HAL open science

G-structures projective et conforme et leur structure de BRS

Carina Tidei

To cite this version:

Carina Tidei. G-structures projective et conforme et leur structure de BRS. Physique mathématique [math-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2009. Français. NNT : . tel-00409501

HAL Id: tel-00409501

https://theses.hal.science/tel-00409501v1

Submitted on 10 Aug 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II
U.F.R. Sciences de Luminy
École doctorale N°352

Thèse de Doctorat

présentée pour obtenir le grade de
Docteur de l'université de la Méditerranée
Spécialité : Physique Théorique et Mathématique
par

TIDEI Carina

G-structures Projective et Conforme et leur Structure BRS

soutenue publiquement le 23 juillet 2009.

Jury :	M. Serge Lazzarini (Maître de Conférences-HDR)	Directeur de thèse
	M. François Gieres (Professeur)	Rapporteur
	M. Valentin Ovsienko (Chargé de Recherches-HDR)	Rapporteur
	M. Thomas Schücker (Professeur)	Examinateur

"Do not worry about your difficulties in mathematics;
I can assure you that mine are still greater."

Albert Einstein.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier celui sans qui ce mémoire n'existerait pas, mon directeur de thèse, Serge Lazzarini. Depuis le stage de maîtrise (nouvellement rebaptiser première année de master), il m'a initié à différents domaines de la physique théorique en me proposant des sujets de recherche toujours captivants. De plus, dès le début, il m'a appris que la recherche se faisait pas à pas, avec rigueur, et rarement (oserais-je dire jamais ?) en ligne droite. Il y a parfois des voies sans issue, d'autre fois des chemins trop flou au milieu de la broussaille, mais aussi de petits chemins escarpés qui mènent à de magnifiques plaines encore inexplorées. Je pense aujourd'hui que ces petits chemins valent la peine d'être suivis jusqu'au bout même si, parfois, il est très tentant de stopper net.

Au cours des ces trois années de thèse, Serge a toujours été présent et surtout m'a toujours soutenue (et supportée) pour finir de gravir cette montagne qu'est la thèse. Merci !

Je souhaite aussi remercier Christian Duval qui a toujours laissé sa porte ouverte et nous a permis d'avancer à grands pas grâce aux matrices magiques. Une partie de ces travaux ont vu le jour grâce à lui. Merci aussi à Thomas Schücker qui a fait bien plus que son travail d'éxaminateur et bien sûr à MM. Gieres et Ovsienko qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit par leur conseils, ainsi que donner d'autres pistes de recherche pour la suite.

Durant ces trois années, j'ai passé plus (ou moins ?) de la moitié de mes périodes d'éveil au sein du Centre de Physique Théorique, mon laboratoire d'accueil. Et si cela peut surprendre les non-initiés, j'ai passé sans doute le tiers (voire plus) de ce temps à tisser et/ou renforcer ce qu'on appelle des "liens sociaux". Je tiens donc à remercier toutes les personnes qui ont contribuer à mon développement social dans ce milieu hostile.

Tout d'abord Marine, amie depuis la licence et j'espère pour bien longtemps encore. Je ne pensais pas écrire ça un jour, mais merci pour tes "on va fumer ?" qui m'ont permis des pauses très agréables, même si je ne fume pas.

Merci aussi pour tes "coups de pieds aux fesses" et de ne pas m'avoir toujours dit ce que je voulais entendre, c'était nécessaire même si pas toujours agréable... Et m.... pour la suite.

Merci aussi à Pompon, alias Adeline, pour ses petites ronchonneries et sa bonne humeur. Mais s'il te plaît : "Prends de vraies vacances !!!!". Jean-Philippe, pour nos discussions interessantes, que ce soit scientifique, ou non. Et puis, dans le désordre, Romain, pour ses fous rires et ses gags parfois volontaires ; Greg, Jean-Phi-Phi et Thomas pour leur humour si particulier ; et enfin, tous les autres, Sebastian, Denis, Manue, Francesca et Ilaria qui ont apporté un peu plus de vie à ce 6ème étage.

Et puis bien sûr, celles qui font (ou ont fait) fonctionner le laboratoire, Marie-Thérèse toujours disponible, que ce soit pour le boulot, ou pour un petit pick-nique sur l'herbe ; Véronique, artiste dans l'âme qui m'initie aujourd'hui au dessin sous toutes ses formes ; et bien sûr, Annette, Béatrice, Marie-Hélène et Karine. Un merci particulier à Elisabeth, une tornade de bibliothécaire, extra efficace, mais un peu excessive (Promis, je vais bientôt déposé ma thèse dans TEL et t'en donner quatres exemplaires, ne me tue pas !).

Un dernier petit mot pour remercier tous ceux qui sont présents dans ma vie. Tout d'abord mon compagnon, Lionel, qui a réussi le tour de force de me supporter (dans tous les sens du terme) durant toutes ces années. Et bien sûr, mes parents, en particulier ma maman qui m'a fait énormément plaisir en lisant tout mon manuscrit.

Table des matières

Introduction **5**

1 Fibré des k-repères et Connexion de Cartan **9**
1.1 Les k-repères généraux 9
1.1.1 Des 1-jets aux 1-repères 10
1.1.2 Des 1-repères aux k-repères 14
1.1.3 Trivialisation locale du fibré des k-repères 21
1.1.4 Forme de soudure 22
1.2 Connexion de Cartan 23
1.2.1 Connexion de Ehresmann sur un fibré principal 23
1.2.2 Connexion de Cartan sur un fibré principal 25
1.2.3 Lien entre connexion de Cartan et connexion de Ehresmann 28

2 Connexion de Cartan **31**
2.1 Construction d'une connexion de Cartan 31
2.1.1 Géométrie de Klein modèle 32
2.1.2 Symboles de la connexion de Cartan 33
2.1.3 Choix d'une connexion de Cartan 36
2.2 Les G-structures 37
2.2.1 Définition 37
2.2.2 G-structure et connexion de Cartan 38
2.3 La G-structure projective 38
2.3.1 Structure projective 39
2.3.2 Les 2-repères projectifs 45
2.3.3 Connexion de Cartan projective 46
2.3.4 Comportement sous difféomorphismes des symboles de la connexion de Cartan projective 49
2.3.5 Connexion de Cartan et dérivée de Schwarz 51
2.4 La G-structure conforme 54
2.4.1 Structure conforme 54

2.4.2 Définition de l'action de C_3 sur $\mathfrak{co}$ 60
2.5 Les 2-repères conformes 61
2.5.1 Connexion de Cartan conforme 62
2.5.2 Comportement des symboles de la connexion de Cartan conforme 64
2.5.3 Connexion de Cartan conforme et dérivée de Schwarz . 66

3 Transformations de jauge 69
3.1 Yang-Mills BRS 69
3.1.1 Algèbre BRS pour les théories de jauge de type Yang-Mills usuelles 70
3.1.2 Algèbre BRS sur les G-structures 71
3.2 Transformation de jauge unidimensionnelle 73
3.3 Transformation de jauge projective 76
3.4 Transformations de jauge conformes 80

Conclusion et perspectives 83

A Connexion de Cartan normale 87
A.1 Connexion de Cartan conforme normale 87
A.2 Connexion de Cartan projective normale 89

B Dépendance des symboles 91

C BRS sur les 2-repères conformes 93
C.1 Opérateur de BRS et structure conforme 93
C.2 Action de l'opérateur de BRS sur les 2-repères conformes . . . 94
C.3 Expression locale des champs fantômes conformes 95

D Article publié : Polyakov soldering and second order frames the role of the Cartan connection 97
D.1 Introduction 99
D.2 Second order frames 99
D.3 Cartan connection on second order frames 101
D.4 Reduction to the projective case 103
D.5 The BRS-structure 105
D.6 Conclusions 107

Introduction

Globalement, on peut considérer que le monde de la physique est aujourd'hui coupé en deux. Les théories décrivant les mondes de l'« infiniment grand » et de l'« infiniment petit » ne paraissent pas compatibles. Ce constat est une dure épreuve pour tous les physiciens théoriciens rêvant d'une simple et magnifique *théorie du tout* unifiant les quatre intéractions fondamentales.

D'un coté, on trouve l'une des théories les plus esthétiques de la physique actuelle, la relativité générale. Elle nous permet de décrire la dynamique de l'univers de façon extrêmement simple et efficace. A. Einstein [1] nous apprend que la masse d'un objet influe sur tout ce qui l'entoure et que celui-ci courbe l'espace proche. Une excellente image est celle d'une surface, imaginons un drap parfaitement tendu, sur laquelle sont déposées des billes de différentes tailles et masses. Le poids de ces billes et leur forme vont donc faire ployer le tissu, non pas juste au point de contact, mais aussi dans son voisinage. Tout objet se déplaçant sur cette surface suit alors, pour joindre deux points, non plus une ligne droite, mais le chemin du moindre effort, les géodésiques.

De l'autre coté se regroupent les trois autres forces fondamentales, visibles à l'échelle des constituants élémentaires de la matière, les forces forte, faible et électromagnétique. Depuis plusieurs décennies, ces trois forces sont elles aussi formulées élégamment sous la forme de théories de jauge [2]. Ces formalismes utilisant la géométrie différentielle, tout comme la théorie de la relativité générale, permettent de les définir grâce à leurs propriétés de symétrie, encore appelées *invariance de jauge*. Ceci nous permet alors de définir dans les cas classiques (où seule la force électromagnétique est pertinente) comme dans les cas quantiques l'action de ces forces.

Tout un chacun pourrait alors penser que l'inadéquation entre ces théories est due au fait que, soit la relativité générale, soit la théorie quantique des champs sont de mauvais modèles théoriques. Malheureusement, du moins pour les théoriciens, les comparaisons entre résultats expérimentaux et prédictions sont en accord quasi parfait. On peut citer, comme exemple, l'électrodynamique quantique (ou QED) permettant une adéquation quasi par-

faite entre la valeur expérimentale et la valeur théorique du facteur $(g-2)$ électronique [3], ou encore l'excellente fiabilité des mémoires numériques type « *mémoire flash* » fonctionnant sur le principe de l'effet tunnel. En faveur de la relativité générale, il y a bien sûr un objet technologique que beaucoup utilisent aujourd'hui, le *Global Positionning System* (GPS) capable de déterminer, grâce à des satellites, notre position à la dizaine de mètres près pour les plus perfectionnés. Le seul point de concordance de ces théories semble donc être l'excellent accord entre les prédictions et l'expérience.

Le développement de la physique des particules montre que les théories de jauge peuvent être parfaitement comprises dans le formalisme géométrique des théories de type de Yang-Mills. Dans ces théories de jauge, ce sont les symétries internes du système étudié qui interviennent, et non pas les symétries de l'espace-temps. Les champs de jauge trouvent alors le statut de 1-forme locale de connexion sur un fibré principal. Il existe alors plusieurs outils pour faire le lien entre les théories classiques et leurs versions quantiques. Les plus usités font appel à des méthodes de géométrie différentielle. On cherche alors à mettre en relation univoque les observables classiques, définies comme des applications entre la variété de base et l'espace des fonctions, et leurs correspondants quantiques, des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert. L'utilisation de la géométrie différentielle permet ainsi de s'assurer de la pertinence de chaque étape de quantification.

Une voie de résolution du problème entre la mécanique quantique et la théorie de la relativité générale peut donc être la formulation de celle-ci en termes d'une théorie de jauge quantifiable. La littérature actuelle présente de nombreux exemples permettant cette formulation. Hélas, certaines conduisent au fait que tous les évenements de l'univers sont équivalents de jauge [4, 5]. Il n'y aurait donc pas d'évolution temporelle dans le sens où nous l'entendons actuellement. D'autres théories présentent des champs de jauge relatifs à la gravitation d'un genre tout à fait différent des autres [6, 7], interdisant le couplage et donc l'interaction entre la force gravitationnelle et les trois autres forces fondamentales.

Le but de ce travail de thèse est la présentation d'un nouvel outil permettant d'exprimer l'action infinitésimale de certains difféomorphismes, *i.e.* les transformations de symétrie de la relativité générale, comme des transformations de jauge infinitésimales. Il pourrait ainsi être permis de définir la théorie de la relativité générale comme une théorie de jauge semblable aux autres et son couplage avec les forces électromagnétique, forte et faible en serait facilité. Nous nous sommes donc attachés à l'utilisation de systèmes de coordonnées locales, permettant de définir des outils directement compré-

hensibles pour tout physicien théoricien. De plus, nous avons consacré une importance particulière à la mise en place d'un dictionnaire entre les formalismes présents dans la littérature mathématique et un formalisme plus adéquate pour la physique. Par la même occasion, les outils de géométrie différentielle présentés dans cette thèse permettent de lever certaines zones d'ombre dans le travail effectué par l'équipe « symétrie et physique » du Centre de Physique Théorique au milieu des années 90 [8]. Plus important, la notion de connexion de Cartan sur le fibré des repères d'ordre 2 a permis de résoudre un problème ouvert depuis une vingtaine d'années, originellement formulé par A.M. Polyakov [9] qui obtient formellement l'action de difféomorphismes (symétrie de l'espace-temps) à partir d'une transformation de jauge (symétrie interne).

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à la présentation détaillée des outils géométriques que nous utilisons. Tout d'abord, l'espace des k-repères de torsion nulle, un fibré principal muni d'un groupe de stucture particulier, le groupe différentiel d'ordre k. Ensuite, d'une façon indépendante, un type de connexion suscitant un regain d'intérêt en physique [10–12], la notion de connexion de Cartan sur un fibré principal. Ces connexions créent un isomorphisme entre l'espace tangent du fibré et l'algèbre de Lie d'un groupe contenant le groupe de structure du fibré. Afin de retrouver le cadre habituel des théories de jauge de type Yang-Mills, nous explicitons le lien entre les connexions de Cartan et les connexions de Ehresmann, dénomination mathématique de la notion de connexion usuellement employée en théorie de jauge de type Yang-Mills.

Le second chapitre aborde les notions de G-structures projective et conforme comme réductions du fibré des 2-repères en sous-fibré principaux. La construction d'une connexion de Cartan sur ces G-structures est alors présentée. Le point technique important, au regard du physicien, est le calcul des expressions locales de la 1-forme de connexion de Cartan. Il est effectué en détail sur chacune de ces G-structures. Tout particulièrement, le choix d'une section-repère (ou choix de jauge) projective ou conforme permet de calculer les *symboles de la connexion*, généralisation des symboles de Christoffel [13]. Dans ce choix de jauge, les connexions de Cartan projective et conforme sont alors paramétrées par un 1-cocycle du groupe des difféomorphismes de l'espace-temps à valeur dans les tenseurs symétriques d'ordre 2, possible généralisation en dimension arbitraire de la dérivée de Schwarz.

Grâce au lien entre connexion de Ehresmann et connexion de Cartan, il est naturel de transposer l'utilisation d'algèbre différentielle des théories de jauge aux connexions de Cartan. Dans le dernier chapitre, nous exposons, dans le

formalisme de BRS, développé par C. Becchi, A. Rouet et R. Stora, prix Daniel Heinemann 2009, une théorie de jauge s'appliquant à la connexion de Cartan. Cette algèbre nous permet de retrouver, dans le cas unidimensionel, une théorie de jauge reproduisant l'action infinitésimale des difféomorphismes [9, 14]. De plus, la généralité du traitement permet d'élaborer la structure de BRS en dimension arbitraire pour les deux G-structures étudiées.

Chapitre 1

Fibré des k-repères et Connexion de Cartan

À l'heure actuelle, les théories physiques peuvent, en majorité, être traitées systématiquement grâce à l'utilisation de la géométrie différentielle. Cet outil mathématique puissant permet d'associer à chaque observable un « objet » géométrique. Par exemple, à un hamiltonien sont associés des champs de vecteurs décrivant la dynamique, les champs de jauge sont eux décrits par les composantes d'une connexion, etc. . De plus, grâce à la possible prise en compte de contraintes, les symétries du système physique étudié sont directement intégrées dans l'espace choisi pour modèle.

Ce premier chapitre présente, en premier lieu, l'espace sur lequel nous travaillerons par la suite, l'espace des k-repères généraux. Cet espace est une généralisation d'un espace étudié par C. Ehresmann ([15] et réf. liées), puis repris par [16] dans un langage plus moderne.

Dans un second temps, nous définirons l'objet géométrique principal de notre travail, la connexion de Cartan. La notion de connexion de Cartan est définie par E. Cartan lui-même [17] comme une généralisation des connexions affines proposées par H. Weyl [18]. Nous verrons, à la fin de ce chapitre, comment relier la notion de connexion de Cartan avec la notion, plus standard, de connexion de Ehresmann définie sur un fibré principal.

1.1 Les k-repères généraux

Un repère est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, formant une base d'un espace vectoriel. Il permet ainsi de mesurer cet espace en le munissant, via les composantes de ce repère, d'un système de coordonnées. Rappelons que l'espace tangent en un point x d'une variété quelconque M,

noté T_xM, est lui-même un espace vectoriel. La notion de repère peut donc être généralisée en définissant un repère en un point $x \in M$ comme étant un repère de T_xM.

Considérons deux repères différents en un même point $x \in M$. Il est possible de les relier grâce à l'action à droite simplement transitive[1] d'un unique élément du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des repères au-dessus d'un point x, noté L_xM, est donc homéomorphe à $GL_n(\mathbb{R})$ [19]. L'ensemble de tous les repères (linéaires) d'une variété M :

$$LM = \bigcup_{x \in M} L_xM,$$

forme alors un fibré principal au-dessus de M de groupe structural $GL_n(\mathbb{R})$.

Sur le fibré LM, considéré comme une variété, il est alors possible de construire le fibré des repères linéaires au-dessus de LM, noté $L(LM)$. Il s'agit alors du fibré des 2-repères linéaires au-dessus de M. Par récurrence, on peut ainsi construire le fibré de k-repères linéaires [20]. Cependant, dans le cadre de notre étude, nous utiliserons une définition légèrement plus restrictive du fibré des repères linéaires au-dessus d'une variété admettant une généralisation plus adaptée au traitement local, nécessaire en physique.

Dans cette optique, nous emploierons la définition des repères de *torsion nulle* essentiellement utilisée par l'école japonaise [13, 16, 21, 22], mais aussi par [23].

1.1.1 Des 1-jets aux 1-repères

Les 1-jets

Soient M et N deux variétés de dimension n munie des systèmes de coordonnées locales respectifs$\{x^\alpha\}_{\alpha=1\ldots n}$ et $\{x^\mu\}_{\mu=1\ldots n}$, et un difféomorphisme local $\phi : M \to N$, défini au voisinage d'un point $x_0 \in M$. Le 1-jet en ce point $x_0 \in M$ du difféomorphisme local ϕ est défini comme la classe d'équivalence de ϕ :

$$j^1_{x_0}(\phi) := \left\{ f \in \mathrm{Diff}(M,N) \middle| f(x_0) = \phi(x_0), \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_{x_0} \right\}.$$

L'ensemble $j^1_{x_0}(\phi)$ est donc l'ensemble des difféomorphismes locaux de M dans N ayant le même développement de Taylor que le difféomorphisme

[1] Si on choisit un repère quelconque comme référence, noté e, tous les autres repères au même point pourront être définis grâce à un unique élement $g \in GL_n(\mathbb{R})$: $e' = e \cdot g$. Réciproquement, tout repère e' détermine un unique élement $g \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $e' = e \cdot g$.

local ϕ, au premier ordre en $x_0 \in M$. Soit

$$J^1(M,N) = \{j^1_{x_0}(\phi) | \phi \in \mathrm{Diff}(M,N), x_0 \in M\},$$

l'ensemble de tous les 1-jets des difféomorphismes locaux de M dans N. Cet ensemble est un espace fibré [24] au-dessus de M dont la projection canonique $\tilde{\pi} : J^1(M,N) \to M$ est définie comme la projection sur la source du 1-jet. Ce fibré est alors muni d'un système de coordonnées induit par les systèmes de coordonnées locales $\{x^\alpha\}_{\alpha=1\ldots n}$ sur M et $\{x^\mu\}_{\mu=1\ldots n}$ sur N :

$$(x^\alpha, x^\mu, {x^\mu}_\alpha),$$

tel que :

$$\begin{aligned} x^\alpha(j^1_{x_0}(\phi)) &= {x_0}^\alpha, \qquad x^\mu(j^1_{x_0}(\phi)) = \phi(x_0)^\mu, \\ {x^\mu}_\alpha(j^1_{x_0}(\phi)) &= \left.\frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_{x_0} \overset{\text{notation}}{=} \partial_\alpha \phi^\mu|_{x_0}. \end{aligned}$$

Si on considère deux difféomorphismes $\psi : M' \to M$ et $\phi : M \to N$. Le 1-jet en x_0 de la composée $j^1_{x_0}(\phi \circ \psi)$ définit, par la loi de dérivation des fonctions composées, la loi de multiplication sur l'espace des 1-jets :

$$j^1_{\psi(x_0)}(\phi) \cdot j^1_{x_0}(\psi) = j^1_{x_0}(\phi \circ \psi).$$

Dans un système de coordonnées locales, les 1-jets des difféomorphismes ψ et ϕ s'expriment comme :

$$j^1_{x_0}(\psi) = ({x_0}^{\alpha'}, \psi(x_0)^\alpha, \partial_{\alpha'}\psi^\alpha|_{x_0}),$$

$$j^1_{\psi(x_0)}(\phi) = (\psi(x_0)^\alpha, \phi(\psi(x_0))^\mu, \partial_\alpha \phi^\mu|_{\psi(x_0)}).$$

Leur produit s'ecrira donc[2] :

$$j^1_{\psi(x_0)}(\phi) \cdot j^1_{x_0}(\psi) = ({x_0}^{\alpha'}, \phi(\psi(x_0))^\mu, \partial_{\alpha'}\psi^\alpha|_{x_0}\, \partial_\alpha \phi^\mu|_{\psi(x_0)}). \tag{1.1}$$

On peut alors définir la notion de 1-jet général :

Définition 1.1.1. *Un 1-jet général f^1 est une section du fibré $J^1(M,N)$ au-dessus de M. Dans le système de coordonnées locales, un 1-jet pourra s'exprimer :*

$$\begin{aligned} f^1 : M &\to J^1(M,N) \\ x &\mapsto f^1(x) = (x^\alpha, f^\mu(x), {f^\mu}_\alpha(x)), \quad det({f^\mu}_a) \neq 0 \end{aligned}$$

où les fonctions $f^\mu(x)$ et ${f^\mu}_\alpha(x)$ sont indépendantes l'une de l'autre.

[2] où nous utiliserons constamment la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés.

Le fibré $J^1(M,N)$ peut aussi être vu comme un fibré au-dessus de la variété « but » N [24]. La projection canonique $\pi : J^1(M,N) \to N$ est alors définie comme la projection sur le but :

$$\forall f_1 : x \in M \mapsto (x^\alpha, f^\mu(x), f^\mu{}_\alpha(x)), \quad \pi(f_1(x)) = f(x).$$

Utilisons le fait que les graphes des difféomorphismes locaux $\phi : M \to N$ peuvent être vus comme des sections du fibré trivial $M \times N \to M$. Dans ce cas, le fibré $J^1(M,N)$ peut être construit comme le fibré des 1-jets des sections de $M \times N \to M$. Ce point de vue est d'ailleurs celui utilisé pour définir le fibré des 1-repères de l'école japonaise.

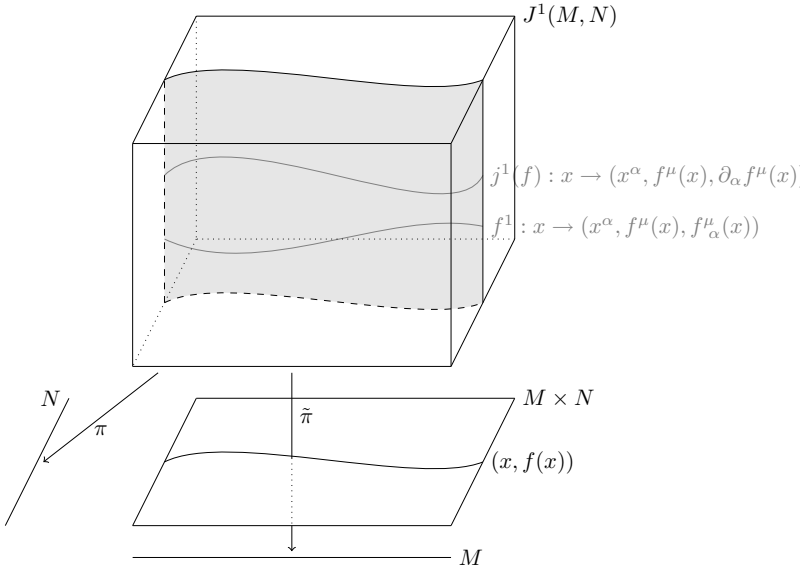


FIG. 1.1: *Fibré $J^1(M,N)$ au-dessus de M et de N. Deux sections différentes de $J^1(M,N)$ sont représentées, $j^1(f)$ associant à $x \in M$ le 1-jet de f, et f^1 associant à $x \in M$ un 1-jet général de même but $f^\mu(x)$, ainsi que la variété $M \times N$ avec le graphe de f.*

Le groupe différentiel d'ordre 1

Considérons maintenant les difféomorphismes g de $\mathbb{R}^n$ qui préservent un point, que nous prendrons comme étant l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$. Ces difféomorphismes forment alors un groupe, nommé, dans la littérature mathématique le groupe d'isotropie de zéro, et dans la littérature physique stabilisateur ou encore *petit groupe de* 0. L'espace des 1-jets de tels difféomorphismes forme un groupe de Lie, nommé groupe différentiel d'ordre 1 et noté G_1.

La loi de multiplication de deux éléments du groupe est déduite de la loi générale de multiplication des 1-jets (1.1) :

$$\forall g_1 = j^1_0(g),\, g'_1 = j^1_0(g') \in G_1, \quad g_1 \cdot g'_1 = j^1_0(g) \cdot j^1_0(g') = j^1_0(g \circ g').$$

L'élement neutre est alors le 1-jet de l'identité sur $\mathbb{R}^n$:

$$id_1 = j_0^1(id_{\mathbb{R}^n}).$$

Soit $\{u^a\}_{a=1\ldots n}$, un système de coordonnées locales sur $\mathbb{R}^n$, un élement de G_1 s'écrira :

$$G_1 \ni g_1 = (0, 0, g^a{}_{a'}) = (g^a{}_{a'}),$$

où les 0 (correspondants à la source et au but) peuvent être omis puisqu'ils sont fixés. L'élément neutre s'écrit alors $id_1 = (\delta^a{}_{a'})$ et le produit de deux éléments :

$$g_1 = (g^a{}_{a'}), \quad g_1' = (g^{a'}{}_{a''}), \qquad g_1 \cdot g_1' = (g^a{}_{a'}\, g^{a'}{}_{a''}).$$

Le groupe différentiel d'ordre 1, G_1, est donc isomorphe au groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

$$G_1 \simeq GL(n, \mathbb{R}).$$

Les 1-repères

La notion de 1-jet et la définition du groupe différentiel d'ordre 1 permettent une autre définition du fibré des 1-repères [13,16,21,22], plus appropriée à la géométrie différentielle :

Définition 1.1.2. *Soit l'ensemble des 1-jets en 0 de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dans M :*

$$F^1M := \{j_0^1(f) | f \in \mathit{Diff}(\mathbb{R}^n, M), f(0) = x\}.$$

Par la projection canonique sur le but $\pi : F^1M \to M$, cet ensemble est un fibré principal au-dessus de M de groupe structural $G_1 \simeq GL_n(\mathbb{R})$, nommé fibré des 1-repères.

Les systèmes de coordonnées locales $\{u^a\}_{a=1\ldots n}$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\{x^\mu\}_{\mu=1\ldots n}$ sur M induisent sur F^1M le système de coordonnées locales suivant :

$$(u^a, x^\mu, x^\mu{}_a),$$

tel que :

$$u^a(j_0^1(f)) = 0, \quad x^\mu(j_0^1(f)) = f^\mu(0), \quad x^\mu{}_a(j_0^1(f)) = \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial u^a}\right|_{u=0} = \partial_a f^\mu(0).$$

Comme pour décrire les éléments du groupe G_1, nous omettrons la source 0 puisqu'elle est fixée, *i.e.* en coordonnées :

$$j_0^1(f) = (f^\mu(0), \partial_a f^\mu(0)).$$

Il est alors possible de définir un 1-repère général comme :

Définition 1.1.3. *Un* 1*-repère général est une section du fibré principal* F^1M *au-dessus de* M*, noté*

$$\begin{aligned} e_1 : M &\rightarrow F^1M, \\ x &\mapsto e_1(x) = (x^\mu, e^\mu{}_a(x)), \quad det(e^\mu{}_a) \neq 0. \end{aligned}$$

Un 1-repère peut alors être représenté par une fonction affine de $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$, à valeur dans M, notée $f_1(\mathrm{u})$ s'écrivant localement :

$$f_1^\mu(\mathrm{u}) = x^\mu + e^\mu{}_a(x)u^a, \tag{1.2}$$

telle que :

$$e_1(x) = j_0^1(f_1(\mathrm{u})).$$

Le groupe différentiel d'ordre 1 étant défini à l'aide des 1-jets de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ fixant 0, et les 1-repères pouvant être représentés comme des 1-jets, l'action à droite du groupe de structure peut se déduire de la loi de multiplication des 1-jets par :

$$\forall e_1(x) = (x^\mu, e^\mu{}_a(x)) \in F^1M \text{ et } g_1 = (g^{a'}{}_a) \in G_1, \qquad e_1 \cdot g_1 = (x^\mu, e^\mu{}_a\, g^a{}_{a'}).$$

On peut alors noter que cette définition du fibré des 1-repères donne un fibré ayant la même structure que le fibré des 1-repères linéaires défini comme le fibré principal de groupe de structure $GL(n, \mathbb{R})$ au-dessus de M. Nous avons donc l'isomorphisme de fibré :

$$LM \simeq F^1M.$$

1.1.2 Des 1-repères aux k-repères

Nous allons maintenant généraliser la définition des 1-repères, que nous venons d'énnoncer, aux ordres supérieurs grâce à la notion de k-jets, $k = 1, 2, \ldots$.

Des 1-jets aux k-jets

Le k-jet en un point $x_0 \in M$ d'un difféomorphisme local $\phi : M \rightarrow N$ est défini comme la classe d'équivalence :

$$\begin{aligned} j_{x_0}^k(\phi) := \quad & \Bigg\{ f \in \mathrm{Diff}(M, N), \\ & \text{telles que } f(x_0) = \phi(x_0), \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x_0}, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}}\right|_{x_0}, \ldots, \\ & \left.\frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1}\ldots\partial x^{\alpha_k}}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial^k \phi}{\partial x^{\alpha_1}\ldots\partial x^{\alpha_k}}\right|_{x_0} \Bigg\}. \end{aligned}$$

L'ensemble de tous les k-jets de difféomorphismes locaux, noté :

$$J^k(M,N) = \{j^k_{x_0}(\phi) | \phi \in \mathrm{Diff}(M,N), x_0 \in M\},$$

est un espace fibré au-dessus de la variété source M. Les systèmes de coordonnées locales $\{x^\alpha\}_{\alpha=1..n}$ sur M et $\{x^\mu\}_{\mu=1..n.}$ sur N induisent un système de coordonnées locales sur $J^k(M,N)$:

$$(x^\alpha, x^\mu, {x^\mu}_\alpha, \ldots, {x^\mu}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}),$$

tel que :

$$x^\alpha(j^1_{x_0}(\phi)) = {x_0}^\alpha, \quad x^\mu(j^1_{x_0}(\phi)) = \phi(x_0)^\mu, \quad {x^\mu}_\alpha(j^1_{x_0}(\phi)) = \left.\frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\alpha}\right|_{x_0} = \partial_\alpha \phi^\mu|_{x_0}, \ldots,$$

$${x^\mu}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(j^1_{x_0}(\phi)) = \partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n} \phi^\mu|_{x_0},$$

où, par le théorème de Schwarz, les indices du bas sont symétriques. Nous pouvons alors définir :

Définition 1.1.4. *Un k-jet général est une section f^k du fibré $J^k(M,N)$ au-dessus de M, s'écrivant en coordonnées :*

$$\begin{array}{rcl} F^k : M & \to & J^k(M,N) \\ x & \mapsto & f^k(x) = (x^\alpha, f^\mu(x), {f^\mu}_\alpha(x), \ldots, {f^\mu}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x)), \quad det({f^\mu}_a) \neq 0 \end{array}$$

où les fonctions $f^\mu(x), {f^\mu}_\alpha(x), \ldots, {f^\mu}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x)$ sont indépendantes les unes des autres.

Les groupes différentiels

Le groupe différentiel d'ordre k est défini comme l'ensemble des k-jets en $0 \in \mathbb{R}^n$ de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ préservant 0 :

$$G_k = \{j^k_0(g) | g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n), g(0) = 0\}.$$

Tous les groupes différentiels forment des groupes de Lie, dont la loi de multiplication est déduite de la loi de multiplication des jets par :

$$\forall g_k = j^k_0(g), g'_k = j^k_0(g'), \quad g_k \cdot g'_k = j^k_0(g \circ g').$$

L'élement neutre est donnée par le k-jet en 0 de l'identité de $\mathbb{R}^n$, *i.e.* :

$$id_k = j^k_0(id_{\mathbb{R}^n}) = ({\delta^a}_{a'}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(k-1) \text{ fois}}),$$

et les inverses sont déterminés par :

$$g_k \cdot g_k^{-1} = j_0^k(g) \cdot j_0^k(g^{-1}) = id_k \quad \Rightarrow \quad g_k^{-1} = j_0^k(g^{-1}). \tag{1.3}$$

Il est possible de définir les projections canoniques suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \pi_{k-1}^k : G_k & \to & G_{k-1} \\ j_0^k(g) & \mapsto & j_0^{k-1}(g). \end{array}$$

Ces projections sont des morphismes de groupe dont le noyau est un sous-groupe distingué de G_k, noté GL_{k-1}. On a alors :

$$G_k/GL_{k-1} \simeq G_{k-1}.$$

De plus, G_{k-1} étant un sous-groupe de G_k :

$$G_k \simeq GL_{k-1} \ltimes G_{k-1}.$$

En posant $GL_0 = G_1 \simeq GL_n(\mathbb{R})$, on obtient la décomposition du groupe différentiel d'ordre k G_k en produit semi-direct, par composition des projections canoniques :

$$G_k \simeq GL_0 \ltimes GL_1 \ltimes \cdots \ltimes GL_{k-1}. \tag{1.4}$$

Traitons maintenant l'exemple du groupe différentiel d'ordre 3, G_3, qui nous préoccupera tout particulièrement par la suite. Un élément de G_3 s'écrivant $g_3 = ({g^a}_{a'}, {g^a}_{a'b'}, {g^a}_{a'b'c'})$ et un élément de G_2, $g_2 = ({g^a}_{a'}, {g^a}_{a'b'})$, le noyau de la projection ${\pi^3}_2$ est :

$$\mathrm{Ker}({\pi^3}_2) = GL_2 = \{g_3 \in G_3 | {\pi^3}_2(g_3) = id_2\} = \{({\delta^a}_{a'}, 0, {g^a}_{a'b'c'}) \in G_3\}.$$

On peut, de même, déterminer le noyau de la projection ${\pi^2}_1 : G_2 \to G_1$:

$$\mathrm{Ker}({\pi^2}_1) = GL_1 = \{g_2 \in G_2 | {\pi^2}_1(g_2) = id_1\} = \{({\delta^a}_{a'}, {g^a}_{a'b'})\}.$$

Il est donc possible de décomposer un élement g_3 de ce groupe comme le produit de trois termes via (1.4) :

$$\begin{array}{rcl} \forall g_3 & = & ({g^a}_{a'''}, {g^a}_{a'''b'''}, {g^a}_{a'''b'''c'''}) \\ & = & \underbrace{({g^a}_{a'}, 0, 0)}_{\in GL_0} \cdot \underbrace{({\delta^{a'}}_{a''}, {g^{a'}}_{a''b''}, 0)}_{\in GL_1} \cdot \underbrace{({\delta^{a''}}_{a'''}, 0, {g^{a''}}_{a'''b'''c'''})}_{\in GL_2}. \end{array}$$

Soit $GL_{-1} \simeq \mathbb{R}^n$, le groupe des translations, d'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{-1}$. L'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{g}_k$, du groupe différentiel d'ordre k, augmentée de l'algèbre de Lie des translations $\mathfrak{gl}_{-1}$ est une algèbre de Lie graduée [16] au sens suivant :

$$\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_k = \mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{gl}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{k-1} \quad \text{telle que} \quad [\mathfrak{gl}_i, \mathfrak{gl}_j] \subset \mathfrak{gl}_{i+j}, \tag{1.5}$$

avec par convention, si $i+j>k, \mathfrak{gl}_{i+j}=0$.

Les éléments de cette algèbre de Lie graduée peuvent être écrits comme les champs de vecteurs[3] X^k associés au k-jets en 0 de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ (ne préservant pas 0), *i.e.* :

$$\mathfrak{gl}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_k\ni X^k=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} j_0^k(f_t)\ \in\ T_{id_k}J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),$$

où f_t est une application de $\mathbb{R}$ dans les difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ telle que $f_0=id_{\mathbb{R}^n}$, *i.e.* un chemin différentiable dans $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$.

Dans un système de coordonnées locales, un élément X^k sera représenté par :

$$X^k=(X^a,X^a{}_b,\dots,X^a{}_{a_1\dots a_{k-1}}),$$

ou encore comme les coordonnées du k-jet du champ de vecteurs au point $\mathrm{u}\in\mathbb{R}^n$:

$$X_k|_{\mathrm{u}}=\left(X^a+X^a{}_bu^b+\dots+\frac{1}{(k-1)!}X^a{}_{a_1\dots a_{k-1}}u^{a_1}\dots u^{a_{k-1}}\right)\partial_a,\qquad X^k=j_0^k(X_k).$$

Si on considère deux éléments $X^2,Y^2\in\mathfrak{gl}_{-1}\oplus\mathfrak{gl}_0\oplus\mathfrak{gl}_1$, leur crochet de Lie s'écrit alors localement :

$$[X,Y]=\left([X,Y]^a+[X,Y]^a{}_bu^b+\frac{1}{2}[X,Y]^a{}_{bc}u^bu^c\right)\partial_a,$$

avec :

$$\begin{aligned}
[X,Y]^a &= X^a{}_bY^b-Y^a{}_bX^b \quad\in\mathfrak{gl}_{-1},\\
[X,Y]^a{}_b &= X^a{}_cY^c{}_b+X^a{}_{bc}Y^c-(X\leftrightarrow Y)\quad\in\mathfrak{gl}_0,\\
[X,Y]^a{}_{bc} &= X^a{}_dY^d{}_{bc}+X^a{}_{bd}Y^d{}_c+X^a{}_{dc}Y^d{}_b-(X\leftrightarrow Y)\quad\in\mathfrak{gl}_1.
\end{aligned}\tag{1.6}$$

Par la suite, nous aurons besoin de définir une action du type action adjointe du groupe différentiel G_k sur l'algèbre de Lie augmentée $\mathfrak{gl}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_k$. À cette fin, nous utilisons le fait que les éléments de cette algèbre de Lie sont définis grâce aux k-jets en 0 de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$, tout comme les éléments de G_k. Nous définissons donc cette action par :

$$X^k=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} j_0^k(f_t)\to X'^k=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} j_0^k(g\circ f_t\circ g^{-1}),$$

[3]aussi appelés difféomorphismes formels infinitésimaux [20] ou champs de vecteurs formels.

avec $g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n), g(0) = 0$.

Il faut alors prendre garde au fait que $f_{t\neq 0}(0) \neq 0$, c'est-à-dire que la source n'est plus fixée. La dérivation par rapport au paramètre t a donc pour conséquence d'augmenter de 1 l'ordre des jets de g. Cela interdit donc d'écrire naïvement :

$$X'^k = j_0^k(g) \cdot X^k \cdot j_0^k(g)^{-1}.$$

L'action définie ci-dessus n'est donc pas une action adjointe. De plus, c'est une action, non pas de G_k, mais de G_{k+1} sur $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_k$, que nous noterons dans la suite :

$$X'^k = \overline{\mathrm{Ad}}(g_{k+1})X^k = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} j_0^k(g \circ f_t \circ g^{-1}). \tag{1.7}$$

En revanche, il s'agit bien d'une action à gauche, puisqu'il est facile de vérifier que :

$$\overline{\mathrm{Ad}}(g_{k+1})\overline{\mathrm{Ad}}(g'_{k+1})X^k \quad = \quad \overline{\mathrm{Ad}}(g_{k+1} \cdot g'_{k+1})X^k.$$

Notons ici que cette action est définie par [16] comme étant l'action adjointe de G_{k+1} sur $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_k$.

A titre d'exemple, l'expression locale de $X'^2 = \overline{\mathrm{Ad}}(g_3)X^2$, $X^2 \in \mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{gl}_0 \oplus \mathfrak{gl}_1$ est représenté par le champ de vecteurs :

$$X'_2 = \left(X^{a'} + X^{a'}_{\ b'} u^{b'} + \frac{1}{2} X^{a'}_{\ b'c'} u^{b'} u^{c'} \right) \partial_{a'},$$

avec

$$\begin{aligned}
X^{a'} &= g^{a'}_{\ a} X^a, \\
X^{a'}_{\ b'} &= g^{a'}_{\ ab} X^a g^b_{\ b'} + g^{a'}_{\ a} X^a_{\ b} g^b_{\ b'}, \\
X^{a'}_{\ b'c'} &= g^{a'}_{\ abc} X^a g^b_{\ b'} g^c_{\ c'} + g^{a'}_{\ ab} X^a_{\ c} g^c_{\ c'} g^b_{\ b'} + g^{a'}_{\ ab} X^a g^b_{\ b'c'} \\
&\quad + g^{a'}_{\ ac} X^a_{\ b} g^b_{\ b'} g^c_{\ c'} + g^{a'}_{\ a} X^a_{\ bc} g^b_{\ b'} g^c_{\ c'} + g^{a'}_{\ a} X^a_{\ b} g^b_{\ b'c'}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Les k-repères

Le fibré des 1-repères au-dessus d'une variété M, de dimension n, est le fibré principal de groupe structural G_1 dont les éléments sont les 1-jets en 0 des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dans M. La définition est analogue à l'ordre k :

Définition 1.1.5. *Le fibré des k-repères au-dessus d'une variété M de dimension n est le fibré principal au-dessus de M, noté F^kM, de groupe structural G_k dont les éléments sont les k-jets en 0 des difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dans M :*

$$F^kM = \{j_0^k(f) | f \in Diff(\mathbb{R}^n, M), f(0) = x\}.$$

Les systèmes de coordonnées locales $\{u^a\}_{a=1\dots n}$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\{x^\mu\}_{\mu=1\dots n}$ sur M induisent un système de coordonnées locales sur F^kM :

$$(u^a, x^\mu, x^\mu{}_a, x^\mu{}_{ab}, \dots, x^\mu{}_{a_1\dots a_k}),$$

tel que :

$$u^a(j_0^k(f)) = 0, \quad x^\mu(j_0^k(f)) = f^\mu(0), \quad x^\mu{}_a(j_0^k(f)) = \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial u^a}\right|_{u=0}, \dots,$$

$$, \dots, \quad x^\mu{}_{a_1\dots a_k}(j_0^k(f)) = \left.\frac{\partial^k f^\mu}{\partial u^{a_1}\dots\partial u^{a_k}}\right|_{u=0},$$

où, toujours par le théorème de Schwarz, les indices $(a_1, \dots, a_k)$ sont symétriques. De plus, puisque $u^a(j_0^k(f)) \equiv 0$, nous l'omettrons systématiquement par la suite.

On définit alors :

Définition 1.1.6. *Un k-repère général est une section, notée e_k, du fibré principal F^kM de groupe stuctural G_k au-dessus de M :*

$$\begin{aligned} e_k : M &\to F^kM, \\ x &\mapsto e_k(x) = (x^\mu, e^\mu{}_a(x), \dots e^\mu{}_{a_1\dots a_k}(x)), \quad det(e^\mu{}_a) \neq 0 \end{aligned}$$

où $e^\mu{}_a(x), \dots e^\mu{}_{a_1\dots a_k}(x)$ sont des fonctions de x indépendantes les unes des autres.

De même qu'une fonction affine définit un représentant du 1-repère, voir (1.2), à tout k-repère $e_k(x)$, on peut associer un polynôme de degré k en $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ à valeur dans M, tel que $f_k(0) = x$:

$$f_k^\mu(\mathrm{u}) = x^\mu + e^\mu{}_a(x)u^a + \dots + \frac{1}{k!}e^\mu{}_{a_1\dots a_k}(x)u^{a_1}\dots u^{a_k}, \tag{1.9}$$

et ainsi retrouver :

$$e_k(x) = j_0^k(f_k(\mathrm{u})).$$

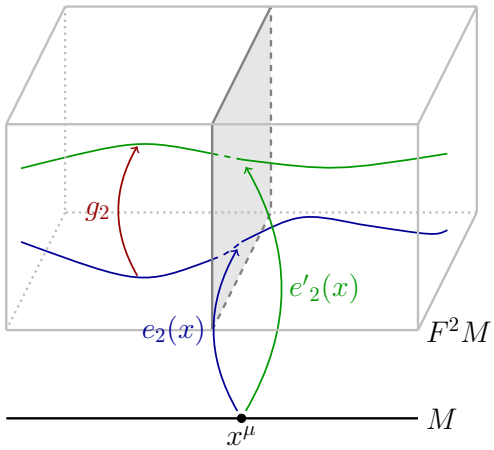
Le polynôme $f_k(\mathrm{u})$ est le représentant polynomial du k-repère $e_k(x)$.

Puisque pour tout élément $g_k \in G_k$, il existe un difféomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ préservant 0 tel que $g_k = j_0^k(g)$, l'action à droite du groupe de structure est directement déduite du produit des k-jets :

$$e_k \cdot g_k = j_0^k(f_k) \cdot j_0^k(g) = j_0^k(f_k \circ g). \tag{1.10}$$

Dans le cas particulier du fibré des 2-repères, l'action du groupe de structure G_2 se déduit de (1.9) et de (1.10)[4] :

$$\begin{aligned} e_2(x) \cdot g_2 &= (x^\mu,\, e^\mu{}_a(x),\, e^\mu{}_{ab}(x)) \cdot (g^a{}_{a'},\, g^a{}_{a'b'}), \\ &= (x^\mu,\, e^\mu{}_a g^a{}_{a'},\, e^\mu{}_a g^a{}_{a'b'} + e^\mu{}_{ab} g^a{}_{a'} g^b{}_{b'}), \\ &= e'{}_2(x). \end{aligned}$$



Inverse d'un k-repère

Les k-repères sont des sections du fibré F^kM au-dessus de la variété M, qu'il est possible d'associer à des polynômes $f_k(\mathrm{u})$ de degré k à valeur dans M tels que $f_k(0) = x$. Nous pouvons donc définir :

Définition 1.1.7. *L'inverse d'un k-repère e_k, noté ${e_k}^{-1}$, est défini comme étant le k-jet en $x \in M$ du polynôme de degré k en $y \in M$, noté $(f_k)^{-1}(y)$, à valeur dans $\mathbb{R}^n$ tel que $(f_k)^{-1}(x) = 0$ et*

$${e_k}^{-1} \cdot e_k = id_k.$$

[4]La dépendance en x (but de la section) des coordonnées des repères sera dorénavant sous-entendue pour alléger les écritures.

Dans un système de coordonnées locales, un k-repère e_k est associé au polynôme (1.9). Le représentant polynomial de l'inverse, ${e_k}^{-1}$, de ce repère est donc :

$$\begin{aligned} {f_k}^{-1}(y) &= e^a{}_\mu \left(y^\mu - x^\mu\right) + \frac{1}{2} e^a{}_{\mu\nu} \left(y^\mu - x^\mu\right)\left(y^\nu - x^\nu\right) + \\ &\quad \cdots + \frac{1}{k!} e^a{}_{\mu_1 \ldots \mu_k} \left(y^{\mu_1} - x^{\mu_1}\right) \ldots \left(y^{\mu_k} - x^{\mu_k}\right). \end{aligned}$$

On retrouve ainsi ${f_k}^{-1}(x) = 0$, et la condition ${e_k}^{-1} \cdot e_k = id_k$ impose

$$j_0^k \left({f_k}^{-1} \circ f_k\right) = j^k_{f_k(0)=x} \left({f_k}^{-1}\right) \cdot j_0^k \left(f_k\right) = \left(0, \delta^a{}_b, 0, \ldots, 0\right) .$$

Comme sur les repères de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \left({f_k}^{-1} \circ f_k\right)(u) &= e^a{}_\mu \left(\left(x^\mu + e^\mu{}_b u^b + \frac{1}{2} e^\mu{}_{bc} u^b u^c + \ldots\right) - x^\mu\right) + \\ &+ \frac{1}{2} e^a{}_{\mu\nu} \left(\left(x^\mu + e^\mu{}_b u^b + \frac{1}{2} e^\mu{}_{bc} u^b u^c + \ldots\right) - x^\mu\right)\left(\left(x^\nu + e^\nu{}_c u^c + \frac{1}{2} e^\nu{}_{cd} u^c u^d + \ldots\right) - x^\nu\right) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad j_0^k \left(f^{k^{-1}} \circ f^k\right) = \left(0, e^a{}_\mu e^\mu{}_b, e^a{}_\mu e^\mu{}_{bc} + e^a{}_{\mu\nu} e^\mu{}_b e^\nu{}_c, \ldots\right). \tag{1.11}$$

Les coordonnées de l'inverse d'un k-repère sont donc contraintes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & e^a{}_\mu e^\mu{}_b = \delta^a{}_b, \\ & e^a{}_{\mu\nu} = -e^a{}_\rho e^\rho{}_{bc} e^b{}_\mu e^c{}_\nu, \\ & \vdots \qquad . \end{aligned}$$

1.1.3 Trivialisation locale du fibré des k-repères

Le fibré des k-repères au-dessus de M étant un fibré principal de groupe structural G_k, il est localement trivial. De plus, une fois une section locale de référence choisie, *i.e* en physique un choix de jauge fixé, les fibres sont toutes difféomorphes au groupe G_k. C'est-à-dire qu'au-dessus de chaque ouvert $\mathscr{U} \subset M$, on a l'isomorphisme :

$$\pi^{-1}(\mathscr{U}) = F^k M\big|_{\mathscr{U}} \simeq \mathscr{U} \times G_k.$$

Grâce au choix d'une section locale trivialisante, prise par commodité comme le k-repère naturel [23] :

$$\begin{aligned} \mathring{\sigma} : M &\rightarrow F^k M \\ x &\mapsto \mathring{\sigma}(x) = (x^\mu, \delta^\mu{}_a, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ fois}}), \end{aligned} \tag{1.12}$$

il est possible d'identifier tout k-repère avec un élément du groupe différentiel d'ordre k, G_k. En effet, soit $e_k(x) = (x^\mu, e^\mu{}_{a'}, \ldots, e^\mu{}_{a'_1 \ldots a'_k})$, un k-repère quelconque au-dessus du point x. Celui-ci peut se réécrire comme :

$$e_k(x) = (x^\mu, \delta^\mu{}_a, 0, \ldots, 0) \cdot \left(g^a{}_{a'}, \ldots, g^a{}_{a'_1 \ldots a'_k} \right) = \mathring{\sigma}(x) \cdot g_k(x).$$

De ce point de vue, $g_k : \mathscr{U} \to G_k$ est la trivialisation locale du k-repère pour la section locale trivialisante σ [25].

Dans la suite, la section $e_k : M \to G_k, x \mapsto \left(e^\mu{}_a, \ldots, e^\mu{}_{a_1 \ldots a_k} \right)$ pourra donc être localement considérée comme une fonction de M dans le groupe G_k.

1.1.4 Forme de soudure

La forme de soudure[5] sur le fibré des k-repères est une 1-forme, invariante sous l'action des difféomorphismes de M, définie comme l'analogue de la forme de Maurer-Cartan d'un groupe :

$$\theta = e_k^{-1} \cdot de_k \big|_x .$$

Cette 1-forme est à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{k-1}$ et équivariante sous l'action du groupe de structure G_k :

$$\begin{aligned} \forall g_k \in G_k, \quad R^*_{g_k}\theta &= R^*_{g_k}\left(e_k^{-1} \cdot de_k\right) \\ &= (e_k \cdot g_k)^{-1}\, d\,(e_k \cdot g_k) \\ &= g_k^{-1} \cdot e_k^{-1} de_k \cdot g_k \\ &= \overline{\mathrm{Ad}}(g_k^{-1})\theta. \end{aligned}$$

Il est alors important de noter que l'action adjointe est ici l'action de type adjointe définie par (1.7). Le groupe G_k est alors plongé canoniquement dans le groupe G_{k+1} par :

$$\forall g_k = (g^{a'}{}_{a_1}, \ldots, g^{a'}{}_{a_1 \ldots a_k}) \in G_k \hookrightarrow (g^{a'}{}_{a_1}, \ldots, g^{a'}{}_{a_1 \ldots a_k}, 0) \in G_{k+1}. \qquad (1.13)$$

Dans un système de coordonnées locales, grâce à la décomposition en somme directe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_k$, (1.5), la forme de soudure peut être associée à un polynôme en $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ de degré $k-1$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$:

$$\theta \to \boldsymbol{\theta}^a = \theta^a + \theta^a{}_b u^b + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\theta^a{}_{a_1 \ldots a_{k-1}} u^{a_1} \ldots u^{a_{k-1}},$$

[5]La forme de soudure est aussi appelée forme canonique dans la littérature mathématique [13].

où les 1-formes $\theta^a \in \Omega^1(F^kM, \mathfrak{gl}_{-1})$, $\theta^a{}_b \in \Omega^1(F^kM, \mathfrak{gl}_0)$ et ainsi de suite.

La forme de courbure de la forme de soudure est définie par la 2-forme à valeur dans la même algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{k-1}$ suivante :

$$\Theta = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta].$$

Selon la décomposition (1.5), elle peut, tout comme la forme de soudure, être écrite sous la forme d'un polynôme dont le premier terme est une 2-forme $\Theta^a \in \Omega^2(F^kM, \mathfrak{gl}_{-1})$, appelée *torsion* du fibré des k-repères,

$$\Theta^a = d\theta^a + \theta^a{}_b \wedge \theta^b.$$

Sur le fibré des 2-repères, la forme de soudure est une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{gl}_0$ définie par :

$$\theta = e_2^{-1} \cdot de_2 = (\theta^a, \theta^a{}_b).$$

En utilisant (1.11) et le fait que $e_2^{-1} \cdot de_2 = -de_2^{-1} \cdot e_2$, les composantes de la forme de soudure sur F^2M s'écrivent :

$$\begin{aligned} \theta^a &= e^a{}_\mu dx^\mu, \\ \theta^a{}_b &= e^a{}_{\mu\nu} e^\mu{}_a dx^\nu + e^a{}_\mu de^\mu{}_b. \end{aligned}$$

Les deux premières composantes de la forme de soudure étant identiques pour tous les fibrés F^kM, avec $k \geqslant 2$, on aura toujours :

$$\Theta^a = d\theta^a + \theta^a{}_b \wedge \theta^b = 0.$$

Les k-repères généraux que nous traitons sont donc des k-repères de torsion nulle[6].

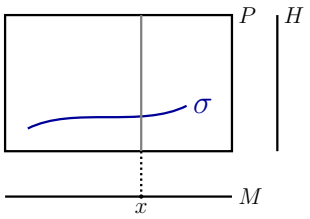
1.2 Connexion de Cartan

1.2.1 Connexion de Ehresmann sur un fibré principal

Une connexion sert, en général, à donner un sens à l'idée de « transporter un repère le long d'une courbe ». C'est-à-dire pouvoir définir la notion du transport parallèle d'un vecteur (ou d'un ensemble de vecteurs) [19].

Considérons un vecteur tangent d'un fibré principal $P(M, H)$, de groupe structural H au-dessus de M.

[6] La généralisation qui consiste à définir les k-repères, par récurrence, comme les repères linéaires des $(k-1)$-repères linéaires, permet de considérer des k-repères de torsion non-nulle, mais ce n'est pas nécéssaire pour la suite.



Il suffit, pour le déplacer dans la direction verticale, d'utiliser l'action infinitésimale du groupe de structure H. Dans le cas du fibré des repères linéaires, c'est donc par l'action du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ que se fait ce déplacement « vertical », qui consiste alors à « tourner » le repère. En revanche, la notion de déplacement purement horizontal, c'est-à-dire équivariant sous l'action du groupe de structure, ne peut être définie canoniquement. Ceci impose donc la définition d'une structure supplémentaire, une connexion, définissant une distribution horizontale équivariante.

D'un point de vue formel, une connexion sur un fibré principal $P(M, H)$ au-dessus de M, de groupe structural H, est une 1-forme $\mathscr{A}$ sur $P(M, H)$ à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ du groupe de structure telle que :

$$\forall h \in H, \quad R_{h*}\mathscr{A} = \mathrm{Ad}(g^{-1})\mathscr{A}, \text{et},$$

$$\forall \hat{X} \in V(P), \quad \mathscr{A}(\hat{X}) \in \mathfrak{h},$$

où $V(P)$ désigne l'espace tangent vertical du fibré principal P. $\hat{X}$ est donc un champ de vecteurs fondamental associé à l'action à droite de H sur P.

L'espace tangent horizontal $H(P)$ est alors défini comme le noyau de cette connexion :

$$H(P) = \{X \in TP | \mathscr{A}(X) = 0\}.$$

La courbure de la connexion est donnée par la 2-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$:

$$d\mathscr{A} + \frac{1}{2}[\mathscr{A}, \mathscr{A}].$$

Cette définition de la connexion est celle usuellement utilisée en physique pour traiter les théories de jauge de type Yang-Mills. Par exemple, pour traiter l'électromagnétisme, on utilise le fibré principal de groupe de structure $U(1)$ au-dessus de l'espace-temps. Les composantes locales de la connexion définissent alors les composantes du potentiel électromagnétique. Pour décrire les champs de bosons de la théorie électrofaible, on utilisera les composantes locales de la connexion construite sur le fibré principal de groupe structural $G = SU(2) \times U(1)$. Il s'avère que trois des quatre forces fondamentales de la physique moderne s'expriment à merveille dans ce langage. La seule qui

échappe encore à cette règle est la force gravitationnelle, même si plusieurs pistes ont été explorées (pour en avoir un très bon résumé voir [7]).

Nous avons pris le parti durant ce travail d'utiliser un autre type de connexion sur les fibrés principaux, la connexion de Cartan.

1.2.2 Connexion de Cartan sur un fibré principal

La notion de connexion de Cartan ne peut être convenablement comprise si elle n'est pas introduite dans le contexte des géométries dites de Cartan, généralisation des géométries de Klein. Nous allons donc commencer par une brève définition de ces géométries [12, 26].

Géométrie de Klein

L'idée principale de F. Klein, qui a révolutionné la géométrie moderne, est qu'un espace peut être défini par son groupe de symétrie. Ce qui revient à étudier des espaces modèles dits espaces homogènes [12, 26].

Définition 1.2.1. *Un espace homogène (X, G) est un ensemble X muni de l'action transitive d'un groupe G :*

$$\begin{aligned}
&\forall g, g' \in G, \quad (gg')x = g(g'x),\\
&\forall x \in X, ex = x, \ \textit{où } e \textit{ repésente l'identité de } G,\\
&\forall x \in X, Gx = X \ \textit{action transitive.}
\end{aligned}$$

Le groupe G a donc une unique orbite consituée de l'espace X tout entier.

Dans le cadre de notre étude, nous pouvons nous limiter aux actions transitives de groupes de Lie G sur des variétés différentiables M.

L'ingrédient principal pour caractériser un espace homogène (M, G), est l'ensemble des sous-groupes de Lie, $H \subset G$, qui stabilisent un point de M. La variété M peut alors être identifiée avec l'espace quotient :

$$G/H = \{gH | g \in G\},$$

où G et H étant des groupes de Lie, le quotient G/H possède une structure de variété différentiable.

En effet, considérons le groupe d'isotropie d'un point fixe $x \in M$, noté G_x, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $g \in G$ qui stabilisent ce point :

$$G_x = \{g \in G | gx = x\}.$$

Si on suppose maintenant qu'il existe deux éléments différents $g, g' \in G$ tels que :

$$gx = y \quad \text{et} \quad g'x = y.$$

Le produit $g^{-1}g'$ appartient donc au sous-groupe G_x. Réciproquement, supposons que le produit $g^{-1}g' \in G_x$, et que $gx = y$ alors :

$$gx = gg^{-1}g'x = g'x = y.$$

On doit donc avoir $gG_x = g'G_x$. C'est-à-dire qu'on peut construire un difféomorphisme entre M et le quotient G/G_x. Dans ce sens, M et G/G_x sont isomorphes[7].

De plus, si on prend deux points différents $x, x' \in M$ de groupe d'isotropie respectif $G_x, G_{x'}$, tels qu'il existe $g \in G, gx = x'$, alors :

$$G_x = gG_{x'}g^{-1}.$$

Tous les groupes d'isotropie des différents points de M sont donc conjugués entre eux, ce qui signifie qu'ils sont isomorphes. On parle donc en général « du groupe d'isotropie » des points de M, que l'on notera H.

C'est en ce sens que l'on peut identifier une variété M avec l'espace quotient G/H.

Définition 1.2.2. *On appelle géométrie de Klein, notée (G, H), un fibré principal P au-dessus de la variété M, de groupe structural H, tel qu'il existe un groupe de Lie G dont H soit un sous groupe ($H < G$), qui est isomorphe au fibré principal $G \to G/H$ de même groupe de structure. Ce qui s'illustre par le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\sim"] & G/H. \end{tikzcd}$$

Connexion de Cartan

Le problème pour appliquer ce type de géométrie à la physique provient du fait que l'espace dans lequel nous vivons n'est pas isomorphe à un espace homogène. E. Cartan proposa donc une généralisation de la géométrie de Klein en considérant que tous les espaces inhomogènes peuvent être modélisés comme étant infinitésimalement des géométries de Klein.

Cette notion est analogue à l'identification locale entre une variété de dimension n et l'espace modèle $\mathbb{R}^n$.

[7] au sens de G-espaces.

Définition 1.2.3. *Une géométrie de Cartan (P, M, ω), modelée par la géométrie de Klein (G, H), est un fibré principal P au-dessus d'une variété M muni d'une 1-forme ω sur P à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G qui vérifie :*

1. $\forall h \in H, R_h^* \omega = Ad(h^{-1})\omega$ *H-équivariance,*
2. $\forall \hat{X} \in V(P), \omega(\hat{X}) \in \mathfrak{h}$,
3. $\forall p \in P, \omega|_p : T_pP \to \mathfrak{g}$ *est un isomorphisme linéaire.*

Je ne résiste pas, en ce point précis, à l'envie de reprendre l'image utilisée par D.K. Wise [12] pour donner une idée de ce que représente une connexion de Cartan.

Comme toujours, une connexion permet de caractériser les déplacements infinitésimaux d'un observateur situé sur une variété. L'image communément prise pour les connexions usuelles est d'imaginer une fourmi se déplaçant sur une boule. L'étude de ses propres déplacements lui permettrait de savoir qu'elle est sur une surface courbe, et non pas plate.

Les connexions de Cartan permettent en fait de caractériser plus en détails les déplacements infinitésimaux d'un observateur. D.K. Wise se place alors dans le cas d'une surface riemannienne plongée dans $\mathbb{R}^3$ avec comme groupe de symétrie $G = SO(3)$ et comme groupe d'isotropie $H = SO(2)$. Dans ce cas, l'espace homogène modèle est simplement la sphère $S^2 = G/H$. Il prend alors comme observateur, non pas une fourmi, mais un hamster dans sa boule[8] se déplaçant sur cette surface. Le fibré principal P est alors constitué de l'ensemble des configurations possibles pour le hamster, c'est-à-dire sa position sur la surface combinée avec la direction vers laquelle il se dirige. Ce fibré ne contient donc aucun renseignement direct sur la boule dans laquelle se trouve notre hamster, *i.e.* l'espace homogène modèle. La connexion de Cartan nous permet de connaître tous les déplacements infinitésimaux du hamster. Un changement de point de contact avec la surface équivaut à une translation de l'espace tangent, et un changement de direction sans changement de point de contact se traduit par une rotation. On peut alors donner une interprétation pour chacune des trois propriétés de la connexion de Cartan.

1. Le fait que ω soit H-équivariante implique que la direction dans laquelle regarde le hamster n'a pas de signification absolue.
2. Le fait que $\forall \hat{X} \in V(P), \omega(\hat{X}) \in \mathfrak{h}$ implique qu'à toute rotation infinitésimale du hamster dans sa boule, la connexion de Cartan associe l'élément de $\mathfrak{h}$ représentant cette rotation.

[8] Il existe en effet des boules en plastique transparent qui permettent aux hamsters de se dégourdir les pattes sur le sol sans danger pour les meubles et fils électriques.

3. Enfin, le fait que ω soit un isomorphisme linéaire implique que le hamster, s'il ne change pas de point de contact avec la surface ne peut faire qu'une rotation dans sa boule. Tout autre mouvement est interdit.

1.2.3 Lien entre connexion de Cartan et connexion de Ehresmann

Comme nous l'avons vu en 1.2.1, les théories de jauge peuvent être formalisées en termes de connexions de Ehresmann. Notre but est de les formuler en termes de connexions de Cartan, permettant une caractérisation locale plus précise. Il nous faut donc expliciter le lien entre ces deux types de connexions sur fibré principal [26].

On considère une géométrie de Cartan (P, M, ω) modelée par la géométrie de Klein (G, H), d'algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

On peut construire, grâce à l'action à gauche de H sur G, le fibré principal associé à $P \to M$ de groupe de structure G :

$$Q = P \times_H G.$$

L'espace Q est composé des classes d'équivalence suivantes :

$$[p, q] = [ph, h^{-1}g].$$

À partir de la connexion de Cartan sur P et de la forme de Maurer-Cartan de G, noté Θ_G, on peut construire la 1-forme sur $P \times G$ suivante :

$$\mathscr{A}|_{(p,g)} = \mathrm{Ad}(g^{-1})\pi_P^*\omega + \pi_G^*\Theta_G, \tag{1.14}$$

où π_P (respectivement π_G) est la projection canonique $P \times G \to P$ (resp. $P \times G \to G$).

Proposition 1.2.1. *La* 1*-forme (1.14) définit une connexion de Ehresmann sur Q.*

Preuve. En effet,

$$\mathscr{A}(0, g) = \hat{g} \in \mathfrak{g}, \quad \text{c'est-à-dire que } \forall \hat{X} \in V(P \times G),\ \mathscr{A}(\hat{X}) \in \mathfrak{g}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(id \times R_{g'})^* \mathscr{A}|_{(p,gg')} &= \mathscr{A}|_{(p,gg')} \circ (id \times R_{g'})_* \\
&= \left(\mathrm{Ad}\left((gg')^{-1}\right)\pi_P^*\omega + \pi_G^*\Theta_G\right) \circ (id \times R_{g'})_* \\
&= \mathrm{Ad}(g'^{-1})\left(\mathrm{Ad}(g^{-1})\omega \circ \pi_{P*} + \Theta_G \circ \pi_{G*}\right) \\
&= \mathrm{Ad}(g'^{-1})\, \mathscr{A}|_{(p,g)}.
\end{aligned}$$

Donc $\forall g \in G, R_{g_*}\mathscr{A} = \mathrm{Ad}(g^{-1})\mathscr{A}$. Enfin, pour montrer que la 1-forme $\mathscr{A}$ descend sur Q en une connexion de Ehresmann, toujours notée $\mathscr{A}$, on montre qu'elle est invariante sous l'action de H, définie par :

$$\alpha_h : P \times G \to Q, \quad (p, g) \to [ph, h^{-1}g].$$

$$\begin{aligned}
\alpha_h^* \mathscr{A}|_{(p,g)} &= \mathscr{A}|_{(ph,h^{-1}g)} \circ \alpha_{h*} \\
&= \mathrm{Ad}\left((h^{-1}g)^{-1}\right) \omega \circ \pi_{P*} \circ \alpha_{h*} + \Theta_G \circ \pi_{G*} \circ \alpha_{h*} \\
&= \mathrm{Ad}\left((h^{-1}g)^{-1}\right) \omega \circ R_{h^{-1}*} \circ \pi_{P*} + \Theta_G \circ L_{h^{-1}*} \circ \pi_{G*} \\
&= \mathscr{A}|_{(p,g)} .
\end{aligned}$$

■

Notons $\mathbb{1}$ l'élément neutre du groupe total G. Le sous-fibré de Q défini par $P \times_H \{\mathbb{1}\}$ est isomorphe au fibré P. On remarque alors que la restriction de la connexion de Ehresmann à P définie point par point par :

$$\mathscr{A}|_{(p,\mathbb{1})} = \omega|_p ,$$

s'identifie à la connexion de Cartan.

Il est donc possible de restreindre les outils de théorie de jauge usuels sur Q pour construire une théorie de jauge avec la connexion de Cartan ω sur P.

La définition des fibrés des k-repères que nous utilisons ici n'est pas la plus générale possible, mais elle autorise un traitement local très simple. De plus, l'attention que nous avons porté à la distinction des indices de l'espace modèle $\mathbb{R}^n$ de ceux de la variété M nous permet de toujours garder « en évidence » les espaces mis en jeu. Nous verrons dans le chapitre suivant l'utilité d'une telle distinction trop souvent omise dans la littérature mathématique [21, 22, 27].

Le lien univoque défini entre certaines connexions de Ehresmann, sur un fibré principal associé, et la connexion de Cartan du fibré principal que nous souhaitons utiliser nous autorise alors à transférer les outils usuels des théories de jauge de type Yang-Mills sur ce type particulier de connexion que sont les connexions de Cartan. Ceci nous permet principalement de pouvoir traiter tous les types de déplacements infinitésimaux sur le fibré principal, et plus seulement les déplacements verticaux. Ce point permet en particulier de choisir comme groupe de jauge les difféomorphismes dans leur ensemble, non plus seulement un sous-groupe.

Chapitre 2

Connexions de Cartan projective et conforme

En théorie de jauge de type Yang-Mills, le groupe de structure déterminant la symétrie du fibré principal utilisé est de première importance. En effet, par son intermédiaire, est conféré au modèle choisi la théorie physique voulue. De fait, la connexion (de Ehresmann) et donc les champs de jauge associés, étant contraints à prendre des valeurs dans l'algèbre de Lie de ce groupe de structure, codent alors la théorie physique souhaitée.

Nous avons, au premier chapitre, montré qu'il était possible de définir une connexion de Ehresmann, sur un fibré principal associé, donnant, par restriction, une connexion qui s'identifie point par point à la connexion de Cartan.

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment définir une nouvelle notion, les *symboles* d'une connexion de Cartan, permettant de garantir l'utilisation des outils usuels des théories de jauge sur le fibré des 2-repères. En particulier, nous réduirons le groupe de structure, afin de traiter des espaces munis des symétries projective et conforme, et d'étudier les conséquences sur les symboles des connexions de Cartan qui leur sont associées.

2.1 Construction d'une connexion de Cartan sur le fibré de 2-repères F^2M

Avant de réduire le groupe de structure du fibré des 2-repères, intéressons nous à la construction d'une connexion de Cartan particulière sur ce fibré. Nous pourrons alors plus aisément étudier les cas particuliers des espaces à symétrie projective ou conforme, vus comme sous-fibrés de F^2M.

Il est nécessaire de définir, en premier lieu, la géométrie de Klein modèle correspondante. Dans un deuxième temps, nous définirons les *symboles* d'une connexion de Cartan. Enfin, nous introduirons un type de connexion de Cartan particulier permettant (sans perte de généralité) un traitement efficace de la structure du fibré des 2-repères.

2.1.1 Géométrie de Klein modèle

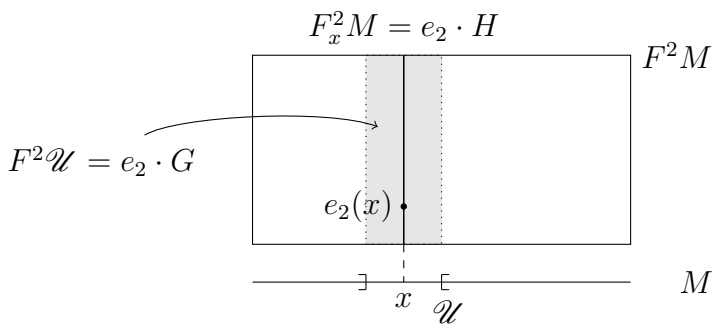
La géométrie de Klein modelant la géométrie de Cartan recherchée est définie par la donnée d'un espace homogène, voir paragraphe 1.2.2.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le groupe de structure de F^2M est le groupe différentiel d'ordre 2, noté G_2, agissant à droite par :

$$\begin{array}{rcl} \forall e_2 : M & \to & F^2M \\ x & \mapsto & e_2(x) = (x^\mu, e^\mu{}_a(x), e^\mu{}_{ab}(x)), \end{array} \qquad \forall g_2 \in G_2, g_2 = (g^a{}_{a'}, g^a{}_{a'b'}),$$

$$e_2 \cdot g_2 = \left(x^\mu,\, e^\mu{}_a g^a{}_{a'},\, e^\mu{}_{ab} g^a{}_{a'} g^b{}_{b'} + e^\mu{}_a g^a{}_{a'b'}\right).$$

L'action du groupe de structure G_2 préservant la fibre, celui-ci peut être choisi comme groupe d'isotropie pour l'espace homogène modèle, noté généralement $H = G_2$. Il reste alors à définir un groupe de Lie G ayant pour sous-groupe de Lie H, et tel que, pour tout point $e_2 \in F^2\mathscr{U}$, on ait localement : $e_2G = F^2M$. Grâce à l'action à droite de H sur F^2M, il est déjà possible de reconstruire au-dessus de tout point $x \in M$, la fibre F^2_xM. Il faut donc augmenter le groupe d'isotropie H de manière à définir une action permettant de changer de fibre.



Au-dessus de chaque ouvert trivialisant $\mathscr{U} \subset M$, le fibré F^2M est isomorphe à $\mathscr{U} \times G_2$. De plus, grâce au système de coordonnées locales, chaque ouvert $\mathscr{U}$ est isomorphe à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On peut donc naturellement

y définir la notion de translations. La géométrie de Klein modèle sera donc caractérisée par le groupe d'isotropie $H = G_2$, et le groupe total G, défini comme le groupe d'isotropie $H = G_2$ augmenté des translations $GL_{-1} \simeq \mathbb{R}^n$:

$$G = G_2 \ltimes GL_{-1}.$$

L'action à droite du groupe G sur les points de F^2M est alors définie par :

$$\begin{aligned} &\forall e_2 = (x^\mu, e^\mu{}_a, e^\mu{}_{ab}) \in F^2M, \quad g = (g^a, g^a{}_{a'}, g^a{}_{a'b'}) \\ &e_2 \cdot g = \left(x^\mu + e^\mu{}_a g^a,\, e^\mu{}_a g^a{}_{a'},\, e^\mu{}_{ab} g^a{}_{a'} g^b{}_{b'} + e^\mu{}_a g^a{}_{a'b'}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

Définition 2.1.1. *La géométrie de Cartan (F^2M, M, ω), associée au fibré des 2-repères au-dessus de la variété M, est modélée par la géométrie de Klein $(G_2 \ltimes GL_{-1}, G_2)$. La connexion de Cartan ω associée vérifie alors :*

1. $\forall g_2 \in G_2, R^*_{g_2}\omega = \overline{Ad}(g_2{}^{-1})\omega$ *G_2-équivariance,*
2. $\forall \hat{X} \in V(F^2M), \omega(\hat{X}) \in \mathfrak{g}_2$,
3. $\forall e_2 \in F^2M, \omega|_{e_2} : T_{e_2}F^2M \to \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_2$ *est un isomorphisme linéaire.*

Dans cette définition, la connexion de Cartan étant une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_2$, sa G_2-équivariance est exprimée grâce à l'action de type action adjointe définie par (1.7) de G_3 sur $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_2$, et non par l'action adjointe usuelle.

2.1.2 Symboles de la connexion de Cartan

De façon générale, en théorie de jauge de type Yang-Mills, les potentiels de jauge sont les *symboles* de la 1-forme de connexion (de Ehresmann) du fibré principal $P(M, G)$, définis dans une trivialisation locale donnée (choix de jauge), que nous allons maintenant définir.

La trivialisation locale d'un fibré principal permet de définir au-dessus de chaque ouvert trivialisant $\mathscr{U} \subset M$ une application :

$$\phi = \pi_G \circ \varphi : \pi^{-1}(\mathscr{U}) \to G, \qquad \text{telle que} \quad \phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g,$$

où $\pi : P \to M$ est la projection canonique de fibré principal $P(M, G)$, $\varphi : \pi^{-1}(\mathscr{U}) \to M \times G$ est une carte du fibré associée à l'ouvert $\mathscr{U}$ et π_G est la projection $M \times G \to G$. Les symboles A de la connexion de Ehresmann

$\mathscr{A}$ sur P sont alors les composantes, relative à la trivialisation choisie, de la 1-forme sur P définie par :

$$A = \mathrm{Ad}(\phi)\mathscr{A} + \phi d_P \phi^{-1}. \tag{2.1}$$

Par construction, les symboles d'une connexion sont invariants sous l'action à droite du groupe de structure.

En utilisant cette définition des symboles d'une connexion de Ehresmann sur un fibré principal, et le lien entre connexion de Ehresmann sur $F^2M \times_{G_2} G$ et connexion de Cartan sur F^2M, nous allons construire les *symboles d'une connexion de Cartan* sur le fibré des 2-repères.

Soit la 1-forme définie, sur la variété produit $F^2M \times G$, par [12, 26] :

$$\mathscr{A}|_{(e_2,g)} = \mathrm{Ad}(g^{-1})\pi^*_{F^2M}\omega + \pi^*_G\Theta_G, \qquad \forall e_2 \in F^2M, g \in G,$$

où π_{F^2M} (resp. π_G) est la projection canonique $F^2M \times G \to F^2M$ (resp. $F^2M \times G \to G$). Comme nous l'avons montré, dans le cas général au paragraphe 1.2.3, elle définit une connexion de Ehresmann sur le fibré $F^2M \times_{G_2} G$, et s'identifie, par restriction, à la connexion de Cartan sur F^2M.

Restreignons la 1-forme A (2.1) définie sur un ouvert de $F^2M \times_{G_2} G$ à la 1-forme :

$$\Gamma = A|_{F^2M \times_{G_2}\{\mathbb{1}\}}.$$

Soit $\pi : F^2M \to M$, la projection canonique. Par un mécanisme similaire au précédent, à partir d'une carte associée à un ouvert trivialisant $\mathscr{U} \subset M$, $\Psi : \pi^{-1}(\mathscr{U}) \to M \times G_2$, et de la projection $\pi_{G_2} : M \times G_2 \to G_2$, on construit l'application

$$\psi = \pi_{G_2} \circ \Psi : \pi^{-1}(\mathscr{U}) \to G_2.$$

Puisque qu'on ne peut définir d'action adjointe de G_2 sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_2$, l'action adjointe doit être remplacée par l'action à gauche de type adjointe $\overline{\mathrm{Ad}}$ de G_3 sur $\mathfrak{g}$, définie en (1.7). Nous allons donc définir une notion de *dérivation formelle*, qui est une application $\ell : G_2 \to G_3$, G_2-équivariante :

$$\forall g_2 \in G_2, \quad \ell \circ R_{g_2} = R_{g_2} \circ \ell, \tag{2.2}$$

où, dans le terme de droite, l'action R_{g_2} est l'action a droite d'un élément du groupe G_2 canoniquement plongé dans G_3 (1.13).

Dans le cas le plus général, la dérivation formelle d'un élement $e_2 \in F^2M$ est :

$$\ell(e_2) = (e^\mu{}_a, e^\mu{}_{ab}, e^\mu{}_{abc}), \tag{2.3}$$

où ${e^\mu}_{abc}$ est le dérivé formel de ${e^\mu}_{ab}$. Ainsi, on vérifie que l'on a bien :

$$\begin{aligned}
\ell(e_2)\cdot g_2 &= ({e^\mu}_a, {e^\mu}_{ab}, {e^\mu}_{abc})\cdot({g^a}_{a'}, {g^a}_{a'b'}, 0)\\
&= \big({e^\mu}_a {g^a}_{a'},\ {e^\mu}_{ab}{g^a}_{a'}{g^b}_{b'} + {e^\mu}_a {g^a}_{a'b'},\\
&\quad {e^\mu}_{abc}{g^a}_{a'}{g^b}_{b'}{g^c}_{c'} + {e^\mu}_{ab}{g^a}_{a'b'}{g^b}_{c'} + {e^\mu}_{ab}{g^a}_{b'c'}{g^b}_{a'} + {e^\mu}_{ab}{g^a}_{a'c'}{g^b}_{b'}\big)\\
&= \ell(e_2\cdot g_2).
\end{aligned}$$

On définit donc :

Définition 2.1.2. *Les symboles de la connexion de Cartan sont les composantes de la 1-forme sur $\pi^{-1}(\mathscr{U}) \subset F^2M$ à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie par :*

$$\Gamma = \overline{Ad}(\ell(\psi))\omega + \psi d\psi^{-1},$$

où $\psi : \pi^{-1}(\mathscr{U}) \to G_2$, et d désigne la différentielle sur F^2M.

La connexion de Cartan sur F^2M étant une connexion à valeur dans l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{gl}_{-1}\oplus\mathfrak{gl}_0\oplus\mathfrak{gl}_1$ (1.5), elle se décompose suivant la même graduation en :

$$\omega = (\omega^a, {\omega^a}_b, {\omega^a}_{bc}),$$

avec $\omega^a \in \Omega^1(F^2M, \mathfrak{gl}_{-1}), {\omega^a}_b \in \Omega^1(F^2M, \mathfrak{gl}_0)$ et ${\omega^a}_{bc} \in \Omega^1(F^2M, \mathfrak{gl}_1)$.

En utilisant le fait que, grâce à la trivialisation locale choisie de F^2M (1.12), les coordonnées d'un 2-repère général $({e^\mu}_a, {e^\mu}_{ab})$ peuvent être considérées comme des éléments du groupe de structure G_2, on définit les symboles de la connexion de Cartan comme les composantes de la 1-forme :

$$\Gamma(e_2, \omega) = \overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2))\omega + e_2 d e_2^{-1}. \tag{2.4}$$

Ainsi définis, les symboles de la connexion de Cartan restent bien invariants sous l'action du groupe de structure G_2 puisque :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{g_2} = \Gamma(R_{g_2}e_2, R^*_{g_2}\omega) &= \overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2\cdot g_2))R^*_{g_2}\omega + e_2\cdot g_2 d\,(e_2\cdot g_2)^{-1}\\
&= \overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2\cdot g_2))\overline{\mathrm{Ad}}(g_2^{-1})\omega + e_2 d e_2^{-1}\\
&= \Gamma(e_2, \omega).
\end{aligned}$$

La 1-forme Γ (2.4) peut, comme la connexion de Cartan, être décomposée suivant la graduation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en :

$$\Gamma = \left(\Gamma^\mu, {\Gamma^\mu}_\nu, {\Gamma^\mu}_{\nu\rho}\right).$$

En utilisant l'expression locale de l'action du type action adjointe (1.8) et l'expression générale de la dérivée formelle d'un 2-repère (2.3), on obtient

donc que les symboles de la connexion de Cartan sur le fibré des 2-repères s'écrivent localement :

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu &= e^\mu{}_a \omega^a, \\
\Gamma^\mu{}_\nu &= e^\mu{}_a \omega^a{}_b e^b{}_\nu + e^\mu{}_{ab} \omega^a e^b{}_\nu + e^\mu{}_a de^a{}_\nu, \\
\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} &= e^\mu{}_{abc} \omega^c e^b{}_\nu e^a{}_\rho + e^\mu{}_{ac} \omega^c e^a{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_{ab} \omega^b{}_d e^d{}_\nu e^a{}_\rho + e^\mu{}_{ac} e^c{}_\nu \omega^a{}_b e^b{}_\rho \\
&\quad + e^\mu{}_a \omega^a{}_b e^b{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_a \omega^a{}_{bc} e^c{}_\nu e^b{}_\rho + e^\mu{}_a de^a{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_{ab} d(e^b{}_\nu e^a{}_\rho) = \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} \ .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Il est important de noter que la composante de plus haut poids $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ est bien une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2$ puisqu'elle est symmétrique en les indices du bas. De plus, on note que grâce à la trivialisation locale choisie, *i.e.* grâce au choix de jauge, les symboles de la connexion de Cartan ne dépendent plus que des indices de l'espace de base M.

2.1.3 Choix d'une connexion de Cartan

À partir de la connexion de Cartan, on définit sa 2-forme de courbure Ω par :

$$\mathbf{\Omega} = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega],$$

où $\mathbf{\Omega} \in \Omega^2(F^2M, \mathfrak{g})$. Cette 2-forme se décompose également suivant la graduation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en :

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega}^a, \mathbf{\Omega}^a{}_b, \mathbf{\Omega}^a{}_{bc}) \, ,$$

avec $\mathbf{\Omega}^a$ et $(\mathbf{\Omega}^a{}_b, \mathbf{\Omega}^a{}_{bc})$ respectivement définis comme les 2-formes de *torsion* et de *courbure* de la connexion de Cartan ω.

On peut alors montrer [21,22,28] qu'il existe des tenseurs $K^a{}_{bc}, K^a{}_{bcd}, K^a{}_{bcde}$ tels que la 2-forme de torsion s'écrive :

$$\mathbf{\Omega}^a = \frac{1}{2} K^a{}_{bc} \, \omega^b \wedge \omega^c,$$

et la 2-forme de courbure $(\mathbf{\Omega}^a{}_b, \mathbf{\Omega}^a{}_{bc})$:

$$\mathbf{\Omega}^a{}_b = \frac{1}{2} K^a{}_{bcd} \, \omega^c \wedge \omega^d, \qquad \mathbf{\Omega}^a{}_{bc} = \frac{1}{2} K^a{}_{bcde} \, \omega^d \wedge \omega^e.$$

Le fibré des 2-repères tel que nous l'avons défini est un fibré de torsion nulle. Nous allons donc nous restreindre à l'utilisation des connexions de Cartan de torsion également nulle.

Comme la forme de soudure $\theta = (\theta^a, \theta^a{}_b)$ sur F^2M est une 1-forme G_2-équivariante à valeur dans la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{gl}_0$, la 1-forme

$$\omega = (\theta^a, \theta^a{}_b, \omega^a{}_{bc}),$$

est une connexion de Cartan sur F^2M [27], et sa 2-forme de torsion est nulle :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}^a &= d\omega^a + \omega^a{}_b \omega^b \\ &= d\theta^a + \theta^a{}_b \wedge \theta^b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les symboles d'une telle connexion de Cartan s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= e^\mu{}_a \theta^a = dx^\mu, \\ \Gamma^\mu{}_\nu &= e^\mu{}_a \theta^a{}_b e^b{}_\nu + e^\mu{}_{ab} \theta^a e^b{}_\nu + e^\mu{}_a de^a{}_\nu = 0, \\ \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} &= e^\mu{}_{abc} \theta^c e^b{}_\nu e^a{}_\rho + e^\mu{}_{ac} \theta^c e^a{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_{ab} \theta^b{}_d e^d{}_\nu e^a{}_\rho + e^\mu{}_{ac} e^c{}_\nu \theta^a{}_b e^b{}_\rho \\ &\quad + e^\mu{}_a \theta^a{}_b e^b{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_a \omega^a{}_{bc} e^c{}_\nu e^b{}_\rho + e^\mu{}_a de^a{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_{ab} d(e^b{}_\nu e^a{}_\rho), \\ &= \left(e^\mu{}_{abc} e^a{}_\nu e^b{}_\rho e^c{}_\lambda + e^\mu{}_{ab} e^b{}_{\nu\lambda} e^a{}_\rho + e^\mu{}_{ab} e^b{}_{\rho\lambda} e^a{}_\nu \right) dx^\lambda \\ &\quad + e^\mu{}_a \omega^a{}_{bc} e^b{}_\nu e^c{}_\rho + d\left(e^\mu{}_a e^a{}_{\nu\rho} \right). \end{aligned}$$

***Remarque* 2.1.1.** *Les symboles associés à la forme de soudure du fibré des 2-repères sont donc triviaux :*

$$\Gamma^\mu = dx^\mu, \qquad \Gamma^\mu{}_\nu = 0.$$

Seul le symbole de plus haut poids, i.e. *celui à valeur dans l'algèbre de Lie de plus haut degré est non-trivial.*

2.2 Les G-structures

2.2.1 Définition

La notion de G-structure est une notion associée, en général, au traitement du fibré principal des repères linéaires $L(M)$ [16], au-dessus d'une certaine variété M, qui est isomorphe au fibré des 1-repères défini en 1.1.2. Cette notion peut être étendue au fibré des k-repères F^kM [29]. Ces G-structures sont alors appelées G-structure d'ordre k [16].

Définition 2.2.1. *Soit M, une variété différentiable et F^kM le fibré des k-repères au-dessus de M, de groupe structural G_k. Soit G, un sous-groupe*

de Lie de G_k, on notera dans la suite $G < G_k$ cette inclusion de groupes de Lie. On appelle G-structure sur M, le sous-fibré principal P de F^kM ayant pour groupe de structure $G < G_k$.

Nous avons vu au chapitre précédent que les coordonnées d'un k-repère quelconque peuvent, grâce à la trivialisation locale du fibré F^kM, être considérées comme un élément du groupe structural $G_k = GL_0 \ltimes \cdots \ltimes GL_{k-1}$.

De même, dans le cas d'une G-structure, les coordonnées locales trivialisantes définies via le choix d'une section de référence peuvent être considérées comme des éléments du groupe de structure G. Le fait de réduire le groupe structural G_k à G a donc pour principale conséquence d'imposer des conditions de compatibilité entre les coordonnées de k-repères. Par exemple, comme nous le verrons dans la suite, le fait de considérer la symétrie projective laisse les coordonnées d'ordre 1, $e^{\mu}{}_{a}$, libres mais contraint les suivantes.

2.2.2 G-structure et connexion de Cartan

Dans la définition des G-structures, les groupes G considérés sont des groupes d'isotropie du point $0 \in \mathbb{R}^n$ [12]. Notre but est maintenant de construire une connexion de Cartan sur une G-structure, c'est à dire, en premier lieu, trouver la géométrie de Klein modèle. Pour cela, il faut trouver le groupe total dont G est le sous-groupe d'isotropie. Dans le cas le plus général, présenté dans le paragraphe 2.1.1, nous avons utilisé comme géométrie de Klein modèle $(G_2 \ltimes GL_{-1}, G_2)$.

Dans le cas des G-structures, le groupe primordial n'est plus le groupe G lui-même, mais le groupe de transformations dont il est issu. Notre but principal est l'étude des symétries projective et conforme via l'utilisation du fibré des 2-repères. Nous montrons qu'il est alors possible de définir les groupes projectif et conforme comme groupes totaux des géométries de Klein modèles. Il est aussi nécessaire de caractériser les groupes de structure associés. Nous noterons donc S_2, le groupe des 2-jets en $0 \in \mathbb{R}^n$ des transformations projectives de $\mathbb{R}^n$ préservant ce point, et C_2, le groupe des 2-jets en $0 \in \mathbb{R}^n$ des transformations conformes de $\mathbb{R}^n$ préservant ce point.

Nous allons maintenant étudier chacune des ces G-structures séparément.

2.3 La G-structure projective

Focalisons-nous, dans un premier temps, sur la G-structure projective, et les propriétés induites sur la connexion de Cartan associée. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux symboles de cette connexion de Cartan.

Définition 2.3.1. *La G-structure projective est le sous-fibré, noté P^2M de F^2M modelé par la géométrie de Klein $(SL_{n+1}(\mathbb{R}), S_2)$.*

2.3.1 Structure projective

Pour étudier la G-structure projective, il est d'abord nécessaire de caractériser le groupe S_2 déterminant la géométrie de Klein modèle. Pour cela, commençons par étudier les transformations projectives de $\mathbb{R}^n$.

Une transformation projective d'un point $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n \to \mathrm{u}' = \frac{A\mathrm{u} + B}{\overline{C}\mathrm{u} + d} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

avec $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$ (vecteur), $\overline{C} \in \mathbb{R}^{n*}$ (covecteur), $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et la condition :

$$s = \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{C} & d \end{pmatrix} \in SL_{n+1}(\mathbb{R}). \tag{2.7}$$

On peut donc définir l'action locale du groupe projectif sur $\mathbb{R}^n$ via l'action du groupe $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$, l'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{R}P^n$. En effet, on peut associer à tout point $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ le point $\tilde{\mathrm{u}} \in \mathbb{R}P^n$ défini par :

$$\tilde{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

L'action du groupe $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}P^n$ définie par :

$$\forall s \in SL_{n+1}(\mathbb{R}), s \cdot \tilde{\mathrm{u}} = \left[s \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

engendre alors la transformation (2.6) recherchée.

Le sous-groupe d'isotropie du point $0 \in \mathbb{R}^n$ est donc engendré par les éléments $s \in SL_{n+1}(\mathbb{R})$ préservant la classe :

$$\tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ce qui impose, par rapport à la transformation (2.6) :

$$B = 0.$$

Une transformation de u $\in \mathbb{R}^n$ par un élément de ce sous-groupe s'écrit alors en coordonnées locales :

$$u^a \mapsto u^{a'} = \frac{A^{a'}_{\ a} u^a}{\overline{C}_i u^i + d}. \tag{2.8}$$

La condition (2.7) imposant $d = \det(A)^{-1} \neq 0$ permet de réécrire une telle transformation :

$$u^a \mapsto u^{a'} = \frac{\widehat{A}^{a'}_{\ a} u^a}{\widehat{\overline{C}}_i u^i + 1},$$

où $\widehat{A}^{a'}_{\ a} = A^{a'}_{\ a}/d$ et $\widehat{\overline{C}}_i = \overline{C}/d$.

Un élément s_2 du sous-groupe S_2, engendré par les 2-jets en $0 \in \mathbb{R}^n$ de (2.8) s'exprime donc localement $s_2 = (s^{a'}_{\ a}, s^{a'}_{\ ab})$,[1] avec :

$$\begin{aligned} s^{a'}_{\ a} &= \left.\frac{\partial u^{a'}}{\partial u^a}\right|_{\mathrm{u}=0} = \widehat{A}^{a'}_{\ a}, \\ s^{a'}_{\ ab} &= \left.\frac{\partial^2 u^{a'}}{\partial u^a \partial u^b}\right|_{\mathrm{u}=0} = -\widehat{A}^{a'}_{\ a}\widehat{\overline{C}}_b - \widehat{A}^{a'}_{\ b}\widehat{\overline{C}}_a. \end{aligned}$$

Les jets du second ordre ne sont donc plus indépendants des jets du premier ordre. Pour obtenir une relation entre les coordonnées des 2-jets indépendamment des paramètres de la transformation, on note l'identification directe :

$$s^{a'}_{\ a} = \widehat{A}^{a'}_{\ a},$$

et on définit :

$$s_a = \frac{-1}{(n+1)} s^{a'}_{\ ab} s^b_{\ a'} = \widehat{C}_a.$$

Ainsi, les coordonnées du premier ordre $s^{a'}_{\ a}$ ne sont pas contraintes et :

$$s^{a'}_{\ ab} = -s^{a'}_{\ a} s_b - s^{a'}_{\ b} s_a.$$

Le groupe S_2 est donc paramétré par le couple $(s^{a'}_{\ a}, s_a)$.

Proposition 2.3.1. *Les élements du groupe S_2 s'écrivant localement*

$$s_2 = (s^{a'}_{\ a}, -s^{a'}_{\ a} s_b - s^{a'}_{\ b} s_a),$$

peuvent être représentés matriciellement par un élément, noté $\tilde{s}_2$, du groupe $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\widetilde{s_2} = \begin{pmatrix} s^{a'}_{\ a} & 0 \\ s_a & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

[1] Comme dans le cas des groupes différentiels, le but de ces 2-jets étant fixé à $0 \in \mathbb{R}^n$, on l'omet systématiquement.

Preuve. D'abord, il est évident que l'élément neutre du groupe S_2 est représenté par l'identité sur groupe $SL_{n+1}(\mathbb{R})$.

Ensuite, considérons deux élements $s_2 = (s^{a'}{}_a, -s^{a'}{}_a s_b - s^{a'}{}_b s_a)$ et $s_2' = (s^a{}_{a''}, -s^a{}_{a''} s_{b''} - s^a{}_{b''} s_{a''})$ de S_2. Leur produit s'écrit :

$$s_2 \cdot s_2' = \left(s^{a'}{}_a s^a{}_{a''}, -s^{a'}{}_a s^a{}_{a''} \left(s_{b''} + s_b s^b{}_{b''} \right) - s^{a'}{}_a s^a{}_{b''} \left(s_{a''} + s^a{}_{a''} s_a \right) \right),$$

et est donc représenté par :

$$\begin{pmatrix} s^{a'}{}_a s^a{}_{a''} & 0 \\ s_{a''} + s^a{}_{a''} s_a & 1 \end{pmatrix} \in SL_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Or, le produit matriciel des deux représentants, $\widetilde{s_2}$ et $\widetilde{s_2'}$, de s_2 et s_2' respectivement est bien :

$$\widetilde{s_2} \cdot \widetilde{s_2'} = \begin{pmatrix} s^{a'}{}_a & 0 \\ s_a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^a{}_{a''} & 0 \\ s_{a''} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{a'}{}_a s^a{}_{a''} & 0 \\ s_a s^a{}_{a''} + s_{a''} & 1 \end{pmatrix}.$$

Le représentant d'un produit et donc bien le produit des représentants.

Enfin, l'inverse d'un élément s_2 est défini par (1.3) :

$$s_2^{-1} = (s^a{}_{a'}, s^a{}_{a'b'}),$$

avec :

$$\begin{aligned} s^a{}_{a'} s^{a'}{}_b &= \delta^a{}_b, \\ s^a{}_{a'b'} &= s^a{}_{a'} s^b{}_{b'} s_b + s^a{}_{b'} s^b{}_{a'} s_b. \end{aligned}$$

s_2^{-1} est donc représenté par la matrice :

$$\widetilde{s_2^{-1}} = \begin{pmatrix} s^a{}_{a'} & 0 \\ -s^a{}_{a'} s_a & 1 \end{pmatrix},$$

et il est aisé de vérifier que :

$$\widetilde{s_2^{-1}} = \widetilde{s_2}^{-1}.$$

■

Soit S_1 le groupe des 1-jets en $0 \in \mathbb{R}^n$ de (2.8). Le noyau de la projection $\varpi_1^2 : S_2 \to S_1$ est défini par :

$$\mathrm{Ker}(\varpi_1^2) = SL_1 = \{(\delta^{a'}{}_a, -s^{a'}{}_a s_b - s^{a'}{}_b s_a) \in S_2\}.$$

Comme dans le cas général, on pose, par définition $S_1 = SL_0$. Ainsi, le groupe S_2 se décompose en produit semi-direct :

$$S_2 = SL_0 \ltimes SL_1,$$

avec, pour représentant matriciel respectif des éléments de $sl_0 \in SL_0$ et $sl_1 \in SL_1$:

$$\widetilde{sl_0} = \begin{pmatrix} s^{a'}{}_a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{sl_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_a & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe des 2-jets en $0 \in \mathbb{R}^n$ des transformations projectives isotropes peut donc être vu comme un sous-groupe de ces transformations, et donc comme un sous-groupe de $SL_{n+1}(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc bien choisir comme groupe total de la géométrie de Klein modèle le groupe projectif :

$$SL_{n+1}(\mathbb{R}) = S_2 \ltimes SL_{-1}.$$

Au niveau infinitésimal, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ du groupe projectif se décompose en la somme directe :

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}_{-1} \oplus \mathfrak{sl}_0 \oplus \mathfrak{sl}_1.$$

Les conditions sur les éléments du second ordre de S_2 se reportent alors sur les élements de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall X = (X^a, X^a{}_b, X^a{}_{bc}) \in \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}), \quad \exists\, X_a, \quad X^a{}_{bc} = -\delta^a_b X_c - \delta^a_c X_b. \tag{2.10}$$

Un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ est donc caractérisé par $(X^a, X^a{}_b, X_b)$, avec $X^a \in \mathfrak{sl}_{-1}$, $X^a{}_b \in \mathfrak{sl}_0$ et $X_c \in \mathfrak{sl}_1$.

Proposition 2.3.2. *Tout élément $X \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ admet pour représentant matriciel :*

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a{}_b & \widetilde{X}^a \\ \widetilde{X}_b & -\widetilde{X}^a{}_a \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

avec

$$\begin{aligned} X^a &= \widetilde{X}^a \\ X^a{}_b &= \widetilde{X}^a{}_b - \delta^a_b \widetilde{X}^c{}_c \\ X_b &= \widetilde{X}_b. \end{aligned} \tag{2.12}$$

***Remarque* 2.3.1.** *Ce paramétrage est en concordance avec le fait que nous avons posé comme paramètre pour les transformations finies $\widehat{A} = A/d$. Ce qui se traduit au point de vue infinitésimal par $X^a{}_b = \widetilde{X}^a{}_b - \delta^a{}_b \widetilde{X}^c{}_c$.*

Preuve. Le crochet de Lie de deux éléments $X, Y \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ est caractérisé par (1.6) :

$$([X,Y]^a, [X,Y]^a{}_b, [X,Y]_b)$$

avec

$$\begin{aligned} [X,Y]^a &= X^a{}_b Y^b - Y^a{}_b X^b, \\ [X,Y]^a{}_b &= X^a{}_c Y^c{}_b - \delta^a{}_b X_c Y^c - X_b Y^a - (X \leftrightarrow Y), \\ [X,Y]_b &= X_a Y^a{}_b - Y_a X^a{}_b. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Soient les représentants matriciel respectif $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ de $X, Y \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$[2],

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X^a{}_b & X^a \\ X_b & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} Y^a{}_b & Y^a \\ Y_b & 0 \end{pmatrix},$$

leur commutateur est alors[3] :

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X_0 & X_{-1} \\ X_1 & X \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} &X_{-1} = X^a{}_b Y^b - Y^a{}_b X^b, \\ &X_0 = X^a{}_b Y^b{}_c + X^a Y_c - Y^a{}_b X^b{}_c - Y^a X_c, \\ &X_1 = X_a Y^a{}_b - Y_a X^a{}_b, \\ &X = X_b Y^b - Y_b X^b. \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat attendu :

$$\begin{aligned} [X,Y]^a &= X_{-1}, \\ [X,Y]^a{}_b &= X_0 - \delta^a{}_b X, \\ [X,Y]_b &= X_1. \end{aligned}$$

■

Définition de l'action de S_3 sur $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$

Comme vu au paragraphe 2.1.2, pour expliciter la composante locale de la connexion de Cartan dans le cas général, il est nécessaire de définir l'action

[2] $X^a{}_b$ et $Y^a{}_b$ étant des éléments de $\mathfrak{sl}_0$, ils sont de trace nulle.
[3] où le produit est le produit matriciel usuel

du type action adjointe de G_3 sur $\mathfrak{g}$. Dans le cas de la G-structure projective, il est donc nécessaire de restreindre cette action (1.7) à l'action de S_3 sur $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Les éléments $s_3 \in S_3$ sont définis comme étant les 3-jets en $0 \in \mathbb{R}^n$ des transformations (2.8), i.e. :

$$S_3 \ni s_3 = \left(s^{a'}{}_a, s^{a'}{}_{ab}, s^{a'}{}_{abc} \right),$$

avec

$$\begin{aligned} s^{a'}{}_{ab} &= -s^{a'}{}_a s_b - s^{a'}{}_b s_a, \\ s^{a'}{}_{abc} &= 2\left(s^{a'}{}_a s_b s_c + s^{a'}{}_b s_a s_c + s^{a'}{}_c s_a s_b \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Notons que l'opération de dérivation formelle de $s^{a'}{}_{ab}$ conduit au même résultat que le calcul direct des 3-jets des transformations (2.8).

Les éléments du groupe S_3 sont donc, eux aussi, caractérisés par le couple de paramètres $(s^{a'}{}_a, s_a)$. En appliquant les contraintes (2.14) et (2.10) à la définition de l'action du type action adjointe (1.7), on obtient :

$$\forall s_3 \in S_3, X = (X^a, X^a{}_b, X^a{}_{bc}) \in \mathfrak{sl}, \quad \overline{\mathrm{Ad}}(s_3)X = X' = (X^{a'}, X^{a'}{}_{b'}, X^{a'}{}_{b'c'}),$$

avec :

$$\begin{aligned} X^{a'} &= s^{a'}{}_a X^a, \\ X^{a'}{}_{b'} &= s^{a'}{}_a X^a{}_b s^b{}_{b'} - s^{a'}{}_a X^a s_b s^b{}_{b'} - \delta^{a'}{}_{b'} s_a X^a, \\ X^{a'}{}_{b'c'} &= -\delta^{a'}{}_{b'} X_{c'} - \delta^{a'}_{c'} X_{b'}, \end{aligned}$$

où :

$$X_{b'} = s^b{}_{b'} X_b - s_a X^a s^b{}_{b'} s_b + s_a X^a{}_b s^b{}_{b'}.$$

En utilisant les écritures matricielles (2.9) et (2.11), on remarque que l'action du type action adjointe de S_3 sur $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ est équivalente à l'action adjointe matricielle entre leur représentants :

$$\forall \widetilde{s}_2 = \begin{pmatrix} s^{a'}{}_a & 0 \\ s_a & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{X} = \begin{pmatrix} X^a{}_b & X^a \\ X_b & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Ad}(\widetilde{s}_2)\widetilde{X} = \widetilde{s}_2 \widetilde{X} \left(\widetilde{s}_2\right)^{-1} \text{ remplacera le calcul via } \overline{\mathrm{Ad}}(\ell(s_2)) \cdot X.$$

Dans la suite, nous allons donc remplacer le produit au sens des repères par le produit matriciel. Cette substitution nous évite donc d'utiliser l'opération de dérivation formelle ℓ (2.3), fastidieuse d'un point de vue calculatoire.

2.3.2 Les 2-repères projectifs

Définition 2.3.2. *Les 2-repères projectifs sont définis comme étant les sections particulières de la G-structure projective $P^2M \subset F^2M$ suivantes [27] :*

$$e_2 = (x^\mu, e^\mu{}_a, e^\mu{}_{ab}) \quad \textit{telle que} \quad \exists e_a, e^\mu{}_{ab} = -e^\mu{}_a e_b - e^\mu{}_b e_a. \tag{2.15}$$

***Remarque* 2.3.2.** *Nous verrons dans la suite que ce choix de section, équivalent à un choix de jauge en physique, permet un paramétrage optimal de la connexion de Cartan projective.*

Par conséquent, un 2-repère projectif sera caractérisé par le couple de paramètres $(e^\mu{}_a, e_a)$, avec :

$$e_a = \frac{-1}{(n+1)} e^\mu{}_{ab} e^b{}_\mu.$$

Un 2-repère projectif pourra donc, comme élément du groupe S_2, être représenté par la matrice :

$$\widetilde{e}_2 = \begin{pmatrix} e^\mu{}_a & 0 \\ e_a & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Nous avons défini, dans le premier chapitre, la notion de repère inverse 1.1.7. Pour les 2-repères projectifs, il est toujours possible de définir un inverse :

$$e_2{}^{-1} = (x^\mu, e^a{}_\mu, e^a{}_{\mu\nu}),$$

avec :

$$\begin{aligned} e^a{}_\mu e^\mu{}_a &= \delta^\mu{}_\nu, \\ e^a{}_{\mu\nu} &= e^a{}_\mu e^b{}_\nu e_b + e^a{}_\nu e^b{}_\mu e_b. \end{aligned}$$

En définissant :

$$e_\mu = \frac{1}{(n+1)} e^a{}_{\mu\nu} e^\nu{}_a,$$

on obtient donc que l'inverse d'un 2-repère projectif est caractérisé par le couple $(e^a{}_\mu, e_\mu)$, avec $e_\mu = -e^b{}_\mu e_b$, et a pour représentant matriciel :

$$\begin{pmatrix} e^a{}_\mu & 0 \\ -e^b{}_\mu e_b & 1 \end{pmatrix} = (\widetilde{e}_2)^{-1}.$$

2.3.3 Connexion de Cartan projective

Définition 2.3.3. *Une connexion de Cartan sera dite projective si elle est définie sur une G-structure projective.*

Comme dans le cas général du traitement du fibré des 2-repères, nous allons nous limiter aux connexions de Cartan de torsion nulle.

Une connexion de Cartan projective est donc une 1-forme sur P^2M à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}_{-1} \oplus \mathfrak{sl}_0 \oplus \mathfrak{sl}_1$ caractérisée par [13, 16, 21, 27] :

$$\omega = (\theta^a, \theta^a{}_b, \omega_b) \quad \text{telle que } \omega^a{}_{bc} = \omega^a{}_{cb} = -\delta^a{}_b\omega_c - \delta^a{}_c\omega_b \in \Omega^1(P^2M, \mathfrak{sl}_1).$$

La 1-forme de soudure $(\theta^a, \theta^a{}_b)$ sur P^2M s'écrit, dans le système de coordonnées locales des 2-repères projectifs :

$$\theta^a = e^a{}_\mu dx^\mu, \quad \theta^a{}_b = \delta^a_b e^c{}_\nu e_c dx^\nu + e^a{}_\nu e_b dx^\nu + e^a{}_\mu de^\mu{}_b. \tag{2.17}$$

Les symboles de cette connexion de Cartan sont définis, comme dans le cas général, par les composantes de la 1-forme sur P^2M :

$$\Gamma = \overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2))\omega + e_2 de_2{}^{-1}, \tag{2.18}$$

où $e_2 \in P^2M$. Mais, dans le cas de la G-structure projective, nous avons vu que l'action de type adjointe $\overline{\mathrm{Ad}}$ peut être traduite en terme d'action adjointe sous forme matricielle. Les représentants matriciels respectifs de la connexion de Cartan ω et de la 1-forme Γ sont définis grâce au paramétrage de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$, (2.11), par :

$$\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} \theta^a{}_b & \theta^a \\ \omega_b & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma^\mu{}_\nu & \Gamma^\mu \\ \Gamma_\nu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

On obtient donc :

$$\widetilde{\Gamma} = Ad(\widetilde{e}_2)\widetilde{\omega} + \widetilde{e}_2 d\,(\widetilde{e}_2)^{-1},$$

ce qui s'écrit explicitement :

$$\widetilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} e^\mu{}_a\theta^a{}_b e^b{}_\nu - e^\mu{}_a\theta^a e^b{}_\nu e_b + e^\mu{}_a de^a{}_\nu & e^\mu{}_a\theta^a \\ e^a\theta^a{}_b e^b{}_\nu\omega_b e^b{}_\nu - e_a\theta^a e^b{}_\nu e_b - e^b{}_\nu de_b & e_a\theta^a \end{pmatrix}.$$

Les symboles d'une connexion de Cartan projective sont alors :

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= e^\mu{}_a\theta^a, \\ \Gamma^\mu{}_\nu &= e^\mu{}_a\theta^a{}_b e^b{}_\nu - e^\mu{}_a\theta^a e^b{}_\nu e_b + e^\mu{}_a de^a{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu e_a\theta^a, \\ \Gamma_\nu &= e_b\theta^b e_d e^d{}_\nu - e_b\theta^b{}_d e^d_\nu + e^d{}_\nu de_d - \omega_c e^c{}_\nu. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ce résultat est en accord avec le résultat présenté par S. Kobayashi et T. Nagano dans [21]. L'avantage de notre méthode est une meilleure distinction entre les espaces source et but, permettant une application immédiate aux outils physiques.

En tenant compte des expressions locales de la forme de soudure ainsi que la contrainte imposée sur les 2-repères projectifs (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^\mu = dx^\mu, \\
&\Gamma^\mu{}_\nu = 0, \\
&\Gamma_\nu = e_b e_c e^b{}_\nu e^c{}_\rho dx^\rho + \omega_b e^b{}_\nu - d\left(e^b{}_\nu e_b\right).
\end{aligned}$$

***Remarque* 2.3.3.** *Notre choix des 2-repères projectifs nous permet de retrouver les deux premiers symboles de la connexion de Cartan* $\Gamma^\mu = dx^\mu$ *et* $\Gamma^\mu{}_\nu = 0$. *L'information reste ainsi codée principalement dans le symbole de plus haut poids.*

Nous allons maintenant prouver que les symboles de la connexion de Cartan projective dépendent uniquement du point de l'espace de base au-dessus duquel ils sont définis. Pour cela, nous utilisons la méthode présentée par [28] dans le cas d'une connexion affine.

Tout d'abord, rappelons la définition de la courbure de la connexion de Cartan projective :

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega^a &= d\theta^a + \theta^a{}_b \theta^b, \\ \Omega^a{}_b &= d\theta^a{}_b + \theta^a{}_c \theta^c{}_b - \delta^a{}_b \omega_c \theta^c - \omega_b \theta^a, \\ \Omega_c &= d\omega_c + \omega_d \theta^d{}_c. \end{cases}$$

Il a été montré, [16,21] que cette 2-forme de courbure peut s'écrire localement comme :

$$\Omega^a = \frac{1}{2} K^a{}_{ij} \theta^i \wedge \theta^j,$$

$$\Omega^a{}_b = \frac{1}{2} K^a{}_{bij} \theta^i \wedge \theta^j,$$

$$\Omega_c = \frac{1}{2} K_{\ cij} \theta^i \wedge \theta^j.$$

On obtient donc ainsi les expressions des dérivées des composantes de la connexion de Cartan suivantes :

$$\begin{aligned} d\theta^a &= \Omega^a - \theta^a{}_b\theta^b, \\ d\theta^a{}_b &= \Omega^a{}_b - \theta^a{}_c\theta^c{}_b + \delta^a{}_b\omega_c\theta^c + \omega_b\theta^a, \\ d\omega_c &= \Omega_c - \omega_d\theta^d{}_c. \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'expression locale des symboles de la connexion de Cartan, on obtient :

$$\begin{aligned} de^a{}_\nu &= e^a{}_\mu\Gamma^\mu{}_\nu - \theta^a{}_b e^b{}_\nu + e^b{}_\nu e_b\theta^a + e^a{}_\nu e_b\theta^b, \\ de_b &= e^\rho{}_b\Gamma_\rho - e_b e_c\theta^c + e_a\theta^a{}_b + \omega_b. \end{aligned}$$

En utilisant cela, on obtient l'expression de la différentielle totale du symbole de plus bas degré :

$$d\Gamma^\mu = e^\mu{}_a\Omega^a - \Gamma^\mu{}_\nu\Gamma^\nu.$$

On utilise maintenant que l'opérateur différentiel est un opérateur nilpotant, *i.e.* $d^2 = 0$, pour en déduire l'expression des différentielles totales des deux symboles restants :

$$\begin{aligned} d\Gamma^\mu{}_\nu &= e^\mu{}_a\Omega^a{}_b e^b{}_\nu - e^\mu{}_a\Omega^a e^b{}_\nu e_b - \delta^\mu{}_\nu e_a\Omega^a \\ &\quad -\Gamma_\nu\Gamma^\mu - \delta^\mu{}_\nu\Gamma_\rho\Gamma^\rho - \Gamma^\mu{}_\rho\Gamma^\rho{}_\nu \\ d\Gamma_\rho &= e^a{}_\rho e_a e_c\Omega^c e^a\Omega^a{}_b e^b{}_\rho - e^b{}_\rho\Omega_b - \Gamma_\nu\Gamma^\nu{}_\rho. \end{aligned}$$

On obtient donc le lien suivant entre la 2-forme de courbure de la connexion de Cartan et la courbure des symboles :

$$d\widetilde{\Gamma} + \frac{1}{2}[\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}] = \mathrm{Ad}(\widetilde{e})\widetilde{\Omega},$$

où nous utilisons les paramétrages matriciels (2.16) et (2.19) pour e_2, ω et Γ respectivement.

Alors, en utilisant le fait que, dans le cas d'une connexion de Cartan de torsion nulle, le symbole d'ordre 0 est nul ($\Gamma^\mu{}_\nu = 0$), on obtient

$$\frac{\partial\Gamma^\mu}{\partial e^\nu{}_a} = 0 = \frac{\partial\Gamma^\mu}{\partial e_a} \qquad \frac{\partial\Gamma_\mu}{\partial e^\nu{}_a} = 0 = \frac{\partial\Gamma_\mu}{\partial e_a}.$$

Et donc, aussi :

$$\frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu}}{\partial e^{\rho}{}_{a}} = 0 = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu}}{\partial e_{a}}.$$

Les symboles de la connexion de Cartan projective dépendent donc uniquement du point de l'espace de base au-dessus duquel ils sont définis. Ce qui signifie aussi qu'ils se projettent trivialement sur cet espace de base.

2.3.4 Comportement sous difféomorphismes des symboles de la connexion de Cartan projective

Pour caractériser les symboles de la connexion de Cartan projective, il est nécéssaire d'étudier leurs lois de transformation sous l'action des difféomorphismes de la variété de base M, relevés sur le fibré des 2-repères projectifs P^2M.

Commençons donc par définir la notion de relevé d'un difféomorphisme de M.

Relevés des difféomorphismes

Définition 2.3.4. *Soit un difféomorphisme projectif $\varphi : M \to M$. On définit le relevé, par une section e_2, de ce difféomorphisme sur P^2M, comme étant la section du fibré des 2-repères projectifs suivante :*

$$\begin{array}{rcl} e_2' : M & \to & P^2M \\ x & \mapsto & j_x^2(\varphi) \cdot e_2(x), \end{array}$$

où $j_x^2(\varphi) \in P^2M$.

Soit le représentant polynomial de la section e_2, $f_2(\mathrm{u})$ défini par :

$$f_2^{\mu}(\mathrm{u}) = x^{\mu} + e^{\mu}{}_{a} u^{a} + \frac{1}{2} e^{\mu}{}_{ab} u^{a} u^{b},$$

avec $e^{\mu}{}_{ab} = -e^{\mu}{}_{a} e_{b} - e^{\mu}{}_{b} e_{a}$.

Le relevé par la section e_2 d'un difféomorphisme $\varphi : M \to M$ est alors défini, dans un système de coordonnées locales par :

$$j_x^2(\varphi) \cdot j_0^2(f_2) = j_0^2(\phi \circ f_2) = (x^{\mu'}, e^{\mu'}{}_{a}, e^{\mu'}{}_{ab}).$$

Comme $j_x^2(\varphi)$ est un élément de P^2M, son écriture dans un système de coordonnées locales est :

$$j_x^2(\varphi) = (\varphi^{\mu'}, \varphi^{\mu'}{}_{\mu}, \varphi^{\mu'}{}_{\mu\nu}),$$

avec :

$$\begin{aligned}
&\varphi^{\mu'}{}_{\mu} = \partial_\mu \varphi^{\mu'}, \\
&\varphi^{\mu'}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \varphi^{\mu'} = -\varphi^{\mu'}{}_{\mu}\varphi_\nu - \varphi^{\mu'}{}_{\nu}\varphi_\mu, \\
&\text{où } \varphi_\nu = \frac{-1}{(n+1)} \varphi^{\mu'}{}_{\mu\nu}\varphi^{\mu}{}_{\mu'}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

On obtient alors comme expression locale du relevé d'un difféormorphisme $\varphi : M \to M$ par une section de P^2M :

$$\begin{aligned}
x^{\mu'} &= \varphi^{\mu'}(x), \\
e^{\mu'}{}_{a} &= \varphi^{\mu'}{}_{\mu} e^{\mu}{}_{a}, \\
e^{\mu'}{}_{ab} &= -\varphi^{\mu'}{}_{\mu} e^{\mu}{}_{a} \left(\varphi_\nu e^{\nu}{}_{b} + e_b\right) - \varphi^{\mu'}{}_{\mu} e^{\mu}{}_{b} \left(\varphi_\nu e^{\nu}{}_{a} + e_a\right).
\end{aligned}$$

Action des difféomorphismes sur Γ

La connexion de Cartan étant une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ vue comme algèbre de Lie du groupe $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{R}^n$, elle est invariante sous l'action relevée des difféomorphimes de M. Notons :

$$\varphi^*\Gamma = \Gamma(e_2', \omega) = \left(\Gamma^{\mu'}, \Gamma^{\mu'}{}_{\nu'}, \Gamma_{\nu'}\right).$$

Les coordonnées locales de $\varphi^*\Gamma$ sont alors reliées aux coordonnées locales de Γ par :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\mu'} = \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}, \\
&\Gamma^{\mu'}{}_{\nu'} = \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\nu} - \varphi_\nu dx^\mu - \delta^{\mu}{}_{\nu}\varphi_\rho dx^\rho - \varphi^{\mu}{}_{\rho'} d\varphi^{\rho'}{}_{\nu}\right)\varphi^{\nu}{}_{\nu'}, \\
&\Gamma_{\nu'} = \varphi^{\nu}{}_{\nu'}\left(\Gamma_\nu + e^{d}{}_{\nu} e_d \varphi_\rho dx^\rho + \varphi_\nu \varphi_\rho dx^\rho + e_b \theta^b \varphi_\nu - \varphi_\rho e^{\rho}{}_{b}\theta^{b}{}_{d} e^{d}{}_{\nu} + e^{d}{}_{\nu} d\left(\varphi_\rho e^{\rho}{}_{d}\right)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression locale de la forme de soudure sur P^2M (2.17), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\mu'} = \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}, \\
&\Gamma^{\mu'}{}_{\nu'} = \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\nu} - \varphi_\nu dx^\mu - \delta^{\mu}{}_{\nu}\varphi_\rho dx^\rho - \varphi^{\mu}{}_{\rho'} d\varphi^{\rho'}{}_{\nu}\right)\varphi^{\nu}{}_{\nu'}, \\
&\Gamma_{\nu'} = \varphi^{\nu}{}_{\nu'}\left(\Gamma_\nu + \varphi_\nu \varphi_\rho dx^\rho + d\varphi_\nu\right).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Il est important de noter ici qu'en tenant compte du fait que φ est un difféomorphisme projectif, *i.e.* vérifie les conditions (2.21), les deux premiers symboles de la connexion de Cartan se transforment comme des tenseurs :

$$\Gamma^{\mu'} = \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\Gamma^{\mu},$$
$$\Gamma^{\mu'}{}_{\nu'} = \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu}\varphi^{\nu}{}_{\nu'}.$$

En revanche le terme de plus haut poids se transforme de façon inhomogène. Ce terme inhomogène peut en fait être interprété comme une généralisation de la notion de dérivée de Schwarz pour le difféormorphisme φ en dimension supérieure à 1.

2.3.5 Connexion de Cartan et dérivée de Schwarz

Pour faire cette étude, nous allons commencer par nous restreindre au cas où la variété de base M est unidimensionnelle. On pourra donc poser comme labels de carte $\{x\}$ sur M et $\{a\}$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. **Cas unidimensionnel**

   Définition usuelle de la dérivée de Schwarz
   La dérivée de Schwarz est une notion définie pour le groupe des difféomorphismes de la droite projective $\mathbb{R}P^1$ (ou du cercle S^1) par l'expression suivante [30, 31] :

$$\forall f \in \mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}P^1), x \mapsto f(x), S_{xx}(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, f' = \frac{df}{dx}.$$

   La dérivée de Schwarz possède alors deux propriétés fondamentales :

   (a) C'est un 1-cocycle sur $\mathrm{Diff}_+(\mathbb{R}P^1)$ à valeur dans les différentielles quadratiques, *i.e.* elle vérifie :

$$\forall f, g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}P^1), S_{xx}(f \circ g) = S_{xx}(f) \circ g \cdot \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + S_{xx}(g).$$

   (b) Le noyau de cette dérivée est le groupe des transformations projectives, *i.e.*

$$S_{xx}(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{avec } ad - bc = 1.$$

Connexion de Cartan projective unidimensionnelle et dérivée de Schwarz

Pour étudier la connexion de Cartan projective dans le cas unidimensionnel, quelques remarques sur les 2-repères projectifs sont nécessaires. En effet, les contraintes (2.15) deviennent, dans le cas unidimensionnel :

$$\exists\ e_a \text{ telle que } e^{\mu}{}_{aa} = -2e^{\mu}{}_{a}e_a,$$

i.e., il n'y a plus de contrainte sur les 2-repères projectifs. En posant $\dim M = n = 1$ pour (2.22), on obtient l'écriture locale des symboles de la connexion de Cartan projective suivante :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^x = dx,\\
&\Gamma^x{}_x = 0,\\
&\Gamma^x{}_{xx} = e^a{}_x\omega^a{}_{aa} - \frac{1}{2}\left(e^a{}_{xx}e^x{}_a\right)^2 dx^x + d\left(e^a{}_{xx}e^x{}_a\right) \overset{\text{notation}}{=} \Gamma_x.
\end{aligned}$$

L'action d'un relevé de difféomorphisme sur les symboles est alors :

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{x'} = \varphi^{x'}{}_x\Gamma^x,\\
&\Gamma^{x'}{}_{x'} = \varphi^{x'}{}_x\Gamma^x{}_x\varphi^x{}_{x'} = \Gamma^x{}_x,\\
&\Gamma^{x'}{}_{x'x'} = \varphi^x{}_{x'}\left(\Gamma^x{}_{xx} - \left(\varphi^{x'}{}_{xxx}\varphi^x{}_{x'} - \frac{3}{2}\left(\varphi^{x'}{}_{xx}\varphi^x{}_{x'}\right)^2\right)dx\right),\\
\Rightarrow\quad &\Gamma^{x'}{}_{x'x'} = \varphi^x{}_{x'}\left(\Gamma^x{}_{xx} - S(\varphi)_{xx}dx\right).
\end{aligned}$$

La dérivée de Schwarz apparaît donc naturellement comme le terme inhomogène (par rapport à la loi de transformation des tenseurs) dans la loi de transformation du symbole de plus haut poids de la connexion de Cartan projective unidimensionnelle (de torsion nulle).

Nous allons maintenant vérifier qu'il est possible, grâce à ce résultat, de définir une notion de dérivée de Schwarz en dimension supérieure.

2. **Dimension quelconque**

Dans le cas où la dimension de la variété M est quelconque, *i.e.* $n \geqslant 1$, la loi de transformation des coefficients de la composante locale de la connexion de Cartan projective est (2.22). On pose donc :

$$\Gamma_{\nu'} = \varphi^{\nu}{}_{\nu'}\left(\Gamma_\nu + S(\varphi)_{\nu\rho}\right),$$

avec, par définition :

$$S(\varphi)_{\nu\rho} = \varphi_\nu\varphi_\rho + \partial_\rho\varphi_\nu.$$

L'espace P^2M est, grâce à la géométrie de Cartan choisie, localement isomorphe à l'espace quotient $SL_{n+1}(\mathbb{R})/S_2$. Or, S_2 étant un sous-groupe d'isotropie du groupe $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{R}P^n$, par définition, l'espace quotient $SL_{n+1}(\mathbb{R})/S_2$ est isomorphe à l'espace réel projectif $\mathbb{R}P^n$. Localement, la G-structure projective est donc isomorphe à l'espace réel projectif.

Proposition 2.3.3. *La quantité :*

$$S(\varphi)_{\nu\rho} = \varphi_\nu\varphi_\rho + \partial_\rho\varphi_\nu,$$

vérifie les deux propriétés fondamentales de la dérivée schwarzienne sur les difféomorphismes de $\mathbb{R}P^n$.

Démonstration. Pour montrer que $S(\varphi)_{\nu\rho}$ est un 1-cocycle sur les difféomorphismes de $\mathbb{R}P^n$ à valeur dans les différentielles quadratiques, évaluons d'abord :

$$\begin{aligned}
(\varphi\circ\psi)_\nu &= \frac{-1}{(n+1)}\,(\varphi\circ\psi)^{\mu"}_{\ \mu\nu}\,(\varphi\circ\psi)^{\mu}_{\ \mu"} \\
&= \frac{1}{(n+1)}\left(\varphi^{\mu"}_{\ \mu'\nu'}\psi^{\mu'}_{\ \mu}\psi^{\nu'}_{\ \nu} + \varphi^{\mu"}_{\ \mu'}\psi^{\mu'}_{\ \mu\nu}\right)\left(\psi^{\mu}_{\ \rho'}\varphi^{\rho'}_{\ \mu"}\right) \\
&= \varphi_{\ \nu'}\psi^{\nu'}_{\ \nu} + \psi_\nu.
\end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve bien le résultat attendu :

$$S(\varphi\circ\psi)_{\nu\rho} = S(\psi)_{\nu\rho} + \psi^{\nu'}_{\ \nu}\psi^{\rho'}_{\ \rho}S(\varphi)_{\nu'\rho'}.$$

Ensuite, il est aisé de vérifier que $S(\varphi)_{\nu\rho} = 0$ implique le fait que φ est une transformation projective, i.e. vérifie la condition $\varphi^{\mu'}_{\ \mu\nu} = -\varphi^{\mu'}_{\ \mu}\varphi_\nu - \varphi^{\mu'}_{\ \nu}\varphi_\mu$. ■

La loi de transformation sous l'action de relevés de difféomorphismes de M sur la G-structure projective P^2M nous permet donc de proposer un bon candidat généralisant la notion de dérivée de Schwarz pour des espaces de dimension supérieure à 1.

Des études sur la notion de dérivée de Schwarz pour les difféomorphismes projectifs sur des variétés de dimension supérieure à 1 ont déjà été menée [30–32]. Malheureusement, notre étude ne peut être comparée à celles-ci puisque l'opérateur que nous proposons comme généralisation de la dérivée de Schwarz est un 1-cocycle sur les difféomorphismes de $\mathbb{R}P^n$ à valeur dans les différentielles quadratiques, alors que celui proposé dans les études citées est un 1-cocycle sur les difféomorphismes à valeur dans $\mathrm{Hom}(S^2, C^\infty(M))$. Cependant, il est intéressant de noter que, d'un point de vue local, notre opérateur et le terme d'ordre nul de l'opérateur proposé dans [32] coïncident.

2.4 La G-structure conforme

Dans cette section, nous allons nous focaliser sur la G-structure conforme en utilisant la même méthode que précédemment.

Définition 2.4.1. *La G-structure conforme est le sous-fibré, noté C^2M de F^2M modélé par la géométrie de Klein $(CO_n(\mathbb{R}), C_2)$.*

2.4.1 Structure conforme

Pour définir convenablement ce qu'est une transformation conforme, nous allons les définir via les transformations projectives de $\mathbb{R}P^{n+1}$, l'espace des droites de $\mathbb{R}^{n+2}$, préservant l'espace des quadriques isotropes.

Choisissons comme métrique sur $\mathbb{R}^{n+2}$, la métrique $\mathcal{G}$ représentée par la matrice[4] :

$$(\mathcal{G}) = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbb{I}_{p,q} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{array}\right),$$

où $\mathbb{I}_{p,q}$ désigne la métrique plate de signature (p,q) sur l'espace $\mathbb{R}^{n=p+q}$.

L'espace des quadriques isotropes est alors défini comme l'ensemble :

$$\mathcal{Q} = \{X \in \mathbb{R}^{p+1,q+1} \backslash \{0\} | \overline{X}X = 0\},$$

où $\overline{X} = X^t\mathcal{G}$.

Un vecteur $X \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}\backslash\{0\}$ peut toujours s'écrire localement :

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ a \\ b \end{pmatrix} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{p,q}, \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right. .$$

L'ensemble des quadriques isotropes $\mathcal{Q}$ est alors engendré par les vecteurs $X \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ tels que :

$$\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x} + 2ab = 0.$$

Comme il est toujours possible de reparamétrer le vecteur X de telle façon que le paramètre a soit non nul, on pose :

$$X \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ a \\ -\frac{\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x}}{2a} \end{pmatrix}.$$

[4]Par abus de notation, nous désignerons maintenant la métrique $\mathcal{G}$ et son représentant matriciel de façon identique.

Puisque

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, X \in \mathcal{Q} \Rightarrow \lambda X \in \mathcal{Q},$$

nous considèrerons dans la suite, non pas l'espace des quadriques isotropes total, mais l'espace quotient :

$$\mathcal{Q}/\mathbb{R}\backslash\{0\} = \left(S^p \times S^q\right)/\mathbb{Z}^2 = \overline{\mathbb{R}^{p,q}},$$

où $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$ désigne le compactifié conforme de $\mathbb{R}^{p,q}$.

Notons $[X]$ la classe d'équivalence engendrée par $X \in \mathcal{Q}$ dans $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$:

$$[X] = \{\lambda X | \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, X \in \mathcal{Q}\}.$$

On choisira donc comme représentant d'une telle classe, le vecteur :

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \\ -\frac{\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x}}{2} \end{pmatrix}.$$

Une transformation conforme de $\mathbb{R}^{p,q}$ est alors engendrée par l'action du groupe orthogonal $O(n+2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$ restreinte ensuite sur $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$.

Un élément quelconque du groupe orthogonal $O(n+2,\mathbb{R})$ peut être écrit sous forme matricielle :

$$o = \left(\begin{array}{c|cc} A & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \hline \overline{\mathbf{D}} & a & b \\ \overline{\mathbf{E}} & c & d \end{array}\right),$$

où A est une matrice carrée réelle de dimension n, $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p,q}$ sont des vecteurs, $\overline{\mathbf{D}}, \overline{\mathbf{E}} \in \mathbb{R}^{p,q*}$ des covecteurs et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tels que :

$$o \in O(n+2,\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \overline{o}o = \mathcal{G}.$$

La G-structure conforme a pour groupe de structure l'ensemble des 2-jets en $0 \in \mathbb{R}^{p,q}$ des transformations conformes préservant ce point. En premier lieu, il est donc nécessaire de caractériser ces transformations, puis leur 2-jets.

Le point $0 \in \mathbb{R}^{p,q}$ est représenté par la classe $[0] \in \overline{\mathbb{R}^{p,q}}$ définit par :

$$[0] = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

L'action de $o \in O_{n+2}(\mathbb{R})$ sur $[0]$ se traduit par :

$$[0] \mapsto o[0] = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ a \\ c \end{pmatrix}\right].$$

Les transformations conformes engendrant la G-structure conforme devant préserver le point $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{p,q}$, cela impose comme conditions :

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \qquad c = 0.$$

On peut alors expliciter les conditions sur les autres élément de la matrice o imposé par le fait que $o \in O_{n+2}(\mathbb{R})$. Les transformations conformes préservant $0 \in \mathbb{R}^{p,q}$ sont donc engendrées par l'action des élément o de $O_{n+2}(\mathbb{R})$ sur $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$ de la forme :

$$o = \left(\begin{array}{c|cc} A & 0 & \mathbf{C} \\ \hline -a\overline{\mathbf{C}}A & a & -\frac{\overline{\mathbf{C}}\mathbf{C}}{2} \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{array}\right),$$

avec $A \in O(n, \mathbb{R})$, $C \in \mathbb{R}^{p,q}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On obtient donc l'action projective locale sur $\mathbb{R}^{p,q}$ du sous-groupe conforme préservant $0 \in \mathbb{R}^{p,q}$:

$$u^a \in \mathbb{R}^{p,q} \mapsto u^{a'} = \frac{A^{a'}{}_a u^a - \frac{1}{2} g_{ab} u^a u^b C^{a'}}{a\left(-C_{i'} A^{i'}{}_i u^i + 1 + \frac{1}{4} g_{ij} g_{k'l'} u^i u^j C^{k'} C^{l'}\right)}, \tag{2.23}$$

où g_{ab} est la métrique plate sur $\mathbb{R}^{p,q}$.

Un élément c_2 du groupe C_2, engendré par les 2-jets en $0 \in \mathbb{R}^{p,q}$ de cette transformation s'exprime donc localement $c_2 = (c^{a'}{}_a, c^{a'}{}_{ab})$ avec :

$$\begin{aligned} c^{a'}{}_a &= \frac{A^{a'}{}_a}{a}, \\ c^{a'}{}_{ab} &= \frac{A^{a'}{}_a g_{i'j'} C^{j'} A^{i'}{}_b + A^{a'}{}_b g_{i'j'} C^{j'} A^{i'}{}_a - g_{ab} C^{a'}}{a}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas du groupe de structure de la G-structure projective, on note que les jets du second ordre dépendent des jets du premier ordre. On va donc chercher à exprimer cette contrainte indépendamment des paramètres de la transformation. Pour cela, on définit :

$$c_a = \frac{1}{n} c^{a'}{}_{ab} c^b{}_{a'} = \frac{g_{i'j'} A^{i'}_a C^{j'}}{a}.$$

Ainsi, en utilisant la condition $A \in O(n, \mathbb{R})$, on obtient :

$$c^{a'}{}_a = c^{a'}{}_a \quad \text{avec la contrainte} \quad g_{a'b'} c^{a'}{}_a c^{b'}{}_b = g_{ab}$$

et,

$$c^{a'}{}_{ab} = c^{a'}{}_a c_b + c^{a'}{}_b c_a - g_{ab} g^{cd} c^{a'}{}_c c_d.$$

Les éléments du groupe C_2 sont donc paramétrés par le couple $(c^{a'}{}_a, c_a)$.

Proposition 2.4.1. *Les éléments du groupe C_2 s'écrivant localement*

$$c_2 = (c^{a'}{}_a, c^{a'}{}_a c_b + c^{a'}{}_b c_a - g_{ab} g^{cd} c^{a'}{}_c c_d)$$

peuvent être représentés matriciellement par un élément, noté $\widetilde{c_2}$, du groupe $O_{n+2}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\widetilde{c_2} = \left(\begin{array}{c|cc} c^{a'}{}_a & 0 & g^{a'b'} c^b{}_{b'} c_b \\ \hline -c_a & 1 & \frac{-g^{ab} c_a c_b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{2.24}$$

avec $g_{a'b'} c^{a'}{}_a c^{b'}{}_b = g^{ab}$.

Preuve. Il est d'abord évident que l'élément neutre du groupe C_2 est représenté par l'identité du groupe $O_{n+2}(\mathbb{R})$.

Ensuite, considérons deux éléments $c_2' = \left(c^{a''}{}_{a'}, c^{a''}{}_{a'} c_{b'} + c^{a''}{}_{b'} c_{a'} - g_{a'b'} g^{c'd'} c^{a''}{}_{c'} c_{d'}\right)$ et $c_2 = \left(c^{a'}{}_a, c^{a'}{}_a c_b + c^{a'}{}_b c_a - g_{ab} g^{cd} c^{a'}{}_c c_d\right)$. Leur produit s'écrit :

$$\begin{aligned} c_2' \cdot c_2 \;=\; & \Big(c^{a''}{}_{a'} c^{a'}{}_a, c^{a''}{}_{a'} c^{a'}{}_a \left(c^{b'}{}_b c_{b'} + c_b\right) + c^{a''}{}_{b'} c^{b'}{}_b \left(c^{a'}{}_a c_{a'} + c_a\right) - \\ & g_{ab} g^{cd} c^{a''}{}_{a'} c^{a'}{}_c \left(c^{d'}{}_d c_{d'} + c_d\right)\Big), \end{aligned}$$

et est donc représenté par :

$$\left(\begin{array}{c|cc} c^{a''}{}_{a'} c^{a'}{}_a & 0 & g^{a''b''} c^b{}_{b'} c^{b'}{}_{b''} \left(c_b + c^{d'}{}_d c_{d'}\right) \\ \hline -\left(c_a + c^{a'}{}_a c_{a'}\right) & 1 & \frac{-g^{ab}\left(c_a + c^{a'}{}_a c_{a'}\right)\left(c_b + c^{b'}{}_b c_{b'}\right)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in O_{n+2}(\mathbb{R}).$$

Or, le produit matriciel des deux représentants, $\widetilde{c_2}$ et $\widetilde{c_2'}$, de c_2 et c_2' respectivement est bien :

$$\begin{aligned} \widetilde{c_2'} \cdot \widetilde{c_2} \;=\; & \left(\begin{array}{c|cc} c^{a''}{}_{a'} & 0 & g^{a''b''} c^{b'}{}_{b''} c_{b'} \\ \hline -c_{a'} & 1 & \frac{-g^{a'b'} c_{a'} c_{b'}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} c^{a'}{}_a & 0 & g^{a'b'} c^b{}_{b'} c_b \\ \hline -c_a & 1 & \frac{-g^{ab} c_a c_b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ =\; & \left(\begin{array}{c|cc} c^{a''}{}_{a'} c^{a'}{}_a & 0 & g^{a''b''} c^b{}_{b'} c^{b'}{}_{b''} \left(c_b + c^{d'}{}_d c_{d'}\right) \\ \hline -\left(c_a + c^{a'}{}_a c_{a'}\right) & 1 & \frac{-g^{ab}\left(c_a + c^{a'}{}_a c_{a'}\right)\left(c_b + c^{b'}{}_b c_{b'}\right)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Le produit des représentants est donc bien le représentant du produit.

Enfin, l'inverse d'un élément c_2 est défini par (1.3) :

$$c_2{}^{-1} = \left(c^a{}_{a'}, c^a{}_{a'b'}\right),$$

avec

$$\begin{aligned} &c^a{}_{a'}c^{a'}{}_b = \delta^a_b, \\ &c^a{}_{a'b'} = -c^a{}_{a'}c^b{}_{b'}c_b - c^a{}_{b'}c^b{}_{a'}c_b + g_{a'b'}g^{c'd'}c^a{}_{c'}c^d{}_{d'}c_d. \end{aligned}$$

c_2^{-1} est donc représenté par la matrice :

$$\widetilde{c_2^{-1}} = \left(\begin{array}{c|cc} c^a{}_{a'} & 0 & -g^{ab}c_b \\ \hline c_a c^a{}_{a'} & 1 & \frac{-g^{ab}c_a c_b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

et il est aisé de vérifier que :

$$\widetilde{c_2^{-1}} = \widetilde{c_2}^{-1}.$$

■

Soit C_1 le groupe des 1-jets en $0 \in \mathbb{R}^{p,q}$ de la transformation (2.23). Le noyau de la projection $\varpi_1^2 : C_2 \to C_1$ est défini par :

$$\mathrm{Ker}(\varpi_1^2) = CO_1 = \left\{\left(\delta^{a'}_a, c^{a'}{}_a c_b + c^{a'}{}_b c_a - g_{ab}g^{cd}c^{a'}{}_c c_d\right) \in C_2\right\}.$$

Comme dans le cas général, on pose, par définition $C_1 = CO_0$. Ainsi, le groupe C_2 se décompose en produit semi-direct :

$$C_2 = CO_0 \ltimes CO_1,$$

avec pour représentants matriciels respecifs des éléments $co_0 \in CO_0$ et $co_1 \in CO_1$:

$$\widetilde{co_0} = \left(\begin{array}{c|cc} c^a{}_{a'} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \widetilde{co_1} = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbb{1}_n & 0 & g^{ab}c_b \\ \hline 0 & 1 & \frac{-g^{ab}c_a c_b}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Le groupe C_2 peut donc être caractérisé comme un sous-groupe isotrope du groupe conforme. Nous pouvons donc choisir, comme pour la G-structure projective, le groupe conforme comme groupe total de la géométrie de Klein modèle :

$$CO_n(\mathbb{R}) = C_2 \ltimes CO_{-1},$$

où, pour garder des notation homogènes, on pose $CO_{-1} = GL_{-1} \simeq \mathbb{R}^n$.

Au point de vue infinitésimal, l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}_n(\mathbb{R})$ du groupe conforme se décompose en la somme directe :

$$\mathfrak{co}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{co}_{-1} \oplus \mathfrak{co}_0 \oplus \mathfrak{co}_1.$$

Les conditions sur les éléments du premier et second ordres du groupe total C_2 se reportent en les conditions suivantes sur les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}_0 \oplus \mathfrak{co}_1$:

$$\forall X = (X^a, X^a_{\ b}, X^a_{\ bc}) \in \mathfrak{co}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad g^{ac}X^b_{\ c} + g^{bc}X^a_{\ c} - \frac{2}{n}g^{ab}X^c_{\ c} = 0 \qquad (2.25)$$
$$\exists X_a, \quad X^a_{\ bc} = \delta^a_b X_c + \delta^a_c X_b - g_{bc}g^{ad}X_d.$$

Un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}_n(\mathbb{R})$ est donc paramétré par le triplet $(X^a, X^a_{\ b}, X_b)$, avec $X^a \in \mathfrak{o}_{n+2}(\mathbb{R})_{-1}$, $X^a_{\ b} \in \mathfrak{co}_0$ et $X_b \in \mathfrak{co}_1$.

Proposition 2.4.2. *Tout élément $X \in \mathfrak{co}_n(\mathbb{R})$ admet pour représentant matriciel :*

$$\widetilde{X} = \left(\begin{array}{c|cc} \widetilde{X}^a_{\ b} & \widetilde{X}^a & g^{ab}\widetilde{X}_b \\ \hline -\widetilde{X}_b & \widetilde{x} & 0 \\ -g_{ab}\widetilde{X}^a & 0 & -\widetilde{x} \end{array}\right), \qquad (2.26)$$

avec :

$$\begin{aligned} X^a &= \widetilde{X}^a, \\ X^a_{\ b} &= \widetilde{X}^a_{\ b} - \delta^a_b\widetilde{x}, \\ X_b &= \widetilde{X}_b. \end{aligned} \qquad (2.27)$$

***Remarque* 2.4.1.** *Ce paramétrage de l'algèbre de Lie est en accord avec le paramétrage des transformations conformes finies, $c^{a'}_{\ a} = \frac{A^{a'}_{\ a}}{a}$. Ceci se traduit en effet d'un point de vue infinitésimal par : $X^a_{\ b} = \widetilde{X}^a_{\ b} - \delta^a_b\widetilde{x}$.*

Preuve. Le crochet de Lie de deux éléments $X, Y \in \mathfrak{co}$ est caractérisé par (1.6) :

$$([X,Y]^a, [X,Y]^a_{\ b}, [X,Y]_b),$$

avec :

$$\begin{aligned} [X,Y]^a &= X^a_{\ b}Y^b - Y^a_{\ b}X^b \\ [X,Y]^a_{\ b} &= X^a_{\ c}Y^c_{\ d} + \delta^a_{\ b}X_cY^c + X_bY^a - g_{ac}g^{bd}X_dY^c - (X \leftrightarrow Y) \\ [X,Y]_a &= X_cY^c_{\ a} - Y_cX^c_{\ a} \end{aligned}$$

Soient les représentants matriciels respectifs $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ de $X, Y \in \mathfrak{co}$,

$$\widetilde{X} = \left(\begin{array}{c|cc} X^a_b & X^a & g^{ab}X_b \\ \hline -X_b & 0 & 0 \\ -g_{ab}X^a & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \widetilde{Y} = \left(\begin{array}{c|cc} Y^a_b & Y^a & g^{ab}Y_b \\ \hline -Y_b & 0 & 0 \\ -g_{ab}Y^a & 0 & 0 \end{array}\right)$$

leur commutateur est alors[5] :

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X} = \left(\begin{array}{c|cc} X_0 & X_{-1} & \overline{X}_1 \\ \hline -X_1 & x & 0 \\ \overline{X}_{-1} & 0 & -x \end{array}\right),$$

avec :

$$\begin{aligned} X_{-1} &= X^a{}_b Y^b - Y^a{}_b X^b, \\ X_0 &= X^a{}_b Y^b{}_c - X^a Y_c - g_{cd} g^{ab} X_b Y^d - (X \leftrightarrow Y), \\ X_1 &= X_b Y^b{}_c - Y_b X^b{}_c, \\ x &= -X_b Y^b. \end{aligned}$$

Le crochet de Lie (sur l'algèbre de Lie des matrices) des représentants est donc bien le représentant du crochet de Lie. ■

2.4.2 Définition de l'action de C_3 sur $\mathfrak{co}$

Comme pour la construction des symboles de la connexion de Cartan dans le cas de la G-structure projective, il est nécessaire, pour étudier la connexion de Cartan dans le cas de la G-structure conforme, de définir l'action du type action adjointe de C_3 sur $\mathfrak{co}$. Pour cela, on restreint l'action définie par (1.7) à la G-structure conforme.

Les éléments $c_3 \in C_3$ sont définis comme étant les 3-jets en $0 \in \mathbb{R}^{p,q}$ des transformations (2.23), i.e :

$$C_3 \ni c_3 = (c^{a'}{}_a, c^{a'}{}_{ab}, c^{a'}{}_{abc}),$$

avec :

$$\begin{aligned} & g_{a'b'} c^{a'}{}_a c^{b'}{}_b = g_{ab} \\ & c^{a'}{}_{ab} = c^{a'}{}_a c_b + c^{a'}{}_b c_a - g_{ab} g^{cd} c^{a'}{}_c c_d \\ & c^{a'}{}_{abc} = 2(c^{a'}{}_a c_b c_c + c^{a'}{}_b c_a c_c + c^{a'}{}_c c_a c_b) - \\ & \qquad -\frac{1}{2} g^{kl} c_k c_l \left(g_{ab} c^{a'}{}_c + g_{bc} c^{a'}{}_a + g_{ac} c^{a'}{}_b \right) \\ & \qquad -g^{kl} c^{a'}{}_k c_l \left(g_{ab} c_c + g_{ac} c_b + g_{bc} c_a \right). \end{aligned} \tag{2.28}$$

[5] Le commutateur est ici le commutateur usuel de deux matrices.

De même que dans le cas projectif, les éléments de C_3 s'obtiennent de la dérivation formelle des éléments de C_2 comme du calcul direct des 3-jets des transformations (2.23).

Les éléments du groupe C_3 sont donc, eux aussi, caractérisés par le couple de paramètres $(c^{a'}{}_a, c_a)$. En appliquant alors les contraintes (2.28) et (2.25) à la définition de l'action du type action adjointe (1.7), on obtient :

$$\forall c_3 \in C_3, X = (X^a, X^a{}_b, X^a{}_{bc}) \in \mathfrak{co}_n(\mathbb{R}), \quad \overline{\mathrm{Ad}}(c_3)X = X' = \left(X^{a'}, X^{a'}{}_{b'}, X^{a'}{}_{b'c'}\right),$$

avec

$$\begin{aligned}
X^{a'} &= c^{a'}{}_a X^a, \\
X^{a'}{}_{b'} &= c^{a'}{}_a X^a c^b{}_{b'} c_b + \delta^{a'}{}_{b'} c_a X^a - g_{b'c'} g^{a'd'} c^{c'}{}_a X^a c^d{}_{d'} c_d + c^{a'}{}_a X^a{}_b c^b{}_{b'}, \\
X^{a'}{}_{b'c'} &= \delta^{a'}{}_{b'} X_{c'} + \delta^{a'}{}_{c'} X_{b'} - g_{b'c'} g^{a'd'} X_{d'}, \\
\text{où} \quad & X_{b'} = c_a X^a c^b{}_{b'} c_b - \frac{1}{2} g_{ab} g^{kl} c_k c_l X^a c^b{}_{b'} + c_a X^a{}_b c^b{}_{b'} + X_b c^b{}_{b'}.
\end{aligned}$$

Il est alors aisé de vérifier que les représentations matricielles d'un élément du groupe C_2 (2.24) et d'un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}_n(\mathbb{R})$ (2.26) permettent de caractériser l'action du type action adjointe de C_3 sur $\mathfrak{co}_n(\mathbb{R})$, dans le cas de la G-structure conforme, par l'action adjointe matricielle usuelle. Nous avons donc, comme dans le cas de la G-structure projective l'équivalence suivante :

$$\overline{\mathrm{Ad}}(\ell(c_2)) \cdot X \Longleftrightarrow \mathrm{Ad}(\widetilde{c_2})\widetilde{X} = \widetilde{c_2}\widetilde{X}\widetilde{c_2}^{-1},$$

et nous pouvons remplacer le produit au sens des repères par le produit matriciel.

2.5 Les 2-repères conformes

Définition 2.5.1. *Les 2-repères conformes sont définis comme étant les sections particulières de la G-structure conforme $C^2M \subset F^2M$ suivantes :*

$$e_2 = (x^\mu, e^\mu{}_a, e^\mu{}_{ab})$$

avec :

$$\begin{aligned}
& g_{\mu\nu} e^\mu{}_a e^\nu{}_b = \rho(x) g_{ab}, \\
& \exists e_b \text{ telle que } e^\mu{}_{ab} = e^\mu{}_a e_b + e^\mu{}_b e_a - g_{ab} g^{cd} e^\mu{}_c e_d.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Par conséquent, un 2-repère conforme sera caractérisé par le couple de paramètres $(e^{\mu}{}_{a}, e_a)$, avec :

$$e_a = \frac{1}{n} e^{\mu}{}_{ab} e^{b}{}_{\mu}.$$

Un 2-repère conforme e_2 pourra donc, comme un élément du groupe de structure C_2 être représenté par une matrice de $O_{n+2}(\mathbb{R})$, notée $\widetilde{e_2}$:

$$\widetilde{e_2} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{\mu}{}_{a} & 0 & g^{\mu\nu} e^{b}{}_{\nu} e_b \\ \hline -e_a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nous avons défini, dans le premier chapitre, la notion de repère inverse 1.1.7. Pour les 2-repères conformes, il est toujours possible de définir un inverse :

$$e_2{}^{-1} = (x^{\mu}, e^{a}{}_{\mu}, e^{a}{}_{\mu\nu}),$$

avec :

$$\begin{aligned} & g_{ab} e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu} = \rho^{-1} g_{\mu\nu}, \\ & e^{a}{}_{\mu\nu} = -e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu} e_b - e^{a}{}_{\nu} e^{b}{}_{\mu} e_b + g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} e^{a}{}_{\rho} e^{b}{}_{\lambda} e_b. \end{aligned}$$

L'inverse d'un 2-repère conforme a donc bien comme représentant matriciel l'inverse du représentant du 2-repère :

$$\widetilde{e_2^{-1}} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{a}{}_{\mu} & 0 & -g^{ab} e_b \\ \hline e_a e^{a}{}_{\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \widetilde{e_2}{}^{-1}.$$

2.5.1 Connexion de Cartan conforme

Définition 2.5.2. *Une connexion de Cartan sera dite conforme si elle est définie sur la G-structure conforme.*

Comme dans le traitement de la G-structure projective, et le cas général, nous allons nous limiter aux connexions de Cartan de torsion nulle.

Une connexion de Cartan conforme est donc une 1-forme sur C^2M à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{co}_{-1} \oplus \mathfrak{co}_0 \oplus \mathfrak{co}_1$ se caractérisant par :

$$\omega = (\theta^a, \theta^a{}_b, \omega_c) \text{ telle que } \quad \begin{aligned} & g^{ac} \theta^b{}_c + g^{bc} \theta^a{}_c - \frac{2}{n} g^{ab} \theta^c{}_c = 0, \\ & \omega^a{}_{bc} = \delta^a{}_b \omega_c + \delta^a{}_c \omega_b - g_{bc} g^{ad} \omega_d. \end{aligned}$$

La 1-forme de soudure $(\theta^a, \theta^a{}_b)$ sur C^2M s'écrit, dans le système de coordonnées locales des 2-repères conformes :

$$\begin{aligned} \theta^a &= e^a{}_\mu dx^\mu, \\ \theta^a{}_b &= -e^a{}_\mu e_b dx^\mu - \delta^a{}_b e^c{}_\mu e_c dx^\mu + g_{bd} g^{ac} e^d{}_\mu e_c dx^\mu + e^a{}_\mu de^\mu{}_b. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Les symboles de la connexion de Cartan de torsion nulle, définie sur la G-structure conforme C^2M sont donc définis comme les composantes de la 1-forme :

$$\Gamma = \overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2))\omega + e_2 de_2^{-1}.$$

Comme dans le cas de la G-structure projective, nous avons vu que les éléments du groupe de structure C_2 et de l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}$ peuvent être représentés par des matrices, de façon à pouvoir remplacer l'action du type action adjointe (1.7) par l'action adjointe matricielle. En choisissant comme représentants matriciels respectifs de la connexion de Cartan ω et de la 1-forme Γ, les matrices :

$$\widetilde{\omega} = \left(\begin{array}{c|cc} \theta^a{}_b & \theta^a & g^{ab}\omega_b \\ \hline -\omega_b & 0 & 0 \\ -g_{ab}\theta^a & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \widetilde{\Gamma} = \left(\begin{array}{c|cc} \Gamma^\mu{}_\nu & \Gamma^\mu & g^{\mu\nu}\Gamma_\nu \\ \hline -\Gamma_\nu & 0 & 0 \\ -g_{\mu\nu}\Gamma^\mu & 0 & 0 \end{array}\right),$$

et en utilisant la relation :

$$\widetilde{\Gamma} = \mathrm{Ad}(\widetilde{e_2})\widetilde{\omega} + \widetilde{e_2} d\widetilde{e_2}^{-1},$$

on obtient explicitement :

$$\widetilde{\Gamma} = \left(\begin{array}{c|cc} \begin{array}{c} e^\mu{}_a \theta^a{}_b e^b{}_\nu + e^\mu{}_a \theta^a e^b{}_\nu e_b - g_{ab} g^{cd} \theta^a e^\mu{}_c e^b{}_\nu e_d \\ + e^\mu{}_a de^a{}_\nu \end{array} & e^\mu{}_a \theta^a & * \\ \hline \begin{array}{c} -e_a \theta^a_b e^b{}_\nu - \omega_b e^b{}_\nu - e_a \theta^a e^b{}_\nu e_b \\ + \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \theta^a e^b{}_\nu e_c e_d + e^a{}_\mu de_a \\ * \end{array} & \begin{array}{c} -e_a \theta^a \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} * \\ * \end{array} \end{array}\right)$$

où les $*$ remplacent les termes redondants.

Ainsi, les symboles de la connexion de Cartan conforme sont :

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= e^\mu{}_a \theta^a \\ \Gamma^\mu{}_\nu &= e^\mu{}_a \theta^a{}_b e^b{}_\nu + e^\mu{}_a \theta^a e^b{}_\nu e_b - g_{ab} g^{cd} \theta^a e^\mu{}_c e^b{}_\nu e_d + \delta^\mu{}_\nu e_a \theta^a + e^\mu{}_a de^a{}_\nu, \\ \Gamma_\nu &= -e^a{}_\nu e_a e_c \theta^c + \frac{1}{2} g_{ac} g^{kl} e_k e_l e^a{}_\nu \theta^c - e_a e^b{}_\nu \theta^a{}_b - e^a{}_\nu \omega_a + e^a{}_\nu de_a. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Ce résultat est en parfait accord avec le résultat présenté par K. Ogiue dans [22]. Mais notons que par cette étude, l'approche est systématique pour toute G-structure, et, de plus, nous avons toujours une distinction claire entre l'espace source et l'espace but.

En prenant en compte les expressions locales de la forme de soudure sur la G-structure conforme, ainsi que la condition sur les 2-repères conformes (2.29), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu &= dx^\mu, \\
\Gamma^\mu{}_\nu &= 0, \\
\Gamma_\nu &= e_a e_c e^a{}_\nu e^c{}_\rho dx^\rho + \frac{1}{2} g_{bd} g^{ac} e_a e_c e^b{}_\nu e^d{}_\rho dx^\rho - e^a{}_\nu \omega_a + d(e^a{}_\nu e_a).
\end{aligned}$$

***Remarque* 2.5.1.** *Comme dans l'étude de la G-structure projective, le choix de 2-repères conformes permet de paramétrer la connexion de Cartan conforme de manière optimale,* i.e. *toute l'information est codée dans le symbole de plus haut poids.*

Comme dans le cas projectif, nous avons montré que les symboles de la connexion de Cartan conforme de torsion nulle se projettent triviallement sur l'espace de base (voir Annexe B).

2.5.2 Comportement des symboles de la connexion de Cartan conforme

Pour caractériser le symbole de la connexion de Cartan conforme, nous allons, comme pour l'étude des symboles de la connexion de Cartan projective, étudier leur loi de transformation sous l'action des difféomorphismes de la variété de base M, relevés sur la G-structure conforme.

Relevés des difféomorphismes

Définition 2.5.3. *Soit un difféomorphisme conforme $\varphi : M \to M$. On définit le relevé, par une section e_2, de ce difféomorphisme sur C^2M, comme étant la section du fibré des 2-repères conformes suivante :*

$$\begin{array}{rcl} e_2' : M & \to & C^2M \\ x & \mapsto & j_x^2(\varphi) \cdot e_2(x) \end{array},$$

où $j_x^2(\varphi) \in C^2M$.

En utilisant exactement la même méthode que dans le cas de l'étude de la connexion de Cartan projective, 2.3.4, on obtient l'expression locale du relevé d'un difféomorphisme $\varphi : M \to M$ par une section de C^2M suivante :

$$e_2' = (x^{\mu'}, e^{\mu'}{}_a, e^{\mu'}{}_{ab}),$$

avec :

$$\begin{aligned}
&x^{\mu'} = \varphi^{\mu'}(x),\\
&e^{\mu'}{}_a = \varphi^{\mu'}{}_\mu e^\mu{}_a,\\
&e^{\mu'}{}_{ab} = \varphi^{\mu'}{}_\mu e^\mu{}_a\left(\varphi_\nu e^\nu{}_b + e_b\right) + \varphi^{\mu'}{}_\mu e^\mu{}_b\left(\varphi_\nu e^\nu{}_a + e_a\right) - g_{ab}g^{cd}\varphi^{\mu'}{}_\mu e^\mu{}_c\left(\varphi_\nu e^\nu{}_d + e_d\right),
\end{aligned}$$

où :

$$\varphi^{\mu'}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\varphi^{\mu'} = \varphi^{\mu'}{}_\mu\varphi_\nu + \varphi^{\mu'}{}_\nu\varphi_\mu - g_{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\varphi^{\mu'}{}_\rho\varphi_\lambda, \tag{2.32}$$

permet de déduire que :

$$\Rightarrow \varphi_\nu = \frac{1}{n}\varphi^{\mu'}{}_{\mu\nu}\varphi^\mu{}_{\mu'}.$$

Action des difféomorphismes sur Γ

Grâce au fait que la connexion de Cartan est invariante sous l'action des difféomorphismes de la base M, nous obtenons que les symboles de la connexion de Cartan se transforment suivant :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu'} &= \varphi^{\mu'}{}_\mu\Gamma^\mu,\\
\Gamma^{\mu'}{}_{\nu'} &= \varphi^{\mu'}{}_\mu\left(\Gamma^\mu{}_\nu + \varphi_\nu dx^\mu + \delta^\mu{}_\nu\varphi_\rho dx^\rho - g_{\lambda\nu}g^{\mu\rho}\varphi_\rho dx^\lambda\right)\varphi^\nu{}_{\nu'},\\
\Gamma_{\rho'} &= \varphi^\rho{}_{\rho'}\left(\Gamma_\rho - \frac{1}{2}g_{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\varphi_\mu\varphi_\nu dx^\lambda + \varphi_\rho\varphi_\lambda dx^\lambda - d\varphi_\rho\right).
\end{aligned}$$

Tout comme dans le cas de la connexion de Cartan projective, en tenant compte du fait que φ est un difféomorphisme conforme, *i.e.* vérifie la condition (2.32), les deux premiers symboles de la connexion de Cartan conforme se transforment comme des tenseurs.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu'} &= \varphi^{\mu'}{}_\mu\Gamma^\mu,\\
\Gamma^{\mu'}{}_{\nu'} &= \varphi^{\mu'}{}_\mu\Gamma^\mu{}_\nu\varphi^\nu{}_{\nu'}.
\end{aligned}$$

Nous allons voir que, tout comme dans le cas projectif, le terme inhomogène dans la loi de transformation du terme de plus haut poids peut être interprété comme une généralisation possible de la dérivée de Schwarz en dimension supérieure.

2.5.3 Connexion de Cartan conforme et dérivée de Schwarz

Dans le cas unidimensionnel, on note que les cas conforme et projectif sont équivalents. L'étude dans le cas conforme sera donc exactement identique à celle du cas projectif, et donnera exactement les mêmes résultats. Nous allons donc directement traiter le cas de dimension quelconque. La loi de transformation du symbole de plus haut poids est :

$$\Gamma_{\rho'} = \varphi^{\rho}{}_{\rho'} \left(\Gamma_{\ \rho} + S(\varphi)_{\rho\lambda} dx^{\lambda} \right),$$

avec, par définition :

$$S(\varphi)_{\rho\lambda} = -\frac{1}{2} g_{\rho\lambda} g^{\mu\nu} \varphi_{\mu} \varphi_{\nu} + \varphi_{\rho} \varphi_{\lambda} - \partial_{\lambda} \varphi_{\rho}.$$

Grâce à la géométrie de Cartan choisie, le fibré C^2M est isomorphe à l'espace quotient $CO_n(\mathbb{R})/C_2$. Or, C_2 étant un sous-groupe d'isotropie de $CO_n(\mathbb{R})$ agissant sur $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$, par définition, l'espace quotient $CO_n(\mathbb{R})/C_2$ est isomorphe au compactifié conforme $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$. Donc, localement, le fibré des 2-repères conformes est isomorphe à $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$.

Proposition 2.5.1. *La quantité :*

$$S(\varphi)_{\rho\lambda} = -\frac{1}{2} g_{\rho\lambda} g^{\mu\nu} \varphi_{\mu} \varphi_{\nu} + \varphi_{\rho} \varphi_{\lambda} - \partial_{\lambda} \varphi_{\rho},$$

vérifie les deux propriétés fondamentales de la dérivée schwarzienne sur les difféomorphimes conformes de $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$.

Preuve. Pour montrer que $S(\varphi)_{\rho\lambda}$ est un 1-cocycle sur les difféomorphismes de $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$ à valeur dans les différentielles quadratiques, on evalue d'abord :

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)_{\rho} &= \frac{1}{n} (\varphi \circ \psi)^{\rho'}{}_{\rho\lambda} (\varphi \circ \psi)^{\rho}{}_{\rho'} \\
&= \frac{1}{n} \left(\varphi^{\rho'}{}_{\rho" \lambda"} \psi^{\rho"}_{\rho} \psi^{\lambda"}_{\lambda} + \varphi^{\rho'}_{\rho"} \psi^{\rho"}{}_{\rho\lambda} \right) \left(\psi^{\rho}{}_{\rho"} \varphi^{\rho"}{}_{\rho'} \right) \\
&= \psi^{\rho"}{}_{\rho} \varphi_{\rho"} + \psi_{\rho}.
\end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat attendu :

$$S(\varphi \circ \psi)_{\rho\lambda} = S(\psi)_{\rho\lambda} + \psi^{\rho'}{}_{\rho} \psi^{\lambda'}_{\lambda} S(\varphi)_{\rho\lambda}.$$

Ensuite, il est aisé de vérifier que $S(\varphi)_{\rho\lambda} = 0$ implique le fait que φ est une transformation conforme, i.e. vérifie la condition

$$\varphi^{\mu'}{}_{\mu\nu} = \varphi^{\mu'}{}_{\mu} \varphi_{\nu} + \varphi^{\mu'}{}_{\nu} \varphi_{\mu} - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \varphi^{\mu'}{}_{\rho} \varphi_{\lambda}.$$

■

De plus, nous constatons que notre définition de la dérivée Schwarzienne pour les difféomorphismes conformes est analogue, en expression locale, à la dérivée Schwarzienne proposée par [33, 34]. L'avantage de notre procédure est principalement le fait que la dérivée de Schwarz apparaît naturellement comme un terme inhomogène dans la loi de transformation d'un symbole non trivial de la connexion de Cartan conforme.

Nous nous sommes ici limités à l'utilisation d'une connexion de Cartan de torsion nulle particulière, en choisissant la forme de soudure comme deux premières composantes. Ce choix nous permet des expressions locales simples tout en gardant, dans la composante de plus haut poids, un maximum d'informations importantes. Lors de la réduction du groupe de stucture nous pouvons nous focaliser entièrement sur cette dernière. Nous obtenons ainsi, dans le cas des G-structures projective et conforme des champs de jauge aux propriétés interessantes, faisant notamment apparaître la dérivée de Schwarz comme un terme inhomogène dans leur loi de transformation.

La réduction du groupe de structure nous permet aussi de définir un paramétrage matriciel, que ce soit pour les groupes de structure, ou pour les algèbres de Lie. Ce paramétrage possède pour nous un double avantage. D'une part, comme les G-structures que nous avons étudiées sont des G-structure d'ordre 2, *i.e.* tous les paramètres apparaissent dès le deuxième ordre, l'opération de dérivée formelle (2.2) n'est plus nécéssaire. D'autre part, l'action de type action adjointe est remplacée par l'action adjointe matricielle standard. Ces deux points sont primordiaux pour l'utilisation de ces objets dans la définition d'une transformation de jauge, comme le présente le chapitre suivant.

Chapitre 3

Connexion de Cartan et transformations de jauge

En 1990, dans son article intitulé « *Gauge transformations out of diffeomorphisms* » [9], A.M. Polyakov définissait, par une fixation de jauge particulière une transformation de jauge infinitésimale reproduisant l'action infinitésimale des difféomorphismes sur les champs de jauge. Au cours de ce travail de thèse, il est montré que ce résultat, qualifié par A.M. Polyakov lui-même de « *geometrical surprise* », découle de l'utilisation d'une certaine théorie de jauge sur la G-structure projective unidimensionnelle [14].

Cet ultime chapitre présente une théorie de jauge sur G-structures projectives et conformes. Nous verrons alors que celle-ci permet de retrouver le résultat attendu dans le cas unidimensionnel. Pour les espaces de dimension supérieure, nous verrons qu'un terme supplémentaire intervient, proportionnel à la courbure des symboles de la connexion.

En premier lieu, nous ferons un bref rappel sur la version infinitésimale des théories de jauge via l'utilisation d'une structure d'algèbre BRS. Puis, nous montrerons que cette théorie s'applique facilement aux G-structures projectives et conformes grâce aux paramétrages matriciels présentés dans le chapitre précédent. Enfin, nous démontrerons comment l'action infinitésimale des difféomorphismes se retrouve grâce aux transformations de jauge proposées.

3.1 Théories de jauge de type Yang-Mills dans le formalisme BRS

Les théories de jauge non-abéliennes, dites théories de type Yang-Mills, permettent de décrire efficacement la théorie électrofaible couplée et la théorie

de l'interaction forte. L'utilisation des structures d'algèbre BRS [35] permet alors un traitement plus systématique, dissociant notamment les transformations de Lorentz des difféomorphismes dans une tentative de théorie pour la gravité quantique [36, 37].

3.1.1 Algèbre BRS pour les théories de jauge de type Yang-Mills usuelles

Nous allons commencer par une rapide présentation de construction de la version infinitésimale d'une théorie de jauge sur un fibré principal $P(M, G)$, via l'algèbre BRS.

Les fondements de ce type de théorie de jauge sont, d'une part, le remplacement de la connexion de Ehresmann par une connexion dite *connexion algébrique*, et, d'autre part, la modification de l'opérateur différentiel d en un nouvel opérateur nilpotent :

$$D = d + s,$$

où s est un opérateur associé à l'algèbre BRS que nous désignerons dans la suite sous les termes *opérateur de BRS*. Tous les champs ainsi traités acquièrent donc une bigraduation. La première graduation est associée à la différentielle de De Rham usuelle, le degré associé sera alors désigné sous les termes *degré différentiel*. Le degré provenant de la seconde graduation, associée à l'opérateur de BRS, sera désigné comme le *degré fantôme*. Ainsi, la nilpotence de l'opérateur $D = d + s$ implique la nullité de la somme d'opérateurs :

$$d^2 + ds + sd + s^2 = 0.$$

Donc, ordre par ordre, en utilisant la nilpotence des opérateurs différentiel et de BRS :

$$d^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad s^2 = 0,$$

ceci impose leur relation d'anticommutation :

$$sd + ds = 0.$$

Soit $\mathscr{A}$, la connexion de Ehresmann sur le fibré principal $P(M, G)$, *i.e.* une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons $A = \sigma^*\mathscr{A}$ son image réciproque sur M, obtenue grâce à une section σ du fibré P. Une transformation de jauge infinitésimale est alors définie, en terme de l'algèbre BRS, par :

$$\begin{aligned} sA &= -d\gamma - [A, \gamma], \\ s\gamma &= -\frac{1}{2}[\gamma, \gamma], \end{aligned} \tag{3.1}$$

où γ est le pendant des paramètres de jauge, communément dénommé *fantôme de Faddeev-Popov*. Il est défini comme étant le générateur de l'algèbre de Grassmann du dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, munie de l'opérateur s, à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le fantôme de Faddeev-Popov a donc pour degré fantôme 1 et pour degré différentiel 0.

Les transformations de jauge infinitésimales peuvent aussi être définies par la condition d'horizontalité de Maurer-Cartan [36], encore appelée *Formule Russe* par R. Stora (**??**) :

$$dA + \frac{1}{2}[A, A] = D\breve{A} + \frac{1}{2}[\breve{A}, \breve{A}],$$

où $\breve{A} = A + \gamma$. La 1-forme $\breve{A}$ acquiert ainsi le statut de connexion algébrique [38] [8].

En théorie de jauge classique, la courbure de la connexion définit les champs physiques. Cette condition d'horizontalité de Maurer-Cartan implique donc que les fantômes de Faddeev-Popov ne contribuent pas dans la description des théories classiques [39].

Les champs de jauge associés à l'utilisation de la structure d'algèbre BRS sont alors les symboles de la connexion algébrique $\breve{A}$, *i.e.* les composantes locales de la 1-forme sur M définie par :

$$\breve{\mathcal{A}} = \mathrm{Ad}(g)\breve{A} + gDg^{-1}, \qquad g \in \mathscr{G},$$

où $\mathscr{G}$ est le groupe de jauge.

En utilisant maintenant le lien entre connexion de Ehresmann et connexion de Cartan, présenté dans le premier chapitre, nous allons appliquer cet outil au cas des G-structures.

3.1.2 Algèbre BRS sur les G-structures

Nous avons montré dans les deux chapitres précédents le lien entre les connexions de Ehresmann sur un certain fibré principal associé et les connexions de Cartan sur une G-structure. Ce lien nous a notamment permis de définir les symboles d'une connexion de Cartan (voir paragraphe 2.1.2). Nous allons maintenant utiliser cette propriété pour définir les transformations de jauge infinitésimales sur une G-structure.

***Remarque* 3.1.1.** *À partir de maintenant, comme dans le cas du traitement des G-structures au second chapitre, le groupe G de la G-structure désigne le groupe de structure de celle-ci, non pas le groupe de structure du fibré principal associé qui est $G \ltimes GL_{-1}$ (voir paragraphe 2.2.2).*

Pour le moment, nous gardons le champ fantôme de Faddeev-Popov γ le plus général possible, *i.e.* nous le définissons comme la restriction du fantôme de Faddeev-Popov défini sur le fibré associé à la G-structure restreint sur celle-ci[1]. C'est donc une 1-forme sur l'espace de base M à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{g}$. La connexion algébrique permettant de définir les transformations de jauge infinitésimales via l'opérateur de BRS s'obtient, comme la connexion de Cartan, par restriction de la connexion algébrique $\breve{A}$ sur la G-structure.

$$\breve{(e_2^*\omega)} = (e_2^*\omega) + \gamma = \breve{(e_2^*\omega)}.$$

Les transformations de jauge infinitésimales sont donc obtenues par restriction de la condition d'horizontalité de Maurer-Cartan sur la G-structure :

$$D\breve{(e_2^*\omega)} + \frac{1}{2}[\breve{(e_2^*\omega)}, \breve{(e_2^*\omega)}] = d(e_2^*\omega) + \frac{1}{2}[(e_2^*\omega), (e_2^*\omega)].$$

On obtient ainsi les transformations de jauge infinitésimales suivantes :

$$\begin{aligned} s(e_2^*\omega) &= -d\gamma - [(e_2^*\omega), \gamma], \\ s\gamma &= -\frac{1}{2}[\gamma, \gamma]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Les champs de jauge associés à cette théorie de jauge sont alors définis comme les symboles de la connexion $\breve{(e_2^*\omega)}$, *i.e.* les composantes locales de la 1-forme :

$$\breve{\Gamma} = \overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2))\breve{(e_2^*\omega)} + e_2 D e_2^{-1},$$

où e_2 est un 2-repère de la G-structure considérée.

Cette 1-forme se décompose naturellement en une somme de deux termes. le premier, noté Γ, est de degré différentiel 1 et de degré fantôme nul. Il s'agit de l'image réciproque[2] du symbole de la connexion de Cartan ω. Le second, noté ϱ, est de degré différentiel nul et de degré fantôme 1 :

$$\breve{\Gamma} = \underbrace{\overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2))(e_2^*\omega) + e_2 d e_2^{-1}}_{\Gamma} + \underbrace{\overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2))\gamma + e_2 s e_2^{-1}}_{\varrho} = \Gamma + \varrho.$$

Comme la 1-forme ϱ est l'analogue de la 1-forme Γ pour le fantôme de Faddeev-Popov, nous désignerons ses composantes locales sous les termes *champs fantômes*.

[1]Par abus de notation, nous dénotons par le même symbole le fantôme de Faddeev-Popov sur le fibré associé et sur la G-structure. Le contexte permet, sans équivoque, de déterminer la définition appropriée.

[2]Nous nous permettons de noter de la même manière le symbole de la connexion de Cartan et son image réciproque puisqu'il a été montré qu'il se projette trivialement sur la base M.

Il est intéressant de noter que, grâce au paramétrage matriciel possible dans le cas des G-structures, aussi bien projective (2.9)(2.11) que conforme (2.24)(2.26), nous allons pouvoir, dès maintenant, remplacer l'action de type action adjointe $\overline{\mathrm{Ad}}(\ell(e_2))$ par l'action adjointe en terme de représentants matriciels. Notons $\widetilde{(\breve{e}_2^*\omega)}$ et $\widetilde{\breve{\Gamma}}$ les représentants matriciels respectifs de $(\breve{e}_2^*\omega)$ et de $\breve{\Gamma}$. Nous avons donc :

$$\widetilde{\breve{\Gamma}} = \mathrm{Ad}(\widetilde{e_2})\widetilde{(\breve{e}_2^*\omega)} + \widetilde{e_2} D \widetilde{e_2}^{-1}.$$

Il est alors aisé de vérifier que :

$$\widetilde{\breve{\Gamma}} = \widetilde{\Gamma} + \widetilde{\varrho},$$

où $\widetilde{\varrho}$ est le représentant matriciel de ϱ, obtenu par :

$$\widetilde{\varrho} = \mathrm{Ad}(\widetilde{e_2})\widetilde{\gamma} + \widetilde{e_2} s \widetilde{e_2}^{-1}.$$

On peut alors aisément déduire l'action de l'opérateur de BRS sur les 2-repères associés à la G-structure traitée, en fonction des champs fantômes ϱ. L'action de l'opérateur de BRS sur les symboles de la connexion de Cartan et sur les champs fantômes, via les représentants matriciels, en découle directement :

$$s\Gamma = -d\varrho - [\Gamma, \varrho], \qquad s\varrho = -\frac{1}{2}[\varrho, \varrho]. \tag{3.3}$$

3.2 Transformation de jauge unidimensionnelle

Dans cette section, nous présentons le résultat publié dans [14] (présenté dans l'annexe D).

Commençons par rappeler les expressions locales des symboles de la connexion de Cartan projective[3] unidimensionnelle :

$$\begin{aligned}
\Gamma^x &= dx\ , \\
\Gamma^x{}_x &= 0\ , \\
\Gamma^x_{xx} &= e^u{}_x \omega^u{}_{uu} + d\left(e^u{}_{xx} e^x{}_u\right) - \frac{1}{2}\left(e^u{}_{xx} e^x{}_u\right)^2 dx\ .
\end{aligned}$$

[3]ou bien conforme puisque les deux G-structures sont isomorphes dans le cas unidimensionnel.

La transformation de jauge des symboles de la connexion de Cartan s'écrit localement :

$$\begin{aligned}
s\Gamma^x &= -d\varrho^x - \varrho^x{}_x\Gamma^x, \\
s\Gamma^x{}_x &= -d\varrho^x{}_x - \Gamma_x\varrho^x - \varrho_x\Gamma^x, \\
s\Gamma^x{}_{xx} &= -d\varrho_x - \Gamma_x\varrho^x{}_x.
\end{aligned}$$

Pour aller au delà, il est nécessaire de spécifier l'expression locale des champs fantomes ϱ. Dans ce but, nous utilisons le fait que le représentant local sur l'espace de base de la connexion de Cartan, obtenu par son image réciproque via une section $e_2^*\omega$ est une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{-1} \oplus \mathfrak{sl}_0 \oplus \mathfrak{sl}_1$. Un fantôme de Faddeev-Popov possible est donc :

$$\gamma = (e_2^*\omega)(\xi) = \omega(e_{2*}\xi),$$

où $\xi = \xi^x\partial_x$ est un champ de vecteurs fantômes sur M. Ainsi, chaque composante du fantôme de Faddeev-Popov s'exprime localement :

$$\gamma^a = \theta^a{}_{,x}\xi^x = e^a{}_x\xi^x, \tag{3.4}$$

$$\gamma^a{}_a = \theta^a{}_{a,x}\xi^x = \left(e^a{}_{xx}e^x{}_a + e^a{}_x\partial_x e^x{}_a\right)\xi^x, \tag{3.5}$$

$$\gamma^a{}_{aa} = \omega^a{}_{aa,x}\xi^x. \tag{3.6}$$

La dernière information, nécessaire pour la détermination totale des champs fantômes ϱ est l'action de l'opérateur de BRS sur les points de la G-structure. Pour les trouver, on utilise le fait que l'on connaît l'expression locale de la forme de soudure et l'action de l'opérateur de BRS dessus. Ainsi :

$$\begin{aligned}
s\theta^a{}_{,x} &= \partial_x\gamma^a + \theta^a{}_{a,x}\gamma^a - \gamma^a{}_a\theta^a{}_{,x} = \partial_x\left(\theta^a{}_{,x}\xi^x\right) \ , \\
s\theta^a{}_{a,x} &= \partial_x\gamma^a{}_a + \omega^a{}_{aa,x}\gamma^a - \gamma^a{}_{aa}\theta^a{}_{,x} = \partial_x\left(\theta^a{}_{a,x}\xi^x\right) \ , \\
s\omega^a{}_{aa,x} &= \partial_x\gamma^a{}_{aa} + \omega^a{}_{aa,x}\gamma^a{}_a - \gamma^a{}_{aa}\theta^a{}_{a,x} = \partial_x\left(\omega^a{}_{aa,x}\xi^x\right) \ .
\end{aligned}$$

On peut donc noter que, dans le cas unidimensionnel, l'action de l'opérateur de BRS sur les composantes locales de la connexion de Cartan reproduisent une dérivée de Lie :

$$s\omega = -d(\omega(\xi)) = (i_\xi d - di_\xi) =: L_\xi\omega,$$

où ξ porte le degré fantôme.

En utilisant l'expression locale de la forme de soudure unidimensionnelle :

$$\theta^a = e^a{}_x dx^x, \qquad \theta^a{}_a = e^a{}_x de^x{}_a + e^a{}_{xx}e^x{}_a dx^x \ .$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
se^a{}_x &= s\theta^a{}_{,x} = \partial_x \left(e^a{}_x \xi^x\right) \\
se^a{}_{xx} &= e^a{}_x\, s\theta^a{}_{a,x} + e^x{}_a e^a{}_{xx}\, se^a{}_x + e^x{}_a \partial_x e^a{}_x se^a{}_x - \left(e^a{}_x\right)^2 \partial_x \left(se^x{}_a\right) \\
&= \partial_x e^a{}_{xx} \xi^x + 2e^a{}_{xx} \partial_x \xi^x + e^a{}_x \partial_x^2 \xi^x.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient chaque composante du champ fantôme associé à ce choix de fantôme de Faddeev-Popov :

$$\begin{aligned}
c^x &= e^x{}_a \gamma^a = \xi^x, \\
c^x{}_x &= e^x{}_{aa} e^a{}_x \gamma^a + \gamma^a{}_a + e^x{}_a se^a{}_x = \partial_x \xi^x \qquad (3.7) \\
c^x{}_{xx} &= \frac{1}{2} \left(e^a{}_{xx}\right)^2 \left(e^x{}_a\right)^3 \gamma^a + e^x{}_{aa} \left(e^a{}_x\right)^2 \gamma^a{}_a + \gamma^a{}_{aa} e^a{}_x + 2e^x{}_{aa} e^a{}_x se^a{}_x + e^x{}_a se^a{}_{xx} \\
&= \partial^2 \xi^x + \left(\partial_x \chi_x - \frac{1}{2} \left(\chi_x\right)^2 + e^a{}_x \omega^a{}_{aa,x}\right) \xi^x \qquad (3.8) \\
&= \partial_x^2 \xi^x + \Gamma^x{}_{xx,x} \xi^x.
\end{aligned}$$

Il s'agit bien des paramètres de jauge obtenus par A.M. Polyakov dans [9]. De manière explicite, les transformations de jauge infinitésimales des symboles de la connexion de Cartan s'écrivent :

$$s\Gamma^x{}_{,x} = 0, \qquad s\Gamma^x{}_{x,x} = 0, \qquad s\Gamma^x{}_{xx,x} = \partial_x^3 \xi^x + \xi^x \partial_x \Gamma^x{}_{xx,x} + 2\partial_x \xi^x \Gamma^x{}_{xx,x}.$$

Nous obtenons donc, grâce à l'utilisation de la connexion de Cartan sur une G-structure projective unidimensionnelle, d'une part, les variations nulles des deux premiers symboles, imposées par A.M. Polyakov pour préserver la structure. De plus, la variation du symbole de plus haut poids peut se réecrire :

$$s\Gamma^x{}_{xx,x} = \partial_x^3 c^x + c^x \partial_x \Gamma^x{}_{xx,x} + 2\partial_x c^x \Gamma^x{}_{xx,x},$$

où il est aisé de vérifier que $s^2 = 0$.

Il est alors quasi immédiat de constater que dans le cas unidimensionnel, la transformation de jauge que nous proposons reproduit l'action infinitésimale des difféomorphismes de la base sur les symboles de la connexion de Cartan.

Nous allons maintenant traiter séparément les cas des G-structures projective et conforme pour expliciter, dans chaque cas, les transformations de jauge infinitésimales en coordonnées locales.

3.3 Transformation de jauge projective

Dans cette section, nous allons nous consacrer pleinement au traitement d'une théorie de jauge infinitésimale sur la G-structure projective via l'utilisation de la connexion de Cartan associée.

Commençons par expliciter l'action de l'opérateur de BRS sur les composantes de la connexion de Cartan projective. Pour cela, nous allons utiliser le paramétrage de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$, défini par (2.19), à la fois pour l'image réciproque de la connexion de Cartan et pour le fantôme de Faddeev-Popov. Leurs représentants matriciels respectifs sont alors[4] :

$$\widetilde{(e_2^*\omega)} = \begin{pmatrix} \Gamma^a{}_b & \Gamma^a \\ \Gamma_b & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma^a{}_b & \gamma^a \\ \gamma_b & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

L'action de l'opérateur BRS sur la connexion de Cartan projective s'obtient, en terme des représentants matriciels, par :

$$s\widetilde{(e_2^*\omega)} = -d\widetilde{\gamma} - [\widetilde{(e_2^*\omega)}, \widetilde{\gamma}].$$

En utilisant les équations (2.13), et en tenant compte du fait que les coefficients des matrices (3.9) sont des 1-formes de degrés différentiels respectifs 1 et 0, et de degrés fantômes respectifs 0 et 1, on obtient, à chaque ordre :

$$\begin{aligned} s\Gamma^a &= -d\gamma^a - \Gamma^a{}_b\gamma^b - \gamma^a{}_b\Gamma^b, \\ s\Gamma^a{}_b &= -d\gamma^a{}_b - \Gamma^a{}_c\gamma^c{}_b + \delta^a{}_b\Gamma_c\gamma^c + \Gamma_b\gamma^a \\ &\quad -\gamma^a{}_c\Gamma^c{}_b + \delta^a{}_b\gamma_c\Gamma^c + \gamma_b\Gamma^a, \\ s\Gamma_b &= -d\gamma_b - \Gamma_c\gamma^c{}_b - \gamma_c\Gamma^c{}_b. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant les expressions en coordonnées locales des composantes de la forme de soudure sur la G-structure projective (2.17), on peut alors en déduire l'action de l'opérateur de BRS sur les 2-repères projectifs. En effet :

$$\begin{aligned} \Gamma^a = e^a{}_\mu dx^\mu \quad &\Rightarrow \quad s\Gamma^a = s\left(\Gamma^a{}_\mu dx^\mu\right) = s\left(\Gamma^a{}_\mu\right)dx^\mu \\ &\Rightarrow \quad se^a{}_\mu = e^a{}_\rho\partial_\mu\left(e^\rho{}_b\gamma^b\right) + e^c{}_\mu e_c\gamma^a + e^a{}_\mu e_b\gamma^b - \gamma^a{}_b e^b{}_\mu. \end{aligned}$$

En utilisant la même méthode à l'ordre suivant, on obtient directement :

$$\Gamma^a{}_b = \delta^a{}_b e^c{}_\mu e_c dx^\mu + e^a{}_\mu e_b dx^\mu + e^a{}_\rho de^\rho{}_b \quad \Rightarrow \quad se_a = \frac{1}{(n+1)}s\left(\Gamma^k{}_{a,\mu}e^\mu{}_k - \partial_\mu e^\mu{}_a\right)$$

[4]Dorénavant, nous utiliserons donc la même lettre Γ pour l'image réciproque et le symbole de la connexion de Cartan. Ils seront différenciés grâce à l'utilisation d'indices latins pour l'image réciproque de la connexion de Cartan et d'indices grecs pour celle de son symbole

$$\begin{aligned}\Rightarrow se_a &= \frac{1}{(n+1)}e^{\mu}{}_a\partial_\mu\partial_\lambda\left(e^{\lambda}{}_k\gamma^k\right)+e^{\mu}{}_a\partial_\mu\left(e_k\gamma^k\right)-2e_ae_k\gamma^k\\ &\quad -e^k{}_\rho e_k e^{\lambda}{}_a\partial_\lambda\left(e^{\rho}{}_l\gamma^l\right)+e_k\gamma^k{}_a-e^{\mu}{}_a\omega_{k,\mu}\gamma^k+\gamma_a.\end{aligned}$$

Ici, il est aisé de vérifier que l'action de l'opérateur de BRS est nilpotente sur les 2-repères (2.15) de la G-structure projective en tenant compte du fait que la 2-forme de courbure $\Omega^a{}_b$ est à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_0$, *i.e.* est de trace nulle.

Puisque l'action de l'opérateur de BRS sur les 2-repères projectifs est connue, on peut maintenant évaluer l'expression, en coordonnées locales, des champs fantômes, définis par :

$$\begin{aligned}&\varrho^\mu = e^{\mu}{}_a\gamma^a,\\ &\varrho^{\mu}{}_\nu = e^{\mu}{}_a\gamma^a{}_b e^b{}_\nu - e^{\mu}{}_a\gamma^a e^b{}_\nu e_b - \delta^{\mu}{}_\nu e_a\gamma^a + e^{\mu}{}_a s e^a{}_\nu,\\ &\varrho_\nu = e_a\gamma^a e^b{}_\nu e_b - e_a\gamma^a{}_b e^b{}_\nu - \gamma_b e^b{}_\nu + e^a{}_\nu s e_a.\end{aligned}$$

On obtient alors, ordre par ordre :

$$\begin{aligned}&\varrho^\mu = e^{\mu}{}_a\gamma^a,\\ &\varrho^{\mu}{}_\nu = \partial_\nu\varrho^\mu,\\ &\varrho_\nu = -\frac{1}{(n+1)}\partial_\nu\partial_\lambda\varrho^\lambda + \Gamma_{\lambda,\nu}\varrho^\lambda.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Les champs fantôme dépendent donc uniquement de la première composante du fantôme de Faddeev-Popov γ^a.

En utilisant ces résultats ainsi que (3.3), on obtient les transformations de jauge infinitésimales sur la G-structure projective :

$$\begin{aligned}&s\Gamma^\mu = 0,\\ &s\Gamma^{\mu}{}_\nu = -d\varrho^{\mu}{}_\nu + \delta^{\mu}{}_\nu\Gamma_\rho\varrho^\rho + \Gamma_\nu\varrho^\mu + \delta^{\mu}{}_\nu\varrho_\rho\Gamma^\rho + \varrho_\nu\Gamma^\mu,\\ &s\Gamma_\nu = -d\varrho_\nu - \Gamma_\lambda\varrho^{\lambda}{}_\nu.\end{aligned} \tag{3.12}$$

***Remarque* 3.3.1.** *On obtient les mêmes résultats en appliquant l'opérateur de BRS directement sur l'expression locale des symboles de la connexion de Cartan projective (2.20).*

Jusqu'à présent, les champs fantômes utilisés sont généraux. La seule contrainte est ici le fait que le champs de Faddeev-Popov γ soit à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$. Nous allons maintenant montrer comment, grâce à

la particularisation de ce champ de Faddeev-Popov, il est possible de retrouver, dans le cas unidimensionel, l'action infinitésimale des difféomorphismes sur les symboles de la connexion de Cartan.

Le champ de Faddeev-Popov est une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$, *i.e.* à valeur dans la même algèbre de Lie que la connexion de Cartan. Grâce à une section e_2 de la G-structure projective P^2M, il est donc possible de définir une 1-forme sur M à valeur dans $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{R})$ par pull-back de la connexion de Cartan, $e_2^*\omega$. Nous posons donc, comme fantôme de Faddeev-Popov :

$$\gamma = (e_2^*\omega)(\xi), \tag{3.13}$$

où $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ est un champs de vecteur fantôme sur l'espace de base M.

Dans ces conditions, les composantes du fantôme Faddeev-Popov sont, ordre par ordre :

$$\gamma^a = e^a{}_\mu \xi^\mu, \quad \gamma^a{}_b = \left(\delta^a{}_b e^c{}_\mu e_c + e^a{}_\mu e_b + e^a{}_\rho \partial_\mu e^\rho{}_b\right)\xi^\mu, \quad \gamma_b = \omega_{b,\mu}\xi^\mu.$$

D'où, pour les champs fantômes :

$$\varrho^\mu = \xi^\mu, \quad \varrho^\mu{}_\nu = \partial_\nu \xi^\mu, \quad \varrho_\nu = -\frac{1}{(n+1)}\partial_\nu\partial_\lambda\xi^\lambda + \Gamma_{\lambda,\nu}\xi^\lambda.$$

On obtient donc les transformations de jauge infinitésimales suivantes, pour chaque composante des champs de jauge de la G-structure projective :

$$\begin{aligned}
s\Gamma^\mu{}_{,\lambda} &= 0, \\
s\Gamma^\mu{}_{\nu,\lambda} &= \partial_\lambda\partial_\nu\xi^\mu - \delta^\mu{}_\nu \Gamma_{\rho,\lambda}\xi^\rho - \Gamma_{\nu,\lambda}\xi^\mu \qquad (3.14)\\
&\quad + \delta^\mu{}_\nu\left(-\frac{1}{(n+1)}\partial_\rho\partial_\lambda\xi^\rho + \Gamma_{\rho,\lambda}\xi^\rho\right) + \delta^\mu{}_\lambda\left(-\frac{1}{(n+1)}\partial_\rho\partial_\nu\xi^\rho + \Gamma_{\rho,\nu}\xi^\rho\right), \\
&= \partial_\lambda\partial_\nu\xi^\mu - \frac{1}{(n+1)}\delta^\mu{}_\nu\partial_\rho\partial_\lambda\xi^\rho - \frac{1}{(n+1)}\delta^\mu{}_\lambda\partial_\rho\partial_\nu\xi^\rho + \Omega^\mu{}_{\nu,\lambda\rho}\xi^\rho, \qquad (3.15)\\
s\Gamma_{\nu,\lambda} &= -\frac{1}{(n+1)}\partial_\lambda\partial_\nu\partial_\rho\xi^\rho + (\partial_\lambda\Gamma_{\rho,\nu})\xi^\rho + \Gamma_{\rho,\nu}\partial_\lambda\xi^\rho + \Gamma_{\rho,\lambda}\partial_\nu\xi^\rho.
\end{aligned}$$

***Remarque* 3.3.2.** *Si on restreint ce résultat au cas où la variété de base M est unidimensionnelle, on retrouve :*

$$s\Gamma^x{}_{,x} = 0, \quad s\Gamma^x{}_{x,x} = 0, \quad s\Gamma_{x,x} = -\frac{1}{2}\partial_x^3\xi^x + \partial_x\Gamma_{x,x}\xi^x + 2\Gamma_{x,x}\partial_x\xi^x.$$

C'est le résultat obtenu par A.M. Polyakov dans [9], que nous avons redémontré dans [14].

Intéressons nous maintenant à l'action infinitésimale des difféomorphismes sur les symboles de la connexion de Cartan.

L'action des difféomorphismes de la base sur les composantes des champs de jauge projectifs est donnée par (2.22) :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu'} &= \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\Gamma^{\mu}, \\
\Gamma^{\mu'}{}_{\nu'} &= \varphi^{\mu'}{}_{\mu}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\nu} - \varphi_{\nu}dx^{\mu} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\varphi_{\rho}dx^{\rho} - \varphi^{\mu}{}_{\rho'}d\varphi^{\rho'}{}_{\nu}\right)\varphi^{\nu}{}_{\nu'}, \\
\Gamma_{\nu'} &= \varphi^{\nu}{}_{\nu'}\left(\Gamma_{\nu} + \varphi_{\nu}\varphi_{\rho}dx^{\rho} + d\varphi_{\nu}\right).
\end{aligned}$$

Soit t, un paramètre infinitésimal. La version infinitésimale des coordonnées locales $\varphi^{\mu'}{}_{\mu}$ et φ_{ν} sont alors :

$$\varphi^{\mu'}{}_{\mu} \to \delta^{\mu'}{}_{\mu} + t\partial_{\mu}\xi^{\mu'}, \qquad \varphi_{\nu} \to -\frac{t}{(n+1)}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\mu}.$$

Les transformations des symboles de la connexion de Cartan sont, au point de vue infinitésimale :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu'}{}_{,\lambda'} &\to \delta^{\mu'}{}_{\mu}\left(\Gamma^{\mu}{}_{,\lambda} + t\xi^{\rho}\partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{,\lambda} - t\delta_{\xi}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda}\right)\delta^{\lambda}{}_{\lambda'}, \\
\Gamma^{\mu'}{}_{\nu',\lambda'} &\to \delta^{\mu'}{}_{\mu}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\nu,\lambda} + t\xi^{\rho}\partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\nu,\lambda} - t\delta_{\xi}\Gamma^{\mu}{}_{\nu,\lambda}\right)\delta^{\nu}{}_{\nu'}\delta^{\lambda}{}_{\lambda'}, \\
\Gamma_{\nu',\lambda'} &\to \left(\Gamma_{\nu,\lambda} + t\xi^{\rho}\partial_{\rho}\Gamma_{\nu,\lambda} - t\delta_{\xi}\Gamma_{\nu,\lambda}\right)\delta^{\nu}{}_{\nu'}\delta^{\lambda}{}_{\lambda'}.
\end{aligned}$$

L'action infinitésimale des difféomorphismes sur les symboles de la connexion de Cartan projective est la suivante :

$$\begin{aligned}
\delta_{\xi}\Gamma^{\mu}{}_{,\lambda} &= 0, \\
\delta_{\xi}\Gamma^{\mu}{}_{\nu,\lambda} &= -\frac{1}{(n+1)}\delta^{\mu}{}_{\nu}\partial_{\rho}\partial_{\lambda}\xi^{\rho} - \frac{1}{(n+1)}\delta^{\mu}{}_{\lambda}\partial_{\rho}\partial_{\nu}\xi^{\rho} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}\xi^{\mu}, \\
\delta_{\xi}\Gamma_{\nu,\lambda} &= -\frac{1}{(n+1)}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\rho}\xi^{\rho} + \left(\partial_{\rho}\Gamma_{\lambda,\nu}\right)\xi^{\rho} + \Gamma_{\rho,\nu}\partial_{\lambda}\xi^{\rho} + \Gamma_{\rho,\lambda}\partial_{\nu}\xi^{\rho}.
\end{aligned}$$

La transformation de jauge infinitésimale proposée ne reproduit donc pas exactement l'action infinitésimale des difféomorphismes projectifs sur les symboles de la connexion de Cartan. En revanche, en utilisant la définition de la courbure des symboles de la connexion de Cartan, donnée ici grâce aux représentants matriciels :

$$\widetilde{\Omega} = d\widetilde{\Gamma} + \frac{1}{2}[\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Gamma}],$$

on obtient, en utilisant le fait que $\Gamma^{\mu}{}_{\nu} = 0$:

$$\begin{aligned}
\Omega^{\mu} &= d\Gamma^{\mu}, \\
\Omega^{\mu}{}_{\nu} &= -\Gamma_{\nu}\Gamma^{\mu} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\Gamma_{\rho}\Gamma^{\rho}, \\
\Omega_{\nu} &= -d\Gamma_{\nu}.
\end{aligned}$$

On trouve alors que la transformation de jauge infinitésimale du symbole de plus haut poids se réécrit :

$$\begin{aligned}
s\Gamma_{\nu,\lambda} &= -\frac{1}{(n+1)}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\rho}\xi^{\rho} + \left(\partial_{\rho}\Gamma_{\lambda,\nu} - \Omega_{\nu,\rho\lambda}\right)\xi^{\rho} + \Gamma_{\rho,\nu}\partial_{\lambda}\xi^{\rho} + \Gamma_{\rho,\lambda}\partial_{\nu}\xi^{\rho}, \\
&= \delta_{\xi}\Gamma_{\nu,\lambda} - \frac{1}{2}\Omega_{\nu,\rho\lambda}\xi^{\rho}.
\end{aligned}$$

Ce qui peut se réécrire de manière plus intrinsèque :

$$s\Gamma_{\nu} = \delta_{\xi}\Gamma_{\nu} + \Omega_{\nu}(\xi).$$

La transformation de jauge que nous proposons est donc une déformation de l'action infinitésimale des difféomorphismes sur les symboles de la connexion due au fait que la courbure n'est pas nulle. Ceci corrobore le résultat que nous avions trouvé dans le cas unidimensionnel, puisque, dans ce cas, la courbure est identiquement nulle.

3.4 Transformations de jauge conformes

Nous allons maintenant nous consacrer au traitement des transformations de jauge sur la G-structure conforme. Les méthodes de calculs sont les mêmes que celles utilisées dans la section précédente. Nous allons donc ici nous limiter à une brève présentation des résultats, la présentation détaillée étant en annexe (voir l'annexe C).

Comme pour l'étude des transformations de jauge infinitésimales sur la G-structure projective, nous allons utiliser le paramétrage matriciel de l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}_{n+2}(\mathbb{R})$ défini par (2.26). Nous avons donc comme représentants matriciels respectifs de la connexion de Cartan conforme et du fantôme de Faddeev-Popov :

$$\widetilde{(e_2^*\omega)} = \left(\begin{array}{c|cc}
\widetilde{\Gamma}^a{}_b & \widetilde{\Gamma}^a & g^{ab}\widetilde{\Gamma}_b \\
\hline
-\widetilde{\Gamma}_b & 0 & 0 \\
-g_{ab}\widetilde{\Gamma}^a & 0 & 0
\end{array}\right), \quad \widetilde{\gamma} = \left(\begin{array}{c|cc}
\widetilde{\gamma}^a{}_b & \widetilde{\gamma}^a & g^{ab}\widetilde{\gamma}_b \\
\hline
-\widetilde{\gamma}_b & 0 & 0 \\
-g_{ab}\widetilde{\gamma}^a & 0 & 0
\end{array}\right). \quad (3.16)$$

On obtient alors, via (3.2), ordre par ordre, l'action de l'opérateur de BRS sur les composantes de la connexion de Cartan suivante :

$$\begin{aligned} s\Gamma^a &= -d\gamma^a - \Gamma^a{}_b\gamma^b - \gamma^a{}_b\Gamma^b, \\ s\Gamma^a{}_b &= -d\gamma^a{}_b - \Gamma^a{}_c\gamma^c{}_b - \left(\delta^a{}_b\Gamma_c + \delta^a{}_c\Gamma_b - g_{bc}g^{ad}\Gamma_d\right)\gamma^c \\ &\quad -\gamma^a{}_c\Gamma^c{}_b - \left(\delta^a{}_b\gamma_c + \delta^a{}_c\gamma_b - g_{bc}g^{ad}\gamma_d\right)\Gamma^c, \\ s\Gamma_b &= -d\gamma_b - \Gamma_c\gamma^c{}_b - \gamma_c\Gamma^c{}_b. \end{aligned} \tag{3.17}$$

On peut ainsi en déduire l'action de l'opérateur de BRS sur les coordonnées locales des 2-repères conformes (voir Annexe C) :

$$\begin{aligned} se^a{}_\mu &= \partial_\mu\gamma^a + \Gamma^a{}_{b,\mu}\gamma^b - \gamma^a{}_b\Gamma^b{}_{,\mu}, \\ se_a &= 2e_ae_l\gamma^l - g_{al}e^2\gamma^l - e^k{}_\sigma e_k e^\lambda{}_a\partial_\lambda e^\sigma{}_l\gamma^l + e_k\gamma^k{}_a \\ &\quad -e^\mu{}_a\Gamma_{b,\mu}\gamma^b + \gamma^a - \frac{1}{n}e^\mu{}_a\partial_\mu\partial_\lambda\left(e^\lambda{}_b\gamma^b\right) + e^\mu{}_a\partial_\mu e_l\gamma^l. \end{aligned}$$

Ici, pour maintenir le fait que $s^2e_a = 0$, il faut imposer la condition de trace nulle sur la 2-forme de courbure $\Omega^a{}_b$. Or, dans son article [22], K. Ogiue utilise ce qu'il définit comme la connexion de Cartan normale (voir Annexe A), en imposant notamment comme condition cette trace nulle. Il semble donc que cette condition soit nécéssaire pour pouvoir « descendre » les propriétés de la G-structure sur l'espace de base.

Il est alors remarquable de constater que l'expression des champs fantômes en fonction des symboles de la connexion de Cartan conforme est semblable à celle obtenue dans le cas projectif. En effet, on obtient :

$$\begin{aligned} \varrho^\mu &= e^\mu{}_a\gamma^a, \\ \varrho^\mu{}_\nu &= \partial_\nu\varrho^\mu, \\ \varrho_\rho &= \frac{1}{n}\partial_\rho\partial_\lambda\varrho^\lambda - \Gamma_{\lambda,\rho}\varrho^\lambda. \end{aligned}$$

On obtient alors les expressions suivantes pour les transformations de jauge infinitésimales des symboles de la connexion de Cartan conforme :

$$\begin{aligned} &s\Gamma^\mu = 0, \\ &s\Gamma^\mu{}_\nu = -d\varrho^\mu{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu\Gamma_\rho\varrho^\rho + \Gamma_\nu\varrho^\mu + \delta^\mu{}_\nu\varrho_\rho\Gamma^\rho + \varrho_\nu\Gamma^\mu, \\ &s\Gamma_\nu = -d\varrho_\nu - \Gamma_\lambda\varrho^\lambda{}_\nu. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ce qui se traduit, en tenant compte de l'expression locales des champs fantômes conformes par :

$$s\Gamma^{\mu}{}_{,\lambda} = 0, \tag{3.19}$$

$$s\Gamma^{\mu}{}_{\nu,\lambda} = \partial_\lambda\partial_\nu\xi^\mu - \frac{1}{n}\delta^\mu{}_\nu\partial_\rho\partial_\lambda\xi^\rho - \frac{1}{n}\delta^\mu{}_\lambda\partial_\rho\partial_\nu\xi^\rho + \Omega^\mu{}_{\nu,\lambda\rho}\xi^\rho, \tag{3.20}$$

$$s\Gamma_{\nu,\lambda} = -\frac{1}{n}\partial_\lambda\partial_\nu\partial_\lambda\xi^\lambda + (\partial_\lambda\Gamma_{\rho,\nu})\,\xi^\rho + \Gamma_{\rho,\nu}\partial_\lambda\xi^\rho + \Gamma_{\rho,\lambda}\partial_\nu\xi^\rho. \tag{3.21}$$

Il est alors aisé de constater que, là encore, la transformation de jauge du symbole de plus haut poids de la connexion de Cartan peut se réécrire comme :

$$s\Gamma_{\nu,\lambda} = \delta_\xi\Gamma_{\nu,\lambda} - \frac{1}{2}\Omega_{\nu,\rho\lambda}\xi^\rho,$$

ou de façon plus intrinsèque :

$$s\Gamma_\nu = \delta_\xi\Gamma_\nu + \Omega_\nu(\xi).$$

***Remarque* 3.4.1.** *Les G-structures conforme et projective étant confondues dans le cas d'une variété de base unidimensionnelle, les remarques faites pendant l'étude de la G-structure projective unidimensionnelle sont toujours pertinentes.*

Dans ce dernier chapitre, l'avantage de la paramétrisation matricielle des groupes et algèbres de Lie intervenant dans l'étude des G-structures projective et conforme prend toute son ampleur. En effet, l'application « directe » des outils usuels du formalisme BRS en est une conséquence immédiate.

Le choix du fantôme de Faddeev-Popov proposé permet, pour les champs de jauge associés aux G-structures étudiées, de retrouver non pas, comme dans le cas unidimensionnel, l'action infinitésimale des difféomorphimes de l'espace de base, mais cette action modifée par le terme de courbure de la connexion.

Conclusion et Perspectives

L'étude présentée dans ce manuscrit propose une application innovante de deux concepts très étudiés par la communauté mathématique.

D'une part, l'utilisation du fibré des k-repères. Ce fibré, introduit il y a près de 50 ans par C. Ehresmann [15] permet de traiter simultanément divers ordres de dérivation. Il a d'ailleurs été maintes fois utilisé pour traiter les problèmes de résolution d'équations différentielles [10,11], sans jamais être exploité au delà du premier ordre par les physiciens. Nous l'avons ici utilisé en insistant sur une distinction claire des espaces source et but. Ceci permet de mettre en évidence le type de transformations mises en jeu, transformations sur la source, *e.g.* $0 \to \mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$, ou transformations sur le but, *e.g.* $x \to x' \in M$. Nous nous sommes alors limités aux expressions locales des sections et connexions définies sur ces espaces, seules données nécessaires à l'application de ces outils en physique.

D'autre part, les connexions de Cartan, une notion longtemps oubliée qui semble aujourd'hui trouver un regain d'interêt [12,40,41]. Ce type de connexion permet de traiter, du point de vue infinitésimal, toutes les transformations possibles d'un fibré. En effet, si les connexions de Ehresmann usuelles, ayant un noyau non-trivial, permettent de définir la notion d'horizontalité sur tout fibré, les connexions de Cartan permettent de définir un isomorphisme entre l'espace tangent du fibré et une certaine algèbre de Lie, définissant un *parallélisme absolu.*

Nous avons alors pris le parti de traiter certaines symétries d'espace-temps, les symétries projective et conforme, en réduisant le groupe de structure du fibré des 2-repères. Dans le cas unidimensionnel, où G-structures conforme et projective sont confondues, le symbole de plus haut poids de la connexion de Cartan devient alors une connexion projective, *i.e.* se transformant via la dérivée de Schwarz. Nous avons pu généraliser ce résultat aux structures projective et conforme en dimension quelconque pour lesquelles la

connexion de Cartan est paramétrée par :

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & dx^\mu \\ \Gamma_\nu & 0 \end{pmatrix}.$$

La loi de recollement du symbole de plus haut poids $\Gamma_{\nu,\lambda}$ nous permet alors de proposer deux candidats pour la généralisation en plusieurs dimensions de ce concept de dérivée de Schwarz. Grâce à la G-structure projective, nous obtenons un objet qui est certes défini d'un point de vue local mais existe d'un point de vue global. En revanche, dans le cas de la G-structure conforme il reste encore à définir le pendant global de cet objet sur un espace non-plat de sorte à éventuellement justifier les formulations proposées par [33].

Il s'agit d'un point très intéressant aux vues des applications multiples de ce type de dérivation. En effet, elle apparaît naturellement avec les problèmes de résolution du type équations de Sturm-Liouville [42]. Elle peut aussi être reliée à la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi en séparant phase et amplitude de la fonction d'onde à $(1+1)$ dimensions.

D'autre part, l'application d'algèbre différentielle de type Yang-Mills aux connexions de Cartan donne la résolution d'un problème ouvert par l'intuition géniale d'un physicien [9] une vingtaine d'années auparavant. Le travail mené ici présente l'avantage supplémentaire de pouvoir appliquer de manière cohérente ce formalisme en dimension arbitraire. Le terme de courbure qui apparaît dans la variation de BRS des champs de jauge de plus haut poids sont potentiellement à relier avec les anomalies quantiques possibles brisant l'invariance sous difféomorphismes. Une étude dans ce sens devrait être menée. De plus, d'un point de vue plus mathématique, on note que la condition de nilpotence de l'opération de BRS sur les sections de 2-repères projectifs et conformes justifie la condition de trace nulle sur la courbure de la connexion de Cartan normale introduite par [21, 22]. Ce choix de jauge restreint donc les connexions de Cartan possibles. Ceci nous permet ainsi d'assurer la possibilité, via un choix de jauge particulier, de transférer la structure projective ou conforme du fibré sur l'espace-temps.

L'application la plus directe et immédiate de ce travail est la formulation du type MacDowell-Mansouri de la théorie de la gravitation en utilisant la G-structure conforme. L'action utilisée ferait alors intervenir la 2-forme de courbure de la connexion de Cartan conforme. De plus, ces théories présentent uniquement les degrés de liberté reliés aux tetrades [12]. Or, grâce à notre formalisme faisant intervenir les 2-repères, nous pouvons prendre en compte un degré de liberté supplémentaire : les repères d'ordre 2.

D'un point de vue plus mathématique, l'objet central étant la connexion de Cartan, il serait intéressant d'appliquer ce formalisme aux opérations de k-algèbres paraboliques afin d'obtenir des opérateurs différentiels covariants conformes [43, 44], ou encore généraliser en dimension arbitraire l'étude effectuée dans [8, 45, 46].

Annexe A

Connexion de Cartan normale

Dans cette annexe, nous nous interessons à un type particulier de connexion de Cartan sur les G-structures conforme et projective, définis par [22] et [21], la connexion de Cartan normale.

A.1 Connexion de Cartan conforme normale

Définition A.1.1. *La connexion de Cartan normale conforme est l'unique connexion de Cartan sur la G-structure conforme définie par :*

- $\omega^a = \theta^a, \qquad \omega^a{}_b = \theta^a{}_b, \Rightarrow d\omega^a + \omega^a{}_b \wedge \omega^b = 0,$
- $\Omega^a{}_a = 0,$
- $K^a{}_{bad} = 0$ *où* $\quad \Omega^a{}_b = \frac{1}{2} K^a{}_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d.$

La première condition est celle que nous avons imposée pour assurer le fait que les connexions de Cartan que nous utilisions soient de torsion nulle. Étudions donc les deux suivantes. La courbure de la connexion de Cartan conforme s'exprime locallement :

$$\Omega^a{}_b = d\theta^a{}_b + \theta^a{}_c \wedge \theta^c{}_b + \delta^a{}_b \omega_c \wedge \theta^c + \omega_b \wedge \theta^a - g_{ac} g^{bd} \omega_d \wedge \theta^c.$$

En utilisant les expressions locales connues des formes de soudures sur la G-structure conforme (2.30), ainsi que l'expression du symbole de plus haut poids de la connexion de Cartan (2.31), on aboutit à :

$$\Omega^a{}_b = \delta^a_b e^\rho{}_j \Gamma_\rho \wedge \theta^j + e^\rho{}_b \Gamma_\rho \wedge \theta^a - g_{bk} g^{al} e^\rho{}_l \Gamma_\rho \wedge \theta^k.$$

Sa trace est donc :

$$\begin{aligned} \Omega^a{}_a &= -n e^\rho{}_a \Gamma_\rho \wedge \theta^a, \\ \Rightarrow \Omega^a{}_a &= \frac{1}{2} \sum_{k<a} \left(n e^\rho{}_a \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda_k - n e^\rho{}_k \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda_a \right) \theta^k \wedge \theta^a. \end{aligned}$$

La condition de trace nulle implique donc une symmétrie pour les composantes locales des symbôles de plus haut poids de la connexion de Cartan :

$$\Omega^a{}_a = 0 \Longleftrightarrow \Gamma_{\rho,\nu} = \Gamma_{\nu,\rho}.$$

Intéressons nous maintenant à la dernière condition. Tout d'abord, cherchons l'expression locale du tenseur $K^a{}_{bkj}$:

$$\begin{aligned}
\Omega^a{}_b &= \delta^a_b e^\rho{}_j \Gamma_\rho \wedge \theta^j + e^\rho{}_b \Gamma_\rho \wedge \theta^a - g_{bk} g^{al} e^\rho{}_l \Gamma_\rho \wedge \theta^k \\
&= \delta^a{}_b e^\rho{}_j \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k \theta^k \wedge \theta^j + e^\rho{}_b \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k \theta^k \wedge \theta^a - g_{bk} g^{al} e^\rho{}_l \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j \theta^j \wedge \theta^k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k<j} \left(\delta^a{}_b e^\rho{}_j \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k + \delta^a{}_j e^\rho{}_b \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k + g_{bk} g^{al} e^\rho{}_l \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j \right. \\
&\quad \left. - \left(\delta^a{}_b e^\rho{}_k \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j + \delta^a{}_k e^\rho{}_b \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j + g_{bj} g^{al} e^\rho{}_l \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k \right) \right) \theta^k \wedge \theta^j \\
\Rightarrow K^a{}_{bkj} &= \sum_{k<j} \left(\delta^a{}_b e^\rho{}_j \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k + \delta^a{}_j e^\rho{}_b \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k + g_{bk} g^{al} e^\rho{}_l \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j \right. \\
&\quad \left. - \left(\delta^a{}_b e^\rho{}_k \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j + \delta^a{}_k e^\rho{}_b \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j + g_{bj} g^{al} e^\rho{}_l \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_k \right) \right).
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$K^a{}_{baj} = e^\rho{}_j \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_b + e^\rho{}_b \Gamma_{\ \rho,\lambda} e^\lambda{}_j - g_{bj} g^{al} e^\rho{}_l e^\lambda{}_a \Gamma_{\rho,\lambda} - n e^\rho{}_b \Gamma_{\rho,\lambda} e^\lambda{}_j.$$

En utilisant alors l'expression locale du symbôle de plus haut poids de la connexion de Cartan :

$$\Gamma_{\rho,\lambda} = -e^c{}_\lambda e^a{}_\rho e_a e_c + \frac{1}{2} g_{ax} e^2 e^a{}_\rho e^c{}_\lambda + \omega_{b,\lambda} e^b{}_\rho - \partial_\lambda \left(e^k{}_\rho e_k \right),$$

nous obtenons, par la condition de symmétrie imposée $\Gamma_{\rho,\lambda} = \Gamma_{\lambda,\rho}$:

$$\omega_{b,\lambda} e^b{}_\rho - \partial_\lambda \left(e^k{}_\rho e_k \right) = \omega_{b,\rho} e^b{}_\lambda - \partial_\rho \left(e^k{}_\lambda e_k \right).$$

La dernière condition $K^a{}_{baj} = 0$ impose alors :

$$\begin{aligned}
&(n-2) e_b e_j - (n-2) g_{bj} e^2 + (n-1) e^\rho{}_b e^\lambda{}_j \partial_\lambda \left(e^k{}_\rho e_k \right) - e^\rho{}_j e^\lambda{}_b \partial_\lambda \left(e^k{}_\rho e_k \right) \\
&+ g_{bj} g^{am} e^\rho{}_m e^\lambda{}_a \partial_\lambda \left(e^k{}_\rho e_k \right) - (n-1) \omega_{b,\lambda} e^\lambda{}_j + \omega_{j,\lambda} e^\lambda{}_b - g_{bj} g^{ak} e^\lambda{}_a \omega_{k,\lambda} = 0.
\end{aligned}$$

K. Ogiue définit la connexion de Cartan normale comme étant unique. Si il existe une 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}_1$ vérifiant toutes ces conditions, alors c'est la dernière composante de la connexion de Cartan normale.

Or, nous nous sommes intéressés à la forme de soudure sur, non pas seulement sur la G-structure conforme associée au fibré des 2-repères, mais aussi sur celle associée au fibré des 3-repères. En utilisant les mêmes outils, nous pouvons notamment définir, par restriction de la forme de soudure sur le fibré des 3-repères général à la G-structure conforme d'ordre 3, une forme de soudure, qui est alors un 1-forme à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}$ totale. Les expressions locales des deux premières composantes sont identiques à celles de la forme de soudure de la G-structure conforme d'ordre 2 (2.30). La dernière composante, à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}_1$, s'obtient alors aisément :

$$\theta_k = e_j e_k \theta^j - \frac{1}{2} g_{ck} e^2 \theta^c + e^\mu{}_k d\left(e^j{}_\mu e_j\right).$$

Il est alors aisé de vérifier que cette 1-forme vérifie toutes les conditions imposées. Il s'avère donc que la connexion de Cartan normale est l'image réciproque de la forme de soudure du fibré des 3-repères conformes sur la G-structure conforme.

A.2 Connexion de Cartan projective normale

Comme sur la G-structure conforme, la connexion de Cartan normale projective est l'unique connexion de Cartan sur la G-structure projective définie par :

Définition A.2.1. – $\omega^a = \theta^a, \qquad \omega^a{}_b = \theta^a{}_b, \Rightarrow d\omega^a + \omega^a{}_b \wedge \omega^b = 0,$
– $\Omega^a{}_a = 0,$
– $K^a{}_{bad} = 0$ *où* $\Omega^a{}_b = \frac{1}{2} K^a{}_{bcd} \omega^c \wedge \omega^d.$

Nous pouvons donc suivre exactement le même cheminement que dans le cas de la G-structure conforme.

La 1-forme de courbure de la connexion de Cartan projective s'exprime en coordonnées locales :

$$\Omega^a{}_b = d\theta^a{}_b + \theta^a{}_c \wedge \theta^c{}_a - \delta^a{}_b \omega_c \wedge \theta^c - \omega_b \wedge \theta^a.$$

En utilisant les expressions locales de la forme de soudure sur la G-structure projective (2.17), et du symbole de plus haut poids de la connexion de Cartan (**??**), on obtient :

$$\Omega^a{}_b \;=\; \delta^a{}_b e^\mu{}_d \Gamma_\nu \wedge \theta^d + e^\mu{}_b \Gamma_\mu \wedge \theta^a,$$

Ainsi, la condition de trace nulle se traduit par :

$$\begin{aligned}
\Omega^a{}_a &= (n+1)e^\mu{}_a\Gamma_\mu \wedge \theta^a \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k<a}\left((n+1)e^\mu{}_a\Gamma_{\mu,\lambda}e^\lambda{}_k - (n+1)e^\mu{}_k\Gamma_{\mu,\lambda}e^\lambda{}_a\right)\theta^k \wedge \theta^a. \\
&\Longrightarrow \Gamma_{\mu,\lambda} = \Gamma_{\lambda,\mu}.
\end{aligned}$$

On peut alors en déduire l'expression du tenseur $K^a{}_{bkj}$, et la dernière condition $K^a{}_{baj}$ s'exprime :

$$K^a{}_{baj} = -ne^\mu{}_b\Gamma_{\mu,\lambda}e^\lambda{}_j - e^\mu{}_j\Gamma_{\mu,\lambda}e^\lambda{}_b = 0.$$

L'image réciproque de la forme de soudure sur le fibré des 3-repères projectifs sur la G-structure projective,

$$\omega_a = \theta_a = e_a e_b \theta^b - e^\mu{}_a d\left(e^k{}_\mu e_k\right),$$

est solution de cette équation.

Nous pouvons noter ici que, pour pouvoir définir une transformation de jauge correcte en terme d'algèbre de BRS, nous sommes contraints d'imposer, du moins sur la G-structure conforme, la condition de trace nulle, apparaissant dans la définition de Cartan normale. En revanche, nous n'utilisons en aucun cas la dernière condition, qui force complètement la dernière composante de la connexion de Cartan.

Dans le cas des G-structures conforme et projective, il apparaît donc que la connexion de Cartan définie par l'image réciproque de la forme de soudure du fibré des 3-repères sur la G-structure est la connexion de Cartan normale.

Il est alors intéressant de noter que la connexion de Cartan normale est une connexion plate, *i.e.* :

$$\Omega^a = 0,\ \Omega^a{}_b = 0,\ \Omega_c = 0,$$

et que les symboles associés sont triviaux :

$$\Gamma^\mu = dx^\mu,\ \Gamma^\mu{}_\nu = 0,\ \Gamma_\nu = 0.$$

Annexe B

Dépendance des symboles de la connexion de Cartan conforme dans les repères

Le but de cette annexe est de montrer que les symboles de la connexion de Cartan dépendent uniquement de la fibre sur laquelle ils sont définis, *i.e.* du point de l'espace de base au-dessus duquel ils sont. Pour cela, nous allons utiliser une technique analogue à celle utilisée par [28] pour les connexions affines. Les calculs présentés ici sont détaillés pour la G-structure conforme, mais il est immédiat de les transcrire au cas de la G-structure projective.

Utilisons donc la 2-forme de courbure de la connexion de Cartan :

$$\begin{aligned} \Omega &= d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega^a &=& d\theta^a + \theta^a{}_b\theta^b, \\ \Omega^a{}_b &=& d\theta^a{}_b + \theta^a{}_c\theta^c{}_b + \delta^a{}_b\omega_c\theta^c + \omega_b\theta^a - g_{bc}g^{ak}\omega_k\theta^c, \\ \Omega_c &=& d\omega_c + \omega_d\theta^d{}_c \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Il a été montré, [16] [22] que la 2-forme de courbure peut s'écrire localement comme :

$$\Omega^a = \frac{1}{2}K^a{}_{ij}\theta^i \wedge \theta^j,$$

$$\Omega^a{}_b = \frac{1}{2}K^a{}_{bij}\theta^i \wedge \theta^j,$$

$$\Omega_c = \frac{1}{2}K_{\ cij}\theta^i \wedge \theta^j.$$

On obtient donc ainsi :

$$\begin{aligned} d\theta^a &= \Omega^a - \theta^a{}_b\theta^b, \\ d\theta^a{}_b &= \Omega^a{}_b - \left(\theta^a{}_c\theta^c{}_b + \delta^a{}_b\omega_c\theta^c + \omega_b\theta^a - g_{bc}g^{ak}\omega_k\theta^c\right), \\ d\omega_c &= \Omega_c - \omega_d\theta^d{}_c. \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'expression locale des symboles de la connexion de Cartan, on obtient :

$$\begin{aligned} de^a{}_\nu &= e^a{}_\mu\Gamma^\mu{}_\nu - \theta^a{}_b e^b{}_\nu - e^b{}_\nu e_b\theta^a - e^a{}_\nu e_b\theta^b + g_{bc}g^{ak}e^b{}_\nu\theta^c e_k \\ de_b &= -e^\rho{}_b\Gamma_\rho + e_b e_c\theta^c - \frac{1}{2}g_{bc}e^2\theta^c + e_a\theta^a{}_b + \omega_b \end{aligned}$$

C'est à dire que :

$$\begin{aligned} d\Gamma^\mu &= e^\mu{}_a - \Gamma^\mu{}_\nu\Gamma^\nu \\ d\Gamma^\mu{}_\nu &= e^\mu{}_a\Omega^a{}_b e^b{}_\nu + e^\mu{}_a\Omega^a e^b{}_\nu e_b + \delta^\mu{}_\nu e_a\Omega^a - g_{ab}g^{ij}e^\mu{}_i e_j e^b{}_\nu\Omega^a \\ &\quad -\Gamma_\nu\Gamma^\mu - \delta^\mu{}_\nu\Gamma_\rho\Gamma^\rho + g_{\nu\rho}g^{\mu\lambda}\Gamma_\lambda\Gamma^\rho - \Gamma^\mu{}_\rho\Gamma^\rho{}_\nu \\ d\Gamma_\rho &= e^a{}_\rho e_a e_c\Omega^c - \frac{1}{2}e^2 e^a{}_\rho\Omega^b + e^a e^b{}_\rho\Omega^a{}_b + e^b{}_\rho\Omega_b - \Gamma_\nu\Gamma^\nu{}_\rho \end{aligned}$$

On obtient donc le lien suivant entre la 2-forme de courbure des symboles de la connexion de Cartan et la courbure de celle-ci :

$$d\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma,\Gamma] = \mathrm{Ad}(e)\Omega.$$

Alors, en utilisant le fait que, dans le cas d'une connexion de Cartan de torsion nulle, le symbole d'ordre 0 est nul : $\Gamma^\mu{}_\nu = 0$. On obtient

$$\frac{\partial\Gamma^\mu}{\partial e^\nu{}_a} = 0 = \frac{\partial\Gamma^\mu}{\partial e_a} \qquad \frac{\partial\Gamma_\mu}{\partial e^\nu{}_a} = 0 = \frac{\partial\Gamma_\mu}{\partial e_a}.$$

Et donc, aussi :

$$\frac{\partial\Gamma^\mu{}_\nu}{\partial e^\rho{}_a} = 0 = \frac{\partial\Gamma^\mu{}_\nu}{\partial e_a}.$$

Les symboles de la connexion de Cartan conforme dépendent donc uniquement du point de l'epace de base au-dessus duquel ils sont définis.

Annexe C

Calcul de l'action de l'opérateur de BRS sur les 2-repères conformes

C.1 Opérateur de BRS et structure conforme

Commençons par vérifier que l'action de l'opérateur de BRS sur les composantes locales de l'image réciproque de la connexion de Cartan conserve la structure conforme. Pour cela, il est suffisant de vérifier que, puisqu'à l'ordre 0 :

$$\Gamma^a{}_b g^{bc} + \Gamma^c{}_b g^{ab} - \frac{2}{n}\Gamma^b{}_b g^{ac} = 0,$$

on ait aussi :

$$s\Gamma^a{}_b g^{bc} + s\Gamma^c{}_b g^{ab} - \frac{2}{n}s\Gamma^b{}_b g^{ac} = 0.$$

De même, à l'ordre 1 :

$$\Gamma^a{}_{bc} = \delta^a{}_b \Gamma_c + \delta^a{}_c \Gamma_b - g_{bc} g^{ak} \Gamma_k,$$

implique :

$$s\Gamma^a{}_{bc} = \delta^a{}_b s\Gamma_c + \delta^a{}_c s\Gamma_b - g_{bc} g^{ak} s\Gamma_k.$$

$$
\begin{aligned}
s\Gamma^a{}_b g^{bc} + s\Gamma^c{}_b g^{ab} - \frac{2}{n} s\Gamma^b{}_b g^{ac} &= \left(-d\gamma^a{}_b - \Gamma^a{}_d\gamma^d{}_b - \Gamma^a{}_{bd}\gamma^d - \gamma^a{}_d\Gamma^d{}_b - \gamma^a{}_{bd}\Gamma^d\right) g^{bd} \\
&\quad + \left(-d\gamma^c{}_b - \Gamma^c{}_d\gamma^d{}_b - \Gamma^c{}_{bd}\gamma^d - \gamma^c{}_d\Gamma^d{}_b - \gamma^c{}_{bd}\Gamma^d\right) g^{ab} \\
&\quad - \frac{2}{n}\left(-d\gamma^c{}_c - n\Gamma_d\gamma^d - n\gamma_d\Gamma^d\right) \\
&= 0 - \frac{2}{n}\underbrace{\left(\Gamma^a{}_d g^{dc} + \Gamma^c{}_d g^{ad}\right)}_{\frac{2}{n}\Gamma^d{}_d g^{ac}}\gamma^b{}_b - \frac{2}{n}\underbrace{\left(\gamma^a{}_d g^{dc} + \gamma^c{}_d g^{ad}\right)}_{\frac{2}{n}\gamma^d{}_d g^{ac}}\Gamma^b{}_b \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s\Gamma^a{}_{bc} &= -d\gamma^a{}_{bc} - \Gamma^a{}_{bd}\gamma^d{}_c - \Gamma^a{}_{dc}\gamma^d{}_b + \Gamma^d{}_{bc}\gamma^a{}_d - \gamma^a{}_{bd}\Gamma^d{}_c - \gamma^a{}_{dc}\Gamma^d{}_b + \gamma^d{}_{bc}\Gamma^a{}_d \\
&= -d\left(\delta^a{}_b\gamma_c + \delta^a{}_c\gamma_b - g_{bc}g^{ak}\gamma_k\right) - \left(\delta^a{}_b\Gamma_d + \delta^a{}_d\Gamma_b - g_{bd}g^{ak}\Gamma_k\right)\gamma^d{}_c \\
&\quad - \left(\delta^a{}_c\Gamma_d + \delta^a{}_d\Gamma_c - g_{cd}g^{ak}\Gamma_k\right)\gamma^d{}_b + \left(\delta^d{}_b\Gamma_c + \delta^d{}_b\Gamma_c - g_{bc}g^{dk}\Gamma_k\right)\gamma^a{}_d \\
&\quad - \left(\delta^a{}_b\gamma_d + \delta^a{}_d\gamma_b - g_{bd}g^{ak}\gamma_k\right)\Gamma^d{}_c - \left(\delta^a{}_c\gamma_d + \delta^a{}_d\gamma_c - g_{cd}g^{ak}\gamma_k\right)\Gamma^d{}_b \\
&\quad + \left(\delta^d{}_b\gamma_c + \delta^d{}_b\gamma_c - g_{bc}g^{dk}\gamma_k\right)\Gamma^a{}_d \\
&= \delta^a{}_b s\Gamma_c + \delta^a{}_c s\Gamma_b + g_{bc}g^{ak}d\gamma_k \\
&\quad + g^{ak}\Gamma_k\left(\frac{2}{n}g_{bc}\gamma^d{}_d \underbrace{-g_{dc}\gamma^d{}_b + \frac{2}{n}g_{bc}\gamma^d{}_d - g_{bd}\gamma^d{}_c}_{=0}\right) - g_{bc}\Gamma_k\left(\frac{2}{n}g^{ak}\gamma^d{}_d - g^{ad}\gamma^k{}_d\right) \\
&\quad + g^{ak}\gamma_k\left(\frac{2}{n}g_{bc}\Gamma^d{}_d \underbrace{-g_{dc}\Gamma^d{}_b + \frac{2}{n}g_{bc}\Gamma^d{}_d - g_{bd}\Gamma^d{}_c}_{=0}\right) - g_{bc}\gamma_k\left(\frac{2}{n}g^{ak}\Gamma^d{}_d - g^{ad}\Gamma^k{}_d\right) \\
&= \delta^a{}_b s\Gamma_c + \delta^a{}_c s\Gamma_b - g_{bc}g^{ak}s\Gamma_k.
\end{aligned}
$$

C.2 Action de l'opérateur de BRS sur les 2-repères conformes

Afin d'expliciter les expressions locales des champs fantômes conformes, il est nécessaire de déterminer l'action de l'opérateur de BRS sur les 2-repères conformes. Pour cela, on utilise la connaissance de l'expression locale de la forme de soudure sur la G-structure conforme, ainsi que celle de l'action de l'opérateur de BRS.

Puisque la première composante de la forme de soudure est simplement :

$$\Gamma^a = e^a{}_\mu dx^\mu,$$

sa composante locale est l'inverse d'un 1-repère conforme. Pour connaître l'action de l'opérateur de BRS sur les 1-repères conforme, il suffit donc d'-expliciter la composante locale de $s\Gamma^a$ et d'en déduire l'action de l'opérateur de BRS recherchée.

$$\begin{aligned}
& s\Gamma^a = -d\gamma^a - \Gamma^a{}_b\gamma^b - \gamma^a{}_b\Gamma^b \\
\Rightarrow \quad & s\Gamma^a{}_{,\mu}dx^\mu = -dx^\mu\partial_\mu\gamma^a - \Gamma^a{}_{b,\mu}dx^\mu\gamma^b - \gamma^a{}_b\Gamma^b{}_{,\mu}dx^\mu \\
\Rightarrow \quad & s\Gamma^a{}_\mu = \partial_\mu\gamma^a + \Gamma^a{}_{b,\mu}\gamma^b - \gamma^a{}_b\Gamma^b{}_{,\mu} \\
\Rightarrow \quad & se^a{}_\mu = \partial_\mu\gamma^a + \Gamma^a{}_{b,\mu}\gamma^b - \gamma^a{}_b\Gamma^b{}_{,\mu} \\
\Rightarrow \quad & se^\mu{}_a = -e^\mu{}_k e^\lambda{}_a\partial_\lambda\gamma^k - \Gamma^k{}_{l,\lambda}e^\lambda{}_a e^\mu{}_k\gamma^l + e^\mu{}_k\gamma^k{}_a.
\end{aligned}$$

Les 2-repères conformes sont caractérisés par les e_a. Nous allons donc chercher l'action de l'opérateur de BRS sur les e_a et non pas sur la coordonnée locale $e^\mu{}_{ab}$. Dans ce but, on utilise l'expression locale de la seconde composante de la forme de soudure sur la G-structure conforme :

$$\Gamma^a{}_b = -\delta^a_b e^i{}_\lambda e_i dx^\lambda - e^a{}_\lambda e_b dx^\lambda + g_{mb}g^{ai}e^m{}_\lambda e_i dx^\lambda + e^a{}_\eta de^\eta{}_b.$$

Ce qui implique :

$$\Gamma^a{}_a = -ne_a\Gamma^a + e^a{}_\rho de^\rho{}_a.$$

Donc :

$$ne_a = e^\mu{}_a\left(e^b{}_\rho\partial_\mu e^\rho{}_b - \Gamma^b{}_{b,\mu}\right)$$

On peut alors en déduire :

$$\begin{aligned}
nse_a &= se^\mu{}_a\underbrace{\left(e^b{}_\rho\partial_\mu e^\rho{}_b - \Gamma^b{}_{b,\mu}\right)}_{ne^b{}_\mu e_b} \\
&= 2ne_a e_l\gamma^l - ng_{\ al}e^2\gamma^l - ne^k{}_\sigma e_k e^\lambda{}_a\partial_\lambda e^\sigma{}_l\gamma^l + ne_k\gamma^k{}_a \\
&\quad -ne^\mu{}_a\Gamma_{b,\mu}\gamma^b + n\gamma^a - e^\mu{}_a\partial_\mu\partial_\lambda\left(e^\lambda{}_b\gamma^b\right) + ne^\mu{}_a\partial_\mu e_l\gamma^l.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
se_a &= 2e_a e_l\gamma^l - g_{al}e^2\gamma^l - e^k{}_\sigma e_k e^\lambda{}_a\partial_\lambda e^\sigma{}_l\gamma^l + e_k\gamma^k{}_a \\
&\quad -e^\mu{}_a\Gamma_{b,\mu}\gamma^b + \gamma^a - \frac{1}{n}e^\mu{}_a\partial_\mu\partial_\lambda\left(e^\lambda{}_b\gamma^b\right) + e^\mu{}_a\partial_\mu e_l\gamma^l.
\end{aligned}$$

C.3 Expression locale des champs fantômes conformes

Pour finir, nous donnons ici l'expression locale des champs fantômes conformes définis par :

$$\varrho = \mathrm{Ad}(\ell(e_2))\gamma + e_2 se_2^{-1}.$$

Ainsi, ordre par ordre, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varrho^{\mu} &= e^{\mu}{}_{a}\gamma^{a} \\
\varrho^{\mu}{}_{\nu} &= e^{\mu}{}_{a}\gamma^{a}{}_{b}e^{b}{}_{\nu} + e^{\mu}{}_{ab}\gamma^{a}e^{b}{}_{\nu} + e^{\mu}{}_{a}se^{a}{}_{\nu} \\
&= \partial_{\nu}\left(e^{\mu}{}_{a}\gamma^{a}\right) \\
&= \partial_{\nu}\varrho^{\mu},
\end{aligned}$$

et

$$\varrho_{\rho} = e^{a}{}_{\rho}e_{c}e_{c}\gamma^{c} - \frac{1}{2}g_{ac}e^{2}e^{a}{}_{\rho}\gamma^{c} + e_{a}e^{b}{}_{\rho}\gamma^{a}{}_{b} + e^{b}{}_{\rho}\gamma_{b} - e^{j}{}_{\rho}\gamma_{b} - e^{j}{}_{\rho}se_{j},$$

implique :

$$\varrho_{\rho} = \frac{1}{n}\partial_{\rho}\partial_{\lambda}c^{\lambda} - \Gamma_{\lambda,\rho}c^{\lambda}.$$

Annexe D

Article publié : Polyakov soldering and second order frames the role of the Cartan connection

Polyakov soldering and second order frames : the role of the Cartan connection

Serge Lazzarini * and Carina Tidei †

Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II
Centre de Physique Théorique ‡ , Case postale 907,
F–13288 Marseille Cedex 9, France.

Abstract

The so-called '*soldering*' procedure performed by A.M. Polyakov in [9] for a $SL(2,\mathbb{R})$-gauge theory is geometrically explained in terms of a Cartan connection on second order frames of the projective space $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$. The relationship between a Cartan connection and the usual (Ehresmann) connection on a principal bundle allows to gain an appropriate insight into the derivation of the genuine '*diffeomorphisms out of gauge transformations*' given by Polyakov himself.

PACS-2003 number : 02.40.Hw Classical differential geometry, 11.15.-q Gauge field theories, 11.25.Hf Conformal field theory, algebraic structures

Keywords : Higher order frames, Cartan connection, Polyakov soldering.

*e-mail : `sel@cpt.univ-mrs.fr`

†e-mail : `tidei@cpt.univ-mrs.fr`; allocataire de recherche MESR.

‡Unité Mixte de Recherche (UMR 6207) du CNRS et des Universités Aix-Marseille I, Aix-Marseille II et de l'Université du Sud Toulon-Var. Unité affiliée à la FRUMAM Fédération de Recherche 2291.

CPT-P013-2008

D.1 Introduction

More than fifteen years ago, in a paper by A.M. Polyakov [9], diffeomorphism transformations for the 2-d conformal geometry were explicitly derived by a '*soldering procedure*' from a partial gauge fixing of two components out of three of a chirally split $SL(2,\mathbb{R})$-connection in the light-cone formulation. In doing so, Polyakov ended with a residual gauge transformation which exactly reproduced the Virasoro group action on the effective energy-momentum tensor. This striking result was raised by Polyakov himself as '*a geometrical surprise*' and in addition some of the gauge parameters were noticed to be gauge field dependent.

Subsequently, some work *e.g.* [47, 48] directly referred to the Polyakov partial gauge fixing, which we shall call in the sequel as the '*Polyakov soldering*'. It has to be said that in [48] this intriguing result obtained by Polyakov was also emphasized as such.

In the present paper a proper differential geometrical framework is proposed in order to explain this '*geometrical surprise*' [9, 48]. It is essentially grounded on the use of the Cartan connection on the second order frame bundle [16] and all the differential algebraic setup which goes with.

In order to have a concise and efficient geometrical writing, we shall use the BRS differential algebra for treating the gauge symmetry aspects.

One of the main ingredients will be the so-called solder forms on frame bundles [27], well known objects in mathematics and intuitively figured out by Polyakov under the phrasing '*soldering*' procedure.

D.2 Second order frames

Let us briefly introduce the notion of the second order frame bundle. Most of the time, we shall adopt the viewpoint that physics often requires, the use of local expressions over a manifold. In other words, local comparison of a n-dimensional manifold M with $\mathbb{R}^n$ will be of constant use.

According to [16, 24], consider the principal bundle F_2M of second order frames, or shortly 2-frames [4], over M. The elements of F_2M are 2-jets $j_2(f)(0)$ of local diffeomorphisms f from a neighborhood of 0 in $\mathbb{R}^n$ to M such that $f(0) = x$. Given local coordinate systems $\{x^\mu\}_{\mu=1}^n$ on M and $\{u^a\}_{a=1}^n$ on $\mathbb{R}^n$, F_2M is equipped with local coordinates[5] $(x^\mu, e^\mu{}_a, e^\mu{}_{ab})$ corresponding to the

[4]It can be shown that they are torsion free linear frames over the linear frame bundle itself [20]

[5]Usual notation for gravitation will be constantly used [49].

successive derivatives of f at 0. Hence $e^{\mu}{}_{a} \neq 0$ and $e^{\mu}{}_{ab} = e^{\mu}{}_{ba}$. When the composition of maps makes sense, the jet product is given by the chain rule derivation $j_2(f) \cdot j_2(f') = j_2(f \circ f')$.

Accordingly 2-frame fields are sections of the bundle F_2M over M, $e_2(x) = (x^\mu, e^{\mu}{}_{a}(x), e^{\mu}{}_{ab}(x))$ with inverse given by $e_2{}^{-1}(x) = \big(x^\mu, e^{a}{}_{\mu}(x), e^{a}{}_{\mu\nu}(x)\big)$ where

$$e^{a}{}_{\mu} e^{\mu}{}_{b} = \delta^a_b, \qquad e^{a}{}_{\mu\nu} = -e^{\lambda}{}_{bc} e^{b}{}_{\mu} e^{c}{}_{\nu} e^{a}{}_{\lambda} \,. \tag{D.1}$$

In the u-coordinates, a 2-frame e_2 at $x \in M$ has the polynomial representative f,

$$f^\mu(u) = x^\mu + e^{\mu}{}_{a} u^a + e^{\mu}{}_{ab} u^a u^b, \qquad u \in \mathbb{R}^n \ ,$$

such that $e_2 = j_2(f)(0)$, and the coordinates $e^{\mu}{}_{ab}$ and $e^{\mu}{}_{a}$ are independent variables. Moreover, note that the 2-frame at x associated to the local x-coordinates themselves are obtained as 2-jets of translations $(x^\mu, \delta^{\mu}{}_{a}, 0) = j_2(u \mapsto x + u)(0)$. This induces a *natural* 2-frame at x [28].

The structure group of F_2M is the so-called differential group of order two G_2 [29] locally given by the 2-jets $g_2 = (g^{a}{}_{a'}, g^{a}{}_{a'b'})$ at 0 of diffeomorphisms g of $\mathbb{R}^n$ fixing the origin[6] 0. The right action given by jet product $e_2' = e_2 \cdot g_2 = j_2(f \circ g)(0)$ reads

$$f(g(0)) = f(0) = x, \qquad e^{\mu}{}_{a'} = e^{\mu}{}_{a}\, g^{a}{}_{a'}, \qquad e^{\mu}{}_{a'b'} = e^{\mu}{}_{ab}\, g^{a}{}_{a'} g^{b}{}_{b'} + e^{\mu}{}_{a}\, g^{a}{}_{a'b'}.$$

It is worthwhile to note the semi-direct product decomposition of $G_2 = GL_0 \ltimes GL_1$ with respect to the jet product, namely $g_2 = (g^{a}{}_{b'}, 0) \cdot (\delta^{b'}{}_{a'}, g^{b'}{}_{b} g^{b}{}_{a'b'})$, with $(g^{a}{}_{a'}) \in GL_0 := GL(n, \mathbb{R})$ [7].

To the local x-coordinates on M, there corresponds a *natural gauge* in which the local coordinates of any 2-frame field $e_2 : x \mapsto e_2(x) \in G_2$ can be considered as an element of the gauge group, thanks to the pointwise identification $(e^{\mu}{}_{a}(x), e^{\mu}{}_{ab}(x)) = (\delta^{\mu}{}_{c}, 0) \cdot (g^{c}{}_{a}(x), g^{c}{}_{ab}(x))$.

Let us now introduce a family of solder 1-forms on F_2M (also called canonical forms) which are invariant under diffeomorphisms of M by taking the Maurer-Cartan like 1-form "$f^{-1} \circ df$" in powers of $u \in \mathbb{R}^n$ [50],

$$(f^{-1} \circ df)^a(u) = \theta^a + \theta^{a}{}_{b}\, u^b + \frac{1}{2} \theta^{a}{}_{bc} u^b u^c + \cdots \,.$$

Then, in terms of the local coordinates $(x^\mu, e^{\mu}{}_{a}, e^{\mu}{}_{ab})$ on F_2M the solder 1-forms read [8]

$$\theta^a = e^{a}{}_{\mu} dx^\mu, \qquad \theta^{a}{}_{b} = e^{a}{}_{\mu} de^{\mu}{}_{b} + e^{a}{}_{\mu\nu} e^{\mu}{}_{b} dx^\nu \,. \tag{D.2}$$

[6] The differential group is the little group relative to the origin.

[7] The motivation for the lower indices attached to GL will become clear below in the main text.

[8] $e^{a}{}_{\mu}$ denotes the usual tetrad [49].

In particular, they fulfil the torsion free condition $d\theta^a + \theta^a{}_b \wedge \theta^b = 0$.

D.3 Cartan connection on second order frames

Adding translations denoted as $g^a \in GL_{-1} \simeq \mathbb{R}^n$, consider now the structure group G_2 as a Lie subgroup of the Lie group $G := GL_{-1} \times G_2$. Denoting $\mathfrak{gl}_k :=$ Lie $GL_k, k = 0, \pm 1$, the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G admits the decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{-1} \oplus \mathfrak{gl}_0 \oplus \mathfrak{gl}_1$. In the sequel, we set $\mathfrak{g}_2 :=$ Lie $G_2 = \mathfrak{gl}_0 \oplus \mathfrak{gl}_1$. Since G consists of 2-jets at 0 of diffeomorphisms $g_t(u) = u + tX(u)$ of $\mathbb{R}^n$, with $g_0 = id_{\mathbb{R}^n}$, $X(u) = \left(X^a + X^a{}_b u^b + X^a{}_{bc} u^b u^c + \cdots\right) \partial_a$, its Lie algebra $\mathfrak{g}$ consists of tangent vector fields at the identity $\mathbf{1} := j_2(id_{\mathbb{R}^n})(0) = (\delta^a{}_b, 0)$, given by the 2-jet at 0 of the vector field $X(u)$ on $\mathbb{R}^n$,

$$X_2 := j_2(X)(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} j_2(g_t)(0) = (X^a, X^a{}_b, X^a{}_{bc}).$$

The algebraic bracket is then defined to be *minus* the Lie bracket of vector fields [51],

$$\begin{aligned} [X,Y]^a &= X^a{}_b Y^b - Y^a{}_b X^b \\ [X,Y]^a{}_b &= X^a{}_c Y^c{}_b + X^a{}_{bc} Y^c - (X \leftrightarrow Y) \\ [X,Y]^a{}_{bc} &= X^a{}_d Y^d{}_{bc} + X^a{}_{dc} Y^d{}_b + X^a{}_{bd} Y^d{}_c - (X \leftrightarrow Y). \end{aligned} \tag{D.3}$$

Then, $[\mathfrak{gl}_{-1}, \mathfrak{gl}_{-1}] = 0$ for the translation part and $[\mathfrak{gl}_k, \mathfrak{gl}_\ell] \subset \mathfrak{gl}_{k+\ell}, k, \ell = 0, \pm 1$. So, the Lie algebra $\mathfrak{g}$ turns out to be a graded Lie algebra [16] with respect to the dilatation generator $u^a \partial_a$.

Moreover, considering the differential group of order three $G_3 \ni g_3 = \left(g^{a'}{}_a, g^{a'}{}_{ab}, g^{a'}{}_{abc}\right)$, an adjoint type action on $\mathfrak{g}$ can be defined by [27]

$$\mathrm{Ad}(g_3)\, X_2 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} j_2(g' \circ g_t \circ g'^{-1})(0) = \left(X^{a'}, X^{a'}{}_{b'}, X^{a'}{}_{b'c'}\right) ,$$

where the transformed components are given by chain rule derivations as,

$$\begin{aligned} X^{a'} &= g^{a'}{}_a X^a \ , \\ X^{a'}{}_{b'} &= g^{a'}{}_{ab} X^b g^a{}_{a'} + g^{a'}{}_a X^a{}_b g^b{}_{b'} \ , \\ X^{a'}{}_{b'c'} &= g^{a'}{}_{abc} X^c g^b{}_{b'} g^a{}_{c'} + g^{a'}{}_{ab} X^b{}_c g^c{}_{b'} g^a{}_{c'} + g^{a'}{}_{ac} g^c{}_{b'} X^a{}_b g^b{}_{c'} \\ &\quad + g^{a'}{}_a X^a{}_{bc} g^c{}_{b'} g^b{}_{c'} + g^{a'}{}_{ab} X^b g^a{}_{b'c'} + g^{a'}{}_a X^a{}_b g^b{}_{b'c'} \, . \end{aligned} \tag{D.4}$$

Now, we are in position to introduce a Cartan connection on F_2M as a $\mathfrak{g}$-valued 1-form satisfying :

– $\forall e_2 \in F_2M$, $\omega_{|e_2} : T_{e_2}(F_2M) \to \mathfrak{g}$ is a linear isomorphism (absolute parallelism),
– $\forall g_2 \in G_2 \subset G_3$, $R^*_{g_2}\omega = \mathrm{Ad}({g_2}^{-1})\,\omega$, where $g_2 = \left(g^{a'}_{\ a}, g^{a'}_{\ ab}, 0\right)$ (G_2-equivariance),
– $\forall \hat{X} \in V(F_2M)$, $\omega(\hat{X}) \in \mathfrak{g}_2$.

According to the grading of $\mathfrak{g}$, the Cartan connection ω can be chosen to be [16]

$$\omega := \omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1 = \theta^a + \theta^a_{\ b} + \omega^a_{\ bc}\,,$$

where θ^a and $\theta^a_{\ b}$ are the solder forms on F_2M which are respectively $\mathfrak{gl}_{-1}$-valued, and $\mathfrak{gl}_0$-valued 1-forms, and $\omega^a_{\ bc}$ is a $\mathfrak{gl}_1$-valued 1-form on F_2M. Its curvature is defined by

$$K = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = K_{-1} + K_0 + K_1$$

where the bracket (D.3) has to be used. More explicitly one finds the torsion free condition $K_{-1} = d\omega_{-1} + \omega_0 \wedge \omega_{-1} = 0$ and the (generalized) curvature $K_0 = d\omega_0 + \frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0] + [\omega_{-1}, \omega_1]$.

For the sequel, it is of use to note that, from a Cartan connection on F_2M it is possible to recover the Yang-Mills context by constructing a (Ehresmann) connection on the principal G-bundle $F_2M \times_{G_2} G$, see [12,26]. Actually, at a point $(e_2, g) \in F_2M \times G$, one can construct the $\mathfrak{g}$-valued 1-form

$$\mathcal{A}_{|(e_2,g)} = \mathrm{Ad}(g^{-1})(\pi_{F_2M})^*\omega + (\pi_G)^*\Theta_G,$$

where Θ_G is the Maurer-Cartan form on G and π_{F_2M} (resp. π_G) is the canonical projection on F_2M (resp. G). $\mathcal{A}$ turns out to be a connection 1-form on the principal bundle $F_2M \times_{G_2} G$ [26].

Since we are concerned with local expressions, consider the local connection 1-form $A = \sigma^*\mathcal{A}$ (gauge field on M) obtained as pull-back of the connection 1-form by a (local) section $\sigma(x)$ of $F_2M \times_{G_2} G$. When we restrict ourselves to $F_2M \simeq F_2M \times_{G_2} \{\mathbf{1}\}$, and take $\sigma(x) = (e_2(x), \mathbf{1})$, the gauge field reduces to $A = e_2^*\omega$, namely the local expression of the Cartan connection on M. As it will be shown, this is the gauge field considered by Polyakov.

As outlined in [52], let us first consider, in the natural gauge, the "local expression" on F_2M of the Cartan connection ω (a gauge like redefinition which to some extent is field dependent)

$$\Gamma(e_2, \omega) = \mathrm{Ad}\left(\ell(e_2)\right)\,\omega + e_2 \cdot de_2^{-1}, \tag{D.5}$$

where $\ell(e_2) = (e^\mu{}_a, e^\mu{}_{ab}, e^\mu{}_{abc})$ is the necessary lift of an element $e_2 \in G_2$ into G_3. It can be shown that the local connection 1-form Γ generalizes the Christoffel symbols to second order frames [20]. Moreover by extending the proof for an affine connection [28] it can be checked that the generalized Christoffel symbols depend only on the x-coordinate . A direct computation [9] gives for the components of the torsion free Cartan connection

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu &= e^\mu{}_a \theta^a = dx^\mu \ , \\
\Gamma^\mu{}_\nu &= e^\mu{}_a \theta^a{}_b e^b{}_\nu + e^\mu{}_{ab} \theta^a e^b{}_\nu + e^\mu{}_a de^a{}_\nu = 0 \ , \\
\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} &= e^\mu{}_{abc} \theta^c e^b{}_\nu e^a{}_\rho + e^\mu{}_{ac} \theta^c e^a{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_{ab} \theta^b{}_d e^d{}_\nu e^a{}_\rho + e^\mu{}_{ac} e^c{}_\nu \theta^a{}_b e^b{}_\rho \\
&\quad + e^\mu{}_a \theta^a{}_b e^b{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_a \omega^a{}_{bc} e^c{}_\nu e^b{}_\rho + e^\mu{}_a de^a{}_{\nu\rho} + e^\mu{}_{ab} d(e^b{}_\nu e^a{}_\rho) = \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} \ .
\end{aligned} \tag{D.6}$$

D.4 Reduction to the projective case

Having in mind the implementation of a $SL(2,\mathbb{R})$ gauge symmetry, we reduce right away the structure group $G = GL_{-1} \times G_2$ to $SL(2,\mathbb{R}) = SL_{-1} \times (SL_0 \ltimes SL_1)$ with the parametrization

$$\mathbb{R} \simeq SL_{-1} \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad SL_0 \ltimes SL_1 \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1/a \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \, .$$

Accordingly the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ inherits the graded splitting $\mathfrak{sl}_{-1} \oplus \mathfrak{sl}_0 \oplus \mathfrak{sl}_1$.

This reduction amounts to restricting ourselves to the 1-dimensional (real) projective space $M = \mathbb{R}P^1$ with local coordinate x. Let u denote the local coordinate on $\mathbb{R}$. The bundle P_2 of projective 2-frames $(x, e^x{}_u, e^x{}_{uu})$ is a principal sub-bundle of F_2M with the reduced structure group $SL_0 \ltimes SL_1 \subset G_2$ (the so-called G-structure [16]). More precisely, elements g_2 of the structure group are 2-jets at $u = 0$ of the projective maps fixing $u = 0$ given by

$$g(u) = \frac{au}{cu + 1/a} \iff \begin{pmatrix} g(u) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In particular, the identification of $SL_0 \ltimes SL_1$ as subgroup of G_2 is made through

$$\begin{pmatrix} \left(g^{u'}{}_u\right)^{1/2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\, g^{u'}{}_{uu} \left(g^{u'}{}_u\right)^{-3/2} & \left(g^{u'}{}_u\right)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

[9] In the course of the computation using (D.1) and (D.4) it is easier to consider $e_2 \cdot de_2^{-1} = -de_2 \cdot e_2^{-1}$.

The Cartan connection ω on F_2M restricts to P_2 as the $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-valued 1-form whose local expression (see (D.2)) reads

$$\omega_{-1} = \theta^u = e^u{}_x\, dx, \qquad \omega_0 = \theta^u{}_u = e^x{}_u e^u{}_{xx}\, dx + e^u{}_x\, de^x{}_u, \qquad \omega_1 = \omega^u{}_{uu} \tag{D.7}$$

In the natural gauge, a projective 2-frame field $e_2(x) = j_2(f)(0)$ with $f(u) = x+g(u)$ is viewed as an element G_2. Moreover it is well known that projective transformations $y = f(u)$ are solutions of the third order differential equation $y''' = \frac{3}{2}(y'')^2/y'$. This induces a relation between the local coordinates of the whole projective frame $j_3(f)(0) = (e^x{}_u, e^x{}_{uu}, e^x{}_{uuu}) \in G_3$, where the third order jet has the unique form

$$e^x{}_{uuu} = \frac{3}{2}\,(e^x{}_{uu})^2\, e^u{}_x. \tag{D.8}$$

The relationship (D.8) gives rise to the unique lift $\ell(e_2)$ of the projective 2-frames into G_3 dictated by the projective structure itself on $\mathbb{R}P^1$.

By restricting the local expression (D.5) to the projective case, and taking into account the expressions (D.1), (D.7) and (D.8) the components (D.6) of the Cartan connection 1-form on P_2 read :

$$\begin{aligned} \Gamma^x &= dx\ , \\ \Gamma^x{}_x &= 0\ , \\ \Gamma^x_{xx} &= e^u{}_x \omega^u{}_{uu} + d\,(e^u{}_{xx} e^x{}_u) - \frac{1}{2}\,(e^u{}_{xx} e^x{}_u)^2\, dx\ , \end{aligned} \tag{D.9}$$

where the special combination $\chi_x := e^u{}_{xx} e^x{}_u$ occurs in a Miura like expression [53]. Under a change of local coordinates $x \mapsto x'$ on M, the frame coordinates transform as

$$e^x{}_u \to e^{x'}{}_u = \frac{dx'}{dx}\, e^x{}_u, \qquad e^x{}_{uu} \to e^{x'}{}_{uu} = \frac{dx'}{dx}\, e^x{}_{uu} + \frac{d^2x'}{dx^2}\,(e^x{}_u)^2$$

while for the inverse

$$e^u{}_{x'} = \frac{dx}{dx'}\, e^u{}_x, \qquad e^u{}_{x'x'} = \left(\frac{dx}{dx'}\right)^2 e^u{}_{xx} - \left(\frac{dx}{dx'}\right)^3 \frac{d^2x'}{dx^2}\, e^u{}_x.$$

It can be checked, on the one hand, that χ_x behaves as an affine connection, and, on the other hand, that the third component $\Gamma^x{}_{xx}$ behaves as a projective connection, namely

$$\Gamma^x{}_{xx} - \frac{dx'}{dx}\,\Gamma^{x'}{}_{x'x'} = \left(\frac{d^3x'}{dx^3}\Big/\frac{dx'}{dx} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2x'}{dx^2}\Big/\frac{dx'}{dx}\right)^2\right) dx\ , \tag{D.10}$$

where the right hand side is recognized as the Schwarzian derivative.

So, locally on P_2 the connection Γ as a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-valued 1-form is parametrized as

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & dx \\ \frac{1}{2}\Gamma^{x}{}_{xx} & 0 \end{pmatrix} . \tag{D.11}$$

Given a projective 2-frame field $e_2(x)$, let us denote the local representative of the Cartan connection on M by $e_2^*\omega = (\theta^u{}_{,x} + \theta^u{}_{u,x} + \omega^u{}_{uu,x})dx$. Thus (D.11) is pulled-back to M as

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\Gamma^{x}{}_{xx,x}(x) & 0 \end{pmatrix} dx\,, \quad \text{with } \Gamma^{x}{}_{xx,x}(x) = e^u{}_x\omega^u{}_{uu,x} + \partial_x\chi_x - \frac{1}{2}\left(\chi_x\right)^2 . \tag{D.12}$$

Hence, the local expression of the Cartan connection ω on the projective 2-frame bundle gives rise directly to a '*Polyakov soldering*' procedure but in an appropriate geometrical framework.

D.5 The BRS-structure

Let us now turn to the infinitesimal gauge aspect related to the $SL(2,\mathbb{R})$ Yang-Mills counterpart of the Cartan connection. The infinitesimal $SL(2,\mathbb{R})$-gauge transformations can be recast in the more powerful and elegant BRS (graded) differential algebra [35, 54] by turning the gauge parameters to Faddeev-Popov ghost fields γ.

The infinitesimal gauge transformation is usually written in terms of a nilpotent s-operation as

$$s\omega = -d\gamma - [\omega,\gamma], \qquad s\gamma = -\tfrac{1}{2}[\gamma,\gamma], \qquad s^2 = 0, \tag{D.13}$$

where the graded bracket is understood with respect to the de Rham degree and the ghost number (or BRS grading). The Lie algebra content of the graded bracket is given by algebraic bracket (D.3). With respect to the bigrading, one has the nilpotency properties $(d+s)^2 = 0$, namely $d^2 = s^2 = ds + sd = 0$. Recall that the nilpotent algebra (D.13) can be compactly encapsulated into one formula only, the so-called Russian formula for the field strength (the curvature)

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = (d+s)(\omega+\gamma) + \frac{1}{2}[\omega+\gamma,\omega+\gamma], \tag{D.14}$$

where $\omega+\gamma$ acquires the status of algebraic connection [38].

Let us introduce now the projective parametrization [8] as the redefinition [10]

$$\Gamma + c = \mathrm{Ad}(\ell(e_2))(\omega + \gamma) + e_2 \cdot (d + s)e_2^{-1} \ , \tag{D.15}$$

where the ghost field is redefined by $c = \mathrm{Ad}(\ell(e_2))\gamma + e_2 \cdot se_2^{-1}$. It can be checked that

$$s\Gamma = -dc - [\Gamma, c], \qquad sc = -\frac{1}{2}[c, c].$$

Recalling that the local representative $e_2^*\omega$ of the Cartan connection is a $(\mathfrak{sl}_{-1} \oplus \mathfrak{sl}_0 \oplus \mathfrak{sl}_1)$-valued 1-form on M, an obvious $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$-ghost parameter can be chosen to be

$$\gamma = (e_2^*\omega)(\xi) = \omega(e_{2*}\xi)$$

where $\xi = \xi^x \partial_x$ is the ghost vector field defined on M. More explicitly the components of that particular gauge ghost read

$$\gamma^u = \theta^u{}_{,x}\xi^x = e^u{}_x\xi^x, \quad \gamma^u{}_u = \theta^u{}_{u,x}\xi^x = (e^u{}_{xx}e^x{}_u + e^u{}_x\partial_x e^x{}_u)\,\xi^x, \quad \gamma^u{}_{uu} = \omega^u{}_{uu,x}\xi^x \tag{D.16}$$

Then, performing the BRS transformations (D.13) on the components of the Cartan connection, with respect to that particular ghost parametrization, one gets

$$\begin{aligned} s\theta^u{}_{,x} &= \partial_x\gamma^u + \theta^u{}_{u,x}\gamma^u - \gamma^u{}_u\theta^u{}_{,x} = \partial_x\left(\theta^u{}_{,x}\xi^x\right) \ , \\ s\theta^u{}_{u,x} &= \partial_x\gamma^u{}_u + \omega^u{}_{uu,x}\gamma^u - \gamma^u{}_{uu}\theta^u{}_{,x} = \partial_x\left(\theta^u{}_{u,x}\xi^x\right) \ , \\ s\omega^u{}_{uu,x} &= \partial_x\gamma^u{}_{uu} + \omega^u{}_{uu,x}\gamma^u{}_u - \gamma^u{}_{uu}\theta^u{}_{u,x} = \partial_x\left(\omega^u{}_{uu,x}\xi^x\right) \ ; \end{aligned} \tag{D.17}$$

these variations can be compactly gathered as $s\omega = -d(\omega(\xi)) = (i_\xi d - di_\xi) =: L_\xi\omega$, which is nothing but the Lie derivative[11] expressing the action of diffeomorphisms on the Cartan connection 1-form.

Using the local expressions (D.7) of θ^u and $\theta^u{}_u$, the variations (D.17) infer the lift of the diffeomorphisms on 2-frame fields as BRS transformations given by

$$\begin{aligned} se^u{}_x &= s\theta^u{}_{,x} = \partial_x\left(e^u{}_x\xi^x\right) \\ se^u{}_{xx} &= e^u{}_x\, s\theta^u{}_{u,x} + e^x{}_u e^u{}_{xx}\, se^u{}_x + e^x{}_u\partial_x e^u{}_x se^u{}_x - \left(e^u{}_x\right)^2\partial_x\left(se^x{}_u\right) \\ &= \partial_x e^u{}_{xx}\xi^x + 2e^u{}_{xx}\partial_x\xi^x + e^u{}_x\partial_x^2\xi^x \end{aligned} \tag{D.18}$$

[10] Limiting ourselves to 1-frames $\mathrm{Ad}(\ell(e_1))(\omega+\gamma)+e_1\cdot(d+s)e_1^{-1}$ where $\ell(e_1) = (e^\mu{}_a, 0) \in G_2$ exactly yields the conformal parametrization given in [8].

[11] Remind that ξ carries a ghost degree and that here M is one dimensional.

Accordingly, in each sector of the graded algebra $\mathfrak{sl}_{-1} \oplus \mathfrak{sl}_0 \oplus \mathfrak{sl}_1$ we are respectively left with the following ghosts

$$\begin{aligned}
c^x &= e^x{}_u \gamma^u = \xi^x, \\
c^x{}_x &= e^x{}_{uu} e^u{}_x \gamma^u + \gamma^u{}_u + e^x{}_u s e^u{}_x = \partial_x \xi^x \qquad \text{(D.19)} \\
c^x{}_{xx} &= \frac{1}{2} \left(e^u{}_{xx}\right)^2 \left(e^x{}_u\right)^3 \gamma^u + e^x{}_{uu} \left(e^u{}_x\right)^2 \gamma^u{}_u + \gamma^u{}_{uu} e^u{}_x + 2 e^x{}_{uu} e^u{}_x s e^u{}_x + e^x{}_u s e^u{}_{xx} \\
&= \partial^2 \xi^x + \left(\partial_x \chi_x - \frac{1}{2} \left(\chi_x\right)^2 + e^u{}_x \omega^u{}_{uu,x} \right) \xi^x \;=\; \partial_x^2 \xi^x + \Gamma^x{}_{xx,x} \xi^x \;,
\end{aligned}$$

which are exactly the ghost version of the gauge parameters found by Polyakov in [9]. With the help of (D.18) the BRS transformations on the connection form Γ (D.9) are computed to be

$$s\Gamma^x{}_{,x} = 0, \qquad s\Gamma^x{}_{x,x} = 0, \qquad s\Gamma^x{}_{xx,x} = \partial_x^3 \xi^x + \xi^x \partial_x \Gamma^x{}_{xx,x} + 2\partial_x \xi^x \Gamma^x{}_{xx,x} \qquad \text{(D.20)}$$

These variations derive from the geometry, while the first two were imposed in [9] as constraints in order to keep the gauge choice. The third variation can be rewritten as,

$$s\Gamma^x{}_{xx,x} = \partial_x^3 c^x + c^x \partial_x \Gamma^x{}_{xx,x} + 2\partial_x c^x \Gamma^x{}_{xx,x}, \qquad \text{(D.21)}$$

where c^x is the ghost vector field with $sc^x = c^x \partial_x c^x$ and $s^2 = 0$.

As claimed in [9], this residual BRS algebra exactly reproduces the well known Virasoro algebra action on the energy-momentum tensor suitably identified with $\Gamma^x{}_{xx,x}$.

D.6 Conclusions

Cartan geometry provides a proper framework which amounts to explain both the 'geometrical surprise' expressed by Polyakov and the field dependence of the constraint on the gauge parameters. As shown, on the one hand, it turns out that the specific Polyakov partial gauge fixing is just the local expression (D.9) of the Cartan connection for which the first two components with respect to a graded Lie algebra are the solder 1-form on the second order frame bundle, while the untouched third component of the Cartan connection acquires a geometrical status, namely that of a projective connection. Recall that the latter shares exactly the same geometrical feature of the effective energy-momentum tensor in 2D-conformal chiral theory. The approach has the advantage of shedding some light on the Polyakov soldering which is

the main basis of the so-called W-gravity [8, 48]. Incidentally, the framework of Cartan geometry gives a significant improvement of some manipulations performed in [8].

On the other hand, the relationship between a Cartan connection and the usual (Ehresmann) connection on a principal bundle has allowed us to gain some insight into the derivation of "*diffeomorphisms out of gauge transformations*" given by Polyakov in [9]. This has been achieved by lifting the diffeomorphisms from the base manifold to the second order frame bundle, see (D.18). All geometrical manipulations were carried out in terms of projective 2-frame fields.

Furthermore, the use of Cartan connections has been somewhat put aside in spite of a few attempts in the past [55] as well as the use of second order frames [56]. However there is a revival interest in the use of the concept of Cartan connections, especially in (conformal) gravity or in the study of PDE's, see for instance [10–12, 40, 41, 57–60].

The Polyakov soldering provides another physical situation in which Cartan connections appear naturally. They allow to lift the action of diffeomorphisms to higher order differential structures which ought to be of interest for physical models of gravitation. They offer also a proper differential geometrical framework which allows a generalization of the Polyakov soldering (D.6) to higher dimensions [20], for instance when third order frames can be expressed in terms of the lower ones (this is the case for projective and conformal structures [16]).

Acknowledgements. We would like to thank T. Schücker for comments and for a careful reading of the manuscript.

Bibliographie

[1] A. Einstein. *La relativité*. Gauthier-Villard, 1956.

[2] L. O'Raifeartaigh. *Group Structure of Gauge Theories*. Cambridge University Press, 1986.

[3] S. Laporta et E. Remiddi. The analytical value of the electron light by light graphs contribution to the muon $(g-2)$ in qed. *Phys. Lett. B*, 301 :440, 1993.

[4] C.J. Isham. Canonical quantum gravity and the problem of time. *Intergrable systems, quantum groups and quantum fields theory*, pages 157–287, 1992.

[5] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[6] D. Ivanenko et G. Sardanashvily. The gauge treatment of gravity. *Phys. Rep.*, 94 :1–45, 1983.

[7] R. Tresguerres. Unified description of interactions in terms of composite fiber bundles. *Phys. Rev. D*, 66, (2002).

[8] D. Garajeu, R. Grimm, and S. Lazzarini. "W-gauge structures and their anomalies : an algebraic approach". *Journ. Math. Phys.* **36**, pages 7043–7072, (1995).

[9] A.M. Polyakov. "Gauge transformations and diffeomorphisms". *Int. Journ. Math. Phys.* **A5**, pages 833–842, (1990).

[10] S. Frittelli, C. Kozameh, and E.T. Newman. Differential geometry from differential equations. *Commun.Math.Phys.*, 223 :383–408, (2001). gr-qc/0012058.

[11] S. Frittelli, N. Kamran, and E.T. Newman. Differential equations and conformal geometry. *J. Geom. Phys.*, 43 :133–145, (2002).

[12] D.K. Wise. *MacDowell-Mansouri gravity and Cartan geometry*. `arXiv :gr-qc/0611154`, November 2006.

[13] S. Kobayashi and K. Numizu. *Fondations of differential geometry*, volume 1 of *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*. Intersciences publishers, 1963.

[14] S. Lazzarini et C. Tidei. Polyakov soldering and second-order frames : The role of the Cartan connection. *Lett. Math. Phys*, 85 :27–37, 2008.

[15] C. Ehresmann. Catégories inductives et pseudogroupes. *Ann. Inst. Fourier* **10**, pages 307–336, (1960).

[16] S. Kobayashi. *Transformation groups in differential geometry.* Classics in Mathematics, vol. **70**. Spinger-Verlag, Berlin, 1972.

[17] E. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. *Ann. Scien. de l'ENS, serie 3,* **40**, pages 325–412, (1923).

[18] H. Weyl. *Temps, Espace, Matière.* Blanchard, 1922.

[19] R. Coquereaux. *Espaces fibrés et Connexions.* unpublished, (2002).

[20] M. Grasseau. *Géométrie des Théories conformes 4D.* PhD thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, July 2006. unpublished, in french.

[21] S. Kobayashi and T. Nagano. On projective connections. *J. of Math. and Mech.*, 13 :215–235, (1964).

[22] K. Ogiue. Theory of conformal connections. *Kodai Math. Sem. Rep.* **19**, pages 193–224, (1967).

[23] P. Molino. *Théorie des G-structures : le problème d'équivalence*, volume 588 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1977. (In french).

[24] D.J. Saunders. *The geometry of jet bundles*, volume 142 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, 1989.

[25] T. Masson. *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions.* unpublished, (2004).

[26] R.W. Sharpe. *Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*, volume 166 of *Graduate texts in mathematics.* Springer, New-York, Berlin, Heidelberg, 1997.

[27] S. Kobayashi. Canonical forms on frame bundles of higher order contact. *Proc. Symposia in Pure Math.*, 3 :186–193, (1961).

[28] S.S. Chern, W.H. Chen, and K.S. Lam. *Lectures on differential geometry*, volume 1 of *Series on University Mathematics.* World Scientific, Singapore, 1999.

[29] R.V. Gamkrelidze, editor. *Geometry I*, volume 28 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, 1991.

[30] V. Ovsienko et S. Tabachnikov. *Projective differential geometry old and new, from Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups*, volume Cambridge Tracts in Mathematics, **165. Cambridge university press edition, (2005).**

[31] S. Bouarroudj. *Les cocycles sur le groupe des difféomorphismes généralisant la dérivée de Schwarz et la géométrie des opérateurs différentiels.* PhD thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille I, January 1999. unpublished, in french.

[32] S. Bouarroudj and V. Ovsienko. Schwarzian derivative related to modules of differential operators on a locally projective manifold. *Banach Center Publications,* 51, pages 15–23, (2000).

[33] K. Carne. The Schwarzian derivative for conformal maps. *J. reine angew. Math.* 408, pages 10–33, (1990).

[34] B. Osgood et D. Stowe. The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian manifolds. *Duke Math. J.* 67, pages 57–99, (1992).

[35] Becchi C., Rouet A., and Stora R. Renormalization of gauge theories. *Ann. Phys.* 98, pages 287–321, (1976).

[36] L. Baulieu et J. Thierry-Mieg. Algebraic structure of quantum gravity and the classification of the gravitational anomalies. *Phys. Lett. B*, 145 :53–60, 1984.

[37] F. Langouche, T. Schücker et R. Stora. Gravitational anomalies of the Adler-Bardeen type. *Phys. Let. B*, 145 :342–346, 1984.

[38] M. Dubois-Violette. The Weil-BRS algebra of a Lie algebra and the anomalous terms in gauge theory. *J. Geom. Phys.*, 3 :525–565, (1986).

[39] J. Thierry-Mieg. Geometrical reinterpretation of Faddeev-Popov ghost particles and BRS transformations. *J. Math. Phys.*, 21 :2834–2838, 1980.

[40] S. Frittelli, C. Kozameh, E.T. Newman, and P. Nurowski. Cartan conformal connections from differential equations. *Class.Quant.Grav.*, 19 :5235–5247, (2002).

[41] C. Kozameh, E.T. Newman, and P. Nurowski. Conformal Einstein equations and Cartan conformal connection. *Class.Quant.Grav. 20 (2003) 3029-3036*, gr-qc/0302080.

[42] L. Guieu. Nombre de rotation, structures géométriques sur un cercle et groupe de Bott-Virasoro. *Ann. institut Fourier*, 46 :971–1009, (1996).

[43] A. Cap et H. Schichl. Parabolic geometries and canonical Cartan connection. *Hokkaido Math. J.*, 29 :450–505, (2000).

[44] D.M.J. Calderbank, T. Diemer et V. Soucek. Ricci-corrected derivatives and invariant differential operators. *Diff. Geom. Appl.*, 23 :149–175, (2005).

[45] D. Garajeu. *Hiérarchies integrables et algèbres de Lie : Symetries conformes étendues.* PhD thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 1997. unpublished, in french.

[46] D. Garajeu. Conformally and projective covariant differential operators. *L. Math. Phys.*, 47 :293–306, (1999).

[47] Verlinde H. "Conformal field theory, two dimensional quantum gravity and quantization of Teichmüller space ". *Nucl. Phys.* B337, pages 652–680, (1990).

[48] H. Ooguri, K. Schoutens, A. Sevrin, and P. van Nieuwenhuizen. The induced action of W_3 gravity. *Comm. Math. Phys. 145*, pages 515–539, (1992).

[49] T. Egushi, P.B. Gilkey, and A.J. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Phys. Rep.*, 66 :213–393, (1980).

[50] D. Perrot. On the topological interpretation of gravitational anomalies. *J. Geom. Phys.*, 39 :81–95, (2001).

[51] Milnor J. Remarks on infinite-dimensional Lie groups. In B.S. DeWitt and R. Stora, editors, *Relativity, groups and topology II*, Les Houches, pages 1009–1057. Elsevier Science Publishers, 1984. Session XL, 1983.

[52] M. Daniel and C.M. Viallet. The geometrical setting of gauge theories of the yang-mills type. *Rev. Mod. Phy.*, 52 :175–197, (1980).

[53] P. Mathieu. Super Miura transformations, super Schwarzian derivatives and super Hill operators. In B. A. Kupershmidt, editor, *Integrable and Superintegrable Systems*, pages 352–388. World Scientific, 1990.

[54] R. Stora. Continuum gauge theories. In M. Lévy and P. Mitter, editors, *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Cargèse 1976*, NATO ASI Ser.B, Vol.26. Plenum Press, 1977.

[55] W. Drechsler. Gauge theory of strong and electromagnetic interactions formulated on a fiber bundle of Cartan type. In A. Böhm and J.D. Dollard, editors, *Fiber bundle techniques in gauge theory*, volume 67 of *Lecture Notes in Physics*, page 145.

Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin, Springer-Verlag, 1977.

[56] J. Harnad and J. Pettitt. *Gauge Theories for Space-Time Symmetries. II. Second order conformal structures.* CRM-745, February (1978). Unpublished.

[57] J. Grant and B. Lackey. On galilean connections and the first jet bundle. math.DG/9909148.

[58] M. Korzynski and J. Lewandowski. Conformal Cartan connection and the Bach tensor. *Class.Quant.Grav. 20 3745-3764*, 2003.

[59] E.T. Newman and P. Nurowski. Projective connections associated with second order ODE's. *Class. Quant. Grav. 20 (2003) 2325-2336*, gr-qc/0302016.

[60] E. Gallo, C. Kozameh, E. T. Newman, and K. Perkins. Cartan Normal Conformal Connections from Pairs of 2nd Order PDE's. *Class. Quant. Grav. 21 (2004) 4063-4986*, arXiv :gr-qc/0404072.