- [17] Oleg Yu. Imanuvilov and Jean-Pierre Puel. On global controllability of 2-D Burgers equation. *To appear in Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2008.
- [18] Jacques Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1*. Travaux et recherches mathématiques. Dunod, Paris, 1968.
- [19] Pierre-Louis Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, volume 1. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 1996.
- [20] Charles Louis M.H Navier. Sur les lois du mouvement des fluides. *Mem. Acad. R. Sci. Inst. France*, 6:389–440, 1823.

Résumé

Dans cette thèse on étudie la contrôlabilité globale de quelques équations non linéaires issues de la mécanique des fluides, précisément des équations de type Burgers, une équation de Korteweg-de Vries, et un système de Navier-Stokes 2-D. La stratégie employée consiste, d'une part, à appliquer la méthode du retour de J.-M. Coron, et d'autre part, à jouer sur la non linéarité de l'équation considérée.

De cette manière, on montre dans la première partie la contrôlabilité globale exacte pour tout temps d'équations de type Burgers non visqueuses puis on utilise ensuite ce résultat pour obtenir un résultat de contrôlabilité globale approchée pour l'équation de Burgers visqueuse. Cette propriété, combinée avec un résultat de contrôlabilité locale, entraîne ainsi la contrôlabilité globale aux trajectoires de l'équation de Burgers visqueuse, pour tout temps.

Dans la deuxième partie, on procède d'une manière similaire pour obtenir la contrôlabilité globale exacte d'une équation de Korteweg-de Vries non linéaire, pour tout temps.

Enfin, dans la dernière partie on s'intéresse à un système de Navier-Stokes 2-D avec conditions aux bords de type Navier. On obtient, en utilisant cette fois des résultats sur l'équation d'Euler des fluides incompressibles, la contrôlabilité globale à zéro, pour tout temps.

Mots-clefs : contrôlabilité globale exacte, équation non linéaire, méthode du retour, équation de Burgers, équation de Korteweg-de Vries, équations de Navier-Stokes, conditions de Navier.

Abstract

In this work we study the global controllability of some nonlinear equations of fluid mechanics, namely Burgers type equations, a Korteweg-de Vries equation and a 2-D Navier-Stokes system. The strategy consists in both using the return method of J.-M. Coron and playing on the nonlinearity of the equation.

In this way, we prove in the first part the global exact controllability of nonviscous Burgers type equations, for any positive time. We then use this result to obtain a global approximate controllability result for the viscous Burgers equation. This property, added to a local controllability result gives the global controllability of the viscous Burgers equation for any positive time.

In the second part, we obtain in a similar way the global exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation, for any positive time.

Finally, in the last part, we use the same strategy and results on the Euler equation for inviscid fluids to obtain the global null controllability of a 2-D Navier-Stokes system with Navier slip boundary conditions, for any positive time.

Keywords : global exact controllability, nonlinear equation, Burgers equation, Korteweg-de Vries equation, Navier-Stokes equations, Navier slip boundary conditions.

AMS Subject Classification : 93B05, 93C20, 35Q53 , 35Q30, 76D05, 93C10.