

Intégration de la méthode de recherche de schémas électriques équivalents (PEEC) pour la modélisation, l'analyse et la conception des interconnexions dans les systèmes complexes

Edith Clavel

▶ **To cite this version:**

Edith Clavel. Intégration de la méthode de recherche de schémas électriques équivalents (PEEC) pour la modélisation, l'analyse et la conception des interconnexions dans les systèmes complexes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2004. ⟨tel-00408275⟩

HAL Id: tel-00408275

https://theses.hal.science/tel-00408275v1

Submitted on 30 Jul 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Habilitation à diriger des recherches

Présentée par

Edith CLAVEL

****

Intégration de la méthode de recherche de schémas électriques équivalents (PEEC) pour la modélisation, l'analyse et la conception des interconnexions dans les systèmes complexes

****

Date de soutenance : 12 Mai 2004

Composition du Jury

Messieurs	Y. Chéron	Rapporteur
	B. Davat	Rapporteur
	F. Costa	Rapporteur
	G. Meunier	Président
	V. Mazauric	Examinateur
	J. Roudet	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Chéron, Costa et Davat pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail de recherche. Leur avis et critiques sont autant de bons conseils qui me serviront pour a poursuite de mon travail.
Un grand merci aussi à Vincent Mazauric, rapporteur de ce travail, qui est convaincu de l'apport de cette recherche de modélisation au niveau industriel et m'a soutenue dans ce sens à l'aide de contrats.

Je voudrai aussi remercier Mr Belorizky pour ses précieux conseils concernant l'écriture de ce manuscrit.

Bien entendu, tout le travail exposé dans ce manuscrit est le fruit de la collaboration de plusieurs personnes. Je tiens à les remercier très chaleureusement.

- Merci à James ROUDET pour m'avoir toujours soutenue dans le domaine de la recherche même si parfois ce n'est pas évident de concilier enseignement, recherche et vie privée,
- Merci à Jean-Luc SCHANEN pour m'avoir laissée une place à ses côtés et pour toujours me proposer de nouveaux enjeux,
- Merci à Gérard MEUNIER pour son soutien et son accueil au sein du monde de la modélisation,
- Merci à Jean-Michel GUICHON avec qui j'aime travailler. Nos discussions sont parfois utopiques, contradictoires mais toujours très enrichissantes.

Enfin merci à tous ceux, Jean-Paul et Robert en tête, qui m'ont aidée de près ou de loin à trouver ma place au sein du laboratoire et de l'IUT.

Intégration de la méthode Partial Element Equivalent Circuit (PEEC) pour la modélisation, l'analyse et la conception des interconnexions dans les systèmes complexes

1. Introduction p. 7

2. **Méthodes** de modélisation – Formulations p. 15
   - 2.1. Equations à résoudre
   - 2.2. Différents niveaux de modèles – du plus grossier au plus fin
   - 2.3. Différentes méthodes – empirique / analytique / numérique
   - 2.4. Méthode PEEC pour les basses fréquences
     - *Principe*
     - *Formulations pour le calcul de L et M*
     - *Prise en compte des pertes Joule*
     - *Prise en compte d'un plan de masse*
     - *Maillage*
     - *Modèle électrique*
     - *Utilisation du modèle*
   - 2.5. Prise en compte des effets capacitifs
   - 2.6. Cas non quasi-stationnaire : Méthode rPEEC
   - 2.7. Méthode Multiconductor Transmission Line (MTL) pour les hautes fréquences
     - *Principe*
     - *Matrice impédance caractéristique*
     - *Formulations pour un conducteur au dessus d'un plan de masse*
       - Cas du plan de masse parfait
       - Cas du plan de masse non parfait
     - *Généralisation à une structure multi-boîtiers (plusieurs conducteurs parallèles au-dessus d'un plan de masse)*
       - Cas du plan de masse parfait
       - Cas du plan de masse non parfait
     - *Conclusions*
   - 2.8. Validation expérimentale

3. **Analyse** de systèmes – Faits marquants et avancées significatives p. 43
   - 3.1 Calcul du courant (application à l'alimentation d'un transformateur)
     - *Courants globaux par phase*
     - *Répartition du courant dans une phase*
     - *Remarques*
   - 3.2. Calcul de la densité de courant (application à une pièce de raccordement avec ailettes – fonction refroidissement)
   - 3.3. Calcul de la puissance dissipée (application au jeu de barres Magellan)
   - 3.4 Calcul de l'induction (application à une usine)
   - 3.5 Calcul des efforts électrodynamiques (application à une structure de test de fusibles)
   - 3.6 Calcul d'impédance équivalente (application à des structures d'électronique de puissance)
   - 3.7 Autres analyses

Influence de la résistance de contact (application à un disjoncteur)
Influence de la nature du matériau (application à une borne de connexion)
3.8 Application de la méthode MTL
Recherche de l'impédance ramenée dans le cas d'un conducteur unique
Recherche de l'impédance vue de la source dans le cas d'un conducteur unique
Généralisation à la mise en cascade de plusieurs tronçons
Généralisation à une structure multi boîtiers
Recherche du courant et du potentiel le long d'un câble
Conclusion

4. **Conception** - Optimisation de systèmes p. 73
4.1 Principe de l'optimisation
4.2. Applications
Optimisation d'agencement de conducteurs
Optimisation de la forme de la section des conducteurs
Placement de trous dans des bus barres
4.3. Conclusions et perspectives
Diversifier les algorithmes d'optimisation utilisés
Travailler sur la robustesse des formulations utilisées

5. **Intégration** - Vers une plate-forme logicielle p. 84
5.1 Identification des différents modules indépendants
5.2 Vers une plate-forme de formulations
5.3 L'étape du maillage
5.4 Couplages
Couplage avec un simulateur électrique
Couplages avec les autres domaines de la physique
Couplage avec les éléments finis

6. Conclusions p. 91

Bibliographie p. 93

Glossaire : Noms des différentes méthodes et approches de modélisation p. 97

Annexes p. 99

Annexe A : Modélisation d'un plan de masse – Comparaison des méthodes des images et PEEC – Validation des hypothèses de calcul
Annexe B : Méthode rPEEC : application au cas de la ligne microruban et validation
Annexe C : Formulations développées dans le cas de n conducteurs au-dessus d'un plan de masse non parfait pour la méthode MTL
Annexe D : Expression de l'induction en tout point de l'espace

Intégration de la méthode Partial Element Equivalent Circuit (PEEC) pour la modélisation, l'analyse et la conception des interconnexions dans les systèmes complexes

Avant propos

Dans bien des domaines industriels, le progrès amène une complexité des systèmes toujours croissante. Les systèmes du génie électrique n'échappent pas à cette règle. Jusqu'à présent la conception de ces systèmes, tout du moins au niveau industriel, repose sur l'expérience antérieurement acquise et principalement la validation expérimentale.

Le recours à des architectures distribuées accroît de façon sensible la complexité des systèmes en ajoutant le risque des interactions entre eux.

Il faut donc faire une pause afin d'envisager l'évolution des méthodes de conception, non pas en niant le passé mais en s'appuyant plus encore sur la modélisation qui, si elle est bien utilisée, peut s'avérer utile à la fois en analyse et en conception.

Pour être plus précis, les systèmes que l'on rencontre de nos jours comprennent toutes les fonctions électriques du transformateur jusqu'aux récepteurs. La figure suivante (Fig. 1) présente une installation typique où l'on retrouve le transformateur triphasé, les jeux de barres de distribution de l'énergie ainsi que le disjoncteur. Des piquages répartis le long du jeu de barres de distribution permettent alors d'alimenter successivement les différents récepteurs constitués de bus barres, de modules d'électronique de puissance, de machines électriques, ...

L'analyse des systèmes globaux va donc consister non seulement en une modélisation des différents constituants mais aussi de l'ensemble afin de prendre en compte les différentes interactions.

Quant à leur optimisation, il est de plus en plus difficile de concevoir de nouveaux systèmes et prévoir leur comportement par simple évolution pas à pas de structures existantes. Tout remettre « à plat » est bien souvent nécessaire afin d'explorer des combinaisons nouvelles riches d'innovation.

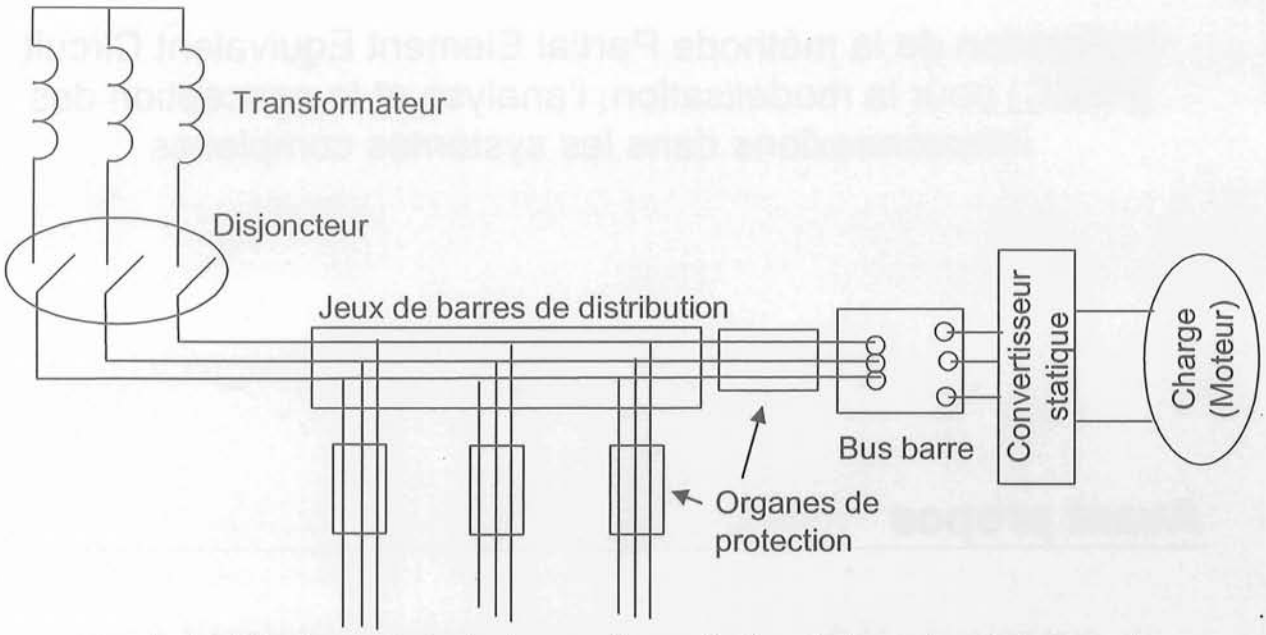


Fig. 1 : Architecture générale des systèmes (usine, train, avion, bateau, ...)

1. Introduction

Comme nous venons le voir dans l'avant propos, la **conception** de systèmes complexes ne peut être réalisée actuellement sans faire appel à la modélisation.
La demande industrielle concernant la modélisation des systèmes électriques ainsi que l'aide au dimensionnement ont beaucoup évolué ces dernières années.
L'enjeu majeur dans ce domaine est de pouvoir soit analyser, soit prédire le fonctionnement de systèmes complexes de grande taille en vue, par exemple, de les améliorer.
Ces derniers sont maintenant conçus comme de véritables réseaux pour lesquels la transformation ultime de l'énergie et le traitement de l'information se font en bout de chaîne. Les fonctionnalités sont disséminées. Se pose alors la problématique du transport de l'énergie et de l'information. Si on prend l'exemple d'un réseau de bord de voiture, le nombre d'actionneurs est de plus en plus élevé. Chacun a une fonction particulière. Il s'agira donc de les alimenter au mieux (en limitant les pertes) et de faire en sorte qu'ils ne se perturbent pas mutuellement.
Dans le cadre de l'étude des réseaux de bord d'avion, ces derniers réalisent une boucle. A partir d'un calculateur central l'information transite pour être traitée localement par un autre calculateur. Ce n'est alors qu'à cet endroit que l'on retrouve les organes de traitement de l'information et de transformation de l'énergie (électronique de puissance et actionneurs).
Le point commun à ces deux exemples est bien la transmission du signal, de puissance ou non, via des interconnexions. On se retrouve en présence de signaux particuliers aussi bien par leur amplitude (calibre en courant et tension des composants des structures d'électronique de puissance) que par leur forme. Des problèmes d'harmoniques peuvent apparaître dans différentes gammes de fréquence. La liaison électrique, composant de tout dispositif électrique, n'est pas si anodine que cela.
En effet, si l'on prend l'exemple de plusieurs structures d'électronique de puissance alimentées en parallèle. La question que l'on peut légitimement se poser, concerne le dimensionnement de filtres actifs et leur localisation dans le dispositif complet. Afin d'être sûr des signaux reçus par chacun des convertisseurs statiques (CS), la solution la plus souvent retenue est de mettre en amont un filtre. Les signaux qui transitent d'une structure à l'autre sont donc « propres » et dans cel cas le dimensionnement des interconnexions est peu critique. L'inconvénient d'une telle solution est le nombre élevé de filtres qu'il s'agit de dimensionner. Une alternative est de positionner un « gros » filtre en début de chaîne comme le montre la figure 2. Ce dernier permet d'assurer un faible taux de perturbations. En contrepartie, la nature des signaux allant d'une structure à l'autre sera telle qu'il faudra probablement

surdimensionner les interconnexions ou dans un premier temps, mieux connaître les interconnexions. Mais, quelle est la bonne stratégie ?
Le coût n'est bien entendu pas le seul critère de choix. La fiabilité des structures, le cycle de vie des composants, la maintenance sont d'autres facteurs à prendre en compte.

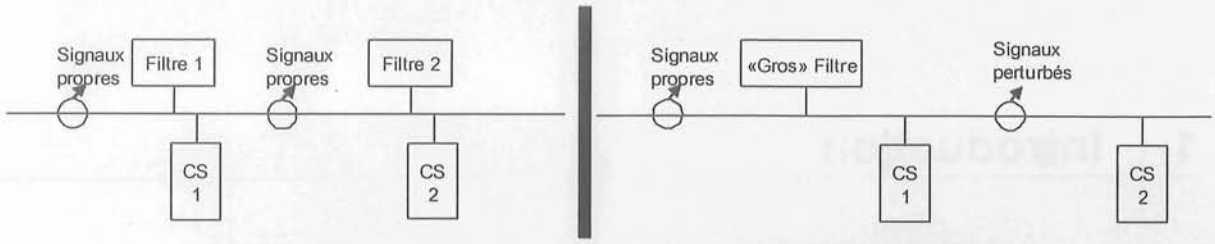


Fig. 2 : Filtrage des signaux – Quelle stratégie adopter ?

On voit donc bien apparaître la nécessité de **dimensionner ces interconnexions** électriques. Cette démarche, pourtant bien connue dans le domaine de l'électronique haute fréquence, doit être étendue non seulement pour tout type de connectique mais aussi pour tout type d'application du génie électrique.
Le rôle des interconnexions électriques est de transmettre l'énergie ou le signal entre les composants discrets d'une structure. Ces différents composants peuvent être des onduleurs, transformateurs, appareillages, machines électriques ou boîtiers électroniques facilement identifiables. Dans un processus de modélisation et de conception, la stratégie la plus communément adoptée est de décomposer le dispositif en briques élémentaires traduisant chacune une fonctionnalité bien particulière et d'élaborer un modèle pour chacune d'elles.
Pour ce faire, on suppose connues les grandeurs d'entrées : le volume, la puissance dissipée pour le dimensionnement d'un refroidisseur, auxquels on ajoute les formes d'onde pour un composant bobiné par exemple, et on élabore ainsi un modèle dont le degré de finesse dépendra à la fois des hypothèses nécessaires à la résolution des équations retenues et des grandeurs de sortie. Par exemple, si l'on veut visualiser la densité de courant dans la section droite d'un conducteur, celle-ci variant avec la fréquence, il faudra mailler le conducteur. En revanche si c'est le courant global qui nous intéresse, une bonne estimation de ce dernier pourra être effectuée sans maillage. La dimension des modèles établis sera donc variable.
Cette analyse séparée des différents constituants d'un dispositif permet ainsi de s'affranchir des problèmes de modélisation liés aux différentes échelles de temps présentes dans les ensembles convertisseurs machines (Modulation de Largeur d'impulsion ou MLI, constante de temps mécanique, fréquence du réseau, ...). On peut ainsi séparément prendre en compte les différentes phases présentes dans la commutation d'un composant semi conducteur. C'est à ce stade là que l'on se rend compte de l'hétérogénéité des modèles élaborés selon le composant étudié. Il va se poser alors le problème de faire dialoguer ces différents modèles. C'est ce que nous aborderons sous le vocable **intégration logicielle**.

Au sein même des différentes briques telles que nous les avons définies précédemment, on retrouve des conducteurs. D'où la nécessité de les prendre en compte à tous les niveaux mais pas obligatoirement avec le même objectif.
Dans ce manuscrit nous allons nous intéresser plus particulièrement à la **conception des interconnexions** en tant que composants à part entière mais aussi comme média pour intégrer les différents composants dans leur environnement. On entend

par environnement une usine, un avion, une voiture ou un train, un équipement industriel voire même un satellite : pour chacun d'entre eux, on peut identifier une série de questions auxquelles il faut répondre dès la phase de conception du câblage. Notons que nous ne intéresserons pour l'instant qu'aux **interconnexions rigides**.

Les principaux types de connexion que l'on rencontre sont présentés sur la figure suivante (Fig. 3) allant des jeux de barres de distribution de l'énergie (a), au module de puissance ou au convertisseur statique (b) jusqu'au bus barre (c).

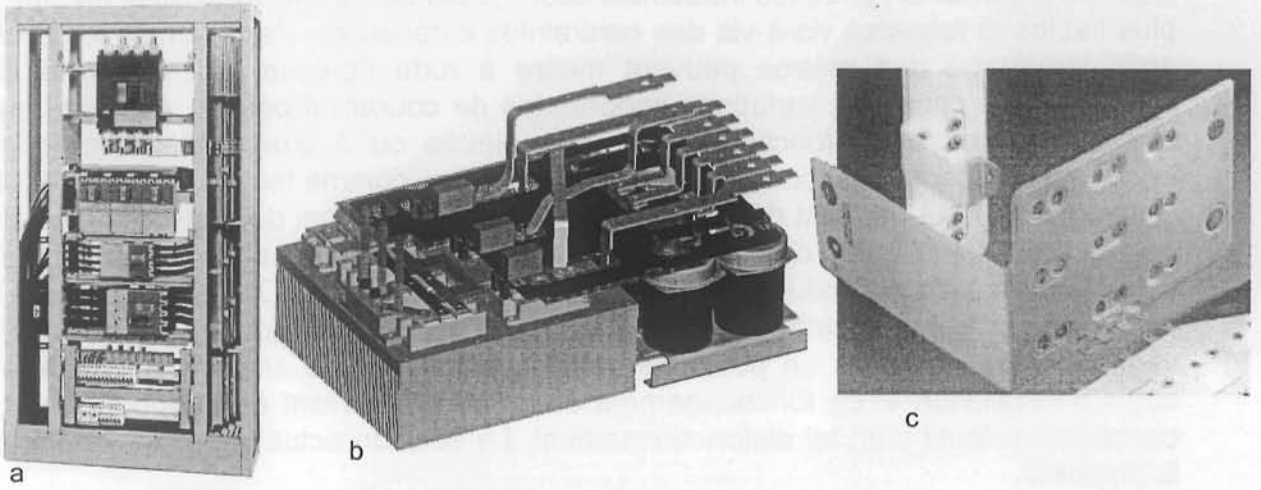


Fig. 3 : Différents types de connectique

Les **problèmes** qui se posent lors du dimensionnement des liaisons conductrices sont de plusieurs ordres :

Il s'agira de répondre à des exigences de compacité des structures cumulées avec une augmentation des puissances transportées. En effet, si l'on prend l'exemple du câblage d'un train, dans un minimum de place on doit faire cohabiter différentes fonctionnalités électriques du traitement de l'énergie ou de l'information. Cela va engendrer forcément des contraintes supplémentaires sur la réalisation des interconnexions car il faudra toujours respecter la qualité de l'énergie :

- Le câblage en parallèle des composants de puissance implique un équilibrage des courants pour un meilleur dimensionnement des composants ainsi qu'une meilleure durée de vie,
- La maîtrise et la réduction des surtensions sont un objectif majeur,
- La réduction des perturbations entre fonctionnalités (interaction puissance-commande) dans les structures d'électronique de puissance est nécessaire,
- ... .

Bien entendu, pour des questions de coûts de fonctionnement et de matière il est intéressant de limiter la puissance dissipée par ces connexions. Ainsi si on prend l'exemple du câblage d'une usine, les canalisations préfabriquées et les armoires de distribution constituent un maillon essentiel de la chaîne de distribution électrique. A titre d'exemple, la partie basse tension d'une usine comporte en moyenne près de 1 km de barres. On voit donc que le nombre de mètres de barres de distribution n'est pas anodin ainsi que le poids et le coût du cuivre utilisé. Limiter les chutes de tensions en ligne n'est pas le seul enjeu. Si l'on arrive à réduire les pertes des

barres, on peut alors escompter une économie d'énergie substantielle vu la durée de vie d'un tel dispositif. On peut aussi décider de conserver le même niveau de pertes, cela se traduira alors par une augmentation de la puissance transportée par les barres ou pour une même puissance transportée par une diminution du cuivre utilisé et donc un gain de matière première. Cela aura bien entendu un impact sur la température de fonctionnement des dispositifs.
Maîtriser la température des dispositifs est impératif dans le cadre de la conception du refroidissement des structures, leur isolation pour la sécurité des personnes (par exemple, on ne doit pas se brûler lorsqu'on touche les parois d'une armoire de distribution électrique parfois à 60°C). Mais ce paramètre entre en considération pour d'autres aspects. En effet, les industriels désirent concevoir des dispositifs de plus en plus fiables et robustes vis-à-vis des contraintes extérieures. Par exemple les cycles arrêt-démarrage des métros peuvent mettre à rude épreuve tout ou partie des installations à cause de variations importantes de courant répétées. Ainsi par suite d'une température de fonctionnement trop élevée ou à d'un cyclage thermique important, les caractéristiques de certains matériaux, comme les diélectriques ou les colles, évoluent et peuvent dégrader le fonctionnement global du système jusqu'à sa destruction. Dans l'étude du cycle de vie d'un produit, de ses performances et de sa fiabilité, c'est bien entendu un facteur à prendre en compte. Or jusqu'à présent, la conception a conduit parfois à des aberrations telle que l'ajout a posteriori d'un ventilateur pour refroidir un poste de transformation ou une armoire électrique, les coûts d'installation et de fonctionnement de ce dernier devant être supportés par le constructeur fautif d'un tel disfonctionnement. La solution actuelle : surdimensionner le dispositif.

- D'ici quelques années une norme européenne concernant le niveau de champ magnétique à l'extérieur des installations entrera en vigueur. L'impact d'un champ magnétique sur les personnes n'est pas encore clairement identifié. Au nom du principe de précaution et pour répondre à un souci sanitaire, des études tentent d'évaluer l'impact d'un champ magnétique sur l'être humain. Mais en attendant le plus sûr moyen est de le limiter à partir d'une certaine distance des appareils ou tout du moins de pouvoir le prévoir.

Nous avons déjà cité les problèmes liés aux perturbations entre fonctions électriques qu'il faudra gérer à l'aide d'un câblage approprié des composants. C'est ce que nous mettons sous le vocable CEM (compatibilité Electromagnétique). Les perturbations présentes dans de tels systèmes peuvent être classées en deux catégories selon la gamme de fréquence. Les perturbations « basses fréquences » qui sont des perturbations de mode conduit et celles « hautes fréquences » que font référence au mode rayonné. Les méthodes de modélisation à appliquer seront différentes selon le cas considéré à condition que l'on puisse clairement identifier et donc séparer les différents modes de propagation. Ainsi typiquement dans un satellite, les signaux qui transitent sont à haute fréquence. Les fonctionnalités, pour des raisons de fiabilité, ont été plus que dupliquées. La redondance est très présente dans ce genre de structure. Il s'agira dans ces applications de mieux comprendre les interactions HF et de mieux agencer les boîtiers électroniques.

Dans ce cadre, on ne peut plus se permettre de faire reposer cette étape de modélisation et dimensionnement du câblage uniquement sur l'empirisme ou des règles de calcul simples d'homothétie. Nous allons montrer qu'il est possible d'établir

une méthodologie de modélisation très générale permettant de couvrir le large domaine d'applications cité plus haut.
En effet, d'après les différents problèmes cités précédemment, le dénominateur commun à une solution semble être de disposer d'une représentation électrique des interconnexions. En effet, leurs caractéristiques électriques propres ainsi que leurs couplages (par effets mutuel et capacitif) interviennent dans l'évaluation des courants, tensions, pertes et autres grandeurs de dimensionnement. Tout l'art est de trouver les meilleures méthodes pour obtenir cette représentation ou ce modèle et ensuite de l'utiliser. On aborde alors ici les **moyens** dont on dispose pour cette étude.
Une des méthodes la plus communément répandue pour résoudre des problèmes d'électromagnétisme est la méthode des éléments finis. Elle est très généraliste puisqu'elle permet de résoudre numériquement, en tout point d'un domaine maillé, les équations de Maxwell. Cependant son utilisation est très délicate et parfois impossible selon la géométrie des problèmes traités du fait d'un nombre trop élevé de mailles ou de formes de mailles entraînant un mauvais conditionnement de la matrice à traiter par la suite. Un des gros inconvénients des problèmes que l'on cherche à analyser est que la majorité du volume à modéliser est constitué d'air qu'il faut forcément mailler dans une approche à éléments finis. Ceci est très pénalisant. Nous avons donc cherché une méthode permettant de ne pas mailler l'air ce qui revient à concentrer l'énergie dans les conducteurs. La méthode qui semble alors la mieux adaptée à ce jour à cette problématique est la méthode PEEC qui signifie Partial Element Equivalent Circuit établie par A. Ruehli [RUE 72]. D'abord développée pour modéliser des connectiques d'électronique, elle nous est apparue intéressante pour le domaine de l'électronique de puissance et a effectivement donné de bons résultats sur des applications particulières. Au fur et à mesure de son utilisation, elle s'est aussi révélée intéressante dans d'autres domaines tels que l'électrotechnique basse fréquence, moyennant quelques adaptations.

- On montrera que dans les phases de modélisation et d'analyse, elle est aussi fiable et pratique d'utilisation que les éléments finis souvent considérés comme la référence quand il s'agit d'aborder la compréhension des phénomènes électromagnétiques. Le seul bémol que l'on peut émettre est la non prise en compte, pour l'instant, de la présence de matériaux magnétiques dans les dispositifs.

- Dans le domaine de la conception, elle a d'ores et déjà fait ses preuves et son intérêt est incontournable. Le fait qu'elle repose sur des formulations analytiques et que seul le maillage des conducteurs soit exigé la rend facilement utilisable dans des processus d'optimisation. On verra que l'on envisagera à la fois d'améliorer l'agencement des conducteurs mais aussi la forme même de ces conducteurs.

- C'est une méthode qui propose un schéma électrique équivalent des interconnexions. Ce modèle est suffisamment généraliste pour pouvoir dialoguer avec des modèles plus complexes tels que ceux établis pour des transformateurs ou des appareillages électriques et permettre ainsi l'analyse de dispositifs complets.

- Elle est très intéressante dans le cadre du développement d'un outil de

modélisation et de conception **métier**, c'est-à-dire dédié selon le domaine d'application visé, car elle est propice à des simplifications (plusieurs formulations disponibles selon la forme de la géométrie par exemple).

- Enfin, si l'on souhaite ensuite prendre en compte la thermique des structures, la philosophie proposée par la démarche PEEC semble adaptable à cette problématique pour laquelle les différents modes de transfert de la chaleur peuvent être caractérisés par des éléments localisés.

La modélisation des seules connexions dans une structure n'est pas une fin en soi. L'analyse des structures dans leur ensemble nécessite de rajouter les modèles des autres composants. Par exemple pour des applications d'électronique de puissance ce seront les modèles des semi conducteurs (diode, igbt) et autres composants passifs (transformateurs, inductances, ...). Chaque structure ou système ainsi modélisé, nous pouvons alors entreprendre à la fois son analyse et/ou son dimensionnement. D'un point de vue macroscopique cette étude, plus ou moins fine, peut nous conduire à élaborer un modèle plus grossier de la structure de façon à pouvoir simuler le comportement de l'ensemble du réseau étudié, à savoir les différentes structures (ou composants) et les interconnexions entre elles. On aura ainsi abordé la modélisation du système en partant du plus petit pour aller vers l'ensemble et estimer les perturbations subies et engendrées par chacun des constituants du réseau.
Cette démarche implique nécessairement de faire coexister plusieurs types de modèles. La meilleure solution est de définir un **environnement** de modélisation dans lequel il s'agira de les faire dialoguer et de disposer d'une plate-forme de modèles que l'on puisse **intégrer** facilement dans l'environnement de modélisation choisi. Voici un autre aspect du mot intégration que nous aborderons aussi dans ce mémoire.
En effet nous ne recherchons pas à développer un outil de modélisation généraliste dont le domaine d'applications serait le plus large possible et dans lequel on intègrerait plusieurs méthodes de modélisation. Nous partons du principe qu'on ne peut répondre simultanément aux questions suivantes :

- avoir un outil utilisable facilement,
- traiter tous les cas possibles,
- réaliser tous les couplages avec les autres domaines de la physique (thermique, mécanique, ...),
- disposer de grandeurs globales et locales,
- disposer de modèles fins et grossiers,
- pouvoir réaliser une optimisation dans l'espace des solutions retenues.

L'objectif que nous poursuivons est de cerner le plus complètement possible la modélisation des interconnexions afin de fournir à l'utilisateur un modèle fiable et que l'on puisse intégrer dans une chaîne de CAO des structures globales. Cela veut dire :

- identifier les hypothèses nécessaires et les domaines d'applications des formulations choisies,
- trouver les formulations pour le maximum de types de connexions,
- faire dialoguer les formulations par l'intermédiaire de l'environnement de modélisation dont on donnera les spécifications,
- spécifier les grandeurs résultats et leur format de telle sorte à pouvoir « attaquer » un autre logiciel et coupler ainsi les méthodes de modélisation

et les équations retenues.

Ce dialogue entre modèles, cette compatibilité nécessaire des méthodes de modélisation est source de problèmes pratiques que nous proposons de gérer au sein d'une **plate-forme logicielle de modélisation** des systèmes.

Ceci nous amène à définir le plan du manuscrit. Ce mémoire est composé des 4 parties suivantes :

- Dans une première partie, je vais justifier le choix de la **méthode de modélisation** retenue selon le problème à résoudre. Un bref état de l'art permet de recenser des méthodes entièrement numériques (la méthode des éléments finis ou la méthode des moments) et d'autres qui le sont partiellement (la méthode PEEC ou la méthode TLM). Les premières sont mal adaptées en vue de l'obtention immédiate d'un modèle pour la connectique. En effet le modèle retenu est un schéma électrique équivalent du conducteur décrit à l'aide de ses caractéristiques géométriques et physiques (matériau). Les secondes méthodes de modélisation sont alors mieux adaptées puisqu'elles font appel à des formulations analytiques dépendant des paramètres géométriques du dispositif. Selon que l'on néglige ou non les phénomènes de propagation le long des conducteurs, les formulations de base donnant la valeur du modèle électrique changent, mais le principe général de modélisation est conservé. Les différentes formulations seront dans cette partie rappelées. C'est l'approche PEEC qui consiste à extraire les paramètres électriques d'une géométrie maillée ou non qui a été retenue et sera expliquée. Une fois le modèle à constantes localisées établi, son utilisation va dépendre du domaine fréquentiel et est détaillée dans cette partie. Dans le domaine des basses fréquences, on l'appelle méthode PEEC. Dans le domaine des hautes fréquences, elle prend le nom de rPEEC pour retarded PEEC. Nous comparerons cette dernière à la méthode MTL qui repose sur un modèle à constantes réparties. Cette dernière sera détaillée car elle repose sur la même démarche que la méthode PEEC (maillage simple des conducteurs) mais la nature du modèle est différente. Enfin, un paragraphe sera consacré à la validation expérimentale du modèle et des formulations retenues. A cette occasion, nous verrons que cet aspect est très délicat et parfois impossible à mettre en œuvre.

- Au cours de la deuxième partie, je montrerai comment, à l'aide du schéma électrique équivalent des conducteurs, on peut alors faire **l'analyse** de dispositifs complexes. Ainsi à l'aide de plusieurs exemples industriels, je détaillerai les potentialités apportées par l'approche PEEC. Pour les applications basses fréquences, il s'agit de la détermination de grandeurs « primaires » (directement issues de la résolution des équations de circuit) telles que le courant global, la densité de courant, les pertes mais aussi des grandeurs telles que l'induction en tout point de l'espace, les efforts électrodynamiques entre conducteurs, la matrice impédance équivalente d'un dispositif et d'autres analyses spécifiques à des problèmes particuliers et ponctuels. Pour la méthode MTL, il s'agira de déterminer un modèle global d'une ligne ou de plusieurs lignes comportant deux ou plusieurs boîtiers et d'évaluer le courant et le potentiel en tout point de la ligne. Toutes les applications sont autant de faits marquants qui nous ont fait progresser dans notre expertise et ont représenté des avancées significatives.

- Dans la partie suivante, je montrerai ce que l'on peut attendre d'une démarche de **conception** reposant sur les méthodes de modélisations retenues. Je présenterai les premières tentatives d'optimisation de structures effectuées avec les gains escomptés et les enjeux formidables attendus. D'ores et déjà, de nombreuses pistes encourageantes se profilent.

- Enfin, bien entendu, pour mettre en œuvre tout ce qui précède, un outil a été développé. Cette dernière partie sera consacrée à **l'intégration** des différents résultats présentés dans les parties précédentes. L'environnement de modélisation et de conception présenté dans cette partie est le projet à long terme que je poursuis permettant de mettre en œuvre tous les travaux de recherche concernant la modélisation de la connectique en général pour l'électrotechnique et l'électronique de puissance. Tout ceci afin d'aboutir à un ou plusieurs outils de modélisation et de conception « métier », c'est-à-dire étant plus particulièrement adapté à tel ou tel type de connectique ou à tel ou tel enjeu (détermination des courants ou des pertes ou des impédances).

2. Méthodes de modélisation - Formulations

Il existe de nombreux modèles : du plus fin (éléments finis) au plus grossier (analytique simplifié).
Il est clair que si l'on veut pouvoir analyser la totalité du dispositif, qui est très hétérogène comme nous l'avons souligné dans l'introduction, il ne faut pas un modèle trop compliqué. Mais pour pouvoir se fier aux résultats obtenus, celui-ci doit tout de même avoir un domaine de validité large et une pertinence accrue.
Tout l'art du modélisateur sera donc de combiner différents modèles (empiriques, semi analytiques, comportementaux, ...), de faire coexister différentes approches (analytiques, numériques, ...) afin d'obtenir des résultats pertinents. C'est ceci que nous voulons mettre en application pour la future plate-forme de conception des structures.

2.1. Equations à résoudre et hypothèses

Les équations à résoudre sont toujours les mêmes : les équations de Maxwell (Eq. 1).

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{E} : \text{Champ électrique} \\ \vec{H} : \text{Excitation magnétique} \\ \vec{B} : \text{Champ magnétique} \\ \vec{J} : \text{Densité de courant} \\ \vec{D} : \text{Courant de déplacement} \\ \rho : \text{Densité de charges électriques} \end{cases} \qquad \text{Eq. 1}$$

Les hypothèses que l'on peut aisément faire sur le dispositif étudié sont :
Pas de courant de déplacement : $\vec{D} = \vec{0}$. Ceci est possible si la longueur d'onde λ des signaux est grande devant les dimensions du problème.

A f = 50 Hz, $\lambda = \dfrac{c}{f} = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$ (avec c = 3 10^8 ms^{-1}).

Ceci a pour conséquence que la distribution de charges en surface des conducteurs est nulle.
Les milieux sont homogènes et isotropes : ε = constante, μ = constante.

On va aussi utiliser les relations suivantes : $\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E}_{tot} \end{cases}$ Eq. 2

La solution des équations de Maxwell n'est connue de manière exacte que dans quelques cas très simples et donc rares industriellement.
Pour les résoudre, il nous faudra donc :
- soit les simplifier,
- soit restreindre le domaine d'étude,
- soit les résoudre de façon numérique.

2.2 Différents niveaux de modèles – du plus grossier au plus fin

La méthode utilisée pour résoudre les équations précédentes va être, bien entendu, fonction du niveau du modèle requis.
Afin d'être utilisable, le modèle que l'on cherche à établir doit avoir une signification pour l'utilisateur ; ici un modèle électrique semble approprié vu le métier visé.

- Le plus grossier est bien entendu de supposer les connexions comme de parfaits courts-circuits.

- On peut ensuite rechercher de ne prendre en compte que les pertes Joule supplémentaires apportées par les connexions et les remplacer par une simple résistance équivalente.

- Mais si on regarde plus en détail les phénomènes, l'état magnétique du dispositif a une influence non négligeable sur les grandeurs recherchées. En effet, dans tout circuit électrique, il y a des boucles de courant qui vont donc être sensibles à elles-mêmes (flux propre ou inductance) ou au champ magnétique créé par un autre courant (inductance mutuelle). Ceci aura d'autant plus d'importance qu'il y aura de fortes variations temporelles de courant dans la structure étudiée. Il nous faut donc en tenir compte.

Le champ électrique total $\vec{E}_{tot}$ se décompose en une composante appliquée $\vec{E}_0$ et une composante induite $\vec{E}$ qui provient des charges et des courants du circuit lui-même.

On peut l'écrire comme suit : $\begin{cases} \vec{E}_{tot} = \vec{E} + \vec{E}_0 \\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \end{cases} \Rightarrow \vec{E_0} = \dfrac{\vec{J}}{\sigma} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} V$ Eq. 3

En combinant les relations précédentes, pour une structure à K conducteurs, on aboutit à l'équation qui suit :

$$\vec{E}_0(\vec{r},t) = \frac{\vec{J}(\vec{r},t)}{\sigma} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V_k} \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \right) + \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V_k} \frac{q(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \right) \quad \text{Eq. 4}$$

où : r est la position du point d'observation,
r' est la position de l'élément d'intégration,
t' le temps retardé donné par $t' = t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\nu}$,
ν est la vitesse de propagation : $\nu = \dfrac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$.
Les inconnues sont J la densité de courant et q la charge.

Un maillage de chaque conducteur en volumes élémentaires (V_ℓ) appelés mailles (Fig. 4), va permettre de supposer ces inconnues constantes sur chaque maille.
Prenons une base orthogonale (x,y,z) afin d'exprimer plus simplement le gradient de Eq. 4. Soit $N_{k\gamma}$ le nombre total de mailles dans chaque direction pour le conducteur k, la projection de Eq. 4 sur chacune des directions donne alors :

$$E_0\gamma(\vec{r},t)=\frac{J_\gamma(\vec{r},t)}{\sigma}+\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N_{k\gamma}}\left[\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_{nk}}\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}d^3r'\right]\frac{\partial J_{nk\gamma}(t_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_k}\frac{q(\vec{r'},t')}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}d^3r'\right)$$

où : $\gamma = x, y, z,$
r_n est la position du centre de la maille n,

$$t_n = t-\frac{\left|\vec{r}-\vec{r_n}\right|}{v}.$$

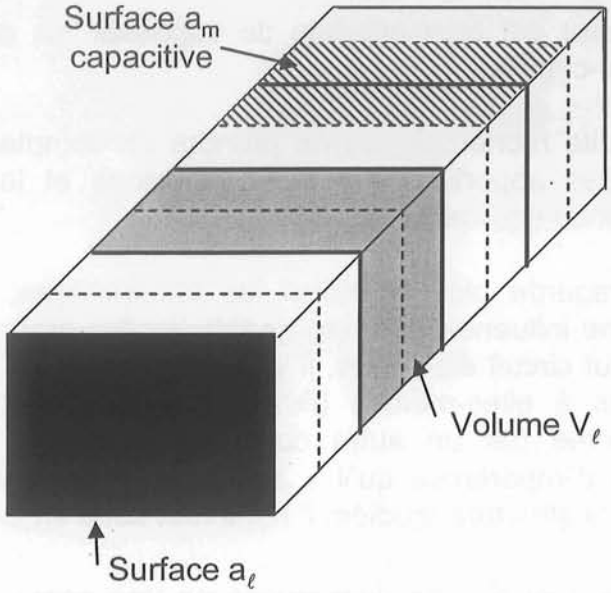


Fig. 4 : Conducteur maillé

Si on intègre l'équation précédente sur la maille ℓ et que l'on divise par la section a_ℓ de l'élément considéré (perpendiculaire à la direction des lignes de courant), on obtient :

$$\frac{1}{a_\ell}\int_{V_\ell}E_0\gamma(\vec{r},t)dV_\ell=\frac{1}{\sigma a_\ell}\int_{V_\ell}J_\gamma(\vec{r},t)dV'+\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N_{nk}}\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{a_\ell}\left[\int_{V_\ell}\int_{V_{nk}}\frac{d^3r'dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\right]\frac{\partial J_{\gamma nk}(t_n)}{\partial t}$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a_\ell}\int_{V_\ell}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\int_{V_k}\frac{q(\vec{r'},t')}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}d^3r'\right)dV' \qquad \text{Eq. 5}$$

Alors que le terme de gauche est la tension appliquée au circuit, le premier terme de droite traduit les pertes Joule dans le conducteur, le second terme de droite est l'image d'un terme inductif et le troisième terme de droite l'image d'une contribution capacitive.
On peut donc imaginer le schéma électrique équivalent constitué de résistances, inductances et capacités, les éléments magnétiques pouvant être couplés (mutuelles inductances).

2.3 Différentes méthodes – empirique / analytique / numérique

Pour obtenir les valeurs du schéma électrique équivalent, il existe trois types de méthodes.
La plus simple et la première à avoir été expérimentée, repose sur l'expérience. Ainsi dès 1956, de nombreux cas ont fait l'objet de mesures fines dans l'ouvrage « *Copper For Busbars* » [COP] par exemple. On trouve de nombreux abaques paramétrés avec les caractéristiques géométriques des conducteurs.
Mais cette approche n'est pas suffisante pour plusieurs raisons :

- On trouve principalement les caractéristiques propres (inductance et résistance) des conducteurs pour différentes sections, mais les couplages par mutuelles inductances entre conducteurs ne sont pas toujours donnés, et les structures que l'on cherche à modéliser sont multi conducteurs. Les effets de proximité ne peuvent pas être négligés.
- La plage de fréquences concernée par les mesures présentées n'est pas toujours suffisante.
- Le raisonnement à l'aide d'éléments localisés n'est pas possible dans tous les cas.
- Certaines sections de conducteurs ne sont pas traitées.
- Certaines hypothèses sont trop restrictives.

De plus, dans une optique de conception, l'approche empirique n'est pas adaptée.

Viennent ensuite les méthodes analytiques. Elles découlent de la résolution analytique des équations présentées au paragraphe 2.1.
Le problème est que cette résolution nécessite forcément de faire des hypothèses simplificatrices afin de trouver une expression analytique utilisable.

Enfin, nous trouvons les méthodes numériques de résolution. Parmi elles, on distingue deux classes :

- Les méthodes numériques, très générales, qui se déclinent en deux catégories :
  - la méthode aux différences finies consiste à résoudre les équations en des points discrets en remplaçant les équations différentielles par des équations aux différences finies,
  - la méthode des éléments finis dont le principe réside en la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Le domaine d'étude doit être discrétisé en volumes élémentaires. La fonction inconnue (potentiel ou champ) est approchée en tout point du maillage par une fonction polynomiale. La fonctionnelle est alors remplacée par un système d'équations linéaires qu'il est alors possible de résoudre s'il est bien conditionné (lien avec le maillage). Une des difficultés de cette approche est de choisir les conditions aux limites du domaine d'étude ainsi que les symétries simplificatrices.

- Les méthodes intégrales :
  - la méthode des intégrales de frontières peut être utilisée lorsque des hypothèses peuvent être faites sur la surface des domaines (densité de courant ou charges nulles).
  - la méthode des moments, méthode fréquentielle, basée sur la

résolution d'une équation intégrale linéaire en courant. Elle permet de déterminer directement la distribution du courant dans les structures linéaires étudiées ici.

Si l'on regarde maintenant le problème que l'on souhaite traiter (Fig. 3). C'est un véritable problème 3D pouvant être de grandes dimensions.

- Il n'est pas envisageable d'utiliser des abaques car elles sont beaucoup trop complexes en général. On écartera donc les méthodes empiriques.
- Sa description et son analyse dans un logiciel éléments finis type Flux3d ne peuvent être envisagées avec les moyens actuels [CLA 98-1] (maillage de l'air indispensable, conditions aux limites du domaine d'étude souvent délicates à choisir, ...).
- De manière générale, notre objectif étant de pouvoir non seulement analyser mais aussi concevoir des structures, les méthodes de résolution numérique seront évitées. Elles nécessitent en effet un savoir faire de la part du modélisateur : hypothèses, maillage, conditions aux limites, formulations, ... et seront lourdes d'utilisation.

En raison des commentaires précédents, nous allons regarder plus en détail les méthodes analytiques.
Notre principal objectif est la modélisation des conducteurs à l'aide d'un schéma électrique équivalent. C'est une méthode moins généraliste que les méthodes numériques. Néanmoins, nous verrons dans les paragraphes suivants qu'elle permet de traiter beaucoup de configurations. On peut ainsi modéliser chaque constituant du dispositif et assembler ensuite les modèles obtenus pour connaître le comportement global du système. Cette solution est séduisante car elle permet de découpler certains phénomènes physiques et est rapide de mise en œuvre.
Bien sûr, pour répondre ponctuellement à une interrogation, on peut affiner le modèle localement avec les éléments finis. C'est d'ailleurs souvent à cette occasion que l'on traitera les problèmes couplés et qu'on fera intervenir les autres domaines de la physique (thermique, magnétique ...). Nous verrons cet aspect dans la partie de ce mémoire consacrée à l'intégration (cf. chapitre 5).

2.4. Méthode PEEC pour les basses fréquences

Dans le cas des basses fréquences, c'est-à-dire sans phénomène de propagation, on peut donc choisir de modéliser les conducteurs par le schéma à constantes localisées suivant (Fig. 5).

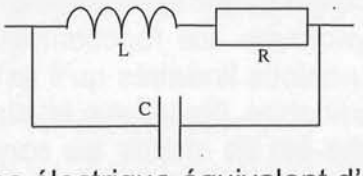


Fig. 5 : Schéma électrique équivalent d'un conducteur

Une des hypothèses précédemment énoncées est l'absence de courant de déplacement, on n'a donc pas besoin de faire intervenir une capacité entre conducteurs.
Un schéma constitué d'une résistance en série avec une inductance semble convenir.

Néanmoins il faut en plus ajouter les effets de mutuelles inductances entre les conducteurs de telle manière à modéliser le plus fidèlement possible les effets de proximité sur la répartition des lignes de courant.
On arrêtera là le modèle électrique d'un conducteur sachant que de toute façon il pourra être enrichi pour prendre en compte par exemple la variation de ses caractéristiques avec la fréquence ou avec la température et affiner ainsi la résolution, en deuxième intention.

La méthode de modélisation utilisée est la méthode PEEC (Partial Element Equivalent Circuit) développée par A. E. Ruehli [RUE 72][RUE 74][RUE 79]. Cette méthode repose sur des formules analytiques, exactes en basse fréquence, issues de calculs analytiques souvent forts lourds.

Principe :
Si l'on s'intéresse dans un premier temps à des conducteurs filiformes, le modèle recherché sera donc simplement une inductance.
L'inductance d'une boucle de courant (Fig. 6) est par définition égale à la circulation du potentiel vecteur sur le contour formé par la boucle. Cette circulation peut être décomposée sur les différents tronçons du contour. De même le potentiel vecteur peut être considéré comme la somme des contributions des différents tronçons ci-dessus identifiés.

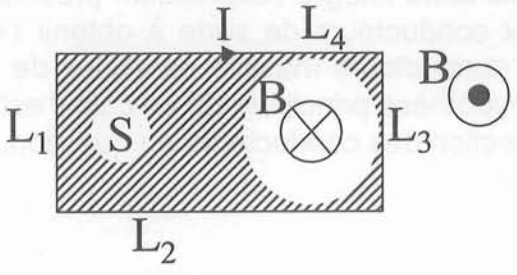


Fig. 6 : Boucle de courant rectangulaire

On aboutit donc à la notion d'inductance et mutuelle inductance partielle puisque finalement l'inductance d'une boucle de courant est la somme des contributions des différents potentiels vecteurs créés par les différents tronçons parcourus par un courant.

$$L_b = \frac{1}{I}\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\int_{C_n}\overrightarrow{A_m}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}M_{pnm} \qquad \text{Eq. 6}$$

M_{pnm} est la mutuelle partielle entre les tronçons n et m et l'inductance partielle d'un tronçon est obtenue pour n = m.

Formulations pour le calcul de L et M :
Dans le cas de conducteurs filiformes, l'expression du potentiel vecteur créé par un courant I est connue. Ainsi on peut aisément calculer l'expression de la mutuelle inductance entre deux conducteurs filiformes (Fig. 7).

On a alors l'expression suivante :

$$M_{p12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[z.\ln\left(z+\sqrt{p^2+z^2}\right)-\sqrt{p^2+z^2}\right]_{l_2+l_3-l_1,l_3}^{l_3-l_1,l_3+l_2} \qquad \text{Eq. 7}$$

avec : $\left[f(z)\right]_{z_2,z_4}^{z_1,z_3} = f(z_1) - f(z_2) + f(z_3) - f(z_4) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} f(z_i)$

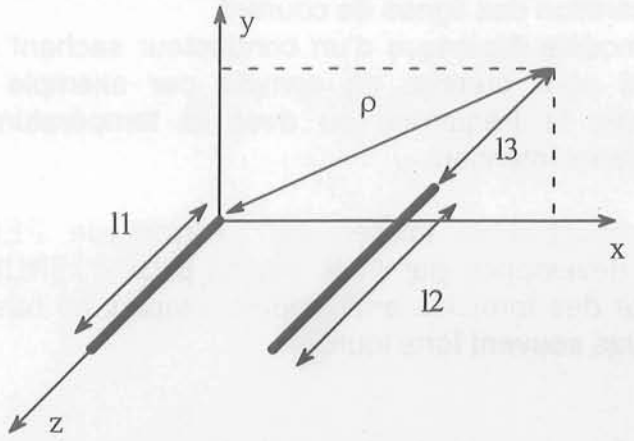


Fig. 7 : Géométrie de 2 conducteurs filiformes parallèles pour le calcul de la mutuelle inductance

Bien entendu, l'hypothèse « conducteurs filiformes » est trop restrictive pour nos applications. De plus elle conduit à des discontinuités et notamment diverge dans le cas du calcul de la mutuelle inductance d'un conducteur sur lui-même (auto inductance). Nous avons alors intégré l'expression précédente (Eq. 7) sur la largeur et l'épaisseur des deux conducteurs de sorte à obtenir l'expression de la mutuelle inductance entre deux conducteurs massifs parallèles de section rectangulaire (Eq. 8) (Fig. 8) [CLA 96]. L'hypothèse principale de ce calcul est que la densité de courant est constante dans la section des conducteurs en question.

On obtient alors :

$$M_{p12} = \frac{0.001}{abcd}\left[\left[\left[\left(\frac{y^2z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24}\right) x \ln \frac{x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}} + \left(\frac{x^2z^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{z^4}{24}\right) y \ln \frac{y + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+z^2}} + \left(\frac{y^2x^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{x^4}{24}\right) z \ln \frac{z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+x^2}} + \frac{1}{60}\left(x^4+y^4+z^4 - 3y^2x^2 - 3y^2z^2 - 3x^2z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{xyz^3}{6} \operatorname{Arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{xy^3z}{6} \operatorname{Arctg} \frac{xz}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^3yz}{6} \operatorname{Arctg} \frac{zy}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right]_{E+d-b,E}^{E-b,E+d} (x) \Big]_{P+c-a,P}^{P-a,P+c} (y) \Big]_{l3+l2-l1,l3}^{l3-l1,l3+l2} (z)$$

Eq. 8

(en μH si les dimensions sont en cm)

avec : $\left[\left[\left[f(x,y,z)\right]_{q_2,q_4}^{q_1,q_3}(x)\right]_{r_2,r_4}^{r_1,r_3}(y)\right]_{s_2,s_4}^{s_1,s_3}(z)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}(-1)^{i+j+k+1}f(q_i,r_j,s_k)$

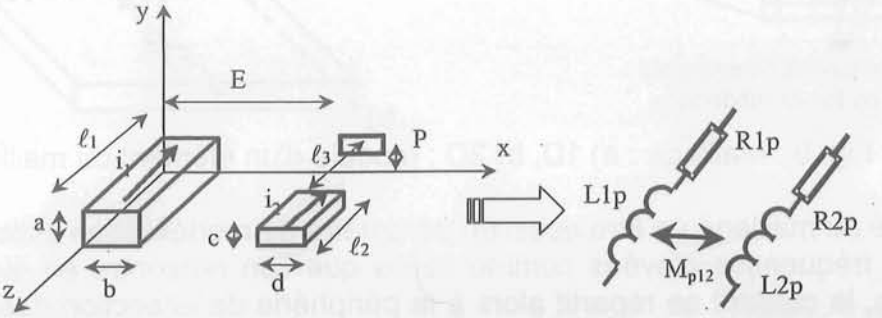


Fig. 8 : Géométrie de 2 conducteurs massifs parallèles pour le calcul de la mutuelle inductance

Il est possible d'arrêter l'intégration à différents niveaux pour établir ainsi la mutuelle inductance entre deux rubans, expression moins lourde que la précédente et utile dans certains cas comme nous le verrons par la suite pour le calcul des coefficients d'influence.

Prise en compte des pertes Joule :
Pour le calcul de la résistance d'un conducteur, on appliquera la définition suivante (Eq. 9) pour laquelle seule la connaissance du matériau (résistivité ρ) et des dimensions du conducteurs (longueur ℓ et section S) est nécessaire. Ceci n'est réaliste que dans le cas volumique.

$$R=\frac{\rho\ell}{S} \qquad \text{Eq. 9}$$

Maillage :
L'hypothèse de base du calcul précédent qui donne toute sa validité à la formulation obtenue est que la densité de courant est constante dans la section du conducteur et que l'on a identifié un trajet privilégié du courant.
Cependant, ceci est trop restrictif pour le domaine d'application visé par la méthode.
Afin de prendre en compte les effets de la fréquence et de proximité sur la répartition des lignes de courant dans la section des conducteurs on a décomposé les conducteurs en conducteurs élémentaires sur lesquels cette hypothèse est valide.
Cette étape, que nous avons appelée maillage, est alors essentielle pour garantir la justesse des résultats obtenus.

Nous avons ensuite distingué deux types de connexions :

Les connexions pour lesquelles il est possible d'identifier un trajet privilégié du courant comme les jeux de barres de distribution. Le maillage appliqué sera alors appelé **maillage 1D** (Fig. 9a).

Les connexions pour lesquelles il n'est pas facile a priori de faire une quelconque hypothèse sur le trajet du courant. Ce sera principalement le cas des bus barres d'électronique de puissance pour lesquels les entrées/sorties du courant sont ponctuelles et la géométrie de la connexion constituée de plaques minces. Dans ce cas le maillage est appelé **maillage 2D** (Fig. 9b).

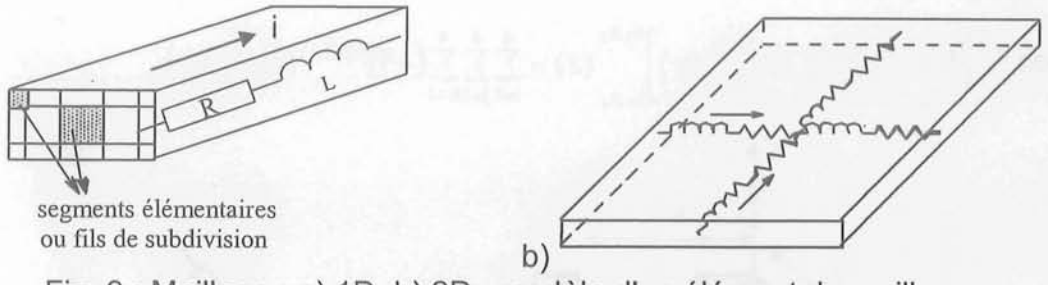


Fig. 9 : Maillage : a) 1D, b) 2D : modèle d'un élément du maillage

La densité du maillage va être aussi un paramètre de modélisation délicat à choisir. Pour des fréquences élevées comme celles que l'on rencontre en électronique de puissance, le courant se répartit alors à la périphérie de la section des conducteurs. La dimension des mailles devra donc être petite. Pour assurer des résultats fiables, il est conseillé de mettre un élément dans l'épaisseur de peau. Pour limiter le nombre de mailles et donc la durée de simulation on peut adapter le maillage. Ainsi on définira un maillage uniforme pour lequel toute les mailles ont la même section ou un maillage géométrique dont la raison sera fonction de la fréquence (Fig. 10) [CLA 95].

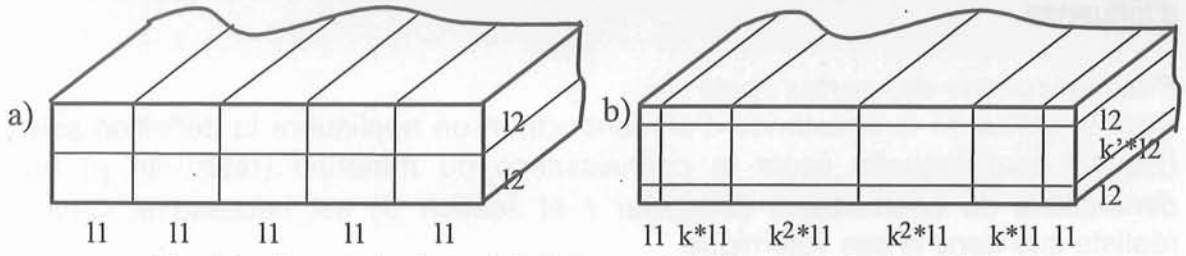


Fig. 10 : Exemple de subdivisions: a) uniforme, b) géométrique

Prise en compte d'un plan de masse :
Les structures en électronique de puissance sont très souvent situées sur un radiateur ou un châssis qui joue le rôle de plan de masse. Circulent alors à l'intérieur des courants qui vont par influence modifier les caractéristiques électriques des interconnexions situées au-dessus.
La méthode la plus simple pour le modéliser est la méthode des images [PED 91]. Elle consiste à remplacer un conducteur au-dessus d'un plan de masse parfait (infini et infiniment conducteur) par ce même conducteur et son image parcourus par des courants opposés comme le montre Fig. 11 s'il est parallèle au plan (a) et des courants de même sens s'il est perpendiculaire au plan (b). Dans le premier cas, son inductance équivalente est $L'_1 = L_1 - M_{1i}$ et dans le second cas $L'_1 = L_1 + M_{1i}$. La résistance partielle quant à elle est inchangée car le plan de masse est considéré comme infiniment conducteur. Ceci a pour conséquence de considérer que les courants qui circulent dans le plan de masse sont surfaciques.

Cependant une difficulté subsiste lorsque la structure est entourée d'une boîte, on se trouve alors en présence de plusieurs plans de masse. Dans ce cas-là, la méthode des images s'applique très difficilement puisqu'elle peut conduire à une suite infinie d'images.

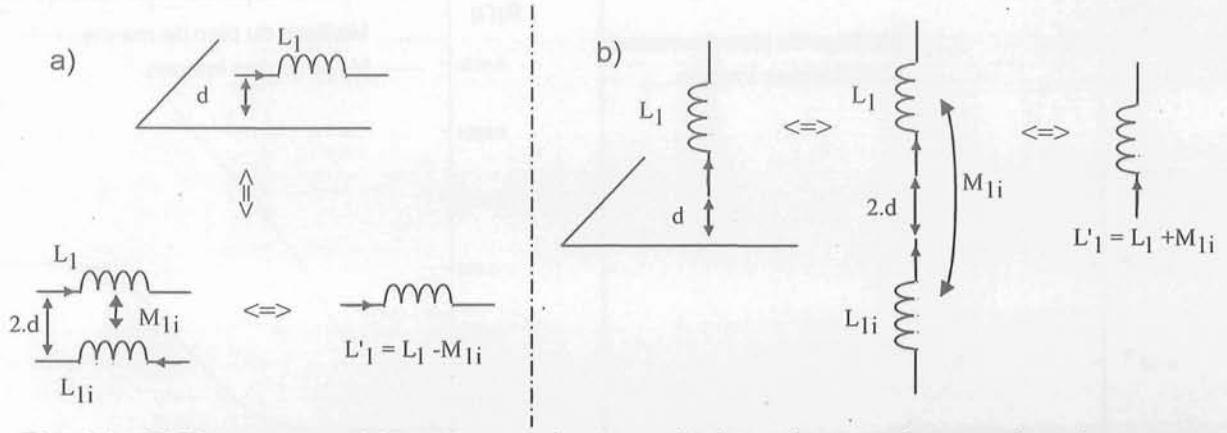


Fig. 11 : Différentes positions du conducteur situé au-dessus de son plan de masse

L'hypothèse de plan de masse parfait sera valable dans la plupart des cas ; il suffira que le matériau le constituant soit très bon conducteur (cuivre ou aluminium) et que ses dimensions transverses soient relativement grandes vis-à-vis de celles du circuit situé au-dessus [SCH 94] (voir annexe A).
S'il n'est pas possible de supposer le plan de masse parfait, il faut alors le considérer comme un conducteur quelconque et le mailler au même titre que les autres éléments du circuit. Il faudra alors apporter beaucoup de soin au maillage qui nécessitera d'utiliser des éléments 2D.
Ainsi si on prend l'exemple présenté Fig. 12. Il s'agit d'une boucle rectangulaire d'épaisseur 300 µm et de surface 40 cm² au-dessus d'un plan de masse de 300 µm d'épaisseur distant de 1 mm de la boucle. Il est deux fois plus grand que la boucle. Nous avons modélisé le plan de masse avec la méthode des images d'une part et en le décrivant comme un conducteur à part entière maillé en 2D d'autre part.
Les résultats que nous avons obtenus sont présentés sur les courbes Fig. 13.
Notons que pour des fréquences élevées, l'effet de peau a pour conséquence de faire circuler les courants en surface du plan de masse et on voit bien que pour la partie inductive les deux approches donnent des résultats très proches dès une dizaine de kHz. En revanche pour des fréquences plus basses, l'hypothèse de la méthode des images n'est plus valable.
Parallèlement, si on regarde la partie résistive, le fait de ne pas supposer le plan de masse infiniment conducteur rajoute des pertes supplémentaires qui ont pour conséquences une valeur de résistance plus élevée qui varie avec la fréquence.

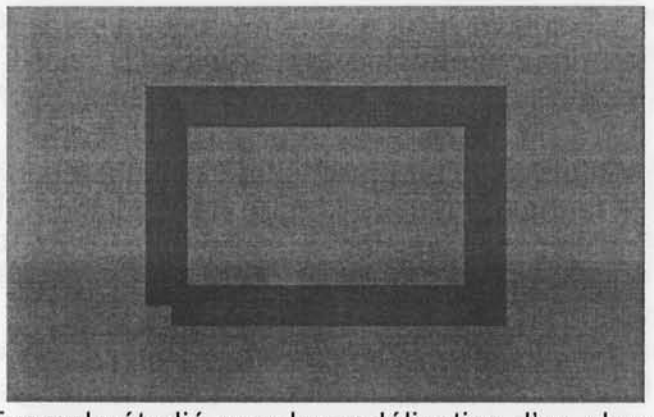


Fig. 12 : Exemple étudié pour la modélisation d'un plan de masse

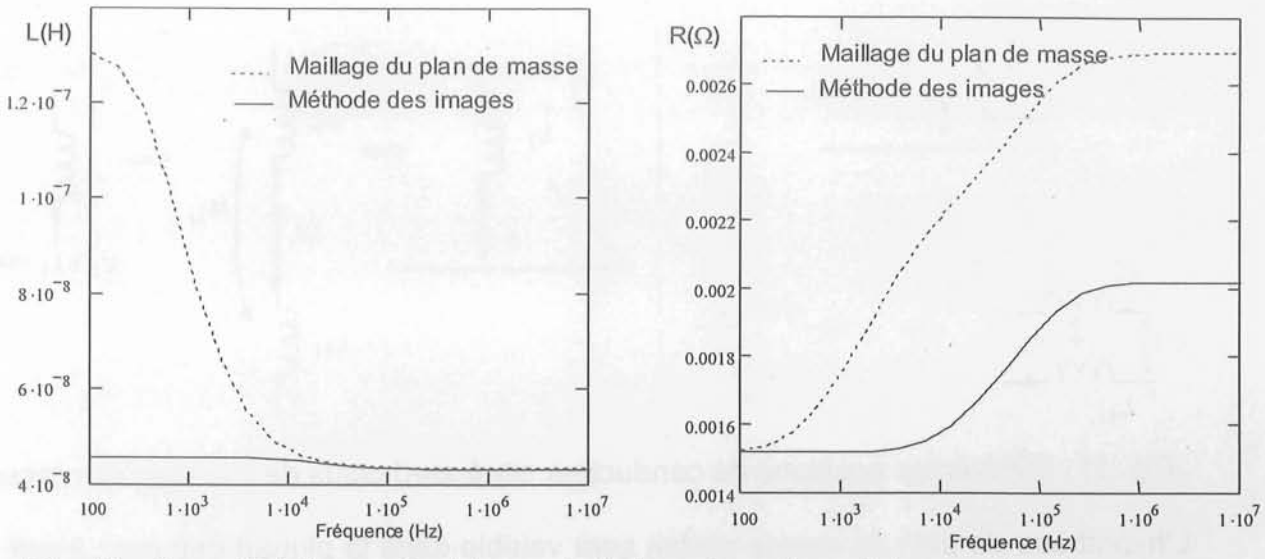


Fig. 13 : Caractéristiques électriques de la boucle rectangulaire sur plan de masse

On pourra donc dans la majorité des applications d'électronique de puissance modéliser un plan de masse à l'aide de la méthode des images, surtout si notre souci est d'obtenir les formes d'ondes globales de la structure étudiée. En revanche, pour des applications basses fréquences, la prise en compte d'un plan de masse réel maillé s'avère plus judicieuse.
Bien entendu, la condition pour pouvoir appliquer la méthode des images est de décrire un circuit fermé sur le plan de masse. En aucun cas ce dernier ne doit servir pour le retour du courant.

Nous présentons en annexe A une étude beaucoup plus complète dans laquelle nous avons regardé l'influence des différents paramètres distance au plan de masse, épaisseur du plan de masse et dimensions transverses.

Modèle électrique :
A l'issue de la modélisation du dispositif, le problème a été remplacé par un schéma électrique équivalent qui permet de tenir compte de l'effet de peau (de la fréquence) et de l'effet de proximité (de la géométrie). Pour une structure relativement complexe (donc réaliste), la taille de ce schéma et donc le nombre de subdivisions peut être élevé. Ceci conduit à un schéma électrique équivalent relativement dense qui est difficilement exploitable.
Les caractéristiques électriques de ce schéma équivalent sont regroupées avec l'information fréquence dans une matrice impédance [Z] dont la taille est égale au nombre d'éléments du maillage. Cette matrice de nombres complexes est pleine et symétrique.
Pour condenser cette information en un schéma électrique équivalent utilisable dans un bureau d'études, il faut alors réduire la taille de la matrice [Z] ainsi obtenue. On peut ainsi évaluer les impédances des conducteurs qui dépendront alors de la fréquence (Fig. 14) et calculer ensuite des grandeurs globales comme des impédances de boucle.
Dans le cas général, nous avons mis en place des techniques originales et nous les détaillerons dans la partie 3.6. Cependant le synoptique utilisé pour ce calcul est présenté Fig. 14.

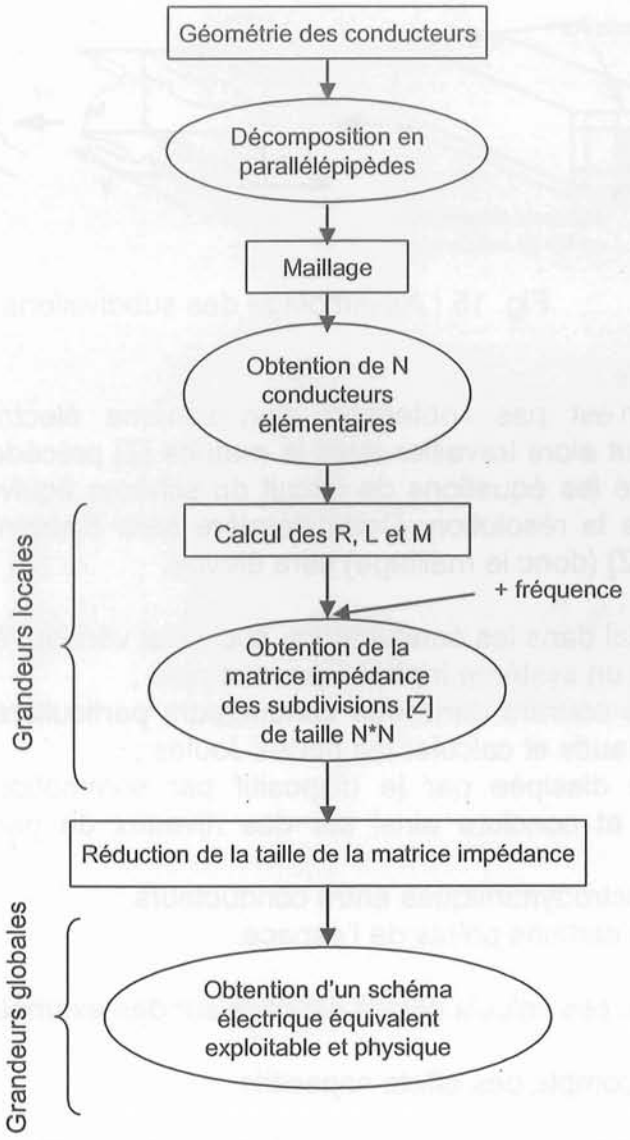


Fig. 14 : Synoptique de l'obtention du schéma électrique équivalent des conducteurs

Cette méthodologie est relativement simple à détailler dans le cas particulier d'un maillage 1D. Le schéma électrique équivalent des conducteurs est plus immédiat. Il repose sur l'hypothèse que dans ce cas les extrémités du conducteur maillé sont des équipotentielles électriques parfaites (Fig. 15). Ainsi on a la même tension aux bornes de chaque subdivision et cela nous permet de mettre en parallèle les subdivisions et donc de réduire la taille de [Z] (par simple addition de lignes et colonnes sur la matrice $[Z]^{-1}$). Cette hypothèse a été vérifiée sur des cas simples à l'aide de simulations éléments finis [CLA 95].
On obtient alors le schéma électrique équivalent d'un conducteur en fonction de la fréquence (Fig. 15).
Cette exploitation est très succincte mais permet de connaître le poids inductif de chaque tronçon de câblage et celui des couplages entre conducteurs. Cela nous renseigne en particulier sur les effets de peau et proximité.

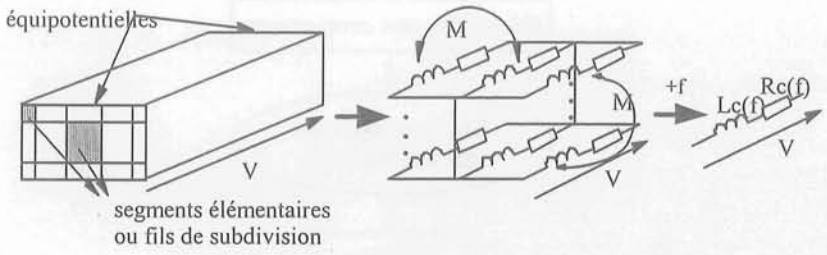


Fig. 15 : Assemblage des subdivisions

Utilisation du modèle :
Si notre objectif n'est pas l'obtention d'un schéma électrique équivalent des conducteurs, on peut alors travailler avec la matrice [Z] précédemment établie. Cela va consister à écrire les équations de circuit du schéma équivalent par subdivision obtenu et d'en faire la résolution. Cette dernière sera d'autant plus longue que la taille de la matrice [Z] (donc le maillage) sera élevée.
On peut rechercher :

- le courant total dans les conducteurs, ceci pour vérifier l'équilibrage ou non du courant dans un système triphasé par exemple ;
- la densité de courant dans des conducteurs particuliers, ceci pour identifier des points chauds et calculer les pertes Joules ;
- la puissance dissipée par le dispositif par sommation des pertes Joules précédentes et conclure ainsi sur des niveaux de pertes (acceptables ou non) ;
- les efforts électrodynamiques entre conducteurs ;
- l'induction en certains points de l'espace.

Dans la partie 3 tous ces calculs seront détaillés sur des exemples industriels.

2.5. Prise en compte des effets capacitifs

Dans la partie précédente nous avons montré que le modèle électrique équivalent des conducteurs pouvait se réduire à une résistance (R) en série avec une inductance (L). Les inductances sont couplées par effet mutuel (M).
Cependant pour des applications d'électronique de puissance, ce modèle doit être complété si l'on veut pouvoir tenir compte des variations brutales de tensions. En effet, entre un point flottant du circuit (point à potentiel variable) et un point à potentiel fixe, peut apparaître un courant via une capacité parasite. Ce courant, appelé courant de mode commun, peut poser des problèmes de fonctionnement : perturbations électromagnétiques de mode conduit.
Un des objectifs de la thèse de Maxime Besacier [BES] fut l'identification et le calcul des capacités parasites.
Il a notamment montré qu'on pouvait les calculer à partir des formulations établies dans le cadre de la méthode PEEC. En effet, la capacité parasite entre deux conducteurs peut être déduite des coefficients de potentiel, notés p, qui permettent d'exprimer les chutes de potentiel entre deux conducteurs. Ces coefficients sont directement liés aux mutuelles inductances partielles entre conducteurs rubans. L'Eq. 10 donne cette expression dans le cas de deux rubans (puisqu'on a pu montrer par ailleurs que seule importait la densité de charge surfacique) (Fig. 16).

$$p_{12} = \frac{1}{\mu\varepsilon\ell_1\ell_2} M_{pr12} \qquad \text{Eq. 10}$$

$$M_{pr12} = \frac{\mu_0}{4\pi ad}\left[\left[\left(\frac{y^2-P^2}{2}\right)z\ln\left(z+\sqrt{x^2+P^2+z^2}\right)+\left(\frac{z^2-P^2}{2}\right)x\ln\left(x+\sqrt{x^2+P^2+z^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{6}\left(x^2-2P^2+z^2\right)\sqrt{x^2+P^2+z^2}-xPz\,\mathrm{Arctg}\frac{xz}{P\sqrt{x^2+P^2+z^2}}\right]_{E+d-a,E}^{E-a,E+d}(x)\right]_{l_3+l_2-l_1,l_3}^{l_3-l_1,l_3+l_2}(z)$$

avec : $\left[\left[f(x,P,z)\right]_{q_2,q_4}^{q_1,q_3}(x)\right]_{s_2,s_4}^{s_1,s_3}(z) = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}(-1)^{i+k} f(q_i,P,s_k)$

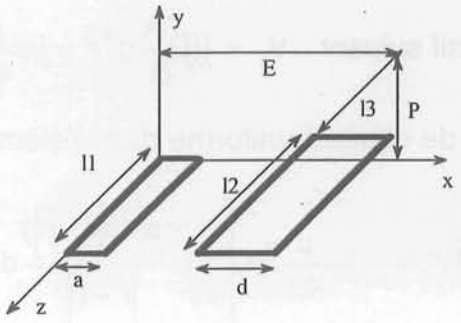


Fig. 16 : Notations géométriques pour deux rubans parallèles

Ainsi la valeur de la capacité parasite entre deux rubans peut être obtenue avec :

$$C = \frac{1}{p_{11}+p_{22}-2p_{12}}.$$

Dans la majorité des cas, il sera nécessaire de mailler les dispositifs. On obtient alors une matrice de coefficients de potentiel [p]. La détermination des différentes capacités parasites se fera alors en considérant les coefficients d'influence C_{ij} issus de l'inversion de [p]. La charge Q_i d'un élément de surface i est donnée par sa relation avec les potentiels V_j des éléments du dispositif : $Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$.

C'est ensuite à l'aide des différents coefficients d'influence que l'on déterminera la capacité parasite en exprimant les charges totales des structures considérées.
Bien entendu, un grand soin devra être apporté au maillage des structures et à la généralisation de la mise en forme du système d'équations (numérotation systématique).
Cette méthode s'avère très rapidement coûteuse en place mémoire et temps de calcul. De plus, elle ne permet pas de prendre en compte des diélectriques non homogènes.

2.6. Cas non quasi-stationnaire : Méthode rPEEC

Une des hypothèses sur laquelle repose la méthode PEEC est l'hypothèse quasi-statique ; c'est-à-dire que l'on néglige les courants de déplacement dans les conducteurs. Pour certaines alimentations à découpage, cette hypothèse risque de ne plus être vérifiée. A. E. Ruehli a fait évoluer la méthode PEEC vers une méthode conservant la même approche mais avec des éléments partiels retardés. C'est la méthode rPEEC (retarded PEEC).

Terme inductif du modèle

Si l'on reprend l'Eq. 4, on peut étudier l'influence du retard sur le terme inductif.

Soit un conducteur parcouru par une densité de courant sinusoïdale, le potentiel vecteur créé par ce courant en un point quelconque de l'espace est donné par l'équation suivante.

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_k}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d^3\vec{r}' \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\vec{J}(\vec{r},t)=\vec{J}(\vec{r})e^{j\omega t}\\ t'=t-\dfrac{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}{v}\\ \beta=\dfrac{\omega}{v}\end{cases}$$

On obtient le terme inductif suivant : $V_L=\iiint\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}d^3\vec{r}'=j\omega\frac{\mu}{4\pi}\int_V\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t)e^{-j\beta\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV'dV$

Si on suppose la densité de courant uniforme dans l'élément considéré, on peut alors écrire :

$$V_L=j\omega\frac{\mu}{4\pi}\vec{J}(t)\int_V\int_{V'}\frac{e^{-j\beta\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV'dV=j\omega\frac{\mu}{4\pi}\vec{J}(t)\left[\int_V\int_{V'}\frac{\cos(\beta\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV'dV-j\int_V\int_{V'}\frac{\sin(\beta\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV'dV\right]$$

$$V_L=(R_r+jL\omega)I$$

On a ainsi fait apparaître une partie résistive que l'on appelle résistance de rayonnement R_r qui viendra s'ajouter au modèle précédent comme une résistance partielle supplémentaire en série. C'est l'influence du retard sur le terme inductif du modèle. Moez Youssef dans ses travaux de thèse [YOU] a donné quelques exemples de calcul de cette résistance de rayonnement.

S'il y a plusieurs conducteurs, cette partie réelle interviendra aussi sur le terme de mutuelle inductance. On parlera alors de mutuelle résistance partielle.

L'expression analytique de ces termes résistifs en fonction des grandeurs géométriques du dispositif est obtenue assez facilement en utilisant un développement limité à un ordre relativement faible (jusqu'à 3) du sinus.

Terme capacitif du modèle

On va procéder de la même manière que précédemment. Le calcul des capacités dans la méthode PEEC est effectué en utilisant les coefficients de potentiels. Ces derniers sont déduits de l'Eq. 10. Donc l'expression des coefficients de potentiel est maintenant complexe.

On montre ainsi [YOU] qu'il est possible de conserver un schéma électrique équivalent à constantes localisées prenant en compte l'effet du retard. Les éléments inductifs et capacitifs de ce schéma électrique équivalent ainsi que tous les couplages sont alors des nombres complexes.

Cependant leur détermination est tout aussi immédiate que dans le cas de l'application de la méthode PEEC puisque tout repose sur des formulations analytiques.

Dans la pratique, il suffira de découper les conducteurs selon leur longueur (Fig. 4). On obtient alors un schéma électrique complexe comportant plusieurs cellules en cascade.

Au niveau de la résolution électrique et de l'obtention des grandeurs impédance

caractéristique ou courant et potentiel, il faut alors trouver la formule de récurrence, à partir des conditions aux limites.
Toute cette démarche, assez calculatoire est détaillée dans l'annexe B sur le cas très caractéristique de la ligne microruban.
Cette approche est aussi comparée dans ce cas à la méthode TLM qui, pour des cas simples, dispose de formules préétablies à condition de vérifier certaines relations concernant notamment les dimensions du dispositif modélisé.
Sur la courbe ci-dessous (Fig. 17) sont représentées les impédances calculées avec les méthodes PEEC, rPEEC et TLM.
On peut se rendre compte que tant que la fréquence est suffisamment basse, la méthode PEEC donne une bonne valeur pour l'impédance. Sitôt que la fréquence augmente, le terme relatif au retard prend de l'importance et on se rend compte que la méthode rPEEC, très généraliste dans son approche, permet d'obtenir de bons résultats. Sur l'exemple de la ligne microruban, on obtient les mêmes résultats que la méthode TLM.

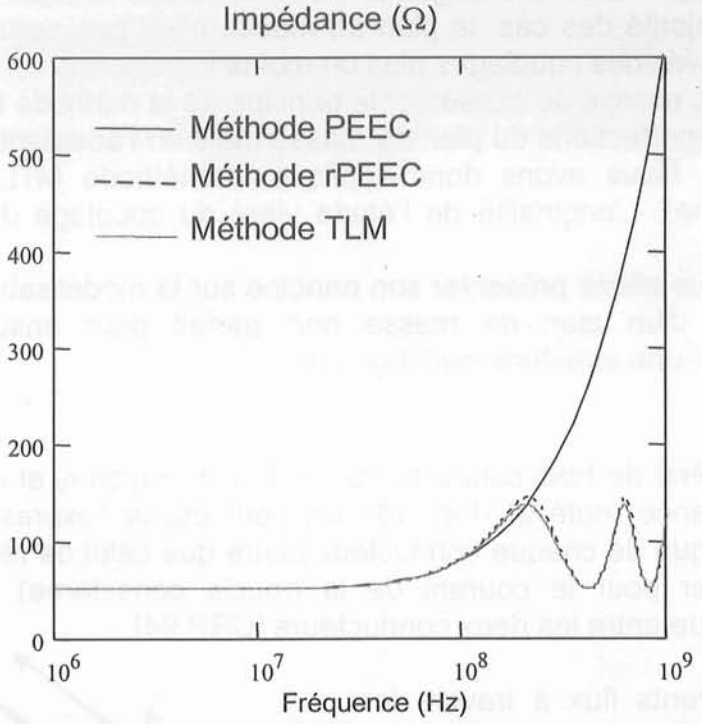


Fig. 17 : Impédance d'une ligne microruban : comparaison des méthodes PEEC, rPEEC et TLM

Moez Youssef dans ses travaux de thèse [YOU] a proposé un autre schéma électrique équivalent pour prendre en compte le retard. Il s'agit de remplacer l'effet des capacités mutuelles et des inductances mutuelles par une source de tension. Toutes les sources de tension ainsi obtenues sont des sources liées et on est alors amené à résoudre une équation matricielle pour trouver les courants et les potentiels. Même si ce modèle fonctionne bien nous ne l'avons pas conservé. On lui a préféré celui présenté précédemment qui repose sur la même philosophie de résolution des équations de circuit que PEEC.

2.7. Méthode MTL pour les hautes fréquences

La méthode PEEC précédemment présentée ne tient pas compte de la propagation des signaux le long des conducteurs ces derniers étant toujours plus petits que la longueur d'onde.
Cependant le CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) cherche à caractériser des structures comportant plusieurs boîtiers électroniques reliés par des conducteurs au-dessus de plans de masse non parfaits. La gamme de fréquences classique de fonctionnement de ce type de dispositifs est la « haute fréquence ». Nous avons alors montré que le modèle à constantes localisées n'est plus adapté, et qu'il vaut mieux avoir recours à un modèle à constantes réparties [CLA 01].
La méthode des lignes de transmissions est alors appropriée pour résoudre le problème. Cependant les formulations pour déterminer les paramètres par unité de longueur sont étroitement liées à la géométrie du dispositif : conducteur isolé au-dessus d'un plan de masse parfait, ligne bifilaire, câble coaxial, ...
Bien entendu nous utiliserons largement ces dernières lorsque cela sera possible mais dans la majorité des cas, le plan de masse n'est pas parfait, les conducteurs sont nombreux avec des couplages plus ou moins importants.
Nous avons donc essayé de conserver le principe de la méthode PEEC pour prendre en compte les imperfections du plan de masse mais en l'adaptant à des conducteurs infiniment longs. Nous avons donc appliqué la méthode MTL (Multi conductors Transmission Line). L'originalité de l'étude vient du couplage des deux méthodes PEEC et TLM.
Tout d'abord, nous allons présenter son principe sur la modélisation d'un conducteur seul au-dessus d'un plan de masse non parfait pour ensuite voir comment généraliser ceci à une structure multi boîtiers.

Principe

Dans le cas général de trois conducteurs, fils fins de rayon r_0 et de longueur ℓ, dont un sert de référence (noté 0) (Fig. 18), on peut établir l'expression analytique de l'inductance linéique de chaque conducteur (autre que celui de référence qui sert de conducteur d'aller pour le courant de la boucle considérée) et de la mutuelle inductance linéique entre les deux conducteurs [CRP 94].

Calcul des différents flux à travers les surfaces :

Surface : $S_1 = d_1 * \ell$,
Surface : $S_2 = d_2 * \ell$,

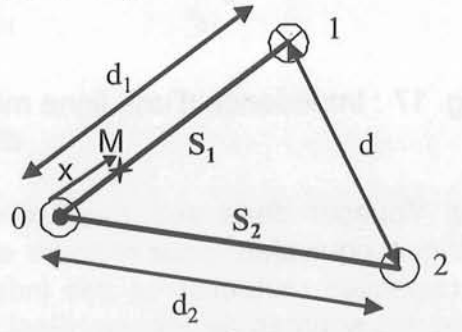


Fig. 18 : Cas général de l'étude MTL

Le fil 1 est alimenté par I qui se referme par le fil 0.
Le flux à travers S1 nous renseigne sur l'inductance de ces deux lignes couplées.

Le champ crée en M à la distance x du fil est : $B(x) = \frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d_1 - x}\right)$

D'où le flux à travers S_1 est : $\phi_{11} = \int_{r_0}^{d_1 - r_0} \frac{\mu I \ell}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d_1 - x}\right)dx = LI$

où ℓ est la longueur des conducteurs.

Donc l'inductance linéique a pour expression : $L = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d_1 - r_0}{r_0}$ en H/m Eq. 11

Le flux capté à travers S_2 nous renseigne sur la mutuelle inductance M entre les deux systèmes de lignes couplées.

On obtient l'expression analytique de M : $M = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{d_2 - r_0}{r_0} \frac{d_1}{d}$ Eq. 12

Dans le cas présent, c'est-à-dire un conducteur seul au-dessus d'un plan de masse, le conducteur pourra être assimilé au fil 0 et les fils 1 et 2 correspondront alors à deux conducteurs élémentaires du plan de masse qui a été discrétisé à l'aide du maillage 1D défini précédemment puisque les conducteurs sont supposés longs. Ce maillage peut être géométrique ou arithmétique dans les deux directions de la section uniquement (Fig. 19).

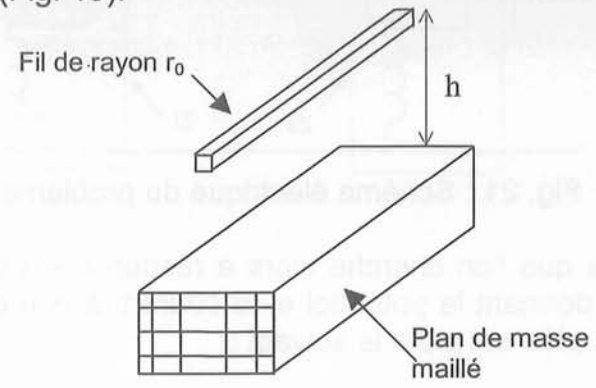


Fig. 19 : Structure modélisée

Dans le paragraphe suivant, les différentes formulations utilisées pour calculer le schéma électrique équivalent des conducteurs massifs sont présentées.
Dans cette approche MTL, on établit alors une matrice inductance [M] de dimensions (n*n) qui contient sur la diagonale les inductances linéiques de chaque conducteur du plan de masse L_i et ailleurs les mutuelles inductances linéiques M_{ij} entre eux. Cette matrice [M] est symétrique.
Dans l'hypothèse d'un milieu homogène, la relation [M][C] = $\mu\varepsilon$ peut être utilisée pour établir la matrice capacité linéique [C] comme suit :

$$[C] = \mu\varepsilon[M]^{-1} \quad \text{Eq. 13}$$

En ce qui concerne la partie résistive de l'impédance de ces lignes couplées qui permet de prendre en compte les pertes, on peut aussi établir une matrice [R].
Ces trois matrices traduisent le schéma électrique de la Fig. 20.

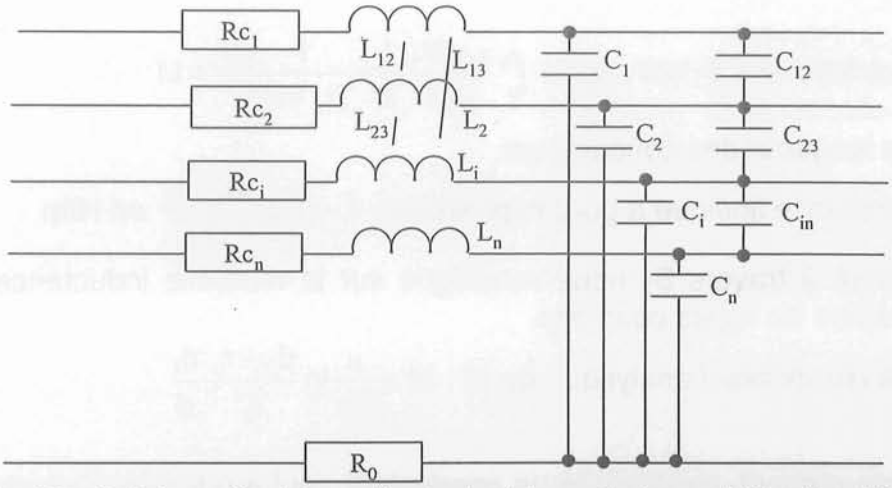


Fig. 20 : Schéma électrique équivalent issu de la modélisation MTL

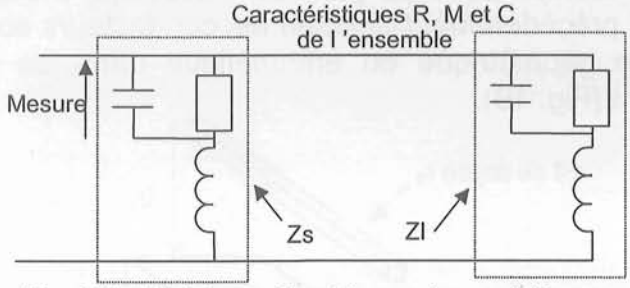


Fig. 21 : Schéma électrique du problème

Le schéma électrique que l'on cherche alors à résoudre est celui de la Fig. 21. Le système d'équations donnant le potentiel et le courant à une distance quelconque z pour chaque ligne couplée est alors le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(z)}{\partial z} = [Z][Y]V(z) \\ \dfrac{\partial I(z)}{\partial z} = [Y][Z]I(z) \end{cases}$$ où V(z et I(z) sont des vecteurs de dimension n.

avec [Z] = [R] + j ω [M] et [Y] = j ω [C]

Le produit [Z] [Y] n'étant pas diagonal, il est possible de trouver deux matrices [T] et [T'] qui permettent de découpler les inconnues et d'exprimer les constantes de propagation de chacune des lignes couplées.

On a : $[T]^{-1}[Y][Z][T] = [T']^{-1}[Z][Y][T'] = \left[\gamma^2\right]$ matrice diagonale dont le terme général est le carré de la constante de propagation de chaque ligne couplée.

Cela revient en fait à chercher les potentiels Vm(z) et les courants Im(z) tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Vm(z)}{\partial z} = \left[\gamma^2\right]Vm(z) \\ \dfrac{\partial Im(z)}{\partial z} = \left[\gamma^2\right]m(z) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} V(z) = [T']Vm(z) \\ I(z) = [T]Im(z) \end{cases}$$

La solution de ce dernier système est immédiate, composition d'ondes progressives et rétrogrades pour lesquelles Im^+ et Im^- dépendent des conditions aux limites.

$$\begin{cases} V(z) = [Y]^{-1}[T][\gamma]\left(\left[e^{-\gamma z}\right]Im^+ + \left[e^{\gamma z}\right]Im^-\right) \\ I(z) = [T]\left(\left[e^{-\gamma z}\right]Im^+ - \left[e^{\gamma z}\right]Im^-\right) \end{cases}$$ Eq. 14

Voilà le principe de base de cette méthode.
Pour la suite des calculs, il faut clairement identifier la structure à modéliser, c'est-à-dire à la fois la charge, la source et les grandeurs recherchées pour résoudre le système d'équations précédent.
C'est ce que nous verrons au paragraphe 3.8 de ce mémoire.
La suite de ce paragraphe va être exclusivement consacrée aux différentes formulations utilisées pour évaluer les différentes matrices.

Matrice impédance caractéristique
On définit une matrice [Zc], matrice complexe pleine de dimension n*n telle que :

$$[Zc] = [Y]^{-1}[T][\gamma][T]^{-1} \qquad \text{Eq. 15}$$

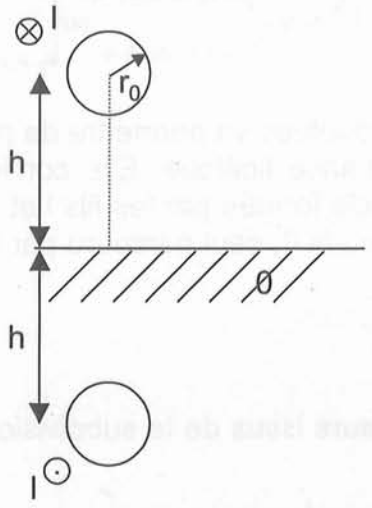
On a alors :

$$\begin{cases} V(z) = [Zc][T]\left(\left[e^{-\gamma z}\right]Im^{+} + \left[e^{\gamma z}\right]Im^{-}\right) \\ I(z) = [T]\left(\left[e^{-\gamma z}\right]Im^{+} - \left[e^{\gamma z}\right]Im^{-}\right) \end{cases} \qquad \text{Eq. 16}$$

[Zc] est aussi la matrice des impédances caractéristiques du système.

Formulations pour un conducteur unique au dessus d'un plan de masse

Cas du plan de masse parfait
Ce cas là est peu fréquent pour nos applications mais permet d'avoir une référence, notamment pour comparer des modèles établis par le CNES dans cette hypothèse principalement. Elle permet aussi d'appréhender la contribution du plan de masse sur le comportement du dispositif.
Dans ce cas le système est à une dimension et les formulations utilisées sont très simples. On utilise la méthode des images pour établir l'expression de l'inductance du fil au-dessus du plan de masse.



Inductance : $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{2h}{r_0}\right)$ (H/m)

Capacité : $C = \mu\varepsilon\, L^{-1}$

Résistance : $R(f) = \frac{r_0}{2\delta} Rf$ (Ω/m)

où δ est l'épaisseur de peau avec $Rf = \frac{\rho}{\pi r_0^{\,2}}$ (Ω/m).

Fig. 22 : Cas du plan de masse parfait

Cas du plan de masse non parfait
Le fil au-dessus du plan de masse sera le fil de référence. Le plan de masse sera décomposé en n conducteurs de sections plus petites dans lesquels la densité de courant sera supposée uniforme mais différente d'un conducteur à l'autre (comme déjà cela est le cas avec la méthode PEEC). Ces conducteurs ne pouvant pas être considérés comme des fils fins, nous avons alors établi les expressions analytiques de L et M dans le cas de conducteurs de sections rectangulaires. Pour cela, il suffit

d'intégrer les expressions de L et M dans le cas filiforme (Eq. 11 et Eq. 12) sur la largeur et l'épaisseur des conducteurs selon les mêmes techniques que celles adoptées pour la méthode PEEC.
La figure suivante (Fig. 23) présente les différentes notations donnant la position des deux conducteurs par rapport au fil de référence.

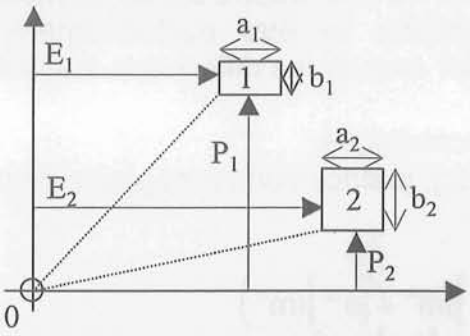


Fig. 23 : Notations pour le calcul de la mutuelle linéique entre les conducteurs

On obtient alors les expressions suivantes pour l'inductance linéique d'un conducteur et la mutuelle inductance linéique entre deux conducteurs.

$$L = \frac{-\mu_0}{\pi}\ln r_0 + \frac{\mu_0}{2\pi a_1 b_1}\left[\left[xy\ln\left(x^2+y^2\right) - 3xy + x^2\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x} + y^2\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{y}\right]_{E_1}^{E_1+a_1}(x)\right]_{P_1}^{P_1+b_1}(y)$$

$$M = \frac{-\mu_0}{2\pi}\ln r_0 + \frac{\mu_0}{4\pi a_1 b_1}\left[\left[xy\ln\left(x^2+y^2\right) - xy + x^2\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x} + y^2\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{y}\right]_{E_1}^{E_1+a_1}(x)\right]_{P_1}^{P_1+b_1}(y)$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi a_2 b_2}\left[\left[xy\ln\left(x^2+y^2\right) - 3xy + x^2\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x} + y^2\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{y}\right]_{E_2}^{E_2+a_2}(x)\right]_{P_2}^{P_2+b_2}(y)$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi a_1 b_1 a_2 b_2}\left[\left[\frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{24}\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{7}{144}y^4 - \frac{13}{24}x^2y^2 + \frac{x^3y}{3}\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x} + \frac{y^3x}{3}\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{y}\right]_{E_2+a_2-E_1-a_1,E_2-E_1}^{E_2+a_2-E_1,E_2-E-a_1}(x)\right]_{P_2-P_1,P_2+b_2-P_1-b}^{P_2+b_2-P_1,P_2-P_1-b_1}(y)$$

La partie résistive de l'impédance de ces lignes couplées va permettre de prendre en compte les pertes. On note [R] la matrice résistance linéique. Elle contient sur la diagonale, à la $i^{ème}$ place, la résistance de la boucle formée par les fils i et 0, c'est-à-dire Rc_i+R_0, et ailleurs uniquement la résistance du fil 0, seul parcouru par le courant I.
[R] sera alors définie comme suit :

$$\begin{cases} R_i = \dfrac{\rho}{S_i} + \dfrac{\rho}{\pi {r_0}^2} \\ R_{ij} = \dfrac{\rho}{\pi {r_0}^2} \end{cases}$$

avec S_i : section des conducteurs issus de la subdivision du plan de masse

Généralisation à une structure multi-boîtiers (plusieurs conducteurs parallèles au dessus d'un plan de masse)
L'essentiel de la modélisation de ce type de structure réside dans l'identification des lignes bifilaires. Celles-ci sont différentes selon que l'on a un plan de masse parfait ou non. Les formulations que l'on va utiliser sont elles aussi différentes.

Cas du plan de masse parfait

Fig. 24 présente le cas général de plusieurs conducteurs au-dessus d'un plan de masse parfait.

On applique alors la méthode des images pour identifier les différents flux à prendre en compte selon que l'on recherche l'inductance d'un conducteur ou la mutuelle inductance entre deux.

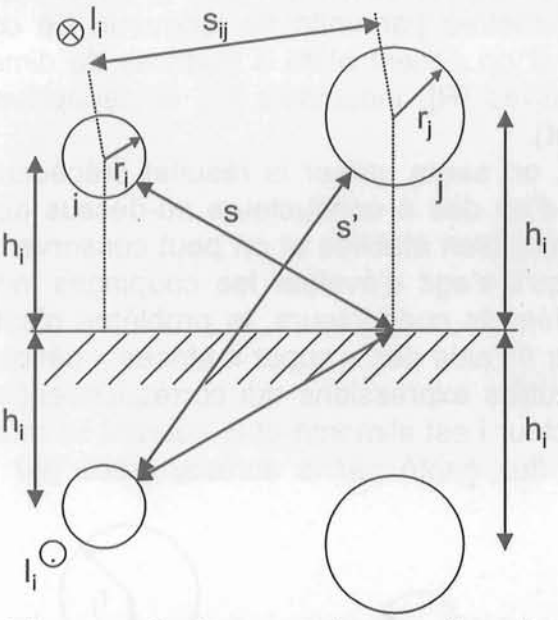


Fig. 24 : Cas général de n conducteurs au-dessus d'un plan de masse parfait – notations géométriques

Dans tous les cas, on ne va rechercher que l'expression de l'inductance externe des conducteurs. En effet cette dernière est bien supérieure à l'inductance interne pour les hautes fréquences puisque celle-ci décroît avec la fréquence (en racine carrée) alors que l'inductance externe est pratiquement indépendante de la fréquence.

Les caractéristiques inductives par unité de longueur du dispositif sont [CRP 94] :

Inductance : $L_{ii} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{2h_i}{r_i}\right)$ (H/m)

Mutuelle : $L_{ij} = \frac{\mu}{4\pi} \ln\left(1+\frac{4h_ih_j}{s_{ij}^2}\right)$ (H/m)

S'il y a n conducteurs au-dessus du plan de masse, on obtient alors une matrice inductance [M] de dimension n*n qui comporte les L_{ii} sur la diagonale et les L_{ij} ailleurs.

En ce concerne les caractéristiques capacitives, on va adopter toujours la même approche donnée par la relation Eq. 13.

Pour prendre en compte les pertes, on peut soit prendre la définition classique de la résistance (en continu) Rf soit prendre en compte sa variation avec la fréquence comme présenté ci-après :

$R_i(f) = \frac{r_i}{2\delta} Rf$ (Ω/m) où δ est l'épaisseur de peau avec $Rf = \frac{\rho}{\pi r_i^2}$ (Ω/m).

ρ est la résistivité du matériau du conducteur considéré.

On peut alors définir une matrice résistance diagonale [R] dont les termes sont les valeurs précédentes.

Cas du plan de masse non parfait

Dans ce cas là, on a n conducteurs au-dessus d'un plan de masse non parfait que l'on va subdiviser en m conducteurs élémentaires de section rectangulaire (Fig. 19).
Si le conducteur est seul au-dessus d'un plan de masse non parfait, on sait établir l'expression des paramètres par unité de longueur. Le conducteur est considéré comme la référence et on obtient alors 3 matrices de dimension m*m donnant les caractéristiques résistives [R], inductives [M] et capacitives [C] du dispositif (voir paragraphe précédent).
Dans le cas présent, on saura utiliser le résultat précédent lorsqu'on s'intéressera aux caractéristiques d'un des n conducteurs au-dessus du plan de masse car les boucles de courant sont bien établies et on peut conserver le conducteur comme la référence. Mais lorsqu'il s'agit d'évaluer les couplages inductifs entre les boucles générées par les différents conducteurs, le problème n'est encore pas résolu. On pourra alors raisonner à l'aide des « super matrices » définies comme ci-après. Cela suppose d'établir d'autres expressions qui correspondent au cas présenté Fig. 25 pour lequel le conducteur i est alimenté et le courant se referme par la subdivision k tout en regardant le flux capté par la surface créée par le conducteur j avec la subdivision l.

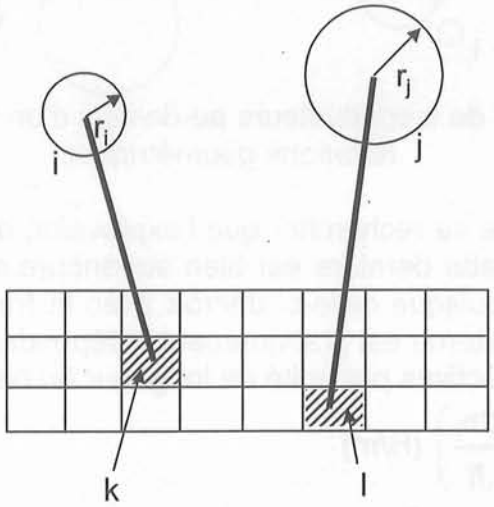
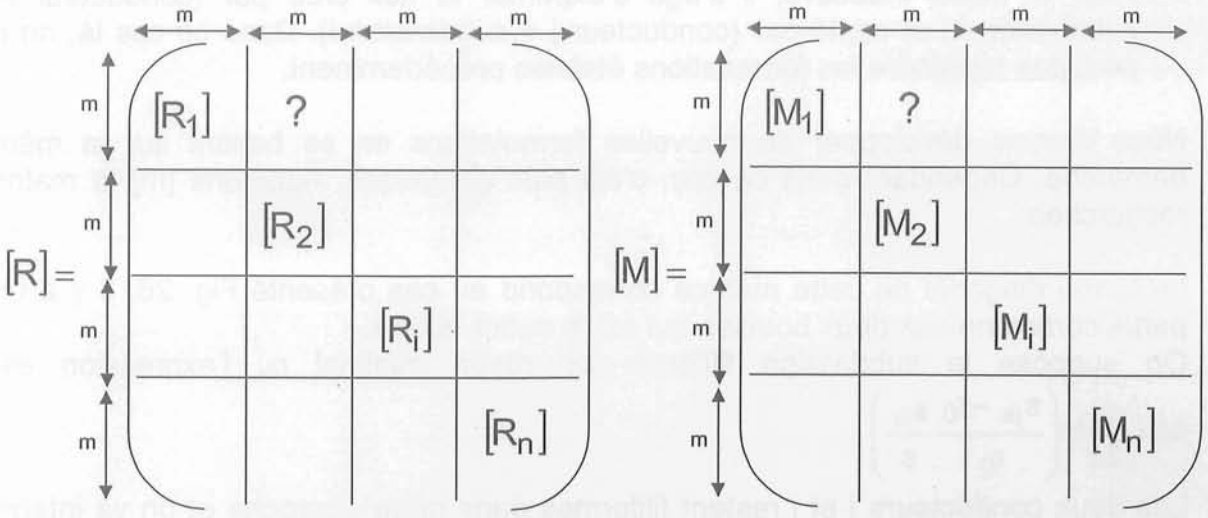


Fig. 25 : Cas général de n conducteurs parallèles au-dessus d'un plan de masse non parfait subdivisé en m conducteurs élémentaires.

Nous savons remplir les différentes matrices $[R_i]$ et $[M_i]$ mais quid des autres matrices constituant ces « super matrices » ?



➢ Pour la partie résistance, il s'agit d'identifier la résistance parcourue par le courant. C'est en fait uniquement la partie résistive de la subdivision parcourue par le courant. On obtient alors la matrice [R] présentée ci-après dont le terme r_k est la résistance par unité de longueur de la subdivision k du plan de masse et cela correspond au cas présenté Fig. 26.

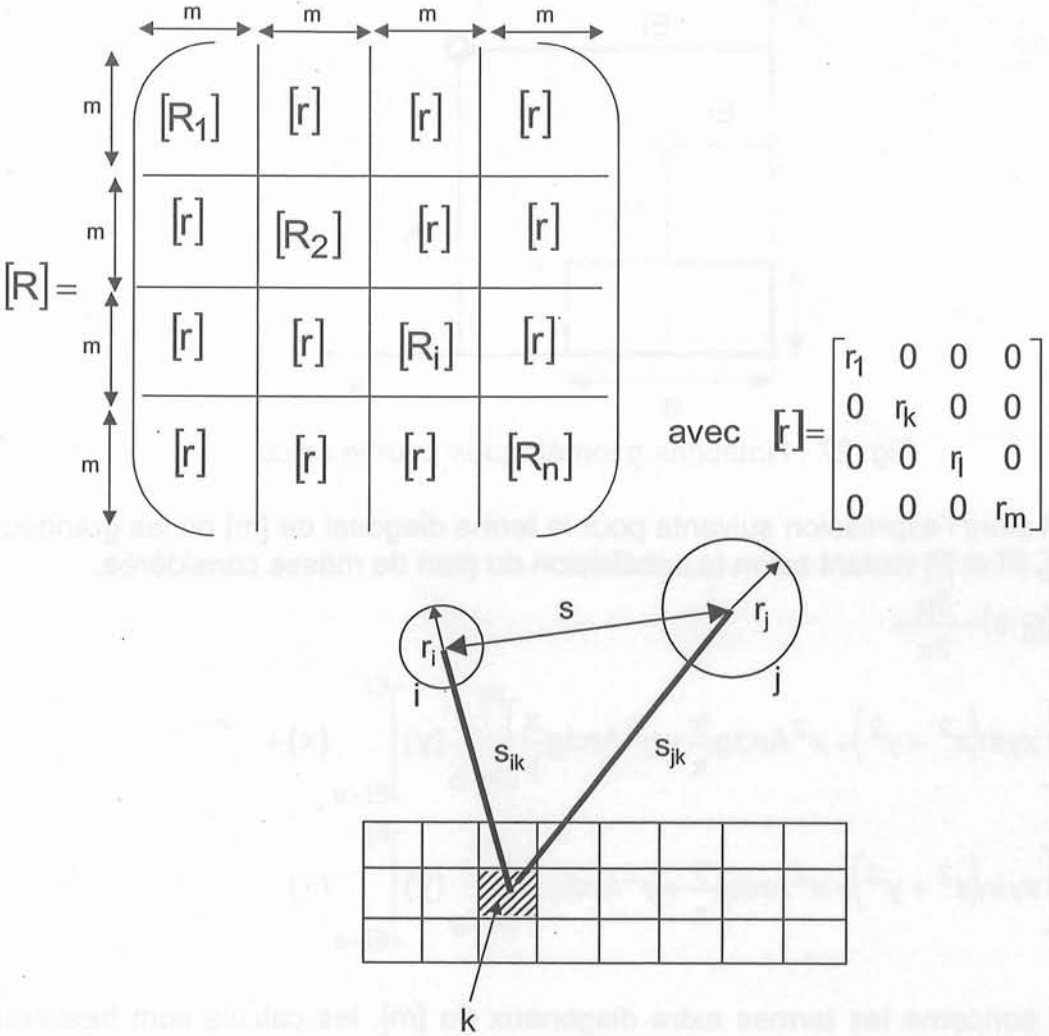


Fig. 26 : Le conducteur i est alimenté et le courant se referme par la subdivision k

➢ Pour la partie inductive, il s'agit d'exprimer le flux créé par (conducteur i + subdivision k) et capté par (conducteur j + subdivision l). Dans ce cas là, on ne peut pas reprendre les formulations établies précédemment.

Nous devons développer de nouvelles formulations en se basant sur la même démarche. Cependant dans ce cas, c'est plus compliqué. Appelons [m] la matrice recherchée.

Le terme diagonal de cette matrice correspond au cas présenté Fig. 26. Il y a une partie commune aux deux boucles qui est la subdivision k.
On suppose la subdivision filiforme de rayon minimal r_0, l'expression est :

$$M = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{s_{jk} - r_0}{r_0} \frac{s_{ik}}{s} \right)$$

Les deux conducteurs i et j restent filiformes dans notre approche et on va intégrer l'expression précédente sur la largeur et l'épaisseur de la subdivision k.
On va tout d'abord négliger r_0 devant s_{jk}. Notons que lorsque les dimensions de la subdivision k varient, r_0 et s restent constants. Donc on peut écrire :

$$M = \frac{-\mu}{2\pi} \ln(r_0\ s) + \frac{\mu}{2\pi} \ln(s_{jk}\ s_{ik}).$$

Fig. 27 présente les notations géométriques adoptées pour ce calcul.

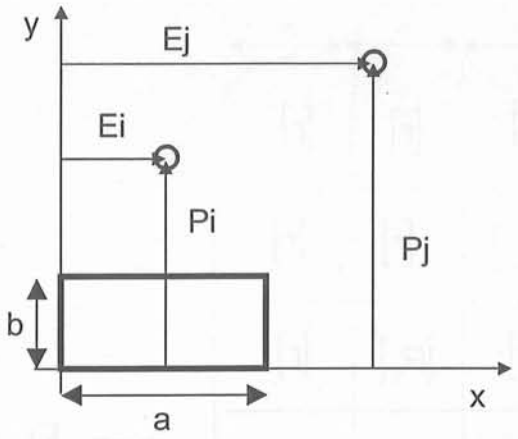


Fig. 27 : Notations géométriques pour le calcul

On obtient alors l'expression suivante pour le terme diagonal de [m] où les grandeurs a, b, Ei, Ej, Pi et Pj varient selon la subdivision du plan de masse considérée.

$$M = \frac{-\mu}{2\pi} \ln(r_0\ s) - \frac{3\mu}{2\pi} +$$

$$\frac{\mu}{4\pi ab} \left[\left[xy \ln\left(x^2 + y^2\right) + x^2 \mathrm{Arctg}\frac{y}{x} + y^2 \mathrm{Arctg}\frac{x}{y} \right]_{Pi-b}^{Pi} (y) \right]_{Ei-a}^{Ei} (x) +$$

$$\frac{\mu}{4\pi ab} \left[\left[xy \ln\left(x^2 + y^2\right) + x^2 \mathrm{Arctg}\frac{y}{x} + y^2 \mathrm{Arctg}\frac{x}{y} \right]_{Pj-b}^{Pj} (y) \right]_{Ej-a}^{Ej} (x)$$

En ce qui concerne les termes extra diagonaux de [m], les calculs sont beaucoup plus compliqués et nous conseillons de conserver une approche filiforme pour

l'expression de la mutuelle entre les deux boucles formées.
Nous avons distingué trois cas de figures pour la position géométrique des boucles, l'une par rapport à l'autre. Ceci est résumé Fig. 28. Tous les calculs sont présentés dans l'annexe C, seule la démarche est détaillée dans ce paragraphe.

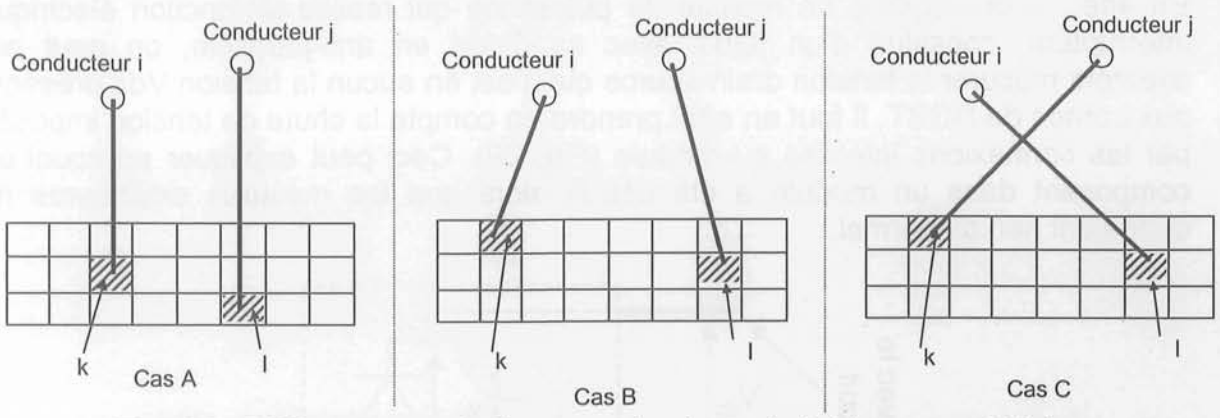


Fig. 28 : Différents cas de figures selon les subdivisions considérées

Dans tous les cas de figures, on suppose que la boucle alimentée est celle contenant le conducteur i et on recherche le flux capté par la boucle contenant le conducteur j.
Dans un premier temps il faut exprimer le champ magnétique B à la surface de la boucle contenant le conducteur j. Seule la composante normale à cette surface participe au flux.
Il faut ensuite calculer le flux Φ à travers la surface de longueur unitaire.
Et de la relation $\Phi = Mi$, on en déduit l'expression de la mutuelle inductance en H/m.

Conclusions
Voilà établies les différentes formulations permettant de remplir les matrices [R] et [M] du problème dans le cas de plusieurs conducteurs parallèles au-dessus d'un plan de masse parfait ou non.
La matrice capacitive finale est obtenue en utilisant l'Eq. 13.
Nous voyons donc que dans le cas des hautes fréquences, on est capable d'établir un modèle électrique des conducteurs à constantes réparties dont les valeurs des éléments sont calculées à l'aide de formulations analytiques.
Le couplage entre l'approche PEEC (basses fréquences) et MTL (hautes fréquences) sera donc d'autant plus aisé.

2.8. Validation expérimentale

La méthode de modélisation établie dans les paragraphes précédents a été validée expérimentalement dans de nombreux cas, aussi bien dans le domaine de l'électronique de puissance que dans le domaine de l'électrotechnique.

Malheureusement, les mesures usuelles ne permettent que l'accès à des grandeurs globales : le courant total dans un conducteur, une impédance équivalente, des pertes totales, ... et pas forcément dans toutes les configurations industrielles.
En aucun cas, on ne pourra avoir accès par mesure à des grandeurs locales comme une inductance partielle ou une densité de courant.
Quoique sur ce dernier exemple, une mesure par caméra infra rouge pourrait permettre de connaître les points chauds et donc une image de la répartition du

courant dans certains conducteurs (des plaques de préférence, pas dans la section droite de barres de distribution).

Pour compliquer l'affaire, toutes les grandeurs globales ne sont pas accessibles à la mesure.
En effet, si on regarde un module de puissance qui réalise la fonction électrique interrupteur, constitué d'un IGBT avec sa diode en anti-parallèle, on peut par exemple mesurer la tension drain-source qui n'est en aucun la tension Vds présente aux bornes de l'IGBT. Il faut en effet prendre en compte la chute de tension imposée par les connexions internes au module (Fig. 29). Ceci peut expliquer pourquoi un composant dans un module a été détruit alors que les mesures extérieures ne donnaient rien d'anormal.

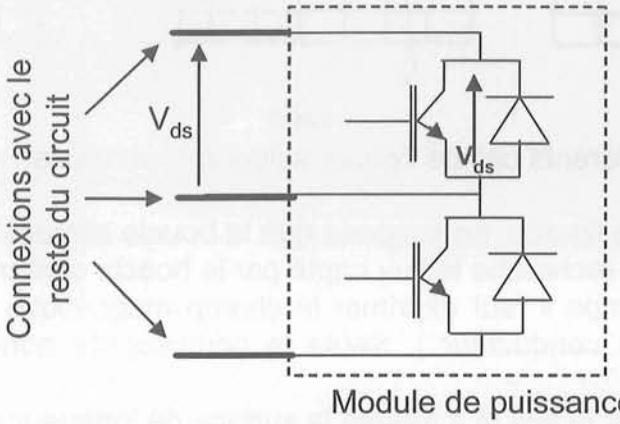


Fig. 29 : Différence entre tension mesurée et tension présente aux bornes du composant

Pour l'étude de l'interaction entre les parties puissance et commande d'une structure d'électronique de puissance, cet aspect est fondamental. Ainsi, une fois validée la méthode de modélisation, on peut être plus précis en simulation sur les grandeurs tension et courant en n'importe quel point d'un dispositif qu'avec les mesures. Grâce à la simulation, on a alors une évaluation des grandeurs non accessibles par la mesure.

Par ailleurs, il faut savoir que dans l'optique d'une mesure d'impédance, seules les impédances de circuits fermés sont mesurables. Cependant, celles qui nous intéressent ne sont pas forcément des impédances équivalentes, ce sont parfois des portions de circuits qui posent problème et de toute façon, les valeurs recherchées sont faibles voire très faibles. Se pose alors la question de la mesure de quelques nano henrys avec précision. La réponse est loin d'être immédiate pourtant déjà quelques nano henrys, selon la structure étudiée, ce sera trop.
Ainsi, grâce à la modélisation nous avons montré que l'impédance drain-source d'un MOS était différente selon qu'il était soudé au reste du circuit en utilisant la semelle ou la patte de connexion. En effet, dans le premier cas, l'inductance est beaucoup plus faible. Voilà pourquoi le fabricant avait seulement noté dans son catalogue la valeur dans cette configuration. Ces simples évaluations peuvent ainsi guider certains choix technologiques [CLA 95-1].

Si l'on reste toujours dans la problématique de la mesure d'impédance ou plutôt d'inductance, comment, dans la pratique, mesurer l'inductance d'un bus barre de

1 m² ? Il est clair que le circuit autour permettant de relier le bus barre au pont d'impédance va avoir toute son importance et pourtant il est nécessaire pour refermer le circuit. La surface ainsi formée donnera alors une inductance. Afin d'évaluer l'inductance du seul bus barre il faudra enlever la contribution de ce circuit annexe constituée non seulement de la partie propre à ce circuit mais aussi des couplages par mutuelle inductance avec le bus barre étudié. Le principe de la double pesée est alors utilisé à condition de négliger les interactions entre la partie rajoutée et celle que l'on cherche à mesurer. Ceci ne sera pas toujours possible, surtout si l'on cherche une valeur en haute fréquence. D'autres techniques doivent alors être développées, augmentant les moyens nécessaires et donc les coûts de conception.
On pourrait alors être amené à ne plus pouvoir faire confiance aux mesures que l'on effectue.

De plus les conditions de mesures sont très importantes et peuvent parfois conditionner le résultat.
Prenons l'exemple d'une armoire de distribution comme celle présentée Fig. 3a, sur laquelle on désire identifier les parties du jeu de barres de densité de courant la plus élevée en fonctionnement normal. Des mesures de température à l'aide de thermocouples directement placés sur les différentes barres ont été effectuées sur le jeu de barres en court-circuit.
Après analyse des résultats et comparaison avec des simulations effectuées dans des conditions normales de fonctionnement, il s'est avéré que les conditions de mesure choisies n'étaient pas les bonnes. En effet, en fonctionnement normal, c'est la charge qui impose le courant total dans le dispositif et donc dans le jeu de barres. Les caractéristiques électriques du jeu de barres viennent ici jouer sur la densité de courant dans les différentes barres du dispositif. Or les mesures ont été effectuées sur court-circuit. Ce sont donc les caractéristiques électriques de ce dernier, court-circuit non idéal, et du jeu de barres qui ont imposé le courant total par phase dans cette expérience. On imagine aisément que les résultats n'étaient pas du tout les mêmes et les conditions de mesures n'étaient pas réalistes car trop éloignées du fonctionnement normal ; néanmoins elles ont permis de faire des tests en usine sans connaître la charge et la mise en place de moyens importants.

Il faut donc souligner que parfois, effectivement, on n'aura pas le choix. Les mesures ne sont pas toujours possibles pour des raisons technologiques ou financières. Le recours à la modélisation est alors le seul envisageable.
Il présente aussi l'avantage de la reproductibilité des résultats. Les mêmes conditions fournissent les mêmes effets, ce qui n'est a priori pas évident en expérimentation.

Néanmoins, dans la partie suivante, à chaque fois que cela a été possible, les résultats de simulations ont été confrontés à des mesures.
Si ceci n'a pas été réalisable, notre méthode de modélisation a été alors comparée à d'autres modèles ou approches automatisés, par exemple dans les logiciels Flux3D ou Fasthenry. Ceci en aucun cas ne vaudra validation, mais si les différents modèles donnent des résultats comparables, on peut alors penser que la validité de notre approche est assurée moyennant d'avoir bien identifié les hypothèses de calcul sur lesquelles reposent les différents modèles utilisés

3. Analyse de systèmes – Faits marquants et avancées significatives

Dans cette partie, nous allons présenter différents types d'applications de la méthode de modélisation présentée dans la partie 2, c'est à dire différentes utilisations de la matrice [Z], modèle électrique de la connectique de la structure.
En effet, l'obtention du schéma électrique équivalent de la structure étudiée n'est pas une fin en soi. Beaucoup d'autres grandeurs peuvent être déduites moyennant différentes procédures de calculs et hypothèses.

3.1. Calcul de courant (application à l'alimentation d'un transformateur)

La méthode de modélisation décrite précédemment est destinée à modéliser des conducteurs de tout type à condition de ne pas avoir de matériau magnétique dans le dispositif. On peut donc tout à fait envisager de modéliser les barres d'amenée de courant d'un transformateur basse tension / moyenne tension afin de vérifier le bon équilibrage des trois phases.
C'est ce qui a été fait dans [CLA 02-1] et dont voici les principaux résultats.
La structure que nous avons modélisée est présentée Fig. 30.
Nous pouvons voir qu'une simple modélisation 1D des conducteurs devrait suffire pour obtenir des premiers résultats.
A l'issue de la modélisation PEEC, nous disposons de la matrice impédance des subdivisions [Z].
Nous recherchons l'impédance équivalente des barres d'amenée de courant ; il faut donc condenser le schéma électrique que nous avons pour le ramener à une taille raisonnable et surtout pour disposer de grandeurs plus « physiques ».
Si on regarde en détail la géométrie du problème, chaque phase est constituée par la mise en parallèle de quatre enroulements représentés par une impédance z (Fig. 31).
Pour condenser la matrice [Z] et obtenir le schéma électrique désiré, nous utilisons les techniques d'assemblage présentées au paragraphe 2.4 pour des conducteurs maillés en 1D.
Les grandeurs obtenues dépendent alors de la fréquence.
On a ainsi obtenu une matrice impédance complexe pleine [Zeq], de dimension 16*16 pour ce problème que nous avons inséré dans un simulateur électrique de type PSPICE [SPI] avec les autres parties du dispositif (Fig. 32).

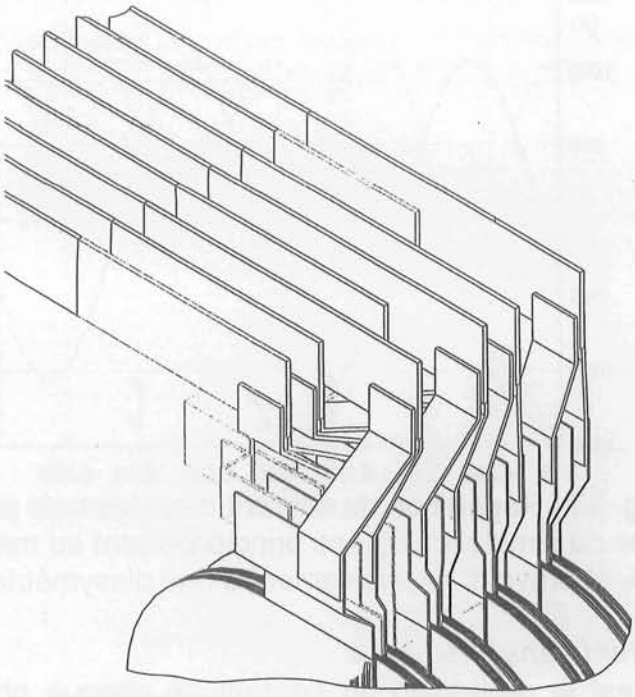


Fig. 30 : Connexions d'amenée de courant d'un transformateur

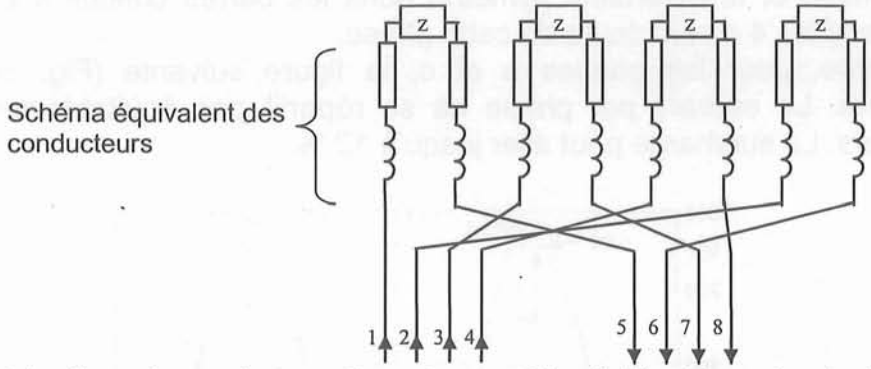


Fig. 31 : Une phase du transformateur – Circuit électrique équivalent

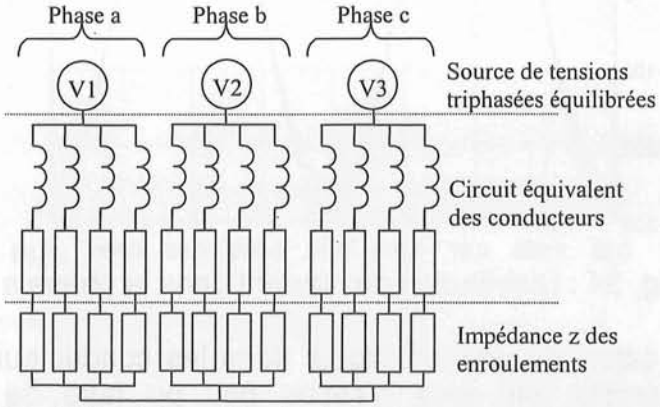


Fig. 32 : Circuit électrique équivalent des connexions au transformateur

Courants globaux par phase

Un premier résultat de cette simulation est le courant global par phase.

La figure suivante (Fig. 33) montre qu'il existe effectivement un petit déséquilibre. Les symétries géométriques des phases a et c entraînent un courant identique dans ces phases alors que celui de la phase b est plus élevé.

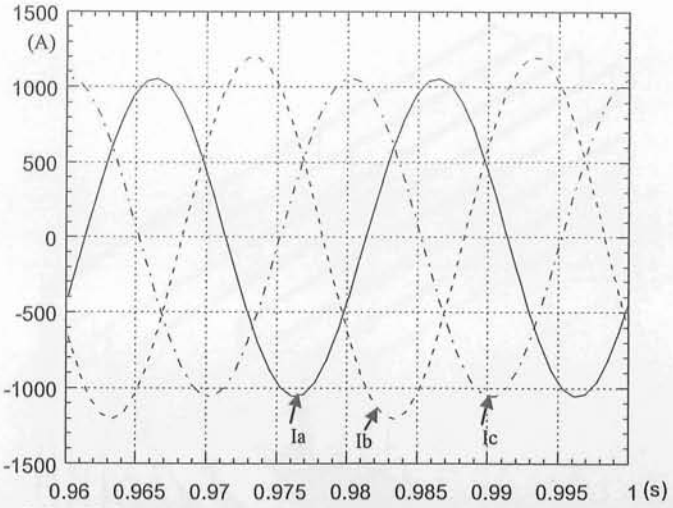


Fig. 33 : Répartition du courant dans les trois phases

Selon les conditions de simulations (liées principalement au maillage) ce déséquilibre peut atteindre 14 % et provient exclusivement d'une dissymétrie géométrique.

Répartition du courant dans une phase

Un autre résultat est la répartition du courant de chaque phase car l'amenée de courant est constituée de 4 conducteurs en parallèle.

Pour la phase b, une certaine symétrie dans les barres conduit à un équilibre du courant dans les 4 conducteurs de cette phase.

En revanche, pour les phases a et c, la figure suivante (Fig. 34) montre un déséquilibre. Le courant par phase ne se répartit pas équitablement dans les 4 conducteurs. La surcharge peut aller jusqu'à 12 %.

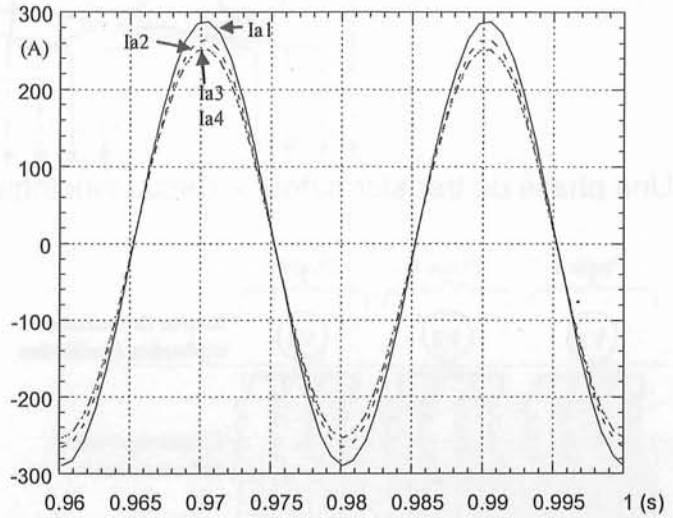


Fig. 34 : Distribution du courant dans la phase a

Cette technique de calcul de courant global dans les conducteurs n'a pas pu être validée sur cet exemple car nous n'avons pas pu faire de mesures sur ce transformateur. En revanche, grâce à un banc de test spécialement conçu pour faciliter la mesure des courant globaux, nous avons pu montrer la pertinence de nos résultats en les comparant à des mesures soignées. Ceci a été présenté dans [GUI 01]. La conclusion est très encourageante puisque les écarts observés sur cette maquette entre le calcul et la mesure sont inférieurs à 5 %.

Notre méthodologie d'évaluation des courants s'est avérée efficace.

Le calcul de la répartition du courant dans une mise en parallèle est très important surtout lorsqu'il s'agit d'alimenter des composants semi-conducteurs pour des structures d'électronique de puissance. Car les contraintes actuellement sont telles qu'on ne peut pas se satisfaire d'une mauvaise utilisation des composants sous peine d'induire des échauffements problématiques. Ceci a été mis en évidence lors de plusieurs études présentées dans [CLA 96-2] [CLA 97].

Remarques
L'hypothèse effectuée tout au long de l'étude précédente est que les enroulements sont tous identiques (remplacés par une impédance équivalente z) et qu'il n'y a pas de couplage entre ces enroulements et les barres d'amenée de courant.
De plus, la modélisation a été effectuée en l'absence de matériaux magnétiques avec la méthode PEEC.
Leur prise en compte peut être envisagée dans un second temps. C'est ce que nous avons commencé à tester dans une approche de couplage faible entre la méthode PEEC et les éléments finis [GUI 02] que nous développerons dans la partie 5 de ce manuscrit.

3.2. Calcul de la densité de courant (application à une pièce de raccordement avec ailettes faisant fonction de refroidissement)

Lorsqu'on a la matrice [Z] impédance des subdivisions du problème, on dispose par résolution du système linéaire [V] = [Z] [I], du courant dans chaque subdivision. Ce dernier est différent d'une subdivision à l'autre puisqu'il traduit à la fois l'effet de peau et l'effet de proximité. On peut donc ainsi identifier les parties du câblage dans lesquelles le courant passe majoritairement.
La grandeur la plus significative de ce phénomène est la densité de courant. On y a accès en divisant le courant dans chaque subdivision par la section de la subdivision concernée [GUI 00].
Une application de ce calcul a été réalisée sur une pièce de raccordement qui permet de connecter le bus continu à un appareillage dans une installation de puissance. Elle est constituée d'un empilement de plaques. On passe de l'une à l'autre par des plots. L'utilité de ces plaques est non seulement de faire passer le courant mais aussi de refroidir le dispositif en jouant le rôle d'ailettes. La figure suivante (Fig. 35) montre la géométrie en question sous différents angles de vue. Ce sont les deux premiers plots, plus gros, qui sont connectés au reste du circuit.

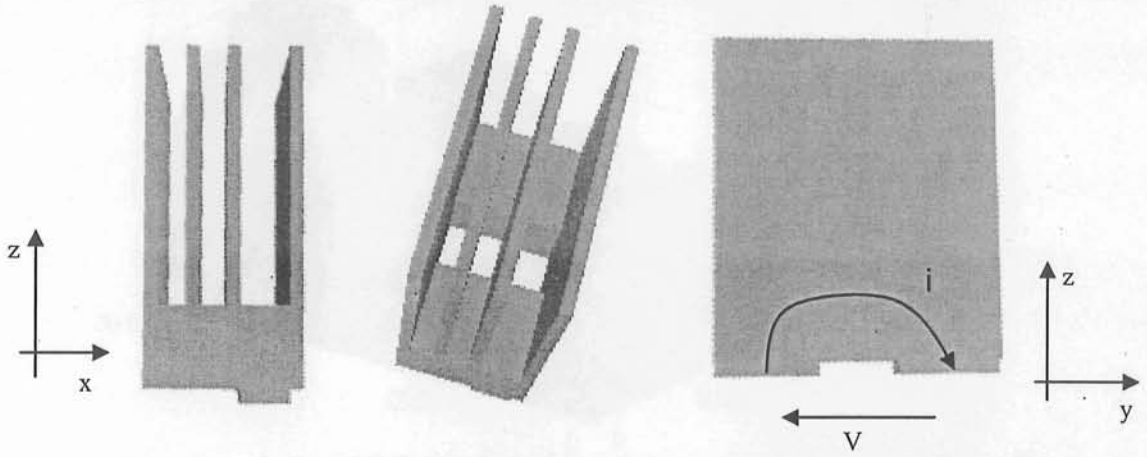


Fig. 35 : Géométrie d'une pièce de raccordement

Lors de cette étude on s'est donc attaché à modéliser les lignes de courant pour savoir quelle partie des ailettes contribue au passage du courant et quelle partie contribue au refroidissement du dispositif.
Le but bien entendu est de savoir si la quantité de cuivre est nécessaire et suffisante pour ce genre d'application. On peut ainsi chercher à l'optimiser ce qui aura un impact sur le poids total du dispositif par la suite. Ceci pourra être important lorsque cette étude sera effectuée sur des pièces destinées ensuite à être embarquées, dans des avions par exemple.
Vu la géométrie du dispositif, un maillage 2D des plaques a été adopté.

Les résultats obtenus sont présentés sur les courbes suivantes.
Dans un premier temps on a tracé la densité de courant dans les plaques à une certaine hauteur z (z=0.01m) (Fig. 36).

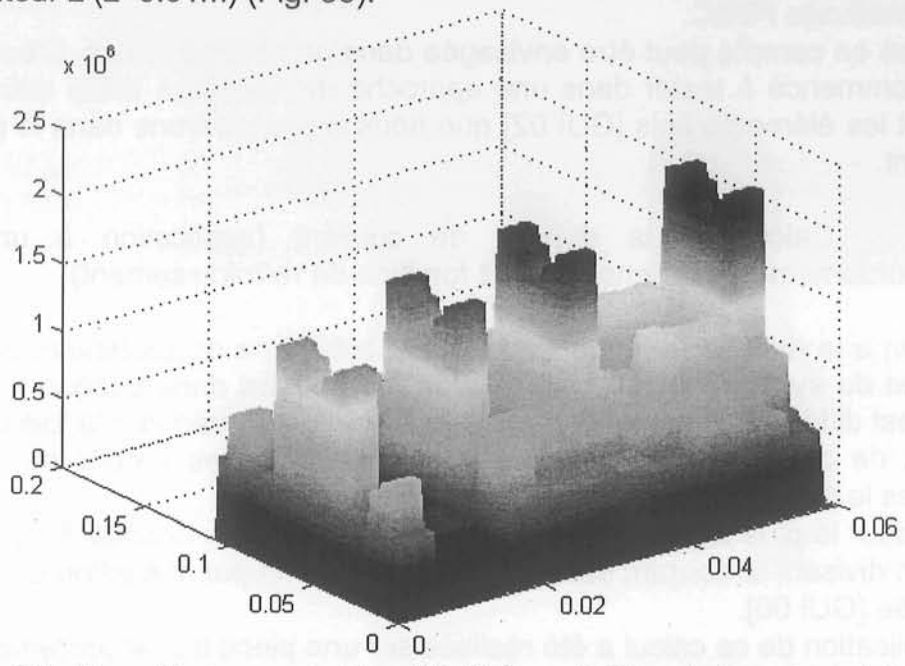


Fig. 36 : Densité de courant (en A/m²) à z = 0.01m du bas des plots

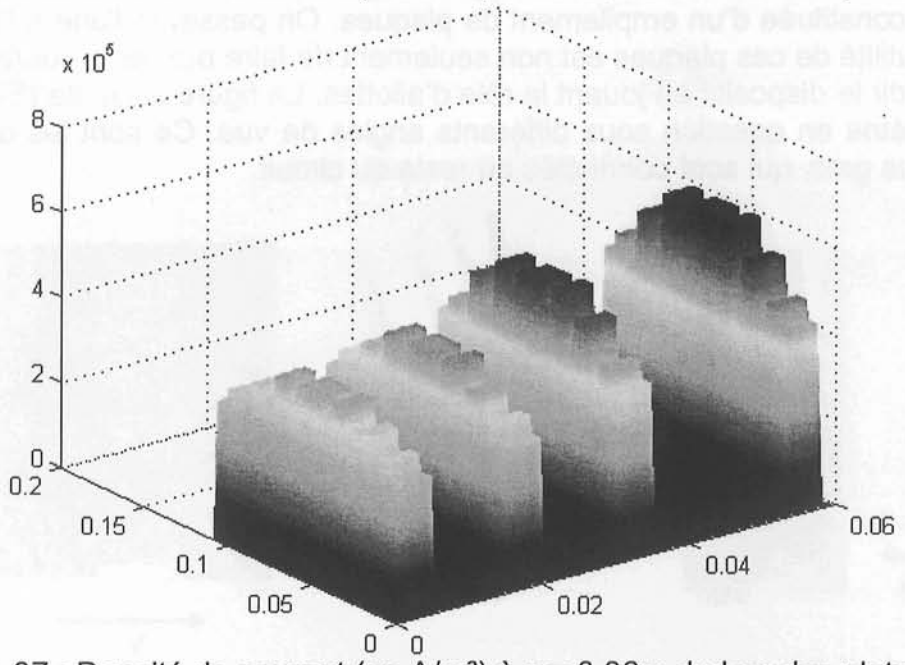


Fig. 37 : Densité de courant (en A/m²) à z = 0.06m du bas des plots

On voit effectivement que le courant passe majoritairement dans les deux plaques proches des plots de connexion. Et ce, même si on s'éloigne des plots (Fig. 37).
Si on regarde maintenant pour une plaque donnée à différentes hauteurs, on se rend compte qu'à partir d'une certaine distance, il passe très peu de courant (Fig. 38).

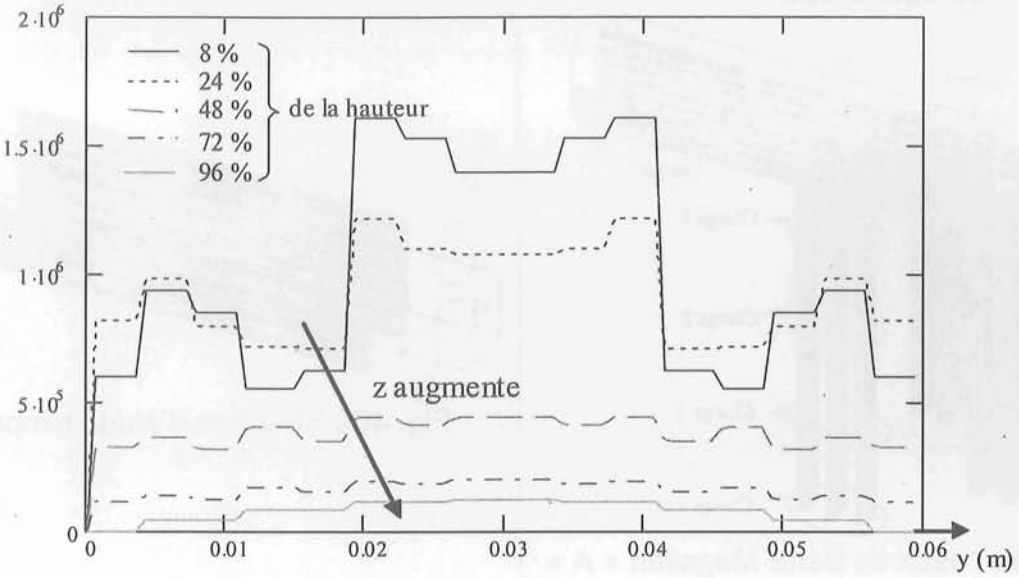


Fig. 38 : Densité de courant (en A/m²) à différentes hauteurs d'une même plaque

On peut raisonnablement conclure que sur cette géométrie 50 % des plaques sert à refroidir le dispositif.

Ce calcul de la densité de courant n'est pas seulement utile pour connaître l'utilisation du cuivre mais aussi pour identifier les points chauds dans des parties de câblage. Ainsi nous avons appliqué ce calcul à plusieurs structures :

- Un bus barre d'une structure d'électronique de puissance, maillé en 2D, pour lequel nous avons effectué une étude de la répartition du courant en fonction de la fréquence de fonctionnement. Différents points chauds ont pu être identifiés et ceci a permis de conclure sur l'utilisation du cuivre comme conducteur électrique [CLA 98].
- Une structure de test de fusibles où les fusibles devaient s'ouvrir avant que la structure ne se déchire. La structure étudiée consistait en un bus barre d'alimentation des fusibles. L'étude avait pour but d'identifier le trajet du courant pour savoir où la majeure partie de ce dernier se répartit en cas de défaut [GUI 02-1]. Ceci permet entre autre de conclure sur la robustesse mécanique d'un dispositif et de prédire des grandeurs non directement accessibles à la mesure. Peut-être des mesures thermiques pourraient permettre d'avoir indirectement une image de la densité de courant.

3.3. Calcul de puissance dissipée (application au jeu de barres Magellan)

Les jeux de barres dans les postes de transformation sont principalement constitués de barres massives horizontales et verticales, de section rectangulaire. Celui que nous avons étudié dans ce paragraphe se présente comme le montre la figure suivante (Fig. 39).
Cà et là, des départs vont alimenter les différentes charges.

Pour simplifier l'étude, nous nous sommes intéressés dans un premier temps au jeu de barres horizontales (Fig. 40).
Pour se mettre dans des conditions réalistes, nous avons chargé le jeu de barres avec une charge triphasée équilibrée (de nature résistive R) qui va donc imposer le courant total dans la structure et alimenter cette dernière par un système de tensions triphasées équilibrées.

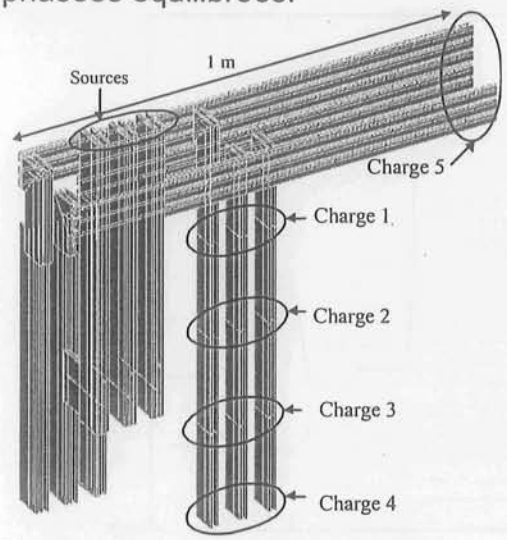


Fig. 39 : Jeux de barre Magellan « A »

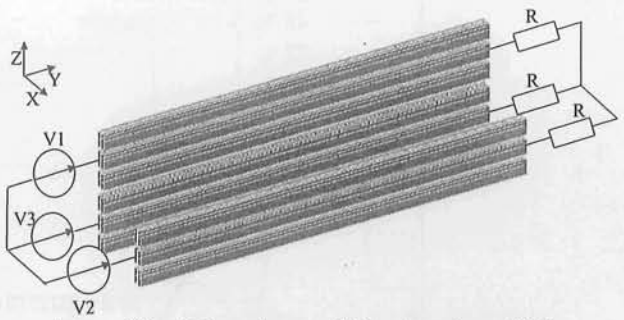


Fig. 40 : Structure d'étude simplifiée

Nous avons recherché les pertes totales d'un tel jeu de barres ainsi que la puissance dissipée par chaque phase.
Pour cela, une fois établi le schéma électrique équivalent du dispositif [Z], nous avons dû résoudre le système d'équations suivant : [U] = [Z] [I]

Le calcul se fait en plusieurs étapes :

- Dans un premier temps, on résout le système matriciel complet pour obtenir le courant dans chaque subdivision ainsi que sa densité de courant. Ces calculs ont été comparés avec la méthode des éléments finis [GUI 00] et nous avons obtenus les résultats présentés Fig. 41.

- Ensuite on calcule pour chaque subdivision, la puissance dissipée avec l'équation suivante :

$P_{subdivision} = R_{subdivision} I_{subdivision}^2$

Avec :

$P_{subdivision}$: Puissance dissipée dans une subdivision (W).

$R_{subdivision}$: Résistance de la subdivision (Ω).

$I_{subdivision}$: Courant efficace circulant dans la subdivision (A).

- Enfin, on somme toutes ces puissances pour obtenir les pertes totales par phase puis pour le dispositif complet.

Remarque : En aucun cas il ne faudra faire ce calcul à partir de la résistance totale équivalente du conducteur considéré et du courant total le traversant car on ne tiendrait alors pas compte de la répartition des lignes de courant dans la section des conducteurs [BES 03], c'est-à-dire l'effet de peau et l'effet de proximité.

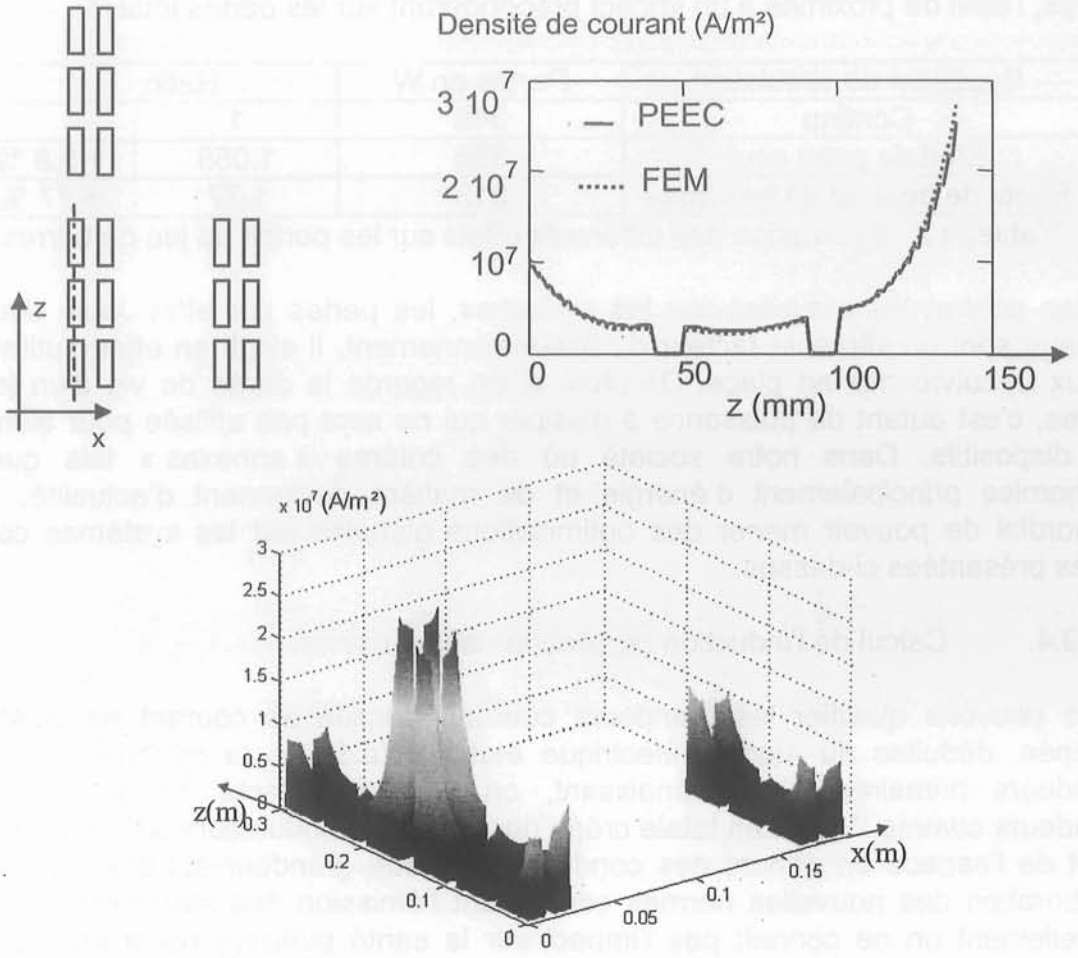


Fig. 41 : Répartition de la densité de courant dans les 18 barres du jeu de barres.

Les résultats obtenus (Tableau 1) montrent une disparité dans la répartition des pertes entre phases.
Cette disparité était prévisible vu le déséquilibre observé sur la densité de courant dans les différentes barres.

	Pertes (W)
Phase 1	222
Phase 2	158
Phase 3	233
Total	613

Tableau 1 : Pertes totales et dans chaque phase

Comme je l'ai dit précédemment, la densité de courant (J) ainsi que ses variations (ΔJ) ont un impact sur les pertes. Deux effets contribuent à sa valeur : effet de peau (effet de la fréquence) et effet de proximité (mutuelle inductance entre conducteurs).
Ainsi pour ce jeu de barres, nous avons essayé de séparer les différents effets :

- Calcul des pertes en continu (f=0). On trouve P = 346 W
- Calcul en ne prenant en compte que l'effet de peau : f = 50Hz et on ne calcule qu'une barre. On multiplie ensuite par le nombre de barres pour avoir le résultat pour le jeu de barres complet. On trouve P = 366 W
- Calcul des pertes totales. On trouve P = 613 W

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 2. Nous avons aussi calculé la contribution de chaque effet. On se rend compte que pour cette géométrie de jeu de

barres, l'effet de proximité a un impact prépondérant sur les pertes totales.

Condition de simulation	Pertes en W	Ratio	
Continu	346	1	
Effet de peau seul	366	1.058	+ 5.8 %
Effets de peau et de proximité	613	1.77	+ 77 %

Tableau 2 : Séparation des différents effets sur les pertes du jeu de barres

Vu les contraintes actuelles sur les systèmes, les pertes par effet Joule dues au câblage sont un véritable facteur de dimensionnement. Il s'agit en effet d'utiliser au mieux le cuivre mis en place. De plus, si on regarde la durée de vie d'un jeu de barres, c'est autant de puissance à dissiper qui ne sera pas utilisée pour alimenter les dispositifs. Dans notre société où des critères « annexes » tels que les économies principalement d'énergie et de matière deviennent d'actualité, il est primordial de pouvoir mener des optimisations globales sur les systèmes comme celles présentées ci-dessus.

3.4. Calcul de l'induction (application à une usine)

Nous pouvons qualifier les grandeurs courant, densité de courant ou puissance dissipée, déduites du modèle électrique établi à l'aide de la méthode PEEC de grandeurs primaires. Les connaissant, on peut être tenté d'évaluer d'autres grandeurs comme l'induction totale créée par tous ces conducteurs en n'importe quel point de l'espace en dehors des conducteurs. Cette grandeur est d'actualité dans l'élaboration des nouvelles normes concernant l'émission des structures. Même si actuellement on ne connaît pas l'impact sur la santé publique de la présence de champ magnétique, il faut être capable de qualifier son système dans des conditions de fonctionnement bien établies.
Pour cela, il suffit connaissant le courant, d'appliquer la loi de Biot et Savard.
Dans la majorité des cas, on va s'intéresser au champ magnétique loin des conducteurs, on pourra donc assimiler les subdivisions des conducteurs à des conducteurs filiformes. Ce qui permet de conserver des formulations assez simples peu consommatrices de temps de calcul.
Pour simplifier l'exposé qui va suivre, on va présenter une démarche de calcul sur le cas d'un conducteur infiniment long. Il faut savoir qu'on peut, bien entendu, utiliser la démarche PEEC mais les formulations à utiliser sont plus lourdes.
D'où, soit un conducteur de section rectangulaire, infiniment long de densité de courant uniforme. On le maille et chaque subdivision sera considérée comme un conducteur filiforme situé au niveau de son axe. On connaît de façon exacte l'induction créée par un conducteur filiforme infiniment long parcouru par un courant I en un point distant de x de ce fil (Eq. 17) :

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \text{Eq. 17}$$

Pour notre application, il suffira de calculer la contribution de chaque subdivision et de les sommer (de façon vectorielle) pour obtenir l'induction totale du conducteur étudié.
Cette démarche donne des résultats satisfaisants tant qu'on calcule l'induction à une certaine distance du conducteur et dans l'hypothèse 2D (conducteur infiniment long).
Mais ce calcul peut conduire à une divergence dès qu'on se rapproche du conducteur (à cause de l'approche filaire).

L'objectif que nous poursuivons étant de pouvoir optimiser les dispositifs, il nous faut donc être capable d'évaluer la fonction objectif (ici par exemple l'induction) quel que soit le jeu de valeurs des paramètres, même si on sait pertinemment qu'il y a des jeu de valeurs non réalistes. Dans une optique d'optimisation, il faut pouvoir explorer tout l'espace des solutions. Aussi, afin de conserver un calcul faisable dans tous les cas de figures, on a mis en place une procédure du calcul de l'induction à l'intérieur du conducteur massif qui consiste à ne regarder que la contribution d'une partie du conducteur. On élimine la ou les subdivisions qui se trouvent au niveau du point de calcul (bandes de largeur εx et εy) (Fig. 42).
Les résultats obtenus sur ce cas très simple montrent très clairement ce qui se passe dans le conducteur (Fig. 43). Le détail des calculs est présenté en annexe D.

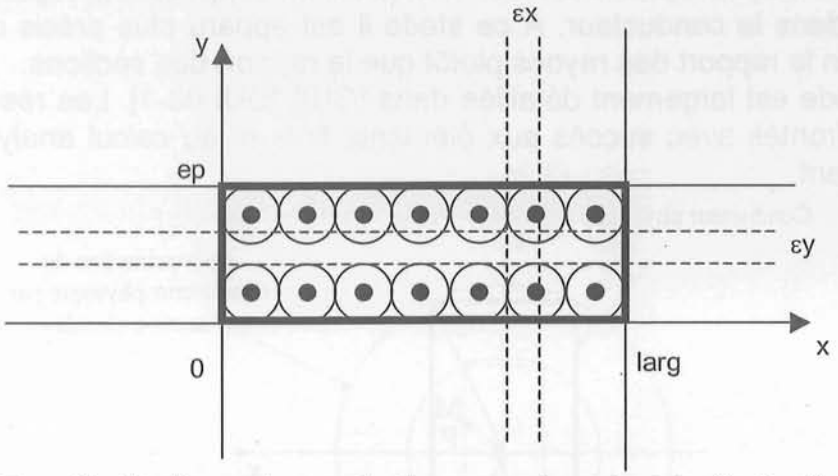


Fig. 42 : Maillage du conducteur pour le calcul de l'induction

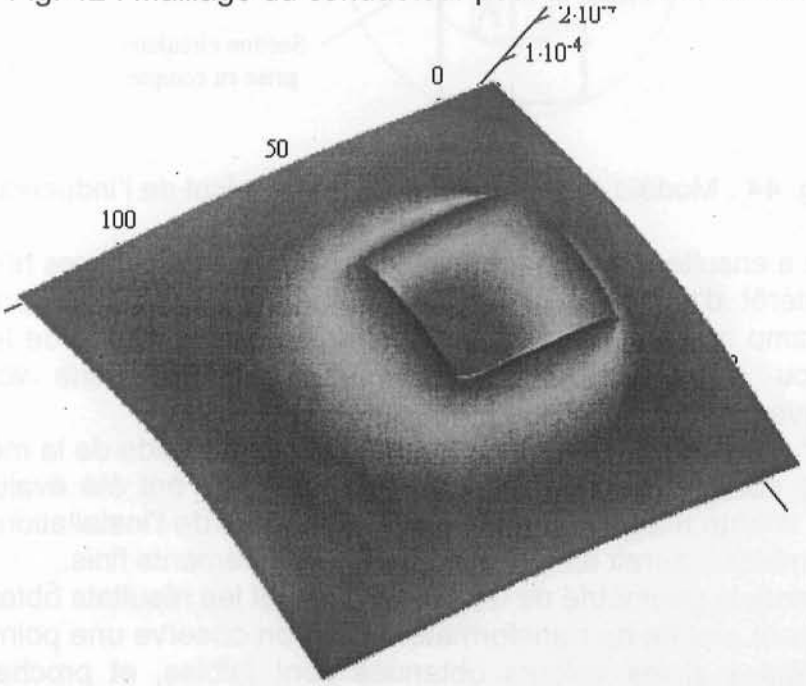


Fig. 43 : Induction (T) créée par un conducteur infini de section rectangulaire

Cependant les géométries de câblage que nous devons traiter ne sont pas 2D.
Cette approche quoique séduisante ne peut plus s'appliquer aussi simplement.
Nous avons cherché une méthode de calcul permettant de conserver cette approche filaire, analytique tout en s'affranchissant des problèmes liés à la divergence de l'expression de l'induction lorsqu'on se rapproche du conducteur.

Lorsque le conducteur est de section circulaire avec une densité de courant uniforme, l'application du théorème d'Ampère à l'intérieur du conducteur conduit à ne considérer qu'une portion du courant total circulant dans le conducteur. C'est ce principe qui est adopté ici pour éviter la divergence apportée par la modélisation filaire des conducteurs.
Les lignes d'equi-induction créées par un conducteur filiforme seul, calculées à l'aide de la loi de Biot et Savart, sont des cercles concentriques d'axe la ligne de courant. Par conséquent, les sections rectangulaires des conducteurs sont approchées par des sections circulaires comme montrées sur Fig. 44. A l'intérieur du conducteur, ce n'est pas la totalité du courant qu'il faut alors considérer mais une partie seulement. Cette partie correspond au rapport entre la section du conducteur réel et la section vue par le point où l'induction est recherchée si l'on suppose une répartition uniforme du courant dans le conducteur. A ce stade il est apparu plus précis de prendre en considération le rapport des rayons plutôt que le rapport des sections.
Cette méthode est largement détaillée dans [GUI] [GUI 03-1]. Les résultats obtenus ont été confrontés avec succès aux éléments finis et au calcul analytique proposé précédemment.

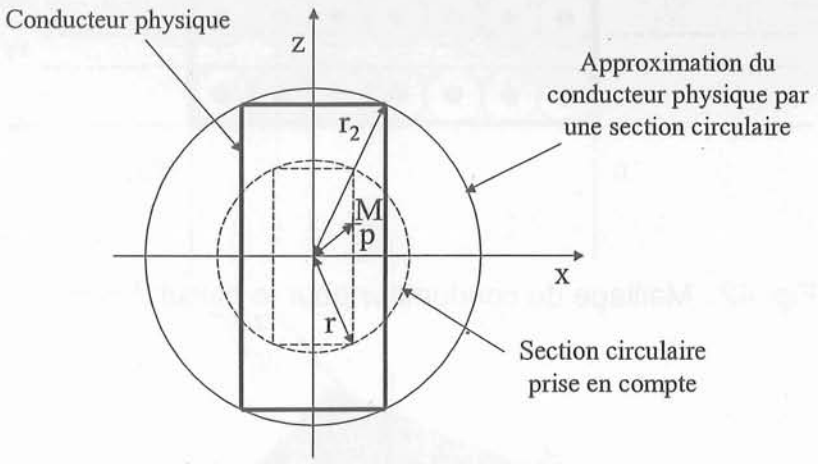


Fig. 44 : Modèle des conducteur pour le calcul de l'induction

Cette approche a ensuite été mise en application pour des structures réelles.
Le principal intérêt d'un tel calcul est, comme nous l'avons dit précédemment, d'évaluer le champ magnétique à proximité d'une installation afin de le comparer à des normes ou d'identifier son impact sur des installations voisines (salle microinformatique à côté d'atelier de production par exemple).
Le câblage d'un poste de transformation a été modélisé à l'aide de la méthode PEEC et les différents courants circulant dans les conducteurs ont été évalués. On a pu ainsi estimer le champ magnétique dans un plan proche de l'installation. On note sur cet exemple combien il aurait été délicat d'utiliser les éléments finis.
La Fig. 45 présente la géométrie du dispositif étudié et les résultats obtenus.
C'est effectivement proche du transformateur que l'on observe une pointe d'induction magnétique. Mêmes si les valeurs obtenues sont faibles, et proches du champ terrestre, d'un point de vue compatibilité électromagnétique, c'est la variation du champ magnétique qu'il faudra évaluer car elle est à l'origine des disfonctionnements observés.
Des mesures effectuées sur site ont donné le même ordre de grandeur pour le champ magnétique.

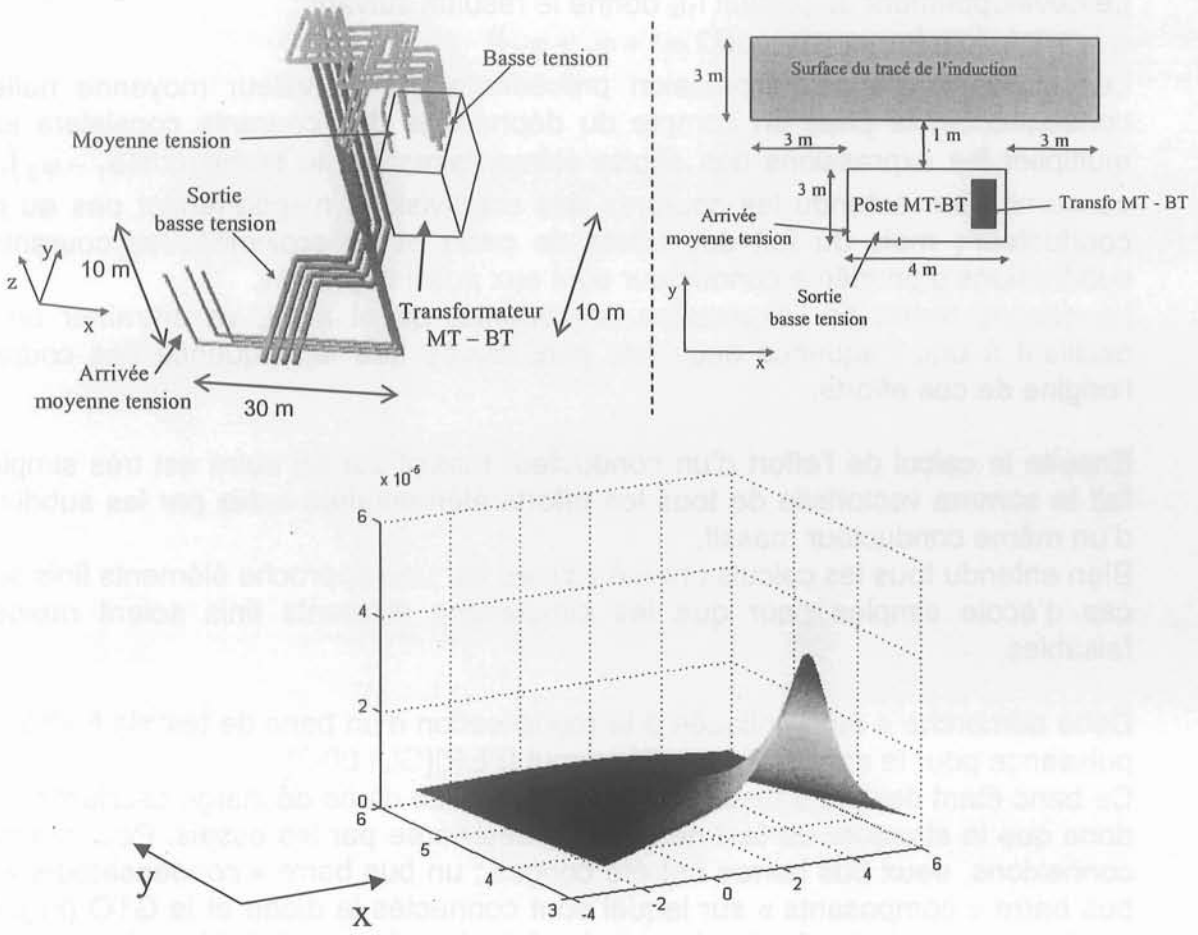


Fig. 45 : Modélisation du câblage d'un poste de transformation - Induction

Cette démarche et les résultats attendus sont très prometteurs pour mieux agencer les différents constituants d'un système complexe (unité de production, de calcul, puissance, signal, ...). Et rapidement, elle a pu aider à l'aménagement d'un site de ST microelectronics à Crolles [GUI 03-2].

3.5. Calcul des efforts électrodynamiques (application à une structure de test de fusibles)

Avec la démarche développée jusqu'alors nous savons calculer les courants dans n'importe quel conducteur ainsi que l'induction en tout point de l'espace. Il est donc envisageable d'utiliser la loi de Laplace pour déterminer alors les efforts électrodynamiques entre conducteurs.
Etant donné que le problème a été maillé, nous pouvons continuer à avoir l'approche filaire. Ainsi la donnée nécessaire au calcul des forces est le courant dans chaque subdivision. On applique alors la loi de Laplace pour obtenir tous les efforts élémentaires entre deux subdivisions. Selon la position relative des deux subdivisions concernées, la formulation à utiliser diffère. Le détail des formulations utilisées est présenté dans la thèse de Jean-Michel Guichon [GUI]. Néanmoins cet effort est fonction du produit des deux courants dans les subdivisions. Ainsi, si ces derniers sont complexes et présentent donc un déphasage, il faut en tenir compte.

Si : $\begin{cases} i_1 = I_1.\sqrt{2}.\sin(\omega.t + \varphi_1) \\ i_2 = I_2.\sqrt{2}.\sin(\omega.t + \varphi_2) \end{cases}$

Le développement du produit $i_1 i_2$ donne le résultat suivant :

$$i_1.i_2 = I_1.I_2.(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2.\omega.t + \varphi_1 + \varphi_2))$$

Le second terme de l'expression précédente est de valeur moyenne nulle ; en conséquence, la prise en compte du déphasage des courants consistera juste à multiplier les expressions des efforts élémentaires par le terme $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. Cela concerne bien entendu les courants des subdivisions n'appartenant pas au même conducteur ; mais du fait des effets de peau et de proximité, les courants des subdivisions d'un même conducteur sont eux aussi déphasés.
Le second terme de l'expression précédente, quant à lui, va entraîner un effort oscillant à une fréquence deux fois plus élevée que la fréquence des courants à l'origine de ces efforts.

Ensuite le calcul de l'effort d'un conducteur massif sur un autre est très simple ; on fait la somme vectorielle de tous les efforts élémentaires subis par les subdivisions d'un même conducteur massif.
Bien entendu tous les calculs ont été validés par une approche éléments finis sur des cas d'école simples pour que les simulations éléments finis soient rapidement faisables.

Cette démarche a été appliquée à la modélisation d'un banc de test de fusibles forte puissance pour la société Ferraz Shawmut [FER][GUI 00-2].
Ce banc étant destiné à tester des fusibles à l'aide d'une décharge oscillante, il s'agit donc que la structure de test ne soit pas détériorée par les essais. Pour réaliser les connexions, deux bus barres ont été conçus ; un bus barre « condensateurs » et un bus barre « composants » sur lequel sont connectés la diode et le GTO (Fig. 46). Il s'agissait pour cette étude de savoir si le bus barre était bien dimensionné et prédéterminer les efforts électrodynamiques entre les deux plaques du bus barre durant le court-circuit.

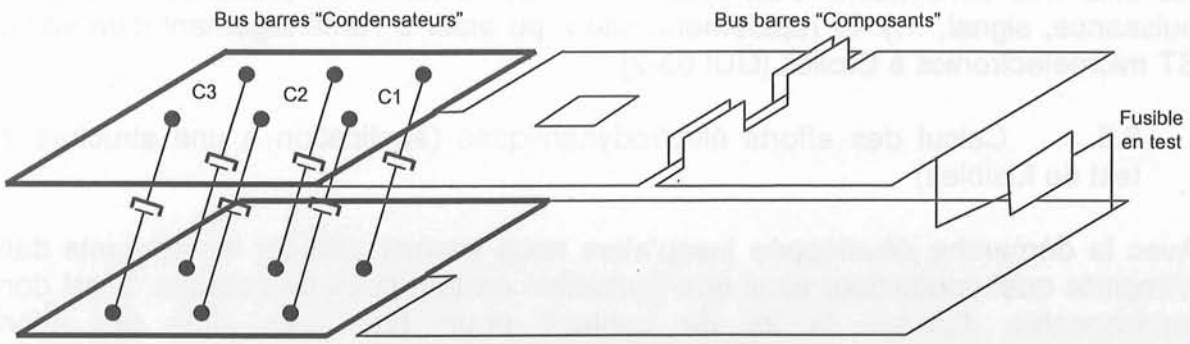


Fig. 46 : Banc de test de fusibles

Le principe de fonctionnement d'une telle structure est le suivant (Fig. 47) : la fermeture du GTO va provoquer la décharge des condensateurs dans le circuit ainsi constitué. La diode est placée en anti-parallèle de façon à éviter tout risque de circulation de courant négatif dans le GTO.
Les plaques des bus barres ont été maillées en 2D et nous avons simulé chaque bus barre séparément pour pouvoir identifier les différents phénomènes observés. Nous avons évalué la densité de courant à la fréquence de 1 kHz qui correspond à la pseudo pulsation de la décharge oscillante.
Pour le bus barre « condensateurs », on a intégré l'inductance interne des condensateurs (supposés tous identiques). La densité de courant obtenue est

présentée Fig. 48. Un certain déséquilibre entre les condensateurs est visible. Pour le bus barre « composants », on a obtenu Fig. 49.

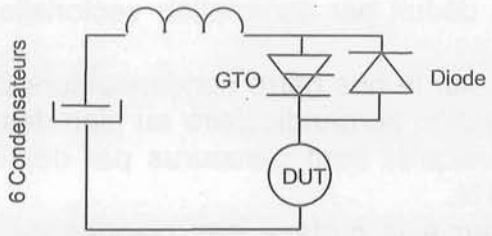


Fig. 47 : Fonction électrique réalisée par le banc de test de fusibles

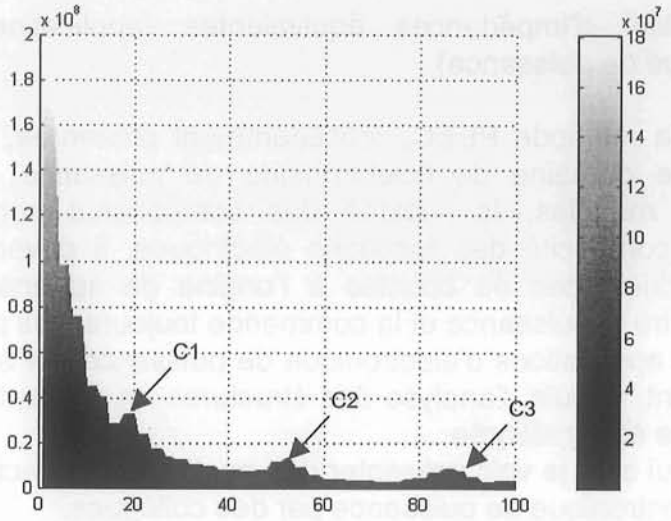


Fig. 48 : Répartition du courant dans le bus barre « condensateurs »

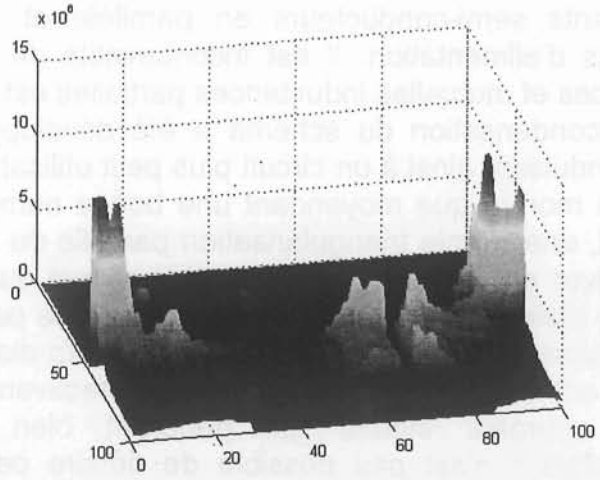


Fig. 49 : Répartition du courant dans le bus barre « composants » (plaque de dessus)

Remarque : Notons que ce n'est pas le courant I qui circule qui est la grandeur importante pour le dimensionnement des condensateurs mais plutôt la quantité I^2t.

L'objectif est de disposer des contraintes mécaniques sur les bus barres.
La détermination des efforts électrodynamiques subis par les plaques des bus barres

nécessite de connaître la répartition du courant dans les plaques.
Ensuite, il suffit d'appliquer la loi de Laplace entre conducteurs parallèles ou perpendiculaires pour en déduire l'effort local entre deux éléments du maillage.
L'effort global est alors déduit par sommation vectorielle sur toutes les mailles du problème.
Un calcul a été effectué sur le bus barre condensateurs 2 kV. Comme prévu, l'effort est dirigé selon une direction perpendiculaire au plan des plaques. Ces derniers ont tendance à s'écarter puisqu'ils sont parcourus par des courants de sens opposé. L'effort global vaut 1119 N.
En ramenant cette valeur à la surface des plaques du bus barre nous avons pu déduire une densité surfacique moyenne d'efforts électrodynamiques : 1863 N/m^2.

3.6. Calcul d'impédances équivalentes (application à des structures d'électronique de puissance)

L'utilisation de la méthode PEEC, précédemment présentée, a été initiée par des besoins dans le domaine de l'électronique de puissance. Avec la montée en puissance des modules, la rapidité des composants semi-conducteurs allant croissant et la compacité des fonctions électriques, il devenait crucial de mieux identifier les inductances de boucles à l'origine de surtension et de limiter les perturbations entre la puissance et la commande toujours plus proches.
De nombreuses applications d'électronique de puissance ont été détaillées dans ma thèse. Cependant, depuis, l'analyse des structures en utilisant le modèle issu de la méthode PEEC a été améliorée.
Ainsi, dans ce qui suit, je vais présenter des applications effectuées grâce à InCa3D dans l'équipe électronique de puissance par des collègues.

Le schéma électrique obtenu à l'aide de la méthode PEEC pour un module de puissance peut être très complexe car pour chaque fonction interrupteur il y a plusieurs composants semi-conducteurs en parallèle et pour chacun d'eux de nombreux bondings d'alimentation. Il est inconcevable de l'utiliser tel quel car le nombre d'inductances et mutuelles inductances partielles est considérable (Fig. 50).
Une méthode de condensation du schéma a été développée par Nadège Piette durant sa thèse conduisant ainsi à un circuit plus petit utilisable dans des logiciels de type SPICE. Elle a montré que moyennant une bonne numérotation des mailles et branches du circuit, une simple triangularisation partielle du système électrique était suffisante pour arriver au résultat. Le seul problème est que l'on obtient alors une matrice impédance pleine comportant non seulement une partie réelle et imaginaire sur les termes diagonaux mais aussi sur les termes extra diagonaux. Il y a donc des couplages résistifs entre conducteurs. Ceci semble effectivement plausible puisqu'il y a présence de courants induits qui génèrent bien entendu des pertes supplémentaires. Mais il n'est pas possible de décrire ces couplages dans des logiciels de type SPICE. Il faut donc modifier le schéma donné par cette matrice impédance.
De plus, la comparaison entre plusieurs structures ne pourra être efficace que si l'on compare des circuits équivalents représentant la même topologie.
Il peut donc être intéressant de chercher un modèle électrique équivalent indépendant de la géométrie des connexions et uniquement fonction du nombre d'entrées - sorties du dispositif.

Jean-Luc Schanen a mis en place une méthode générique permettant d'obtenir un schéma électrique équivalent sans couplage résistif qui sera ensuite utilisé et compris dans Spice ou Saber [SUA] à l'aide d'un changement de base judicieux.
Dans son habilitation à diriger des recherches [SCH], il a ensuite détaillé l'utilisation d'un tel schéma pour non seulement en déduire des impédances équivalentes de boucles de commutation mais aussi des calculs de répartition de courant dans des mises en parallèle de semi-conducteurs.
Cette fonctionnalité rajoutée à la méthode PEEC lui confère de ce fait un aspect incontournable dans la modélisation des structures d'électronique de puissance.
La figure suivante présente une géométrie de module de puissance modélisée avec la méthode PEEC.

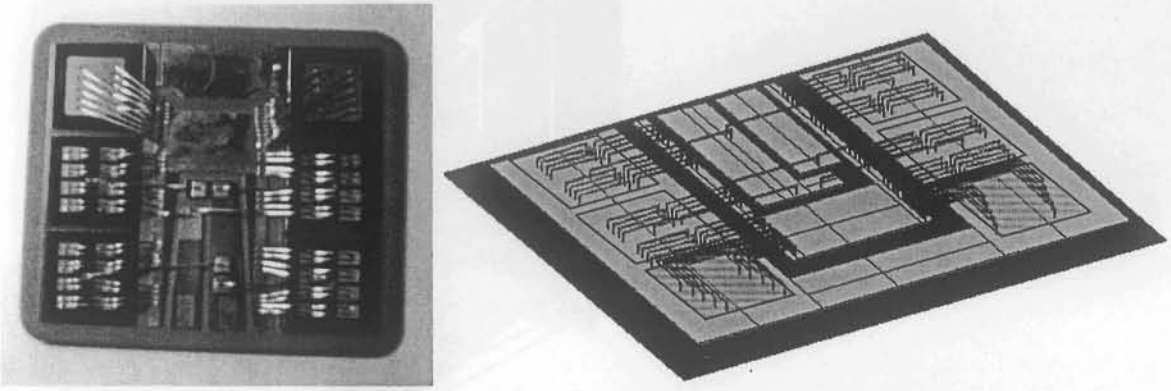


Fig. 50 : Module de puissance Dynex (3.3 kV – 200 A)
(à gauche : le module décapsulé, à droite : la modélisation avec la méthode PEEC)

3.7. Autres analyses

Au fil des applications que nous avons eues à traiter avec l'approche PEEC, des analyses spécifiques et ponctuelles ont été entreprises.
Dans ce paragraphe, deux d'entre elles sont présentées. Elles permettent de montrer que la généricité du modèle obtenu pour les conducteurs autorise de faire des études de sensibilité sur d'autres paramètres de la structure.

Influence de la résistance de contact (application à un disjoncteur)
Dans cette application, nous avons modélisé la circuiterie interne d'un disjoncteur. Sur la Fig. 51 on reconnaît les trois phases ainsi que les parties mobiles qui fermeront ou non le circuit.
De même que pour l'application du transformateur, il nous est possible de calculer l'impédance de chaque phase et identifier ainsi un déséquilibre éventuel du courant entre les trois phases.
En fait si déséquilibre il y a, il ne provient pas, dans la majorité des cas, du circuit mais plutôt d'un mauvais contact de la partie mobile de l'une des trois phases. Dans le schéma électrique que nous obtenons, étant donné qu'il est possible de localiser les différents éléments, on peut alors insérer au bon endroit une résistance de contact permettant de modéliser la liaison entre les parties fixes et mobiles.
On peut alors entamer une étude sur l'influence de cette résistance de contact sur la répartition du courant dans les trois phases afin de savoir si ces contacts sont un point clé ou non dans le bon équilibrage des courants et si technologiquement il faudra développer des procédés particuliers ou non pour les améliorer.

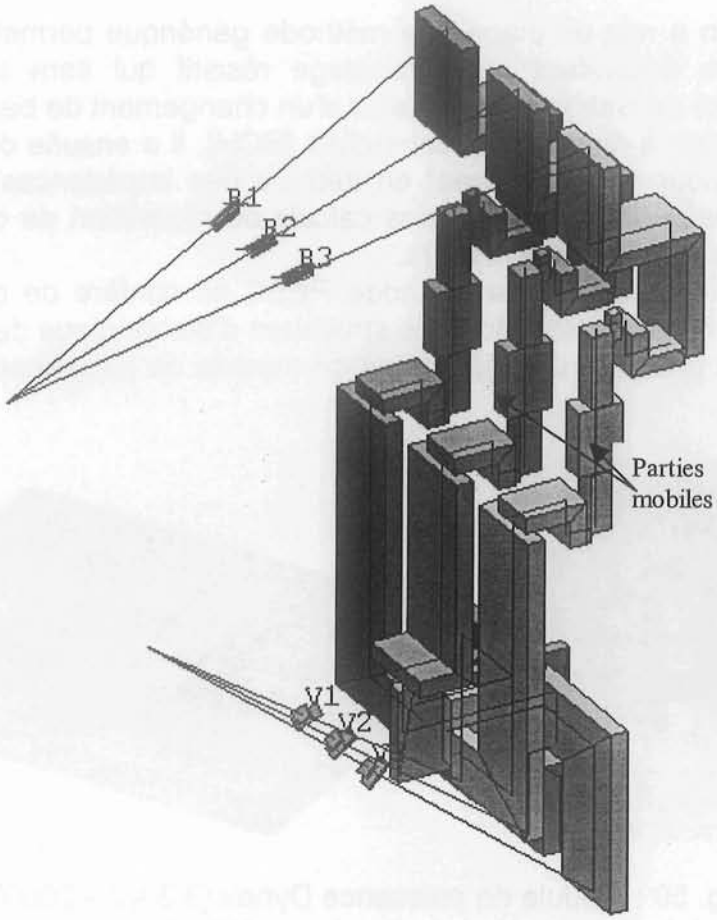


Fig. 51 : Connexions internes d'un disjoncteur

Influence de la nature du matériau (application à une borne de connexion)
Cette pièce (Fig. 52) est destinée à raccorder un câble (vert) à un appareillage de type disjoncteur (rouge).
A l'aide de la vis (jaune), on vient connecter le câble (vert) à la cage (bleue) qui est raccordée au disjoncteur (rouge) au niveau de la partie haute que l'on peut voir aussi sur la figure du disjoncteur (Fig. 51).
Les formulations que nous utilisons ne nous permettent pas de décrire des conducteurs de section circulaire. Nous les avons donc remplacés par des conducteurs de même section carrée.

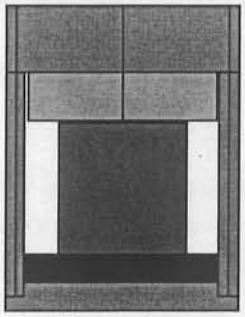


Fig. 52 : Géométrie d'une borne de raccordement

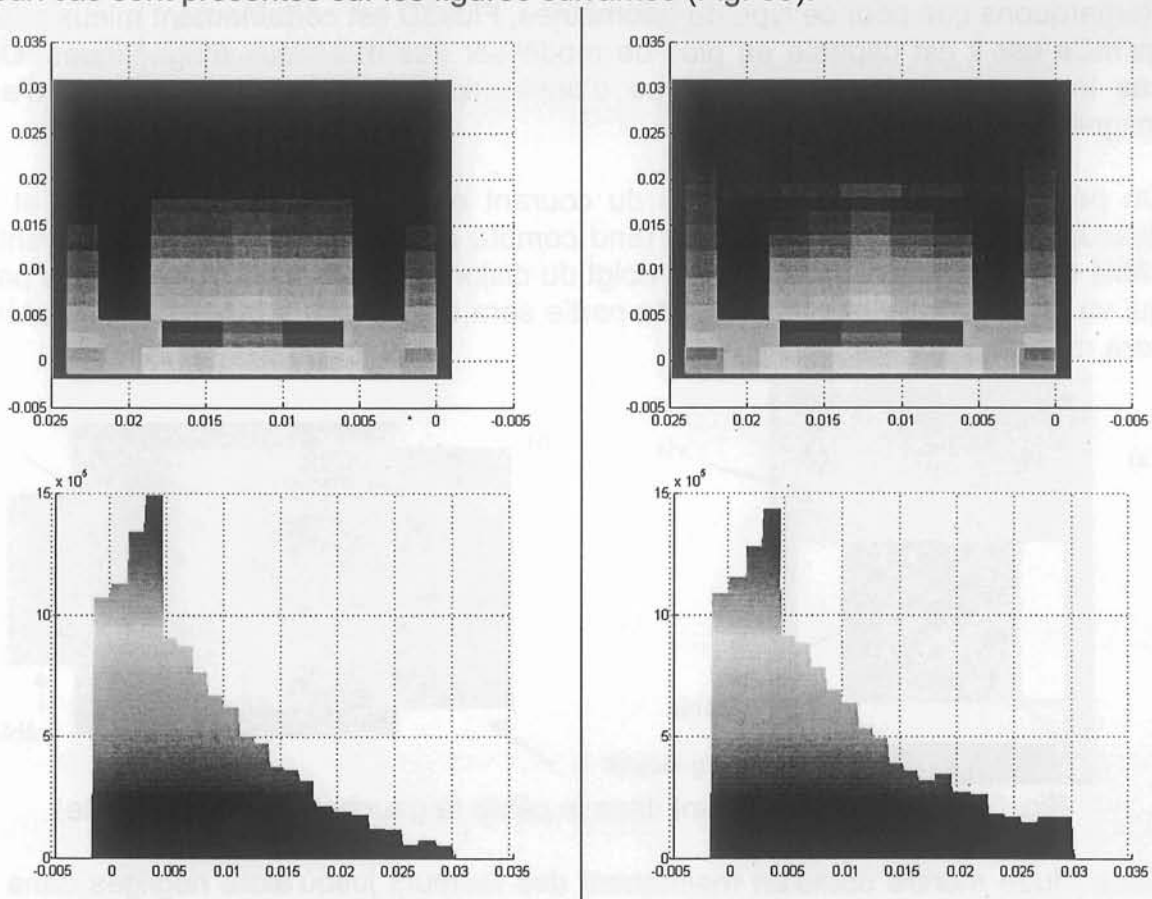
Lors de l'exploitation de ce genre de produits, l'industriel s'est rendu compte d'une différence de température de fonctionnement selon la nature du matériau utilisé pour la vis.

Cette pièce est intéressante car elle pousse dans ces derniers retranchements le maillage 2D que nous avons mis en place.
C'est un véritable problème 3D pour lequel nous voulons regarder localement les lignes de courant.
Cependant pour l'instant nous n'avons développé que le maillage 2D qui consiste à faire des plaques sans forcément de lien entre elles. Pour ne pas engendrer de problème trop gros à résoudre, nous avons agencé le maillage 2D des volumes de telle sorte à prendre en compte les phénomènes 3D.

Nous avons, de plus, envisagé deux matériaux pour la vis : l'aluminium et l'acier, caractérisés par une résistivité différente.

$$\rho_{Acier} = 20\ 10^{-8}\ \Omega m$$
$$\rho_{Al} = 2.8\ 10^{-8}\ \Omega m$$

Les résultats que nous avons obtenus avec la même densité de maillage dans les deux cas sont présentés sur les figures suivantes (Fig. 53).



Vis en acier | Vis en aluminium

Fig. 53 : Densité de courant

Avec l'aluminium, la résistivité étant plus faible, la résistance électrique équivalente est donc plus faible. Donc le courant, qui choisi toujours le chemin de plus faible impédance pourra aller dans la vis plus facilement que si la vis est en acier. Ceci explique que la densité de courant dans la vis soit plus élevée dans le cas d'une vis en aluminium que dans le cas d'une vis en acier.
Pour un même courant total d'alimentation, si on regarde la puissance dissipée par

cette borne, celle-ci est plus élevée dans le cas de l'acier : $\frac{P_{Acier}}{P_{Alu}} = 1.014$

Les résultats que nous obtenons vont dans le bon sens puisque l'industriel a observé que le dispositif est à une température plus élevée dans le cas où la vis est en acier. Malheureusement pour l'instant on ne fait pas encore le lien entre la puissance dissipée et la température. Mais plus il y a de pertes et plus ça chauffe à géométrie constante.

Afin de confirmer qualitativement les résultats obtenus avec notre approche, des simulations éléments finis ont été effectuées sur ce dispositif dans les mêmes conditions c'est-à-dire, contacts électriques parfaits entre les différentes pièces de ce dispositif, conducteurs de section rectangulaire, pas de matériau magnétique.
Les résultats obtenus viennent confirmer nos simulations avec la méthode PEEC :

$$\frac{P_{Acier}}{P_{Alu}} = 1.021$$

Et l'écart entre les deux approches est inférieur à 5 %.
Remarquons que pour ce type de géométries, Flux3D est certainement mieux adapté qu'InCa car il est capable en plus de modéliser des matériaux magnétiques. Or le cas le plus probable dans ce type d'application est d'être en présence d'acier magnétique.

On peut aussi tracer la répartition du courant en bout de câble (Fig. 54a) et au-dessus de la vis (Fig. 54b). On se rend compte ainsi que la majorité du courant du câble est directement attirée par le doigt du disjoncteur. Ce n'est qu'une petite partie qui va aller transiter par la vis. Cette partie sera d'autant plus faible que le matériau sera résistif.

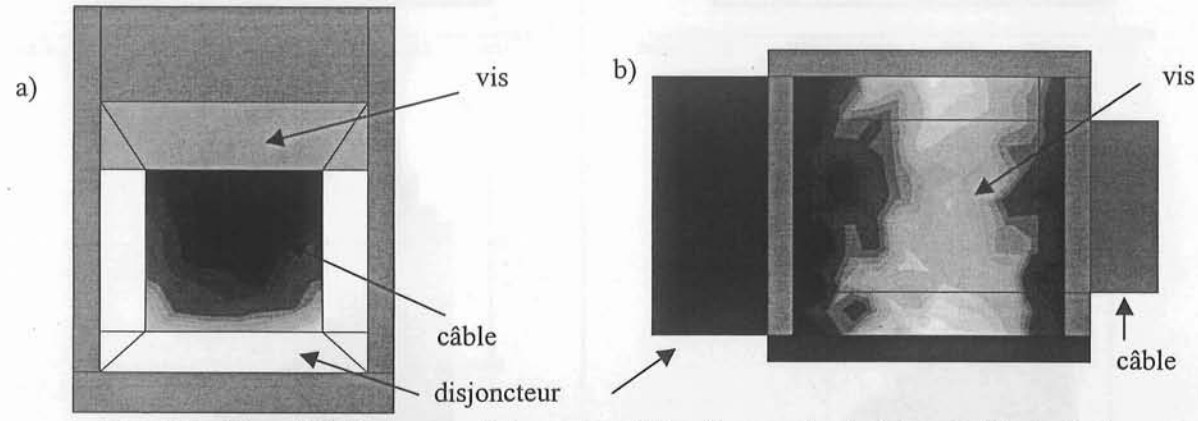


Fig. 54 : Densité de courant dans le câble (à gauche) et la vis (à droite)

Cette étude montre combien maintenant des facteurs jusqu'alors négligés dans les phases de conception peuvent engendrer des fonctionnements différents qui s'écartent de l'intuition initiale.
Si cette petite différence observée ici (2 %) est répercutée sur les milliers de vis utilisées dans les installations électriques on imagine alors l'impact économique que provoquerait le passage de vis acier aux vis aluminium sur les puissances consommées, la matière première utilisée, le coût de fabrication, ...
Notons toutefois que toute l'étude a été menée en supposant les contacts électriques parfaits entre les différentes pièces du dispositif. Pour se rapprocher de la réalité il faudrait prendre en compte des résistances de contact qui dépendront bien entendu de l'état de surface des pièces et des liaisons mécaniques entre elles. Mais c'est un

domaine de compétences à part entière et certainement le point bloquant de notre modélisation actuelle. C'est autant de critères à prendre en compte dès la conception.

3.8. Application de la méthode MTL

La méthode MTL que nous avons développée dans le paragraphe 2.7 a été utilisée pour caractériser des structures types proposées par le CNES. Pour ces applications, le domaine d'étude en fréquences se situe dans les fréquences intermédiaires, ce qui nous interdit de supposer le courant surfacique.
Tout comme la méthode PEEC, la détermination de la matrice impédance n'est pas une fin en soi. Il faut ensuite utiliser le schéma électrique équivalent obtenu pour en déduire des grandeurs beaucoup plus significatives que des impédances linéiques.

Recherche de l'impédance ramenée dans le cas d'un conducteur unique
Ici la structure étudiée est celle de la Fig. 21. On impose la charge (Zl), et l'impédance qu'il nous faut calculer est celle de tout le système ramenée au niveau de la source.
Le problème que l'on rencontre ici est que les n lignes couplées sont associées en parallèle aux extrémités sur les mêmes impédances de source (Zs) et de charge (Zl).
Pour z = 0 et z = ℓ (longueur de la ligne), on peut exprimer les potentiels et courants (Eq. 16). On doit résoudre alors le système matriciel suivant pour lequel les potentiels V(0) et V(ℓ) sont les mêmes quelle que soit la ligne couplée considérée :

$$\begin{pmatrix} I(0) \\ I(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[B]^{-1}[A] & [B]^{-1} \\ -[B]^{-1} & [B]^{-1}[A] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(0) \\ V(\ell) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} [A] = \dfrac{[Zc][T]\left[e^{-\gamma\ell}\right] + \left[e^{\gamma\ell}\right][T]^{-1}[Zc]^{-1}}{2} \\ [B] = \dfrac{[Zc][T]\left[e^{-\gamma\ell}\right] + \left[e^{\gamma\ell}\right][T]^{-1}}{2} \end{cases} \qquad \text{Eq. 18}$$

La charge impose : $V(\ell) = Zl \sum_{i=1}^{n} I_i(\ell)$

De plus on a côté source : $\sum_{i=1}^{n} I_i(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(-[B]^{-1}[A]V(0) + [B]^{-1}V(\ell) \right)$

Ceci revient à faire la somme des lignes et colonnes des matrices puisque le potentiel est identique pour toutes les lignes.

On obtient l'impédance ramenée côté source (Fig. 55) : $Zr = \dfrac{V(0)}{\sum_{i=1}^{n} I_i(0)}$

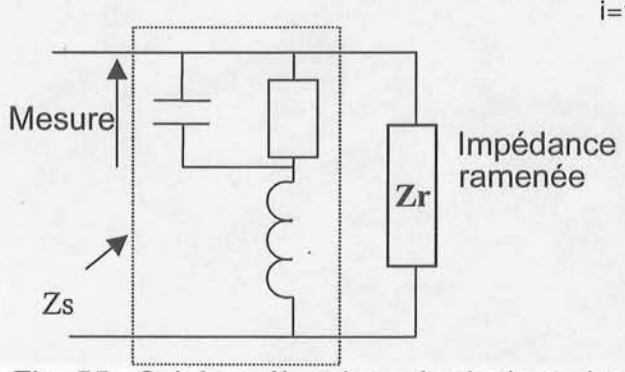


Fig. 55 : Schéma électrique équivalent obtenu

Recherche de l'impédance vue de la source dans le cas d'un conducteur unique
Pour connaître l'impédance totale vue de la source, il suffit d'associer l'impédance ramenée trouvée précédemment avec l'impédance de la source [CLA 99].
Les comparaisons avec les mesures sont données sur les courbes Fig. 56. On peut noter une bonne adéquation des valeurs pour la gamme de fréquences allant de 1 mégahertz à quelques centaines de mégahertz.
La manière avec laquelle le conducteur est subdivisé va, bien entendu, conditionner la précision des résultats. Pour les hautes fréquences, il s'agira de bien prendre en compte l'effet de peau pour bien estimer les amortissements aux fréquences de résonance. Ces dernières semblent, en revanche, moins contraintes avec le mode de subdivision, étant donné que la contribution inductive varie moins avec la fréquence.

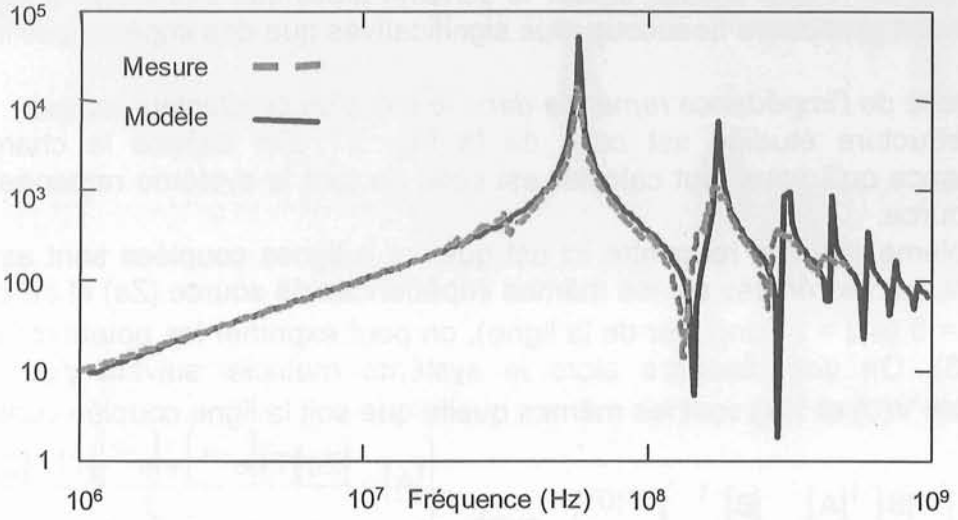


Fig. 56 : Comparaison modèle (méthode MTL) et mesure (impédance (Ω))

Généralisation à la mise en cascade de plusieurs tronçons
Une fois mise en place la méthode de modélisation dans le cas d'un conducteur unique au-dessus d'un plan de masse, nous l'avons appliquée au cas d'un fil au-dessus d'un plan de masse dit « complexe » constitué de 2 portions de largeurs différentes comme le montre Fig. 57.



Fig. 57 : Structure étudiée de deux tronçons en cascade

Pour modéliser le dispositif, nous l'avons décomposé en deux parties de longueur et largeur différentes (Fig. 58). Chaque partie est traitée comme précédemment : une portion de fil au-dessus d'un plan modélisé avec la méthode MTL.
La méthodologie de modélisation est la suivante :

- on modélise le fil au-dessus de la portion la plus proche de la charge,
- on calcule l'impédance ramenée, zr2, au début de ce tronçon, en introduisant la nature de la charge (Zcharge),
- on modélise le fil au-dessus de la seconde portion,
- on calcule l'impédance ramenée, zr1, en prenant pour charge l'impédance ramenée zr2,
- et ainsi de suite de proche en proche s'il y a plusieurs tronçons jusqu'à la portion reliée à la source,
- enfin, on calcule l'impédance vue de la source.

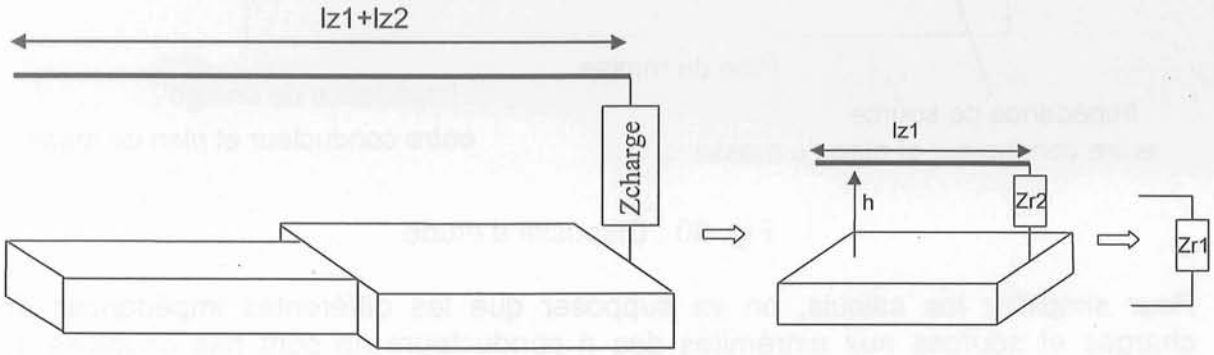


Fig. 58 : Structure modélisée

L'impédance ainsi calculée est comparée aux mesures faites par le CNES (Fig. 59). Les résultats obtenus sont très satisfaisants.
Il apparaît néanmoins un shift sur les fréquences de résonance dont une des origines probables est une erreur sur les valeurs des capacités qui sont calculées a posteriori à partir des caractéristiques inductives du dispositif (Eq. 13). Cette différence sur les fréquences de résonance n'est que de 2 % pour la première et 5 % pour la seconde.

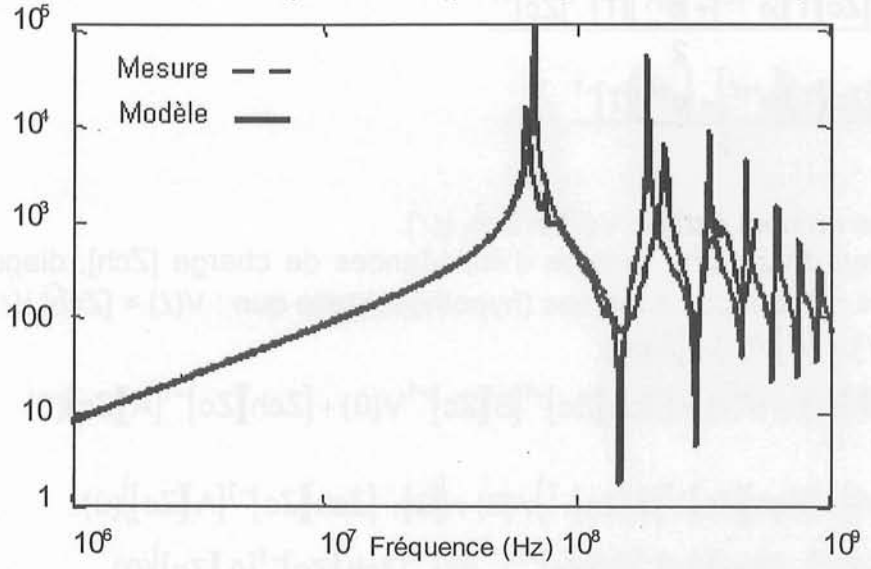


Fig. 59 : Comparaison des impédances en simulation et mesures (impédance (Ω))

Nous avons ensuite appliqué ceci à des structures comportant plus que deux portions en cascade et les résultats furent tout aussi satisfaisants [CLA 00-2].

Généralisation à une structure multi boitiers

Dans un premier temps, on va supposer que tous les conducteurs sont de même longueur (Fig. 60).

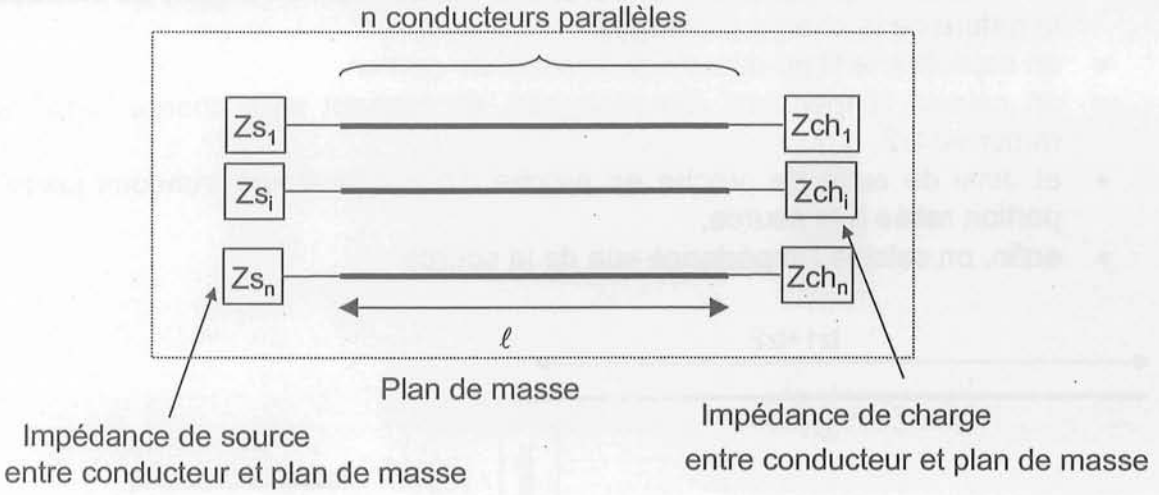


Fig. 60 : Dispositif d'étude

Pour simplifier les calculs, on va supposer que les différentes impédances des charges et sources aux extrémités des n conducteurs ne sont pas couplées. On définit alors deux vecteurs de dimension n caractérisant ces charges Zch et sources Zs.

Pour z = 0 et z = ℓ (longueur des conducteurs), on peut exprimer les potentiels et courants, ce qui donne en fait le système matriciel suivant à résoudre :

$$\begin{Bmatrix}\begin{pmatrix}V(\ell)\\ I(\ell)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[A] & [B]\\ [Zc]^{-1}[B][Zc]^{-1} & [Zc]^{-1}[A][Zc]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V(0)\\ I(0)\end{pmatrix}\end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix}\begin{pmatrix}I(0)\\ I(\ell)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-[B]^{-1}[A] & [B]^{-1}\\ -[B]^{-1} & [B]^{-1}[A]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V(0)\\ V(\ell)\end{pmatrix}\end{Bmatrix}$$

$$\text{avec}\begin{cases}[A]=\dfrac{[Zc][T]\left(\left[e^{-\gamma\ell}\right]+\left[e^{\gamma\ell}\right]\right)[T]^{-1}[Zc]^{-1}}{2}\\ [B]=\dfrac{[Zc][T]\left(\left[e^{-\gamma\ell}\right]-\left[e^{\gamma\ell}\right]\right)[T]^{-1}}{2}\end{cases}$$

Côté charge on peut écrire : $V_i(\ell) = Zch_i\ I_i(\ell)$.

Ainsi on peut définir une matrice d'impédances de charge [Zch], diagonale car les impédances ne sont pas couplées (hypothèse) telle que : $V(\ell) = [Zch]\ I(\ell)$

$$\text{On a :}\begin{cases}V(\ell)=[A]V(0)+[B](0)\\ [Zch](\ell)=V(\ell)=[Zch][Zc]^{-1}[B][Zc]^{-1}V(0)+[Zch][Zc]^{-1}[A][Zc](0)\end{cases}$$

$$\text{Soit : } 0=\left([A]-[Zch][Zc]^{-1}[B][Zc]^{-1}\right)V(0)+\left([B]-[Zch][Zc]^{-1}[A][Zc]\right)(0)$$

$$\text{Ou : } V(0)=\left([A]-[Zch][Zc]^{-1}[B][Zc]^{-1}\right)^{-1}\left([B]-[Zch][Zc]^{-1}[A][Zc]\right)(0)$$

On a donc ainsi établi l'expression de l'impédance ramenée du dispositif constitué par les n conducteurs parallèles de même longueur au-dessus d'un plan de masse parfait.

$$[Zram] = \left([A] - [Zch][Zc]^{-1}[B][Zc]^{-1}\right)^{-1}\left([B] - [Zch][Zc]^{-1}[A][Zc]\right)$$

Il s'agit d'une matrice de taille n*n non nécessairement diagonale.
Pour établir l'impédance équivalente vue côté mesure, il faut alors prendre un conducteur en particulier, celui connecté à l'alimentation et exprimer son courant en fonction du potentiel. Interviennent alors les impédances de sources ainsi que les différentes impédances ramenées.

Si les n conducteurs sont de longueur différente (Fig. 61), on ne peut pas résoudre le problème comme précédemment. Il faut décomposer le dispositif en plusieurs tronçons comme présenté Fig. 62.

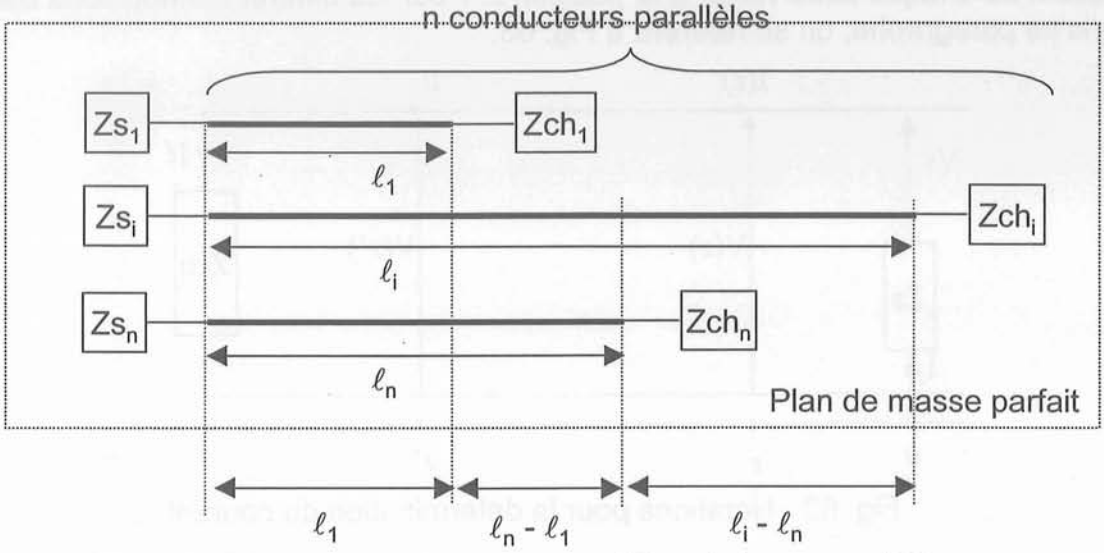


Fig. 61 : Plusieurs conducteurs parallèles de longueur différente

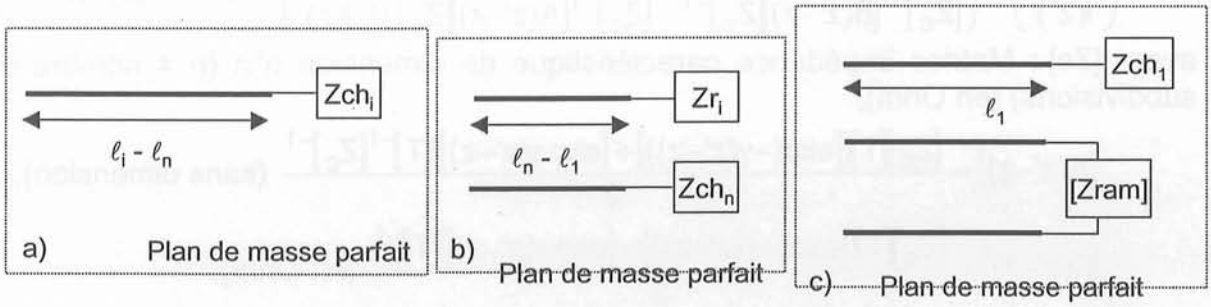


Fig. 62 : Décomposition du problème

On s'intéresse ensuite aux conducteurs dans l'ordre décroissant de leur longueur (du plus long au plus court).
Ainsi, sur cet exemple, on va s'intéresser au fil i et on ne va considérer que la portion qui dépasse de longueur ℓ_i-ℓ_n (Fig. 62a). Il s'agit alors d'un conducteur seul au-dessus d'un plan de masse parfait. D'après tout ce que nous avons établi précédemment, nous savons calculer l'impédance ramenée Zr_i par ce tronçon.
Ensuite, on va prendre la portion suivante jusqu'au conducteur suivant (ici le conducteur n). On est alors en présence de deux conducteurs parallèles de même longueur au-dessus d'un plan de masse parfait chargés par Zr_i et Zch_n (Fig. 62b). On

va alors calculer l'impédance ramenée en utilisant la méthode présentée au paragraphe précédent. On obtirent une matrice non diagonale a priori qui représentera la charge du tronçon suivant auquel on rajoute un conducteur supplémentaire (Fig. 62c). Ceci entraînera de rajouter une ligne et une colonne à cette matrice d'impédance sur lesquelles il n'y aura que des 0 sauf à l'endroit de la charge (indice du conducteur).
Et on continuera à résoudre selon le même procédé.
On traitera ainsi tout le dispositif de proche en proche jusqu'à la source.

Recherche du courant et du potentiel le long d'un câble
S'il n'y a qu'un tronçon.
Pour l'instant, le problème est maillé en 1D comme présenté dans [CLA 99].
Grâce à l'utilisation de la théorie des lignes il est alors possible d'exprimer le potentiel et le courant de chaque subdivision à la position z' en fonction du potentiel et du courant de chaque subdivision à la position z. Pour les différentes notations utilisées dans ce paragraphe, on se réfèrera à Fig. 63.

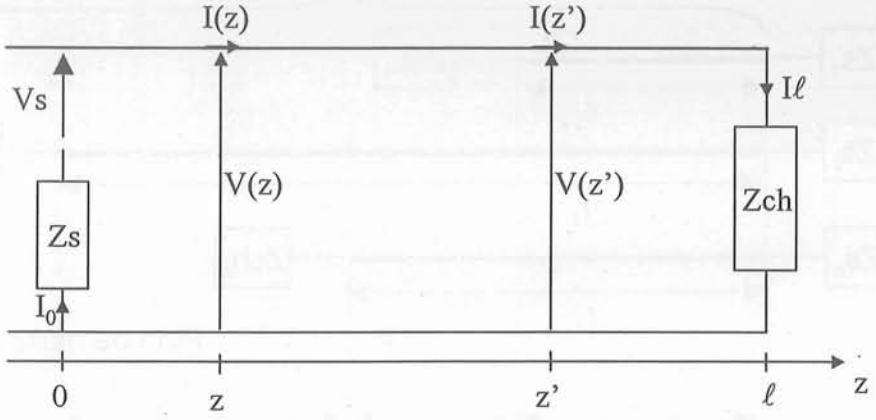


Fig. 63 : Notations pour la détermination du courant

$$\begin{pmatrix} V(z') \\ I(z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A(z'-z)] & [B(z'-z)] \\ [Z_c]^{-1}[B(z'-z)][Z_c]^{-1} & [Z_c]^{-1}[A(z'-z)][Z_c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix} \qquad \text{Eq. 19}$$

avec : [Zc] : Matrice impédance caractéristique de dimension n*n (n = nombre de subdivisions) (en Ohm),

$$[A(z'-z)] = \frac{[Z_c][T]([\exp(-\gamma(z'-z))] + [\exp\gamma(z'-z)])[T]^{-1}[Z_c]^{-1}}{2} \text{ (sans dimension),}$$

$$[B(z'-z)] = \frac{[Z_c][T]([\exp(-\gamma(z'-z))] - [\exp\gamma(z'-z)])[T]^{-1}}{2} \text{ (en Ohm),}$$

[T] : matrice des vecteurs propres (définie au paragraphe 2.7),
γ : valeurs propres (ou constantes de propagation, définies paragraphe 2.7).

Les conditions initiales de début et fin de ligne sont : $\begin{cases} V(\ell) = Zch\, I\ell \\ V(0) = Vs - Zs\, I_0 \end{cases}$

Comme les subdivisions sont mises en parallèle en début et fin de ligne on a alors égalité du potentiel de chacune d'elles et leurs courants s'ajoutent :

$$\begin{cases} I\ell = \sum_{i=1}^{n} I_i(\ell) \\ I_0 = \sum_{i=1}^{n} I_i(0) \\ V_i(\ell) = V(\ell) \quad \forall i \in (1;n) \\ V_i(0) = V(0) \quad \forall i \in (1;n) \end{cases}$$

Etant donné que les conditions initiales concernent les courants globaux de début et fin de ligne il est donc indispensable d'exprimer les courants en fonction des potentiels. Le système (Eq. 19) devient alors :

$$\begin{pmatrix} I(z) \\ I(z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[B(z'-z)]^{-1}[A(z'-z)] & [B(z'-z)]^{-1} \\ -[B(z'-z)]^{-1} & [B(z'-z)]^{-1}[A(z'-z)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(z) \\ V(z') \end{pmatrix} \qquad \text{Eq. 20}$$

En partant de la source, on peut écrire le vecteur courant dans les subdivisions à la source en fonction des potentiels source et charge :

$$I(0) = -[B(\ell)]^{-1}[A(\ell)]V(0) + [B(\ell)]^{-1}V(\ell) \qquad \text{Eq. 21}$$

En faisant la somme sur les lignes, et en tenant compte du fait que les potentiels sont identiques quelles que soient les subdivisions, on a : $I_0 = \alpha V(0) + \beta V(\ell)$.

Où $\begin{cases} \alpha = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(-[B(\ell)]^{-1}[A(\ell)]\right)_{ij} \quad (\alpha \text{ en } \Omega^{-1}) \\ \beta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left([B(\ell)]^{-1}\right)_{ij} \quad (\beta \text{ en } \Omega^{-1}) \end{cases}$

En utilisant la condition initiale de début de ligne, on obtient alors une première relation entre les potentiels source et charge : $\boxed{(\alpha Zs + 1)V(0) = Vs - \beta ZsV(\ell)}$

<u>En partant de la charge</u>, on va suivre la même démarche pour trouver une seconde relation faisant intervenir l'impédance de charge Zch.

$$I(\ell) = -[B(\ell)]^{-1}V(0) + [B(\ell)]^{-1}[A(\ell)]V(\ell) \qquad \text{Eq. 22}$$

$$I_\ell = -\beta V(0) - \alpha V(\ell)$$

$$\boxed{(\alpha Zch + 1)V(\ell) = -\beta ZchV(0)}$$

D'où on arrive à l'expression des potentiels source et charge uniquement en fonction des impédances source et charge et de la tension d'alimentation.

$$\boxed{\begin{aligned} V(0) &= \frac{(\alpha Zch + 1)}{(\alpha Zs + 1)(\alpha Zch + 1) - \beta^2 ZsZch}Vs \\ V(\ell) &= \frac{-\beta Zch}{(\alpha Zs + 1)(\alpha Zch + 1) - \beta^2 ZsZch}Vs \end{aligned}}$$

En résolvant (Eq. 21), on obtient alors le courant dans chaque subdivision en début de ligne I(0). Connaissant V(0) et I(0), on peut alors résoudre (Eq. 19) en prenant z = 0 pour une position quelconque z' le long de la ligne.
Ou en résolvant (Eq. 22), on obtient alors le courant dans chaque subdivision en fin

de ligne I(ℓ). Connaissant V(ℓ) et I(ℓ), on peut alors résoudre (Eq. 19) en prenant z = ℓ pour une position quelconque z' le long de la ligne.
Cette dernière solution engendre des signes négatifs, sources d'erreur dans la manipulation mathématique. Voilà pourquoi nous avons préféré la première alternative. Mais les deux donnent bien entendu le même résultat.

S'il y a plusieurs tronçons en cascade :
Comme pour le calcul de l'impédance ramenée, la détermination du courant et du potentiel le long du câble va se faire de façon récurrente.
Voici détaillé l'algorithme de détermination du courant et du potentiel le long d'un câble sur l'exemple présenté Fig. 64.

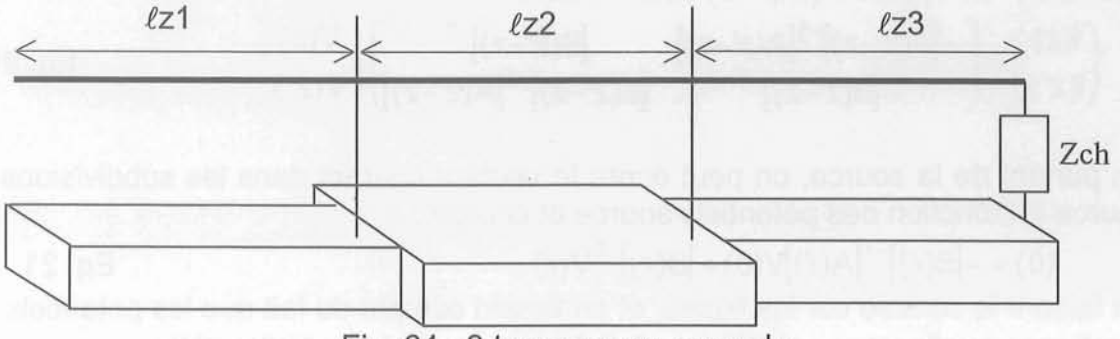


Fig. 64 : 3 tronçons en cascade

1ère étape :
On se ramène tout d'abord au cas d'un seul tronçon en ne conservant que le tronçon proche de la source et en calculant l'impédance ramenée (Zram) par les autres tronçons (Fig. 65).

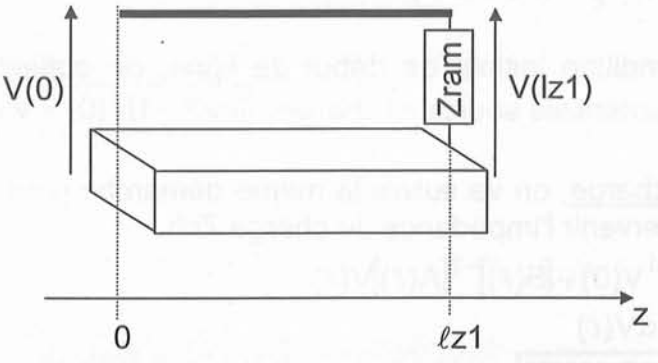


Fig. 65 : Première étape, structure étudiée

Les équations mises en place pour calculer les tensions en début et fin de tronçon sont alors celles établies lors du précédent paragraphe en remplaçant Zch par Zram.

$$V(0) = \frac{(\alpha Zram + 1)}{(\alpha Zs + 1)(\alpha Zram + 1) - \beta^2 ZsZram} Vs$$

$$V(\ell z1) = \frac{-\beta Zram}{(\alpha Zs + 1)(\alpha Zram + 1) - \beta^2 ZsZram} Vs$$

Il suffit ensuite de résoudre le système (Eq. 20) pour le début et la fin de ce tronçon afin de connaître le courant total et dans chaque subdivision à ces positions (Eq. 23).

$$\begin{cases} I(0) = -[B(\ell z1)]^{-1}[A(\ell z1)]V(0) + [B(\ell z1)]^{-1}V(\ell z1) \\ I(\ell z1) = -[B(\ell z1)]^{-1}V(0) + [B(\ell z1)]^{-1}[A(\ell z1)]V(\ell z1) \end{cases} \quad \text{Eq. 23}$$

Connaissant V(0) et I(0), on connaît alors le courant et le potentiel le long du câble avec (Eq. 24).

$$\begin{pmatrix} V(z) \\ I(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A(z)] & [B(z)] \\ [Z_c]^{-1}[B(z)][Z_c]^{-1} & [Z_c]^{-1}[A(z)][Z_c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(0) \\ I(0) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 24}$$

Les matrices A, B et Zc sont caractéristiques du tronçon étudié.

A la fin de cette première étape on connaît donc le courant total et par subdivision ainsi que le potentiel le long du câble au-dessus du premier tronçon.

2nde étape :
Pour les tronçons suivants, on connaît maintenant le courant et le potentiel total au début du tronçon étudié.
Il faut alors calculer l'impédance ramenée par les tronçons suivants. Pour le second tronçon de notre exemple, ce sera l'impédance ramenée par le troisième tronçon et pour ce dernier, ce sera l'impédance de charge (Fig. 66).

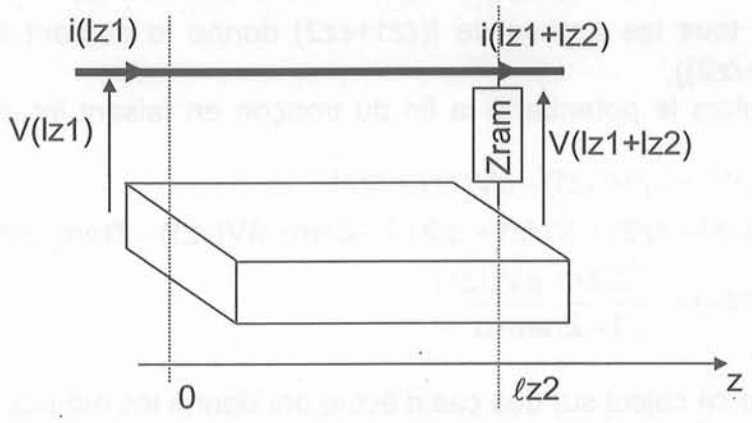


Fig. 66 : Pour le second tronçon

Le système (Eq. 24) devient alors pour le second tronçon :

$$\begin{pmatrix} V(\ell z1+\ell z2) \\ I(\ell z1+\ell z2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A(\ell z2)] & [B(\ell z2)] \\ [Z_c]^{-1}[B(\ell z2)][Z_c]^{-1} & [Z_c]^{-1}[A(\ell z2)][Z_c] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(\ell z1) \\ I(\ell z1) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 25}$$

$$I(\ell z1) = -[B(\ell z2)]^{-1}[A(\ell z2)]V(\ell z1) + [B(\ell z2)]^{-1}V(\ell z1+\ell z2)$$

Le nombre de subdivision n'étant pas le même d'un tronçon à l'autre, les seules grandeurs que nous pouvons utiliser à la limite des deux tronçons sont les courants totaux et les potentiels.

La somme de tous les termes de I(ℓz1) donne le courant total en début de tronçon (it(ℓz1)). Ce courant est connu (résultat de la première étape) de même que le potentiel V(ℓz1). Ceci nous permet donc de déterminer V(ℓz1+ℓz2), potentiel à la fin du tronçon étudié.

$$V(\ell z1+\ell z2)=\frac{it(\ell z1)-\alpha V(\ell z1)}{\beta}$$

On résout ensuite Eq. 25 pour avoir le courant dans chaque subdivision de ce tronçon au début et à la fin.

Connaissant ensuite les grandeurs en début de ce tronçon, on reprend (Eq. 24) avec les caractéristiques du tronçon étudié pour trouver le courant et le potentiel le long du câble au-dessus du tronçon.

Et ainsi de suite pour les tronçons suivants, jusqu'à la charge.

Remarque : Pour la seconde étape de ce calcul et les suivantes, on n'utilise pas l'impédance ramenée par les tronçons suivants. On pourrait le faire en calculant différemment le potentiel en fin de tronçon.
En effet :

$$\begin{pmatrix} V(\ell z1) \\ I(\ell z1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [A(\ell z2)] & -[B(\ell z2)] \\ -[Z_c]^{-1}[B(\ell z2)][Z_c]^{-1} & [Z_c]^{-1}[A(\ell z2)][Z_c] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V(\ell z1+\ell z2) \\ I(\ell z1+\ell z2) \end{pmatrix}$$

$$I(\ell z1+\ell z2)=-[B(\ell z2)]^{-1}V(\ell z1)+[B(\ell z2)]^{-1}[A(\ell z2)]V(\ell z1+\ell z2)$$

La somme de tous les termes de $I(\ell z1+\ell z2)$ donne le courant total en début de tronçon ($it(\ell z1+\ell z2)$).
On en déduit alors le potentiel à la fin du tronçon en faisant intervenir l'impédance ramenée.

$$it(\ell z1+\ell z2)=-\beta V(\ell z1)-\alpha V(\ell z1+\ell z2)$$

$$Zram\cdot it(\ell z1+\ell z2)=V(\ell z1+\ell z2)=-Zram\cdot\beta V(\ell z1)-Zram\cdot\alpha V(\ell z1+\ell z2)$$

$$V(\ell z1+\ell z2)=\frac{-Zram\cdot\beta V(\ell z1)}{1+Zram\cdot\alpha}$$

Les résultats de ce calcul sur des cas d'école ont donné les mêmes valeurs.

Conclusion
Nous venons de montrer dans cette partie que l'approche MTL s'avère très utile pour modéliser les structures dans le domaine de la « RF ».
Pour l'instant les dispositifs étudiés sont relativement simples mais la méthode est suffisamment généraliste pour que, une fois automatisée, elle donne toute satisfaction pour des cas plus compliqués.

4. Conception - Optimisation de systèmes

4.1 Principe de l'optimisation

Nous avons vu précédemment qu'une partie du calcul des caractéristiques électriques des conducteurs repose sur des formulations analytiques. Il est donc légitime d'envisager d'améliorer les structures en mettant en œuvre des processus d'optimisation, surtout que nous avons décelé au fil des applications traitées dans la partie précédente différents critères d'optimisation.
Plusieurs démarches sont envisageables. On pourrait en effet adopter un processus itératif et effectuer autant de simulations que nécessaires pour améliorer le dispositif. C'est bien entendu ce que tout concepteur fait dès qu'il est en présence d'un outil de modélisation et que l'on appelle étude paramétrique. Mais cette démarche est vite impossible dès que l'on peut faire varier simultanément beaucoup de paramètres (l'espace des solutions est alors très vaste) et n'assure en aucun cas d'avoir obtenu un optimum tout au plus une meilleure solution (si les différentes contraintes ont pu être prises en compte). De plus, cette approche ne convient pas à l'innovation car l'utilisateur de l'outil n'envisagera pas forcément spontanément certaines combinaisons de paramètres (on part toujours d'un certain vécu).
Le mieux est d'utiliser un algorithme d'optimisation sous contraintes.
Chronologiquement Nadège Piette dans sa thèse [PIE] a montré qu'il était envisageable avec la méthode PEEC d'effectuer une optimisation des dispositifs à l'aide d'algorithmes déterministes.
Nous disposons pour cela au laboratoire d'un environnement de conception ProDesign, généraliste dans lequel l'outil de modélisation avec ces formulations particulières vient s'encapsuler [PRO]. Cet outil est développé par l'équipe CDI (Conception et Diagnostic Intégré) du laboratoire et commercialisé.
Cet outil permet de réaliser des optimisations sous contraintes à partir d'un modèle analytique qui consiste en :

- des équations permettant de décrire la ou les fonctions objectives,
- des équations permettant de décrire les différentes contraintes,

Le module de résolution (PEEC) est connecté à l'aide de fonctions externes générées automatiquement. Ainsi vue de l'outil d'optimisation, notre méthode de résolution est considérée comme une simple fonction mathématique au même titre que cosinus ou sinus et n'est pas dépendante de l'algorithme d'optimisation utilisé [ATI 99]. Nous avons développé des générateurs automatiques de codes permettant de générer ces fonctions externes pour ProDesign de façon à ce que l'utilisateur n'ait aucune ligne de code à écrire.

Les algorithmes d'optimisation nécessitent souvent la connaissance de la dérivée du modèle. Ce calcul de dérivée est entièrement géré (de façon transparente pour l'utilisateur) par ProDesign concernant la partie analytique du modèle.
Lorsque le modèle analytique est entré, il est nécessaire de donner le cahier des charges comprenant le point de départ, le choix des paramètres optimisables et la définition des différentes contraintes.
Il s'agit ensuite de savoir quel algorithme d'optimisation utiliser :

- Les algorithmes déterministes ont l'avantage de converger vers un optimum assez rapidement, surtout si on dispose des gradients analytiques, mais il faut se rappeler que cet optimum ne peut être que local.
- Les algorithmes génétiques vont explorer l'espace des solutions et tenter d'atteindre un optimum global.

Actuellement seuls des algorithmes déterministes sont disponibles dans cet environnement. Ils sont de type SQP (Sequential Quadratic Programing). Et toutes les optimisations présentées ici ont été réalisées à l'aide de l'algorithme CFSQP.
Le choix de cet environnement de dimensionnement permet d'éviter un développement de code informatique important et délicat à réaliser, et, par conséquent nous permet de consacrer plus de temps à la partie métier de la problématique (développement du module de résolution). De plus ce choix ne nous rend pas dépendant d'un algorithme d'optimisation. En effet ProDesign a été conçu de façon à pouvoir rajouter d'autres algorithmes que ceux cités ci-dessus, ceci n'entraînant aucune modification du modèle, ni du module de résolution réalisé.
Le choix d'entrer dans cet environnement de dimensionnement a conduit à encapsuler notre module de résolution de façon à pouvoir être utilisé comme une fonction mathématique habituelle (telle que la fonction sinus par exemple).

Jean-Michel Guichon a mis tout ceci en application pour le généraliser et montrer ainsi que l'environnement de conception développé par l'équipe CDI était approprié [GUI].

4.2 Applications

Optimisation d'agencement de conducteurs
La structure du jeu de barres horizontales de la Fig. 67 a été modélisée au paragraphe 3.3 et on a montré un déséquilibre dans les pertes dissipées par phase ainsi que dans la répartition de la densité de courant dans les différents conducteurs de chaque phase.

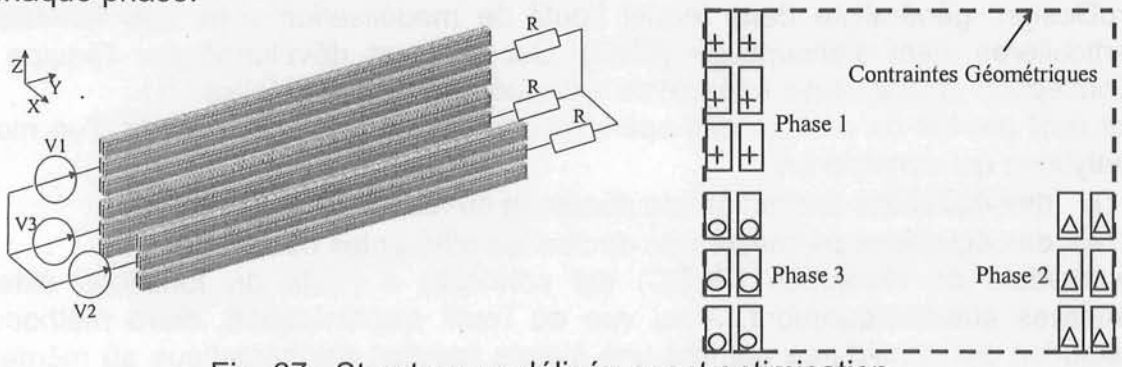
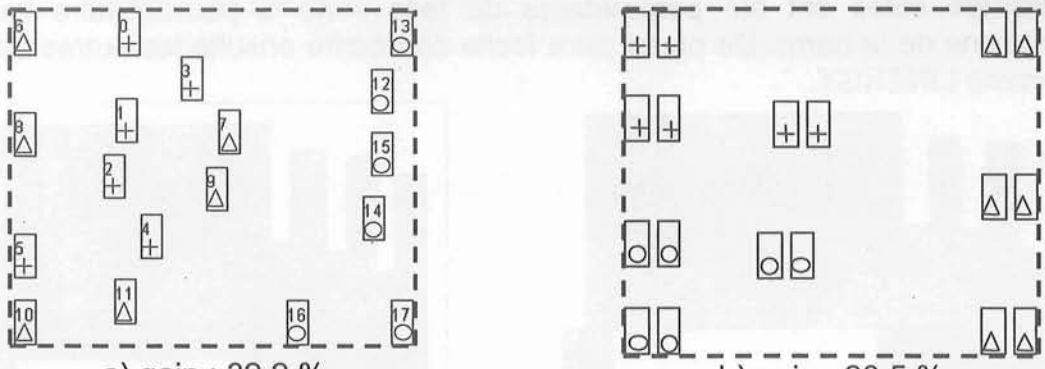


Fig. 67 : Structure modélisée avant optimisation

De plus, grâce à notre approche, nous avons pu évaluer la contribution des différents effets (effet de peau, effet de proximité) sur ces grandeurs.

La proportion de l'effet de proximité sur ce dispositif laisse présager que l'on peut améliorer la structure de ce point de vue. Une solution pour modifier ces pertes pourrait être d'agencer différemment les barres des phases. Ceci présente l'avantage de ne pas toucher aux conducteurs de base (section des conducteurs).

Aussi nous avons lancé une procédure d'optimisation utilisant l'algorithme CFSQP pour diminuer ces pertes totales en ne changeant que la position des conducteurs dans un espace limité par des contraintes d'encombrement (Fig. 67) [GUI 03-4].
Si les conducteurs sont tous libres de se déplacer dans cet espace, la solution optimisée n'est pas réalisable industriellement donc pas réaliste. La position des différents conducteurs est vraiment très quelconque et il serait difficile de les connecter ensuite en bout de jeu de barres au reste de la structure (Fig. 68a).
En revanche, si les conducteurs évoluent par paires dans cet espace, la solution trouvée est réaliste. Fig. 68b montre alors le nouvel agencement. Dans ce cas, le niveau des pertes est passé à 487 W.
Non seulement les pertes totales ont été diminuées mais aussi les pertes de chaque phase avec un rééquilibrage entre les phases.



a) gain : 32.2 % b) gain : 20.5 %

Fig. 68 : Solution optimisée

	Pertes avant optimisation (W)	Pertes après optimisation (W) (cas b)	Gain
Phase 1	222	168	24.3 %
Phase 2	158	149	5.7 %
Phase 3	233	170	27 %
Total	613	487	20.5 %

Tableau 3 : Pertes dans chaque phase après optimisation

Les conséquences de cette optimisation sont multiples.
Mais comment répercuter ce gain ?
On voit qu'en agençant différemment les barres il est possible de diminuer les pertes du jeu de barres.

- On peut ainsi pour un même niveau de pertes augmenter le niveau de courant transporté et distribué par ces jeux de barres.
- On peut aussi pour un même niveau de pertes et de courant diminuer la quantité de cuivre en changeant la section et/ou la forme de la section des conducteurs.

Optimisation de la forme de la section des conducteurs

Pour évaluer le gain en matière première qu'on est en droit d'attendre, nous avons d'abord modélisé une nouvelle gamme de produits de notre partenaire industriel Schneider : la gamme LINERGY. Cette gamme est constituée de conducteurs en profilé aluminium. Ils ont tous la même forme extérieure et, selon le calibre en courant, la section transverse est plus ou moins pleine de matière.

Pour cette étude, il s'agira dans un premier temps d'identifier les endroits où l'on pourra enlever de la matière sans trop perturber la répartition de la densité de courant donc les endroits où on a le moins de courant c'est-à-dire où la densité de courant est la plus faible. On fera ensuite le ratio entre la quantité de matière enlevée par rapport à l'augmentation du niveau de pertes engendrée par cette modification de section.

On s'est tout d'abord intéressé à la gamme 1600 A, c'est-à-dire celle pour laquelle la section est pleine et donc celle que l'on pourra le plus évider.

La figure suivante (Fig. 69) présente la section d'un tel conducteur. La modélisation d'une telle section a été effectuée en la décomposant en plusieurs conducteurs de section rectangulaire.

Toutes les côtes ont été paramétrées de telle sorte à pouvoir faire varier les dimensions de la barre. De plus il sera facile de décrire ensuite les autres barres de la gamme LINERGY.

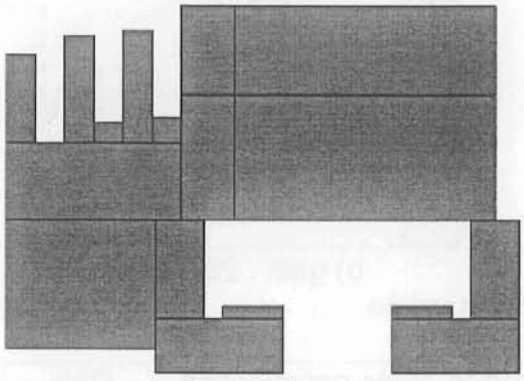


Fig. 69 : Section d'un conducteur de la gamme LINERGY 1600 A

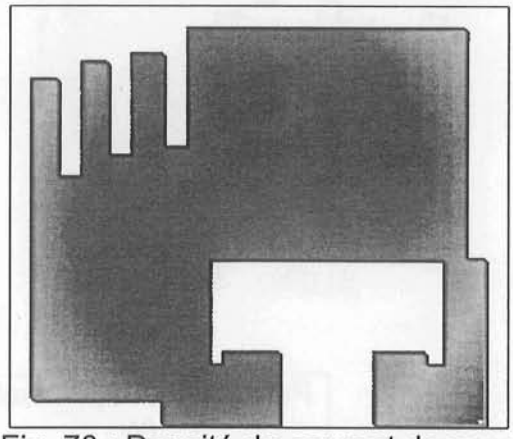


Fig. 70 : Densité de courant dans un conducteur

La simulation a été faite en deux temps.

- Tout d'abord la densité de courant est évaluée sur une seule barre et donc une seule phase, à 50 Hz. Une longueur de 1.695 m de barre, chargée sur une résistance qui permet d'imposer un courant de 1600 A, a été modélisée. Les résultats obtenus sont présentés Fig. 70.

On se rend compte d'une répartition non uniforme du courant. On évalue une différence de 0.75 10^6 A/m² entre le point où la densité de courant est maximale et celui où elle est minimale, ce qui représente 50 % de la valeur minimale.

Pour cette même barre, on peut aussi évaluer la contribution de l'effet de peau par rapport au continu et estimer ainsi le gain escompté en modifiant la forme de la section. Le calcul donne $\frac{P}{P_{continu}} = 1.226$. On pourra donc espérer un gain de 22.6 %.

Dans un second temps, un trou a été aménagé comme suit :

- forme carrée
- centre situé au point de densité de courant la plus faible sur le profil 'plein' dans la mesure où il est possible de laisser 1.5 mm de matière minimum au niveau du contour extérieur (contrainte mécanique).

La figure suivante (Fig. 71) présente la densité de courant dans les deux cas extrêmes.

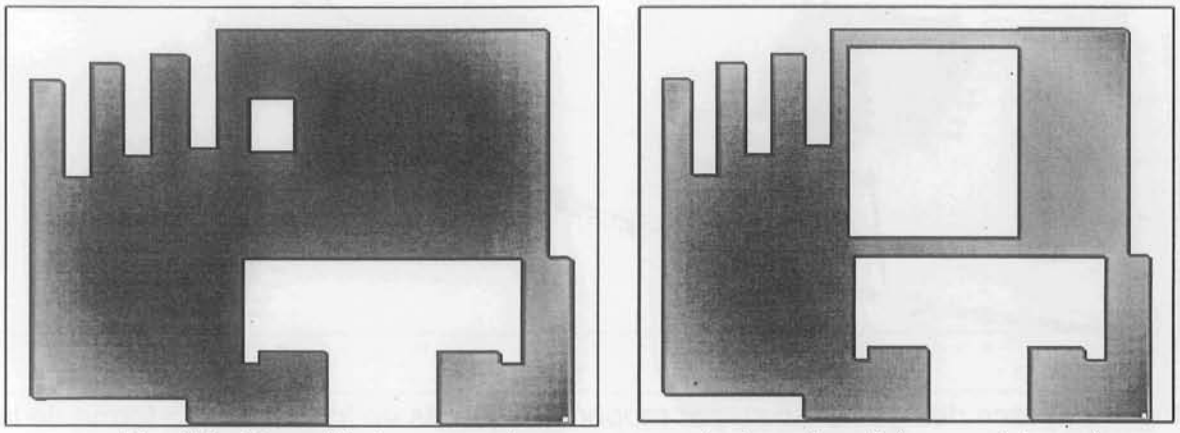


Fig. 71 : Densité de courant pour un conducteur troué (cas extrêmes)

Sur les courbes suivantes (Fig. 72), on a tracé le gain en cuivre par rapport au gain en puissance. Si l'on part du principe qu'1 % de cuivre gagné représente le même coût qu'1 % de pertes supplémentaires engendrées, on se rend compte qu'il existe un optimum : point d'intersection avec la bissectrice (droite en pointillé).
La pente de cette droite doit être ajustée selon la valorisation des pertes électriques par rapport au coût matière, mais l'intersection avec la courbe de puissance dissipée fixe la limite haute d'un éventuel processus d'optimisation.
Sur cette figure, on a aussi fait apparaître les gains attendus sur des formes de section plus traditionnelles (le cylindre et le carré troués en leur centre) calculés à l'aide de formulations analytiques simplifiées. On voit ainsi que jusqu'à une certaine taille de trou, les comportements des différents types de section sont très proches. Les isovaleurs de densité de courant sont semblables entre les différentes formes de section. Ceci est très intéressant car les formulations utilisées dans le cas d'une section carrée ou cylindrique sont beaucoup plus simples et donc plus faciles à mettre en œuvre dans le cadre d'un processus d'optimisation. Le trou que l'on effectue se situe effectivement au niveau du minimum de densité de courant pour les trois types de section.
Passée cette limite, on se rend compte que sur notre section, très particulière, le minimum de densité de courant s'est déplacé. Le trou n'est alors plus localisé au même endroit.
Ainsi, jusqu'à 27% de cuivre enlevé, avec cette équivalence, le gain en cuivre est supérieur au surcoût en pertes à compenser (on ne prend pas en compte d'autres coûts supplémentaires).

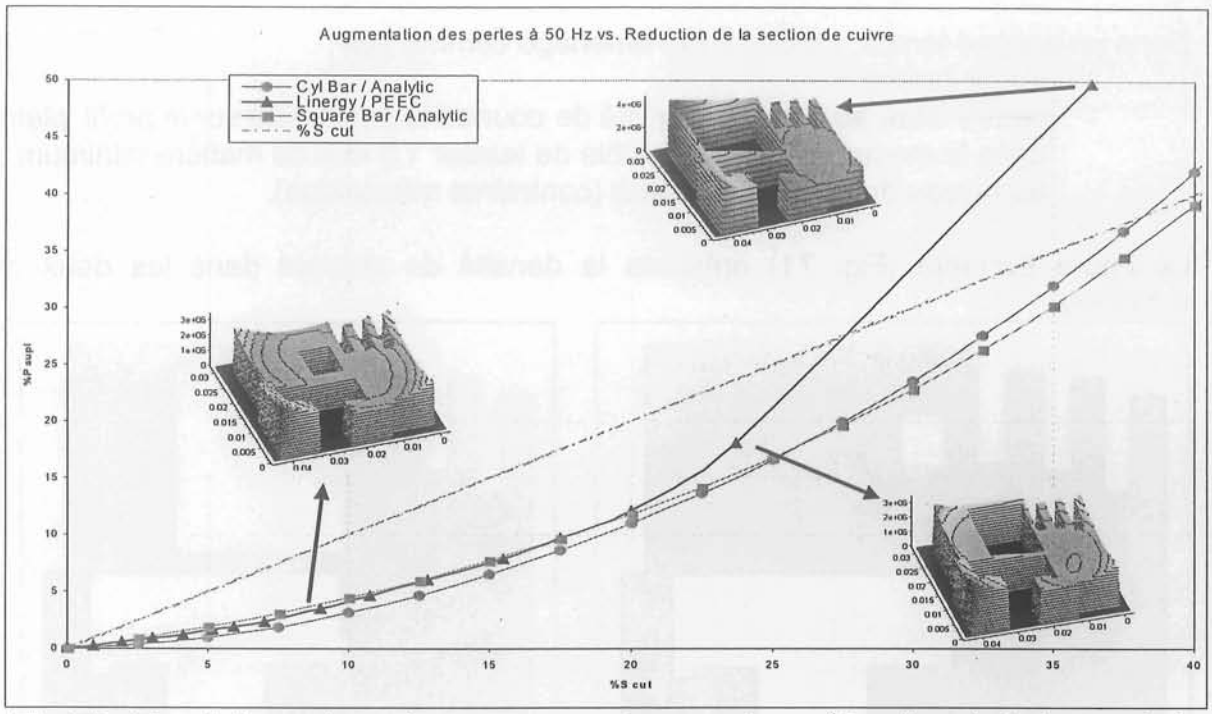


Fig. 72 : Tracé des gains cuivre par rapport aux pertes en fonction de la forme de la section et de la taille du trou

Nous voyons sur ces courbes que le fait de localiser le trou à l'endroit du minimum de densité de courant a pour conséquence de mieux répartir le courant (« lisser les pointes »). Nous voyons bien ceci sur la courbe suivante (Fig. 73). Ce n'est pas la valeur maximale de densité de courant qui est diminuée mais la valeur minimale qui est augmentée. On uniformise ainsi la répartition du courant dans le cuivre. Les points « chauds » resteront donc aussi « chauds ». Il faut garder ce résultat à l'esprit lorsqu'il s'agira ensuite de reboucler sur la thermique du dispositif.

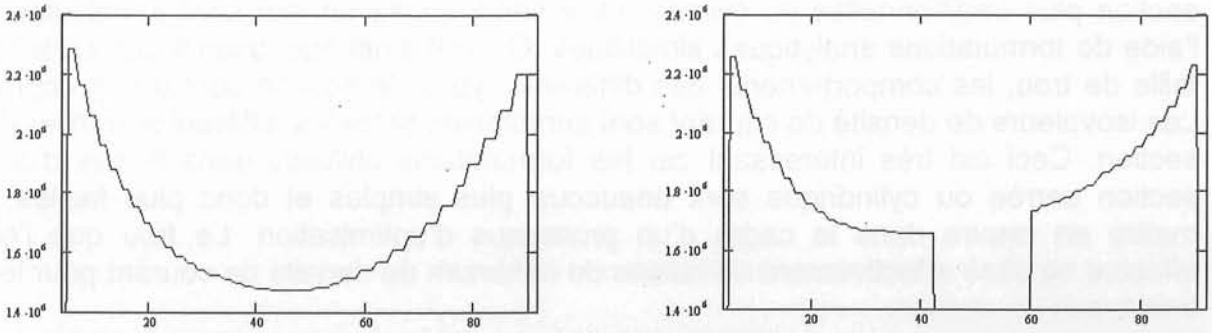


Fig. 73 : Variation de la densité de courant en l'absence (gauche) et en présence d'un trou (droite)

Maintenant que l'impact d'un trou dans la section a été évalué sur une seule barre, il faut envisager le cas d'une structure triphasée.
Un premier calcul sur la structure existante est d'évaluer la contribution de l'effet de proximité sur le niveau de pertes. Le tableau suivant (Tableau 4) montre que sur cette gamme, l'influence de l'effet de proximité a été grandement diminuée. Ceci montre que l'effet de peau est prépondérant dans cette architecture et va donc dans le sens d'une modification de la section du conducteur.

Condition de simulation	Pertes en W	Ratio	
Continu	249.7	1	
Effet de peau	306.2	1.226	+22.6 %
Effets de peau et de proximité	322.8	1.293	+ 29.3 %

Tableau 4 : Séparation des différents effets sur les pertes du jeu de barres

La figure suivante (Fig. 74) montre, et ce résultat n'est pas étonnant, que le fait que la structure soit triphasée, on n'obtient pas la même répartition de la densité de courant dans les trois phases. Le cuivre n'est pas utilisé de la même manière. Donc l'étude sur une seule phase comme nous l'avons faite précédemment peut être remise en question pour conclure sur la meilleure forme de la section des conducteurs.

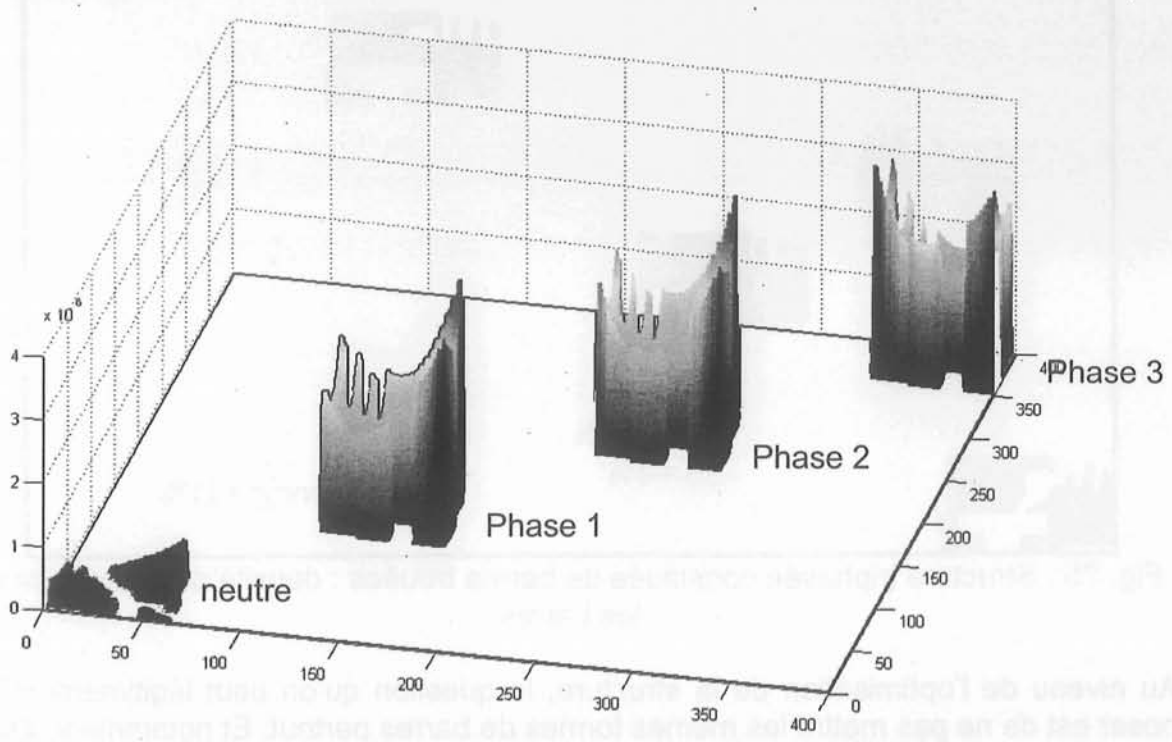


Fig. 74 : Densité de courant dans la structure triphasée

Partant de la structure triphasée initiale, nous avons creusé les barres pour évaluer l'apport d'un trou sur les pertes totales. Le trou a été localisé au même endroit que pour la structure monophasée. Nous avons résumé sur le tableau suivant l'apport d'un gain de 4 % en surface. Pour cela nous avons calculé les pertes en continu (c'est-à-dire sans prendre en compte les effets de peau et de proximité). On retrouve bien les 4 % gagnés sur la surface (pertes pdc %). Quand on les prend en compte, cela ne rajoute, en moyenne, que 1.5 % de pertes supplémentaires (pertes pac %). Cette valeur varie bien entendu d'une phase à l'autre mais en moyenne le gain est le même que pour une structure monophasée.
Dans les deux dernières colonnes de ce tableau nous avons évalué l'impact de ce trou sur la densité de courant. Le fait de creuser à l'endroit où la densité de courant était la plus faible en monophasé conduit à une diminution du déséquilibre en courant du système triphasé.

	ratio dc	Perte pdc%	ratio ac	Perte pac%	déseq/moy plein %	déseq/moy trou %
n			1,002			
1	1,041	4,085	1,018	1,794	3,068	2,766
2	1,041	4,085	1,014	1,424	4,837	4,782
3	1,041	4,085	1,012	1,223	1,768	2,015
moy	1,041	**4,085**	1,015	**1,480**	**3,224**	**3,188**

Tableau 5 : Gains pour un trou en triphasé

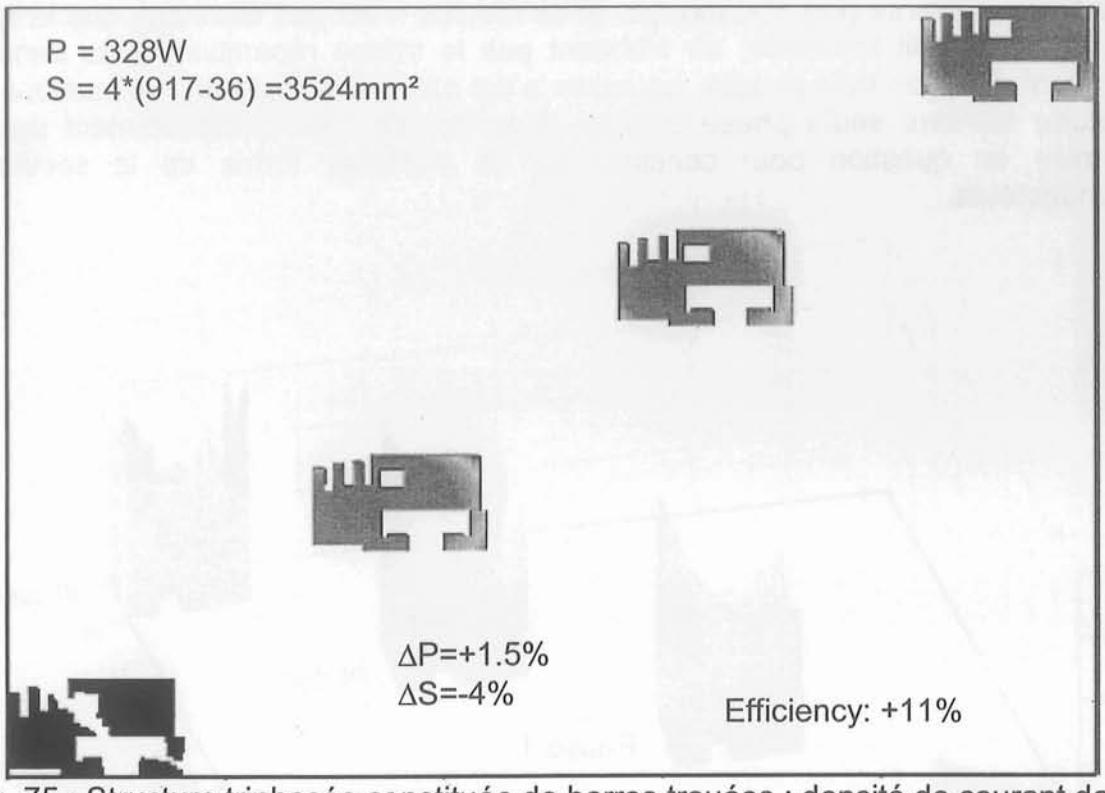


Fig. 75 : Structure triphasée constituée de barres trouées : densité de courant dans les barres

Au niveau de l'optimisation de la structure, la question qu'on peut légitimement se poser est de ne pas mettre les mêmes formes de barres partout. Et notamment, étant donné que la structure est généralement équilibrée, on pourrait déclasser le conducteur de neutre pour gagner sur le poids cuivre. Il faut tout de même vérifier qu'il passe les différents tests, notamment sur un défaut de court circuit ou au niveau des taux d'harmoniques.
Ceci ensuite concerne la stratégie de l'industriel sur ces dispositifs : généraliser au maximum au risque de surdimensionner ou gagner sur les matières premières au risque d'être trop proche des limites de fonctionnement du dispositif.

En conclusion sur cet exemple industriel, une réelle amélioration du dispositif peut être envisagée en modifiant la section des conducteurs.
Un processus d'optimisation sur cette structure est envisageable car des gains sont attendus. C'est un des objets de la thèse de Jean-Paul Gonnet (thèse cifre Schneider). D'ores et déjà, ce dernier a amélioré la saisie du problème afin de s'affranchir du remaillage inévitable si on modifie la section des conducteurs.

Les gains escomptés sont ensuite à replacer dans un contexte plus grand dans lequel il faut prendre en compte le cycle de vie du produit pour savoir effectivement

s'il est judicieux ou non d'adopter telle ou telle amélioration obtenue à l'aide du processus d'optimisation.
Pour ce faire, Schneider dispose d'un outil développé par l'ADEME (Agence pour la maîtrise de l'énergie) qui s'appelle EIME. Il intègre les facteurs suivants :

- prix de la matière première (avec le coût pour l'environnement de son procédé d'extraction),
- lieu d'utilisation du produit,
- ...

On peut ainsi, sur une grande échelle, estimer les gains et les dégradations produites par différentes solutions envisagées. A ce stade là, on se rend compte que maîtriser les caractéristiques électriques parasites des conducteurs ne suffit pas [GON 03], d'autres critères entrent en jeu pour le choix des structures à installer.

Ainsi, à titre indicatif, la production annuelle de Schneider Electric ciblée pour 2005 est de 500km de conducteurs en se limitant aux segments de courant compris entre 250A et 5000A sous 380V triphasé (marché tertiaire et industriel). Schneider Electric détient environ 10% du marché mondial accessible des jeux de barres et canalisations préfabriquées.
La puissance dissipée par un mètre de conducteur est de 178 W. Il s'agit d'une moyenne pondérée sur les différents segments de puissance. Ce chiffre est à rapprocher des 885 W observés pour le jeu de barre Magellan (gros calibre).
La durée de vie d'un jeu de barres ou d'une canalisation est de 15 ans.
On considère que le facteur d'utilisation moyenné sur cette durée des conducteurs est de 10% (soit environ un tiers du courant nominal pour une utilisation à plein temps).
L'énergie consommée par l'ensemble des conducteurs décrits installés sur un an à marché constant est de : $E = 0.1 \times 5 \cdot 10^6 \times 178 \times 15 \times 365 \times 24 = 11.68\ TW \cdot h$
Les exemples traités montrent que :

- L'optimisation de l'agencement de conducteurs permet à elle seule un gain de l'ordre de 25% sur la puissance, vu les espacements de conducteurs.
- L'optimisation de forme est susceptible, appliquée seule, de réduire la puissance totale de 10% à 15%, vu les dimensions de conducteurs traités.

Sur la base des exemples déjà traités, nous avons pour objectif de réduire de 30% sur l'ensemble des segments les puissances dissipées, par application successive des deux processus d'optimisation évoqués ci-dessus.

L'économie d'énergie accessible par l'installation de jeux de barre et canalisations (nouvelles installations et remplacement) optimisés par la méthode présentée est de $E = 0.30 \times 11.68 = 3.5\ TW \cdot h$ par année, consolidée au niveau mondial pour un marché sans croissance (or on constate actuellement un phénomène d'extension du marché canalisations préfabriquées qui se substituent aux câbles).

Placement des trous dans des bus barres
Comme je l'ai déjà dit, la méthode PEEC a été initialement utilisée pour des besoins d'électronique de puissance. Même si les exemples présentés précédemment sont plutôt du domaine de l'électrotechnique, il est possible d'envisager d'optimiser le câblage des structures d'électronique de puissance. Nous allons appliquer ceci aux bus barres qui sont largement utilisés en électronique de puissance pour câbler les modules de puissance. Très peu inductifs, grâce au phénomène de self-antiself

provoqué par l'empilement des plaques de cuivre, ils ont pour rôle de distribuer le courant dans des associations (parallèles) de composants. La méthode PEEC a été utilisée pour les modéliser et évaluer leur rôle sur la répartition du courant lors de mise en parallèle de modules ou pour identifier le trajet des lignes de courant et la présence ou non de points chauds [CLA 96-1]. La géométrie de ces plaques est très particulière car il faut tenir compte de contraintes mécaniques nombreuses de tenue mécanique mais aussi d'accès aux composants (passage de vis et autre). Aussi des trous sont pratiqués dans les différentes plaques. Pour l'instant hormis ces contraintes mécaniques, il n'y a pas de critères qui permettent de savoir où placer les trous pour répondre à des besoins d'équilibrage de courant, par exemple, dans une mise en parallèle. Sachant qu'on sait modéliser les bus barres, on va donc essayer de les optimiser en cherchant à positionner de façon judicieuse les trous. C'est l'un des objectifs présentés par Jean-Luc Schanen dans son habilitation à diriger des recherches [SCH] et qui doit être traité par Christian Martin durant sa thèse en contrat Cifre avec la société MGE-UPS.

4.3. Conclusions et perspectives

Dans cette partie, nous avons présenté comment faire évoluer notre démarche de modélisation de l'analyse de structures vers leur conception. Les premiers résultats sont encourageants et laissent entrevoir des gains industriels élevés.
Néanmoins, tout n'est pas ficelé. En effet, il reste à explorer plusieurs pistes.

Diversifier les algorithmes d'optimisation utilisés
Jusqu'alors, dans notre démarche d'optimisation, seuls les algorithmes déterministes ont été testés. Cela convient relativement bien lorsqu'il s'agit de jouer sur l'effet de proximité pour améliorer les structures. En effet, un remaillage de la section n'est pas nécessaire et ainsi le nombre de subdivisions de chaque section est toujours le même. La description des équations électriques de chaque conducteur est alors unique au cours du processus d'optimisation.
Cependant, avec cette approche, et vu les problèmes que nous avons traités, nous avons pu mettre en défaut les algorithmes déterministes. En effet, cette démarche nécessite de partir d'un point initial et ensuite, en fonction de la valeur de la fonction objectif et des différents gradients, on cherche une solution meilleure. Sur une structure similaire à celle présentée Fig. 67, l'algorithme d'optimisation a convergé mais sans amélioration sensible de la solution initiale. Cela voulait dire que le point de départ était proche du minimum local atteint par l'algorithme. Il fallait donc sortir de ce minimum local. Pour ce faire, Jean-Michel Guichon a imaginé un processus d'optimisation décomposé en plusieurs étapes [GUI 03-3] :

- tout d'abord, on génère de façon aléatoire différents points de départ (ce nombre étant choisi par l'utilisateur).
- ensuite on applique l'algorithme déterministe pour tous ces points et on garde le meilleur.

On pense ainsi pourvoir éviter les paliers et atteindre plusieurs minima locaux.
Testée sur différentes structures, cette approche a donné des résultats tout à fait satisfaisants montrant que plusieurs solutions géométriques correspondaient à la même valeur de la fonction objectif Fig. 76.

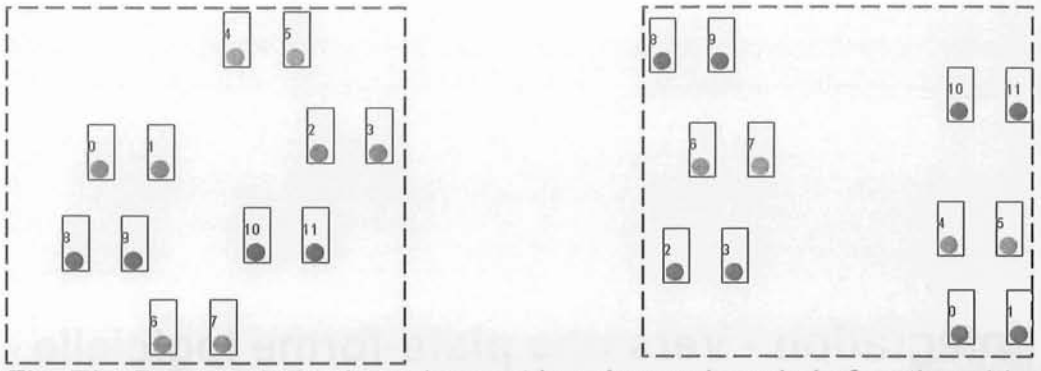


Fig. 76 : Deux optimisations donnant la même valeur de la fonction objectif

Cependant, cette approche est difficile à mettre en œuvre lorsqu'il s'agit de modifier la forme de la section des conducteurs. La technique ici consiste plus à mailler de manière assez dense les conducteurs et à enlever des subdivisions à l'endroit où on veut enlever de la matière. Pour explorer l'espace des solutions, il est envisagé dans ce cas d'utiliser les algorithmes génétiques avec Jean-Paul Gonnet durant sa thèse.

Travailler sur la robustesse des formulations utilisées

La formulation analytique sur laquelle repose le calcul de la mutuelle inductance entre deux conducteurs élémentaires ne fait intervenir que les paramètres géométriques du dispositif à savoir dimensions (largeur, épaisseur et longueur) des conducteurs ainsi que leur position relative. Dans la majorité des cas, l'évaluation numérique de cette fonction ne pose pas de problème. Il y a cependant des cas extrêmes pour lesquels la formule diverge et aboutit à des non sens : mutuelle entre deux conducteurs plus élevée que leur inductance ou plus élevée quand ils sont éloignés que quand ils sont proches ou encore changement de signe.

Nous avons constaté que ceci intervient quand nous sommes dans des configurations géométriques particulières comme des ratios sur les dimensions ou distances très élevés. Cette « faiblesse » de la formulation peut limiter le processus d'optimisation car transitoirement, durant la recherche de la solution, l'algorithme peut être amené à explorer des solutions qui se trouvent dans de telles conditions et diverger. Il faut donc être sûr des formulations utilisées et de leur domaine de validité. Lorsque celui-ci aura bien été identifié on pourra alors rechercher d'autres formulations, plus ou moins simplifiées, qui permettront de couvrir tout l'espace des solutions.

Parmi elles, grâce à l'optimisation de section que nous avons effectuée, on s'est rendu compte que le tracé des isovaleurs de densité de courant permettait une simplification de la formulation étudiée puisque dans ce cas, tant que les isovaleurs sont des cercles, on peut assimiler notre section à un cylindre de même section.

Néanmoins, il faut poursuivre la définition exacte du domaine de validité de la formulation et identifier quels sont les termes qui divergent.

Lorsque ce travail sera finalisé, il suffira alors de mettre en place un algorithme de décision de la meilleure formulation à utiliser la moins sensible, la plus stable, afin d'éviter les problèmes de divergence.

5. Intégration - Vers une plate-forme logicielle

La méthode de modélisation PEEC présentée dans ce manuscrit a été codée et ceci a donné naissance au logiciel InCa3D (Inductance Calculation) qui est présent chez plusieurs industriels et universitaires partenaires. Cette version du logiciel a rendu et rend encore de grands services en terme de modélisation mais son ergonomie est limitée et son utilisation par des ingénieurs d'études n'est pas envisageable car elle nécessite encore trop de manipulation de données via des fichiers notamment pour être simple.

En ce qui concerne les applications de la méthode TLM, une maquette a été créée, InCaCnes, et a montré la faisabilité de toutes les techniques de calculs développées dans ce manuscrit. Néanmoins cette version est moins aboutie que InCa.

De plus, progressivement, d'une simple modélisation de la connectique à l'aide de schémas électriques équivalents nous nous sommes dirigés vers une analyse des structures de plus en plus complexes en envisageant leur optimisation. Ceci a nécessité une réflexion profonde sur l'outil.
Tout d'abord, nous avons identifié les différentes étapes qui seront vues comme autant de modules à connecter et à faire dialoguer. Cette volonté de séparer les différentes phases de la modélisation permet de travailler sur un aspect en particulier sans dégrader les autres mais aussi de faire du développement de code en parallèle ainsi que des connexions avec des outils existants (cf. § 5.1).
Une fois ce travail effectué, il faut alors « rentrer » dans les différents modules et spécifier précisément les objectifs attendus. C'est ce qui est présenté dans cette partie.

5.1 Identification des différents modules indépendants

La modélisation de tout problème passe inévitablement par les différentes étapes suivantes :

- description géométrique,
- description électrique,
- maillage,
- calcul du modèle électrique équivalent.

Dans la partie 3 nous avons présenté l'utilisation du modèle du câblage en vue d'analyser le dispositif : recherche de courants, pertes, densités de courants, induction, ...

Toutes ces fonctionnalités ont été définies comme autant de modules indépendants. En fait, ceci a pour avantage de pouvoir rajouter autant de post traitements que nécessaire en fonction de ce qui est recherché : densité de courant maximale, ΔJ, ... sans toucher au cœur même de la résolution (première étape).
Ainsi, on aboutit à un outil modulaire (Fig. 77) et donc évolutif qui permet de calculer un grand nombre de grandeurs. Le format des résultats a été voulu volontairement simple afin de pouvoir très facilement se connecter à des outils de tracé de courbes tels que Excell, Mathcad, Matlab, ...

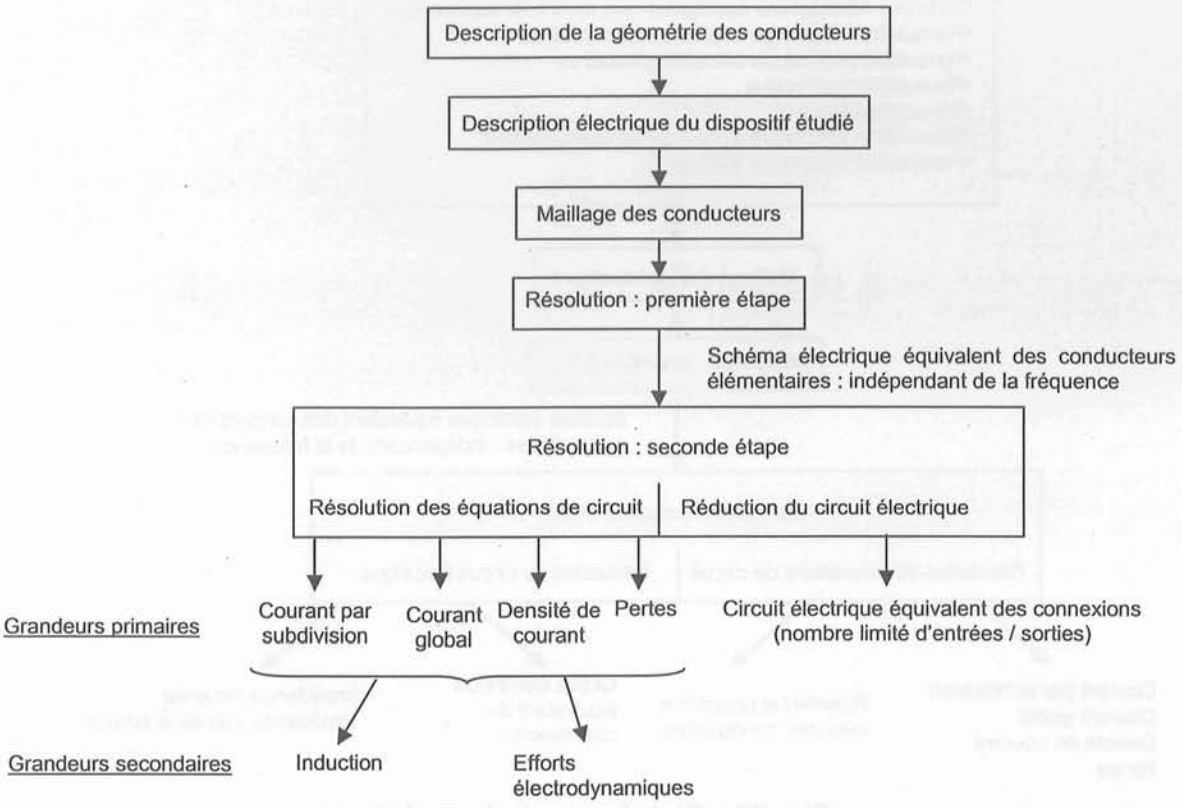


Fig. 77 : Architecture d'InCa avec la méthode PEEC

5.2 Vers une plate-forme de formulations

Dans la partie 2 nous avons montré que selon les hypothèses effectuées, on pouvait utiliser des formulations différentes. La philosophie de la méthode PEEC qui consiste à générer un schéma électrique équivalent est conservée et on demande alors à l'outil de se présenter en tant que serveur de formulations.
Dans ce manuscrit deux approches ont été présentées correspondant à deux problématiques bien distinctes : prise en compte ou non de la propagation.
Nous avons montré que la démarche de modélisation est la même mais les formulations utilisées pour construire la matrice impédance des conducteurs élémentaires sont différentes.
Aujourd'hui, pour des raisons pratiques, deux logiciels coexistent : l'un reposant sur la méthode PEEC, InCa et l'autre reposant sur la méthode MTL développée pour les besoins du CNES, InCaCnes.
Dans le futur, une des évolutions logiques serait de proposer un même outil, intégrant les différentes formulations développées et dans lequel l'utilisateur irait « piocher ».

De plus au sein même d'une approche, selon les hypothèses simplificatrices ou les grandeurs recherchées, les formulations à employer varient.
On peut donc envisager le schéma suivant Fig. 78 :

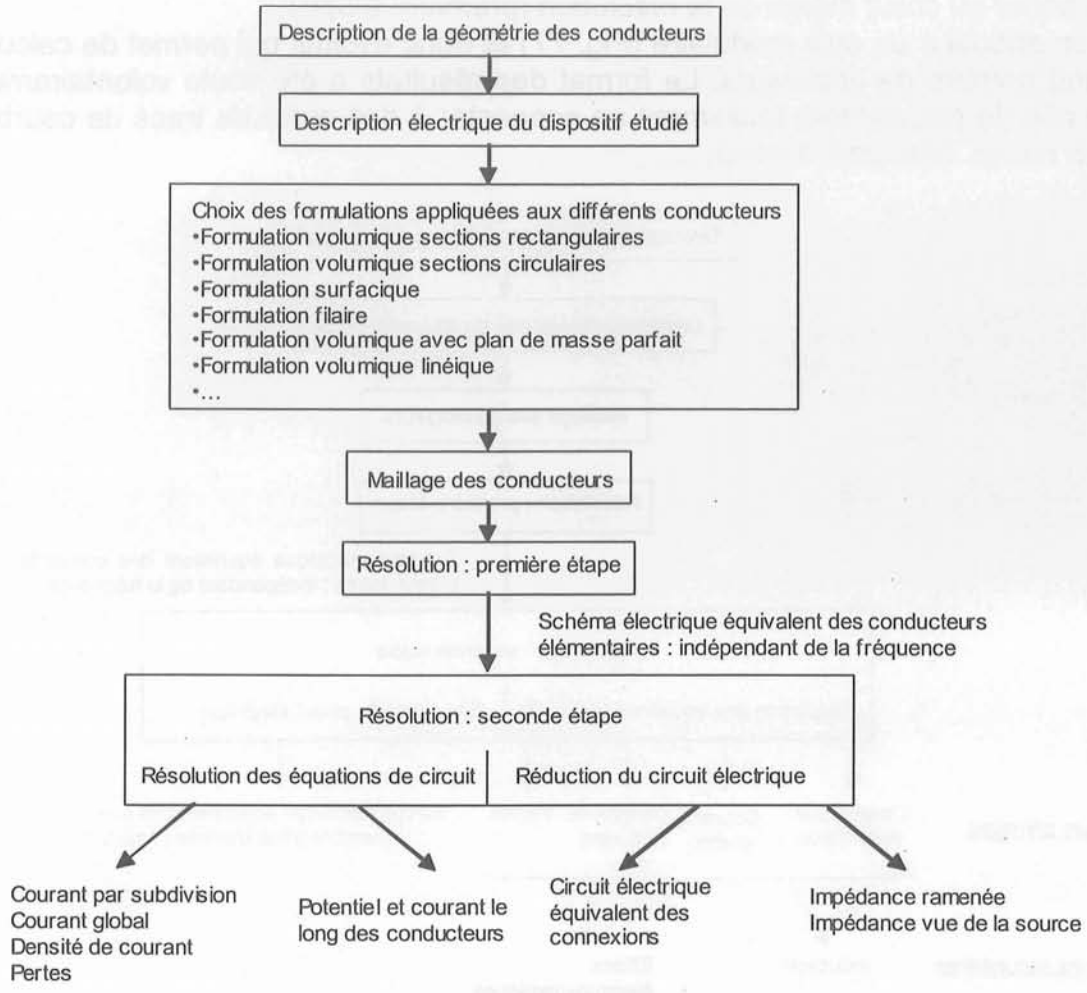


Fig. 78 : Plateforme de formulations

Le solveur est alors vu comme une macro-calculatrice sur laquelle on aurait toutes les formulations et l'intelligence nécessaire pour les utiliser dans la phase d'analyse à bon escient.
Bien entendu, cette plateforme de formulations devra être en permanence réactualisée et alimentée par de nouvelles formulations afin d'élargir le champ d'applications de la méthode de modélisation.
Par exemple, une formulation permettant de modéliser des conducteurs faisant un angle quelconque entre eux (non parallèles et non perpendiculaires) a été développée durant ma thèse pour l'approche PEEC. Il reste à l'implanter dans le solveur et à la valider dans des configurations pertinentes.
Pour l'approche MTL, des travaux ont aussi été initiés dans ce sens [CLA 02-2]. Un petit solveur dans lequel les formulations et le processus de modélisation présentés aux paragraphes 2.7 et 3.8 a été développé. Nous avons montré précédemment l'avantage de la méthode MTL qui présente une philosophie de modélisation très proche de la méthode PEEC. Son intégration dans cette plateforme logicielle permettra ainsi d'élargir le champ des applications étudiées.

De plus, des travaux de recherche sont en cours pour essayer de prendre en compte la présence de matériaux magnétiques dans les dispositifs. Ceci est certes possible en faisant appel à la méthode des éléments finis (post-doc de Jean-Michel Guichon) comme nous le verrons ultérieurement. Mais la voie vers une ou des formulations applicables dans certaines configurations est toujours explorée.

5.3 L'étape du maillage

Comme pour beaucoup de méthodes de modélisation, il est nécessaire de mailler le problème pour modéliser le plus fidèlement possible les phénomènes physiques en jeu.
L'avantage indéniable de la méthode PEEC vis-à-vis de la méthode des éléments finis par exemple, est que cette étape de maillage est moins critique. Il n'est pas nécessaire de mailler l'air et ainsi le nombre d'inconnues est relativement limité.
Néanmoins, étant donné le modèle établi, cela conduit a des matrices pleines complexes dont la manipulation limite les performances de l'outil car sujette aux capacités des calculateurs utilisés.
De plus, autant il est bien connu que mettre 2 éléments dans l'épaisseur de peau avec la méthode des éléments finis suffit à obtenir des résultats convenables, autant avec l'approche PEEC, nous n'avons pas eu cette démarche. Pour des cas d'école ou des problèmes isolés, nous avons essayé de savoir quelle était la meilleure manière de mailler. Mais il faudrait généraliser cette étude au deux cas de maillage (1D et 2D) présentés dans ce manuscrit. Nous savons d'ores et déjà que selon la grandeur recherchée l'impact du maillage est différent. Il reste à synthétiser les résultats et traiter tous les cas possibles.
Avec l'outil actuel, le maillage 2D présente de nombreux inconvénients :

- bords enlevés (problème de représentation fidèle de la géométrie),
- maillage uniforme (problème de densité de maillage),
- liaison électrique entre nœuds (manuelle),
- ...

Pour toutes ces raisons, il devient indispensable d'améliorer cette étape de la modélisation qui on le sent bien va devenir cruciale dans un processus d'optimisation.
De plus, bien maîtriser le maillage va faciliter la possibilité de se coupler avec d'autres méthodes de calcul, les éléments finis par exemple, puisqu'on aura alors identifié les points sur lesquels mettre les conditions aux limites.

5.4 Couplages

Dans ce paragraphe, deux couplages intéressants de la méthode PEEC sont présentés.
Le premier type de couplage est un couplage de post-traitement. Il peut concerner le domaine de l'électronique de puissance quand il s'agit d'utiliser de façon rapide et systématique le schéma électrique équivalent issu de la modélisation sur InCa. Mais il peut aussi concerner les autres domaines de la physique en proposant un couplage « faible » avec des disciplines telles que la mécanique ou thermique.
Le second couplage est envisagé pour palier une déficience de la méthode, à savoir la non prise en compte de la présence de matériaux magnétiques. Il s'agit là d'offrir une voie qui permette de ce fait d'élargir le domaine d'applications de la méthode PEEC.

Couplage avec un simulateur électrique

L'un des métiers d'InCa est de fournir un schéma électrique équivalent à constantes localisées de la structure modélisée. Ce schéma, une fois réduit, est alors inséré dans un simulateur électrique afin de pouvoir prédire les formes d'ondes en tension et courants et évaluer ainsi les surtensions éventuelles, les couplages puissance – commande, par exemple.

Il est clair que pour éviter toute manipulation de données, cette étape doit être automatique. Le format du modèle doit être le plus général possible afin qu'il soit lisible par différent simulateurs. Les principaux outils utilisés en électronique de puissance sont Spice et Saber.

Pour ce faire Jean-Luc Schanen [SCH] a présenté un modèle et réalisé une première maquette de couplage. Cette dernière repose en partie sur la création manuelle et automatique de plusieurs fichiers pour transférer les bonnes données à Saber en l'occurrence. Une bonne connaissance des deux outils est donc nécessaire ce qui n'est pas à la portée des utilisateurs potentiels qui n'ont pas le temps de se former aux différentes techniques de modélisation et doivent aller vite à l'essentiel. Dans un souci de généricité de l'approche, il reste à spécifier les besoins pour rendre cette maquette utilisable par tout un chacun.

Couplage avec les autres domaines de la physique

Dans ce type de couplage, les résultats de la modélisation avec InCa constituent une donnée d'entrée du logiciel concerné par le couplage. Ce dernier est donc dans un seul sens, de InCa vers l'autre outil, c'est pourquoi je l'ai qualifié de couplage « faible ». Inca vient donc alimenter l'outil considéré.

Pour le domaine de la thermique, ce seront les densités de courant ou les puissances dissipées par les dispositifs qu'il faudra lui fournir.

Pour le domaine de la mécanique, nous sommes capables de calculer des densités d'effort. Ce seront alors autant de contraintes que l'on saisira dans l'outil concerné.

Couplage avec les éléments finis

Comme nous l'avons dit précédemment, la méthode PEEC ne se veut pas concurrente des éléments finis mais au contraire est complémentaire. Elle permet, beaucoup plus rapidement de répondre à un certain nombre de questions mais est forcément restreinte dans ses ambitions.

Il est donc envisagé de faire dialoguer les deux approches pour tirer au maximum profit des avantages de chacune d'elles.

Etant donné que la première version de logiciel InCa repose sur les bases informatiques de Flux3d, logiciel éléments finis développé par le laboratoire, nous disposons de tous les interlocuteurs privilégiés pour faire aboutir ce couplage.

Un des points bloquants de la méthode PEEC est qu'on ne peut pas prendre en compte la présence de matériaux magnétiques dans les dispositifs. Or dans certaines applications à modéliser le fer est présent, que ce soit de simples armoires ou des blindages intentionnels.

Mais l'une des raisons pour lesquelles nous n'avons pas utilisé dès le départ les éléments finis est que la géométrie des dispositifs est très complexe avec de grandes disparités dans les dimensions et une part importante d'air à mailler.

L'idée dans ce couplage est d'utiliser au mieux les avantages des deux méthodes :

- traiter rapidement des géométries complexes tridimensionnelles avec la méthode PEEC,
- prendre en compte les matériaux magnétiques avec les éléments finis.

Cela consiste donc dans un premier temps à résoudre le dispositif sans prendre en compte les matériaux magnétiques avec l'approche PEEC. On résout alors le système pour obtenir les courants dans les différents conducteurs.
Ces courants seront alors décrits dans les éléments finis et plus particulièrement dans Flux3d comme des inducteurs (ou bobines). On décrit ensuite les matériaux magnétiques dans l'outil éléments finis.
A ce stade, on est capable de calculer les courants induits par les courants sources (conducteurs) dans le blindage (matériau magnétique).
On peut alors connaître le champ en tout point dû aux courants source et courants induits (superposition) en l'absence de saturation.
Durant son travail de DEA, Bassem Khaddhour a montré la faisabilité d'une telle démarche avec tout de même des difficultés concernant la description des caractéristiques physiques des différentes régions du dispositif, leur maillage et la formulation la mieux appropriée selon les grandeurs recherchées [KHA].
La figure suivante (Fig. 79) montre le résultat sur un jeu de barres horizontal (problématique Schneider) entouré de plaques magnétiques.

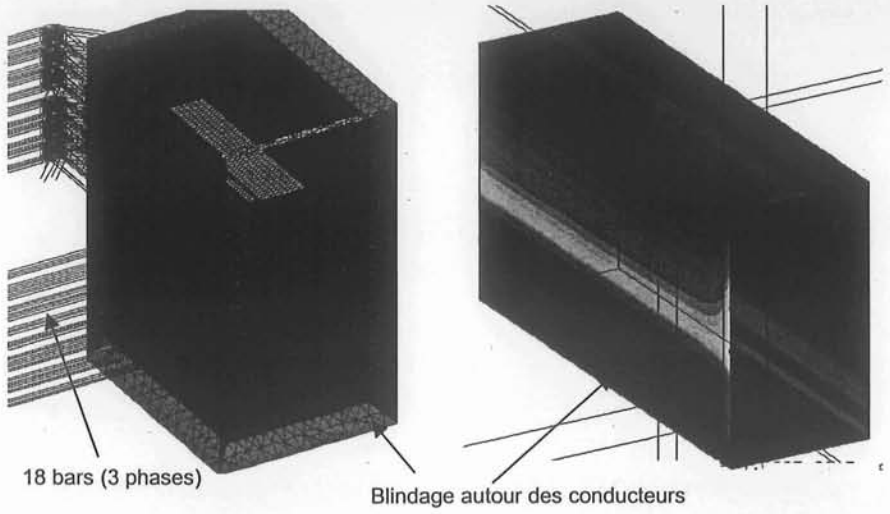


Fig. 79 : Modélisation Flux3d d'un jeu de barres horizontal – courants induits dans le blindage

Si l'on arrête là, la modélisation, on a ainsi réalisé un couplage faible puisqu'on suppose que les courants induits qui se sont développés dans les matériaux magnétiques ne vont pas venir perturber les courants initiaux (valeur et distribution).

Pour répondre au problème précédent, la description des inducteurs ne se fait plus en donnant le courant calculé par InCa mais en décrivant les inducteurs à l'aide de la matrice impédance, résultat de la première phase de la résolution, avec les équations de circuit dans l'air. Les courants dans les inducteurs qui sont alors les conducteurs élémentaires issus du maillage dans InCa ne constituent plus une entrée mais seront le résultat de la résolution du problème complet (avec les matériaux magnétiques) avec les éléments finis. A ce moment là, tout étant résolu d'un coup, on connaîtra l'influence des courants induits sur la distribution du courant dans les conducteurs. De plus, dans l'air, le nombre d'inconnues à calculer sera réduit puisque, finalement, InCa fournit non seulement la matrice impédance mais aussi le champ H.
Cette voie est en cours d'expérimentation.

Mais il n'est pas nécessaire d'être en présence de matériaux magnétiques pour envisager un couplage entre les deux méthodes de modélisation.
En effet, toute l'approche développée avec la méthode TLM peut être couplée avec une approche éléments finis. C'est d'ailleurs un des thèmes de la thèse de B. Nekhoul [NEK]. Ce dernier a en particulier travaillé pour EDF sur le calcul du rayonnement d'un réseau de mise à la terre et a principalement développé des formulations et modèles pour Flux3D. On pourrait envisager de reprendre son travail et de réaliser une partie des calculs avec l'approche présentée dans ce manuscrit. Ceci confèrerait rapidité et simplicité de mise en oeuvre des calculs. De plus l'aspect semi analytique des résultats est appréciable pour faire du « reverse engineering ».

6. Conclusions

Dans ce manuscrit, un processus de modélisation de conducteurs électriques de tout type a été présenté. Il repose sur deux approches de modélisation, PEEC et MTL selon que l'on recherche un schéma à constantes localisées ou réparties pour prendre en compte les caractéristiques intrinsèques du câblage. Chacune de ces deux approches repose bien entendu sur des méthodes et formulations différentes selon la finesse du modèle recherché, la géométrie du dispositif étudié.
Ces méthodes et formulations sont décrites de manière exhaustive dans ce rapport que ce soit pour des structures d'électrotechnique (basses fréquences) que d'électronique de puissance (hautes fréquences) ou pour l'électronique bas signal (prise en compte de la propagation).
Une fois établi le schéma électrique équivalent des connexions, il faut alors être capable de conclure sur le bon fonctionnement et les performances de la structure étudiée. Pour ce faire, de nombreuses grandeurs sont calculées en post-traitement comme le courant global dans les conducteurs, la densité de courant, les pertes totales du dispositif, l'induction ou les efforts. Tout ceci permet alors d'analyser dans son intégralité la structure, seule ou dans son environnement d'utilisation (avec les autres composants semi conducteurs ou autres).
Bien entendu, savoir analyser et comprendre le fonctionnement d'un dispositif est séduisant, l'étape qui suit est de pouvoir l'améliorer.
Cela peut passer par l'expérience, comme c'est le cas actuellement dans l'industrie, mais ce n'est pas suffisant. On a fait alors appel à des outils de conception qui sont bien adaptés dans notre cas puisque une grande partie des calculs repose sur des formulations analytiques et est donc rapide à évaluer. Ceci a nécessité de bien identifier les hypothèses de calculs souvent simplificatrices qui ont amené à accélérer l'optimisation des structures.
Nous avons pu montrer sur plusieurs applications ou tests que les gains escomptés en appliquant un processus d'optimisation sur la méthode de modélisation développée sont très encourageants et nous poussent à poursuivre dans cette voie pour améliorer non seulement la disposition des conducteurs les uns par rapport aux autres (effet de proximité) mais aussi leur forme (effet de peau).
Ceci dans le seul but d'optimiser l'utilisation de la matière.
Une grosse partie des applications de cette approche va permettre ainsi de contribuer à l'effort collectif de la maîtrise de l'énergie puisque le soutien de l'ADEME est avéré pour tous les travaux effectués en collaboration avec Schneider Electric.
Un logiciel d'évaluation du cycle de vie d'un produit a été utilisé pour quantifier par exemple les gains escomptés avec notre approche. Même si, grâce aux outils et

méthodes de conception que nous avons développés, nous montrons qu'il est possible d'améliorer un dispositif, les autres facteurs intervenants dans le calcul du cycle de vie d'un produit sont très nombreux et pour certains difficilement identifiables ou quantifiables. En effet, selon le lieu d'utilisation ou de fabrication d'un produit les coûts annexes concernant par exemple les lieux de provenance de la matière première, c'est-à-dire les coûts d'extraction et d'acheminement ne seront pas les mêmes.

On voit donc que nos résultats sont certes très encourageants mais ils ne suffisent pas à eux seuls à justifier des changements radicaux de fabrication ou conception. Néanmoins, ils apportent parfois des éléments supplémentaires intéressants (existence de solutions non envisagées à l'aide de l'expérience).

On voit donc tout l'intérêt de disposer d'un environnement de modélisation simple d'accès, fournissant en post-traitement le maximum d'informations et donnant la possibilité de réaliser des couplages avec les autres domaines de la physique.

C'est dans ce sens que nous envisageons la plateforme de modélisation et de conception développée autour de la méthode PEEC utilisée.

Soulignons que la nécessité de travailler sur la modélisation, l'analyse et la conception des interconnexions a été initiée par les applications.

C'est pour cela que cette habilitation à diriger des recherches ne peut pas être trop généraliste ou conceptuelle et que les perspectives présentées pour les différentes parties de ce manuscrit sont des visions à moyen terme.

Nous sommes en effet tributaires des applications industrielles et sauts technologiques. Ces derniers engendreront :

- soit des changements de formulations,
- soit une amélioration telle qu'il ne sera plus nécessaire de prendre en compte les interconnexions,
- soit un abandon de cette modélisation car trop ardue.

Bref, en un mot, nous ne pouvons dans ce domaine qu'être suiveur.

Bibliographie

[ATI 99] E. Atienza, J. Bigeon, F. Wurtz, B. Belhabib, "Steps to an Electrical Design Environment", Proceeding of the IEEE-IECON'99, San Jose, CA, USA, November 29th - December 3rd, 1999, Vol. 2, pp 815-820.

[BES] M. Besacier, « Adaptation de la méthode PEEC à la représentation électrique des structures d'électronique de puissance », thèse de docteur de l'INPG, grenoble, Novembre 2001

[BES 03] M. Besacier, J.M. Guichon, J.L. Schanen, J. Roudet, « Busbar copper losses computation », European Physical Journal Applied Physics, article accepté, à paraître

[CLA 95] E. Clavel, J-L. Schanen, J. Roudet, « Modelling connections », IEEE - ICEAA'95, Turin, p. 89–92, 12-15 Sept. 1995.

[CLA 95-1] E. Clavel, J-L. Schanen, J. Roudet, « Case Impedance Determination for Power Electronics components », IEEE - ICEAA'95, Turin, p. 121-124, 12-15 Sept. 1995

[CLA 96] E. Clavel, « Vers un outil de conception du câblage : le logiciel InCa », Thèse de docteur de l'INPG, Grenoble, 21 Nov. 1996.

[CLA 96-1] E. Clavel, J. Roudet, J-L. Schanen, P. Hublier, « Modeling and Electrical Simulation of a Busbar », IEEE - PCIM'96, Nuremberg, p 747–752, 21-23 may 1996.

[CLA 96-2] E. Clavel, J. L. Schanen, J. Roudet, A. Fontanet, "Influence of the Cabling Geometry on Paralleled Diodes in a High Power Rectifier", IEEE - IAS'96, San Diego CA, 6-10 Oct. 1996, pp 993 - 998

[CLA 97] E. Clavel, J. Roudet, Y. Maréchal, « Design of a commutation cell of a high power IGBT inverter - The contribution of the simulation », IEEE - IAS'97, New Orleans, Louisiana, p 1014–1021, 5-9 october. 1997.

[CLA 98] E. Clavel, J. L. Schanen, J. Roudet, "A Very Useful CAD Tool for Designing Packaging of Integrated Power Converter", IEEE - IWIPP'98, Chicago, Sept. 1998, pp 18 - 22

[CLA 98-1] E. Clavel, Y. Maréchal, J. Roudet, "Modélisation des câblages en Electronique de Puissance : apport et complémentarité des méthodes d'éléments finis et de circuits équivalents", The European Physical Journal, Applied Physics, AP1, pp 211-223, 1998

[CLA 99] E. Clavel, J-L. Schanen, J. Roudet, "A Multiconductor Transmission Line Method to Study non-perfect Ground Planes", IEEE – EMC'99, Zurich, Fév. 1999, pp 437 - 440

[CLA 00] E. Clavel, J. Roudet, J. L. Schanen, J. Panh, J. P. Catani, "Conducteurs non parfaits et haute fréquence : Prise en compte de ces deux facteurs dans la modélisation électrique de structures", CEM'2000, Clermont-Ferrand, 14-16 Mars 2000, p. 170 - 175

[CLA 00-1] E. Clavel, J. L. Schanen, J. Roudet, J. M. Guichon, « What method for busbar electrical modelling ? », IEEE - PCIM'00, Nuremberg, 6-8 June 2000, p. 29 - 33

[CLA 00-2] E. Clavel, J. Roudet, J-L. Schanen, J. Panh, J-P. Catani, " Conducteurs non parfaits et haute fréquence : Prise en compte de ces deux facteurs dans la modélisation électrique de structures", CEM'2000, Clermont-Ferrand, 14-16 Mars 2000, pp 170 - 175

[CLA 01] E. Clavel, J. Roudet, « Conduction tridimensionnelle », 6 rapports de contrat de collaboration avec le CNES

[CLA 02] E. Clavel, J. Roudet, J. Panh, J. P. Catani, « Modélisation de câbles coaxiaux – Comparaison de différentes approches », CEM'2002, Grenoble, 12-14 Mars 2002, p. 121 – 126

[CLA 02-1] E. Clavel, J. Roudet, A. Foggia, "Electrical modeling of transformer connecting bars", IEEE – Transactions on magnetics, Vol. 38, N°2, March 2002, pp 1378 - 1382

[CLA 02-2] E. Clavel, J. Roudet, J. Panh, J. P. Catani, "Modélisation de conducteurs non parallèles – Comparaison de différentes approches ", CEM'2002, Grenoble, 12-14 Mars 2002, pp 131 - 134

[COP] Copper development association : "Copper For Busbars", 1956

[CRP 94] C. R. Paul, "Analysis of Multiconductors Transmission Lines", Wiley Series in Microwave and Optical Engineering, Kai Chang, Series Editor, ISBN 0-471-02080-X, (1994)

[FER] Société Ferraz – Shawmut, rue de Vaucanson, 69720 Saint Bonnet de Mure

[FLU3D] Flux3D - Logiciel d'analyse électromagnétique par la méthode éléments finis, CEDRATS.A, CEDRAT – Recherche SARL Chemin du Pré Carré, ZIRST 38420 MEYLAN

[GON 03] J. P. Gonnet, J. M. Guichon, E. Clavel, Y. Maréchal, V. Mazauric, « Improving the energetic efficiency of distribution busbars », IEEE – PES-TD, Dallas, USA, Sept. 2003

[GUI] J. M. Guichon, « Modélisation, caractérisation et dimensionnement de jeux de barres », Thèse de docteur ingénieur de l'INPG, Nov. 2001, Grenoble

[GUI 00] J. M. Guichon, E. Clavel, Y. Maréchal, V. Mazauric, « Method to compute current density in power distribution bars », IEEE - CEFC'00, Milwaukee, Wisconsin, USA, 4-7 June 2000, p. 375

[GUI 00-1] J. M. Guichon, E. Clavel, Y. Maréchal, V. Mazauric, « Methodology to compute electrodynamics efforts and temperature on power busbar distribution : coupling of finite element and analytical approach », IEEE - CEFC'00, Milwaukee, Wisconsin, USA, 4-7 June 2000, p. 305

[GUI 00-2] J.-M. GUICHON, E. CLAVEL, C. TURBIDI, J.-L. GELET, "Electrodynamic modelling of a structure to test fuses", PCIM Europe, 7/2000, pp 60 - 64

[GUI 01] J. M. Guichon, E. Atienza, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric, « Automatic design of busbar considering electrical criteria », IEEE – PES-TD, Atlanta, Georgia, USA, 29 Oct. – 2 Nov. 2001, 6 pages

[GUI 02] J. M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet, F. Janet , V. Mazauric, « Modeling and optimizing power busbars taking into account magnetic materials », IEEE – PES-TD, Marina del Rey, Californie, USA, 13-15 Mai 2002, 4 pages

[GUI 02-1] J. M. Guichon, M. Besacier, J. L. Schanen, E. Clavel, J. L. Gelet, « Current evaluation inside a power fuse », IEEE – PES-TD, Marina del Rey, Californie, USA, 13-15 Mai 2002, 6 pages

[GUI 03-1] J. M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric, "Modélisation de jeux de barres basse tension en vue de la conception », Vol. 6, n°5/6 2003, pp 731 - 769

[GUI 03-2] J. M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric, « Evaluation of low frequency flux density level within an industrial application », IEEE – PES-TD, Dallas, USA, Sept. 2003

[GUI 03-3] J. M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric, "Random coupled gradient optimization of power busbars using PEEC method - Merging within finite element method", IEEE COMPUMAG 03

[GUI 03-4] J. M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric, "Partial Element Equivalent Circuit method in busbar design, interest with regard to Finite Element Method", ISEM, Paris, 12-14 Mai 2003

[HOE 65] C. Hoer, C. Love, « Exact Inductance Equations for Rectangular Conductors with Applications to more Complicated Geometries », Journal of Research of the National Bureau of Standards, C. Engineering and Instrumentation, Vol. 69C, N°2, p. 127–137, april – june 1965.

[KHA] B. Khaddour, "Modélisation et caractérisation des liaisons conductrices de puissance – Simulation des courants de Foucault dans le blindage des jeux de barres", DEA, Juin 2002, Grenoble

[NEK] B. Nekhoul, "Caractérisation numérique de l'environnement électromagnétique transitoire des postes aériens hautes tensions", Thèse de docteur de l'INPG, Avril 1994, Grenoble

[PED 91] O. Pedersen « Modeling of power and ground planes ».Proc. of 1991 Internat. Electronic Packaging Conference, p.652, vol.2, Sept. 1991.

[PIE] N. Piette, « Modélisation et Optimisation de la Connectique des Structures d'Electronique de Puissance », Thèse de docteur ingénieur de l'INPG, Juillet 1999, Grenoble

[PRO] Société "Design Processing Technologies", siege social 1490, chemin du Replat - PINET - 38410 ST MARTIN D'URIAGE, http://designprocessing.free.fr

[ROU 94] J-L. Schanen, J. Roudet, H. Morel, « Prédétermination des inductances de câblage pour la simulation fine des convertisseurs », CEM'94, Toulouse, p 439–444, 2-4 mars 1994.

[RUE 72] A. E. Ruehli « Inductance calculations in a complex integrated circuit environment », *IBM Journal on R&D, Sept. 1972.*

[RUE 74] A. E. Ruehli « Equivalent circuit models for three dimensional multiconductor systems », IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT 22, Mars 1974.

[RUE 79] A. E. Ruehli, N. Rover, P. A. Brennan « Three dimensional inductance computations with partial element equivalent circuits », IBM Journal on R&D, vol.23, n°6, Nov. 1979.

[SCH 94] J-L. Schanen, C. Guerin, J. Roudet, G. Meunier, « Influence of a Conductive Plane on Loop Inductance », IEEE – Transactions on Magnetics, p. 2127–130, 1994

[SCH] J-L. Schanen, « Electronique de Puissance: au cœur de la commutation », Habilitation à diriger des recherches, 15 novembre 2000, Grenoble

[SPI] PSPICE 5.30 software, Mirosim Corporation, 20 Fairbanks, IRVINE, CA 97218-9905 USA

[SUA] P. Suau, « Modèles de busbarres », DEA de génie électrique, INPG, Grenoble, Sept. 99

[YOU] M. Youssef, « Rayonnement dans les convertisseurs d'électronique de puissance », Thèse de docteur ingénieur de l'INPG, Déc. 1998, Grenoble

Glossaire

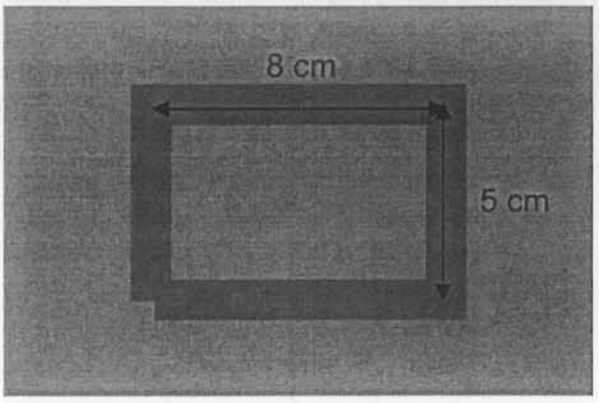
Noms des différentes méthodes et approches de modélisation

PEEC : Partial Element Equivalent circuit (Modèle à constantes localisées)
rPEEC : Retarded PEEC (prise en compte du retard avec l'approche PEEC)
TLM : Transmission Line Model (Modèle à constantes réparties)
MTL : Multi Conductors Transmission Line
MoM : Méthode des moments

Annexe A : Modélisation d'un plan de masse – Comparaison des méthodes des images et PEEC – Validation des hypothèses de calcul

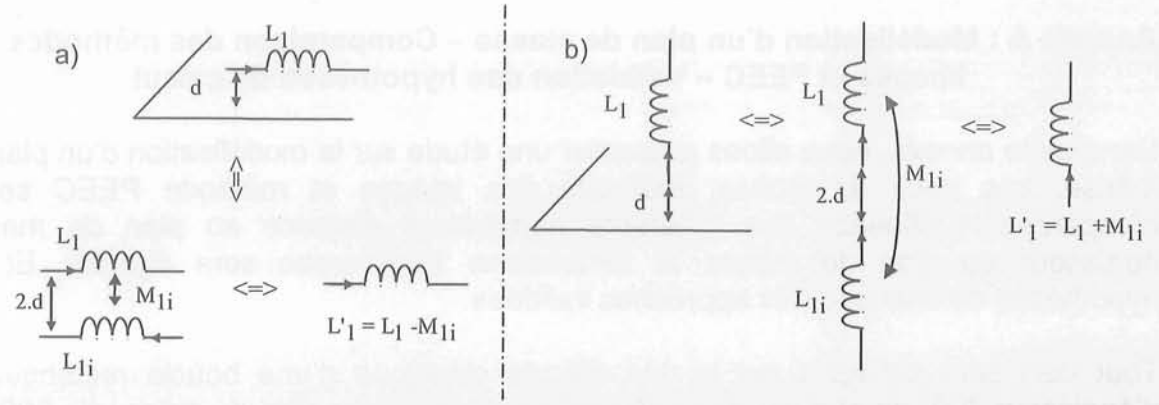
Dans cette annexe, nous allons présenter une étude sur la modélisation d'un plan de masse. Les deux approches, méthode des images et méthode PEEC seront comparées. L'influence des différents paramètres distance au plan de masse, épaisseur du plan de masse et dimensions transverses sera étudiée. Et les hypothèses de chacune des approches validées.

Tout ceci sera entrepris sur le cas d'école classique d'une boucle rectangulaire d'épaisseur 300 µm et de surface 40 cm² au-dessus d'un plan de masse de 300 µm d'épaisseur distant de 1 mm de la boucle. Il est deux fois plus grand que la boucle. Ce sont des dimensions que nous retrouvons typiquement dans des applications d'électronique de puissance.

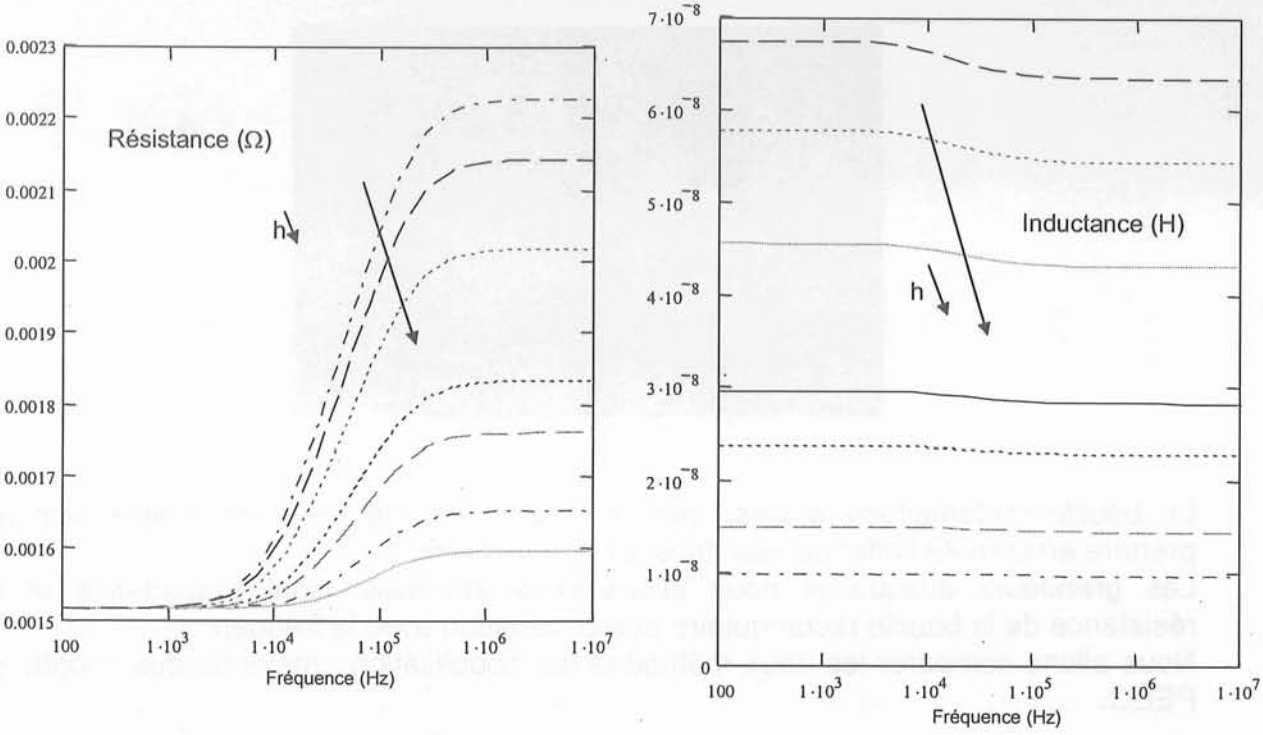


La boucle rectangulaire qui est dessus le plan de masse a été maillée afin de prendre en compte l'effet de eau dans les conducteurs.
Les grandeurs auxquelles nous allons nous intéresser sont l'inductance et la résistance de la boucle rectangulaire et leur variation avec la fréquence.
Nous allons comparer les deux méthodes de modélisation : méthode des images et PEEC.

La méthode des images
Comme présenté dans le manuscrit, la méthode des images consiste à remplacer un conducteur au-dessus d'un plan de masse parfait (infini et infiniment conducteur) par ce même conducteur et son image parcourus par des courants opposés s'il est parallèle au plan (a) et des courants de même sens s'il est perpendiculaire au plan (b).
Dans le premier cas, son inductance équivalente est $L'_1 = L_1 - M_{1i}$.
Dans le second cas $L'_1 = L_1 + M_{1i}$.
La résistance partielle quant à elle est inchangée car le plan de masse est considéré comme infiniment conducteur. Ceci a pour conséquences de considérer que les courants qui circulent dans le plan de masse sont surfaciques.



La figure suivante présente les caractéristiques électriques de la boucle lorsqu'on fait varier la distance h entre la boucle et le plan de masse.



On se rend compte que plus on s'éloigne, plus les valeurs de R et L sont élevées et on voit une variation avec la fréquence d'autant plus marquée que les conducteurs sont éloignés du plan de masse.

La méthode PEEC

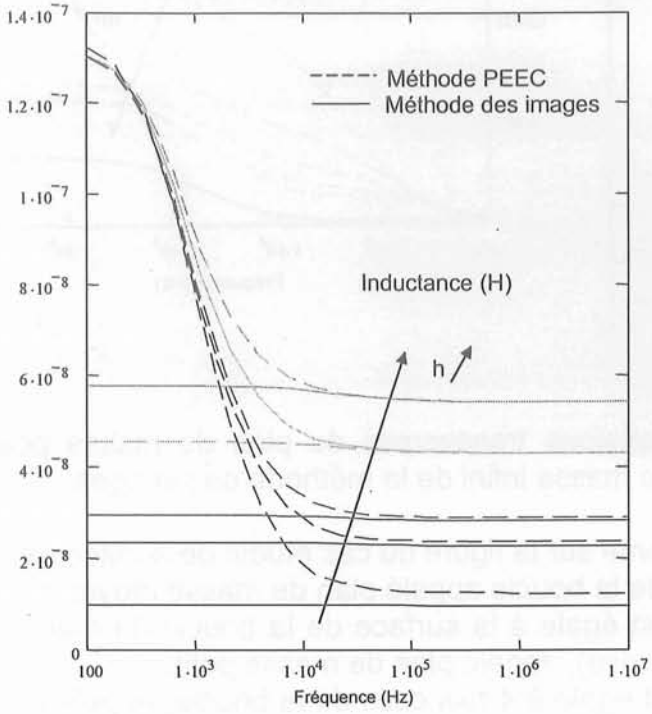
Nous avons fait la même étude que précédemment mais en utilisant la méthode PEEC. Le plan de masse est maillé en 2D assez grossièrement.

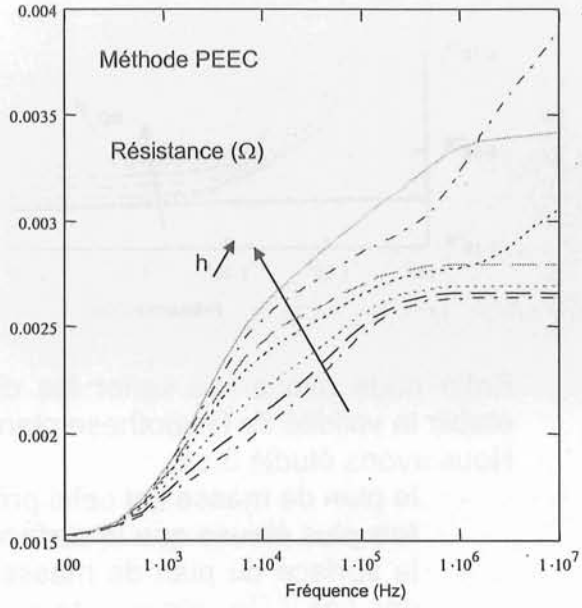
La figure suivante présente les résultats obtenus comparés à la méthode des images pour l'inductance.

Nous pouvons nous rendre compte qu'en ce concerne la partie inductive, les deux méthodes convergent vers la même valeur pour les hautes fréquences ce qui est concevable étant donné qu'à haute fréquence les courants susceptibles de se développer dans le plan de masse auront tendance à circuler en surface (hypothèse de la méthode des images).

En revanche, ceci n'est plus vrai à basses fréquences, ce qui est bien pris en compte

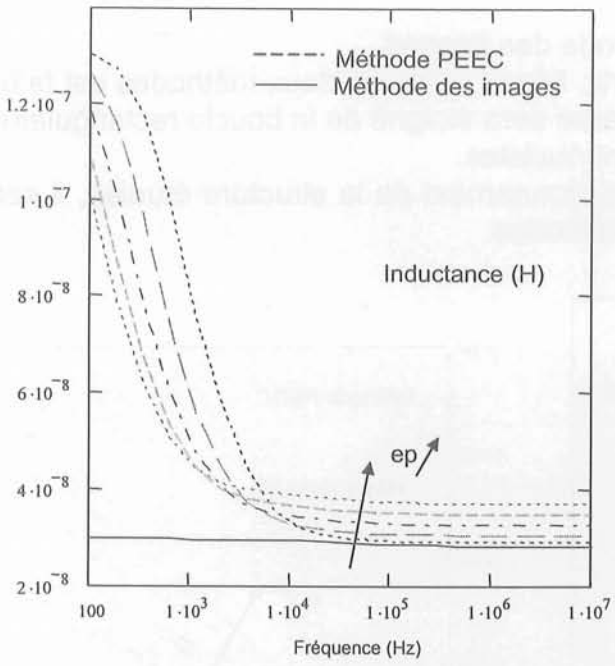
par la méthode PEEC et non par la méthode des images.
A partir de quelques dizaines de kilo Hertz, l'écart entre les deux méthodes est faible et le sera d'autant plus que le plan de masse sera éloigné de la boucle rectangulaire.
Néanmoins, les valeurs prises pour h sont réalistes.
Ainsi selon le domaine fréquentiel de fonctionnement de la structure étudiée, il sera judicieux de choisir l'une ou l'autre des méthodes.

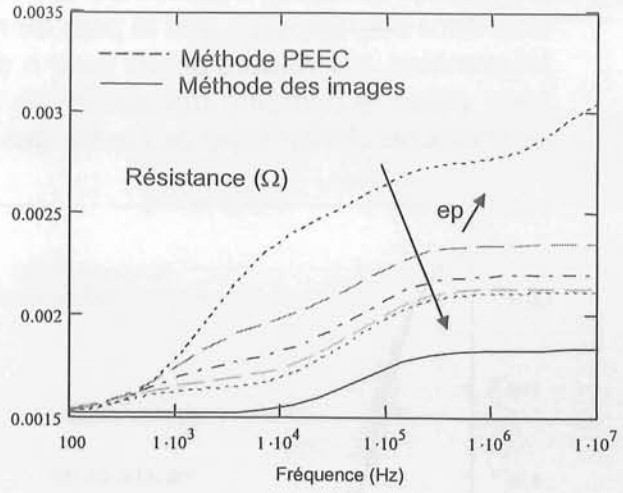




En ce qui concerne la partie résistive, les valeurs trouvées avec la méthode PEEC sont plus élevées qu'avec la méthode des images ce qui correspond au fait que le plan de masse n'est plus considéré comme infiniment conducteur.

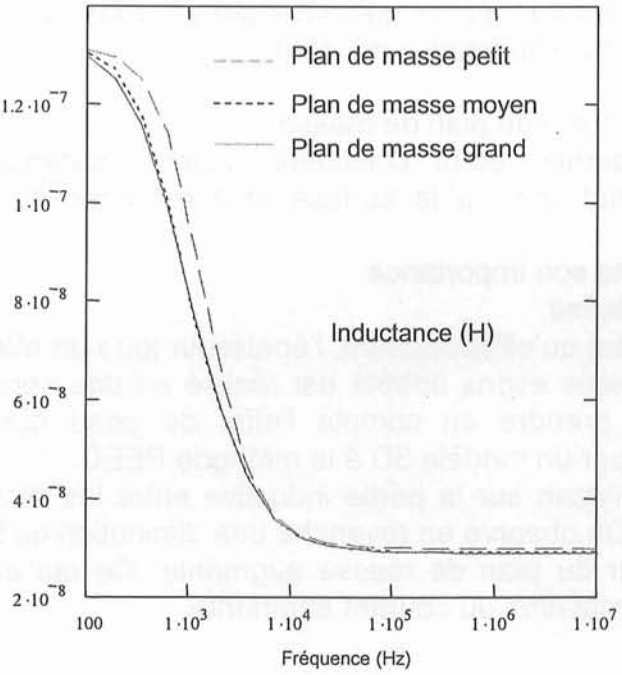
Nous avons ensuite fait varier l'épaisseur (ep) du plan de masse.
Avec la méthode des images, ce dernier étant considéré comme infiniment conducteur, les courants se développent donc à la surface et il est donc sans épaisseur.
Avec la méthode PEEC, le volume a toute son importance.
Nous nous sommes mis à une distance h fixe.
Les courbes présentées ci-après montrent qu'effectivement, l'épaisseur joue un rôle. D'autant plus que le maillage 2D que nous avons adopté est réalisé en une seule couche, donc nous ne pouvons pas prendre en compte l'effet de peau dans l'épaisseur. Pour cela il faudrait développer un modèle 3D à la méthode PEEC.
Plus le plan de masse est épais, plus l'écart sur la partie inductive entre les deux méthodes à haute fréquence est élevé. On observe en revanche une diminution de la contribution résistive lorsque l'épaisseur du plan de masse augmente. Ce qui est légitime puisque la section offerte à la circulation du courant augmente.

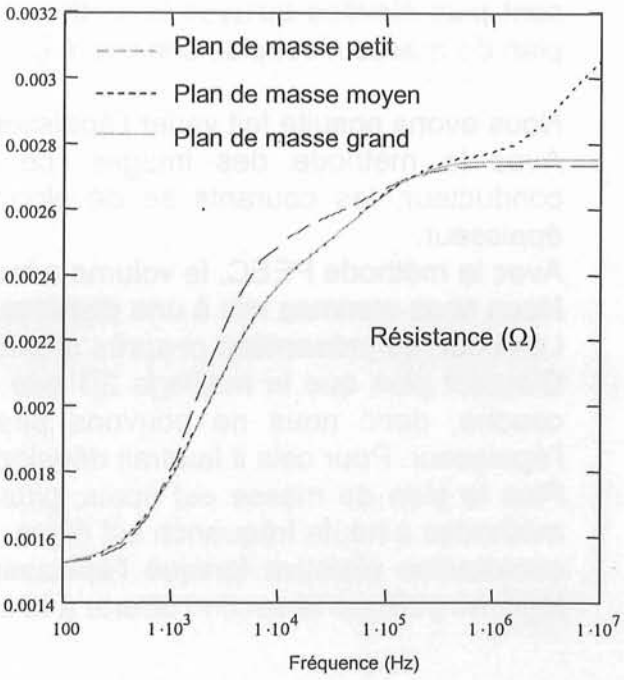




Enfin nous avons fait varier les dimensions transverses du plan de masse pour établir la validité de l'hypothèse plan de masse infini de la méthode des images.
Nous avons étudié 3 cas :

- le plan de masse est celui présenté sur la figure du cas étudié de surface deux fois plus élevée que la surface de la boucle appelé plan de masse moyen,
- la surface du plan de masse est égale à la surface de la boucle (la majorité des cas d'électronique de puissance), appelé plan de masse petit,
- la surface du plan de masse est égale à 4 fois celle de la boucle, appelé plan de masse grand.





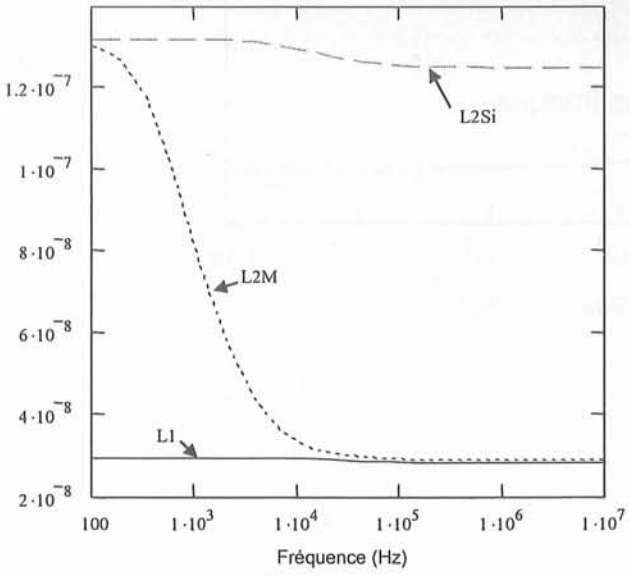
Les résultats présentés sur la figure précédente montre qu'à hautes et basses fréquences, quelles que soient les dimensions du plan de masse, les résultats

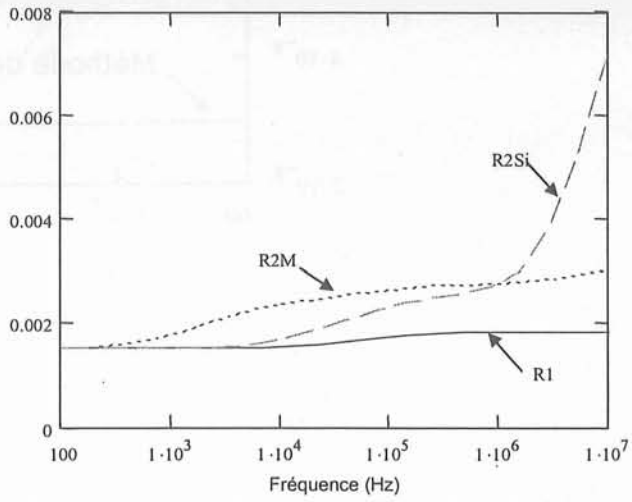
convergent pour la partie inductive. En revanche pour les fréquences intermédiaires (quelques centaines ou kilo hertz) il y a un écart, au niveau du point d'inflexion de la variation avec la fréquence.

Nous avons aussi fait varier la densité du maillage 2D, ce qui n'a eu aucun impact notoire sur les résultats précédents.

Le dernier élément que nous avons fait varier est la résistivité ρ du plan de masse modélisé avec la méthode PEEC. Ce dernier, infiniment conducteur avec la méthode des images, présente une résistivité nulle alors qu'en réalité elle peut se rapprocher de l'unité dans le cas où le plan de masse est en silicium (ou alliage) et cette configuration peut se présenter dans le cas de modules d'électronique de puissance. Les résultats obtenus sont présentés sur les courbes suivantes où l'on a retenu les 3 cas suivants :

- méthode des images (L1 ou R1),
- méthode PEEC avec plan de masse en cuivre (L2M ou R2M),
- méthode PEEC avec plan de masse en silicium (L2Si ou R2Si).

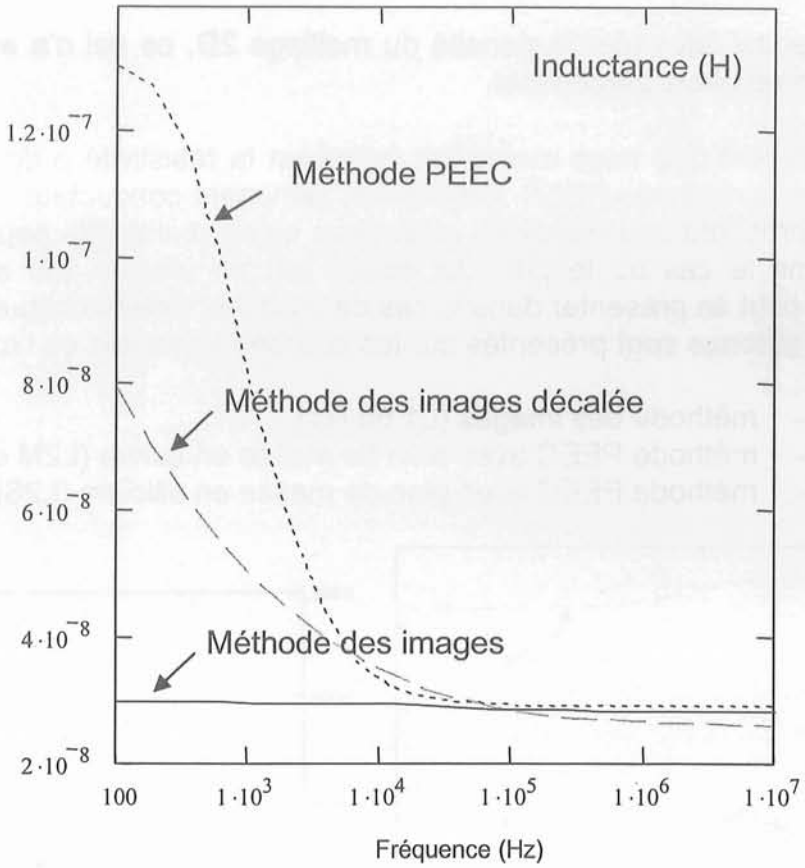




Autre méthode

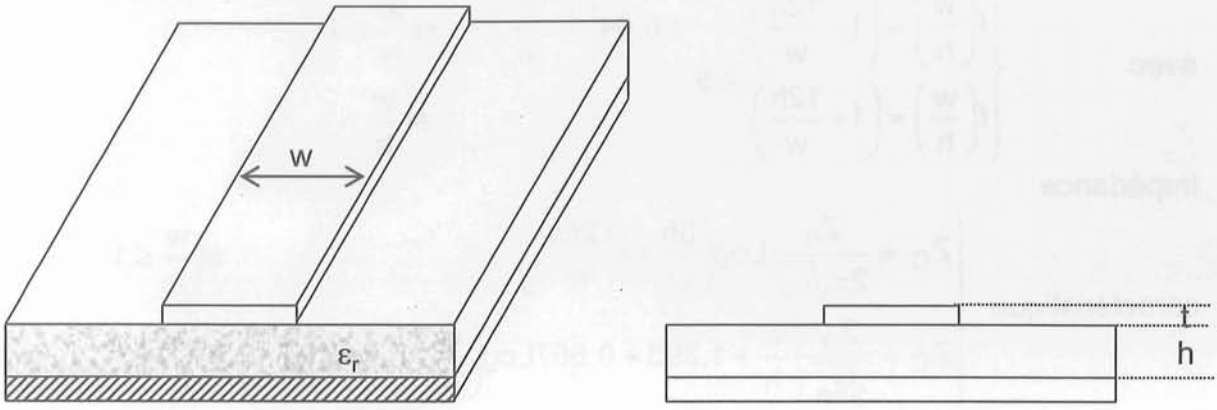
La méthode des images semble bien appropriée pour prendre ne compte la présence d'un plan de masse dans les structures d'électronique de puissance.
Nous avons montré dans l'étude qui précède que l'hypothèse de courant surfacique dans le plan de masse n'est plus valide si on est à basses fréquences car l'effet de peau n'est pas suffisamment marqué pour que les courants qui se développent dans le plan de masse soient considérés comme surfaciques. A ce moment là, modéliser le plan de masse comme un conducteur à part entière est souhaitable. Néanmoins le maillage 2D génère un nombre d'éléments très élevé qui peut ralentir considérablement le temps de simulation et gêner la modélisation.
Une étude développée dans le centre de recherche d'EDF (Electricité de France) et confirmée par [DER] a montré que dans le cas de la basse fréquence, il suffisait de décaler le plan de masse d'une distance fonction de l'épaisseur de peau et donc de la fréquence.
Nous avons testé cette approche sur notre cas d'étude et effectivement, la figure

suivante montre que la valeur de la partie inductive est supérieure quand on décale le plan de masse dans la méthode des images et on se rapproche de la méthode PEEC.



Annexe B : Méthode rPEEC : application au cas de la ligne microruban et validation

J'ai choisi l'exemple de la ligne microruban pour valider l'approche rPEEC.
Sur cet exemple, très simple, je vais détailler l'approche rPEEC.
Dans ce cas, une comparaison avec l'approche TLM est possible puisqu'il existe des formules dans la littérature, ce qui nous permettra de montrer la validité de l'approche.
La géométrie du dispositif est présentée sur la figure ci-dessous.



L'objectif est de déterminer l'impédance d'entrée, c'est-à-dire vue du début de la ligne lorsque celle-ci est chargée sur Z_{ch} = 50 Ω.

Les caractéristiques du dispositif sont les suivantes :

- longueur de la ligne L = 20 cm,
- largeur de la ligne ℓ = 1 mm,
- épaisseur du substrat h = 1.5 mm,
- permittivité relative ε_r = 4.7,
- impédance de charge Z_ℓ = 50 Ω,

Grandeurs générales
Pour appliquer l'une ou l'autre des deux méthodes TLM ou rPEEC, il faut calculer au préalable quelques grandeurs.
Nous rappelons dans ce paragraphe quelques formules importantes.

Vitesse de propagation : $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_e}}$

Longueur d'onde : $\lambda = \dfrac{v}{f}$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Pour toutes les méthodes, nous supposons que la métallisation inférieure se comporte comme un plan de masse parfait. On utilisera donc la méthode des images avec la méthode PEEC ou rPEEC pour en tenir compte.

Détermination de l'impédance avec la méthode PEEC
Pour montrer que nous avons fait l'étude dans une gamme de fréquences pour

laquelle l'effet du retard est visible, nous avons modélisé le problème avec la méthode PEEC classique, sans prendre en compte l'effet de la propagation.

Détermination de l'impédance avec la méthode TLM

Dans ce cas, le rapport w/h guide l'utilisateur vers la formule la mieux appropriée pour déterminer la permittivité effective ainsi que l'impédance caractéristique de la ligne. D'après Schneider et Hammerstad [], nous avons les formules suivantes.

Permittivité effective : $\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} f\left(\frac{w}{h}\right)$

avec $\begin{cases} f\left(\frac{w}{h}\right) = \left(1 + \frac{12h}{w}\right)^{-0.5} + 0.04\left(1 - \frac{h}{w}\right)^2 & \text{si } \frac{w}{h} \le 1 \\ f\left(\frac{w}{h}\right) = \left(1 + \frac{12h}{w}\right)^{-0.5} & \text{si } \frac{w}{h} > 1 \end{cases}$

Impédance

caractéristique : $\begin{cases} Z_C = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_e}} \text{Log}\left(\frac{8h}{w} + \frac{0.25w}{h}\right) & \text{si } \frac{w}{h} \le 1 \\ Z_C = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_e}}\left[\frac{w}{h} + 1.393 + 0.667\text{Log}\left(\frac{w}{h} + 1.444\right)\right]^{-1} & \text{si } \frac{w}{h} > 1 \end{cases}$

avec $Z_0 = 120\ \pi$.

L'expression de l'impédance d'entrée est alors : $Z_e = Z_C \frac{Z_{ch} + jZ_C \tan\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)}{Z_C + jZ_{ch} \tan\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)}$

Détermination de l'impédance avec la méthode rPEEC

La technique pour l'appliquer consiste à découper la ligne selon la longueur en n tronçons de longueur L/n. Pour ce problème ainsi maillé, à l'aide de la méthode PEEC précédemment présentée, on est capable de déterminer un schéma électrique équivalent à constantes localisées composé de résistances, inductances et couplages inductifs (matrices [r] et [m]).

On détermine ensuite la matrice des coefficients de potentiel [p] à l'aide de :

$$[p] = \frac{[m]}{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_e \left(\frac{L}{n}\right)^2}$$

La prise en compte du retard consiste à multiplier les termes de [m] et [p] pour donner les matrices [M] et [P]comme suit :

$\begin{cases} M_{ij} = m_{ij} e^{-j\beta\lvert x_i - x_j\rvert} \\ P_{ij} = p_{ij} e^{-j\beta\lvert x_i - x_j\rvert} \end{cases}$ où x_i et x_j sont les positions le long le la ligne microruban.

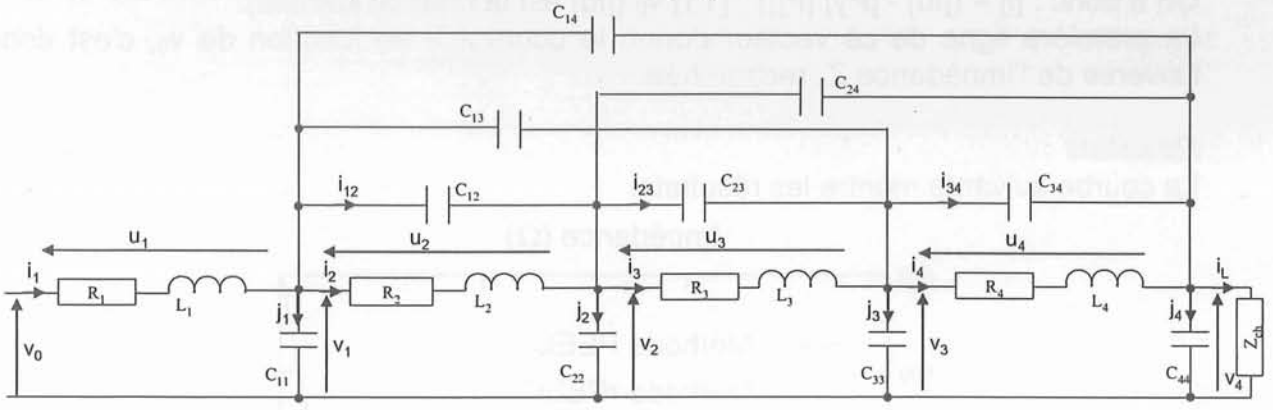
La matrice des coefficients d'influence est alors : $[c] = [P]^{-1}$

La matrice des capacités localisées du schéma électrique équivalent est alors :

$$\begin{cases} C_{ii} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \\ C_{ij} = -c_{ij} \end{cases}$$

On définit, bien entendu, la partie résistive de chaque tronçon comme suit : $R = \frac{\rho \frac{L}{n}}{tw}$.

Cette valeur est alors le terme général de la matrice résistance diagonale [R].
On définit alors les matrices impédance [Z] = [R] + jω[M] et admittance [Y] = $[Z]^{-1}$.
On obtient donc le schéma électrique équivalent de la figure suivante sur lequel tous les composants de [M] et [C] ont une valeur complexe (association de partie résistive et inductive ou capacitive).
Sur cette figure est présenté le cas où la ligne microruban a été découpée en 4 tronçons. Pour plus de clarté, les couplages inductifs n'ont pas été représentés (ce sont les termes extra-diagonaux de la matrice [M]).



A partir de ce schéma on peut écrire les équations générales suivantes :
Lois des mailles :

Pour chaque tronçon, i=1 à n $\quad \begin{cases} u_i = \sum_{k=1}^{n} z_{ik} i_k \\ v_i = \frac{j_i}{jC_{ii}\omega} \\ v_i - v_j = \frac{i_{ij}}{jC_{ij}\omega} \end{cases}$,

Au niveau de la charge : $v_n = Z_{ch}\, i_L$,
Au début : $v_0 = Z_e\, i_1$, où Z_e est l'inconnue.

Lois des nœuds :

Pour chaque tronçon excepté les extrémités, i=2 à n-1 : $i_i + \sum_{k=1}^{i-1} i_{ki} = j_i + i_{i+1} + \sum_{k=i+1}^{n} i_{ik}$,

Au niveau de la charge : $i_L = i_n - j_n + \sum_{k=1}^{n-1} i_{kn}$,

Au début : $i_1 = i_2 + j_1 + \sum_{k=2}^{n} i_{1k}$.

De toutes ces équations, on obtient la formule de récurrence pour les courants i en fonctions des courants j ou des potentiels v :

$$\begin{cases} i_i = y_{i1}v_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(y_{ik+1} - y_{ik})\frac{j_k}{jC_{kk}\omega} - \frac{y_{in}j_n}{jC_{nn}\omega} & \text{pour } i = 1 \quad \text{à } n \\ i_i = i_{i+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{ki}}{C_{ii}}\right)j_i - \sum_{k=1}^{n}\frac{C_{ki}}{C_{kk}}j_k + j_i & \text{pour } i = 1 \quad \text{à } n-1 \\ i_n = -\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{ki}}{C_{kk}}j_k + \left(1 + \frac{1}{jZ_{ch}C_{nn}\omega} + \sum_{k=1}^{n}\frac{C_{kn}}{C_{nn}}\right)j_n \end{cases}$$

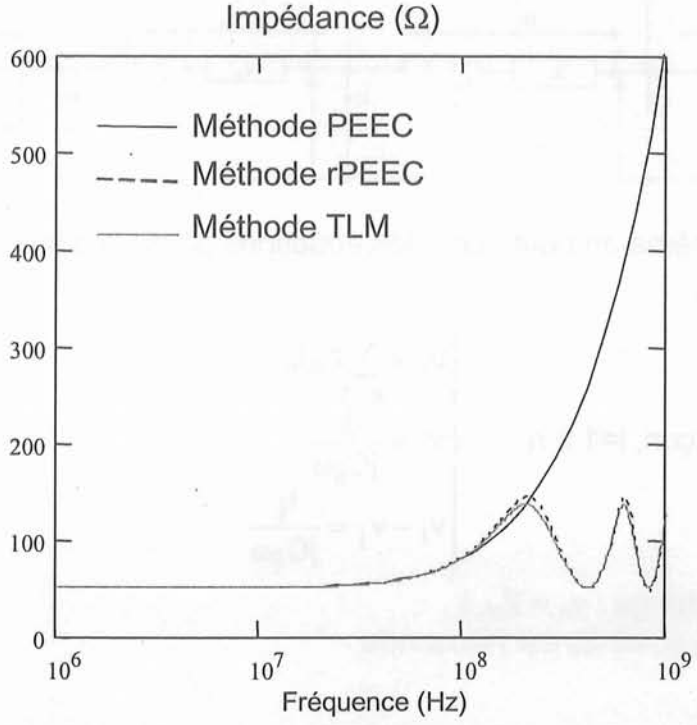
Ce qui peut être défini à l'aide de matrices : $\begin{cases} [i] = [Y1]\,v_0 + [Py]\,[j] \\ [A]\,[i] = -[B]\,[j] + [D]\,[j] \end{cases}$

On obtient donc la matrice de passage des courants j aux courants i :

$$[j] = ([D] - [B])^{-1}\,[A]\,[i] = [Pj]\,[i]$$

et [Y1] est un vecteur égal à la première colonne de [Y].
On a donc : $[i] = ([Id] - [Py]\,[Pj])^{-1}\,[Y1]\,v_0$ ([Id] est la matrice identité).
La première ligne de ce vecteur donne le courant i_1 en fonction de v_0, c'est donc l'inverse de l'impédance Z_e recherchée.

Résultats
La courbe suivante montre les résultats.

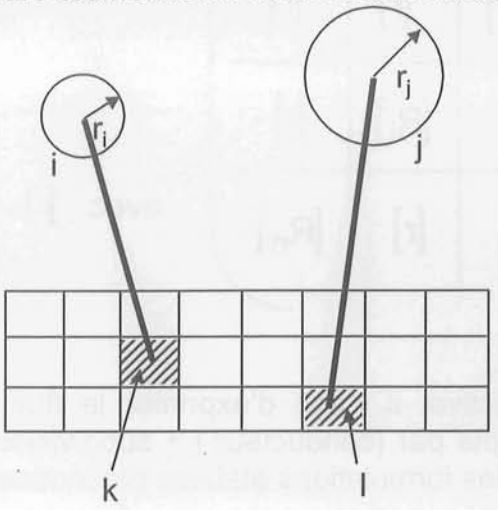


Impédance d'une ligne microruban : comparaison des méthodes PEEC, rPEEC et TLM

Incontestablement, à partir d'une certaine fréquence, l'effet de la propagation le long de la ligne n'est plus négligeable, ce qui met en défaut l'approche PEEC.
Les deux méthodes TLM et rPEEC donnent les mêmes résultats.
Ceci est très encourageant car la méthode rPEEC est généraliste et on peut ainsi penser pouvoir modéliser des structures complexes avec cette approche.

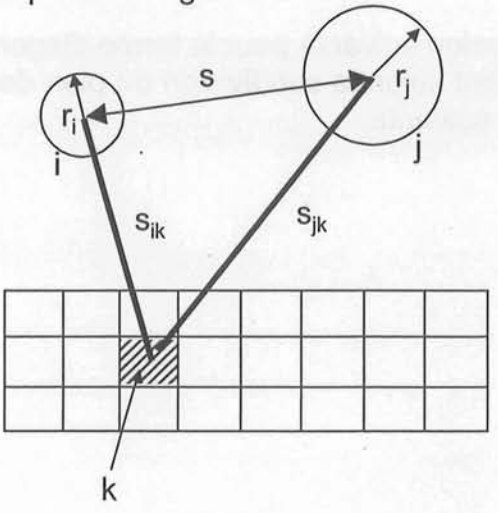
Annexe C : Formulations développées dans le cas de n conducteurs au-dessus d'un plan de masse non parfait pour la méthode MTL

Soient n conducteurs au-dessus d'un plan de masse non parfait que l'on va subdiviser en m conducteurs élémentaires de section rectangulaire.



On va rechercher les caractéristiques électriques de ce dispositif.
On pourra alors raisonner à l'aide de « super matrices » définies en fait comme un assemblage de matrices.
Pour certaines, les expressions des grandeurs ont déjà été établies, pour d'autres, il faudra développer des calculs.
Le cas général correspond à celui présenté sur la figure précédente pour lequel le conducteur i est alimenté et le courant se referme par la subdivision k et on regarde le flux capté par la surface créée par le conducteur j avec la subdivision l.

- Pour la partie résistance, il s'agit d'identifier la résistance parcourue par le courant. C'est en fait uniquement la partie résistive de la subdivision parcourue par le courant. On obtient alors la matrice [R] présentée ci-après dont le terme r_k est la résistance par unité de longueur de la subdivision k du plan de masse et cela correspond au cas présenté figure suivante.



$$[R]=\begin{array}{c} \\ m \\ m \\ m \\ m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m & m & m & m \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} [R_1] & [r] & [r] & [r] \\ [r] & [R_2] & [r] & [r] \\ [r] & [r] & [R_i] & [r] \\ [r] & [r] & [r] & [R_n] \end{array}\right) \end{array}$$

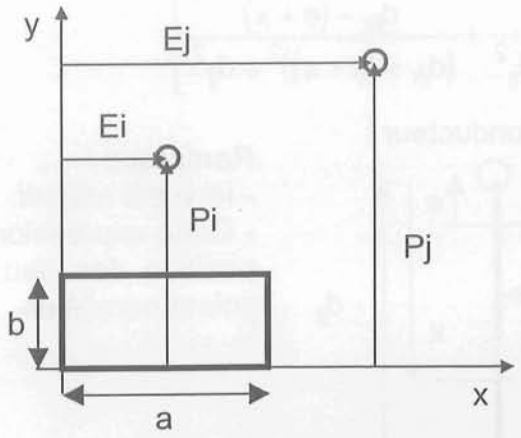
avec $[r]=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_m \end{bmatrix}$

- Pour la partie inductive, il s'agit d'exprimer le flux créé par (conducteur i + subdivision k) et capté par (conducteur j + subdivision l). Dans ce cas là, on ne peut pas reprendre les formulations établies précédemment.

Appelons [m] la matrice recherchée.

Le terme diagonal de cette matrice correspond au cas présenté sur la figure précédente. Il y a une partie commune aux deux boucles qui est la subdivision k.
On suppose la subdivision filiforme de rayon minimal r_0, l'expression a déjà été établie : $M=\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{s_{jk}-r_0}{r_0}\frac{s_{ik}}{s}\right)$
Les deux conducteurs i et j restent filiformes dans notre approche et on va intégrer l'expression précédente sur la largeur et l'épaisseur de la subdivision k.
On va tout d'abord négliger r_0 devant s_{jk}. Et notons que quand les dimensions de la subdivision k varient, r_0 et s restent constants. Donc on peut écrire : $M=\frac{-\mu}{2\pi}\ln(r_0\ s)+\frac{\mu}{2\pi}\ln(s_{jk}\ s_{ik})$.

On obtient alors l'expression suivante pour le terme diagonal de [m] où les grandeurs a, b, Ei, Ej, Pi et Pj varient selon la subdivision du plan de masse considérée et sont présentées sur la figure suivante.

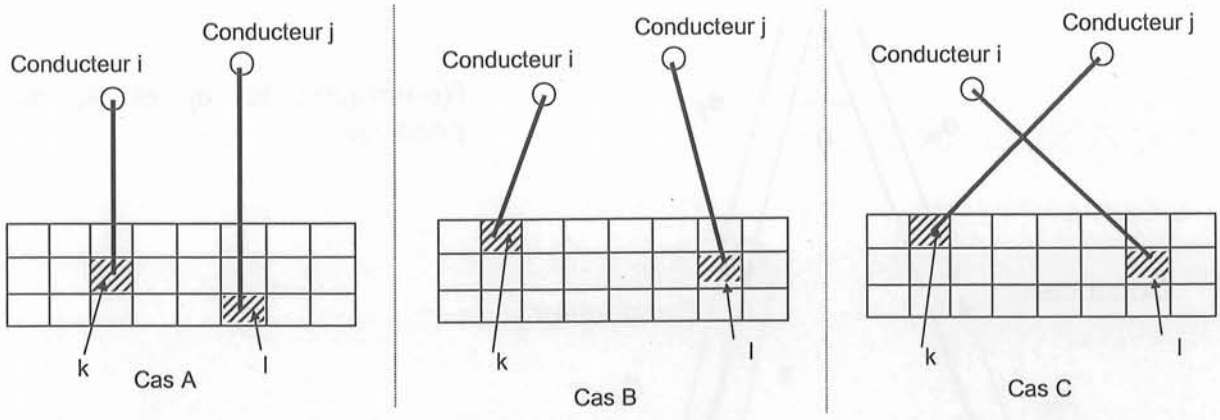


$$M = \frac{-\mu}{2\pi}\ln(r_0\ s) - \frac{3\mu}{2\pi} +$$

$$\frac{\mu}{4\pi ab}\left[\left[xy\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}+y^2\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{y}\right]_{Pi-b}^{Pi}(y)\right]_{Ei-a}^{Ei}(x) +$$

$$\frac{\mu}{4\pi ab}\left[\left[xy\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}+y^2\,\mathrm{Arctg}\frac{x}{y}\right]_{Pj-b}^{Pj}(y)\right]_{Ej-a}^{Ej}(x)$$

En ce qui concerne les termes extra diagonaux de [m], les calculs sont beaucoup plus compliqués et nous conseillons de conserver une approche filiforme pour l'expression de la mutuelle entre les deux boucles formées.
Nous avons distingué trois cas de figures pour la position géométrique des boucles, l'une par rapport à l'autre. Ceci est résumé ci-après.

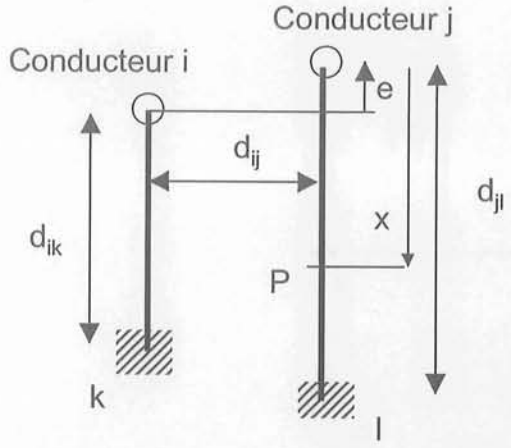


Dans tous les cas de figures, on suppose que la boucle alimentée est celle contenant le conducteur i et on recherche le flux capté par la boucle contenant le conducteur j.
Dans un premier temps il faut exprimer le champ magnétique B à la surface de la boucle contenant le conducteur j. Seule la composante normale à cette surface participe au flux.

Cas A

L'expression de la composante normale de B au point P est dans ce cas :

$$B(P) = \frac{\mu i}{2\pi}\left[\frac{e+x}{(e+x)^2 + d_{ij}^2} + \frac{d_{ik} - (e+x)}{(d_{ik} - (e+x))^2 + d_{ij}^2}\right]$$



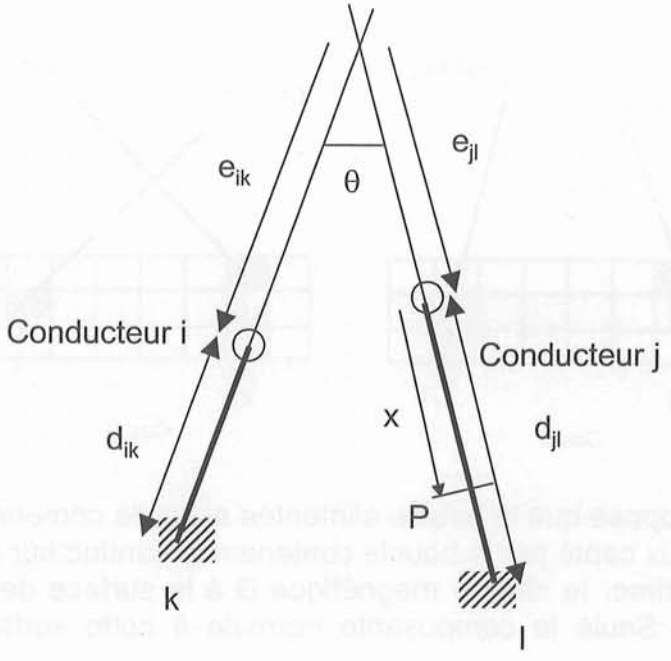
Remarque :
- Ici e est négatif.
- Cette expression est générale quelle que soit la position des deux boucles, à condition qu'elles soient parallèles.

Il faut ensuite calculer le flux Φ à travers la surface de longueur unitaire quand x varie de 0 à d_{jk}.
Et de la relation $\Phi = Mi$, on en déduit l'expression de la mutuelle inductance en H/m :

$$M = \frac{\mu}{4\pi}\left[\ln\frac{(e+d_{jl})^2 + d_{ij}^2}{e^2 + d_{ij}^2} + \ln\frac{(e-d_{ik})^2 + d_{ij}^2}{(e-d_{ik}+d_{jl})^2 + d_{ij}^2}\right]$$

<u>Cas B</u>
L'expression de la composante normale de B au point P est dans ce cas :

$$B(P) = \frac{\mu i}{2\pi}\left[\frac{(e_{ik}+d_{ik})\cos\theta - (e_{jl}+x)}{(e_{ik}+d_{ik})^2 + (e_{jl}+x)^2 - 2(e_{ik}+d_{ik})(e_{jl}+x)\cos\theta} + \frac{e_{ik}\cos\theta - (e_{jl}+x)}{e_{ik}^2 + (e_{jl}+x)^2 - 2e_{ik}(e_{jl}+x)\cos\theta}\right]$$



Remarque : Ici e_{jl} et e_{ik} sont positives.

Le flux est alors :

$$\Phi = \frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln\frac{e_{ik}^{\,2} + x^2 - 2e_{ik}x\cos\theta}{(e_{ik}+d_{ik})^2 + x^2 - 2(e_{ik}+d_{ik})x\cos\theta}\right]_{e_{jl}}^{e_{jl}+d_{jl}} \quad (x)$$

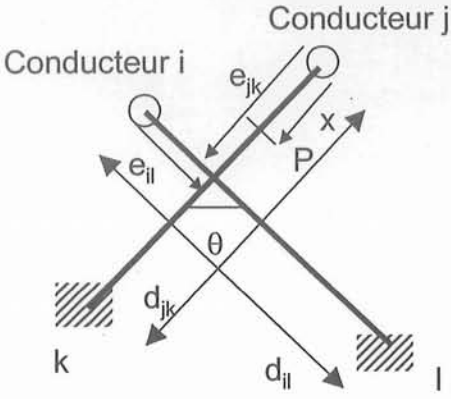
On en déduit alors la mutuelle inductance en H/m entre les deux boucles :

$$M = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{e_{ik}^{\,2} + x^2 - 2e_{ik}x\cos\theta}{(e_{ik}+d_{ik})^2 + x^2 - 2(e_{ik}+d_{ik})x\cos\theta}\right]_{e_{jl}}^{e_{jl}+d_{jl}} \quad (x)$$

Cas C

L'expression de la composante normale de B au point P est dans ce cas :

$$B(P) = \frac{\mu i}{2\pi}\left[\frac{(e_{jk}-x) - e_{il}\cos\theta}{e_{il}^{\,2} + (e_{jk}-x)^2 - 2e_{il}(e_{jk}-x)\cos\theta} - \frac{(e_{jk}-x) - (d_{il}-e_{il})\cos\theta}{(d_{il}-e_{il})^2 + (e_{jk}-x)^2 - 2(d_{il}-e_{il})(e_{jk}-x)\cos\theta}\right]$$



Remarque : Ici e_{jk} et e_{il} sont positives.

Le flux est alors :

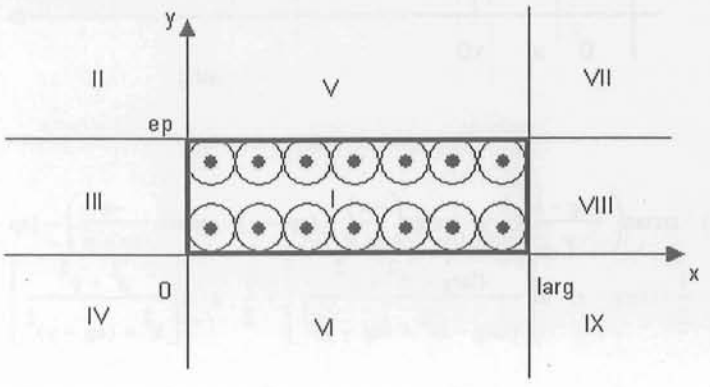
$$\Phi = \frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln\frac{e_{il}^{\,2} + x^2 - 2e_{il}x\cos\theta}{(d_{il}-e_{il})^2 + x^2 - 2(d_{il}-e_{il})x\cos\theta}\right]_{e_{jk}-d_{jk}}^{e_{jk}} \quad (x)$$

On en déduit alors la mutuelle inductance en H/m entre les deux boucles :

$$M = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{e_{il}^{\,2} + x^2 - 2e_{il}x\cos\theta}{(d_{il}-e_{il})^2 + x^2 - 2(d_{il}-e_{il})x\cos\theta}\right]_{e_{jk}-d_{jk}}^{e_{jk}} \quad (x)$$

Annexe D : Expression de l'induction en tout point de l'espace

On considère un conducteur de section rectangulaire (larg*ep).
Nous recherchons l'expression de l'induction créée en tout point M(x0,y0) de l'espace par un courant circulant dans le conducteur.
On suppose que la densité de courant est uniforme dans la section du conducteur.
Le calcul se fait par intégration successive en partant d'un conducteur filiforme parcouru par le courant total et en allant jusqu'au conducteur volumique.
On définit alors 9 zones de calculs comme présenté sur la figure suivante qui se limitent à 4 zones vues les symétries géométriques présentes (I, II, III et V).



Lorsque le point de calcul se trouve en dehors du conducteur, l'intégration est immédiate et ne pose pas de problème. Il suffit de faire la somme vectorielle des contributions élémentaires, ce que nous avons fait en décomposant le vecteur selon ses coordonnées dans le repère (xOy). On obtient alors :

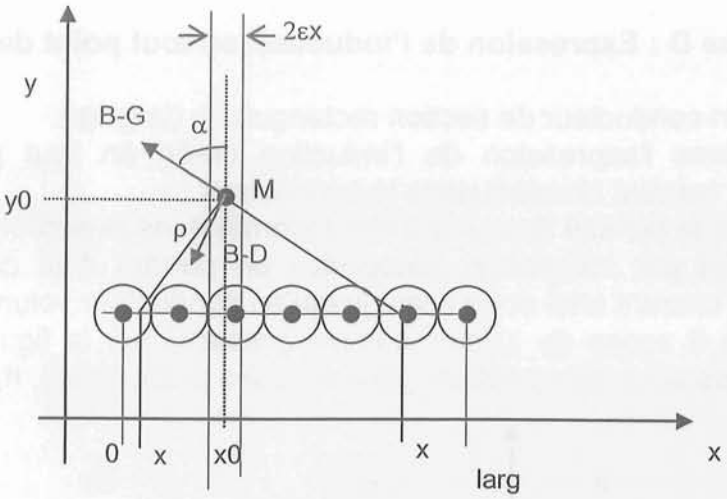
$$B2_x(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} y \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{y}\right) - y \cdot \arctan\left(\frac{-x}{y}\right) + \frac{1}{2} \cdot (larg - x) \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + y^2}{(larg - x)^2 + (y - ep)^2}\right] \ldots \\ + (ep - y) \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{y - ep}\right) - (ep - y) \cdot \arctan\left(\frac{-x}{y - ep}\right) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + (y - ep)^2}\right] \end{array} \right]$$

$$B2_y(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} (ep - y) \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + (ep - y)^2}{x^2 + (ep - y)^2}\right] + 2 \cdot x \cdot \arctan\left(\frac{y - ep}{x}\right) - 2 \cdot (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{y - ep}{larg - x}\right) \ldots \\ + (-y) \cdot \ln\left[\frac{x^2 + y^2}{(larg - x)^2 + y^2}\right] - 2 \cdot x \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2 \cdot (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{y}{larg - x}\right) \end{array} \right]$$

Et pour les zones IV, VII et IX on a :

Zone IV	Zone VII	Zone IX
B4_x(x,y) = - B2_x(x,ep-y)	B7_x(x,y) = B2_x(larg-x,y)	B9_x(x,y) = - B2_x(larg-x,ep-y)
B4_y(x,y) = B2_y(x,ep-y)	B7_y(x,y) = - B2_y(larg-x,y)	B9_y(x,y) = - B2_y(larg-x,ep-y)

Lorsque le point se trouve dans la zone III ou dans la zone V, on va effectuer le même genre de calcul mais en éliminant soit une bande de largeur $2\varepsilon x$ (zone V) soit de largeur $2\varepsilon y$ (zone III) comme le montre la figure suivante. Les conducteurs élémentaires utilisés pour la sommation ne se trouvent alors pas du même côté du point de calcul M.



On obtient :

$$B3_x(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} y \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{y}\right) - y \cdot \arctan\left(\frac{-x}{y}\right) + (ep - y) \cdot \arctan\left(\frac{-x}{ep - y}\right) - (ep - y) \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{ep - y}\right) \ldots \\ + \frac{1}{2} \cdot (larg - x) \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + y^2}{(larg - x)^2 + (ep - y)^2}\right] + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + (ep - y)^2}\right] \end{array} \right]$$

$$B3_y(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot y \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right] + \frac{1}{2} \cdot (ep - y) \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + (ep - y)^2}{x^2 + (ep - y)^2}\right] \ldots \\ + (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{y}{larg - x}\right) - x \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \ldots \\ + (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{ep - y}{larg - x}\right) - x \cdot \arctan\left(\frac{ep - y}{x}\right) \ldots \\ + (-\varepsilon y) \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + \varepsilon y^2}{x^2 + \varepsilon y^2}\right] + 2 \cdot x \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon y}{x}\right) - 2 \cdot (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon y}{larg - x}\right) \end{array} \right]$$

Et on a : B8_x(x,y) = - B3_x(larg-x,ep-y)
B8_y(x,y) = - B3_y(larg-x,ep-y)

De même :

$$B5_x(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} y \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{y}\right) - (y - ep) \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{y - ep}\right) + \frac{1}{2} \cdot (larg - x) \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + y^2}{(larg - x)^2 + (y - ep)^2}\right] \ldots \\ + y \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - (y - ep) \cdot \arctan\left(\frac{x}{y - ep}\right) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + (y - ep)^2}\right] \ldots \\ + (-2 \cdot y) \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon x}{y}\right) + 2 \cdot (y - ep) \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon x}{y - ep}\right) - \varepsilon x \cdot \ln\left[\frac{\varepsilon x^2 + y^2}{\varepsilon x^2 + (y - ep)^2}\right] \end{array} \right]$$

$$B5_y(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} x \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{y}{larg - x}\right) - x \cdot \arctan\left(\frac{y - ep}{x}\right) + (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{y - ep}{larg - x}\right) \ldots \\ + y \cdot \ln\left[\frac{x^2 + y^2}{(larg - x)^2 + y^2}\right] - (y - ep) \cdot \ln\left[\frac{x^2 + (y - ep)^2}{(larg - x)^2 + (y - ep)^2}\right] \end{array} \right]$$

Et on a : B6_x(x,y) = - B5_x(larg-x,ep-y)

B6_y(x,y) = - B5_y(larg-x,ep-y)

Dans la zone I, les expressions trouvées sont les suivantes :

$$B1_x(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} y \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{y}\right) - (ep - y) \cdot \arctan\left(\frac{larg - x}{ep - y}\right) + \frac{1}{2} \cdot (larg - x) \cdot \ln\left[\frac{(larg - x)^2 + (ep - y)^2}{(larg - x)^2 + \varepsilon y^2}\right] \ldots \\ + y \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - (ep - y) \cdot \arctan\left(\frac{x}{ep - y}\right) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + (ep - y)^2}\right] \ldots \\ + (-2 \cdot y) \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon x}{y}\right) + 2 \cdot (ep - y) \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon x}{ep - y}\right) - \varepsilon x \cdot \ln\left[\frac{\varepsilon x^2 + y^2}{\varepsilon x^2 + (ep - y)^2}\right] \end{array} \right]$$

$$B1_y(x,y) := \frac{\mu 0 \cdot Js}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot y \cdot \ln\left[\frac{x^2 + y^2}{(larg - x)^2 + y^2}\right] + \frac{1}{2} \cdot (ep - y) \cdot \ln\left[\frac{x^2 + (ep - y)^2}{(larg - x)^2 + (ep - y)^2}\right] \ldots \\ + x \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{y}{larg - x}\right) + x \cdot \arctan\left(\frac{ep - y}{x}\right) - (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{ep - y}{larg - x}\right) \ldots \\ + (-\varepsilon y) \cdot \ln\left[\frac{x^2 + \varepsilon y^2}{(larg - x)^2 + \varepsilon y^2}\right] - 2 \cdot x \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon y}{x}\right) + 2 \cdot (larg - x) \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon y}{larg - x}\right) \end{array} \right]$$

Cette expression nous donne bien entendu un champ nul au centre du conducteur.

Le tracé de l'induction dans une coupe droite du conducteur nous donne le résultat suivant :

