



HAL
open science

Etude de scénarios d'altimétrie satellitaire pour le contrôle de la circulation océanique dans l'océan Atlantique tropical par assimilation de données

Clément Ubelmann

► To cite this version:

Clément Ubelmann. Etude de scénarios d'altimétrie satellitaire pour le contrôle de la circulation océanique dans l'océan Atlantique tropical par assimilation de données. Océan, Atmosphère. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT: . tel-00408763

HAL Id: tel-00408763

<https://theses.hal.science/tel-00408763>

Submitted on 3 Aug 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Clément UBELMANN

pour obtenir le titre de DOCTEUR
de l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Discipline : **Sciences de la Terre et de l'Univers**

Etude de scénarios d'altimétrie satellitaire pour le contrôle de la circulation océanique dans l'océan Atlantique tropical par assimilation de données

Soutenue le 23 janvier 2009

Composition du jury :

M. Eric BLAYO	Président du jury
M. Yves GOURIOU	Rapporteur
M. Gérard DESROZIERS	Rapporteur
M. Eric THOUVENOT	Examineur
M. Frédéric MARIN	Examineur
M. Jacques VERRON	Directeur de thèse
M. Pierre BRASSEUR	Codirecteur de thèse

Thèse préparée au sein du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels

Remerciements

Merci à toute l'équipe MEOM pour cet accueil dans des conditions idéales avec une ambiance vraiment sympathique.

Plus particulièrement je voudrais remercier Jacques Verron, mon directeur de thèse, pour toute son aide et son soutien, et surtout pour avoir apporté sans cesse des idées nouvelles et originales. Evidemment merci à Jean-Michel Brankart pour les aspects techniques en assimilation, son aide indispensable, son regard critique très utile. Je pense aussi à Jean-Marc Molines pour les discussions très intéressantes sur la modélisation et surtout sans qui la configuration du modèle aurait été beaucoup plus compliquée à réaliser. Je remercie Pierre Brasseur pour ses relectures et bons conseils, Bernard Barnier pour son enthousiasme et ses réponses passionnées à toutes questions d'océanographie, et bien sûr Emmanuel, Julien, Thierry, Achim. Un grand merci à Josiane pour les démarches administratives et surtout pour sa gentillesse.

L'équipe MEOM, c'est aussi les autres thésards et postdocs du rez de chaussée. Les gâteaux d'Angélique, les animations proposées par Albanne (chamboule-tout...) ont beaucoup contribué à une ambiance conviviale. Merci à Laurent pour les pauses de midi aux plages de la Taillat pendant les épisodes caniculaires... Je remercie également Pierre pour les discussions fromagères du bureau, les anciens Fred et Grégoire, sans oublier Aurélie, et enfin Nicolas, Carolina, Marion (les petits nouveaux) qui sont bien partis pour maintenir cette bonne ambiance! Et je n'oublie pas non plus nos sympathiques voisins de la repro sans lesquels ce manuscrit ne serait pas là!

Je remercie aussi Bernard Bourlès et Yves Gouriou pour une superbe campagne en mer dans le Golfe de Guinée.

Et bien sûr j'adresse mes remerciements aux membres jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Enfin, merci à tout mon entourage, particulièrement à Ben, Manu, Pierre, toujours motivés pour une sortie ski de rando en semaine, Laurène, Greg, Seb et d'autres pour les sorties grimpe, merci à ma famille, à Laure pour m'avoir soutenu pendant ces trois années ...

Table des matières

Introduction	1
I Observations et modélisation	9
1 Altimétrie et autres observations de l’océan	11
1.1 L’altimétrie	11
1.1.1 La mesure altimétrique	11
1.1.2 Principes de mesure	13
1.1.3 Corrections et précision	14
1.2 Orbites et trajectoires	16
1.2.1 Les paramètres de base	16
1.2.2 Equations de la trajectoire	16
1.2.3 La résolution spatio-temporelle : cycle et sous-cycles	18
1.3 Les missions altimétriques passées, présentes et futures	24
1.3.1 Topex/Poseidon, JASON-1, JASON-2	24
1.3.2 Geosat et GFO	24
1.3.3 ERS et ENVISAT	25
1.3.4 Missions futures avec altimètres au nadir : SARAL, SENTINEL-3, CRYO-SAT, JASON-3, HY-2	26
1.3.5 La future mission SWOT	26
1.4 Les autres observations	27
1.4.1 Les autres mesures satellitaires	27
1.4.2 Les mesures in situ	28
2 Le modèle et la configuration régionale de l’Atlantique tropical	31
2.1 Les équations et conditions limites de la circulation océanique	31
2.1.1 Les équations primitives	31
2.1.2 Les conditions limites	32
2.1.3 La hauteur de la mer SSH	34
2.2 Le traitement des équations dans un milieu discret	34
2.2.1 La grille	34
2.2.2 Discrétisation spatiale et temporelle des équations	35
2.2.3 Paramétrisation des effets “sous-maille”	35
2.3 Construction de la configuration régionale TATL4	35
2.3.1 Caractéristiques de discrétisation	35
2.3.2 Les forçages utilisés	36
2.3.3 Les frontières latérales	36
2.3.4 Validation	37
2.3.5 La simulation REF	39

3	La dynamique de l'Atlantique tropical : modélisation et enjeux	41
3.1	Présentation de la dynamique et de sa modélisation dans TATL4	41
3.1.1	Localisation des deux régions d'étude	41
3.1.2	Les principaux courants de l'Atlantique tropical	42
3.1.3	Dynamique dans la région TIW	42
3.1.4	Dynamique dans la région NBC	45
3.2	La sensibilité de la dynamique dans les deux régions d'étude	47
3.2.1	Présentation des simulations	47
3.2.2	Sensibilité à la condition initiale	48
3.2.3	La sensibilité aux forçages extérieurs	52
3.3	Enjeux	53
3.3.1	Dans la région TIW	53
3.3.2	Dans la région NBC	54
II	Construction des OSSE et mise en place de l'assimilation	57
4	Les observations simulées	59
4.1	Observations altimétriques	59
4.1.1	Calcul d'orbites	59
4.1.2	L'extraction des observations	60
4.1.3	Simulation des erreurs	61
4.1.4	Les jeux d'observations altimétriques simulés	64
4.2	Les observations complémentaires	65
4.2.1	Autres observations de surface : SST et SSS	66
4.2.2	Observations in situ de température et salinité	66
5	La méthode d'assimilation	67
5.1	Un bref aperçu des méthodes d'assimilation	67
5.1.1	Le nudging	67
5.1.2	Les méthodes variationnelles	68
5.1.3	Les méthodes statistiques séquentielles	68
5.2	La théorie du filtre SEEK	68
5.2.1	Le filtre de Kalman	68
5.2.2	La réduction d'ordre	70
5.2.3	L'algorithme SEEK et ses variantes	70
5.3	Quelques aspects techniques pour l'utilisation du SEEK	73
5.3.1	Vecteur d'observations et vecteur d'état	74
5.3.2	La matrice \mathbf{S}^f de rang réduit	74
5.3.3	La durée du cycle	74
5.3.4	La matrice \mathbf{R}	74
5.4	Conclusion	75
6	Expériences jumelles et mise au point de l'assimilation dans la région TIW	77
6.1	Erreurs simulées dans les expériences jumelles	77
6.1.1	Des méthodes pour perturber le vent	77
6.1.2	La simulation libre	79
6.2	Calcul des covariances d'erreur de prévision	80
6.2.1	Analyse théorique des erreurs de prévision	80
6.2.2	Méthode d'estimation de la matrice de covariance d'erreur de prévision	80

6.2.3	Structures des erreurs et zones de présence	81
6.3	Réglage des principaux paramètres de l'assimilation	82
6.4	Conclusion	84
7	Expériences jumelles et mise au point de l'assimilation dans la région NBC	85
7.1	Erreurs simulées dans les expériences jumelles	85
7.1.1	Perturbation de la condition initiale	85
7.1.2	La simulation libre	85
7.2	Calcul des covariances d'erreur de prévision	86
7.2.1	Analyse théorique des erreurs de prévision	86
7.2.2	Méthode d'estimation de la matrice de covariance d'erreur de prévision	87
7.2.3	Les zones d'apparition des erreurs	87
7.3	Réglage des principaux paramètres de l'assimilation	88
7.3.1	Réglages des paramètres du SEEK à partir d'un ensemble d'analyses	89
7.3.2	Opérations sur l'incrément de correction	91
7.4	Conclusions	92
III	Evaluation des systèmes d'observations	93
8	Etude de scénarios dans la région TIW	95
8.1	Diagnostics adaptés à la zone	95
8.1.1	Différents niveaux de contrôle	95
8.1.2	Définition des scores de correction	96
8.2	Besoins en observations complémentaires	96
8.2.1	Un premier aperçu d'après la variabilité	96
8.2.2	Evaluation des besoins d'après des expériences d'assimilation	97
8.3	Etude des scénarios d'observation altimétriques	98
8.3.1	Etude de scénarios mono-satellitaire	99
8.3.2	Etude de scénarios multi-satellites et large fauchée	101
8.3.3	Conclusion	105
8.4	Discussion des résultats	105
8.4.1	Le cas de l'orbite 3	105
8.4.2	Interprétation des résultats par un critère de flux d'observations	106
8.5	Discussions et conclusions	110
9	Etude de scénarios dans la région NBC	113
9.1	Diagnostics adaptés à la dynamique des anneaux	113
9.2	Evaluation des besoins en observations complémentaires	114
9.2.1	Un lien complexe entre la structure des anneaux et la SSH	114
9.2.2	Les expériences	115
9.3	Scénarios d'observations altimétriques	118
9.3.1	Etude de scénarios mono-satellites	119
9.3.2	Etude de scénarios multi-satellites et à large fauchée	120
9.4	Discussion des résultats	121
9.4.1	Les spécificités des résultats dans cette région	122
9.4.2	Interprétation des résultats par le critère de flux d'observations	123

Conclusions et perspectives	127
Annexes	135
A Une méthode simple pour estimer le bénéfice d'un flux de données satellites	137
A.1 Illustration du problème dans un espace à deux dimensions	137
A.2 Le score	138
A.2.1 Calcul du score	138
A.2.2 Etude du score en fonction de la latitude	139
A.3 Adaptation de la méthode pour les phénomènes propagatifs	139
A.3.1 Illustration dans l'espace à deux dimensions	140
A.3.2 Calcul du score	141
A.3.3 Etude du score en fonction de la latitude	141
B Mise en application d'une paramétrisation efficace des erreurs d'observations et perspectives	143
B.1 Principe de base de la paramétrisation de la matrice \mathbf{R}	143
B.2 Mise en œuvre pour l'assimilation de données satellites	143
B.2.1 Formulation de la matrice \mathbf{R} pour des observations le long des traces d'un satellite au nadir	144
B.2.2 Premiers résultats	145
B.2.3 Perspectives pour l'altimétrie à large fauchée	145
C Impact of data from upcoming altimetric missions on the control of the three dimensional circulation in the tropical Atlantic Ocean	147
C.1 Present and future altimetric missions	148
C.2 Modelling of the tropical Atlantic ocean	149
C.2.1 Model	149
C.2.2 Dynamic features and assimilation issues	150
C.3 The assimilation system	151
C.4 OSSE	152
C.4.1 Synthetic observation datasets	152
C.4.2 Construction of the twin experiments	154
C.5 Results and discussion	155
C.5.1 Diagnostics	155
C.5.2 Scenario assessment in the TIW region : TIW-EXP	155
C.5.3 Scenario assessment in the NBC region : NBC-EXP	157
D Efficient parameterization of the observation error covariance matrix for square root or ensemble Kalman filters : application to ocean altimetry	163
D.1 Parameterization of the observation error covariance matrix	165
D.1.1 Observational update in square root or ensemble Kalman filters	165
D.1.2 Observational update of the error covariance in square root or ensemble Kalman filters	167
D.1.3 Modal parameterization of the observation error covariance matrix	168
D.1.4 Simulating correlations by linear transformation of the observation vector	169
D.2 Simulating correlations by adding gradient observations	171
D.2.1 One-dimensional problem	171
D.2.2 Two-dimensional problem	174

D.2.3	Higher order derivatives	175
D.3	Application to altimetry in the North Brazil current	178
D.3.1	Description of the experiment	178
D.3.2	Uncorrelated errors	181
D.3.3	Correlated errors, with diagonal \mathbf{R} parameterization	183
D.3.4	Correlated errors, with consistent \mathbf{R} parameterization	184
D.3.5	Sensitivity to the correlation scale	185

Bibliographie

Introduction

Les études climatiques et le développement de l'océanographie opérationnelle sont deux grands enjeux qui motivent aujourd'hui les recherches en océanographie physique. L'océanographie opérationnelle répond à une demande sociétale forte de connaissance et de prévision des circulations océaniques (vitesse des courants, température, salinité...) utiles pour les activités en mer (la pêche et la navigation entre autres) et pour le perfectionnement de la météorologie, particulièrement des prévisions à long terme. Des programmes internationaux d'océanographie opérationnelle sont en place, comme GODAE, Global Ocean Data Assimilation Experiment, et son successeur GODAE Ocean View. A l'échelle nationale MERCATOR réalise depuis 2001 des prévisions régulières pour l'ensemble des océans.

De même qu'en météorologie, les avancées en océanographie ont été réalisées par le développement conjoint de deux grands outils maintenant indissociables : l'observation et la modélisation. La modélisation a connu ces dernières années une avancée fulgurante grâce à la puissance des nouveaux moyens de calcul numérique. Parallèlement, les techniques d'observations ont beaucoup évolué, et l'utilisation des satellites a été une véritable révolution en terme de quantité d'observations de surface. Ces deux outils apportent des informations complémentaires, le premier une description globale et continue de l'océan mais toutefois inexacte ou imprécise, et le second une vision incomplète surtout en profondeur, mais véridique de l'océan (aux erreurs instrumentales près). Ces informations peuvent être combinées grâce à l'assimilation de données, dont le principe est de contraindre optimalement un modèle numérique vers les observations avec des techniques diverses. L'assimilation de données est l'un des moyens les plus perfectionnés et les plus performants pour estimer l'état de l'océan et pour initialiser des prévisions. Ainsi, les systèmes d'observation sont un point fondamental qu'il devient indispensable de pérenniser et d'améliorer. Mais, ces derniers sont très coûteux et la question de leur optimisation est sans cesse posée.

L'objectif de cette thèse est d'explorer les bénéfices des mesures altimétriques, c'est-à-dire des mesures de la topographie de la surface océanique par satellites, sur le contrôle des circulations océaniques dans l'Atlantique tropical par assimilation de données. Au delà d'une réponse d'ordre technique sur les besoins en missions altimétriques (nombre de satellites, orbites favorables), ce travail vise à mieux comprendre les relations entre l'échantillonnage des observations et le contrôle de la dynamique. Avant d'expliquer plus en détail la démarche, il est important de justifier deux points : pourquoi l'étude des données altimétriques et pourquoi une restriction à la région de l'Atlantique tropical.

Parmi les variables océaniques observées, la topographie de surface donne une information très riche sur la circulation et sur l'état de l'océan intégré verticalement. Cette variable, ponctuellement mesurée près des côtes depuis plusieurs siècles par des marégraphes, est depuis plus d'une vingtaine d'années mesurée sur l'ensemble des océans grâce aux satellites altimétriques dont le fonctionnement est expliqué dans le chapitre 1. Dès les années 1980, le satellite SeaSat a permis l'observation de structures tourbillonnaires comme l'a montré *Ménard* (1983). Aujourd'hui, la précision des mesures devient centimétrique, et plusieurs satellites altimétriques sont en fonctionnement. La figure 1 montre à titre d'illustration la topographie de surface mesurée le 19 octobre 2008 avec l'ensemble des satellites disponibles. Les bénéfices de l'assimilation de ces données altimétriques ont été démontrés dans de nombreuses études ; parmi les premières, nous pouvons citer *Verron et Holland* (1989) avec un modèle de circulation océanique aux moyennes latitudes ou *Bouglès et al.* (1992) dans la région tropicale. La répartition spatio-temporelle des observations altimétriques est très dépendante des orbites et du nombre de satellites, car la mesure est locale par rapport à la position de l'altimètre qui se situe à une altitude relativement basse (800-1500 km) par rapport aux autres satellites. Le choix des paramètres orbitaux des satellites altimétriques est donc un point fondamental. De plus, les satellites altimétriques ont une durée de vie limitée dans le temps, typiquement de quelques années jusqu'à 15 ans pour la mission Topex/Poséidon qui fut un succès remarquable de longévité et de précision. De nouveaux

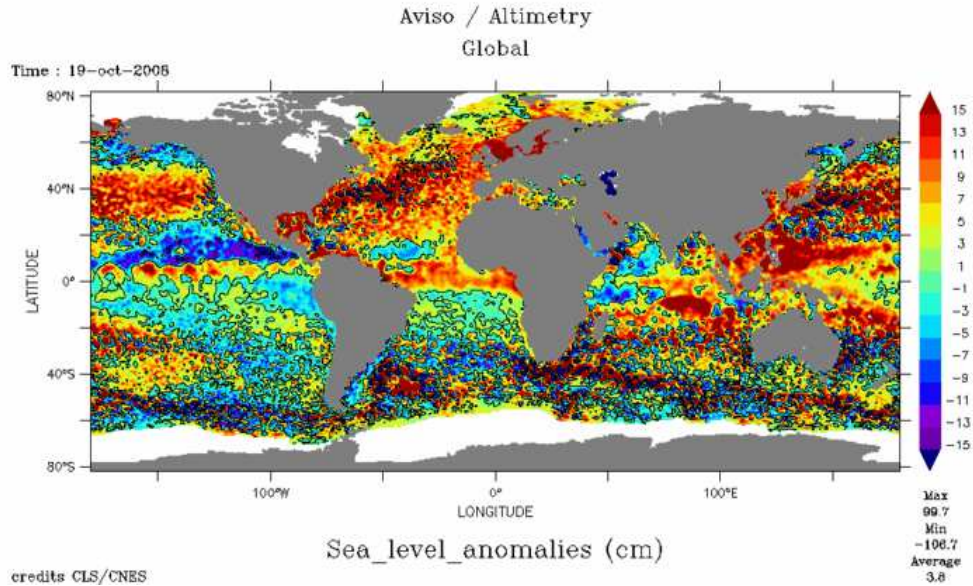


FIG. 1 – Champ d’anomalie de hauteur de mer estimé le 19 octobre 2008, à partir des observations des satellites altimétriques JASON-1, JASON-2, ENVISAT, GFO, ERS-1&2.

satellites sont prévus pour remplacer et compléter les satellites actuels, financés par différents organismes et agences spatiales. En 2010, le satellite SARAL devrait être lancé avec un altimètre fonctionnant en bande Ka permettant une meilleure résolution des mesures proches des côtes ainsi qu’une très bonne précision. Dans quelques années, un nouveau principe d’altimétrie permettra d’effectuer des mesures sur une fauchée d’environ 150–200 km de large le long de la trajectoire du satellite grâce à la mission SWOT (Surface Water and Ocean Topography). Ces futures missions altimétriques offrent un intérêt supplémentaire à notre travail, et la participation du CNES au financement de cette thèse a d’ailleurs pour principale motivation une étude des paramètres orbitaux favorables, de l’influence du nombre de satellites et du type d’altimètre.

Plusieurs études d’impact des scénarios altimétriques ont déjà été réalisées depuis la mise en orbite des premiers satellites. D’abord pour le contrôle d’une circulation turbulente de type Gulf Stream, *Verron (1990)* a montré l’efficacité d’un satellite avec une orbite de répétitivité entre 10 et 17 jours. Dans le cas d’un système à deux satellites, *Verron et al. (1996)* ont montré l’importance de privilégier un décalage temporel plutôt que d’optimiser la couverture spatiale. Plus récemment, des études d’impact ont été réalisées dans une perspective multi-satellites pour contrôler des circulations méso-échelles (*Debost, 2004*) ou des circulations régionales et côtières comme dans *Mourre et al. (2006)* avec un modèle barotrope haute résolution de la mer du Nord. En plus de montrer les performances d’un système multi-satellite, ces études ont soulevé entre autres l’intérêt de privilégier l’échantillonnage temporel lorsque plusieurs satellites sont sur des orbites similaires.

Le choix de réaliser l’étude dans l’Atlantique tropical, qui possède une dynamique bien particulière et typique, a plusieurs motivations. Premièrement, l’impact des scénarios a été peu étudié dans les régions tropicales où les échelles caractéristiques spatiales et temporelles des circulations sont bien différentes de celles des moyennes latitudes. Ensuite, plusieurs études dans les systèmes opérationnels ont révélé des difficultés spécifiques pour l’assimilation dans cette région. Pourtant, le contrôle des circulations dans ce bassin par l’assimilation de données constitue un grand défi pour l’océanographie. Une large part du travail sera donc consacrée à la mise au point d’une méthode d’assimilation performante pour l’atlantique tropical.

L’impact des systèmes d’observations sur l’assimilation de données sera évalué à travers

un dispositif d'OSSE (Observing-Systems Simulation Experiments), utilisant une configuration modèle régionale de l'Atlantique tropical que nous mettrons en place à partir de la composante OPA du code NEMO (*Barnier et al.*, 2008). Les OSSE constituent une approche classique pour évaluer a priori l'impact de systèmes d'observations encore inexistantes, elles ont été utilisées depuis les années 1960 en météorologie (*Arnold et Dey*, 1986) et plus récemment en océanographie (*Verron*, 1990). Dans cette thèse, les OSSE seront basées sur des expériences jumelles, dont le principe consiste à utiliser deux simulations issues du modèle, l'une est considérée comme la réalité (océan de référence) et l'autre comme l'océan modélisé. Des observations virtuelles seront extraites de la simulation de référence tel un système d'observations dans la réalité, puis assimilées dans l'océan modélisé afin d'évaluer la convergence de ce dernier vers la référence. La différence entre l'océan de référence et l'océan modélisé constitue l'erreur simulée par l'OSSE, qui doit (idéalement) être similaire à l'erreur entre un modèle et la réalité. Une étude détaillée de la sensibilité de la dynamique face aux incertitudes du modèle (conditions initiales, forçages, paramétrisations...) permettra de simuler une erreur aussi réaliste que possible, malgré certaines limitations propres aux expériences jumelles. Un système complet d'observations sera simulé, en extrayant la hauteur de mer le long de traces virtuelles de différents satellites. Ce système comportera en plus de l'altimétrie des données in situ et de température de surface car ces observations complémentaires sont aussi très utiles; le dispositif d'assimilation ainsi simulé sera dans une certaine mesure analogue aux systèmes opérationnels.

A travers une présentation des deux grands outils de l'océanographie qui sont l'observation et la modélisation, nous dégagerons dans une **première partie** certains défis à réaliser par l'assimilation de données dans l'Atlantique tropical. Ces défis concernent essentiellement la correction des ondes tropicales d'instabilités (TIW) et des tourbillons du courant du Brésil, qui sont tous deux des éléments marquants de la dynamique de l'Atlantique tropical (aussi présents de façon similaire dans d'autres régions tropicales) que les modèles seuls ont parfois du mal à bien contrôler. Le premier chapitre présentera les systèmes d'observations de l'océan, en insistant particulièrement sur le problème des orbites des satellites altimétriques. Le deuxième chapitre expliquera la mise en place de la configuration modèle régional de l'Atlantique tropical qui servira de base pour réaliser l'étude. Enfin, le chapitre 3 définira précisément les enjeux de correction à partir d'une étude de la dynamique.

La **seconde partie** concerne la construction des OSSE avec les expériences jumelles. Après l'élaboration des observations simulées à partir de l'océan de référence (chapitre 4), nous parlerons de la méthode d'assimilation utilisée (chapitre 5). Puis les deux chapitres suivants seront consacrés à la mise en place des expériences jumelles et aux réglages et perfectionnements de l'assimilation, qui sont différents selon les deux régions d'étude considérées.

En **troisième partie**, les résultats sur l'impact des scénarios d'observation seront détaillés dans les chapitres 8 et 9, en étudiant parallèlement le besoin en observations complémentaires. Nous tenterons d'interpréter les résultats sur l'impact des systèmes d'observations altimétriques en rapport avec les paramètres orbitaux tels que les sous-cycles, la position de leurs lignes de noeud, l'inclinaison des traces... Nous verrons qu'il existe un lien fort entre les caractéristiques de la dynamique que l'on cherche à corriger et les paramètres orbitaux favorables. L'étude sera aussi réalisée dans une perspective multi-satellitaires, et d'investigation des nouvelles techniques d'altimétrie large fauchée.

Première partie

Observations et modélisation

Chapitre 1

Altimétrie et autres observations de l’océan

Introduction

Si l’observation des océans est très ancienne, l’existence de réseaux denses permettant d’observer la variabilité de la circulation et permettant le développement de l’océanographie opérationnelle est beaucoup plus récente. Depuis une cinquantaine d’années, les mesures in situ sont nombreuses et régulières, et ont été encore densifiées avec le déploiement du réseau ARGO ces dernières années, et depuis une vingtaine d’années les observations satellitaires apportent une vision quasiment synoptique de la surface océanique.

Ce chapitre présente brièvement les réseaux d’observations de l’océan, et s’attarde plus longuement sur l’altimétrie, en soulignant l’enjeu que constitue le choix des orbites pour l’échantillonnage des mesures, si important pour la reconstruction des circulations océaniques via l’assimilation.

1.1 L’altimétrie

Les premières mesures altimétriques satellitaires de l’océan ont été réalisées à partir de 1973 depuis la station Skylab équipée entre autres d’un altimètre. En 1974, le lancement de la mission GEOS-3 apporte des améliorations sur la couverture des océans et sur la précision de la mesure. Néanmoins, le bruit de mesure étant encore de l’ordre de 25 cm, l’intérêt océanographique était limité. A partir de 1978, le satellite SEASAT marque le début de l’altimétrie satellitaire avec des mesures d’une précision relative de 5 cm, mais l’erreur sur l’évolution de la position de l’orbite étant importante, les mesures n’étaient utilisables que pour des régions de forte activité tourbillonnaire comme les courants de bord ouest (*Fu*, 1983). Cette dernière mission a été de très courte durée (99 jours) à cause d’un problème de propulsion. A partir de 1985, le satellite GEOSAT a fourni la première base de données altimétriques conséquente sur une durée de trois ans. Deux catégories de satellites sont ensuite apparues : les satellites de type ERS ou ENVISAT, dédiés à l’observation de la terre et des océans, et les satellites de type TOPEX/POSEIDON, GFO et JASON, plus spécifiquement conçus pour l’observation des océans. Les missions en cours et futures seront détaillées dans la section 1.3.

1.1.1 La mesure altimétrique

Un satellite altimétrique mesure la distance qui le sépare de la surface océanique (notée R sur le schéma 1.1). Avec la connaissance de la position du satellite par rapport à une surface de référence (appelée ellipsoïde de référence, qui suit globalement la forme de la terre) on déduit la

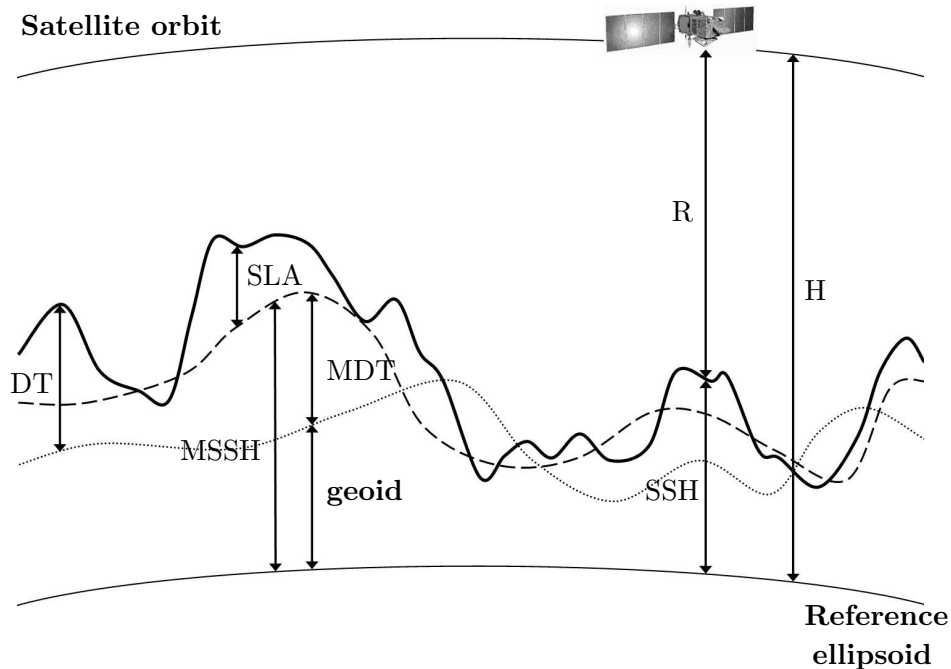


FIG. 1.1 – Principe de la mesure altimétrique. D'après Castruccio (2006).

hauteur de mer (SSH) par rapport à cette ellipsoïde. Cette section apporte quelques précisions sur ce que représente la mesure altimétrique et donne les définitions nécessaires.

La valeur de la SSH mesurée n'est pas pertinente en tant que telle pour l'océanographie car elle résulte de plusieurs effets qui ne sont pas tous liés aux variables océaniques.

D'un point de vue purement physique, la SSH peut se décomposer en deux termes :

- La hauteur (toujours par rapport à l'ellipsoïde) du géoïde, qui se définit sur toute la surface terrestre à une constante près. Elle correspond à la topographie de surface (toujours à une constante près) qu'aurait l'océan si la quantité d'eau et la température de cette eau étaient constantes, et si l'océan n'était affecté par aucune perturbation (vent, marées, courants...). Cette topographie suit une surface d'isopotential qui n'a pas exactement la forme d'une ellipsoïde parce que la répartition des masses n'est pas homogène sur toute la terre. Elle varie aussi très légèrement dans le temps à cause de redistributions globales de masses, mais cette variation sera négligée dans les problèmes de courte durée qui nous intéressent.
- La hauteur appelée topographie dynamique (DT sur le schéma), variable dans l'espace et dans le temps, qui est directement liée aux caractères de la circulation et aux variations des circulations océaniques.

Mais la connaissance du géoïde, bien que récemment améliorée grâce aux données gravimétriques GRACE (Castruccio, 2006) est plus imprécise, surtout à petite échelle, que la mesure de la distance R (de l'ordre de 2 cm). Il en résulte évidemment une imprécision pour la variable DT .

Les faibles variations temporelles du géoïde devant celles de la circulation océanique conduisent souvent à décomposer la SSH comme suit :

- La SSH moyenne sur une période de temps la plus longue possible, appelée MSSH
- L'anomalie par rapport à la MSSH, appelée SLA (Sea Level Anomaly).

L'avantage de cette décomposition est que la SLA est mesurée avec la précision des satellites altimétriques. Mais les caractères permanents de la circulation, ou d'évolution temporelle plus

longue que l'intervalle de temps sur lequel est calculé la MSSH, n'ont pas de signature sur cette variable.

1.1.2 Principes de mesure

L'observation altimétrique est effectuée par la mesure du temps de retour d'une onde électromagnétique permettant d'obtenir la distance entre le satellite et la surface océanique. L'altitude du satellite, qui doit être connue avec précision, est déterminée à l'aide d'un système tel que DORIS qui fonctionne sur le principe de l'effet Doppler avec un réseau de stations terrestres. Jusqu'à présent, la mesure n'est effectuée qu'au nadir du satellite, mais une nouvelle génération d'altimètres devrait être utilisée prochainement pour effectuer un ensemble de mesures sur une largeur de 150-200 km le long de la trajectoire du satellite.

Les altimètres au nadir

Ce sont les altimètres utilisés actuellement, dont la fréquence de l'onde électromagnétique appartient à la bande Ku ou à la bande Ka. Une impulsion est émise vers la surface océanique et la mesure du signal de retour en fonction du temps permet d'obtenir, entre autres, la distance entre le satellite et la surface océanique, notée R sur le schéma 1.1. Mais, un signal seul est généralement très bruité et est dépendant de l'état de mer (houle...) d'où la nécessité de moyenner un grand nombre d'impulsions retour pour estimer la distance R . Avec l'altimètre POSEIDON1 (sur le satellite JASON-1) par exemple, 1700 pulsations sont émises par secondes. La vitesse au sol du satellite étant proche de 6000 m/s, une pulsation est émise tous les 3-4 m au sol. La mesure devient précise en moyennant un grand nombre d'impulsions, de telle sorte que la donnée topographique atteigne une bonne précision pour des longueurs d'ondes supérieures à 40-50 km au sol. La SSH mesurée par ce type d'altimètre correspond donc à la SSH le long de la trace, peu bruitée pour les longueurs d'ondes d'au moins 40-50 km.

Les altimètres à large fauchée

La mesure altimétrique large fauchée n'a pas encore été expérimentée. Elle suivra le principe suivant schématisé sur la figure 1.2 : un signal électromagnétique est émis et réfléchi par la surface de l'océan de même que pour les satellites classiques. En revanche, la mesure de la réflexion est réalisée sur deux antennes ce qui permet, par interférométrie, de déterminer une cible particulière de mesure sur l'océan.

La base d'antenne (distance entre les deux émetteurs) est notée B . Soit r_1 et r_2 les distances de la cible aux deux antennes. Le signal monochromatique est émis durant un certain temps. A chaque déphasage ϕ mesuré sur l'onde retour entre les deux récepteurs, correspond une cible θ sur l'océan qui vérifie la relation :

$$\phi = 2\pi B \sin(\theta/\lambda) \quad (1.1)$$

où λ est la longueur d'onde du signal monochromatique. L'interférométrie permet d'obtenir un signal de retour filtré pour un déphasage Φ , donc pour une cible θ . Le temps de retour de ce signal permet d'obtenir la distance r_1 , à partir de laquelle on déduit la SSH par la relation :

$$SSH = H - r_1 \cos\theta \quad (1.2)$$

Cette opération est effectuée pour un ensemble d'angles θ .

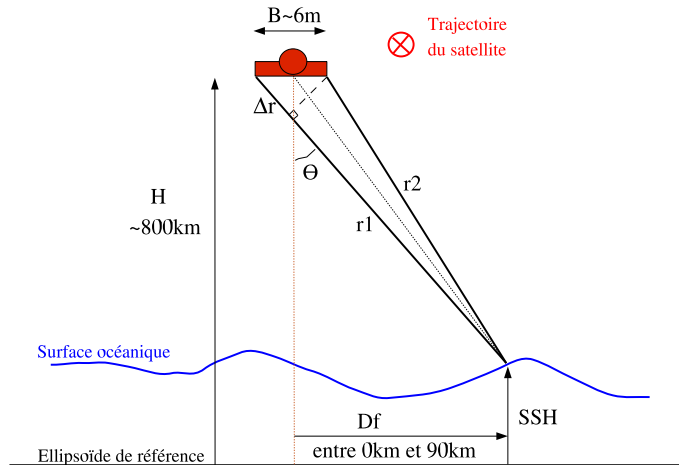


FIG. 1.2 – Principe de fonctionnement par interférométrie d'un altimètre à large fauchée

1.1.3 Corrections et précision

Les corrections du signal altimétrique

Avant toute utilisation des données altimétriques pour l'océanographie, des corrections du signal brut doivent être effectuées pour s'affranchir d'une part des perturbations dues à l'atmosphère, et d'autre part des perturbations de la surface marine par des phénomènes connus et indépendants de la circulation qui nous intéresse (marées, baromètre inverse, état de mer...) :

– Correction ionosphérique :

L'ionosphère, comprise entre 70 km et 1000 km, est composée de molécules d'air ionisées libérant des électrons libres. Ces électrons sont une source principale de dispersion des ondes radar traversant cette couche de l'atmosphère, ils perturbent donc leur vitesse de propagation. L'augmentation du temps de retour de l'onde de fréquence f peut se convertir en une distance δR d'erreur à corriger sur la mesure :

$$\delta R = \frac{A}{f^2} \quad (1.3)$$

où A est une valeur caractéristique de l'état de l'ionosphère. Or, la valeur de A est fortement dépendante de la composition ionique qui varie entre autre avec l'activité solaire. Un moyen de calculer cette correction est d'utiliser un altimètre bi-fréquences, qui réalise des mesures avec deux fréquences différentes permettant par différence d'obtenir la valeur de A et ensuite celle de δR .

Une autre possibilité de s'affranchir des problèmes ionosphériques est l'utiliser une fréquence d'émission très élevée comme le prévoit le projet AltiKa. Cette solution permet en plus de diminuer nettement le poids des instruments. En complément, le système de positionnement DORIS peut servir à déterminer la correction ionosphérique. Il effectue une mesure de la correction entre une station au sol et le satellite, ce qui est certes un peu moins précis car le satellite mesure au nadir.

– Correction troposphérique :

La couche troposphérique contient une grande quantité d'eau qui engendre un retard du signal radar équivalent à 40 cm en hauteur mesurée. Ce milieu étant non-dispersif, il affecte

dans les mêmes proportions les signaux de l'altimètre bi-fréquences rendant impossible l'estimation de l'erreur par la méthode précédente. Un altimètre hyper-fréquence est utilisé afin d'estimer le contenu en vapeur d'eau et en eau liquide, pour appliquer la correction de la troposphère humide. Mais le faisceau utilisé pour la correction a un diamètre au sol d'environ 50 km, ce qui limite la correction près des côtes.

D'autres gaz de type Azote ou Oxygène perturbent aussi la propagation du signal radar, d'où une autre correction nécessaire appelée correction de la troposphère sèche. La présence de ces gaz étant fortement liée aux gradients verticaux de pression atmosphérique, la correction est estimée à l'aide de modèles météorologiques provenant par exemple de l'ECMWF (European Center for Medium Range Weather Forecast).

– **Correction due à l'état de mer, ou biais électromagnétique :**

Le signal radar se reflète à la fois sur les creux et les crêtes des vagues, mais la dispersion est plus importante sur les crêtes à cause de la convexité de la surface. Le signal mesuré est donc biaisé vers le creux des vagues (*Fu et al.*, 1994; *Gaspar et al.*, 1994). La correction du biais électromagnétique est appliquée selon l'intensité de la houle, qui peut être estimée par le même altimètre (selon la dispersion du signal retour).

– **Marées :**

Le signal des marées océaniques et terrestres est soustrait dans la donnée altimétrique à l'aide, entre autre, des modèles de marées.

– **Correction du baromètre inverse :**

Les variations de pression atmosphérique à la surface de l'océan engendrent une variation de la hauteur par l'effet du baromètre inverse. Cet équilibre mécanique n'a a priori aucun effet sur la circulation, les incréments de hauteur qu'il génère sont donc à soustraire du signal pour toute utilisation en océanographie. La correction est effectuée à l'aide des champs de pression de surface des modèles atmosphériques.

Précision des altimètres au nadir

Malgré les corrections citées précédemment, des erreurs subsistent d'une part à cause de l'imprécision des corrections, et d'autre part à cause des imprécisions instrumentales et de l'erreur sur la position du satellite (erreur d'orbite). L'erreur d'orbite est maintenant de l'ordre de 1 cm, et pour les altimètres récents comme celui embarqué sur le satellite JASON-2, l'erreur de mesure sur la distance séparant le satellite de la surface océanique est estimée à 2.25 cm. Il en résulte une précision d'environ 2.5 cm pour la mesure altimétrique. Cette précision est valable, comme nous l'avons vu précédemment, pour des mesures à des longueurs d'ondes supérieures à 40-50 km.

Précision des altimètres à large fauchée

Une source d'erreur importante devrait être le roulis de l'appareil de mesure. Si l'on note R la distance par rapport au nadir, étant donné que l'altitude H du satellite est grande devant R , l'erreur ΔSSH pour le roulis vaut en première approximation :

$$\Delta SSH = R \times \Delta\theta \quad (1.4)$$

Pour donner un ordre de grandeur, une erreur de 0.1 arcsec en roulis correspond à une erreur de 4.5 cm en bout de fauchée. Une erreur systématique de phase sera aussi présente.

Celle-ci est due aux changements des temps de réponse des composants électroniques. Pour les faibles angles de visée de l’altimètre à large fauchée, l’effet est identique à l’erreur de roulis. Une correction par intercalibration des observations (lorsque des observations se recouvrent) est prévue. Compte tenu de toutes les sources d’erreur, l’erreur est attendue à 5.3 cm RMS environ en bout de fauchée à 90 km de part et d’autre du nadir, pour une résolution spatiale des mesures d’environ 10 km.

1.2 Orbites et trajectoires

L’échantillonnage des mesures altimétriques est très dépendant des orbites des satellites. La figure 1.3 illustre l’impact de différents paramètres orbitaux sur la répartition des observations. Par exemple, durant 10 jours, le satellite JASON-1 (traces bleues) a complété son cycle d’observations tandis que le satellite ERS-2, qui observe avec une résolution spatiale plus dense, n’a pas encore complété son cycle (de grandes zones sont encore vides).

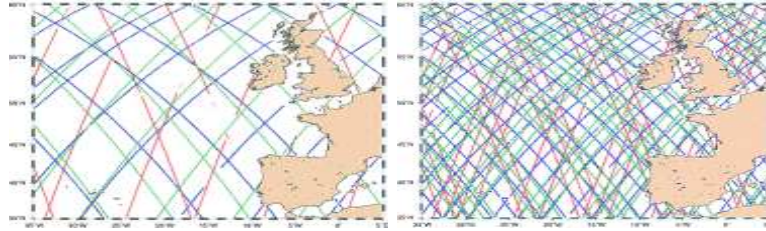


FIG. 1.3 – Tracé dans l’Atlantique Nord-est des données altimétriques de JASON-1, ERS-2 et GFO, sur 3 jours (à gauche) et 10 jours (à droite). Crédits : Aviso.

Dans cette section, nous expliquons les liens entre les paramètres orbitaux et l’échantillonnage spatio-temporel. La table 1.2 résume les paramètres et caractéristiques orbitales que nous allons utiliser.

1.2.1 Les paramètres de base

Une multitude de paramètres définissent les orbites, dont beaucoup sont liés entre eux. En supposant que l’orbite est circulaire (c’est le cas de tous les satellites altimétriques), seuls l’altitude, l’inclinaison et la longitude d’un point de référence à l’équateur par exemple, respectivement notés a , i et lon_0 , suffisent à définir l’orbite, c’est-à-dire qu’ils suffisent à définir la trajectoire du satellite en fonction du temps.

Le schéma 1.4 montre la position d’une orbite dans l’espace, vu face à l’équateur à gauche et vu face au pôle nord à droite, et situe les paramètres a et i .

1.2.2 Equations de la trajectoire

Pour le calcul de la période nodale T_N , l’approximation de la terre à un point de masse Mt est assez juste et T_N peut s’écrire :

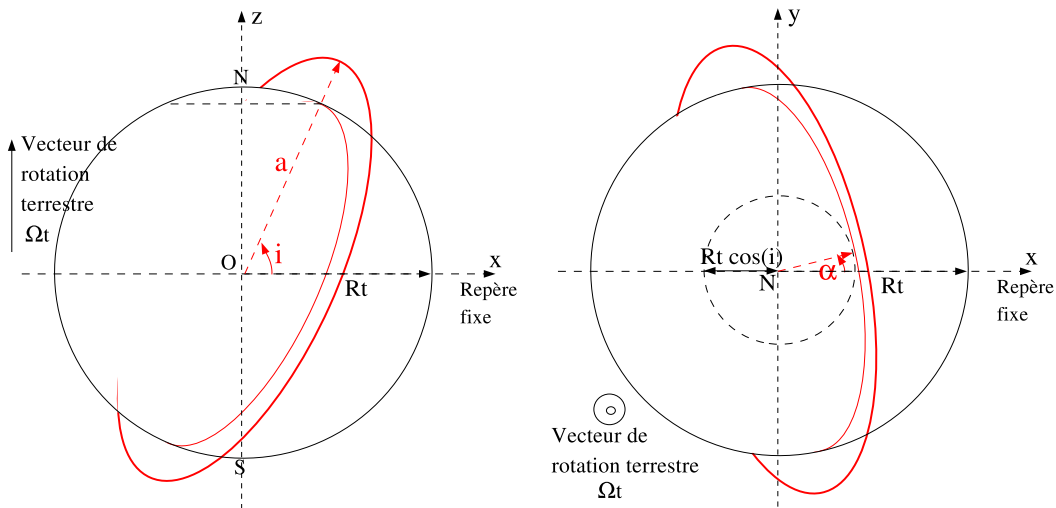
$$T_N = \left(\frac{2\Pi}{\mu}\right)a^{\frac{2}{3}} \quad (1.5)$$

avec $\mu = G \times Mt$, G la constante gravitationnelle et Mt la masse de la terre.

La vitesse angulaire de rotation du satellite autour du centre de la terre s’exprime donc par la relation :

Paramètres de base :	
a	Altitude (km) du satellite par rapport au centre de la terre
i	Inclinaison du plan orbital par rapport au plan équatorial
lon₀	Position de référence : longitude d'un point à l'équateur
Caractéristiques orbitales :	
T_N, Ω_N	Période nodale et rotation nodale (vitesse angulaire de rotation du satellite autour de la terre)
α̇	Déviaton temporelle du plan orbital autour de l'axe des pôles
Ω_t	Vitesse angulaire de rotation terrestre
ΔL₁	Déviaton en longitude d'un point d'observation après une période nodale
T_R	Cycle de répétitivité (temps après lequel le satellite observe la même série de points)
N	Nombre de rotation terrestre dans le référentiel du plan de l'orbite (ou nombre de jours nodaux) durant le cycle T _R .
q	Nombre de passes par cycle T _R (ou nombre de périodes nodales durant le cycle T _R)

TAB. 1.1 – Paramètres utilisés et caractéristiques orbitales

FIG. 1.4 – Schéma d'une orbite avec une inclinaison i et une altitude a , vue face à l'équateur (à gauche) et face au pôle nord (à droite).

$$\Omega_N = \mu a^{-\frac{2}{3}} \quad (1.6)$$

Pour la suite, l'approximation des orbites Kepleriennes (assimilant les objets par des points de masses) n'est pas suffisante. En effet, la non-sphéricité de la terre, et particulièrement son aplatissement aux pôles, induit une déviaton du plan orbital autour de l'axe des pôles, régulière

dans le temps. L'angle correspondant à cette déviation est noté α sur le schéma 1.4 à droite. Cette déviation ne modifie pas l'angle d'inclinaison i car l'axe des pôles est perpendiculaire au plan équatorial. Si l'orbite est polaire, la déviation est nulle (l'angle α reste constant). Cet effet, appelé "effet J2", est expliqué entre autre dans *Raj et Sharma (2003)*, et a de nombreuses applications notamment l'héliosynchronisme lorsque la déviation compense la rotation terrestre autour du soleil ($\dot{\alpha}=+360^\circ/\text{an}$). La déviation $\dot{\alpha}$ se calcule de manière approchée en fonction de l'altitude et de l'inclinaison par la formule :

$$\dot{\alpha} = \frac{-3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \left(\frac{Rt}{a} \right)^2 \cos(i) \quad (1.7)$$

avec $J_2 = 1.082616 \cdot 10^{-3}$. Notons que classiquement pour les satellites autour de 1000-2000 km, $\dot{\alpha}$ vaut quelques degrés par jour. Lorsque i est compris entre 0° et 90° , la déviation est positive. Par exemple, sur le schéma 1.4, la déviation $\dot{\alpha}$ a lieu dans le même sens que la rotation terrestre ($\dot{\alpha} > 0$).

Une fois les paramètres Ω_N et $\dot{\alpha}$ calculés, on peut exprimer l'équation de la trajectoire du satellite en fonction du temps ($lon(t)$ et $lat(t)$ désignant respectivement la longitude et la latitude du satellite) :

$$\begin{cases} lon(t) = \arctan(\cos(i) \times \tan(\Omega_N t)) - \Omega_t t + \dot{\alpha} t + lon_0 \\ lat(t) = \arcsin(\sin(i) \times \sin(\Omega_N t)) \end{cases} \quad (1.8)$$

La latitude a une expression simple puisqu'elle ne dépend ni de la rotation terrestre, ni de la déviation du plan orbital qui a lieu autour de l'axe des pôles. L'expression de la longitude est plus complexe : Le terme $-\Omega_t t$ est la variation en longitude due à la rotation propre terrestre. Ce terme est négatif car vu d'un point fixe, la terre tourne dans le sens des longitudes décroissantes (voir schéma 1.5). Le terme $\dot{\alpha} t$ est la variation en longitude due à la déviation du plan orbital qui est du signe de $\dot{\alpha}$ (voir schéma 1.5).

1.2.3 La résolution spatio-temporelle : cycle et sous-cycles

Les équations de la trajectoire ci-dessus définissent la résolution spatio-temporelle des observations. Elles sont complexes à interpréter directement mais quelques calculs permettent d'éclaircir ce point.

La déviation en longitude d'un point d'observation après une période nodale T_N se déduit de l'équation 1.8 :

$$\Delta L_1 = (\Omega_t - \dot{\alpha}) T_N \quad (1.9)$$

Cette distance (en degrés) est représentée au niveau de l'équateur sur le schéma 1.5. Pour les satellites altimétriques, volant typiquement entre 800km et 1500 km et avec des inclinaisons entre 60° et 120° , ΔL_1 peut varier entre -23° et -32° , qui correspond à une distance à l'équateur entre 3000km et 4000km, et T_N varie entre 1h40 et 2h.

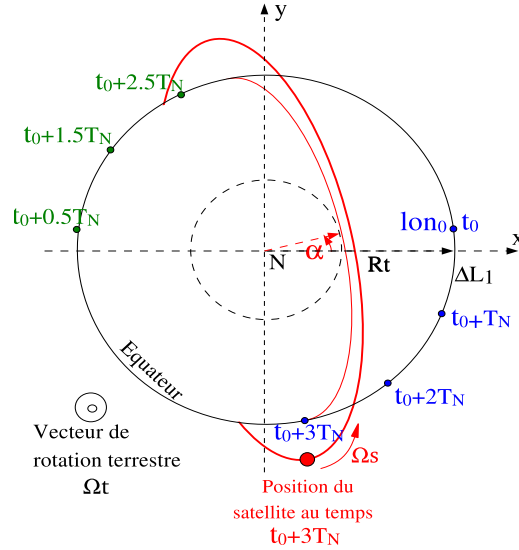


FIG. 1.5 – Schéma montrant la déviation en longitude des points d'observations entre les temps t_0 et $t_0 + 3T_N$ (instant présent sur le schéma), au niveau de l'équateur. La déviation est due à la rotation terrestre Ω_T et à la déviation α du plan orbital.

Durant une rotation de la terre dans le plan orbital (ou durant un jour nodal, ce qui correspond à un temps d'environ 1 jour car α est faible devant Ω_t), un premier échantillonnage de traces montantes et descendantes est effectué. Un exemple de premier échantillonnage est montré sur la figure 1.6 pour les traces montantes du satellite JASON-1 et la représentation sur le plan 2D montre les traces montantes et descendantes (traits pleins).

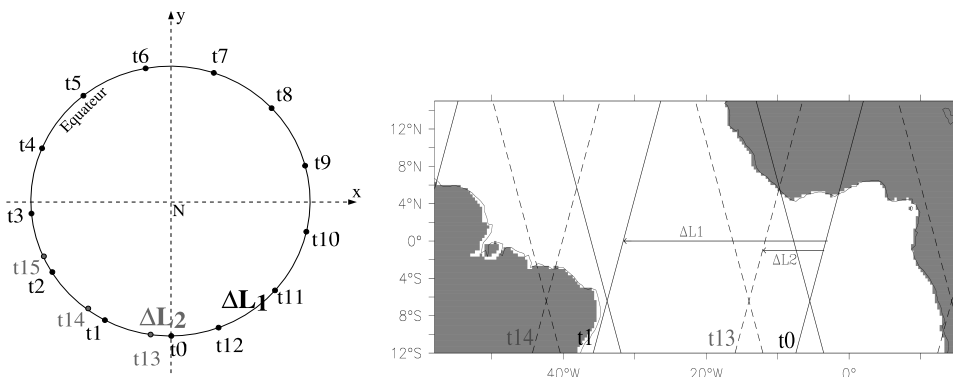


FIG. 1.6 – Schéma du premier échantillonnage pour l'orbite de JASON-1 lorsque la terre a effectué plus d'une rotation dans le plan orbital. A gauche : emplacements des points observés à l'équateur durant les 15 premières périodes nodales. Les points en gris constituent le début du second échantillonnage. A droite : Représentation d'un exemple de traces montantes et descendantes durant une même période sur l'océan Atlantique tropical.

Nous allons voir dans les deux paragraphes suivants, avec de simples considérations d'arithmétique modulaire, que ΔL_1 est un paramètre fondamental pour la répartition des observations, qui détermine le cycle et les sous-cycles du satellite. Malgré le relativement faible intervalle dans lequel on peut faire varier ΔL_1 , les possibilités de répartitions des observations sont très

importantes.

Le cycle

On note ΔL_2 la différence de longitude à l’équateur une fois le premier échantillonnage réalisé, avec le point de mesure le plus proche du premier point de mesure (dans le cas du satellite JASON-1, sur le schéma de la figure 1.6, il s’agit de la différence de longitude entre t0 et t13, t1 et t14 ...) et sur le plan, il s’agit de la différence en longitude entre les traces pleines et les traces en pointillés.

- Si ΔL_1 est un diviseur de 2Π , alors ΔL_2 est nul et le satellite repasse en face du même point (en phase montante) après une rotation terrestre par rapport au plan de l’orbite, et a alors effectué son cycle. Dans ce cas, il existe un entier q tel que :

$$q \times \Delta L_1 = 2\Pi \quad (1.10)$$

L’entier q est alors le nombre de passes par cycle, qui est d’une durée $T_R = T_N \times q$, proche de 1 jour car la terre a effectué une rotation dans le plan orbital qui varie peu en un jour.

- Si en revanche, ΔL_1 n’est pas un diviseur de 2Π , mais est un diviseur de $2N\Pi$, alors le satellite reviendra aussi en face du même point (en phase montante) mais après N rotations de la terre dans le plan orbital. Dans ce cas, il existe deux entiers q et N tels que :

$$q \times \Delta L_1 = N \times 2\Pi \quad (1.11)$$

N est donc le nombre de rotations terrestres dans le plan orbital durant le cycle T_R , (ou le nombre de jours nodaux durant le cycle). La durée du cycle $T_R = T_N \times q$ est proche de N jours (ou exactement N jours si l’orbite est héliosynchrone).

- Si dans un dernier cas $\Delta L_1/2\Pi$ n’est pas un rationnel, alors le satellite ne repasse jamais au même point en phase montante. Ce cas n’est pas souhaitable pour les satellites altimétriques car il est important d’avoir une référence des mesures.

Typiquement, pour les satellites dédiés à l’altimétrie, ΔL_1 est choisi tel que le cycle de répétitivité T_R soit entre 10 et 40 jours. Plus le cycle est long, plus la couverture spatiale est dense mais moins la couverture temporelle en un point observé est bonne. Sur la durée du cycle, la résolution spatiale est de $360/q$ (degrés) en longitude pour les traces montantes, et la même pour les traces descendantes. Entre deux lignes de noeuds (lignes de croisement entre les traces montantes et descendantes), la résolution en longitude est régulière et vaut $360/2q$. A titre d’exemple sont représentées sur la figure 1.7 les traces après un cycle entier de JASON-1 (pour lequel $N = 10$ et $q = 127$).

Les sous-cycles

Le cycle de répétitivité T_R ne donne pas d’indications sur la résolution spatio-temporelle à des échelles de temps inférieures à T_R . Excepté le cas où la durée du cycle est d’un jour (correspondant à un seul échantillonnage, $N = 1$), lorsque N est supérieur à 1, des sous-échantillonnages peuvent être réalisés, ils définissent alors des sous-cycles qui sont une caractéristique très importante caractérisant l’échantillonnage. En effet, le “quadrillage” tel qu’on peut le voir sur la figure 1.7 peut se remplir de différentes manières, selon différents sous-cycles. La figure 1.8 montre à titre d’illustration l’existence d’un sous-cycle dans le cas des orbites de JASON et d’ENVISAT.

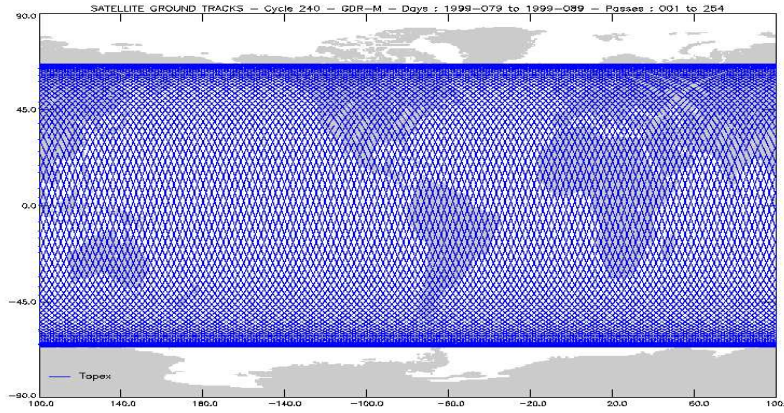


FIG. 1.7 – Ensemble des traces au sol du satellite JASON-1 après son cycle de répétitivité. Crédits :Aviso/CNES.

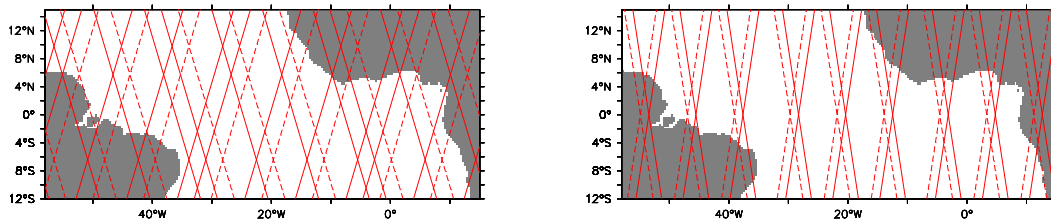


FIG. 1.8 – Traces du satellite JASON-1 à gauche et du satellite ENVISAT à droite. En rouge, les traces cumulées durant les trois premiers jours du cycle et en rouge pointillés durant les trois jours suivants.

Dans le cas de JASON-1, un sous-cycle semble réalisé durant les 3 premiers jours (traits pleins), avec une résolution de 8.5° . Les 3 jours suivants, le même sous-cycle a lieu, mais est spatialement décalé de $+2.8^\circ$. Manifestement, l'orbite de JASON-1 a donc un sous-cycle d'une résolution temporelle de 3 jours, d'une résolution spatiale de 8.5° et se propageant à $+2.8^\circ/3\text{jours}$. De même, l'orbite d'ENVISAT (figure 1.8 à droite) semble avoir un sous-cycle d'une résolution temporelle de 3 jours, d'une résolution spatiale de 8.5° et se propageant à $-1.7^\circ/3\text{jours}$. On remarque que le sens de propagation du sous-cycle est différent pour ces deux orbites.

Maintenant que nous avons identifié l'existence de sous-cycles en représentant les traces pour différents intervalles de temps, nous allons les caractériser de manière plus précise. Les sous-cycles identifiés précédemment pour les orbites de JASON et d'ENVISAT sont représentés sur la figure 1.9 par des traits rouges. En réalité, d'autres sous-cycles existent, notamment un sous-cycle à 17.5 jours pour l'orbite d'ENVISAT, et les durées des sous-cycles mentionnés précédemment sont en fait de 3.3 jours et 3.18 jours respectivement pour JASON et ENVISAT. Nous définissons plus précisément les sous-cycles de la manière suivante en interprétant les diagrammes espace-temps de la figure 1.9 :

Le premier échantillonnage est appelé sous-cycle d'ordre 1, de résolution spatiale ΔL_1 et temporelle T_{R1} (proche de 1 jour). Si à la fin de ce premier échantillonnage après un nombre de passes q_1 , le satellite ne repasse pas en face du même point, on note ΔL_2 la déviation avec le point le plus proche. Le sous-cycle recommence donc à nouveau, mais spatialement décalé de ΔL_2 . On dira que sa propagation est de $\Delta L_2/T_{R1}$.

L'ensemble des décalages ΔL_2 effectués après chaque sous-cycle d'ordre 1 va lui-même définir un sous-cycle d'ordre 2, de résolution spatiale ΔL_2 . Si à la fin de cet échantillonnage après un

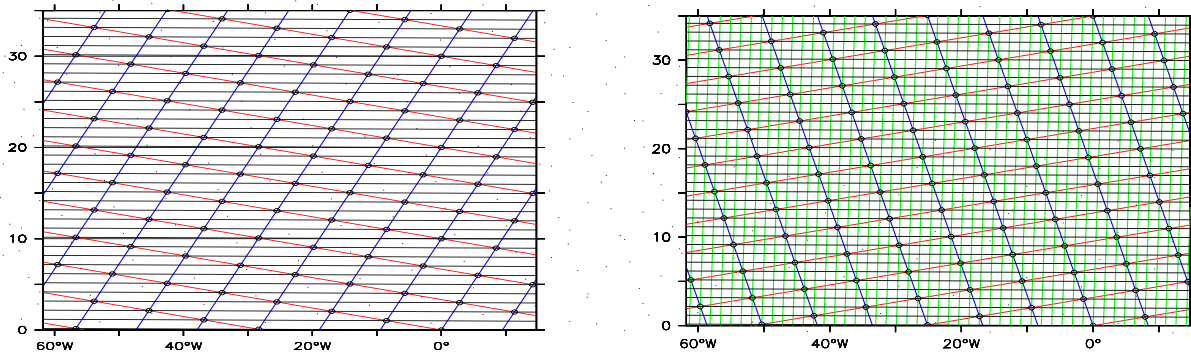


FIG. 1.9 – Représentation des points d'observation dans un diagramme longitude-temps (degrés-jours), à l'équateur. Les points reliés en noir symbolisent les sous-cycles d'ordre 1, en rouge d'ordre 2 (mis en évidence dans la figure 1.8), en bleu d'ordre 3 et en vert d'ordre 4. A gauche, pour l'orbite de JASON-1, les traits épais noirs horizontaux symbolisent la période de répétitivité tous les 10 jours. A droite, pour l'orbite d'ENVISAT, un seul cycle de répétitivité a lieu durant les 35 jours.

temps T_{R2} (résolution temporelle) et un nombre de passes par sous-cycle $q2$, le satellite ne repasse pas exactement ΔL_1 plus loin, on note ΔL_3 la déviation avec le point le plus proche. Le sous-cycle recommence à nouveau, mais spatialement décalé de ΔL_3 . Sa propagation est de $\Delta L_3/T_{R2}$.

Des cycles d'ordre supérieurs peuvent se définir ainsi de suite, jusqu'à ce que ΔL_{n+1} soit nul. Lorsque ΔL_{n+1} est nul, le sous-cycle d'ordre n est en fait le cycle de répétitivité, de résolution spatiale ΔL_n (correspondant au nombre de passes q), de résolution temporelle T_R et de propagation nulle. On peut aussi définir le sous cycle d'ordre 0, correspondant à une seule période nodale du satellite (nombre de passes $q_0 = 1$), de résolution spatiale $\Delta L_0 = 360^\circ$, de résolution temporelle $T_{R0} = T_N$ et de propagation $\Delta L_1/T_N$. A titre d'exemple, la figure 1.9 symbolise les sous-cycles d'ordre 1,2,3, et 4 qui existe seulement pour le satellite ENVISAT.

Le sous-cycle à 1 jour est systématique car pour les satellites ayant une période nodale faible devant la période de rotation terrestre (c'est le cas de tous les satellites altimétriques étant donné leur faible altitude), la rotation terrestre impose ce sous-échantillonnage. En revanche, les sous-cycles d'ordre supérieurs ne sont pas systématiques.

La figure 1.10 met en évidence chacun des sous-cycles et leur propagation dans l'espace longitude-latitude. Ce type de représentation servira de base pour décrire la résolution spatio-temporelle des autres orbites classiquement utilisées, qui seront détaillés dans la section suivante sur les missions altimétriques.

Remarque sur l'inclinaison :

En plus d'agir sur la déviation du plan orbital et donc sur le cycle et les sous-cycles, l'inclinaison de l'orbite détermine la latitude maximale d'observation. Sur la figure 1.4, aucune observation ne peut être faite à l'intérieur du cercle représenté en pointillés. Par exemple, pour JASON-1, l'inclinaison est de 66° de sorte qu'aucune observation n'est possible au delà de 66° N et 66° S.

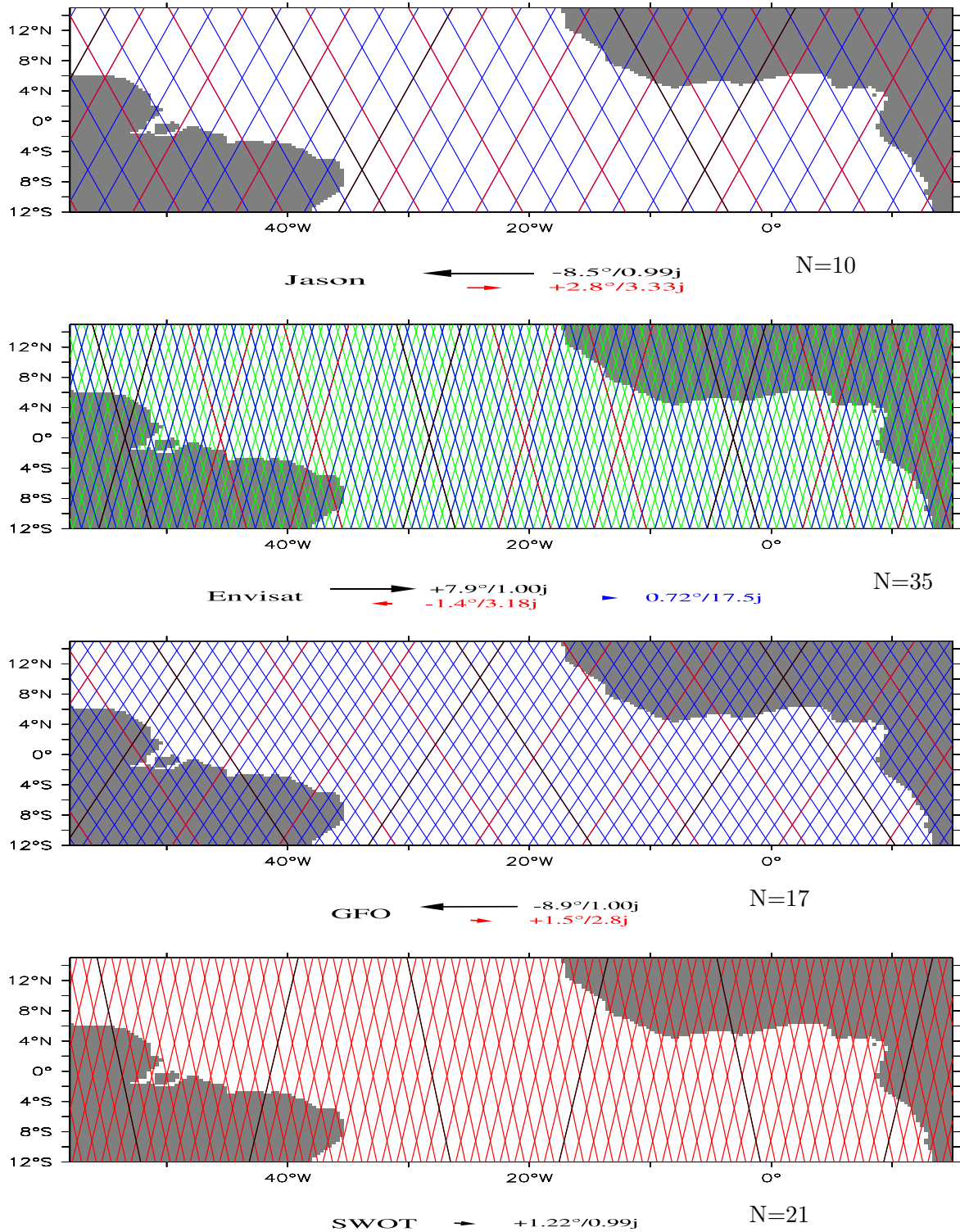


FIG. 1.10 – Pour chaque orbite, respectivement celle des satellites JASON-1, GFO, ENVISAT, et une des orbites prévue pour SWOT : Tracé d'un sous-cycle d'ordre 1 en noir, d'ordre 2 en rouge+noir, d'ordre 3 en bleu+rouge+noir et d'ordre 4 en vert+bleu+rouge+noir, lorsqu'ils existent. Pour une orbite donnée, le sous-cycle d'ordre le plus grand est le cycle, qui n'a pas de vitesse de propagation. Pour les sous-cycles, la vitesse de propagation est symbolisée par les flèches correspondant aux couleurs de ceux-ci.

Conclusion

En faisant légèrement varier les paramètres fondamentaux des orbites (l'altitude et l'inclinaison), il s'ouvre des possibilités remarquables pour réaliser différents échantillonnages des observations. Nous allons illustrer cela dans la section suivante au travers de la description des missions satellitaires.

1.3 Les missions altimétriques passées, présentes et futures

1.3.1 Topex/Poseidon, JASON-1, JASON-2

Historique

De cette génération de trois satellites créés dans le cadre d'une coopération entre le CNES et la NASA, le satellite JASON-1 fournit encore des données précises et le satellite JASON-2 vient d'être lancé en juin 2008. L'orbite est commune à cette série de trois satellites.

Topex/Poseidon (T/P), opérationnel à partir de 1992, a été un succès remarquable tant pour la précision des mesures que pour la durée de la mission bien supérieure à ce qui était initialement prévu. Ce satellite était toujours en fonction lors du lancement de son successeur JASON-1 en décembre 2001, permettant une phase de calibration et de validation des données de JASON-1. Lors de la première phase, le satellite JASON-1 était placé derrière T/P avec un léger décalage temporel. Une fois la phase de calibration terminée, les deux satellites ont été placés sur des orbites décalées spatialement afin d'intercaler les traces au sol pour une meilleure résolution spatiale en attendant la fin de la mission T/P. Un changement notable du point de vue technologique a été l'utilisation de l'altimètre bi-fréquences Poseidon-2. Un effort a été porté sur la miniaturisation des appareils, JASON-1 a une masse de 500 kg soit 5 fois plus léger que son prédécesseur.

La mission JASON-2 a débuté en juin 2008. La charge du satellite est quasiment identique à celle de JASON-1. L'altimètre Poseidon-3 a les mêmes caractéristiques générales que Poseidon-2, avec une diminution du bruit instrumental et a en plus un algorithme couplé avec DORIS permettant une meilleure poursuite sur les zones côtières, sur les continents et sur les glaces. La précision sur l'orbite est proche de 1 cm (contre 2 cm pour JASON-1) et environ 2.5 cm sur la mesure altimétrique. JASON-1 et JASON-2 sont placés sur le même orbite, et sont pour l'instant décalés temporellement.

Les caractéristiques orbitales

Nous avons déjà mentionné quelques caractéristiques de cette orbite dans la section précédente. Nous donnons ici toutes les caractéristiques que nous jugeons utiles pour interpréter les performances dans les chapitres sur les résultats des scénarios. L'altitude de l'orbite est de 1336 km, et l'inclinaison de 66°. Concernant la répartition spatio-temporelle des observations dans la zone tropicale et la position des lignes de noeuds des différents sous-cycles, on peut se référer à la figure 1.10. La résolution et la propagation des sous-cycles est résumée dans le tableau 1.3.1.

1.3.2 Geosat et GFO

Historique

Ces deux satellites de la marine Américaine (US Navy) ont été lancés sur la même orbite. Geosat(GEOdetic SATellite), lancé en mars 1985 et arrêté en janvier 1990, a été la première mission altimétrique de haute précision (moins de 5 cm d'erreur RMS). Elle a été suivie par

Cycles et sous-cycles	Résolution spatiale en longitude des traces montantes	Résolution temporelle	Vitesse de propagation
sous-cycle ordre0	360°	0.078j	-28.3°/0.078j
sous-cycle ordre1	28.35°	0.991j	-8.5°/0.991j
sous-cycle ordre2	8.5°	3.333j	+2.8°/3.333j
cycle	2.8°	9.91j	0°/j

TAB. 1.2 – *Caractéristiques cycliques de JASON-1*

GFO (Geosat Follow-On) en février 1998, qui est toujours en vol mais présente actuellement des signes de faiblesse.

Les caractéristiques orbitales

L'altitude de l'orbite est de 800km et son inclinaison de 108°. Concernant la répartition spatio-temporelle des observations dans la zone tropicale et la position des lignes de noeuds des différents sous-cycles, on peut se référer à la figure 1.10. La résolution et la propagation des sous-cycles est résumée dans le tableau 1.3.2.

Cycles et sous-cycles	Résolution spatiale en longitude des traces montantes	Résolution temporelle	Vitesse de propagation
sous-cycle ordre0	360°	0.070j	-25.1°/0.070j
sous-cycle ordre1	25.08°	1.0j	-8.9°/1.0j
sous-cycle ordre2	8.9°	2.8j	+1.5°/2.8j
cycle	1.5°	17.05j	0°/j

TAB. 1.3 – *Caractéristiques cycliques de GFO*

1.3.3 ERS et ENVISAT

Historique

Contrairement aux autres séries de missions citées précédemment, les missions ERS-1, ERS-2, et ENVISAT ne sont pas uniquement dédiées à l'altimétrie. Le satellite ERS-1 a été lancé en 1991 par l'ESA avec pour mission l'observation des océans, des calottes polaires, des zones côtières ainsi que la mesure du géoïde marin. Trois phases différentes se sont succédées dans l'utilisation du satellite. Une première phase pour l'observation des calottes polaires, une seconde phase pour les applications géodésiques, et une phase pour les observations de l'océan (dont l'altimétrie) et autres applications.

Le satellite ERS-2, lancé en 1995 sur la même orbite que ERS-1 à un jour de décalage temporel, a un altimètre défaillant depuis juin 2003 et ne peut apporter des données précises que lorsqu'il est proche d'une station ESA au sol ce qui n'est pas le cas pour l'atlantique tropical.

ENVISAT, successeur d'ERS-1 et ERS-2, a été lancé en mars 2002 sur la même orbite. Actuellement, il présente aussi des faiblesses sur son altimètre nominal. Parmi ses instruments, il comporte un altimètre radar couplé avec le système d'orbitographie et de localisation DORIS.

Caractéristiques orbitales

Les orbites de cette série de missions ont une inclinaison autour de 98° , ce qui permet aussi d'observer les régions polaires. Dans les deux premières phases d'ERS-1, les orbites avaient un cycle de répétitivité de respectivement 3 jours et 168 jours. Dans la dernière phase dédiée à l'océan, et aussi pour les satellites ERS-2 et ENVISAT, l'orbite a un cycle de répétitivité de 35 jours pour une altitude de 800 km environ.

Concernant la répartition spatio-temporelle des observations dans la zone tropicale pour cette dernière orbite, on peut encore se référer à la figure 1.10. La résolution et la propagation des sous-cycles est résumée dans le tableau 1.3.3.

Cycles et sous-cycles	Résolution spatiale en longitude des traces montantes	Résolution temporelle	Vitesse de propagation
sous-cycle ordre0	360°	0.070j	$-25.1^\circ/0.070j$
sous-cycle ordre1	25.15°	1.00j	$+7.9^\circ/1.00j$
sous-cycle ordre2	7.9°	3.18j	$-1.4^\circ/3.18j$
sous-cycle ordre3	1.4°	17.5j	$0.72^\circ/17.5j$
cycle	0.72°	35j	$0^\circ/j$

TAB. 1.4 – *Caractéristiques cycliques d'ENVISAT*

1.3.4 Missions futures avec altimètres au nadir : SARAL, SENTINEL-3, CRYOSAT, JASON-3, HY-2

Le satellite SARAL et son altimètre AltiKa, fonctionnant en bande Ka (35GHz), devrait être lancé en 2010 pour une durée espérée d'au moins 5 ans, grâce à une coopération franco-indienne. L'utilisation de la bande Ka permet une meilleure observation altimétrique dans les zones côtières. Ce satellite devrait être placé sur la même orbite qu'ENVISAT car le niveau de référence est bien connu sur la trace de ce dernier.

Le satellite SENTINEL-3, s'inscrivant dans le programme du GMES, appartient à une série de 5 satellites futurs. Il sera spécialement dédié à l'océanographie opérationnelle, et comportera entre autres un altimètre. Une mission JASON-3 devrait aussi assurer la continuité voire le recouvrement avec JASON-2 à partir de 2013-2014. Enfin, HY-2 est une série de satellites qui devraient être lancés par la Chine entre 2009 et 2019, tous dédiés à l'océanographie. Les orbites de ces derniers satellites sont toujours en discussion.

Le satellite CRYOSAT, qui sera lancé fin 2009 prioritairement pour l'étude des glaces continentales, mesurera aussi la topographie des océans (avec une précision moyenne puisqu'il ne possédera pas de correction radiométrique directe) avec une orbite à 369 jours et un sous-cycle à 30 jours.

1.3.5 La future mission SWOT

La mission

La réalisation de cette mission sera une véritable avancée en l'altimétrie. Le premier projet d'altimétrie large fauchée, WSOA, devait être embarqué sur le satellite JASON-2 mais a été finalement abandonné. Le projet SWOT est actuellement en cours de discussion, et devrait être réalisé aux alentours de 2015. Cette mission permettra aussi la surveillance des eaux continentales.

Caractéristiques orbitales prévues

Le choix de l'orbite pour ce satellite reste toujours en discussion. Une des possibilités est une orbite à 845km et une inclinaison à 78° . Dans ces conditions, le cycle serait de 21 jours, et surtout avec un sous-cycle d'ordre1 qui se propagerait à $1.22^\circ/\text{jour}$ vers l'est, de sorte que la fauchée pourrait se recouvrir de jour en jour pour assurer une continuité spatiale des mesures et pour faciliter la correction de l'erreur de roulis. Cette caractéristique se remarque sur la figure 1.10. La résolution et la propagation des sous-cycles pour cette orbite est résumée dans le tableau 1.3.5.

Cycles et sous-cycles	Résolution spatiale en longitude des traces montantes	Résolution temporelle	Vitesse de propagation
sous-cycle ordre0	360°	0.076	$-25.6^\circ/0.076\text{j}$
sous-cycle ordre1	25.63°	0.99j	$+1.22^\circ/0.99\text{j}$
cycle	1.22°	20.87j	$0^\circ/\text{j}$

TAB. 1.5 – *Caractéristiques cycliques d'une orbite envisagée pour SWOT*

Plus récemment, d'autres orbites sont en discussion, avec toujours la même inclinaison et un cycle de répétitivité d'une vingtaine de jours permettant une couverture totale de la surface avec une fauchée de 180km, mais avec éventuellement un sous-cycle à trois jours.

1.4 Les autres observations

Dans ce manuscrit, les autres observations sont considérées comme "complémentaires" puisque l'altimétrie est le sujet central de notre étude, bien qu'elles soient aussi très utiles pour de nombreuses applications océanographiques et pour l'assimilation de données.

1.4.1 Les autres mesures satellitaires

En plus de l'altimétrie, la télédétection a permis au cours des vingt dernières années la mesure d'un grand nombre de variables, parmi lesquelles la température de surface océanique, l'épaisseur de la glace marine, le vent de surface et même prochainement de la salinité de surface.

Température de surface (SST)

La SST (Sea Surface Temperature) est mesurée par satellite avec des radiomètres infrarouge mesurant l'émission infrarouge de la surface océanique. Il s'agit de la température de peau, c'est-à-dire approximativement des 0.01 premiers millimètres de l'océan. Les satellites mesurent de façon synoptique la SST (sur une zone très large), le facteur limitant de l'observation de SST n'est donc pas l'orbite, mais surtout la présence de nuages dans la troposphère qui perturbent la mesure.

La couleur de l'océan

La couleur de l'océan est mesurée par photographie du rayonnement visible émis par la surface de l'océan. Ce paramètre est étroitement lié à la concentration en chlorophylle qui est un indicateur de l'activité biologique très liée aux conditions de surface et aux éventuelles remontées d'eaux profondes. Ce type de mesures a été réalisé entre autres par le capteur MERIS de l'ESA à bord du satellite ENVISAT (*Louet, 2001*).

Le vent de surface

Le vent de surface (ou vent à 10 m) est nécessaire pour forcer les modèles, il est d'ailleurs un principal moteur de la circulation océanique. Des capteurs tels que les diffusiomètres ERS2, QuikSCAT, ASCAT, fournissent des données globales et quasiment journalières à une résolution de 25 km. Une onde radar détecte les vagues de capillarités qui sont étroitement liées au vent de surface.

La salinité de surface

L'observation de la salinité de surface des océans par satellite sera possible grâce à la mission SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) qui devrait débuter en 2009. Les variables d'humidité du sol et de salinité de surface seront mesurées à l'aide d'un radiomètre micro-onde imageur mesurant la température de brillance dans la bande-L. La précision attendue en salinité est meilleure que 0.1 psu pour une résolution spatiale de 200 km et temporelle de 10 jours à un mois.

1.4.2 Les mesures in situ

Les premières observations in situ datent du début du 20^{ième} siècle avec les bouteilles Nansen pour prélever des échantillons d'eau de mer ainsi que la température en profondeur.

Les mouillages

A partir de 1960, les mouillages fournissent les premières mesures temporellement continues de l'océan en profondeur. Ensuite, l'arrivée des satellites a nettement facilité la collecte des données des bouées grâce au système ARGOS.

Dans les régions tropicales, le réseau de mouillages TAO (Tropical Atmosphere Ocean) du programme international TOGA (Tropical Océan Global Atmosphere) est opérationnel depuis 1992 dans la pacifique. Il a été étendu avec le réseau PIRATA dans l'Atlantique tropical, composé de 20 bouées, et plus récemment dans l'indien avec le réseau RAMA.

Les bouées dérivantes

Les mouillages ne sont pas les seuls systèmes de mesures in situ existants. Depuis l'an 2000, la création du réseau ARGO (profileurs dérivants) par la Commission Océanographique intergouvernementale de l'Unesco et de l'Organisation Météorologique Mondiale permet un réseau dense d'observations in situ de température et salinité jusqu'à 2000m de profondeur pour certains profileurs (PROVOR). Lorsque qu'ils sont à une profondeur appelée "profondeur de parking", les profileurs dérivent durant une période préprogrammée. Ils remontent ensuite vers la surface en effectuant des mesures de température et de salinité en fonction de la pression. A la surface les mesures ainsi que la position est transmise par le système ARGOS. Les trajectoires des appareils sont difficilement prévisibles et les mesures peuvent être plus fréquentes dans les régions de convergence. Actuellement, plus de 3000 profileurs sont opérationnels, comme l'illustre la figure 1.11.

Le Glider, fonctionnant sur le même principe, permet en plus de mieux contrôler le déplacement grâce à des ailes permettant à l'appareil de planer dans une direction choisie lors de sa plongée en profondeur. La trajectoire de l'appareil est donc contrôlée dans une certaine mesure. Ce système reste encore marginal étant donné du faible nombre d'appareils en fonctionnement.

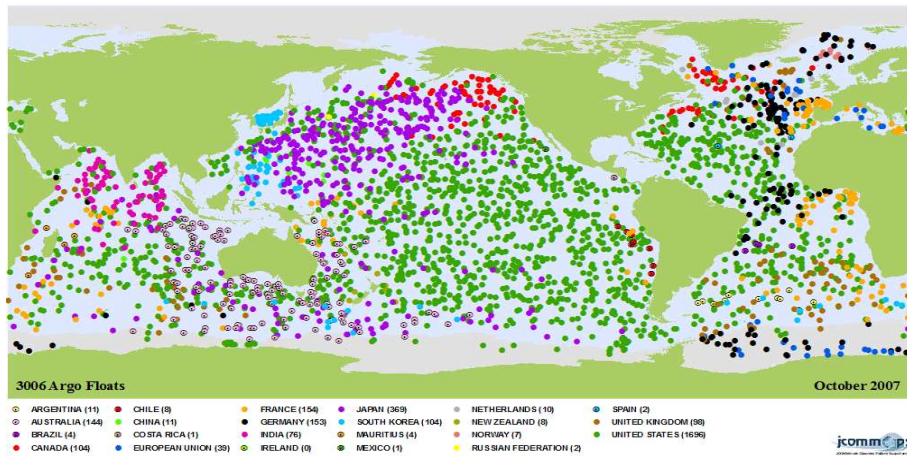


FIG. 1.11 – *Position des bouées ARGO en octobre 2007. Crédits : Jcommops*

Conclusion

Ce chapitre a présenté de façon non-exhaustive les principaux systèmes d'observations océaniques disponibles en temps quasiment réel. Les mesures sont de nature très variées, et la surface océanique est observée d'une manière remarquable grâce à la révolution satellitaire depuis plus d'une vingtaine d'années.

Nous avons particulièrement insisté sur les observations altimétriques qui constituent le sujet central de cette étude. Les paramètres orbitaux des satellites altimétriques sont des éléments déterminants pour la répartition des observations. Ceux-ci sont jusqu'à présent choisis de telle sorte que l'orbite soit répétitive, mais en plus du cycle, les possibilités de sous-échantillonnages sont très nombreuses. Parmi les satellites existants, des cycles de répétitivité entre 10 jours et 35 jours sont utilisés, avec des sous-échantillonnages variables. Ces possibilités d'échantillonnages des observations, considérées dans un cadre plus large de systèmes multi-satellitaires, posent bien le problème du choix des orbites pour les missions futures. L'arrivée de l'altimétrie large fauchée dans les années à venir soulève aussi des problèmes très intéressants à étudier.

Chapitre 2

Le modèle et la configuration régionale de l'Atlantique tropical

Introduction

Les modèles d'océan ont connu ces dernières années un développement très important, motivé par les problèmes climatiques et par le développement de l'océanographie opérationnelle. Dans un système d'assimilation, le modèle est un élément clé pour obtenir de bons estimés et des bonnes prévisions.

Ces modèles sont basés sur les mêmes principes que les modèles atmosphériques, c'est-à-dire sur la résolution des équations de la mécanique des fluides en milieu tournant, discrétisées sur une grille tridimensionnelle. Les variables d'état de l'océan résolues sont la température, la salinité et les vitesses et la pression. L'évolution de la surface libre SSH est calculée de manière semi-diagnostique. Les manières de discrétiser les équations de l'écoulement et de paramétrer la dynamique non-résolue sont nombreuses, ce qui a donné lieu à différents modèles. Nous avons choisi pour notre étude le modèle NEMO et plus particulièrement sa composante océanique OPA "Océan PArallélisé" initié par *Madec et al.* (1998), développé par la communauté océanographique française et actuellement utilisé par MERCATOR. Ce choix est de plus motivé par l'expertise de l'équipe MEOM du point de vue de la connaissance du modèle, développée entre autres à travers le projet DRAKKAR (*Barnier et al.*, 2008).

Nous expliciterons dans une première section les équations résolues par les modèles aux équations primitives et leurs conditions aux limites ainsi que les forçages, avant d'aborder la discrétisation et les paramétrisations propres à OPA. Enfin, nous détaillerons la construction de la configuration régionale de l'Atlantique tropical TATL4 qui sera utilisée par la suite.

2.1 Les équations et conditions limites de la circulation océanique

Cette section présente les équations qui régissent les mouvements, les transferts de chaleur et de sel à l'intérieur de l'océan, et détaille les conditions aux limites qui sont le moteur de la circulation.

2.1.1 Les équations primitives

Un certain nombre d'hypothèses propres à l'océan peuvent simplifier les équations fondamentales de la dynamique des fluides en milieu tournant. Ces hypothèses sont l'approximation hydrostatique, l'approximation de Boussinesq avec une valeur ρ_0 de référence à 1020kg/m^3 et

l'incompressibilité. Pour plus de détails, on pourra se référer à l'ouvrage *Chassignet et Verron* (1998).

Avec ces hypothèses, le système d'équations à résoudre par le modèle est le suivant :

$$\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} = - \left\{ (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{u}^2) \right\}_h - f \vec{k} \times \vec{u}_h - \frac{1}{\rho_0} \nabla_h p + \vec{D}^u \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u} T) + D^T \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u} S) + D^S \quad (2.5)$$

$$\rho = \rho(T, S, p) \quad (2.6)$$

$\vec{u} = \vec{u}_h + w\vec{k} = (u, v, w)$ est le vecteur vitesse [$m.s^{-1}$]

\vec{u}_h est la vitesse horizontale [$m.s^{-1}$]

$w\vec{k}$ est la vitesse verticale [$m.s^{-1}$]

T est la température potentielle [$^{\circ}C$]

S est la salinité [psu]

ρ est la densité in situ [$kg.m^{-3}$]

p est la pression [bar]

z est la coordonnée verticale ascendante

\vec{k} est le vecteur unitaire vertical ascendant

f est le paramètre de Coriolis fonction de la latitude Φ ($f = 2\Omega \sin\Phi$).

La discrétisation spatiale, que nous allons aborder plus loin, limite la résolution dans les petites échelles, dont l'effet est en conséquence paramétré par des termes de diffusion D^u , D^T et D^S qui ne concernent donc pas la diffusion moléculaire. Une hypothèse de fermeture turbulente suppose que ces termes peuvent s'écrire en fonction des variables à grande échelle, leur expression sera brièvement abordée.

2.1.2 Les conditions limites

Les équations présentées ci-dessus concernent l'intérieur de l'écoulement, mais ne spécifient pas les conditions aux limites qui incluent entre autre les termes source d'énergie. L'océan est forcé par des échanges avec le milieu extérieur qui peuvent se diviser en trois types : les échanges de quantité de mouvement, de masse, et de chaleur. Dans la suite, sont indiquées en gras les termes appliqués en conditions limites pour les équations précédentes.

Les échanges de quantité de mouvement

– Avec l'atmosphère :

L'échange de quantité de mouvement avec l'atmosphère s'effectue avec le vent qui transfère une partie de son énergie à la surface océanique. Un vecteur $\vec{\tau}$ représente le flux de quantité de mouvement transmis en surface par le frottement de vent. Ce vecteur dépend

principalement de la vitesse relative du vent par rapport à celle de la surface océanique, mais son expression reste empirique et est approchée par la formule suivante :

$$\vec{\tau} = \rho_a C_D \left| \vec{U}_{10} - \vec{U}_{sfc} \right| (\vec{U}_{10} - \vec{U}_{sfc}) \quad (2.7)$$

\vec{U}_{10} est la vitesse du vent à une altitude de 10 mètres.

\vec{U}_{sfc} est la vitesse du courant de surface océanique.

C_D est un coefficient d'échange turbulent déterminé en partie de manière empirique en fonction de la stabilité de l'atmosphère au niveau de la surface océanique, elle-même calculée en fonction de la température de la surface océanique et des variables atmosphériques.

ρ_a est le densité de l'air.

– Avec le continent et le fond :

Le frottement de l'eau sur le fond océanique dissipe de la quantité de mouvement. Dans le modèle, un flux de quantité de mouvement négatif et proportionnel à la vitesse horizontale dans la couche de fond est paramétré par l'équation suivante :

$$\vec{F}_h = -r \vec{u}_h^b \quad (2.8)$$

\vec{u}_h^b est la vitesse horizontale dans la couche de fond.

r un coefficient de frottement variable suivant la nature du sol.

La quantité de mouvement du flux d'eau douce par les fleuves est généralement négligée dans OPA, sauf pour certaines applications côtières haute résolution.

Les échanges de chaleur

– Avec l'atmosphère :

Les échanges de chaleur avec l'atmosphère ont lieu à travers divers procédés physiques (latent, radiatif, et conductif).

Premièrement, l'évaporation (endothermique) et la réaction inverse de condensation (exothermique), génèrent un flux de chaleur noté \mathbf{Q}_{LAT} . La condensation, plus rare, ne peut avoir lieu que lorsque la surface océanique est plus froide qu'un air bien chargé en humidité. Le flux est donc généralement négatif.

Deuxièmement, la surface océanique perd de la chaleur par rayonnement infrarouge (noté \mathbf{Q}_{LW}), comme tout corps à une température non-nulle. La couche nuageuse en émet aussi une partie, le bilan net de ce flux est d'autant plus négatif que le ciel est dégagé.

Troisièmement, le soleil émet un rayonnement ultra-violet, dont une partie atteint l'océan et se dissipe en chaleur majoritairement dans les premières dizaines de mètres, selon l'incidence du soleil et la transparence de l'eau. Ce flux de chaleur positif est noté \mathbf{Q}_{SW} .

Enfin, la différence de température à l'interface eau-atmosphère génère un flux thermique (flux de chaleur sensible), qui peut être positif ou négatif selon les températures respectives. Ce flux, noté \mathbf{Q}_{SENS} , est faible devant les flux radiatifs et d'évaporation dans les régions tropicales, mais n'est tout de même pas négligeable.

A l'exception du flux solaire, tous ces flux de chaleur s'appliquent uniquement en surface.

– Avec le continent et le fond :

Les échanges de chaleur avec le fond de l'océan sont minimes. Un flux géothermique réchauffe le fond de l'océan, mais celui-ci est supposé faible à l'échelle globale et est pour

l'instant négligé.

Les échanges de masse

- Avec l'atmosphère :
Les échanges de masse avec l'atmosphère ont lieu à travers l'évaporation/condensation (\mathbf{E}) et les précipitations(\mathbf{P}).
- Avec le continent et le fond :
Les continents apportent par les fleuves un flux positif d'eau douce (\mathbf{F}) vers les océans aux zones d'embouchures.
D'autre part, l'absence d'échange d'eau avec le fond de l'océan impose une vitesse normale nulle au fond.

Les équations d'évolution et les termes de conditions limites explicités ci-dessus suffisent à calculer l'évolution de l'état océanique dans le modèle.

2.1.3 La hauteur de la mer SSH

La variation de la hauteur de mer SSH est calculée à partir de la solution du modèle et des conditions limites (échanges de masse). Son expression est la suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \bar{w} + \mathbf{P} + \mathbf{F} - \mathbf{E} \quad (2.9)$$

avec η la dénivellation de la surface libre relativement à la surface libre moyenne ; \mathbf{E} , \mathbf{P} et \mathbf{F} les trois composantes du flux d'eau douce et \bar{w} la vitesse verticale en surface. \bar{w} est une variable diagnostique puisque le modèle est hydrostatique, et a pour valeur la convergence de la vitesse barotrope (vitesse horizontale intégrée sur la colonne d'eau).

A partir d'une référence initiale, la SSH est calculée en intégrant l'équation 2.9. Notons que dans le calcul de \bar{w} avec les équations primitives, l'effet stérique correspondant à l'élévation de la surface due à la dilatation thermique n'est pas explicitement pris en compte.

2.2 Le traitement des équations dans un milieu discret

Les équations et leurs conditions aux limites présentées dans la section précédente sont résolues dans un milieu discret constitué par un ensemble de mailles aux nœuds desquelles les variables sont définies.

2.2.1 La grille

Le mode de discrétisation verticale conduit à différents types de modèles. Le modèle OPA a des coordonnées en z , c'est-à-dire que l'axe vertical est échantillonné à des niveaux constants sauf pour le dernier niveau où la topographie de fond est considérée. Le nombre de niveaux est intensifié dans les premières centaines de mètres car les gradients verticaux des circulations océaniques sont généralement plus forts. La discrétisation horizontale est réalisée par une grille de type Arakawa C (*Arakawa et Lamb, 1977*).

2.2.2 Discrétisation spatiale et temporelle des équations

Les équations primitives sont discrétisées sur la grille selon une méthode de différences finies centrées du second ordre, et temporellement selon un schéma “saute-mouton”. L'équation 2.9 d'évolution de la SSH est résolue avec un solveur elliptique pour éliminer les ondes de gravité car le pas de temps est trop grand pour les résoudre correctement selon un schéma explicite. Une autre solution, qui n'est pas utilisée dans notre version d'OPA, consiste à résoudre explicitement les ondes de gravité avec un grand nombre de pas de temps intermédiaires réalisés uniquement sur l'évolution barotrope.

La discrétisation temporelle impose une résolution particulière de l'équation de la hauteur de mer (équation 2.9), afin d'éliminer les ondes de gravité qui ne peuvent être bien résolues aux échelles de temps classiquement utilisées dans OPA.

2.2.3 Paramétrisation des effets “sous-maille”

Les petites échelles de la circulation ne peuvent être résolues, en conséquence les termes de diffusion D^x (voir équations 2.1, 2.4, 2.5) paramètrent l'effet de ces échelles qui se traduit par une diffusion appelée diffusion turbulente. Ne pas paramétrer ces échelles entraînerait une mauvaise représentation du mélange et une accumulation de l'énergie sur les dernières échelles modélisées, trop grandes pour être dissipées par la viscosité moléculaire. Des paramétrisations “sous-maille” horizontale et verticale sont donc réalisées dans le modèle, décrites en détail dans *Madec* (2008), et dont le principe est rappelé succinctement ci-dessous.

- La paramétrisation “sous-maille” horizontale :

La turbulence horizontale petite échelle est paramétrée par deux coefficients distincts D^{hT} et D^{hU} respectivement pour les traceurs (T, S) et pour les vitesses. Ces coefficients sont tous deux exprimés en fonction des variables grande échelle, résolues par le modèle. Pour les traceurs, la dépendance est exprimée avec un opérateur Laplacien proposé par *Gent et McWilliams* (1990). Pour les vitesses, un opérateur bi-laplacien est utilisé afin d'être plus sélectif au niveau des petites échelles et de ne pas éliminer la turbulence résolue.

- La paramétrisation “sous-maille” verticale :

La turbulence verticale a aussi des échelles bien inférieures à la taille des mailles, et elle est particulièrement forte dans les couches de surface. Comme pour la paramétrisation horizontale, la paramétrisation de la turbulence verticale s'exprime en fonction des gradients verticaux locaux des variables de grande échelle. La paramétrisation TKE (*Blanke et Delecluse*, 1993) est utilisée, avec les paramètres définis dans *Barnier et al.* (2008).

2.3 Construction de la configuration régionale TATL4

Une configuration régionale, TATL4, est réalisée sur l'Atlantique tropical. Après une description de ses caractéristiques et des forçages utilisés, le problème des frontières sera abordé. Enfin, une validation des performances de la configuration sera effectuée en comparaison avec une simulation plus globale.

2.3.1 Caractéristiques de discrétisation

La configuration TATL4 est réalisée sur la grille d'ORCA025 (*Barnier et al.*, 2008) de résolution 0.25° en longitude et latitude, avec 46 niveaux verticaux. La discrétisation temporelle est réalisée avec un pas de temps de 4320 secondes, qui vérifie le critère de stabilité CFL (Courant-Friedrichs-Levy) et qui est un diviseur de 86400 secondes (1 jour) afin de ne pas décaler l'heure des pas de temps de jours en jours.

2.3.2 Les forçages utilisés

Dans la section 2.1.2, nous avons énuméré les sources de chaleur, de masse, et de quantité de mouvement qui constituent les conditions aux limites avec l'atmosphère. Différents produits existent pour obtenir ces forçages. Ils peuvent être soit spécifiés indépendamment, c'est-à-dire que chacun des flux est explicitement donné en entrée du modèle, soit calculés par les formules bulk (*Large et Yeager, 2004*). Cette dernière solution que nous avons choisie permet une meilleure cohérence avec les variables océaniques de surface calculées par le modèle. Dans ce cas, les flux suivants sont calculés en fonction des variables océaniques et atmosphériques :

- Flux de chaleur sensible et latente

$$\mathbf{Q}_{\text{SEN}} = \rho_a c_p^a C_H U_{10} (T_a - T_w) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{LAT}} = \rho_a L_e C_E U_{10} (q_a - q_w) \quad (2.11)$$

ρ_a est la densité de l'air, c_p^a et L_e sont la capacité calorifique et la chaleur latente de vaporisation de l'air, U_{10} la vitesse de l'air, T_a et T_w la température de l'air et de l'eau, q_a et q_w l'humidité spécifique de l'air et l'humidité spécifique de l'air à saturation et à la température T_w .

- Rayonnement infrarouge

Le flux par rayonnement infrarouge est le bilan du flux émis et reçu par l'océan, il s'exprime avec l'équation suivante :

$$\mathbf{Q}_{\text{LW}} = (1 - \alpha_{lw}) rad_{lw} - \epsilon \sigma T_w \quad (2.12)$$

α_{lw} est l'albédo pour l'infrarouge, rad_{lw} est une donnée satellite journalière, ϵ l'émissivité de la surface océanique et σ la constante de Stephan-Boltzmann.

- Evaporation

Le flux d'eau douce dû à l'évaporation se déduit facilement du flux de chaleur latente :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{Q}_{\text{LAT}}}{L_e} \quad (2.13)$$

Avec ces formules bulk, seuls les paramètres T_a , q_a , U_{10} , rad_{lw} , \mathbf{Q}_{SW} et \mathbf{P} suffisent pour déterminer tous les forçages atmosphériques. Nous utilisons dans la configuration les paramètres CORE (*Large et Yeager, 2004*) pour les années 1999 et 2000.

Les paramètres sont spécifiés sur la grille ORCA 025, avec une période temporelle de spécification de 6h pour T_a , q_a et U_{10} , d'un jour pour rad_{lw} et \mathbf{Q}_{SW} , et d'un mois pour les précipitations \mathbf{P} . Pour le calcul des forçages en un pas de temps donné, une interpolation temporelle linéaire est effectuée entre les paramètres CORE spécifiés les plus proches.

2.3.3 Les frontières latérales

Traitement des données aux frontières

Différents types de frontières sont envisageables pour réaliser une configuration régionale. Les frontières fermées ne laissent passer aucun flux de matière, de chaleur ou de salinité, elle ne sont donc pas adaptées lorsque d'importants courants traversent le domaine, ou tout simplement lorsque la dynamique à l'extérieur du domaine régional influence la dynamique intérieure.

Les frontières spécifiées consistent à imposer autour du domaine la valeur des variables océaniques issues généralement d'une configuration plus étendue ou globale. Avec l'utilisation de

telles frontières, il est recommandé d'utiliser une "zone tampon" en bordure du domaine dans laquelle la viscosité est fortement augmentée, permettant un écoulement plus laminaire proche des frontières. Cela évite des discontinuités trop fortes entre la dynamique générée à l'intérieur de la zone et les valeurs spécifiées.

Enfin, les frontières radiatives, utilisées dans notre configuration, permettent à la fois de tenir compte des valeurs spécifiées et de la dynamique sortante du domaine. Pour un détail de l'algorithme, on pourra se référer à la thèse de *Cailleau* (2004). Les valeurs spécifiées utilisées dans la configuration TATL4 proviennent de la dixième année d'une simulation climatologique de DRAKKAR sur NATL4 (*Barnier et al.*, 2008). Elles sont fournies tous les 5 jours et interpolées linéairement pour chaque pas de temps intermédiaire.

Problème de la SSH avec les frontières radiatives

Les frontières n'étant pas spécifiées mais radiatives, le bilan de volume peut être différent de celui du modèle global à l'intérieur du même domaine. Dans la pratique, si aucune correction n'est appliquée, le volume a tendance à diverger lentement. Une correction est donc appliquée sur les vitesses normales aux frontières afin de maintenir le volume constant. La SSH moyenne sur l'ensemble du domaine est donc constante dans TATL4, mais comme nous nous intéresserons aux variations petites échelles de la SSH, cela aura peu d'impact sur nos études.

Emplacement des frontières

Dans l'Atlantique tropical, nous nous intéressons à deux zones de forte variabilité qui sont la bande équatoriale et la région le long de la côte Brésilienne. La région d'intérêt se situe donc globalement sur une bande de 10S - 15N. Les frontières sont choisies de façon à contenir dans le domaine un peu plus que les zones d'intérêt car elles peuvent perturber légèrement la circulation dans leurs abords. Il est préférable d'éviter la présence de forts courants tangentiels le long des frontières.

La figure 2.1 montre la position des frontières, qui est telle que le NBC (North Brazil Current) traverse la frontière Ouest avec une direction relativement orthogonale, et le DWC (Deep Western Current) traverse uniquement et relativement perpendiculairement la frontière Nord. Un point terre (l'île de Saint Bartélémy) sépare ces deux frontières. La séparation de ces deux courants à travers chacune des frontières est montrée sur la figure 2.2. Le DWC est le courant présent contre la topographie entre 1000 m et 2500 m de profondeur.

Les deux dynamiques qui nous intéresseront particulièrement, les ondes tropicales d'instabilités et les anneaux du courant du Brésil, sont toutes deux formées à l'intérieur du domaine et seuls les anneaux sortent du domaine. Parmi les principaux courants, le DWC entre par la frontière Nord, mais son étude n'est pas envisagée dans cette configuration régionale étant donné que ce courant est forcé à l'échelle globale.

La dynamique modélisée que nous étudierons est a priori assez peu dépendante des données aux frontières.

2.3.4 Validation

Les frontières ont été placées de façon à interagir le moins possible avec la dynamique modélisée, mais il convient de vérifier que l'implémentation de celles-ci fonctionne bien. Nous avons réalisé une simulation avec les mêmes forçages et une même condition initiale que la simulation globale servant à forcer les frontières, pour comparer les résultats.

Dans cette simulation, nous avons premièrement constaté la présence de vitesses tangentielles le long des frontières qui n'existent pas dans la simulation globale. Cependant, ces vitesses restent très localisées le long des frontières, et ne dépassent pas l'étendue de quelques mailles à l'intérieur

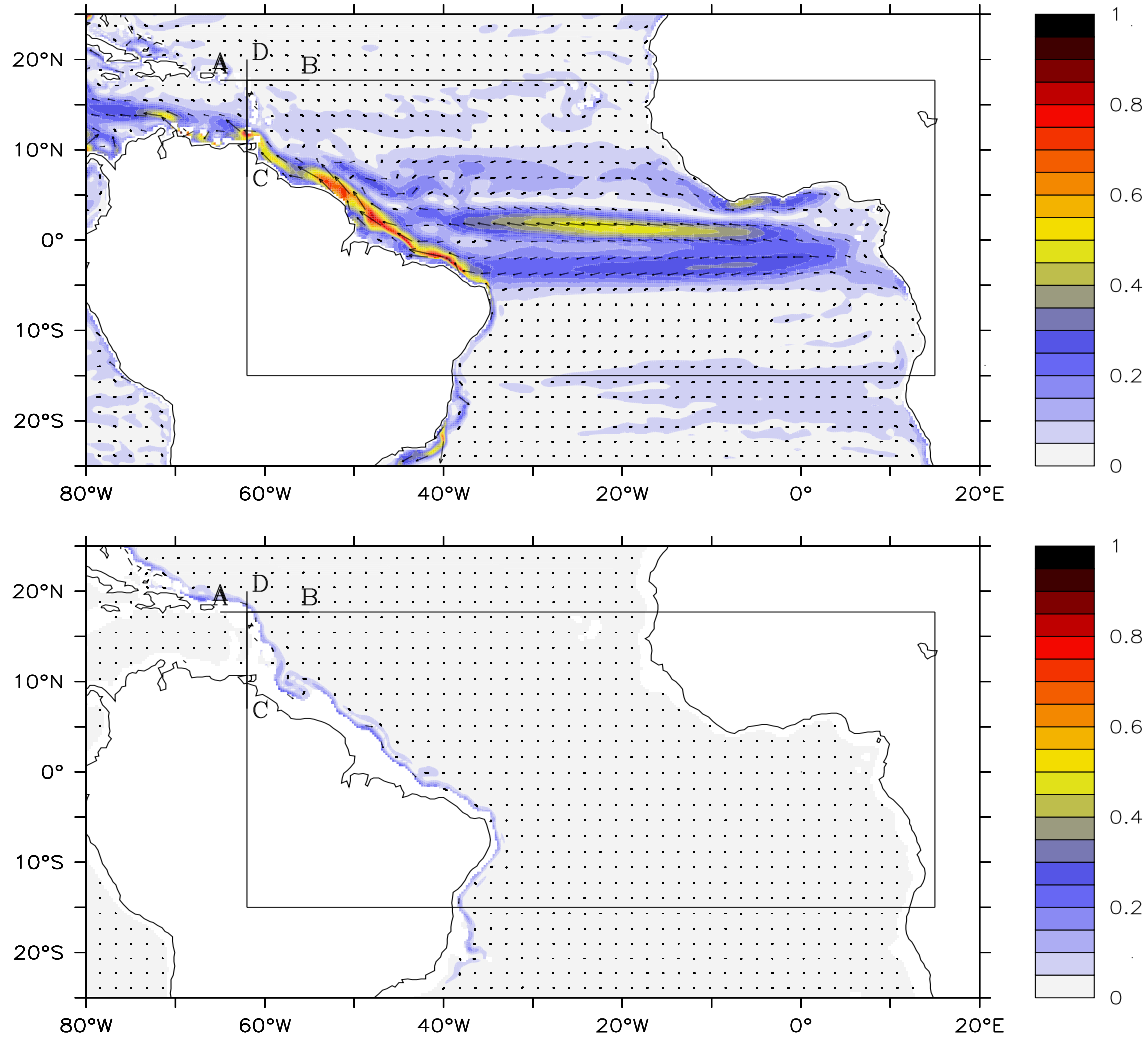


FIG. 2.1 – Champs de vitesses absolues (m/s) moyennées sur la 10^{ème} année de la simulation de DRAKKAR servant à spécifier les frontières, en surface à gauche et à 1655m de profondeur à droite. Le cadre représente les frontières choisies.

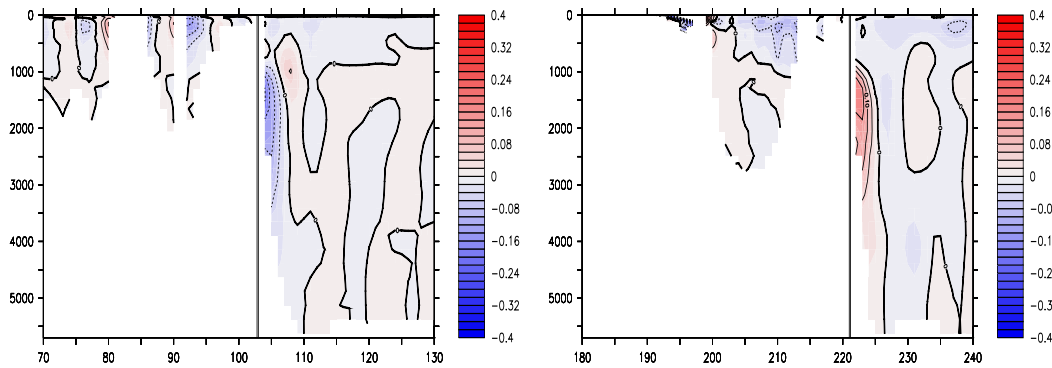


FIG. 2.2 – Coupe représentant la vitesse normale (m/s) aux sections AB (à gauche) et CD (à droite), représentées sur la figure 2.1.

du modèle. Elles n'affectent donc pas directement les zones d'intérêt. Une animation de la vitesse semble montrer, de façon certes très qualitative, que ces vitesses tangentielles n'interagissent pas avec la dynamique à l'intérieur du domaine. Ces résultats ont d'ailleurs été observés dans la plupart des configurations régionales fonctionnant avec des frontières radiatives.

Un travail plus approfondi de comparaison a été effectué entre la simulation décrite ci-dessus et la simulation globale. Les principaux phénomènes dynamiques, décrits dans le chapitre suivant, ont été comparés et ont montré le succès de l'implémentation des frontières. Dans le cas des phénomènes au comportement chaotique, l'état entre les deux simulations diffère au bout de quelques mois ce qui est tout à fait normal. Cette comparaison a permis de démontrer une nouvelle fois le bon fonctionnement des frontières radiatives, dans une zone certes relativement calme avec peu de dynamique entrante. Nous ne détaillons pas plus longuement ces résultats de validation, l'objectif de cette thèse n'étant pas de développer les performances des frontières régionales, mais une simple utilisation de celles-ci.

2.3.5 La simulation REF

Une simulation de référence (REF) est réalisée sur une période de 2 ans pour étudier la dynamique qui sera dans le chapitre suivant, et pour les expériences jumelles dans le reste de l'étude. La condition initiale est extraite au 1^{er} janvier de la 10^{ème} année de la simulation globale de DRAKKAR. Les flux CORE des années 1999 et 2000 sont appliqués durant les deux premières années. Nous avons poursuivi cette simulation sur une durée de 10 ans en répétant les flux de l'année 2000 pour réaliser certaines études.

Récapitulatif

La configuration TATL4 a été mise en place afin d'effectuer à faible coût de calcul des simulations entre 15S et 17.5N, une région où les circulations océaniques présentent des intérêts particuliers comme nous allons le voir dans le chapitre suivant. Les caractéristiques techniques principales de la configuration sont résumées dans le tableau 2.3.5.

Le domaine et la discrétisation :	
Etendue géographique :	15°E, 61.5°E, 15°S, 17.75°N
dimensions de la grille :	307 x 134 sur l'horizontale (résolution de 0.25°), 46 niveaux verticaux
discrétisation temporelle :	$\Delta T = 4320$ secondes
Paramétrisation :	
Turbulence horizontale :	Paramétrisation Laplacienne pour les traceurs et bi-Laplacienne pour les vitesses
Turbulence verticale :	Paramétrisation TKE
Forçages (utilisation des formules bulk) :	
Température de l'air, humidité et vents (T_a , q_a et \vec{U}_{10}) :	CORE, fréquence de spécification de 6h
Flux solaire et rayonnement infra-rouge (Q_{SW} et Q_{LW}) :	CORE, fréquence de spécification de 1 jour
précipitations (P) :	CORE, fréquence de spécification de 1 mois

TAB. 2.1 – Principales caractéristiques techniques de TATL4

Chapitre 3

La dynamique de l'Atlantique tropical : modélisation et enjeux

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer certaines faiblesses de la modélisation dans l'Atlantique tropical afin de dégager de véritables enjeux auxquels devra répondre l'assimilation de données altimétriques. Il s'appuie sur des travaux antérieurs sur la dynamique de la bande équatoriale et de la zone du courant du Brésil, et sur des résultats de la configuration TATL4.

Après une description générale de la dynamique et de sa modélisation dans TATL4, une étude est menée sur la sensibilité de la modélisation aux paramètres du modèle en deuxième partie. Compte-tenu des incertitudes existantes sur ces paramètres, nous mettrons en évidence les principales sources d'erreurs du modèle dans l'Atlantique tropical. Enfin, en confrontant les incertitudes du modèle avec les exigences de l'océanographie opérationnelle, nous dégagerons en troisième partie les enjeux de l'assimilation pour cette région.

Les résultats obtenus serviront de base pour construire des expériences jumelles pertinentes dans le chapitre 5.

3.1 Présentation de la dynamique et de sa modélisation dans TATL4

3.1.1 Localisation des deux régions d'étude

La simulation en mode libre REF dont les paramètres sont expliqués dans le chapitre précédent a été réalisée sur une durée de 10 ans. Elle met en évidence deux zones intéressantes, où la dynamique présente des caractères remarquables. Le long de l'équateur, entre 7N et 7S, et entre 35W et 15E, nous définissons la région "TIW" (pour Tropical Instability Waves) et le long de la côte Brésilienne, la région "NBC" (pour North Brazil Current). Ces noms se réfèrent aux caractéristiques de la dynamique que nous détaillons ci-dessous.

D'après la figure 3.1, l'énergie cinétique turbulente est forte dans les deux régions d'étude qui sont encadrées en noir (région TIW) et en rouge (région NBC). Cette énergie correspond à des échelles de l'ordre de 300-1000 km comme le montre à titre d'exemple le champ instantané de vitesse sur la figure 3.2. Les caractéristiques de cette dynamique sont bien différentes selon la région comme nous allons le voir, c'est pour cette raison qu'elles ont été distinguées.

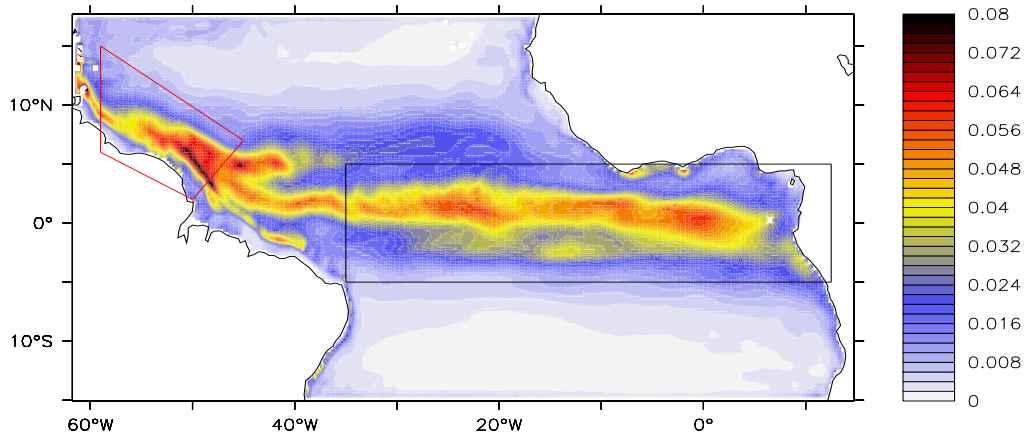


FIG. 3.1 – *Energie cinétique turbulente moyenne (Joules) à 30m de profondeur calculée sur 10 ans dans la simulation REF. Cadre noir : région TIW, cadre rouge : région NBC.*

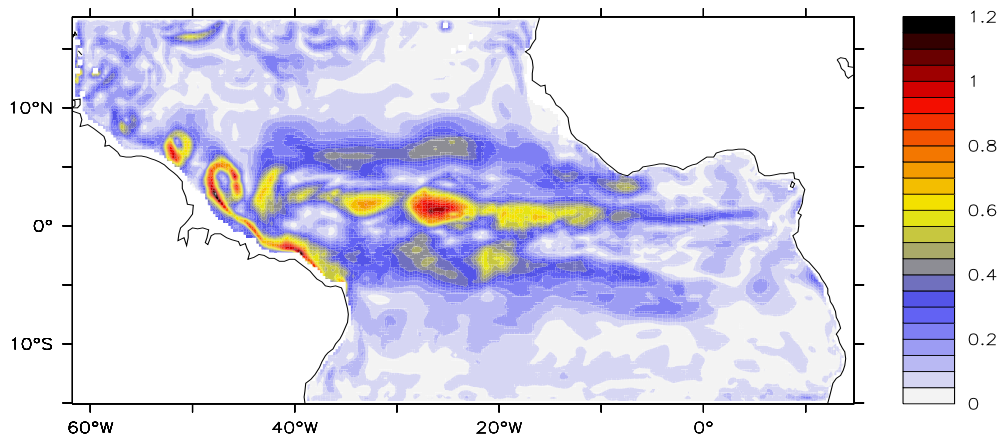


FIG. 3.2 – *Vitesse absolue (m/s) instantanée en surface au jour 230 dans la simulation REF.*

3.1.2 Les principaux courants de l'Atlantique tropical

Le bassin de l'Atlantique tropical possède une dynamique complexe où interagissent de nombreux courants. La figure 3.3 donne une vue d'ensemble sur les principaux courants du bassin, qui sont utilisés pour la description de la dynamique dans les deux sections suivantes.

3.1.3 Dynamique dans la région TIW

Description

Dans la zone tropicale, les Alizés (vents d'est) génèrent en surface deux courants de part et d'autre de la zone de convergence intertropicale (ITCZ) : Le NEC (North Equatorial Current) et le SEC (South Equatorial Current). L'ITCZ étant décalé au nord par rapport à l'équateur physique, le SEC est le courant de surface dominant dans la région TIW. Celui-ci peut se décomposer en trois branches, le nSEC, le eSEC, et le sSEC respectivement pour northern, equatorial, et southern, de part et d'autre de l'équateur (voir figure 3.3). Ce courant forcé par le vent transporte les eaux de surface d'est en ouest en accumulant les eaux chaudes à l'ouest et en maintenant une pente générale de la SSH sur le bassin. Entre 50m et 100m de profondeur le long de l'équateur, le EUC (Equatorial Under Current) assure un retour des eaux vers l'est.

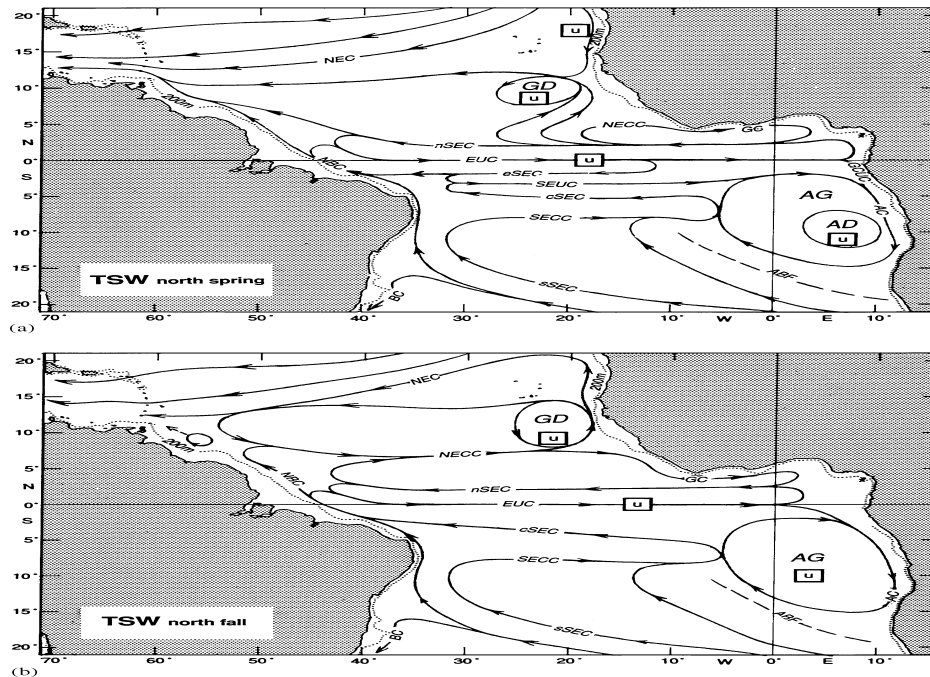


FIG. 3.3 – D’après Stramma et Schott (1999). Schéma montrant la distribution horizontale des courants principaux entre 0 et 100 m au printemps (en haut) et à l’automne (en bas)

La circulation le long de la bande équatoriale possède un cycle annuel fort. Des études sur les variations de la structure verticale de l’océan Atlantique (*Busalacchi et Picaut (1983)*, *Du Penhoat et Tréquier (1985)*, *Philander et Pacanowski (1986)*) ont montré que le cycle annuel de la thermocline est contrôlé par le forçage du vent à l’échelle du bassin. L’intensification des Alizés à la fin du printemps augmente les courants et amincit la thermocline dans la partie est du bassin (*Houghton, 1989*) ce qui forme une langue d’eau froide en surface le long de l’upwelling équatorial. Cette intensification augmente d’une part le cisaillement vertical entre SEC et l’EUC, créant des instabilités baroclines, et d’autre part le cisaillement horizontal entre le SEC et le NECC en surface et entre l’EUC et le SEC en subsurface, créant des instabilités barotropes. Cela favorise l’apparition des ondes tropicales d’instabilités (TIW) dont les mécanismes exacts de formation et de propagation sont encore discutés. Les TIW, présentes dans le Pacifique et l’Atlantique sont caractérisées entre autre par une perturbation du champ de vitesse dans les premières couches, formant des panaches caractéristiques sur la SST comme le montre à titre d’exemple la figure 3.4, avec une extension zonale d’environ 800 km et une vitesse de propagation vers l’ouest autour de 0.4-0.5 m/s. Les TIW ont une signature sur le champ de vitesse et sur la SST, mais aussi sur la SSH qui varie entre 5 cm et 10 cm selon les ondes. Cette signature topographique est faible comparée à celle des tourbillons du Gulf-Stream par exemple (proche de 20-40 cm), mais suffisante pour être détectée par les satellites altimétriques modernes.

Modélisation dans TATL4

L’analyse de la simulation en mode libre REF montre que les principaux caractères de la circulation dans la région TIW sont bien reproduits dans TATL4. D’une part, les courants moyens ainsi que leur variabilité annuelle (non montré ici) sont correctement reproduits, et d’autre part, des TIW sont bien résolues durant l’été boréal avec des caractéristiques globalement semblables à celles observées. Sur la figure 3.5, deux ondes d’instabilités, et une troisième en formation, ont une signature bien visible sur le champ de SST et de SSH. Le front de SST présente bien

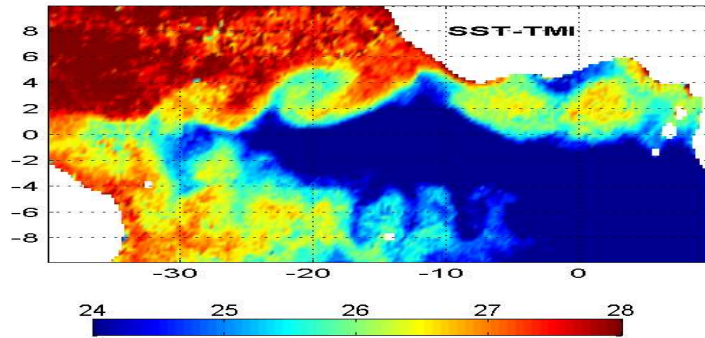


FIG. 3.4 – *Champ observé de SST le 6 août 2003*

des ondulations. La représentation dans TATL4 est aussi très correcte du point de vue de la dimension spatiale des ondes comme le montre la comparaison entre des observations (figure 3.4) et le modèle (figure 3.5). La signature des TIW sur la SSH se situe effectivement entre 5 cm et 10 cm dans REF, comme d'après les observations satellites. Dans REF, la vitesse de propagation des ondes est légèrement supérieure à celle que l'on observe dans l'océan, autour de 0.50m/s en moyenne au lieu de 0.45m/s en moyenne d'après les observations.

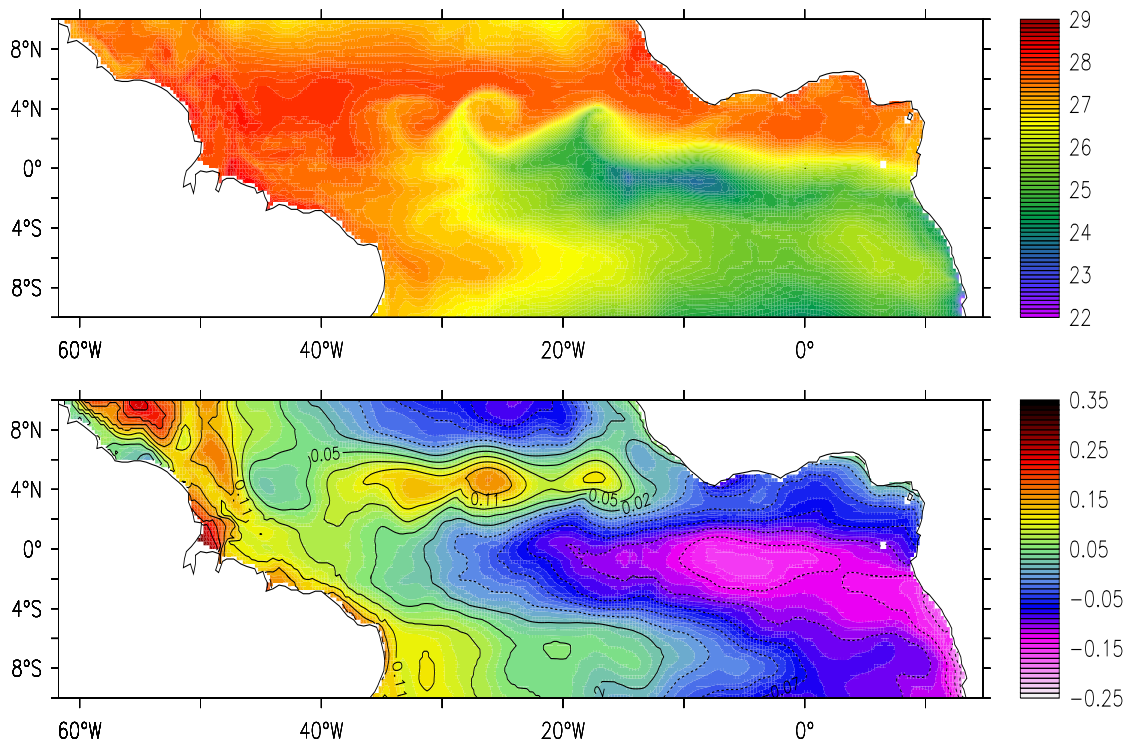


FIG. 3.5 – *Champ instantané de SST ($^{\circ}$ C) en haut et de SSH (m) en bas au jour 200 dans la simulation REF.*

3.1.4 Dynamique dans la région NBC

Description

La circulation caractéristique de la côte Brésilienne a également fait l'objet de nombreuses études. Avant les années 1980, la circulation de l'Atlantique tropical de l'ouest était déjà connue comme étant très énergétique et riche en tourbillons (*Bruce et al.*, 1985). En effet, un fort courant de bord ouest (North Brazil Current, NBC) longe la côte Brésilienne entre 0 m et 500 m de profondeur (voir figure 3.3 pour sa localisation). Celui-ci est alimenté en partie par un courant de l'hémisphère sud (le sSEC) et par le eSEC de la région équatoriale. En été, automne et hiver, le NBC de surface se sépare à 6°-8°N et rétroflète pour alimenter le NECC (North Equatorial Counter Current) vers l'est (*Richardson et Walsh* (1986), *Garzoli et Katz* (1993)) en fermant le gyre anticyclonique équatorial forcé par le vent. Plus en profondeur, entre 100 m et 200 m, le NBC rétroflète pour alimenter le EUC.

L'existence d'anneaux, créés au niveau des différentes rétroflexions du NBC (en NECC ou en EUC), n'a été découverte qu'à la fin des années 1980 à partir notamment d'une imagerie de la couleur de l'eau et de données de courantomètres au large des côtes Brésiliennes (*John et al.*, 1990; *Richardson et al.*, 1994). Ils ont ensuite été observés par altimétrie (*Didden et Schott*, 1993; *Goni et John*, 2001). Le NBC a d'ailleurs la particularité de ne pas être un courant permanent en aval de la zone de rétroflexion, puisqu'il est seulement caractérisé par ces anneaux qui, en moyenne, assurent un transport volumique le long de la côte. La rétroflexion du NBC est dynamiquement similaire à celle du courant des Aiguilles au sud de l'Afrique (*Lutjeharms*, 1996). De même que pour les Aiguilles, la rétroflexion se ferme de temps en temps en formant des anneaux anticycloniques comme le montre le schéma de la figure 3.6. Ils se propagent le long de la côte vers le Nord-ouest, à une vitesse variant entre 0.08 et 0.16 m/s selon les anneaux et leur position, jusqu'à traverser 3-4 mois plus tard topographie complexe des petites Antilles en se désintégrant parfois. Les anneaux ont un diamètre autour de 450 km, avec des vitesses instantanées dépassant parfois 1m/s à la périphérie, et sont associés à une anomalie positive de SSH, de quelques centimètres jusqu'à 15 cm pour les anneaux les plus gros. La signature topographique est donc un peu moins marquée que celle des tourbillons du Gulf-Stream.

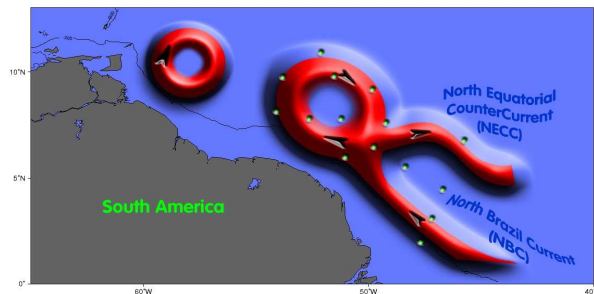


FIG. 3.6 – Schéma du mécanisme de formation des anneaux peu profonds.

Différents types d'anneaux ont été mis en évidence par *Fratantoni et al.* (1995b) puis plus précisément par *Garraffo et al.* (2003), qui distinguent les anneaux peu profonds (ou de surface), intermédiaires, profonds, et de subsurface. Les trois premiers types s'étendent de la surface jusqu'à 200, 500 et 900-1000m respectivement. Les anneaux de subsurface n'ont quasiment pas de signature sur la vitesse en surface. Les processus de formation des différents types d'anneaux sont les suivants : les anneaux de surface sont créés au niveau de la rétroflexion du NBC dans le NECC, tandis que les anneaux intermédiaires, profonds, et de subsurface sont généralement créés au niveau de la rétroflexion entre le NBC et le EUC, qui a lieu autour de 200m de profondeur. En moyenne 8 anneaux, de tous types confondus, sont formés chaque année.

Modélisation dans TATL4

Le courant NBC est bien présent dans REF le long de la côte comme le montre la figure 3.7, et se manifeste bien sous forme d'anneaux (figure 3.8 à gauche) au delà de la réflexion. Deux anneaux dont un en cours de formation apparaissent d'ailleurs clairement dans REF au jour 314. Ils se forment effectivement au niveau de la réflexion du NBC en NECC, il s'agit sur cette figure d'anneaux peu profonds (d'après la classification de *Fratantoni et al.*), avec environ 200 m d'extension verticale comme le montre la figure 3.9. Plus généralement, les anneaux simulés ont effectivement dans l'ensemble une extension verticale de 0 m à 200-500 m, avec un diamètre d'environ 400 km et une vitesse de propagation proche des observations, autour de 0.1 m/s à 55°ouest. Les vitesses instantanées dans les premières couches peuvent effectivement dépasser 1m/s pour les plus gros anneaux (figure 3.9) comme le suggèrent aussi certaines observations. Enfin, l'amplitude de la signature topographique des anneaux se situe effectivement autour de 10-15 cm (voir figure 3.8 à droite)

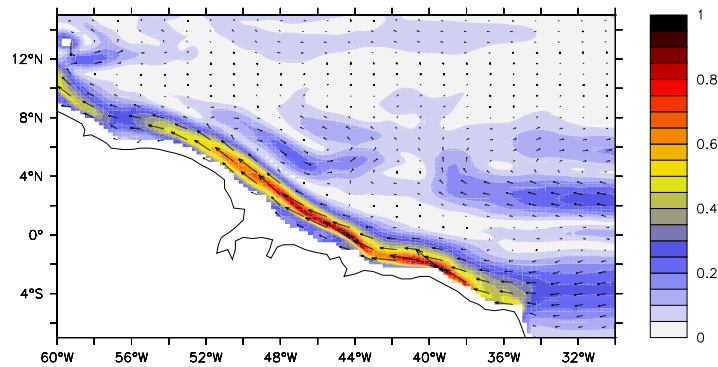


FIG. 3.7 – Vitesse à 30m de profondeur moyennée sur 10 ans dans REF

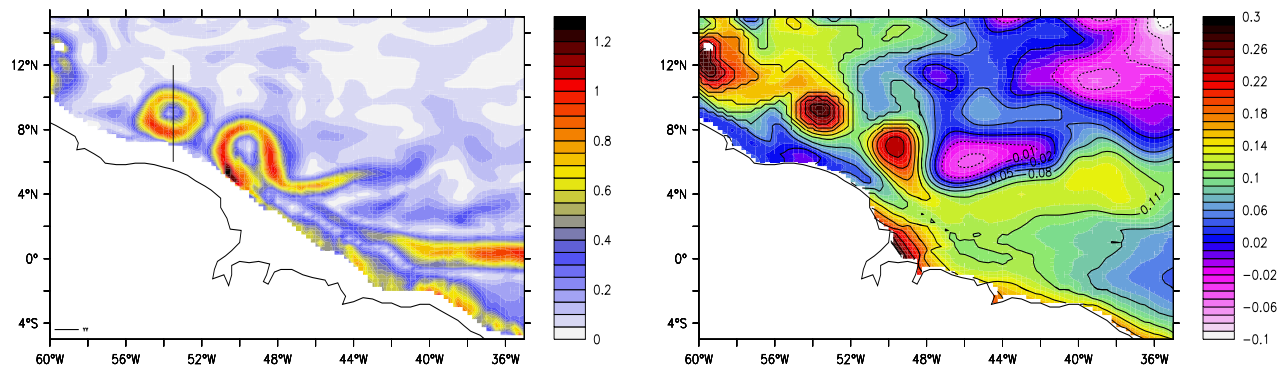


FIG. 3.8 – A gauche : Vitesse absolue (m/s) instantanée au jour 314 dans REF à 93 m de profondeur (niveau 10). Le trait noir représente la coupe de la figure 3.9. A droite : SSH (m) instantanée au jour 314 dans REF.

Sur la figure 3.9 à gauche, on remarque la présence du sous-courant de bord ouest (DWBC, Deep Water Boundary Current) autour de 1500 m de profondeur, circulant vers le sud-est. Étant donné que ce courant traverse le domaine par les frontières Nord puis sud, son intensité est globalement déterminée par les données aux frontières de TATL4, qui sont climatologiques. Nous ne nous intéresserons donc pas particulièrement à ce courant dans nos études. Il ne constituera pas non plus un enjeu pour l'assimilation de données restreinte à l'Atlantique tropical que nous réaliserons dans cette thèse.

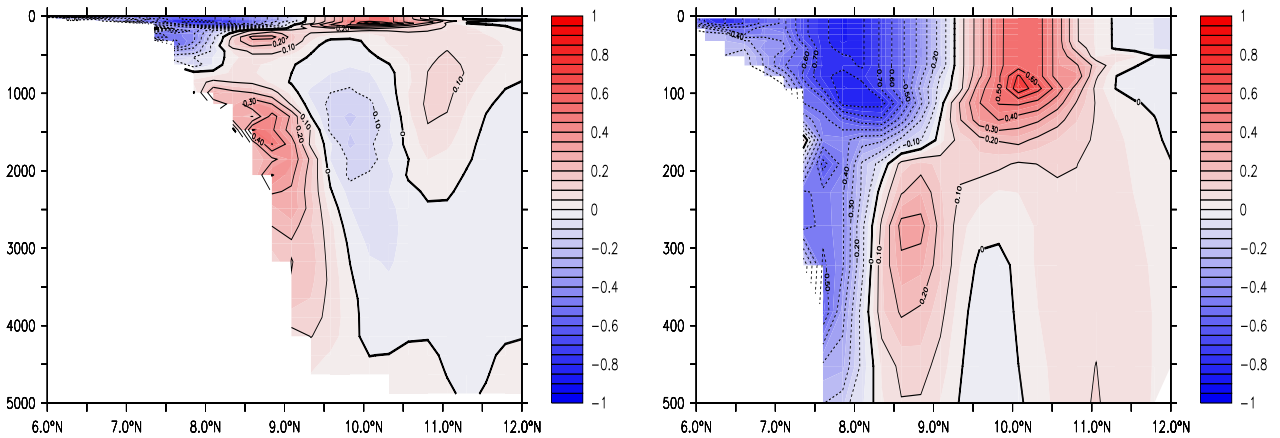


FIG. 3.9 – Coupes longitudinales de la vitesse zonale (m/s) au jour 314 dans REF selon la section représentée sur la figure 3.8 (trait noir) entre 0m et 5000m à gauche, et grossie entre 0m et 500m à droite.

3.2 La sensibilité de la dynamique dans les deux régions d'étude

Après avoir décrit la dynamique puis vérifié l'aptitude de la configuration TATL4 à résoudre les phénomènes de moyenne échelle attendus, nous testons dans cette section la sensibilité de la dynamique aux incertitudes sur les paramètres du modèle, afin d'estimer une part des erreurs de modélisation dans chacune des régions d'étude. Ceci est une étape primordiale avant la définition du cadre des expériences jumelles dans la deuxième partie de ce manuscrit.

Il existe un grand nombre de paramètres (voir Chapitre 2), internes au modèle tels que la résolution horizontale et verticale de la grille, les schémas numériques, les paramétrisations sous-maille verticales et horizontales, ou externes au modèle tels que les forçages, la condition initiale. En considérant que le modèle est relativement bien adapté pour représenter la dynamique tropicale (*Barnier et al.*, 2008), nous ne présentons pas ici de tests de sensibilité en faisant varier les paramètres internes. Nous étudions la sensibilité du modèle à deux paramètres externes : la condition initiale et les forçages. La sensibilité à des perturbations infinitésimales est aussi étudiée afin de mettre en évidence le caractère chaotique ou non de la circulation selon les régions.

3.2.1 Présentation des simulations

Pour mesurer l'influence d'un paramètre donné, le principe consistera à réaliser deux simulations dont le paramètre diffère. Si la différence introduite sur le paramètre est du même ordre de grandeur que son incertitude, alors la différence d'état entre les deux simulations donnera un bon ordre de grandeur de l'erreur de modélisation associée au paramètre.

Pour chaque expérience, la simulation de référence (REF) est identique.

- **Expériences sur la sensibilité à la condition initiale** : Deux expériences différentes sont réalisées en perturbant la condition initiale. Une première avec une perturbation infinitésimale, afin d'identifier les éventuelles régions où la dynamique (ou une partie de la dynamique) possède un comportement chaotique. La simulation CIE est réalisée avec la condition initiale de REF dont le champ de vitesse est multiplié par le facteur 0.99999, et a été réalisée sur une durée de 1200 jours. La perturbation appliquée à la condition initiale est donc infinitésimale devant les variations des champs océaniques. L'éventuelle divergence entre CIE et REF est étudiée dans les deux régions.

Une deuxième expérience a été réalisée avec une perturbation importante sur la condition initiale (de l'ordre de son incertitude), qui pourrait avoir un effet éventuellement persistant sur l'état océanique même dans les zones où la dynamique n'est pas chaotique. La simulation CID débute aussi au 1^{er} janvier 2000, mais avec l'état de REF au 1^{er} janvier 2001 et les mêmes forçages que REF (flux CORE de l'année 2000).

- **Expériences sur la sensibilité aux forçages :** La simulation C99 débute le 1^{er} avril 2000 (jour 125) avec le même état que REF, mais est forcée avec les flux CORE de l'année 1999. Le début de la simulation se situe volontairement deux mois avant l'épisode d'ondes d'instabilité intenses. La divergence de C99 par rapport à REF traduira l'effet d'une différence de forçage. Enfin une dernière simulation (V99), avec toujours la même condition initiale au 1^{er} avril 2000 (jour 125), a été faite avec les vents CORE de l'année 1999, mais en conservant les flux de chaleur et d'humidité de l'année 2000. La comparaison entre C99 et V99 montrera ainsi l'effet de la différence de vent seule.

Simulations	Conditions initiales	Flux de chaleur-humidité	forçage du vent
REF	REF au 1^{er} jan 2000	CORE 2000	CORE 2000
CIE	REF au 1 ^{er} jan 2000 avec $(U,V) \times 0.99999$	CORE 2000	CORE 2000
CID	REF au 1 ^{er} jan 2001	CORE 2000	CORE 2000
C99	REF au 1 ^{er} avril 2000	CORE 1999	CORE 1999
V99	REF au 1 ^{er} avril 2000	CORE 2000	CORE 1999

TAB. 3.1 – *Caractéristiques des expériences*

3.2.2 Sensibilité à la condition initiale

L'expérience CIE

Durant les 150 premiers jours, la différence entre REF et CIE est à peine discernable sur l'ensemble du domaine. Ensuite, des différences non négligeables apparaissent dans la région NBC comme le montre la figure 3.10 : les deux anneaux ne sont pas situés aux mêmes endroits entre les deux simulations. La figure 3.11 met d'ailleurs bien en évidence ces différences, spécifiques à la région NBC.

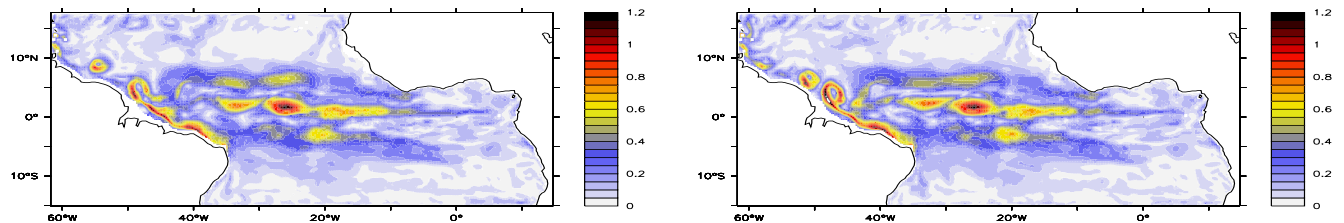


FIG. 3.10 – *Vitesse absolue (m/s) instantanée du jour 230 à 30m de profondeur pour les simulations REF à gauche et CIE à droite.*

Dans la région TIW : Dans cette région, les différences entre REF et CIE sont très légères même après les 150 premiers jours, et nous avons vérifié que les ondes d'instabilités ont même phase et même amplitude durant les trois années de simulation, ce que montre à titre d'exemple la figure 3.10 pour un jour particulier. Les signatures des ondes sur la vitesse de surface sont similaires dans les deux simulations. A l'ouest de la région TIW, de légères différences sont quand

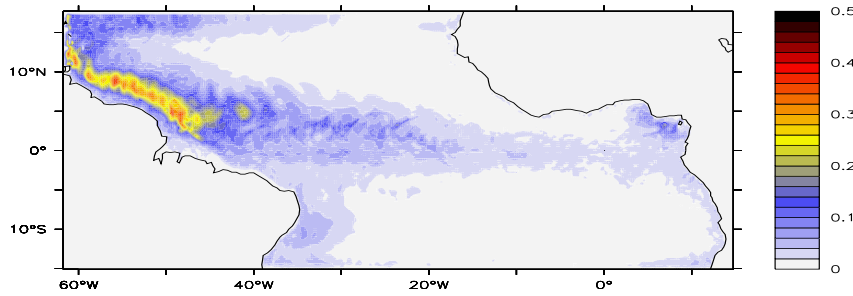


FIG. 3.11 – *Ecart RMS de la vitesse méridienne (m/s) à 30m de profondeur entre les simulations REF et CIE moyenné entre les jours 365 et 1200.*

même perceptibles. D'ailleurs sur la figure 3.11, l'erreur est un peu plus intense à l'ouest de la région TIW. Nous avons vérifié qu'en effet, certaines ondes d'instabilités notamment à la fin de l'épisode intense étaient parfois légèrement déphasées dans la zone aval. A l'extrémité est du bassin à 2°N aux environs de l'île de Sao-Tomé, REF et CIE diffèrent aussi très légèrement comme on peut le voir sur la figure 3.11. Finalement, la sensibilité du modèle aux perturbations infinitésimales reste très faible dans cette zone, nous montrerons plus loin que d'autres paramètres ont nettement plus d'influence.

Dans la région NBC :

Nous avons remarqué que durant les 150 premiers jours, les positions des anneaux étaient identiques entre REF et CIE. Pendant cette période, l'écart moyenné entre 0 m et 200 m de profondeur de la vitesse méridienne dans la région augmente progressivement jusqu'à $0.03 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ (figure 3.12). Après 150 jours, la variance oscille entre 0.01 et $0.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ et le régime devient différent : les positions des anneaux sont décorréelées comme le montre à titre d'exemple la figure 3.10 pour le jour 230 : l'anneau situé le plus à l'ouest est décalé d'environ 400km (soit sa taille caractéristique) entre REF et CIE. Les fortes variations en fonction du temps de la variance entre les deux simulations peuvent s'expliquer car le nombre de tourbillons est faible (2 ou 3 maximum à un instant donné), de telle sorte qu'une corrélation fortuite de la position des anneaux est probable. Nous avons d'ailleurs vérifié que la faible valeur de la variance entre les jours 450 et 500 (figure 3.12) était bien due à des positions à peu près similaires des anneaux. La divergence entre les deux simulations sur la SSH atteint des valeurs jusqu'à 0.002 m^2 (figure 3.13), correspondant à un écart RMS de 4-5 cm, ce qui est une valeur typique lorsque les anneaux ont des positions décorréelées.

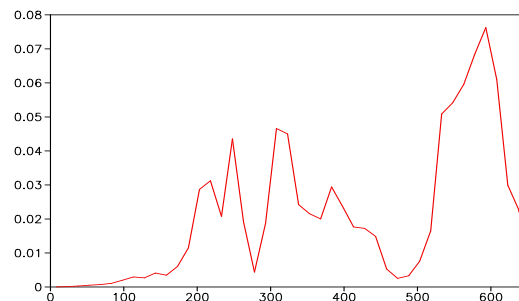


FIG. 3.12 – *Evolution temporelle (en jours) de la variance entre REF et CIE de la vitesse méridienne (m^2/s^2) dans la région NBC, moyennée entre les niveaux 1 et 10.*

Il est maintenant intéressant de regarder si ce caractère chaotique est encore présent sur des variables intégrées. Dans cette région où la connaissance du transport du NBC présente un

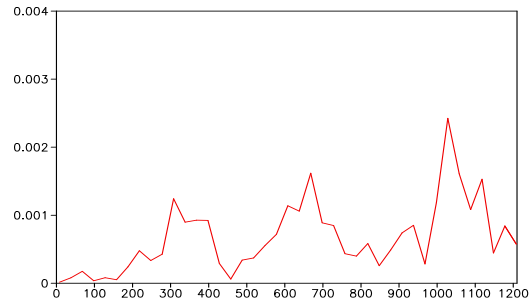


FIG. 3.13 – Evolution temporelle (en jours) de la variance entre REF et CIE de la SSH (m^2) dans la région NBC.

intérêt particulier, nous avons calculé le transport à travers une section dans REF et CIE. Au niveau du transport instantané, il n'est pas étonnant de constater de fortes différences (figure 3.14) étant donné que les anneaux, qui sont en grande partie responsables du transport, ne sont pas en phase. Or, le transport moyenné sur une période de temps de plusieurs mois présente encore de fortes différences entre les deux simulations comme on peut le voir au vu des variations entre les deux courbes de la figure 3.14. Ce n'est finalement pas surprenant étant donné le faible nombre d'anneaux par an. Ce résultat est en accord avec *Garraffo et al.* (2003) qui ont montrés que même avec un forçage identique répété sur 6 années, le nombre d'anneaux formés (entre 7 et 9), et la quantité de masse transportée (entre 4.9 et 8.1 Sv) sur une année entière étaient très différents selon les années.

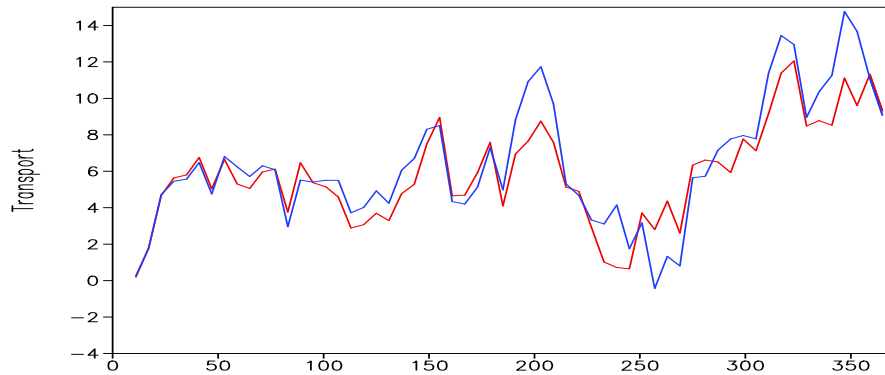


FIG. 3.14 – Transport (Sverdrup) du NBC à $52^\circ W$ dans les 200 premiers mètres, en fonction du temps pour REF (rouge) et pour CIE (bleu).

La dynamique des anneaux du Brésil est donc très chaotique, à tel point qu'une erreur de troncature entraîne une décorrélation des structures tourbillonnaires quelques mois après.

L'expérience CID

L'influence d'une perturbation non-négligeable sur la condition initiale est maintenant étudiée (simulation CID). Sachant les résultats de l'expérience précédente, il est évident que la divergence entre REF et CID sera conséquente et infiniment persistante dans la région NBC. L'intérêt de cette expérience concerne donc la région TIW.

La figure 3.15 à gauche montre les champs de température de surface pour les conditions initiales de REF et CID sur tout le domaine.

La SST des états initiaux montre que les structures de moyenne échelle (les TIW) ont des positions bien différentes entre REF et CID et n'ont pas non plus la même amplitude. Dans les

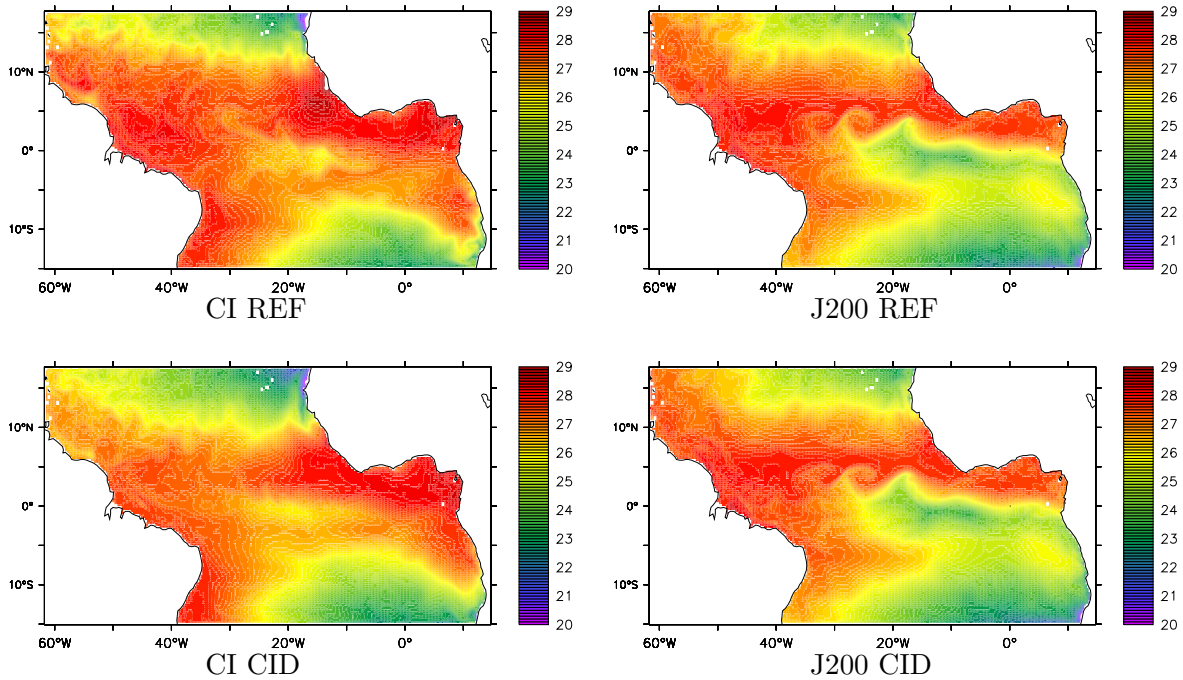


FIG. 3.15 – SST ($^{\circ}\text{C}$) au 1^{er} janvier (jour 1) à gauche (=conditions initiales) et au jour 200 à droite. En haut la simulation REF et en bas CID.

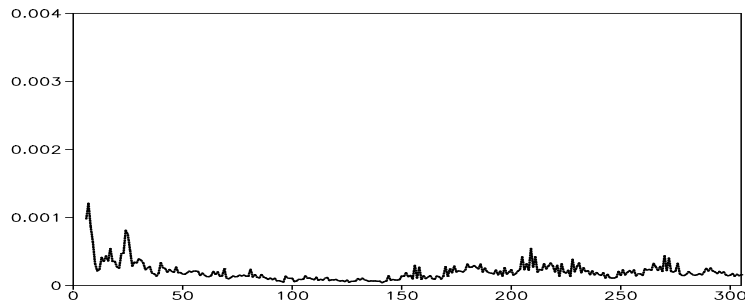


FIG. 3.16 – Evolution temporelle (en jours) de la variance (m^2) de la SSH entre les simulations REF et CID dans la région TIW.

deux cas, ces TIW sont de faible amplitude car cet instant initial ne se situe pas durant la période des TIW intenses entre juin et septembre. En revanche, sept mois plus tard, durant cette période, deux ondes sont présentes aux mêmes endroits (20W et 30W) dans chaque simulation (figure 3.15 cartes de droite). L'intensité des ondes ainsi que leurs phases sont quasiment identiques. La position de la thermocline et plus généralement la structure thermique en profondeur sont aussi très similaires (non montré) entre REF et CID. Les écarts RMS entre les deux simulations montrent effectivement que l'influence de la condition initiale est largement décroissante au cours des deux premiers mois, atteignant un niveau très faible le reste du temps (voir figure 3.16). La variance de la différence en SSH entre les deux états initiaux est de 0.0013 m^2 (de l'ordre de 3-4 cm RMS) au 1^{er} janvier dans la région TIW. Après deux mois, celle-ci devient proche de 0.0002 m^2 (de l'ordre de 1.5 cm RMS) le reste du temps. Cependant, une légère augmentation de la variance entre les deux champs de SSH est notable entre les jours 150 et 250 (figure 3.16 à gauche), correspondant à la période d'intensification des TIW, mais celle-ci reste très légère.

Les niveaux de différences atteints pour la SSH comme pour les températures sont très faibles dans cette zone comparées aux erreurs que l'on peut attendre des modèles océaniques. La

condition initiale n'est donc potentiellement pas une source d'erreur importante dans la région TIW.

3.2.3 La sensibilité aux forçages extérieurs

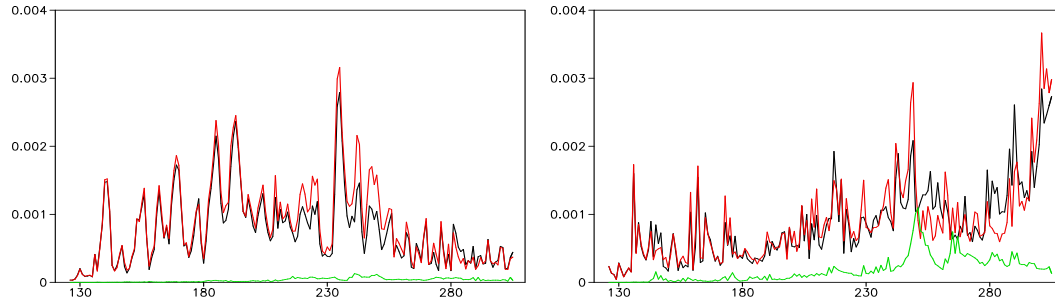


FIG. 3.17 – Variance entre REF et C99 (noir), entre REF et V99 (rouge) et entre C99 et V99 (bleu) pour la SSH. A gauche : la région TIW. A droite : la région NBC.

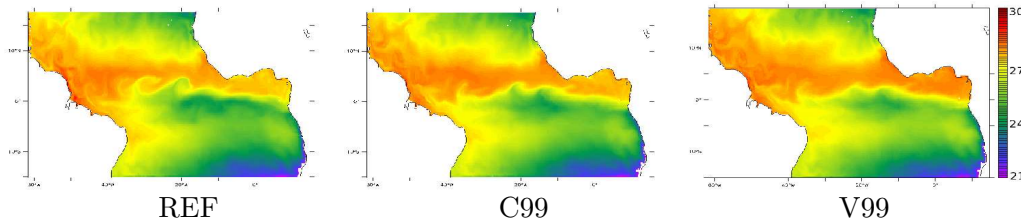


FIG. 3.18 – SST ($^{\circ}$ C) au jour 200 pour les simulations REF (gauche), C99 (centre) et V99 (droite).

Dans la région TIW :

L'expérience précédente a montré que l'état initial n'était pas déterminant dans la dynamique de la région TIW, et qu'une erreur sur celui-ci était quasiment "oubliée" deux mois plus tard, à condition bien sûr que cet état initial ne soit pas irréaliste.

Cane (1979) parmi d'autres a montré que les flux, et notamment les forçages du vent, déterminent largement la structure thermique des régions équatoriales. Les forçages du vent et notamment ses variations saisonnales déterminent la phase des TIW (*Vialard et al.*, 2002). Pour illustrer ces résultats dans notre configuration TATL4, nous étudions les simulations C99 et V99. La simulation C99 (voir figure 3.17 à gauche, courbe rouge) diffère rapidement de REF. Après une quinzaine de jours, la variance de la différence entre les deux simulations atteint des valeurs significatives. L'épisode d'ondes d'instabilités qui suit trois mois plus tard est effectivement très affecté par la perturbation de vent : la température de surface sur laquelle sont visibles les panaches des TIW au mois d'août (figure 3.18) est bien différente entre les deux simulations, les ondes ne sont pas du tout en phase entre REF et C99. De plus, l'intensité des ondes est moins forte avec les flux de l'année 1999. Les forçages extérieurs ont, dans la région TIW, une influence prédominante devant la condition initiale finalement assez vite "oubliée" par le modèle.

L'utilisation des formules bulk (*Large et Yeager*, 2004) permet un calcul du flux d'évaporation à partir du champ de vent. Ainsi la modification du vent seul réalisée dans V99 est associée à un flux d'évaporation consistant avec le nouveau champ de vent. La comparaison de C99 et V99 (figure 3.18 et figure 3.17 courbe bleue, rouge et verte pour la différence, à gauche) montre que le vent est bien le principal responsable parmi les forçages dans la région TIW. La variance

de V99-REF n'est que très légèrement inférieure à celle de C99-REF dans cette région, C99 ayant les vents et les autres forçages de 1999, tandis que le V99 n'a que les vents de 1999 et les mêmes forçages que REF. Les flux de chaleur et d'humidité ont peu d'effets sur la dynamique de la région TIW dans cette expérience (figure 3.17 courbe verte). Le vent est effectivement un forçage d'une importance majeure dans TATL4 comme le soulignent les études existantes sur la dynamique tropicale.

Dans la région NBC :

Étant donné le caractère chaotique de la circulation dans la région NBC, il n'est pas étonnant que constater une différence entre C99 et V99 dans cette région (figure 3.17 à droite). Celle-ci n'est pas franchement supérieure à la divergence de CIE (figure 3.13), ce qui montre l'importance du caractère chaotique devant les autres incertitudes pour la résolution des états océanique instantanés dans cette région.

3.3 Enjeux

Les incertitudes sur les paramètres externes au modèle ont un fort impact sur la dynamique représentée ce qui soulève de véritables enjeux pour la représentation et la prévision de l'état de l'océan dans l'Atlantique tropical. Sans assimilation de données, les erreurs de modélisation seront importantes, dans la région NBC principalement à cause du caractère chaotique de la dynamique, et dans la région TIW principalement à cause de l'incertitude sur le vent.

Les enjeux auxquels nous nous intéressons dans ce travail concernent surtout le contrôle et la prévision de la circulation à relativement courte échelle de temps.

3.3.1 Dans la région TIW

Trois principaux enjeux peuvent être soulevés pour la correction de la dynamique moyenne échelle de la région TIW :

- **Le phasage des ondes et la correction de l'état océanique instantané :** L'impact des ondes d'instabilités sur divers processus physiques et biogéochimiques est très fort. *Swenson et Hansen (1999), Vialard et al. (2001)* ont souligné leur impact sur la langue d'eau froide (eau froide remontée par l'upwelling équatorial). Les TIW ont aussi une influence sur l'atmosphère, notamment, les anomalies de température dues aux TIW agiraient sur la cyclogénèse (*Flatau et Giraldo, 2008*), ce qui pose le véritable enjeu du contrôle temporel de la position et de l'intensité des ondes. Enfin, ce contrôle pourrait aussi permettre une meilleure connaissance de la production biologique primaire très liée à ces ondes (*Menkes, 2002*). De façon plus générale, le contrôle de la vitesse, de la température, et de la salinité à un instant donné constituera un enjeu pour l'assimilation d'observations altimétriques.
- **La correction de variables intégrées :** Différentes études soulignent le rôle clé des ondes tropicales d'instabilités, dans le bilan de chaleur de la couche de mélange (*Hansen et Paul, 1984*) et dans le transport de masse et de chaleur (*Jochum et al., 2003*). La correction de variables intégrées telles que le contenu thermique, les transports volumiques, sont donc des objectifs importants.
- **La correction du vent :** La forte dépendance entre la signature moyenne échelle observée des TIW (notamment SST et SSH) et le vent offre aussi des perspectives pour la correction du vent. Celles-ci ne sont pas étudiées dans cette thèse qui s'intéresse surtout

aux scénarios satellitaires, mais des études de correction de forçages par assimilation ont déjà été réalisées dans *Skachko et al.* (2006).

3.3.2 Dans la région NBC

La région du courant du Brésil est souvent obscurcie par des nuages qui empêche l'observation des anneaux par la couleur de l'océan (*Fratantoni et Glickson*, 2001), alors que l'altimétrie n'est pas affectée par les nuages. Cette particularité de la région NBC donne encore plus de poids aux enjeux de l'assimilation altimétrique.

Deux enjeux majeurs sont retenus pour la région NBC :

- **Contrôle de la position et de l'intensité des anneaux** : L'impact des anneaux sur les distributions de salinité et de phytoplancton (*Kelly et al.* (2000), *Cowen et Castro* (1994), *Borstad* (1982)), et dans un cadre plus économique les menaces qu'ils posent sur l'expansion des plate formes offshore de pétrole et de gaz sur le plateau continental, font du contrôle de la position et de l'intensité des anneaux un défis intéressant. Aussi justes que soient les forçages, les paramétrisations du modèle, il ne sera pas possible de résoudre la position des tourbillons en modélisation libre à cause du caractère chaotique de la circulation dans cette région. L'assimilation est un moyen a priori indispensable pour satisfaire de telles exigences. De même que pour la région TIW, le contrôle des champs de vitesse instantanés constituent un enjeu fort.
- **Contrôle du transport du NBC** : La contribution d'un anneau au transport de volume annuel est d'environ 1 Sv (*Goni et John*, 2001), d'après des mesures de satellites (T/P et Sea-Wifs). En considérant qu'il se forme en moyenne 5 à 6 anneaux intenses par an (sans compter les anneaux de subsurface), il semble que ceux-ci doivent contribuer à plus d'un tiers des 14 Sv transportés entre la gyre Equatoriale et la gyre Subtropicale, associée à la branche supérieure de la circulation d'Overtuning (Meridional Overtuning Circulation), une composante fondamentale du climat (*Fratantoni et al.*, 1995b, 1999, 2000, *Goni et John*, 2001). Etant donné le caractère chaotique du transport, même moyenné sur une période d'un an, le contrôle volumique du NBC fait partie des enjeux importants dans cette région.

Conclusion

Deux types de dynamiques possédant des comportements bien différents sont présents dans le bassin de l'Atlantique tropical. Le long de la côte Brésilienne dans la région nommée "NBC", le NBC, puissant courant de bord ouest, se manifeste par des tourbillons (ou anneaux) se propageant vers le Nord-ouest avec un comportement chaotique, assurant une grande part du transport de volume entre les deux gyres subtropicales. Dans la zone appelée "TIW", la circulation est largement pilotée par le vent et possède un comportement nettement moins chaotique. Des ondes tropicales d'instabilité, caractérisées entre autre par une anomalie de vitesse se propageant d'est en ouest, ont de forts impacts sur la météorologie, la biologie...

Même si ces phénomènes sont bien représentés par la configuration TATL4, ils ont une sensibilité importante aux paramètres du modèle, et compte tenu de leur incertitudes, ils nous renseignent sur les sources d'erreurs des modèles numériques dans l'Atlantique tropical. Ils montrent que dans la région NBC, le contrôle des anneaux sera de toute façon mal réalisé en simulation libre, même avec des forçages très justes tellement leur comportement est chaotique, tandis que

dans la région TIW, le contrôle des ondes sera étroitement lié à celui du vent mais qui est connu avec de fortes incertitudes. L'amélioration de la connaissance des forçages permettra donc de mieux les simuler. La modélisation libre est insuffisante pour répondre à certaines exigences de l'océanographie dans l'Atlantique tropical, et le besoin de simulations réalistes pose de véritables défis pour l'assimilation de données altimétriques.

Deuxième partie

**Construction des OSSE et mise en
place de l'assimilation**

Chapitre 4

Les observations simulées

Introduction

Ce chapitre explique la construction, à partir de la simulation REF, des jeux d'observations virtuelles qui serviront pour l'assimilation dans les expériences jumelles. Pour chaque type d'observations (SSH, SST, profils de salinité et température), deux étapes successives sont effectuées : premièrement l'extraction des données localisées temporellement et spatialement aux points d'observations et ensuite l'ajout d'un bruit de mesure pour simuler une erreur d'observation.

Le chapitre est divisé en deux sections, l'une traite particulièrement des observations altimétriques et l'autre de l'ensemble des observations complémentaires.

4.1 Observations altimétriques

Après quelques aspects techniques sur le calcul d'orbites, nous expliquerons les deux étapes d'extraction et de simulation des erreurs pour deux catégories d'altimètres : les altimètres au nadir et les altimètres à large fauchée. Enfin, nous préciserons les orbites et satellites simulés.

4.1.1 Calcul d'orbites

Calcul de la trajectoire pour une orbite donnée

Nous avons vu dans le chapitre 1 les équations de la trajectoire d'un satellite en fonction de l'altitude a , de l'inclinaison i et d'une position de référence lon_0 . Nous avons aussi vu que ces trois paramètres de base définissaient (dans le cas particulier des orbites répétitives) le cycle de répétitivité T_R , le nombre de passes par cycle q et le nombre de jour dans le plan orbital N .

Nous proposons ici une réécriture de ces équations en fonction des caractéristiques orbitales précédentes : lorsque le cycle T_R existe (non-infini), l'expression de la longitude dans 1.8 peut alors se réécrire avec 1.9 :

$$lon(t) = arctan[\cos(i)\tan(\Omega_N(a)t)] + \frac{\Delta L_1}{T_N}t + lon_0 \quad (4.1)$$

avec $\Omega_N(a) = \frac{2\Pi}{T_N(a)} = \frac{2\Pi q}{T_R}$ et la valeur de ΔL_1 donnée par 1.11, le système 1.8 peut donc s'écrire en fonction des paramètres T_R, q, N et i :

L'avantage de cette écriture est qu'elle ne dépend pas de \dot{a} dont l'expression est empirique et introduirait une dérive de la longitude dans nos calculs de position. Avec cette écriture,

$$\begin{cases} \text{lon}(t) = \arctan(\cos(i) \times \tan[\frac{2\Pi q t}{T_R}]) + \frac{2\Pi N}{T_R}t + \text{lon}_0 \\ \text{lat}(t) = \arcsin(\sin(i) \times \sin[\frac{2\Pi q t}{T_R}]) \end{cases} \quad (4.2)$$

$\text{lon}(t + T_R) = \text{lon}(t)$ et $\text{lat}(t + T_R) = \text{lat}(t)$. Les paramètres nécessaires (T_R , N et q) pour calculer les coordonnées sont soit déjà fournis dans les descriptions orbitales classiques, soit calculables facilement, comme nous allons le voir ci-dessous.

Recherche des caractéristiques orbitales (T_R , N , q) à partir des paramètres de base (a , i)

Pour retrouver les caractéristiques orbitales à partir seulement d'un couple (a, i) donné, on peut utiliser l'équation suivante pour connaître la valeur de $\Delta L(a, i)$:

$$\Delta L(a, i) = (\Omega_t - \dot{\alpha}(a, i))T_N(a) \quad (4.3)$$

Les expressions des $\dot{\alpha}(a, i)$ et de $T_N(a)$ sont donnés dans le chapitre 1 (équations 1.5 et 1.7). Elles ne sont qu'approchées, mais bien assez précises pour déterminer les entiers N et q , vérifiant la formule :

$$q\Delta L = N2\Pi \quad (4.4)$$

On déduit enfin la période de répétitivité T_R avec l'équation :

$$T_R = qT_N(a) \quad (4.5)$$

Recherche d'orbites à partir de caractéristiques orbitales

A l'inverse, il est intéressant de pouvoir trouver les orbites possibles à partir de caractéristiques souhaitées. Cela nous servira pour simuler des orbites qui ne sont pas utilisées ni forcément mentionnées dans la littérature. Nous avons développé un outil permettant de trouver une orbite pour une durée de cycle, une altitude, et une inclinaison approximatives souhaitées. Son fonctionnement est le suivant : à partir d'un ensemble de valeurs souhaitables pour a et i , nous déduisons un intervalle de valeurs pour $\Delta L_1(a, i)$ avec 4.3. On fixe N , nombre entier le plus proche de la durée de cycle souhaitée T_R . Ensuite, nous choisissons ΔL_1 appartenant à l'intervalle de valeurs de sorte qu'il existe un entier q vérifiant 4.4. Plusieurs valeurs peuvent convenir si l'intervalle est suffisamment grand. Enfin, avec la valeur de ΔL_1 , on détermine avec 4.3 tous les couples (a, i) possibles, en fixant soit a soit i . Chaque couple (a, i) définit une orbite, à laquelle il suffit de spécifier une position de référence. La valeur exacte de T_R s'obtient toujours avec l'expression 4.5.

4.1.2 L'extraction des observations

Pour une orbite donnée, les équations de la trajectoire 4.2 permettent d'obtenir une série de positions à intervalle de temps régulier, correspondant aux coordonnées des différentes mesures effectuées. L'étape d'extraction des observations consiste à extraire dans la simulation REF les valeurs localisées aux points de mesures le long de la trace, et aux temps correspondants. Une approximation est faite concernant la localisation temporelle : tous les points théoriquement observés sur un intervalle de 24h sont considérés comme étant observés au même instant, car une seule sortie instantanée de REF est sauvegardée tous les jours. Il aurait été possible de

mettre en place un outil permettant d'extraire pour chaque scénario les observations interpolées par rapport au pas de temps et de les sauvegarder spécifiquement lors du calcul de la simulation REF. Mais les variations de la SSH étant faibles à l'échelle d'une journée, nous avons choisi cette approximation.

Selon que l'altimètre soit de type classique ou de type large fauchée, l'extraction des observations est différente.

Pour les altimètres classiques

Les longueurs d'ondes résolues dans TATL4, supérieures à 100 km environ puisque la dimension d'une maille est de 37 km, sont observées avec la précision maximum le long de la trace comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.

Dans nos expériences, en supposant que la simulation REF est la réalité que le satellite observe, l'analogie avec un système d'observations réelles pourra consister à extraire des données de SSH avec un intervalle de l'ordre de la taille de la maille (37km) le long de la trace. Les petites échelles (inférieures à deux fois la taille de la maille) étant inexistantes dans REF, une interpolation bi-linéaire entre les quatre points de grille voisins d'un point donné le long de la trace sera une bonne représentation de ce que le satellite mesurerait en ce point après un filtrage des petites échelles. Pour chaque point de mesure au nadir du satellite espacés de 30 km, nous calculons donc la valeur interpolée pour simuler l'observation.

La figure 4.1 montre à titre d'exemple les observations extraites puis relocalisées sur la grille du modèle pour les orbites de JASON-1 et JASON-1 + SARAL.

Pour les altimètres à large fauchée

Au lieu d'extraire une seule observation au nadir de chaque point de mesure tous les 30 km, une série d'observations est extraite dans la direction orthogonale à la trace, sur une largeur totale de 180 km. La figure 4.2 schématise l'étendue spatiale des observations sur une grille au $1/4^\circ$.

De même que pour les satellites classiques, en chaque point de mesure, une interpolation bi-linéaire avec les quatre points voisins est effectuée. Toujours pour les mêmes raisons d'échelles, nous extrayons parallèlement et orthogonalement à la trace avec une résolution de 30 km.

On peut remarquer que la trace des observations d'un altimètre à large fauchée de type SWOT s'étend en largeur sur l'équivalent de 6 points de grille environ dans TATL4. La figure 4.3 montre l'ensemble des observations relocalisées dans le modèle pour un satellite de type SWOT volant sur l'orbite 6.

4.1.3 Simulation des erreurs

Après la première étape d'extraction, les observations ne sont pas bruitées, elles correspondent à la SSH observée sans erreur. Or, dans la réalité, il existe d'une part des erreurs de mesures (chapitre 1), et d'autre part, lorsque l'on confronte des mesures réelles avec un modèle (c'est le cas pour un système de modélisation avec assimilation), il existe aussi des erreurs de représentativité. Elles sont dues aux phénomènes de petites échelles présents dans la réalité, mais non-représentables par le modèle à cause de la taille des mailles. Ce deuxième type d'erreur n'existe pas non plus dans les observations interpolées de la simulation REF qui ne comporte pas ces petites échelles. Pour plus de réalisme, ces deux types d'erreur sont simulés par l'ajout d'un signal aux observations, qui est différent selon le type d'altimètre.

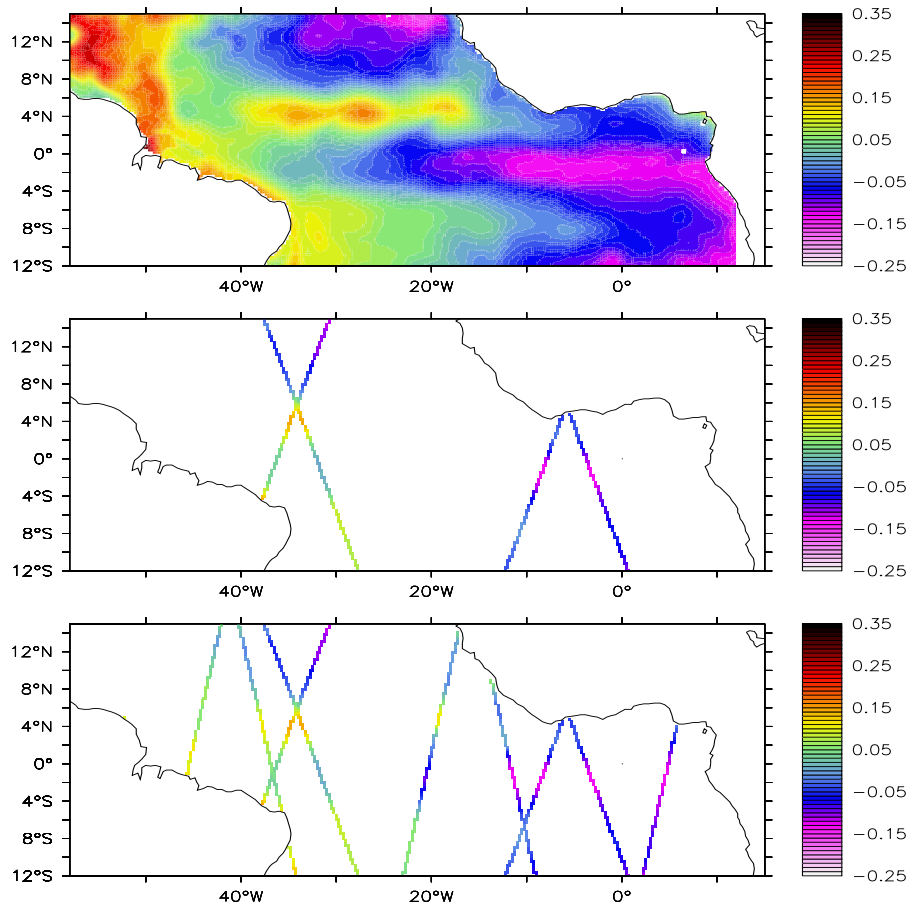


FIG. 4.1 – *En haut* : SSH au 1er juillet à 12h dans la simulation REF. *Au milieu* : Relocalisation sur la grille modèle des observations virtuelles sur l'orbite de JASON entre le 1er juillet à 00h et le 2 juillet à 00h. *En bas* : Même chose qu'au milieu, avec en plus des observations sur l'orbite de SARAL.

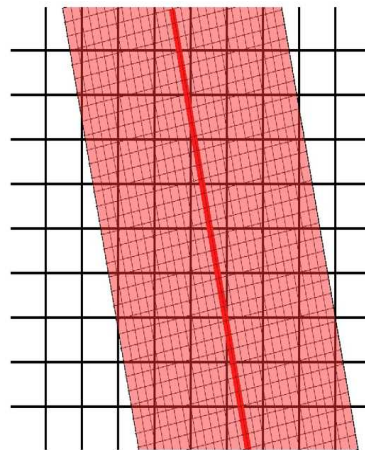


FIG. 4.2 – Schématisation de la zone de mesure d'un altimètre à large fauchée le long de la trace du satellite sur une grille modèle au $1/4^\circ$.

Pour les altimètres classiques

Dans le cas réel : Compte tenu des erreurs de traitement (pour corriger les effets de l'atmosphère, du baromètre inverse, des marées...) et des erreurs instrumentales, nous avons vu que

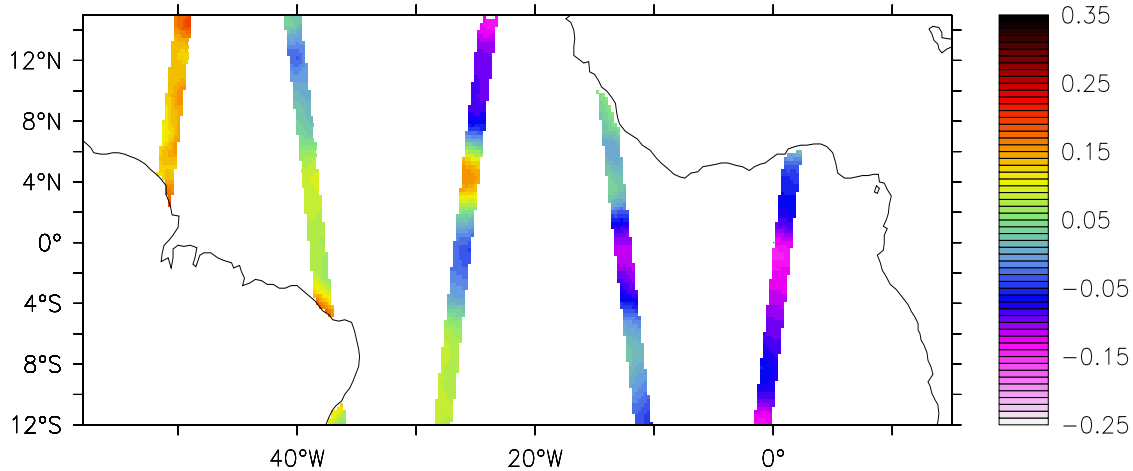


FIG. 4.3 – Relocalisation sur la grille modèle des observations virtuelles du satellite SWOT au jour 200.

l'erreur résiduelle de mesure était de 2.5 cm RMS pour un satellite de type JASON-1 (chapitre 1). Une erreur de représentativité existe entre un satellite au nadir mesurant la topographie le long d'une trace et un modèle à $1/4^\circ$ (31km de largeur de maille). Pour la réduire au maximum, il convient de filtrer les mesures pour les échelles plus petites que deux fois la taille de la maille, de sorte que les petites échelles non-représentables ne contaminent pas trop le signal que l'on compare. Le filtrage des petites échelles n'est possible que dans une seule direction (celle de la trace), mais comme ces petites échelles sont généralement isotropes, le résultat est proche d'un filtrage avec des données sur toute la maille.

Dans les expériences jumelles : L'erreur de représentativité sera négligée, et l'erreur de mesure sera simulée par un bruit aléatoire dont l'écart RMS vaut 2.5 cm. Mais un tel bruit peut avoir différentes forme s'il existe une corrélation spatiale. Ceci est un élément important car la corrélation des erreurs d'observation a une forte influence sur la qualité de la correction en assimilation de données (Brankart et al., 2008). Etant donné qu'il est difficile d'estimer dans un cas réel la corrélation de ces erreurs, la perturbation choisie sera un bruit blanc de 2.5 cm RMS.

Pour les altimètres large fauchée

Dans le cas réel : En plus des erreurs de mesure des altimètres classiques, les altimètres large fauchée risquent d'être affectés par une erreur de roulis (chapitre 1).

Dans les expériences jumelles : Pour simuler cette erreur, nous avons choisi d'appliquer une perturbation linéaire avec la distance par rapport au centre de la trace (au nadir du satellite), qui en plus varie le long de la trace. La figure 4.4 montre un exemple de perturbation appliquée aux observations d'un jour donné.

Etant donné les erreurs de roulis estimées pour les missions à large fauchée (voir chapitre 1), l'écart type du signal d'erreur de roulis en bout de fauchée est fixé à 5 cm. Le temps caractéristique de l'oscillation de l'altimètre pourrait être 20 secondes, ce qui correspond à un parcours de 130 km au sol. La décorrélation spatiale de l'erreur le long de la trace est donc fixée à 130 km, ce qui donne typiquement les structures d'erreur visibles sur la figure 4.4. Ces erreurs seront utilisées dans les études de scénarios des chapitres 8 et 9.

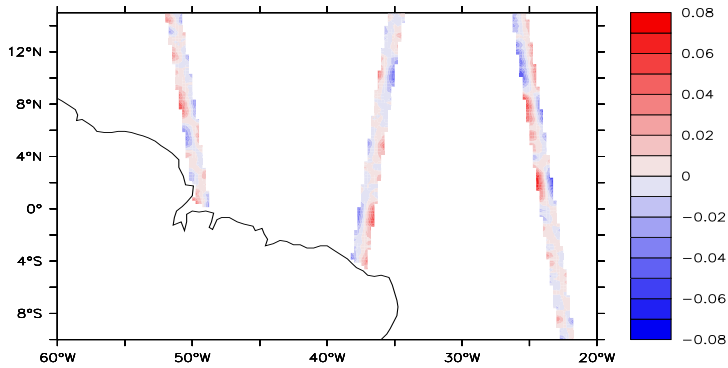


FIG. 4.4 – Relocalisation sur la grille modèle du signal d'erreur simulée de SSH (m) pour le satellite SWOT durant une période d'un jour.

4.1.4 Les jeux d'observations altimétriques simulés

Observations des missions présentes et futures

Des satellites volant sur les orbites des missions présentes et futures sont simulés. Au total, 4 orbites sont considérées, leurs caractéristiques sont résumées sur la table 4.1, elles ont déjà été étudiées dans le chapitre 1. Des décalages spatiaux (en faisant varier le point de référence) et des décalages temporels entre satellites seront réalisés. Sur les 3 premières orbites, des altimètres classiques sont simulés. Sur l'orbite 4, la mission SWOT avec un altimètre à large fauchée est simulée.

Remarque : La particularité du satellite SARAL d'observer plus près des côtes que les autres (jusqu'à 10km) n'est pas prise en compte. Elle n'aurait de toute façon aucune influence étant donné la résolution de notre configuration.

Observations avec une orbite dédiée aux tropiques

Aucun projet de ce type n'est envisagé, mais les expériences jumelles nous autorisent à inventer n'importe quel système d'observations, et entre autre un système particulièrement bien adapté à notre étude. Nous simulons un satellite altimétrique volant sur une orbite à seulement 12° d'inclinaison, ce qui permettrait une zone d'observation restreinte à la bande tropicale, donc très densément observée. Cette orbite a été choisie avec les mêmes caractéristiques de cycle et sous-cycles que celle de JASON. Notre outil de détermination d'orbites nous a permis d'en définir les paramètres, ils sont donnés sur le tableau 4.1 pour l'orbite 5.

La figure 4.5 montre les observations selon cette orbite durant un jour.

Observations de la couverture complète

En plus des observations satellitaires, nous construisons aussi un jeu d'observations complètes, c'est-à-dire comportant les données du champ 2D complet de SSH (extrait à chaque point de grille) et pour chaque instant où une étape d'analyse est effectuée. Aucune erreur n'est simulée dans ces observations. Elles constituent le système parfait d'observations, dont les performances à travers l'assimilation pourront être comparés avec celles des autres scénarios.

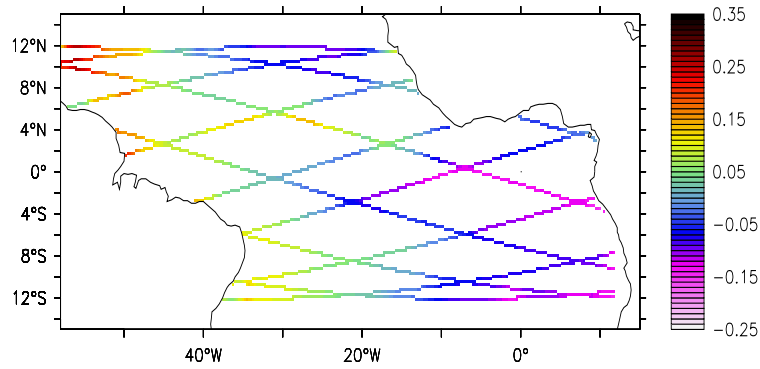


FIG. 4.5 – Relocalisation sur la grille modèle des observations virtuelles d'un satellite volant sur l'orbite 5 au jour 200.

Orbites/ Satellites	Paramètres de base :		Caractéristiques orbitales :		
	Altitude (km) ($a - R_T$)	Inclinaison i	Cycle de répétitivité T_R (jours)	nombre de passes q	Cycle et sous-cycles (jours)
Orbite 1 : JASON-1, JASON-2	1336	66°	9.9156	127	1.0 ; 3.3 ; 9.9
Orbite 2 : Gfo	800	108°	17.05056	244	1.0 ; 2.8 ; 17.05
Orbite 3 : ERS-1-35d, ERS-2, ENVISAT, SARAL	782	98.543°	35	501	1.0 ; 3.18 ; 17.5 ; 35.0
Orbite 4 : SWOT	845	78°	20.86521	295	1.0 ; 20.9
Orbite 5 : Satellite tropical virtuel	1295	12°	9.833680	127	1.0 ; 3.3 ; 9.8

TAB. 4.1 – Caractéristiques des orbites simulées. Plus de détails sur les résolutions spatio-temporelles associées aux orbites sont donnés dans le chapitre 1.

4.2 Les observations complémentaires

Comme nous allons le voir dans les chapitres 8 et 9, l'utilisation d'observations complémentaires à l'altimétrie est dans certains cas indispensable pour un bon fonctionnement de l'assimilation. Les systèmes opérationnels utilisent d'ailleurs ces observations complémentaires.

Bien que l'objectif premier de cette thèse ne soit pas d'évaluer les performances de ces réseaux d'observations, il convient, dans nos expériences jumelles, de les simuler quand même pour estimer les performances de l'altimétrie dans un cadre le plus réaliste possible.

Le chapitre 1 a décrit brièvement l'ensemble des systèmes d'observations complémentaires disponibles. Parmi ceux-ci, nous avons choisi de simuler les observations satellitaires de SST, et les profils de température et salinité ARGO qui sont d'un intérêt remarquable pour l'assimilation de données. La simulation des observations et des erreurs de mesures sont expliquées ci-dessous.

4.2.1 Autres observations de surface : SST et SSS

Un satellite mesure la température de surface de façon synoptique, mais avec des erreurs plus ou moins importantes à cause notamment des nuages qui perturbent les mesures. Ces observations étant disponibles tous les jours, nous considérerons en première approximation que la SST est globalement observée à chaque fois qu'un cycle d'assimilation sera effectué.

Dans nos expériences, la température est donc extraite tous les jours à chaque point de grille en surface pour simuler l'observation de SST, de telle sorte qu'aucune erreur ni d'interpolation ni de représentativité ne soit simulée. Seule une erreur de mesure instrumentale est simulée par un bruit blanc de 0.2°C RMS

4.2.2 Observations in situ de température et salinité

L'objectif est de simuler de façon simple les observations que fournissent un réseau in situ de type ARGO. Il aurait été possible de récupérer un ensemble de positions de flotteurs sur une grande durée afin d'avoir les bonnes statistiques de positions pour simuler le réseau. Pour plus de simplicité, nous simulons des profils situés à des points fixes, régulièrement espacés de $2.5^{\circ} \times 2.5^{\circ}$, $5^{\circ} \times 2.5^{\circ}$ selon les études. Enfin, pour simplifier, ces points fixes sont situés sur les noeuds des mailles afin d'éviter une étape d'interpolation.

Dans nos expériences, les erreurs de mesure et de représentativité sont simulées par un bruit blanc, d'amplitude 0.2°C RMS pour la température et 0.1 psu RMS pour la salinité.

Conclusion

Nous disposons maintenant d'un jeu d'observations artificielles extraites de la simulation de référence REF. Il a été élaboré certes avec quelques simplifications concernant la simulation des erreurs qui est un point délicat, mais présente un réalisme suffisant pour réaliser des études sur l'influence des scénarios d'observation. Ces observations vont être utilisées pour l'assimilation de données, décrite d'abord de façon générale dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

La méthode d'assimilation

Introduction

Malgré la quantité d'observations satellitaires et les observations in situ, il est impossible de reconstruire un champ quadridimensionnel de l'état de l'océan. D'autre part, l'utilisation de la modélisation seule n'est pas capable de répondre à certains enjeux de contrôle et de prévision de l'océan. Devant ce constat, l'assimilation de données a été introduite en océanographie, de façon relativement similaire à son utilisation en météorologie car le contrôle des dynamiques est assez comparable.

La recherche de la trajectoire optimale d'un système combinant modèle et observations est complexe et a donné lieu à de nombreuses méthodes comme nous allons le voir dans la première section. Notre choix s'est naturellement porté sur la méthode séquentielle du filtre SEEK basée sur une simplification du filtre de Kalman qui est actuellement utilisée dans le centre de prévision opérationnel MERCATOR.

5.1 Un bref aperçu des méthodes d'assimilation

La plupart des développements méthodologiques que nous allons succinctement aborder dans cette section ont été réalisés d'abord en météorologie. Les méthodes reposent sur deux grandes approches, la première de type contrôle optimal est à l'origine des méthodes variationnelles, et la seconde, de type statistique, a débouché sur des méthodes séquentielles.

5.1.1 Le nudging

L'algorithme du nudging (appelé aussi relaxation newtonienne) consiste à introduire dans le système d'équations dynamiques du modèle un terme de relaxation vers les observations. Cette méthode, premièrement utilisée en météorologie, a été introduite avec succès en océanographie, notamment par *Verron et Holland (1989)*, *Verron (1992)*, *Blayo et al. (2003)*. Un inconvénient de cette méthode simple est qu'elle ne tient pas compte des erreurs respectives du modèle et des observations. Plus récemment, l'algorithme BFN (Back and Forth Nudging), introduit par *Arnoux et Blum (2005)*, permet d'identifier un état initial à partir d'observations réparties dans le temps. L'algorithme résout d'abord les équations avec le terme de nudging pour arriver à un état final. Le modèle est ensuite utilisé de façon rétrograde, avec un terme de rappel opposé à celui du nudging direct. On obtient ainsi une ré-estimation de l'état initial. Après répétition de ces deux étapes, l'état initial converge vers l'état recherché. Cet algorithme se rapproche des méthodes variationnelles expliquées ci-dessous.

5.1.2 Les méthodes variationnelles

L'assimilation variationnelle, telle qu'on la rencontre classiquement en océanographie, consiste à estimer un état initial \mathbf{x}_0 (antérieur aux observations) dont la propagation par le modèle donne une trajectoire d'états la plus proche de l'ensemble des observations. En posant \mathbf{x} la variable représentant l'état du système, une fonction coût $J(\mathbf{x})$ est définie pour caractériser l'écart du modèle par rapport aux observations durant la fenêtre d'assimilation. Il convient de trouver l'état initial \mathbf{x}_0 qui minimise cette fonction. Parmi les méthodes qui existent pour minimiser $J(\mathbf{x})$, citons la méthode du modèle linéaire adjoint proposée par *LeDimet et Talagrand* (1986), couramment utilisée en océanographie. De façon générale, les méthodes variationnelles sont coûteuses, tant en espace de stockage qu'en temps de calcul. De plus, la dynamique non-linéaire, surtout à ces échelles, limite la durée pendant laquelle le modèle adjoint peut être approximé par son linéaire tangent, et donc la durée de la période d'assimilation pendant laquelle la condition initiale est un paramètre de contrôle (*Luong*, 1995). Une solution est alors de procéder séquentiellement (*Luong et al.*, 1998) sur des fenêtres temporelles plus courtes, mais au détriment de la continuité de la trajectoire globale. Cette dernière solution se rapproche des méthodes séquentielles.

5.1.3 Les méthodes statistiques séquentielles

L'approche séquentielle repose sur une correction de l'état de prévision du système à chaque instant où de nouvelles observations sont disponibles. L'assimilation statistique séquentielle consiste, à partir d'un ensemble d'observations à un instant donné, à calculer l'état le plus probable compte tenu des statistiques d'erreurs de prévision et d'observations. Grâce au fait que les erreurs de prévision sont spatialement corrélées (cette hypothèse est très intuitive dans le cas d'un modèle océanique, étant donné le spectre des échelles océaniques), une correction peut être effectuée aux points non-observés, et même sur des variables non-observées lorsque les statistiques sont définies de façon multivariée. L'erreur résiduelle sur le champ corrigé sera d'autant plus faible que les statistiques d'erreurs de prévision et d'observation seront correctement spécifiées.

5.2 La théorie du filtre SEEK

Pour réaliser l'assimilation dans notre étude, nous utilisons une méthode statistique séquentielle basée sur le filtre de Kalman, un choix motivé en partie par l'expertise de l'équipe de MEOM sur ce type de méthode et par l'utilisation de celle-ci dans les systèmes opérationnels. Nous serons contraints, à cause de la taille du système, à utiliser une méthode de rang réduit : le filtre SEEK (Singular Evolutive Ensemble Kalman filter) introduit par *Pham et al.* (1998b). Dans cette section, nous résumons les grandes étapes de l'adaptation du filtre à un problème d'océanographie.

5.2.1 Le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman (*Kalman*, 1960) est fondé sur l'estimation statistique optimale. Il a d'abord été défini puis utilisé sur des systèmes à faible nombre de variables, comme en balistique par exemple. La description suivante ne reprend pas tous les détails d'une démonstration classique, mais donne un résumé des deux étapes : l'analyse et la prévision.

Quelques définitions

On note \mathbf{x}^f l'état de prévision et \mathbf{x}^t l'état vrai (inconnu), représenté dans le même espace qu'un modèle (de dimension x). Dans le cas d'un modèle discret, x est le nombre de points de grille multiplié par le nombre de variables définies en ces points de grille.

Si $\mathbf{e}^f = \mathbf{x}^f - \mathbf{x}^t$ désigne l'erreur de prévision, la matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{P}^f , de dimension $x \times x$ est définie par :

$$\mathbf{P}^f = \langle \mathbf{e}^f \mathbf{e}^{fT} \rangle \quad (5.1)$$

La prévision et les observations sont comparées dans l'espace des observations. Il est donc nécessaire d'introduire un opérateur d'observation \mathbf{H} pour passer de l'espace modèle à l'espace des observations. Soit \mathbf{y} un vecteur de l'espace des observations, de dimension y s'il existe y observations. L'équivalent modèle aux points d'observations sera le vecteur $\mathbf{H}\mathbf{x}^f$.

Si $\mathbf{e}^o = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^f$ désigne l'erreur d'observation, la matrice de covariance d'erreur d'observation \mathbf{R} , de dimension $n \times n$ est définie par :

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{e}^o \mathbf{e}^{oT} \rangle \quad (5.2)$$

Les expressions de \mathbf{P}^f et de \mathbf{R} présentées ci-dessus ne sont que des définitions, et ne servent en aucun cas à calculer ces matrices puisque la réalité \mathbf{x}^t est inconnue. L'estimation de ces matrices est un problème conséquent que nous aborderons par la suite.

Les étapes d'analyse et de prévision

L'analyse :

En supposant connues les matrices \mathbf{P}^f et \mathbf{R} , on peut montrer que si les erreurs sont gaussiennes, le meilleur estimé \mathbf{x}^a se calcule par l'expression suivante :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^f + \mathbf{K}[\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^f] \quad (5.3)$$

avec

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (5.4)$$

La matrice \mathbf{K} est appelée gain de Kalman et le vecteur $\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^f$ est appelé vecteur innovation, parfois noté \mathbf{i} . Après l'étape d'analyse, on peut montrer que les statistiques d'erreur sur l'état analysé \mathbf{x}^a sont données par la matrice :

$$\mathbf{P}^a = [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}]\mathbf{P}^f \quad (5.5)$$

La prévision :

L'étape de prévision du filtre de Kalman, d'abord définie pour des modèles linéaires, consiste premièrement à propager le meilleur estimé \mathbf{x}^a dans le modèle, pour établir une nouvelle prévision à l'instant $k + 1$:

$$\mathbf{x}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{x}_k^a \quad (5.6)$$

On montre que la matrice \mathbf{P}^f à l'instant $k + 1$ s'écrit alors :

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (5.7)$$

La matrice \mathbf{Q}_{k+1} représente l'erreur modèle générée entre les temps k et $k+1$ (durant le cycle). Tel que nous venons de le présenter, le filtre de Kalman est applicable dans le cas d'un modèle linéaire. Il suppose d'une part une bonne estimation des matrices \mathbf{R} , \mathbf{P}^f à l'instant initial, et \mathbf{Q} .

Le filtre peut être étendu pour un modèle faiblement non-linéaire (*Jazwinski, 1970*). Ainsi, dans l'expression de l'étape d'analyse 5.6, le terme $\mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{x}_k^a$ n'est plus matriciel, mais désigne plus généralement la propagation de \mathbf{x}_k^a dans le modèle. L'opérateur \mathbf{H} peut être lui aussi non-linéaire. L'expression 5.7 s'écrit toujours sous forme matricielle, mais la matrice $\mathbf{M}_{k,k+1}$ est le modèle linéaire tangent dérivé du modèle non-linéaire.

5.2.2 La réduction d'ordre

L'adaptation du filtre de Kalman à l'océanographie a nécessité une étape essentielle pour opérer sur des systèmes de taille : la réduction d'ordre. En ordre complet tel qu'il a été présenté jusqu'ici, le filtre de Kalman nécessite de spécifier les corrélations pour chacune des variables de chaque point de grille avec tous les autres dans la matrice \mathbf{P}^f . Par exemple, pour la configuration TATL4, la taille de la grille modèle étant de 1 million de points avec 4 variables définies en chacun des points et même 5 variables en surface, la taille x du vecteur d'état est de plus de 4 millions. La matrice \mathbf{P}^f serait donc composée de plus de $4 \cdot 10^{12}$ éléments. Il est d'une part très difficile de stocker une telle quantité d'information, et d'autre part l'opération d'inversion de l'équation 5.3 pour le calcul du gain serait irréalisable, l'espace d'observation pouvant être aussi très grand.

La matrice \mathbf{P}^f est réelle, symétrique, et définie positive, elle est donc diagonalisable avec une base orthogonale de vecteurs propres et des valeurs propres réelles positives. Elle s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{P}^f = \mathbf{N} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^T \quad (5.8)$$

Avec \mathbf{N} la matrice de taille $n \times n$ composée des vecteurs propres et $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale d'ordre n spécifiant les n valeurs propres.

En pratique, pour les problèmes que nous traitons, le spectre des valeurs propres décroît très rapidement, ce qui signifie que certaines directions d'erreur sont largement privilégiées par rapport à d'autres. Cela justifie de réaliser une réduction d'ordre, qui consiste à ne prendre en compte que les r premiers vecteurs propres et valeurs propres associées pour représenter la matrice, qui s'écrira ainsi :

$$\mathbf{P}^f = \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{N}}^T \quad (5.9)$$

$\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ ($r \times r$) est diagonale et $\tilde{\mathbf{N}}$ ($n \times r$) contient les r premiers vecteurs propres.

En posant $\mathbf{S}^f = \tilde{\mathbf{N}} \times \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{\frac{1}{2}}$, \mathbf{P}^f s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{P}^f = \mathbf{S}^f \mathbf{S}^{fT} \quad (5.10)$$

\mathbf{P}^f est alors entièrement définie par la matrice \mathbf{S}^f .

5.2.3 L'algorithme SEEK et ses variantes

La réduction d'ordre a permis la réalisation du filtre SEEK (*Pham et al., 1998b*) qui comprend d'autres spécificités notamment pour la détermination de la matrice \mathbf{P}^f , car d'une part

l'initialisation de cette matrice est souvent incertaine, et d'autre part l'erreur modèle représentée par la matrice \mathbf{Q}^k est généralement mal connue. Les différentes paramétrisations donnent autant de variantes au filtre SEEK. Enfin, une version locale du SEEK peut être introduite pour annuler des corrélations mal définies à grande distance.

Nous présentons ici les algorithmes utilisés dans les deux étapes du filtrage SEEK, réalisables avec le logiciel SESAM (System of Sequential Assimilation Modules) développé au sein de l'équipe MEOM par J-M Brankart, C.E. Testut et L. Parent.

L'étape d'analyse

Le SEEK global

On peut montrer par des développements matriciels que le gain de Kalman (équation 5.10) se réécrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}^f [\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)]^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{R}^{-1} \quad (5.11)$$

L'étape d'analyse consiste à calculer l'incrément de correction égal au vecteur $\mathbf{K}\mathbf{i}$ avec \mathbf{i} le vecteur innovation. La matrice \mathbf{R} est supposée diagonale dans l'algorithme SEEK, sans quoi le calcul de son inverse peut poser problème. Nous discuterons de cette approximation dans la section suivante.

Sans la réduction d'ordre, la quantité d'opérations pour réaliser le calcul de $\mathbf{K}\mathbf{i}$ est, en fonction de la taille du vecteur d'état x et du nombre d'observations y , de l'ordre de :

$$C_0 \approx \frac{y^3}{6} + xy \quad (5.12)$$

Avec la réduction d'ordre, la quantité C_1 d'opérations devient de l'ordre de :

$$C_1 \approx yr^2 + \frac{r^3}{6} + xr \quad (5.13)$$

Dans la pratique, $y^3 \gg xy$ et $yr^2 \gg r^3$. Ainsi, le facteur de gain est approximativement donné par l'expression suivante :

$$\frac{C_1}{C_0} \approx 6 \frac{r}{y^3} + 6 \frac{xr}{y^3} \quad (5.14)$$

Lorsque le nombre d'observations y est assez grand, ce rapport est nettement plus petit que 1 d'où l'intérêt de la réduction d'ordre.

D'après l'équation 5.5, on peut montrer que la matrice de covariance d'erreur d'analyse \mathbf{P}^a a pour expression suivante en ordre réduit :

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{S}^a \mathbf{S}^{aT} = \mathbf{S}^f [\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)]^{-1} \mathbf{S}^{fT} \quad (5.15)$$

La matrice $[\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)]^{-1}$ étant symétrique, définie positive et de rang r , elle peut s'écrire sous la forme $\mathbf{C} \mathbf{C}^T$. La matrice \mathbf{S}^a est calculée dans SESAM avec l'expression $\mathbf{S}^a = \mathbf{S}^f \mathbf{C}$. Cette matrice représente les statistiques d'erreur après l'analyse. Si le filtre est optimal, l'amplitude de \mathbf{S}^a constitue un diagnostic intéressant pour évaluer la correction, plus significatif statistiquement qu'un simple diagnostic de l'état analysé. Etant donné que nos expériences comprendront un grand nombre d'étapes d'analyse, et que de plus l'optimalité du filtre ne sera pas garantie, les diagnostics de correction seront effectués avec les états analysés.

Interprétation de la correction en ordre réduit avec le SEEK global

La matrice de rang complet, dont la définition est donnée en début de chapitre, spécifie explicitement les corrélations entre chaque point et chaque variable. En rang réduit, chacune des corrélations n'est plus spécifiquement donnée, mais des directions d'erreurs (ou modes d'erreurs) sont spécifiées par les colonnes de la matrice \mathbf{S}^f . Ceci peut s'interpréter par l'expression du gain \mathbf{K} . Chacun des modes d'erreur est global, c'est-à-dire qu'il engendre une correction sur l'ensemble du domaine.

Le SEEK local

Le nombre réduit de modes globaux pose des problèmes de fiabilité des covariances d'erreur à grande distance. Etant donné que les modes d'erreur sont définis de manière globale, une observation en un point donné a une influence sur tout le domaine étudié. Si par exemple la corrélation entre les états de deux points éloignés est réellement nulle, le terme de la matrice \mathbf{P}^f spécifiant cette corrélation, $P_{i,j}^f$, doit être nul. Or, en rang réduit, $P_{i,j}^f = \sum_{q=1}^r S_{i,q}^f S_{q,j}^f$ est généralement non-nul car la somme est tronquée au rang r . Ceci entraîne une correction à distance qui ne devrait pas avoir lieu.

Une variante locale du filtre SEEK, développée par *Testut et al.* (2003b) est couramment utilisée pour supprimer ces effets. Le calcul de la correction en un point de grille donné est effectué en annulant explicitement les contributions de chaque mode au delà d'une distance spécifiée. Cette version du SEEK est utilisée dans nos expériences d'assimilation, des tests préliminaires sont d'ailleurs présentés dans les chapitres 6 et 7 afin de déterminer la taille optimale des zones d'influence selon les deux régions d'étude. Dans chaque cas une zone périphérique où l'influence décroît exponentiellement est définie, afin d'éviter des discontinuités de l'incrément de correction lorsqu'une observation est à la limite de la zone d'influence.

L'étape de prévision

Le SEEK évolutif :

La propagation de la matrice de covariance d'erreur écrite dans 5.7 peut se réécrire en notant $\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{S}_k^a$:

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{fT} + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (5.16)$$

Une bonne estimation de l'erreur modèle \mathbf{Q}_{k+1} est délicate. Une paramétrisation simple consiste à supposer qu'elle est proportionnelle à l'erreur initiale (en début de cycle) propagée par le modèle ($\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{fT}$). Cette paramétrisation, issue de l'automatique, a été introduite par *Pham et al.* (1998b). Elle s'écrit par la formule suivante :

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \frac{1-\rho}{\rho} \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{fT} \quad (5.17)$$

où ρ est appelé le facteur d'oubli.

Ainsi, \mathbf{P}_{k+1}^f s'écrit :

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \frac{1}{\rho} \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^{fT} \quad (5.18)$$

La matrice \mathbf{S}^f s'exprime donc, pour le cycle $k+1$, en fonction de la matrice \mathbf{S}^a du cycle précédent k , par l'expression :

$$\mathbf{S}_{k+1}^f = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{S}_k^a \quad (5.19)$$

Cependant, l'écriture du modèle linéaire tangent $\mathbf{M}_{k,k+1}$ est parfois complexe. Dans la pratique, il est fréquent de se passer de cette écriture en calculant chaque colonne de la matrice $\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f$ avec une intégration du modèle :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}^f \}_{j} = \frac{1}{\alpha} [\mathbf{M}_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a + \alpha \mathbf{S}_k^a) - \mathbf{M}_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a)] \quad (5.20)$$

où $\mathbf{M}_{k,k+1}(\mathbf{x})$ est le modèle appliqué à l'état initial x entre les temps k et $k+1$. A ce stade, l'étape de prévision est terminée et l'étape d'analyse peut être à nouveau réalisée avec les nouvelles observations. Le SEEK évolutif nécessite donc d'intégrer le modèle autant de fois que la valeur du rang réduit pour déterminer les covariances d'erreur de prévision.

Le SEEK fixe : Cette variante suppose que le sous-espace d'erreur d'analyse (erreur initiale d'un cycle donné) n'évolue pas avec le modèle. Ainsi, \mathbf{P}^f est définie par :

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{S}_k^a \mathbf{S}_k^{aT} + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (5.21)$$

Pour calculer \mathbf{P}_{k+1}^f en rang réduit, on peut estimer \mathbf{Q}_{k+1} de façon analogue à ce qui est présenté pour le SEEK évolutif, ce qui implique :

$$\mathbf{S}_{k+1}^f = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \mathbf{S}_k^a \quad (5.22)$$

Cette méthode s'est avérée efficace pour corriger une dynamique assez linéaire comme l'ont montré *Verron et al.* (1999), et a l'avantage d'être peu coûteuse en calcul puisqu'elle ne nécessite pas la propagation des modes par le modèle.

Le SEEK stationnaire :

Enfin, une hypothèse encore plus forte est de considérer la matrice \mathbf{S}^f comme stationnaire. Dans ce cas, l'information sur les covariances d'erreur d'analyse (matrice \mathbf{P}^a) n'est même pas prise en compte et la matrice \mathbf{P}^f s'écrit simplement :

$$\mathbf{S}_k^f = \mathbf{S}_0^f \quad (5.23)$$

L'adaptativité :

L'adaptativité n'est pas véritablement une variante du filtre SEEK, mais un procédé d'ajustement qui a été utilisé dans plusieurs études pour la matrice \mathbf{S}^f . Dans ce cas, l'adaptativité consiste à ajuster l'amplitude des modes qui constituent la matrice \mathbf{S}^f par rapport à celle du vecteur d'innovation $\mathbf{i} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}$, calculé avant chaque étape d'analyse. Un facteur λ est estimé de telle sorte que l'égalité $\langle \mathbf{i} \mathbf{i}^T \rangle = \text{trace}(\lambda \mathbf{H} \mathbf{S}_{na}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R})$ soit vérifiée. \mathbf{S}_{na}^f est la matrice d'amplitude non adaptée. Cela suppose évidemment que \mathbf{R} soit bien spécifiée. Ainsi, la matrice $\mathbf{S}^f = \lambda \mathbf{S}_{na}^f$ a une amplitude statistiquement bien définie. Cette méthode d'adaptativité peut a priori s'appliquer à chacune des variantes du SEEK présentées ci-dessus.

5.3 Quelques aspects techniques pour l'utilisation du SEEK

Le filtre SEEK a été présenté sous sa forme théorique, avec diverses simplifications possibles par rapport à la théorie du filtrage de Kalman. Cette section explique, de façon pratique, des méthodes pour évaluer les matrices \mathbf{R} et \mathbf{S}^f , dans le cas d'une configuration avec un modèle océanique discrétisé.

5.3.1 Vecteur d'observations et vecteur d'état

Le vecteur d'état \mathbf{x} comporte l'ensemble des variables nécessaires à la description du système, définies aux points de grille du modèle. Dans le cas de la configuration TATL4, les variables température (T), salinité (S), vitesses (U,V), et le niveau de la mer (SSH) composent le vecteur d'état.

Le vecteur d'observations comporte l'ensemble des variables observées aux points d'observation, qu'elles soient pronostiques ou diagnostiques dans le modèle. Dans un système océanique, en supposant que les vitesses ne sont pas observées, le vecteur d'observation contient généralement la SSH observée mais aussi la température et la salinité observées.

5.3.2 La matrice \mathbf{S}^f de rang réduit

Une des caractéristiques des méthodes d'assimilation issues du filtre de Kalman est de présenter une forte dépendance face à l'initialisation de \mathbf{P}_0^f (*Ballabrera-Poy et al., 2001*). Une méthode classique est de considérer comme premier estimé l'état initial \mathbf{x}_0 et de construire la matrice \mathbf{P}_0^f avec les r premiers modes d'une décomposition en fonctions orthogonales (EOF) d'un grand ensemble d'états du modèle.

La variante stationnaire du filtre SEEK sera utilisée pour spécifier la matrice \mathbf{S}^f dans la région NBC. Pour la correction des ondes tropicales d'instabilité dans la région TIW, une autre méthode spécifique sera employée, qui permettra par un calcul d'ensemble d'évaluer plus précisément l'erreur modèle qui est prédominante.

5.3.3 La durée du cycle

D'après la théorie du filtrage de Kalman, une étape d'analyse devrait être réalisée à chaque fois qu'une nouvelle observation est disponible. En plus du fait que le coût de calcul serait très élevé car les observations satellitaires sont temporellement continues, il s'avère que l'on a intérêt à regrouper les observations tant que l'effet du décalage temporel est faible. En effet, les matrices \mathbf{R} et surtout \mathbf{P}^f n'étant pas parfaitement bien spécifiées, un trop faible nombre d'observations risque d'engendrer une correction dans une mauvaise direction. Classiquement, on ajuste la durée du cycle par un compromis pour avoir suffisamment d'observations et peu de variations de la dynamique (car les observations sont considérées comme appartenant au temps de l'analyse).

Pour limiter l'effet du décalage temporel des observations, il est possible, pour chaque observation, de calculer le vecteur innovation à partir de l'état courant. Mais les non-linéarités du système limitent en général rapidement les bénéfices de cette méthode.

5.3.4 La matrice \mathbf{R}

D'une façon générale, la matrice \mathbf{R} doit spécifier les statistiques de trois types d'erreur :

- Premièrement les erreurs de mesure ainsi que l'erreur due au décalage temporel de l'observation par rapport au temps de l'analyse.
- Deuxièmement les erreurs de représentativité.
- Enfin troisièmement, une partie du vecteur d'innovation ne se projette pas sur les modes de correction à cause de la réduction d'ordre. En effet, dans l'application du filtre, celle-ci est vue comme une erreur d'observation puisque tout le vecteur innovation est sensé se projeter sur les modes de correction, mais ce n'est pas le cas puisqu'ils sont au nombre de r et le nombre d'observations p dépasse généralement r .

La matrice \mathbf{R} est supposée diagonale ce qui permet un calcul facilement réalisable de l'incrément de correction. Cette hypothèse est très classique et s'est avérée efficace dans de nombreuses études, elle sera appliquée dans les études de scénarios où justement les erreurs d'observation

sont simulées sans corrélation. Il est possible de paramétrer une matrice \mathbf{R} non-diagonale en assimilant conjointement le gradient de l'observation, toujours avec une matrice diagonale, ce qui est expliqué en détail dans *Brankart et al.* (2008). En effet, dans de nombreux cas, l'erreur d'observation n'est a priori pas strictement décorrélée dans l'espace. Par exemple, pour l'altimétrie, les erreurs d'orbite ont certainement une distance spatiale assez grande. De même, le biais électromagnétique dû à la houle, qui est une source d'erreur importante, est sans doute corrélé spatialement à l'échelle des zones où la houle est forte... Dans notre étude de systèmes d'observation, cette méthode ne sera pas appliquée, d'autant plus que pour les satellites au nadir, le bruit instrumental est paramétré de façon non-corrélée.

5.4 Conclusion

Ce chapitre a présenté les grandes étapes de l'élaboration du filtre SEEK, en soulignant la difficulté de l'estimation de la matrice de covariance d'erreur de prévisions. Les principales méthodes pour résoudre ce problème ont été décrites, mais nous verrons dans les deux chapitres suivants que leur application pour corriger des erreurs bien précises a nécessité des développements particuliers dans notre configuration.

Chapitre 6

Expériences jumelles et mise au point de l'assimilation dans la région TIW

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place les expériences jumelles spécifiques à l'étude du contrôle de la dynamique dans la région TIW, pour tester l'influence des réseaux d'observation dans la troisième partie du manuscrit (chapitre 8). Dans une première section, nous expliquons comment est construite la simulation libre, dont la différence avec REF constitue l'erreur simulée par le système. La difficulté consiste à simuler une erreur réaliste. Une fois ce cadre d'expériences jumelles défini, nous allons expliquer la démarche pour mettre au point l'assimilation avec le filtre SEEK. Une attention particulière sera portée sur la méthode de calcul de la matrice des covariances d'erreurs de prévision qui constitue un élément clé de la réussite de l'assimilation.

6.1 Erreurs simulées dans les expériences jumelles

L'objectif est d'introduire des erreurs aussi réalistes que possible, c'est-à-dire qui soient statistiquement semblables aux erreurs existantes entre un modèle et la réalité. Compte tenu de l'incertitude que l'on a généralement sur le forçage du vent, et d'après les résultats du chapitre 3 qui ont montré que le vent était un élément primordial dans cette région pour le comportement de la dynamique, introduire une erreur sur ce dernier est une solution pertinente pour construire les expériences jumelles. Le forçage du vent CORE appliqué à la simulation libre sera perturbé, par une méthode que nous allons définir ci-dessous. Il s'agira plus exactement d'expériences "cousines" puisque l'ensemble modèle et forçages diffère entre les deux simulations.

6.1.1 Des méthodes pour perturber le vent

Le problème de la perturbation du vent n'est pas simple car les statistiques d'erreur de ce dernier sont complexes et mal connues. Différentes méthodes sont envisageables pour générer une perturbation de vent :

- Une première solution consiste à choisir pour vent perturbé les données d'un même produit, mais issues d'une autre année tel qu'on l'a fait pour mettre en évidence l'influence du vent dans le chapitre 3. L'erreur introduite est dans ce cas de l'ordre de la variabilité inter-annuelle du vent ce qui est un peu exagéré.

6.1.2 La simulation libre

Le forçage du vent perturbé de la simulation libre est construit en ajoutant au forçage CORE de l'année 2000 la perturbation décrite ci-dessus. Cette simulation, appelée CTR1, débute au 1^{er} janvier 2000 avec l'état de REF comme condition initiale.

La variance de l'erreur entre REF et CTR1 pour la SSH et pour la vitesse zonale est représentée sur la figure 6.2. Le signal d'erreur en SSH reste faible ce que nous avons déjà remarqué dans le chapitre 2. A partir du jour 180 environ qui correspond au début de l'épisode des TIW, l'erreur sur la vitesse devient très importante comme le montre la figure 6.2 à droite pour la vitesse méridienne. Cette intensification de l'erreur est associée au déphasage des ondes d'instabilité entre REF et CTR1, qui est montré à titre d'exemple pour le jour 215 sur la figure 6.3.

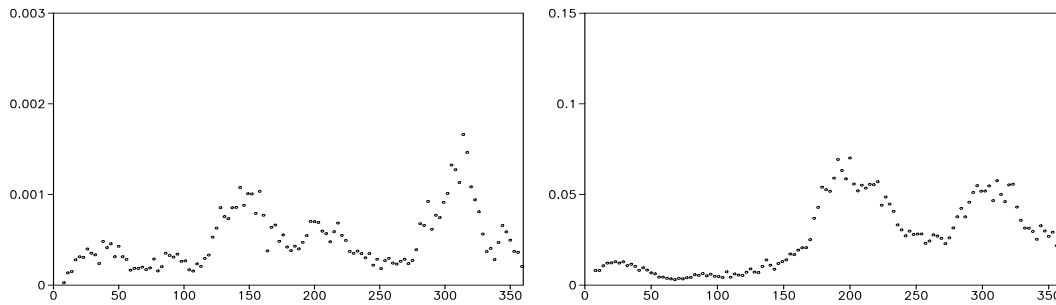


FIG. 6.2 – Variance de l'erreur de CTR2 par rapport à REF pour la SSH en m^2 (à droite) et pour la vitesse méridienne entre les niveaux 2 et 6 en $(m/s)^2$ (à gauche).

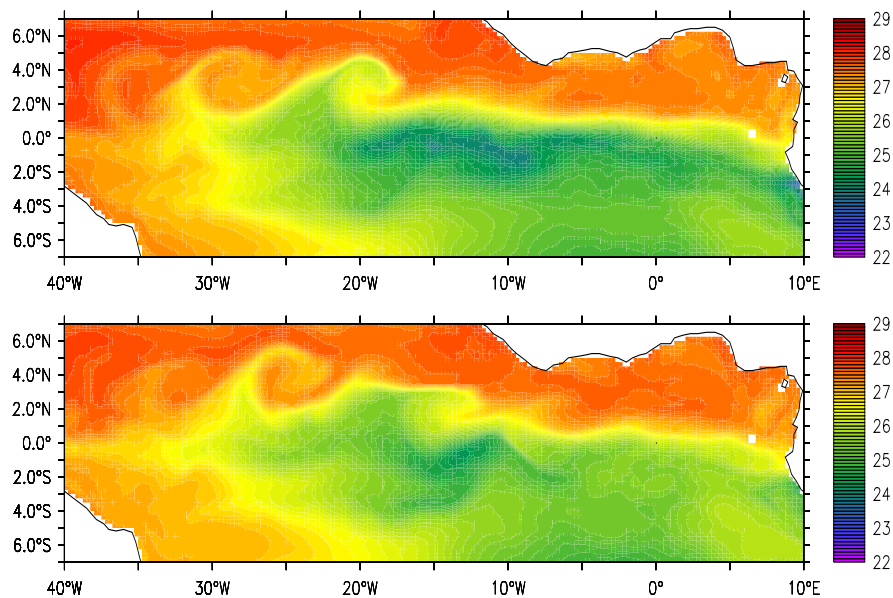


FIG. 6.3 – Champs instantanés de SST au jour 215 dans les simulations REF (en haut) et CTR1 (en bas).

La simulation CTR1 a bien les erreurs souhaitées par rapport à REF, à savoir un déphasage des TIW, ce qui constitue un défi à résoudre pour l'assimilation de données. Cependant, nous n'avons pas introduit de biais dans l'erreur modèle, comme il en existe par exemple pour les TIW en expérience réelle qui ont avec les paramètres de DRAKKAR une vitesse de phase un

peu trop élevée. Nous avons considéré que l'assimilation n'était pas bien adaptée pour résoudre ce type de problème qui devrait plutôt être résolu par de nouvelles paramétrisations du modèle.

6.2 Calcul des covariances d'erreur de prévision

La détermination de la matrice de covariance d'erreur de prévision est une des difficultés les plus importantes en assimilation de données en général, et en particulier avec le filtre SEEK. Après une analyse sur la nature des erreurs entre REF et CTR1, nous allons décrire la méthode choisie pour déterminer les covariances d'erreur.

6.2.1 Analyse théorique des erreurs de prévision

D'une façon générale, à la fin d'un cycle d'assimilation, l'erreur de prévision (que l'on cherche à corriger) est l'erreur modèle générée dans le cycle courant ainsi que l'erreur, propagée par le modèle, qui n'a pas été corrigée au cycle précédent. La matrice de covariance d'erreur de prévision est dans ce cadre général définie par l'expression $\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_{k+1}$ (voir chapitre 4). Or nous avons vu dans le chapitre 2 (expérience sur les conditions initiales perturbées) que dans la région TIW, le modèle était capable à lui seul de faire reconverger un état faux vers la solution s'il n'y a pas d'erreur modèle. Donc, si initialement l'erreur n'est pas trop importante, c'est-à-dire si \mathbf{P}_k^a n'est pas trop grand, alors la covariance de cette erreur propagée par le modèle, c'est-à-dire $\mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T$ devrait être faible. Ainsi, la matrice \mathbf{P}_{k+1}^f pourrait être approchée par la matrice \mathbf{Q}_{k+1} ce que nous allons faire dans la méthode de calcul présentée ci-dessous.

6.2.2 Méthode d'estimation de la matrice de covariance d'erreur de prévision

La variante stationnaire du filtre SEEK utilisant une matrice de covariance d'erreur de prévision définie avec les EOF de la simulation libre (CTR1) a d'abord été utilisée, mais les corrections obtenues n'ont pas été satisfaisantes. Les autres variantes du filtre SEEK, notamment la variante évolutive, n'ont pas été testées. En effet, la variante évolutive telle qu'elle est présentée dans le chapitre 5 considère que l'erreur modèle est simplement proportionnelle à l'erreur sur la condition initiale propagée par le modèle. Nous avons considéré que cette hypothèse était mal appropriée pour ce cas où la paramétrisation de l'erreur modèle est vraiment le point important

Nous avons donc défini une autre méthode d'estimation de la matrice \mathbf{S}^f privilégiant la paramétrisation de l'erreur modèle. Il s'agit d'une méthode de Monte Carlo basée sur un ensemble de vents perturbés autour du vent faux comme schématisé sur la figure 6.4. L'évolution des simulations REF et CTR1 (sans assimilation) sont symbolisées par les traits pleins rouge et noir sur le schéma. A l'instant initial, aucune erreur n'est présente (REF et CTR1 sont identiques). Un ensemble de r perturbations de vent autour du vent de CTR1 est calculé de manière aléatoire et utilisé pour calculer avec le modèle un ensemble de r anomalies. Au bout de la durée du cycle, ces anomalies constituent les colonnes de la matrice \mathbf{S}^f utilisée ensuite pour l'étape d'analyse. L'étape de prévision est effectuée parallèlement, avec le vent perturbé de CTR1. Cette même étape est réalisée à chaque cycle, à partir de l'état courant du système, qui constitue l'unique estimé de l'état vrai. La méthode s'apparente à un filtre de Kalman d'ensemble (*Evensen, 1994*) où l'erreur initiale au début de chaque cycle est négligée, pour les raisons évoquées dans la section ci-dessus. Notons que les r perturbations aléatoires sont calculées avec les mêmes statistiques d'erreur que le vent de CTR1 par rapport au vent vrai, de sorte que l'échantillon d'anomalies soit représentatif de l'erreur modèle durant le cycle.

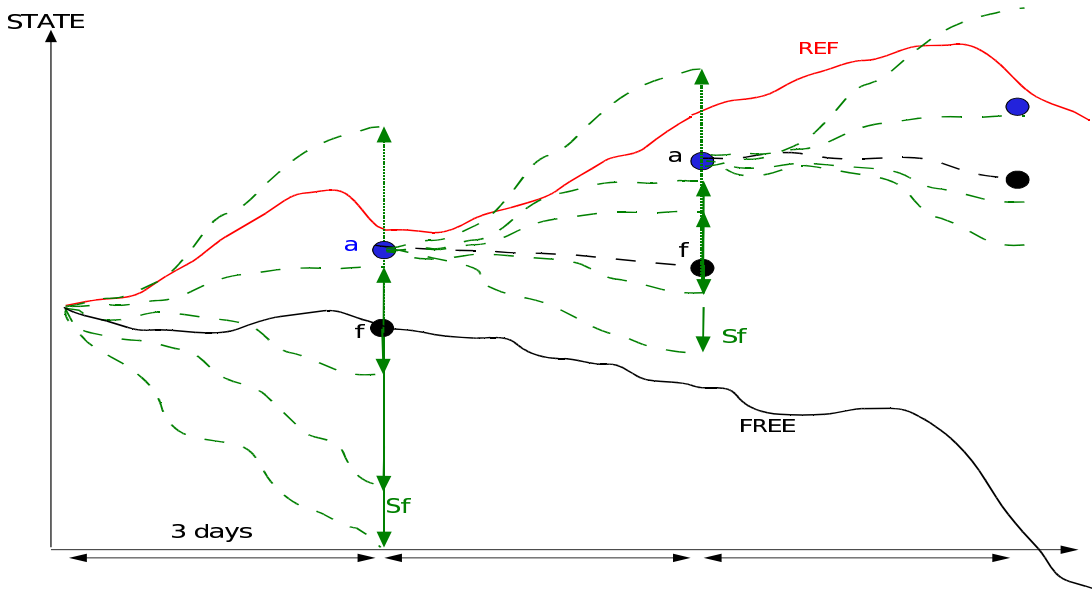


FIG. 6.4 – Schéma de la méthode de calcul de la matrice de covariance d'erreur de prévision.

6.2.3 Structures des erreurs et zones de présence

Cette section a pour simple objectif de caractériser l'erreur modèle à l'échelle d'un cycle d'assimilation (c'est-à-dire quelques jours a priori) et de montrer les zones où cette erreur est importante.

Dans le chapitre 3, l'influence du vent sur la dynamique et notamment sur les ondes d'instabilités n'a été étudiée qu'à long terme, à l'échelle d'une année. A courte échelle temporelle, le vent a deux effets importants sur la surface océanique : l'intensification de l'évaporation (générant un refroidissement en surface) et la tension de surface exercée sur les particules d'eau. Ces effets ont entre autres pour conséquence une augmentation du mélange vertical et donc une modification de l'état de la colonne d'eau même en profondeur.

Pour mettre en évidence les structures d'erreur générées à court terme par une erreur sur le vent, nous avons réalisé deux simulations à partir de l'état initial de REF, avec des vents amplifiés par 1.25 et par 0.8. La figure 6.5 représente les anomalies obtenues dans les deux cas après 3 jours. Lors d'une intensification du vent, on remarque un refroidissement général dans les 30 premiers mètres, due au mélange vertical (qui fait diffuser des eaux plus froides vers la surface) ou à l'évaporation plus forte. Plus en profondeur, les structures d'erreur sont spatialement plus complexes avec des zones réchauffées et des zones refroidies. Sur une durée de 3 jours, la perturbation de vent inverse a bien un effet inverse ce qui illustre une certaine linéarité de la réponse à une perturbation du vent à l'échelle de trois jours.

Pour regarder plus précisément les erreurs dues à un vent perturbé plus réaliste, comme celui que nous avons construit, nous avons calculé un grand ensemble d'anomalies après 3 jours, avec la méthode présentée sur le schéma 6.4 en ne calculant qu'un seul membre à chaque fois ($r = 1$). Sur une année, 121 anomalies ont été calculées, l'ensemble est noté ANO3J. La variance de ANO3J a été calculée afin d'identifier où se trouvent les zones les plus sensibles aux erreurs de vent à l'échelle de 3 jours (voir figure 6.6). La coupe à 2.5°N (à gauche) montre une variabilité très forte contre la côte Africaine, qui est due à l'upwelling côtier dont l'intensité est dépendante du vent. Ce phénomène, localisé, ne sera pas particulièrement considéré dans notre étude. Une forte variabilité est aussi présente entre 10°W et 15°W , 2°N et 4°N , et à 50m-100m de profondeur. Cette zone se situe au niveau de la génération des ondes d'instabilités, ce qui n'est pas étonnant étant donné la forte dépendance du déclenchement de ces ondes avec le vent. On remarque aussi,

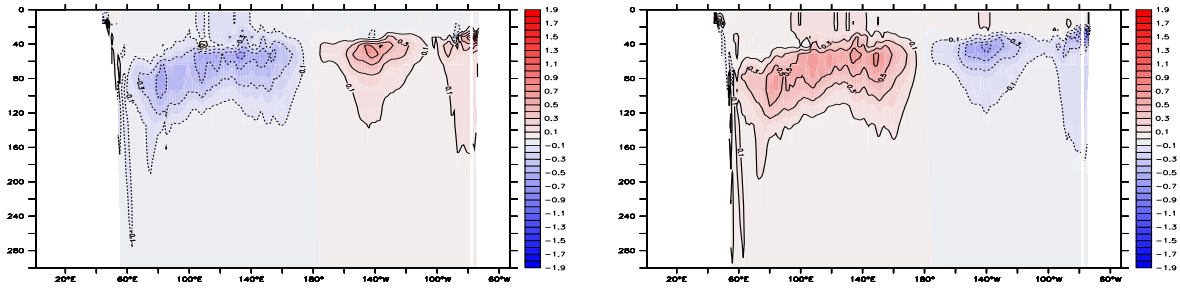


FIG. 6.5 – Anomalie de température après 3 jours de vents amplifiés par 1.25 (à gauche) et amplifiés par 0.8 (à droite). Coupe à 2°N.

aux mêmes longitudes, un autre maximum de variabilité (moins fort) entre 2°S et 4°S. Celui-ci se situe aussi sur la zone de génération des ondes d'instabilités de la partie sud, qui sont moins intenses. D'est en ouest le long du bassin, la profondeur de variabilité maximum augmente car la thermocline est plus profonde à l'ouest. Pour la salinité, la variabilité n'a pas du tout la même distribution (non montré), elle est concentrée dans les 50 premiers mètres au niveau de l'upwelling côtier. A l'intérieur de la région TIW, celle-ci est très faible devant les valeurs que l'on pourra rencontrer dans la région NBC par exemple.

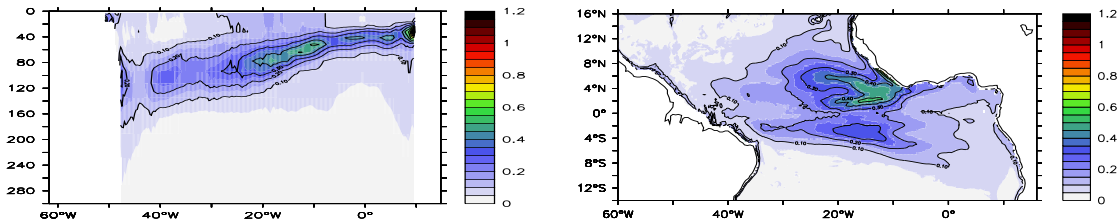


FIG. 6.6 – Variabilité de la température ($^{\circ}C^2$) de l'ensemble des anomalies issues de l'expérience ANO3J. A gauche : coupe à 2.5°N. A droite : sur l'ensemble de domaine, à 70m de profondeur.

Nous retenons donc que les anomalies après trois jours de vent perturbé peuvent avoir des structures complexes en dessous de la couche de mélange, et la sensibilité au vent à courte échéance est particulièrement forte dans la zone de formation des TIW. La variabilité de ces erreurs est bien différente de la variabilité du modèle lui même, qui est aussi très forte dans la partie ouest du bassin.

6.3 Réglage des principaux paramètres de l'assimilation

Durée du cycle

Le cycle d'assimilation ne doit pas être trop long par rapport aux variations de la dynamique. En 10 jours, une onde d'instabilité parcourt une distance égale à sa taille caractéristique. Etant donné que les observations sont rassemblées en fin de cycle et traitées comme si elles avaient toutes été réalisées au même instant, une durée de 10 jours pour le cycle d'assimilation est évidemment trop grande pour corriger la phase et la structure des ondes d'instabilités avec cette méthode séquentielle. Une durée de cycle de 3 jours semble raisonnable compte tenu de la faible évolution de la dynamique durant cette période de temps. Rappelons que le cycle ne doit

pas être non plus trop court surtout si le nombre d'observations est faible car un problème de non-optimalité du filtre risque d'être accentué (voir section 5.3.3).

Le vecteur d'état

Nous avons vu dans la section 5.3.1 qu'avec l'utilisation du filtre SEEK, le vecteur d'état devait être a priori composé des variables U, V, T, S et SSH. Dans cette partie, nous montrons que la correction des seules variables T et S sera suffisante pour obtenir un très bon contrôle de la dynamique des ondes et donc que les variables U et V n'ont pas nécessairement besoin de faire partie du vecteur de contrôle. Pour le démontrer, nous avons réalisé l'expérience suivante : en utilisant le cadre d'expérience jumelle défini dans la section précédente (REF-CTR1), une série d'étapes "idéales" d'assimilation a été réalisée en incrémentant exactement l'état de REF dans la simulation CTR1 pour T et S seulement. Cette simulation, appelée INCR_TS, comprends donc une série d'étapes d'assimilation parfaites où seulement la température et la salinité sont corrigés, et où le champ de vitesse n'est pas modifié par rapport à l'état de prévision. En effectuant une incrémentation tous les trois jours, le champ de vitesse est bien ajusté au bout de quelques cycles, et durant l'épisode des TIW, la vitesse méridienne de INCR_TS, sur laquelle la signature des TIW est très nette, est proche de celle de REF et les structures sont en phases (figure 6.7). En moyenne sur une année, la réduction de variance de l'erreur (avec REF) pour les états de

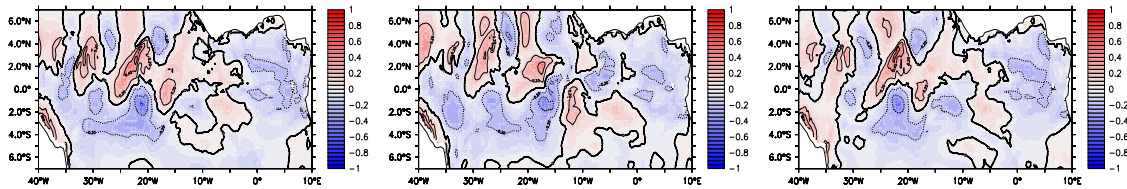


FIG. 6.7 – Vitesse méridienne à 30 m de profondeur au jour 215 pour REF à gauche, pour CTR1 au milieu, et pour INCR_TS (avec l'incrément de température et salinité de REF) à droite.

prévision de INCR_TS est de 93% (pour la vitesse méridienne) par rapport à CTR1 ce qui est très important. Ce résultat montre que la vitesse s'ajuste en grande partie avec le champ de température et de salinité. Il ne sera donc pas forcément nécessaire d'incrémenter U et V d'une correction. Des tests en expériences d'assimilation (non détaillés ici) ont montré que les résultats étaient globalement équivalents en ne considérant que (SSH, T, S) comme vecteur de contrôle.

Dimension du sous-espace d'erreur pour la matrice \mathbf{P}^f

Avec l'utilisation de la méthode d'ensemble présentée précédemment, le nombre de modes r nécessaire est a priori moins important qu'une méthode où \mathbf{P}^f serait fixe, étant donné que l'on utilise la connaissance de l'état courant pour calculer les directions d'erreur. Pour vérifier cette hypothèse, une expérience avec un grand nombre de membres ($r = 50$) est réalisée sans assimilation. L'état initial est celui de REF au jour 200, durant l'épisode d'ondes d'instabilités. Un ensemble de 50 membres est calculé avec des vents perturbés. Les anomalies par rapport à REF sont chacune des erreurs dues au vent depuis l'instant initial comme lors d'une étape représentée sur la figure 6.4 avec $r = 50$. Une décomposition en EOF de l'ensemble des 50 anomalies a été calculée. Celle-ci fait apparaître les principales directions de la variabilité de l'ensemble, c'est-à-dire les principales directions des erreurs dues au vent perturbé. Les 9 premières EOF expliquent déjà plus de 95% de la variance du signal. Un ordre de grandeur de 10 membres pour constituer la matrice \mathbf{S}^f est donc certainement suffisant, les membres supplémentaires spécifieraient des directions en grande partie incluses dans le sous-espace. Des tests en expérience

d'assimilation ont été réalisés (nous ne les détaillons pas ici non plus) et ont confirmé qu'au delà de 10 membres, on remarquait une certaine convergence de la correction.

Il faut être conscient que ce nombre de modes nécessaires est certainement dépendant de la perturbation de vent, et qu'il pourrait être différent dans une expérience réelle où l'erreur sur le vent a sans doute des structures beaucoup plus complexes ou même simplement moins bien connues statistiquement. Il se peut alors que le nombre de membres nécessaires soit plus important.

La matrice \mathbf{R}

La matrice \mathbf{R} de covariance d'erreurs d'observations est paramétrée en tenant compte des erreurs instrumentales, des erreurs de représentativité, ainsi que de la partie du vecteur d'innovation qui ne se projette pas sur les modes d'erreur.

Le SEEK local

L'utilisation du SEEK local s'est avérée nécessaire pour éliminer des corrélations non-significatives à grande distance. Une zone d'influence est paramétrée avec une zone principale et une zone périphérique dans laquelle une décroissance exponentielle de l'influence est définie. Sur chaque bord, la zone périphérique est choisie comme étant égale au tiers de la longueur de la zone principale. Des tests de sensibilité à la taille de la zone d'influence ont été réalisés (dans le cadre d'une expérience d'assimilation qui n'est pas détaillée ici), et ont montré que la taille optimale de la zone d'influence est environ 5° en longitude et 2° en latitude.

La différence entre l'expansion zonale et méridionale optimale de la zone d'influence peut aisément s'expliquer car les échelles de la dynamique sont plus courtes selon l'axe méridien que selon l'axe zonal dans la zone équatoriale, comme on peut le voir d'après la forme des ondes d'instabilités sur la figure 6.3 par exemple.

6.4 Conclusion

Les expériences jumelles pour la région TIW sont donc basées sur une erreur de vent qui a un fort impact sur le déclenchement des TIW. L'assimilation a été paramétrée dans le souci de corriger les erreurs dues au vent perturbé (erreur modèle), ce qui nous a amené à utiliser une méthode de Monte-Carlo pour estimer la matrice des covariances d'erreur de prévision. Cette même méthode d'assimilation va être appliquée pour évaluer l'influence des systèmes d'observations dans le chapitre 8.

Chapitre 7

Expériences jumelles et mise au point de l'assimilation dans la région NBC

Introduction

De façon analogue au chapitre précédent, ce chapitre a pour objectif de mettre en place les expériences jumelles et l'assimilation de données dans la région NBC. Le caractère très chaotique de la circulation de cette région justifie un cadre d'expériences jumelles particulier, où il n'est pas nécessaire d'introduire une erreur modèle. La méthode de calcul de la matrice de covariance d'erreur de prévision sera donc également différente.

Après avoir présenté le cadre des expériences jumelles en première partie, nous détaillerons la mise en place de l'assimilation adaptée à la dynamique de cette région.

7.1 Erreurs simulées dans les expériences jumelles

7.1.1 Perturbation de la condition initiale

L'étude de la sensibilité de la dynamique réalisée au chapitre 3 a souligné le caractère chaotique de la génération des anneaux du Brésil suite à la rétroflexion du courant NBC. Contrairement à la région TIW, le forçage du vent n'est pas une source d'erreur modèle prépondérante par rapport à l'erreur sur la condition initiale propagée par le modèle qui est ici très importante. En conséquence, un moyen simple pour définir le cadre des expériences jumelles est d'appliquer une perturbation sur la condition initiale, qui entraîne une modification du déclenchement des tourbillons, et donc aussi du transport de masse et de chaleur le long de la côte Brésilienne. Dans ce cas, il s'agit bien d'expériences "jumelles", où le modèle et les forçages sont identiques. La configuration utilisée est toujours TATL4, sans réduire l'étendue du domaine.

Nous sommes à nouveau confrontés à un problème de choix de perturbation, mais qui est a priori plus facile à résoudre. Pour définir une perturbation réaliste de l'état initial par rapport à celui de REF, une solution simple consiste à choisir l'état de CIE après un an de simulation, lorsque la perturbation infinitésimale s'est amplifiée jusqu'à décorrélérer le déclenchement et la position des anneaux.

7.1.2 La simulation libre

L'état initial de la simulation libre appelée CTR2 est donc l'état de CIE au jour 365, et les flux appliqués sont identiques à ceux de REF (les flux CORE de l'année 2000). CTR2 est

réalisée sur une durée d'un an. La figure 7.1 représente en fonction du temps la variance de l'erreur entre CTR2 et REF moyennée dans la zone NBC pour les variables SSH et V. L'erreur est importante tout au long de l'année, bien qu'elle soit plus intense en automne et en hiver. Pour la SSH, l'erreur correspond à un écart-type compris entre 3 cm et 6 cm, et pour la vitesse dans les premiers niveaux elle correspond à un écart-type entre 0.1 m/s et 0.3 m/s. Ces valeurs sont associées à une décorrélation de la position des anneaux comme le montre la figure 7.2 pour le jour 348 : les deux anneaux présents dans REF à respectivement 52°W et 56°W ne sont pas présents dans CTR2, où seul un anneau, moins intense, est présent à 51°W. Ceci est présenté à titre d'exemple, mais est valable tout au long de l'année.

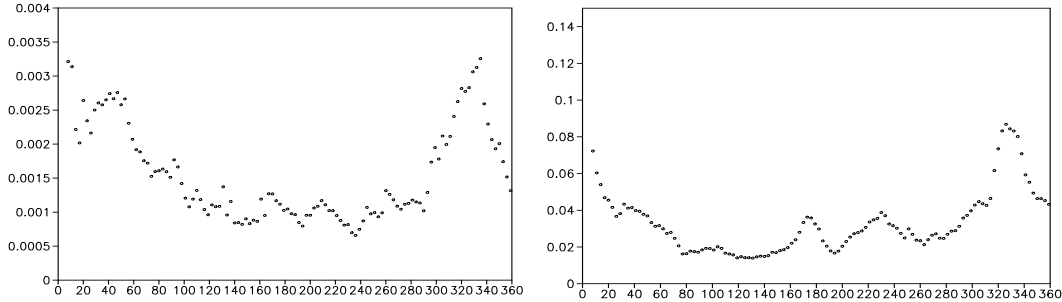


FIG. 7.1 – Variance de l'erreur de CTR2 par rapport à REF pour la SSH (à droite) et pour la vitesse méridienne entre les niveaux 2 et 6 (à gauche).

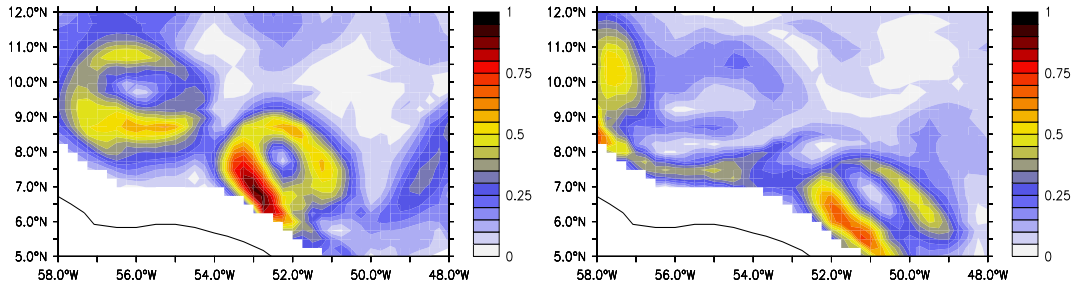


FIG. 7.2 – Vitesse absolue (m/s) à 93 m au jour 348 dans la simulation REF (à droite) et dans la simulation CTR2 (à gauche).

Nous n'avons pas non plus introduit de biais dans l'erreur modèle, comme il en existe aussi pour les anneaux en expérience réelle qui ont tendance à être légèrement trop étalés spatialement. De même que pour la région TIW, nous avons considéré que l'assimilation n'était pas bien adaptée pour résoudre ce type de problème qui devrait plutôt être résolu par de nouvelles paramétrisations du modèle.

7.2 Calcul des covariances d'erreur de prévision

7.2.1 Analyse théorique des erreurs de prévision

La nature des erreurs de prévision est complètement différente de celle des expériences jumelles pour la région TIW. Ici, l'erreur modèle est nulle, et l'erreur de prévision résulte de la propagation par le modèle de l'erreur sur la condition initiale (du cycle courant). Dans la région TIW, cette erreur était très faible car le modèle avait naturellement tendance à faire converger la solution (sans considérer l'erreur modèle bien sûr), tout au moins pour la dynamique considérée.

Mais dans la région NBC, le modèle a tendance à amplifier une petite perturbation (voir chapitre 3). Dans cette expérience jumelle, la matrice \mathbf{P}^f a exactement pour expression théorique $\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T$, qui est certainement proche de ce qu'elle vaut dans une expérience réelle si le modèle est bien calibré.

7.2.2 Méthode d'estimation de la matrice de covariance d'erreur de prévision

Différentes méthodes sont envisageables pour estimer la matrice \mathbf{P}_{k+1}^f . La version évolutive du filtre SEEK consisterait à calculer la matrice $\mathbf{S}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{S}_k^a$, le facteur d'oubli étant inexistant dans l'expression (il vaut 1) puisque l'erreur modèle \mathbf{Q} est nulle. Mais cette méthode est numériquement très coûteuse et nous ne l'avons pas testée. Finalement, nous avons choisi la variante stationnaire du filtre SEEK, la plus simple à mettre en œuvre et qui s'est avérée efficace pour notre étude à condition d'être dans un sous-espace de rang relativement élevé et d'utiliser comme pour la région TIW la version locale du SEEK.

La matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{S}^f est calculée à partir de la décomposition en EOF de 480 états de REF sur les quatre années suivant la période d'étude, de sorte que pour chaque étape d'assimilation, l'état "vrai" de REF ne soit pas supposé connu. Les r premiers modes issus de la décomposition constituent la matrice \mathbf{S}^f , et la détermination du nombre r convenable sera discutée plus loin.

La décomposition en EOF a été calculée uniquement sur la région NBC pour que les premiers modes concernent bien la variabilité de cette région sans rapport avec celle de la région TIW. L'assimilation d'observations ne sera d'ailleurs effectuée qu'à l'intérieur de cette région.

7.2.3 Les zones d'apparition des erreurs

Comme on l'a fait pour la région TIW, nous regardons dans cette section les zones où apparaissent principalement les erreurs.

En profondeur, la signature des anneaux sur la vitesse est présente jusqu'à plus de 500 m de profondeur (voir chapitre 1). Il sera donc nécessaire d'appliquer des corrections jusqu'à de telles profondeurs.

La libération des anneaux après réflexion du courant est un processus chaotique. La zone où a lieu ce phénomène, située le long de la côte entre 46°W et 50°W devra être particulièrement bien observée. En supposant que les anneaux sont bien corrigés dans leur zone de génération, on est en mesure de se demander si le modèle les propage avec une bonne certitude, ou si leur propagation même est tout aussi chaotique. Cela déterminera si à l'échelle d'un cycle d'assimilation, il sera important ou non de bien corriger sur toute la région NBC ou si seulement la zone de génération est importante.

On a remarqué d'après la simulation REF sur une durée de 5 ans que la vitesse d'un anneau était très variable le long de sa trajectoire et qu'en plus, selon les anneaux à une position donnée, la vitesse pouvait être très différente. Cette simple constatation laisse supposer une forte incertitude sur la propagation. Mais, dans ce cas, il faut placer toute incertitude par rapport à un niveau d'erreur initial. En effet, si l'état initial est exact, la génération comme la propagation de chaque anneau sera identique. Il faut se placer à un niveau d'erreur que l'on espère atteindre après correction, puis regarder l'évolution du modèle avec cette erreur. Ceci est toute la difficulté par rapport à l'évaluation de l'erreur modèle effectuée plus facilement dans la région TIW.

La figure 7.3 donne déjà une idée des zones où le modèle a tendance à amplifier une faible erreur. L'erreur semble apparaître tout au long de la trajectoire des anneaux, car le temps séparant les deux instantanés sur la figure (15 jours) est trop faible pour que l'erreur à 56°W soit une erreur apparue à 50°W puis advectée par le modèle. Cela montre que l'erreur n'apparaît pas uniquement dans la zone du déclenchement des anneaux.

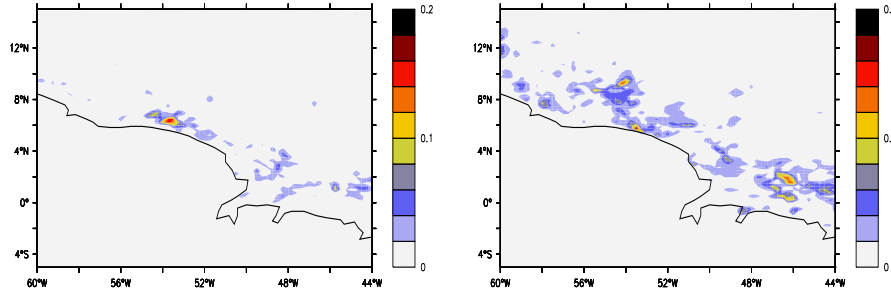


FIG. 7.3 – Carré de l'erreur sur la vitesse méridienne de la simulation CIE au jour 45 (à gauche) et au jour 60 (à droite).

Le suivi d'un anneau particulier dans l'expérience CIE à partir du jour 200, c'est-à-dire au moment où l'état commence à différer plus nettement par rapport à REF, montre que la vitesse d'un anneau initialement formé au même instant et à la même position, et de structure initiale tout à fait semblable n'est pas la même au cours de la trajectoire. La figure 7.4 montre que ce même anneau n'est pas centré au même endroit et n'a pas la même structure de vitesse après 30 jours.

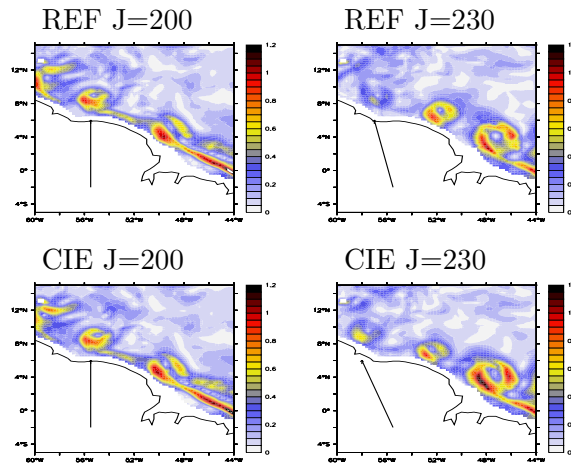


FIG. 7.4 – Vitesse absolue à 30 m de profondeur pour les simulations et les jours indiqués.

Si dans la région TIW, le vent agissait principalement sur le déclenchement des ondes, et moins sur leur propagation, ici, dans la région NBC, une faible erreur est amplifiée par le modèle tout au long de la trajectoire des anneaux. L'incertitude a donc lieu à la fois sur la formation des anneaux, et sur leur propagation, de telle sorte qu'il sera primordial de bien corriger la dynamique sur l'ensemble de la zone de propagation des anneaux.

7.3 Réglage des principaux paramètres de l'assimilation

Durée des cycles

Pour choisir une durée de cycle adaptée, nous nous sommes basés sur les échelles caractéristiques de la dynamique. Contrairement à la région TIW, la rapidité d'évolution de l'état est très variable, les anneaux se propagent à une vitesse allant de 0.08m/s à 0.16m/s. Cette vitesse est dans tous les cas nettement inférieure à celle des TIW, mais compte tenu des plus faibles distances de décorrélation des erreurs de prévision, nous avons quand même choisi une durée de

cycle assez courte, de 3 jours.

Choix du vecteur d'état

De même que pour la région TIW, nous avons réalisé une expérience en corrigeant les variables T et S de REF, mais pas les vitesses. La figure 7.5 montre que dans la région NBC, la vitesse n'est pas bien corrigée en conséquence, c'est-à-dire que l'ajustement à la structure thermique et saline est insuffisant pour corriger le système comme c'était le cas dans la région TIW. Après 50 jours, la vitesse devient même encore plus dégradée que celle de CTR2. L'erreur étant calculée à partir des états de prévision après 3 jours, même la température (figure de gauche) se dégrade rapidement à cause du champ de vitesse mal ajusté (figure de droite). Nous avons vérifié (non montré) que les anneaux étaient très mal représentés durant les 120 jours de cette expérience.

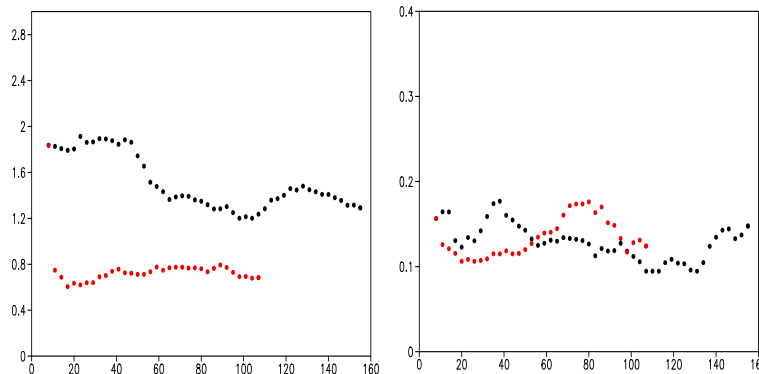


FIG. 7.5 – *Ecart RMS en fonction du temps de la simulation CTR2 en noir et de la simulation avec incréments de la température et salinité de REF en rouge. A gauche, pour la température au niveau 10 (93m) et à droite, pour la vitesse méridienne au niveau 10.*

Les variables U et V devront donc nécessairement faire partie du vecteur de contrôle. A l'inverse, un vecteur de contrôle (SSH, U, V) serait éventuellement envisageable, mais la température et la salinité sont des variables qui peuvent être observées en profondeur (notamment par les profils ARGO) et cela empêcherait l'utilisation de ces données. Le succès de l'assimilation reposera donc en grande partie sur des covariances multivariées bien définies entre les variables observées et le champ de vitesse (U,V) entièrement non-observé.

7.3.1 Réglages des paramètres du SEEK à partir d'un ensemble d'analyses

L'utilisation d'une matrice \mathbf{S}^f constante permet d'effectuer facilement plusieurs tests pour régler certains paramètres tels que la taille du sous espace, les dimensions de la zone d'influence du SEEK local ou la paramétrisation de la matrice \mathbf{R} .

Présentation des expériences de test

Des expériences de test en réalisant une série d'étapes d'analyse, mais sans propagation par le modèle, ont été réalisées pour ajuster les principaux paramètres.

Etant donné que l'on attend de l'assimilation de la SSH une correction du champ de vitesse, on considère dans ces expériences un vecteur d'état très réduit comportant la SSH et la vitesse de surface (U01, V01). Avec les 120 états de REF dont on a extrait les observations de SSH sur l'année d'étude (voir chapitre 4), on réalise 120 étapes d'analyse avec comme estimé l'état moyen de REF et comme vecteur d'observation la SSH complète. La matrice \mathbf{S}^f est calculée comme indiqué précédemment, mais uniquement avec les variables SSH, U01 et V01.

Des pourcentages de correction par rapport à REF sont calculés pour chacune des variables. Ils indiquent la qualité de la correction.

Paramètres du SEEK local

Deux premières expériences avec le SEEK global et local ont montré la nécessité de réduire fortement l'influence des observations à distance.

La zone d'influence est aussi paramétrée avec une zone principale et une zone périphérique comme expliqué dans le chapitre précédent. Pour calibrer la zone d'influence du SEEK local, nous avons réalisé une série d'expériences en fixant le rang $r=50$ et en faisant varier la zone d'influence en longitude et en latitude. Pour chacune des expériences, le score sur la vitesse a été calculé. La rapidité de calcul de l'étape d'analyse avec ce vecteur d'état réduit nous a permis de réaliser un grand nombre de tests dont les scores sont représentés de façon interpolée sur la figure 7.6. D'après cette figure, la correction est maximale pour des tailles comprises entre 4 et 8 points de grille selon la longitude et la latitude. La taille de la zone d'influence retenue est de 6 points de grille selon la longitude et la latitude. On remarque que cette zone optimale est isotrope, ce qui n'est finalement pas étonnant étant donné le caractère plus isotrope de la dynamique dans cette région.

Cependant, si la couverture des observations n'est pas complète (typiquement dans le cas des satellites), il est possible que la taille optimale soit légèrement supérieure afin de corriger quand même dans les zones non observées. Mais ce résultat, probablement peu influent, n'a pas été vérifié et pour simplifier l'étude, nous ne garderons systématiquement les mêmes paramètres de SEEK local. La valeur du rang r choisie ($r = 50$) peut aussi avoir un impact sur la taille optimale.

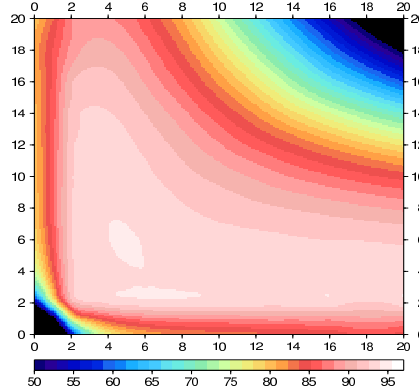


FIG. 7.6 – *Pourcentage de correction obtenu dans les expériences de test, en fonction de l'extension en longitude et en latitude de la zone d'influence du SEEK local, avec un nombre de modes $r = 50$.*

Dimension du sous-espace

Il est important d'évaluer la dimension nécessaire du sous-espace d'erreur, et de vérifier s'il existe une certaine convergence de la correction à partir d'une dimension raisonnable. Pour cela, nous avons réalisé des expériences toujours avec le même dispositif, mais en faisant varier le nombre de modes de la matrice \mathbf{S}^f entre 1 et 280. De même que dans l'expérience précédente, nous avons calculé un score de correction pour la variable observée (SSH) et les variables de vitesses. Comme le montre la figure 7.7, la correction maximale atteinte sur la variable non-observée V01

est de 93%. Un sous-espace d'erreur avec seulement 10 modes comme dans la région TIW serait très insuffisant (le score sur la vitesse est inférieur à 50%). A partir de $r = 50$, la correction maximale est presque atteinte puisqu'elle est supérieure à 90%. On remarque que le pourcentage de variance du signal expliquée est un bon indicateur du niveau correct de troncature pour la correction des variables non-observées. Au vu de la taille du vecteur d'état et de nos moyens de calcul, il est tout à fait réalisable d'utiliser le filtre SEEK stationnaire avec une dimension du sous-espace égale à 50. Nous garderons donc cette valeur dans la suite de l'étude pour la région NBC. Le nombre de modes nécessaires est donc nettement plus élevé dans cette région que dans la région TIW (avec l'autre méthode).

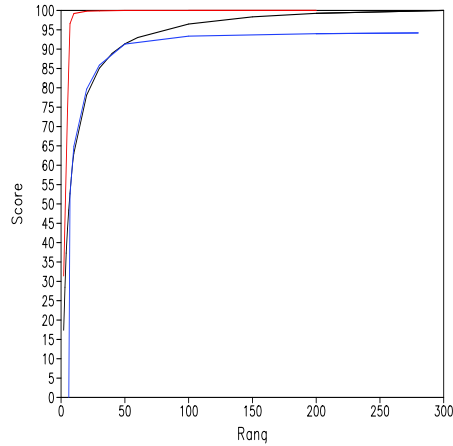


FIG. 7.7 – *En rouge : score de correction pour la variable observée SSH en fonction du rang de la matrice \mathbf{S}^f . En bleu : score pour la vitesse méridienne. En noir : pourcentage de variance du signal expliquée en fonction du nombre de modes.*

Termes diagonaux de la matrice \mathbf{R}

Pour paramétrer la variance de la partie du vecteur innovation qui ne se projette pas sur les modes d'erreur, nous avons multiplié la variance de la SSH par le pourcentage de variance non-expliquée par les 50 premiers modes. Dans la région NBC, la valeur à définir se situe donc autour de $1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ce qui correspond à une erreur paramétrée par la matrice de l'ordre de 1.2 cm RMS. Un terme correspondant à l'erreur instrumentale est ensuite ajouté.

7.3.2 Opérations sur l'incrément de correction

Pour éviter certaines dégradations de l'état en profondeur, nous avons annulé les incréments de correction en dessous de 1000 mètres, en les diminuant linéairement à partir de 600 mètres. Ceci n'a pas été nécessaire dans la région TIW car la matrice \mathbf{S}^f était définie avec des anomalies calculées à partir de l'état courant, donc si l'impact du vent était nul très en profondeur, alors la matrice \mathbf{S}^f spécifiait bien une covariance nulle. Or la matrice que nous avons définie ici est calculée simplement avec les modes de variabilité du modèle libre, et ceux-ci ne sont pas nuls même en profondeur. Par exemple, ils comprennent les variations du DWBC autour de 1500 m de profondeur. Même si la corrélation entre les variables observées et le vecteur d'état à 1500 m de profondeur est faible dans la matrice \mathbf{S}^f , elle est visiblement suffisante pour introduire des corrections à ces profondeurs qui ne s'avèrent pas correctes.

Une autre opération sur l'incrément de correction a été mise en place car il s'est avéré qu'un signal de petite échelle, ressemblant à des discontinuités d'une maille à l'autre, perturbait la correction. Un lissage de l'incrément de correction est donc effectué pour éliminer ces petites

échelles. Nous n'avons pas étudié en détail ce problème car le lissage de l'incrément semble bien le résoudre. Ces discontinuités apparentes pourraient être dues à l'utilisation du SEEK local, mais pourtant la zone d'influence a bien été paramétrée de façon décroissante sur les bords pour éviter justement les discontinuités de correction, et de plus ce problème n'a pas été rencontré dans la région TIW.

7.4 Conclusions

Les erreurs présentes dans les expériences jumelles pour la région NBC sont de nature complètement différentes de celles de la région TIW. Le calcul de la matrice de covariances d'erreur de prévision, un des points les plus délicats du filtre SEEK, est réalisé de façon classique. Il n'a pas été simple de définir par exemple une méthode d'ensemble comme nous l'avons fait dans la région TIW, car la source des erreurs est plus complexe puisqu'il s'agit d'une erreur initiale propagée par le modèle. Une méthode de type SEEK évolutif aurait sans doute été appropriée, mais le caractère chaotique de la dynamique imposerait sans doute de conserver un nombre de modes assez élevé, ce qui serait très coûteux pour la version évolutive. C'est donc pourquoi le calcul de la matrice de covariances d'erreur de prévision est réalisé de façon relativement simple et classique.

Troisième partie

**Evaluation des systèmes
d'observations**

Chapitre 8

Etude de scénarios dans la région TIW

Introduction

Ce chapitre a pour objectif l'évaluation de différents scénarios d'observation en rapport avec les enjeux dégagés dans le chapitre 3 pour la région TIW. Dans une première section, nous mettrons en place des diagnostics quantitatifs pour évaluer les corrections de l'assimilation. Les deux sections suivantes traitent respectivement du besoin en observations complémentaires et de l'influence des scénarios d'altimétrie satellitaire.

L'impact des observations altimétriques sera étudié plus en détail, afin de mettre en évidence les orbites favorables et le nombre de satellites nécessaires. Entre autres, les bénéfices d'une mission à large fauchée seront comparés à ceux des autres scénarios satellitaires. Nous tenterons une interprétation des résultats afin de mieux comprendre les exigences de répartition des observations, et d'établir quelques généralisations concernant les paramètres orbitaux favorables.

8.1 Diagnostics adaptés à la zone

8.1.1 Différents niveaux de contrôle

Nous définissons trois niveaux de contrôle pour évaluer la correction : la correction de niveau 0, concernant la variable principalement observée SSH ; la correction de niveau 1, concernant les variables d'état peu ou pas observées comme la température en profondeur, la vitesse ; et enfin la correction de niveau 2, concernant des diagnostics intégrés tel que le contenu thermique.

La correction de la variable observée SSH est déjà d'un intérêt remarquable. En effet, l'assimilation d'observations discontinues permet d'obtenir un champ continu de la variable observée SSH, a priori plus juste que celui obtenu par l'interpolation, surtout lorsque les observations sont peu nombreuses.

Si cette correction, appelée correction de niveau 0, est satisfaisante, il est intéressant d'évaluer la correction de niveau 1. En effet, une particularité remarquable de l'assimilation est la correction multivariée. Nous nous intéresserons surtout au contrôle de la température et de la vitesse entre la surface et la thermocline, qui sont très liées à la bonne représentation de la structure des ondes d'instabilités.

Enfin, si la correction des niveaux 0 et 1 est satisfaisante, la correction de variables intégrées peut alors être étudiée. Toujours pour la même raison (les variables intégrées n'étant pas observées), il serait improbable d'obtenir une correction sur celles-ci avant d'en avoir sur les variables d'état. Nous allons étudier la correction du contenu thermique, qui est défini en chaque point

de la grille 2D en W/m^2 . Rappelons que nos expériences d'assimilation sont à l'échelle d'une année seulement, et en conséquence beaucoup de variables de niveau 2 intégrées sur le temps ne pourront être évaluées de façon satisfaisante. L'intérêt principal de nos expériences s'inscrit dans une perspective plutôt opérationnelle à court terme, de prévision océanique. Le contrôle de niveau 1 restera le principal diagnostic.

En ce qui concerne la région TIW, la phase des ondes tropicales d'instabilités constitue un diagnostic préliminaire important. En effet, une première différence évidente entre REF et CTR1 est le déphasage des ondes d'instabilités. Celui-ci se repère très bien à partir d'un diagramme longitude-temps de la vitesse méridienne. Etant donné que l'algorithme SEEK minimise l'écart par rapport aux observations, le contrôle de la phase est indispensable avant toute amélioration de la structure des ondes en profondeur. Nous aurions pu mettre en place un outil numérique permettant de quantifier le déphasage, mais nous avons jugé que l'évaluation qualitative suffisait pour ce diagnostic.

8.1.2 Définition des scores de correction

Pour la phase des ondes, nous n'avons pas mis en place d'évaluations quantitatives, mais pour tous les autres diagnostics, des scores de correction (en %) ont été définis pour faciliter les comparaisons. Pour une variable X donnée, qu'elle soit d'ordre 0, 1 ou 2, on définit le score pour la simulation SIM de la manière suivante :

$$SCORE(SIM, X) = \left(1 - \frac{ERROR(SIM, X)}{ERROR(BASE, X)}\right) \times 100 \quad (8.1)$$

La simulation $BASE$ est la simulation de base avec laquelle on compare l'amélioration. Par exemple, dans l'étude de l'influence des scénarios altimétriques, $BASE$ est la simulation qui ne comprend pas d'observations altimétriques assimilées, appelée aussi $NOSSH$.

La fonction $ERROR$ est l'erreur par rapport à REF (la vérité), qui s'écrit pour une variable X et une simulation SIM :

$$ERROR(SIM, X) = \|SIM - REF\|_X^2 \quad (8.2)$$

où $\| \cdot \|_X^2$ est la variance pour la variable X , calculée en chaque point durant un temps défini (la durée de l'épisode d'ondes d'instabilités) et moyennée sur la région TIW pour des niveaux de profondeur précisés. L'erreur est donc dimensionnée par rapport à la variable considérée.

8.2 Besoins en observations complémentaires

8.2.1 Un premier aperçu d'après la variabilité

Avant de réaliser des tests d'assimilation, un simple regard sur la variance de l'ensemble d'anomalies ANO3J (défini dans le chapitre 6) montre que la température entre 50 m et 150 m dans la zone de génération des TIW est très sensible au vent à l'échelle de 3 jours (figure 8.1), c'est-à-dire à l'échelle d'un cycle d'assimilation. Si l'assimilation de la SSH seule n'est pas suffisante, il est probable qu'un apport de profils de température dans cette zone et jusqu'à 200 mètres au moins soit nécessaire. Pour la salinité, la variabilité est faible dans la région TIW par rapport à ce qu'elle vaut dans la zone de l'upwelling côtier où de l'embouchure de l'Amazone. On n'observe pas de maximum local dans la zone de génération des ondes. Concernant la SST, d'une part la variabilité est importante car elle est sensible aux effets du vent, et d'autre part elle comporte une signature très marquée des ondes d'instabilités. Son assimilation est donc potentiellement intéressante.

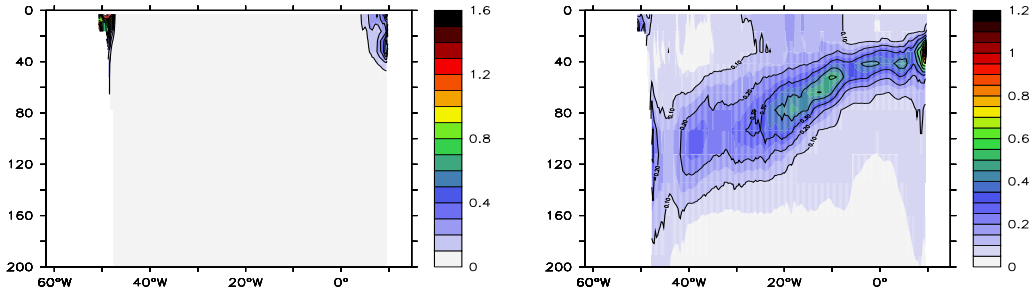


FIG. 8.1 – Coupe à 2.5°N de la variabilité de la salinité (à gauche, en PSU^2) et de la température (à droite, en $^\circ\text{C}^2$) pour l'ensemble ANO3J.

8.2.2 Evaluation des besoins d'après des expériences d'assimilation

L'objectif de ces expériences est de savoir si l'observation altimétrique est à elle seule suffisante ou non pour contrôler l'ensemble du vecteur d'état. Le meilleur des cas en terme d'observations altimétriques est envisagé, c'est-à-dire que toute la couverture de SSH est assimilée dans les expériences de cette section et l'on teste en plus l'assimilation d'observations complémentaires si le contrôle n'est pas jugé suffisant. Dans une première expérience (EXP1), aucune observation complémentaire n'est assimilée en plus de la SSH. Les ondes d'instabilités sont déjà parfaitement en phase et la vitesse en surface comme en profondeur est bien corrigée (non montré). La comparaison des deux premières cartes de la figure 8.2 montre que la correction des anomalies thermiques dues aux ondes au niveau 10 (voir les deux maximums d'erreur de température, à gauche) est satisfaisante. Cependant, des erreurs en température autour de 1°C sont présentes sur l'ensemble de la région TIW. Ces erreurs étant de relativement grande échelle, il est probable que l'assimilation d'un faible nombre de profils d'observations de température en profondeur soit suffisant pour corriger le problème.

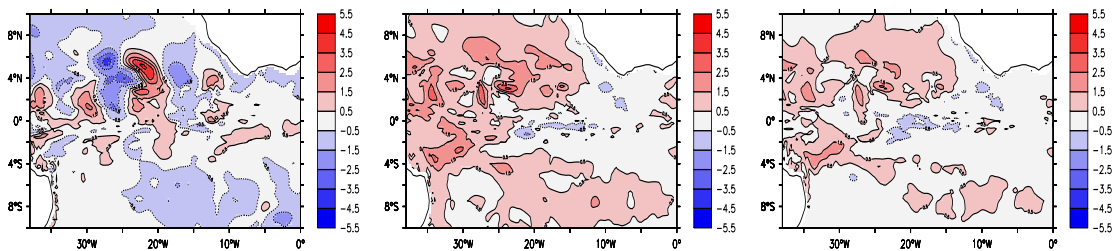


FIG. 8.2 – Erreur sur la température ($^\circ\text{C}$) au niveau 10 par rapport à l'état de REF. À gauche dans la simulation libre CTR1 (sans assimilation), au milieu dans EXP1 et à droite dans EXP2.

Une deuxième simulation (EXP2) a été réalisée avec l'assimilation d'un réseau peu dense ($5^\circ \times 2.5^\circ$) de profils de température jusqu'à 200m. La carte de droite sur la figure 8.2 montre effectivement une réduction de l'erreur.

Une troisième simulation (EXP3) a été réalisée de façon identique à la précédente, mais en ajoutant aussi l'observation de la salinité dans les profils. Bien que la salinité soit encore mieux corrigée, l'amélioration sur les autres variables n'est pas flagrante comme on pouvait le présager au vu de la faible variabilité de la salinité de l'ensemble ANO3J.

L'assimilation de la SST est aussi testée dans une dernière simulation (EXP4). La température de la couche de mélange est encore mieux corrigée (non montré) et la forme exacte des filaments dues aux ondes est plus proche de celle de REF, mais on ne note pas véritablement d'amélioration de l'état en profondeur.

En conclusion, la topographie de surface suffit déjà à elle seule pour un très bon contrôle des ondes. L'assimilation conjointe de profils de température limite certaines dérives de la température en profondeur, et l'assimilation de SST améliore la température dans la couche de mélange.

Ces résultats démontrent aussi que la SSH est une variable particulièrement intéressante à assimiler car elle est capable de corriger la structure des ondes en profondeur ce que nous allons détailler dans la section suivante. Nous avons d'ailleurs vérifié (non montré) que l'assimilation de la SST et des profils de température mais sans SSH ne permet pas un contrôle de la phase des ondes d'instabilités. Dans ce cas, même si le phasage est identifiable à partir de la SST, l'algorithme d'assimilation ne peut pas reconstruire correctement les ondes.

8.3 Etude des scénarios d'observation altimétriques

Un réseau finalement peu dense d'observations in situ est suffisant pour compléter les observations de SSH qui permettent une très bonne correction des ondes. Nous avons choisi d'assimiler le réseau d'observations in situ de température et salinité entre 0 m et 300 m, de densité $5^\circ \times 2.5^\circ$ sur la grille, ce qui correspond au moins à la densité disponible aujourd'hui avec le réseau ARGO. A celui-ci sont ajoutées les observations de SST.

La simulation avec l'assimilation des observations complémentaires sans SSH est appelée NOSSH, et avec la couverture complète FULLSSH. Le tableau 8.1 indique les scores obtenus pour un ensemble de simulations avec des scénarios mono-satellite et multi-satellites, et la figure 8.3 les scores pour la SSH et la vitesse méridienne au niveau 10 (93 m). Dans le texte, les noms des simulations se réfèrent aux satellites simulés.

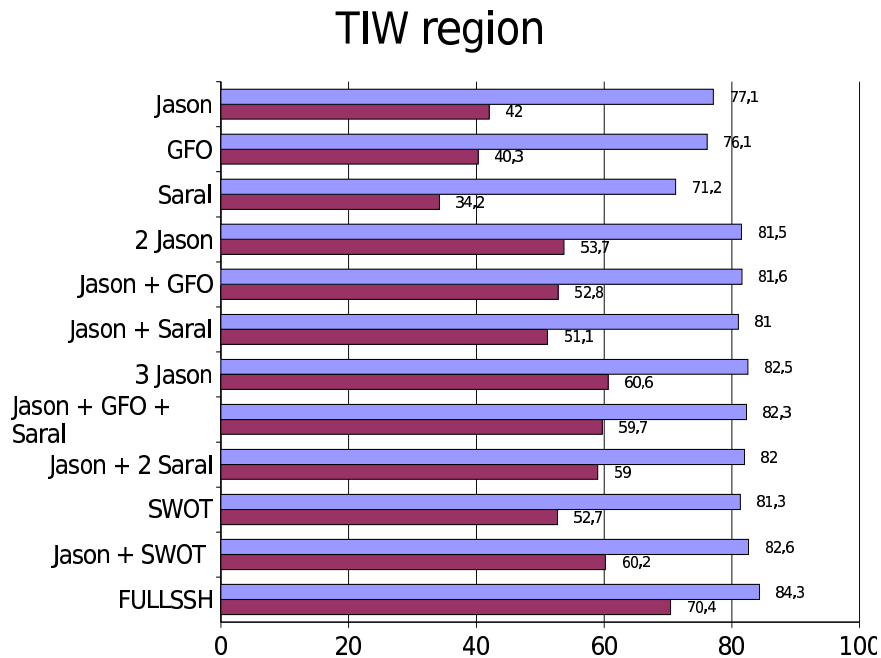


FIG. 8.3 – Score de la variable SSH en bleu et score de vitesse méridienne à 93 m de profondeur, moyennés dans la région TIW et durant les mois de juin, juillet, et août, pour différents scénarios mono et multi-satellites.

Expériences	SSH	T 1 (SST)	T 10	S 1 (SSS)	S 10	U 1	U 10	V 1	V 10	HC (Heat Content)
NOSSH	3.3 cm	0.4 °C	1.3 °C	0.30 psu	0.17 psu	0.29 m/s	0.20 m/s	0.22 m/s	0.14 m/s	1.26.10 ¹¹ J/m²
FULLSSH	84.3	62.5	74.4	79.0	80.8	79.6	68.2	69.9	70.4	53.2
N1 (JASON-1)	77.1	43.6	59.2	45.7	66.0	55.6	52.3	26.5	42.0	43.1
N2 (GFO)	76.1	43.1	58.0	44.8	62.9	54.1	49.9	25.1	40.3	41.5
N3 (EN-VISAT ou SARAL)	71.2	34.5	48.6	36.3	54.7	44.9	41.8	22.3	33.1	34.2
N5	81.9	54.9	68.3	70.1	73.8	70.7	62.9	56.1	58.1	47.7
N1 + N1	81.5	50.5	66.0	55.6	72.2	67.3	62.0	41.5	53.7	47.1
N1 + N2	81.4	49.6	65.8	55.0	70.4	65.5	61.3	39.3	52.8	46.9
N1 + N3	81.0	49.2	65.3	54.9	71.4	65.2	60.9	38.7	51.1	46.6
N1 + N1 + N1	82.5	56.1	69.6	65.1	75.9	71.1	64.1	55.6	60.6	49.1
N1 + N2 + N3	82.3	55.0	68.8	64.2	75.0	70.0	63.7	55.1	59.7	48.0
N1 + N3 + N3	82.0	55.2	68.4	64.5	75.1	69.8	63.8	55.2	59.0	48.1
LF4	81.3	49.4	65.6	56.0	72.0	67.1	61.6	54.7	52.7	46.3
N1 + LF4	82.6	56.8	69.7	71.8	75.9	71.4	64.0	59.4	60.2	49.0

TAB. 8.1 – Scores de correction en rapport à la simulation de base NOSSH pour différents scénarios testés. Sur la ligne NOSSH sont indiqués les erreurs RMS pour chacune des variables. Sur les autres lignes sont indiqués les scores de correction. Le sigle NX désigne un satellite au nadir sur l'orbite X, et le sigle LFX désigne un satellite à large fauchée sur l'orbite X.

8.3.1 Etude de scénarios mono-satellitaire

Dans cette section nous évaluons l'impact de l'assimilation des observations d'un seul satellite pour corriger la dynamique dans la région TIW, ainsi que l'influence de l'orbite.

Simulation d'un satellite de type JASON

Les satellites TOPEX/POSEIDON, JASON-1 ou JASON-2, volant sur l'orbite 1, constituent une référence pour l'altimétrie, c'est pour cette raison que nous présentons d'abord les résultats obtenus avec cette orbite. Dans la simulation JASON-1, les ondes d'instabilités sont en phase par rapport à REF, tandis qu'elles ne le sont pas dans la simulation NOSSH, comme le montre la figure 8.4 représentant la propagation des ondes durant l'épisode de TIW intenses. Quantitativement, le score de niveau 0 (voir figure 8.3) pour JASON-1 est de 77.1%, c'est-à-dire que 77.1% de la variabilité de l'erreur sur la SSH est déjà corrigée. Le score de la simulation FULLSSH est de 84.3% (et non 100%, à cause de l'erreur modèle à l'échelle d'un cycle et à cause de la partie du signal qui ne se projette pas sur les modes). La différence entre les deux scores n'est donc que de 7.3% ce qui est très faible et prouve qu'un satellite permet de corriger une très grande partie de la variabilité de la SSH. En revanche, le score sur la vitesse à 93m est de 42% avec JASON-1, alors qu'il est de 70% avec FULLSSH. Cette différence plus élevée prouve aussi que la faible part de variabilité corrigée en plus avec FULLSSH est très utile pour corriger les variables

non-observées.

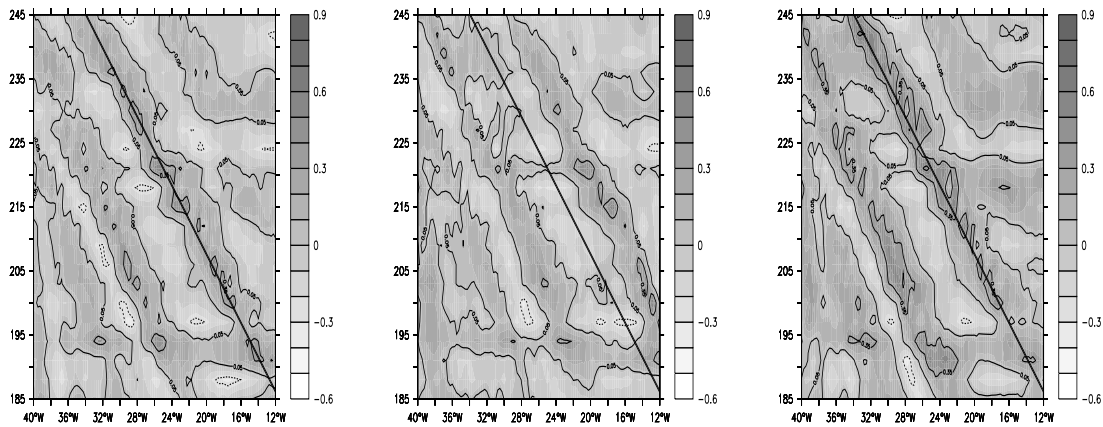


FIG. 8.4 – Diagramme longitude-temps à 2°N de la vitesse méridienne (m/s) entre les jours 185 et 245 pour l'état de référence (à gauche), pour la simulation NOSSH (au milieu) et pour la simulation JASON-1 (droite). La ligne noire indique le trajet d'une TIW particulière dans REF.

Le score du contenu thermique est calculé en fonction du temps sur la grille 2D. Pour JASON-1, il est de 43%, et n'est que de 53% pour FULLSSH. Une visualisation des champs de contenus thermiques a montré que la partie non-correctée dans le cas de FULLSSH était essentiellement un biais à l'échelle du bassin, qui reste un point à améliorer dans la méthode d'assimilation. Mais comme nous l'avons déjà mentionné, l'influence du scénarios est plus marquée sur la correction de la variabilité rapide que sur la correction des dérives qui est un autre problème.

Un seul satellite altimétrique de type JASON est donc déjà capable de contrôler la position des TIW, et de réduire plus de la moitié de la variabilité de l'erreur en comparaison avec un système d'observation altimétrique parfait pour l'ensemble des variables d'état non-observées (vitesse, température et salinité).

Influence de la référence de l'orbite

Le décalage spatial, ou en d'autres termes la position d'un point de référence pour l'orbite, n'a évidemment pas d'influence sur la résolution spatio-temporelle des observations si le satellite est seul. Mais le point de référence aura une influence sur l'observation ou non de certains points, car le décalage spatial d'un seul satellite a pour effet un décalage de l'ensemble du maillage des observations dans la direction zonale. L'effet est a priori d'autant plus important que la distance inter-traces est grande, donc que le cycle de répétitivité est court. L'influence sur l'assimilation de données risque d'être non négligeable s'il y a des caractères locaux dans la circulation, spécifiques à certains endroits, comme il peut en exister près des côtes par exemple. En revanche, dans notre cas, la dynamique est principalement propagative dans la direction zonale ce qui limite les effets locaux dans cette direction. Il est donc peu probable que l'effet du décalage soit perceptible, à moins que la distance inter-traces devienne non négligeable par rapport à la taille du bassin.

Nous avons tout de même testé un décalage d'une demi distance inter-traces pour l'orbite 1 qui a la plus grande distance inter-traces (2.8°) parmi les orbites testées. Effectivement, les scores de correction sont tout à fait semblables (ils diffèrent à moins de 0.5% près) sur un an d'expérience. Nous confirmons donc que la référence de l'orbite n'est pas un facteur important, le choix de celle-ci pourra dépendre de d'autres nécessités.

De plus, étant donné que la circulation que l'on cherche à corriger ne présente aucun caractère cyclique à l'échelle de la période nodale, ni de l'ordre du cycle journalier, il est évident que la

référence temporelle de l'orbite n'aura pas non plus d'influence.

Influence de l'orbite

La référence spatiale ou temporelle de l'orbite n'ayant pas d'influence, une valeur arbitraire pour le point et le temps de référence peut être choisie pour chaque orbite considérée dans cette étude. Comme ces orbites sont déjà utilisées pour des satellites existants, nous avons choisi pour les orbites 1,2 et 3 testées ici les points de référence des satellites JASON-1, ENVISAT et GFO.

L'influence de l'orbite dans un système mono-satellitaire n'est pas négligeable, ce qu'on pouvait présager d'après la diversité de répartitions spatio-temporelle des observations vue dans le chapitre 1. Les scores de correction pour des satellites volant sur les orbites 1, 2, 3 et 5 sont répertoriés sur le tableau 8.1. Le score de FULLSSH est donné à titre de comparaison.

La simulation avec un satellite volant sur l'orbite 5 a un score nettement plus élevé que les autres. Les caractéristiques des sous-cycles et du cycle sont quasiment identiques à celles de l'orbite 1, sauf que l'inclinaison est nettement plus faible (12°). La densité d'observations est donc beaucoup plus élevée sur la bande tropicale, ce qui explique au premier ordre le meilleur résultat.

Les simulations JASON-1 et GFO ont des scores relativement proches (pour la SSH comme pour les vitesses), mais la simulation SARAL (satellite volant sur l'orbite 3) se distingue par des scores nettement moins élevés. Pourtant, en terme de densité d'observations, les 3 premières orbites ne diffèrent pas franchement. L'interprétation de ce résultat sera réalisée dans la section 8.4.

Conclusion

Trois points importants ressortent de cette étude. Premièrement, parmi les orbites étudiées (avec un cycle de répétitivité d'au moins 10 jours) la distance inter-traces est suffisamment petite pour qu'il n'y ait pas d'influence du point de référence. Deuxièmement, l'utilisation d'un satellite à très faible inclinaison, permettant de n'observer que les tropiques, est évidemment beaucoup plus favorable. Troisièmement, parmi les satellites à forte inclinaison, d'importantes différences de performances existent selon les paramètres orbitaux. L'orbite 3, utilisée pour le satellite ENVISAT et prochainement pour SARAL, est moins favorable que les orbites 1 et 2 utilisées respectivement pour JASON-1 et GFO. Dans les moyennes latitudes *Debst* (2004) a montré qu'il existait aussi de telles différences entre les orbites, mais les scores relatifs obtenus ne sont pas du tout les mêmes. Parmi les trois orbites considérées ici, dans les moyennes latitudes pour les corrections de niveau 0 et 1, l'orbite 1 était la moins favorable et l'orbite 2 la plus favorable.

8.3.2 Etude de scénarios multi-satellites et large fauchée

Les décalages spatio-temporels dans un système multi-satellites

Si l'influence de la référence spatiale de l'ensemble des observations est quasiment nulle comme nous l'avons vu, celle du décalage entre satellites est certainement non négligeable et nécessite une étude avant une évaluation plus générale des scénarios multi-satellites. Dans cette section, l'étude est réalisée à partir d'un système bi-satellitaire mais pourrait se généraliser avec plus de satellites. Les décalages spatiaux ou temporels relatifs entre satellites modifient largement la résolution spatio-temporelle des observations. Nous allons dans un premier temps considérer des décalages entre orbites identiques, avec deux satellites sur l'orbite 3 ce qui constitue un cas intéressant. Une généralisation des résultats sera effectuée dans la dernière section de ce chapitre.

Décalage temporel :

Deux décalages temporels sont testés pour l'orbite 3, l'un de 17,5 jours (la moitié du cycle de répétitivité) et l'autre de 8,75 jours (la moitié du sous-cycle d'ordre 3, de 17,5 jours). L'influence de ces deux décalages a déjà été étudiée dans *Greenslade et al. (1997)* pour une étude d'interpolation des observations. La figure 8.7 montre les points d'observations dans un diagramme longitude-temps pour ces deux décalages.

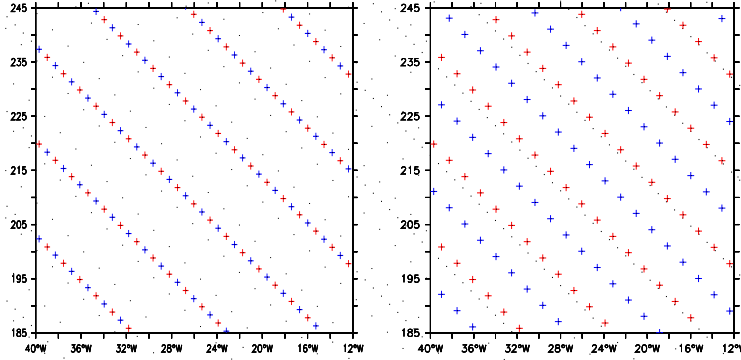


FIG. 8.5 – Diagrammes longitude-temps des points d'observation des traces montantes de deux satellites sur l'orbite 5, décalés temporellement de 17,5 jours (à gauche) et de 8,75 jours (à droite). Les couleurs rouges et bleues différencient les deux satellites

Concernant l'observation des tourbillons de type méso-échelle aux moyennes latitudes pour l'interpolation, *Greenslade et al. (1997)* ont montré que le décalage de 17,5 jours (figure de gauche) était plus favorable. En revanche, dans notre étude avec assimilation dans la région TIW, il se trouve que le décalage de 8,75 jours est nettement plus favorable. Le score sur la vitesse est de 38,9% avec un décalage de 17,5 jours, et de 49,5% avec un décalage de 8,75 jours. Les exigences de répartition des observations pour des applications et pour des régions différentes ne sont pas du tout les mêmes.

Décalage spatial et temporel combinés :

L'influence du décalage spatial ds est à étudier entre $]0; D_{IT}[$, D_{IT} étant la distance inter-traces de l'orbite (en degrés). Car un décalage spatial de $n \times D_{IT}$, avec n un nombre entier, est équivalent à un décalage temporel ; et de façon générale un décalage supérieur à D_{IT} pourra se décomposer en un décalage temporel ajouté à un décalage spatial entre $]0; D_{IT}[$.

Il est envisageable de combiner à la fois un décalage spatial et un décalage temporel qui pourrait éventuellement être encore plus favorable qu'un simple décalage temporel. Nous avons réalisé les deux expériences suivantes. Dans la première, un décalage $ds = D_{IT}/2$, soit pour l'orbite 3 un décalage de $0,36^\circ$, est appliqué sans décalage temporel. Dans cette configuration, les deux satellites volent parallèlement (à une même latitude) séparés de $0,36^\circ$ en longitude. Dans la deuxième expérience, le même décalage $ds = D_{IT}/2$ est appliqué, mais avec en plus un décalage temporel de 7,95 jours pour la raison suivante : il permet un intercalage temporel optimal entre les sous-cycles à 17,5 jours, de même que celui obtenu avec un décalage temporel de 8,75 jours sans décalage spatial. Le schéma 8.6 explique la détermination de cette valeur de décalage temporel, donnée par l'équation suivante :

$$dt = 8,75 + \frac{ds}{V_{ss}} = 7,95 \text{ jours} \quad (8.3)$$

où V_{ss} est la vitesse de propagation du sous-cycle égale à $-1,5^\circ/3,18j$. La figure 8.7 montre la répartition spatio-temporelle bien différente des points d'observation lorsque qu'un seul décalage ds est appliqué, et lorsque le décalage ds et dt sont appliqués.

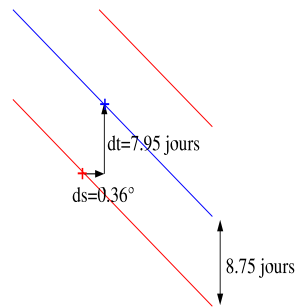


FIG. 8.6 – Schéma dans un diagramme longitude-temps représentant le sous-cycle à 17.5 jours en rouge pour un satellite et en bleu pour un deuxième satellite spatialement et temporellement décalé. Les vecteurs indiquent, pour un décalage ds , le décalage temporel optimal (vis à vis de ce sous-cycle) entre les deux satellites.

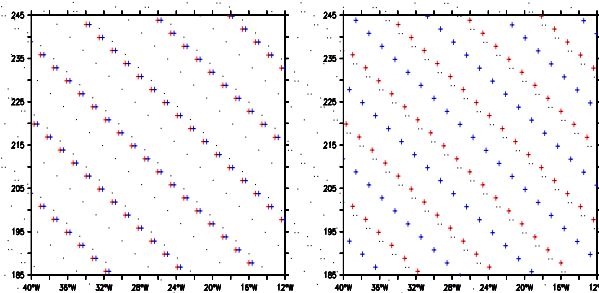


FIG. 8.7 – Diagrammes longitude-temps des points d'observation des traces montantes de deux satellites sur l'orbite 5, décalés spatialement de 0.36° sans décalage temporel à gauche, avec en plus décalage temporels de 7.95 jours à droite.

La deuxième expérience donne des résultats nettement meilleurs que la première. Le score de la vitesse au niveau 10 est de 39.3% pour la première expérience, et de 48.8% pour la deuxième. Le résultat de la première expérience, comparé avec celui du décalage temporel seul de 8.75 jours, est en accord avec ce qu'ont remarqué *Mourre et al.* (2006) en étudiant séparément l'influence d'un décalage spatial et temporel, sans combinaison des deux. Dans le cas d'un système avec un modèle côtier barotrope de la mer du nord, ils ont trouvé que le décalage spatial était moins favorable que le décalage temporel comme on le remarque aussi ici.

Le score de la seconde expérience étant quasiment identique à celui de l'expérience avec seulement le décalage temporel de 8.75 jours, on en conclut que le décalage spatial, à condition que le décalage temporel soit optimisé, n'a quasiment aucune influence dans la région TIW et pour cette orbite. C'est à dire que la résolution spatiale de l'orbite 3 (à 35 jours) est suffisante, mais cette orbite présente plutôt un manque de résolution temporelle. Nous avons vérifié que ce résultat était valable pour les orbites 1 et 2, ce qui n'était pas évident a priori pour l'orbite 1 qui a un cycle de seulement 10 jours et donc une distance inter-traces plus grande. En revanche, il est possible qu'en augmentant le nombre de satellites (plus que deux), un décalage spatial devienne plus favorable.

Problème des décalages entre orbites différentes :

Le décalage entre orbites différentes est un autre problème. Pour deux orbites considérées, si le rapport des cycles de répétitivité T_{R1}/T_{R2} n'est pas un rationnel, on ne pourra pas définir de cycle de répétitivité pour l'ensemble des deux satellites, ce qui est le cas pour toutes les orbites considérées dans cette étude. Ainsi, il n'est pas possible de définir un décalage spatial ou

temporel régulier entre orbites. Cela veut dire qu'en pratique, lorsque l'on combine deux orbites de ce type, leur phasage relatif est variable et non-répétitif.

Influence des scénarios

Dans cette section, nous testons un ensemble de scénarios afin d'étudier l'influence du nombre de satellites et du type d'altimètre. En conséquence des résultats de la section précédente, lorsque les systèmes étudiés comportent des satellites sur orbites différentes, aucun décalage spatial ni temporel n'est appliquée. Lorsque n satellites sont placés sur l'orbite 3, des décalages temporels de $17.50/n$ jours sont appliqués entre les satellites, sans décalages spatiaux. Lorsque n satellites sont placés sur l'orbite 1, des décalages temporels de $9.91/n$ jours sont appliqués entre les satellites. Et enfin, lorsque n satellites sont placés sur l'orbite 2, des décalages temporels de $17.05/n$ jours sont appliqués entre les satellites. Nous justifierons ces choix dans la dernière partie du chapitre. Seulement des systèmes bi et tri-satellitaires étant considérés, n prendra la valeur 2 ou 3.

L'intérêt de l'étude présentée ici est principalement de regarder l'influence du nombre de satellites, et aussi de la nature de l'altimètre (nadir ou large fauchée). La comparaison avec la simulation FULLSSH devient intéressante puisqu'elle montre, avec un certain nombre de satellites, si l'on est proche ou pas d'un équivalent d'une couverture complète d'observations. Les résultats d'un ensemble de systèmes étudiés sont indiqués sur le tableau 8.1 et partiellement sur la figure 8.3 qui résume graphiquement les scores pour les niveaux 0 et 1. La figure 8.8 montre l'écart RMS de température en fonction de la profondeur pour les expériences les plus marquantes.

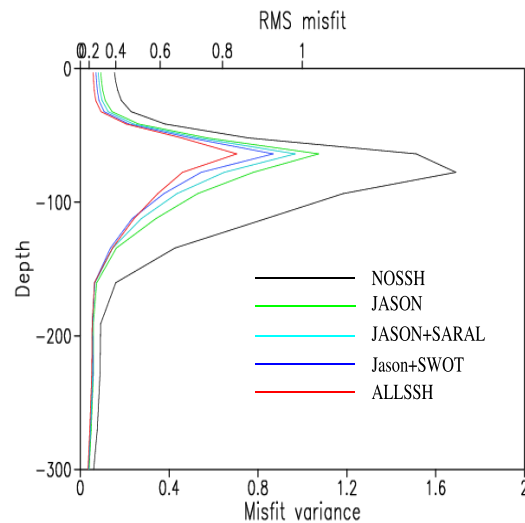


FIG. 8.8 – *Ecart RMS de la température par rapport à REF, en fonction de la profondeur, pour différents scénarios.*

Une amélioration des scores de correction se remarque avec l'augmentation du nombre de satellites, et avec l'utilisation d'un altimètre à large fauchée. Nous avons dégagé les constatations suivantes, qui sont décrites plus en détail dans *Ubelmann et al.* (2009) (voir Annexe C) :

- Le choix des orbites a moins d'influence dans un système multi-satellitaire. Par exemple, parmi les scénarios bi-satellitaires envisagés, le score de niveau 1 ne varie qu'entre 51% et 54%. Notons quand même que dans le cas où les orbites des deux satellites sont identiques et ont un décalage défavorable (voir section précédente), le score peut devenir nettement

inférieur (38.9%). Lorsque les orbites sont différentes, la décorrélation des points d'observations est telle que le résultat se rapproche de celui de deux satellites avec un décalage optimisé.

- Pour la correction de niveau 1, les scores des scénarios sont différents selon les variables, mais nous pouvons conclure que globalement, la réduction relative d'erreur de 1 à 2 satellites est de l'ordre de 20%, et de 2 à 3 satellites de l'ordre de 15%. Un altimètre à large fauchée de type SWOT seul donne des résultats similaires à un système bi-satellitaire, et un altimètre à large fauchée associé à un satellite de type JASON donne des résultats similaires à un système tri-satellitaire. Sachant qu'avec une couverture complète de SSH et sans erreurs d'observations, le score de niveau 1 est de 70%, un système tri-satellitaire ou simplement d'un seul satellite associé avec un satellite mesurant sur une large fauchée est très satisfaisant. La figure 8.9 montre bien l'amélioration d'un système mono à un système multi-satellitaire : la structure de l'onde est encore mieux représentée avec le scénario de JASON-1 associé à SARAL par rapport à JASON-1 seul. Les hautes fréquences de la SSH sont nettement mieux corrigées dans le dernier cas.
- Pour la variable SSH observée, le score est déjà proche de celui de FULLSSH avec un seul satellite. En revanche, cette plus faible part de variabilité observée avec des systèmes multi-satellitaires ou large fauchée apporte une correction conséquente sur les variables de niveau 1. Ce résultat est sûrement dû au fait qu'une grande part de la variabilité de la SSH concerne des grandes échelles spatiales qui sont déjà observées avec un seul satellite comme on peut le voir sur la figure 8.9 pour le cas de JASON-1. Ensuite, l'ajout d'observations supplémentaires améliore surtout l'observation des petites échelles, qui représentent peu en variabilité de la SSH mais qui sont très liées à la structure des ondes et donc permettent une bonne correction des variables de niveau 1.

8.3.3 Conclusion

Les constatations établies ci-dessus montrent l'importance d'un système multi-satellitaires pour obtenir un contrôle satisfaisant du système au delà du simple positionnement des ondes tropicales d'instabilités. L'orbite des satellites a moins d'importance que dans le cas mono-satellitaire.

8.4 Discussion des résultats

8.4.1 Le cas de l'orbite 3

Nous essayons d'expliquer maintenant la déficience de l'orbite 3 pour corriger les ondes d'instabilités. Notons que les orbites 2 et 3 présentent tous deux des (sous-)cycles de résolutions d'environ $25^\circ \times 1j$; $8-9^\circ \times 3J$; $1.5^\circ \times 17j$. La simple considération de la résolution des sous-cycles pour expliquer les performances est visiblement insuffisante. En revanche, la représentation des points d'observations superposés à la signature des ondes d'instabilités (voir les deux diagrammes du haut de la figure 8.10) permet sans doute une interprétation du résultat. Pour l'orbite 3, les observations ont tendance à "suivre" la propagation des ondes, de telle sorte qu'une onde donnée peut être dépourvue d'observations pendant un long moment. De plus, la localisation des traces montantes et descendantes du sous-cycle à trois jours sont très rapprochés entre $2^\circ N$ et $4^\circ N$ (latitude des TIW) pour l'orbite 3 (les croix et les cercles sont rapprochés sur la figure 8.10, comme nous pouvons le voir aussi sur la figure 1.10 pour le cas d'ENVISAT).

En effet, le sous-cycle de résolution spatiale 7.9° et temporelle de 3.18 jours se propage à une

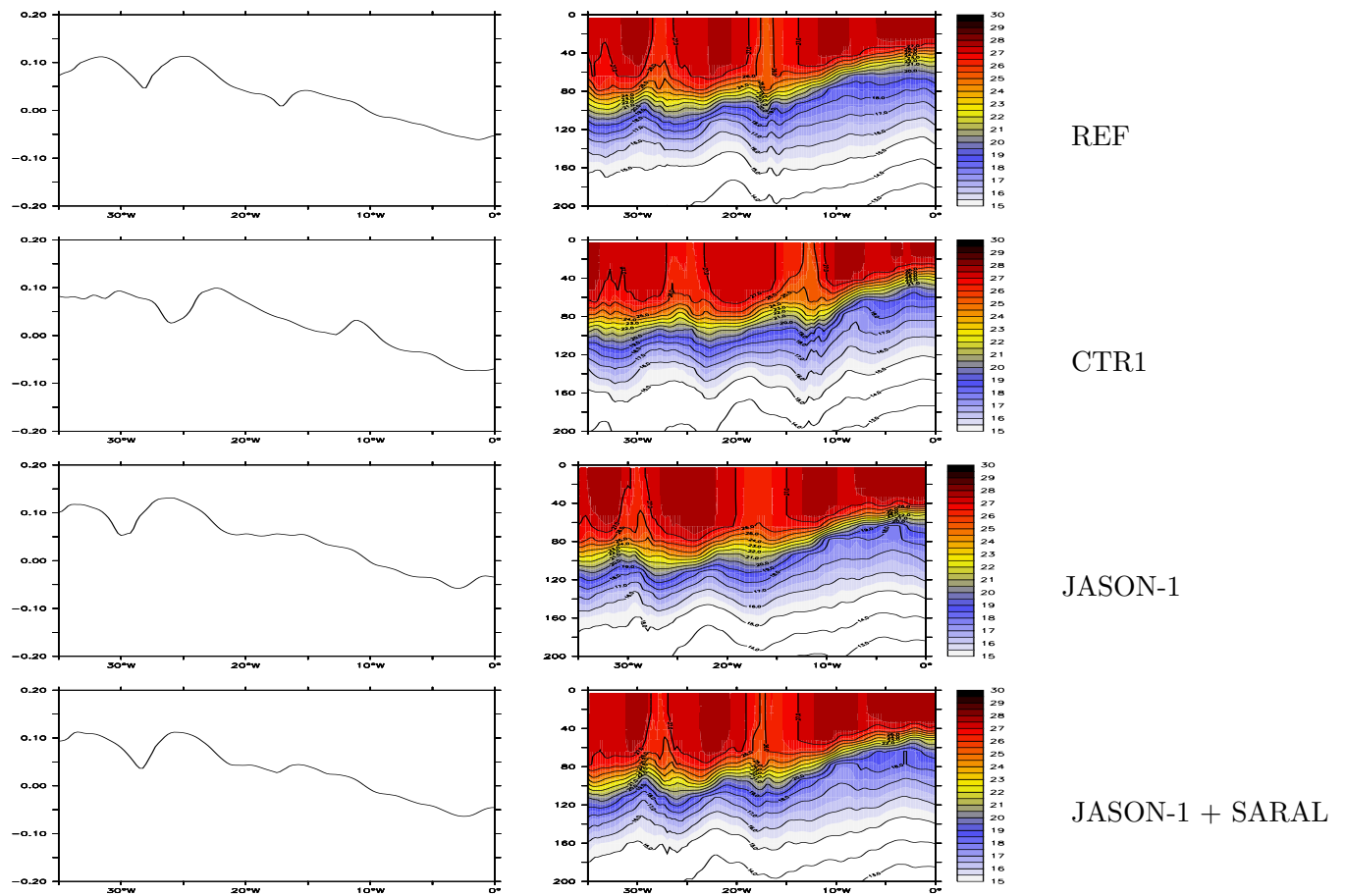


FIG. 8.9 – Sections à 2.5°N de la SSH (colonne de gauche) et de la température (colonne de droite) au jour 230 pour les simulations avec les scénarios indiqués.

vitesse de $-1.4^\circ/3.18$ jours, soit -0.63 m/s. Or la vitesse des ondes d’instabilités est entre -0.45 m/s et -0.55 m/s dans TATL4, ce qui est finalement assez proche comme on peut le remarquer sur le diagramme en haut à droite de la figure 8.10. Tandis que le sous-cycle de l’orbite 2 se propage dans une direction inverse à la propagation des ondes ce qui permet une meilleure répartition des observations vis à vis des TIW. Une représentation de l’erreur dans le même diagramme longitude-temps (voir figure 8.10 en bas) certifie cette interprétation : une erreur plus importante apparaît pour l’onde la plus intense, qui est mal observée. La déficience de la correction remarquée pour l’orbite 3 a donc certainement pour principale cause une propagation inadaptée du sous-cycle et des traces montantes et descendantes très rapprochées autour de l’équateur pour ce même sous-cycle.

8.4.2 Interprétation des résultats par un critère de flux d’observations

L’interprétation des performances de l’orbite 3, réalisée ci-dessus, est pour l’instant qualitative. Nous allons voir dans cette partie que la déficience de cette orbite vis à vis de l’observation des TIW est aussi mise en évidence en appliquant une méthode simple qui estime le bénéfice d’un flux de données satellites, expliquée dans l’annexe A. Cependant, le lien entre les résultats de l’assimilation et ceux de cette méthode est à considérer avec réserve, car la détermination des distances caractéristiques est assez aléatoire et l’assimilation est un processus complexe.

L’application de cette méthode pour un phénomène propagatif tel que les TIW préconise un changement de repère pour l’étude de la répartition des observations. Ensuite, nous définirons,

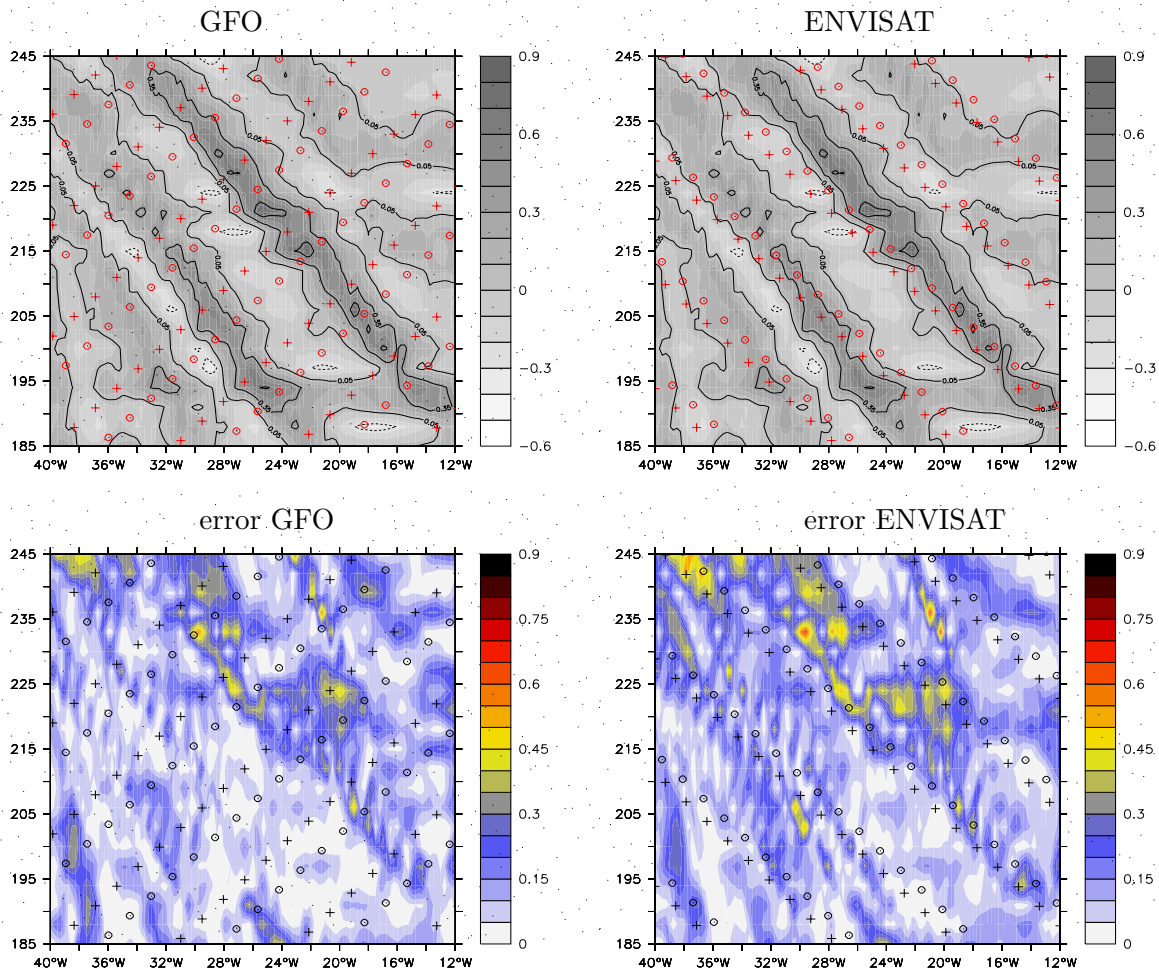


FIG. 8.10 – En haut : diagrammes longitude-temps des points d’observation des satellites GFO (gauche) et ENVISAT (droite) superposés à la vitesse méridienne à 2.5°N . En bas : Mêmes diagrammes, mais représentant l’erreur obtenue par rapport à REF. Les croix symbolisent les observations en phase montante et les cercles en phase descendante.

de manière certes assez grossière, des distances spatiales (en longitude et latitude) et temporelle caractéristiques, servant de critère pour le calcul du bénéfice des observations.

Changement de repère pour l’étude du flux d’observations

Dans le cas d’un phénomène propagatif, il est suggéré dans l’annexe A d’effectuer un changement de repère qui suive la propagation. Ce changement de repère semble tout à fait justifié pour l’application à l’observation des TIW. L’exemple des orbites 2 et 3 détaillé ci-dessus a montré que la spécification de la résolution spatiale et temporelle des cycles et même des sous-cycles (dans le repère fixe) est insuffisante pour expliquer les performances des orbites.

Il est donc intéressant de considérer le flux d’observations dans un référentiel suivant les ondes. En effet, on peut supposer que le modèle transporte l’information corrigée (ou non corrigée) ce que semble montrer les deux images du bas de la figure 8.10 où l’erreur a bien tendance à se propager avec les ondes. En reconsidérant les observations dans le référentiel mobile, l’espace et le temps sont a priori mieux décorrélés vis à vis des erreurs. La figure A.4 montre dans un diagramme longitude-temps le changement de repère pour la position des observations dans un référentiel de vitesse -0.5 m/s (vitesse de propagation des ondes d’instabilités dans TATL4).

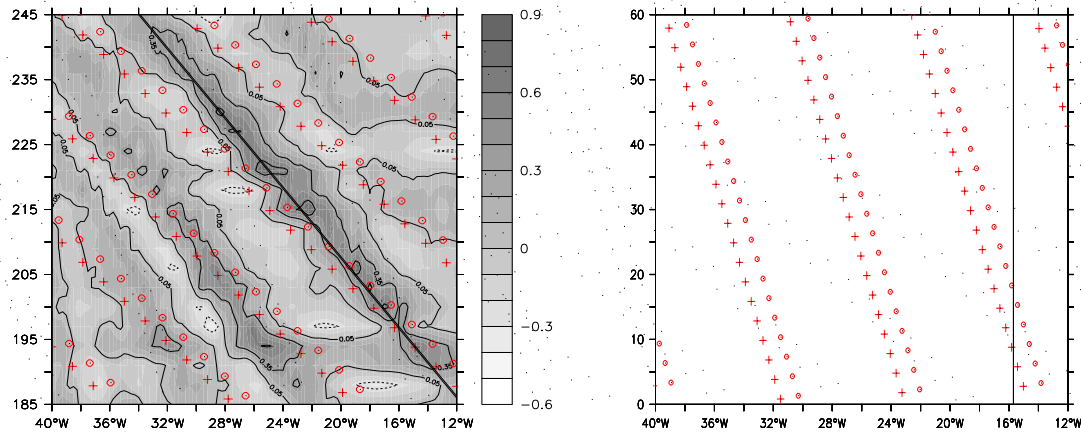


FIG. 8.11 – *A gauche : diagramme longitude-temps des points d’observation du satellite ENVI-SAT et vitesse méridienne à 2.5°N. A droite : diagramme longitude-temps dans un repère mobile de vitesse zonale $V=-0.5$ m/s des points d’observation du satellite ENVI-SAT.*

Avant d’appliquer la méthode de l’annexe A dans ce référentiel mobile, il est déjà intéressant de redéfinir les sous-cycles dans ce référentiel, ce qui est facilement réalisé à partir des diagrammes longitude-temps. Le tableau 8.4.2 donne la résolution spatiale et temporelle de chacun des sous-cycles. Il n’y a aucune raison pour qu’un cycle de répétitivité existe dans le référentiel mobile, sauf si le rapport de la vitesse du référentiel avec la vitesse de propagation d’un des sous-cycle (dans le référentiel fixe) est un nombre rationnel.

Orbites	Sous-cycles et cycle dans le référentiel fixe	Sous-cycles dans le référentiel mobile
Orbite 1	$28.3^\circ \times 0.99j$ $8.5^\circ \times 3.33j$ $2.8^\circ \times 9.91j$	$28.3^\circ \times 1.0j$ $8.3^\circ \times 3.3j$ $3.8^\circ \times 6.61j$ $0.3^\circ \times 63j \dots$
Orbite 2	$25.1^\circ \times 1.0j$ $8.9^\circ \times 2.8j$ $1.5^\circ \times 17.0j$	$25.^\circ \times 1.0j$ $9.2^\circ \times 2.8j$ $2.5^\circ \times 10j$ $0.6^\circ \times 28j \dots$
Orbite 3	$25.1^\circ \times 1.0j$ $8.9^\circ \times 2.8j$ $1.5^\circ \times 17.0j$	$25.1^\circ \times 1.0j$ $8.5^\circ \times 2.8j$ $0.2^\circ \times 62j \dots$
Orbite 4	$25.6^\circ \times 0.99j$ $1.2^\circ \times 20.8j$	$25.6^\circ \times 1.0j$ $1.8^\circ \times 17j \dots$

TAB. 8.2 – *Résolutions spatiale et temporelle des sous-cycles définis dans les repères fixe et mobile, pour les orbites 1, 2, 3 et 4.*

Dans ce nouveau référentiel, les orbites 2 et 3 ont maintenant des sous-cycles de résolutions complètement différentes. L’orbite 3 n’a plus de sous-cycle de l’ordre de 5-10 jours.

Détermination d'une échelle spatiale et temporelle

Nous cherchons maintenant à déterminer des échelles spatiales et temporelles caractéristiques avec lesquelles la dynamique doit être observée, pour évaluer le critère d'efficacité des observations (certes très simplifié) énoncé dans l'annexe A.

Dans cette région où l'erreur modèle prédomine, l'échelle temporelle peut se définir à partir de la croissance de l'erreur modèle en fonction du temps. Après 12 jours (l'équivalent de 4 cycles d'assimilation), l'erreur due au vent est déjà très significative par rapport au niveau de contrôle obtenu avec l'assimilation. Nous définissons l'échelle temporelle $Dt = 6 \text{ jours}$ (qui s'applique de part et d'autre du temps considéré).

La détermination d'une échelle spatiale pour l'observation des ondes est de même assez subjective. Cependant, la taille de la bulle optimale pour le SEEK local (obtenue après plusieurs tests d'assimilation) est un bon indicateur de ces échelles spatiales au delà desquelles l'observation n'apporte plus d'information utile. Une échelle en latitude $D\lambda = 1.5^\circ$, et en longitude $D\phi = 3^\circ$ peuvent être définies.

Validation et interprétation des résultats

A partir des échelles définies ci-dessus, le score pour les différents scénarios mono-satellitaire a été calculé avec la méthode présentée en annexe A, en choisissant une vitesse de propagation du référentiel mobile de -0.50 m/s . La figure 8.12 montre les scores obtenus en fonction de la latitude, en choisissant 3000 événements P aléatoires pour chaque latitude entre -10° et $+10^\circ$, avec un pas de 0.5° .

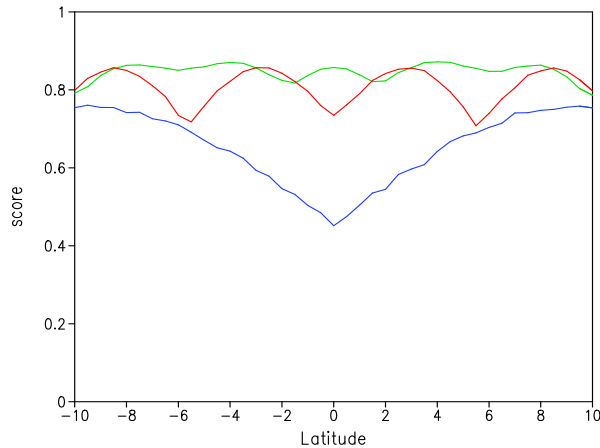


FIG. 8.12 – Score (voir annexe A) entre 10°S et 10°N pour un satellite sur l'orbite 1 (rouge) sur l'orbite 2 (vert), et sur l'orbite 3 (bleu) dans le repère mobile de vitesse $V = -0.5 \text{ m/s}$ avec $\Delta\lambda = 1.5^\circ$, $\Delta\phi = 3^\circ$ et $\Delta t = 6 \text{ jours}$

La déficience de l'orbite 3 apparaît aussi avec l'utilisation de cette méthode, surtout entre 5°S et 5°N . On remarque un minimum exactement au niveau de l'équateur pour cette orbite, qui correspond à la ligne de nœuds du sous-cycle à trois jours dont nous avons déjà parlé. Entre 2°N - 4°N , les latitudes où se propagent les TIW, les scores selon les orbites sont à peu près en accord avec les scores de l'assimilation, si ce n'est que le score de l'orbite 1 n'est supérieur à celui de l'orbite 3 qu'entre 1°N et 3°N , et est inférieur pour les autres latitudes, alors que son score en expérience d'assimilation est légèrement supérieur. Pour l'orbite 1, on remarque sur la figure 8.12 une succession de minimums, qui correspondent aux lignes de nœuds du sous-cycle à 3 jours situées à 6°S , 6°N , ... (voir figure 1.10 pour le cas de JASON). Mais il se trouve que les

TIW se propagent à des latitudes se situant globalement autour d'un maximum.

Nous avons aussi testé les décalages pour des systèmes bi-satellites sur les orbites 1 et 3 avec cette méthode (non montré). Les résultats sont semblables à ceux obtenus en expérience d'assimilation : l'influence du décalage temporel est très importante, et le décalage temporel de 8.75 jours pour l'orbite 3 est beaucoup plus favorable que celui de 17.5 jours. Pour les orbites 1,2 et 3, le décalage spatial a toujours aussi peu d'impact lorsque le décalage temporel est optimisé.

Enfin, pour le cas des systèmes multi-satellites sur orbites différentes, les différences entre scénarios sont aussi plus faibles (non montré) comme nous l'avons remarqué en expérience d'assimilation. Mais les scores relatifs ne correspondent quand même pas tous à ceux des expériences d'assimilation, qui font intervenir un système beaucoup plus complexe dont les comportements ne peuvent être facilement interprétés.

8.5 Discussions et conclusions

Les deux principales questions de ce chapitre concernaient les besoins en observations complémentaires et l'impact de différents scénarios altimétriques sur l'assimilation dans la région TIW. Pour résumer la réponse, dans notre système, les observations in situ ne sont pas directement nécessaires pour corriger la dynamique des TIW, mais aident à rendre le système plus stable car sans assimilation conjointe de ces données, certaines dérives en température ont lieu en profondeur. Mais ces problèmes sont sans doute inhérents à la méthode d'assimilation, particulièrement à la spécification de la matrice P^f , plutôt qu'à une sous-observabilité. Concernant l'influence des scénarios satellites, un seul satellite permet déjà de corriger globalement plus de la moitié de la variance de l'erreur potentiellement corrigeable par altimétrie, et de bien contrôler la position des ondes. Un système multi-satellite permet en revanche une meilleure représentation de la forme et de la structure verticale des ondes, ainsi que des vitesses associées. Dans nos expériences, l'assimilation des données de SWOT seul en tenant compte des erreurs de roulis donne des résultats proches d'un système à deux satellites.

Dans le cas d'un système mono-satellite, les expériences d'assimilation ont permis de dégager quelques résultats, qui se confirment et peuvent être approfondis d'après les considérations de flux de données (annexe A). Si le satellite est placé sur les orbites 1 ou 2, les performances de l'assimilation sont comparables tandis qu'un satellite placé sur l'orbite 3 est moins efficace pour corriger la dynamique des ondes d'instabilités. Ce résultat est dû à deux caractéristiques de l'orbite 3 : d'une part le sous-cycle à 3 jours se propage à une vitesse assez proche de celle des ondes, et d'autre part une ligne de nœuds de ce sous-cycle est présente à l'équateur ce qui n'offre pas une répartition favorable entre les traces montantes et descendantes aux basses latitudes. Ainsi, la signature topographique d'une onde donnée peut ne pas être observée par un satellite de l'orbite 3 durant une grande partie de sa traversée ce qui est défavorable pour la correction par assimilation de données, l'échelle de corrélation en longitude n'étant pas suffisamment grande. Si les considérations de flux de données avec les distances caractéristiques expliquent au premier ordre les résultats obtenus, nous pouvons généraliser les résultats. Il découle de ces considérations que dans le référentiel mobile, il doit exister un sous-cycle de résolution proche des distances caractéristiques, c'est-à-dire un sous-cycle qui ait à la fois sa résolution spatiale suffisamment bonne par rapport à $D\phi$ (de l'ordre de $D\phi$ ou moins), et sa résolution temporelle suffisamment bonne par rapport à Dt (de l'ordre de Dt ou moins). Pour l'orbite 1, le sous-cycle $3.8^\circ \times 6.61j$, pour l'orbite 2 le sous-cycle $2.5^\circ \times 10j$ (voir tableau 8.4.2) sont à peu près adaptés, tandis que l'orbite 3 n'a que le sous-cycle $8.5^\circ \times 2.8j$ qui pourrait convenir, mais sa résolution spatiale reste trop faible. A la résolution zonale s'ajoute l'effet de la répartition des traces montantes/descendantes qui peut diviser jusqu'à 2 la résolution mais ce n'est pas le cas pour l'orbite 3 autour de l'équateur.

Ces résultats permettent de rajouter une précision à ceux de *Verron* (1990) qui mentionnaient

que l'influence des sous-cycles était faible (aux moyennes latitudes et pour corriger la méso-échelle). Cette constatation avait été établie à partir d'une orbite avec un cycle de répétitivité de 10 jours, dans laquelle effectivement le sous-échantillonnage avait peu d'influence. Mais, sans doute, la même constatation n'aurait pu être établie avec une orbite à 30 jours. Dans ce dernier cas, l'influence du sous-échantillonnage serait certainement forte comme nous l'avons remarqué dans ce chapitre, selon qu'il y ait un sous-échantillonnage à 10 jours ou pas. En réalité, ce sont sans doute les sous-cycles de résolutions bien inférieures aux échelles caractéristiques (ou bien supérieures) qui n'ont pas d'importance. En supposant que pour les moyennes latitudes, l'échelle temporelle soit de 10-15 jours ce qui semble cohérent vis à vis des variations de la méso-échelle, il est sans doute normal que le sous échantillonnage (en dessous de 10 jours) ait peu d'influence comme l'on remarqué *Verron* (1990). Mais il n'y a pas de raisons pour qu'un satellite à 30 jours par exemple, et qui possède un sous-cycle à 10 jours soit nécessairement moins favorable qu'un satellite à 10 jours pour l'assimilation de données. Il pourrait même être plus favorable car il offre en plus une meilleure résolution spatiale, utile s'il existe une dynamique avec des variations temporelles plus lentes.

Dans le cas des systèmes multi-satellites, l'influence des scénarios devient beaucoup moins importante. La déficience de l'orbite 3 n'est plus vraiment remarquable, même dans le cas où les deux satellites sont sur l'orbite 3, à condition que le décalage soit favorable. De façon générale, dans un système multi-satellites avec les orbites envisagées, c'est le nombre de satellites qui détermine au premier ordre la qualité de la correction. Ce résultat peut être interprété par le fait qu'avec plusieurs satellites, on répond de toute façon aux critères des distances caractéristiques. A ce stade, c'est alors le nombre d'observations qui améliore au premier ordre la correction, en diminuant entre autre l'impact des erreurs d'observations (considérées comme indépendantes entre satellites).

Toujours dans cas des systèmes multi-satellites, mais concernant des décalages entre orbites identiques, nous n'avons pas pu tester beaucoup de cas différents à cause des coûts de calculs des simulations. Cependant, les résultats obtenus avec la méthode de l'annexe A sur les considérations des flux de données sont semblables à ceux de l'assimilation, ce qui nous autorise à utiliser ces considérations d'échelles pour établir des conclusions plus générales sur les décalages. Il en ressort (on le vérifie facilement avec la méthode de l'annexe A) que si $Dt < T_R$ et $D\phi > D_{IT}$ alors l'influence du décalage spatial est négligeable. Pour la région TIW et avec une orbite de cycle de répétitivité de 10 jours ou plus, un décalage temporel seul est suffisant. La valeur du décalage temporel ne doit pas être systématiquement choisie de façon à subdiviser le cycle de répétitivité, mais à subdiviser le sous-cycle proche de l'échelle Dt comme l'a montré l'exemple de l'orbite 3.

La convergence de la correction avec celle obtenue en assimilant la couverture complète est à interpréter avec précaution. Cette convergence est certainement dépendante de la résolution utilisée qui est de 0.25° dans TATL4. Dans une configuration à plus haute résolution comme il en existera de plus en plus dans les systèmes opérationnels, la présence des petites échelles résolues nécessitera sûrement plus d'observations, et donc une constellation plus importante d'altimètres avant de converger vers la correction obtenue avec la couverture complète.

Chapitre 9

Etude de scénarios dans la région NBC

Introduction

Ce chapitre est analogue au précédent, avec pour objectifs l'évaluation de scénarios d'observation dans la région NBC par rapport aux enjeux dégagés dans le chapitre 3. Rappelons que dans cette région, l'assimilation a un intérêt d'autant plus fort que la dynamique possède un caractère chaotique et donc imprévisible aussi perfectionnés que soient les modèles ou les forçages. Les résultats concernant les systèmes d'observations seront nettement différents, aussi bien à propos de la quantité d'observations complémentaires nécessaires que de l'influence respective des scénarios. Avant cette étude d'impact, nous allons définir des diagnostics de correction adaptés à cette dynamique.

9.1 Diagnostics adaptés à la dynamique des anneaux

De même que pour la position des ondes tropicales d'instabilités, le contrôle de la position des anneaux du Brésil est nécessaire pour obtenir une amélioration de leur structure ou d'autres caractéristiques de ces anneaux, telles que le transport de masse ou de chaleur associé. Mais nous n'avons pas mis en place de diagnostic qualitatif spécifique pour la position des anneaux.

Afin de comparer les résultats des expériences d'assimilation, nous définissons comme précédemment trois niveaux de correction, mais qui ne concernent pas tout à fait les mêmes variables. La correction de niveau 0 pour la variable observée SSH sera évaluée de la même manière, mais sur le domaine NBC. Pour la correction de niveau 1, il sera intéressant d'étudier d'une part la température et la salinité, et d'autre part les vitesses qui sont pour une part indépendantes des deux variables précédentes. Enfin, les transports (de volume ou de chaleur par exemple), qui sont en grande partie assurés par les anneaux, sont des variables de niveau 2 intéressantes à étudier. Ici, nous étudierons le transport de volume à travers la section 54°W dans les 100 premiers mètres de profondeur. La durée d'un an pour les expériences d'assimilation est courte pour dégager des résultats significatifs vis-à-vis du contrôle du transport intégré sur une longue durée.

Pour ces trois niveaux de correction, des scores sont calculés exactement de la même manière que dans le chapitre précédent, en quantifiant l'amélioration par rapport à une simulation de base. Notons que dans ce chapitre, les scores pour les niveaux 0 et 1 sont calculés sur une zone comprise seulement entre 4°N et 12°N ce qui explique des différences de score avec l'article de l'annexe C. Cette zone est plus centrée sur les anneaux tandis que la zone NBC de l'annexe C est plus grande. Ainsi, les scores calculés dans ce chapitre sont plus directement liés à la correction

des anneaux.

Nous avons pensé à une autre méthode de calcul des scores peut-être un peu plus pertinente lorsqu'il s'agit d'une dynamique chaotique comme c'est le cas ici. Il faudrait réaliser un grand ensemble de simulations de base (avec des conditions initiales perturbées différemment). Le score de l'assimilation serait calculé sur la base de la moyenne de tous ces états, et non par rapport à un seul membre comme c'est fait dans la première méthode. Dans ce cas, la valeur du score serait plus significative de la qualité de correction vis-à-vis du caractère chaotique. Mais nous avons finalement conservé le premier diagnostic car le calcul d'un grand nombre de simulations aurait été coûteux, et cette première méthode n'empêche pas une bonne inter-comparaison entre les scénarios.

9.2 Evaluation des besoins en observations complémentaires

Nous allons voir dans un premier temps que la diversité de formes d'anneaux en profondeur laissent peu d'espoir pour une bonne correction avec la seule information altimétrique, un résultat qui se vérifiera par des expériences d'assimilation dans un second temps.

9.2.1 Un lien complexe entre la structure des anneaux et la SSH

Les différents types d'anneaux mis en évidence par *Garraffo et al.* (2003) illustrent la complexité de leur structure en profondeur. La figure 9.1, d'après *Garraffo et al.* (2003), montre que pour une signature en SSH similaire en amplitude et en extension spatiale, la dimension de l'anneau sur la profondeur peut être complètement différente. Dans le premier cas, l'anneau s'étend jusqu'à 300m de profondeur, et dans le deuxième cas, jusqu'à plus de 700m.

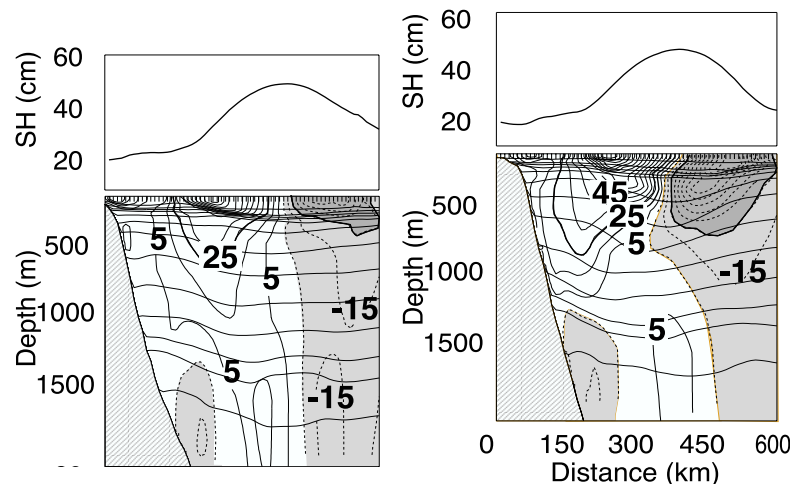


FIG. 9.1 – Extrait de la figure 6 dans *Garraffo et al.* (2003). SSH et structure verticale (contours de vitesse, cm/s, et interfaces isopycnales pour un anneau de type “peu profond” (gauche) et un anneau de type “subsurface ” (droite).

Dans la simulation REF, nous avons aussi identifié à titre d'exemple deux anneaux avec une signature en SSH relativement proche (figure 9.2 à gauche) et une structure de température et de vitesses bien différente (même figure, à droite). La déviation standard de SST dans REF est inférieure à 0.2°C sur la zone NBC, mais à 130 m de profondeur, la déviation standard en température dépasse 2.5°C . Il est donc fort probable que l'assimilation de profils de température dans les 200 ou 300 premiers mètres soit fortement bénéfique. En revanche, l'assimilation

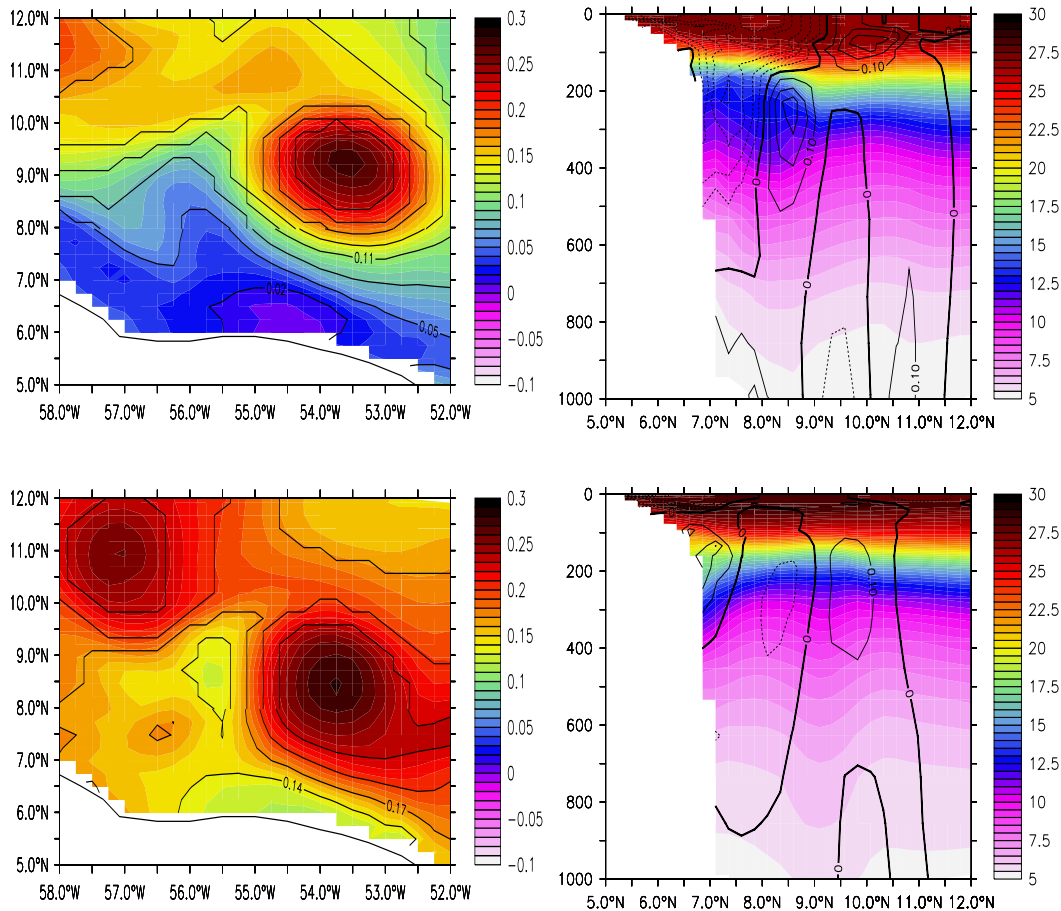


FIG. 9.2 – SSH (à gauche) et section à 53.5°W de la température et de la vitesse zonale (à droite) dans la simulation REF pour les jours 113 et 174.

d'observations de vitesse en profondeur ne sera pas envisagée car dans un système réel, de telles observations sont indisponibles de façon régulière.

9.2.2 Les expériences

Les expériences suivantes ont été réalisées sur une durée de six mois seulement pour des raisons de coûts de calcul, et parce que les résultats des expériences sur cette période seront suffisamment significatifs par rapport à la précision que l'on attend. La méthode d'assimilation est exactement celle mise au point dans le chapitre 7. Le tableau 9.1 indique les scores des expériences réalisées calculés séparément avec l'ensemble des états de prévision et d'analyse, par rapport à la simulation de base CTR2. Comme dans le chapitre précédent, l'étude du besoin en observations complémentaires est réalisée en assimilant la couverture complète de SSH. Deux scores de niveau 1 sont donnés : celui de la température et celui de la vitesse méridienne moyennés entre les niveaux 1 et 10, qui sont tous deux beaucoup plus indépendants que dans les expériences de la région TIW.

Les scores de correction confirment les résultats attendus : l'assimilation de la SSH seule, même complète, est insuffisante pour bien corriger l'ensemble du vecteur d'état. La température est nettement dégradée à toutes les profondeurs comme le montre aussi la figure 9.3 (comparaison des courbes bleues et noires). Si le score de vitesse est d'environ 50% pour les analyses, on remarque d'après la figure 9.3 qu'en dessous de 100 m de profondeur, la vitesse est dégradée.

Expériences	Observations assimilées	Scores SSH	Scores TEM	Scores V
EXP1	FULLSSH	96.9 63.5	-413.7 -299.3	51.4 45.9
EXP2	FULLSSH + SST	divergence	divergence	divergence
EXP3	FULLSSH + Réseau 1	97.2 70.1	-15.2 12.0	60.3 57.2
EXP4	FULLSSH + Réseau 2	97.5 81.8	70.2 71.6	75.9 73.2
EXP5	FULLSSH + Réseau 2 sans salinité	96.8 79.9	68.4 70.1	75.7 73.0
EXP6	FULLSSH + Réseau 2 + SST	97.5 81.9	70.4 71.9	76.0 73.4

TAB. 9.1 – Récapitulatif des expériences d’assimilation réalisées pour tester l’influence des observations complémentaires. Les scores de correction sont indiqués en pourcentages en référence à la simulation libre CTR2. Le score de droite est calculé avec l’ensemble des états analysés et le score de gauche avec l’ensemble des états prévus en fin de cycle. Pour la température et la vitesse méridienne, le score est moyenné entre les niveaux 1 et 10.

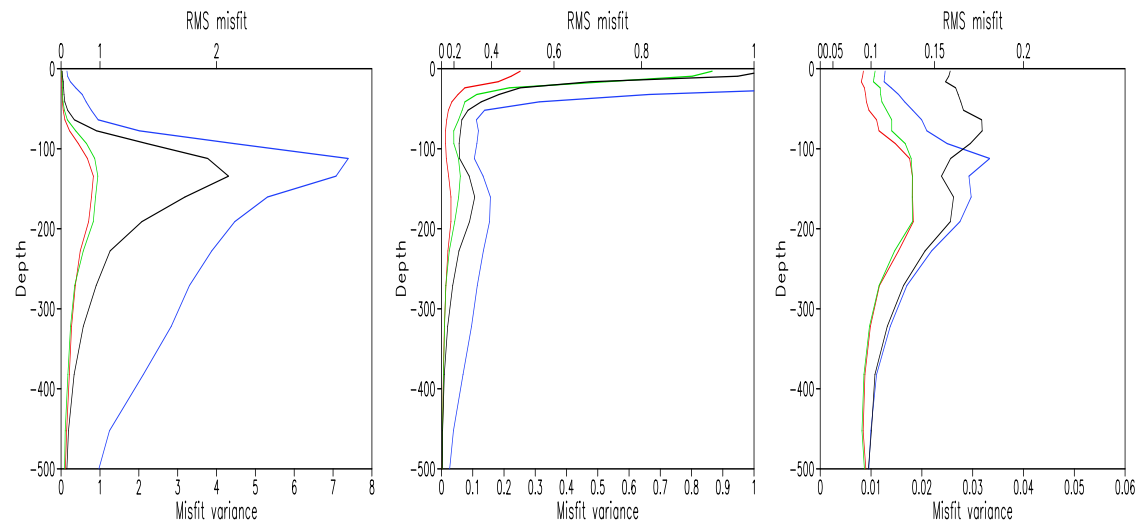


FIG. 9.3 – Ecart RMS des états de prévision par rapport à REF en fonction de la profondeur pour la température à gauche, la salinité au centre, et la vitesse méridienne à droite. Noir : CTR2, bleu : EXP1, rouge : EXP4, vert : EXP5.

Nous constatons que dans certaines expériences, la température peut être fortement dégradée par les étapes d’analyses, avec un score plus faible pour l’analyse que pour la prévision. Cette dégradation entraîne même dans EXP2 une divergence du modèle après deux mois de simulation. Des températures anormalement élevées au niveau de la thermocline ont été amplifiées de cycle en cycle après chaque étape d’analyse, jusqu’à obtenir un état qui fait diverger le modèle. Ceci est probablement le signe que la matrice de covariance d’erreur n’est pas tout à fait bien définie, et qu’en conséquence, lorsque des observations qui sont en réalité peu corrélées au reste du vecteur d’état sont assimilées, de mauvaises directions de correction sont amplifiées. Idéalement, le filtre devrait ne pas corriger plutôt que dégrader. Toujours est-il que les données de surface assimilées dans EXP1 et EXP2 sont insuffisantes dans notre système. L’ajout de données in situ avec le Réseau 1 ($2.5^\circ \times 5^\circ$) apporte une nette amélioration (EXP3) et empêche de fortes erreurs

sur la température. Mais nous avons quand même choisi d'assimiler les données du Réseau 2 ($2.5^\circ \times 2.5^\circ$) EXP4 car cette densité de profils n'est pas non plus utopique au vu de la croissance du nombre de mesures in situ, et permet un contrôle très satisfaisant de la température. Dans EXP4, la structure en profondeur des anneaux est très bien corrigée comme le montre la figure 9.4. Dans EXP1 (sans observation en profondeur), la topographie de surface de l'anneau est assez bien résolue et la vitesse en surface est bien corrigée, mais l'anneau présent entre 200 m et 500 m dans REF n'est pas reconstitué (voir figure 9.4 au centre), tandis qu'il l'est dans EXP4 (à droite).

Pour regarder l'influence de l'assimilation de la salinité, EXP5 a été réalisée de façon identique à EXP4 mais sans les données de salinité le long des profils. Les résultats montrent qu'en profondeur, l'impact est très faible, même pour la salinité. En revanche, en surface où la variabilité de salinité est très forte notamment à cause de l'embouchure de l'Amazone, la salinité est moins bien corrigée. A ces faibles profondeurs, la vitesse est aussi légèrement moins bien corrigée. L'assimilation de la salinité en plus de celle des profils de température a donc un effet positif même pour corriger les vitesses, sur les premières couches. En dessous de 200 m, l'impact n'est pas significatif.

Dès lors que le système est bien contrôlé comme dans EXP4, l'assimilation conjointe de la SST n'est plus source d'erreur comme elle l'était dans EXP2. En revanche, son impact est très faible et n'est véritablement perceptible que sur la variable observée.

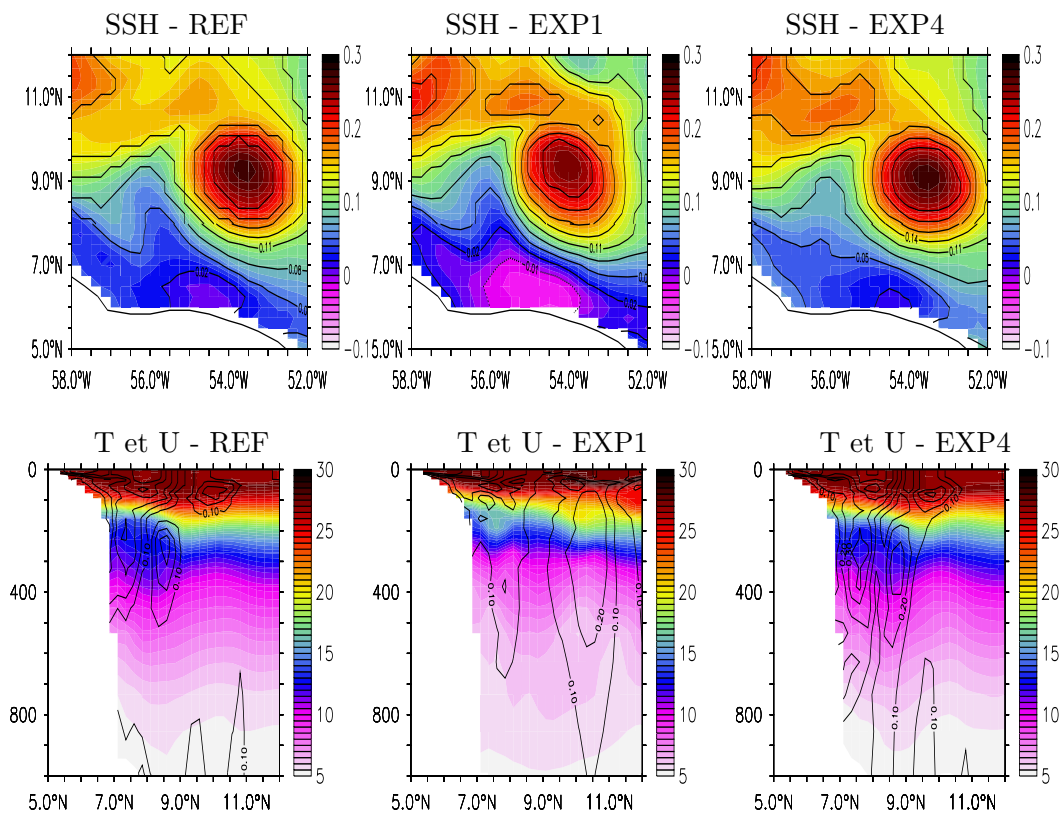


FIG. 9.4 – SSH (en haut) et température et vitesse zonale (en bas) au jour 113 pour les états de prévision de REF (gauche), de EXP1 (centre) et de EXP4 (droite).

Conclusion

L'assimilation d'un réseau dense de profils d'observations est donc nécessaire dans notre configuration pour obtenir une correction sur l'ensemble du vecteur d'état. Contrairement à la région TIW, il semble bien que le système soit sous-observé avec la SSH seule. Ce résultat n'est pas surprenant étant donné les diverses structures verticales que peuvent avoir des anneaux aux topographies de surface semblables. L'assimilation de SST n'apporte quasiment pas de correction dans le cas où le système est déjà contrôlé, et dans le cas contraire, elle soulève une faiblesse des réglages du filtre SEEK. Finalement, pour bien utiliser le potentiel des observations altimétriques, l'assimilation conjointe d'observations complémentaires apparaît vraiment nécessaire dans la région NBC.

9.3 Scénarios d'observations altimétriques

Nous avons choisi d'assimiler le Réseau-2 d'observations in situ même s'il correspond certainement à une densité plus forte de mesures que le réseau actuel ARGO. Dans toutes les expériences d'assimilation, intégrées sur une durée de 1 an, les observations du Réseau-2 sont assimilées par défaut. Le tableau 9.2 donne les scores de correction obtenus pour un ensemble de simulation avec des scénarios mono- et multi-satellitaires et la figure 9.5 résume graphiquement les scores pour la SSH et la vitesse méridienne au niveau 10.

Expériences	SSH	T 1 (SST)	T 10	S 1 (SSS)	S 10	U 1	U 10	V 1	V 10	Transport à 54°W
NOSSH	3.8 cm	0.2 °C	0.78 °C	0.56 psu	0.12 psu	0.14 m/s	0.15 m/s	0.13 m/s	0.16 m/s	2.131 Sv
FULLSSH	85.9	30.5	42.0	62.3	23.8	56.6	62.8	58.4	63.9	56.6
N1 (JASON)	51.1	12.2	24.3	38.1	12.3	21.9	23.9	23.2	24.1	19.2
N2 (GFO)	52.9	12.4	24.7	39.0	12.5	23.5	24.4	24.5	24.8	20.0
N3 (ENVISAT ou SARAL)	54.2	13.1	25.0	38.9	12.9	23.8	26.1	24.7	26.3	20.4
N5	78.5	25.8	36.9	55.4	19.6	45.1	48.0	46.7	48.7	45.5
N1 + N1	64.6	17.5	31.9	44.1	15.5	31.7	33.8	33.4	34.5	29.6
N1 + N2	64.2	17.1	30.3	42.8	15.0	31.0	33.2	32.6	34.1	28.9
N1 + N3	64.3	17.1	30.5	43.2	15.0	31.5	33.4	32.7	34.4	29.7
N1 + N1 + N1	67.6	21.4	34.7	47.5	17.3	36.2	40.1	37.6	40.7	34.0
N1 + N2 + N3	67.0	21.0	34.1	45.9	17.1	35.9	39.8	36.9	40.3	33.5
N1 + N3 + N3	67.5	21.5	34.7	46.4	17.3	36.0	40.2	37.0	40.7	34.3
LF4	73.6	23.8	35.6	49.2	18.2	38.9	42.5	40.4	42.9	36.8
N1 + LF4	78.6	26.0	37.2	56.1	19.9	43.2	48.3	47.1	48.9	42.0

TAB. 9.2 – Scores de correction en rapport à la simulation de base NOSSH pour différents scénarios testés. Sur la ligne NOSSH sont indiqués les erreurs RMS pour chacune des variables. Sur les autres lignes sont indiqués les pourcentages d'erreur par rapport à l'erreur de NOSSH. Le sigle NX désigne un satellite au nadir sur l'orbite X, et le sigle LFX désigne un satellite à large fauchée sur l'orbite X.

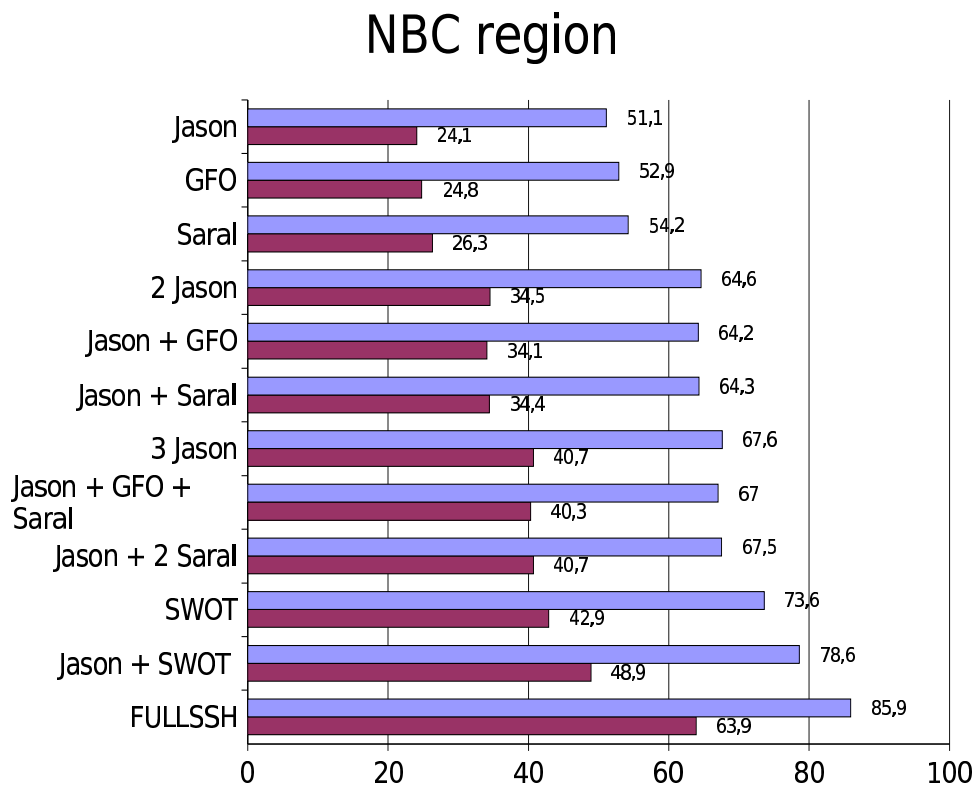


FIG. 9.5 – Score de la variable SSH en bleu et score de vitesse méridienne à 93 m de profondeur, moyennés dans la région NBC, pour différents scénarios mono et multi-satellites.

9.3.1 Etude de scénarios mono-satellites

Simulation du satellite JASON-1

Les résultats de JASON-1, comparés NOSSH, montrent une amélioration conséquente des scores de niveau 1 et 2 (figure 9.5), mais qui n'est pas aussi forte que dans le cas de la région TIW. Nous avons pu vérifier que les anneaux sont bien placés, mais que leurs structures en profondeur sont souvent mal reproduites comme on peut le remarquer sur la figure 9.8.

Un calcul de transport du NBC en fonction du temps a montré que le transport instantané était amélioré, mais que le transport moyen sur 1 an était fortement dégradé par rapport à la simulation libre sans assimilation. En effet les anneaux sont bien positionnés dans la simulation JASON-1, mais ont une mauvaise structure ce qui expliquerait que le transport instantané, très lié à la présence de l'anneau, soit quand même amélioré, bien que le transport moyen soit dégradé. Ce résultat est cependant peu significatif puisque l'expérience ne dure qu'un an.

Un point important est qu'avec un seul satellite, de façon générale sur l'ensemble des variables, une plus faible part de la variabilité du signal est corrigée par rapport à la région TIW. Ce résultat donne un intérêt potentiel fort pour les systèmes multi-satellites dans cette région.

Influence de la référence de l'orbite

La dynamique et plus particulièrement la trajectoire des anneaux très liée à la présence de la frontière continentale. Par exemple, la variabilité de la SSH sur la figure 9.6 montre bien que

les zones à forte variation (donc importantes à observer) ont des localisations bien précises. En considérant une orbite à 3 jours, il serait possible de ne pas observer une partie de la zone à forte variabilité, mais avec une orbite à 10 jours comme celle de JASON (voir figure), on peut difficilement pressentir que tel ou tel décalage sera plus favorable. Nous avons tout de même testé en expérience d'assimilation deux références différentes pour l'orbite (en vert et noir sur la figure). De même que pour la région TIW, la différence sur les scores obtenus est de l'ordre de 1%.

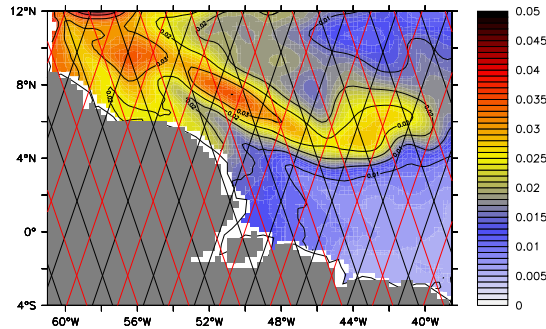


FIG. 9.6 – Traces selon l'orbite 1 (JASON) décalées, superposées à la variabilité inter-annuelle de la SSH dans l'expérience REF

Influence des orbites

La comparaison des simulations JASON-1, GFO et SARAL (figure 9.5) montre que les différences de performances entre orbites sont légèrement moins importantes que dans la région TIW. La déficience de l'orbite 3 pour la correction n'est pas observée dans cette région, et même au contraire, cette orbite donne un score encore meilleur que les orbites 1 et 2. Nous reviendrons sur ce résultat dans la section suivante sur l'interprétation des résultats.

L'assimilation des observations de l'orbite 5 donne toujours un score de correction nettement supérieur aux simulations avec les orbites classiques (tableau 9.2), qui s'explique toujours par la densité des observations nettement plus élevée, d'autant plus que la latitude des anneaux est proche de la latitude maximale l'observation de l'orbite 5, une zone où les observations sont encore plus denses car les traces ont une inclinaison presque nulle (exactement nulle à 12°N).

9.3.2 Etude de scénarios multi-satellites et à large fauchée

Les décalages spatio-temporels dans un système multi-satellitaire

L'étude, d'abord réalisée avec l'orbite 3, a donné des conclusions identiques à celles de la région TIW ce qui n'est pas surprenant étant donné les conclusions à propos des décalages dans le chapitre précédent. En effet, la résolution spatiale de l'orbite 3 est déjà très élevée (0.72°) ce qui explique certainement l'effet négligeable du décalage spatial.

L'influence du décalage a ensuite été étudiée pour l'orbite 1, à l'aide de deux expériences : dans une première expérience, un décalage temporel seul de $dt = 4.9$ jours est appliqué, et dans une seconde, un décalage de $ds = D_{IT}/2 = 1.4^\circ$ et $dt = 6.4$ jours est appliqué. Cette dernière valeur de dt est optimisée de la même manière que dans le chapitre 8, avec la vitesse de propagation du sous-cycle d'un ordre inférieur à celui considéré pour réaliser le décalage. Le score de niveau 1 est de 31.8% dans la première expérience, et de 34.0% dans la deuxième. L'impact du décalage spatial n'est vraisemblablement pas négligeable, et mériterait sans doute une étude plus approfondie. Nous ne l'avons pas réalisée en expérience d'assimilation, mais nous

verrons en dernière partie que ce résultat est aussi vérifié avec la méthode expliquée en annexe A.

Influence des scénarios

En conséquence des résultats de la section précédente, lorsque le système étudié comporte plusieurs satellites sur l'orbite 1, un décalage spatial et temporel est appliqué. Pour les autres orbites, nous considérons que la résolution spatiale est assez élevée pour qu'un décalage temporel seul soit suffisant.

D'après les résultats des expériences, nous avons dégagé les constatations suivantes qui sont décrites plus en détail dans *Ubelmann et al.* (2009) (voir Annexe C) :

- Le choix des orbites a comme dans la région TIW une influence plus faible dans un système multi-satellitaire.
- L'amélioration relative avec le nombre de satellites est plus importante que dans la région TIW : le score pour les vitesses est autour de 25% avec un système mono-satellitaire, autour de 35% avec un système bi-satellitaire, et d'environ 40% avec un système tri-satellitaire. On remarque au passage que les scores pour les vitesses méridiennes et zonales sont relativement semblables ce qui est cohérent avec l'isotropie de la dynamique remarquée précédemment. Un altimètre à large fauchée de type SWOT donne à lui seul un résultat supérieur à un système tri-satellitaire. L'utilité de SWOT est donc encore plus marquée pour la région NBC. L'amélioration de la structure d'un anneau particulier est bien visible sur la figure 9.8. L'intensité de la vitesse est correcte dans la simulation SWOT, tandis qu'elle est presque deux fois trop faible dans la simulation JASON-1. La figure 9.7 à droite illustre bien la correction des vitesses sur toute la profondeur et l'amélioration relative avec le nombre de satellites. La figure de gauche montre aussi l'amélioration de la structure thermique avec les observations altimétriques (la colonne T10 du tableau l'indique aussi). Ce résultat n'était pas évident car nous avons vu dans la section 2 que l'assimilation de l'altimétrie seule ne permettait pas de corriger la température. Mais finalement, avec l'aide de profils in situ, l'altimétrie devient efficace pour améliorer encore la température.
- Concernant le transport de masse du courant NBC (voir figure 9.9), l'amélioration du transport instantané de la simulation SWOT par rapport à la simulation JASON-1 est très nette. Nous avons vu que le transport moyen sur l'année dans la simulation JASON-1 est moins juste que le transport moyen du run libre par rapport à REF. En revanche, le transport moyen de SWOT est amélioré par rapport à la simulation libre CTR2, sans doute parce que la correction de la structure des anneaux devient suffisante pour compenser le fait que le repositionnement des anneaux avec l'assimilation puisse perturber de façon significative le transport moyen lorsque peu d'observations altimétriques sont disponibles. Nous n'avons pas poursuivi plus loin cette étude du transport étant donné la faible pertinence d'une expérience de durée annuelle.

La différence de correction entre un système tri-satellitaire et FULLSSH aurait sans doute justifié l'étude d'un système à 4 satellites voir plus, mais nous ne l'avons pas encore effectuée.

9.4 Discussion des résultats

Les résultats obtenus sont donc bien différents de ceux de la région TIW, pour l'influence des orbites et de la nature de l'altimètre (nadir ou large fauchée). Après une discussion sur les résultats obtenus, nous allons montrer dans cette section que les échelles caractéristiques ne sont pas les mêmes que dans la région TIW, ce qui pourra expliquer les différences obtenues.

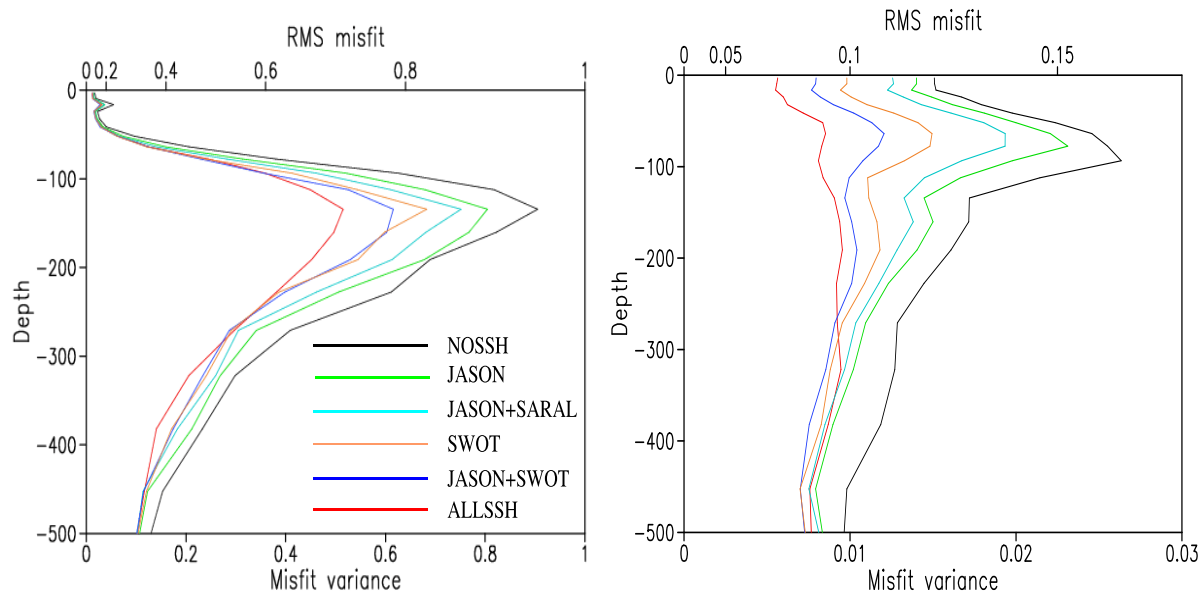


FIG. 9.7 – *Ecart RMS de la température à gauche et de la vitesse méridienne à droite par rapport à REF, en fonction de la profondeur pour différents scénarios.*

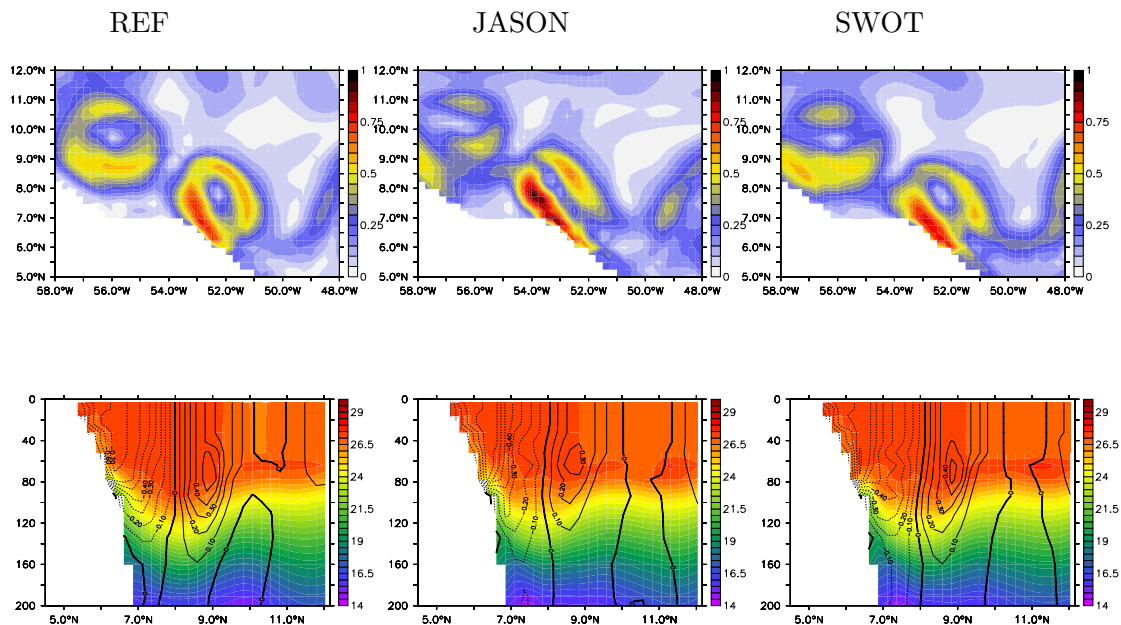


FIG. 9.8 – *En haut : Vitesse absolue (m/s) au niveau 8 et au jour 65 pour les différentes simulations indiquées. En bas : Coupes latitudinale à 52.5°W au jour 65. Couleurs : Température en °C. Contours : vitesse zonale en m/s*

9.4.1 Les spécificités des résultats dans cette région

Plusieurs raisons peuvent expliquer les bonnes performances de l'orbite 3 dans la région NBC, contrairement à la région TIW. D'une part, les anneaux n'ont pas une vitesse de propagation vers l'ouest proche de celle du sous-cycle à trois jours. Leur vitesse est beaucoup plus lente, et est de plus irrégulière. D'autre part, la répartition entre les traces montantes et descendantes pour le sous-cycle à trois jours est plus régulière (voir figure 1.10 dans le chapitre 1, traces rouges

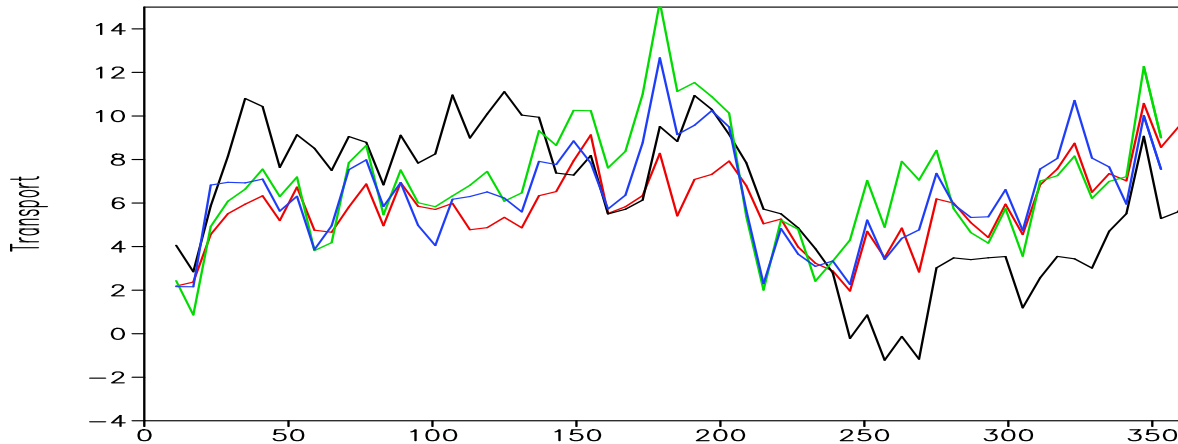


FIG. 9.9 – *Transport (en Sverdrup) à travers la section à $54^{\circ}W$ dans les 100 premiers mètres de profondeur en fonction du temps (jours). Noir : FREE; rouge : REF; vert : sans assimilation de SSH; bleu : avec assimilation de SWOT.*

+ noires pour le satellite ENVISAT) car la latitude des anneaux, entre $5^{\circ}N$ et $12^{\circ}N$ se situe globalement entre deux lignes de nœuds et non sur une ligne de nœuds pour ce même sous-cycle.

Un résultat intéressant est le bénéfice des scénarios multi-satellitaires et à large fauchée qui est plus important dans la région NBC. Cela semble confirmer qu’une plus haute résolution spatiale est nécessaire dans cette région.

9.4.2 Interprétation des résultats par le critère de flux d’observations

Etude des distances caractéristiques

Même si l’aspect propagatif des anneaux est réel, il n’est pas évident de décorréler l’espace et le temps comme nous l’avons fait pour la région TIW, car la vitesse de propagation des anneaux présente de fortes incertitudes. Ceci est bien propre à la nature turbulente de l’écoulement, l’espace et le temps sont en quelque sorte déjà décorrélés et donc le repère fixe convient bien pour étudier les échelles caractéristiques de décorrélation temporelle et spatiale.

Dans ce cas où l’erreur modèle n’est pas la source d’erreur prédominante, un temps de décorrélation temporelle est très délicat à déterminer puisque cette décorrélation dépend totalement de l’état initial. L’exemple de l’expérience (CIE) illustre ce propos car avec une erreur infinitésimale, la décorrélation n’a eu lieu qu’au bout de plus de 6 mois, alors qu’avec une erreur toujours très faible (comme celle de CIE après 5 mois), la décorrélation n’a lieu qu’au bout d’un mois. Contrairement à l’expérience TIW, la décorrélation temporelle est donc totalement dépendante de la qualité des estimés initiaux, donc de la qualité de l’étape d’analyse précédente. Nous considérons le cas où la couverture totale de SSH est assimilée (expérience FULLSSH). A partir du jour 200, nous arrêtons l’assimilation dans FULLSSH pour laisser l’état évoluer librement dans le modèle. La figure 9.10 montre l’évolution de l’erreur pour cette expérience.

A partir d’un état “bien corrigé”, avec un score de correction de plus de 70% pour les vitesses en profondeur, le temps caractéristique de génération de l’erreur est de l’ordre de 20 jours. Ce temps n’est qu’un ordre de grandeur, qui n’a été calculé que d’après une seule expérience, mais montre que dans un système bien contrôlé à l’état initial, l’erreur apparaît plus lentement que dans la région TIW. Ceci peut aussi s’interpréter par la variation plus lente de la dynamique dans cette région.

Pour déterminer les distances caractéristiques en longitude et latitude, nous nous basons sur

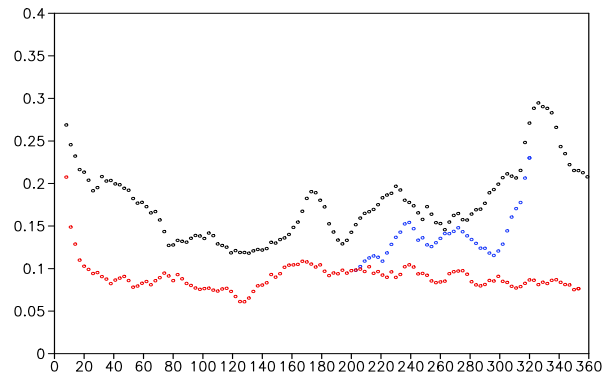


FIG. 9.10 – Erreur RMS de la vitesse entre les niveaux 2 et 6 pour NOSSH (noir), pour FULLSSH (rouge), et pour une simulation démarrant au jour 200 en supprimant l'assimilation de SSH (bleu).

les résultats des tests de la taille de la zone d'influence pour le SEEK local comme nous l'avons déjà fait pour la région TIW. Les distances caractéristiques en longitude et en latitude se sont avérées plus petites que dans la région TIW. Nous avons défini $\Delta\lambda = 1.5^\circ$ et $\Delta\phi = 1.5^\circ$, la distance définie est donc isotrope en longitude et latitude.

Interprétation et généralisation des résultats

Les différences de performances entre orbites remarquées dans les expériences d'assimilation sont bien expliquées par la considération des flux d'observations avec les distances caractéristiques. En effet, la figure 9.11 montre que le score de l'orbite 3, au delà de 6°N , devient plus élevé que celui des orbites 1 et 2, ce qui est cohérent avec les résultats précédemment obtenus.

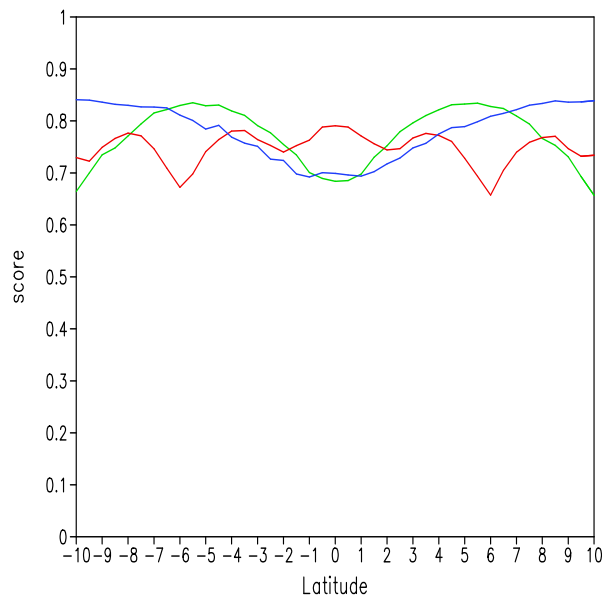


FIG. 9.11 – Score (voir annexe A) entre 10°S et 10°N pour un satellite sur l'orbite 1 (rouge) sur l'orbite 2 (vert), et sur l'orbite 3 (bleu) dans un repère fixe avec $\Delta\lambda = 1.5^\circ$, $\Delta\phi = 1.5^\circ$ et $\Delta t = 10$ jours

La courte distance spatiale et la relativement longue distance temporelle est un facteur très favorable pour la mission SWOT sur l'orbite 4, qui fournit jour après jour des observations

spatialement continues comme l'illustre la figure 9.12 pour un jour donné. Comme on le remarque sur cette figure, une seule trace de l'altimètre SWOT couvre déjà environ la moitié de la superficie d'un anneau. Notons que, la répétitivité du sous-cycle d'ordre 1 (qui est en fait le cycle de répétitivité) est de 20 jours tandis que les orbites 1, 2 et 3 ont toutes un sous-cycle d'ordre 1 autour de 3 jours. Mais ceci n'est sûrement pas gênant dans cette région où l'échelle temporelle caractéristique est plus longue, et la répartition entre les traces montantes et descendantes est bien régulière aux basses latitudes (voir figure 1.12 dans le chapitre 1). Ces résultats se vérifient aussi très bien avec le calcul des flux d'observations basé sur les distances caractéristiques.

Enfin, concernant les décalages entre satellites sur une même orbite, nous avons vérifié, toujours par la même méthode, la cohérence des résultats obtenus : un décalage spatial ajouté à un décalage temporel est favorable pour l'orbite 1, tandis que pour les autres orbites, seul le décalage temporel a une influence.

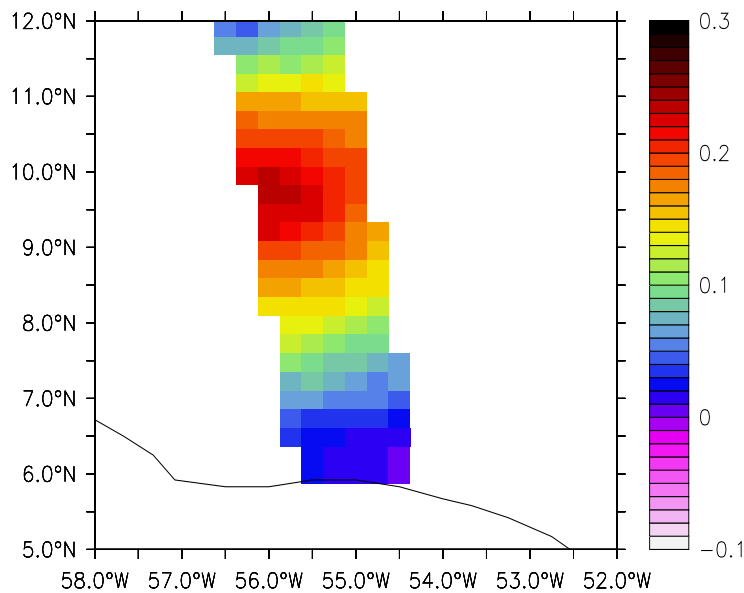


FIG. 9.12 – Observations de SSH le long d'une trace du satellite SWOT simulé, localisées sur la grille.

Conclusion

La réponse aux deux principales questions du besoin en observations est donc bien différente dans la région NBC.

Premièrement, le filtre SEEK n'est pas capable de bien contrôler la circulation avec la seule observation altimétrique, même lorsque celle-ci est parfaite et continue. Dans notre système, les observations d'un réseau dense de profils in situ doivent être assimilées en complément de la SSH pour éviter de dégrader une partie du vecteur d'état. Un réseau espacé de $2.5^\circ \times 2.5^\circ$, jusqu'à 500 m de profondeur permet d'avoir un bon contrôle de la température. Rappelons que la matrice \mathbf{P}^f a été définie de manière assez simple, et que la corrélation multivariée entre la SSH et les variables température et salinité est mal spécifiée, sans doute parce qu'elle est en réalité assez faible ou difficilement spécifiable. Cela a peut-être accentué le besoin en observations complémentaires, mais qui est a priori bien réel étant donné cette faible corrélation multivariée entre température et SSH.

Dans un système mono-satellitaire où l'influence de l'orbite est importante, l'orbite 1 est la moins favorable alors que l'orbite 3 est apparue comme la plus favorable d'après les expériences

d'assimilation comme d'après le calcul de score à partir simplement des flux d'observations basés sur les distances caractéristiques. Les efficacités respectives des orbites ne sont donc pas les mêmes, et les différences sont un peu moins importantes que dans la région TIW où l'orbite 3 était nettement moins efficace.

Dans cette région NBC, l'utilisation d'un système multi-satellitaire s'avère encore plus bénéfique que dans la région TIW. En effet, l'exigence en résolution spatiale des mesures est forte, et seul un système à 3 satellites est capable de bien corriger la structure des anneaux et l'intensité des vitesses. Un autre résultat marquant est l'efficacité d'un altimètre à large fauchée pour l'assimilation qui est comparable à celle d'un système à 3 satellites.

Dans cette région où le caractère chaotique de la dynamique donne beaucoup d'intérêt à l'assimilation de données aussi performant que soit le modèle, nous avons dégagé des résultats qui ouvrent aussi certaines perspectives d'études. Il serait maintenant intéressant de créer une configuration spécifique à cette région, qui aurait donc une surface 10 fois inférieure à TATL4. Ainsi, des perfectionnements de la méthode d'assimilation par exemple avec le SEEK évolutif plus coûteux en calcul pourrait être envisagés. D'autre part, l'augmentation de la résolution spatiale du modèle, qui est sans cesse effectuée dans les système opérationnels, montrerait sans doute des résultats intéressants sur les scénarios. Si la correction par assimilation des plus petites échelles s'avère efficace, alors le besoin en quantité d'observations sera nécessairement plus élevé, et le bénéfice de SWOT pourrait être encore plus important car la largeur de fauchée couvrirait plus que l'équivalent de 6 points de grille comme c'est le cas dans TATL4. Enfin, il serait intéressant de mener des expériences d'assimilation sur une durée plus longue, dix ans par exemple, afin d'obtenir des résultats plus significatifs sur la correction du transport de masse et de chaleur intégrés sur une longue durée.

Conclusions et perspectives

La trame générale de cette thèse s'est construite avec l'objectif d'évaluer et de comparer différents scénarios d'observation satellitaire de la topographie de la surface océanique. Le cas d'étude qui lui a servi de support a été le développement d'OSSE simulant la circulation de l'Atlantique tropical. Bien qu'un peu spécifique, ce cas d'étude a permis de dégager des recommandations intéressantes sur les scénarios, certainement valables pour l'ensemble des régions tropicales, et même a priori transposables pour des dynamiques de circulation différentes. Parallèlement, l'utilisation du modèle régional dans l'Atlantique tropical et la mise en place du dispositif d'OSSE avec assimilation de données a soulevé plusieurs problèmes intéressants en modélisation, en assimilation, voire en océanographie physique.

L'Atlantique tropical : un cas d'étude intéressant pour l'assimilation

L'Atlantique tropical possède des dynamiques de circulations très variées : dans une première zone le long de l'équateur surtout à l'Est, la circulation est très liée au vent et possède un caractère relativement linéaire, tandis que le long de la côte brésilienne la circulation possède un caractère plus chaotique et turbulent. Parmi le spectre des échelles de la circulation, nous sommes spécialement intéressés aux phénomènes de moyenne échelle car ils constituent d'une part des enjeux importants pour la modélisation ou l'assimilation, et d'autre part, leur correction est sensible aux scénarios d'observation. Les deux principaux phénomènes à ces moyennes échelles sont les ondes tropicales d'instabilités et les anneaux du courant NBC. Les ondes tropicales d'instabilités sont aussi très présentes dans l'océan Pacifique, et la circulation de type bord Ouest se rencontre aussi dans de nombreuses régions du globe, même si les échelles caractéristiques ne sont pas toujours les mêmes.

Pour contrôler ces circulations dans le cadre de nos expériences jumelles, l'implémentation de l'assimilation de données a soulevé plusieurs difficultés. Nous avons premièrement remarqué l'intérêt d'adapter la méthode à la dynamique que l'on souhaite corriger. Pour corriger les ondes d'instabilités, une méthode de Monte Carlo basée sur un ensemble de vents perturbés pour déterminer les covariances d'erreur de prévision a donné de meilleurs résultats que la méthode stationnaire. Dans la région NBC, la dynamique turbulente est relativement bien corrigée avec la version stationnaire du SEEK, mais un sous-espace de rang élevé pour la matrice de covariance d'erreur de prévision est nécessaire pour obtenir une correction satisfaisante.

Au delà de l'intérêt que représente le contrôle de la circulation dans toute région océanique, l'étude de l'Atlantique tropical est donc un cas particulièrement intéressant, qui est de plus, dans une large mesure, similaire à d'autres régions tropicales.

Performances et limites des OSSE

Les OSSE en expériences jumelles sont un moyen remarquable pour définir ou évaluer un système d'observation, car elles permettent un diagnostic complet de la correction d'un système d'assimilation, l'océan "réel" étant parfaitement connu. Dans notre étude, nous avons eu le souci d'introduire un certain réalisme dans ces OSSE, en simulant des erreurs dans les expériences jumelles qui soient le plus possible représentatives des erreurs réelles des modèles.

Cependant, il reste certains points pour lesquels des simplifications ont été difficilement évitables. Outre le fait que l'océan de référence n'est pas réaliste puisqu'il est issu d'un modèle, l'erreur de vent introduite n'est certainement pas très bien définie par rapport aux statistiques réelles d'erreur sur le vent qui sont en réalité mal connues. Ensuite, les contraintes des frontières radiatives de la configuration TATL4 imposent un volume constant sur l'ensemble du domaine (chapitre 2). Les variations globales de SSH à l'échelle du bassin ne sont donc pas simulées, alors qu'elles existent en réalité. Enfin, les capacités de certains altimètres à observer plus près des côtes ou avec une meilleure résolution des petites échelles (AltiKa, SWOT) n'ont pu être prises en compte ni mises à profit car la résolution des expériences est limitée à $1/4^\circ$. Nous avons donc

porté l'enjeu des scénarios altimétriques surtout sur les moyennes échelles qui sont bien simulées dans nos expériences. Même si le réalisme de nos expériences est loin d'être parfait, le modèle représente bien le déclenchement des TIW et la dynamique complexe des anneaux du Brésil, dont la correction représente un enjeu fort et qui est étroitement lié aux scénarios altimétriques.

Quelques outils développés

Cette thèse a comporté une forte composante méthodologique. La mise en œuvre d'outils complexes et le développement de certains outils spécifiques sont des éléments à part entière de ce travail de thèse que nous voulons rappeler :

- **Configuration régionale de l'Atlantique tropical** : La configuration TATL4 a été développée au cours de cette thèse avec l'utilisation des frontières radiatives, et offre des possibilités pour effectuer diverses études avec ou sans assimilation. Elle a l'avantage de modéliser une dynamique qui se forme principalement au sein du domaine, qui est donc peu sensible aux données des frontières au moins en ce qui concerne les ondes tropicales d'instabilités et les anneaux du Brésil.
- **Développements méthodologiques de l'assimilation** : L'implémentation du SEEK a été réalisée dans la configuration TATL4 à l'aide du logiciel SESAM. Ensuite, la méthode de Monte-Carlo pour estimer l'erreur modèle due à un vent perturbé au cours d'un cycle d'assimilation a été mise au point et intégrée dans le processus d'assimilation. Elle permet de générer un ensemble aléatoire de champs de vent perturbés, et de les utiliser dans le modèle pour calculer la matrice des covariances d'erreur de prévision.
- **Programme de recherche d'orbites en fonction de caractéristiques orbitales et de calcul des trajectoires de satellites** : Ce programme a deux fonctions principales. La première est de déterminer les orbites envisageables pour des caractéristiques orbitales souhaitées, telles que l'existence de certains sous-cycles et d'un cycle de répétitivité, l'inclinaison, un intervalle d'altitude... La deuxième fonction est le calcul de la position d'un satellite en fonction du temps à partir des paramètres orbitaux pratiques pour ce calcul, qui sont la durée du cycle de répétitivité, le nombre de jours nodaux dans ce cycle, le nombre de passes et l'inclinaison.
- **Outils d'extraction des observations sur la grille modèle et de génération d'un bruit d'erreur** : Cet outil permet d'extraire par interpolation l'équivalent modèle aux points d'observations calculés par le programme précédent et de générer un signal d'erreur instrumentale. Pour un satellite à large fauchée, il permet aussi de générer un signal d'erreur de roulis variant aléatoirement à une fréquence temporelle à spécifier.

Altimétrie et observations in situ

Avant d'aborder nos conclusions à propos des satellites altimétriques, rappelons que l'assimilation conjointe d'un ensemble d'observations (comprenant la température de surface, des profils in situ de température et salinité) est très bénéfique voire dans certains cas nécessaire. Ceci a été vérifié dans la région NBC où en l'absence d'observations in situ en profondeur, l'assimilation ne fonctionnait pas correctement. Ce dernier résultat est dû à la non-optimalité du filtre, mais démontre néanmoins une certaine difficulté à corriger sans observations in situ. En revanche, dans la région TIW, l'assimilation de profils de température est apparue moins nécessaire, grâce à une bonne corrélation entre la SSH et la température. Etant donné que la SSH permet essentiellement de corriger la température et la salinité dont dépendent très fortement les vitesses, l'ajout de profils de température et salinité dans cette région a principalement tendance à compenser les besoins en altimétrie. En effet, une couverture complète de données in situ de température et salinité permettrait, même sans assimilation d'altimétrie, un contrôle très acceptable. Tandis que dans la région NBC, les mesures in situ, même denses, n'apportent pas une information

redondante avec celles de l'altimétrie qui permet essentiellement une correction directe sur les vitesses. Ce résultat est partiellement dû à la forte composante barotrope de la circulation.

Conclusions sur l'optimisation des systèmes d'observations altimétriques

Les études de systèmes mono-satellites ont apporté des résultats intéressants en rapport avec les paramètres orbitaux. En nous appuyant de plus sur des considérations de flux d'observations qui semblent bien correspondre avec les résultats obtenus en assimilation, nous avons déduit que l'existence d'un (sous-)cycle à l'échelle du phénomène à corriger est souhaitable. Cela signifie que ce (sous-)cycle doit avoir une durée inférieure ou de l'ordre du temps caractéristique du phénomène, tout en ayant une distance inter-traces (résolution spatiale) inférieure ou de l'ordre de la distance caractéristique du phénomène. Pour bien corriger les TIW, les échelles importantes à observer sont de l'ordre de 10 jours en temps et de $3-4^\circ$ en longitude et un peu moins en latitude, tandis que dans la région NBC, l'échelle temporelle est plus grande (plutôt de l'ordre de 15-20 jours) et l'échelle spatiale, isotrope, de l'ordre de $1-2^\circ$. Viennent s'ajouter d'autres effets tels que la position des lignes de noeuds du (sous-)cycle adapté au phénomène et l'inclinaison de l'orbite. Une faible inclinaison augmente la densité des observations, mais limite la possibilité d'observer à une latitude supérieure à la valeur de l'inclinaison. Dans les tropiques, une inclinaison très basse est donc à l'évidence favorable. Pour illustrer ce résultat nous avons simulé un satellite altimétrique qui serait dédié aux tropiques avec une inclinaison de 12° , ce qui donne des possibilités de correction encore meilleures qu'un système à trois satellites pour la région NBC. Ainsi, dans la région TIW, une orbite de type JASON (parmi les orbites couramment utilisées) semble la plus favorable tandis que l'orbite d'ENVISAT présente les effets combinés d'une ligne de noeuds du sous-cycle à trois jours le long de l'équateur et une propagation de ce sous-cycle proche de la vitesse des ondes d'instabilités, ce qui a pour conséquence une correction moins efficace. Dans la région NBC, les différences entre orbites sont un peu moins importantes, mais c'est l'orbite 3 (ENVISAT ou SARAL) qui semble la plus appropriée. Signalons pourtant que dans l'étude menée par *Debois* (2004), visant au contrôle de la méso-échelle dans les moyennes latitudes, c'est l'orbite 2 (GFO) qui était la plus favorable des trois.

Compte tenu des résultats ci-dessus, nous pouvons envisager une orbite qui aurait le maximum de sous-cycles, c'est à dire des sous-cycles à 1 jour, 2 jours, 4 jours, ... 2^n jours, jusqu'à 32 jours par exemple. Pour une inclinaison donnée, les paramètres orbitaux sont très facilement calculables avec le programme de recherche d'orbite. Nous ne l'avons pas encore testé en expériences jumelles, mais il est fort probable que pour l'assimilation, ce type d'orbite soit le plus polyvalent en terme d'efficacité pour corriger un ensemble de phénomènes de différentes échelles.

Dans nos études de systèmes multi-satellites, le nombre de satellites détermine au premier ordre la qualité de la correction. Dans la région TIW, un scénario avec au moins deux satellites est nécessaire pour bien corriger la structure des ondes d'instabilités en profondeur, et dans la région NBC, un scénario à au moins trois satellites est nécessaire pour une bonne représentation des vitesses associées aux anneaux en profondeur.

Parmi les scénarios testés, les meilleurs résultats ont été obtenus avec des satellites décalés sur des orbites identiques. Dans la région TIW, les variations de la dynamique sont suffisamment rapides pour que le décalage spatial ait peu d'influence pour une orbite d'au moins 10 jours, la priorité doit être de réaliser le décalage temporel le plus favorable. La valeur du décalage temporel ne doit pas nécessairement être une subdivision du cycle de répétitivité, mais plutôt une subdivision du (sous-)cycle à l'échelle de la dynamique à corriger. Le cas de l'orbite d'ENVISAT a permis de bien illustrer ce résultat car une subdivision du cycle de répétitivité (égal à 35 jours, trop grand devant l'échelle temporelle des ondes d'instabilités) n'est pas du tout favorable tandis qu'une subdivision du sous-cycle à 17.5 jours donne de bien meilleurs résultats. En revanche, dans la région NBC où les échelles temporelles sont plus longues et les échelles spatiales plus

petites, un décalage spatial devient favorable : deux satellites sur une orbite à 10 jours seront préférentiellement décalés spatialement et temporellement. Pour les orbites plus longues, un décalage temporel bien adapté est suffisant. Pour généraliser, si le besoin en résolution spatiale est insuffisant même à l'échelle du cycle de répétitivité, un satellite supplémentaire sera alors de préférence décalé spatialement, mais avec un décalage temporel adapté pour favoriser l'observation des phénomènes plus rapides à l'échelle de certains sous-cycles.

La simulation d'un altimètre à large fauchée a fourni des résultats intéressants à confronter avec les systèmes multi-satellitaires au nadir. Dans la région TIW, la correction obtenue avec un altimètre à large fauchée est du même ordre que ce qu'on obtient avec un système à deux satellites, et dans la région NBC, les bénéfices relatifs sont supérieurs avec une correction qui est même légèrement meilleure que celle qu'on obtient avec un système à trois satellites. La différence de performance est certainement due à la dynamique qui n'a pas les mêmes échelles caractéristiques dans les deux régions. Dans la région NBC, les échelles de décorrélation surtout en longitude étant nettement plus faibles, des observations rapprochées sont moins redondantes d'information que dans la région TIW. De plus, la première orbite proposée pour SWOT ne possède pas de sous-cycle de trois jours, mais l'existence de celui-ci n'est pas vraiment nécessaire dans la région NBC où la dynamique évolue plus lentement. Notons enfin qu'il est de plus en plus question d'une orbite avec un sous-cycle de trois jours pour SWOT, avec toujours un cycle de répétitivité d'une vingtaine de jours. Une telle orbite serait sans doute encore plus favorable pour la région TIW, mais nous ne l'avons pas encore simulée. En plus des apports remarquables que devraient apporter la mission SWOT pour l'observation de la sub-mésoéchelle (aspect que nous n'avons pas pu explorer avec la résolution de la grille dans TATL4), les bénéfices sur l'observation de la moyenne échelle pour l'assimilation de données sont déjà remarquables.

Il est intéressant de signaler les différences entre nos résultats et ceux des études d'impact des scénarios obtenus par cartographie des données satellites. Notons bien qu'il s'agit de cartographie dans ces études, sans la contrainte de la correction en profondeur et sans l'aide d'un modèle. En passant d'un système mono-satellitaire à un système bi-satellitaire sur l'orbite 1, *Le Traon et al.* (2002) ont montré que la réduction relative de variance d'erreur était de 75%, pour un signal de type méso-échelle aux moyennes latitudes. Dans nos expériences, la réduction relative pour la variable SSH n'est que de 19% dans la région TIW et 28% dans la région NBC. Un seul satellite permet déjà une correction conséquente avec l'assimilation de données ce qui n'est sans doute pas le cas avec l'interpolation. Cela explique sûrement une réduction d'erreur moins importante dans nos expériences en passant de un à deux satellites. Finalement, l'assimilation de données est en quelque sorte un moyen d'"économiser" des satellites. Ceci dit, les apports des systèmes multi-satellitaires sont dans tous les cas remarquables.

Enfin, rappelons que les erreurs d'observations ont été assez simplement simulées, de plus sans aucune erreur sur la surface moyenne. Dans un système réel, les erreurs d'observation pourraient être plus néfastes, ce qui accroîtrait a priori la quantité d'observations nécessaires, et donc le besoin de systèmes multi-satellitaires ou à large fauchée. En terme de quantités d'observations nécessaires, nos conclusions indiquent en quelque sorte une barre minimum.

Confrontation des résultats avec d'autres recommandations pour les missions

Les recommandations sur les scénarios altimétriques pour l'assimilation dans l'Atlantique tropical ne sont évidemment pas les seules à prendre en compte. Contrairement à un réseau d'observations in situ qui peut être plus ou moins densifié selon les besoins des différentes régions de l'océan, les contraintes orbitales pour l'altimétrie sont très fortes, entre autre l'échantillonnage est invariant sur tout le globe selon l'axe zonal. Ainsi le choix d'un scénario est un compromis qui doit concilier l'ensemble des besoins en altimétrie.

De plus, si l'optimisation des systèmes d'observation pour l'assimilation de données est un

élément important dans le choix des orbites, elle n'est pas le seul critère à prendre en compte car la qualité des mesures est elle-même dépendante des paramètres orbitaux, ce que nous n'avons pas pris en considération dans notre étude. Pour choisir une orbite, il est par exemple préférable de ne pas aliaser le signal de marée à une fréquence temporelle proche des fréquences d'intérêt comme il a été rappelé dans *Fu et Ferrari* (2008). Le phénomène d'aliasing avec les marées est expliqué en détail dans *Lefebvre* (2000). Ces contraintes limitent le choix de la période de répétitivité pour un satellite. Ensuite, des contraintes d'altitude sont aussi associées avec les différents types d'altimètres et leurs fréquences d'émission, alors que dans notre étude l'influence de l'altitude n'a été étudiée que vis-à-vis de l'échantillonnage des observations. Enfin, l'existence d'un cycle de répétitivité, pas trop long, est très importante pour une bonne connaissance de la surface moyenne aux points observés et donc pour la qualité des anomalies observées. Ce fait n'a pas non plus été pris en compte dans notre étude, où l'existence même d'un cycle de répétitivité n'est absolument pas un point important. Les caractéristiques d'échantillonnage ont un impact sur l'assimilation, mais le fait qu'il s'agisse d'un sous-échantillonnage ou d'un échantillonnage strictement répétitif n'a pas véritablement d'influence pour l'assimilation.

Si pour l'assimilation, l'optimalité semble être une répartition la plus homogène possible des observations en rapport avec les échelles caractéristiques des phénomènes à corriger, il n'en est pas toujours de même pour toutes les applications de l'altimétrie. Par exemple, une orbite ne possédant pas de sous-cycles (hormis à 1 jour car il est imposé par la rotation terrestre) permet l'observation détaillée d'un tourbillon particulier durant un court intervalle de temps car les traces se suivent de jour en jour avec un court intervalle en longitude, mais ce qui est en revanche moins favorable pour l'assimilation car c'est au détriment d'une répartition homogène vis-à-vis du champ tourbillonnaire.

Enfin, certains satellites ne sont pas entièrement dédiés à l'altimétrie pour l'océan. Par exemple, la mission SWOT sera aussi utilisée pour la surveillance des eaux continentales, pour laquelle des contraintes d'orbites doivent être aussi prises en compte afin de trouver un bon compromis.

Perspectives

Pour finir, il est utile de se demander quels pourraient être les prolongements les plus utiles de ce travail de thèse.

– Perspectives méthodologiques

Il existe encore des possibilités d'améliorer l'assimilation de données dans l'Atlantique tropical et pouvant plus généralement s'appliquer dans les autres océans tropicaux.

Dans la région NBC, la matrice de covariance d'erreur de prévision a été définie de façon classique avec la version stationnaire du SEEK. Il serait intéressant de tester le SEEK évolutif afin de prendre en compte plus spécifiquement l'erreur sur la condition initiale propagée par le modèle. En effet, pour une dynamique de nature turbulente, le SEEK évolutif est certainement plus adapté comme l'a montré la thèse de *Debost* (2004). Ces améliorations méthodologiques pourraient avoir un impact sur le besoin en observations, aussi bien altimétriques qu'in situ. Pour pouvoir réaliser techniquement le SEEK évolutif avec un nombre de modes raisonnable ce qui était difficile à envisager dans la configuration TATL4, il serait judicieux de réaliser une configuration modèle plus spécifique à la région, en n'englobant que la zone où les anneaux sont formés et propagés. Cela réduirait par 10 la surface du domaine, et donc diminuerait grandement les coûts de calculs du SEEK évolutif.

Dans la région TIW, la matrice des covariances d'erreur de prévision a été a priori mieux définie par rapport au problème, mais il n'est pas évident qu'avec un vent perturbé plus réaliste, l'assimilation fonctionne aussi bien. En effet, les membres perturbés pour le calcul

de cette matrice sont statistiquement bien définis par rapport à l'erreur de vent entre REF et CRT1. Dans un tel cas, il serait peut-être nécessaire de travailler avec un sous-espace d'erreur plus grand.

Enfin, toujours dans le domaine méthodologique en assimilation de données, le contrôle des TIW offre des perspectives de correction du vent par assimilation, en introduisant la tension de vent dans le vecteur de contrôle. De telles perspectives ont déjà été initiées par *Vossepoel et al.* (2003) dans un modèle à plus basse résolution du Pacifique tropical et par *Skachko et al.* (2006) qui ont aussi étudié la possibilité de corriger les forçages avec le filtre SEEK.

– **Perspectives en analyse/prévision**

Finalement, il est important de rappeler que ce travail a surtout été envisagé dans le contexte du contrôle de la circulation en temps réel. Mais si l'on se place dans le cadre de reconstructions des circulations passées et de ré-analyses, des perspectives sont envisagées en prenant compte l'information des observations passées et futures avec le lisseur de Kalman. Les résultats sur la valeur intrinsèque des différents scénarios pourraient être différents, car l'éloignement temporel des observations est mieux pris en compte. Simplement avec le calcul du flux d'observations (annexe A), des différences importantes de scores respectifs seraient obtenues en allongeant la distance caractéristique temporelle. Les besoins d'un sous-cycle court (3-5 jours) ne seraient peut être plus aussi forts dans la région TIW. Cependant, avant d'étudier ces aspects en rapport avec les scénarios, le développement méthodologique du lisseur de Kalman est envisagé à partir de la configuration TATL4 dans le cadre d'un futur travail de thèse. Le travail sera d'abord axé sur la correction des TIW qui ont un comportement assez linéaire et dont la propagation est très bien résolue par le modèle. Dans un tel cas, la prise en compte d'observations passées et futures pourrait s'avérer particulièrement bénéfique.

A l'inverse, on pourrait se placer dans une perspective de prévision, avec une échelle de temps par exemple d'une à deux semaine (comme cela a été fait dans le projet MERCATOR) et examiner plus spécifiquement dans quelle mesure tel ou tel scénario impacte les capacités prédictives du système d'assimilation.

– **Perspectives d'études de scénarios**

Sur un plan général, notre étude a montré la dépendance des performances des scénarios aux spécificités dynamiques, donc géographiques, de l'océan. Un prolongement souhaitable de ce travail serait sans doute d'œuvrer à définir une rationalité d'échantillonnage à l'échelle globale de l'océan car il semble exclu de lancer un satellite pour chaque région océanique... Sur un autre plan, l'amélioration des potentialités de mesures altimétriques de bonne qualité à l'approche des côtes conduit à mener des investigations spécifiques dans ces régions. Des modèles de très haute résolution devront être réalisés, incluant la totalité de la physique propre au domaine côtier. Les méthodes d'assimilation devront être adaptées en conséquence. Dans ces régions plus qu'ailleurs, la conjonction de l'altimétrie et d'autres moyens d'observation, principalement in situ, est à étudier et à construire.

Annexes

Annexe A

Une méthode simple pour estimer le bénéfice d'un flux de données satellites

Introduction

Selon les orbites, la répartition spatio-temporelle des traces au sol au nadir des satellites est très variable. Dans le cas des satellites altimétriques par exemple, la répartition des observations a un impact très fort sur les applications. Mais cet impact est parfois coûteux à évaluer, notamment pour l'application en assimilation de données.

Nous proposons ici une méthode simple et numériquement peu coûteuse pour évaluer le bénéfice d'un flux de données satellite en rapport avec l'observation d'un phénomène, qui est basée sur un critère d'échelle en temps et en espace. Le critère repose sur le principe qu'un évènement de l'espace-temps sera bien observé s'il existe des observations situées à une distance spatiale et temporelle suffisamment faible. L'idée est de définir une mesure de ces distances, en rapport avec le phénomène à observer, qui donne le score d'évaluation d'un scénario satellite.

Nous illustrerons d'abord le problème dans un espace à deux dimensions (longitude-temps) puis nous formulerons le critère d'évaluation dans l'espace complet (longitude-latitude-temps). Enfin, une adaptation de la méthode sera proposée pour le cas des phénomènes propagatifs. Deux orbites actuellement utilisées pour des satellites altimétriques, celles de JASON et d'ENVISAT, seront évaluées à titre d'exemple.

A.1 Illustration du problème dans un espace à deux dimensions

Pour faciliter les représentations graphiques, considérons un problème à deux dimensions, en longitude et temps. Dans cet espace, de latitude fixée, il est possible de représenter la position des points d'observations d'un satellite. La figure A.1 représente les observations pour les deux orbites considérées.

Un évènement quelconque P de l'espace-temps sera bien observé s'il existe des observations à une distance proche. Une métrique pour la mesure de cette distance doit être définie, en considérant une distance caractéristique en longitude et en temps. Physiquement, ces distances caractéristiques correspondent à la limite au delà de laquelle les observations ne sont plus efficaces pour observer l'évènement P . Notons ces distances $\Delta\lambda$ et Δt . L'efficacité d'une observation $O(\phi(O), t(O))$ pour le point $P(\phi(P), t(P))$ sera évaluée à partir de la distance $d(P, O)$ représentée en exemple sur la figure A.1. Cette distance peut s'écrire sous forme d'un scalaire, pondéré par la longitude et le temps caractéristiques, avec la formule suivante :

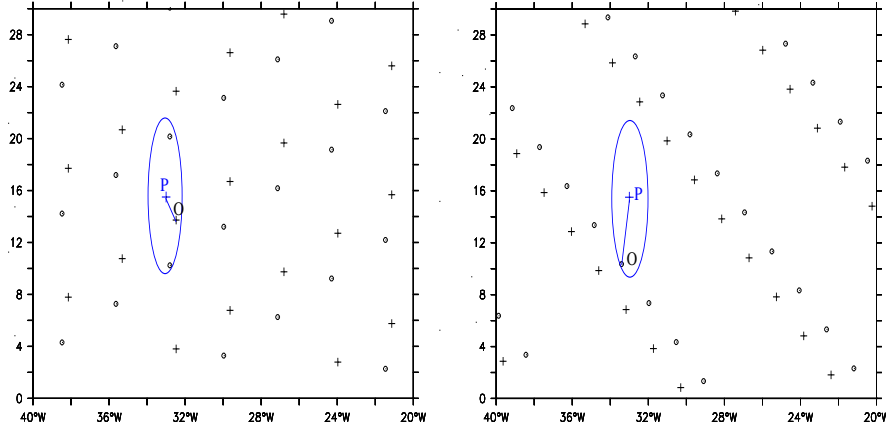


FIG. A.1 – Points d’observations du satellite JASON (à gauche) et ENVISAT (à droite) dans un diagramme longitude-temps à 2°N. Les croix concernent les observations en phase montante du satellite, et les cercles en phase descendante. P est un point quelconque de l’espace, O est l’observation la plus proche selon la distance définie par l’équation A.1. L’ellipse dessinée est la ligne d’iso-distance $d=1$ pour $\Delta\lambda = 1.5^\circ$ et $\Delta t = 6$ jours.

$$d(P, O) = \left[\left(\frac{\phi(P) - \phi(O)}{\Delta\lambda} \right)^2 + \left(\frac{t(P) - t(O)}{\Delta t} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (\text{A.1})$$

La pondération par les distances caractéristiques permet de donner plus ou moins de poids au rapprochement spatial ou temporel. L’ellipse sur la figure 1 est la ligne d’iso-distance $d=1$ pour $\Delta\lambda = 1.5^\circ$ et $\Delta t = 6$ jours, à l’intérieur de laquelle les observations sont efficaces pour le point P .

A.2 Le score

On se place dans le cas général du problème à trois dimensions (longitude, latitude, et temps). Il faut donc définir trois distances caractéristiques $\Delta\lambda$, $\Delta\phi$ et Δt pour les critères d’efficacité.

A.2.1 Calcul du score

Dans cet espace, la distance entre un point P et une observation O est définie par la formule :

$$d(P, O) = \left[\left(\frac{\phi(P) - \phi(O)}{\Delta\phi} \right)^2 + \left(\frac{\lambda(P) - \lambda(O)}{\Delta\lambda} \right)^2 + \left(\frac{t(P) - t(O)}{\Delta t} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (\text{A.2})$$

L’efficacité de l’observation O vis à vis du point P peut se définir par :

$$E(P, O) = \exp [-d^2(P, O)] \quad (\text{A.3})$$

Nous proposons d’estimer, pour un grand nombre n de points P choisis aléatoirement, l’efficacité de l’observation la plus proche. La moyenne des efficacités maximums obtenues sur l’ensemble des points P définira le score S du réseau d’observation :

$$S = \frac{1}{n} \sum_{P=P_1}^{P_n} \max_O E(P, O) \quad (\text{A.4})$$

A.2.2 Etude du score en fonction de la latitude

Tel qu'il vient d'être présenté, le score se calcule sur l'ensemble d'un domaine. Mais il peut être intéressant de calculer le score pour différentes parties du domaine, en fixant l'une des dimensions par exemple. La dépendance avec la longitude sera périodique, d'une période égale à la distance inter-traces si l'intervalle de temps dans lequel sont choisis les points P est suffisamment grand par rapport au cycle. Mais cette période est très courte et ne nous intéressera pas. Cette périodicité s'explique par l'invariance en longitude des caractéristiques orbitales. En revanche, la dépendance avec la latitude sera de plus grande échelle et a priori non périodique. Elle sera d'autant plus intéressante que la nature de la dynamique océanique est souvent propre à la latitude. Enfin, la dépendance avec le temps sera cyclique avec une période égale au cycle de répétitivité, pour des raisons évidentes. Notons que dans le cas d'un système multi-satellitaire, il n'en sera pas forcément ainsi.

Nous présentons ici la dépendance du score avec la latitude car elle présente un intérêt particulier. Par exemple, il est évident que pour le satellite JASON, les observations sont beaucoup plus denses à 66°N qu'à l'équateur. Mais d'importantes différences existent aussi aux basses latitudes.

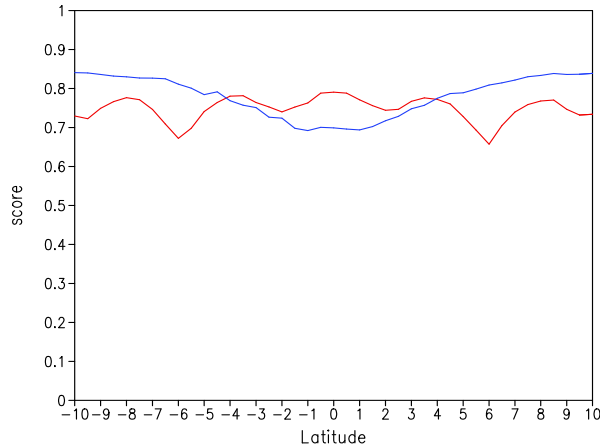


FIG. A.2 – Score entre 10°S et 10°N pour les satellites JASON (rouge) et ENVISAT (bleu), avec $\Delta\lambda = 1.5^\circ$, $\Delta\phi = 1.5^\circ$ et $\Delta t = 6$ jours.

La figure A.2 montre les scores obtenus en fonction de la latitude, en choisissant 3000 points P aléatoires pour chaque latitude entre -10° et $+10^\circ$, avec un pas de 0.5° , et les distances caractéristiques suivantes : $\Delta\lambda = 1.5^\circ$, $\Delta\phi = 1.5^\circ$ et $\Delta t = 6$ jours. Les scores sont symétriques par rapport à l'équateur ce qui est logique compte tenu de la symétrie des orbites de part et d'autre de l'équateur. On remarque une déficience du score pour ENVISAT à l'équateur, et pour JASON à 6°S et 6°N. La figure A.3 montre que ces déficiences correspondent en fait aux lignes de noeuds des sous-cycles à 3 jours.

A.3 Adaptation de la méthode pour les phénomènes propagatifs

La démarche proposée jusqu'ici n'est pas très bien adaptée pour la dynamique propagative. En effet, dans le cas par exemple d'une onde qui se propage, il serait pertinent d'appliquer la méthode dans un référentiel qui se déplace à la vitesse de l'onde. Physiquement, cela revient à considérer que les bénéfices des observations sont transportés avec l'onde.

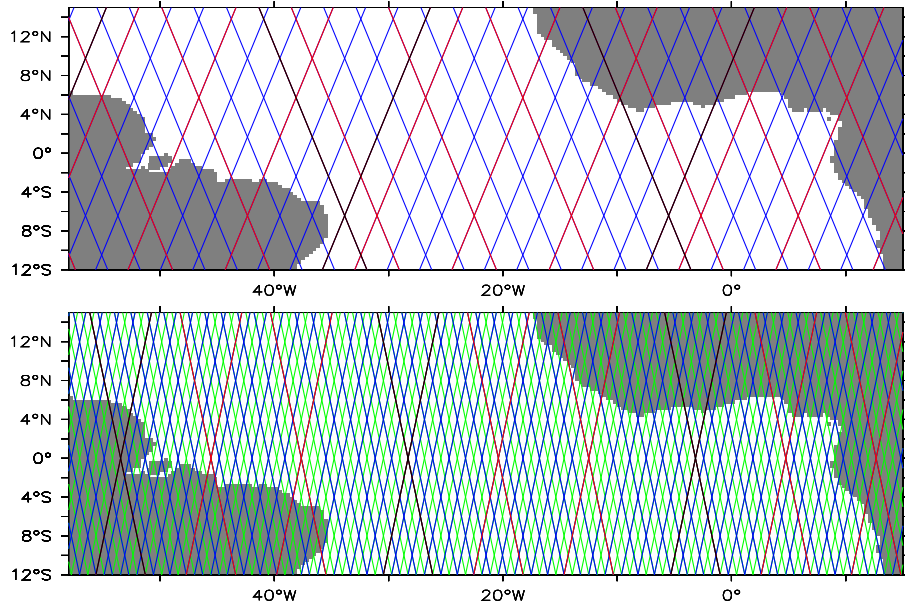


FIG. A.3 – Pour les orbites de JASON et d’ENVISAT : Tracé d’un sous-cycle d’ordre 1 en noir, d’ordre 2 en rouge+noir, d’ordre 3 en bleu+rouge+noir et d’ordre 4 en vert+bleu+rouge+noir, lorsqu’ils existent. Dans les deux cas, les cycles d’ordre 1 et 2 sont respectivement à 1 jour et 3 jours.

A.3.1 Illustration dans l’espace à deux dimensions

Pour illustrer le problème, prenons l’exemple des ondes tropicales d’instabilité qui sont un phénomène propagatif zonal (à latitude constante) comme il en existe beaucoup dans l’océan. La figure A.4 à gauche montre dans un diagramme espace-temps la signature des ondes d’instabilités, ainsi que les points d’observations d’ENVISAT. Etant donné que le modèle transporte l’information parallèlement à la ligne noire, il est plus judicieux de considérer un espace mobile se déplaçant à la vitesse de phase des ondes. La figure A.4 à droite montre à nouveau les traces d’ENVISAT dans ce repère mobile. Ainsi, la distance ne s’exprimera pas de la même façon.

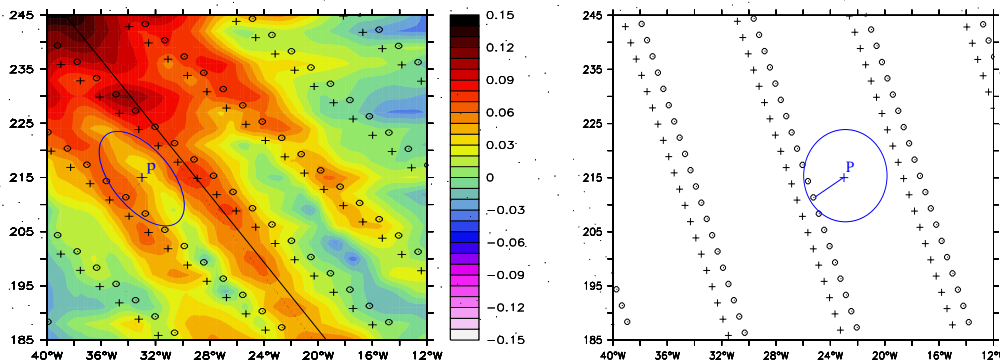


FIG. A.4 – A gauche : diagramme espace-temps de la SLA d’une simulation de TATL4 et points d’observations du satellite ENVISAT. A droite : diagramme espace temps des points d’observations du satellite ENVISAT dans le repère mobile

A.3.2 Calcul du score

Nous considérons toujours le cas d'un phénomène propagatif zonal de vitesse V . Dans l'espace mobile, la longitude d'un point d'observation O , notée $\phi'(O)$ s'écrit :

$$\phi'(O) = \phi(O) - V \times t(O) \quad (\text{A.5})$$

Ainsi, la distance $d'(P, O)$ dans ce même espace s'écrit :

$$d'(P, O) = \left[\left(\frac{\phi(P) - \phi(O) + V \times t(O)}{\Delta\phi} \right)^2 + \left(\frac{\lambda(P) - \lambda(O)}{\Delta\lambda} \right)^2 + \left(\frac{t(P) - t(O)}{\Delta t} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (\text{A.6})$$

Le score se calcule ensuite exactement de la même façon avec la distance d' .

A.3.3 Etude du score en fonction de la latitude

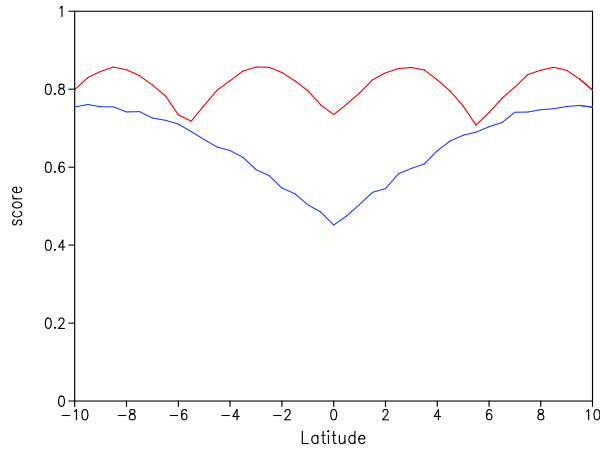


FIG. A.5 – Score entre 10°S et 10°N pour les satellites JASON (rouge) et ENVISAT (bleu), dans le repère mobile de vitesse $V=-0.5\text{m/s}$ avec $\Delta\lambda = 1.5^{\circ}$, $\Delta\phi = 3^{\circ}$ et $\Delta t = 6\text{jours}$.

La figure A.2 montre les scores obtenus en fonction de la latitude, en choisissant 3000 points P aléatoires pour chaque latitude entre -10° et $+10^{\circ}$, avec un pas de 0.5° , et les distances caractéristiques suivantes : $\Delta\lambda = 1.5^{\circ}$, $\Delta\phi = 3^{\circ}$, $\Delta t = 6$ jours et $V = 0.5$ m/s. La correction des ondes d'instabilités (de vitesse 0.5m/s) que nous cherchons à anticiper nous a conduit à choisir ces distances caractéristiques. La distance est plus longue en longitude car le phénomène est fortement anisotrope, et les corrélations sont plus longues zonalement.

Le score d'ENVISAT est nettement moins élevé que celui de JASON dans la zone entre 2° et 4°N où se propagent les ondes.

Conclusion

Ce calcul de score peut s'appliquer aussi pour les scénarios multi-satellitaires, permet de tester l'influence de différents décalages spatio-temporels. Nous avons présenté l'influence du score en fonction de la latitude, mais une étude en fonction du temps pourrait être aussi intéressante surtout dans le cas multi-satellitaire où il est impossible de définir une période de répétitivité des observations (si le rapport des durées de cycles respectifs n'est pas un rationnel).

Annexe B

Mise en application d'une paramétrisation efficace des erreurs d'observations et perspectives

Introduction

Dans la partie principale du manuscrit, nous n'avons pas abordé en détail le problème de la paramétrisation des erreurs d'observations. En effet, dans le cas des satellites au nadir, l'erreur était simulée par un bruit blanc qui s'est avéré bien filtré par l'assimilation, d'autant plus que la matrice \mathbf{R} était relativement bien spécifiée par rapport à ces erreurs.

Or si les erreurs d'observations sont corrélées spatialement, il n'est pas du tout évident que le filtrage soit aussi bien réussi, et donc les erreurs d'observations risqueraient de perturber plus fortement le système. Il deviendrait dans ce cas essentiel de paramétrer le mieux possible les erreurs d'observation en utilisant par exemple la méthode développée dans *Brankart et al. (2008)*. Dans cette annexe, nous présentons un début d'étude sur l'application de cette paramétrisation avec des observations satellitaires simulées.

B.1 Principe de base de la paramétrisation de la matrice \mathbf{R}

Dans le cadre du filtre SEEK, il est numériquement trop coûteux de prendre en compte des termes non-diagonaux de \mathbf{R} dans le calcul de l'étape d'analyse. Mais grâce à la nouvelle paramétrisation dont la théorie est présentée en détail dans *Brankart et al. (2008)* (annexe D), il est désormais possible de simuler une matrice \mathbf{R} non-diagonale sans y recourir de façon explicite. La méthode consiste à assimiler conjointement une observation et son gradient en spécifiant pour chacun une matrice \mathbf{R} diagonale. Le rapport des termes diagonaux de ces deux matrices paramètre la distance de corrélation. On voit bien, en effet, que l'erreur sur le gradient des observations est d'autant plus faible que les erreurs d'observations sont spatialement corrélées.

B.2 Mise en œuvre pour l'assimilation de données satellites

Dans *Brankart et al. (2008)*, la méthode a été appliquée dans un cas très académique où la couverture totale de SSH était supposée observée. Or dans un cas plus réaliste, le gradient de SSH n'est pas observé de façon complète et dans les deux directions. Un altimètre au nadir observe le gradient de SSH seulement dans une seule direction, et un altimètre à large fauchée devrait observer un gradient dans les deux directions, mais sans doute avec des précisions différentes selon les directions. Il serait donc intéressant de tester les bénéfices de cette méthode dans ce

cadre plus réaliste. Et c'est l'objectif de cet annexe de décrire brièvement les quelques résultats qui ont été obtenus dans ce sens au cours de cette thèse.

B.2.1 Formulation de la matrice \mathbf{R} pour des observations le long des traces d'un satellite au nadir

L'information sur le gradient est partielle dans le cas d'un satellite au nadir. Nous appelons DHT la composante (tangentielle à la trace) du gradient observé de SSH. Cette variable DHT s'exprime en fonction de la SSH observée par la formule suivante :

$$DHT(n) = \frac{SSH(n+1) - SSH(n)}{\Delta\xi} \quad (\text{B.1})$$

où $SSH(n)$ et $SSH(n+1)$ sont deux observations qui se suivent le long de la trace séparées par une distance $\Delta\xi$.

Supposons que l'erreur d'observation ait une amplitude σ et une distance de corrélation caractéristique ℓ . La figure B.1 schématise les observations le long de la trace ainsi que le signal d'erreur d'observation. Pour paramétrer la matrice \mathbf{R} , il faut déterminer les valeurs σ_0 et σ_1 des

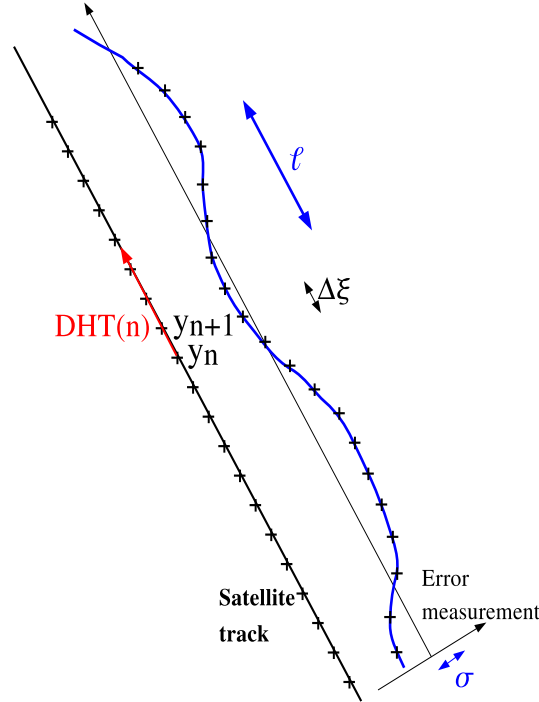


FIG. B.1 – Schéma des observations le long d'une trace de satellite. La courbe bleue est un exemple d'erreur d'observation corrélée avec une distance ℓ et d'écart type σ . Les différentes observations sont séparées par une distance $\Delta\xi \ll \ell$.

termes diagonaux des matrices $\mathbf{R}_0 = \sigma_0 \mathbf{I}$ et $\mathbf{R}_1 = \sigma_1 \mathbf{I}$ concernant respectivement les observations de SSH et de DHT. Si la distance entre les observations $\Delta\xi$ est petite devant la distance ℓ (si $\Delta\xi/\ell \ll 1$), alors nous pouvons montrer que la matrice \mathbf{R} paramétrant l'erreur du signal peut s'approcher par la formule :

$$R_{i,j} \approx \sigma \exp\left(-\frac{|(i-j)\Delta\xi|}{\ell}\right) \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{\ell}{\Delta\xi}\right) \quad (\text{B.2})$$

Pour paramétrer correctement l'erreur d'observation, les paramètres σ_0 et σ_1 devront donc vérifier :

$$\begin{cases} \sigma_0 = \sqrt{\frac{2\Delta\xi}{l}} \sigma \\ \sigma_1 = \frac{\sigma_0}{l} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

B.2.2 Premiers résultats

Des premières expériences ont été réalisées en effectuant une série d'étapes d'analyses avec un vecteur d'état très réduit comportant la SSH et les vitesses de surface (U01, V01). En assimilant des observations le long de traces virtuelles avec des erreurs corrélées, nous avons premièrement vérifié les améliorations sur la correction grâce à cette paramétrisation.

Un autre résultat intéressant est que l'impact des erreurs d'observation sur la correction, même avec la paramétrisation présentée ci-dessus, est plus importante lorsque la distance de corrélation des erreurs d'observation est de l'ordre de 300-500 km. Ce résultat n'est pas surprenant car les échelles caractéristiques des anneaux sont justement analogues. Ainsi, les erreurs d'observations seraient les plus néfastes lorsque leurs échelles caractéristiques sont du même ordre de grandeur que l'échelle de la dynamique à corriger. Ce dernier résultat a été rapidement vérifié sur ce cas précis et fera prochainement l'objet d'une étude plus approfondie.

B.2.3 Perspectives pour l'altimétrie à large fauchée

La démarche présentée dans le cas mono-dimensionnel ci-dessus peut aussi s'appliquer dans un cas bi-dimensionnel pour les observations d'un altimètre à large fauchée. Une décomposition des gradients le long de la fauchée et perpendiculairement à la fauchée est alors judicieuse car les erreurs relatives dans ces deux directions n'ont pas nécessairement les mêmes statistiques. Notons que l'application de la paramétrisation de la matrice \mathbf{R} qui tient compte d'une erreur de roulis n'est pas directement réalisable avec la méthode présentée ci-dessus, de sorte que des développements supplémentaires seraient nécessaires dans ce cas.

Conclusions

Les expériences de test de cette paramétrisation de la matrice \mathbf{R} réalisées jusqu'ici ont été succinctes. Pour poursuivre sur cette voie, il serait maintenant intéressant de mettre en œuvre la paramétrisation dans des expériences d'assimilation du même type que celles réalisées dans les chapitres 8 et 9 et d'effectuer parallèlement une recherche plus détaillée sur les longueurs de corrélations présentes dans les signaux d'erreur des satellites au nadir et à large fauchée.

Enfin, une expérience plus réaliste en terme d'erreur d'observations et de paramétrisation de celle-ci ouvre des perspectives intéressantes d'études de systèmes multi-satellites en considérant les cas où les erreurs sont indépendantes ou non entre satellites. Dans le cas où les erreurs sont indépendantes, l'augmentation du nombre de satellites réduirait grandement l'impact des erreurs d'observation spatialement corrélées.

Annexe C

Impact of data from upcoming altimetric missions on the control of the three dimensional circulation in the tropical Atlantic Ocean

C. Ubelmann,⁽¹⁾ J. Verron⁽¹⁾, J. M. Brankart⁽¹⁾, P. Brasseur⁽¹⁾, and E. Cosme⁽¹⁾

⁽¹⁾Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, Grenoble, France

Journal of Operational Oceanography, Volume 2 No.I February 2009

Abstract

The use of Sea Surface Height (SSH) satellite measurements in ocean models is a key element in the efficient control of the three dimensional circulation through data assimilation and therefore in the quality of operational oceanography products. This paper attempts to evaluate the impact of future satellite data, particularly from the upcoming JASON2, SARAL, and SWOT missions, introduced into a model through a sophisticated data assimilation procedure. For this purpose, Observing System Simulation Experiments (OSSEs) are performed in the tropical Atlantic Ocean. The NEMO model is used (at a $1/4^\circ$ resolution) in a configuration covering the tropical Atlantic from 15°S to 17°N , and the assimilation scheme is a reduced-order Kalman (SEEK) filter. The study focuses principally on control of the circulation of the North Brazil Current and the propagation of Tropical Instability Waves (TIW). Among the orbits tested for altimetric satellites, the JASON2 orbit (10-day repeat period) is found to give the best sampling for data assimilation. The addition of a second or third satellite to JASON2 is particularly useful in the TIW region and is even required to properly control the Brazil rings. SWOT provides benefits that are equivalent to the contribution of two or three satellites, depending on the case.

Introduction

After the successful altimetric missions JASON1, GFO, ERS and ENVISAT, new altimetric missions are planned using precise altimeters and sometimes new technologies : shortly JASON2, followed in the coming years by SARAL, and later, hopefully, SENTINEL3 and SWOT. Altimetry has enabled spectacular progress to be made in oceanography (*Fu et Le Traon*, 2006), and is currently a key element in the quality of operational oceanography products. More specifically,

altimetry provides key data for controlling ocean circulation models through data assimilation (Testut *et al.*, 2003b). Indeed, although SSH is a surface observation, it contains a signature of 3D circulations, and assimilation algorithms are able to redistribute this information to correct temperature, salinity, pressure and velocity fields in all 3D directions. This is particularly useful because other (in situ) observations below the ocean surface, unlike satellite observations, are generally based on poor time-space sampling.

One key objective of operational oceanography and of most recent altimetric satellite missions is to observe mesoscale circulations. The ubiquitous presence of strong eddy activity in the ocean and the role of mesoscales in every aspect of ocean circulation, including large-scale ocean climate conditions, is now well recognized. The number of satellites now in orbit, and the details of their orbital parameters, have a strong impact on mesoscale observations. With traditional along-track measurements, only a multi-satellite configuration is able to observe mesoscales with the required accuracy, as was already shown by many authors (Verron *et al.*, 1996; Greenslade *et al.*, 1997; Pascual *et al.*, 2007). Interferometry instruments such as the one being considered for SWOT may change this perspective by measuring directly two-dimensional maps of dynamic topography.

A question being asked today is : What impact will the new altimetric missions planned for the coming years have on the control of the ocean circulation through data assimilation in ocean models? A secondary question concerns the extent to which complementary in-situ observations will be necessary. Several earlier studies have investigated the impact of altimetric data assimilation at mid-latitudes (Verron *et al.*, 1996), in coastal regions (Mourre *et al.*, 2006) and in operational systems (Tranchant *et al.*, 2008), and have demonstrated the usefulness/necessity of multi-satellite configurations.

In the present study, we propose to evaluate the impact of the future altimetric satellite missions, JASON2, SARAL, and SWOT, on the control of the tropical Atlantic Ocean circulation through data assimilation. We will also discuss the need for complementary in-situ observations. The Observing System Simulation Experiments (OSSEs) strategy is used. Investigations are therefore conducted by performing twin experiments with a tropical Atlantic configuration of an ocean general circulation model (OGCM). Several scenarios are considered for the multi-satellite observing system, and single-satellite situations are also considered. A dataset of observations is built from each scenario to be assimilated so that monitoring of the 3D circulation for each scenario can be evaluated and compared to that of other scenarios.

After a description of present and future altimetric satellite missions in section 1, the model and the assimilation method are described in sections 2 and 3. Section 4 introduces the OSSEs performed. In section 5, we present the results and discuss the impact of future scenarios, as a complement to SST and other in-situ observations, in controlling the tropical Atlantic Ocean.

C.1 Present and future altimetric missions

Three main orbits are currently used by altimetric satellites : a 10-day orbit with a 66° inclination (ORBIT1), chosen for TOPEX/POSEIDON and the JASON generation satellites (JASON1 and JASON2 so far), a 17-day orbit with a 108° inclination (ORBIT2), chosen for GEOSAT and its followers (GFO so far), and a 35-day orbit with a 98.5° inclination (ORBIT3), chosen for ERS and ENVISAT and being considered today for SARAL. Several orbits are being discussed for the future SWOT mission : one possible orbit considered in this paper is based on a 21-day repeat period and a 78° inclination (ORBIT4). Let us note that the length of the cycle and the inclination are not the only parameters to be taken into consideration for the orbit. An orbit is also characterised by sub-cycles which impose a secondary time-space subsampling of observations and can considerably influence results.

At the moment, ERS2 and ENVISAT on ORBIT3, GFO on ORBIT2, and JASON1 on

ORBIT1 are still flying, but the performance of three of them is declining because of aging. Thus ERS2 provides data only when the satellite is close to an ESA station (and consequently not in the tropical Atlantic) because of altimeter lapses. GFO also provides impaired data, while ENVISAT has encountered some problems with the nominal altimeter. Currently, JASON1 is the most reliable satellite providing altimetric observations although some redundant components on the platform have already been used.

The next missions are JASON2 on ORBIT1, launched very recently, and SARAL on ORBIT3 in 2010, allowing an accurate configuration based on two or three (if JASON1 still flying) satellites. The TOPEX/POSEIDON and JASON series are managed as part of a cooperation programme between CNES and NASA. The SARAL satellite, with the Ka-band AltiKa altimeter on board, is being jointly developed by ISRO and CNES. In 2012, the European Sentinel3 satellite project led by ESA should also provide altimetric measurements using a polar orbit that has not yet been completely defined. Certain other projects whose main purpose is not ocean altimetry could also provide further altimetric measurements useful for ocean purposes (e.g. CRYOSAT2 with a yearly repeat period).

In the next decade, it is hoped that the SWOT (Surface Water Ocean Topography) mission will become operational, providing measurements over a 180 km wide swath along the satellite track (*Alsdorf et al.*, 2007). Consequently, it should be possible to map the SSH gradient in both directions over the swath. One possible orbit planned for SWOT is ORBIT4 with a 21-day repeat period (Nerem, personal communication) and a 1-day subcycle corresponding to an eastward drift of 152 km per day .

The error budget on altimetric measurements includes in short the uncertainties relating to radar measurements and signal corrections and inaccuracies in our knowledge of the orbit position. With a satellite such as JASON2, the precision of the orbit position should be close to 1cm RMS, and the total error on the altimetric signal should be less than 2.5 cm RMS. For a satellite such as SARAL, the precision of the orbit should be a little less favourable (2 cm RMS), but other inaccuracies should be similar to those for JASON2. For wide-swath altimetry, additional errors will be caused by the roll of the altimeter affecting observations further away from the nadir. At the extremity of the swath, 90 km from the nadir, the total error should be about 5-6 cm RMS (*Rodriguez et Pollard*, 2003).

In the present study, we simulate observations from the existing JASON1, JASON2 and ENVISAT satellites, and from the future satellites SARAL and SWOT and a supposedly GFO-type satellite. The assumptions on error budget are described in section 4.

C.2 Modelling of the tropical Atlantic ocean

C.2.1 Model

A regional model configuration for the Tropical Atlantic ocean is extracted from the global DRAKKAR configuration (*Barnier et al.*, 2008) implemented with the NEMO model (*Madec et al.*, 1998). Resolution is 0.25° in longitude and latitude, with 46 z-coordinate vertical levels, a resolution that is sufficient to represent the mesoscale circulation at these latitudes. Domain limits are 15°S to 17.5°N and 60°W to 15°E , and were carefully chosen so as to optimize the control of boundaries in the regional model. The global simulation is used as an embedding environment for the regional tropical Atlantic Ocean allowing the boundary conditions of the internal model to be specified. Note that this is done using full radiative boundaries following *Tréguier et al.* (2001). The DRAKKAR simulation is also used to provide the initial conditions for the regional model. The model is driven by the CORE forcing : a frequency of 6 hours is applied for wind speed, air temperature and humidity, and of 1 month for precipitation. Heat fluxes, evaporation and wind stress are computed with bulk formulas, from SST, air humidity,

air temperature and winds at 10 m above the ocean surface, as described in detail in reference (*Large et Yeager, 2004*).

C.2.2 Dynamic features and assimilation issues

The ocean is by no means a dynamically homogeneous media. This is particularly the case in the tropical Atlantic Ocean where two large regions of quite distinct dynamical properties can be seen. These regions are denoted as the “TIW region”(Tropical Instability Waves region) and the “NBC region”(North Brazil Current region) (Fig. C.1).

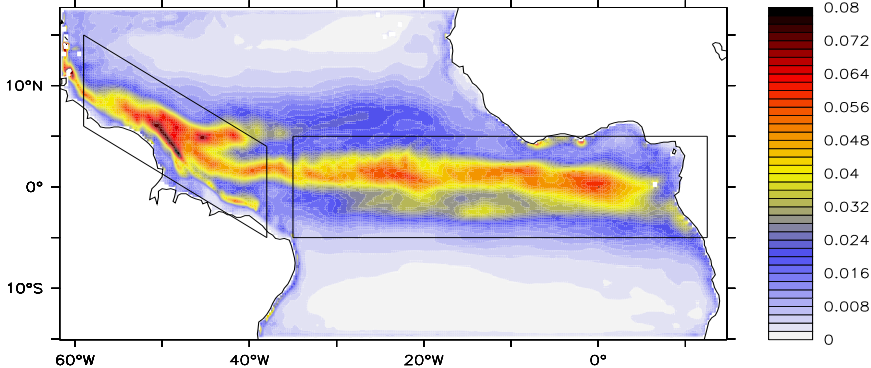


FIG. C.1 – Turbulent kinetic energy (m2.s-2) at 20 meter depth from the reference simulation, computed over five years. Black contoured zones represent the NBC region (left) and the TIW region (right) considered in the study.

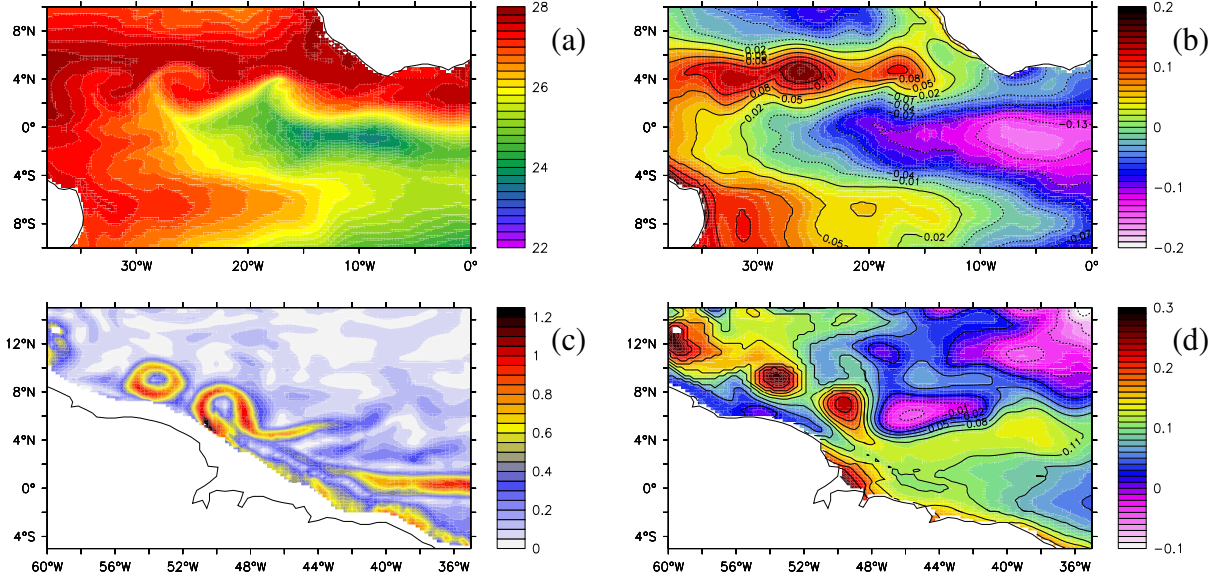


FIG. C.2 – (a) : Sea Surface Temperature (°C) from the reference simulation showing TIW signatures. (b) : SSH (meter) in the same TIW region. (c) : absolute velocity (meters/second) from the reference simulation at level 10 (93 meters depth) showing NBC rings signature. (d) : SSH (meter) in the same NBC region.

In the TIW region, near the equator, tropical instability waves generated by the shear between the northern South Equatorial Current (nSEC) and the Equatorial Undercurrent (EUC)

propagate westward with a phase speed of about 40 cm/s. The first panel of Fig. C.2 shows some instantaneous signatures of TIWs on the sea surface temperature : three waves are particularly visible. The signature of a TIW on SSH is of the order of 5-10 cm, that is smaller than mid-latitude eddy SSH amplitudes. It should also be noted that this amplitude is not much larger than the altimeter accuracy. Many studies have described and analysed TIWs (*Polito et al.*, 2001; *Jochum et al.*, 2003; *Caltabiano et al.*, 2005). These waves have a significant influence on advective heat fluxes (*Menkes et al.*, 2006) and were shown to be strongly related to ocean ecosystems (*Gorgues et al.*, 2005). Faithful representation of TIW in models is therefore of key oceanographic importance. This is difficult to realize in practice especially with regard to their onset in due time since waves are strongly dependent on wind forcing (*Vialard et al.*, 2002), the knowledge of which is rather poor. Along-track SSH assimilation is quite useful in this regard for improving model representation of TIW onset and controlling their propagation.

The NBC region is characterized by a strong level of turbulence. In particular, the North Brazil Current and its retroflexion generates strong anticyclonic vortices (rings) that propagate northwestward with a phase speed of 8-16 cm/s and that have a signature on SSH that is typically of 10 to 20 cm (see Fig. C.2 b). Causes of the formation and propagation of rings are analysed in *Hong* (1996), while their seasonal variability is studied in *Barnier et al.* (2001) and some precise ring classifications are made in *Fratantoni et al.* (1995b). According to *Goni et John* (2001), each NBC ring may be responsible for 1 Sv (over one year) of direct mass transport across the equatorial-tropical gyre boundary. With 5-6 rings per year, rings may contribute to more than 40% of the transport from the equatorial to the subtropical gyre. Faithful representation of rings in models is also difficult to realize in practice because their generation and circulation are quite chaotic and therefore strongly dependent on accurate initial conditions. Controlling ring positions and structures raises an interesting issue with regard to data assimilation. Note that in the NBC region, the barotropic signal is significantly stronger than in the TIW region.

From a data assimilation perspective, the two previous regions raise two different types of problems : (i) for the relatively large-scale features seen in the TIW region predominantly controlled by winds, the role of data assimilation will be first to deal with the uncertainty of external forcings (model error control problem), (ii) in a chaotic turbulent system such as in the NBC region, the role of data assimilation will be above all to control this chaotic behaviour and to properly rephase instability structures and eddies (initialization problem).

C.3 The assimilation system

The assimilation system is based on a sequential scheme that is derived from the SEEK filter introduced by *Pham et al.* (1998b) and presently in use in the MERCATOR operational oceanography centre (*Brasseur et al.*, 2005; *Brasseur*, 2006). The SEEK filter involves in particular a 3D multivariate mode decomposition of forecast/analysis error covariances. A synthesis of the method is presented for example in *Brasseur* (2006). This sequential method has already been used and assessed in the tropical oceans (*Verron et al.*, 1999; *Gourdeau et al.*, 2000). As in any sequential data assimilation method, analysis is performed by sequentially applying some correction to the model forecast using information obtained from the data ; the corrections are actually made by taking into account system error statistics in the optimal way. In general, the correction is applied to the full 3D model state vector (temperature, salinity, velocity). In the TIW region, the correction of temperature and salinity often appears to be sufficient because of the fast/efficient baroclinic adjustment. But in the NBC region, the correction of velocities is essential to control the barotropic component. In practice, and for both regions, the analysis step is carried out every three days from the observations gathered at the end of each assimilation cycle.

The parametrization of error covariances is a primary factor affecting efficiency of the assi-

milation process. In particular, selecting the appropriate reduced space, which adequately represents the true error structure, is a key element in the success of the application of a reduced order Kalman filter. For this reason, since the nature of the error is essentially different in the TIW region and the NBC region, the forecast error covariance matrix P_f must be parameterized differently for the two regions. In the TIW region, an ensemble procedure is used to identify the reduced rank forecast error covariance matrix. This matrix is built using an ensemble of model state anomalies arising from perturbed winds during the current cycle. The reason for this computing method is the sensitivity of TIWs to wind forcing which, as stated earlier, is the main source of error for the TIW forecast. This ensemble of anomalies appears to be the appropriate way to access the parameterization of the forecast error. The sensitivity experiments conducted show that 10 error modes were always sufficient to control TIW propagation. In the NBC region, the covariance of model variability is used to parametrize the forecast error covariance matrix, since the main source of error here is the initial condition for the eddy field. P_f is computed using the first 60 EOFs of an ensemble of 720 model states from a five-year long simulation. This is a common method which has been useful in controlling such turbulent and chaotic dynamics (*Parent et al.*, 2001).

With regard to the parametrization of the covariance of observation errors, a diagonal matrix is used that is consistent with the simulated observational error in the satellite scenarios. In order to prevent the data from having a spurious influence at remote distances, a local version of the SEEK filter is implemented following *Testut et al.* (2003b). Each water column is influenced by observations located in a bubble of influence; the horizontal optimal size for each region was determined by an ensemble of analyses made with various bubble sizes. Optimal bubble size was found to be 6° of longitude by 4° of latitude for the TIW region, and 2° of longitude by 2° of latitude for the NBC region. Clearly, the anisotropic scales of the dynamics in the TIW region lead to this anisotropic bubble size, unlike the situation in the NBC region where correlation scales are more or less isotropic.

C.4 OSSE

The previous model/data assimilation system is used to perform OSSEs by building an observation dataset from a reference (“true”) simulation REF, and by assimilating them in a control simulation to study the convergence toward the REF simulation. Each further assimilation experiment is performed over a period of one year.

C.4.1 Synthetic observation datasets

The reference simulation, REF, providing the true ocean for further validation of OSSEs, is performed starting from an initial condition chosen as January 1st, 1999 and is integrated over three years. Only the third year (2001) is considered later in the diagnostic study. Synthetic observations are extracted from REF in 2001, providing supposedly true ocean observations : first for along-track SSH observations from the future satellites according to various scenarios but also with SST and in-situ profiles of temperature and salinity.

SSH

Altimetric observations are generated from the model equivalent of along track satellite observations, using a bi-linear interpolation with four model grid points. For a nadir-observing satellite simulation, one observation is extracted every 10 km along the virtual track. For the wide-swath satellite simulation, one observation is extracted every 10 km along the middle track and every 10 km in the transverse swath direction, orthogonal to the track. The simulated wide

swath is 180 km in width, corresponding to 18 points in the orthogonal direction. Fig C.3 shows an example of SWOT observations gathered over three days and localized on the model grid, compared to a sequence of 3 days of JASON2 data. It should be noted that day after day, SWOT observations are spatially shifted 152 km eastward (due to the specificities of ORBIT4 subcycles), which is why observations after three days appear like a single 485 km-large swath. This provides a remarkable view of the two components of the SSH gradient.

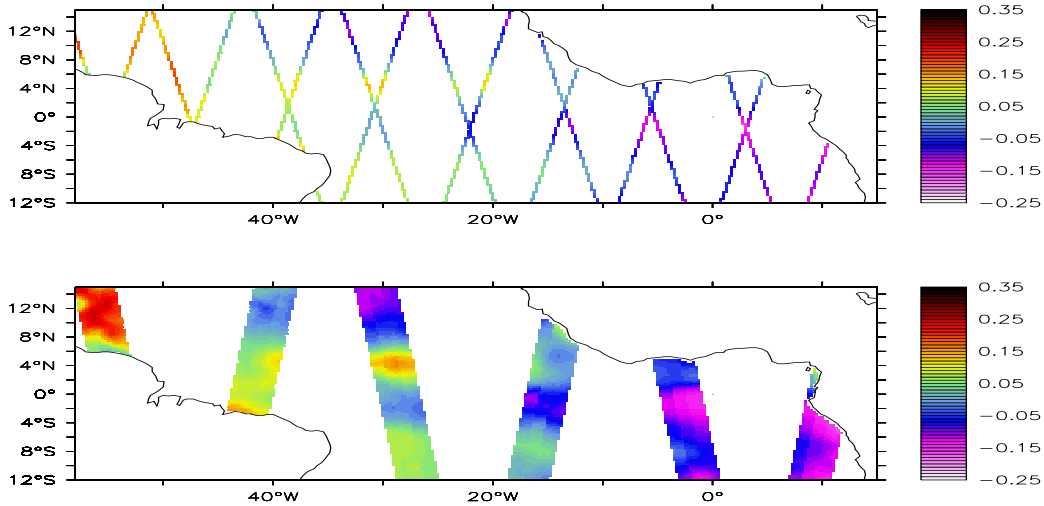


FIG. C.3 – Along-track SSH (meters) extracted from the REF simulation from day 30 to 33 (during three days). Upper panel : Envisat. Lower panel : SWOT.

For simplicity, we did not introduce any differences between the error budget of the various nadir satellites investigated and assumed this error was simply a white noise of 2.5 cm RMS. A SWOT instrumental error is constructed by adding a roll error noise to the previous one. The fact that the roll of the altimeter will increasingly affect measurements away from the nadir is indeed a limitation of SWOT . It was decided to simulate roll error by a random signal, varying linearly from the nadir to the extremity of the swath and varying spatially along the tracks with a correlation scale of 200 km (corresponding to a typical 30 s oscillation). The standard deviation is set to 6 cm at the extremity of the swath. An example of the simulated roll error is shown on Fig. C.4

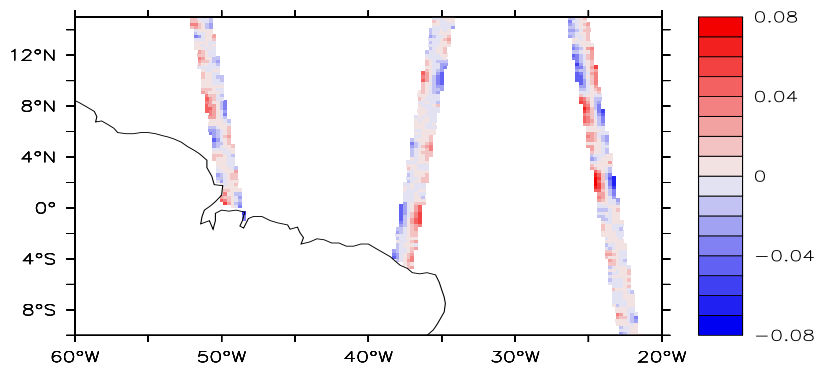


FIG. C.4 – Simulated roll error (meters) for SWOT observations at day 1, located on the model grid points.

SST and in-situ observations

As mentioned earlier, SSH data are sometimes complemented by other observations such as in-situ profiles of temperature and salinity and SST observations. It was shown indeed (*Parent et al.*, 2001), for example, that in-situ data were necessary to palliate the lack of knowledge of the mean reference dynamic topography and thus to prevent some bias in the thermal structure. In any case, it is in this way that altimetry is used in operational ocean forecasting systems together with any other available data. The full SST data from REF is used. But for temperature and salinity in depth, only a 5° by 2.5° network of T and S profiles from 0 to 200 m is used. This sampling density is similar to that of the ARGO float deployment.

C.4.2 Construction of the twin experiments

Twin experiments are often built by assuming that reference and control simulations are strictly consistent : all model parameters including external forcing are strictly the same. They may differ in their initial conditions and in this case data assimilation studies aim at solving an “initialization problem”. They may also differ in the parameterization of observation errors that are introduced in the data.

Other types of twin experiments, sometimes known as “cousin” experiments, assume that the control simulation is also affected by some modelling error, either for internal parameters (mixing for example) or for the external forcing parameters (wind forcing for example). Initialization errors and observations errors may also affect “cousin” twin experiments.

Given our previous remarks on the TIW and the NBC regions, classical “twin experiments” are relevant for the NBC region while “cousin experiments” are more relevant for the TIW region.

In the following paragraphs, further information is given on the various twin experiments carried out. In all cases, the reference simulation (REF) is kept unchanged.

Cousin experiments for the TIW region (TIW-EXP)

In this series of experiments, wind forcing from the control run TIW-EXP differs from the REF one in that a perturbation is added so that TIWs become structurally out of phase. Correlation scales of the random perturbation added are 5° in longitude, 3° in latitude, and 6 days in time. Note that the implementation of bulk formulas is still relevant in this case because evaporation will be consistent with the perturbed wind field. Initial conditions are the same as REF, so that only model error is present and due to the wind.

This TIW-EXP experiment is of particular interest from June to September when the shear between nSEC and EUC generates strong TIWs. When assimilation is performed in TIW-EXP, runs for the different scenarios have the names of the satellite missions.

Twin experiments for the NBC region (NBC-EXP)

In this series of experiments, only the initial condition of the control run NBC-EXP is perturbed, so that Brazil rings have different positions and structures. The perturbed initial condition is obtained by adding an infinitesimal perturbation to the REF state on the first of January 1999. One year later, at the beginning of the experiment on January 1st 2000, the initial condition is completely decorrelated from REF. All NBC-EXP experiments run from January to December 2000 with the same CORE forcing as REF. When assimilation is performed in NBC-EXP, runs for the different scenarios have the names of the satellite missions.

C.5 Results and discussion

C.5.1 Diagnostics

Results of the assimilation experiments are examined by using the ensemble of forecast estimates at the end of each assimilation cycle. The choice of diagnostics to assess these results largely depends on the objectives: here, we are clearly interested in operational oceanography with the primary objective being to control the ocean “weather” at scales ranging from a few days to one year. Classically, there are at least three levels of data assessment: (i) data used for assimilation (generally concerning model state variables), (ii) independent data not used in the assimilation process (also generally concerning model state variables), (iii) higher level variables such as integrated quantities. The various experiments are classified as follows: As stated earlier, experiments in the NBC region are denoted as NBC-EXP, while those in the TIW region are denoted as TIW-EXP. Three reference experiments are considered: the true world denoted as REF, as already mentioned. A case where no SSH is assimilated (but with SST and in situ data) is denoted as NOSSH. A case where all the SSH data (every grid point) are assimilated is denoted as FULLSSH. The latter should in principle show the upper limit of correction that would be obtained from altimetry using the data assimilation technique. Scenarios are just denoted by the name of the satellite: e.g. JASON2, SARAL, JASON2+SARAL (two-satellite case), ...

The scores are computed as percentages as follows:

$$Score(SCENARIO) = \left[1 - \frac{(error\ variance\ of\ SCENARIO)}{(error\ variance\ of\ NOSSH)} \right] \times 100 \quad (C.1)$$

where *SCENARIO* is the assimilated experiment to be evaluated. In these conditions, $Score(NOSSH) = 0$ and $Score(REF) = 100$.

C.5.2 Scenario assessment in the TIW region: TIW-EXP

Propagation of the TIW signature in the runs with SSH assimilation shows that one satellite is able to control the TIW position whereas the in-situ and SST observations are not sufficient. For example, Fig. C.5 compares the NOSSH and JASON2 runs. Clearly, between June and September the TIWs from JASON2 are in phase with REF, whereas this is not the case for NOSSH. The results are similar for any single satellite. But the detailed structure of the TIW is represented much more clearly in a multi-satellite configuration, as can be seen in Fig. C.6. In particular, the temperature field in the upper 200 m is close to the truth when data from two satellites (or one wide-swath satellite) are assimilated.

More quantitative diagnostics show significant differences between the scenarios. Fig. C.7 summarizes the scores for SSH and for the upper layer velocity field. The velocity scores presented are an average of the scores from level 1 to level 13 (160 m depth). Most of the SSH is well corrected with a single JASON2 satellite (score of 77%). A first noticeable result is that among the single-satellite configurations tested, JASON2 has the best score. For the non-observed variable, velocity, the score ranges from 42% for JASON2 to 34% for SARAL, with GFO having an intermediate score (Fig. C.7). Given that the velocity score for FULLSSH is 70%, this shows that more than half of the potential correction of velocity by altimetry is achieved with a single satellite in this TIW region.

The addition of satellites of course improves corrections. While the corrections on observed SSH regularly improve with the number of observations/satellites, the score for velocity improves more rapidly. For example, with a two-satellite configuration, it goes from 77% for the SSH (42% for the velocity) with JASON to 81% for the SSH (50% for the velocity) with JASON+SARAL. Many combinations are possible with two satellites. If they are on the same orbit, the influence of their temporal lag is important, but the influence of their spatial shift is not significant. If

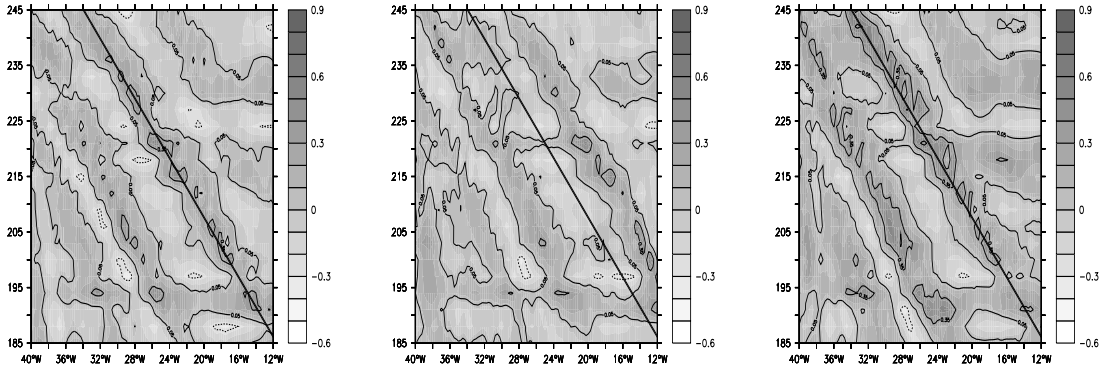


FIG. C.5 – Time-space plot of meridional velocity along the section 2°N , 10°W to 40°W , from day 185 to 245, for REF run (left panel), for NOSSH run (middle panel), and for JASON2 run (right panel). The black line follows a TIW in REF run.

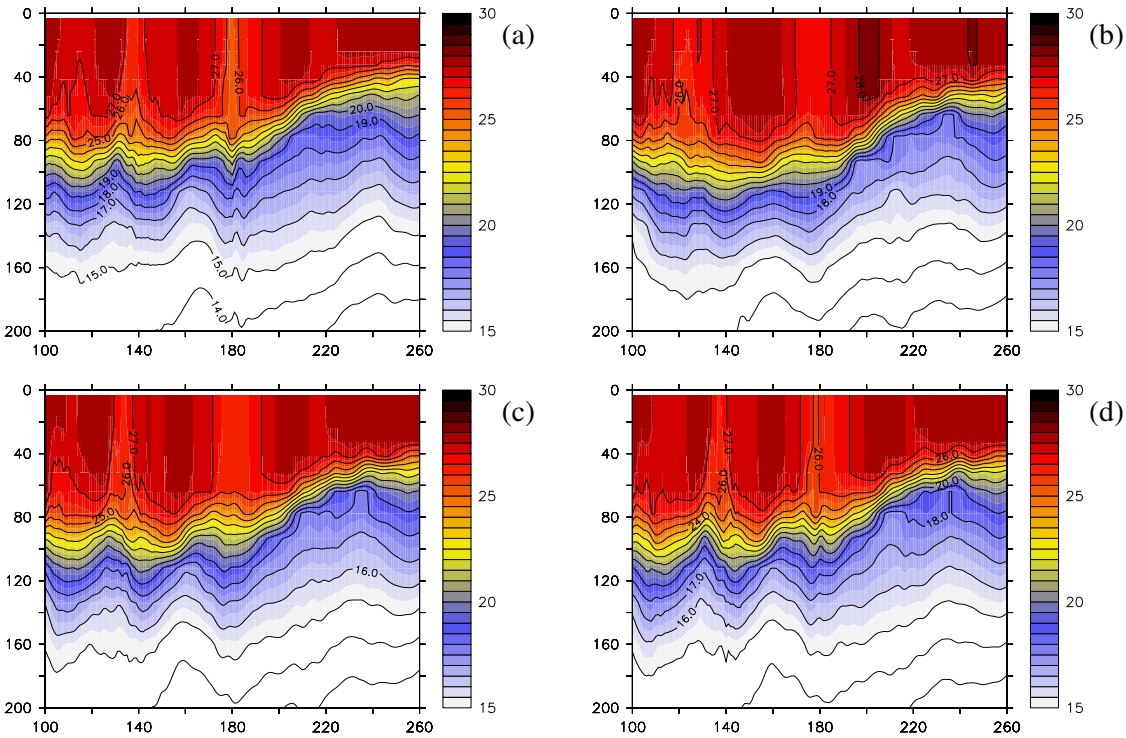


FIG. C.6 – Temperature section at 2.5°N from 40°W to 0°W . (a) :REF run, (b) :NOSSH run, (c) :JASON run, (d) :JASON+SARAL run.

the second satellite is not in the same orbit (e. g. JASON+SARAL and JASON+GFO cases), the influence of the spatial or temporal shifts is not significant over a long period. In fact, the two samplings of the measurement space behave as if the systems are uncorrelated. While the contribution of a single satellite produces a typical correction of 75% (40%) (respectively for SSH and for velocity), the addition of a new satellite provides an additional correction of 5% (12%). Not surprisingly, the best configuration is with two JASON2 satellites. Some three-satellite configurations have also been tested such as two SARAL satellites flying on the same orbit, together with one JASON2. As the two SARAL satellites have the same orbit, temporal and spatial references have an influence. Best results are obtained with a 8.75-day time shift between

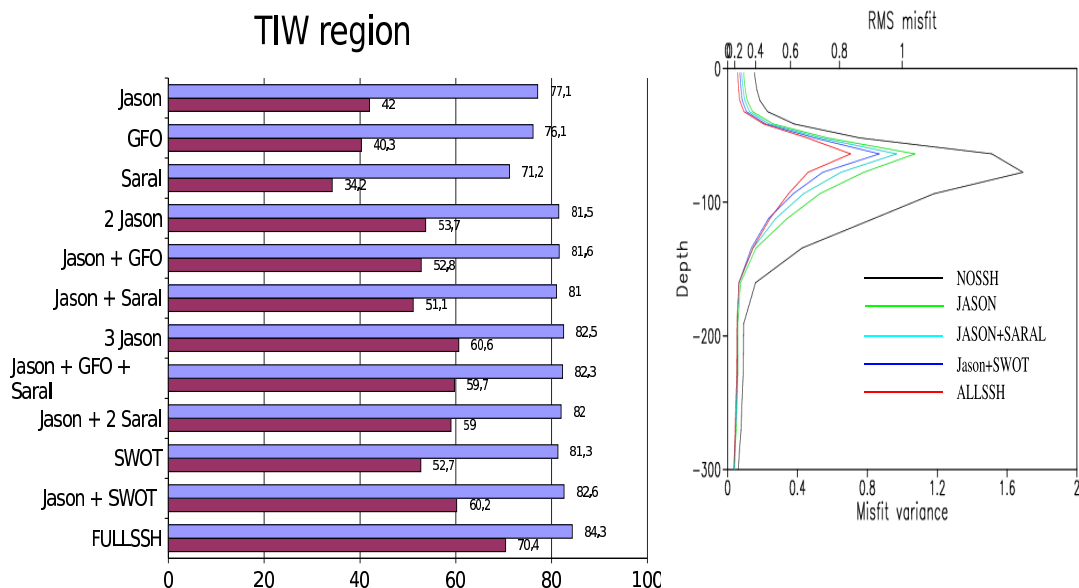


FIG. C.7 – Correction for various scenarios. Left : correction scores in percent for SSH (blue) and for velocities (purple) in the TIW region at 93 m depth. Right : correction score for temperature, in the same region, as a function of depth.

the two satellites, which, not surprisingly, corresponds to a good time-space sampling to observe mesoscale variability according to *Greenslade et al.* (1997). The SSH is not significantly improved but there is a further gain of 8% on velocity. If the third satellite is GFO, results are almost the same. Let us note that the FULLSSH score is only 70% on velocity whereas the three satellites result in a 60% improvement. A large part of the potential altimetric correction through data assimilation on non-observed variables is therefore obtained with three satellites. With SWOT, the scores obtained are about the same as with two satellites. The roll error as implemented in the experiments seems to be well filtered by the assimilation process.

Heat content, a level 3 assessment variable that is of particular importance in the tropical band, is also significantly corrected. The heat content score is 43% for JASON2 and 46% for JASON2+SARAL, whereas the FULLSSH score is (only) 53%. This result means that a large part of the altimetric signal useful for controlling heat content is obtained with a single JASON2 type satellite.

The efficiency of the JASON2 orbit (ORBIT1) in particular, as compared to the ENVISAT and SARAL orbit (ORBIT3), has already been noted in *Mourre et al.* (2006). It may also be observed that the JASON orbit has a time-space sampling well adapted to the time-space scales of the TIW, whereas the SARAL orbit has a less favourable phase lag, particularly because its orbit has a sub-cycle that drifts 160 km westward every three days, which is close to the TIW phase propagation (Fig.08). In short, a single satellite, and preferably JASON2, is efficient in controlling TIW propagation and regional heat content in our OSSEs, but the score for the velocity field (and other level 2 assessment variables) with one satellite is a long way from the FULLSSH score. Additional satellites are therefore required to improve the control of fields not observed directly.

C.5.3 Scenario assessment in the NBC region : NBC-EXP

After a qualitative appreciation of the correction of the Brazil rings with SSH assimilation, we analyse correction scores for observed and non-observed variables as in the TIW region before studying more particularly the volume transport of the North Brazil Current.

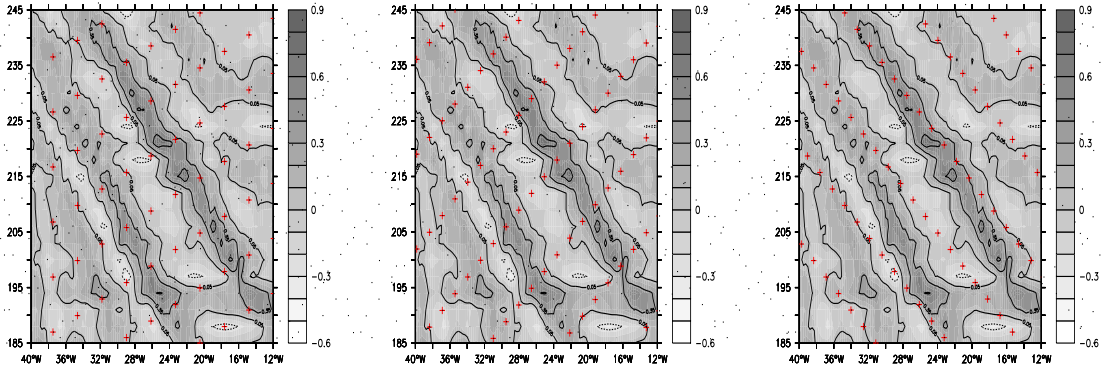


FIG. C.8 – Time-space plots of the meridional velocity (m/s) at 2.5°N in REF run. Red points : location of Jason satellite observations (a), GFO satellite observations (b), and Saral satellite observations (c).

Regarding the Brazil rings, SSH assimilation clearly has a beneficial impact on the control of the horizontal and vertical structure of the rings, while the use of more than one satellite is even more beneficial. Thus in Fig. C.9, when one JASON2 satellite is used, the ring appears similar to that in the REF case and a deepening of the thermocline is clearly observed at the ring location, but neither velocity nor vertical structure is correctly represented. With three satellites or with SWOT, the velocity field is surprisingly well corrected. Every three-satellite configuration gives similar results on the control of the eddy structure. This result can be generalized to all eddy structures seen in this region : with one satellite, the rings are systematically well positioned, but the control of their detailed vertical structure requires three satellites or SWOT.

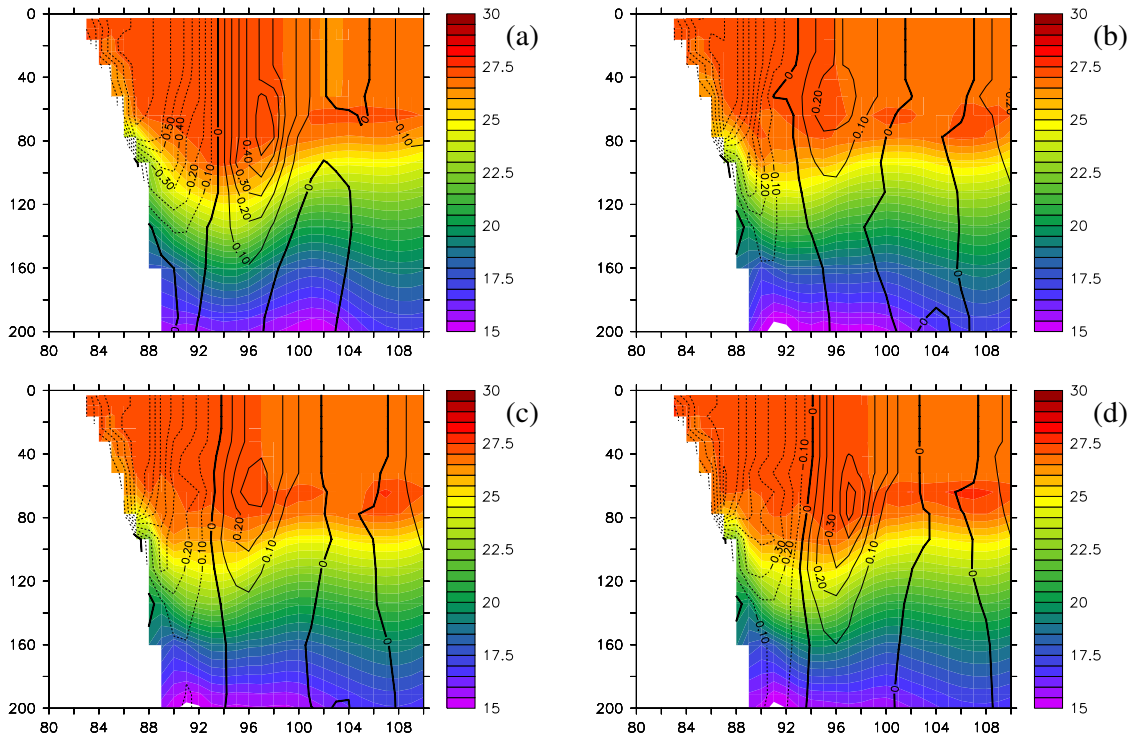


FIG. C.9 – Meridional cross section of the temperature (shaded) and velocity (contours) at 53°W on day 75. (a) :REF run, (b) :NOSSH run, (c) :JASON run, (d) :SWOT run.

The correction scores on level 1 and level 2 assessment variables (Fig. C.10) firstly show that with a single satellite the correction of SSH is lower than in the TIW region. The SSH score is, for example, only 53% for a single JASON satellite (which is still the best among all single-satellite configurations but the difference is less significant). One satellite is not sufficient to satisfactorily control the turbulent field in the NBC region. From a single Jason to a three-satellite configuration, the correction score on velocity increases from 26% to more than 40-42% depending on the satellites (Fig. C.10). Interestingly, the relative gains when adding a second or third satellite to a JASON satellite are more important than in the TIW region. In this NBC region, as in the TIW region, the specific choice of orbit for the additional satellite(s) (to the JASON satellite) is a little importance, except if the orbit is the same.

Another interesting result is the efficiency of SWOT data assimilation. The velocity correction is more efficient than in a classical three-satellite configuration, whereas in the TIW region SWOT was roughly equivalent to a two-satellite configuration.

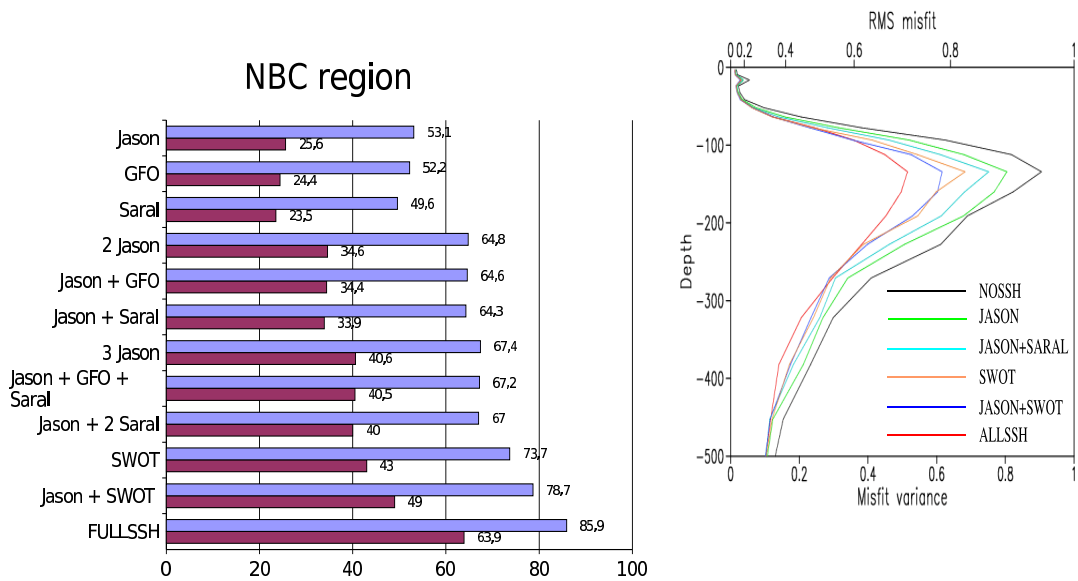


FIG. C.10 – Correction for various scenarios. Left : correction scores in percent for SSH (blue) and for velocities (purple) in the NBC region at 93 m depth. Right : correction score for temperature, in the same region, as a function of depth.

A level 3 assessment variable of key importance in the NBC region is the northward transport across the region. Fig. C.11 shows the time evolution of this transport according to various scenarios. With JASON2, or even for the NOSSH run (i.e. with in-situ + SST observations assimilated), instantaneous transport may be locally corrected. But the average transport over time is worse than the FREE run transport. This is not surprising because we previously showed that with only one satellite the rings were fairly well located but often less intense than the real ones and also not correctly placed on the vertical. With a two-satellite configuration, or with SWOT, the instantaneous as well as the average transport over three months, or over one year, is significantly improved.

To sum up, the JASON2 satellite is still the most efficient as a single satellite configuration. But the need for assimilating data from more than one satellite is particularly strong in the NBC region. A single satellite induces some bias in ring representation, poorly correcting overall transport and flow properties. The SWOT is particularly efficient in this region. Indeed, over a period of three days (length of an assimilation cycle, during which time Brazil rings do not drift significantly), SSH observations are continuous on 480 km wide bands, as can be seen in Fig. C.3

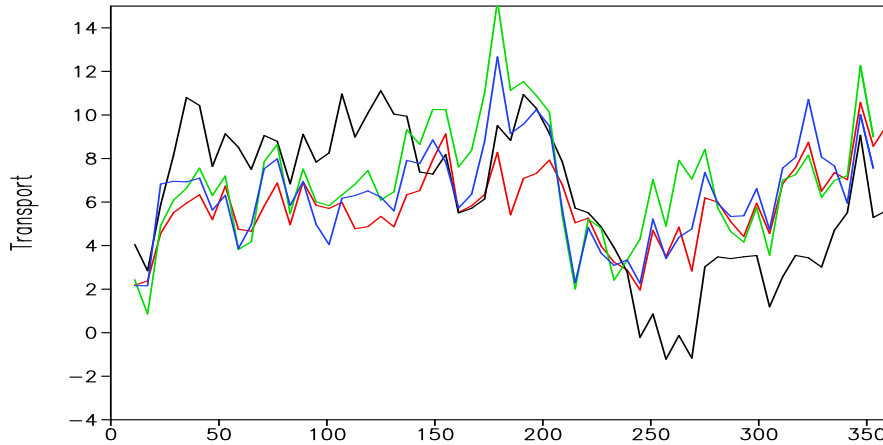


FIG. C.11 – Westward transport (Sv) of the NBC in the upper 100m at 54W. Black : FREE run, red : REF run, green : NOSSH, blue : SWOT.

in the right panel, and the characteristic diameter of a ring is 350 km. Consequently, a ring can be fully observed during one cycle. Moreover, propagation of observation bands, cycle after cycle, is eastward (this is a characteristic of the planned SWOT orbit), or in the opposite direction to the dynamic propagation which is more favourable for a rapid observation of all vortices. In any case, after 21 days (a shorter period than the decorrelation time), all the ocean cover is observed. Knowing that spatial correlation scales between SSH and other model state variables are especially short in this region, any particular ring needs numerous close observations to be corrected. This could explain why SWOT is so efficient.

Conclusions

This study has highlighted that the existence of different dynamical regimes in the tropical Atlantic (the Tropical Instability Waves region and the North Brazil Current region) raises interesting issues for data assimilation from an operational oceanography perspective. Careful control of the Tropical Instability Waves is strongly dependent on having precise knowledge of wind forcing fields (note that such information is impossible to obtain today, especially in real time, so that the issue is not merely a theoretical one). Data assimilation must therefore somehow deal with these uncertainties by taking into account, as far as is possible, other observations to adapt and tune the assimilation system accordingly. This study has pointed to some possibilities for correcting wind forcing. Thus following the example of *Skachko et al.* (2006) and introducing the wind itself in the control vector of the assimilation system may lead to solutions. Control of the instability region of the Brazil current raises different issues. Knowledge of forcing is much less critical since the regional dynamics are more chaotic rather than deterministic. A solution to the problem may perhaps be found in a different manner as soon as enough observations become available : controlling model forcing might be less useful than controlling the turbulent structures themselves. This is significantly more constraining in terms of data sampling but more straightforward from a data assimilation point of view.

By setting up and analysing the results of a number of twin/cousin experiments, we have tried to measure the capacity of a multi-altimetric satellite observation system and a wide-swath satellite to control circulations through data assimilation as a complement to SST and in-situ data. In the TIW region, the position of TIWs and heat content is well controlled with only one JASON2 satellite, in conjunction with in situ observations, but at least one additional satellite is required to provide more detailed knowledge of TIW structures. In our experiments, one single

SWOT mission would be roughly equivalent to a two nadir-observing satellite configuration. In the NBC region, a fact is that even if a perfect altimetric system is available (full coverage of the ocean at every instant without instrumental error), the Brazil rings cannot be easily monitored with our assimilation method (this would probably be the case with any assimilation method) unless SSH observations are complemented by a relatively dense sampling of in situ observations ($2.5^\circ \times 2.5^\circ$), similar to ARGO. Looking at the various altimetric scenarios, it can be seen that more than one nadir-observing satellite is required to control both the ring positions and the vertical structure. The volumic transport of the NBC, a key variable in this region, needs at least two satellites to be improved over a long period, while three satellites or a wide-swath satellite provide an even more significant correction to transport.

Regarding the different satellite scenarios, a number of conclusions may be drawn :

- In a single-satellite configuration, the JASON orbit is found to provide the most efficient sampling. This is particularly true in the TIW region where the SARAL orbit is not well adapted because of unfavourable time-space sampling.
- The choice of orbit of one or two additional satellites is most often of relatively little importance and other criteria can be used (such as coastal oceanography requirements for SARAL)
- The scores of the various scenarios (performance with regard to truth) vary significantly according to the case tested, the variable under consideration... However, some general rules seem to apply :
 - There are some differences between the various one-satellite cases but such differences decrease between the various N-satellite cases when several satellites are used,
 - The addition of a second satellite is more beneficial for non-observed variables (in particular on the vertical) than the observed variable. It is simplistic to put synthetic numbers on this improvement because it is specific to the case/variable under consideration ; a specific scenario study is therefore recommended for each case.
 - The addition of a third satellite is still more favourable for non-observed variables. The advantage of a third satellite was clearly seen in the turbulent eddy-active NBC region.

The data assimilation procedure used in this paper is known to filter out observational errors relatively well as soon as their structure is known with some confidence. The roll error simulated for the SWOT satellite, although of large amplitude (6 cm RMS compared to a 5-10 cm TIW signature or a 15 cm NBC ring signature), was filtered with some success. In most of the cases tested, the SWOT scenarios showed an efficiency equivalent to that of two or three satellites. This is quite encouraging even if more work is required on understanding and modelling the SWOT error budget.

The limits of twin and cousin experiments are known and it is clear that scenario scores would not be exactly the same in a real situation. The main shortcomings of the twin and cousin experiments are : (i) data is synthetic and will remain so even with the addition of some observational errors, (ii) model and data are intrinsically consistent, which is unrealistic even if synthetic errors are introduced for both, (iii) data assimilation techniques are suboptimal. However, twin experiments are expected to provide some indication of the relative performance of the different observation systems investigated, even if absolute values are overestimated. In addition, it is quite clear that any observation system must pass the “twin experiments test” before being a candidate for providing effective control of models in an actual operational system. It is unlikely that an observation system failing to provide satisfactory results in an OSSE would give better results in an actual operational system. On the other hand, although success in an OSSE test is a requirement, it is not a guarantee of efficiency.

Acknowledgments

This work was supported by the CNRS and the CNES. We would also like to acknowledge IDRIS for computing resources.

Annexe D

Efficient parameterization of the observation error covariance matrix for square root or ensemble Kalman filters : application to ocean altimetry

J.M. Brankart,⁽¹⁾ C. Ubelmann⁽¹⁾, C.E. Testut⁽²⁾, E. Cosme⁽¹⁾, P. Brasseur⁽¹⁾ and J. Verron⁽¹⁾

⁽¹⁾Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, Grenoble, France

⁽²⁾MERCATOR-Ocean, Toulouse, France

Accepted in Monthly Weather Review

Abstract

In the Kalman filter standard algorithm, the computational complexity of the observational update is proportional to the cube of the number y of observations (leading behaviour for large y). In realistic atmospheric or oceanic applications, involving an increasing quantity of available observations, this often leads to a prohibitive cost and to the necessity of simplifying the problem by aggregating or dropping observations. If the filter error covariance matrices are in square root form, as in square root or ensemble Kalman filters, the standard algorithm can be transformed to be linear in y , providing that the observation error covariance matrix is diagonal. It is an important drawback of this transformed algorithm often leading to an assumption of uncorrelated observation errors for the sake of numerical efficiency. In this paper, it is shown that the linearity of the transformed algorithm in y can be preserved for other forms of the observation error covariance matrix. In particular, quite general correlation structures (with analytic asymptotic expression) can be simulated simply by augmenting the observation vector with differences of the original observations, like their discrete gradient for instance.

Errors on ocean altimetric observations are spatially correlated, as for instance orbit or atmospheric errors along the satellite track. Parameterizing these correlations adequately can directly improve the quality of the observational update and the accuracy of the associated error estimates. In this paper, the example of the North Brazil current circulation is used to demonstrate the importance of this effect, that is especially significant in that region of moderate ratio

between signal amplitude and observation noise, and to show that the efficient parameterization that we propose for the observation error correlations is appropriate to take it into account. Adding explicit gradient observations also receives a physical justification. This parameterization is thus proved to be useful to ocean data assimilation systems that are based on square root or ensemble Kalman filters, as soon as the number of observations becomes penalizing, and if a sophisticated parameterization of the observation error correlations is required.

Introduction

In atmospheric or oceanic applications of the Kalman filters, the growing number of available observations often leads to a prohibitive cost of the observational update (analysis step), and to the necessity of simplifying the problem. Ad hoc solutions must be found to make the problem numerically tractable. A first option is to synthesize the observational information by aggregating observations in superobservations, or even by dropping the least useful or most redundant measurements (data thinning). Another option is to transform the original algorithm and reduce its computational complexity by taking advantage of prior hypotheses on the error statistics (i.e. on the shape of the state and observation error covariance matrices). Simplifications are thus on the error second order statistical moments (which are anyway only approximately known) rather than on the observations themselves. Of course, these two options are not mutually exclusive; they can interact and complement each other. As explained in *Rabier (2006)*, the need for data thinning can also result from oversimplistic assumptions in the parameterization of the observation error covariance matrix. For instance, with a suboptimal scheme neglecting observation error correlations, decreasing the observation density can help improving the accuracy of the estimation (*Liu et Rabier, 2002, 2003*). In this paper, we propose to reduce the numerical cost of the observational update, by using simplified (but rather general) parameterizations of the observation error covariance matrix. The expected consequence is that, with improved efficiency, together with sufficient accuracy and robustness in the representation of the observation error covariance matrix, this method can substantially reduce the need for data thinning.

If the forecast error covariance matrix is available in square root form, as in square root or ensemble Kalman filters, it is possible to use a modified observational update algorithm (proposed by *Pham et al., 1998a*), whose computational complexity is linear in the number of observations (instead of being cubic in the standard formula), providing that the observation error covariance matrix can be inverted at low cost, as for instance if it is diagonal. It is the purpose of this paper to introduce specific parameterizations of the observation error correlations that preserve the numerical efficiency of that modified algorithm. This can be done (i) by expressing the observation error covariance matrix as the sum of a diagonal and a low rank matrix, or (ii) by applying a linear transformation to the observation vector (and assuming uncorrelated observations in the transformed space). It is interesting to note that, in parameterization (ii), non-square transformation matrices are possible, which means that the observation vector can be augmented with new observations that are linear combinations of the original observations. Both parameterizations are presented in section D.1 of this paper. In section D.2, a specific choice of linear transformation, consisting of augmenting the observation vector with gradients of the original observations, is studied in more detail.

In section D.3, the algorithm is applied to ocean altimetric observations, as simulated by a $1/4^\circ$ model of the Tropical Atlantic Ocean, and focusing on the North Brazil current. It is known indeed that altimetric observation errors are spatially correlated, because of orbit errors or atmospheric correction errors for example. Moreover, these correlations are important to take into account, because they can directly improve the quality of the observational update (especially for the dynamic height gradient, and thus for velocities), and the accuracy of the associated error estimates. In the North Brazil current, the ratio between signal amplitude

(about 5 cm) and typical observational noise (about 4 cm) remains moderate : the signal is marginally observed ; this example is thus appropriate to show the importance of accounting for error correlations to reconstruct the ocean circulation, and to check the validity of our simplified parameterizations.

D.1 Parameterization of the observation error covariance matrix

In data assimilation problems, the observation error $\boldsymbol{\epsilon}$ is defined as the difference between the observation vector \mathbf{y} (size y) and the observation counterpart in the true state \mathbf{x}^t (size x) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}^t + \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{D.1})$$

where \mathbf{H} ($y \times x$) is the observation operator. The specification of the observation error statistics thus always requires defining properly the truth of the problem (*Cohn, 1997; Kalnay, 2003*), which generally amounts to identifying the exact scope of the estimation problem. In atmospheric or oceanic applications, this is usually done by restricting the range of resolved scales in space and time, using for instance a filtering or averaging operator acting on the continuous state of the atmospheric or oceanic system. Observation error thus not only includes a measurement error, but also a representation error that results from this restriction in the scope of the problem. In this paper, it is assumed that the total observation error $\boldsymbol{\epsilon}$ is characterized by a zero mean $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = 0$ (unbiased observations) and a known covariance matrix $\mathbf{R} = \langle \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T \rangle$. Our purpose is to introduce efficient approximate parameterizations of this known observation error covariance matrix for use in square root or ensemble Kalman filters.

D.1.1 Observational update in square root or ensemble Kalman filters

In Kalman filters, the standard formula to compute the observational update increment $\delta\mathbf{x}$ of the model state vector is

$$\delta\mathbf{x} = (\mathbf{H}\mathbf{P}^f)^T(\mathbf{H}\mathbf{P}^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\delta\mathbf{y} \quad (\text{D.2})$$

where $\delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}^f$ is the innovation vector, representing the difference between the observation vector \mathbf{y} (size y) and the model equivalent to the observation in the forecast state vector \mathbf{x}^f (size x), and \mathbf{P}^f ($x \times x$) is the forecast error covariance matrix. The computational complexity (leading behaviour for large x and y) of this standard formula is

$$C_0 \sim \frac{y^3}{6} + xy \quad (\text{D.3})$$

In the computation of C_0 , it is assumed that a linear system is solved to compute $(\mathbf{H}\mathbf{P}^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\delta\mathbf{y}$, with asymptotic complexity $y^3/6$ (for a symmetric matrix). The second terms in C_0 corresponds to the left multiplication by $(\mathbf{H}\mathbf{P}^f)^T$. In addition, the cost of application of the observation operator \mathbf{H} is assumed negligible throughout this discussion. It is negligible for instance if every observation is related to a small number of state variables. If \mathbf{H} is more complex, it is straightforward to add the cost of \mathbf{H} to the computational complexity formulas and transform the conclusions accordingly.

If the forecast error covariance matrix is available in square root form :

$$\mathbf{P}^f = \mathbf{S}^f\mathbf{S}^{fT} \quad (\text{D.4})$$

as in square root or ensemble Kalman filters, the standard formula (D.2) can be transformed into

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{S}^f [\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)]^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{R}^{-1} \delta\mathbf{y} \quad (\text{D.5})$$

as suggested by *Pham et al.* (1998a), using the Sherman-Morrison-Woodbury formula :

$$[\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_{12} \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_{21}]^{-1} = \mathbf{X}_1^{-1} - \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_{12} [\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_{21} \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_{12}]^{-1} \mathbf{X}_{21} \mathbf{X}_1^{-1} \quad (\text{D.6})$$

Formula (D.5) is advantageous with respect to formula (D.2) only if \mathbf{R} can be inverted at low cost. For instance, if \mathbf{R} is diagonal, the asymptotic computational complexity of formula (D.5) (leading behaviour for large x , y and r) is

$$C_1 \sim yr^2 + \frac{r^3}{6} + xr \quad (\text{D.7})$$

where r is the number of columns in \mathbf{S}^f (the maximum rank of \mathbf{P}^f). The first term corresponds to the computation of the $r \times r$ matrix between brackets, the second term, to the solution of the linear system, and the last term, to the left multiplication by \mathbf{S}^f . The main difference between formula (D.5) and formula (D.2) is that the linear system to solve is of size r (complexity $r^3/6$) instead of y (complexity $y^3/6$).

The key advantage of formula (D.5) with respect to formula (D.2) is that the computational complexity C_1 is *linear* in the number of observations y (a property that disappears if a general matrix \mathbf{R} is inverted). With formula (D.5), larger observation vectors become numerically tractable. Asymptotically, for large values of x , y and r , with fixed ratios y/x and r/x (this means in practice that any of these numbers is small with respect to the products of the other two : $x \ll yr$, $y \ll xr$, $r \ll yx$), the gain factor that is obtained by using formula (D.5) instead of formula (D.2) simplifies (only the cubic terms remain) to

$$\frac{C_1}{C_0} \sim 6 \left(\frac{r}{y}\right)^2 + \left(\frac{r}{y}\right)^3 \quad (\text{D.8})$$

Even in the full rank problem ($r \geq x$), formula (D.5) is cheaper than formula (D.2) (asymptotically) as soon as $y/r > 2.53$. But the benefit of formula (D.5) becomes really clear in the small rank problems ($r \ll x$), that result from the application of reduced rank or ensemble Kalman filters. In these problems, it is often useful to reach very small r/y ratios, for which formula (D.5) is by far preferable. Nevertheless, the main drawback of using formula (D.5) is that it leads to assuming diagonal observation error covariance matrix. It is the purpose of this paper to show how it is possible to introduce parameterizations of the observation error correlations that preserve the numerical efficiency of formula (D.5).

It is worth noting here that, in realistic applications, the observational update is often performed locally, by dividing the full model state in subdomains, and by performing a separate observational update for every subdomain using a subset of the global observation dataset (see, for instance, *Anderson, 2003*; *Houtekamer et Mitchell, 1998*; *Ott et al., 2004*; *Tippett et al., 2003*). With local methods, the size of the observation vector can be significantly reduced with respect to a global observational update, thus modifying the computational complexity (D.3) and (D.7) of the algorithms and the gain factor (D.8) that is obtained by using formula (D.5) instead of formula (D.2). The same expressions can however still be applied providing that x and y are defined as the size of the *local* state and observation vectors. In addition, if r is still the number of columns in \mathbf{S}^f , it can usually be set smaller with local methods. The use of low rank \mathbf{P}^f parameterizations (or small size ensembles) is indeed one important reason for which local methods are required (*Houtekamer et Mitchell, 1998*).

D.1.2 Observational update of the error covariance in square root or ensemble Kalman filters

In this section, we examine how the conclusions of the previous section must be modified if the problem requires the observational update of the error covariance. (This is always done if the Kalman filter is not approximated by an optimal interpolation scheme.) In Kalman filters, the standard formula to compute the observational update of the error covariance, corresponding to formula (D.2) is

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^f - (\mathbf{H}\mathbf{P}^f)^T (\mathbf{H}\mathbf{P}^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{P}^f) \quad (\text{D.9})$$

where \mathbf{P}^a is the updated (analysis) error covariance matrix. The computational complexity (leading behaviour for large x and y) of this standard formula is

$$C_0^P \sim \frac{y^3}{3} + xy^2 + x^2y \quad (\text{D.10})$$

The first term corresponds to the symmetric matrix inversion, and the two last terms to matrix multiplications. This complexity includes complexity C_0 if formula (D.2) and (D.9) are applied together because most operations of formula (D.2) are included in formula (D.9).

If the forecast error covariance matrix is available in square root form (D.4), it is shown (Pham *et al.*, 1998a) that the updated matrix, corresponding to formula (D.5) can be obtained in square root form ($\mathbf{P}^a = \mathbf{S}^a\mathbf{S}^{aT}$) using the formula :

$$\mathbf{S}^a = \mathbf{S}^f [\mathbf{I} + (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)]^{-1/2} \quad (\text{D.11})$$

If \mathbf{R} is diagonal, the computational complexity (leading behaviour for large x , y and r) of formula (D.11) is

$$C_1^P \sim yr^2 + \frac{r^3}{2} + xr^2 \quad (\text{D.12})$$

The first term corresponds to the computation of the $r \times r$ matrix between brackets, the second term includes the computation of the inverse matrix and the Cholesky decomposition of the inverse (the cheapest square root), and the last term corresponds to the left multiplication by \mathbf{S}^f . This complexity includes complexity C_1 if formula (D.5) and (D.11) are applied together because most operations of formula (D.5) are included in formula (D.11).

Again, the key advantage of formula (D.11) over formula (D.9) is that the computational complexity C_1^P is *linear* in the number of observations y . However, new cubic terms appear so that the (asymptotic) gain factor is not as simple as (D.8) :

$$\frac{C_1^P}{C_0^P} \sim \frac{\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(\frac{r}{y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{y}\right)^3}{\frac{1}{3} + \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \quad (\text{D.13})$$

However, as soon as x/y remains moderate, the conclusions of section D.1.1 remain valid : the gain behaves proportionally to $(r/y)^2$ for small r/y . And if x/y is large, formula (D.11) is even more favorable since the gain behaves like $(r/y)^2 y/x$ for small r/y . It is also worth noting that with formula (D.11), the additional cost of computing the update of error covariance, with respect to formula (D.5) is usually moderate, behaving at most (for small r/y) like $C_1^P/C_1 \sim 1 + x/y$.

In the ensemble Kalman filter (Evensen *et van Leeuwen*, 1996), the update of the error covariance is performed differently : the ensemble forecast (describing the error covariance) is updated by the application of formula (D.2) to an ensemble of innovation vectors (representing

the difference between the observation vector and each member of the ensemble forecast, perturbed by a random vector of covariance \mathbf{R}). However, the complexities C_0 and C_1 are not simply multiplied by the size r of the ensemble because it is here cheaper to invert explicitly the matrix, rather than solving the r linear systems, so that formula (D.3) transforms to

$$C_0^E \sim \frac{y^3}{3} + 2ry^2 + rxy \quad (\text{D.14})$$

The first term corresponds to the inversion of the matrix $\mathbf{HP}^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$, the second term includes the computation of the matrix $\mathbf{HP}^f\mathbf{H}^T$ from the square root representation and the application of the inverse matrix to the ensemble innovations, and the third term corresponds to the left multiplications by $(\mathbf{HP}^f)^T$ to obtain the ensemble corrections. On the other hand, formula (D.7) transforms to

$$C_1^E \sim 2yr^2 + \frac{r^3}{3} + xr^2 \quad (\text{D.15})$$

The first term includes the computation of the $r \times r$ matrix between brackets and the application of the inverse matrix to the ensemble innovations, the second term corresponds to the inversion of the matrix between brackets, and the last term to the left multiplication by \mathbf{S}^f to obtain the ensemble corrections. New cubic terms appear in (D.14) and (D.15) so that the gain factor is analog to (D.13) :

$$\frac{C_1^E}{C_0^E} \sim \frac{\frac{3}{2} \left(2 + \frac{x}{y}\right) \left(\frac{r}{y}\right)^2 + \left(\frac{r}{y}\right)^3}{1 + \frac{3}{2} \left(2 + \frac{x}{y}\right) \frac{r}{y}} \quad (\text{D.16})$$

However, as soon as x/y remains moderate ($x/y \ll (y/r)^2$), the conclusions of section D.1.1 remain qualitatively the same : the computational complexity C_1^E is linear in y , and for small r/y , the gain (D.16) behaves proportionally to $(r/y)^2$. (If x/y is large, the leading behaviour of C_1^E/C_0^E for small r/y is proportional to r/y instead of $(r/y)^2$, because the leading terms in equations (D.14) and (D.15) become the last terms, proportional to x , whose ratio is equal to r/y .)

D.1.3 Modal parameterization of the observation error covariance matrix

Any observation error covariance matrix can be written in the form :

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}^T)\mathbf{D}^{1/2} \quad (\text{D.17})$$

where \mathbf{D} is a positive definite diagonal matrix that is such that $\mathbf{R} - \mathbf{D}$ remains positive definite. There indeed always exists a real square root $\boldsymbol{\Theta}(y \times q)$ of the positive definite symmetric matrix $\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{R}\mathbf{D}^{-1/2} - \mathbf{I}$. Using formula (D.6), the inverse of \mathbf{R} can be written

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{D}^{-1/2} [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}^T\boldsymbol{\Theta})^{-1}\boldsymbol{\Theta}^T] \mathbf{D}^{-1/2} \quad (\text{D.18})$$

The application of the transformed algorithm, using formula (D.5) or (D.11), with the expression (D.18) of \mathbf{R}^{-1} requires the computation of :

$$(\mathbf{HS}^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{HS}^f) = (\mathbf{HS}^f)^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{HS}^f) - (\mathbf{HS}^f)^T \mathbf{D}^{-1/2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{D}^{-1/2} (\mathbf{HS}^f) \quad (\text{D.19})$$

$$(\mathbf{HS}^f)^T \mathbf{R}^{-1} \delta \mathbf{y} = (\mathbf{HS}^f)^T \mathbf{D}^{-1} \delta \mathbf{y} - (\mathbf{HS}^f)^T \mathbf{D}^{-1/2} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{D}^{-1/2} \delta \mathbf{y} \quad (\text{D.20})$$

where $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ is the Cholesky decomposition of $(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}^T\boldsymbol{\Theta})^{-1}$. The leading behaviour of the additional computational complexity comes from the second term of (D.19) :

$$C_1^R \sim yq^2 + yrq + \frac{5q^3}{6} + rq^2 + qr^2 \quad (\text{D.21})$$

The first term corresponds to the computation of the matrix $(\mathbf{I} + \Theta^T \Theta)$, the second term to the multiplication $\mathbf{A} = (\mathbf{H}\mathbf{S}^f)^T \mathbf{D}^{-1/2} \Theta$, the third term includes the inversion of $(\mathbf{I} + \Theta^T \Theta)$ and the Cholesky decomposition of the inverse, and the two last terms are matrix multiplications ($\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{L}$ and $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$).

Formula (D.5) or (D.11) with parameterization (D.17) for \mathbf{R} can only be advantageous with respect to formula (D.2) or (D.9) (i.e. $C_1 + C_1^R < C_0$, $C_1^P + C_1^R < C_0^P$ or $C_1^E + C_1^R < C_0^E$) if the number of columns q of Θ is small with respect to the number of observations ($q \ll y$), i.e. if the observation error covariance matrix \mathbf{R} is the sum of a diagonal matrix and a low rank matrix. (This is why expression (D.17) is chosen : the diagonal term is necessary to make the matrix regular.) If this can be done, the computational complexity remains *linear* in the number of observations y and the numerical efficiency of formulas (D.5) and (D.11) is preserved.

A further difficulty is that Θ need to be computed. Obviously, it cannot be computed by decomposition of a full size \mathbf{R} matrix (followed by rank reduction), because the computational complexity of such operation is again proportional to y^3 . A possibility (for spatially distributed observations) is to define the correlated part of \mathbf{R} at the nodes of a regular grid (\mathbf{R}^g), compute the square root $\mathbf{R}^g = \Theta^g \Theta^{gT}$ (once for all) on that grid (with rank reduction if possible), and interpolate the modes Θ^g at observations locations (for every spatial distributions of the observations) to obtain $\Theta = \mathbf{H}^g \Theta^g$. Such approximation is valid if the error modes Θ^g contain only scales that are large against the regular grid resolution, i.e. if the \mathbf{R} matrix can be represented by the superposition of a white noise (the diagonal part \mathbf{D}) and a large scale red noise (the correlated part $\mathbf{D}^{1/2} \Theta \Theta^T \mathbf{D}^{1/2}$). In such case, two observations that are close together (much closer than the red noise correlation scales) are assumed fully independent with respect to the white noise, and fully dependent with respect to the red noise.

This parameterization is thus particularly efficient if the typical distance between observations is small with respect to the correlation scales, because, then, the number q of error modes can be made small with respect to the number of observations y ($q \ll y$), and the additional cost C_1^R , given by (D.21), remains tractable (asymptotically for large y) : the linear term in y is only increased to $y(r^2 + q^2 + rq)$ instead of yr^2 . In other situations, this parameterization cannot preserve the efficiency of formulas (D.5) and (D.11) and other solutions must be found (see next sections).

An even more efficient parameterization can be built by using directly a reduced rank parameterization for the *inverse* observation matrix $\mathbf{R}^{-1} = \Theta \Theta^T$, with square root $\Theta(y \times q)$, $q \ll y$. With respect to parameterization (D.17), the linear term in y is reduced to $y(r^2 + rq)$ instead of $y(r^2 + q^2 + rq)$. Such a simplified parameterization is used in the oceanographic applications described in *Brankart et al. (2003)* and *Testut et al. (2003a)*. However, singular parameterizations of \mathbf{R}^{-1} are dangerous because they imply that the null space of \mathbf{R}^{-1} is assumed unobserved (infinite observation error), which may lead to neglecting important observational information. Again, this amounts to building superobservations (presumably the most useful ones) by projecting the original observations on the error modes (the columns of Θ), and dropping everything that is orthogonal to that. In this paper, we prefer to follow our original plan to keep all observations and thus only propose regular parameterizations of \mathbf{R} .

D.1.4 Simulating correlations by linear transformation of the observation vector

The observational update given by formula (D.2) or (D.5) also minimizes

$$J = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{P}^{f-1} \delta \mathbf{x} + (\delta \mathbf{y} - \mathbf{H} \delta \mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\delta \mathbf{y} - \mathbf{H} \delta \mathbf{x}) \quad (\text{D.22})$$

In this equation (as well as in equation (D.25) below), it is the Moore-Penrose pseudo-inverse of \mathbf{P}^f that must be used if the matrix is rank-deficient. In this cost function, we can transform the observation vector by a regular (rank equal to y) linear transformation operator $\mathbf{T} : \delta \mathbf{y}^+ = \mathbf{T} \delta \mathbf{y}$, $\mathbf{H}^+ = \mathbf{T} \mathbf{H}$, in such a way that J remains unchanged, providing that the observation error covariance matrix is also transformed according to

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{T}^T \mathbf{R}^{+^{-1}} \mathbf{T} \quad (\text{D.23})$$

It can be easily verified that the same transformation also leaves unchanged formulas (D.2), (D.5), (D.9) and (D.11). It follows that any observation error covariance matrix \mathbf{R} can be simulated by a diagonal matrix \mathbf{R}^+ in a transformed observation space. An immediate solution is to choose \mathbf{R}^+ as the matrix of eigenvalues of \mathbf{R} and \mathbf{T} as the matrix with the corresponding normalized eigenvectors (so that $\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{R}^+ \mathbf{T}$, with \mathbf{T} unitary and \mathbf{R}^+ diagonal). Obviously, this is not the solution that we are looking for, since the computational complexity of the eigenvalue problem is again proportional to y^3 .

Moreover, for a general linear operator \mathbf{T} , the computational complexity of the application of the operator (for instance to compute $\delta \mathbf{y}^+ = \mathbf{T} \delta \mathbf{y}$) is equal to $y y^+$, where y^+ is the size of the transformed observation vector ($y^+ \geq y$ for a regular transformation). Hence, this complexity can only be linear in y if the structure of \mathbf{T} is simple. It can even become negligible (asymptotically) if every transformed observation (in the vector \mathbf{y}^+) is related to a small number of original observations. (It is the same argument that leads to neglecting the cost of \mathbf{H} , see section D.1.1.) On the other hand, since, with formulas (D.5) and (D.11), the cost of the observational update is linear in y , we have the freedom to imagine a transformation \mathbf{T} that increases the number of observations ($y^+ > y$), without prohibitive consequence on the numerical cost. Essentially, as soon as \mathbf{T} is known and is simple enough, the same computational complexity as formula (D.7), (D.12) and (D.15) applies, with y replaced by y^+ . (Thus the relative cost is multiplied by y^+/y .) An example of such simple transformation, consisting of adding gradient observations to the original observation vector, is examined in section D.2.

In addition, it is interesting to point out that, with uncorrelated observation errors in the transformed observation space, the observational update described by equation (D.2) and (D.9) can be replaced by a repeated application of these formulas, using the observations in \mathbf{y}^+ one by one. The updated \mathbf{x}^a , \mathbf{P}^a obtained at each stage of the sequence are used as background state and background error covariance (\mathbf{x}^f and \mathbf{P}^f) for the next update. This is the serial processing algorithm that is also often used in ensemble filtering to reduce the numerical cost (at the expense of the assumption that observation errors are independent). By constructing an augmented observation vector with a diagonal error covariance matrix, the transformation method proposed in this paper thus also allows the application of this serial algorithm in presence of observation error correlations. On the other hand, in many applications, there can be several observation datasets with independent errors (for instance if they originate from different instruments) so that the matrix \mathbf{R} is block-diagonal. Such observation error covariance matrices can also be easily simulated by this method using separate transformations to the corresponding segments of the observation vector, for instance by augmenting the observation vector with discrete gradients computed inside each observation dataset.

Finally, in order to prepare some of the developments of section D.2, it is useful to present how the transformation problem must be reformulated if the system is continuous instead of being discrete. The continuous model state $x(\xi')$ is assumed observed by a continuous observation $y(\xi)$ through a general linear observation operator \mathcal{H} :

$$y(\boldsymbol{\xi}) = \int \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') x(\boldsymbol{\xi}') d\boldsymbol{\xi}' + \varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{D.24})$$

where $\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ is the observational noise. Then equation (D.22) becomes :

$$J = \int \delta x(\boldsymbol{\xi}') \mathcal{P}^{f(-1)}(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}') \delta x(\boldsymbol{\eta}') d\boldsymbol{\xi}' d\boldsymbol{\eta}' + \int \delta w(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{R}^{(-1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \delta w(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} \quad (\text{D.25})$$

where $\delta w(\boldsymbol{\xi})$ is the observation residual :

$$\delta w(\boldsymbol{\xi}) = \delta y(\boldsymbol{\xi}) - \int \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') \delta x(\boldsymbol{\xi}') d\boldsymbol{\xi}' \quad (\text{D.26})$$

and $\mathcal{R}^{(-1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ is the inverse observation error covariance :

$$\int \mathcal{R}^{(-1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) \mathcal{R}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\zeta} = \delta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{D.27})$$

and $\mathcal{P}^{f(-1)}(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}')$ is the inverse (or pseudo-inverse) forecast error covariance.

If the observation $y(\boldsymbol{\xi})$ is transformed by a general linear transformation \mathcal{T} :

$$y^+(\boldsymbol{\xi}^+) = \int \mathcal{T}(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\xi}) y(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad , \quad \mathcal{H}^+(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\xi}') = \int \mathcal{T}(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\xi}) \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{D.28})$$

J remains unchanged if

$$\mathcal{R}^{(-1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int \mathcal{T}(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\xi}) \mathcal{R}^{+(-1)}(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\eta}^+) \mathcal{T}(\boldsymbol{\eta}^+, \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\xi}^+ d\boldsymbol{\eta}^+ \quad (\text{D.29})$$

If the observation error is assumed spatially uncorrelated $\mathcal{R}^+(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\eta}^+) = \mathcal{R}^+(\boldsymbol{\xi}^+) \delta(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\eta}^+)$, this last formula simplifies to

$$\mathcal{R}^{(-1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int \frac{\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\xi}) \mathcal{T}(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\eta})}{\mathcal{R}^+(\boldsymbol{\xi}^+)} d\boldsymbol{\xi}^+ \quad (\text{D.30})$$

Given the transformation operator $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi}^+, \boldsymbol{\xi})$ and the observation error variance in the transformed space $\mathcal{R}^+(\boldsymbol{\xi}^+)$, the corresponding observation error covariance in the original space $\mathcal{R}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ can be computed using equation (D.30) together with equation (D.27).

D.2 Simulating correlations by adding gradient observations

D.2.1 One-dimensional problem

If we assume that the observations are distributed spatially along a one-dimensional line, we can think of simulating error correlations along the line by adding gradient observations in the observation vector. Starting with the continuous problem, if $y(\xi)$ is the original observation (where ξ is a curvilinear abscissa along the line), the transformed observation vector is then composed of the original function together with its first derivative :

$$y^+(\xi^+) = \begin{bmatrix} y(\xi^+) \\ y'(\xi^+) \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1(\xi^+, \xi) \\ \mathcal{T}_2(\xi^+, \xi) \end{bmatrix} y(\xi) d\xi \quad (\text{D.31})$$

where $\mathcal{T}_1(\xi^+, \xi) = \delta(\xi^+ - \xi)$ is the identity operator and $\mathcal{T}_2(\xi^+, \xi)$ is the derivative operator. Assuming that $\mathcal{R}^+(\xi^+)$ is spatially homogeneous :

$$\mathcal{R}^+(\xi^+) = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.32})$$

where σ_0 is the observation error standard deviation and σ_1 is the gradient error standard deviation, equation (D.30) can be rewritten

$$\mathcal{R}^{(-1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma_0^2} \int \mathcal{T}_1(\xi^+, \xi) \mathcal{T}_1(\xi^+, \eta) d\xi^+ + \frac{1}{\sigma_1^2} \int \mathcal{T}_2(\xi^+, \xi) \mathcal{T}_2(\xi^+, \eta) d\xi^+ \quad (\text{D.33})$$

Using equation (D.33), the definition of \mathcal{T}_1 and \mathcal{T}_2 , and taking benefit of the homogeneity of the solution $\mathcal{R}(\xi, \eta) = \mathcal{R}(\rho)$ with $\rho = \xi - \eta$, equation (D.27) transforms to

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \mathcal{R}(\rho) - \frac{1}{\sigma_1^2} \mathcal{R}''(\rho) = \delta(\rho) \quad (\text{D.34})$$

whose solution is

$$\mathcal{R}(\rho) = \frac{\sigma_0^2}{2} \exp\left(-\frac{|\rho|}{\ell}\right) \quad \text{with} \quad \ell = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \quad (\text{D.35})$$

Adding gradient observations in the observation vector is thus *equivalent* to assuming that the observation error correlation decreases exponentially with the distance $|\rho|$, with a decorrelation length ℓ equal to the ratio between observation error and gradient error standard deviations (while the observation error variance is divided by 2).

The discrete problem is similar to the continuous problem, except that no explicit solution can be found analytically. Assume that observations y_i are available along the line, at abscissas $\xi_i, i = 1, \dots, y$, and that we add to this observation vector, observations of the discrete gradient (left difference)

$$\Delta y_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} \quad , \quad i = 2, \dots, y \quad (\text{D.36})$$

The size of the new observation vector is thus $y^+ = 2y - 1$, and the transformation is

$$\mathbf{y}^+ = \mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (\text{D.37})$$

where \mathbf{T}_1 is the identity matrix, and $\mathbf{T}_{2,ij} = \frac{\delta_{ij} - \delta_{i-1,j}}{\xi_i - \xi_{i-1}}$. From this, it is easy to compute the observation error matrix \mathbf{R} on \mathbf{y} corresponding to a diagonal observation error matrix \mathbf{R}^+ on \mathbf{y}^+ using equation (D.23). If \mathbf{R}^+ is homogeneous :

$$\mathbf{R}^+ = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{D.38})$$

and if the observations are regularly distributed ($\xi_i - \xi_{i-1} = \Delta\xi \forall i$), it follows that

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_1^2 \Delta\xi^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.39})$$

Equation (D.39) is a consistent discretization of equation (D.33) (on a limited domain of size $(y - 1)\Delta\xi$, with Neuman homogeneous boundary conditions), except for a factor $\Delta\xi/\ell$ in the discretization of the Dirac function, so that equation (D.35) provides the asymptotic solution of (D.39) (multiplied by $\ell/\Delta\xi$) as $\Delta\xi \rightarrow 0$ and $y\Delta\xi \rightarrow \infty$.

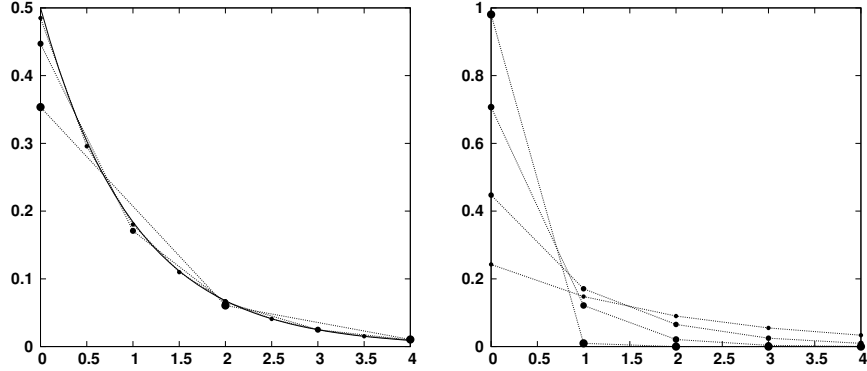


FIG. D.1 – Observation error covariance as a function of the distance ρ , as obtained numerically by inversion of the tridiagonal matrix given by equation (D.39) (for $\sigma_0 = 1$ and different values of $\ell/\Delta\xi$). The solution is drawn (dotted curves) for $\ell = 1$ and decreasing $\Delta\xi = 2, 1, 0.5$ (left panel); and for $\Delta\xi = 1$ and decreasing $\ell = 2, 1, 0.5, 0.1$ (right panel). Larger bullets correspond to smaller $\ell/\Delta\xi$. On the left panel, the discrete solutions are multiplied by the factor $\ell/\Delta\xi$, to show the convergence to the continuous solution given by equation (D.35) (solid curve).

Figure D.1 shows the solution of equation (D.39) computed numerically (by inversion of a tridiagonal matrix) for $\sigma_0 = 1$ and different values of $\ell/\Delta\xi$, as compared to the continuous solution (D.35). The solution is drawn for $\ell = 1$ and decreasing $\Delta\xi$ (left panel), showing the convergence towards the exponential decorrelation as $\Delta\xi \rightarrow 0$; and for $\Delta\xi = 1$ and decreasing ℓ , showing how small correlation length scales (smaller than the observation resolution $\Delta\xi$) are parameterized with this approach.

Anticipating possible mistakes in the applications, it is useful to examine the problems that occur if we *replace* the original observations by gradient observations (instead of *adding* gradient observations, as suggested in this paper), and assume a diagonal error covariance matrix in this transformed space. In order to make the transformation regular, we keep the first observation of \mathbf{y} as first element of \mathbf{y}^+ : $y_1^+ = y_1$ (with error variance σ_0^2), and then use the observation differences as next elements : $y_i^+ = y_i - y_{i-1}, i = 2, \dots, y$ (with error variance $\sigma_1^2 \Delta\xi^2$, assuming a regular distribution). The transformation matrix is thus square ($y^+ = y$) and regular, and can be inverted :

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.40})$$

(Each original observation y_i is the sum of the first i elements of \mathbf{y}^+ , the first observations plus the sum of the $i - 1$ first differences until y_i is reached.) Since \mathbf{T} is square and regular, (D.23) can be inverted explicitly :

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{R}^+ \mathbf{T}^{-1} \quad \text{with} \quad \mathbf{R}^+ = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{D.41})$$

so that the elements of \mathbf{R} are

$$R_{ij} = \sigma_0^2 + \left(\frac{i+j}{2} - \frac{|i-j|}{2} \right) \sigma_1^2 \Delta \xi^2 \quad (\text{D.42})$$

It follows that the resulting error variance $R_i = \sigma_0^2 + i\sigma_1^2 \Delta \xi^2$ increases linearly with the distance with respect to the reference observation. (Of course, the increase can be reduced by placing the reference observation in the middle of the line, or by using the mean of the observations, but the effect remains essentially the same.) Hence, assuming independent errors on the observation differences means that their error variances ($\sigma_1^2 \Delta \xi^2$) adds up to form the error variances on the original observations y_i . Even if the errors on the gradient are assumed small, such a transformation is inappropriate because it leads to large errors on the original variable.

D.2.2 Two-dimensional problem

In the same way, if we assume that the observations are distributed spatially over an n -dimensional manifold, error correlations along the manifold can be simulated by adding gradient observations in the observation vector. The continuous problem is formally identical with several dimensions, except that $\boldsymbol{\xi}$ is an n -dimensional vector of curvilinear coordinates, and \mathcal{T}_2 is the n -dimensional gradient, so that equation (D.34) becomes

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \mathcal{R}(\rho) - \frac{1}{\sigma_1^2} \Delta \mathcal{R}(\rho) = \delta(\rho) \quad (\text{D.43})$$

where Δ is the n -dimensional Laplacian operator and $\rho = \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\|$ is the Euclidean distance. Equation (D.43) stands for the homogeneous and isotropic problem, but it is straightforward to introduce inhomogeneity or anisotropy by a nonlinear change of the $\boldsymbol{\xi}$ coordinates. In two dimensions, the solution of equation (D.43) is

$$\mathcal{R}(\rho) = \frac{\sigma_0^2}{2\pi} K_0 \left(\frac{\rho}{\ell} \right) \quad \text{with} \quad \ell = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \quad (\text{D.44})$$

where K_0 is the second kind modified Bessel function of order 0. It can indeed be easily verified (using the properties of K_0 in *Abramowitz et Stegun*, 1970) that (D.44) is the solution of the homogeneous equation (D.43) (i.e. $\delta(\rho)$ replaced by 0) everywhere except at the origin, and that the coefficient $\sigma_0^2/2\pi$ is scaled so that the logarithmic singularity of (D.44) at $\rho = 0$ has the right amplitude to be the solution of (D.43) (viewed as a Green equation, see *Morse et Feshbach*, 1953, chapter 7).

The two-dimensional discrete problem is also similar to the one-dimensional version. We assume that the observations y_{ij} are available on the two-dimensional surface at the nodes of a grid, with coordinates ξ_{ij}, η_{ij} , $i = 1, \dots, y_1$, $j = 1, \dots, y_2$ (where y_1 and y_2 are the number of rows and columns of the grid), and that we add to the observation vector, observations of the two components of the discrete gradient (left difference) :

$$\Delta_1 y_{ij} = \frac{y_{ij} - y_{i-1,j}}{\|\boldsymbol{\xi}_{ij} - \boldsymbol{\xi}_{i-1,j}\|} \quad \text{and} \quad \Delta_2 y_{ij} = \frac{y_{ij} - y_{i,j-1}}{\|\boldsymbol{\xi}_{ij} - \boldsymbol{\xi}_{i,j-1}\|} \quad (\text{D.45})$$

The size of the new observation vector is thus $y^+ = 3y_1y_2 - (y_1 + y_2)$, i.e. almost a factor 3 with respect to the number of original observations ($y = y_1y_2$). The transformation is

$$\mathbf{y}^+ = \mathbf{T}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_{2,1} \\ \mathbf{T}_{2,2} \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \Delta_1 \mathbf{y} \\ \Delta_2 \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (\text{D.46})$$

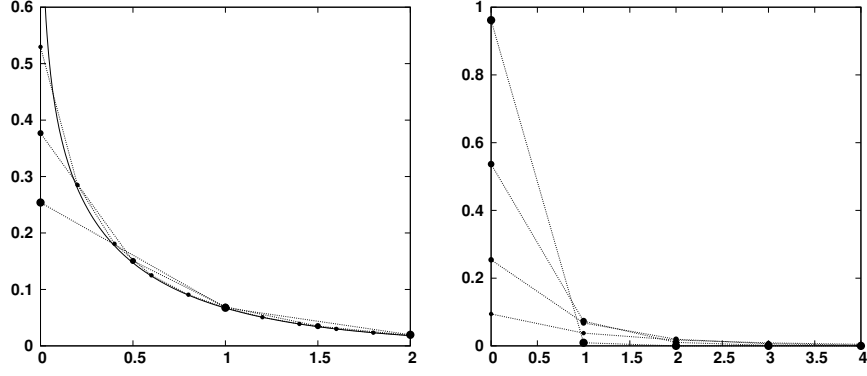


FIG. D.2 – Observation error covariance as a function of the distance ρ (along the grid lines), as obtained numerically for regular and isotropic grid spacings (for $\sigma_0 = 1$ and different values of $\ell/\Delta\xi$). The solution is drawn (dotted curves) for $\ell = 1$ and decreasing $\Delta\xi = 1, 0.5, 0.2$ (left panel); and for $\Delta\xi = 1$ and decreasing $\ell = 2, 1, 0.5, 0.1$ (right panel). Larger bullets correspond to smaller $\ell/\Delta\xi$. On the left panel, the discrete solutions are multiplied by the factor $\ell^2/\Delta\xi^2$, to show the convergence to the continuous solution given by equation (D.44) (solid curve).

where \mathbf{T}_1 is the identity matrix and $\mathbf{T}_{2,1}, \mathbf{T}_{2,2}$ are the discrete gradient operators. Note that each line of the \mathbf{T} operator combines only 1 or 2 observations, so that the cost of application of \mathbf{T} remains always negligible (the computational complexity is equal to $2y$). The application of equation (D.23) with \mathbf{R}^+ homogeneous leads to an expression of \mathbf{R}^{-1} similar to (D.39). However, the matrix is no longer tridiagonal because each element R_{ij}^{-1} is combined with its four neighbours in the grid ($R_{i-1,j}^{-1}, R_{i+1,j}^{-1}, R_{i,j-1}^{-1}, R_{i,j+1}^{-1}$), which cannot always be consecutive in the \mathbf{y} vector. It can be easily seen that this provides a consistent discretization of equation (D.43) in two dimensions (except for a factor $\Delta\xi^2/\ell^2$ in the discretization of the two-dimensional Dirac function), so that equation (D.44) is the asymptotic solution of the discrete problem (with a scale factor $\ell^2/\Delta\xi^2$) as the grid steps tend to zero. Figure D.2 presents the same information as figure D.1 for the two-dimensional problem (with regular and isotropic grid spacings), illustrating the shape of the simulated covariance for $\sigma_0 = 1$ and for various values of $\ell/\Delta\xi$, and showing the convergence towards the analytical solution (D.44) as $\Delta\xi \rightarrow 0$.

D.2.3 Higher order derivatives

The solution of equation (D.43), which is valid for homogeneous and isotropic problems, can also be found in the spectral domain; the solution is then the error power spectrum $\tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{k})$, which is the Fourier transform of the covariance function. In isotropic problems, it only depends on the modulus of the wave vector ($\kappa = \|\mathbf{k}\|$), and the solution is

$$\tilde{\mathcal{R}}(\kappa) = \frac{\sigma_0^2 \ell^n}{1 + \ell^2 \kappa^2} \quad (\text{D.47})$$

Equation (D.47) gives the spectral distribution of the observational error : no error on the small scales ($\kappa \gg 1/\ell$) and constant spectral distribution for the large scales ($\kappa \ll 1/\ell$). The corresponding isotropic covariance function $\mathcal{R}(\rho)$ given by (D.35) and (D.44) (valid for $\ell \neq 0$) can then be found as the inverse Fourier transform (for the one-dimensional function) or the inverse Hankel transform (for the two-dimensional isotropic function) of equation (D.47) (see general formulas 1.0 and 2.0 in Table D.1).

More complex observation error power spectra can be simulated by adding p successive derivatives of the observations in the observation vector (with error standard deviation $\sigma_i, i =$

$1, \dots, p$). Formula (D.47) then generalizes to :

$$\tilde{\mathcal{R}}(\kappa) = \frac{\sigma_0^2 \ell^n}{1 + \sum_i^p \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \kappa^{2i}} \quad (\text{D.48})$$

Adding constraints on the successive observations derivatives (e.g. gradient, curvature) is thus *equivalent* to assuming a specific shape of the observation error power spectrum or of the observation error covariance function. This equivalence is similar in nature to the one-to-one correspondence (described in *Kimeldorf et Wahba, 1970; McIntosh, 1990; Brankart et Brasseur, 1996*) between spline analysis (minimizing curvature and gradient) and statistical analysis (with specific shapes of the background error covariance). There, the correspondence is on the background constraint in the cost function (D.25) (first term) instead of being on the observation constraint (second term of the cost function).

Table D.1 provides explicit expressions of the covariance function $\mathcal{R}(\rho)$ that can be obtained from (D.48) for some specific values of the parameters σ_i . However, with expression (D.48), any shape of the observation error spectrum (provided that it is indefinitely continuously differentiable) can virtually be simulated; even negative σ_i^2 are possible (for $0 < i < p$) providing that $\tilde{\mathcal{R}}(\kappa) > 0 \forall \kappa$. For instance, simulating a Gaussian observation error spectrum $\exp(-\ell^2 \kappa^2) = 1/(1 + \sum_i^\infty \ell^{2i} \kappa^{2i})$ (corresponding to a Gaussian covariance function, whatever the number of dimensions) requires an infinite derivative sequence $\sigma_i = \ell^i, i = 1, \dots, \infty$ (functions 1.7 and 2.5 in Table D.1), but can be approximated by a truncated sequence. Going to second order derivative is nevertheless always necessary to simulate a correlation function with zero derivative at $\rho = 0$ (as functions 1.2 to 1.6 and 2.2 to 2.4 in Table D.1).

It is interesting to note that, in one dimension ($n = 1$) and for one derivative included in the observation vector ($p = 1$), the error power spectrum $\tilde{\mathcal{R}}(\kappa)$ given by equation (D.47) is characteristic of a random function $\varepsilon(\xi)$ that is governed by the differential equation :

$$\varepsilon(\xi) + \ell \varepsilon'(\xi) = \sigma_0 w(\xi) \quad (\text{D.49})$$

where $\sigma_0 w(\xi)$ is a white noise with standard deviation σ_0 . Equation (D.49) is the Langevin equation, which is used in statistical physics to describe the time evolution of particle velocities in the Brownian motion (*Reif, 1965*) or the behaviour of random fluctuations in thermodynamical systems (*Landau et Lifshitz, 1951, chapter 12*). The corresponding correlation model given by equation (D.35) describes thus also the time correlation of these important physical processes. More generally, any observational noise that is related to a white noise with such a linear differential equation (written here in one dimension) :

$$\varepsilon(\xi) + \sum_{i=1}^p a_i \frac{d^i \varepsilon(\xi)}{d\xi^i} = \sigma_0 w(\xi) \quad (\text{D.50})$$

is characterized by a power spectrum given by equation (D.48), with a number of derivatives p equal to the degree of the differential equation (D.50). The parameters σ_i of the power spectrum can be easily deduced from the coefficients a_i , by transforming equation (D.50) in the spectral domain. For instance, for $p = 2$, an observational noise governed by

$$\varepsilon(\xi) + \lambda \ell \varepsilon'(\xi) + \ell^2 \varepsilon''(\xi) = \sigma_0 w(\xi) \quad \text{with} \quad \lambda > 0 \quad (\text{D.51})$$

is characterized by a correlation function that can be simulated by adding the first and second derivatives to the observation vector with associated error variances $\sigma_1^2 = \sigma_0^2 \ell^{-2}/(\lambda^2 - 2)$ and $\sigma_2^2 = \sigma_0^2 \ell^{-4}$ (correlation functions 1.2, 1.3 and 1.4 in Table 1). Such relationships can help determining the appropriate parameterization of the error power spectrum as soon as it is possible

	Power spectrum $\tilde{\mathcal{R}}(\kappa)$	Covariance function $\mathcal{R}(\rho)$
One-dimensional functions		
1.0	$\tilde{\mathcal{R}}(\kappa)$	$\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\mathcal{R}}(\kappa) \cos(\kappa r) d\kappa$
1.1	$\frac{\sigma_0^2 \ell}{1+\ell^2 \kappa^2}$	$\frac{\sigma_0^2}{2} \exp\left(-\frac{ \rho }{\ell}\right)$
1.2	$\frac{\sigma_0^2 \ell}{1+\ell^4 \kappa^4}$	$\frac{\sigma_0^2}{2} \exp\left(-\frac{ \rho }{\ell\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ \rho }{\ell\sqrt{2}}\right)$
1.3	$\frac{\sigma_0^2 \ell}{(1+\ell^2 \kappa^2)^2}$	$\frac{\sigma_0^2}{4} \exp\left(-\frac{ \rho }{\ell}\right) \left(1 + \frac{ \rho }{\ell}\right)$
1.4	$\frac{\sigma_0^2 \ell}{1+2\ell^2 \kappa^2 \cos(2\theta)+\ell^4 \kappa^4}$	$\frac{\sigma_0^2}{2} \exp\left(-\frac{ \rho }{\ell} \cos \theta\right) \frac{\sin\left(\theta + \frac{ \rho }{\ell} \sin \theta\right)}{\sin(2\theta)}$
1.5	$\frac{\sigma_0^2 \ell}{(1+\ell^2 \kappa^2)(1+\alpha \ell^2 \kappa^2)}$	$\frac{\sigma_0^2}{2\alpha^2} \left[\exp\left(-\frac{ \rho }{\ell}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{ \rho }{\alpha \ell}\right) \right]$
1.6	$\frac{\sigma_0^2 \ell}{(1+\ell^2 \kappa^2)^{p+1}}$	$\frac{\sigma_0^2}{2^{p+\frac{1}{2}} p!} \left(\frac{ \rho }{\ell}\right)^{p+\frac{1}{2}} K_{p+\frac{1}{2}}\left(\frac{ \rho }{\ell}\right)$
1.7	$\frac{\sigma_0^2 \ell}{1+\sum_i^\infty \ell^{2i} \kappa^{2i}}$	$\frac{2\sigma_0^2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\ell^2}\right)$
Two-dimensional functions		
2.0	$\tilde{\mathcal{R}}(\kappa)$	$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{\mathcal{R}}(\kappa) J_0(\kappa r) \kappa d\kappa$
2.1	$\frac{\sigma_0^2 \ell^2}{1+\ell^2 \kappa^2}$	$\frac{\sigma_0^2}{2\pi} K_0\left(\frac{ \rho }{\ell}\right)$
2.2	$\frac{\sigma_0^2 \ell^2}{1+\ell^4 \kappa^4}$	$-\frac{\sigma_0^2}{2\pi} \text{kei}_0\left(\frac{ \rho }{\ell}\right)$
2.3	$\frac{\sigma_0^2 \ell^2}{(1+\ell^2 \kappa^2)^2}$	$\frac{\sigma_0^2}{4\pi} \frac{ \rho }{\ell} K_1\left(\frac{ \rho }{\ell}\right)$
2.4	$\frac{\sigma_0^2 \ell^2}{(1+\ell^2 \kappa^2)^{p+1}}$	$\frac{\sigma_0^2}{2\pi 2^p p!} \left(\frac{ \rho }{\ell}\right)^p K_p\left(\frac{ \rho }{\ell}\right)$
2.5	$\frac{\sigma_0^2 \ell^2}{1+\sum_i^\infty \ell^{2i} \kappa^{2i}}$	$\frac{\sigma_0^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\ell^2}\right)$

TAB. D.1 – Table of observation error power spectra and associated covariance functions. All spectra have the form of equation (D.48), so that they can be directly simulated by adding successive derivatives of the observations in the observation vector. The corresponding covariance functions have been derived from the tables of integral transforms compiled by *Bateman et Erdelyi* (1954). J_p is the first kind Bessel function of order p , K_p is the second kind modified Bessel function of order p , and kei_0 is a Kelvin function (see *Abramowitz et Stegun*, 1970). In functions 1.4 and 1.5, the parameters θ and α are such that $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ and $0 < \alpha < 1$. Some particular cases are included separately : 1.1 is 1.6 with $p = 0$; 1.2 is 1.4 with $\theta = \frac{\pi}{4}$; 1.3 is 1.4 with $\theta = 0$; 1.3 is 1.6 with $p = 1$; 2.1 is 2.4 with $p = 0$; 2.3 is 2.4 with $p = 1$.

to find approximate linear differential equations governing the observational noise (for instance if it is due to unresolved physical processes).

The generality of the method is more directly obvious for discrete problems since any transformation \mathbf{T} can be obtained by adding finite differences of successive orders. However, increasing the number p of derivatives added to the observation vector also increases the numerical cost, so that the most effective parameterization always results from a compromise between a fine representation of a target observation error spectrum and the numerical efficiency of the observational update. In this respect, two critical elements are always the identification of an accurate prior model for the observation error correlations and the validation of this model using the observed information.

D.3 Application to altimetry in the North Brazil current

Ocean altimetric observations are distributed along lines (the satellite ground track), or in the future, also along two-dimensional ribbons (wide-swath altimeters). And it is known that altimetric observation errors (due to the altimetric measure itself, orbit errors or atmospheric correction errors) are spatially correlated along the ground track (or across the swath). The purpose of this section is to demonstrate the sensitivity of the observational update to these observation error correlations, and to check if the parameterization proposed in this paper is appropriate to take them into account. This is done on the particular example of the North Brazil current circulation.

D.3.1 Description of the experiment

The North Brazil current is a surface Western boundary current flowing westward along the North Brazilian coast. It is fed from the South-East by the Tropical surface current, and brings the water to the North-West into the Caribbean Sea. The current sheds large anticyclonic rings (with diameter of about 200 km), that are also transported towards the Caribbean Sea, covering the 2000 km in about 3 months (see *Fratantoni et al.*, 1995a, for more details). The total transport of the mean current is about 21 Sv (*da Silveira et al.*, 1994), with typical surface velocities of 1 m/s for the main current and for the rings, corresponding to dynamic height differences of about 0.2 m.

A reference simulation of the circulation is computed using a primitive equation model covering the tropical Atlantic between 15°S and 20°N. It is a subregion of the DRAKKAR global ocean configuration at a 1/4° resolution of the NEMO model (*Barnier et al.*, 2006; *Penduff et al.*, 2007), using boundary conditions extracted from a global simulation. The model atmospheric forcing is computed from ERA40 atmospheric data using bulk aerodynamic formula. A 5-year reference simulation of the tropical Atlantic model (computed by repeating 5 times the 2002 atmospheric data) is illustrated in Figures D.3 and D.4. In this study, we focus on the results obtained in the region of the North Brazil current (between 61°W and 46.5°W, and between 4.5°N and 12.5°N), that is shown on the figures. Figure D.3 presents two snapshots of the sea surface height, together with its gradient and surface velocity for December 2 and 14 of the 1st year, showing the rings moving westward, and illustrating the close relation between altimetry and surface velocity. Figure D.4 shows the mean circulation (sea surface height, gradient and surface velocity) averaged over the 5 years of the simulation, together with the corresponding standard deviation. The order of magnitude of the sea surface height variability is similar to the bulk error standard deviation on satellite altimetric measurements, that is presently about 0.04 m. This variability is thus only marginally observed by such satellites, so that a fine tuning of the statistical parameters is particularly needed.

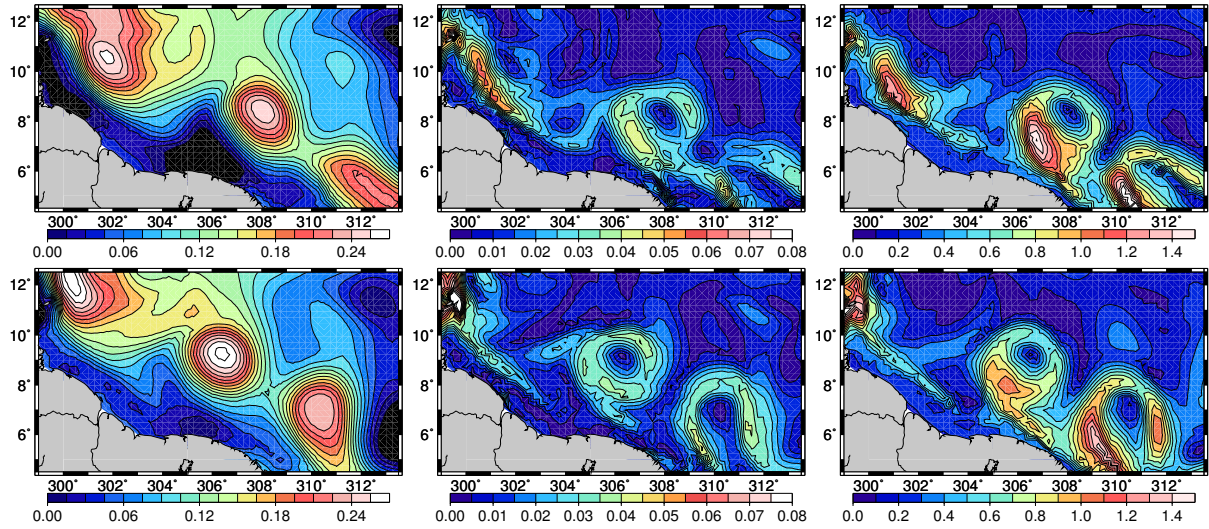


FIG. D.3 – Snapshots of the circulation in the region of the North Brazil current, as simulated by the model for December 2 (top panels) and 14 (bottom panels) of the 1st year. The figure shows the sea surface height (in m, left panels), the magnitude of its gradient (in m/grid point, middle panels) and sea surface velocity (in m/s, right panels).

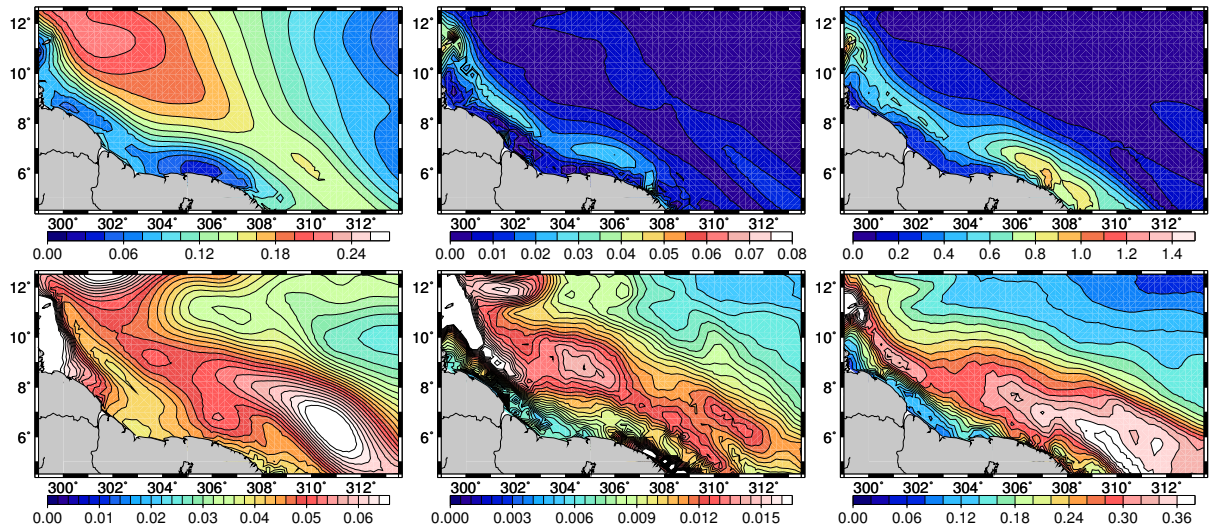


FIG. D.4 – Mean (top panels) and standard deviation (bottom panels) of the 5 years simulation. The figure shows the sea surface height (in m, left panels), the magnitude of its gradient (in m/grid point, middle panels) and sea surface velocity (in m/s, right panels).

In order to test the observational update with different kinds of observation error parameterization, we need to define : (i) the background (or forecast) state \mathbf{x}^f , and (ii) the true state \mathbf{x}^t , from which the observations \mathbf{y} are sampled, and to which the estimation must be compared. As background state, we use the mean circulation (shown in Figure D.4, top panels) ; as true state, we use one of the model snapshots (illustrated in Figure D.3). And as observation, we assume that altimetry is observed over the full domain, with a 4 cm error standard deviation, at every node of the model grid. In order to test the sensitivity of the solution to the kind of observation error, two observation vectors are generated from the true state \mathbf{x}^t : a first one, by adding uncorrelated observation noise, and a second one, by adding a correlated observation noise, with a covariance matrix given by equation (D.23), with transformation (D.46) (for various values of $\ell = \sigma_0/\sigma_1$). The noise is scaled to have a uniform standard deviation $\sigma = 0.04$ m. In order to randomly draw Gaussian noise vectors with known covariance \mathbf{R} , we use the method described in the appendix of *Fukumori (2002)*. Figure D.5 (top panels) shows an example of such noise vectors, generated for three correlation lengths : $\ell = 0, 5$ and 15 grid points. (In this section, $\ell = 0$ stands for uncorrelated noise.) The figure also shows the corresponding error on the right difference between adjacent grid points, illustrating how the observational error on the discrete gradient decreases with ℓ .

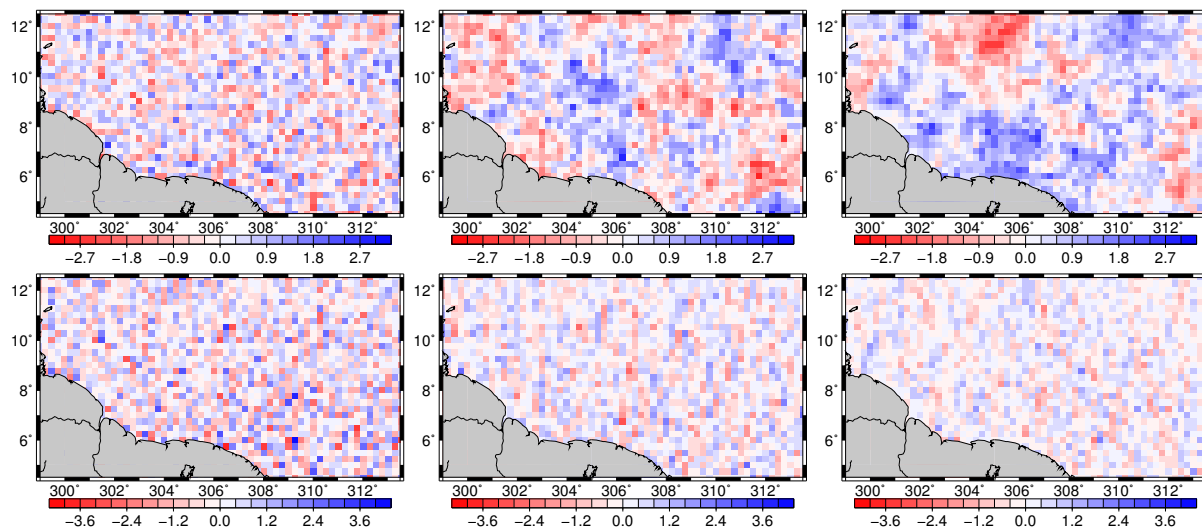


FIG. D.5 – Simulated observational noise on sea surface elevation for three correlation lengths (from left to right) : $\ell = 0, 5$ and 15 grid points. The figure shows the random noise (with variance equal to 1, top panels) and the corresponding gradient (bottom panels), using the grid spacing as length unit.

It is interesting to make the link between this simulated observational noise and the characteristics of observation error in real altimetry data. As explained at the beginning of section D.1, observation error is always the sum of a measurement error and a representation error. On the one hand, the altimetric measurement is affected by several kinds of error (altimetric measure, orbit error, atmospheric correction error) with a bulk standard deviation of about 3 to 5 cm, and horizontal correlation patterns that can depend on the satellite orbit and on the state of the atmosphere. On the other hand, altimetric data are actually spatial averages over about 5 to 10 km along track, which is about 3 times smaller than the resolution of our model. The resulting representation error, which corresponds to this limited range of spatial scales in the continuous ocean system, is thus here likely to remain small with respect to measurement errors. Consequently, the properties of our randomly simulated observational noise (4 cm standard deviation, with various correlation length scales) is chosen quite adequately to be in the range of

what can be expected for real altimetric data in this region and for that kind of ocean model.

In addition, in order to increase the robustness of the test, each experiment is repeated by using, as true state, every snapshot of the sequence (one every 6 days for 5 years), and the results are averaged over that ensemble of experiments. There is thus an ensemble of true states \mathbf{x}_i^t , $i = 1, \dots, N$ (with $N = 300$) and the corresponding ensemble of observations \mathbf{y}_i sampled from them. (Observational errors are drawn independently for every member of the sample.) Hence, as soon as the ensemble of true states can be viewed as representative of all possible states of the system, our indicator gives the average error that is committed using the observation error parameterization that is being tested (starting from the mean as background state).

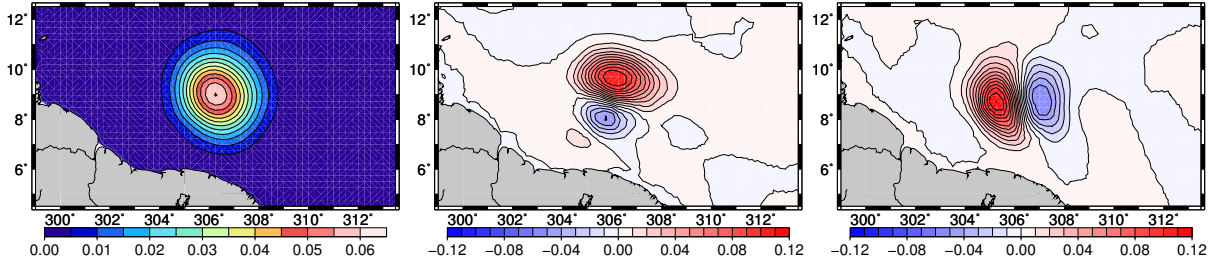


FIG. D.6 – Observational update increment on sea surface height (in m, left panels), zonal velocity (in m/s, middle panels) and meridional velocity (in m/s, right panels), that would result from one single observation (with 0.04 m error standard deviation) of altimetry located at $54^\circ\text{W } 9^\circ\text{N}$ (in the middle of the area traversed by the mesoscale rings). This illustrates the size of the domain of influence of the observations.

In order to parameterize the background (or forecast) error covariance matrix \mathbf{P}_i^f , we use the covariance of all snapshots of the model simulation (sampled every month over the 5 years of the simulation), except those that are less than 1 month away from the true state (larger than the typical decorrelation time scale), in order to avoid any influence of the true state on the input error covariance matrix. (\mathbf{P}_i^f is thus recomputed for every member $i = 1, \dots, N$.) With an ensemble of about 60 independent realizations (one per month), it is only for correlations larger than 0.26 that the 95% confidence interval for correlations (assuming normal pdfs) does not include zero. Smaller correlations are thus not significant. Thus, if the size of the region is much larger than the spatial decorrelation scale, the integrated influence of distant observations with non-significant correlations can be as large as that of close observations with significant correlations. In order to avoid the spurious effect of these inaccurate long range correlations (resulting from the use of a small size ensemble), we perform a separate local observational update (as in *Brankart et al., 2003*, or *Testut et al., 2003a*) for each water column, with an additional weight on the observations decreasing with the distance r as $\exp(-r^2/d^2)$, with $d = 200$ km (the typical distance at which the correlation ceases to be significant). Figure D.6 illustrates the resulting local structure of the background covariance that is used to perform the observational update. The figure shows the observational update increment that would result from one single observation (with 0.04 m error standard deviation), located at $54^\circ\text{W } 9^\circ\text{N}$ (in the middle of the area traversed by the mesoscale rings). The long range (non-significant) influence is effectively set to zero, without affecting much the local covariance structure described by the ensemble.

D.3.2 Uncorrelated errors

In experiment 1 (see Table D.2), we use the observation vector that is perturbed by a white noise (observation errors are thus spatially uncorrelated) and the observation error covariance is parameterized using a diagonal matrix ($\mathbf{R} = \sigma^2\mathbf{I}$). The parameterization is thus fully consistent

with the simulated errors. Figure D.7 (top panels) shows a map of the ensemble standard deviation of errors (difference with respect to the true state) after the observational update corresponding to experiment 1. It is shown for altimetry (ϵ_ζ), for the altimetric gradient, and for velocity (ϵ_v). It is computed as (the formula for the gradient is similar to the formula used for velocity)

$$\epsilon_\zeta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\zeta^f - \zeta_i^t + \delta\zeta_i)^2 \quad \text{and} \quad \epsilon_v^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[(u^f - u_i^t + \delta u_i)^2 + (v^f - v_i^t + \delta v_i)^2 \right] \quad (\text{D.52})$$

where ζ_i^t, u_i^t, v_i^t is the i th true state (corresponding to the i th snapshot of the model sequence), ζ^f, u^f, v^f is the forecast state (corresponding to the mean of the model sequence), and $\delta\zeta_i, \delta u_i, \delta v_i$ is the i th observational update. This result can be directly compared to Figure D.4 (bottom panels), that represents the same quantity before the observational update. Indeed, since the background state is the mean state and since the ensemble of true state is the ensemble of all snapshots of the sequence, the standard deviation of the sequence is equal to the ensemble standard deviation of errors before the observational update, i.e. formula (D.52) with $\delta\zeta_i = 0, \delta u_i = 0$ and $\delta v_i = 0$. The comparison shows that the error on altimetry is significantly reduced by the observational update, becoming much smaller than both the background error standard deviation (Figure D.4, bottom panels) and the observational error standard deviation. This is because background errors are correlated over an area of about $L \times L$, with $L \sim 125$ km (see Figure D.6), including about $L^2/\Delta\xi^2 \sim 25$ observations with uncorrelated errors. The resulting errors is thus about $1/\epsilon_\zeta^2 \sim 1/\sigma_f^2 + 25/\sigma^2$. Observations are dense and very accurate, the background keeps only little influence; so that we can even write $\epsilon_\zeta \sim \sigma/5 = 0.008$ m, a rough estimation that is quite consistent with the results observed on Figure D.7. Filtering off a white noise is easy if the background error correlation scales (about L) are large with respect to typical data spacing ($\Delta\xi$).

However, the error reduction factor (with respect to background error) is less favourable for the gradient of altimetry. This is because computing altimetric difference $\Delta\zeta$ between adjacent model cells amplifies the relative errors. Relative errors on velocities are again slightly worse because the relation between surface velocity and altimetry is not perfectly geostrophic (and thus not perfectly linear).

On the other hand, the observational update of the error covariance is illustrated in Figure D.7 (bottom panels), showing the estimated error standard deviation (the square root of

	Observation error	Observation error parameterization
Exp. 1 (Fig. D.7)	$\sigma = 0.040$ m, $\ell = 0$ grid points	$\sigma_0 = 0.040$ m, $\sigma_1 = \infty$
Exp. 2 (Fig. D.8)	$\sigma = 0.040$ m, $\ell = 5$ grid points	$\sigma_0 = 0.040$ m, $\sigma_1 = \infty$
Exp. 3 (Fig. D.9)	$\sigma = 0.040$ m, $\ell = 5$ grid points	$\sigma_0 = 0.275$ m, $\sigma_1 = 0.055$ m/grid point

TABLE D.2 – *Table of experiments.* The three experiments described in this paper only differ either by the (simulated) observation error or by the parameterization of the observation error. The observation error standard deviation is always set to 0.04 m, with consistent parameterization. The difference is only in the correlation: in experiment 1, the observation error is simulated by a white noise, while in experiments 2 and 3, it is a correlated noise with spatial correlation $\ell = 5$ grid points. In experiments 1 and 2, the observation errors are parameterized using a diagonal \mathbf{R} matrix (i.e. assuming uncorrelated errors), while in experiment 3, gradient observations are added to simulate correlations. Hence, only experiments 1 and 3 receive a parameterization that is consistent with the simulated errors. ($\sigma_1 = \infty$ means that no gradient observations are used.)

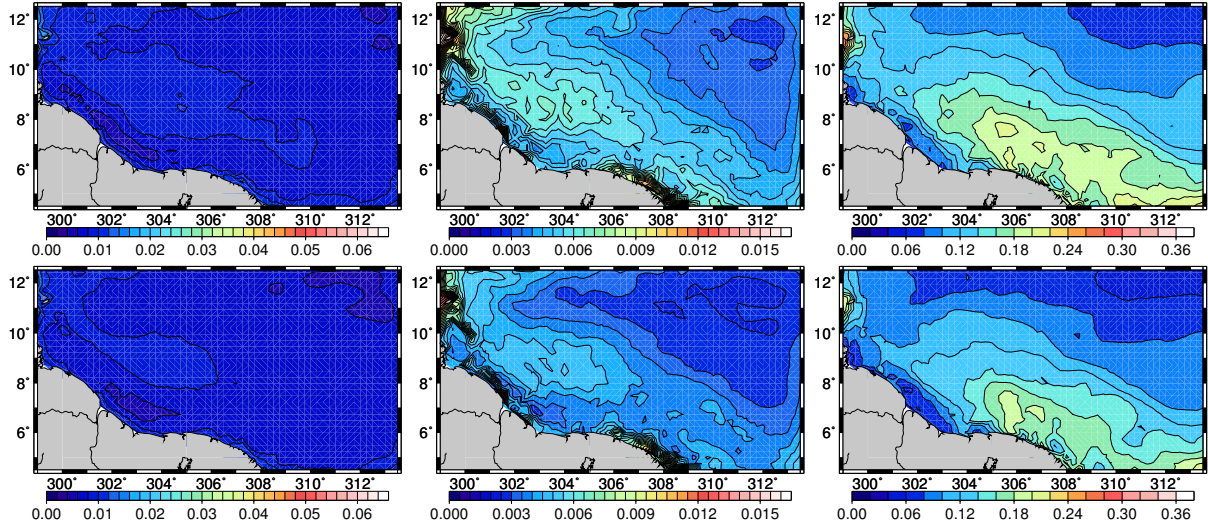


FIG. D.7 – Error standard deviation corresponding to experiment 1, as measured by the ensemble of differences with respect to the true states (top panels), and as estimated by the scheme (the square root of the diagonal of \mathbf{P}^a , bottom panels). It is shown for altimetry (in m, left panels), for its gradient (in m/grid point, middle panels) and for velocity (in m/s, right panels).

the diagonal of \mathbf{P}^a). This estimation is quite consistent in amplitude and structure with the ensemble standard deviation of the error (measured by difference with respect to the true state), also shown in Figure D.7 (top panels). The good quality of the error estimate (for all variables) is the consequence of the consistent parameterization of the observation error covariance matrix; it also indicates that the background error covariance matrix (\mathbf{P}^f) is quite accurately parameterized.

D.3.3 Correlated errors, with diagonal \mathbf{R} parameterization

In experiment 2, we use the observation vector that is perturbed by the correlated noise (with $\ell = 5$ grid points), but keep the same diagonal parameterization of the observation error covariance matrix ($\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$). The parameterization is thus inconsistent with the simulated errors, which are assumed uncorrelated, even though they are not. Figure D.8 shows the corresponding error maps to be compared to Figure D.7. The comparison shows that the error on altimetry is significantly larger than in experiment 1. This is because “the number of independent observations” in the $L \times L$ area is reduced to about $(L/\ell)^2 \sim 1$; Here, the background error, keeps an influence, and the typical error is about $\epsilon_\zeta \sim 0.03$ m, a rough estimation that is again quite consistent with the results observed in Figure D.8.

However, larger errors on altimetry do not necessarily mean larger errors on the altimetry gradient or larger errors on velocity. In experiment 2, the error increase on the gradient with respect to experiment 1 is actually smaller than the error increase on altimetry. This is because the gradient is better observed through correlated observation than through uncorrelated observations (see Figure D.5). Sticking the solution to correlated observations (even with inappropriate diagonal error parameterization, as in experiment 2) thus partly compensates the easiness of filtering off a white noise from a large scale ($L = 125$ km) signal (with optimal parameterization, as in experiment 1). This better observation of the gradient is here the reason why keeping all available observations in the observation vector (even if the errors are very correlated) is always a better solution than subsampling the observations.

On the other hand, the observational update of the error covariance is illustrated in Figure D.8 (bottom panels), showing the estimated error standard deviation (the square root of

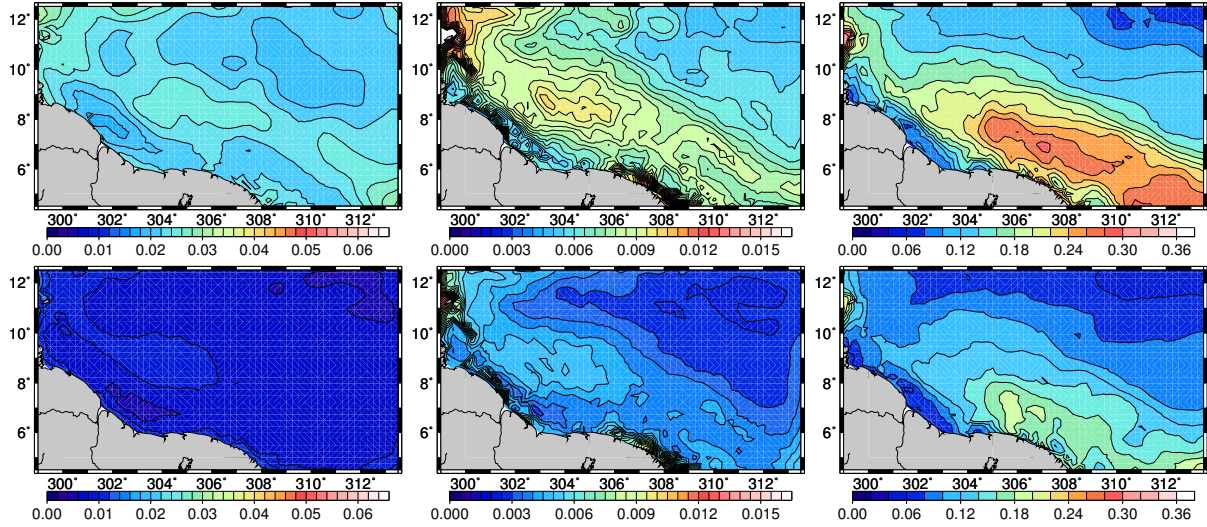


FIG. D.8 – Error standard deviation corresponding to experiment 2, as measured by the ensemble of differences with respect to the true states (top panels), and as estimated by the scheme (the square root of the diagonal of \mathbf{P}^a , bottom panels). It is shown for altimetry (in m, left panels), for its gradient (in m/grid point, middle panels) and for velocity (in m/s, right panels).

the diagonal of \mathbf{P}^a). This estimation is identical to that of experiment 1 (Figure D.7, bottom panels), since all statistical parameters (\mathbf{P}^f , \mathbf{R}) are kept identical. This largely underestimates the standard deviation of the true error (measured using the ensemble of differences with respect to the true state), that is shown in the top panels of Figure D.8. The estimation is about a factor 3 below reality. This situation is the consequence of the inconsistent parameterization of the observation error covariance matrix. The diagonal \mathbf{R} parameterization lets the scheme believe that the data are more accurate than they are, so that it underestimates the error that is effectively in the system.

D.3.4 Correlated errors, with consistent \mathbf{R} parameterization

In experiment 3, we use the same observation vector as in experiment 2 (perturbed by the correlated noise), but add gradient observations to simulate correlations in the observation error covariance matrix, with the diagonal covariance matrix (D.38). By choosing $\sigma_0 = 0.275$ m and $\sigma_1 = \sigma_0/\ell$ (for $\ell = 5$ grid points, see Table D.3), this observation error parameterization is thus perfectly consistent with the simulated errors. According to the theory presented in section D.2, these observations with correlated errors are thus equivalent to much less accurate observations ($\sigma_0 = 0.275$ m), *together with* accurate observations of the gradient ($\sigma_1 = 0.055$ m/grid point). This is consistent with the idea suggested above that increasing ℓ reduces “the number of independent observations”. Figure D.9 shows the corresponding error maps to be compared to Figures D.8 and D.7. The comparison shows that the errors on altimetry are still larger than in experiment 1 (Figure D.7), because the quantity of information in the observation vector is still the same as in experiment 2, but the errors are smaller than in experiment 2 (Figure D.8), because the observation error parameterization is now consistent, so that the observational update is closer to optimality. (\mathbf{P}^f is still an approximation : it cannot be considered that the background error is drawn randomly from a pdf of covariance \mathbf{P}^f .)

However, the error reduction (with respect to experiment 2) on altimetry gradient and velocity is significantly larger because the better confidence that we must give to the gradient is now explicitly taken into account in the observational update, through the non-diagonal parameterization of the observation error covariance matrix \mathbf{R} . Better, this parameterization is effectively

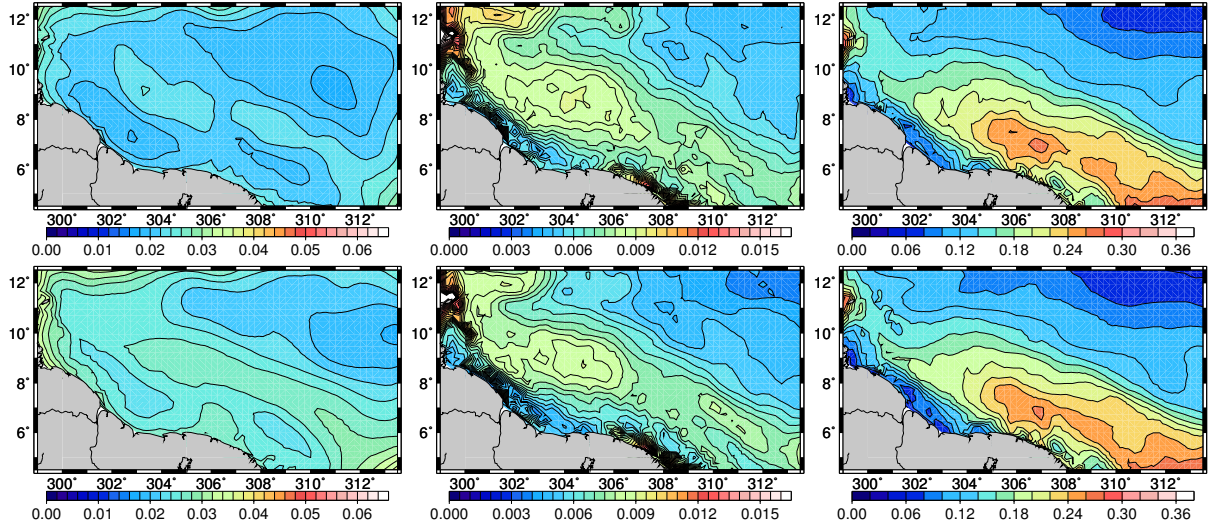


FIG. D.9 – Error standard deviation corresponding to experiment 3, as measured by the ensemble of differences with respect to the true states (top panels), and as estimated by the scheme (the square root of the diagonal of \mathbf{P}^a , bottom panels). It is shown for altimetry (in m, left panels), for its gradient (in m/grid point, middle panels) and for velocity (in m/s, right panels).

(and equivalently) applied in practice by the addition of gradient observations in the observation vector. (This addition of gradient observations can only bring the estimated gradient closer to the observed gradient, which is more accurate if the observation errors are spatially correlated.) The improvement of the gradient resulting from the parameterization of error correlations (if they exist) is thus clearly demonstrated by this experiment.

ℓ	0	0.5	1	2	4	5	6	8	10
σ_0	0.040	0.055	0.079	0.130	0.228	0.275	0.320	0.407	0.488
σ_1	∞	0.110	0.079	0.065	0.057	0.055	0.053	0.051	0.049

TAB. D.3 – Values of observation error standard deviation (σ_0 , in m) and gradient error standard deviation (σ_1 , in m/grid point), to use for parameterizing observation errors with standard deviation $\sigma = 0.04$ m and correlation length ℓ (in observation grid points). The correspondence is established using equation (D.23), with transformation (D.46).

On the other hand, the observational update of the error covariance is illustrated in Figure D.9 (bottom panels), showing the estimated error standard deviation (the square root of the diagonal of \mathbf{P}^a). As in experiment 1, it is consistent with the standard deviation of the true error (measured using the ensemble of differences with respect to the true state), that is shown in the top panels of Figure D.9. Again, this is due to the consistent parameterization of the observation error covariance matrix, that has been restored by the addition of gradient observations (with adequate values for σ_0 and σ_1).

D.3.5 Sensitivity to the correlation scale

In this last section, it is examined how the results presented above depend on the observation error correlation length. For that purpose, the same experiment is repeated for various simulated observation noises, with a correlation length ℓ_o ranging from 0 to 10 grid points. And, for each of these simulated noises, several parameterizations of the observation error covariance matrix are tested, using a correlation length ℓ_p also ranging from 0 to 10 grid points. Figure D.10 shows

the resulting error standard deviation for sea surface height and velocity (as measured by the ensemble of differences with respect to the true states), averaged over the domain of interest, as a function of ℓ_o and ℓ_p . The figure also shows the ratio between the averaged estimated error and the averaged measured error. It is only if $\ell_o = \ell_p$ that the parameterization is consistent with the simulated errors : it is thus along that line that the measured error should be minimum (for a given ℓ_o) and that the ratio between estimated and measured errors should be equal to 1.

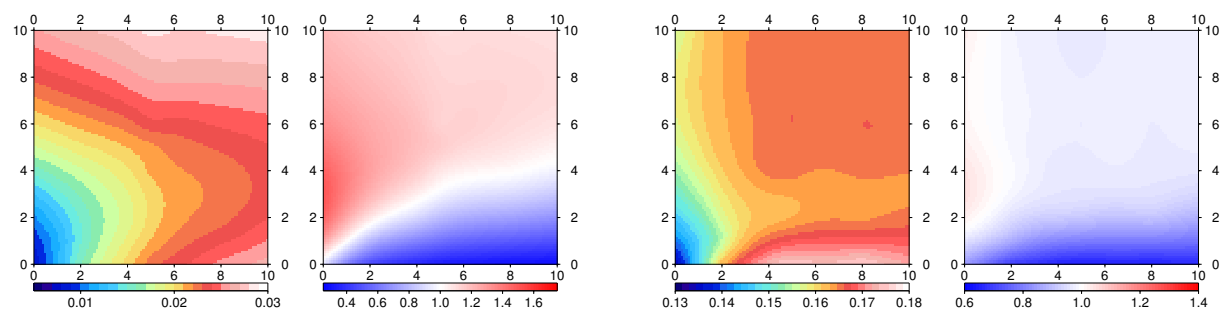


FIG. D.10 – This figure generalizes the results of figures D.7, D.8 and D.9 (here averaged over the domain), by showing them as a function of the observation error correlation length scales (in grid points) ℓ_o (X-axis), characterizing the simulated noise, and ℓ_p (Y-axis), that is used to parameterize the observation error covariance matrix \mathbf{R} . The left couple of panels is for sea surface height, and the right one is for velocity. In each couple of panels, the left panel shows the true error standard deviation (as measured by the ensemble of differences with respect to the true states), and the right panel shows the ratio between estimated and measured error standard deviations.

The results show that underestimating the observation error correlation length scale ($\ell_p \ll \ell_o$) leads to a moderate increase of the error on sea surface height, but to a very significant increase of the error on velocity. The estimation of the error standard deviation is also well below reality. This situation corresponds indeed to giving too much importance to the observations and to imposing too weak a constraint on the gradient. On the contrary, overestimating the observation error correlation length scale ($\ell_p \gg \ell_o$) leads to a moderate increase of the error on velocity, but to a significant increase of the error on sea surface height. The estimation of the error standard deviation is also well above reality for sea surface height, whereas no sensitivity can be observed for velocity. A correct tuning of ℓ_p is thus required to accurately estimate both variables, with consistent error estimates.

However, it must be noted that, in these experiments, the optimal parameterization is not on the line $\ell_o = \ell_p$ as it should be, but noticeably below that value, especially for the large values of ℓ_o . The benefit obtained by giving to the observations more credit than they deserve (by using $\ell_p < \ell_o$) can only be explained by inaccuracies in the parameterization of the \mathbf{P}^f matrix, which is here approximated by a limited size ensemble. Overestimating the confidence in the observations is thus somewhat useful here to compensate suboptimalities in the statistical parameterization of the scheme.

Conclusions

Classical algorithms to compute the observational update in Kalman filters are penalized by a computational complexity proportional to the cube of the number of observations. In square root or ensemble Kalman filters, this algorithm can be modified (as proposed by *Pham et al.*, 1998a) to become linear in the number of observations if the observation error covariance matrix is diagonal. In this paper, it has been demonstrated that these benefits can be preserved

with two non-diagonal parameterizations of the observation error covariance matrix \mathbf{R} . The first method, parameterizing \mathbf{R} as the sum of a diagonal and a low rank matrix, is especially efficient if the typical distance between observations is small with respect to the correlation scales. The second method, simulating correlations by application of a linear transformation of the observation vector (with diagonal \mathbf{R} in the transformed space) is more generic. It is shown especially efficient to describe simple correlation structures if gradient observations can be added to the observation vector. This is possible for instance if the observations are distributed along lines or at the nodes of two-dimensional grids so that discrete gradients can be computed by subtracting successive observations. This has been shown equivalent to assuming a specific form of the observation error covariance matrix, with a correlation function or power spectrum that have been computed analytically in the asymptotic limit of dense (continuous) observations. The correlation scale is then the ratio of the observation error standard deviations that are assumed for the original observations and for the gradient observations.

Test experiments have been performed with the aim of reconstructing the circulation of the North Brazil current, as simulated by a $1/4^\circ$ model of the Tropical Atlantic Ocean, using synthetic altimetric observations. Various observation datasets were generated by perturbation with uncorrelated and correlated noise, and for several correlation scales. For each dataset, diagonal and non-diagonal parameterizations of the observation error covariance matrix have been used to perform the observational update of altimetry together with surface velocities. The results show first that the more the observations are correlated, the less information they contain about altimetry. This is also true for velocity (but to a lesser degree) although the gradient of altimetry is better observed through correlated observations. Second, assuming a diagonal observation error covariance matrix in presence of a correlated noise leads to a non-optimal solution that mainly penalizes the reconstruction of surface velocities, and underestimates the error variance (three times lower than reality in our experiments). Third, optimal parameterizations of the observation error covariance matrix usually produce solutions that are close to minimizing the resulting error, although an artificial increase of the confidence to the observations (e.g. using a smaller correlation length) can lead to smaller errors (by compensating mis-specifications of the forecast error covariance). Fourth, the experiments also suggest that our efficient parameterization of the observation error covariance matrix by adding gradient observations is appropriate to parameterize adequately observation error correlations. Adding explicit gradient observations can even be useful to compensate deficiencies in the forecast error statistics, by ensuring a direct control of velocities through gradient data. It must be stressed however that these conclusions may be sensitive to the region of interest : a fine tuning of the observation error correlations may be less critical in regions where the noise to signal ratio is much smaller (like in the Gulf Stream region), since high relative accuracy is always obtained.

In ocean data assimilation applications, altimetry is always a key element of the observation system. However, the growing number of available observations (not only altimetry) often leads to a prohibitive numerical cost and to the temptation of simplifying the problem by aggregating (or even dropping) observations or by simplistic assumptions about the statistics (such as uncorrelated observation errors). These simplifications are always done at the expense of an optimal use of the observations, and singularly of altimetry, which is sensitive to that kind of approximation. The scheme proposed in this paper is a response to that problem : analyzing more observations at lesser cost becomes possible with realistic and robust parameterization of the observation error correlations. Being closer to statistical optimality, the scheme can thus make a better use of the observational information (especially about velocity), and be of direct benefit to ocean data assimilation systems.

Incidentally, our results also suggest a possible way of improving data thinning strategies. For instance, if the density of altimetric observations along the ground track is reduced, a critical information about the gradient (and thus about velocity) is likely to be lost, especially

if the observation errors are correlated. A better strategy is certainly to transform the original observation vector by adding gradient observations, and parameterize a diagonal observation error covariance matrix in the transformed space as explained in this paper. The data thinning can then be performed on the transformed observation vector (aggregating observations and rescaling error variances) as if the data were independent. In that way, it becomes possible to give a reasonable importance to the gradient information in the reduced observation vector.

Acknowledgements. This work was conducted as part of the MERSEA project funded by the E.U. (Contract No. AIP3-CT-2003-502885), with additional support from CNES. We also wish to thank the anonymous reviewers for their useful comments and suggestions. The calculations were performed with the support of IDRIS/CNRS.

Bibliographie

- Abramowitz, M., et I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions (ninth printing)*., Dover Publications, New York, 1970.
- Alsdorf, D., L. Fu, N. Mognard, A. Cazenave, E. Rodriguez, D. Chelton, et D. Lettenmair, Measuring global oceans and terrestrial freshwater from space, *Eos*, 88, 253–257, 2007.
- Anderson, J. L., A local least squares framework for ensemble filtering, *Monthly Weather Review*, 131, 634–642, 2003.
- Arakawa, A., et V. Lamb, Computational design of the basic dynamical process of the ucla general circulation model, *Meth. in Comput. Phys.*, 17, 173–265, 1977.
- Arnold, C., et C. Dey, Observing-systems simulation experiments : past, present, and future, *Bull Am Meteorol Soc*, 67, 687–695, 1986.
- Arnoux, D., et J. Blum, Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems, *C. R. Acad. Sci. Paris, I*, 873–878, 2005.
- Ballabrera-Poy, J., P. Brasseur, et J. Verron, Dynamical evolution of the error statistics with the seek filter to assimilate altimetric data in eddy-resolving ocean models, *R. Meteorol. Soc*, 127, 233–253, 2001.
- Barnier, B., T. Reynaud, A. Beckmann, C. Boning, J. Molines, S. Barnard, et Y. Jia, On the seasonal variability and eddies in the north brazil current : Insight from model intercomparison experiments, *J. Phys. Oceanogr.*, 44, 195–230, 2001.
- Barnier, B., G. Madec, T. Penduff, J. Molines, A. Tréguier, A. Beckmann, A. Biastoch, C. Boning, J. Dengg, S. Gulev, J. Le Sommer, E. Rémy, C. Talandier, S. Theetten, M. Maltrud, et J. Mc Lean, Impact of partial steps and momentum advection schemes in a global ocean circulation model at eddy permitting resolution, *Ocean Dynamics*, 56(5–6), 543–567, 2006.
- Barnier, B., L. Brodeau, J. L. Sommer, J. Molines, T. Penduff, S. Theetten, A. Treguier, G. Madec, A. Biastoch, C. Böning, J. Dengg, S. Gulev, R. Bourdallé, J. Chanut, G. Garric, S. Alderson, A. Coward, B. de Cuevas, K. Haines, G. Smith, S. Drijfhout, W. Hazeleger, C. Severijns, et P. Myers, Eddy permitting ocean circulation hindcasts of past decades., *CLIVAR Exchanges*, 12, 8–10, 2008.
- Bateman, H., et A. Erdelyi, *Tables of integral transforms.*, vol. 1 and 2, McGraw-Hill Book Company, 1954, 388 pp. and 447 pp.
- Blanke, B., et P. Delecluse, Variability of the tropical atlantic ocean simulated by a general circulation model with two different mixed-layer physics, *Journal of Physical Oceanography*, 23, 1363–1388, 1993.

- Blayo, E., J. Verron, et J. Molines, Assimilation of topex/poséidon altimeter data into a circulation model of the north atlantic, *Journal of Geophysical Research*, *24*, 691–705, 2003.
- Borstad, G., The influence of the meandering guiana current and amazon river discharge on surface salinity near barbados, *J. Mar. Res.*, *40*, 421–434, 1982.
- Bourlès, B., S. Arnault, et C. Provost, On altimetric data assimilation experiments in a linear model of the tropical atlantic ocean, *Oceanologica acta*, *15*, 525–536, 1992.
- Brankart, J., C. Ubelmann, C. Testut, E. Cosme, P. Brasseur, et J. Verron, Efficient parameterization of the observation error covariance matrix for square root or ensemble kalman filters : application to ocean altimetry, *Monthly Weather Review*, 2008.
- Brankart, J.-M., et P. Brasseur, Optimal analysis of in situ data in the Western Mediterranean using statistics and cross-validation, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, *16*, 477–491, 1996.
- Brankart, J.-M., C.-E. Testut, P. Brasseur, et J. Verron, Implementation of a multivariate data assimilation scheme for isopycnic coordinate ocean models : Application to a 1993–96 hindcast of the North Atlantic Ocean circulation, *J. Geophys. Res.*, *108*, 19(1–20), 2003.
- Brasseur, P., Ocean data assimilation using sequential methods based on the kalman filter. godae, an integrated view of oceanography : Ocean weather forecasting in the 21st century, *J. Verron and E. Chassignet Eds.*, 2006.
- Brasseur, P., P. Bahurel, L. Bertino, F. Birol, N. Brankart, J.M. anf Ferry, S. Losa, E. Remy, J. Schröter, S. Skachko, C. Testut, B. Tranchant, P. Van Leeuwen, et J. Verron, Data assimilation in operational ocean forecasting systems : The mercator and mersea developments, *Met. Soc.*, *22*, 3561–3582, 2005.
- Bruce, J., J. Kerling, et W. Beatty, On the north brazilian eddy field, *Progress in oceanography*, *14*, 57–63, 1985.
- Busalacchi, A., et J. Picaut, Seasonal variability from a model of the tropical atlantic ocean, *J. Phys. Oceanogr*, *13*, 1564–1588, 1983.
- Cailleau, S., Validation de méthodes de contrainte aux frontières d’un modèle océanique : application à un modèle hauturier de l’atlantique nord et à un modèle régional du golfe de gascogne, *Université Joseph Fourier, Grenoble, France*, 2004.
- Caltabiano, I. S., M. Robinson, et L. Pezzi, Multi-year satellite observations of instability waves in the tropical atlantic ocean, *Ocean Science*, *2*, 1–35, 2005.
- Cane, M., Response of an equatorial ocean to simple wind stress patterns .1. model formulation and analytic results, *Journal of Marine Research*, *37*, 233–252, 1979.
- Castruccio, F., Rôle des données gravimétriques grace sur l’assimilation conjointe de données altimétriques et in-situ dans un modèle de l’océan pacifique tropical, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2006.
- Chassignet, E., et J. Verron, *Ocean modeling and parameterization*, NATO science series, 1998.
- Cohn, S. E., An introduction to estimation theory, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, *75*, 257–288, 1997.

- Cowen, R., et R. Castro, Relation of coral reef fish larval distributions to island scale circulation around barbados, west indies, *Bull. Mar. Sci.*, 54, 228–244, 1994.
- da Silveira, I., L. Miranda, et W. Brown, On the origins of the North Brazil Current, *Journal of Geophysical Research*, 99, 22,501–22,512, 1994.
- Debost, F., Etude de nouveaux scénarios d’altimétrie satellitaire pour la reconstruction de la circulation océanique méso-échelle par assimilation de données altimétriques, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2004.
- Didden, N., et F. Schott, Eddies in the north brazil current retroflection region observed by geosat altimetry, *J. Geophys. Res.*, 98, 121–131, 1993.
- Du Penhoat, Y., et A. M. Tréguier, The seasonal linear response of the tropical atlantic ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, 15, 316–329, 1985.
- Evensen, G., Sequential data assimilation with non-linear quasi geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics, *JGR*, 99, 143–162, 1994.
- Evensen, G., et P. J. van Leeuwen, Assimilation of Geosat altimeter data for the Agulhas current using the ensemble Kalman filter with a quasi-geostrophic model, *Monthly Weather Review*, 124, 85–96, 1996.
- Flatau, M., et F. Giraldo, Tropical instability waves and itcz breakdown in the eastern pacific, 2008.
- Fratantoni, D., et D. Glickson, North brazil rings generation and evolution observed with sea wifs, *J. Phys. Oceanogr.*, 32, 1058–1074, 2001.
- Fratantoni, D., et P. L. Richardson, Observations of intermediate-depth cyclonic eddies in the eastern tropical atlanticocean, *J. Phys. Oceanogr.*, 29, 1265–1278, 1999.
- Fratantoni, D., W. Johns, et T. Townsend, Rings of the North Brazil Current : their structure and behavior inferred from observations and a numerical simulation, *Journal of Geophysical Research*, 100, 10,633–10,654, 1995a.
- Fratantoni, D., W. Johns, et T. Townsend, Rings of the north brazil current : Their structure and behavior inferred from observations and numerical simulation, *J. Geophys. Rech.*, 100, 633–654, 1995b.
- Fratantoni, D., T. Townsend, et H. Hurlburt, Low latitude circulation and mass transport pass-ways in a model of the tropical atlantic ocean, *Eos, Trans. Amer. Geophys. Union*, 30, 1944–1966, 2000.
- Fu, L., On the wavenumber spectrum of the oceanic mesoscale variability observed by the seasat altimeter, *J. Geophys. Rech.*, 88, 331–341, 1983.
- Fu, L., et R. Ferrari, A summary of the workshop on ”mesoscale and submesoscale oceanic processes : Explorations with wide-swath interferometry radar altimetry, 2008.
- Fu, L., et P. Le Traon, Satellite altimetry and ocean dynamics. compte rendu geosciences, 2006, compte rendu Geosciences.
- Fu, L., E. Christensen, J. Yamarone, M. Lefebvre, Y. Ménard, M. Dorrer, et P. Escudier, Topex/poseidon mission overviews, *J. Geophys. Rech.*, 99, 369–381, 1994.

- Fukumori, I., An partitioned Kalman filter and smoother, *Monthly Weather Review*, *130*, 1370–1383, 2002.
- Garraffo, Z., W. Johns, E. Chassignet, et G. Goni, North brazil current rings and transport of southern waters in a heigh resolution numerical simulation of the north atlantic, *Elsevier B. V.*, pp. 375–409, 2003.
- Garzoli, S., et E. Katz, The forced annual reversal of the north atlantic equatorial countercurrent, *J. Phys. Oceanogr*, *13*, 2082–2090, 1993.
- Gaspar, P., F. Ogor, P. L. Traon, et O. Zanife, Estimating the sea state bias of the topex and poseidon altimeters from crossover differences, *J. Geophys. Rech.*, *99*, 981–994, 1994.
- Gent, P., et J. McWilliams, Isopycnal mixing in ocean circulation models, *Journal of Physical Oceanography*, *20*, 150–155, 1990.
- Goni, G., et W. John, A census of north brazil current rings observed from t/p altimetry :1992-1998, *Geophys. Res. Let.*, *28*, 1–4, 2001.
- Gorgues, T., C. Menkes, O. Aumont, J. Vialard, Y. Dandonneau, et L. Bopp, Biogeochemical impact of tropical instability waves in the equatorial pacific, *GRL*, *32*, 45–49, 2005.
- Gourdeau, L., J. Verron, T. Delcroix, A. Busalacchi, et R. Murtugudde, Assimilation of topex/poseidon altimeter data in a primitive equation model of the tropical pacific ocean, during the 1992-1996 enso period, *J. Geophys. Res.*, *105*, 8473–8488, 2000.
- Greenslade, J., D. Chelton, et M. Schlax, The midlatitude resolution capability of sea level fields constructed from single and multiple satellite altimeter datasets, *J. Atmos. Oce. Techn.*, *17*, 849–870, 1997.
- Hansen, D., et C. Paul, Genesis and the effect of long waves in the equatorial pacific, *J. Geophys. Res.*, *89*, 431–440, 1984.
- Hong, M., The dynamics of north brazil current retroflection eddies, *Journal of Marine Research*, *54*, 35–53, 1996.
- Houghton, R., Influence of local and remote wind forcing in the gulf of guinea, *J. Phys. Res*, *94*, 4816–4828, 1989.
- Houtekamer, P. L., et H. L. Mitchell, Data assimilation using an Ensemble Kalman Filter technique, *Monthly Weather Review*, *126*, 796–811, 1998.
- Jazwinski, A., Stochastic processes and filtering theory, *Academic Press, NY*, 1970.
- Jochum, M., P. Malanotte-Rizzoli, et A. Busalacchi, Tropical instability waves in the atlantic ocean, *Ocean Modelling*, *7*, 145–163, 2003.
- John, W., T. Lee, F. Schott, R. Zantopp, et R. Evans, Assessing dual altimetric missions for observing the midlatitudes ocean, *J. Geophys. Res.*, *95*, 103–120, 1990.
- Kalman, R., A new approach to linear filtering and prediction problems, *JPO*, *23*, 2541–2566, 1960.
- Kalnay, E., *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability.*, Cambridge University Press, 2003.

- Kelly, P., M. Lwisa, R. Cowen, et G. Goni, Low-salinity pools at barbados, west indies : Their origin, frequency, and variability, *J. Geophys. Res.*, *105*, 699–708, 2000.
- Kimeldorf, G., et G. Wahba, A correspondence between Bayesian estimation of stochastic processes and smoothing by splines., *Ann. Math. Statist.*, *41*, 495–502, 1970.
- Landau, L., et E. Lifshitz, *Statistical Physics (Course of theoretical physics (Volume 5))*, Butterworth-Heinmann, Oxford, 1951.
- Large, W., et S. Yeager, Diurnal to decadal global forcing for ocean and sea-ice models, *NCAR technical notes*, p.22p, 18–221, 2004.
- Le Traon, P., G. Dibarboure, G. Ruffini, et E. Cardellach, Mesoscale ocean altimetry requirements and impact of gps-r measurements for ocean mesoscale circulation mapping, 2002, technical note Extract from the Paris-Beta ESTEC/ESA study.
- LeDimet, F., et O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects, *Tellus*, *38*, 1986.
- Lefebvre, F., Modélisation des marées océaniques à l'échelle globale : assimilation de données in-situ et altimétriques, Ph.D. thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, France, 2000.
- Liu, Z., et F. Rabier, The interaction between model resolution and observation resolution and density in data assimilation, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, *128*, 1367–1386, 2002.
- Liu, Z., et F. Rabier, The potential of high density observations for numerical weather prediction : a study with simulated observations, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, *129*, 3013–3035, 2003.
- Louet, J., The envisat mission and system, *Envisat special issue, Esa Bulletin*, *106*, 10–25, 2001.
- Lucas, M., N. Ayoub, T. Penduff, B. Barnier, et P. de Mey, Stochastic study of the temperature response of the upper ocean to uncertainties in the atmospheric forcing in an ogcm, *Ocean modelling*, *20*, 90–113, 2008.
- Luong, B., Techniques de contrôle optimal pour un modèle quasi-géostrophique de circulation océanique. application à l'assimilation variationnelle de données altimétriques satellitaires, *Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier-Grenoble I*, 1995.
- Luong, B., J. Blum, et J. Verron, A variational method for the resolution of a data assimilation problem in oceanography, *Journal of inverse problem*, *14*, 979–997, 1998.
- Lutjeharms, J., The exchange of water between the south indian and south atlantic oceans, *The south Atlantic : present and past circulation*, Springer-Verlag, 122–162, 1996.
- Madec, G., Nemo ocean engine, *Note du Pole de modelisation de l'Institut Pierre-Simon Laplace*, *27*, 1288–1619, 2008.
- Madec, G., P. Delecluse, M. Imbard, et C. Levy, Opa8.1 general circulation model reference manual, *Notes de l'IPSL, Université P. et M. Curie, B102 T15-E15, Paris*, 1998.
- McIntosh, P. C., Oceanographic data interpolation : Objective analysis and splines., *Journal of Geophysical Research*, *95*, 13,529–13,541, 1990.
- Menkes, C., A whirling ecosystem in the equatorial atlantic, *Geophys. Res. Lett.*, *29*, 1553, 2002.

- Menkes, C., J. Vialard, S. Kennan, J. Boulanger, et G. Madec, A modeling study of the impact of tropical instability waves on the heat budget of the eastern equatorial pacific, *JPO*, *36*, 847–865, 2006.
- Morse, P. M., et H. Feshbach, *Methods of theoretical physics (part I and II)*., Feshbach Publishing, Minneapolis, 1953.
- Mourre, B., P. D. Mey, Y. Ménard, F. Lyard, et C. L. Provost, Relative performance of future altimeter systems and tide gauges in constraining a model of north sea heigh-frequency barotropic dynamics, *Ocean Dynamics*, *56*, 473–486, 2006.
- Ménard, Y., Observations of eddy fields in the northwest atlantic and northwest pacific by seasat altimeter data, *J. geophys. Res.*, *88*, 1853–1866, 1983.
- Ott, E., H. B. R., I. Szunyogh, A. V. Zimin, E. J. Kostelich, M. Corazza, E. Kalnay, D. J. Patil, et J. A. Yorke, A local ensemble kalman filter for atmospheric data assimilation, *Tellus*, *56A*, 415–428, 2004.
- Parent, L., C. Testut, J. Brankart, J. Verron, P. Brasseur, et L. Gourdeau, Comparative assimilation of topeX/poseidon and ers altimeter data and tao temperature data in the tropical pacific ocean during 1994-1998, and the mean sea surface height issue, *Journal of marine systems*, *40*, 381–401, 2001.
- Pascual, A., M. I. Pujol, G. Larnicol, P. Le Traon, et M. Rio, Mesoscale mapping capabilities of multisatellite altimeter missions : First results with real data in the mediterranean sea, *J. Marine Syst.*, *65*, 190–211, 2007.
- Penduff, T., J. Le Sommer, B. Barnier, A.-M. Treguier, J.-M. Molines, et G. Madec, Influence of numerical schemes on current-topography interactions in $1/4^\circ$ global ocean simulations, *Ocean Science*, *3*, 509–524, 2007.
- Pham, D. T., J. Verron, et M. C. Roubaud, Singular evolutive extended Kalman filter with EOF initialization for data assimilation in oceanography, *J. Marine. Sys.*, *16*, 323–340, 1998a.
- Pham, D. T., J. Verron, et M. C. Roubaud, Singular evolutive extended kalman filter with eof initialization for data assimilation in oceanography, *J. Mar. Sys.*, *16*, 323–340, 1998b.
- Philander, S., et R. C. Pacanowski, The mass and heat budget in a model of the tropical atlantic ocean, *J. Phys. Oceanogr*, *14*, 212–220, 1986.
- Polito, P., J. Ryan, W. Liu, et F. Chavez, Oceanic and atmospheric anomalies of tropical instability waves, *Geophys. Res. Letter*, *28*, 2233–2236, 2001.
- Rabier, F., Importance of data : a meteorological perspective, in *Ocean Weather Forecasting : an Integrated View of Oceanography*, edited by E. P. Chassignet et J. Verron, pp. 343–360, Springer, 2006.
- Raj, M., et R. Sharma, Analytical short-term orbit prediction with j_2 , j_3 , j_4 in terms of k-s uniformly regular canonical elements, *Advances in Space Research*, *31*, 2019–2025, 2003.
- Reif, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw Hill, New York, 1965.
- Richardson, P., et D. Walsh, Mapping climatological seasonal variations of surface currents in the tropical atlantic using ship drifts, *J. Geophys. Rech*, *91*, 10,537–10,550, 1986.

- Richardson, P. L., G. Hufford, R. Limeburner, et W. Brown, North brazil current retroflection eddies, *J. Geophys. Res.*, *99*, 5081–5093, 1994.
- Rodriguez, E., et B. Pollard, Centimetric sea surface height accuracy using the wide-swath ocean altimeter, *Geoscience and Remote Sensing Symposium*, *5*, 3011–3013, 2003.
- Skachko, S., J. M. Brankart, F. Castruccio, P. Brasseur, et J. Verron, A sequential data assimilation approach for estimating turbulent air-flux bulk parameters, *RSE*, 2006.
- Stramma, L., et F. Schott, The mean flow field of the tropical atlantic ocean, *Deep Sea Res. II*, *46*, 279–303, 1999.
- Swenson, M., et D. Hansen, Tropical pacific ocean mixed layer heat budget : The pacific cold tongue, *J. Phys. Oceanogr.*, *29*, 69–81, 1999.
- Testut, C., P. Brasseur, J. Brankart, et J. Verron, Assimilation of sea-surface temperature and altimetric observations during 1992–1993 into an eddy permitting primitive equation model of the North Atlantic Ocean, *J. Marine. Sys.*, *40–41*, 291–316, 2003a.
- Testut, C., P. Brasseur, J. Brankart, et J. Verron, Assimilation of sea-surface temperature and altimetric observations during 1992–1993 into an eddy permitting primitive equation model of the north atlantic ocean, *J. Mar. Sys.*, *40–41*, 291–316, 2003b.
- Tippett, M. K., J. L. Anderson, C. H. Bishop, T. M. Hamill, et J. S. Whitaker, Ensemble square root filters, *Monthly Weather Review*, *131*, 1485–1490, 2003.
- Tranchant, B., C. E. Testut, L. Renault, N. Ferry, F. Birol, et B. P., Expected impact of the future smos and aquarius ocean surface salinity missions in the mercator ocean operational systems : New perspectives to monitor ocean circulation., *Remote Sens. Env.*, *112*, 1476–1487, 2008.
- Tréguier, A. M., B. Barnier, A. De Miranda, J. Molines, N. Grima, M. Imbard, G. Madec, C. Messenger, T. Reynaud, et S. Michel, An eddy-permitting model of the atlantic circulation : Evaluating open boundary conditions, *Journal of geophysical research*, *106*, 22,115–22,129, 2001.
- Ubelmann, C., J. Verron, J. Brankart, P. Brasseur, et E. Cosme, Impact of data from upcoming altimetric missions on the control of the three dimensional circulation in the tropical atlantic ocean, *JOO*, *2*, 3–14, 2009.
- Verron, J., Altimeter data assimilation into an ocean circulation model : Sensitivity to orbital parameters, *J. Geophys. Rech.*, *95*, 443–459, 1990.
- Verron, J., Nudging satellite data into quasi-geostrophic ocean models, *Journal of Geophysical Reaserch*, *97*, 7479–7491, 1992.
- Verron, J., et W. Holland, Impacts de données d’altimétrie satellitaire sur les simulations numériques des circulations océaniques aux latitudes moyennes, *Annales Geophysicae*, *71*, 31–46, 1989.
- Verron, J., L. Cloutier, et P. Gaspar, Assessing dual altimetric missions for observing the mid-latitudes ocean, *J. Atmos. Oc. Tech.*, *13*, 1073–1089, 1996.
- Verron, J., L. Gourdeau, D. T. Pham, R. Murtugudde, et A. J. Busalacchi, An extended kalman filter to assimilate satellite altimeter data into a non-linear numerical model of the tropical pacific : method and validation, *J. Geophys. Res.*, *104*, 5441–5458, 1999.

- Vialard, J., C. Menkes, J. Boulanger, P. Delecluse, E. Guilyardi, M. McPhaden, et G. Madec, A model study of oceanic mechanism affecting the equatorial pacific sea surface temperature during the 1997-8 el nino, *J. Phys. Oceanogr.*, *31*, 1649–1675, 2001.
- Vialard, J., C. Menkes, L. Anderson, et M. Balmaseda, Sensitivity of pacific ocean tropical instability waves to initial conditions, *J. Phys. Oceanogr.*, *33*, 105–121, 2002.
- Vossepoel, F., A. Weaver, J. Vialard, et P. Delecluse, Adjustment of near-equatorial wind stress with four-dimensional data assimilation in a model of the pacific ocean, *Advances in Space Research*, *132*, 2070–2082, 2003.

Thèse de Doctorat

Titre :

Etude de scénarios d'altimétrie satellitaire pour le contrôle de la circulation océanique dans l'océan Atlantique tropical par assimilation de données

Auteur :

Clément Ubelmann

Etablissement :

Université Joseph Fourier - Grenoble I

RÉSUMÉ

Ce travail de thèse a pour objectif d'évaluer l'apport des données altimétriques satellitaires sur le contrôle des circulations océaniques dans l'océan Atlantique Tropical par assimilation de données. Une méthode d'Expériences de Simulations de Systèmes d'Observations (OSSE) a été appliquée en expériences jumelles avec le modèle de circulation océanique NEMO dans une configuration emboîtée d'une résolution spatiale de 0.25° . Ces expériences ont été réalisées, de manière distinctes, pour deux phénomènes marquants de l'Atlantique Tropical : les ondes tropicales d'instabilités (TIW) et les tourbillons associés au courant du Brésil (NBC). Nous avons testé différents systèmes satellitaires, comprenant des satellites existants (JASON-1, JASON-2, ou ENVISAT ...), des satellites programmés (SARAL) ou encore en projet tels que SWOT. Pour ces derniers, différentes options d'orbites ont été envisagées. Les principaux résultats obtenus ont montré que si un seul satellite est suffisant pour contrôler la propagation des TIW et des tourbillons du NBC, un système multi-satellitaire est nécessaire pour corriger avec précision leur structure verticale. Certaines orbites se sont révélées plus favorables que d'autres pour corriger l'un des deux phénomènes, et l'existence de critères d'échantillonnage spécifiques (cycle de répétitivité, sous-cycles) est apparue comme déterminante. Enfin, les apports de l'altimétrie à large fauchée (qui devrait être opérationnelle dans quelques années) ont été mis clairement en évidence.

ABSTRACT

The main goal of this thesis is to evaluate the contribution of altimetric satellite data to constrain the ocean circulation of the Tropical Atlantic through data assimilation. An Observing System Simulation Experiments (OSSE) strategy has been used in a twin experiment context with the NEMO circulation model in an embedded configuration with a 0.25° spatial resolution. These experiments have been distinctly performed for two different phenomena in the Tropical Atlantic : the Tropical Instability Waves (TIW) and the vortices associated to the North Brazil Current (NBC). Several altimetric scenarios have been tested, with existing satellites (JASON-1, JASON-2 or ENVISAT ...), planned satellites (SARAL) or future projects like SWOT. Different orbit options have been considered. The main results have shown that if a single satellite is sufficient to constrain the TIW and NBC vortices position, a multi satellite system is necessary to correct their vertical structure. Some orbits turned out to be more favorable than other to correct TIW or NBC vortices. Moreover, the existence of specific sampling criteria (repetitivity cycle, sub-cycles) appeared to be decisive for correction. Improvements with wide swath altimetry assimilation (that should be operational in the next decade) have also been clearly shown.

MOTS CLÉS, KEY WORDS

Altimétrie, Assimilation de données, Modélisation numérique, OSSE, Atlantique tropical.
Altimetry, Data assimilation, Numerical modeling, OSSE, Tropical Atlantic.