HAL open science

Approximation multi-échelles de l'équation de Vlasov

Alexandre Mouton

To cite this version:

Alexandre Mouton. Approximation multi-échelles de l'équation de Vlasov. Mathématiques [math]. Université de Strasbourg, 2009. Français. NNT : . tel-00411964v1

HAL Id: tel-00411964

https://theses.hal.science/tel-00411964v1

Submitted on 31 Aug 2009 (v1), last revised 8 Sep 2009 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approximation multi-échelles de l'équation de Vlasov

par

Alexandre MOUTON

Thèse soutenue le 16 Septembre 2009 devant le jury composé de

Grégoire Allaire	Rapporteur externe
Christophe Besse	Rapporteur externe
Laurent Desvillettes	Examinateur
Emmanuel Frénod	Directeur de thèse
Philippe Helluy	Rapporteur interne
Eric Sonnendrücker	Directeur de thèse

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Eric Sonnendrücker. Je tiens à lui exprimer une immense gratitude pour la confiance qu'il m'accorde depuis depuis mon stage en magistère et mes débuts en analyse numérique. Je le remercie également pour sa présence, ses conseils et son soutien tout au long de mon travail de thèse.

Je tiens également à remercier Emmanuel Frénod qui, malgré la distance géographique, a co-dirigé ma thèse. A travers de longues discussions téléphoniques, il a su apporter d'excellents conseils tant au niveau scientifique que personnel, et il a su me remotiver lorsque cela était nécessaire.

Je remercie également Grégoire Allaire, Christophe Besse et Philippe Helluy qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter sur ma thèse. Un merci tout particulier à Grégoire Allaire et Philippe Helluy qui m'ont apporté des informations capitales en mécanique des fluides et en thermodynamique grâce auxquelles la rédaction du deuxième chapitre de ce document a été grandement améliorée. Je remercie également Laurent Desvillettes de s'être joint au jury en tant qu'examinateur.

Un très grand merci à l'ensemble de l'équipe EDP de Strasbourg, à commencer par Sébastien Jund avec qui je partage mon bureau et mes enseignements en L3 depuis le début de la thèse. Merci également à Nicolas Crouseilles pour les nombreux conseils sur les méthodes semi-lagrangiennes et les modèles gyrocinétiques, à Matthieu Haefele pour les nombreux coups de main sous Unix et l'initiation au logiciel Visit, à Hocine Sellama pour sa sympathie et pour les discussions autour d'un café et d'un tableau plein d'équations. Je n'oublie pas non plus les autres membres de l'équipe : Stéphanie, Michel, Martin, Hélène, Sever, Thomas, Yves, et la liste est encore longue !

Par extension, je remercie également toutes les personnes que j'ai eu l'occasion de côtoyer à l'IRMA et dans le cadre du projet CALVI, le personnel administratif et le personnel du service reprographie. La qualité de leurs services et leur bonne humeur quotidienne sont autant de raisons d'apprécier de travailler à leurs côtés.

J'adresse également mes remerciements à Luc et Stéph, Jean-Baptiste, Bruno, Didier, Jérémie, Régis, Marie-Claire, François, Valérie, Florent, et aux Masters du club Léo-Lagrange Natation pour leur bonne humeur, leurs encouragements et leur fameux *"La soutenance est pour quand ?"*.

Je ne serais sans doute jamais arrivé au bout de cette thèse sans les encouragements constants de mes parents qui m'ont toujours soutenu malgré la longueur des études nécessaire pour en arriver là. Je remercie également mon petit frère Nicolas sans qui je n'aurais pas pris conscience d'avoir attrapé le virus de la Recherche, et je lui adresse mes plus vifs encouragements dans son travail de doctorant.

Enfin, mes derniers remerciements, sans doute les plus sincères, sont pour celle avec qui j'ai choisi de partager ma vie. Merci pour tout.

Notations

Sauf mention contraire, les notations suivantes sont valables pour l'ensemble de ce manuscrit. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière notée $\partial\Omega$, et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$.

Nous considérons les opérateurs différentiels suivants :

- pour $u : \Omega \to \mathbb{R}$, la *dérivée partielle* de u selon x_i : $\partial_{x_i} u(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})$,
- pour $u : \Omega \to \mathbb{R}$, le *gradient* de u en $\mathbf{x}$: $\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$,
- pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} : \Omega \in \mathbb{R}^n$, la *divergence* de u en $\mathbf{x}$: $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot u(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} u_1(\mathbf{x}) + \cdots + \partial_{x_n} u_n(\mathbf{x})$,
- pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} : \Omega \in \mathbb{R}^3$, le *rotationnel* de u : $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} u_3(\mathbf{x}) - \partial_{x_3} u_2(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_3} u_1(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} u_3(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} u_2(\mathbf{x}) - \partial_{x_2} u_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$,
- pour $u : \Omega \to \mathbb{R}$, le *laplacien* de u en $\mathbf{x}$: $\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u(x) = \partial^2_{x_1} u(\mathbf{x}) + \cdots + \partial^2_{x_n} u(\mathbf{x})$,
- pour $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, le *support* de u dans Ω : $\mathrm{Supp}(u) = \Big\{ x \in \Omega \,:\, u(x) \neq 0 \Big\}$.

Nous considérons les espaces fonctionnels suivants (voir [1]) :

- $L^p(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \,\text{mesurable sur}\, \Omega \,:\, \displaystyle\int_\Omega \big|u(\mathbf{x})\big|^p \, d\mathbf{x} < +\infty \Big\}$ pour $p \in [1, +\infty[$,
- $L^\infty(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \,\text{mesurable sur}\, \Omega \,:\, \max\limits_{\mathbf{x} \in \Omega} \big|u(\mathbf{x})\big| < +\infty \Big\}$,
- $W^{k,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \,:\, \text{toute dérivée partielle de } u \text{ d'ordre} \leq k \text{ est dans } L^p(\Omega) \Big\}$ pour $p \in [1, +\infty]$ et $k \in \mathbb{N}$,
- $W^{k,p}_0(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)} \subset W^{k,p}(\Omega)$,
- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$,
- $\mathcal{D}(\Omega) = \Big\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \,:\, \mathrm{Supp}(u) \text{ est compact dans } \Omega \Big\}$,

Pour tout espace fonctionnel $X(Y)$ sur le pavé $Y = [0, \theta_1] \times \cdots \times [0, \theta_n] \subset \mathbb{R}^n$, nous définissons l'espace $X_\#(Y)$ par

$$X_\#(Y) = \Big\{ u \in X(Y) \,:\, u \text{ est } Y\text{-périodique} \Big\},$$

et nous le munissons de la norme induite par celle de $X(Y)$.

Pour tout espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$, nous notons E^* le *dual topologique de* E et nous le munissons de la norme $\|\cdot\|_{E^*}$ définie par

$$\|p\|_{E^*} = \sup_{x\,\in\,E-\{0\}} \frac{\big|p(x)\big|}{\|x\|_E}\,.$$

Pour tout $s > 0$, nous notons $H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)$ l'espace de Sobolev défini par

$$H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big) = \Big\{u \in L^2_{\#}\big([0,2\pi]\big)\ :\ \|u\|_{L^p} + \big\|F^s(f)\big\|_{L^p} < +\infty\Big\}\,,$$

où $F^s(f) : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} (in)^s\,\hat{f}(n)\,e^{inx}$.

Pour $n \in \mathbb{R}$, nous notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels, et nous notons :

– $GL_n(\mathbb{R}) = \Big\{A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})\ :\ A \text{ est inversible}\Big\}$,

– pour $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la *trace* de A : $Tr(A) = \displaystyle\sum_{i\,=\,1}^{n} a_{i,i}$.

Table des matières

1 Introduction **9**
1 Modélisation gyrocinétique . . . 9
1.1 Etat de l'art . . . 9
1.2 Le problème des effets de rayon de Larmor fini . . . 10
2 Introduction à la convergence 2-échelles . . . 12
3 Méthodes numériques 2-échelles . . . 16
4 Plan . . . 17

2 Homogénéisation 2-échelles des équations d'Euler faiblement compressibles 1D **21**
1 Equations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles . . . 22
1.1 Equations d'Euler 1D isentropiques compressibles . . . 23
1.2 Adimensionnement . . . 25
2 Passage à la limite $\epsilon \to 0$ . . . 25
2.1 Modèle de Grenier-Schochet . . . 25
2.2 Construction du modèle limite . . . 27
2.3 Vitesse de convergence . . . 37
3 Méthode de volumes finis 2-échelles . . . 46
3.1 Introduction à la méthode de volumes finis de Roe . . . 47
3.2 Application au modèle limite . . . 50
4 Résultats numériques . . . 54
4.1 Comparaison avec une méthode classique . . . 54
4.2 Temps de calcul . . . 58
4.3 Expériences numériques à très faible nombre de Mach . . . 59
5 Conclusion . . . 62

3 Méthode semi-lagrangienne 2-échelles **65**
1 Obtention du modèle non-homogénéisé . . . 67
1.1 Approximation paraxiale . . . 67
1.2 Adimensionnement . . . 69
2 Passage à la limite 2-échelles . . . 71
3 Méthode semi-lagrangienne 2-échelles . . . 73
3.1 Méthode semi-lagrangienne . . . 74
3.2 Méthode semi-lagrangienne 2-échelles . . . 78
4 Résultats numériques . . . 85
4.1 Discrétisation du modèle non-homogénéisé . . . 85
4.2 Cas linéaires . . . 87
4.3 Cas non-linéaires . . . 91
4.4 Un dernier test : les limites de la méthode semi-lagrangienne classique . . . 96
5 Conclusion . . . 97

4 Simulation semi-lagrangienne 2-échelles du modèle de rayon de Larmor fini 99
1 Le modèle de rayon de Larmor fini 101
1.1 Adimensionnement du système de Vlasov-Poisson 101
1.2 Résultats de convergence 2-échelles 103
1.3 Résultats de convergence faible-* 105
2 Utilisation des coordonnées canoniques centre-guide 111
2.1 Changement de variables 111
2.2 Passage à la limite 2-échelles 114
2.3 Quelques remarques sur le nouveau modèle limite 2-échelles 122
2.4 Construction du système limite faible-* 124
3 Méthode numérique 2-échelles 126
3.1 Principe de la méthode semi-lagrangienne en avant 127
3.2 Test préliminaire sur un modèle de Vlasov-Poisson 2D 133
3.3 Méthode semi-lagrangienne 2-échelles 142
3.4 Résultats numériques 149
4 Conclusion 153

5 Conclusion générale et perspectives 155

Appendices 161

A Publications et communications 163

Chapitre 1

Introduction

A l'heure du début des travaux de construction du réacteur ITER destiné à l'étude de la fusion nucléaire par confinement magnétique comme source d'énergie, la simulation numérique de ce genre d'expérience est un problème mathématique à part entière. En effet, de nombreuses expériences menées dans différents tokamaks tels que TORE SUPRA (Cadarache - France), JET (Culham - Royaume-Uni), ou encore JT-60 (Naka - Japon) indiquent que les phénomènes physiques que l'on observe se développent sur plusieurs échelles de temps et d'espace. La superposition de ces différentes perturbations peut ainsi générer des turbulences dans les champs électromagnétiques générés par le plasma et, à terme, en perturber le confinement, voire détériorer la paroi du réacteur. A cela s'ajoutent des enjeux scientifiques, économiques et écologiques colossaux car la production d'une énergie propre et à grande échelle devient un défi incontournable en cette période de crise économique mondiale. Il est alors nécessaire de développer des outils de simulation numérique performants qui permettront de comprendre et gérer ces perturbations afin de préparer au mieux les futures expériences dans le réacteur ITER.

1 Modélisation gyrocinétique

1.1 Etat de l'art

D'un point de vue mathématique, il est nécessaire de développer des modèles et des méthodes numériques faisant intervenir différentes échelles de temps et d'espace. La solution la plus simple serait de discrétiser le modèle de Vlasov-Maxwell complet :

$$\begin{cases} \partial_t f_\alpha + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f_\alpha + \dfrac{q_\alpha}{m_\alpha}\big(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\big)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0\,, & \text{(Vlasov)} \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\,, & \text{(Maxwell-Gauss)} \\ \partial_t\mathbf{B} + \nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{E} = 0\,, & \text{(Maxwell-Faraday)} \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B} = 0\,, & \text{(Maxwell-Thomson)} \\ \partial_t\mathbf{E} - c^2\,\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{B} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\,\mathbf{J}\,, & \text{(Maxwell-Ampère)} \\ \rho(\mathbf{x},t) = \displaystyle\sum_\alpha q_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v}\,, & \\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \displaystyle\sum_\alpha q_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}\,f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v}\,, & \end{cases} \tag{1.1}$$

où

- $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ est la position (m),
- $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ est la vitesse (ms^{-1}),
- $t\in\mathbb{R}_+$ est le temps (s),

- $f_\alpha = f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in \mathbb{R}$ est la fonction de distribution ($m^{-6}s^3$) des particules de charge élémentaire q_α (C) et de masse élémentaire m_α (kg),
- $\varepsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12}\, AsV^{-1}m^{-1}$ est la permittivité du vide,
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, VsA^{-1}m^{-1}$ est la perméabilité du vide,
- $c = 2.99792458 \times 10^8\, ms^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide ($\varepsilon_0\, \mu_0\, c^2 = 1$),
- $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ est le champ électrique (Vm^{-1}),
- $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ est le champ magnétique (Am^{-1}),
- $\rho = \rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ est la densité de charge (Cm^{-3}),
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ est la densité de courant (Am^{-3}).

Il s'agit d'un modèle en 6 dimensions dans l'espace des phases avec autant d'équations de Vlasov qu'il y a de types de particules. La discrétisation d'un tel modèle n'est donc pas envisageable, même avec les moyens informatiques actuels. C'est pour cela que de nombreux chercheurs s'appliquent depuis plusieurs décennies à développer des modèles de dimension plus petite et qui mettent en valeur certains types de perturbations en mettant en valeur plusieurs échelles de temps et d'espace. Les premiers chercheurs ayant exploré cette piste furent R.-G. Littlejohn [47], D.-H. Dubin *et al.* [19], et W.-W. Lee [43, 44] qui ont posé les bases de la modélisation gyrocinétique des plasmas confinés dans des tokamaks à travers une formulation hamiltonienne du problème. Grâce à cette nouvelle formulation du problème, il a été possible d'identifier plus clairement une partie des phénomènes physiques jusqu'alors difficiles à cerner, comme par exemple les effets de rayon de Larmor fini. Ces travaux furent aussi le point de départ de la simulation numérique gyrocinétique. En effet, la formulation hamiltonienne du problème a permis de constater que le moment adiabatique est un invariant adiabatique, ce qui a permis de se ramener à un problème 5D. W.-W. Lee fut ainsi le premier à proposer une méthode numérique discrétisant un tel modèle. De nombreux physiciens et mathématiciens ont suivi cette voie et établi nombre de résultats théoriques ou numériques, comme A. Brizard [7], T.-S. Hahm [8], et plus récemment V. Grandgirard *et al.* [35] ou J.-A. Heikkinen *et al.* [38].

1.2 Le problème des effets de rayon de Larmor fini

Avant de discuter de l'intérêt de considérer les effets de rayon de Larmor fini, il convient auparavant de rappeler ce dont il s'agit en quelques mots.

Considérons une particule de masse m et de charge q soumise à un champ magnétique externe unidirectionnel $\mathbf{B} = \overline{B}\,\mathbf{e}_z$. Sous l'effet de la force de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, cette particule va suivre une trajectoire hélicoïdale comme cela est illustré dans les figures 1.1 et 1.2. Il est alors possible de relier sa position $\mathbf{x}_P$ à celle de son *centre-guide* $\mathbf{x}_{GC}$ par la relation

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_{GC} + \mathbf{r}_L\,, \tag{1.2}$$

où $\mathbf{r}_L$ est le *rayon de Larmor* défini à l'aide de la vitesse de la particule dans le plan transverse à $\mathbf{B}$ par

$$\mathbf{r}_L = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z}{\omega_c}\,. \tag{1.3}$$

Dans cette définition, ω_c est la *fréquence cyclotron*, définie par

$$\omega_c = \frac{q\,\overline{B}}{m}\,, \tag{1.4}$$

dont l'inverse correspond à la durée nécessaire à la particule pour effectuer un tour complet autour de son centre-guide si nous projetons sa trajectoire dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$, comme cela est illustré dans la figure 1.2.

Dans le cas d'un champ magnétique $\mathbf{B}$ fort devant les autres champs électromagnétiques, la fréquence cyclotron devient très grande, tandis que le rayon de Larmor $\mathbf{r}_L$ devient très petit, au point que $|\mathbf{r}_L|$ soit du même ordre que la longueur de Debye, longueur en-dessous de laquelle il est difficile de séparer les charges de manière significative. Deux types de modélisation sont alors envisageables :

– Le premier consiste à supposer que $|\mathbf{r}_L|$ est trop petit et qu'il est impossible de séparer les charges des particules situées sur le cercle de centre $\mathbf{x}_{GC}$ et de rayon $|\mathbf{r}_L|$ (voir figure 1.2). Par conséquent, la position des particules est confondue avec celle de leurs centres-guides qui portent de ce fait le champ électrique. Cette approche permet d'aboutir à une hiérarchie de modèles dits *de centre-guide*, dépendant de $\mathbf{x}_{GC}$, de la vitesse $\mathbf{v}_{||}$ dans la direction parallèle au champ magnétique, et du temps.
– Le second consiste à supposer que $|\mathbf{r}_L|$ est petit, mais qu'il est tout de même possible de séparer les charges sur le cercle de centre $\mathbf{x}_{GC}$ et de rayon $|\mathbf{r}_L|$: par conséquent, nous prenons en compte la possibilité d'avoir un *effet de rayon de Larmor fini*, c'est-à-dire la possibilité de voir un champ électrique non constant sur ce cercle. Cette approche est certes plus complexe car les modèles qui en découlent doivent tenir compte de $\mathbf{x}_{GC}$, de $\mathbf{v}_{||}$, de $\mathbf{r}_L$ et du temps, mais elle ne doit être négligée car dans beaucoup de situations expérimentales, $|\mathbf{r}_L|$ est plus grand que la longueur de Debye.

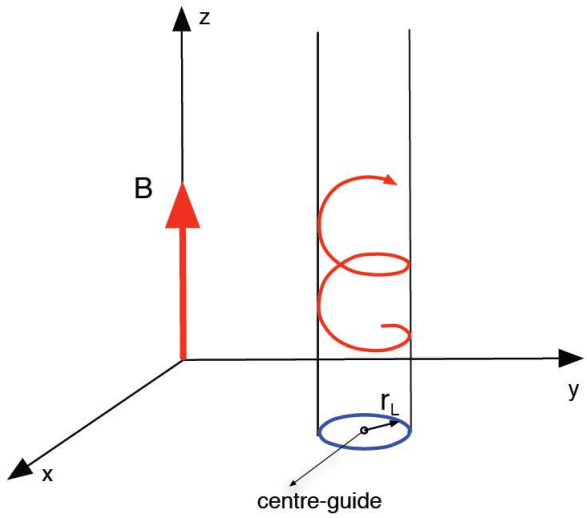


FIGURE 1.1 – Trajectoire d'une particule soumise à un champ magnétique unidirectionnel $\mathbf{B}$, et sa projection dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$.

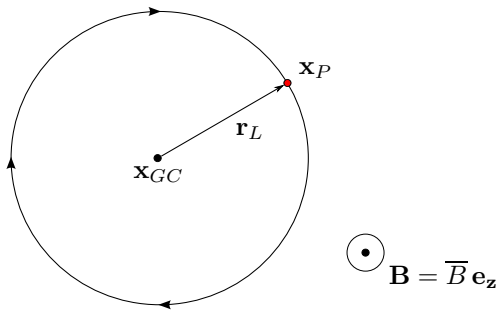


FIGURE 1.2 – Projection de la trajectoire d'une particule soumise au champ magnétique unidirectionnel $\mathbf{B}$ dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$.

La modélisation d'un plasma magnétisé avec prise en compte des effets de rayon de Larmor fini est donc un pan incontournable de la description gyrocinétique d'un plasma magnétisé, mais c'est aussi un problème complexe qui impliquent des phénomènes physiques qui se développent

sur plusieurs échelles d'espace et de temps. En effet, il faut tenir compte du mouvement rapide des particules autour de leurs centre-guides dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$ et des variations du champ électrique qui en découlent, mais aussi ne pas perdre de vue la simulation du plasma dans son ensemble. De la même façon, il faut tenir compte de la petitesse de la période de gyration ω_c^{-1} tout en gardant à l'esprit que l'objectif est de produire des simulations sur des temps longs.

2 Introduction à la convergence 2-échelles

Bien que le contexte physique et mathématique se soit enrichi en 30 ans, de nombreux résultats théoriques autour de ces phénomènes multi-échelles ne sont établis que formellement, même si des résultats expérimentaux sont venu les confirmer. Ainsi, depuis quelques années, des mathématiciens reprennent ces résultats formels et cherchent à en établir une démonstration mathématique rigoureuse en s'appuyant sur des théories d'analyse fonctionnelle et en partant d'un modèle de Vlasov-Poisson ou de Vlasov-Maxwell adimensionné judicieusement.

Parmi ces théories mathématiques utilisées, la convergence 2-échelles initiée par G. Nguetseng dans [53] et reprise par G. Allaire dans [3] permet d'établir des résultats de convergence pour une suite de fonctions $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et présentant des oscillations de période ϵ, vers une fonction $u_0 = u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ et périodique en $\mathbf{y}$. En admettant qu'il y ait un tel résultat de convergence, il conviendrait de trouver une expression analytique de u_0 ou un système d'équations dont u_0 serait solution. Généralement, u^ϵ est définie comme étant la solution d'un modèle de la forme

$$\begin{cases} L^\epsilon u^\epsilon = f\,, \quad \text{sur } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ + \text{ conditions aux bords appropriées}, \end{cases} \tag{1.5}$$

où L^ϵ est un opérateur différentiel dont certains coefficients présentent des oscillations de période ϵ, et où le terme source f est donné et est indépendant de ϵ.

Une approche formelle consiste à supposer qu'il existe des fonctions $u_i = u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définies sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ périodiques en $\mathbf{y}$ telles que, pour $\epsilon > 0$, nous puissions écrire

$$u^\epsilon(\mathbf{x}) = u_0\Big(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\Big) + \epsilon\, u_1\Big(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\Big) + \epsilon^2\, u_2\Big(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\Big) + \dots\,, \tag{1.6}$$

puis identifier les fonctions $u_i = u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en injectant le développement asymptotique (1.6) dans (1.5). Cependant, un tel raisonnement repose uniquement sur l'hypothèse que nous faisons sur l'existence des u_i et du développement asymptotique (1.6). La convergence 2-échelles, à défaut de démontrer l'existence de toutes les fonctions u_i ainsi que la possibilité d'écrire u^ϵ sous la forme (1.6), permet de démontrer l'existence des premiers termes de ce développement, sous certaines hypothèses sur la suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$.

Définition 1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in]1, +\infty]$, et $Y = [0,1]^n$. On dit que la suite de fonctions $(u^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^p(\Omega)$ converge à 2 échelles vers une fonction U dans l'espace $L^p\big(\Omega; L^p_\#(Y)\big)$ si, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}^\infty_\#(Y))$, on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega u^\epsilon(\mathbf{x})\, \psi\Big(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\Big)\, d\mathbf{x} = \int_Y \int_\Omega U(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}\,. \tag{1.7}$$

U est alors appelée limite 2-échelles de u^ϵ dans $L^p\big(\Omega; L^p_\#(Y)\big)$.

Il est possible d'étendre cette définition à des pavés Y de la forme

$$Y = [0, \theta_1] \times \cdots \times [0, \theta_n]\,, \tag{1.8}$$

par une homothétie.

Définition 2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in]1, +\infty]$, et Y un pavé dans $\mathbb{R}^n$ de la forme (1.8). Considérons une suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^p(\Omega)$ qui converge à 2-échelles vers une fonction U dans $L^p\big(\Omega; L^p_\#(Y)\big)$. On dit que u^ϵ converge à 2-échelles <u>fortement</u> si*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \Big\| u^\epsilon - U\big(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}\big) \Big\|_{L^p(\Omega)} = 0\,. \tag{1.9}$$

D'après ces définitions, il est possible de proposer quelques exemples simples de convergence 2-échelles :

1. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty\big(\Omega; \mathcal{C}^\infty_\#(Y)\big)$. En posant $u^\epsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon})$, u^ϵ converge à 2-échelles fortement vers u dans $\mathcal{C}^\infty\big(\Omega; \mathcal{C}^\infty_\#(Y)\big)$.
2. Soit $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge fortement vers $u \in L^p(\Omega)$. Alors, pour tout pavé Y de la forme (1.8), u^ϵ converge à 2-échelles fortement vers u dans $L^p\big(\Omega; L^p_\#(Y)\big)$.
3. Soit $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite $L^p(\Omega)$ admettant un développement asymptotique de la forme (1.6), où toutes les fonctions u_i sont dans $\mathcal{C}^\infty\big(\Omega; \mathcal{C}^\infty_\#(Y)\big)$. Alors u^ϵ converge à 2-échelles fortement vers u_0 dans $L^p\big(\Omega; L^p_\#(Y)\big)$.

Au delà des ces exemples, G. Nguetseng a établi un critère de convergence 2-échelles que G. Allaire a repris en 1992 dans [3] :

Théorème 3 (Nguetseng [53], Allaire [3])**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Y un pavé dans $\mathbb{R}^n$ de la forme (1.8), et $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite bornée indépendamment de ϵ dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une fonction $U \in L^p\big(\Omega; L^p_\#(Y)\big)$ et il existe une sous-suite $(u^{\chi(\epsilon)})_{\epsilon>0}$ de $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui converge à 2 échelles vers U. De plus, $u^{\chi(\epsilon)}$ converge faiblement-* dans $L^p(\Omega)$ vers la fonction u définie par*

$$\mathbf{x} \longmapsto u(\mathbf{x}) = \int_Y U(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,. \tag{1.10}$$

Ce critère de convergence 2-échelles est très utile pour établir un système d'équations différentielles vérifié par la limite 2-échelles où la limite faible-* de la suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$. En effet, G. Allaire l'a utilisé à de nombreuses reprises dans [3] afin d'étudier le comportement à la limite de problèmes classiques d'homogénéisation. Ce critère de convergence 2-échelles a été par la suite utilisé dans de nombreux cadres de recherches faisant intervenir des résultats d'homogénéisation. Nous pouvons citer par exemple les travaux d'E. Frénod, E. Sonnendrücker et de leurs collègues, dans lesquels le théorème 3 fut largement utilisé afin d'établir de façon rigoureuse de nouveaux modèles mathématiques impliquant de manière explicite 2 échelles de temps. Cela a permis d'apporter de nouvelles contributions dans des domaines de recherche variés comme la simulation d'un objet à la dérive en mer (voir [2]) où de fluides faiblement compressibles (voir [26]), en passant par l'étude du comportement asymptotique d'une distribution de particules soumises à un champ magnétique fort (voir [27, 28, 29, 30, 31]). C'est dans ce dernier cadre de travail qu'E. Frénod et E. Sonnendrücker ont établi dans [31] le résultat suivant :

Théorème 4 (Frénod & Sonnendrücker [31])**.** *Considèrons le modèle conservatif suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + \mathbf{A}^\epsilon \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\, \mathbf{L} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u^\epsilon = 0\,, \\ u^\epsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})\,, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T)$, $u^\epsilon = u^\epsilon(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{A}^\epsilon = \mathbf{A}^\epsilon(\mathbf{x}, t)$, et $\mathbf{L} = M\mathbf{x} + N$, où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in Im(M)$.
Soient $\theta > 0$, $q > 1$, q' tel que $\frac{1}{q'} = \max(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}, 0)$, et $p > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} < 1$. Nous supposons que

(i) la suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0, T; L^p(\mathbb{R}^n)\big)$,
(ii) $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}^\epsilon = 0$ pour tout ϵ,
(iii) $\mathbf{A}^\epsilon$ converge à 2 échelles vers une fonction $\mathcal{A}$ dans $\Big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, \theta]; W^{1,q}(K)\big)\big)\Big)^n$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$,
(iv) M est à coefficients constants, de trace nulle, et telle que la fonction $\tau \mapsto e^{\tau M}$ soit θ-périodique.

Alors il existe une fonction $U \in L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, \theta]; L^p(\mathbb{R}^n)\big)\big)$ et il existe une sous-suite $(u^{\chi(\epsilon)})_{\epsilon>0}$ de $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui converge à 2 échelles vers U. De plus, il existe $\overline{N} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$-M\overline{N} = N\,, \tag{1.12}$$

et une fonction $U_0 \in L^\infty\big(0,T;L^p(\mathbb{R}^n)\big)$ *tels que*

$$\forall\,(\mathbf{x},\tau,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times[0,T)\,,\qquad U(\mathbf{x},\tau,t)=U_0\big(e^{-\tau M}(\mathbf{x}-\overline{N})+\overline{N},t\big)\,, \tag{1.13}$$

et

$$\begin{cases}\partial_t U_0(\mathbf{y},t)+\displaystyle\int_0^\theta e^{-\sigma M}\mathcal{A}\big(e^{\sigma M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},\sigma,t\big)\,d\sigma\cdot\nabla_{\mathbf{y}}U_0(\mathbf{y},t)=0\,,\\ U_0(\mathbf{y},0)=\dfrac{1}{\theta}u_0(\mathbf{y})\,.\end{cases} \tag{1.14}$$

De plus, $u^{\chi(\epsilon)}$ *converge faiblement-* vers la fonction* $u\in L^\infty\big(0,T;L^p(\mathbb{R}^n)\big)$ *définie par*

$$\mathbf{x}\mapsto u(\mathbf{x},t)=\int_0^\theta U(\mathbf{x},\tau,t)\,d\tau\,. \tag{1.15}$$

Démonstration. Nous rappelons les grandes lignes de la démonstration de ce théorème :

Grâce au critère de convergence 2-échelles de Nguetseng, il est clair que $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une sous-suite $(u^{\chi(\epsilon)})_{\epsilon>0}$ qui converge à 2 échelles dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,\theta];L^p(\mathbb{R}^n)\big)\big)$ vers une fonction $U=U(\mathbf{x},\tau,t)$. En considérant une fonction $\psi=\psi(\mathbf{x},\tau,t)$ dans l'espace $\mathcal{D}\big([0,T)\times\mathbb{R}^n;\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,\theta]\big)\big)$, nous multiplions l'équation

$$\partial_t u^{\chi(\epsilon)}+\mathbf{A}^{\chi(\epsilon)}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}u^{\chi(\epsilon)}+\frac{1}{\chi(\epsilon)}\,\mathbf{L}\cdot\nabla_{\chi(\epsilon)}u^{\chi(\epsilon)}=0 \tag{1.16}$$

par $\psi(\mathbf{x},\frac{t}{\chi(\epsilon)},t)$ et nous intégrons le tout sur $\mathbb{R}^n\times[0,T)$. En passant à la limite $\epsilon\to0$, nous obtenons la formulation faible de

$$\partial_\tau U+\mathbf{L}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}U=0\,. \tag{1.17}$$

Les caractéristiques associées à ce système sont les fonctions $\tau\mapsto\mathbf{X}(\tau;\mathbf{x},s)$ solutions de

$$\begin{cases}\partial_\tau\mathbf{X}(\tau)=M\,\mathbf{X}(\tau)+N\,,\\ \mathbf{X}(s)=\mathbf{x}\,.\end{cases} \tag{1.18}$$

La solution de ce système différentiel est

$$\mathbf{X}(\tau;\mathbf{x},s)=e^{(\tau-s)M}(\mathbf{x}-\overline{N})+\overline{N}\,, \tag{1.19}$$

où $\overline{N}$ vérifie $-M\overline{N}=N$. Alors il existe une fonction $U_0\in L^\infty\big(0,T;L^p(\mathbb{R}^n)\big)$ telle que

$$U(\mathbf{x},\tau,t)=U_0\big(e^{-\tau M}(\mathbf{x}-\overline{N})+\overline{N},t\big)\,. \tag{1.20}$$

En définissant alors $w^\epsilon\in L^\infty\big(0,T;L^p(\mathbb{R}^n)\big)$ par

$$w^\epsilon(\mathbf{y},t)=u^\epsilon\big(e^{\frac{t}{\epsilon}M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},t\big)\,, \tag{1.21}$$

il est facile de constater que w^ϵ est solution de

$$\begin{cases}\partial_t w^\epsilon(\mathbf{y},t)+\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\Big[e^{-\frac{t}{\epsilon}M}\mathbf{A}^\epsilon\big(e^{\frac{t}{\epsilon}M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},t\big)\,w^\epsilon(\mathbf{y},t)\Big]=0\,,\\ w^\epsilon(\mathbf{y},0)=u_0(\mathbf{y})\,.\end{cases} \tag{1.22}$$

Il est alors évident que $w^{\chi(\epsilon)}$ converge à 2 échelles vers U_0 dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,\theta];L^p(\mathbb{R}^n)\big)\big)$, et que $w^{\chi(\epsilon)}$ converge faiblement-* vers $\theta\,U_0$ dans $L^\infty\big(0,T;L^p(\mathbb{R}^n)\big)$. Nous en déduisons alors que ce résultat de convergence faible-* reste valable dans $L^\infty\big(0,T;L^p(K)\big)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$. Grâce au lemme d'Aubin-Lions (voir [46]), nous pouvons démontrer que cette convergence faible-* dans $L^\infty\big(0,T;L^p(K)\big)$ est forte dans $L^\infty\big(0,T;\big(W^{1,q}_0(K)\big)^*\big)$.

Finalement, en multipliant l'équation

$$\partial_t w^{\chi(\epsilon)}(\mathbf{y},t)+\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\Big[e^{-\frac{t}{\chi(\epsilon)}M}\mathbf{A}^{\chi(\epsilon)}\big(e^{\frac{t}{\chi(\epsilon)}M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},t\big)\,w^{\chi(\epsilon)}(\mathbf{y},t)\Big]=0 \tag{1.23}$$

par une fonction $\psi = \psi(\mathbf{y},t) \in \mathcal{D}\big([0,T)\times\mathbb{R}^n\big)$ de support K dans $\mathbb{R}^n$, et en intégrant le tout sur $\mathbb{R}^n \times [0,T)$, nous obtenons

$$\int_0^T \int_K w^{\chi(\epsilon)}(\mathbf{y},t)\left[\partial_t\psi(\mathbf{y},t) + \nabla_{\mathbf{y}}\cdot\Big(e^{-\frac{t}{\chi(\epsilon)}M}\mathbf{A}^{\chi(\epsilon)}\big(e^{\frac{t}{\chi(\epsilon)}M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},t\big)\,\psi(\mathbf{y},t)\Big)\right]d\mathbf{y}\,dt = \int_K u_0(\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{y},0)\,d\mathbf{y}\,. \tag{1.24}$$

Rappelons que $\mathbf{A}^\epsilon$ converge à 2 échelles vers $\mathcal{A}$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,\theta];W^{1,q}(K)\big)\big)\big)^n$. Il en est alors de même pour $\mathbf{A}^{\chi(\epsilon)}$. Alors la suite de fonctions définie par

$$(\mathbf{y},t) \longmapsto e^{-\frac{t}{\chi(\epsilon)}M}\mathbf{A}^{\chi(\epsilon)}\big(e^{\frac{t}{\chi(\epsilon)}M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},t\big) \tag{1.25}$$

converge faiblement-* vers

$$(\mathbf{y},t) \longmapsto \int_0^\theta e^{-\tau M}\mathcal{A}\big(e^{\tau M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},\tau,t\big)\,d\tau \tag{1.26}$$

dans $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,q}(K)\big)\big)^n$. En combinant ce résultat avec la convergence forte de $w^{\chi(\epsilon)}$ vers $\theta\,U_0$ dans $L^\infty\big(0,T;\big(W_0^{1,q}(K)\big)^*\big)$, le passage à la limite dans (1.24) donne

$$\int_0^T\int_K \theta\,U_0(\mathbf{y},t)\left[\partial_t\psi(\mathbf{y},t) + \Big(\int_0^\theta e^{-\tau M}\mathcal{A}\big(e^{\tau M}(\mathbf{y}-\overline{N})+\overline{N},\tau,t\big)\,d\tau\Big)\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\psi(\mathbf{y},t)\right]d\mathbf{y}\,dt = \int_K u_0(\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{y},0)\,d\mathbf{y}\,. \tag{1.27}$$

Nous reconnaissons alors la formulation faible de l'équation (1.14), ce qui permet de conclure. □

Il suffit alors de s'assurer que les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv) sont bien vérifiées par $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$, $(\mathbf{A}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et M afin d'établir directement le système d'équations vérifié par la limite 2-échelles de u^ϵ. En effet, grâce à ce théorème, E. Frénod *et al.* ont pu établir des modèles limites 2-échelles en quelques lignes de calculs dans le cadre d'une approximation de type centre-guide (voir [28] et[31]), et il est possible d'en faire de même pour les modèles évoqués dans [29].

Par ailleurs, grâce au lien entre les fonctions U et u établi en (1.15), il est parfois possible de construire une équation de transport dont u est la solution, dans laquelle U n'apparaît plus. En effet, en utilisant le changement de variables (1.13), nous pouvons établir dans un premier temps une équation de transport pour U dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,\theta];L^p(\mathbb{R}^n)\big)\big)$ de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t U(\mathbf{x},\tau,t) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^\theta e^{-(\sigma+\tau)M}\mathcal{A}\big(e^{(\sigma+\tau)M}(\mathbf{x}-\overline{N}) + e^{\sigma M}\overline{N}+\overline{N},\sigma,t\big)\,d\sigma\cdot\nabla_{\mathbf{x}}U(\mathbf{x},\tau,t) = 0\,, \\ U(\mathbf{x},\tau,t) = \dfrac{1}{\theta}\,u_0(e^{-\tau M}\mathbf{x})\,. \end{cases} \tag{1.28}$$

Puis, en intégrant en τ sur $[0,\theta]$, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x},t) + \displaystyle\int_0^\theta\int_0^\theta \Big[e^{-(\sigma+\tau)M}\mathcal{A}\big(e^{(\sigma+\tau)M}(\mathbf{x}-\overline{N}) + e^{\sigma M}\overline{N}+\overline{N},\sigma,t\big)\Big] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\nabla_{\mathbf{x}}U(\mathbf{x},\tau,t)\,d\sigma\,d\tau = 0\,, \\ u(\mathbf{x},t) = \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^\theta u_0(e^{-\tau M}\mathbf{x})\,d\tau\,. \end{cases} \tag{1.29}$$

Dans certains cas, il est possible de simplifier l'intégrale double sur $[0,\theta]^2$, et d'aboutir à une équation de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x},t) + \mathbf{A}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t) = 0\,, \\ u(\mathbf{x},t) = \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^\theta u_0(e^{-\tau M}\mathbf{x})\,d\tau\,, \end{cases} \tag{1.30}$$

mais cela dépend généralement des propriétés de $\mathcal{A}$, de la matrice M et du vecteur N. Par exemple, dans les cas proposés par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [29], nous supposons que $N = 0$ et que la suite $(\mathbf{A}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge fortement dans $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,2}(K)\big)\big)^6$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^6$. Alors la limite 2-échelles $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x},\tau,t)$ de $\mathbf{A}^\epsilon$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,\theta];W^{1,2}(K)\big)\big)\big)^6$ ne dépend pas de la variable τ. Par conséquent, nous pouvons prendre $\overline{N} = 0$ et le système (1.29) peut se simplifier sous une forme où U n'apparaît plus :

$$\begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x},t) + \Big[\displaystyle\int_0^\theta e^{-\sigma M}\mathcal{A}(e^{\sigma M}\mathbf{x},t)\,d\sigma\Big]\cdot\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x},t) = 0\,, \\ u(\mathbf{x},t) = \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^\theta u_0(e^{-\tau M}\mathbf{x})\,d\tau\,. \end{cases} \tag{1.31}$$

3 Méthodes numériques 2-échelles

Dans toute cette thèse, nous travaillerons avec des équations de transport de la forme (1.11). Grâce au théorème 4, il est possible d'établir des résultats de convergence 2-échelles et de convergence faible-* sous certaines hypothèses sur la condition initiale u_0 et sur la suite $(\mathbf{A}^\epsilon)_{\epsilon>0}$. Dans certains cas, la convergence 2-échelles a permis de proposer une démonstration rigoureuse d'un passage à la limite jusqu'alors formel, comme par exemple le cas de l'approximation centre-guide dans [29].

Il est alors possible d'utiliser ce type de résultat d'analyse fonctionnelle à des fins numériques de 2 façons différentes :

1. Pour un ϵ fixé, l'objectif est de construire une méthode numérique permettant de simuler les oscillations de fréquence d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$ de la solution u^ϵ du modèle (1.11). Il y a une difficulté numérique car le terme $\frac{1}{\epsilon}\mathbf{L}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}u^\epsilon$ présent dans l'équation de transport (1.11.a) va imposer au pas de temps de la méthode numérique d'être d'ordre ϵ afin de simuler correctement le transport d'ordre ϵ^{-1}. De ce fait, à moins de considérer une méthode numérique spécifiquement développée pour répondre à ce genre de problématique, le temps de calcul nécessaire sera d'autant plus grand que ϵ sera proche de 0.
   Une solution alternative consiste à utiliser une méthode numérique basée sur la discrétisation non pas du modèle (1.11), mais du modèle limite 2-échelles (1.13)-(1.14). En effet, étant donné que nous avons vu que la suite $(w^\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie en (1.21) converge fortement vers θU_0 dans un certain espace de Banach, nous pouvons envisager d'approcher u^ϵ par une fonction U_h^ϵ définie par
   $$(\mathbf{x},t) \longmapsto U_h^\epsilon(\mathbf{x},t) = \theta\, U_{0,h}\big(e^{-\frac{t}{\epsilon}M}\mathbf{x},t\big)\,, \tag{1.32}$$
   où $U_{0,h}$ est une approximation que de la fonction U_0 obtenue en discrétisant le système (1.14) à l'aide d'un schéma numérique classique. De cette façon, il serait possible de reconstruire les oscillations de période d'ordre ϵ de la fonction u^ϵ tout en s'affranchissant des contraintes liées au transport d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$.

2. A l'inverse, nous supposons que nous disposons d'un modèle de la forme (1.30) établi formellement, et que nous avons démontré à l'aide d'un résultat de convergence 2-échelles que la solution u de ce modèle formel est la limite faible-* d'une suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ telle que, pour tout ϵ, u^ϵ est solution du modèle (1.11). Afin de valider numériquement ce résultat de convergence faible-* et ainsi la pertinence du modèle (1.30), nous pouvons envisager d'approcher la fonction u par une fonction u_h^ϵ approchant elle-même la solution u^ϵ de (1.11), cela pour des valeurs de ϵ de plus en plus proches de 0. Cependant, comme u^ϵ présente des oscillations de période d'ordre ϵ et pas u, il convient de simuler correctement cette homogénéisation des oscillations lorsque ϵ tend vers 0.

Ces 2 façons d'utiliser les résultats du théorème 4 permettent d'aboutir à 2 types de méthodes numériques différents. Cependant, ces méthodes dites *2-échelles* présentent un même point com-

mun : elles doivent permettre de simuler numériquement l'homogénéisation des oscillations de u^ϵ lorsque ϵ se rapproche de 0.

4 Plan

Comme cela fut sous-entendu dans les paragraphes précédents, nous allons nous intéresser tout au long de cette thèse à la construction d'une méthode 2-échelles afin de simuler un modèle de rayon de Larmor fini, et plus particulièrement le modèle 2D établi par M. Bostan dans [6]. Au delà de l'utilisation de la convergence 2-échelles, il est nécessaire de choisir judicieusement la méthode numérique qui sera couplée à ces résultats d'analyse fonctionnelle. Notre choix va se porter sur l'utilisation d'une méthode semi-lagrangienne : en effet, de nombreux articles indiquent que cette famille de méthodes numériques fournit des résultats de très bonne qualité sur des modèles de type Vlasov, cela malgré un coût en temps de calcul assez important. Par exemple, les travaux de E. Sonnendrücker *et al.* [62], de F. Filbet *et al.* [22], de N. Besse, M. Campos-Pinto et M. Mehrenberger [4, 9], et de N. Crouseilles *et al.* [14, 15, 16], et plus généralement des membres du projet INRIA [1]-CALVI [2], indiquent que des systèmes de type Vlasov-Poisson peuvent être simulés avec une grande précision grâce à des méthodes semi-lagrangiennes. De plus, le développement du code GYSELA au CEA [3] de Cadarache, basé sur une méthode semi-lagrangienne discrétisant un modèle gyrocinétique, a permis d'obtenir dans [35] de bons résultats sur le modèle centre-guide complet tel qu'il est décrit dans [43] ou [29].

Cependant, avant de construire une telle méthode numérique 2-échelles sur un modèle aussi complexe que celui du rayon de Larmor fini 2D, il convient de répondre à quelques questions concernant le comportement d'une telle méthode numérique.

- De manière générale, une méthode numérique 2-échelles est-elle envisageable lorsque le modèle (1.11), le modèle limite 2-échelles (1.13)-(1.14) ou le modèle limite faible-* (1.30) n'est pas linéaire ?

- Une telle méthode permet-elle de simuler correctement les oscillations de u^ϵ d'ordre ϵ lorsque nous considèrons une donnée initiale u_0 peu régulière ou présentant des discontinuités ?

Afin de répondre à ces questions, nous allons nous placer dans des cadres physiques et mathématiques plus simples que celui d'un plasma soumis à un champ magnétique fort, et procéder par étapes :

Dans une première partie, nous nous placerons dans le cadre des équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles :

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + u^\epsilon\, \partial_x u^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon^2\, \tilde{\rho}^\epsilon}\, \partial_x\big(p(\tilde{\rho}^\epsilon)\big) = 0\,, \\ \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon + \partial_x\big(\tilde{\rho}^\epsilon u^\epsilon\big) = 0\,, \\ u^\epsilon(x,0) = u_0(x)\,, \\ \tilde{\rho}^\epsilon(x,0) = 1 + \epsilon\, \rho_0(x)\,. \end{cases} \tag{1.33}$$

Dans ce modèle, ϵ désigne le nombre de Mach supposé proche de 0, $u^\epsilon = u^\epsilon(x,t)$ est la vitesse du fluide, $\tilde{\rho}^\epsilon = \tilde{\rho}^\epsilon(x,t)$ est la masse volumique du fluide, et la loi de pression est donnée par $p(\rho) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$.

Bien que ce modèle soit assez différent d'un modèle de type Vlasov, il n'en est pas moins un cadre de travail relativement simple pour étudier le comportement d'une méthode numérique 2-échelles face à un modèle non-linéaire. Par ailleurs, ce modèle non-linéaire 1D a fait l'objet de nombreux travaux, notamment ceux d'E. Grenier [36], S. Klainerman et A. Majda [40, 41, 48], G. Métivier et S. Schochet [50, 57, 58, 59, 60], qui ont donné suite à des résultats importants sur le

1. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. Site web : http ://www.inria.fr
2. Projet de Calcul Scientifique et Visualisation. Site web : http ://www-math.u-strasbg.fr/calvi
3. Commissariat à l'Energie Atomique.

comportement asymptotique de la suite $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ lorsque $\epsilon \to 0$.

Après avoir rappelé le contexte physique et mathématique, nous verrons en quoi certains de ces résultats sont utiles pour dériver un modèle limite lorsque ϵ tend vers 0. Nous établirons alors un résultat de convergence 2-échelles sur ce modèle, et nous discuterons des particularités de cette convergence. Enfin, nous présenterons une méthode numérique 2-échelles permettant de reconstruire une approximation de la solution $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)$ du système (1.33), et nous testerons cette méthode en comparant les résultats numériques qu'elle fournit à ceux que nous pouvons obtenir d'une méthode de volumes finis classique appliquée au modèle (1.33).

Dans une deuxième partie, nous nous placerons dans le cadre de la simulation d'un faisceau de particules chargées soumis à un champ électrique de focalisation. En supposant que ce faisceau soit long et fin, il est possible de modéliser ce phénomène physique par le système de Vlasov-Poisson 1D axisymétrique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \dfrac{v_r}{\epsilon}\,\partial_r f^\epsilon + (E_r^\epsilon + \Xi_r^\epsilon)\,\partial_{v_r} f^\epsilon = 0\,, \\ \dfrac{1}{r}\,\partial_r\big(r\,E_r^\epsilon\big) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^\epsilon\,dv_r\,, \\ \Xi_r^\epsilon(r,t) = -\dfrac{H_0}{\epsilon}\,r + H_1\Big(\omega_1\,\dfrac{t}{\epsilon}\Big)\,r\,, \\ f^\epsilon(r, v_r, t=0) = f_0(r, v_r)\,. \end{cases} \tag{1.34}$$

Dans ce modèle, $f^\epsilon = f^\epsilon(r, v_r, t)$ est la fonction de distribution des particules, $E_r^\epsilon = E_r^\epsilon(r,t)$ est le champ électrique radial auto-consistant, $\Xi_r^\epsilon = \Xi_r^\epsilon(r,t)$ est le champ électrique radial externe, et ϵ est défini par

$$\epsilon = \frac{\lambda}{L}\,, \tag{1.35}$$

où λ est le rayon caractéristique du faisceau dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, et L est la longueur caractéristique du faisceau dans la direction de propagation.

Ce cadre de travail est intéressant pour poursuivre l'étude du comportement des méthodes 2-échelles : en effet, l'objectif final de la thèse étant la construction d'une méthode semi-lagrangienne 2-échelles pour le modèle de rayon de Larmor fini 2D, il convient de s'assurer au préalable que le couplage entre un résultat de convergence 2-échelles et une méthode semi-lagrangienne est faisable, et le modèle (1.34) est un cadre de travail idéal pour répondre à cette question. De plus, l'article d'E. Frénod, F. Salvarani et E. Sonnendrücker [28] entièrement dédié à la construction d'une méthode Particle-In-Cell 2-échelles pour le modèle (1.34) offre un contexte mathématique et numérique assez riche pour développer une méthode semi-lagrangienne 2-échelles ce modèle et la valider sur des cas linéaires comme non-linéaires. Enfin, la simulation de faisceaux de particules implique parfois de considérer une distribution initiale f_0 présentant des discontinuités : par conséquent, la construction d'une méthode semi-lagrangienne 2-échelles pour le modèle (1.34) permettrait d'apporter des informations sur le comportement d'une telle méthode initialisée sur une fonction non-régulière.

Dans un premier temps, nous rappellerons le contexte mathématique et physique permettant de réduire le système de Vlasov-Maxwell 3D à son approximation paraxiale 2D, puis au modèle (1.34) en utilisant un adimensionnement judicieux, en accord avec des hypothèses que nous faisons sur le faisceau. Nous rappellerons alors les résultats de convergence 2-échelles établis par E. Frénod *et al.* dans [28] ainsi que quelques éléments de démonstration, puis nous présenterons la méthode semi-lagrangienne 2-échelles ainsi qu'une variante de cette méthode, utilisant une famille de maillages mobiles. Enfin, nous proposerons quelques résultats numériques permettant de valider les 2 méthodes semi-lagrangiennes nouvellement construites.

Dans une troisième partie, nous développerons une méthode semi-lagrangienne 2-échelles permettant de valider le modèle de rayon de Larmor fini 2D

$$\begin{cases} \partial_t g + \langle \mathcal{E}_y \rangle \, \partial_x g - \langle \mathcal{E}_x \rangle \, \partial_y g = 0 \\ g(x,y,k,0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(x,y,k,\alpha)\, d\alpha \,, \\ \langle \mathcal{E} \rangle (x,y,k,t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\, d\alpha \,, \\ -\nabla_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{x},\tilde{y},t) \,, \\ -\Delta_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} g\big(\tilde{x} + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{y} - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, t\big)\, dk\, d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{x},\tilde{y}) \,. \end{cases} \tag{1.36}$$

comme étant la limite faible-* d'une famille de modèles de type Vlasov-Poisson 2D de la forme

$$\begin{cases} f^\epsilon(x,y,k,\alpha,t) = \tilde{f}^\epsilon\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big) \,, \\ \partial_t \tilde{f}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\, \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{f}^\epsilon + \Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} \tilde{v_y} \\ -\tilde{v_x} \end{pmatrix} \Big) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{f}^\epsilon = 0 \,, \\ \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t = 0) = \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) \,, \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon = -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon \,, \quad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon \, d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e \,. \end{cases} \tag{1.37}$$

Ce résultat d'analyse fonctionnelle fut établi par M. Bostan dans [6]. Cependant, en utilisant des hypothèses plus faibles, E. Frénod et E. Sonnendrücker ont également établi dans [31] des résultats de convergence 2-échelles sur la solution du modèle (1.37.b)-(1.37.c)-(1.37.d) et ainsi démontré que la suite $(\tilde{f}^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}})_{\epsilon > 0}$ admet une limite faible-*.

Dans un premier temps, nous proposerons un bref rappel sur l'obtention du modèle (1.37) à partir du modèle de Vlasov-Poisson 2D. Puis nous rappellerons le résultat de convergence 2-échelles établi par E. Frénod et E. Sonnendrücker sur la suite $(\tilde{f}^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}})_{\epsilon > 0}$, ainsi que le résultat de convergence faible-* de M. Bostan sur la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon > 0}$. Nous discuterons alors des difficultés mathématiques et numériques liées au modèle limite 2-échelles tel qu'il est formulé dans [31], ce qui constituera une motivation pour réécrire le modèle (1.37.b)-(1.37.c)-(1.37.d) dans un nouveau système de coordonnées. Nous étudierons alors le comportement asymptotique de la solution de ce nouveau modèle, ce qui permettra d'établir un nouveau modèle limite 2-échelles, et enfin expliciter le lien entre les modèles (1.37) et (1.36).

Avant de présenter la méthode numérique 2-échelles permettant de valider le modèle (1.36), nous ferons quelques rappels sur le principe d'une méthode semi-lagrangienne en avant, et nous proposerons une application de cette méthode au modèle de Vlasov-Poisson 2D suivant

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \,, \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \,, \\ \mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi \,, \quad -\Delta_{\mathbf{x}} \phi = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathbf{v} - n_e \,, \end{cases} \tag{1.38}$$

afin de s'assurer de la fiabilité d'une telle discrétisation. Après ce test préliminaire, nous présenterons la méthode numérique 2-échelles basé sur la discrétisation semi-lagrangienne en avant des modèles (1.36) et (1.37), l'objectif étant de vérifier numériquement que les oscillations de la solution $(\tilde{f}^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ de (1.37.b)-(1.37.c)-(1.37.d) sont homogénéisées lorsque ϵ tend vers 0. Enfin, nous proposerons quelques résultats numériques afin de valider la méthode 2-échelles.

Chapitre 2

Homogénéisation 2-échelles des équations d'Euler faiblement compressibles 1D

L'objectif de cette thèse est donc de proposer une méthode numérique 2-échelles permettant de résoudre le modèle de rayon de Larmor fini. A l'heure actuelle, nous ne savons que peu de choses sur de telles méthodes, notamment lorsqu'elles sont utilisées sur des équations différentielles non-linéaires, ou bien lorsqu'il s'agit de traiter des phénomènes physiques modélisés par des équations mettant en jeu des coefficients ou des forçages non-réguliers. Il convient donc de procéder par étapes avant d'envisager une méthode numérique 2-échelles sur un modèle aussi complexe que celui du rayon de Larmor fini.

La première étape consiste donc à nous interroger sur le comportement d'une méthode numérique 2-échelles face à un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. Il est alors préférable de se placer dans un cadre de travail moins complexe que celui du rayon de Larmor fini qui est, rappelons-le, un modèle 4D+temps (voir les travaux de M. Bostan [6] à ce sujet). Notre choix se porte donc sur les équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles :

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + u^\epsilon\, \partial_x u^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon^2\, \tilde{\rho}^\epsilon}\, \partial_x\big(p(\tilde{\rho}^\epsilon)\big) = 0\,, \\ \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon + \partial_x\big(\tilde{\rho}^\epsilon u^\epsilon\big) = 0\,, \\ u^\epsilon(x,0) = u_0^\epsilon(x)\,, \\ \tilde{\rho}^\epsilon(x,0) = \tilde{\rho}_0^\epsilon(x)\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ϵ est le nombre de Mach, x est la position, t est le temps, $u^\epsilon = u^\epsilon(x,t)$ est la vitesse du fluide, et $\tilde{\rho}^\epsilon = \tilde{\rho}^\epsilon(x,t)$ est la masse volumique, et $p(\tilde{\rho}^\epsilon)$ est la pression.

Avant de construire une méthode numériques 2-échelles, il est impératif de mener une étude rigoureuse du comportement asymptotique de la solution $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)$ de (2.1) lorsque ϵ tend vers 0 et, si possible, construire un système d'équations dont la limite de la suite $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est la solution, en développant une approche similaire à celle des travaux d'E. Frénod, E. Sonnendrücker et leurs co-auteurs dans [27, 28, 29, 30, 31].

Le choix du modèle des équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles est justifié par le fait que le contexte scientifique autour de ce modèle est très riche en résultats : en effet, nous pouvons citer parmi d'autres les travaux d'E. Grenier [36], R. Fortenbach *et al.* [24], S. Klainerman et A. Majda [40, 41, 48], ainsi que ceux de G. Métivier et S. Schochet [50, 59, 60].

Par ailleurs, le developpement d'une méthode numérique 2-échelles sur un tel modèle est motivé par une autre raison : les méthodes de volumes finis telles qu'elles sont développées jusqu'à présent sont robustes pour les équations d'Euler compressibles ou incompressibles (voir les publications de S. Godunov [32], R. LeVeque [45] et P.-L. Roe [56]). Cependant, lorsque l'une de ces méthodes

est utilisée pour simuler une expérience induisant un faible nombre de Mach ϵ comme celles qui peuvent être modélisées par le systèmes d'équations (2.1), il est nécessaire de respecter la condition CFL afin de garantir la stabilité de la méthode. Le problème est que cette condition dépend de ϵ et impose donc un pas de temps très petit afin de capter les phénomènes d'oscillations à haute fréquence qui se développent. De ce fait, ces méthodes numériques, bien que robustes, deviennent extrêmement coûteuses en temps de calcul dans ce contexte. Il y a donc un intérêt supplémentaire à développer une méthode numérique 2-échelles sur ce modèle : la discrétisation du modèle limite, qui ne dépend pas de ϵ, n'implique pas l'obligation de choisir un pas de temps d'ordre ϵ.

Enfin, de nombreuses publications indiquent que la solution $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ du modèle (2.1) converge faiblement-* sous certaines hypothèses vers la solution des équations d'Euler 1D incompressibles, c'est-à-dire vers une solution constante $(\bar{u}, \bar{\tilde{\rho}})$ (voir S. Klainerman et A. Majda [40]). Plus précisément, en notant

$$\tilde{\rho}^\epsilon = \bar{\tilde{\rho}} + \epsilon\, \rho^\epsilon\,, \tag{2.2}$$

et en admettant que $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ soit bornée indépendamment de ϵ dans un certain espace de Banach X, nous pouvons montrer que $\tilde{\rho}^\epsilon$ converge faiblement-* vers $\bar{\tilde{\rho}}$ dans cet espace, ce qui induit également que u^ϵ converge faiblement-* vers une fonction constante $\bar{u}$ dans X. Or, lorsque nous simulons le modèle (2.1) à l'aide d'une méthode de volumes finis, en considérant des états initiaux u_0^ϵ et $\tilde{\rho}_0^\epsilon$ non constants ainsi que des valeurs de ϵ de plus en plus proches de 0, l'approximation de $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)$ obtenue ne se rapproche pas d'un état constant. Ce problème, récurrent dans la simulation 1D de fluides faiblement compressibles, appelle donc à la construction d'une méthode à la fois rapide, efficace, et permettant de calculer une approximation du couple $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$. Une fois ce couple calculé, un couplage similaire à (2.2) permettra de reconstruire une approximation de la solution $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)$ des équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles qui converge vers la solution constante $(\bar{u}, \bar{\tilde{\rho}})$ des équations d'Euler 1D isentropiques incompressibles lorsque ϵ tend vers 0.

Dans un premier temps, nous ferons quelques rappels sur les équations d'Euler 1D compressibles et nous verrons comment aboutir au modèle (2.1) à l'aide d'un adimensionnement judicieux faisant intervenir le nombre de Mach.

Puis nous utiliserons l'équation (2.2) afin de construire un nouveau modèle dont la solution sera $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$, et nous rappellerons un théorème important qui a été démontré par S. Schochet dans [58] et repris par E. Grenier dans [36]. Ce théorème nous servira de point de départ pour passer à la limite en $\epsilon \to 0$: nous établirons alors un nouveau système d'équations dont la solution est la limite 2-échelles de la suite $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$, ainsi qu'un résultat sur la vitesse de convergence en ϵ de la suite $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ vers sa limite.

Nous proposerons ensuite une méthode de volumes finis pour discrétiser le modèle limite et construire ainsi une approximation numérique de la solution du modèle (2.1). Nous discuterons également des propriétés de convergence de cette méthode numérique.

Dans une dernière partie, nous testerons cette méthode numérique 2-échelles, aussi bien en terme de qualité de résultats qu'en terme de temps de calcul. Nous proposerons aussi quelques résultats visant à vérifier numériquement le résultat théorique sur la vitesse de convergence démontré dans la deuxième partie. Enfin, nous présenterons quelques résultats de simulation obtenus avec cette nouvelle méthode numérique sur des cas impliquant un nombre de Mach très proche de 0.

1 Equations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles

Dans ce paragraphe, nous rappelons comment construire les équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles. Dans un premier temps, nous fixons quelques hypothèses sur le fluide modélisé qui permettent de conserver l'entropie le long de l'écoulement. Puis nous proposons un adimensionnement basé sur la petitesse du nombre de Mach pour aboutir aux équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles.

1.1 Equations d'Euler 1D isentropiques compressibles

Considérons les équations d'Euler 1D compressibles :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho\, u) = 0\,, \\ \partial_t(\rho\, u) + \partial_x(\rho\, u^2) + \partial_x p = 0\,, \\ \partial_t(\rho\, E) + \partial_x\big((\rho\, E + p)\, u\big) = 0\,, \\ \rho(x,0) = \rho_0(x)\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \\ E(x,0) = E_0(x)\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Dans ces équations, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ est la position (en m), $t \geq 0$ est le temps (en s), $\rho = \rho(x,t)$ est la masse volumique du fluide (en $kg\, m^{-1}$), $u = u(x,t)$ est la vitesse du fluide (en $m\, s^{-1}$), $E = E(x,t)$ est l'énergie totale par unité de masse du fluide (en $J\, kg^{-1}$), et $p = p(x,t)$ est la pression (en Pa). Nous avons affaire à un système de 3 équations à 4 inconnues : ρ, u, E et p. Nous avons donc besoin d'une équation supplémentaire afin de fermer le système (2.3). Pour cela, nous associons au système (2.3) une équation d'état de la forme

$$f(p, \rho, e) = 0\,, \tag{2.4}$$

où f est une fonction donnée, et où e est l'énergie interne par unité de masse (en $J\, kg^{-1}$), quantité que nous pouvons lier à E par

$$E = \frac{1}{2}\, u^2 + e\,. \tag{2.5}$$

Proposition 5. *Supposons que le fluide décrit par les solutions des équations d'Euler (2.3) couplées à l'équation d'état (2.4) soit isolé et ne présente pas de choc. Alors les solutions du modèle (2.3)-(2.4) sont isentropiques. Cela signifie que l'entropie s du fluide est conservée le long des trajectoires des particules du fluide, c'est-à-dire qu'elle vérifie*

$$\partial_t s(x,t) + u(x,t)\, \partial_x s(x,t) = 0\,. \tag{2.6}$$

Démonstration. En appliquant le premier principe de la therodynamique, nous pouvons affirmer que

$$de = \delta Q - p\, d\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\,, \tag{2.7}$$

où dg est la forme différentielle correspondant à une variation infinitésimale de la fonction g (ici, $g = e$ et $g = \frac{1}{\rho}$), et où δQ est une forme différentielle correspondant à une variation infinitésimale de la chaleur par unité de masse Q (en $J\, kg^{-1}$). Etant donné que nous supposons que le fluide ne présente pas de choc, le second principe de la thermodynamique implique

$$ds = \frac{\delta Q}{T}\,, \tag{2.8}$$

où s est l'entropie globale du fluide, et où T est la température par unité de masse (en $K\, kg^{-1}$). Par ailleurs, cela signifie également que les fonctions e, ρ, u et p ne présentent pas de discontinuités. Nous pouvons alors écrire

$$de = T\, ds - p\, d\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\,. \tag{2.9}$$

Par ailleurs, en combinant les équations (2.3.a), (2.3.b), (2.3.c) et (2.5), nous obtenons pour e l'équation suivante :

$$\partial_t e + u\, \partial_x e + \frac{p}{\rho}\, \partial_x u = 0\,. \tag{2.10}$$

Pour toute fonction $g = g(x,t)$, la forme différentielle dg s'écrit :

$$dg = \partial_x g\, dx + \partial_t g\, dt\,. \tag{2.11}$$

Alors en développant de cette façon l'égalité (2.9), nous obtenons :

$$\partial_x e\, dx + \partial_t e\, dt = T\, \partial_x s\, dx + T\, \partial_t s\, dt + p\, \frac{\partial_x \rho}{\rho^2}\, dx + p\, \frac{\partial_t \rho}{\rho^2}\, dt\,. \tag{2.12}$$

c'est-à-dire

$$\Big(\partial_x e - T\, \partial_x s + p\, \frac{\partial_x \rho}{\rho^2}\Big)\, dx = \Big(- \partial_t e + T\, \partial_t s - p\, \frac{\partial_t \rho}{\rho^2}\Big)\, dt \tag{2.13}$$

Nous en déduisons alors

$$\partial_t e - T\, \partial_t s + p\, \frac{\partial_t \rho}{\rho^2} = 0\,, \tag{2.14}$$

et

$$\partial_x e - T\, \partial_x s + p\, \frac{\partial_x \rho}{\rho^2} = 0\,, \tag{2.15}$$

Alors en utilisant les équations (2.3.a) et (2.10), nous constatons que

$$\partial_t s + u\, \partial_x s = 0\,. \tag{2.16}$$

□

Corollaire 6. *Supposons que les hypothèses de la proposition 5 soient vérifiées et considérons l'équation d'état des gaz parfaits de Laplace suivante :*

$$p = (\gamma - 1)\, \rho\, e\,, \tag{2.17}$$

où γ est le coefficient adiabatique (ou coefficient de Laplace) du fluide. Alors les solutions régulières des équations d'Euler (2.3)-(2.17) sont isentropiques et vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho\, u) = 0\,, \\ \partial_t(\rho\, u) + \partial_x(\rho\, u^2) + \partial_x\big(p(\rho)\big) = 0\,, \\ p(\rho) = \kappa\, \rho^\gamma\,, \\ \rho(x,0) = \rho_0(x)\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \end{cases} \tag{2.18}$$

où κ est une constante strictement positive et indépendante du temps.

Démonstration. Etant donné que le fluide est supposé être isolé du milieu extérieur, nous avons $\delta Q = T\, ds = 0$ dans l'équation (2.7). Alors

$$de = \frac{p}{\rho^2}\, d\rho = \frac{(\gamma - 1)\, e}{\rho}\, d\rho\,. \tag{2.19}$$

On en déduit alors qu'il existe une constante positive C telle que

$$e = C\, \rho^{\gamma - 1}\,. \tag{2.20}$$

Il n'est alors plus nécessaire de considérer les équations (2.3.c) et (2.3.f), étant que nous pouvons désormais lier e, et donc E, au couple (ρ, u) vérifiant le système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho\, u) = 0\,, \\ \partial_t(\rho\, u) + \partial_x(\rho\, u^2) + \partial_x\big(p(\rho)\big) = 0\,, \\ \rho(x,0) = \rho_0(x)\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \end{cases} \tag{2.21}$$

où $p(\rho) = \kappa\, \rho^\gamma$ avec $\kappa = C\, (\gamma - 1)$. □

Remarque 7. Les équations (2.18) sont parfois appelées *équations d'Euler 1D homentropiques.*

1.2 Adimensionnement

L'objectif est de travailler sur des fluides faiblement compressibles, c'est-à-dire avec une masse volumique qui ne varie presque pas au cours du temps. Pour y parvenir, nous considérons que le nombre de Mach $M = \frac{u}{c}$ est proche de 0, et que la constante κ exhibée en (2.18) est égale à 1. Sous ces conditions, l'équation (2.18.c) induit

$$\partial_t p = \frac{\gamma\,\rho^\gamma}{\rho}\,\partial_t\rho = c^2\,\partial_t\rho = \frac{u^2}{M^2}\,\partial_t\rho \quad \Longrightarrow \quad \partial_t\rho \approx 0\,. \tag{2.22}$$

Nous considérons donc l'adimensionnement suivant :

$$x = \overline{x}\,x'\,, \quad t = \overline{t}\,t'\,, \tag{2.23}$$

$$\rho(\overline{x}\,x', \overline{t}\,t') = \overline{\rho}\,\rho'(x',t')\,, \quad u(\overline{x}\,x', \overline{t}\,t') = \overline{u}\,u'(x',t')\,, \quad p(\overline{\rho}\,\rho') = \overline{p}\,p'(\rho')\,. \tag{2.24}$$

Alors les équations (2.18) se réécrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_{t'}\rho' + \dfrac{\overline{t}\,\overline{u}}{\overline{x}}\,\partial_{x'}(\rho'\,u') = 0\,, \\ \partial_{t'}(\rho'\,u') + \dfrac{\overline{u}\,\overline{t}}{\overline{x}}\,\partial_{x'}\big(\rho'\,(u')^2\big) + \dfrac{\overline{p}\,\overline{t}}{\overline{x}\,\overline{\rho}\,\overline{u}}\,\partial_{x'}\big(p'(\rho')\big) = 0\,, \\ \overline{p}\,p'(\rho') = \kappa\,\overline{\rho}^\gamma\,(\rho')^\gamma\,, \\ \rho'(x') = \rho_0'(x')\,, \\ u'(x') = u_0'(x')\,. \end{cases} \tag{2.25}$$

Nous considérons le rapport naturel $\overline{u} = \dfrac{\overline{x}}{\overline{t}}$ et nous définissons la vitesse du son caractéristique $\overline{c}$ telle que $\overline{c}^2 = \dfrac{\overline{p}}{\overline{\rho}}$. Enfin, nous supposons également que $\overline{p} = \overline{\rho}^\gamma$. Alors

$$\begin{cases} \partial_{t'}\rho' + \partial_{x'}(\rho'\,u') = 0\,, \\ \partial_{t'}(\rho'\,u') + \partial_{x'}\big(\rho'\,(u')^2\big) + \dfrac{\overline{c}^2}{\overline{u}^2}\,\partial_{x'}\big(p'(\rho')\big) = 0\,, \\ p'(\rho') = \kappa\,(\rho')^\gamma\,, \\ \rho'(x',0) = \rho_0'(x')\,, \\ u'(x',0) = u_0'(x')\,. \end{cases} \tag{2.26}$$

Nous reconnaissons alors le nombre de Mach caractéristique $\overline{M} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{c}}$, et nous supposons que $\overline{M} = \epsilon$. Alors le système à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{\rho}^\epsilon + \partial_x(\tilde{\rho}^\epsilon\,u^\epsilon) = 0\,, \\ \partial_t(\tilde{\rho}^\epsilon\,u^\epsilon) + \partial_x\big(\tilde{\rho}^\epsilon\,(u^\epsilon)^2\big) + \dfrac{1}{\epsilon^2}\,\partial_x\big(p(\tilde{\rho}^\epsilon)\big) = 0\,, \\ p(\tilde{\rho}^\epsilon) = \kappa\,(\tilde{\rho}^\epsilon)^\gamma\,, \\ \tilde{\rho}^\epsilon(x,0) = \tilde{\rho}_0^\epsilon(x)\,, \\ u^\epsilon(x,0) = u_0^\epsilon(x)\,, \end{cases} \tag{2.27}$$

où nous avons remplacé t' par t, x' par x, ρ' par $\tilde{\rho}^\epsilon$, u' par u^ϵ et p' par p.

2 Passage à la limite $\epsilon \to 0$

2.1 Modèle de Grenier-Schochet

Comme nous l'avions mentionné dans l'introduction de ce chapitre, il est connu que la suite $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge faiblement-* vers une constante dans un certain espace de Banach. Cependant, notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ où ρ^ϵ est

lié à $\tilde{\rho}^\epsilon$ par la relation (2.2). Cette démarche a déjà été suivie par S. Schochet dans [58] puis par E. Grenier dans [36], qui l'a étendue aux équations de Navier-Stokes. L'idée est la suivante :

1. En posant
$$\rho^\epsilon = \frac{\tilde{\rho}^\epsilon - 1}{\epsilon}, \tag{2.28}$$
le système (2.27) se réécrit sous la forme suivante :
$$\begin{cases} \partial_t \rho^\epsilon + \partial_x(\rho^\epsilon\, u^\epsilon) + \dfrac{1}{\epsilon}\,\partial_x u^\epsilon = 0\,, \\ \partial_t u^\epsilon + \dfrac{1}{2}\,\partial_x\big((u^\epsilon)^2\big) + \dfrac{1}{\epsilon^2\,(1+\epsilon\,\rho^\epsilon)}\,\partial_x\big(p(1+\epsilon\,\rho^\epsilon)\big) = 0\,, \\ p(\rho) = \kappa\,\rho^\gamma\,, \\ \rho^\epsilon(x,t=0) = \rho_0^\epsilon(x)\,, \\ u^\epsilon(x,t=0) = u_0^\epsilon(x)\,, \end{cases} \tag{2.29}$$
où ρ_0^ϵ est lié à $\tilde{\rho}_0^\epsilon$ par la relation $\rho_0^\epsilon = \dfrac{\tilde{\rho}_0^\epsilon - 1}{\epsilon}$.
2. Supposons que $p'(1) = 1$, c'est-à-dire $\kappa = \frac{1}{\gamma}$. Alors, du fait que ϵ est proche de 0, nous pouvons écrire
$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2\,(1+\epsilon\,\rho^\epsilon)}\,\partial_x\big(p(1+\epsilon\,\rho^\epsilon)\big) &= \frac{1}{\epsilon^2\,(1+\epsilon\,\rho^\epsilon)}\,\partial_x\Big(\frac{(1+\epsilon\,\rho^\epsilon)^\gamma}{\gamma}\Big)\,, \\ &= \frac{(1+\epsilon\,\rho^\epsilon)^{\gamma-2}}{\epsilon}\,\partial_x\rho^\epsilon\,, \\ &= \frac{1}{\epsilon}\,\big(1+(\gamma-2)\,\epsilon\,\rho^\epsilon + \epsilon^2\,q_1^\epsilon(\rho^\epsilon)\big)\,\partial_x\rho^\epsilon\,, \end{aligned} \tag{2.30}$$
où $q_1^\epsilon(\rho^\epsilon)$ est une fonction régulière en ρ^ϵ.
3. En posant
$$q(\rho^\epsilon) = \frac{\gamma-2}{2}(\rho^\epsilon)^2 + \epsilon\,q_1^\epsilon(\rho^\epsilon)\,, \tag{2.31}$$
nous obtenons finalement
$$\begin{cases} \partial_t \rho^\epsilon + \partial_x(\rho^\epsilon\, u^\epsilon) + \dfrac{1}{\epsilon}\,\partial_x u^\epsilon = 0\,, \\ \partial_t u^\epsilon + \dfrac{1}{2}\,\partial_x\big((u^\epsilon)^2\big) + \partial_x\big(q^\epsilon(\rho^\epsilon)\big) + \dfrac{1}{\epsilon}\,\partial_x\rho^\epsilon = 0\,, \\ \rho^\epsilon(x,t=0) = \rho_0^\epsilon(x)\,, \\ u^\epsilon(x,t=0) = u_0^\epsilon(x)\,. \end{cases} \tag{2.32}$$

Nous supposerons dorénavant que la suite $(u_0^\epsilon, \rho_0^\epsilon)_{\epsilon>0}$ ne dépend pas de ϵ, et nous noterons $u_0^\epsilon = u_0$ et $\rho_0^\epsilon = \rho_0$. C'est dans ce contexte que S. Schochet a établi le résultat suivant :

Théorème 8 (Schochet [58], Grenier [36])**.** *Supposons que $u_0, \rho_0 \in H^s_\#\big([0,2\pi]\big)$ avec $s > 3/2$. Alors il existe un temps $T > 0$ indépendant de ϵ tel que le système (2.32) admet une unique solution $(\rho^\epsilon, u^\epsilon) \in \big(\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2 \cap \big(\mathcal{C}^1\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$ pour tout $\epsilon > 0$. De plus, les suites $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont bornées dans $\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big) \cap \mathcal{C}^1\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ indépendamment de ϵ.*

2.2 Construction du modèle limite

Une piste suggérée par la convergence 2-échelles

L'objectif est de développer un modèle limite valable lorsque $\epsilon \to 0$. D'après le théorème 8, les suites $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont bornées indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$. D'après le théorème de G. Nguetseng et G. Allaire, elles admettent des sous-suites que nous noterons à nouveau $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$, et qui convergent à 2 échelles dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$ vers des fonctions U et R respectivement.

En suivant la même démarche qu'E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [31], nous nous donnons une fonction $\psi = \psi(x,\tau,t) \in \mathcal{D}\big([0,T);\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]^2\big)\big)$, nous multiplions les équations (2.32) par $\psi(x,\frac{t}{\epsilon},t)$ et nous intégrons le tout sur $[0,2\pi]\times[0,T)$: après des intégrations par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^{2\pi} u^\epsilon(x,t)\Big[(\partial_t\psi)\Big(x,\frac{t}{\epsilon},t\Big)+\frac{1}{\epsilon}\,(\partial_\tau\psi)\Big(x,\frac{t}{\epsilon},t\Big)\Big]\,dx\,dt+\int_0^{2\pi}u_0(x)\,\psi(x,0,0)\,dx\\ +\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{2}\,\big(u^\epsilon(x,t)\big)^2+q^\epsilon\big(\rho^\epsilon(x,t)\big)+\frac{1}{\epsilon}\,\rho^\epsilon(x,t)\Big]\,\partial_x\psi\Big(x,\frac{t}{\epsilon},t\Big)\,dx\,dt=0\,,\end{aligned}\tag{2.33}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^{2\pi} \rho^\epsilon(x,t)\Big[(\partial_t\psi)\Big(x,\frac{t}{\epsilon},t\Big)+\frac{1}{\epsilon}\,(\partial_\tau\psi)\Big(x,\frac{t}{\epsilon},t\Big)\Big]\,dx\,dt+\int_0^{2\pi}\rho_0(x)\,\psi(x,0,0)\,dx\\ +\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big[\rho^\epsilon(x,t)\,u^\epsilon(x,t)+\frac{1}{\epsilon}\,u^\epsilon(x,t)\Big]\,\partial_x\psi\Big(x,\frac{t}{\epsilon},t\Big)\,dx\,dt=0\,.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Rappelons que $H^s_\#\big([0,2\pi]\big)$ est une algèbre de Banach pour tout $s>1/2$, et que $\rho\mapsto q^\epsilon(\rho)$ est une fonction régulière. Alors les suites $((u^\epsilon)^2)_{\epsilon>0}$, $(\rho^\epsilon\,u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(q^\epsilon(\rho^\epsilon))_{\epsilon>0}$ sont bornées dans $\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ indépendamment de ϵ. De ce fait, en multipliant les équations (2.33)-(2.34) par ϵ et en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x,\tau,t)\,\partial_\tau\psi(x,\tau,t)+R(x,\tau,t)\,\partial_x\psi(x,\tau,t)\,d\tau\,dx\,dt=0\,,\\ &\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\,\partial_\tau\psi(x,\tau,t)+U(x,\tau,t)\,\partial_x\psi(x,\tau,t)\,d\tau\,dx\,dt=0\,,\end{aligned}\tag{2.35}$$

après être passé à la limite $\epsilon\to 0$. C'est la formulation faible du système

$$\begin{cases}\partial_\tau R+\partial_x U=0\,,\\ \partial_\tau U+\partial_x R=0\,,\end{cases}\tag{2.36}$$

dans l'espace $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$. Comme dans [31], nous cherchons à lier les fonctions U et R à des fonctions dans l'espace $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ et trouver un système d'équations différentielles vérifié par ces fonctions dans $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$. Pour cela, nous introduisons les fonctions $F,B\in L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$ définies par

$$\begin{aligned}F(x,\tau,t)&=K_1\,R(x+\tau,\tau,t)+K_2\,U(x+\tau,\tau,t)+C_1(t)\,,\\ B(x,\tau,t)&=K_1\,R(x-\tau,\tau,t)-K_2\,U(x-\tau,\tau,t)+C_2(t)\,,\end{aligned}\tag{2.37}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes, et où C_1 et C_2 sont des fonctions définies sur $[0,T)$ que nous allons identifier plus loin.

Grâce au système (2.36), nous constatons que $\partial_\tau F(x,\tau,t)=\partial_\tau B(x,\tau,t)=0$, et donc que F et B sont dans l'espace $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$. De ce fait, en posant $K_1=K_2=1/2$, nous avons

$$\begin{aligned}U(x,\tau,t)&=F(x-\tau,t)+B(x+\tau,t)+A_1(t)\,,\\ R(x,\tau,t)&=F(x-\tau,t)-B(x+\tau,t)+A_2(t)\,,\end{aligned}\tag{2.38}$$

où A_1 et A_2 sont liées à C_1 et C_2 par les relations suivantes :

$$A_1 = C_1 + C_2\,, \qquad A_2 = C_1 - C_2\,. \tag{2.39}$$

Quitte à modifier la définition de A_1 et A_2, nous supposons que les fonctions F et B sont de moyenne nulle à tout instant, c'est-à-dire

$$\forall\, t \in [0,T)\,, \qquad \int_0^{2\pi} F(x,t)\,dx = \int_0^{2\pi} B(x,t)\,dx = 0\,. \tag{2.40}$$

L'objectif est donc maintenant de trouver un système d'équations différentielles dont le couples (F,B) est la solution. Cependant, il faut trouver auparavant une expression plus explicite pour les fonctions A_1 et A_2. Pour cela, nous introduisons les limites faibles-* respectives des suites $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ dont l'existence est prouvée grâce au théorème de Nguetseng-Allaire en même temps que celle de U et R :

$$\begin{aligned} u^\epsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} u = \int_0^{2\pi} U(\cdot,\tau,\cdot)\,d\tau\,,\\ \rho^\epsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} \rho = \int_0^{2\pi} R(\cdot,\tau,\cdot)\,d\tau\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

En intégrant les équations différentielles (2.36) en τ, nous constatons que $u(x,t)$ et $\rho(x,t)$ ne dépendent pas de x, et donc que $u(x,t) = u(t)$ et $\rho(x,t) = \rho(t)$. Par ailleurs, étant donné que F et B sont de moyenne nulle à tout instant, nous obtenons

$$\forall\, t \in [0,T)\,, \qquad u(t) = 2\pi A_1(t)\,, \quad \rho(t) = 2\pi A_2(t)\,, \tag{2.42}$$

en intégrant (2.38) en τ. Il est alors possible d'améliorer la définition de U et R :

$$\begin{aligned} U(x,\tau,t) &= F(x-\tau,t) + B(x+\tau,t) + \frac{u(t)}{2\pi}\,,\\ R(x,\tau,t) &= F(x-\tau,t) - B(x+\tau,t) + \frac{\rho(t)}{2\pi}\,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

En reprenant les équations (2.33)-(2.34) avec une fonction test $\psi \in \mathcal{D}\big([0,T);\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]^2\big)\big)$ ne dépendant que de t, nous obtenons

$$\int_0^T\int_0^{2\pi} u^\epsilon(x,t)\,\partial_t\psi(t)\,dx\,dt + \int_0^{2\pi} u_0(x)\,\psi(0)\,dx = 0 \tag{2.44}$$

et

$$\int_0^T\int_0^{2\pi} \rho^\epsilon(x,t)\,\partial_t\psi(t)\,dx\,dt + \int_0^{2\pi} \rho_0(x)\,\psi(x,0,0)\,dx = 0 \tag{2.45}$$

En passant à la limite faible-* dans $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, nous obtenons

$$\int_0^T\int_0^{2\pi} u(t)\,\partial_t\psi(t)\,dx\,dt + \int_0^{2\pi} u_0(x)\,\psi(0)\,dx = 0 \tag{2.46}$$

et

$$\int_0^T\int_0^{2\pi} \rho(t)\,\partial_t\psi(t)\,dx\,dt + \int_0^{2\pi} \rho_0(x)\,\psi(x,0,0)\,dx = 0\,. \tag{2.47}$$

Nous reconnaissons alors la formulation faible de

$$\partial_t\rho(t) = \partial_t u(t) = 0\,, \tag{2.48}$$

avec $\rho(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \rho_0(x)\,dx$ et $u(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} u_0(x)\,dx$. Bref, en adoptant les notations

$$\overline{u} = \int_0^{2\pi} u_0(x)\,dx\,, \qquad \overline{\rho} = \int_0^{2\pi} \rho_0(x)\,dx\,, \tag{2.49}$$

nous avons finalement

$$\begin{aligned} U(x,\tau,t) &= F(x-\tau,t) + B(x+\tau,t) + \frac{\overline{u}}{2\pi}\,, \\ R(x,\tau,t) &= F(x-\tau,t) - B(x+\tau,t) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Nous rejoignons alors les conclusions classiques de convergence faible-* au sujet de la suite $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0 : en effet, nous venons de démontrer que $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une sous-suite qui converge faiblement-* dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$ vers la fonction constante $(u,\rho) = (\overline{u},\overline{\rho})$. Alors en rappelant que ρ^ϵ et $\tilde{\rho}^\epsilon$ sont liés par la relation (2.28), nous en déduisons que la suite $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une sous-suite qui converge faiblement-* vers $(\overline{u}, 1)$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$.

Nous introduisons donc 2 suites de fonctions $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ liées à $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ par

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x,t) &= f^\epsilon\Big(x-\frac{t}{\epsilon},t\Big) + b^\epsilon\Big(x+\frac{t}{\epsilon},t\Big) + \frac{\overline{u}}{2\pi}\,, \\ \rho^\epsilon(x,t) &= f^\epsilon\Big(x-\frac{t}{\epsilon},t\Big) - b^\epsilon\Big(x+\frac{t}{\epsilon},t\Big) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\,, \end{aligned} \tag{2.51}$$

l'objectif étant désormais d'établir des résultats de convergence de $(f^\epsilon, b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ vers (F,B).

Limite de (f^ϵ, b^ϵ)

Commençons par réécrire la définition de f^ϵ et b^ϵ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f^\epsilon(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(u^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) + \rho^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) - \frac{\overline{u}+\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,, \\ b^\epsilon(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(u^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - \rho^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - \frac{\overline{u}-\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,, \end{aligned} \tag{2.52}$$

Par construction de ces suites, nous savons qu'elles admettent des sous-suites qui convergent à 2-échelles dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$ vers les fonctions F et B que nous avons définies dans (2.50). En réalité, ces résultats de convergence sont beaucoup plus forts :

Théorème 9. *Sous les hypothèses du théorème 8, nous avons les résultats de convergence suivants :*

$$\begin{aligned} &f^\epsilon \to F \quad \textit{fortement dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big), \\ &f^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} F \quad \textit{dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s}_\#\big([0,2\pi]\big)\big), \\ &b^\epsilon \to B \quad \textit{fortement dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big), \\ &b^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} B \quad \textit{dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s}_\#\big([0,2\pi]\big)\big), \end{aligned} \tag{2.53}$$

où (F,B) est défini par (2.50) et est l'unique solution de

$$\begin{cases} \partial_t F + \partial_x\Big(\dfrac{\gamma+1}{4}\,F^2 + \dfrac{2\overline{u}+(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,F\Big) = 0\,, \\ \partial_t B + \partial_x\Big(\dfrac{\gamma+1}{4}\,B^2 + \dfrac{2\overline{u}-(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,B\Big) = 0\,, \\ F(x,t=0) = \dfrac{1}{2}\Big(u_0(x) + \rho_0(x) - \dfrac{\overline{u}+\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,, \\ B(x,t=0) = \dfrac{1}{2}\Big(u_0(x) - \rho_0(x) - \dfrac{\overline{u}-\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,, \end{cases} \tag{2.54}$$

dans $\big(\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2 \cap \big(\mathcal{C}^1\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$.

Démonstration. Admettons dans un premier temps qu'il existe bien 2 fonctions $(\tilde{F}, \tilde{B})$ tel que

$$\begin{aligned} &f^\epsilon \to \tilde{F} \quad \textit{fortement dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s-1}_\#([0,2\pi])\big),\\ &f^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{F} \quad \textit{dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s}_\#([0,2\pi])\big),\\ &b^\epsilon \to \tilde{B} \quad \textit{fortement dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s-1}_\#([0,2\pi])\big),\\ &b^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{B} \quad \textit{dans } \mathcal{C}\big(0,T;H^{s}_\#([0,2\pi])\big). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Alors $F = \tilde{F}$ et $B = \tilde{B}$. En effet, nous avons vu que nous pouvions extraire de $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une sous-suite $(f^{\chi(\epsilon)})_{\epsilon>0}$ qui converge faiblement-* vers F dans $L^\infty\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)$. En supposant que f^ϵ converge faiblement-* vers F dans $\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)$ et donc dans $L^\infty\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)$, nous en déduisons que $f^{\chi(\epsilon)}$ converge faiblement-* vers $\tilde{F}$ dans cet espace. Alors, par unicité de la limite faible-* dans $L\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)$, nous en concluons que $F = \tilde{F}$. Avec un raisonnement similaire, nous prouvons que $B = \tilde{B}$.

Démontrons maintenant les résultats de convergence (2.53) en commençant par écrire le système d'EDP vérifié par (f^ϵ, b^ϵ) :

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon(x,t) + \dfrac{\epsilon}{2}\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\Big(f^\epsilon(x,t) - b^\epsilon\big(x+\dfrac{2t}{\epsilon},t\big) + \dfrac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\Big)\\ \qquad + \partial_x\Bigg(\dfrac{\gamma+1}{4}\,\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2 + \dfrac{\gamma-3}{4}\,\Big(b^\epsilon\big(x+\dfrac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2 + \dfrac{2\overline{u}+(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,f^\epsilon(x,t)\\ \qquad\qquad + \dfrac{(3-\gamma)\overline{\rho}}{4\pi}\,b^\epsilon\big(x+\dfrac{2t}{\epsilon},t\big) + \dfrac{3-\gamma}{2}\,f^\epsilon(x,t)\,b^\epsilon\big(x+\dfrac{2t}{\epsilon},t\big)\Bigg) = 0\,,\\ \partial_t b^\epsilon(x,t) + \dfrac{\epsilon}{2}\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\Big(f^\epsilon\big(x-\dfrac{2t}{\epsilon},t\big) - b^\epsilon(x,t) + \dfrac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\Big)\\ \qquad + \partial_x\Bigg(\dfrac{\gamma+1}{4}\,\big(b^\epsilon(x,t)\big)^2 + \dfrac{\gamma-3}{4}\,\Big(f^\epsilon\big(x-\dfrac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2 + \dfrac{2\overline{u}-(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,b^\epsilon(x,t)\\ \qquad\qquad - \dfrac{(3-\gamma)\overline{\rho}}{4\pi}\,f^\epsilon\big(x-\dfrac{2t}{\epsilon},t\big) + \dfrac{3-\gamma}{2}\,f^\epsilon\big(x-\dfrac{2t}{\epsilon},t\big)\,b^\epsilon(x,t)\Bigg) = 0\,,\\ f^\epsilon(x,t=0) = f_0(x) = \dfrac{1}{2}\Big(u_0(x) + \rho_0(x) - \dfrac{\overline{u}+\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,,\\ b^\epsilon(x,t=0) = b_0(x) = \dfrac{1}{2}\Big(u_0(x) - \rho_0(x) - \dfrac{\overline{u}-\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,. \end{cases} \tag{2.56}$$

Etant donné que les suites $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont bornées dans $L^\infty\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)$ indépendamment de ϵ, il en est de même pour les suites $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon>0}$. De ce fait, nous pouvons utiliser le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki : nous pouvons extraire une sous-suite de (f^ϵ, b^ϵ), que nous noterons également (f^ϵ, b^ϵ), et qui converge faiblement-* vers (F, B) dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)\big)^2$. Nous définissons l'espace fonctionnel $\mathcal{U}$ par

$$\mathcal{U} = \Big\{g \in L^\infty\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)\ :\ \partial_t g \in L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#([0,2\pi])\big)\Big\}\,, \tag{2.57}$$

et nous le munissons de la norme induite par $L^\infty\big(0,T;H^s_\#([0,2\pi])\big)$, c'est-à-dire

$$\forall\, g \in \mathcal{U}\,,\quad \|g\|_{\mathcal{U}} = \max_{t\,\in\,[0,T)} \big\|g(\cdot,t)\big\|_{H^s_\#([0,2\pi])}\,. \tag{2.58}$$

Il est alors clair que les suites $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont bornées dans $\mathcal{U}$. Par ailleurs, nous avons les inclusions compactes suivantes :

$$H^s_\#\big([0,2\pi]\big) \subset H^s_\#\big([0,2\pi]\big) \subset H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\,,\qquad \forall\, s > \frac{3}{2}\,. \tag{2.59}$$

De ce fait, nous avons l'inclusion compacte $\mathcal{U} \subset L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ grâce au lemme d'Aubin-Lions. Alors f^ϵ et b^ϵ convergent <u>fortement</u> vers F et B respectivement dans $L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$.

Démontrons que F et B sont de moyenne nulle à tout instant. Dans un premier temps, nous démontrons que pour tout $\epsilon > 0$, f^ϵ et b^ϵ sont également de moyenne nulle à tout instant : en intégrant les équations (2.56.a) et (2.56.b) sur $[0,2\pi]$, nous obtenons pour tout $t \in [0,T)$,

$$\partial_t\left(\int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\,dx\right) = \partial_t\left(\int_0^{2\pi} b^\epsilon(x,t)\,dx\right) = 0\,, \tag{2.60}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\,dx &= \int_0^{2\pi} f_0(x)\,dx = 0\,,\\ \int_0^{2\pi} b^\epsilon(x,t)\,dx &= \int_0^{2\pi} b_0(x)\,dx = 0\,.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Alors, en majorant la valeur absolue de la moyenne de F, nous obtenons

$$\left|\int_0^{2\pi} F(x,t)\,dx\right| = \left|\int_0^{2\pi} \big(F(x,t) - f^\epsilon(x,t)\big)\,dx\right| \le \sqrt{2\pi}\,\big\|F - f^\epsilon\big\|_{L^\infty(0,T;H^{s-1}_\#([0,2\pi]))}\,, \tag{2.62}$$

pour tout $t \in [0,T)$ et pour tout $\epsilon > 0$. Etant donné que f^ϵ converge fortement vers F dans $L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, nous en déduisons que

$$\int_0^{2\pi} F(x,t)\,dx = 0\,, \qquad \forall\, t \in [0,T)\,. \tag{2.63}$$

Le même raisonnement permet de démontrer que B est de moyenne nulle à tout instant.

Nous recherchons maintenant un système d'équations différentielles dont (F,B) est la solution. Pour cela, nous utilisons le fait que (F,B) est la limite faible-* de $(f^\epsilon,b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$. Nous multiplions donc les équations (2.56.a)-(2.56.b)) par une fonction $\varphi = \varphi(x,t) \in \mathcal{D}\big([0,T);\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ et nous intégrons le résultat sur $[0,2\pi]\times[0,T)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt - \int_0^{2\pi} f_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx\\
&\quad-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{\gamma+1}{4}\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&\quad-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{2\overline{u}+(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,f^\epsilon(x,t)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&\quad-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{\gamma-3}{4}\Big(b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&\quad-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{(3-\gamma)\overline{\rho}}{4\pi}\,b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&\quad-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{3-\gamma}{2}\,f^\epsilon(x,t)\,b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&\quad-\frac{\epsilon}{2}\int_0^T\int_0^{2\pi} q_1^\epsilon\Big(f^\epsilon(x,t) - b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

et

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_0^{2\pi} b^\epsilon(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt - \int_0^{2\pi} b_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx \\
-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{\gamma+1}{4}\big(b^\epsilon(x,t)\big)^2\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{2\overline{u}-(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,b^\epsilon(x,t)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{\gamma-3}{4}\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
+\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{(3-\gamma)\overline{\rho}}{4\pi}\,f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
-\int_0^T\int_0^{2\pi} \frac{3-\gamma}{2}\,f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,b^\epsilon(x,t)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
-\frac{\epsilon}{2}\int_0^T\int_0^{2\pi} q_1^\epsilon\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)-b^\epsilon(x,t)+\frac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

En utilisant les résultats de convergence (2.53) démontrés précédemment, nous obtenons facilement

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt &= \int_0^T\int_0^{2\pi} F(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} b^\epsilon(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt &= \int_0^T\int_0^{2\pi} B(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt &= \int_0^T\int_0^{2\pi} F(x,t)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} b^\epsilon(x,t)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt &= \int_0^T\int_0^{2\pi} B(x,t)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\,.
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Afin de calculer la limite de $\displaystyle\int_0^T\int_0^{2\pi}\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt$, nous écrivons :

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^{2\pi}\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt &= \int_0^T\int_0^{2\pi}\big(F(x,t)\big)^2\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&\quad+\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big[\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2-\big(F(x,t)\big)^2\Big]\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

Comme $f^\epsilon, F\in L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ avec $s>3/2$ et que la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans cet espace fonctionnel, nous pouvons utiliser le théorème de Kondrakov, plus précisément l'inclusion compacte $H^m_\#\big([0,2\pi]\big)\subset L^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)$ pour tout $m>1/2$, pour montrer l'existence d'une constante $C>0$ indépendante de ϵ, ρ_0 et u_0, telle que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big[\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2-\big(F(x,t)\big)^2\Big]\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt\right|\\
&\quad\le \max_{[0,2\pi]\times[0,T)}\big|f^\epsilon+F\big|\int_0^T\int_0^{2\pi}\big|f^\epsilon(x,t)-F(x,t)\big|\times\big|\partial_x\varphi(x,t)\big|\,dx\,dt\\
&\quad\le C\,\big\|f^\epsilon+F\big\|_{L^\infty(0,T;H^s_\#([0,2\pi]))}\int_0^T\big\|f^\epsilon(\cdot,t)-F(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\big\|\partial_x\varphi(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,dt\\
&\quad\le C'_\epsilon\,\big\|f^\epsilon-F\big\|_{L^\infty(0,T;H^{s-1}_\#([0,2\pi]))}
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

avec $C'_\epsilon = C\,T\big\|\partial_x\varphi\big\|_{L^\infty(0,T;L^2_\#([0,2\pi]))}\Big(\big\|f^\epsilon\big\|_{L^\infty(0,T;H^s_\#([0,2\pi]))}+\big\|F\big\|_{L^\infty(0,T;H^s_\#([0,2\pi]))}\Big)$. Etant donné que $\big\|f^\epsilon\big\|_{L^\infty(0,T;H^s_\#([0,2\pi]))}$ est bornée indépendamment de ϵ, nous en déduisons qu'il existe une

constante C' telle que, pour tout ϵ,

$$C'_\epsilon \leq C' \,. \tag{2.68}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \Big[\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2 - \big(F(x,t)\big)^2 \Big] \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt = 0 \,, \tag{2.69}$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(f^\epsilon(x,t)\big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt = \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(F(x,t)\big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \,. \tag{2.70}$$

De la même manière, nous montrons que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(b^\epsilon(x,t)\big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt = \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(B(x,t)\big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \,. \tag{2.71}$$

Etudions maintenant la limite des termes suivants

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^{2\pi} f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \,, \\
&\int_0^T \int_0^{2\pi} b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \,, \\
&\int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \,, \\
&\int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \,,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

à l'aide d'un raisonnement commun. En effet, nous écrivons dans un premier temps :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^{2\pi} f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(f^\epsilon(x,t) - F(x,t)\big) \, \partial_x \varphi\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \,, \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} F(x,t) \, \partial_x \varphi\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \,, \\
&\int_0^T \int_0^{2\pi} b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(b^\epsilon(x,t) - B(x,t)\big) \, \partial_x \varphi\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} B(x,t) \, \partial_x \varphi\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \,, \\
&\int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2 - \big(F(x,t)\big)^2\Big) \, \partial_x \varphi\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(F(x,t)\big)^2 \, \partial_x \varphi\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \,, \\
&\int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)^2 \, \partial_x \varphi(x,t) \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(\big(b^\epsilon(x,t)\big)^2 - \big(B(x,t)\big)^2\Big) \, \partial_x \varphi\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(B(x,t)\big)^2 \, \partial_x \varphi\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \, dx \, dt \,.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi qu'un raisonnement similaire à (2.67), nous montrons que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\big(f^\epsilon(x,t)-F(x,t)\big)\,\partial_x\varphi\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,dx\,dt=0\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\big(b^\epsilon(x,t)-B(x,t)\big)\,\partial_x\varphi\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,dx\,dt=0\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big(\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2-\big(F(x,t)\big)^2\Big)\,\partial_x\varphi\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,dx\,dt=0\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big(\big(b^\epsilon(x,t)\big)^2-\big(B(x,t)\big)^2\Big)\,\partial_x\varphi\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,dx\,dt=0\,.
\end{aligned}\tag{2.74}$$

Nous définissons la fonction $\tilde\varphi$ à partir de φ par

$$\tilde\varphi(x,\tau,t)=\varphi(x+2\tau,t)\,,\qquad \forall\,(x,\tau,t)\in[0,2\pi]^2\times[0,T)\,,\tag{2.75}$$

puis $\varphi^\epsilon(x,t)=\tilde\varphi(x,\frac{t}{\epsilon},t)$. Il est clair que la suite $(\varphi^\epsilon)_{\epsilon>0}$ ainsi définie est bornée indépendamment de ϵ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ étant donné que $\varphi\in\mathcal{D}\big([0,T);\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$. Alors nous pouvons appliquer le théorème de G. Nguetseng et G. Allaire, et affirmer qu'il existe une fonction $\Phi=\Phi(x,\tau,t)\in L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$ telle que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\psi\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\,\varphi^\epsilon(x,t)\,dx\,dt=\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x,\tau,t)\,\Phi(x,\tau,t)\,d\tau\,dx\,dt\tag{2.76}$$

pour toute fonction $\psi=\psi(x,\tau,t)\in\mathcal{D}\big([0,T);\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]^2\big)\big)$. Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x,\tau,t)\,\Phi(x,\tau,t)\,d\tau\,dx\,dt&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\psi\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\,\varphi^\epsilon(x,t)\,dx\,dt\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}\psi\big(x-\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt\\
&=\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x-2\tau,\tau,t)\,\varphi(x,t)\,d\tau\,dx\,dt\\
&=\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x,\tau,t)\,\tilde\varphi(x,\tau,t)\,d\tau\,dx\,dt\,,
\end{aligned}\tag{2.77}$$

ce qui signifie que $\Phi=\tilde\varphi$ dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$. De plus, nous en déduisons que

$$\varphi^\epsilon\overset{*}{\rightharpoonup}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\cdot,\tau,\cdot)\,d\tau\quad\text{dans } L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big).\tag{2.78}$$

Par conséquent, pour toute fonction $g\in L^1\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi}g(x,t)\,\varphi^\epsilon(x,t)\,dx\,dt&=\int_0^T\int_0^{2\pi}g(x,t)\left(\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(x,\tau,t)\,d\tau\right)dx\,dt\\
&=\int_0^T\int_0^{2\pi}g(x,t)\times\left(\int_0^{2\pi}\varphi(x+2\tau,t)\,d\tau\right)dx\,dt\,.
\end{aligned}\tag{2.79}$$

Il est clair que $\partial_xF\in L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\subset L^1\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ mais aussi $\partial_x(F^2)$ car $H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)$ est une algèbre de Banach pour $s>3/2$ (voir le théorème 5.23 dans Adams [1]). De

ce fait, en prenant $g = \partial_x F$ dans le résultat (2.79), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} F(x,t)\, \partial_x \varphi\Big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\Big)\, dx\, dt \\
&\qquad = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \partial_x F(x,t)\, \varphi^\epsilon(x,t)\, dx\, dt \\
&\qquad = -\int_0^T \int_0^{2\pi} \partial_x F(x,t) \times \left(\int_0^{2\pi} \varphi(x + 2\tau, t)\, d\tau \right) dx\, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_0^{2\pi} F(x,t) \times \left(\int_0^{2\pi} \partial_x \varphi(x + 2\tau, t)\, d\tau \right) dx\, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_0^{2\pi} F(x,t) \times \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, \partial_\tau \varphi(x + 2\tau, t)\, d\tau \right) dx\, dt = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

De la même manière, en prenant successivement $g = \partial_x(F^2)$, $g = \partial_x B$ et $g = \partial_x(B^2)$, nous aboutissons à

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(F(x,t)\big)^2\, \partial_x \varphi\Big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\Big)\, dx\, dt = 0\,, \\
\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} B(x,t)\, \partial_x \varphi\Big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\Big)\, dx\, dt = 0\,, \\
\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(B(x,t)\big)^2\, \partial_x \varphi\Big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\Big)\, dx\, dt = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Nous en concluons que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt = 0\,, \\
\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)^2\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt = 0\,, \\
\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt = 0\,, \\
\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_0^{2\pi} \Big(b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)^2\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Afin de calculer la limite du terme $\displaystyle\int_0^T \int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\, b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt$, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\, b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(f^\epsilon(x,t) - F(x,t)\big)\, B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} F(x,t) \Big(b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} \big(f^\epsilon(x,t) - F(x,t)\big) \Big(b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} F(x,t)\, B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, \partial_x \varphi(x,t)\, dx\, dt\,.
\end{aligned}$$

En se rappelant que les suites $(f^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ sont bornées dans $L^\infty\big(0, T; H^s_\#\big([0, 2\pi]\big)\big)$ indépendamment de ϵ, qu'elles convergent fortement vers F et B dans $L^\infty\big(0, T; H^{s-1}_\#\big([0, 2\pi]\big)\big)$, et que

l'inclusion $H^{s-1}_{\#}\big([0,2\pi]\big) \subset L^{\infty}_{\#}\big([0,2\pi]\big)$ est compacte pour tout $s > 3/2$, nous utilisons l'inégalité de Hölder pour montrer que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} \big(f^\epsilon(x,t) - F(x,t)\big)\, B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} F(x,t)\,\Big(b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) - B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} \big(f^\epsilon(x,t) - F(x,t)\big)\Big(b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) - B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

En posant $B^\epsilon(x,t) = B(x+\frac{2t}{\epsilon},t)$, il est évident que la suite $(B^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)$. Nous en déduisons alors que B^ϵ converge à 2 échelles vers une fonction $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(x,\tau,t) \in L^\infty\big(0,T;L^\infty_{\#}\big([0,2\pi];H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$ que nous pouvons identifier à

$$\mathfrak{B}(x,\tau,t) = B(x+2\tau,t)\,,\qquad \forall\,(x,\tau,t)\in[0,2\pi]^2\times[0,T)\,. \tag{2.84}$$

Par conséquent, B^ϵ converge aussi faiblement-* vers la fonction $(x,t)\mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} B(x+2\tau,t)\,d\tau$ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)$. Comme B est de moyenne nulle à tout instant t, nous en déduisons que la limite faible-* de B^ϵ est en fait la fonction nulle. Par conséquent, pour toute fonction $\psi \in L^1\big(0,T;H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)$, nous avons

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} B^\epsilon(x,t)\,\psi(x,t)\,dx\,dt = 0\,, \tag{2.85}$$

en particulier pour $\psi = F\,\partial_x\varphi \in \mathcal{C}\big(0,T;H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big) \subset L^1\big(0,T;H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)$, c'est-à-dire

$$\int_0^T\int_0^{2\pi} F(x,t)\,B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,. \tag{2.86}$$

Nous en concluons donc que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_0^{2\pi} f^\epsilon(x,t)\,b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,. \tag{2.87}$$

Du fait que les suites $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont bornées indépendamment de ϵ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)$, et que la fonction $\rho\mapsto q^\epsilon_1(\rho)$ soit régulière, nous en déduisons que les suites $\big(q^\epsilon_1\big(\rho^\epsilon(x+\frac{t}{\epsilon},t)\big)\big)_{\epsilon>0}$ et $\big(q^\epsilon_1\big(\rho^\epsilon(x-\frac{t}{\epsilon},t)\big)\big)_{\epsilon>0}$ sont également bornées dans $L^\infty\big(0,T;H^s_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)$ indépendamment de ϵ. De ce fait, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{2}\int_0^T\int_0^{2\pi} q^\epsilon_1\Big(f^\epsilon(x,t) - b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,,\\
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{2}\int_0^T\int_0^{2\pi} q^\epsilon_1\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big) - b^\epsilon(x,t) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

En rassemblant tous les résultats précédents, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^{2\pi} F(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt - \int_0^{2\pi} f_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx\\
&\quad-\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\gamma+1}{4}\big(F(x,t)\big)^2 + \frac{2\overline{u}+(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,F(x,t)\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.89}$$

et

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^{2\pi} B(x,t)\,\partial_t\varphi(x,t)\,dx\,dt - \int_0^{2\pi} b_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx\\
&\quad-\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\gamma+1}{4}\big(B(x,t)\big)^2 + \frac{2\overline{u}-(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,B(x,t)\Big)\,\partial_x\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Nous reconnaissons la formulation faible de (2.54).

Jusqu'à présent, nous avons montré qu'il était possible d'extraire de la suite de solutions $(f^\epsilon, b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ de (2.56) une sous-suite qui converge vers une solution (F, B) du système (2.54) fortement dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$ et faiblement-* dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^{s}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$. Or la conclusion du théorème porte sur la suite $(f^\epsilon, b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et pas seulement sur certaines de ses sous-suites. Pour parvenir à ce résultat, nous procédons de la façon suivante :

1. Sachant que les conditions initiales $F(\cdot,0) = f_0$ et $B(\cdot,0) = b_0$ sont dans l'espace $H^s_\#\big([0,2\pi]\big)$, nous en déduisons que la solution (F, B) du système (2.54) existe et est unique dans l'espace $\big(\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2 \times \big(\mathcal{C}^1\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$ (nous pouvons appliquer par exemple le théorème 3.6.1 du livre de D. Serre [61]), et donc aussi dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$.
2. De part cette unicité, nous en déduisons que la suite de solutions $(f^\epsilon, b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ de (2.56), en plus d'être bornée dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$, admet une unique valeur d'adhérence dans ce même espace : le couple (F, B).
3. Nous en déduisons donc que la suite $(f^\epsilon, b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge elle-même vers (F, B) et pas seulement certaines de ses sous-suites. Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned}
&f^\epsilon \to F \quad \textit{fortement dans } L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big),\\
&f^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} F \quad \textit{dans } L^\infty\big(0,T;H^{s}_\#\big([0,2\pi]\big)\big),\\
&b^\epsilon \to B \quad \textit{fortement dans } L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big),\\
&b^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} B \quad \textit{dans } L^\infty\big(0,T;H^{s}_\#\big([0,2\pi]\big)\big).
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Enfin, comme les fonctions $f^\epsilon, b^\epsilon, F$ et B sont dans $\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big) \subset L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, et que les normes usuelles sur $\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ et $L^\infty\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ sont les mêmes, nous en déduisons les résultats de convergence (2.53). □

Suite à ce théorème, nous pouvons constater que u^ϵ converge à 2 échelles fortement vers U dans $L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, et qu'il en est de même pour ρ^ϵ vers R dans ce même espace. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,T)} \Big\| u^\epsilon(\cdot,t) - U\big(\cdot,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big\|_{H^{s-1}_\#([0,2\pi])}\\
&\quad= \max_{t\in[0,T)} \Big\| f^\epsilon\big(\cdot-\frac{t}{\epsilon},t\big) + b^\epsilon\big(\cdot+\frac{t}{\epsilon},t\big) - F\big(\cdot-\frac{t}{\epsilon},t\big) - B\big(\cdot+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big\|_{H^{s-1}_\#([0,2\pi])}\\
&\quad\le \max_{t\in[0,T)} \Big\| f^\epsilon\big(\cdot,t\big) - F\big(\cdot,t\big)\Big\|_{H^{s-1}_\#([0,2\pi])} + \max_{t\in[0,T)} \Big\| b^\epsilon\big(\cdot,t\big) - B\big(\cdot,t\big)\Big\|_{H^{s-1}_\#([0,2\pi])}\\
&\quad\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,,
\end{aligned} \tag{2.92}$$

et nous montrons de la même façon que

$$\max_{t\in[0,T)} \Big\| \rho^\epsilon(\cdot,t) - R\big(\cdot,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big\|_{H^{s-1}_\#([0,2\pi])} \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{2.93}$$

2.3 Vitesse de convergence

Théorème 10. *Supposons que les hypothèses du théorème 8 sont vérifiées, ainsi que $s > 5/2$. Alors, pour $\epsilon_0 > 0$ fixé, il existe une constante $K > 0$ indépendante de $\epsilon \in]0,\epsilon_0]$ telle que*

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \Big\| \rho^\epsilon(\cdot,t) - R\Big(\cdot,\frac{t}{\epsilon},t\Big)\Big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\,dt\right)^{1/2} \le K\,\epsilon\,,\\
&\left(\int_0^T \Big\| u^\epsilon(\cdot,t) - U\Big(\cdot,\frac{t}{\epsilon},t\Big)\Big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\,dt\right)^{1/2} \le K\,\epsilon\,,
\end{aligned} \tag{2.94}$$

où les fonctions U et R sont liées à la solution (F, B) du système (2.54) par la relation (2.50).

Démonstration du théorème 10. Il est facile de constater que, s'il est possible de trouver une constante $K' > 0$ ne dépendant que de ρ_0, u_0 et ϵ_0 telle que, pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \Big\| f^\epsilon(\cdot,t) - F(\cdot,t) \Big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} dt \leq K'\,\epsilon^2\,, \\ \int_0^T \Big\| b^\epsilon(\cdot,t) - B(\cdot,t) \Big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} dt \leq K'\,\epsilon^2\,, \end{aligned} \tag{2.95}$$

alors les inégalités (2.94) sont obtenues à l'aide d'une inégalité triangulaire et en posant $K = 2\sqrt{K'}$. L'objectif est donc maintenant de démontrer les inégalités (2.95). Pour cela, nous nous inspirons de la méthode utilisé par E. Frénod, P.-A. Raviart et E. Sonnendrücker dans [27] : nous introduisons les suites de fonctions $(\gamma^\epsilon)_{\epsilon\in]0,\epsilon_0]}$ et $(\delta^\epsilon)_{\epsilon\in]0,\epsilon_0]}$ définies par

$$\begin{aligned} \gamma^\epsilon(x,t) &= \frac{1}{\epsilon}\big(f^\epsilon(x,t) - F(x,t)\big) - W\big(x, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\,, \\ \delta^\epsilon(x,t) &= \frac{1}{\epsilon}\big(B(x,t) - b^\epsilon(x,t)\big) - V\big(x, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\,, \end{aligned} \tag{2.96}$$

où $W, V \in \mathcal{C}\big(0,T; L^\infty_\#\big([0,2\pi]; H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big) \cap \mathcal{C}^1\big(0,T; L^\infty_\#\big([0,2\pi]; H^{s-2}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$ sont définies par

$$\begin{aligned} W(x,\tau,t) &= -\frac{\gamma-3}{4}\int_0^\tau \partial_x\Big(\big(B(x+2\theta,t)\big)^2 - 2F(x,t)\,B(x+2\theta,t) + \frac{\overline{\rho}}{\pi}\,B(x+2\theta,t)\Big)\,d\theta\,, \\ V(x,\tau,t) &= \frac{\gamma-3}{4}\int_0^\tau \partial_x\Big(\big(F(x-2\theta,t)\big)^2 - 2F(x-2\theta,t)\,B(x,t) + \frac{\overline{\rho}}{\pi}\,F(x-2\theta,t)\Big)\,d\theta\,. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Alors nous avons le lemme suivant :

Lemme 11. *Sous les hypothèses du théorème 10, il existe une constante $L > 0$ indépendante de $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ et $t \in [0, T)$ telle que*

$$\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} \leq L \tag{2.98}$$

pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ et pour tout $t \in [0, T)$.

En admettant ce lemme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \big\|f^\epsilon(\cdot,t) - F(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} &\leq \epsilon\Big[\sqrt{L} + \big\|W(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^\infty_\#([0,2\pi];H^{s-1}_\#([0,2\pi]))}\Big]\,, \\ \big\|b^\epsilon(\cdot,t) - B(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} &\leq \epsilon\Big[\sqrt{L} + \big\|V(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^\infty_\#([0,2\pi];H^{s-1}_\#([0,2\pi]))}\Big]\,, \end{aligned} \tag{2.99}$$

et donc les inégalités (2.95) avec K' définie par

$$\begin{aligned} K' = T\Big[&\sqrt{L} \\ &+ \max\Big(\big\|W\big\|_{L^\infty(0,T;L^\infty_\#([0,2\pi];H^{s-1}_\#([0,2\pi])))}\,,\ \big\|V\big\|_{L^\infty(0,T;L^\infty_\#([0,2\pi];H^{s-1}_\#([0,2\pi])))}\Big)\Big]^2\,. \end{aligned} \tag{2.100}$$

□

Démonstration du lemme 11. L'objectif est d'aboutir à une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} &\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} \\ &\qquad \leq K_1 + K_2\int_0^t \Big(\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\Big)\,ds\,. \end{aligned} \tag{2.101}$$

En effet, en appliquant le lemme de Grönwall , nous obtenons,

$$\left\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \left\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} \leq K_1 \exp\left(K_2 \int_0^t ds\right) = K_1\, e^{K_2 t} \leq K_1\, e^{K_2 T}\,, \tag{2.102}$$

et nous démontrons ainsi l'inégalité (2.98) en posant $L = K_1\, e^{K_2 t} \leq K_1\, e^{K_2 T}$.

Nous allons donc pour cela établir dans un premier temps une majoration de

$$\partial_t\Big(\left\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \left\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\Big) \tag{2.103}$$

faisant intervenir $\left\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2_\#([0,2\pi])}$ et $\left\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2_\#([0,2\pi])}$. Ce travail fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 12. *Il existe une constante M indépendante de $\epsilon \in]0,\epsilon_0]$ et de t telle que*

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Big(\left\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \left\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\Big)\\
&\qquad\leq M\,\Big(\left\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \left\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\right\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\\
&\qquad\quad + \left\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \left\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\\
&\qquad\quad + \left\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2_\#([0,2\pi])} + \left\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\Big)\\
&\qquad\quad - (\gamma-3)\left[\partial_\tau\left(\int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\,\gamma^\epsilon(x-\tau,t)\,\delta^\epsilon(x+\tau,t)\,dx\right)\right]_{|\tau=\frac{t}{\epsilon}}\,.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Démonstration du lemme 12. Commençons par développer l'expression de $\partial_t\gamma^\epsilon$ et $\partial_t\delta^\epsilon$:

$$\begin{aligned}
\partial_t\gamma^\epsilon(x,t) = &-\frac{1}{2}\,\partial_x\left(q_1^\epsilon\Big(\rho^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\right) - \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\gamma+1}{4}\,\partial_x\Big(\big(f^\epsilon(x,t)\big)^2 - \big(F(x,t)\big)^2\Big)\\
&+ \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\gamma-3}{4}\,\partial_x\left(\Big(B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2 - \Big(b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\right)\\
&- \frac{1}{\epsilon}\,\frac{2\overline{u}+(\gamma-1)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\big(f^\epsilon(x,t)-F(x,t)\big)\\
&- \frac{1}{\epsilon}\,\frac{(3-\gamma)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\Big(B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) - b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\\
&- \frac{1}{\epsilon}\,\frac{3-\gamma}{2}\,\partial_x\Big(f^\epsilon(x,t)\,b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) - F(x,t)\,B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big) - (\partial_t W)\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\\
= &-\frac{1}{2}\,\partial_x\left(q_1^\epsilon\Big(\rho^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\right) - \frac{\gamma+1}{4}\,\partial_x\left(\Big(\gamma^\epsilon(x,t)+W\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\big(f^\epsilon(x,t)+F(x,t)\big)\right)\\
&+ \frac{\gamma-3}{4}\,\partial_x\left(\Big(\delta^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)+V\big(x+\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big(B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)+b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\right)\\
&- \frac{2\overline{u}+(\gamma-1)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\Big(\gamma^\epsilon(x,t)+W\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\\
&- \frac{(3-\gamma)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\Big(\delta^\epsilon\big(x,+\frac{2t}{\epsilon},t\big)+V\big(x+\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\\
&- \frac{3-\gamma}{2}\,\partial_x\Bigg(\Big(\gamma^\epsilon(x,t)+W\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\,b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\\
&\qquad\qquad - F(x,t)\,\Big(\delta^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)+V\big(x+\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Bigg) - (\partial_t W)\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \delta^\epsilon(x,t) = {} & \frac{1}{2}\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\Big(\rho^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) - \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\gamma+1}{4}\,\partial_x\Big(\big(B(x,t)\big)^2 - \big(b^\epsilon(x,t)\big)^2\Big) \\
& + \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\gamma-3}{4}\,\partial_x\Big(\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2 - \Big(F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\Big) \\
& - \frac{1}{\epsilon}\,\frac{2\overline{u}-(\gamma-1)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\big(B(x,t)-b^\epsilon(x,t)\big) \\
& - \frac{1}{\epsilon}\,\frac{(3-\gamma)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big) - F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big) \\
& + \frac{1}{\epsilon}\,\frac{3-\gamma}{2}\,\partial_x\Big(b^\epsilon(x,t)\,f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big) - B(x,t)\,F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big) - (\partial_t V)\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \delta^\epsilon(x,t) = {} & \frac{1}{2}\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\Big(\rho^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) - \frac{\gamma+1}{4}\,\partial_x\Big(\Big(\delta^\epsilon(x,t)+V\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\big(B(x,t)+b^\epsilon(x,t)\big)\Big) \\
& + \frac{\gamma-3}{4}\,\partial_x\Big(\Big(\gamma^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)+W\big(x-\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)+F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) \\
& - \frac{2\overline{u}-(\gamma-1)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\Big(\delta^\epsilon(x,t)+V\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big) \\
& - \frac{(3-\gamma)\,\overline{\rho}}{4\pi}\,\partial_x\Big(\gamma^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)+W\big(x-\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big) \\
& + \frac{3-\gamma}{2}\,\partial_x\Big(\Big(\gamma^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)+W\big(x-\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\,b^\epsilon(x,t) \\
& \qquad - F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\Big(\delta^\epsilon(x,t)+V\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) - (\partial_t V)\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\,.
\end{aligned}
$$

Nous définissons $\alpha, \beta_+, \beta_-, \zeta, \Gamma^\epsilon$ et Δ^ϵ par

$$
\alpha = \frac{\gamma+1}{4}\,, \quad \beta_+ = \frac{2\overline{u}+(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,, \quad \beta_- = \frac{2\overline{u}-(\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\,, \quad \zeta = \frac{\gamma-3}{2}\,, \tag{2.105}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\epsilon(x,t) = {} & -\frac{1}{2}\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\Big(\rho^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) - \alpha\,\partial_x\Big(W\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\big(f^\epsilon(x,t)+F(x,t)\big)\Big) \\
& + \frac{\zeta}{2}\,\partial_x\Big(V\big(x+\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big(B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)+b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) \\
& - \beta_+\,\partial_x W\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big) - \frac{\zeta\,\overline{\rho}}{2\pi}\,\partial_x V\big(x+\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big) \\
& - \zeta\,\partial_x\Big(F(x,t)\,V\big(x+\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big) - b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,W\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big) - \partial_t W\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\,,
\end{aligned} \tag{2.106}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\Delta^\epsilon(x,t) = {} & \frac{1}{2}\,\partial_x\Big(q_1^\epsilon\Big(\rho^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) - \alpha\,\partial_x\Big(V\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\big(B(x,t)+b^\epsilon(x,t)\big)\Big) \\
& + \frac{\zeta}{2}\,\partial_x\Big(W\big(x-\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)+F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\Big) \\
& - \beta_-\,\partial_x V\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big) + \frac{\zeta\,\overline{\rho}}{2\pi}\,\partial_x W\big(x-\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big) - \big(\partial_t V\big)\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big) \\
& - \zeta\,\partial_x\Big(W\big(x-\frac{2t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)b^\epsilon(x,t) - F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,V\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\,.
\end{aligned} \tag{2.107}
$$

Ces définitions permettent de siplifier l'expression de $\partial_t \gamma^\epsilon(x,t)$ et de $\partial_t \delta^\epsilon(x,t)$. En effet, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\partial_t \gamma^\epsilon(x,t) = &\Big(-\alpha \big(f^\epsilon(x,t) + F(x,t)\big) + \zeta\, b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - \beta_+ \Big)\, \partial_x \gamma^\epsilon(x,t) \\
&+ \Big(-\alpha\, \partial_x \big(f^\epsilon(x,t) + F(x,t)\big) + \zeta\, \partial_x b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)\, \gamma^\epsilon(x,t) \\
&+ \frac{\zeta}{2} \Big(B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - 2F^\epsilon(x,t) - \frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\, \partial_x \delta^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \\
&+ \zeta\, \partial_x \Big(B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - 2F^\epsilon(x,t)\Big)\, \delta^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \\
&+ \Gamma^\epsilon(x,t)\,,
\end{aligned} \tag{2.108}$$

et

$$\begin{aligned}
\partial_t \delta^\epsilon(x,t) = &\Big(-\alpha \big(B(x,t) + b^\epsilon(x,t)\big) + \zeta\, F\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - \beta_- \Big)\, \partial_x \delta^\epsilon(x,t) \\
&+ \Big(-\alpha \partial_x \big(B(x,t) + b^\epsilon(x,t)\big) + \zeta\, \partial_x F\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big)\, \delta^\epsilon(x,t) \\
&+ \frac{\zeta}{2} \Big(f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + F(x - \frac{2t}{\epsilon}, t) - 2b^\epsilon(x,t) + \frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\, \partial_x \gamma^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \\
&+ \zeta\, \partial_x \Big(f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + F(x - \frac{2t}{\epsilon}, t) - 2b^\epsilon(x,t)\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) \\
&+ \Delta^\epsilon(x,t)\,.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

En multipliant (2.108) par $2\gamma^\epsilon(x,t)$ et (2.109) par $2\delta^\epsilon(x,t)$, puis en intégrant sur $[0, 2\pi]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\partial_t \Big(\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} \Big) \\
&\quad = 2\gamma^\epsilon(x,t)\, \partial_t \gamma^\epsilon(x,t) + 2\delta^\epsilon(x,t)\, \partial_t \delta^\epsilon(x,t) \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \Big(-\alpha\, \partial_x \big(f^\epsilon(x,t) + F(x,t)\big) + \zeta\, \partial_x b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big) \big(\gamma^\epsilon(x,t)\big)^2\, dx \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \Big(-\alpha\, \partial_x \big(B(x,t) + b^\epsilon(x,t)\big) + \zeta\, \partial_x F\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\Big) \big(\delta^\epsilon(x,t)\big)^2\, dx \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \zeta\, \partial_x \Big(B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - 2F(x,t)\Big)\, \gamma^\epsilon(x,t)\, \delta^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, dx \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \zeta\, \partial_x \Big(f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + F(x - \frac{2t}{\epsilon}, t) - 2b^\epsilon(x,t)\Big)\, \delta^\epsilon(x,t)\, \gamma^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, dx \\
&\qquad + 2\int_0^{2\pi} \Gamma^\epsilon(x,t)\, \gamma^\epsilon(x,t)\, dx + 2\int_0^{2\pi} \Delta^\epsilon(x,t)\, \delta^\epsilon(x,t)\, dx \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \zeta \Big(B\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + b^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big) - 2F(x,t) - \frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\, \gamma^\epsilon(x,t)\, \partial_x \delta^\epsilon\big(x + \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, dx \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \zeta \Big(f^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big) + F(x - \frac{2t}{\epsilon}, t) - 2b^\epsilon(x,t) + \frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\, \delta^\epsilon(x,t)\, \partial_x \gamma^\epsilon\big(x - \frac{2t}{\epsilon}, t\big)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Rappelons que

- les suites $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont bornées indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T; H^s_\#([0,2\pi])\big)$,
- F et B sont dans $L^\infty\big(0,T; H^s_\#([0,2\pi])\big)$,
- $(\Gamma^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\Delta^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont bornées indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T; H^{s-2}_\#([0,2\pi])\big)$,
- l'inclusion $H^m_\#\big([0,2\pi]\big) \subset L^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)$ est compacte pour tout $m > 1/2$.

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous majorons les 6 premières intégrales par des bornes dépendant de $\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}$ et $\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}$: plus précisément, il existe des constantes $C_1,\dots,C_6>0$ indépendantes de ϵ et de t telles que

$$\int_0^{2\pi}\Big(-\alpha\,\partial_x\big(f^\epsilon(x,t)+F(x,t)\big)+\zeta\,\partial_x b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\big(\gamma^\epsilon(x,t)\big)^2\,dx \le C_1\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\,, \tag{2.110}$$

$$\int_0^{2\pi}\Big(-\alpha\,\partial_x\big(b^\epsilon(x,t)+B(x,t)\big)+\zeta\,\partial_x F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\Big)\big(\delta^\epsilon(x,t)\big)^2\,dx \le C_2\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\,, \tag{2.111}$$

$$\int_0^{2\pi}\zeta\,\partial_x\Big(B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)+b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)-2F(x,t)\Big)\,\delta^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\gamma^\epsilon(x,t)\,dx \le C_3\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,, \tag{2.112}$$

$$\int_0^{2\pi}\zeta\,\partial_x\Big(F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)+f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)-2b^\epsilon(x,t)\Big)\,\gamma^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,\delta^\epsilon(x,t)\,dx \le C_4\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,, \tag{2.113}$$

$$2\int_0^{2\pi}\Gamma^\epsilon(x,t)\,\gamma^\epsilon(x,t)\,dx \le C_5\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,, \tag{2.114}$$

$$2\int_0^{2\pi}\Delta^\epsilon(x,t)\,\delta^\epsilon(x,t)\,dx \le C_6\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,. \tag{2.115}$$

Afin de terminer la démonstration du lemme 12, nous devons encore majorer la somme

$$\int_0^{2\pi}\zeta\Big(B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)+b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)-2f^\epsilon(x,t)-\frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\,\gamma^\epsilon(x,t)\,\partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,dx$$
$$+\int_0^{2\pi}\zeta\Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)+F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)-2b^\epsilon(x,t)+\frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\,\delta^\epsilon(x,t)\,\partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\,dx\,.$$

Pour cela, nous procédons à des changements de variables dans chacune des 2 intégrales :

$$
\begin{aligned}
&\zeta \int_0^{2\pi} \Big(b^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) + B\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big) - 2f^\epsilon(x,t) - \frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{2t}{\epsilon},t\big)\, \gamma^\epsilon(x,t)\, dx \\
&\quad + \zeta \int_0^{2\pi} \Big(f^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big) + F\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big) - 2b^\epsilon(x,t) + \frac{\overline{\rho}}{\pi}\Big)\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{2t}{\epsilon},t\big)\, \delta^\epsilon(x,t)\, dx \\
&\quad = \zeta \int_0^{2\pi} \Big(b^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) - B\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad + 2\zeta \int_0^{2\pi} \Big(F\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - f^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad - 2\zeta \int_0^{2\pi} \Big(F\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - B\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad + \zeta \int_0^{2\pi} \Big(f^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - F\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad + 2\zeta \int_0^{2\pi} \Big(B\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) - b^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad + 2\zeta \int_0^{2\pi} \Big(F\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - B\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\, \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\quad = \zeta \int_0^{2\pi} \epsilon \Big(\partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad + \zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) \Big(W\big(x-\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big) + 2V\big(x+\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad - \zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) \Big(V\big(x+\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big) + 2W\big(x-\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad - 2\zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) \Big(\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\, dx \\
&\qquad + 2\zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) \Big(\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\, dx \\
&\qquad + 2\zeta \int_0^{2\pi} R\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big) \Big(\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, dx\,.
\end{aligned}
$$

Rappelons que les suites $(\epsilon\,\gamma^\epsilon)_{\epsilon\in]0,\epsilon_0]}$ et $(\epsilon\,\delta^\epsilon)_{\epsilon\in]0,\epsilon_0]}$ sont bornées indépendamment de ϵ dans l'espace $\mathcal{C}\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big) \cap \mathcal{C}^1\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^{s-2}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$. Par ailleurs, le fait de supposer $s > 5/2$ permet d'avoir l'inclusion compacte $H^{s-2}_\#\big([0,2\pi]\big) \subset L^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)$. Nous en déduisons alors que les suites $(\epsilon\,\gamma^\epsilon)_{\epsilon\in]0,\epsilon_0]}$ et $(\epsilon\,\delta^\epsilon)_{\epsilon\in]0,\epsilon_0]}$ sont bornées indépendamment de ϵ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$. Alors en utilisant les inégalités de Hölder et de Cauchy-Schwarz, nous pouvons affirmer qu'il existe des constantes $C_7,\dots,C_{11} > 0$ indépendantes de ϵ et de t telles que

$$
\begin{aligned}
&\zeta \int_0^{2\pi} \epsilon \Big(\partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad\qquad \le C_7 \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,,
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

$$
\begin{aligned}
&\zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) \Big(W\big(x-\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big) + 2V\big(x+\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad\qquad \le C_8 \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,,
\end{aligned}
\tag{2.117}
$$

$$
\begin{aligned}
&\zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big) \Big(V\big(x+\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big) + 2W\big(x-\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, dx \\
&\qquad\qquad \le C_9 \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,,
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$

$$2\zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x \delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \Big(\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\, dx \le C_{10} \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\,, \tag{2.119}$$

$$2\zeta \int_0^{2\pi} \epsilon\, \partial_x \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \Big(\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)^2\, dx \le C_{11} \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])}\,. \tag{2.120}$$

Le traitement de la dernière intégrale est un peu délicat. Pour tout $\tau \in [0,2\pi]$, nous avons

$$\begin{aligned}
&2\zeta \int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\, \big(\delta^\epsilon(x+\tau,t)\, \partial_x\gamma^\epsilon(x-\tau,t) - \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \partial_x\delta^\epsilon(x+\tau,t)\big)\, dx \\
&\quad = -2\zeta \int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\, \partial_\tau\big(\gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\big)\, dx \\
&\quad = -2\zeta\, \partial_\tau \bigg(\int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\, dx \bigg) \\
&\qquad + 2\zeta \int_0^{2\pi} \partial_\tau R(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x+\tau,t)\, \delta^\epsilon(x-\tau,t)\, dx \\
&\quad = -2\zeta\, \partial_\tau \bigg(\int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\, dx \bigg) \\
&\qquad - 2\zeta \int_0^{2\pi} \partial_x U(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Etant donné que $U \in L^\infty\big(0,T; L^\infty_\#\big([0,2\pi]; H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$, nous en déduisons qu'il existe une constante $C_{12} > 0$ indépendante de ϵ et t, telle que, pour tout $\tau \in [0,2\pi]$, nous obtenons

$$2\zeta \int_0^{2\pi} \partial_x U(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\, dx \le C_{12}\, \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,. \tag{2.121}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&2\zeta \int_0^{2\pi} R\big(x,\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \Big(\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big) - \gamma^\epsilon\big(x-\frac{t}{\epsilon},t\big)\, \partial_x\delta^\epsilon\big(x+\frac{t}{\epsilon},t\big)\Big)\, dx \\
&\qquad \le C_{12}\, \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\qquad\quad - (\gamma-3) \bigg[\partial_\tau \bigg(\int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\, dx \bigg) \bigg]_{|_{\tau=\frac{t}{\epsilon}}}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

En rassemblant les inégalités (2.110)-(2.122), nous obtenons l'inégalité (2.104) en posant

$$M = \max\big(C_1 + C_{10}, C_2 + C_{11}, C_3 + C_4 + C_7 + C_{12}, C_5 + C_9, C_6 + C_8\big)\,, \tag{2.123}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 12. □

Terminons maintenant la démonstration du lemme 11. Nous définissons la fonction g^ϵ sur $[0,2\pi] \times [0,T)$ par

$$g^\epsilon(\tau,t) = -2\zeta \int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\, dx\,, \tag{2.124}$$

puis $\tilde{g}^\epsilon(t) = g^\epsilon(\frac{t}{\epsilon},t)$. Alors nous avons

$$-2\zeta \bigg[\partial_\tau \bigg(\int_0^{2\pi} R(x,\tau,t)\, \gamma^\epsilon(x-\tau,t)\, \delta^\epsilon(x+\tau,t)\, dx \bigg) \bigg]_{|_{\tau=\frac{t}{\epsilon}}} = \epsilon\, \partial_t \tilde{g}^\epsilon(t) - \epsilon\, (\partial_t g^\epsilon)\big(\frac{t}{\epsilon},t\big)\,. \tag{2.125}$$

Alors en intégrant (2.104) sur $[0,t]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\quad\le \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,0)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,0)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \epsilon\,\tilde g^\epsilon(t) - \epsilon\,\tilde g^\epsilon(0) + \epsilon\int_0^t (\partial_s g^\epsilon)\big(\frac{s}{\epsilon},s\big)\,ds \\
&\qquad + M\int_0^t \Big(\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\qquad\qquad + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\Big)\,ds\,.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Etant donné que $f^\epsilon(\cdot,0) = F(\cdot,0) = f_0$ et $b^\epsilon(\cdot,0) = B(\cdot,0) = b_0$, il est clair que

$$\forall\, x \in [0,2\pi]\,, \qquad \gamma^\epsilon(x,0) = \delta^\epsilon(x,0) = 0\,. \tag{2.127}$$

Nous en déduisons également $\tilde g^\epsilon(0) = g^\epsilon(0,0) = 0$. De ce fait, nous avons

$$\begin{aligned}
&\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\quad\le \epsilon\,\tilde g^\epsilon(t) + \epsilon\int_0^t (\partial_s g^\epsilon)\big(\frac{s}{\epsilon},s\big)\,ds \\
&\qquad + M\int_0^t \Big(\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|^2_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\qquad\qquad + \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} + \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\Big)\,ds\,,
\end{aligned} \tag{2.128}$$

pour tout t.

Rappelons que l'objectif est de démontrer une inégalité de la forme (2.101). Nous cherchons donc à établir une majoration de $\epsilon\,\tilde g^\epsilon(t)$ et de $\epsilon\displaystyle\int_0^t (\partial_s g^\epsilon)\big(\frac{s}{\epsilon},s\big)\,ds$.

Etant donné que $R \in L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$ et que γ^ϵ et δ^ϵ sont continues en t, l'inégalité de Hölder permet d'affirmer qu'il existe une constante C_{13} indépendante de t et ϵ telle que

$$\begin{aligned}
\big|\tilde g^\epsilon(t)\big| &\le C_{13}\,\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\le C_{13}\int_0^t \big\|\gamma^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,s)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,ds\,,
\end{aligned} \tag{2.129}$$

pour tout t.

Etant donné que F et B sont dans l'espace $\mathcal{C}\big(0,T;H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big) \cap \mathcal{C}^1\big(0,T;H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, nous en déduisons que la fonction $(x,\tau,t) \mapsto \partial_t R(x,\tau,t)$ est dans $\mathcal{C}\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];H^{s-1}_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)$. De ce fait, il existe une constante $C_{14} > 0$ indépendante de ϵ et de t telle que

$$\begin{aligned}
\epsilon\,\big|\partial_t g^\epsilon(\tau,t)\big| &\le 2\epsilon\,|\zeta|\int_0^{2\pi} \big|\partial_t R(x,\tau,t)\,\gamma^\epsilon(x-\tau,t)\,\delta^\epsilon(x+\tau,t)\big|\,dx \\
&\qquad + 2\epsilon\,|\zeta|\int_0^{2\pi} \big|R(x,\tau,t)\,\partial_t\gamma^\epsilon(x-\tau,t)\,\delta^\epsilon(x+\tau,t)\big|\,dx \\
&\qquad + 2\epsilon\,|\zeta|\int_0^{2\pi} \big|R(x,\tau,t)\,\gamma^\epsilon(x-\tau,t)\,\partial_t\delta^\epsilon(x+\tau,t)\big|\,dx \\
&\le \epsilon\,C_{14}\,\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\qquad + C_{14}\,\big\|\epsilon\,\partial_t\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \\
&\qquad + C_{14}\,\big\|\gamma^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])} \times \big\|\epsilon\,\partial_t\delta^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_\#([0,2\pi])}\,,
\end{aligned} \tag{2.130}$$

pour tout $(\tau, t) \in [0, 2\pi] \times [0, T)$. Rappelons que $(\epsilon\, \partial_t \gamma^\epsilon)_{\epsilon \in]0,\epsilon_0]}$ et $(\epsilon\, \partial_t \delta^\epsilon)_{\epsilon \in]0,\epsilon_0]}$ sont bornées indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0, T; H^{s-1}_{\#}\big([0, 2\pi]\big)\big)$. Nous en déduisons alors l'existence d'une constante $C'_{14} > 0$ indépendante de ϵ et de t telle que

$$\begin{aligned}\left|\epsilon \int_0^t (\partial_s g^\epsilon)\big(\frac{s}{\epsilon}, s\big)\, ds\right| \leq C'_{14} \int_0^t \Big(&\big\|\gamma^\epsilon(\cdot, t)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot, t)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])} \\ &+ \big\|\gamma^\epsilon(\cdot, t)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, t)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])}\Big)\, dt\,,\end{aligned} \tag{2.131}$$

pour tout t. En combinant (2.128), (2.129) et (2.131), nous pouvons affirmer qu'il existe une constante $M' > 0$ indépendante de ϵ et de t telle que

$$\begin{aligned}&\big\|\gamma^\epsilon(\cdot, t)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, t)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} \\ &\quad \leq M' \int_0^t \Big(\big\|\gamma^\epsilon(\cdot, s)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, s)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\gamma^\epsilon(\cdot, s)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])} \\ &\qquad + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, s)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\gamma^\epsilon(\cdot, s)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])} \times \big\|\delta^\epsilon(\cdot, s)\big\|_{L^2_{\#}([0,2\pi])}\Big)\, ds\,,\end{aligned} \tag{2.132}$$

pour tout $t \in [0, T)$. En utilisant le fait que pour tout $a, b \geq 0$, nous avons $a \leq \sqrt{2}\,(a^2 + 1)$ et $2ab \leq a^2 + b^2$, nous avons finalement

$$\begin{aligned}&\big\|\gamma^\epsilon(\cdot, t)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, t)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} \\ &\quad \leq M' \int_0^t \Big[\big(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\big) \Big(\big\|\gamma^\epsilon(\cdot, s)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, s)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])}\Big) + 2\sqrt{2}\Big]\, ds \\ &\quad \leq 2\sqrt{2}\, M'\, T + \big(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\big)\, M' \int_0^t \Big(\big\|\gamma^\epsilon(\cdot, s)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, s)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])}\Big)\, ds\,.\end{aligned} \tag{2.133}$$

Nous reconnaissons alors l'inégalité (2.101) avec $K_1 = 2\sqrt{2}M'T$ et $K_2 = (\frac{3}{2} + \sqrt{2})\, M'$. Comme cela est suggéré à la page 39, nous appliquons le lemme de Grönwall, ce qui prouve ainsi l'existence d'une constante $L > 0$ indépendante de ϵ et de t telle que

$$\big\|\gamma^\epsilon(\cdot, t)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} + \big\|\delta^\epsilon(\cdot, t)\big\|^2_{L^2_{\#}([0,2\pi])} \leq L\,. \tag{2.134}$$

□

3 Méthode de volumes finis 2-échelles

Rappelons que l'objectif est de développer une méthode numérique 2-échelles permettant de résoudre (2.32) de manière précise et peu coûteuse en temps de calcul. En utilisant les résultats de convergence sur les suites $(f^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ et $(b^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ du théorème 9, nous pouvons approcher la solution $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$ de (2.32) de la façon suivante :

1. Nous approchons la solution (F, B) de (2.54) par un couple (F_h, B_h) construit à l'aide d'une méthode numérique de volumes finis,
2. Nous construisons les fonctions U_h et R_h en nous inspirant du lien entre (U, R) et (F, B) en (2.50) :

$$\begin{aligned}U_h(x, \tau, t) &= F_h(x - \tau, t) + B_h(x + \tau, t) + \frac{\overline{u}}{2\pi}\,, \\ R_h(x, \tau, t) &= F_h(x - \tau, t) - B_h(x + \tau, t) + \frac{\overline{\rho}}{2\pi}\,,\end{aligned} \tag{2.135}$$

3. Nous considérons enfin l'approximation $(U^\epsilon_h, R^\epsilon_h)$ de $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$ définie par

$$U^\epsilon_h(x, t) = U_h\big(x, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\,, \qquad R^\epsilon_h(x, t) = R_h\big(x, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\,. \tag{2.136}$$

Si la méthode permettant de calculer (F_h, B_h) est convergente, alors $(U_h^\epsilon, R_h^\epsilon)$ converge vers la fonction $\big(U(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot), R(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)\big)$ lorsque h tend vers 0. Par ailleurs, grâce aux résultats démontrés dans le théorème 10, nous savons que les erreurs $u^\epsilon - U(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)$ et $\rho^\epsilon - R(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)$ sont d'ordre ϵ. Alors en faisant tendre ϵ et h vers 0, l'approximation $(U_h^\epsilon, R_h^\epsilon)$ construite ci-dessus approchera la solution exacte $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$ de (2.32).

La principale difficulté consiste donc à calculer une approximation de la solution (F, B) du système (2.54). Nous proposons d'utiliser une méthode de volumes finis très simple à implémenter : la méthode de Roe.

3.1 Introduction à la méthode de volumes finis de Roe

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques éléments concernant les méthodes de volumes finis et la construction d'un schéma de Roe. De plus amples détails peuvent être trouvés dans les travaux de S.-K. Godunov [32], P.-L. Roe [56] et R. LeVeque [45].

Nous considérons le modèle suivant

$$\partial_t w + \partial_x \big(f(w)\big) = 0\,, \tag{2.137}$$

où $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $w = w(x,t) \in \mathbb{R}^m$ est la solution à approcher, et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est donnée. Nous supposons également que le système est hyperbolique, c'est-à-dire que la jacobienne de f est diagonalisable et à valeurs propres réelles.

Une méthode de volumes finis consiste, de manière générale, à approcher $w(x_i, t_n)$ par w_i^n défini par

$$w_i^n = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w(x, t_n)\, dx\,. \tag{2.138}$$

Nous supposons ici que les points $x_{i-1/2}$ sont répartis de manière uniforme sur $\mathbb{R}$, et nous notons h la taille d'une maille. Nous définissons également le pas de temps Δt de la méthode par

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n\,. \tag{2.139}$$

Alors en intégrant sur $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\times[t_n, t_{n+1}[$, nous obtenons

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{h} \left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right), \tag{2.140}$$

où $f_{i-1/2}^n$ est une approximation de

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(w(x_{i-1/2}, t)\big)\, dt\,. \tag{2.141}$$

Cas linéaire : le flux décentré

Supposons que le système (2.137) est linéaire, c'est-à-dire que $A(w) = \mathrm{Jac}_w f(w)$ ne dépend pas de w et est à coefficients constants. En dimension $m = 1$, nous avons donc affaire à une équation de transport de la forme

$$\partial_t w + a\, \partial_x w = 0\,. \tag{2.142}$$

Selon le signe de a, le transport du fluide se fait de la gauche vers la droite ou bien de la droite vers la gauche comme l'illustrent les figures 2.1 et 2.2.

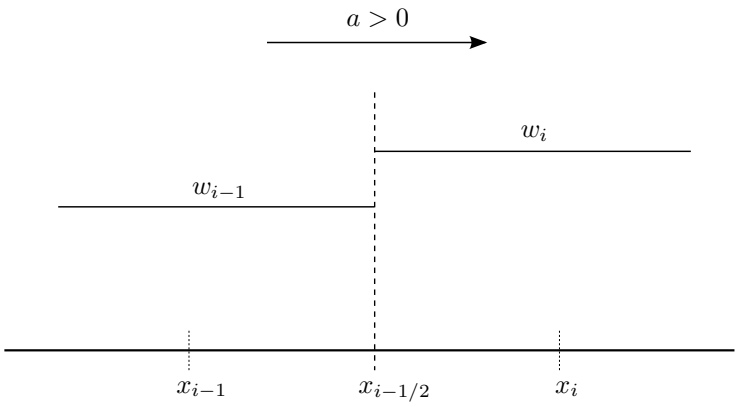


FIGURE 2.1 – Le transport se fait de la gauche vers la droite.

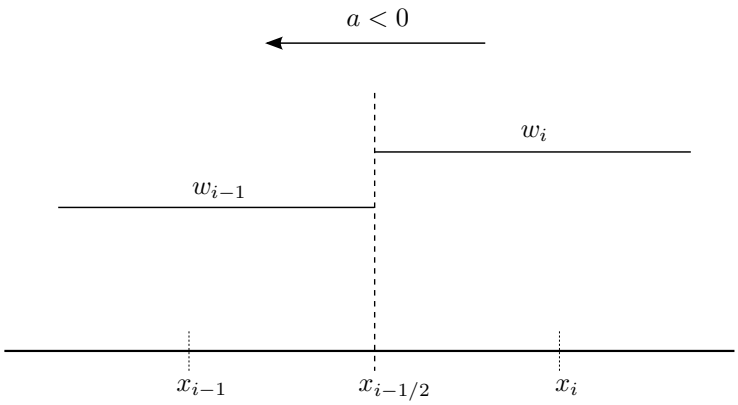


FIGURE 2.2 – Le transport se fait de la droite vers la gauche.

Nous proposons le flux numérique dit *décentré* défini par

$$\begin{aligned} f_{i-1/2} &= \begin{cases} a\, w_{i-1} & \text{si } a < 0, \\ a\, w_i & \text{si } a > 0, \end{cases} \\ &= a^+\, w_i + a^-\, w_{i-1} = \frac{a}{2}\,(w_i + w_{i-1}) - \frac{|a|}{2}\,(w_i - w_{i-1})\,, \end{aligned} \tag{2.143}$$

où $a^+ = \max(a, 0)$ et $a^- = \min(a, 0)$.

En dimension m quelconque, nous utilisons le fait que le système (2.137) est hyperbolique en exhibant une matrice $R \in GL_m(\mathbb{R})$ telle que

$$\Lambda = R\,A\,R^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}, \tag{2.144}$$

où $A = A(w)$ est la jacobienne de f. De ce fait, en posant $W = R^{-1}w$, le système (2.137) se réécrit sous la forme suivante :

$$\partial_t W + \Lambda\, \partial_x W = 0\,, \tag{2.145}$$

ce qui correspond à m équations de transport. En définissant la matrice $|\Lambda|$ par

$$|\Lambda| = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_m| \end{pmatrix}, \tag{2.146}$$

la méthode de volumes finis à flux décentré permettant de résoudre (2.145), s'écrit

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{h}\big(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\big), \tag{2.147}$$

où le flux numérique est défini par

$$f_{i-1/2} = \frac{1}{2}\,\Lambda\,(W_i + W_{i-1}) - \frac{1}{2}\,|\Lambda|\,(W_i - W_{i-1}). \tag{2.148}$$

Enfin, en appliquant le changement de variables permettant de passer de W à w, nous obtenons la méthode de volumes finis à flux décentré résolvant (2.137) :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{h}\big(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\big), \tag{2.149}$$

où le flux numérique s'écrit

$$f_{i-1/2} = \frac{1}{2}\,A\,(w_i + w_{i-1}) - \frac{1}{2}\,|A|\,(w_i - w_{i-1}), \tag{2.150}$$

avec $|A| = R^{-1}\,|\Lambda|\,R$.

Cas non-linéaire : la linéarisation de Roe

Nous avons exposé ci-dessus une méthode de volumes finis très simple à implémenter pour un modèle linéaire. Or, dans la plupart des cas, nous avons affaire à un modèle non-linéaire de la forme

$$\partial_t w + A(w)\,\partial_x w = 0, \qquad A(w) = \mathrm{Jac}_w f(w). \tag{2.151}$$

P.-L. Roe propose dans [56] de remplacer à chaque interface $x_{i-1/2}$ le système non-linéaire ci-dessus par un système linéaire de la forme

$$\partial_t w + \hat{A}(w_{i-1}, w_i)\,\partial_x w = 0. \tag{2.152}$$

Ainsi, il serait possible de construire une méthode de volumes finis en approchant la solution w de (2.151) par w_h défini par

$$w_h(x,t) = w_i^n, \qquad \forall\,(x,t) \in]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\times[t_n, t_{n+1}[, \tag{2.153}$$

où les w_i^n sont calculés de la façon suivante :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{h}\big(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\big), \tag{2.154}$$

où le flux numérique s'écrit

$$f_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}\,\hat{A}(w_{i-1}^n, w_i^n)\,(w_i^n + w_{i-1}^n) - \frac{1}{2}\,\big|\hat{A}(w_{i-1}^n, w_i^n)\big|\,(w_i^n - w_{i-1}^n), \tag{2.155}$$

Il suffit donc de trouver une "bonne" matrice $\hat{A}(w_{i-1}^n, w_i^n)$. Roe propose dans [56] les critères suivants :

1. pour tous w_L, w_R la matrice $\hat{A}(w_L, w_R)$ doit être diagonalisable et à valeurs propres réelles (préservation du caractère hyperbolique du système après linéarisation),
2. pour $w_L \to w$ et $w_R \to w$, la matrice $\hat{A}(w_L, w_R)$ converge vers $A(w)$,
3. w_h doit satisfaire à chaque interface $x_{i-1/2}$ les conditions de saut suivantes :

$$\hat{A}(w_{i-1}^n, w_i^n)\,(w_i^n - w_{i-1}^n) = f(w_i^n) - f(w_{i-1}^n). \tag{2.156}$$

3.2 Application au modèle limite

Plusieurs méthodes de calculs de matrices de Roe ont été développées notamment pour les équations d'Euler ou de Saint-Venant, cependant elles ne sont pas nécessaires pour trouver une matrice de Roe pour le modèle (2.54). En effet, la matrice jacobienne de ce système est diagonale et de la forme

$$A(F,B) = \begin{pmatrix} 2\alpha\, F + \beta_+ & 0 \\ 0 & 2\alpha\, B + \beta_- \end{pmatrix}, \tag{2.157}$$

où α, β_+ et β_- sont définis en (2.105). Alors la matrice $A_{i-1/2}$ définie par

$$A_{i-1/2} = \begin{pmatrix} \alpha\,(F_i + F_{i-1}) + \beta_+ & 0 \\ 0 & \alpha\,(B_i + B_{i-1}) + \beta_- \end{pmatrix} \tag{2.158}$$

est une matrice de Roe. En effet, c'est une matrice diagonale à valeurs propres réelles, elle converge vers $A(F,B)$ lorsque $F_i, F_{i-1} \to F$ et $B_i, B_{i-1} \to B$, et elle vérifie à l'interface $x_{i-1/2}$ la condition de saut suivante :

$$A_{i-1/2} \begin{pmatrix} F_i - F_{i-1} \\ B_i - B_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,(F_i)^2 + \beta_+\, F_i \\ \alpha\,(B_i)^2 + \beta_-\, B_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha\,(F_{i-1})^2 + \beta_+\, F_{i-1} \\ \alpha\,(B_{i-1})^2 + \beta_-\, B_{i-1} \end{pmatrix}. \tag{2.159}$$

Alors l'approximation (F_h, B_h) que l'on recherchait est donnée par

$$F_h(x,t) = F_i^n\,, \quad B_h(x,t) = B_i^n\,, \quad \forall\,(x,t) \in \,]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\times[t_n, t_{n+1}[\,, \tag{2.160}$$

où F_i^n et B_i^n sont calculés par

$$\begin{aligned} F_i^{n+1} = F_i^n - \frac{\Delta t}{2h}\Big(&\alpha\left((F_{i+1}^n)^2 - (F_{i-1}^n)^2\right) + \beta_+\,(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \\ &- \big|\alpha\,(F_{i+1}^n + F_i^n) + \beta_+\big|(F_{i+1}^n - F_i^n) \\ &+ \big|\alpha\,(F_i^n + F_{i-1}^n) + \beta_+\big|(F_i^n - F_{i-1}^n)\Big), \end{aligned} \tag{2.161}$$

$$\begin{aligned} B_i^{n+1} = B_i^n - \frac{\Delta t}{2h}\Big(&\alpha\left((B_{i+1}^n)^2 - (B_{i-1}^n)^2\right) + \beta_-\,(B_{i+1}^n - B_{i-1}^n) \\ &- \big|\alpha\,(B_{i+1}^n + B_i^n) + \beta_-\big|(B_{i+1}^n - B_i^n) \\ &+ \big|\alpha\,(B_i^n + B_{i-1}^n) + \beta_-\big|(B_i^n - B_{i-1}^n)\Big). \end{aligned} \tag{2.162}$$

La condition CFL que doit vérifier le pas de temps Δt est la suivante :

$$\frac{\Delta t}{h} \times \max\Big(\max_{i,n}\big|\alpha\,(F_i^n + F_{i-1}^n) + \beta_+\big|\,,\, \max_{i,n}\big|\alpha\,(B_i^n + B_{i-1}^n) + \beta_-\big|\Big) \le 1\,. \tag{2.163}$$

Nous pouvons alors établir le résultat de convergence numérique suivant :

Théorème 13. *Supposons que $s > 3/2$ et que la condition CFL (2.163) est vérifiée à chaque pas de temps. Alors l'approximation (F_h, B_h) définie par (2.160)-(2.161)-(2.162) converge vers une solution faible du système (2.54) dans $L^1\big([0,T]; L^1_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ lorsque h tend vers 0. De plus, l'erreur de troncature locale est d'ordre 1.*

Démonstration. Commençons par remarquer que les équations vérifiées par F et B sont toutes les deux de la forme

$$\partial_t q + \partial_x\big(f(q)\big) = 0\,, \quad f(q) = \alpha\, q^2 + \beta\,, \quad q(x, t=0) = q_0(x)\,, \tag{2.164}$$

avec $\beta = \beta_+$ ou $\beta = \beta_-$. De la même manière, les fonctions F_h et B_h définies en (2.160)-(2.161)-(2.162) sont toutes deux de la forme Q_h définie par

$$Q_h(x,t) = Q_i^n \quad \forall\,(x,t) \in]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\times[t_n, t_{n+1}[\,, \tag{2.165}$$

avec Q_i^n défini par

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{h}\left(\mathcal{F}(Q_{i+1}^n, Q_i^n) - \mathcal{F}(Q_i^n, Q_{i-1}^n)\right), \tag{2.166}$$

où le flux numérique $\mathcal{F}$ est donné par

$$\mathcal{F}(Q_i, Q_{i-1}) = \frac{1}{2}\big(\alpha\,(Q_i + Q_{i-1}) + \beta\big)(Q_i + Q_{i-1}) - \frac{1}{2}\big|\alpha\,(Q_i + Q_{i-1}) + \beta\big|(Q_i - Q_{i-1})\,. \tag{2.167}$$

Avec ces notations, la condition CFL (2.163) se réécrit sous la forme

$$\frac{\Delta t}{h} \times \max_{i,n}\big|\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta_\pm\big| \le 1\,. \tag{2.168}$$

Pour tout $q \in L^1\big([0,T); L^1_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, nous définissons la *variation totale* de q par

$$TV_T(q) = \limsup_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}\int_0^T\int_0^{2\pi}\Big[\big|q(x+\eta,t) - q(x,t)\big| + \big|q(x,t+\eta) - q(x,t)\big|\Big]\,dx\,dt\,. \tag{2.169}$$

De ce fait, pour l'approximation Q_h calculée avec la méthode (2.165)-(2.166)-(2.167), nous avons

$$TV_T(Q_h) = \sum_{n=0}^{[\frac{T}{\Delta t}]-1}\big[\Delta t\,TV(Q^n) + \|Q^{n+1} - Q^n\|_1\big]\,, \tag{2.170}$$

avec $TV(Q) = \sum_i |Q_i - Q_{i-1}|$ et $\|Q\|_1 = h\sum_i |Q_i|$, et où $[\frac{T}{\Delta t}]$ désigne la partie entière de $\frac{T}{\Delta t}$. Nous définissons les sous-espaces $\mathcal{L}$ et $\mathcal{K}(R)$ de $L^1\big([0,T); L^1_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \Big\{q \in L^1\big([0,T); L^1_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\ :\ \int_0^{2\pi} q(x,t)\,dx = 0 \quad \forall\,t \in [0,T)\Big\}\,,\\ \mathcal{K}(R) &= \big\{q \in \mathcal{L}\ :\ TV_T(q) \le R\big\}\,.\end{aligned} \tag{2.171}$$

Il est clair que TV_T est une norme sur $\mathcal{L}$, et que $\mathcal{K}$ est de ce fait un sous-espace compact de $\mathcal{L}$ pour cette norme.

En appliquant le théorème 12.3 de [45], pour démontrer que la méthode numérique décrite en (2.165)-(2.166)-(2.167), il suffit de montrer que

- le flux numérique $\mathcal{F}$ défini en (2.167) est consistant, c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{Q_i\to q\\ Q_{i-1}\to q}} \mathcal{F}(Q_{i-1}, Q_i) = f(q)\,, \tag{2.172}$$

- le schéma est TV-stable, c'est-à-dire qu'il existe un $R > 0$ ne dépendant que de la donnée initiale q_0 et d'un $h_0 > 0$ fixé, tel que, pour tout $h \le h_0$, nous ayons $Q_h \in \mathcal{K}(R)$.

Il est évident que, de part sa définition, le flux numérique $\mathcal{F}$ est consistant. Démontrons maintenant que le schéma est TV-stable : pour cela, nous utilisons les 2 lemmes suivants :

Lemme 14. *Le schéma est à variation totale décroissante (TVD), c'est-à-dire*

$$TV(Q^{n+1}) \le TV(Q^n)\,, \qquad \forall\,n \ge 0\,. \tag{2.173}$$

Lemme 15. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|Q^{n+1} - Q^n\|_1 \leq 2h\, M_1$, avec $M_1 = TV(Q^0)$.*

En admettant ces 2 lemmes, nous en déduisons

$$TV_T(Q_h) \leq \sum_{n=0}^{[\frac{T}{\Delta t}]-1} \big[\Delta t M_1 + 2h\, M_1\big] \leq M_1\, T \left(1 + \frac{2h}{\Delta t}\right). \tag{2.174}$$

Alors le schéma est TV-stable : en effet, grâce à la condition CFL (2.168), nous avons

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\max\limits_{i,n} \left|\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta_\pm\right|} \leq \frac{1}{\max\limits_{i} \left|\alpha\,(Q_i^0 + Q_{i-1}^0) + \beta_\pm\right|}\,. \tag{2.175}$$

Nous en déduisons donc l'existence d'une constante R ne dépendant que de la condition initiale et de T telle que

$$TV_T(Q_h) \leq R\,, \tag{2.176}$$

pour tout h. Alors, quelque soit $h \in]0, h_0]$, Q_h est dans l'espace $\mathcal{K}(R)$ défini en (2.171).
La méthode étant consistante et TV-stable, nous en concluons que Q_h converge vers une fonction q dans $L^1\big([0,T); L^1_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ lorsque h tend vers 0. Enfin, le théorème de Lax-Wendroff indique que cette fonction q est une solution faible de (2.54).

Démontrons maintenant que l'erreur de troncature locale est d'ordre 1. Pour cela, nous considérons une solution $(x,t) \mapsto q(x,t)$ de (2.164) régulière en x et en t : l'erreur de troncature locale s'écrit alors

$$\begin{aligned} e(x_i,t_n) = \frac{q_i^n - q_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{2h}\Big(f(q_{i+1}^n) - f(q_{i-1}^n) - \big|\alpha\,(q_{i+1}^n + q_i^n) + \beta\big|(q_{i+1}^n - q_i^n) \\ + \big|\alpha\,(q_i^n + q_{i-1}^n) + \beta\big|(q_i^n - q_{i-1}^n)\Big)\,, \end{aligned} \tag{2.177}$$

où $q_i^n = q(x_i,t_n)$. En fonction du signe de $\alpha\,(q_i^n + q_{i-1}^n) + \beta$ et de $\alpha\,(q_{i+1}^n + q_i^n) + \beta$, nous distinguons 4 cas différents :

- Cas 1 : supposons que $\alpha\,(q_{i+1}^n + q_i^n) + \beta \geq 0$ et $\alpha\,(q_i^n + q_{i-1}^n) + \beta \geq 0$. Alors l'erreur de troncature locale s'écrit

$$e(x_i,t_n) = \frac{q_i^n - q_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{f(q_i^n) - f(q_{i-1}^n)}{h}\,. \tag{2.178}$$

  Etant donné que la solution q considérée est régulière, nous avons

$$e(x_i,t_n) = -\partial_t q(x_i,t_n) - \partial_x\Big(f\big(q(x_i,t_n)\big)\Big) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(h + \Delta t)\,. \tag{2.179}$$

- Cas 2 : supposons que $\alpha\,(q_{i+1}^n + q_i^n) + \beta \leq 0$ et $\alpha\,(q_i^n + q_{i-1}^n) + \beta \leq 0$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} e(x_i,t_n) &= \frac{q_i^n - q_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{f(q_{i+1}^n) - f(q_i^n)}{h} \\ &= -\partial_t q(x_i,t_n) - \partial_x\Big(f\big(q(x_i,t_n)\big)\Big) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h) \\ &= \mathcal{O}(h + \Delta t)\,. \end{aligned} \tag{2.180}$$

- Cas 3 : supposons que $\alpha\,(q_{i+1}^n + q_i^n) + \beta \geq 0$ et $\alpha\,(q_i^n + q_{i-1}^n) + \beta \leq 0$. Etant donné que q est régulière en x, cela signifie que la fonction λ définie par

$$\lambda(x) = \alpha\,\big(q(x,t_n) + q(x-h,t_n)\big) + \beta \tag{2.181}$$

  admet un zéro x_* dans $[x_i, x_{i+1}]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \lambda(x_i) &= \lambda(x_*) + \mathcal{O}(x_i - x_*) = \mathcal{O}(h)\,, \\ \lambda(x_{i+1}) &= \lambda(x_*) + \mathcal{O}(x_{i+1} - x_*) = \mathcal{O}(h)\,. \end{aligned} \tag{2.182}$$

De la même manière, nous avons

$$f'(q_i^n) = 2\alpha\, q_i^n + \beta = \lambda(x_{i+1}) + \mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(h)\,. \tag{2.183}$$

L'erreur de troncature locale s'écrit alors sous la forme suivante :

$$e(x_i,t_n) = \frac{q_i^n - q_i^{n+1}}{\Delta t} = -\partial_t q(x_i,t_n) + \mathcal{O}(\Delta t) = f'\big(q(x_i,t_n)\big)\,\partial_x q(x_i,t_n) + \mathcal{O}(\Delta t)\,. \tag{2.184}$$

En utilisant (2.183), nous obtenons

$$e(x_i,t_n) = \mathcal{O}(h+\Delta t)\,. \tag{2.185}$$

– Cas 4 : supposons que $\alpha\,(q_{i+1}^n + q_i^n) + \beta \le 0$ et $\alpha\,(q_i^n + q_{i-1}^n) + \beta \ge 0$. Nous appliquons la même méthode que dans le cas précédent : en construisant la fonction λ défini en (2.181), nous montrons qu'elle admet un zéro $x_* \in [x_i, x_{i+1}]$, et nous obtenons le résultat (2.183). Alors

$$\begin{aligned} e(x_i,t_n) &= \frac{q_i^n - q_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{f(q_{i+1}^n) - f(q_{i-1}^n)}{h} \\ &= -\partial_t q(x_i,t_n) - 2\partial_x\Big(f\big(q(x_i,t_n)\big)\Big) + \mathcal{O}(h+\Delta t) \\ &= -f'(q_i^n)\,\partial_x q(x_i,t_n) + \mathcal{O}(h+\Delta t) \\ &= \mathcal{O}(h+\Delta t)\,. \end{aligned} \tag{2.186}$$

Dans tous les cas, nous avons montré que l'erreur de troncature locale est en $\mathcal{O}(h+\Delta t)$, donc d'ordre 1. □

Démonstration du lemme 14. Commençons par développer $Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}$:

$$\begin{aligned} Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1} = Q_{i+1}^n - Q_i^n - \frac{\Delta t}{2h}\Big(& f(Q_{i+2}^n) - f(Q_i^n) - f(Q_{i+1}^n) + f(Q_{i-1}^n) \\ & - \big|\alpha\,(Q_{i+2}^n + Q_{i+1}^n) + \beta\big|(Q_{i+2}^n - Q_{i+1}^n) + 2\big|\alpha\,(Q_{i+1}^n + Q_i^n) + \beta\big|(Q_{i+1}^n - Q_i^n) \\ & - \big|\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big|(Q_i^n - Q_{i-1}^n)\Big) \\ = -\frac{\Delta t}{2h}\Big(1 - \mathrm{sg}\big(\alpha\,(Q_{i+2}^n + Q_{i+1}^n) + \beta\big)\Big)&\big(\alpha\,(Q_{i+2}^n + Q_{i+1}^n) + \beta\big)(Q_{i+2}^n - Q_{i+1}^n) \\ + \Big(1 - \frac{\Delta t}{h}\big|\alpha\,(Q_{i+1}^n + Q_i^n) + \beta\big|\Big)&(Q_{i+1}^n - Q_i^n) \\ + \frac{\Delta t}{2h}\Big(1 + \mathrm{sg}\big(\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big)\Big)&\big(\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big)(Q_i^n - Q_{i-1}^n)\,, \end{aligned}$$

où sg est la fonction signe usuelle. Etant donné que la condition CFL (2.168) est respectée, nous obtenons

$$\begin{aligned} \big|Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}\big| \le \frac{\Delta t}{2h}\Big(1 - \mathrm{sg}\big(\alpha\,(Q_{i+2}^n + Q_{i+1}^n) + \beta\big)\Big)&\big|\alpha\,(Q_{i+2}^n + Q_{i+1}^n) + \beta\big|\,|Q_{i+2}^n - Q_{i+1}^n| \\ + \Big(1 - \frac{\Delta t}{h}\big|\alpha\,(Q_{i+1}^n + Q_i^n) + \beta\big|\Big)&|Q_{i+1}^n - Q_i^n| \\ + \frac{\Delta t}{2h}\Big(1 + \mathrm{sg}\big(\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big)\Big)&\big|\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big|\,|Q_i^n - Q_{i-1}^n|\,. \end{aligned}$$

En passant à la somme sur les indices i, nous obtenons finalement

$$TV(Q^{n+1}) = \sum_i \big|Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}\big| \le \sum_i \big|Q_{i+1}^n - Q_i^n\big| = TV(Q^n)\,. \tag{2.187}$$

□

Démonstration du lemme 15. Développons $Q_i^{n+1} - Q_i^n$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{n+1} - Q_i^n &= -\frac{\Delta t}{2h}\Big(f(Q_{i+1}^n) - f(Q_i^n) - \big|\alpha\,(Q_{i+1}^n + Q_i^n) + \beta\big|(Q_{i+1}^n - Q_i^n) \\
&\qquad - f(Q_i^n) + f(Q_{i-1}^n) + \big|\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big|(Q_i^n - Q_{i-1}^n)\Big) \\
&= -\frac{\Delta t}{2h}\Big(1 - \mathrm{sg}\big(\alpha\,(Q_{i+1}^n + Q_i^n) + \beta\big)\Big)\big(\alpha\,(Q_{i+1}^n + Q_i^n) + \beta\big)(Q_{i+1}^n - Q_i^n) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2h}\Big(1 - \mathrm{sg}\big(\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big)\Big)\big(\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big)(Q_i^n - Q_{i-1}^n)\,.
\end{aligned}$$

Alors en passant à la valeur absolue et en sommant sur i, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\big\|Q^{n+1} - Q^n\big\|_1 &= h\sum_{i=0}^{N_x}\big|Q_i^{n+1} - Q_i^n\big| \\
&\le h\sum_{i=0}^{N_x}\left[\frac{\Delta t}{2h}\big|\alpha\,(Q_{i+1}^n + Q_i^n) + \beta\big|\,|Q_{i+1}^n - Q_i^n|\right] \\
&\qquad + h\sum_{i=0}^{N_x}\left[\frac{\Delta t}{2h}\big|\alpha\,(Q_i^n + Q_{i-1}^n) + \beta\big|\,|Q_i^n - Q_{i-1}^n|\right] \\
&\le 2h\sum_{i=0}^{N_x}|Q_i^n - Q_{i-1}^n|\,,
\end{aligned}$$

grâce à la condition CFL (2.168). □

Grâce à ces résultats, nous avons l'assurance de construire un couple (F_h, B_h) qui approche la solution du modèle (2.54) lorsque h tend vers 0. Comme cela a été évoqué à la page 46, nous utilisons cette approximation afin de construire U_h^ϵ et R_h^ϵ comme en (2.135)-(2.136). Alors en considérant des valeurs de ϵ et de h petites, nous obtenons une approximation de la solution $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$ de (2.32).

4 Résultats numériques

Dans un premier temps, nous comparerons les résultats numériques obtenus à l'aide de la méthode de volumes finis 2-échelles que nous venons de présenter avec ceux que nous obtenons avec une méthode de volumes finis classique appliquée au modèle (2.27)-(2.28), l'objectif étant d'illustrer par quelques exemples les résultats de convergence des théorèmes 9 et 10. Puis, nous discuterons des avantages de la méthode 2-échelles sur une méthode de volumes finis classique en termes de temps de calcul. Enfin, en utilisant cette nouvelle méthode numérique, nous proposerons quelques simulations d'expériences induisant un très faible nombre de Mach, expériences qu'il est presque impossible à simuler avec une méthode classique en un temps de calcul raisonnable.

4.1 Comparaison avec une méthode classique

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer les résultats de convergence des théorèmes 9 et 10 par quelques résultats. Etant donné qu'il est rarement possible d'obtenir une solution analytique du modèle (2.27)-(2.28), nous étudierons la différence entre l'approximation $\big(U_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot), R_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)\big)$ donnée par la méthode 2-échelles et l'approximation $(u_h^\epsilon, \rho_h^\epsilon)$ où ρ_h^ϵ est définie par

$$\rho_h^\epsilon = \frac{\tilde\rho_h^\epsilon - 1}{\epsilon}\,, \tag{2.188}$$

et où l'approximation $(u_h^\epsilon, \tilde\rho_h^\epsilon)$ est calculée par une méthode de volumes finis de Roe appliquée au modèle (2.27). Cette méthode est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde\rho_h^\epsilon(x,t) &=& \tilde\rho_i^n\,, \\ u_h^\epsilon(x,t) &=& u_i^n\,, \end{array}\right. \qquad \forall\,(x,t) \in]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\times[t_n, t_{n+1}[\,, \tag{2.189}$$

où u_i^n et $\tilde{\rho}_i^n$ sont calculés de la façon suivante : en définissant Q_i^n et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$Q_i^n = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_i^n \\ \tilde{\rho}_i^n\, u_i^n \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ \dfrac{q_1^\gamma}{\gamma\,\epsilon^2} + \dfrac{q_2^2}{q_1} \end{pmatrix}, \tag{2.190}$$

nous avons

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{h}\Big(\mathcal{F}(Q_{i+1}^n, Q_i^n) - \mathcal{F}(Q_i^n, Q_{i-1}^n)\Big), \tag{2.191}$$

où le flux de Roe $\mathcal{F}$ est défini par

$$\mathcal{F}(Q_R, Q_L) = \frac{1}{2}\big(f(Q_R) + f(Q_L)\big) - \frac{1}{2}\big|\hat{A}(Q_R, Q_L)\big|(Q_L - Q_R), \tag{2.192}$$

avec $\big|\hat{A}(Q_R, Q_L)\big|$ définie par

$$\begin{aligned}
\big|\hat{A}(Q_R, Q_L)\big| &= R(Q_R, Q_L)\,\big|\Lambda(Q_R, Q_L)\big|\,\big(R(Q_R, Q_L)\big)^{-1}, \\
R(Q_R, Q_L) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \hat{u}(Q_R, Q_L) - \dfrac{\sqrt{\overline{P}(Q_R, Q_L)}}{\epsilon} & \hat{u}(Q_R, Q_L) + \dfrac{\sqrt{\overline{P}(Q_R, Q_L)}}{\epsilon} \end{pmatrix}, \\
\big|\Lambda(Q_R, Q_L)\big| &= \begin{pmatrix} \left|\hat{u}(Q_R, Q_L) - \dfrac{\sqrt{\overline{P}(Q_R, Q_L)}}{\epsilon}\right| & 0 \\ 0 & \left|\hat{u}(Q_R, Q_L) + \dfrac{\sqrt{\overline{P}(Q_R, Q_L)}}{\epsilon}\right| \end{pmatrix}, \\
\hat{u}(Q_R, Q_L) &= \frac{\sqrt{\tilde{\rho}_L}\,u_L + \sqrt{\tilde{\rho}_R}\,u_R}{\sqrt{\tilde{\rho}_L} + \sqrt{\tilde{\rho}_R}}, \qquad \overline{P}(Q_R, Q_L) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{(\tilde{\rho}_L)^\gamma - (\tilde{\rho}_R)^\gamma}{\tilde{\rho}_L - \tilde{\rho}_R} & \text{si } \tilde{\rho}_L \neq \tilde{\rho}_R, \\ (\tilde{\rho}_L)^{\gamma-1} & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.193}$$

Nous considérons ici les conditions initiales suivantes :

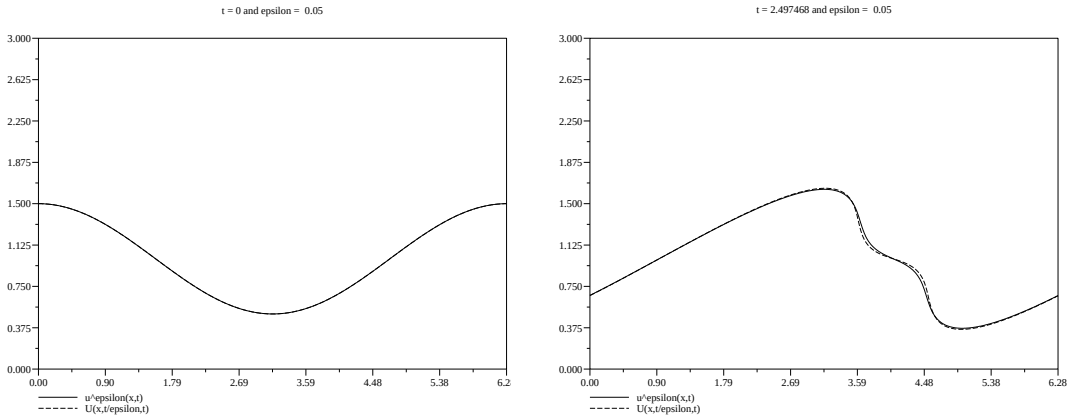
$$u_0(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{2}, \qquad \rho_0(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{2}, \tag{2.194}$$

et nous considérons le maillage uniforme de $[0, 2\pi]$ donné par

$$x_i = i\Delta x \qquad \forall\, i = 0, \ldots, N_x, \tag{2.195}$$

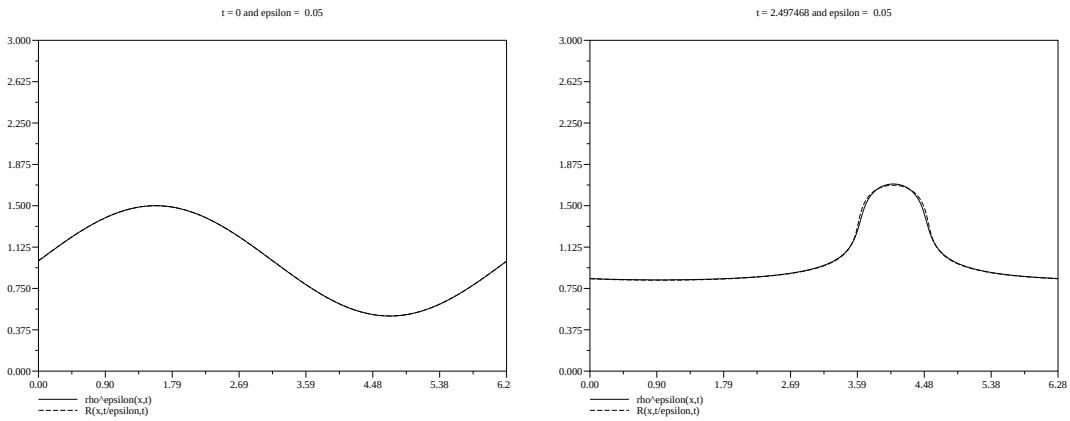
avec $\Delta x = \frac{2\pi}{N_x+1}$. Dans les figures 2.3 et 2.4, nous présentons les résultats obtenus lorsque $\epsilon = 0.05$ pour différentes valeurs de t, et en fixant

$$\gamma = 1, \qquad N_x = 1023, \qquad T = 2.5. \tag{2.196}$$



$t = 0$ $\qquad$ $t = 2.5$

FIGURE 2.3 – Comparaison de $u_h^\epsilon(\cdot, t)$ et $U_h(\cdot, \frac{t}{\epsilon}, t)$.



$t = 0$ $\qquad$ $t = 2.5$

FIGURE 2.4 – Comparaison de $\rho_h^\epsilon(\cdot, t)$ et $R_h(\cdot, \frac{t}{\epsilon}, t)$.

Comme nous pouvons le constater sur ces figures, l'approximation $\big(U_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot), R_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)\big)$ produite par la méthode 2-échelles est très proche de $(u_h^\epsilon, \rho_h^\epsilon)$, qui est elle-même proche de la solution classique du modèle (2.32), du fait que nous avons considéré un maillage de $[0, 2\pi]$ assez fin.

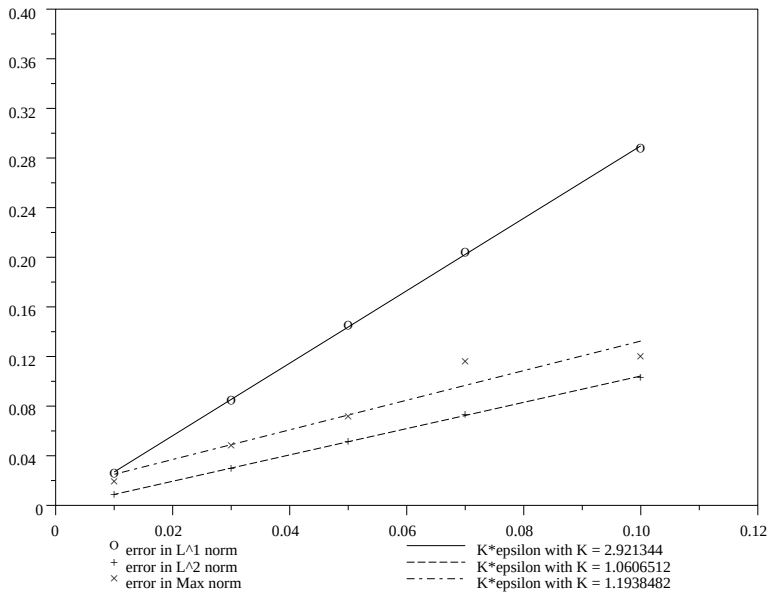


FIGURE 2.5 – Erreurs $u^\epsilon(x,t) - U_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ en normes $L^p\big([0,T); L^p_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ pour $p = 1, 2, \infty$.

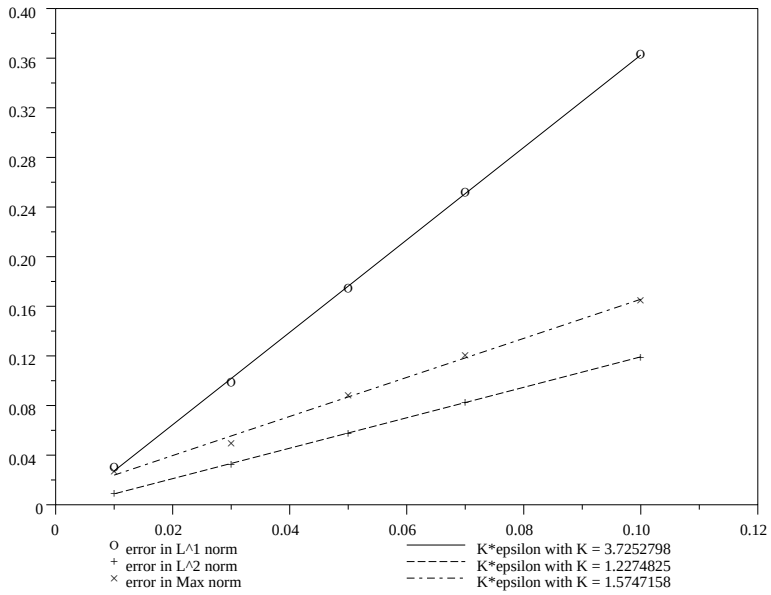


FIGURE 2.6 – Erreurs $\rho^\epsilon(x,t) - R_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ en normes $L^p\big([0,T); L^p_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ pour $p = 1, 2, \infty$.

Par ailleurs, en considérant les valeurs de γ, N_x et T données en (2.196), et en faisant varier ϵ, nous constatons que les erreurs $U_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot) - u^\epsilon$ et $R_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot) - \rho^\epsilon$ décroissent en $K\epsilon$ lorsque ϵ

diminue, comme cela est illustré dans les figures 2.5 et 2.6 et le tableau 2.1. Plus précisément, les valeurs de K indiquées dans les figures 2.5 et 2.6 sont obtenues par une méthode de régression linéaire appliquée aux erreurs répertoriées dans le tableau 2.1. Ces résultats numériques valident les estimations de vitesse de convergence de $u^\epsilon - U(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)$ et $\rho^\epsilon - R(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)$ vers 0 établies dans le théorème 10.

Valeur de ϵ	Erreur $u^\epsilon(x,t) - U_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$			Erreur $\rho^\epsilon(x,t) - R_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$		
	norme L^1	norme L^2	norme L^∞	norme L^1	norme L^2	norme L^∞
0.1	0.2880016	0.1034517	0.1201132	0.3634635	0.1192177	0.1651374
0.07	0.2043288	0.0735498	0.1160378	0.2516643	0.0828920	0.1203342
0.05	0.1452756	0.0518309	0.0719549	0.1744198	0.0575395	0.0879887
0.03	0.0845621	0.0296311	0.0483544	0.0987818	0.0326775	0.0499608
0.01	0.0260695	0.0085251	0.0195340	0.0303524	0.0092954	0.0269734

TABLE 2.1 – Erreurs $u^\epsilon(x,t) - U_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ et $\rho^\epsilon(x,t) - R_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$.

4.2 Temps de calcul

L'une des motivations qui ont mené au développement de cette méthode numérique 2-échelles est qu'une résolution directe du modèle (2.1) par une méthode de volumes finis impliquait la nécessité de considérer un pas de temps très petit afin de capter correctement les phénomènes oscillants de période d'ordre ϵ. En effet, en observant la méthode de Roe développée en (2.189)-(2.193), il est nécessaire de considérer la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{h} \max_{i,\,n} \left| \hat{u}(Q_{i+1}^n, Q_i^n) \pm \frac{\sqrt{\overline{P}(Q_{i+1}^n, Q_i^n)}}{\epsilon} \right| \leq 1\,, \tag{2.197}$$

afin de garantir la stabilité de la méthode. De ce fait, nous imposons à Δt d'être d'ordre ϵ, ce qui implique également un temps de calcul d'autant plus important que ϵ est proche de 0. De plus, cette augmentation du nombre total d'itérations nécessaires pour couvrir toute la durée de la simulation engendre également une augmentation de la diffusion numérique générée par le schéma.

Valeur de ϵ	Méthode de Roe sur (2.27)-(2.28)	Méthode 2-échelles sur (2.50)-(2.54)	
		Calcul de (F_h, B_h)	Calcul de (U_h, R_h)
0.1	24 m 34 s 36"	3 m 45 s 31"	42 s 79"
0.07	32 m 55 s 44"	3 m 45 s 22"	42 s 93"
0.05	44 m 7 s 21"	3 m 45 s 38"	42 s 74"
0.03	1 h 10 m 15 s	3 m 45 s 34"	42 s 80"
0.01	3 h 20 m 53 s 78"	3 m 45 s 12"	42 s 91"

TABLE 2.2 – Comparaison en termes de temps de calcul entre une méthode de Roe sur (2.27)-(2.28) et la méthode 2-échelles sur (2.50)-(2.54) avec les paramètres définis en (2.194) et (2.196).

La méthode de volumes finis 2-échelles qui a été développée présente l'avantage de nécessiter une condition CFL (2.163) indépendante de ϵ : de ce fait, il n'est pas nécessaire de réduire drastiquement le pas de temps utilisé dans ce schéma numérique lorsque nous considérons des valeurs de ϵ de plus en plus proches de 0. Nous pouvons trouver dans le tableau 2.2 une comparaison succinte des temps de calcul nécessaires à chacune des 2 méthodes citées pour atteindre le temps final T, sous les hypothèses (2.194) et (2.196), et pour différentes valeurs de ϵ. Ces temps de calcul ont été obtenus sur une machine possédant les caractéristiques suivantes :

- processeur : Pentium© M 715,
- mémoire vive : 512 Mo DDR-RAM,
- System d'exploitation : SuSe© 9.1 Pro,
- compilateur : gcc 3.3.3-41.

Ces observations faites sur les temps de calcul nécessaires aux 2 méthodes numériques citées viennent confirmer nos hypothèses sur les conséquences de la condition CFL (2.197) lorsque ϵ tend vers 0. En effet, lorsque nous considérons des valeurs de ϵ de l'ordre de 10^{-2} ou moins, le temps de calcul devient beaucoup trop grand. Dans de telles conditions d'expérience numérique, il est alors préférable d'utiliser la méthode 2-échelles plutôt que la méthode de Roe classique décrite en (2.188)-(2.193).

4.3 Expériences numériques à très faible nombre de Mach

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats de obtenus avec la méthode numérique 2-échelles sur des cas induisant une valeur de ϵ très proche de 0. Ces situations sont celles de fluides très faiblement compressibles, où la solution $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)$ des équations (2.27) est très proche de la solution des équations d'Euler incompressibles 1D, c'est-à-dire très proche de $(\overline{u}, 1)$, où $\overline{u}$ est défini en (2.49). Dans de telles situations, il est bien souvent impossible de produire de bons résultats en un temps raisonnable si nous utilisons une méthode classique comme la méthode de Roe présentée en (2.188)-(2.193) : en effet, contrairement à la méthode 2-échelles que nous avons développée, ces méthodes classiques nécessitent de respecter une condition CFL du type (2.197) afin rester stable ce qui impose à Δt d'être très proche de 0.

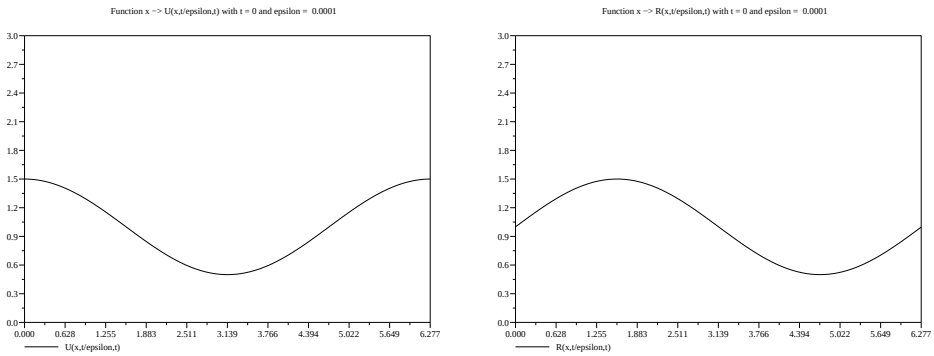
Dans les figures 2.7, 2.8 et 2.9, nous présentons les résultats obtenus aux instants $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ pour $\epsilon \in \{10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$ sous les conditions initiales (2.194) et en fixant les valeurs de γ, N_x et T comme en (2.196).

En relevant les temps de calcul nécessaires pour effectuer ces simulations, nous confirmons le fait que ces derniers ne dépendent pas de ϵ : en effet en comparant les valeurs répertoriées dans les tableaux 2.2 et 2.3, nous constatons que le temps de calcul nécessaire au calcul de F_h et B_h ne varie presque pas, et qu'il en est de même pour la reconstruction de $R_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)$ et $U_h(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon}, \cdot)$.

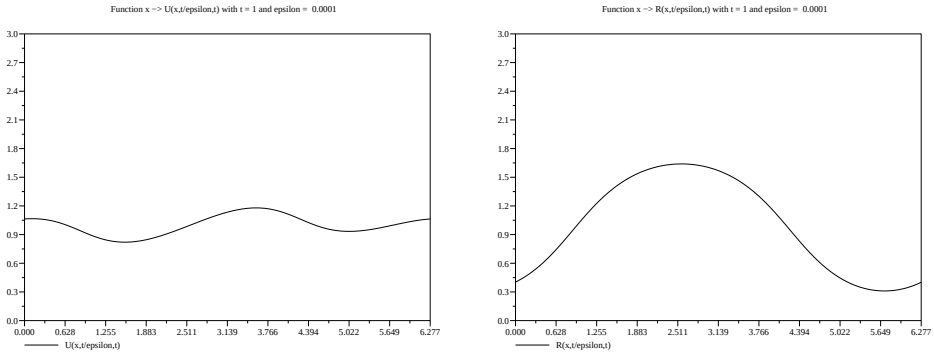
Valeur de ϵ	Calcul (F_h, B_h)	Calcul de (U_h, R_h)
10^{-4}	3 m 45 s 71"	42 s 84"
10^{-5}	3 m 45 s 95"	42 s 87"
10^{-6}	3 m 45 s 75"	42 s 98"

TABLE 2.3 – Temps de calcul pour des simulations 2-échelles avec les paramètres définis en (2.194) et (2.196).

$t = 0$



$t = 1$



$t = 2$

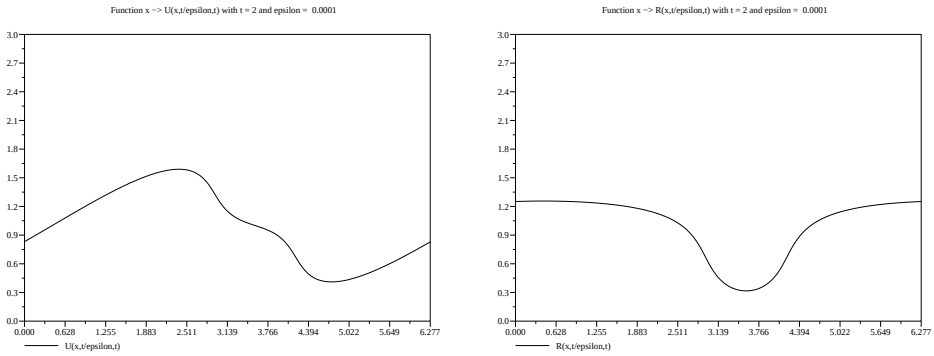
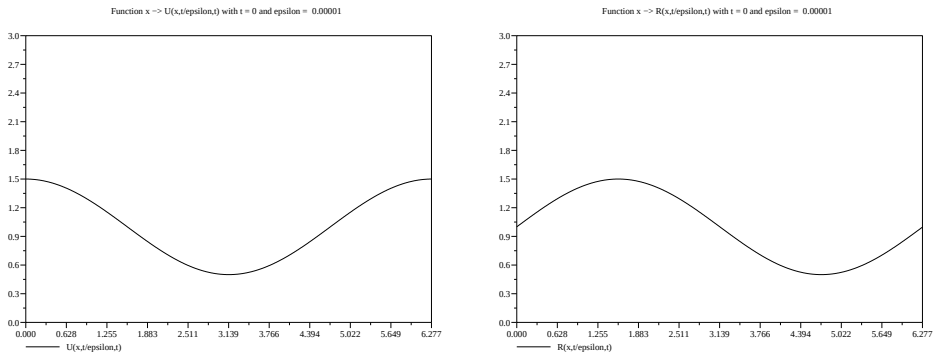
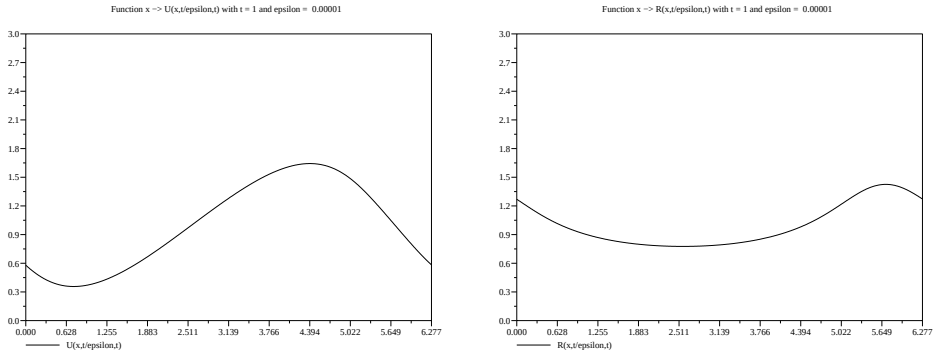


FIGURE 2.7 – $U_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ (gauche) and $R_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ (droite) avec $\epsilon = 10^{-4}$.

$t = 0$



$t = 1$



$t = 2$

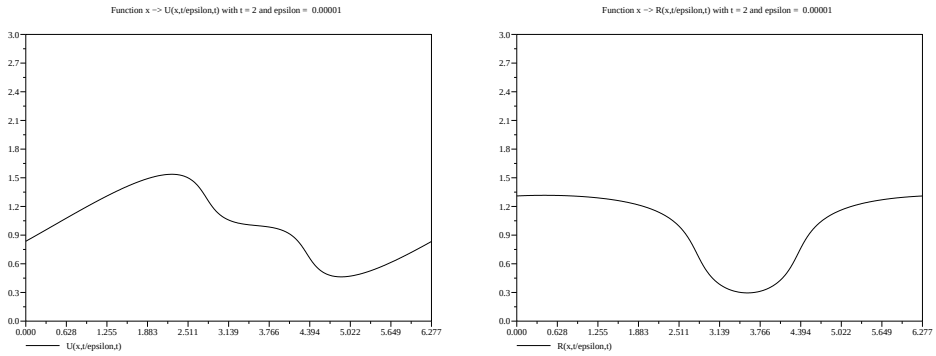
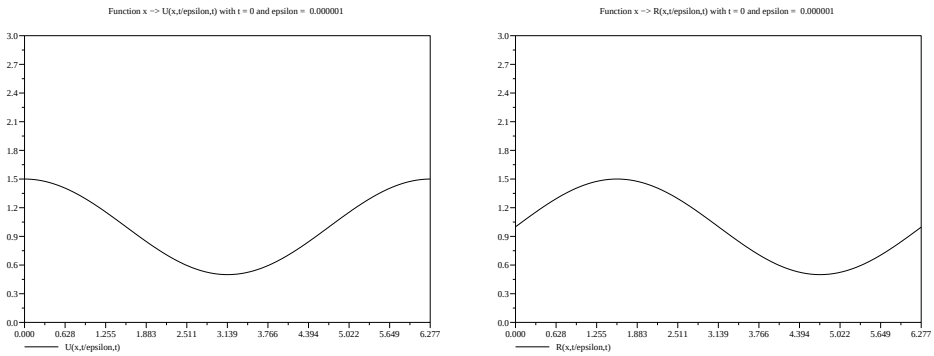
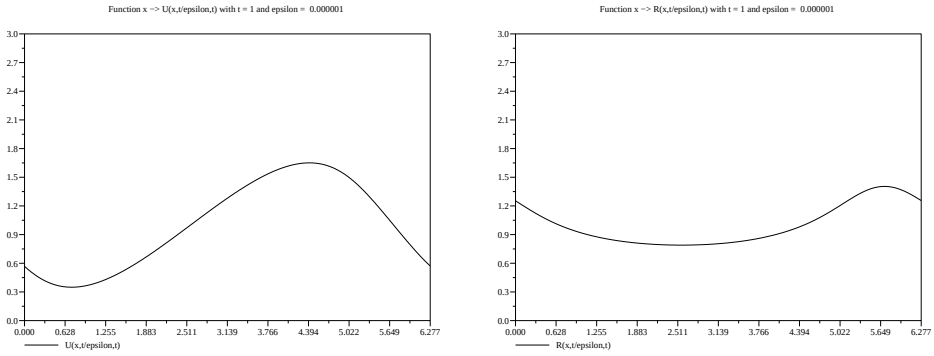


FIGURE 2.8 – $U_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ (gauche) and $R_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ (droite) avec $\epsilon = 10^{-5}$.

$t = 0$



$t = 1$



$t = 2$

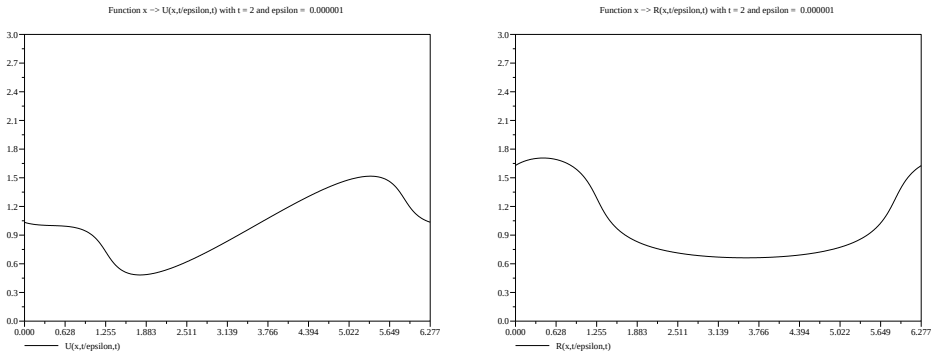


FIGURE 2.9 – $U_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ (gauche) and $R_h(x, \frac{t}{\epsilon}, t)$ (droite) avec $\epsilon = 10^{-6}$.

5 Conclusion

Nous avons développé avec succès une méthode numérique 2-échelles permettant d'approcher la solution $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$ du modèle (2.32).

Dans un premier temps, nous avons démontré que la suite $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ converge à 2-échelles vers un couple (U, R) dans $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; H^s_\#\big([0, 2\pi]\big)\big)\big)\big)^2$, et qu'il s'agit même d'une convergence 2-échelles forte dans $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; H^{s-1}_\#\big([0, 2\pi]\big)\big)\big)\big)^2$. Nous avons également proposé

une estimation de la vitesse de cette convergence lorsque ϵ tend vers 0, ainsi qu'une nouvelle approche pour démontrer que la solution du modèle (2.1) converge faiblement-* vers la solution des équations d'Euler 1D homentropiques incompressibles.

Dans un deuxième temps, nous avons construit une méthode de volumes finis discrétisant le modèle limite, et permettant de reconstruire une approximation de $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)$. Nous avons pu constater que cette méthode converge lorsque nous raffinons le maillage, et que son erreur de troncature locale est d'ordre 1.

Enfin, nous avons effectué quelques tests numériques de cette nouvelle méthode de volumes finis : d'une part, nous avons pu vérifier numériquement les résultats de convergence établis dans les théorèmes 9 et 10. D'autre part, nous avons effectué des comparaisons en termes de temps de calcul entre la méthode 2-échelles et une méthode de volumes finis classique appliquée à (2.27)-(2.28), et nous avons pu constater qu'à qualité de résultat comparable, la méthode 2-échelles que nous avons développée est nettement plus rapide car indépendante de toute contrainte liée à ϵ. Ce résultat est confirmé à travers quelques simulations numériques d'expériences à très faible nombre de Mach.

Chapitre 3

Simulation semi-lagrangienne 2-échelles pour un faisceaux de particules dans un champ électrique de focalisation périodique

A ce jour, 2 familles de méthodes numériques sont en compétition dans le cadre de la simulation numérique de modèles cinétiques de type Vlasov : les méthodes Particle-In-Cell (PIC) ou méthodes particulaires, basées sur le calcul des trajectoires d'un nombre fini de particules le long des caractéristiques du système (voir les travaux de F.-H. Harlow [37], C.-K. Birsdall et A.-B. Langdon [5], ainsi que ceux de W.-W. Lee [43], de J. Dawson [17], et plus récemment ceux de J. Heikkinen *et al.* [38]), et les méthodes eulériennes, basées sur la discrétisation de la distribution des particules sur un maillage de l'espace des phases (voir les travaux de E. Sonnendrücker *et al.* [62], de M. Campos-Pinto et M. Mehrenberger [9], de N. Crouseilles *et al.* [15, 13], de F. Filbet [20], de F. Filbet et E. Sonnendrücker [21, 22], et de V. Grandgirard *et al.* [35]). Bien que les méthodes PIC soient peu coûteuses en temps de calcul et en complexité d'implémentation, elles présentent l'inconvénient de générer du bruit numérique lors du couplage de l'équation de Vlasov avec un système d'équations permettant de calculer les champs électromagnétiques auto-consistants sur un maillage de l'espace physique. De plus, ce bruit numérique diminue en $N^{-1/2}$ lorsque le nombre de macro-particules N augmente, ce qui implique donc d'augmenter de façon conséquente le nombre de macro-particules afin de conserver une certaine qualité de résultats. A l'inverse, les méthodes eulériennes et en particulier des méthodes semi-lagrangiennes, génèrent beaucoup moins de bruit numérique lorsque la fonction de distribution est calculée sur un maillage de l'espace des phases ; Cependant, elles présentent l'inconvénient majeur d'être très coûteuse en temps de calcul et, par conséquent, nécessitent parfois d'être parallélisées.

Rappelons que l'objectif de cette thèse est de développer des méthodes numériques 2-échelles afin de simuler des expériences de fusion par confinement magnétique. L'idée nous vient donc naturellement de vouloir coupler des résultats de convergence 2-échelles comme ceux de E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [30] ou [31] avec un schéma semi-lagrangien. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il est possible de construire une méthode numérique 2-échelles à la fois précise et peu coûteuse en temps de calcul sur un modèle non-linéaire, ce qui est encourageant pour les étapes suivantes.

Cependant, étant donné que les modèles que nous souhaitons simuler sont assez complexes (ce sont des modèles en 4D+1D+temps), il est préférable de commencer par développer cette nouvelle famille de méthodes numériques sur un modèle de type Vlasov relativement simple afin de nous assurer que le couplage d'un schéma semi-lagrangien et d'un résultat de convergence 2-échelles

est possible. Le contexte des faisceaux de particules dans un champ électrique de focalisation périodique décrit par E. Frénod *et al.* dans [30] est un cadre idéal pour répondre à ces questions : en effet, ce modèle est en 2D+1D+temps, et E. Frénod *et al.* l'ont validé numériquement à l'aide d'une méthode PIC 2-échelles.

Rappelons que ce phénomène peut être décrit par le système de Vlasov-Maxwell 3D. De plus, nous considérons les hypothèses suivantes :

(i) le faisceau a déjà atteint un état stationnaire,
(ii) le faisceau est long et fin,
(iii) le faisceau se propage à une vitesse constante v_z le long de l'axe longitudinal Oz,
(iv) le faisceau est suffisamment long pour que les forces auto-consistantes longitudinales soient négligeables,
(v) le champ électrique externe est supposé l-périodique en z et indépendant du temps,
(vi) le faisceau est axisymétrique,
(vii) le faisceau peut être relativiste en z, mais pas en (x, y),
(viii) à la source du faisceau, les particules sont à moment angulaire nul.

Sous ces hypothèses, P. Degond et P.-A. Raviart ont démontré dans [18] qu'il est possible d'approcher le système de Vlasov-Maxwell 3D par un *modèle paraxial* qui s'apparente à un système de Vlasov-Poisson 2D où la position longitudinale z fait office de variable de temps, et même à un système de Vlasov-Poisson 1D axisymétrique de la forme

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \dfrac{v_r}{\epsilon}\,\partial_r f^\epsilon + \left(E_r^\epsilon + \Xi_r^\epsilon\right)\partial_{v_r} f^\epsilon = 0\,, \\ f^\epsilon(r, v_r, t = 0) = f_0(r, v_r)\,, \\ \dfrac{1}{r}\,\partial_r(r\,E_r^\epsilon) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^\epsilon\,dv_r\,, \\ \Xi_r^\epsilon(r,t) = -\dfrac{1}{\epsilon}\,H_0\,r + H_1\Big(\omega_1\,\dfrac{t}{\epsilon}\Big)\,r\,, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $t \geq 0$ est le "temps" (il s'agit en fait de la composante longitudinale de la position dans $\mathbb{R}^3$), $r \geq 0$ est la composante radiale de la position dans le plan tranverse, $v_r \in \mathbb{R}$ est la composante radiale de la vitesse tranverse à Ov_z, $f^\epsilon = f^\epsilon(r, v_r, t)$ est la fonction de distribution des particules, $E_r^\epsilon = E_r^\epsilon(r,t)$ est la composante radiale du champ électrique auto-consistant et $\Xi_r^\epsilon = \Xi_r^\epsilon(r,t)$ est la partie radiale du champ électrique appliqué. Ce système étant naturellement défini pour $r \geq 0$, nous l'étendons à $r \in \mathbb{R}$ en utilisant les conventions $f^\epsilon(-r, -v_r, t) = f^\epsilon(r, v_r, t)$, $E_r^\epsilon(-r,t) = -E_r^\epsilon(r,t)$, et $\Xi_r^\epsilon(-r,t) = -\Xi_r^\epsilon(r,t)$.

L'objectif ici est de simuler numériquement le modèle (3.1) à l'aide d'une méthode semi-lagrangienne 2-échelles lorsque ϵ tend vers 0. Comme dans le chapitre précédent, nous allons nous intéresser à la limite 2-échelles de ce modèle lorsque $\epsilon \to 0$. Une fois que le modèle limite est établi grâce à la théorie de convergence 2-échelles de G. Allaire [3] et G. Nguetseng [53], nous résolvons numériquement ce nouveau modèle indépendant de ϵ à l'aide d'une méthode semi-lagrangienne afin d'obtenir une approximation de la limite 2-échelles de f^ϵ que nous noterons $F = F(r, v_r, \tau, t)$, où $\tau \in [0, 2\pi]$ est la deuxième échelle de temps, et ainsi une approximation de f^ϵ donnée par $f^\epsilon(r, v_r, t) \approx 2\pi\,F(r, v_r, \frac{t}{\epsilon}, t)$. Cependant, étant donné que les méthodes semi-lagrangiennes font régulièrement appel à des opérateurs d'interpolation sur un maillage de l'espace des phases, il est impératif de faire attention aux contributions apportées par cette nouvelle variable τ. Pour cela, nous introduisons une famille de maillage dépendant de τ selon le même principe que les maillages mobiles suggérés par J. Lang *et al.* dans [42].

Ce chapitre s'organise de la façon suivante : dans un premier temps, nous rappellerons brièvement comment construire l'approximation paraxiale du modèle de Vlasov-Maxwell 3D en utilisant judicieusement les hypothèses (i)-(viii), et nous décrirons l'adimensionnement utilisé pour obtenir le modèle (3.1). Dans une seconde partie, nous rappellerons les résultats de convergence 2-échelles établis par E. Frénod *et al.* dans [28] sur ce modèle ainsi que quelques éléments de démonstration. Après avoir rappelé les bases d'un schéma semi-lagrangien, nous construirons une méthode semi-

lagrangienne 2-échelles adaptée à notre problème et nous introduirons une famille de maillages dépendant de τ permettant de réduire le nombre total d'interpolations au cours de la simulation. Enfin, nous présenterons quelques résultats numériques obtenus à l'aide de ces nouvelles méthodes numériques, résultats que nous comparerons avec ceux obtenus en utilisant une méthode semi-lagrangienne classique sur le modèle (3.1). Nous prêterons tout particulièrement attention à la précision des résultats ainsi qu'au temps de calcul nécessaire.

1 Obtention du modèle non-homogénéisé

Rappelons que le phénomène à simuler peut être décrit par le système de Vlasov-Maxwell 3D donné par

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f + \dfrac{q}{m\gamma_z}\big(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\big)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f = 0\,, \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \partial_t\mathbf{B} + \nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{E} = 0\,, \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B} = 0\,, \\ \partial_t\mathbf{E} - c^2\,\nabla_{\mathbf{x}}\times\mathbf{B} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\,\mathbf{J}\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

où

- $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ est la position (m),
- $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ est la vitesse (ms^{-1}),
- $t\in\mathbb{R}_+$ est le temps (s),
- q est la charge d'une particule (C),
- m est la masse d'une particule (kg),
- $\varepsilon_0 = 8.85418781762\times 10^{-12}\,AsV^{-1}m^{-1}$ est la permittivité du vide,
- $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\,VsA^{-1}m^{-1}$ est la perméabilité du vide,
- $c = 2.99792458\times 10^8\,ms^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide $(\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1)$,
- $\gamma_z = (1-\frac{v_z^2}{c^2})^{-1/2}$ est le coefficient de dilatation du temps en z,
- $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^3$ est le champ électrique (Vm^{-1}),
- $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^3$ est le champ magnétique (Am^{-1}),
- $\rho = \rho(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}$ est la densité de charge (Cm^{-3}),
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^3$ est la densité de courant (Am^{-3}),
- $f = f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\in\mathbb{R}$ est la fonction de distribution des particules $(m^{-6}s^3)$.

Le couplage entre l'équation de Vlasov et les équations de Maxwell se fait de la façon suivante :

$$\rho(\mathbf{x},t) = q\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v}\,, \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x},t) = q\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}\,f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v}\,. \tag{3.3}$$

1.1 Approximation paraxiale

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les hypothèses énoncées dans l'introduction afin de simplifier le modèle de Vlasov-Maxwell 3D et de l'approcher par un modèle paraxial. Ce sujet est traité de façon plus détaillée dans l'article de P. Degond et P.-A. Raviart [18], ainsi que dans l'article de F. Filbet et E. Sonnendrücker [22].

Dans un premier temps, nous introduisons les notations suivantes pour les champs électromagnétiques en présence :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^s\,, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^s\,, \tag{3.4}$$

où $\mathbf{E}^e$ et $\mathbf{E}^s$ sont respectivement les champs électriques externe et auto-consistant, et où $\mathbf{B}^e$ et $\mathbf{B}^s$ sont les champs magnétiques externe et auto-consistant.

Etant donné que certaines hypothèses sur le faisceau diffèrent selon la direction dans l'espace physique (hypothèses (ii), (iv), (v), (vii)), nous considérerons à partir de maintenant que $\mathbf{x}$ désigne

la position dans le plan transverse à l'axe Oz, c'est-à-dire $\mathbf{x} = (x, y)$. De la même façon, nous noterons dorénavant $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

Etant donné que le phénomène est supposé être stationnaire, aucune des quantités en jeu dans le modèle (3.2) ne dépend de t. De plus, d'après l'hypothèse (iii), la distribution des particules est constante en v_z, ce qui signifie que $\partial_{v_z} f = 0$. De ce fait, ce modèle se réécrit :

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, z, \mathbf{v}) + v_z\, \partial_z f(\mathbf{x}, z, \mathbf{v}) \\ \qquad\qquad + \dfrac{q}{m\,\gamma_z} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, z) + \begin{pmatrix} v_y\, B_z(\mathbf{x}, z) - v_z\, B_y(\mathbf{x}, z) \\ v_z\, B_x(\mathbf{x}, z) - v_x\, B_z(\mathbf{x}, z) \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, z, \mathbf{v}) = 0\,, \\ \nabla_{\mathbf{x},z} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, z) = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, z)\,, \\ \nabla_{\mathbf{x},z} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, z) = 0\,, \\ \nabla_{\mathbf{x},z} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, z) = 0\,, \\ \nabla_{\mathbf{x},z} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, z) = \mu_0\, \mathbf{J}(\mathbf{x}, z)\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Avec ces nouvelles notations, les hypothèses imposées au modèle induisent :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^e(\mathbf{x}, z) &= 0\,, \\ \mathbf{E}^e(\mathbf{x}, z) &= \begin{pmatrix} -H_0\, \mathbf{x} + H_1\big(\omega_1\, \frac{z}{l}\big)\, \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_z^s(\mathbf{x}, z) &= 0\,, \\ E_z^s(\mathbf{x}, z) &= 0\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où H_0 est une tension constante et positive, H_1 est une tension 2π-périodique, et ω_1 est une constante réelle sans dimension.
De ce fait, l'équation (3.5.a) se réécrit :

$$v_z\, \partial_z f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m\,\gamma_z} \Big(\mathbf{E}_{\mathbf{x}}^e + \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^s + v_z \begin{pmatrix} -B_y^s \\ B_x^s \end{pmatrix} \Big) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0\,. \tag{3.7}$$

Les équations de Maxwell portant sur les champs électromagnétiques auto-consistants, nous avons

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x},z} \cdot \mathbf{E}^s(\mathbf{x}, z) &= \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, z)\,, \\ \nabla_{\mathbf{x},z} \cdot \mathbf{B}^s(\mathbf{x}, z) &= 0\,, \\ \nabla_{\mathbf{x},z} \times \mathbf{E}^s(\mathbf{x}, z) &= 0\,, \\ \nabla_{\mathbf{x},z} \times \mathbf{B}^s(\mathbf{x}, z) &= \mu_0\, \mathbf{J}(\mathbf{x}, z)\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

La troisième composante de l'équation (3.8.c) se simplifiant sous la forme

$$\partial_x E_y^s(\mathbf{x}, z) - \partial_y E_x^s(\mathbf{x}, z) = 0\,, \tag{3.9}$$

nous en déduisons l'existence d'une fonction ϕ^s telle que

$$-\nabla_{\mathbf{x}} \phi^s(\mathbf{x}, z) = \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^s(\mathbf{x}, z)\,. \tag{3.10}$$

En combinant ce résultat avec les équations (3.6), l'équation (3.8.a) se réécrit sous la forme d'une équation de Poisson de la forme

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \phi^s(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{\varepsilon_0}\, \rho(\mathbf{x}, z)\,. \tag{3.11}$$

De la même façon, l'équation (3.8.b) se réécrit sous la forme

$$\partial_x B_x^s + \partial_y B_y^s = 0\,, \tag{3.12}$$

ce qui permet d'affirmer l'existence d'une fonction $\psi^s = \psi^s(\mathbf{x}, z)$ telle que

$$B_x^s = \partial_y \psi^s\,, \quad B_y^s = -\partial_x \psi^s\,. \tag{3.13}$$

Par ailleurs, nous savons par hypothèse que le faisceau de particules se propage à une vitesse constante v_z. Alors il est naturel de réduire les équations (3.3) à

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, z) &= q \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}, z, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}\,, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, z) &= q \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}\, f(\mathbf{x}, z, \mathbf{v})\, d\mathbf{v}\,, \\ J_z(\mathbf{x}, z) &= q \int_{\mathbb{R}^2} v_z\, f(\mathbf{x}, z, \mathbf{v})\, d\mathbf{v} = v_z\, \rho(\mathbf{x}, z)\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Alors, en développant la troisième composante de l'équation (3.8.d), nous obtenons

$$\partial_x B_y^s(\mathbf{x}, z) - \partial_y B_x^s(\mathbf{x}, s) = -\Delta_{\mathbf{x}} \psi^s(\mathbf{x}, z) = \mu_0\, v_z\, \rho(\mathbf{x}, z)\,, \tag{3.15}$$

ce qui permet d'affirmer que $\psi^s = \dfrac{v_z}{c^2}\phi^s$. Nous en déduisons alors

$$v_z \begin{pmatrix} -B_y^s \\ B_x^s \end{pmatrix} = v_z\, \nabla_{\mathbf{x}} \psi^s = -\frac{v_z^2}{c^2}\, \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^s\,. \tag{3.16}$$

Nous en déduisons alors l'approximation paraxiale recherchée :

$$\begin{cases} \partial_z f + \dfrac{\mathbf{v}}{v_z} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \dfrac{q}{m\, \gamma_z\, v_z} \Big(\boldsymbol{\Xi} + \dfrac{1}{\gamma_z^2}\, \mathbf{E} \Big) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0\,, \\ f(\mathbf{x}, z = 0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \phi = \mathbf{E}\,, \quad -\Delta_{\mathbf{x}} \phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\mathbf{v}\,, \\ \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{x}, z) = \begin{pmatrix} -H_0\, \mathbf{x} + H_1\big(\omega_1\, \frac{z}{l}\big)\, \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}\,, \end{cases} \tag{3.17}$$

où f_0 est la distribution des particules à la source du faisceau, et où les notations $\mathbf{E}$, ϕ et $\boldsymbol{\Xi}$ remplacent $\mathbf{E}_{\mathbf{x}}^s$, ϕ^s et $\mathbf{E}_{\mathbf{x}}^e$ respectivement.

1.2 Adimensionnement

De la même manière que dans [28], nous construisons une version adimensionnée du système (3.17) en introduisant les variables adimensionnées $\mathbf{x}', z', \mathbf{v}'$ définies par

$$\mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}'\,, \qquad z = L\, z'\,, \qquad \mathbf{v} = v_z\, \mathbf{v}'\,, \tag{3.18}$$

où λ est le rayon caractéristique transverse du faisceau et L la longueur caractéristique du faisceau dans la direction longitudinale. De la même manière, nous introduisons les quantités adimensionnées $f', \mathbf{E}', \boldsymbol{\Xi}', \phi', H_0', H_1'$ définies par

$$\begin{aligned} f(\lambda\, \mathbf{x}', L\, z', v_z\, \mathbf{v}') &= \frac{m\, \gamma_z^3\, \varepsilon_0}{q^2\, \lambda\, L}\, f'(\mathbf{x}', z', \mathbf{v}')\,, \\ \mathbf{E}(\lambda\, \mathbf{x}', L\, z') &= \frac{m\, \gamma_z^3\, v_z^2}{q\, L}\, \mathbf{E}'(\mathbf{x}', z')\,, \\ f_0(\lambda\, \mathbf{x}', v_z\, \mathbf{v}') &= \frac{m\, \gamma_z^3\, \varepsilon_0}{q^2\, \lambda\, L}\, f_0'(\mathbf{x}', \mathbf{v}')\,, \\ H_0 &= \frac{m\, v_z^2\, \gamma_z}{q\, \lambda^2}\, H_0'\,, \\ \phi(\lambda\, \mathbf{x}', L\, z') &= \frac{m\, \lambda\, \gamma_z^3\, v_z^2}{q\, L}\, \phi'(\mathbf{x}', z')\,, \\ H_1(\tau) &= \frac{m\, v_z^2\, \gamma_z}{q\, L\, \lambda}\, H_1'(\tau)\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Alors, dans ces nouvelles variables, le système (3.17) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_{z'} f' + \dfrac{L}{\lambda}\,\mathbf{v}'\cdot\nabla_{\mathbf{x}'} f' + \left[\mathbf{E}' - \dfrac{L}{\lambda}\,H_0'\,\mathbf{x}' + H_1'\Big(\dfrac{\omega_1\,L\,z'}{l}\Big)\,\mathbf{x}'\right]\cdot\nabla_{\mathbf{v}'} f' = 0\,, \\ f'(\mathbf{x}', z'=0, \mathbf{v}') = f_0'(\mathbf{x}', \mathbf{v}')\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}'}\phi' = \mathbf{E}'\,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}'}\phi' = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f'\,d\mathbf{v}'\,, \\ \boldsymbol{\Xi}'(\mathbf{x}', z') = H_0'\,\mathbf{x}' + H_1'\big(\omega_1\,\dfrac{z'\,L}{l}\big)\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

Etant donné que le faisceau est supposé long et fin, il est naturel de supposer

$$\frac{\lambda}{L} = \epsilon\,, \tag{3.21}$$

avec $\epsilon > 0$ petit. De plus étant donné que l'objectif est de simuler le faisceau sur un grand nombre de périodes du champ de focalisation, nous supposons également

$$\frac{l}{L} = \epsilon\,. \tag{3.22}$$

Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\,\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f^\epsilon + \big(\boldsymbol{\Xi}^\epsilon + \mathbf{E}^\epsilon\big)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f^\epsilon = 0\,, \\ f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t=0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\phi^\epsilon = \mathbf{E}^\epsilon\,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}}\phi^\epsilon = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f^\epsilon\,d\mathbf{v}\,, \\ \boldsymbol{\Xi}^\epsilon(\mathbf{x}, t) = -\dfrac{H_0}{\epsilon}\,\mathbf{x} + H_1\big(\dfrac{\omega_1\,t}{\epsilon}\big)\,\mathbf{x}\,, \end{cases} \tag{3.23}$$

où les notations $\mathbf{x}'$, $\mathbf{v}'$, z', f', $\mathbf{E}'$, ϕ', $\boldsymbol{\Xi}'$, H_0', et H_1' ont été remplacées respectivement par $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, t, f^ϵ, $\mathbf{E}^\epsilon$, ϕ^ϵ, $\boldsymbol{\Xi}^\epsilon$, H_0 et H_1.

Enfin, nous introduisons les coordonnées polaires $(r, \theta, v_r, v_\theta)$:

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta\,, \\ y = r\,\sin\theta\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_r = v_x\,\cos\theta + v_y\,\sin\theta\,, \\ v_\theta = v_y\,\cos\theta - v_x\,\sin\theta\,. \end{cases} \tag{3.24}$$

Comme le faisceau est supposé axisymétrique, le système ne dépend pas de θ. Alors en définissant E_r^ϵ et Ξ_r^ϵ par

$$E_r^\epsilon = \frac{\mathbf{E}^\epsilon\cdot\mathbf{x}}{r}\,, \quad \Xi_r^\epsilon = \frac{\boldsymbol{\Xi}^\epsilon\cdot\mathbf{x}}{r}\,, \tag{3.25}$$

l'équation (3.23.a) se réécrit sous la forme suivante :

$$\partial_t f^\epsilon + \frac{v_r}{\epsilon}\,\partial_r f^\epsilon + \Big(E_r^\epsilon + \Xi_r^\epsilon + \frac{v_\theta^2}{r}\Big)\,\partial_{v_r} f^\epsilon = 0\,. \tag{3.26}$$

Grâce au théorème du moment cinétique, nous savons que le moment angulaire des particules rv_θ est conservé le long de leurs trajectoires, et comme nous avons supposé qu'en $t = 0$, ce moment angulaire est nul, nous en déduisons qu'il est nul sur l'ensemble des trajectoires des particules. Alors nous obtenons le système de Vlasov-Poisson suivant

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \dfrac{v_r}{\epsilon}\,\partial_r f^\epsilon + \big(E_r^\epsilon + \Xi_r^\epsilon\big)\,\partial_{v_r} f^\epsilon = 0\,, \\ f^\epsilon(r, v_r, t=0) = f_0(r, v_r)\,, \\ \dfrac{1}{r}\,\partial_r(r\,E_r^\epsilon) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^\epsilon\,dv_r\,, \\ \Xi_r^\epsilon(r, t) = -\dfrac{1}{\epsilon}\,H_0\,r + H_1\Big(\omega_1\,\dfrac{t}{\epsilon}\Big)\,r\,. \end{cases} \tag{3.27}$$

2 Passage à la limite 2-échelles

Nous détaillons dans ce paragraphe les résultats de convergence 2-échelles établis par E. Frénod, F. Salvarani et E. Sonnendrücker pour les modèles (3.1) et (3.23). Dans toute la suite, nous supposerons que $H_0 = 1$.

Théorème 16. *Supposons que la distribution initiale f_0 vérifie les hypothèses suivantes :*
(i) $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap L^p(\mathbb{R}^4)$ pour $p \geq 2$,
(ii) $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq 0$ pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^4$,
(iii) les moments d'ordre 2 de f_0 sont finis, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{v}|^2\right) f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} < +\infty\,. \tag{3.28}$$

Alors pour $T > 0$ fixé, la suite de solutions $(f^\epsilon, \mathbf{E}^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ de (3.23) est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0, T; L^2(\mathbb{R}^4)\big) \times \big(L^\infty\big(0, T; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$ et, quitte à en extraire des sous-suites, f^ϵ converge à 2 échelles vers F dans $L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; L^2(\mathbb{R}^4)\big)\big)$ et $\mathbf{E}^\epsilon$ converge à 2 échelles vers $\mathcal{E}$ dans $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\big)^2$. De plus il existe une fonction $G \in L^\infty\big(0, T; L^2(\mathbb{R}^4)\big)$ telle que

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \tau, t) = G\big(\cos(\tau)\,\mathbf{x} - \sin(\tau)\,\mathbf{v}, \sin(\tau)\,\mathbf{x} + \cos(\tau)\,\mathbf{v}, t\big)\,, \tag{3.29}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t G(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sigma) \Big[\mathcal{E}\big(\cos(\sigma)\,\mathbf{y} + \sin(\sigma)\,\mathbf{u}, \sigma, t\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} H_1(\omega_1\,\sigma)\,\big(\cos(\sigma)\,\mathbf{y} + \sin(\sigma)\,\mathbf{u}\big)\Big]\, d\sigma \cdot \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \\ \quad + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\sigma) \Big[\mathcal{E}\big(\cos(\sigma)\,\mathbf{y} + \sin(\sigma)\,\mathbf{u}, \sigma, t\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} H_1(\omega_1\,\sigma)\,\big(\cos(\sigma)\,\mathbf{y} + \sin(\sigma)\,\mathbf{u}\big)\Big]\, d\sigma \cdot \nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) = 0\,, \\ G(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t = 0) = \dfrac{1}{2\pi} f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \tau, t) = \mathcal{E}(\mathbf{x}, \tau, t)\,, \\ -\Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \tau, t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} G\big(\cos(\tau)\,\mathbf{x} - \sin(\tau)\,\mathbf{v}, \sin(\tau)\,\mathbf{x} + \cos(\tau)\,\mathbf{v}, t\big)\, d\mathbf{v}\,, \end{cases} \tag{3.30}$$

où $I_{\mathbb{Q}}$ est l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Nous rappelons ici les points clés de la démonstration de ce théorème (une démonstration détaillée de ce théorème est trouvable dans [31] et dans [28]) :

1. En multipliant l'équation (3.23.a) par $(f^\epsilon)^{p-1}$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^4$, nous démontrons que $(f^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0, T; L^p(\mathbb{R}^4)\big)$. Par conséquent, le théorème 3 permet d'affirmer que, quitte à en extraire une sous-suite, f^ϵ converge à 2 échelles vers une fonction F dans l'espace $L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; L^p(\mathbb{R}^4)\big)\big)$.
2. En multipliant l'équation (3.23.a) par $\mathbf{v}$ et $|\mathbf{v}|^2$, nous obtenons

$$\partial_t \rho^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\, \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}^\epsilon = 0\,, \tag{3.31}$$

et

$$\partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}|^2\, f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} \right) - 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{J}^\epsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \big(\mathbf{E}^\epsilon(\mathbf{x}, t) + \mathbf{\Xi}^\epsilon(\mathbf{x}, t)\big)\, d\mathbf{x} = 0 \tag{3.32}$$

où ρ^ϵ et $\mathbf{J}^\epsilon$ sont définis par

$$\rho^\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}\,, \quad \mathbf{J}^\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}\, f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}\,. \tag{3.33}$$

En utilisant l'hypothèse (iii) du théorème, nous démontrons qu'il existe une constante C indépendante de t et de ϵ telle que, pour tout $t \in [0,T)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^4} \Big| \big(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{v}|^2\big)\, f^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t) \Big|\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} \leq C\, e^{\alpha\, T}\,, \tag{3.34}$$

où $\alpha = \epsilon\, \|H_1\|_{L^\infty_\#([0,2\pi])}$. Enfin, nous pouvons prouver que

$$\big\|\rho^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^4} (f^\epsilon)^2\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^4} |\mathbf{v}|^2 f^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} \right)^{1/2}, \tag{3.35}$$

et donc que $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;L^{3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$. En utilisant finalement l'inégalité de Calderon-Zygmund, nous prouvons que $(\mathbf{E}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est borné indépendamment de ϵ dans $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$ et, qui à en extraire une sous-suite, converge donc à 2 échelles vers une fonction $\mathcal{E}$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\big)^2$. De la même manière, $(\phi^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une sous-suite également notée $(\phi^\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui converge à 2 échelles vers une fonction Φ dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{2,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)$.

3. Nous écrivons l'équation de transport (3.23.a) sous la forme suivante :

$$\partial_t f^\epsilon + \mathbf{A}^\epsilon \cdot \nabla f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\, \mathbf{L} \cdot \nabla f^\epsilon = 0\,, \tag{3.36}$$

où $\mathbf{A}^\epsilon$ et $\mathbf{L} = M\,\mathbf{x}$ sont définis par

$$\mathbf{A}^\epsilon(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{E}^\epsilon(\mathbf{x},t) + H_1(\omega_1\, \frac{t}{\epsilon})\, \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

où I_2 est la matrice identité 2×2. Alors nous avons

$$e^{\tau M} = \begin{pmatrix} \cos(\tau)\, I_2 & \sin(\tau)\, I_2 \\ -\sin(\tau)\, I_2 & \cos(\tau)\, I_2 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

En appliquant le théorème de Frénod-Sonnendrücker, nous montrons que F et $\mathcal{E}$ vérifient

$$F(\mathbf{x},\mathbf{v},\tau,t) = G\big(\cos(\tau)\,\mathbf{x} - \sin(\tau)\,\mathbf{v}, \sin(\tau)\,\mathbf{x} + \cos(\tau)\,\mathbf{v}, t\big)\,, \tag{3.39}$$

où G vérifie

$$\begin{cases} \partial_t G(\mathbf{y},\mathbf{u},t) + \left[\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\, M}\, \mathcal{A}\Big(e^{\sigma\, M} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \sigma, t\Big)\, d\sigma \right] \cdot \nabla_{\mathbf{y},\mathbf{u}} G(\mathbf{y},\mathbf{u},t) = 0\,, \\ G(\mathbf{y},\mathbf{u},0) = \dfrac{1}{2\pi}\, f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})\,, \end{cases} \tag{3.40}$$

avec $\mathcal{A}$ défini par

$$\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{E}(\mathbf{x},\tau,t) + H_1(\omega_1\, \sigma)\, \mathbf{x} \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Nous reconnaissons alors les équations (3.29), (3.30.a) et (3.30.b). Les équations (3.30.c) et (3.30.d) s'obtiennent de la façon suivante : en multipliant (3.23.c) et (3.23.d) par $\psi(\mathbf{x}, \frac{t}{\epsilon}, t)$ où $\psi = \psi(\mathbf{x}, \frac{t}{\epsilon}, t) \in \mathcal{D}\big([0,T)\times\mathbb{R}^2; \mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, et en intégrant sur $[0,T)\times\mathbb{R}^2$, nous obtenons les passages à la limite 2-échelles suivants :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\mathbf{x}} \phi^\epsilon(\mathbf{x},t)\, \psi\big(\mathbf{x}, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, d\mathbf{x}\, dt \to \int_0^{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x},\tau,t)\, \psi(\mathbf{x},\tau,t)\, d\mathbf{x}\, dt\, d\tau\,,$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{\mathbf{x}} \phi^\epsilon(\mathbf{x},t)\, \psi\big(\mathbf{x}, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, d\mathbf{x}\, dt \to \int_0^{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x},\tau,t)\, \psi(\mathbf{x},\tau,t)\, d\mathbf{x}\, dt\, d\tau\,,$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\, d\mathbf{v} \right) \psi\big(\mathbf{x}, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, d\mathbf{x}\, dt$$
$$\to \int_0^{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} F(\mathbf{x},\mathbf{v},\tau,t)\, d\mathbf{v} \right) \psi(\mathbf{x},\tau,t)\, d\mathbf{x}\, dt\, d\tau\,.$$

□

Nous pouvons formuler le même théorème pour le modèle (3.1) :

Théorème 17. *Supposons que la disribution initiale f_0 vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $f_0 \in L^1\big(\mathbb{R}^2;\, |r| dr dv_r\big) \cap L^p\big(\mathbb{R}^2;\, |r| dr dv_r\big)$ *pour* $p \geq 2$,
(ii) $f_0(r, v_r) \geq 0$ *pour tout* $(r, v_r) \in \mathbb{R}^2$,
(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \big(r^2 + v_r^2\big)\, f_0(r, v_r)\, |r|\, dr\, dv_r < +\infty$.
Alors la suite de solutions $(f^\epsilon, E_r^\epsilon)_{\epsilon>0}$ *du système (3.1) est bornée indépendamment de* ϵ *dans* $L^\infty\big(0,T; L^2(\mathbb{R}^2, |r| dr dvr)\big) \times L^\infty\big(0,T; W^{1,3/2}(\mathbb{R}, |r| dr)\big)$. *Quitte à en extraire des sous-suites,* f^ϵ *converge à 2-échelles vers une fonction* F *dans* $L^\infty\big(0,T; L^\infty_\#\big([0,2\pi]; L^2(\mathbb{R}^2;\, |r| dr dv_r)\big)\big)$ *et* E_r^ϵ *converge à 2 échelles vers une fonction* $\mathcal{E}_r$ *dans* $L^\infty\big([0,T); L^\infty_\#\big([0,2\pi]; W^{1,3/2}(\mathbb{R};\, |r| dr)\big)\big)$ *telles que, en posant* $G \in L^\infty\big([0,T); L^2(\mathbb{R}^2;\, |q| dq du_r)\big)$ *telle que*

$$F(r, v_r, \tau, t) = G\big(\cos(\tau)\, r - \sin(\tau)\, v_r, \sin(\tau)\, r + \cos(\tau)\, v_r, t\big)\,, \tag{3.42}$$

G et $\mathcal{E}_r$ vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t G(q, u_r, t) - \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r\big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r, \sigma, t\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\, H_1(\omega_1\, \sigma)\, \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big) \Big]\, d\sigma\, \partial_q G(q, u_r, t) \\ \quad + \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r\big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r, \sigma, t\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\, H_1(\omega_1\, \sigma)\, \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big) \Big]\, d\sigma\, \partial_{u_r} G(q, u_r, t) = 0\,, \\ G(q, u_r, t = 0) = \dfrac{1}{2\pi}\, f_0(q, u_r)\,, \\ \dfrac{1}{r}\, \partial_r\big(r\, \mathcal{E}_r(r, \tau, t)\big) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} G\big(\cos(\tau)\, r - \sin(\tau)\, v_r, \sin(\tau)\, r + \cos(\tau)\, v_r, t\big)\, dv_r\,, \end{cases} \tag{3.43}$$

où $I_{\mathbb{Q}}$ est l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

3 Méthode semi-lagrangienne 2-échelles

Comme cela est dit dans l'introduction du chapitre, l'objectif est de construire une approximation de la solution $(f^\epsilon, E_r^\epsilon)$ de la solution de (3.1) en se basant une discrétisation semi-lagrangienne du modèle (3.43). En effet, en reprenant le principe énoncé dans l'introduction de cette thèse, le principe d'une méthode semi-lagrangienne 2-échelles pour résoudre (3.1) est le suivant :

1. nous approchons la solution $(G, \mathcal{E}_r)$ de (3.43) par un couple $(G_h, \mathcal{E}_{r,h})$ obtenu à l'aide d'une méthode semi-lagrangienne en arrière,
2. nous construisons une approximation de F en nous inspirant du lien entre F et G en (3.42) :

$$F_h(r, v_r, \tau, t) = G_h\big(\cos(\tau)\, r - \sin(\tau)\, v_r, \sin(\tau)\, r + \cos(\tau)\, v_r, t\big)\,, \tag{3.44}$$

3. nous approchons f^ϵ de la façon suivante :

$$f^\epsilon(r, v_r, t) \approx 2\pi\, F_h\big(r, v_r, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\,. \tag{3.45}$$

La principale difficulté consiste donc à calculer une approximation de $(G, \mathcal{E}_r)$: en effet, les rotations d'angle τ présentes dans le calcul du terme source de (3.43.c) ainsi que les rotations d'angle σ sous les intégrales de (3.43.a) nécessitent de prendre des dispositions particulières quant au maillage de l'espace des phases.

Nous rappelerons dans un premier temps les bases d'une méthode semi-lagrangienne en arrière, puis nous présenterons 2 approches différentes permettant de simuler correctement les rotations dans l'espace des phases : la première se basera sur un agrandissement du domaine de simulation, tandis que la deuxième se basera sur une famille de maillages mobiles. Afin de valider les résultats produits par ces 2 nouvelles méthodes numériques, nous les comparerons aux résultats que produit une méthode semi-lagrangienne en arrière appliquée au modèle (3.1).

3.1 Méthode semi-lagrangienne

Dans ce paragraphe, nous rappelons les bases d'une méthode semi-lagrangienne pour discrétiser le modèle suivant :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) = 0\,, \tag{3.46}$$

où $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), et $\mathbf{U} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$.

Une méthode semi-lagrangienne est basée sur la résolution des caractéristiques de ce modèle, c'est-à-dire les solutions $\mathbf{X}(t)$ du système

$$\partial_t \mathbf{X}(t) = \mathbf{U}\big(\mathbf{X}, t\big)\,. \tag{3.47}$$

En effet, en supposant que ce système admette des solutions, la fonction f est alors constante le long de ces caractéristiques car

$$\partial_t \Big(f\big(\mathbf{X}(t), t\big)\Big) = 0\,, \tag{3.48}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$f\big(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, s), t\big) = f(\mathbf{x}, s)\,, \tag{3.49}$$

où $t \mapsto \mathbf{X}(t; \mathbf{x}, s)$ est la solution de (3.47) avec la condition $\mathbf{X}(s; \mathbf{x}, s) = \mathbf{x}$.

Principe de base d'une méthode semi-lagrangienne en arrière

Ici, nous allons utiliser une méthode semi-lagrangienne dite *en arrière*[1]. Le principe est le suivant : en considérant un maillage de Ω constitué des points $\mathbf{x}_i$, ainsi que 2 instants successifs t_n et t_{n+1}, nous avons

$$f\big(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1}), t_n\big) = f(\mathbf{x}_i, t_{n+1})\,. \tag{3.50}$$

Si la solution f est connue à l'instant t_n, il nous suffit donc de calculer $\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1})$ pour connaître $f(\mathbf{x}_i, t_{n+1})$. Comme cela est illustré dans la figure 1, nous considérons la caractéristique passant par $\mathbf{x}_i$ à l'instant t_{n+1} et nous la remontons de l'instant t_{n+1} jusqu'à t_n. Même si $\mathbf{x}_i$ est un noeud du maillage, il arrive la plupart du temps que $\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1})$ n'en soit pas un. Dans ce cas, nous remplaçons (3.50) par

$$f(\mathbf{x}_i, t_{n+1}) \approx \Pi f\big(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_i, t_{n+1}), t_n\big)\,, \tag{3.51}$$

où Π est un opérateur d'interpolation construit sur les points $\mathbf{x}_i$.

1. Il existe aussi des méthodes semi-lagrangiennes dites *en avant* : elles seront détaillées dans le chapitre suivant et s'appuient sur la relation $f\big(\mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}_i, t_n), t_{n+1}\big) = f(\mathbf{x}_i, t_n)$.

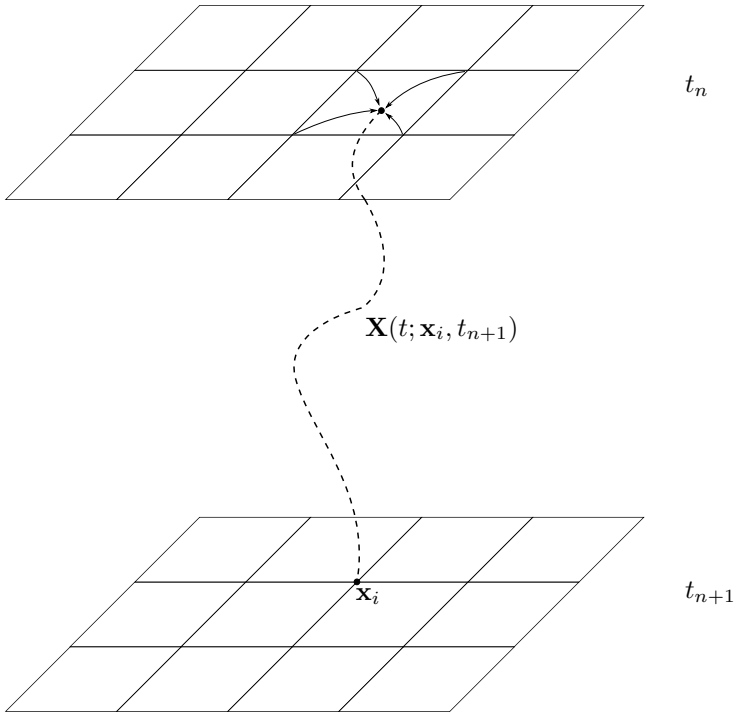


FIGURE 3.1 – Méthode semi-lagrangienne en arrière.

Calcul des caractéristiques

La principale difficulté se situe donc au niveau du calcul de la caractéristique $\mathbf{X}(t;\mathbf{x}_i,t_{n+1})$, solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\mathbf{X}(t) & = & \mathbf{U}\big(\mathbf{X}(t),t\big)\,, \\ \mathbf{X}(t_{n+1}) & = & \mathbf{x}_i\,. \end{array}\right. \tag{3.52}$$

Dans la plupart des cas, il est difficile de trouver une solution explicite de cette équation différentielle ordinaire, et donc de calculer une approximation de $t \mapsto \mathbf{X}(t;\mathbf{x}_i,t_{n+1})$ à l'aide d'une méthode numérique. Dans cette situation, il est nécessaire d'utiliser une méthode d'ordre 2 afin d'assurer la convergence du schéma semi-lagrangien (voir [4]).

E. Sonnendrücker *et al.* ont proposé dans [62] une méthode d'ordre 2 permettant de résoudre ce système. Le principe est le suivant : en supposant que la distribution f est connue à l'instant $t_{n-1} = t_n - \Delta t$, nous avons

$$f(\mathbf{x}_i,t_{n+1}) = f\big(\mathbf{X}(t_{n-1};\mathbf{x}_i,t_{n+1}),t_{n-1}\big)\,, \tag{3.53}$$

où $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. En faisant un développement limité de l'équation (3.52.a), nous obtenons

$$\mathbf{X}(t_{n-1};\mathbf{x}_i,t_{n+1}) = \mathbf{x}_i - 2\mathbf{d}_i^n\,, \tag{3.54}$$

où $\mathbf{d}_i^n$ est la solution du problème de point fixe suivant

$$\mathbf{d}_i^n = \Delta t\,\mathbf{U}(\mathbf{x}_i - \mathbf{d}_i^n,t_n)\,. \tag{3.55}$$

Dans la plupart des situations, $\mathbf{U}(\cdot,t_n)$ n'est connu qu'aux noeuds du maillage considéré, *i.e.* les points $\mathbf{x}_i$. De ce fait, il faut remplacer (3.55) par

$$\mathbf{d}_i^n = \Delta t\,\Pi\mathbf{U}(\mathbf{x}_i - \mathbf{d}_i^n,t_n)\,, \tag{3.56}$$

où Π est un opérateur d'interpolation. Alors, en supposant que la fonction $\mathbf{x} \mapsto \Pi\mathbf{U}(\mathbf{x}, t_n)$ soit suffisamment régulière, nous avons le développement limité suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i^n &= \Delta t\, \mathbf{U}(\mathbf{x}_i, t_n) - \Delta t\, \nabla_{\mathbf{x}}(\Pi\, \mathbf{U})(\mathbf{x}_i, t_n)\, \mathbf{d}_i^n + \mathcal{O}\big(|\mathbf{d}_i^n|^2\big) \\ &= \Delta t\, \mathbf{U}(\mathbf{x}_i, t_n) - \Delta t\, \nabla_{\mathbf{x}}(\Pi\, \mathbf{U})(\mathbf{x}_i, t_n)\, \mathbf{d}_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^2)\,. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Nous obtenons donc une approximation d'ordre 2 de $\mathbf{d}_i^n$ de la forme

$$\mathbf{d}_i^n = \Delta t \left(\mathbf{Id} + \Delta t\, \nabla_{\mathbf{x}}(\Pi\, \mathbf{U})(\mathbf{x}_i, t_n)\right)^{-1} \times \mathbf{U}(\mathbf{x}_i, t_n)\,. \tag{3.58}$$

Avec cette méthode d'approximation de $\mathbf{X}(t_{n-1}; \mathbf{x}_i, t_{n+1})$, la méthode semi-lagrangienne est la suivante :

1. en supposant que f est connue à l'instant t_{n-1} et que $\mathbf{U}$ l'est à l'instant t_n, nous calculons les $\mathbf{d}_i^n$ en utilisant la formule (3.58),
2. nous calculons f à l'instant t_{n+1} de la façon suivante :

$$f(\mathbf{x}_i, t_{n+1}) = \Pi f(\mathbf{x}_i - 2\, \mathbf{d}_i^n, t_{n-1})\,. \tag{3.59}$$

Afin d'initialiser cette méthode, nous calculons $\mathbf{d}_i^{1/2}$ en utilisant la formule suivante

$$\mathbf{d}_i^{1/2} = \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{Id} + \frac{\Delta t}{2}\, \nabla_{\mathbf{x}}(\Pi\, \mathbf{U})(\mathbf{x}_i, t_0)\right)^{-1} \times \mathbf{U}(\mathbf{x}_i, t_0)\,, \tag{3.60}$$

puis nous calculons f au temps t_1 de la façon suivante :

$$f(\mathbf{x}_i, t_1) = \Pi f(\mathbf{x}_i - 2\, \mathbf{d}_i^{1/2}, t_0)\,. \tag{3.61}$$

Splitting de Strang

Lorsque la valeur de n devient trop élevée, l'approximation (3.51) nécessite des étapes d'interpolations nD qui peuvent être très coûteuses en temps de calcul. De plus, s'il n'est pas possible de résoudre les caractéristiques de manière exacte, la méthode proposée par E. Sonnendrücker *et al.* rappelée ci-dessus nécessitera également des interpolations nD supplémentaires afin de résoudre les problèmes de points fixes en utilisant la formule (3.58). Une solution alternative consiste à utiliser un algorithme de splitting de Strang pour approcher $f(\cdot, t_{n+1})$ à partir de $f(\cdot, t_n)$.

Supposons que l'équation de transport (3.46) puisse s'écrire sous la forme

$$\partial_t f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{U}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{U}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_2} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = 0\,, \tag{3.62}$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.63}$$

et $\nabla_{\mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{U}_1 = \nabla_{\mathbf{x}_2} \cdot \mathbf{U}_2 = 0$. Alors la solution exacte de cette équation de transport vérifie

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1}) = f\big(\mathbf{X}_1\big(t_n; (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_{n+1}\big), \mathbf{X}_2\big(t_n; (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_{n+1}\big), t_n\big)\,, \tag{3.64}$$

où les fonctions $t \mapsto \mathbf{X}_1(t; \big(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_{n+1}\big)$ et $t \mapsto \mathbf{X}_2(t; \big(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_{n+1}\big)$ sont la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{X}_1(t) &=& \mathbf{U}_1\big(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), t\big)\,, \\ \partial_t \mathbf{X}_2(t) &=& \mathbf{U}_2\big(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), t\big)\,, \\ \mathbf{X}_1(t_{n+1}) &=& \mathbf{x}_1\,, \\ \mathbf{X}_2(t_{n+1}) &=& \mathbf{x}_2\,. \end{array} \right. \tag{3.65}$$

Le splitting de Strang consiste à approcher $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1})$ de la façon suivante :

1. nous résolvons
$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)+\mathbf{U}_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)\cdot\nabla_{\mathbf{x}_1}g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)=0\,,\\ g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_n)=f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_n)\,,\end{array}\right. \tag{3.66}$$
sur un demi-pas de temps. En notant f_* la solution exacte de cette équation de transport, nous avons :
$$\begin{aligned}f_*(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1/2})&=f_*\big(\mathbf{X}_1\big(t_n;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1/2}\big),\mathbf{x}_2,t_n\big)\\&=f\big(\mathbf{X}_1\big(t_n;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1/2}\big),\mathbf{x}_2,t_n\big)\,,\end{aligned} \tag{3.67}$$
étant donné que $\nabla_{\mathbf{x}_1}\cdot\mathbf{U}_1=0$. Dans cette équation, la fonction $t\mapsto\mathbf{X}_1(t;\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1/2}\big)$ est la solution de
$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t\mathbf{X}_1(t)&=&\mathbf{U}_1\big(\mathbf{X}_1(t),\mathbf{x}_2,t\big)\,,\\ \mathbf{X}_1(t_{n+1/2})&=&\mathbf{x}_1\,.\end{array}\right. \tag{3.68}$$
Si $f(\cdot,\cdot,t_n)$ n'est connue qu'aux noeuds $(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j})$ du maillage du domaine de simulation, nous pouvons remplacer l'égalité (3.67) par
$$f_*(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1/2})\approx\Pi_1 f\big(\mathbf{X}_1\big(t_n;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1/2}\big),\mathbf{x}_2,t_n\big)\,, \tag{3.69}$$
où Π_1 est un opérateur d'interpolation basé sur le maillage $(\mathbf{x}_{1,i})_i$.
2. Nous résolvons ensuite
$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)+\mathbf{U}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)\cdot\nabla_{\mathbf{x}_2}g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)=0\,,\\ g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_n)=f_*(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1/2})\,,\end{array}\right. \tag{3.70}$$
sur un pas de temps. En notant f_{**} la solution exacte de cette équation de transport, nous avons
$$\begin{aligned}f_{**}\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1}\big)&=f_{**}\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2\big(t_n;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big),t_n\big)\\&=f_*\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2\big(t_n;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big),t_{n+1/2}\big)\,,\end{aligned} \tag{3.71}$$
étant donné que $\nabla_{\mathbf{x}_2}\cdot\mathbf{U}_2=0$. Dans cette équation, la fonction $t\mapsto\mathbf{X}_2(t;\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big)$ est la solution de
$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t\mathbf{X}_2(t)&=&\mathbf{U}_2\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2(t),t\big)\,,\\ \mathbf{X}_2(t_{n+1})&=&\mathbf{x}_2\,.\end{array}\right. \tag{3.72}$$
Comme dans l'étape précédente, si $f_*(\cdot,\cdot,t_{n+1/2})$ n'est connue qu'aux noeuds $(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j})$ du maillage, nous pouvons remplacer (3.71) par
$$f_{**}\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1}\big)\approx\Pi_2 f_*\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2\big(t_n;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big),t_{n+1/2}\big)\,, \tag{3.73}$$
où Π_2 est un opérateur d'interpolation basé sur le maillage $(\mathbf{x}_{2,j})_j$.
3. Nous résolvons
$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)+\mathbf{U}_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)\cdot\nabla_{\mathbf{x}_1}g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)=0\,,\\ g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1/2})=f_{**}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1})\,,\end{array}\right. \tag{3.74}$$
sur un demi-pas de temps. En notant f_{***} la solution exacte de cette équation, nous avons
$$\begin{aligned}f_{***}\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1}\big)&=f_{***}\big(\mathbf{X}_1\big(t_{n+1/2};(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big),\mathbf{x}_2,t_{n+1/2}\big)\\&=f_{**}\big(\mathbf{X}_1\big(t_{n+1/2};(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big),\mathbf{x}_2,t_{n+1}\big)\,,\end{aligned} \tag{3.75}$$
où $t\mapsto\mathbf{X}_1(t;\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big)$ est la solution de
$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t\mathbf{X}_1(t)&=&\mathbf{U}_1\big(\mathbf{X}_1(t),\mathbf{x}_2,t\big)\,,\\ \mathbf{X}_1(t_{n+1})&=&\mathbf{x}_1\,.\end{array}\right. \tag{3.76}$$
Comme dans les étapes précédentes, si f_{**} n'est connues qu'aux noeuds $(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j})$ du maillage, nous pouvons remplacer l'équation (3.78) par
$$f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1})\approx\Pi_1 f_{**}\big(\mathbf{X}_1\big(t_{n+1/2};(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_{n+1}\big),\mathbf{x}_2,t_{n+1}\big)\,. \tag{3.77}$$

4. Nous considérons finalement l'approximation suivante :

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1}) \approx f_{***}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1})\,. \tag{3.78}$$

Si nous pouvons résoudre (3.66), (3.70) et (3.74) de manière exacte, alors l'approximation de $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1})$ proposée en (3.78) sera d'ordre 2 en t (voir Forest [23] et Yoshida [63]). Dans le cas contraire, le splitting de Strang peut tout de même produire une approximation (3.78) d'ordre 2 en t à condition que les équations de transport (3.66), (3.70) et (3.74) soient également résolues par des méthodes numériques d'ordre 2 ou plus en t.

3.2 Méthode semi-lagrangienne 2-échelles

Dans ce paragraphe nous construisons une méthode semi-lagrangienne permettant de discrétiser le modèle (3.43). Les caractéristiques de ce système sont les solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t Q(t) & = & \langle \mathcal{E}_1 \rangle \big(Q(t), U_r(t), t\big)\,, \\ \partial_t U_r(t) & = & \langle \mathcal{E}_2 \rangle \big(Q(t), U_r(t), t\big)\,, \end{array} \right. \tag{3.79}$$

où $\langle \mathcal{E}_1 \rangle$ et $\langle \mathcal{E}_2 \rangle$ sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle \mathcal{E}_1 \rangle (q, u_r, t) & = & -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r\big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r, \sigma, t\big) \\ & & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\, H_1(\omega_1\, \sigma) \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big) \Big]\, d\sigma\,, \\ \langle \mathcal{E}_2 \rangle (q, u_r, t) & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r\big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r, \sigma, t\big) \\ & & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\, H_1(\omega_1\, \sigma) \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big) \Big]\, d\sigma\,. \end{array} \right. \tag{3.80}$$

Nous constatons que, dans le cadre de l'équation de transport (3.43.a), effectuer un splitting de Strang fait perdre le caractère conservatif du transport qui est modélisé. Nous allons donc utiliser la méthode d'E. Sonnendrücker *et al.* décrite en page 76. En notant G^n et $\mathcal{E}_r^n$ les approximations de $G(\cdot, \cdot, t_n)$ et $\mathcal{E}_r^n(\cdot, \cdot, t_n)$, une itération de cette méthode s'écrit :

1. En supposant que G^{n-1} et G^n sont connues, nous calculons $\mathcal{E}_r^n$ en résolvant l'équation (3.43.a) :

$$\mathcal{E}_r^n(q, \tau) = -\mathcal{E}_r(-q, \tau) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{q} \displaystyle\int_0^q \int_{\mathbb{R}} s\, G^n\big(\cos(\tau) s - \sin(\tau) v_r, & \\ \qquad \sin(\tau) s + \cos(\tau) v_r\big)\, ds\, dv_r & \textit{si } q > 0, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{array} \right. \tag{3.81}$$

2. Nous calculons $\langle \mathcal{E}_1^n \rangle$ et $\langle \mathcal{E}_2^n \rangle$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle \mathcal{E}_1^n \rangle (q, u_r) & = & -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r, \sigma\big) \\ & & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\, H_1(\omega_1\, \sigma) \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big) \Big]\, d\sigma\,, \\ \langle \mathcal{E}_2^n \rangle (q, u_r) & = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r, \sigma\big) \\ & & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\, H_1(\omega_1\, \sigma) \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big) \Big]\, d\sigma\,. \end{array} \right. \tag{3.82}$$

3. Nous calculons $d_1^n(q, u_r)$ et $d_2^n(q, u_r)$ en utilisant la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} d_1^n(q, u_r) \\ d_2^n(q, u_r) \end{pmatrix} = \Delta t \, \big(\mathbf{A}^n(q, u_r)\big)^{-1} \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E}_1^n \rangle (q, u_r) \\ \langle \mathcal{E}_2^n \rangle (q, u_r) \end{pmatrix}\,, \tag{3.83}$$

où la matrice $\mathbf{A}^n(q,u_r)$ est définie par

$$\mathbf{A}^n(q,u_r) = \mathbf{Id} + \Delta t \begin{pmatrix} \partial_q\big(\langle\mathcal{E}_1^n\rangle\big)(q,u_r) & \partial_{u_r}\big(\langle\mathcal{E}_1^n\rangle\big)(q,u_r) \\ \partial_q\big(\langle\mathcal{E}_2^n\rangle\big)(q,u_r) & \partial_{u_r}\big(\langle\mathcal{E}_2^n\rangle\big)(q,u_r) \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

4. Nous calculons G^{n+1} :

$$G^{n+1}(q,u_r) = \Pi G^{n-1}\big(q - 2\,d_1^n(q,u_r), u_r - 2\,d_2^n(q,u_r)\big). \tag{3.85}$$

5. Nous sommmes alors en mesure de reconstruire une approximation de f^ϵ à l'instant t_{n+1} donnée par

$$f^\epsilon(r,v_r,t_{n+1}) \approx 2\pi F^{n+1}\big(r,v_r,\frac{t_{n+1}}{\epsilon}\big), \tag{3.86}$$

où F^{n+1} est définie par

$$F^{n+1}(r,v_r,\tau) = G^{n+1}\big(\cos(\tau)\,r - \sin(\tau)\,v_r, \sin(\tau)\,r + \cos(\tau)\,v_r\big). \tag{3.87}$$

Discrétisation sur un maillage de l'espace des phases étendu

Comme cela a été noté en page 73, il convient de prêter attention aux rotations présentes dans le calcul du terme source de (3.43.c) dans les termes de transport de (3.43.a). En général, le support de la fonction f_0 est inclus dans un pavé $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la forme $[-R,R]\times[-v_R,v_R]$. Cependant, lors du calcul de $\mathcal{E}_r(\cdot,\cdot,0)$, il est nécessaire de calculer $f_0\big(\cos(\tau)r - \sin(\tau)v_r, \sin(\tau)r + \cos(\tau)v_r\big)$. Il est donc recommandé d'agrandir le domaine de simulation à $\Omega' = [-Q_m,Q_m]\times[-U_m,U_m]$ avec $Q_m \geq R + v_R$ et $U_m \geq R + v_R$ afin de ne pas perdre de particules, comme la figure 3.2 l'illustre.

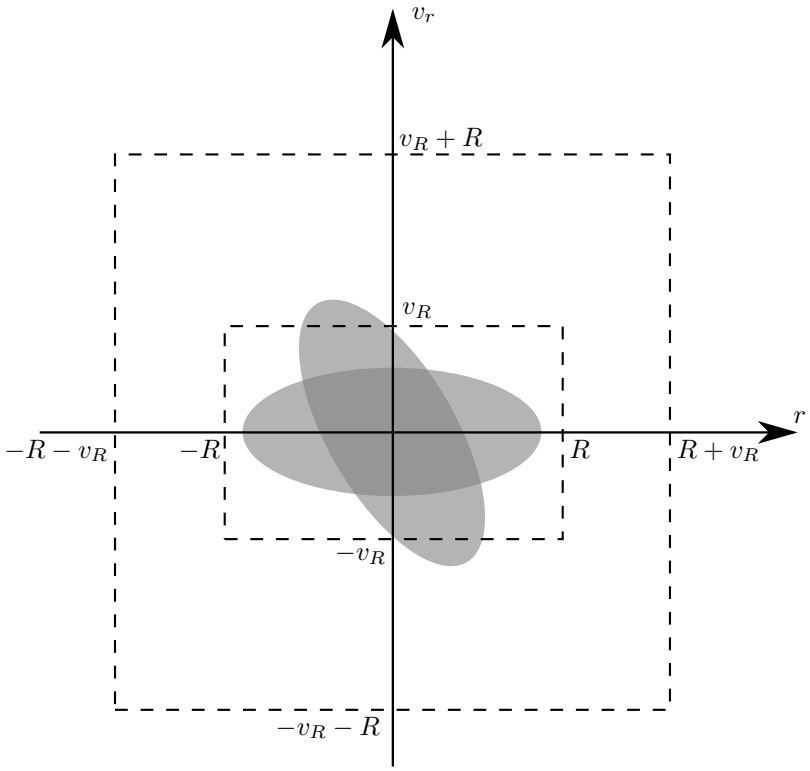


FIGURE 3.2 – Support de $(r,v_r) \mapsto f_0(r,v_r)$ et de $(r,v_r) \mapsto f_0\big(\cos(\tau)\,r - \sin(\tau)\,v_r, \sin(\tau)\,r + \cos(\tau)\,v_r\big)$ avec $\tau = \frac{2\pi}{3}$.

Nous associons alors à Ω' le maillage $M(\Omega')$ défini par

$$M(\Omega') = \Big\{ (q_i, u_{rj}) = (i\,\Delta q, j\,\Delta_{u_r}) \,:\, i = -P_q, \ldots, P_q,\; j = -P_{u_r}, \ldots, P_{u_r} \Big\}, \tag{3.88}$$

où $\Delta q = \frac{Q_m}{P_q+1}$ et $\Delta u_r = \frac{U_m}{P_{u_r}+1}$. Nous considérons également le maillage de $[0, 2\pi]$ suivant :

$$M\big([0,2\pi]\big) = \Big\{ \tau_m = m\,\Delta\tau \,:\, m = 0, \ldots, P_\tau \Big\}, \tag{3.89}$$

avec $\Delta\tau = \frac{2\pi}{P_\tau+1}$. Enfin, nous supposons que le pas de temps Δt est fixé pendant toute la simulation et nous notons $t_n = n\,\Delta t$. En notant G^n l'approximation de $G(\cdot,\cdot,t_n)$ sur $M(\Omega')$ et $\mathcal{E}_r^n$ l'approximation de $\mathcal{E}_r(\cdot,\cdot,t_n)$ sur $M\big([-Q_m, Q_m]\big) \times M\big([0,2\pi]\big)$, la méthode semi-lagrangienne s'écrit :

1. En supposant que G^n et G^{n-1} sont connus sur $M(\Omega')$, nous calculons $\mathcal{E}_r^n$ sur $M\big([-Q_m, Q_m]\big) \times M\big([0,2\pi]\big)$ en discrétisant la formule suivante :

$$\mathcal{E}_r^n(q_i, \tau_m) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_i} \displaystyle\int_0^{q_i} \int_{\mathbb{R}} s\, G^n\big(\cos(\tau_m)s - \sin(\tau_m)v_r, \\ \qquad\qquad \sin(\tau_m)s + \cos(\tau_m)v_r\big)\, ds\, dv_r & si\ i > 0, \\ 0 & sinon, \end{cases} \tag{3.90}$$

pour tout $i \geq 0$, avec $\mathcal{E}_r^n(q_i, \tau_m) = -\mathcal{E}_r^n(-q_i, \tau_m)$ lorsque $i < 0$. Etant donné que le support de G^n est supposé inclus dans Ω', nous pouvons remplacer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ ci-dessus par une intégrale sur $[-U_m, U_m]$. De plus, étant donné que G^n n'est connu qu'aux noeuds du maillage $M(\Omega')$, il est indispensable de remplacer G^n par $\Pi_2 G^n$ dans la formule ci-dessus, où Π_2 est un opérateur d'interpolation par splines cubiques 2D sur les points (q_i, u_{rj}). De ce fait, en utilisant une méthode de trapèzes pour approcher l'intégrale ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r^n(q_i, \tau_m) = \frac{\Delta u_r}{2} \sum_{j=-P_{u_r}}^{P_{u_r}} \Bigg[& \Pi_2 G^n(\cos(\tau_m)q_i - \sin(\tau_m)u_{rj}, \sin(\tau_m)q_i + \cos(\tau_m)u_{rj}) \\ & + \frac{2}{i} \sum_{k=1}^{i-1} k\, \Pi_2 G^n(\cos(\tau_m)q_k - \sin(\tau_m)u_{rj}, \sin(\tau_m)q_k + \cos(\tau_m)u_{rj}) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.91}$$

pour tout $i > 0$.

2. Nous calculons $\langle \mathcal{E}_1^n \rangle$ et $\langle \mathcal{E}_2^n \rangle$ sur $M(\Omega')$ à partir de $\mathcal{E}_r^n$:

$$\begin{cases} \langle \mathcal{E}_1^n \rangle(q_i, u_{rj}) &= -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\sigma)\, q_i + \sin(\sigma)\, u_{rj}, \sigma \big) \\ & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} H_1(\omega_1\, \sigma) \big(\cos(\sigma)\, q_i + \sin(\sigma)\, u_{rj} \big) \Big]\, d\sigma\,, \\ \langle \mathcal{E}_2^n \rangle(q_i, u_{rj}) &= \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\sigma) \Big[\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\sigma)\, q_i + \sin(\sigma)\, u_{rj}, \sigma \big) \\ & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} H_1(\omega_1\, \sigma) \big(\cos(\sigma)\, q_i + \sin(\sigma)\, u_{rj} \big) \Big]\, d\sigma\,. \end{cases} \tag{3.92}$$

Etant donné que $\mathcal{E}_r^n$ n'est connu qu'aux noeuds du maillage $M\big([-Q_m, Q_m]\big) \times M\big([0,2\pi]\big)$, il convient de remplacer $\mathcal{E}_r^n$ par $\Pi_1 \mathcal{E}_r^n$ où Π_1 est un opérateur d'interpolation par splines cubiques 1D sur les points q_i. En utilisant une méthode de rectangles, nous obtenons l'ap-

proximation suivante de $\langle \mathcal{E}_1^n \rangle$ et $\langle \mathcal{E}_2^n \rangle$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \langle \mathcal{E}_1^n \rangle(q_i, u_{rj}) & \approx & -\Delta\tau \displaystyle\sum_{m=0}^{P_\tau} \sin(\tau_m) \Big[\Pi_1 \mathcal{E}_r^n \big(\cos(\tau_m)\, q_i + \sin(\tau_m)\, u_{rj}, \tau_m \big) \\ & & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} H_1(\omega_1\, \tau_m) \big(\cos(\tau_m)\, q_i + \sin(\tau_m)\, u_{rj} \big) \Big] , \\ \langle \mathcal{E}_2^n \rangle(q_i, u_{rj}) & \approx & \Delta\tau \displaystyle\sum_{m=0}^{P_\tau} \cos(\tau_m) \Big[\Pi_1 \mathcal{E}_r^n \big(\cos(\tau_m)\, q_i + \sin(\tau_m)\, u_{rj}, \tau_m \big) \\ & & \qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} H_1(\omega_1\, \tau_m) \big(\cos(\tau_m)\, q_i + \sin(\tau_m)\, u_{rj} \big) \Big] . \end{array} \right. \tag{3.93}$$

3. Pour tous $i = -P_q, \ldots, P_q$, $j = -P_{u_r}, \ldots, P_{u_r}$, nous calculons $d_{1,i,j}^n$ et $d_{2,i,j}^n$ en utilisant la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} d_{1,i,j}^n \\ d_{2,i,j}^n \end{pmatrix} = \Delta t\, (\mathbf{A}_{i,j}^n)^{-1} \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E}_1^n \rangle(q_i, u_{rj}) \\ \langle \mathcal{E}_2^n \rangle(q_i, u_{rj}) \end{pmatrix} , \tag{3.94}$$

où la matrice $\mathbf{A}_{i,j}^n$ est définie par

$$\mathbf{A}_{i,j}^n = \mathbf{Id} + \Delta t \begin{pmatrix} \partial_q \big(\Pi_2 \langle \mathcal{E}_1^n \rangle \big)(q_i, u_{rj}) & \partial_{u_r} \big(\Pi_2 \langle \mathcal{E}_1^n \rangle \big)(q_i, u_{rj}) \\ \partial_q \big(\Pi_2 \langle \mathcal{E}_2^n \rangle \big)(q_i, u_{rj}) & \partial_{u_r} \big(\Pi_2 \langle \mathcal{E}_2^n \rangle \big)(q_i, u_{rj}) \end{pmatrix} . \tag{3.95}$$

4. Nous calculons finalement G^{n+1} sur $M(\Omega')$ en interpolant G^{n-1} :

$$G^{n+1}(q_i, u_{rj}) = \Pi_2 G^{n-1}(q_i - 2\, d_{1,i,j}^n, u_{rj} - 2\, d_{2,i,j}^n) . \tag{3.96}$$

5. Nous pouvons alors sauvegarder l'approximation de $f^\epsilon(\cdot, \cdot, t_{n+1})$ donnée par

$$f^\epsilon(r, v_r, t_{n+1}) \approx 2\pi\, \Pi_2 G^{n+1} \Big(\cos\big(\tfrac{t_{n+1}}{\epsilon}\big) r - \sin\big(\tfrac{t_{n+1}}{\epsilon}\big) v_r, \sin\big(\tfrac{t_{n+1}}{\epsilon}\big) r + \cos\big(\tfrac{t_{n+1}}{\epsilon}\big) v_r \Big) . \tag{3.97}$$

Discrétisation sur une famille de maillages mobiles

Comme nous avons pu le constater ci-dessus, il est nécessaire d'agrandir le domaine de simulation si nous voulons nous assurer de ne pas perdre de particules tout au long de la simulation. Par conséquent, il est recommandé d'augmenter les valeurs de P_q et P_{u_r} afin de garder une bonne interpolation sur $M(\Omega')$, même si f_0 est nulle sur une grande partie des noeuds de ce maillage étendu.

Dans ce paragraphe, nous présentons une approche différente, permettant de s'affranchir de cet agrandissement du domaine de simulation et du maillage associé : nous supposons comme dans le paragraphe précédent que le support de la distribution initiale f_0 est inclus dans un pavé $\Omega = [-R, R] \times [-v_R, v_R]$. Nous reprenons également le maillage $M\big([0, 2\pi]\big)$ défini en (3.89). Nous définissons également la fonction γ par

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r, v_r, \tau) & \longmapsto & \big(\cos(\tau)\, r - \sin(\tau)\, v_r, \sin(\tau)\, r + \cos(\tau)\, v_r \big) \end{array} , \tag{3.98}$$

puis, pour tout $\tau \in [0, 2\pi]$, le domaine $\Omega(\tau)$ et son maillage associé $M\big(\Omega(\tau)\big)$ par

$$\begin{array}{c} \Omega(\tau) = \gamma\big(\Omega \times \{\tau\}\big) \subset \mathbb{R}^2 , \\ M\big(\Omega(\tau)\big) = \Big\{ \gamma(r_i, v_{rj}, \tau) \,:\, i = -P_r, \ldots, P_r \,,\, j = -P_{v_r}, \ldots, P_{v_r} \Big\} , \end{array} \tag{3.99}$$

avec $r_i = i\Delta r$, $v_{rj} = j\Delta v_r$, $\Delta r = \frac{R}{P_r+1}$ et $\Delta v_r = \frac{v_R}{P_{v_r}+1}$.

L'idée principale de cette nouvelle approche consiste à approcher $(r, \tau) \mapsto \mathcal{E}_r(r, \tau, t_n)$ sur le maillage $M\big([-R, R]\big) \times M\big([0, 2\pi]\big)$, et à approcher $(r, v_r) \mapsto 2\pi\, F(r, v_r, \tau_m, t_n)$ sur le maillage

$M(\Omega)$, tandis que $(q, u_r) \mapsto G(q, u_r, t_n)$ sera approchée sur le maillage $M\big(\Omega(\tau_m)\big)$ pour chaque $\tau_m \in M\big([0, 2\pi]\big)$.

Cette approche est similaire à celle de J. Lang *et al.* [42] dans laquelle il est question d'utiliser un maillage qui évolue en fonction du temps afin de réduire la diffusion numérique. Cependant, dans notre cas, la famille de maillages $\big(M\big(\Omega(\tau_m)\big)\big)_{m=0,\dots,P_\tau}$ ne dépend que de $M(\Omega)$ et de $M\big([0, 2\pi]\big)$, et est donc fixée de façon définitive au début de la simulation.

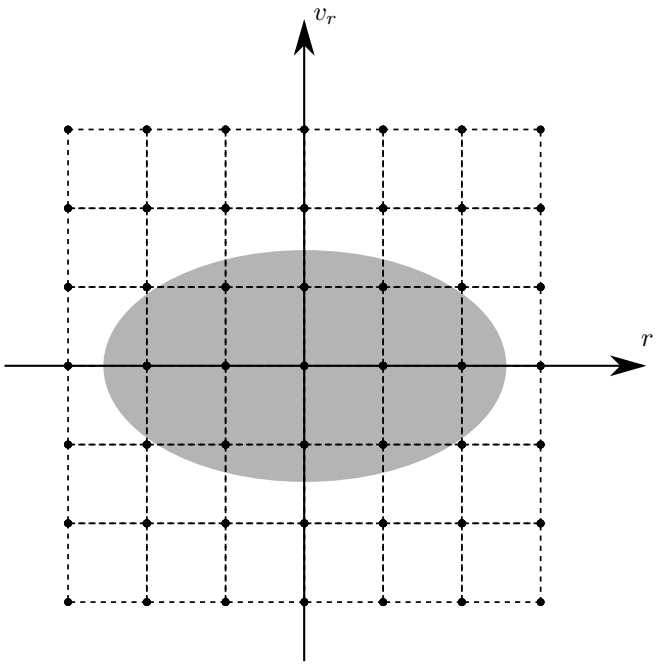


FIGURE 3.3 – Maillage $M(\Omega) = M\big(\Omega(0)\big)$ et support de $(r, v_r) \mapsto f_0(r, v_r)$.

Comme première conséquence, nous avons l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Supp}(f_0) \subset \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Supp}\Big((r, v_r) \mapsto f_0 \circ \gamma(r, v_r, \tau)\Big) \subset \Omega(\tau) \text{ pour tout } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{3.100}$$

Ce résultat est illustré par les figures 3.3, 3.4 et 3.5, où nous avons représenté le support elliptique d'une distribution de Kapchinsky-Vladimirsky (voir les travaux de F. Filbet et E. Sonnendrücker [22], I.-M. Kapchinsky et V.-V. Vladimirsky [39], ainsi que M. Reiser [55]). Nous constatons alors qu'il n'est pas nécessaire d'agrandir le domaine d'étude Ω pour éviter les pertes de données. De plus, l'équation (3.42) se réécrit sous la forme suivante :

$$F(r, v_r, \tau, t) = G\big(\gamma(r, v_r, \tau), t\big)\,. \tag{3.101}$$

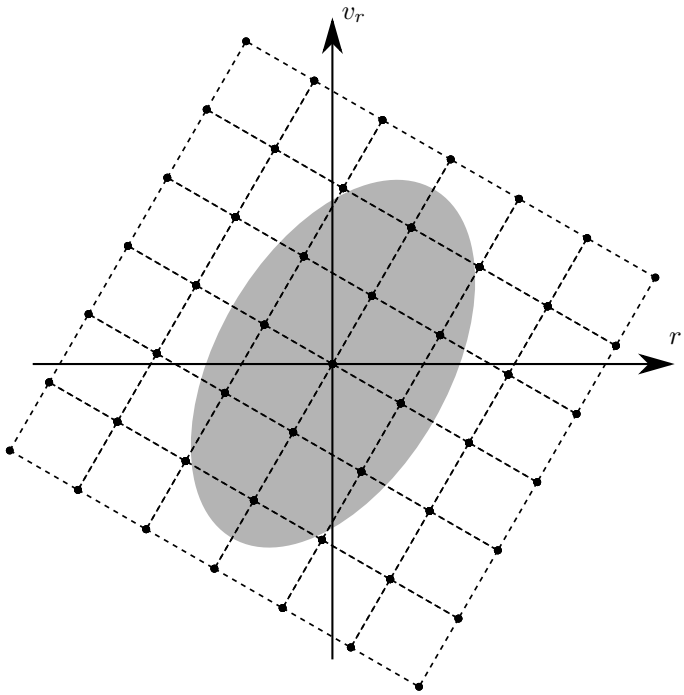


FIGURE 3.4 – Mailage $M\big(\Omega(\frac{\pi}{3})\big)$ et support de $(r, v_r) \mapsto f_0 \circ \gamma(r, v_r, \frac{\pi}{3})$.

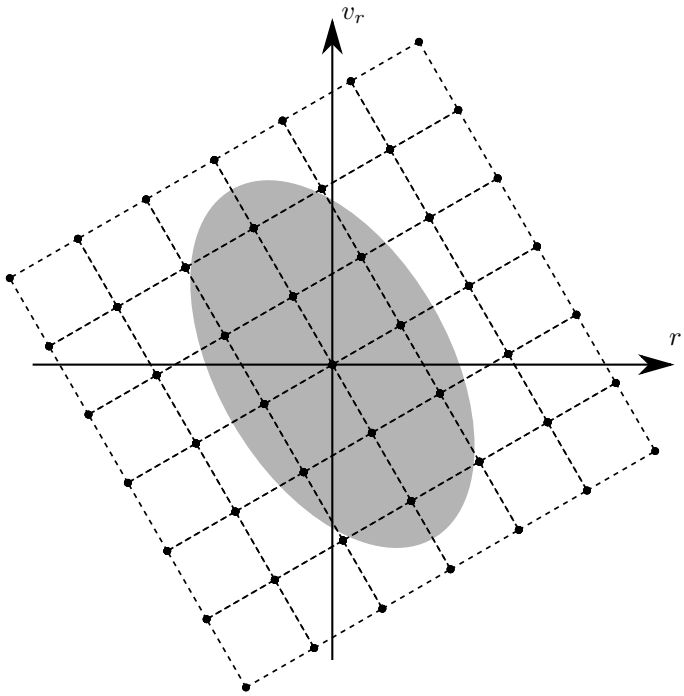


FIGURE 3.5 – Maillage $M\big(\Omega(\frac{2\pi}{3})\big)$ et support de $(r, v_r) \mapsto f_0 \circ \gamma(r, v_r, \frac{2\pi}{3})$.

En considérant cette nouvelle approche, la méthode semi-lagrangienne présentée dans le paragraphe précédent s'en trouve modifiée. En fixant un pas de temps de la forme

$$\Delta t = \epsilon\, K\, \Delta\tau\,, \tag{3.102}$$

où $K \in \mathbb{N}^*$, et en notant G^n l'approximation de $G(\cdot,\cdot,t_n)$ sur les noeuds des maillages $M\big(\Omega(\tau_m)\big)$, une itération se déroule de la façon suivante :

1. en supposant que G^n et G^{n-1} sont connues sur $M\big(\Omega(\tau_m)\big)$ pour chaque $\tau_m \in M\big([0,2\pi]\big)$, nous calculons $\mathcal{E}_r^n$ en discrétisant la formule suivante :

$$\mathcal{E}_r^n(r_i,\tau_m) = -\mathcal{E}_r^n(-r_i,\tau_m) = \begin{cases} \dfrac{1}{r_i}\displaystyle\int_0^{r_i}\int_{\mathbb{R}} s\, G^n\big(\gamma(s,v_r,\tau_m)\big)\, dv_r\, ds & si\ i>0, \\ 0 & sinon, \end{cases} \tag{3.103}$$

pour tout $i = 0,\dots,P_r$ et pour tout $m = 0,\dots,P_\tau$. Le support de $G^n\circ\gamma(\cdot,\cdot,\tau_m)$ étant supposé inclus dans $\Omega(\tau_m)$, nous pouvons remplacer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ ci-dessus par une intégrale sur $[-v_R, v_R]$. En utilisant une méthode de trapèzes, nous obtenons l'approximation suivante :

$$\mathcal{E}_r^n(r_i,\tau_m) \approx \frac{\Delta r\,\Delta v_r}{2}\sum_{j=-P_{v_r}}^{P_{v_r}}\left(G^n\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m)\big) + \frac{2}{i}\sum_{k=1}^{i-1} k\, G^n\big(\gamma(r_k,v_{rj},\tau_m)\big)\right). \tag{3.104}$$

2. Nous calculons $\langle\mathcal{E}_1^n\rangle$ et $\langle\mathcal{E}_2^n\rangle$ sur chaque maillage $M\big(\Omega(\tau_m)\big)$:

$$\begin{cases} \langle\mathcal{E}_1^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m)\big) \\ \qquad = -\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\sigma)\Big[\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\sigma-\tau_m)\,r_i + \sin(\sigma-\tau_m)\,v_{rj},\sigma\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}H_1(\omega_1\,\sigma)\big(\cos(\sigma-\tau_m)\,r_i + \sin(\sigma-\tau_m)\,v_{rj}\big)\Big]\,d\sigma\,, \\ \langle\mathcal{E}_2^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m)\big) \\ \qquad = \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(\sigma)\Big[\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\sigma-\tau_m)\,r_i + \sin(\sigma-\tau_m)\,v_{rj},\sigma\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}H_1(\omega_1\,\sigma)\big(\cos(\sigma-\tau_m)\,r_i + \sin(\sigma-\tau_m)\,v_{rj}\big)\Big]\,d\sigma\,. \end{cases} \tag{3.105}$$

Etant donné que $\mathcal{E}_r^n$ est connu sur $M\big([-R,R]\big)\times M\big([0,2\pi]\big)$, il est nécessaire d'interpoler $\mathcal{E}_r^n(\cdot,\tau_m)$ en utilisant un opérateur d'interpolation : nous choisissons l'opérateur de splines cubiques 1D Π_1 sur les points r_i. Alors, en utilisant une méthode de rectangles afin d'approcher les intégrales sur $[0,2\pi]$, nous approchons $\langle\mathcal{E}_1^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m)\big)$ et $\langle\mathcal{E}_2^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m)\big)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \langle\mathcal{E}_1^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m)\big) \\ \qquad \approx -\Delta\tau\displaystyle\sum_{k=0}^{P_\tau}\sin(\tau_k)\Big[\Pi_1\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\tau_k-\tau_m)\,r_i + \sin(\tau_k-\tau_m)\,v_{rj},\tau_k\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}H_1(\omega_1\,\tau_k)\big(\cos(\tau_k-\tau_m)\,r_i + \sin(\tau_k-\tau_m)\,v_{rj}\big)\Big]\,, \\ \langle\mathcal{E}_2^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m)\big) \\ \qquad \approx \Delta\tau\displaystyle\sum_{k=0}^{P_\tau}\cos(\tau_k)\Big[\Pi_1\mathcal{E}_r^n\big(\cos(\tau_k-\tau_m)\,r_i + \sin(\tau_k-\tau_m)\,v_{rj},\tau_k\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}H_1(\omega_1\,\tau_k)\big(\cos(\tau_k-\tau_m)\,r_i + \sin(\tau_k-\tau_m)\,v_{rj}\big)\Big]\,. \end{cases} \tag{3.106}$$

3. Nous résolvons les problèmes de point fixe suivants :

$$\mathbf{d}_{i,j,m}^n = \Delta t\begin{pmatrix} \langle\mathcal{E}_1^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m) - \mathbf{d}_{i,j,m}^n\big) \\ \langle\mathcal{E}_2^n\rangle\big(\gamma(r_i,v_{rj},\tau_m) - \mathbf{d}_{i,j,m}^n\big) \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Pour cela, nous définissons l'opérateur d'interpolation Π_2^m sur $\Omega(\tau_m)$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Pi_2^m g : & \Omega(\tau_m) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (q, u_r) & \longmapsto & \Pi_2^m g(q, u_r) = \Pi_2^0 g\big(\gamma^{-1}(q, u_r, \tau_m)\big) \end{array} , \tag{3.108}$$

où $\Pi_2^0 = \Pi_2$ est un opérateur d'interpolation par splines 2D sur Ω. Alors, nous calculons $\mathbf{d}_{i,j,m}^n$ en nous inspirant de (3.58), c'est-à-dire

$$\mathbf{d}_{i,j,m}^n = \Delta t \, (\mathbf{A}_{i,j,m}^n)^{-1} \begin{pmatrix} \langle \mathcal{E}_1^n \rangle \big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_m)\big) \\ \langle \mathcal{E}_2^n \rangle \big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_m)\big) \end{pmatrix} . \tag{3.109}$$

Etant donné que nous travaillons sur $\Omega(\tau_m)$ et que l'opérateur Π_2^m est défini sur ce domaine, la matrice $\mathbf{A}_{i,j,m}^n$ est définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,j,m}^n &= \mathbf{Id} + \Delta t \, \nabla_{q,u_r} \begin{pmatrix} \Pi_2^m \langle \mathcal{E}_1^n \rangle \big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_m)\big) \\ \Pi_2^m \langle \mathcal{E}_2^n \rangle \big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_m)\big) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{Id} + \Delta t \begin{pmatrix} \cos \tau_m & \sin \tau_m \\ -\sin \tau_m & \cos \tau_m \end{pmatrix} \times \left(\nabla_{r,v_r} \begin{pmatrix} \Pi_2^m \langle \mathcal{E}_1^n \rangle \\ \Pi_2^m \langle \mathcal{E}_2^n \rangle \end{pmatrix} \right) \big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_m)\big) . \end{aligned} \tag{3.110}$$

4. Nous calculons finalement G^{n+1} sur chaque maillage $M\big(\Omega(\tau_m)\big)$ en interpolant G^{n-1} :

$$G^{n+1}\big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_m)\big) = \Pi_2^m G^{n-1}\big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_m) - 2\, \mathbf{d}_{i,j,m}^n\big) \tag{3.111}$$

5. Nous sauvegardons l'approximation de $f^\epsilon(\cdot, \cdot, t_{n+1})$ sur $M(\Omega)$ donnée par

$$f^\epsilon(r_i, v_{rj}, t_{n+1}) \approx 2\pi \, G^{n+1}\big(\gamma(r_i, v_{rj}, \tau_{(n+1)\,K})\big) . \tag{3.112}$$

Il est évident que, sur un tel maillage, la méthode semi-lagrangienne 2-échelles nécessitera un temps de calcul bien plus important qu'avec un maillage du type $M(\Omega')$ défini en (3.88). Cependant, elle permet de s'affranchir d'une interpolation 2D lors du calcul du champ électrique à l'étape 1, et donc de la diffusion numérique introduite à cette occasion. De la même façon, grâce à ce maillage et à la définition (3.102) du pas de temps, nous pouvons également nous affranchir d'une interpolation 2D lors de la reconstruction de l'approximation de f^ϵ en (3.112).

4 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats numériques avec pour objectif de valider numériquement les méthodes semi-lagrangiennes 2-échelles présentées dans les paragraphes 3.3 et 3.4. Pour cela, nous allons suivre la même démarche que celle d'E. Frénod *et al.* dans [28] : dans un premier temps, nous effectuerons des tests sur des cas linéaires, où le champ électrique auto-consistant est supposé nul, ce qui permet de calculer analytiquement la solution G du modèle (3.43) selon l'expression de H_1. Nous présenterons ensuite des résultats obtenus sur des cas non-linéaires, situations dans lesquelles il est généralement impossible de trouver une expression analytique de la solution G de (3.43). Afin de valider les résultats produits par les méthodes 2-échelles, nous les comparerons à des résultats que nous pouvons obtenir d'une méthode semi-lagrangienne classique appliquée au modèle (3.1).

4.1 Discrétisation du modèle non-homogénéisé

Afin de valider les résultats produits par les méthodes 2-échelles, il sera nécessaire de résoudre directement le modèle (3.1). Dans ce paragraphe, nous présentons donc une méthode semi-lagrangienne en arrière classique appliquée à ce modèle. Etant donné que E_r^ϵ et Ξ_r^ϵ ne dépendent pas de v_r, nous pouvons envisager un splitting de Strang sur l'équation de transport (3.1.a) sans perdre son caractère conservatif. D'après ce qui a été rappelé dans le paragraphe 3.1, une telle méthode sera d'ordre 2 en temps, même si les équations

$$\partial_t g_1^\epsilon + \frac{v_r}{\epsilon} \, \partial_r g_1^\epsilon = 0 , \tag{3.113}$$

et

$$\partial_t g_2^\epsilon + (E_r^\epsilon + \Xi_r^\epsilon)\, \partial_{v_r} g_2^\epsilon = 0\,, \tag{3.114}$$

sont résolues avec des schémas d'ordre 2 en temps.

Si nous couplons (3.114) avec l'équation de Poisson (3.1.c) ainsi que des conditions aux bords nulles en r, nous constatons que E_r^ϵ est stationnaire : en effet,

$$\frac{1}{r}\, \partial_r\big(r\, \partial_t E_r^\epsilon(r,t)\big) = -\int_{\mathbb{R}} \Big(\big(E_r^\epsilon(r,t) + \Xi_r^\epsilon(r,t)\big)\, \partial_{v_r} g_2^\epsilon(r,v_r,t)\Big)\, dv_r = 0\,. \tag{3.115}$$

Par conséquent, pour tous $s, t \geq 0$, les solutions respectives g_1^ϵ et g_2^ϵ de (3.113) et (3.114) vérifient

$$g_1^\epsilon(r,v_r,t) = g_1^\epsilon\big(r + \frac{t-s}{\epsilon}\, v_r, v_r, s\big)\,, \tag{3.116}$$

et

$$g_2^\epsilon(r,v_r,t) = g_2^\epsilon\Big(r, v_r + (t-s)\, E_r^\epsilon(r,t_0) + \int_s^t \Xi_r^\epsilon(r,\bar{t})\, d\bar{t}, s\Big)\,, \tag{3.117}$$

pour tout t_0 compris entre s et t. Selon l'expression de Ξ_r^ϵ, nous pouvons envisager un splitting basé sur la résolution exacte de (3.113) et de (3.114), mais nous pouvons également considérer l'approximation d'ordre 2 suivante

$$\int_s^t \Xi_r^\epsilon(r,\bar{t})\, d\bar{t} \approx (t-s)\, \Xi_r^\epsilon\big(r, \frac{s+t}{2}\big)\,, \tag{3.118}$$

sans cela n'affecte l'ordre de la méthode de splitting.

Comme dans les paragraphes précédents, nous considérons le domaine $\Omega = [-R,R] \times [-v_R, v_R]$ avec R et v_R suffisamment grands pour que le support de f^ϵ reste inclus dans Ω. Nous nous donnons le maillage uniforme $M(\Omega)$ défini par

$$M(\Omega) = \Big\{(r_i, v_{rj}) = (i\,\Delta r, j\,\Delta_{v_r})\ :\ i = -P_r, \ldots, P_r,\ j = -P_{v_r}, \ldots, P_{v_r}\Big\}\,, \tag{3.119}$$

où $\Delta r = \frac{R}{P_r+1}$ et $\Delta v_r = \frac{v_R}{P_{v_r}+1}$. Nous nous donnons les opérateurs d'interpolation 1D par splines cubiques Π_r et Π_{v_r}. Enfin, nous notons f_n^ϵ l'approximation de $f^\epsilon(\cdot,\cdot,t_n)$ et E_n^ϵ l'approximation de $E_r^\epsilon(\cdot,t_n)$. Le modèle (3.1) est alors discrétisé avec le splitting de Strang de la façon suivante :

1. En supposant que les $f_n^\epsilon(r_i,v_{rj})$ et $E_n^\epsilon(r_i)$ sont connus, nous faisons une demi-advection en v_r et nous définissons f_*^ϵ par

$$f_*^\epsilon(r_i,v_{rj}) = \Pi_{v_r} f_n^\epsilon\Big(r_i, v_{rj} - \frac{\Delta t}{2}\, E_n^\epsilon(r_i) - \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \Xi_r^\epsilon(r_i,t)\, dt\Big)\,. \tag{3.120}$$

2. Nous faisons une advection en r et nous définissons f_{**}^ϵ par

$$f_{**}^\epsilon(r_i,v_{rj}) = \Pi_r f_*^\epsilon\Big(r_i - \frac{\Delta t}{\epsilon}\, v_{rj}, v_{rj}\Big)\,. \tag{3.121}$$

3. Nous calculons E_{n+1}^ϵ en discrétisant

$$E_{n+1}^\epsilon(r_i) = -E_{n+1}^\epsilon(-r_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{r_i}\displaystyle\int_0^{r_i}\int_{-v_R}^{v_R} s\, f_{**}^\epsilon(s,v_r)\, dv_r\, ds & si\ i>0, \\ 0 & sinon, \end{cases} \tag{3.122}$$

pour tout $i \geq 0$. Nous choisissons en l'occurrence la méthode des trapèzes, ce qui donne l'approximation suivante :

$$E_{n+1}^\epsilon(r_i) \approx \frac{\Delta v_r}{2} \sum_{j=-P_{v_r}}^{P_{v_r}} f_{**}^\epsilon(r_i,v_{rj}) + \frac{\Delta v_r}{i} \sum_{j=-P_{v_r}}^{P_{v_r}} \sum_{k=1}^{i-1} k\, f_{**}^\epsilon(r_k,v_{rj})\,, \tag{3.123}$$

pour $i > 0$.

4. Nous calculons f^ϵ_{n+1} en faisant une deuxième demi-advection en v_r :

$$f^\epsilon_{n+1}(r_i, v_{rj}) = \Pi_{v_r} f^\epsilon_{**}\Big(r_i, v_{rj} - \frac{\Delta t}{2} E^\epsilon_{n+1}(r_i) - \int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \Xi^\epsilon_r(r_i, t)\, dt\Big)\,. \tag{3.124}$$

Afin de maintenir la robustesse de cette méthode, il convient de tenir compte des termes d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$ présents dans les advections. Par exemple, lorsque nous effectuons l'advection en r décrite par l'étape 2, pour $(r_i, v_{rj}) \in M(\Omega)$, il se peut que $r_i - \frac{\Delta t}{\epsilon} v_{rj} \notin [-R, R]$ et, de ce fait, nous obtenons $f^\epsilon_{**}(r_i, v_{rj}) = 0$ car, par construction, $\Pi_r g$ est nul en-dehors de $[-R, R]$ pour toute fonction g. De part la définition du champ électrique externe Ξ^ϵ_r, le même problème peut se produire lors des demi-advections en v_r. Il y a donc un risque de perdre des données si Δt est trop grand par rapport à ϵ. Nous pouvons nous assurer qu'il n'y a pas de problème de ce type en imposant à Δt les inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} r_i - k\Delta r & \leq & r_i - \dfrac{\Delta t}{\epsilon} v_{rj} & \leq & r_i + k\Delta r\,, \\ v_{rj} - l\Delta v_r & \leq & v_{rj} - \dfrac{\Delta t}{2} E^\epsilon_n(r_i) + \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \Xi^\epsilon(r_i, t)\, dt & \leq & v_{rj} + l\Delta v_r\,, \\ v_{rj} - l\Delta v_r & \leq & v_{rj} - \dfrac{\Delta t}{2} E^\epsilon_{n+1}(r_i) - \displaystyle\int_{t_{n+1/2}}^{t_{n+1}} \Xi^\epsilon(r_i, t)\, dt & \leq & v_{rj} + l\Delta v_r\,, \end{array}\right. \tag{3.125}$$

pour tout i, j, n, où $k, l \in \mathbb{N}^*$ sont fixés par l'utilisateur. Si ces inégalités sont respectées et si k et l ne sont pas trop grands, alors il n'y a pas de risque de perdre des données. Cependant, en imposant ces conditions, le pas de temps Δt est du même ordre que ϵ, ce qui pénalise grandement le schéma en terme de temps de calcul lorsque ϵ devient petit.

4.2 Cas linéaires

Dans un premier temps, nous supposons que le champ électrique auto-consistant est nul. Sous cette hypothèse, le modèle limite (3.43) se réduit à

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t G - \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sigma)\, H_1(\omega_1\, \sigma)\, \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big)\, d\sigma\, \partial_q G \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\sigma)\, H_1(\omega_1\, \sigma)\, \big(\cos(\sigma)\, q + \sin(\sigma)\, u_r\big)\, d\sigma\, \partial_{u_r} G = 0\,, \\ G(q, u_r, t = 0) = \dfrac{1}{2\pi} f_0(q, u_r)\,. \end{array}\right. \tag{3.126}$$

De ce fait, sous réserve d'un choix de H_1 et de ω_1 judicieux, il est possible de trouver une formule analytique pour G, et donc une formulation analytique pour l'approximation de la solution f^ϵ de (3.1) que nous recherchons.

Nous considérons 4 types de simulation, notés (I), (II), (III) et (IV), pour les cas linéaires. Ces types de simulations sont définis par

- Simulation de type (I) : nous résolvons le système (3.1) avec une méthode semi-lagrangienne classique (voir §4.1), avec $R = v_R = 3$ et $P_r = P_{v_r} = 64$,
- Simulation de type (II) : nous résolvons le système (3.1) avec une méthode semi-lagrangienne classique (voir §4.1), avec $R = v_R = 3$ et $P_r = P_{v_r} = 128$,
- Simulation de type (III) : nous résolvons le système (3.42)-(3.43) avec une méthode semi-lagrangienne 2-échelles sur un maillage 2-échelles (voir §3.2), avec $R = v_R = 3$, $P_r = P_{v_r} = 64$ et $P_\tau = 16$,
- Simulation de type (IV) : nous résolvons le système (3.43) avec une méthode semi-lagrangienne 2-échelles sur un maillage uniforme en q et u_r (voir §3.2), avec $R = v_R = 3$, $Q_m = U_m = R + v_R = 6$, $P_q = P_{u_r} = 128$ et $P_\tau = 16$, et nous reconstruisons l'approximation de f^ϵ sur $M(\Omega)$ en utilisant (3.97) et en prenant $P_r = P_{v_r} = 64$.

Cas non-résonant

Supposons que $\omega_1 \notin \mathbb{Q}$. De ce fait, l'équation (3.126) permet d'affirmer que, pour toute fonction H_1, G est indépendante de t, et donc identiquement égale à $\frac{1}{2\pi} f_0$. Alors l'approximation de f^ϵ que l'on recherche est donnée par

$$f_e \,:\, (r, v_r, t) \longmapsto f_0\Big(\cos\big(\frac{t}{\epsilon}\big)\, r - \sin\big(\frac{t}{\epsilon}\big)\, v_r, \sin\big(\frac{t}{\epsilon}\big)\, r + \cos\big(\frac{t}{\epsilon}\big)\, v_r\Big)\,. \tag{3.127}$$

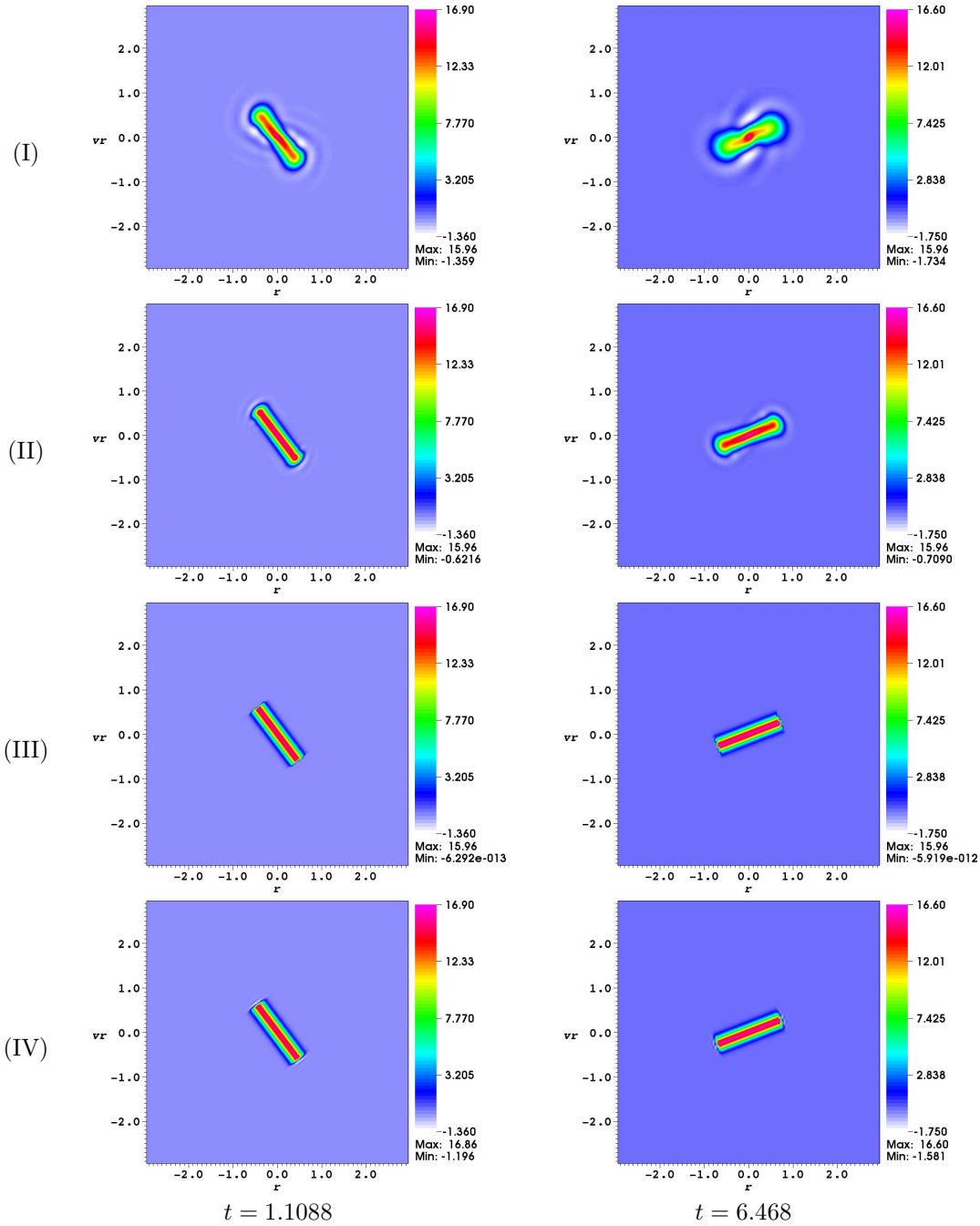


FIGURE 3.6 – Simulations de type (I), (II), (III), et (IV) d'un faisceau semi-gaussien avec champ électrique auto-consistant nul et $\omega_1 = 4\sqrt{2}$, $H_1(\tau) = \cos(\tau)$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

Dans la figure 3.6, nous pouvons observer des résultats numériques obtenus sous les hypothèses suivantes :

- $\omega_1 = 4\sqrt{2}$ et $H_1(\tau) = \cos(\tau)$,
- f_0 est la distribution initiale d'un faisceau semi-gaussien, c'est-à-dire

$$f_0(r, v_r) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}\, v_{th}} \exp\Big(- \frac{v_r^2}{2\, v_{th}^2} \Big) I_{[-r_m, r_m]}(r)\,, \tag{3.128}$$

  avec $r_m = 0.75$, $v_{th} = 0.1$, et $n_0 = 4$,
- $\epsilon = 10^{-2}$.

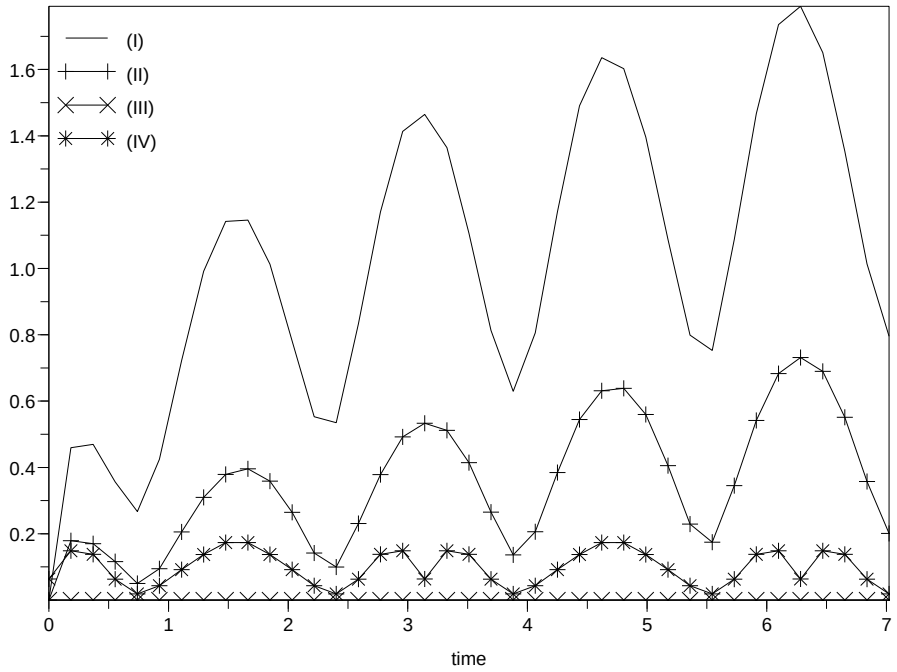


FIGURE 3.7 – Evolution de la norme L^1 de la différence en la fonction f_e définie en (3.127) et l'approximation f_h calculée par les simulations (I), (II), (III), et (IV).

Etant donné qu'il est possible de calculer une expression analytique de G, nous pouvons comparer les différentes approximations de f^ϵ fournies par chacune des 4 simulations à la fonction f_e définie en (3.127). Dans la figure 3.7, nous traçons la norme L^1 de la différence $f_h - f_e$ où f_h est l'approximation fournie par chacune des simulations (I), (II), (III) et (IV).

Cas résonant

Supposons cette fois que ω_1 est un entier supérieur ou égal à 2. De ce fait, l'équation (3.126) ne se réduit pas forcément à $\partial_t G = 0$. Par exemple, en supposant que $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t G - \dfrac{u_r}{4} \partial_q G + \dfrac{q}{4} \partial_{u_r} G = 0\,, \\ G(q, u_r, t = 0) = \dfrac{1}{2\pi} f_0(q, u_r)\,, \end{cases} \tag{3.129}$$

et donc une formule explicite pour G :

$$G(q,u_r,t) = \frac{1}{2\pi}\ f_0\Big(\cos\big(\frac{t}{4}\big)\,q - \sin\big(\frac{t}{4}\big)\,u_r, \sin\big(\frac{t}{4}\big)\,q + \cos\big(\frac{t}{4}\big)\,u_r\Big)\,. \tag{3.130}$$

Alors l'approximation de f^ϵ que l'on recherche est donnée par

$$f_e\ :\ (r,v_r,t) \longmapsto f_0\Big(cos\big(\frac{t}{\epsilon}+\frac{t}{4}\big)\,r - \sin\big(\frac{t}{\epsilon}+\frac{t}{4}\big)\,v_r, \sin\big(\frac{t}{\epsilon}+\frac{t}{4}\big)\,r + \cos\big(\frac{t}{\epsilon}+\frac{t}{4}\big)\,v_r\Big)\,. \tag{3.131}$$

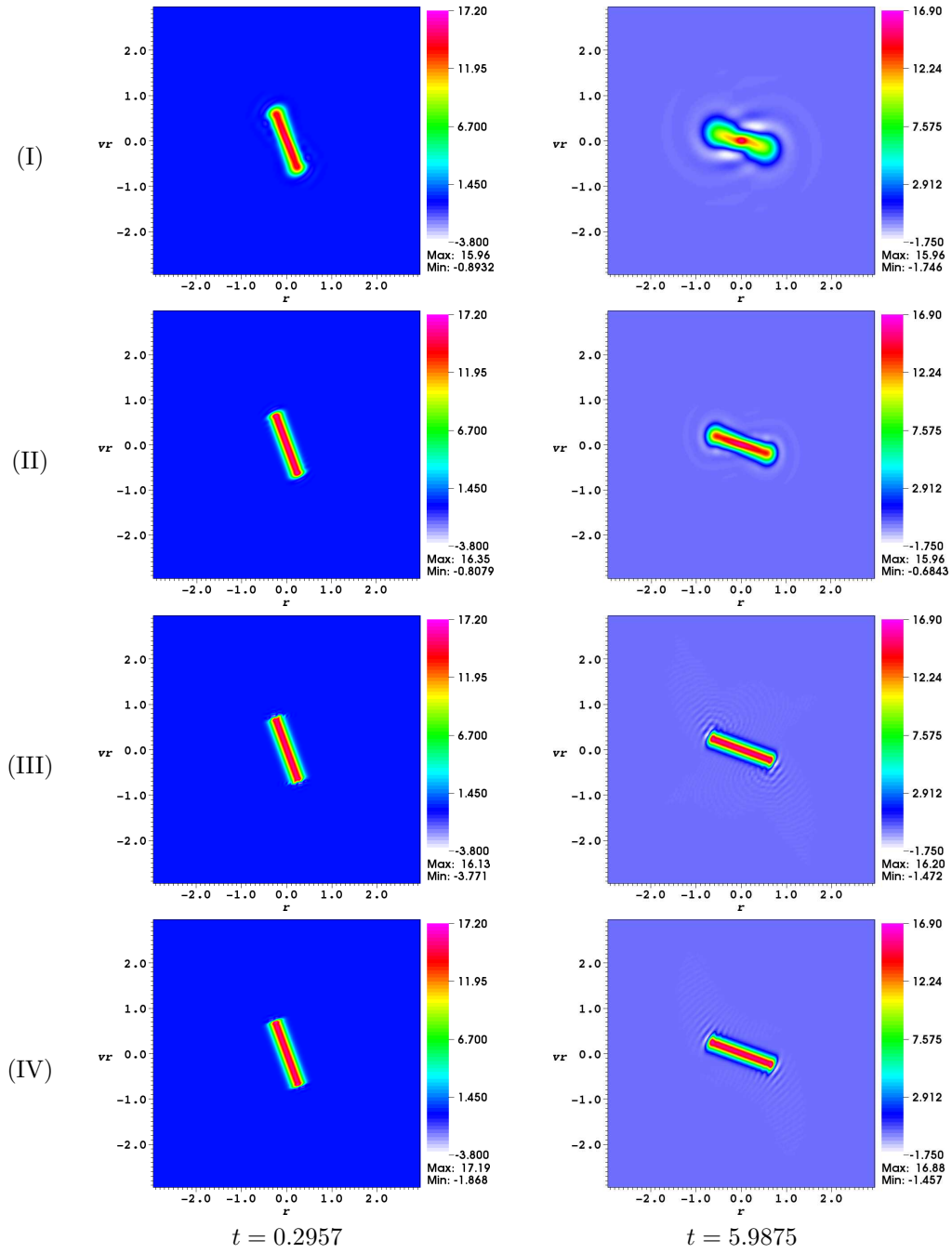


FIGURE 3.8 – Simulations de types (I), (II), (III) et (IV) d'un faisceau semi-gaussien avec champ électrique auto-consistant nul et $\omega_1 = 2$, $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

Dans la figure 3.8, nous pouvons observer des résultats numériques obtenus sous les hypothèses suivantes :

- $\omega_1 = 2$ et $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$,
- f_0 est la distribution initiale d'un faisceau semi-gaussien, c'est-à-dire de la forme (3.128) avec avec $r_m = 0.75$, $v_{th} = 0.1$, et $n_0 = 4$,
- $\epsilon = 10^{-2}$.

Nous constatons que dans les cas résonants comme non-résonants, l'utilisation d'une méthode semi-lagrangienne classique nécessite un maillage en (r, v_r) assez fin pour obtenir des résultats correspondant à la solution attendue : en effet, comme nous pouvons le constater dans les figures 3.6 et 3.8, la simulation de type (I) produit des résultats qui ne correspondent pas au phénomène physique attendu. Cela peut s'expliquer par le nombre important d'interpolations nécessaires pour effectuer la simulation sur un temps long, du fait que le pas de temps Δt_{NH} doit être suffisamment petit pour vérifier les inégalités (3.125) afin de garantir la robustesse de la méthode. A titre d'exemple, le pas de temps utilisé dans la simulation (II) pour le cas résonant est $\Delta t_{NH} \approx 1.5 \times 10^{-4}$.

D'autre part, nous constatons que les méthodes 2-échelles développées dans le paragraphe 3.2 produisent de bons résultats même avec des maillages peu raffinés sur $\Omega = [-R, R] \times [-v_R, v_R]$ et $\Omega' = [-R-v_R, R+v_R]^2$. En effet, étant donné que ces 2 méthodes sont basées sur une résolution de (3.43), le pas de temps Δt_H ne subit pas de contraintes liées ϵ comme c'est le cas pour une méthode semi-lagrangienne classique. Par exemple, nous avons choisi pour le cas résonant $\Delta t_H \approx 7.4 \times 10^{-3}$ pour les simulations (III) et (IV). Nous réduisons alors le nombre total d'interpolations au cours du temps de manière significative, ainsi que la diffusion numérique que cela implique.

Cette dernière remarque rejoint les observations que nous pouvons faire sur les résultats de la figure 3.7 : d'une part, il est clair que l'approximation f_h calculée par chacune des méthodes 2-échelles est nettement meilleure que celle fournie par une méthode classique de type (I) ou (II). D'autre part, nous constatons que l'utilisation du maillage 2-échelles réduit de manière significative la diffusion numérique : en effet, dans le cadre du cas non-résonant, l'erreur $f_h - f_e$ en norme L^1 oscille entre 0 et 0.75 lorsque que f_h est obtenue avec la simulation (IV), tandis que cette errreur est d'ordre 10^{-6} lorsque f_h est calculée avec la simulation (III), ce qui traduit le fait que la diffusion numérique est réduite de façon significative lorsque nous utilisons le maillage 2-échelles. Enfin, nous pouvons expliquer les oscillations des courbes d'erreur des simulations (I), (II) et (IV) par le fait que nous discrétisons sur un maillage uniforme une fonction de distribution non-régulière dont le support tourne dans l'espace des phases sous l'action du champ électrique externe.

En conclusion, nous pouvons affirmer que les méthodes 2-échelles présentées dans le paragraphe 3.2 remplissent leurs objectifs sur des cas linéaires : elles produisent des résultats de bien meilleure qualité qu'une méthode semi-lagrangienne classique sur le modèle (3.1) pour un même maillage de l'espace des phases. De plus, nous avons pu confirmer les attentes que nous avions du maillage 2-échelles quant à la réduction du nombre total d'interpolations et de la diffusion numérique.

4.3 Cas non-linéaires

Nous supposons désormais que le champ électrique auto-consistant est calculé à partir de l'équation de Poisson (3.43.c). Dans la plupart des cas, il n'est pas toujours possible de trouver une expression analytique de la solution G. Alors, afin de valider les méthodes semi-lagrangiennes 2-échelles, nous devons comparer les résultats obtenus avec ces méthodes à des résultats obtenus avec une méthode semi-lagrangienne classique appliquée au modèle (3.1). Cependant, comme nous l'avons constaté sur les cas linéaires, cette dernière méthode nécessite un maillage en (r, v_r) assez fin afin de limiter la diffusion numérique. Cette contrainte est d'autant plus forte que les phénomènes à observer sont issus des non-linéarités du système et se présentent sous la forme de structures filamenteuses assez fines.

Dans ce paragraphe, nous considérerons 4 types de simulation, notés (I), (II), (III) et (IV), et définis par

- Simulation de type (I) : nous résolvons le système (3.1) avec une méthode semi-lagrangienne classique (voir §4.1), avec $R = v_R = 3$ et $P_r = P_{v_r} = 64$,
- Simulation de type (II) : nous résolvons le système (3.1) avec une méthode semi-lagrangienne classique (voir §4.1), avec $R = v_R = 3$ et $P_r = P_{v_r} = 256$,
- Simulation de type (III) : nous résolvons le système (3.42)-(3.43) avec une méthode semi-lagrangienne 2-échelles sur un maillage 2-échelles (voir §3.2), avec $R = v_R = 3$, $P_r = P_{v_r} = 64$ et $P_\tau = 16$,
- Simulation de type (IV) : nous résolvons le système (3.43) avec une méthode semi-lagrangienne 2-échelles sur un maillage uniforme en q et u_r (voir §3.2), avec $R = v_R = 3$, $Q_m = U_m = R + v_R = 6$, $P_q = P_{u_r} = 128$ et $P_\tau = 16$, et nous reconstruisons l'approximation de f^ϵ sur $M(\Omega)$ en utilisant (3.97) et en prenant $P_r = P_{v_r} = 64$.

Tout comme pour les cas linéaires, les résultats produits par la simulation de type (I) sur des cas non-linéaires sont largement faussés par la diffusion numérique. Cependant, nous tiendrons compte de ces résultats en matière de temps de calcul, afin de faire une comparaison avec les autres types de simulation.

Cas non-résonant

Nous considérons ici que $\omega_1 = 4\sqrt{2}$, $H_1(\tau) = \cos(\tau)$, $\epsilon = 10^{-2}$, et que f_0 est la distribution initiale d'un faisceau semi-gaussien, *i.e.* de la forme (3.128) avec $r_m = 0.75$, $v_{th} = 0.1$, et $n_0 = 4$.

Afin de garantir la robustesse des méthodes 2-échelles, nous supposons que le pas de temps pour ces 2 méthodes, noté Δt_H est défini à l'aide de la formule (3.102) avec $K = 5$, ce qui donne $\Delta t_H \approx 0.0185$. De la même façon, nous définissons le pas de temps Δt_{NH} pour les simulations de type (I) et (II) de la façon suivante :

$$\Delta t_{NH} = \frac{\Delta t_H}{N}\,, \tag{3.132}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ est suffisamment grand pour que les conditions (3.125) soient respectées à chaque instant de la simulation.

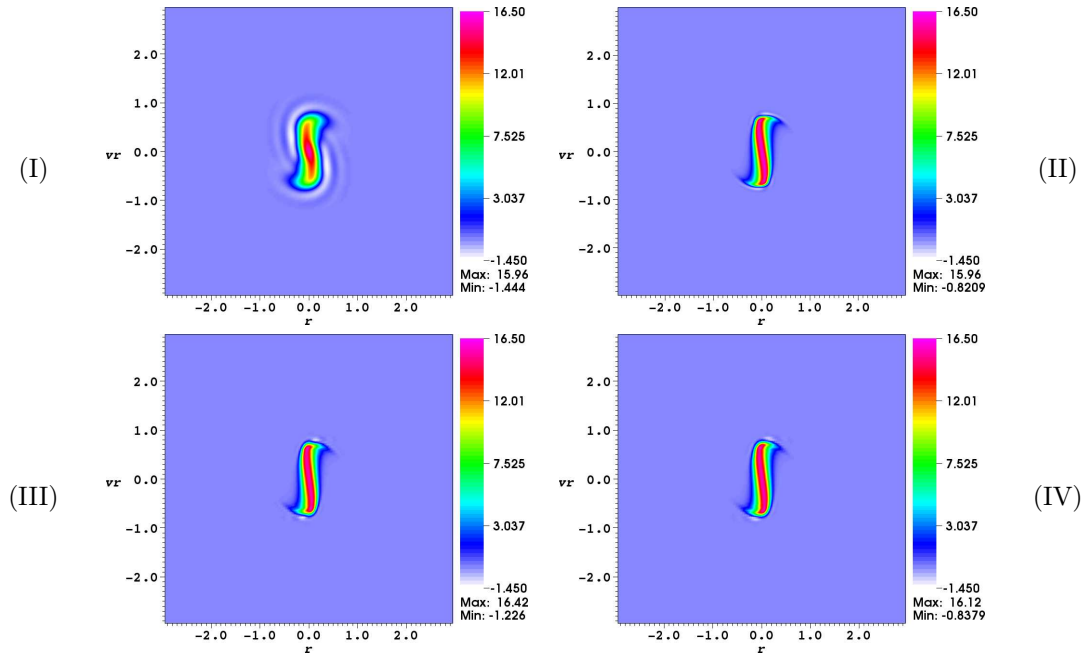


FIGURE 3.9 – Simulations de types (I), (II), (III) et (IV) d'un faisceau semi-gaussien en $t = 1.4784$, avec $H_1(\tau) = \cos(\tau)$, $\omega_1 = 4\sqrt{2}$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

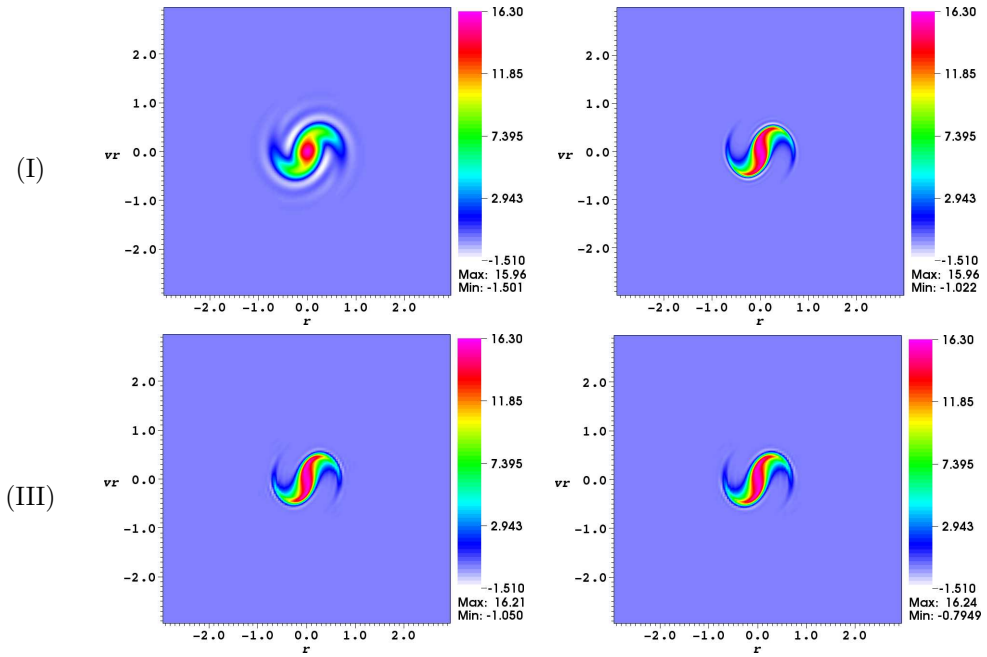


FIGURE 3.10 – Simulations de types (I), (II), (III) et (IV) d'un faisceau semi-gaussien en $t = 3.234$, avec $H_1(\tau) = \cos(\tau)$, $\omega_1 = 4\sqrt{2}$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

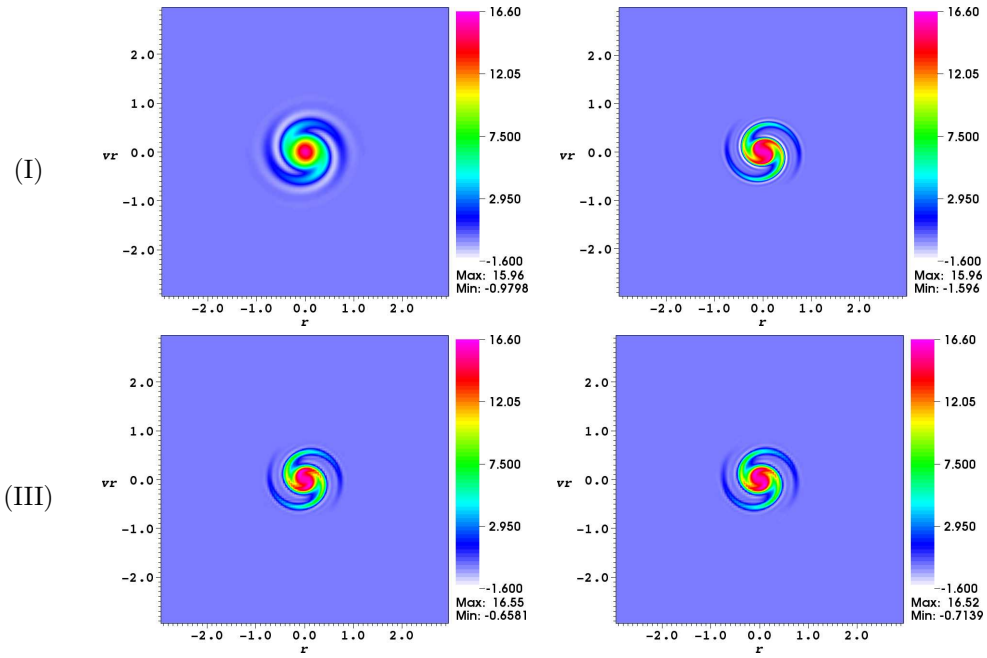


FIGURE 3.11 – Simulations de types (I), (II), (III) et (IV) d'un faisceau semi-gaussien en $t = 5.544$, avec $H_1(\tau) = \cos(\tau)$, $\omega_1 = 4\sqrt{2}$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

Cas résonant

Nous considérons ici que $\omega_1 = 2$, $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, $\epsilon = 10^{-2}$, et que f_0 est la distribution initiale d'un faisceau semi-gaussien, *i.e.* de la forme (3.128) avec $r_m = 0.75$, $v_{th} = 0.1$, et $n_0 = 4$. Comme

pour le cas précédent, nous supposons également que le pas de temps Δt_H pour les méthodes 2-échelles est de la forme (3.102) avec $K = 2$, ce qui donne $\Delta t_H \approx 7.392 \times 10^{-3}$, tandis que le pas de temps Δt_{NH} pour les simulations (I) et (II) est de la forme (3.132).

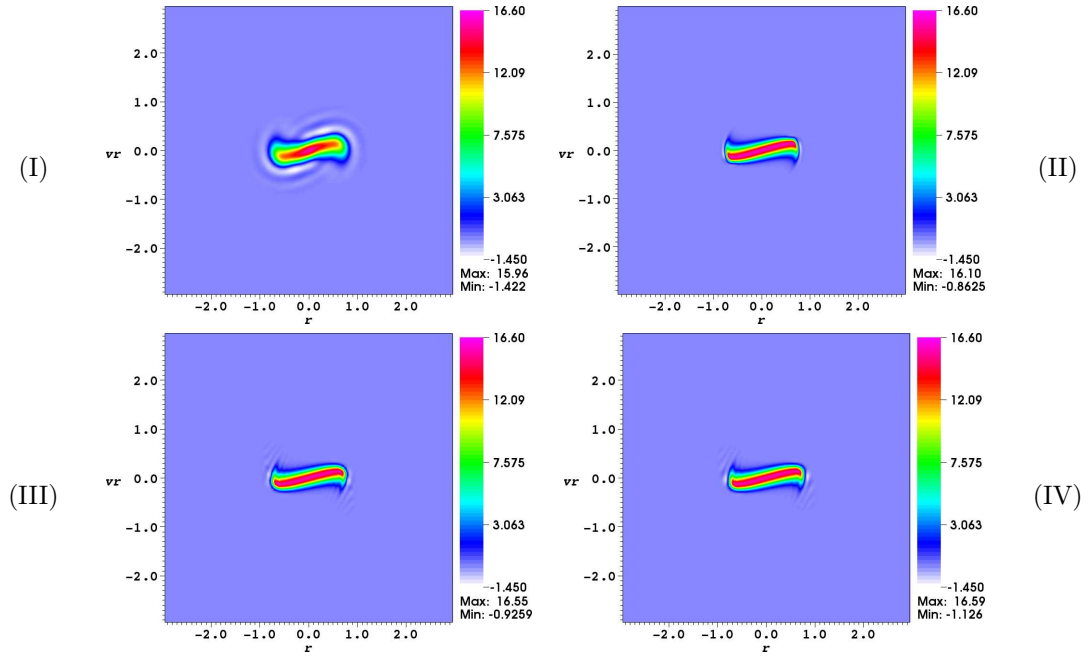


FIGURE 3.12 – Simulations de types (I), (II), (III) et (IV) d'un faisceau semi-gaussien en $t = 1.1458$, avec $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, $\omega_1 = 2$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

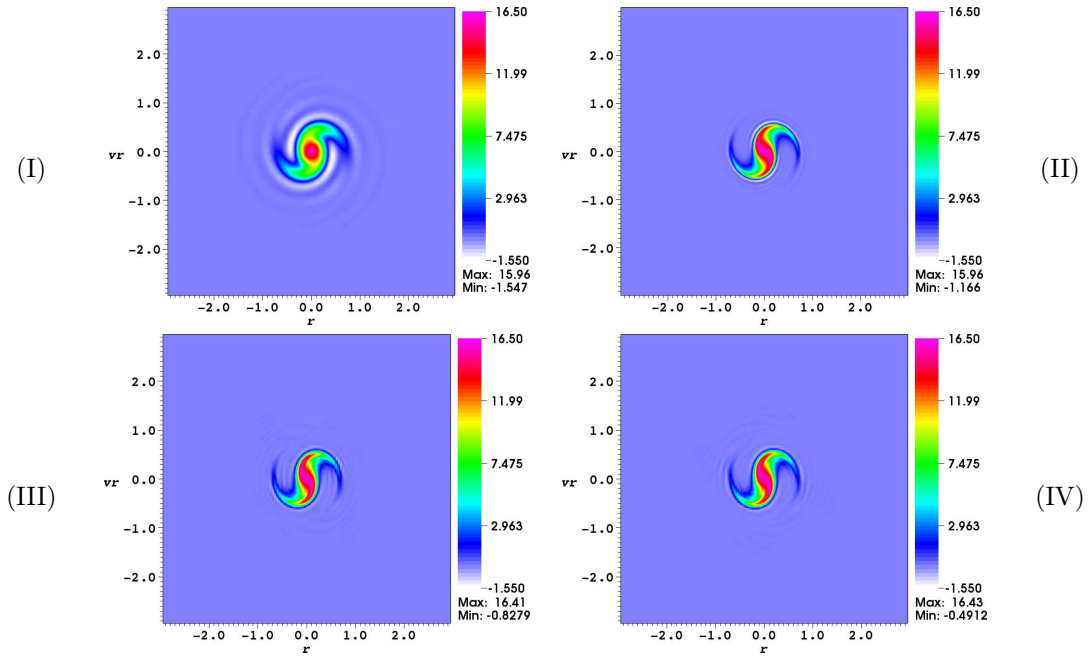


FIGURE 3.13 – Simulations de types (I), (II), (III) et (IV) d'un faisceau semi-gaussien en $t = 3.6221$, avec $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, $\omega_1 = 2$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

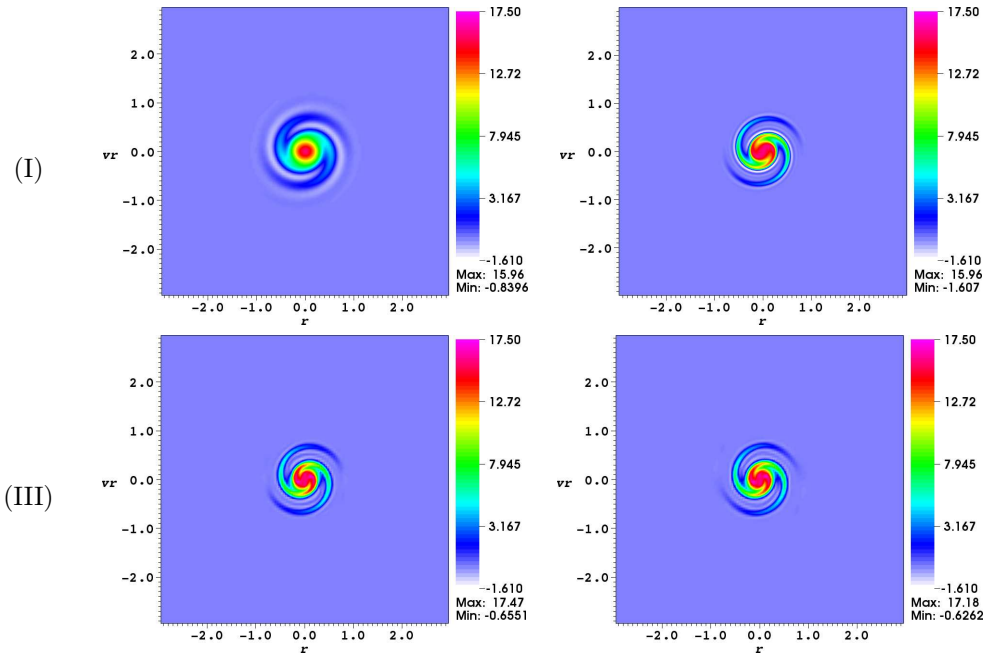


FIGURE 3.14 – Simulations de types (I), (II), (III) et (IV) d'un faisceau semi-gaussien en $t = 5.8027$, avec $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, $\omega_1 = 2$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

Comme nous pouvons le constater dans les figures 3.12, 3.13, 3.14, 3.12, 3.13 et 3.14, les résultats produits par les simulations de types (II), (III) et (IV) sont comparables en termes de qualité. De plus, la méthode semi-lagrangienne classique nécessite une fois encore un maillage en (r, v_r) beaucoup plus fin que celui utilisé pour les méthodes 2-échelles pour parvenir à la même qualité de résultat.

Cas	Simulation (I)		Simulation (II)		Simulation (III)	Simulation (IV)
	durée	N	durée	N	durée	durée
$\omega_1 = 4\sqrt{2}$ $H_1 = \cos$	35m	122	35h 6m 50s	480	1h 43m 39s	55m 3s
$\omega_1 = 2$ $H_1 = \cos^2$	37m 32s	49	38h 7m 6s	192	5h 45m 25s	2h 37m 25s

TABLE 3.1 – Durées des simulations : les simulations sont arrêtées au temps $T = 6.93$ pour le cas où $\omega_1 = 4\sqrt{2}$ et $H_1 = \cos$, et au temps $T = 6.9854$ lorsque $\omega_1 = 2$ et $H_1 = \cos^2$.

En comparant les temps de calculs nécessaires pour les simulations de type (I), (II), (III) et (IV) (voir Tableau 3.1), nous constatons que, pour un même maillage en (r, v_r), les méthodes 2-échelles sont nettement moins rapides qu'une méthode semi-lagrangienne classique : ce n'est pas surprenant car les méthodes 2-échelles nécessitent la résolution d'un grand nombre de points fixes à chaque itération en temps et ce sont des calculs coûteux du fait du calcul des opérateurs d'interpolation utilisés. Si nous comparons les temps de calcul des simulations (II), (III) et (IV) qui produisent des résultats de bonne qualité, nous constatons que les 2 méthodes semi-lagrangiennes 2-échelles sont plus rapides que la simulation de type (II). Cette différence dans la rapidité de simulation s'explique par le fait que, pour la méthode classique, il faut un maillage en (r, v_r) assez fin pour produire des résultats corrects afin de limiter la diffusion numérique, mais aussi imposer un contrôle sur le pas de temps Δt_{NH} du type (3.125). Cela implique alors un nombre d'itérations très important pour couvrir l'intervalle de temps Δt_H qu'une méthode 2-échelles fait en une itération (voir les valeurs de N dans le Tableau 3.1).

4.4 Un dernier test : les limites de la méthode semi-lagrangienne classique

Pour ce dernier cas non-linéaire, nous supposons que $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, $\omega_1 = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$, et que f_0 est la distribution initiale d'un faisceau semi-gaussien avec $r_m = 1.85$, $v_{th} = 0.1$ et $n_0 = 4$. L'objectif ici est de faire une simulation en temps long afin de voir apparaître les structures fines que E. Frénod, F. Salvarani et E. Sonnendrücker ont observées dans [30].

Nous considérons ici 3 types de simulation, notés (I), (II) et (III), et correspondant à
- Simulation de type (I) : nous résolvons le système (3.1) avec une méthode semi-lagrangienne classique (voir §4.1), avec $R = v_R = 3$ et $P_r = P_{v_r} = 256$,
- Simulation de type (II) : nous résolvons le système (3.42)-(3.43) avec une méthode semi-lagrangienne 2-échelles sur un maillage 2-échelles (voir §3.2), avec $R = v_R = 3$, $P_r = P_{v_r} = 128$ et $P_\tau = 20$,
- Simulation de type (III) : nous résolvons le système (3.43) avec une méthode semi-lagrangienne 2-échelles sur un maillage uniforme en q et u_r (voir §3.2), avec $R = v_R = 3$, $Q_m = U_m = R + v_R = 6$, $P_q = P_{u_r} = 256$ et $P_\tau = 20$, et nous reconstruisons l'approximation de f^ϵ sur $M(\Omega)$ en utilisant (3.97) et en prenant $P_r = P_{v_r} = 128$.

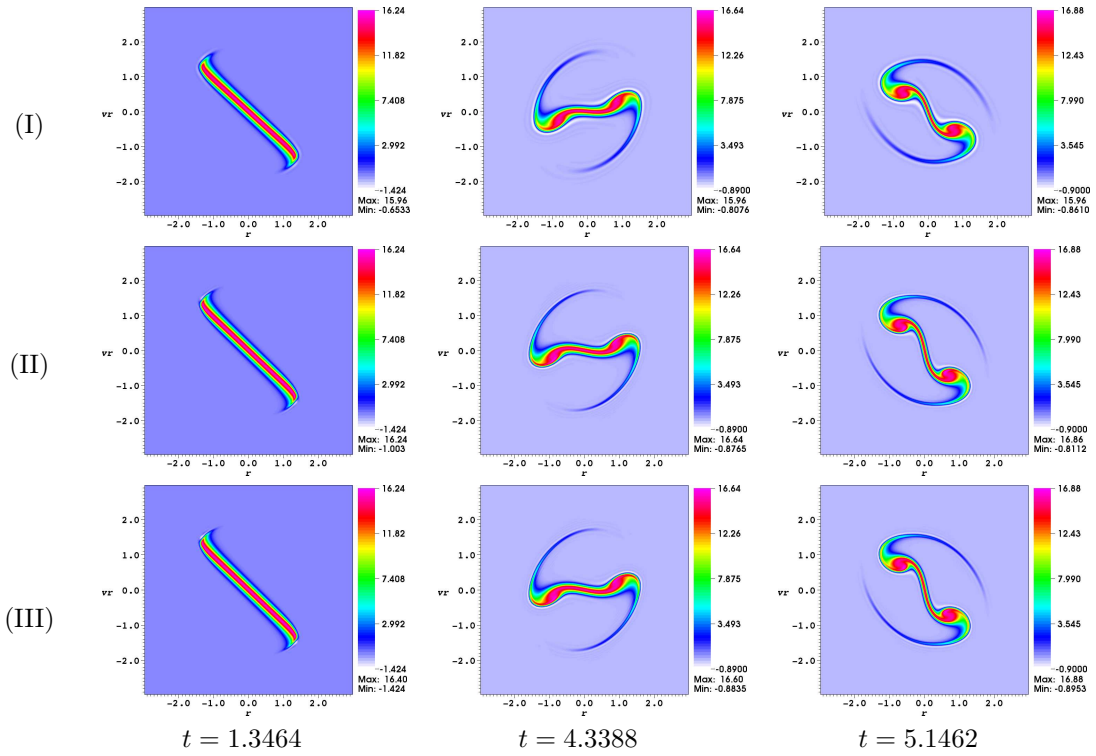
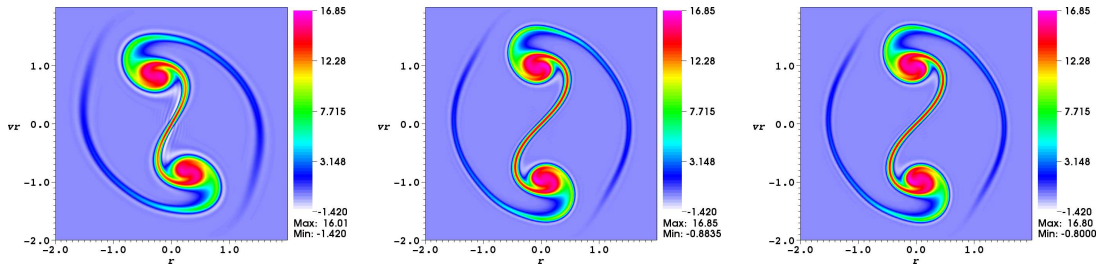


FIGURE 3.15 – Simulations (I), (II) et (III) d'un faisceau semi-gaussien avec $\omega_1 = 1$, $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, $\epsilon = 10^{-2}$, et $r_m = 1.85$.

Comme pour les précédents cas non-linéaires, nous supposons que le pas de temps Δt_H est fixé pour les simulations de type (II) et (III) et est de la forme (3.102) avec $K = 1$, tandis que le pas de temps pour la simulation de type (I) est de la forme $\Delta t_{NH} = \frac{\Delta t_H}{N}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que les conditions (3.125) soient respectées.



(I) (II) (III)

FIGURE 3.16 – Simulations (I), (II) et (III) d'un faisceau semi-gaussien au temps $t = 5.984$, avec $\omega_1 = 1$, $H_1(\tau) = \cos^2(\tau)$, $\epsilon = 10^{-2}$, et $r_m = 1.85$.

Comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.15, les simulations de type (I), (II) et (III) produisent des résultats de qualité comparable. A nouveau, nous remarquons que les méthodes semi-lagrangiennes 2-échelles nécessitent beaucoup moins de points en (r, v_r) que la méthode semi-lagrangienne classique.

Cependant, comme nous pouvons le constater dans la figure 3.16, lorsqu'il est simulé par une méthode semi-lagrangienne classique sur le modèle (3.1), le faisceau devient déphasé en temps long, ce qui traduit une perte de focalisation qui ne correspond pas au phénomène physique attendu. Nous pouvons à nouveau attribuer cela au nombre important d'interpolations induit par le respect des conditions (3.125) sur le pas de temps Δt_{NH} : en effet, en considérant une grille de 513×513 points en (r, v_r), les conditions (3.125) imposent un pas de temps $\Delta t_{NH} \approx 3.84 \times 10^{-5}$, et environ 155000 interpolations en r et en v_r pour obtenir les résultats de la figure 3.16.(I). Il n'est donc pas surprenant que la diffusion numérique accumulée au cours de ces interpolations amène le faisceau à de se défocaliser en temps long. D'autre part, nous remarquons que ce déphasage ne se produit pas lorsque l'une des méthodes 2-échelles est utilisée, et que les résultats observés avec ces méthodes correspondent avec ceux que E. Frénod *et al.* ont obtenus avec leur méthode PIC 2-échelles dans [28].

5 Conclusion

Nous avons développé 2 nouvelles méthodes numériques permettant d'approcher la solution $(f^\epsilon, E_r^\epsilon)$ de (3.1). En suivant le même mode opératoire que dans le chapitre précédent, nous avons rappelé en quelques mots les résultats de convergence 2-échelles sur la suite $(f^\epsilon, E_r^\epsilon)_{\epsilon>0}$, puis nous avons proposé une méthode numérique basée sur une discrétisation semi-lagrangienne en arrière du modèle (3.43), ainsi qu'une méthode permettant de reconstruire une approximation de $(f^\epsilon, E_r^\epsilon)$. Nous avons également proposé une famille de maillages mobiles, basée sur le changement de variables (3.98), avec pour objectif de simplifier la résolution de l'équation (3.43.c). Cela a permis de construire une deuxième méthode semi-lagrangienne 2-échelles.

Ces 2 méthodes 2-échelles ont été testées principalement sur des cas de faisceaux semi-gaussiens : en effet, l'un des objectifs de ce travail est l'étude du comportement d'une méthode numérique 2-échelles face à un modèle dont la solution peut présenter des discontinuités, ce qui est le cas pour les fonctions de distributions associées à ce type de faisceaux. Sur des cas linéaires, nous avons constaté que les méthodes 2-échelles donnent des résultats très précis et correspondant au phénomène attendu, même si nous considérons un maillage de l'espace des phases relativement grossier. Ce n'est pas le cas pour une méthode semi-lagrangienne classique appliquée au modèle (3.1) qui nécessite un maillage très fin afin de limiter les effets de la diffusion numérique et correspondre au comportement attendu. Nous avons abouti aux mêmes conclusions sur des cas non-linéaires sur des temps de simulations courts, non seulement en termes de qualité de résultats mais aussi en termes de temps de calcul. De plus, nous avons constaté que, sur des temps de simulations plus longs, les résultats fournis par la méthode semi-lagrangienne classique démontrent une perte de focalisation

du faisceau, ce qui ne correspond pas au phénomène physique attendu ni aux résultats numériques établis établis dans des publications antérieures à l'aide des méthodes semi-lagrangiennes 2-échelles présentées ici.

Chapitre 4

Simulation semi-lagrangienne 2-échelles du modèle de rayon de Larmor fini

Dans ce dernier chapitre, nous abordons l'objectif principal de la thèse, à savoir le développement d'une méthode semi-lagrangienne 2-échelles permettant de valider le fait que la solution $(f, \tilde{\mathbf{E}})$ du modèle de rayon de Larmor fini

$$\begin{cases} f(x,y,k,\alpha,t) = \dfrac{1}{2\pi}\, g(x,y,k,t)\,, \\ \partial_t g + \langle \mathcal{E}_y \rangle\, \partial_x g - \langle \mathcal{E}_x \rangle\, \partial_y g = 0\,, \\ g(x,y,k,t=0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(x,y,k,\alpha)\, d\alpha\,, \\ \langle \mathcal{E} \rangle(x,y,k,t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\, d\alpha\,, \\ -\nabla_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{x},\tilde{y},t)\,, \\ -\Delta_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathcal{S}} g\big(\tilde{x} + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{y} - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, t\big)\, dk\, d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{x},\tilde{y})\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

est la limite faible-* d'une suite $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ où, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, f^ϵ et $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ constituent la solution du modèle de Vlasov-Poisson suivant :

$$\begin{cases} f^\epsilon(x,y,k,\alpha,t) = \tilde{f}^\epsilon\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\sin\alpha, t\big)\,, \\ \partial_t \tilde{f}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\, \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{f}^\epsilon + \Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} \tilde{v}_y \\ -\tilde{v}_x \end{pmatrix}\Big) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{f}^\epsilon = 0\,, \\ \tilde{f}^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t=0) = \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\,, \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon = -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon\,, \quad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon\, d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, $\tilde{n}_e = \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})$ est la densité d'électrons, et $\epsilon > 0$ est un paramètre proche de 0.

Plusieurs articles ont été consacrés à l'étude du comportement asymptotique des suites $(\tilde{f}^\epsilon)_{\epsilon>0}$, $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0.

En effet, E. Frénod et E. Sonnendrücker ont établi dans [31] des résultats de convergence 2-échelles sur les suites $(\tilde{f}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sous certaines hypothèses sur $\tilde{f}_0$ et $\tilde{n}_e$: ils ont principalement établi un système d'équations selon $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau, t) \in \mathbb{R}^4 \times [0, 2\pi] \times [0, T)$ que vérifient la limite 2-échelles de $(\tilde{f}^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ à extraction d'une sous-suite près. Ils ont également démontré que cette suite en ϵ admet une sous-suite faiblement-* convergente vers $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{E}})$ mais sans proposer de système d'équations vérifié par $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{E}})$.

Quelques années plus tard, en utilisant des méthodes de compacité et en écrivant l'équation de Vlasov (4.2.b) en coordonnées centre-guide, M. Bostan a redémontré dans [6] que la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une sous-suite faiblement-* convergente vers une fonction f, mais a aussi établi un système d'équations de la forme (4.1) vérifié par f. Cependant, la démarche utilisée a nécessité des hypothèses plus fortes sur $\tilde{f}_0$ et $\tilde{n}_e$ que celles qui furent utilisées par E. Frénod et E. Sonendrücker, mais aussi des hypothèses sur la suite $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ ainsi que sur la géométrie du domaine de définition : en effet, il a été nécessaire de supposer que $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ converge fortement dans un certain espace de Banach, et de restreindre l'espace physique $\mathbb{R}^2$ au tore $\mathbb{T}^2 = \big(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})\big)^2$. Malgré ces restrictions, ces derniers résultats rejoignent les travaux de R. Littlejohn, W.-W. Lee, A. Brizard et T. Hahm : en effet, le modèle limite (4.1) obtenu par M. Bostan indique que la variable k, correspondant à l'énergie cinétique adimensionnée, est un invariant adiabatique du système et, dans [7], [8], [43] et [47], il est indiqué que lorsque l'équation de Vlasov est exprimée dans les coordonnées centre-guide, et que

$$\frac{\overline{L_\perp}}{\overline{r_L}} \sim 1\,, \qquad \frac{\overline{t}_{gyro}}{\overline{t}} \sim \epsilon \ll 1\,, \tag{4.3}$$

où $\overline{L_\perp}$, $\overline{r_L}$, $\overline{t}_{gyro}$ et $\overline{t}$ sont respectivement la longueur caractéristique dans la direction transverse au champ magnétique, le rayon de Larmor caractéristique, la gyro-période caractéristique, et la durée caractéristique de la simulation, il est possible de réduire la dimension du système considéré : en effet, sous ces conditions, le moment magnétique μ défini par

$$\mu = \frac{m\,|\mathbf{v}^\perp|^2}{2\,\overline{B}}\,, \qquad \mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z\,, \qquad \overline{B} = |\mathbf{B}|\,, \tag{4.4}$$

devient un invariant adiabatique du système.

L'objectif est donc de valider numériquement le fait que, quitte à en extraire une sous-suite, $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ converge faiblement-* vers un couple $(f, \tilde{\mathbf{E}})$ solution de (4.1). Pour cela, nous devrons discrétiser les modèles (4.1) et (4.2). Cependant, avant d'envisager ce travail numérique, il convient de se demander si les hypothèses utilisées par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [31] suffisent pour démontrer que la suite $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une sous-suite qui converge faiblement-* vers un couple $(f, \tilde{\mathbf{E}})$ et établir un système d'équations de la forme (4.1) vérifié par $(f, \tilde{\mathbf{E}})$. D'une certaine manière, nous allons chercher à redémontrer les résultats établis dans [31] et dans [6] à partir d'hypothèses communes.

Pour les mêmes raisons que dans le chapitre précédent, nous choisissons d'utiliser des schémas semi-lagrangiens afin de discrétiser les modèles (4.1) et (4.2). Etant donné que nous ne pouvons pas envisager de splitting de Strang sur (4.1.b) sans perdre le caractère conservatif de cette équation de transport, il est nécessaire d'utiliser la méthode décrite en page 75 afin de construire une méthode semi-lagrangienne en arrière d'ordre 2 en t. Une telle approche nécessite alors de résoudre un grand nombre de points fixes 2D : un tel travail à chaque itération peut s'avérer extrêmement coûteux en temps de calcul étant donné qu'en plus des variables x et y selon lesquelles le transport se fait, il faut également tenir compte de l'invariant adiabatique du système $k \in \mathbb{R}_+$ et de la variable $\alpha \in [0, 2\pi]$ nécessaire au calcul de $\langle \mathcal{E} \rangle$. Il est donc nécessaire d'envisager un autre type de discrétisation comme celui d'une discrétisation semi-lagrangienne *en avant* : en effet, en considérant cette approche plutôt qu'une discrétisation semi-lagrangienne en arrière, le calcul des caractéristiques ne présente plus sous la forme de problèmes de points fixes implicites, mais sous la forme d'équations différentielles qu'il est possible résoudre numériquement à l'aide de méthodes explicites (méthodes de Runge-Kutta, méthodes multi-pas, etc...). N. Crouseilles, T. Respaud et E. Sonnendrücker ont étudié dans [16] le comportement d'une telle méthode sur le système de Vlavov-Poisson 1D et sur le modèle centre-guide 2D, et ont constaté que cette méthode en avant permettait d'obtenir des

résultats comparables à ceux d'une méthode semi-lagrangienne en arrière (voir [15], [21] et [62]). Par ailleurs, S. Reich *et al.* ont également utilisé avec succès cette méthode numérique dans [12] et [54] dans le cadre de l'équation de continuité issue de la mécanique des fluides.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans un premier temps, nous rappellerons comment obtenir le modèle (4.2.b)-(4.2.c)-(4.2.d) à partir du modèle de Vlavov-Poisson 2D à l'aide d'un adimensionnement judicieux. Nous rappellerons ensuite les résultats de convergence 2-échelles obtenus par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [31] ainsi que quelques éléments de démonstration et nous verrons en quoi il est difficile d'exploiter ces résultats afin d'établir un système d'équations de la forme (1.30). Nous rappellerons également les résultats de convergence faible-* de M. Bostan décrits dans [6].

Afin d'harmoniser les résultats de convergence 2-échelles de [31] et de convergence faible-* de [6], nous introduirons un nouveau jeu de variables canoniques permettant d'obtenir une nouvelle formulation du modèle (4.2), puis, en reprenant la démarche d'E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [30] et [31], nous ferons une étude de convergence 2-échelles de ce nouveau modèle, et nous établirons explicitement le lien entre ce nouveau modèle limite 2-échelles et le modèle limite faible-* établi dans [6].

Dans une troisième partie, nous présenterons les bases d'une méthode semi-lagrangienne en avant. Afin de nous assurer de la pertinence de cette méthode sur un modèle de type Vlasov 2D, nous appliquerons dans un premier temps ces techniques au modèle de Vlasov-Poisson 2D suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0\,, \\ f(\mathbf{x},\mathbf{v},t=0) = f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \quad -\Delta_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v} - 1\,, \end{cases} \tag{4.5}$$

et nous effectuerons quelques tests sur des tests d'amortissement Landau. Puis nous développerons la méthode numérique 2-échelles qui permettra de valider le modèle (4.1) comme étant la limite faible-* d'une famille de modèles de la forme (4.2). Enfin, nous proposerons un cas test dans lequel la solution du modèle (4.1) est stationnaire.

1 Le modèle de rayon de Larmor fini

Dans ce paragraphe, nous rappelerons brièvement comment obtenir le modèle (4.2.b)-(4.2.c)-(4.2.d) à partir du modèle de Vlasov Poisson 3D. Nous rappelerons également les résultats de convergence 2-échelles établis par E. Frénod et E. Sonnendrücker sur ce modèle, ainsi que les résultats de convergence faible-* de M. Bostan.

1.1 Adimensionnement du système de Vlasov-Poisson

Nous rappelons que le modèle de Vlasov-Poisson 3D est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f_i(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \dfrac{e}{m_i}\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\big)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_i(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0\,, \\ f_i(\mathbf{x},\mathbf{v},t=0) = f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \\ -\Delta_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \dfrac{e}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3_{\mathbf{v}}} f_i(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v} - \dfrac{e}{\varepsilon_0}\,n_e(\mathbf{x},t)\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

où

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_{\mathbf{x}}$ est la position (m),
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3_{\mathbf{v}}$ est la vitesse (ms^{-1}),
- $f_i = f_i(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ est la fonction de distribution des ions $(m^{-6}\,s^3)$,
- $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ esr le champ électrique auto-consistant $(V\,m^{-1})$,

- $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \overline{B}\,\mathbf{e}_z$ est le champ magnétique appliqué (T),
- $\phi(\mathbf{x},t)$ est le potentiel électrostatique lié à $\mathbf{E}$ (V),
- n_e est la densité des électrons (m^{-3}),
- e est la charge élémentaire des ions (C),
- m_i est la masse élémentaire des ions (kg).

En notant $\mathbf{x}_{||} = x_3$, $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v}_{||} = v_3$, $\mathbf{v}_\perp = (v_1, v_2)$, nous procédons aux adimensionnements suivants :

$$\mathbf{x}_{||} = \overline{L}_{||}\,\mathbf{x}'_{||}\,, \quad \mathbf{x}_\perp = \overline{L}_\perp\,\mathbf{x}'_\perp, \quad \mathbf{v} = \overline{v}\,\mathbf{v}'\,, \quad t = \overline{t}\,t'\,, \tag{4.7}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\overline{E}\,\mathbf{E}'(\mathbf{x}',t') &= \mathbf{E}\big(\overline{L}_{||}\,\mathbf{x}'_{||}, \overline{L}_\perp\,\mathbf{x}'_\perp, \overline{t}\,t'\big)\,,\\
\overline{f}\,f'(\mathbf{x}',\mathbf{v}',t') &= f\big(\overline{L}_{||}\,\mathbf{x}'_{||}, \overline{L}_\perp\,\mathbf{x}'_\perp, \overline{v}\,\mathbf{v}', \overline{t}\,t'\big)\,,\\
\overline{E}\,\overline{L}_{||}\,\phi'(\mathbf{x}',t) &= \phi\big(\overline{L}_{||}\,\mathbf{x}'_{||}, \overline{L}_\perp\,\mathbf{x}'_\perp, \overline{t}\,t'\big)\,,\\
\frac{\overline{v}^3\,\overline{f}\,\overline{L}_{||}}{\overline{E}}\,n'_e(\mathbf{x}',t') &= n_e(\overline{L}_{||}\,\mathbf{x}'_{||}, \overline{L}_\perp\,\mathbf{x}'_\perp, \overline{t}\,t')\,.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Alors le système (4.6) devient

$$\begin{cases}
\partial_{t'} f' + \dfrac{\overline{v}\,\overline{t}}{\overline{L}_{||}}\,\mathbf{v}'_{||}\cdot\nabla_{\mathbf{x}'} f' + \dfrac{\overline{v}\,\overline{t}}{\overline{L}_\perp}\,\mathbf{v}'_\perp\cdot\nabla_{\mathbf{x}'} f' + \dfrac{e\overline{E}\,\overline{t}}{m_i\,\overline{v}}\,\mathbf{E}'\cdot\nabla_{\mathbf{v}'} f' + \dfrac{e\overline{B}\,\overline{t}}{m_i}\,\big(\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'\big)\cdot\nabla_{\mathbf{v}'} f' = 0\,,\\
f'(\mathbf{x}',\mathbf{v}',t') = f'_0(\mathbf{x}',\mathbf{v}')\,,\\
\mathbf{E}'(\mathbf{x}',t') = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{x}'_{||}}\phi'(\mathbf{x}',t') \\ \frac{\overline{L}_{||}}{\overline{L}_\perp}\nabla_{\mathbf{x}'_\perp}\phi'(\mathbf{x}',t') \end{pmatrix}\,,\\
-\Delta_{\mathbf{x}'_{||}}\phi'(\mathbf{x}',t') - \dfrac{\overline{L}_{||}^2}{\overline{L}_\perp^2}\,\Delta_{\mathbf{x}'_\perp}\phi'(\mathbf{x}',t') = \dfrac{e\,\overline{L}_{||}\,\overline{f}\,\overline{v}^3}{\overline{E}\,\varepsilon_0}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f'(\mathbf{x}',\mathbf{v}',t')\,d\mathbf{v}' - n'_e(\mathbf{x}',t')\right].
\end{cases} \tag{4.9}$$

Nous définissons la fréquence cyclotron $\overline{\omega}_c$ et le rayon de Larmor caractéristique $\overline{r}_L$ par

$$\overline{\omega}_c = \frac{q\,\overline{B}}{m_i}\,, \quad \overline{r}_L = \frac{\overline{v}}{\overline{\omega}_c}\,. \tag{4.10}$$

La principale hypothèse faite sur ce modèle est que le champ magnétique appliqué $\mathbf{B}$ est fort devant tous les autres champs électromagnétiques. De ce fait, il est naturel de considérer le ratio suivant :

$$\frac{\overline{E}}{\overline{v}\,\overline{B}} = \epsilon\,. \tag{4.11}$$

Sous cette hypothèse, le rayon de Larmor défini par

$$\mathbf{r}_L = \frac{m_i}{q_i\,\overline{B}}\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{4.12}$$

est très petit. Par conséquent, le déplacement des particules dans le plan transverse au champ magnétique sera également petit. Or nous souhaitons tenir compte de ces déplacements : il est alors nécessaire de considérer un adimensionnement en $\mathbf{x}_\perp$ mettant en valeur ces petits déplacements dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$. Nous considérons alors les ratios suivants :

$$\frac{\overline{r}_L}{\overline{L}_\perp} = 1\,, \qquad \frac{\overline{r}_L}{\overline{L}_{||}} = \epsilon\,. \tag{4.13}$$

Etant donné que $\mathbf{B}$ est supposé fort, la période de gyration $\overline{\omega}_c{}^{-1}$ est petite. Il est alors naturel de considérer le rapport suivant :

$$\overline{t}\,\overline{\omega}_c = \frac{1}{\epsilon}\,. \tag{4.14}$$

Alors, en utilisant les rapports (4.11), (4.13) et (4.14), le système de Vlasov-Poisson s'écrit finalement

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f}^\epsilon + \tilde{\mathbf{v}}_{||} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{||}} \tilde{f}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\, \tilde{\mathbf{v}}_\perp \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_\perp} \tilde{f}^\epsilon + \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{f}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\left(\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{e}_z\right) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{f}^\epsilon = 0\,, \\ \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}_{||}, \tilde{\mathbf{x}}_\perp, \tilde{\mathbf{v}}_{||}, \tilde{\mathbf{v}}_\perp, t=0) = \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}_{||}, \tilde{\mathbf{x}}_\perp, \tilde{\mathbf{v}}_{||}, \tilde{\mathbf{v}}_\perp)\,, \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon = \begin{pmatrix} -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_{||}} \tilde{\phi}^\epsilon \\ -\frac{1}{\epsilon} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_\perp} \tilde{\phi}^\epsilon \end{pmatrix}, \qquad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{||}} \tilde{\phi}^\epsilon - \dfrac{1}{\epsilon^2}\, \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}_\perp} \tilde{\phi}^\epsilon = \gamma \left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}^\epsilon \, d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e \right], \end{cases} \tag{4.15}$$

avec $\gamma = \frac{e\, \overline{v}^3\, \overline{f}\, \overline{L}_{||}}{\varepsilon_0\, \overline{E}}$.

Nous supposons finalement que le système ci-dessus ne dépend ni de $\tilde{\mathbf{x}}_{||}$ ni de $\tilde{\mathbf{v}}_{||}$. Alors l'équation de Poisson se réduit à

$$\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon_\perp = \frac{1}{\epsilon}\, \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}_\perp} \tilde{\phi}^\epsilon\,, \quad -\frac{1}{\epsilon^2}\, \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}_\perp} \tilde{\phi}^\epsilon = \gamma \left[\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon \, d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e \right]. \tag{4.16}$$

En supposant que $\gamma = \frac{1}{\epsilon}$, et en remplaçant $\tilde{\phi}^\epsilon$ par $\frac{\tilde{\phi}^\epsilon}{\epsilon}$, nous obtenons finalement le modèle (4.2.b)-(4.2.c)-(4.2.d).

1.2 Résultats de convergence 2-échelles

Nous rappelons ici en quelques mots les résultats de convergence 2-échelles établis par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [31] :

Théorème 18 (Frénod & Sonnendrücker [31]). *Supposons que $\tilde{f}_0$ et $\tilde{n}_e$ vérifient les hypothèses suivantes :*
- $\tilde{f}_0 \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap L^p(\mathbb{R}^4)$ *pour* $p \geq 2$,
- $\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) \geq 0$ *pour tout* $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^4$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} |\tilde{\mathbf{v}}|^2\, \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})\, d\tilde{\mathbf{x}}\, d\tilde{\mathbf{v}} < +\infty$,
- $\tilde{n}_e$ *ne dépend pas de* t *et est dans* $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^{3/2}(\mathbb{R}^2)$.

Alors, la suite $(\tilde{f}^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ *est bornée dans l'espace* $L^\infty\big(0,T; L^p(\mathbb{R}^4)\big) \times \big(L^\infty\big(0,T; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$ *indépendamment de* ϵ. *De plus, quitte à extraire des sous-suites, nous avons*

$$\begin{aligned} &\tilde{f}^\epsilon \longrightarrow \tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau, t) \qquad \textit{2-échelles dans } L^\infty\big(0,T; L^\infty_\#\big([0,2\pi]; L^p(\mathbb{R}^4)\big)\big), \\ &\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t) \qquad \textit{2-échelles dans } \Big(L^\infty\big(0,T; L^\infty_\#\big([0,2\pi]; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\Big)^2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

De plus, $\tilde{F}$ *est liée à* $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) \in L^\infty\big(0,T; L^p(\mathbb{R}^4)\big)$ *par*

$$\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau, t) = \tilde{G}\big(\tilde{\mathbf{x}} + \mathcal{R}(-\tau)\, \tilde{\mathbf{v}}, R(-\tau)\, \tilde{\mathbf{v}}, t\big)\,, \tag{4.18}$$

et le couple $(\tilde{G}, \tilde{\mathcal{E}})$ *est solution de*

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) + \left[\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(-\sigma)\, \tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big)\, d\sigma \right] \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{y}}} \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) \\ \qquad\qquad + \left[\displaystyle\int_0^{2\pi} R(-\sigma)\, \tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big)\, d\sigma \right] \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{u}}} \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) = 0\,, \\ \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, 0) = \dfrac{1}{2\pi}\, \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}})\,, \\ \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t) = -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\,, \\ -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{G}\big(\tilde{\mathbf{x}} + \mathcal{R}(-\tau)\, \tilde{\mathbf{v}}, R(-\tau)\, \tilde{\mathbf{v}}, t\big)\, d\tilde{\mathbf{v}} - \dfrac{1}{2\pi}\, \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,, \end{cases} \tag{4.19}$$

où

$$\mathcal{R}(\tau) = \begin{pmatrix} \sin\tau & 1-\cos\tau \\ \cos\tau - 1 & \sin\tau \end{pmatrix}, \quad R(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Enfin, quitte à en extraire une sous-suite, $\tilde{f}^\epsilon$ converge faiblement- $L^\infty\big(0,T;L^p(\mathbb{R}^4)\big)$ vers $\tilde{f}$ définie par*

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) = \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},\tau,t)\,d\tau\,. \tag{4.21}$$

De la même façon, quitte à en extraire une sous-suite, $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ converge faiblement- dans l'espace $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$ vers $\tilde{\mathbf{E}}$ défini par*

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}},t) = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,d\tau\,. \tag{4.22}$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème s'appuie sur la même démarche que pour le théorème 17 : dans un premier temps, nous démontrons que $(\tilde{f}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;L^p(\mathbb{R}^4)\big)$. Alors, le théorème de Nguetseng-Allaire permet d'affirmer que, quitte à en extraire une sous-suite, $\tilde{f}^\epsilon$ converge à 2-échelles vers une fonction $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},\tau,t)$ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];L^p(\mathbb{R}^4)\big)\big)$.

Puis nous utilisons les hypothèses pour démontrer que la suite $(\tilde{\rho^\epsilon})_{\epsilon>0}$ définie par

$$\tilde{\rho}^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon\,d\tilde{\mathbf{v}}\,, \tag{4.23}$$

est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;L^{3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$, ce qui permet d'affirmer que $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$. Nous en déduisons alors l'existence d'une fonction $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t) \in \Big(L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\Big)^2$ telle que, quitte à en extraire une sous-suite, $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ converge à 2 échelles vers $\tilde{\mathcal{E}}$ dans cet espace fonctionnel. Nous pouvons affirmer de la même manière que la suite $(\tilde{\phi}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une sous-suite qui converge à 2 échelles vers $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t) \in L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{2,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)$, et que $\tilde{\Phi}$ est liée à $\tilde{\mathcal{E}}$ par la relation

$$-\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t) = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,. \tag{4.24}$$

En effet, en considérant une fonction $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t) \in \mathcal{D}\big([0,T)\times\mathbb{R}^2;\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,\tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,d\tau\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,\tilde{\psi}\Big(\tilde{\mathbf{x}},\frac{t}{\epsilon},t\Big)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,\tilde{\psi}\Big(\tilde{\mathbf{x}},\frac{t}{\epsilon},t\Big)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\psi}\Big(\tilde{\mathbf{x}},\frac{t}{\epsilon},t\Big)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt \\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,d\tau\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt \\
&= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,\tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,d\tau\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt\,.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Enfin, nous écrivons l'équation de transport (4.2.v) sous la forme

$$\partial_t\tilde{f}^\epsilon + \tilde{\mathbf{A}}^\epsilon\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{f}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{L}}\cdot\nabla\tilde{f}^\epsilon = 0\,, \tag{4.26}$$

avec $\tilde{\mathbf{A}}^\epsilon$ et $\tilde{\mathbf{L}}$ définis par

$$\tilde{\mathbf{A}}^\epsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{L}} = M\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Toutes les hypothèses sont alors réunies pour appliquer le théorème 4 : nous pouvons alors affirmer qu'il existe une fonction $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) \in L^\infty\big(0, T; L^p(\Omega)\big)$ telle que

$$\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau, t) = \tilde{G}\Big(e^{-\tau M} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}, t\Big), \tag{4.28}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{G} + \left[\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\sigma M} \tilde{\mathcal{A}}\Big(e^{\sigma M} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, t\Big)\, d\sigma \right] \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}} \tilde{G} = 0\,, \\ \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, 0) = \dfrac{1}{2\pi}\, \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}})\,, \end{cases} \tag{4.29}$$

où $\tilde{\mathcal{A}}$ est défini par

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t) \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

et où la fonction 2π-périodique $\tau \mapsto e^{\tau M}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau \longmapsto e^{\tau M} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathcal{R}(\tau) \\ 0 & R(\tau) \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

avec $\mathcal{R}(\tau)$ et $R(\tau)$ définies en (4.20). Nous reconnaissons alors les équations (4.19.a) et (4.19.b).

Pour obtenir l'équation (4.19.d), nous multiplions (4.2.e) par $\tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t)$, où $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)$ est dans $\mathcal{D}\big([0,T) \times \mathbb{R}^2; \mathcal{C}^\infty_\#\big([0, 2\pi]\big)\big)$, et nous intégrons sur $[0,T) \times \mathbb{R}^2$. Nous avons alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, \tilde{\psi}\Big(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t\Big)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, d\tau\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\,, \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, \tilde{\psi}\Big(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t\Big)\, d\tilde{\mathbf{v}}\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \\ &\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau, t)\, \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, d\tau\, d\tilde{\mathbf{v}}\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \\ &\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \tilde{G}\big(\tilde{\mathbf{x}} + \mathcal{R}(-\tau)\, \tilde{\mathbf{v}}, R(-\tau)\, \tilde{\mathbf{v}}, t\big)\, \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, d\tau\, d\tilde{\mathbf{v}}\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Enfin, le fait que les suites $(\tilde{f}^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ et $(\tilde{\mathbf{E}})_{\epsilon > 0}$ soient bornées indépendamment de ϵ permet d'affirmer que, quitte à en extraire des sous-suites, ces suites admettent des limites faibles-* notées respectivement $\tilde{f} \in L^\infty\big(0, T; L^p(\mathbb{R}^4)\big)$ et $\tilde{\mathbf{E}} \in \big(L^\infty\big(0, T; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$. De plus le théorème 4 permet de relier $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{E}})$ à $(\tilde{F}, \tilde{\mathcal{E}})$ par les relations

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t) &= \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tau, t)\, d\tau\,, \\ \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) &= \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, d\tau\,. \end{aligned} \tag{4.34}$$

□

1.3 Résultats de convergence faible-*

Bien que E. Frénod et E. Sonnendrücker aient prouvé l'existence d'une limite faible-* $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{E}})$ d'une sous-suite de $(\tilde{f}^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon > 0}$, l'expression du système d'équations (4.19) ne se prête pas à la construction du système d'équations de la forme (1.30) dont $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{E}})$ serait solution. En effet, en utilisant le changement de variables

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = e^{-\tau M} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

nous avons

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},\tau,t) &= (e^{-\tau M})^T\,(\nabla_{\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}}}\tilde{G})\big(e^{-\tau M}\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{x}}\\ \tilde{\mathbf{v}}\end{pmatrix},t\big)\\ &= (e^{-\tau M})^T\nabla_{\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}}}\tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}},t)\,.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Nous obtenons alors une équation de transport pour $\tilde{F}$ de la forme

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},\tau,t) &= \partial_t\tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}},t)\\ &= -\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\mathcal{R}(-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{y}}+\mathcal{R}(\sigma)\,\tilde{\mathbf{u}},\sigma,t\big)\\ R(-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{y}}+\mathcal{R}(\sigma)\,\tilde{\mathbf{u}},\sigma,t\big)\end{pmatrix}d\sigma\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}}}\tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}},t)\\ &= -\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\mathcal{R}(-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{x}}+\mathcal{R}(-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}}+\mathcal{R}(\sigma)\,R(-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}},\sigma,t\big)\\ R(-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{x}}+\mathcal{R}(-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}}+\mathcal{R}(\sigma)\,R(-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}},\sigma,t\big)\end{pmatrix}d\sigma\\ &\qquad\cdot\Big[(e^{\tau M})^T\nabla_{\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}},\tau,t)\Big]\\ &= -\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\mathcal{R}(\tau-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{x}}+\mathcal{R}(\sigma-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}},\sigma,t\big)\\ R(\tau-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{x}}+\mathcal{R}(\sigma-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}},\sigma,t\big)\end{pmatrix}d\sigma\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}},\tau,t)\,.\end{aligned} \tag{4.37}$$

En intégrant cette égalité en τ sur $[0,2\pi]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\partial_t\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)\\ &\quad+\int_0^{2\pi}\Bigg[\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\mathcal{R}(\tau-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{x}}+\mathcal{R}(\sigma-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}},\sigma,t\big)\\ R(\tau-\sigma)\,\tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{x}}+\mathcal{R}(\sigma-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}},\sigma,t\big)\end{pmatrix}d\sigma\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}},\tau,t)\Bigg]d\tau=0\,.\end{aligned} \tag{4.38}$$

De la même façon, en intégrant les équations (4.19.c) et (4.19.d) en τ, nous avons

$$\begin{cases}-\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}},t) &= \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}},t)\,,\\ -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}},t) &= \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)\,d\tilde{\mathbf{v}}-\tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,,\end{cases} \tag{4.39}$$

et en intégrant l'équation (4.19.b) en τ, nous obtenons

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}_0\big(\tilde{\mathbf{x}}+\mathcal{R}(-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}},R(-\tau)\,\tilde{\mathbf{v}}\big)\,d\tau\,. \tag{4.40}$$

Nous constatons alors qu'il est difficile de construire un système d'équations dont $(\tilde{f},\tilde{\mathbf{E}})$ est solution, dans lequel $\tilde{F}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$ n'apparaissent plus. Il est donc nécessaire de procéder autrement pour construire un système d'équations de ce type.

En posant f^ϵ définie par

$$\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)=f^\epsilon\Big(\tilde{\mathbf{x}}+\begin{pmatrix}\tilde{v}_2\\ -\tilde{v}_1\end{pmatrix},\tilde{\mathbf{v}},t\Big)\,, \tag{4.41}$$

M. Bostan a prouvé dans [6] que, quitte en extraire une sous-suite, la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ ainsi construite admet une limite faible-* notée f et a établi un système d'équations vérifié par f, en se basant sur une démonstration n'impliquant aucune notion de convergence 2-échelles, en posant $\tilde{n}_e=1$, et en supposant que $\tilde{f}_0$ est 2π-périodique dans chaque direction de l'espace physique, ce qui permet de restreindre le domaine de définition à $[0,2\pi]^2$ dans l'espace physique.

Théorème 19 (Bostan [6]). *Supposons que*
- *pour tout* $(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\in[0,2\pi]^2\times\mathbb{R}^2$, $\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\geq 0$ *et*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\,d\tilde{\mathbf{x}}\,d\tilde{\mathbf{v}}=1\,,\\ &\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\tilde{\mathbf{v}}|^2\,\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\,d\tilde{\mathbf{x}}\,d\tilde{\mathbf{v}}<+\infty\,,\end{aligned} \tag{4.42}$$

– *il existe une fonction bornée et décroissante* $F_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+; r\,dr)$ *telle que*

$$\forall\,(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in [0, 2\pi]^2 \times \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) \leq F_0\big(|\tilde{\mathbf{v}}|\big)\,, \tag{4.43}$$

– $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ *converge fortement vers* $\tilde{\mathbf{E}}$ *dans* $\big(L^2\big(0, T; L^2_\#\big([0, 2\pi]^2\big)\big)\big)^2$.
Alors, quitte à en extraire une sous-suite, f^ϵ *converge faiblement-* vers une fonction* $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ *dans* $L^\infty\big([0, T) \times \mathbb{R}^2; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]^2\big)\big)$ *vérifiant*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2\pi}\, g\big(\mathbf{x}, \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}, t\big)\,, \tag{4.44}$$

où $g = g(\mathbf{x}, k, t)$ *est solution de*

$$\begin{cases} \partial_t g + \langle \mathcal{E}_2 \rangle\, \partial_{x_1} g - \langle \mathcal{E}_1 \rangle\, \partial_{x_2} g = 0\,, \\ g(x_1, x_2, k, 0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(x_1, x_2, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\sin\alpha)\, d\alpha\,, \\ \langle \mathcal{E} \rangle(x_1, x_2, k, t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\, d\alpha\,, \\ -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)\,, \\ -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} g\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, t\big)\, d\alpha\, dk - 1\,, \end{cases} \tag{4.45}$$

où f_0 *est liée à* $\tilde{f}_0$ *par la relation*

$$\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}} = f_0(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}^\perp, \tilde{\mathbf{v}})\,. \tag{4.46}$$

Démonstration. D'après l'hypothèse (4.43), nous avons

$$\forall\,\epsilon > 0\,, \qquad \|f_0\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^2; L^\infty_\#([0,2\pi]^2)\right)} \leq \|F_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\,. \tag{4.47}$$

En appliquant le principe du maximum, nous en concluons qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ϵ telle que

$$\big\|\tilde{f}^\epsilon\big\|_{L^\infty\left([0,T)\times\mathbb{R}^2; L^\infty_\#([0,2\pi]^2)\right)} \leq C_1\,. \tag{4.48}$$

Alors, en considérant un réel $R > 0$ quelconque, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}} \\ &\leq \int_{|\tilde{\mathbf{v}}|^2 \leq R} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}} + \int_{|\tilde{\mathbf{v}}|^2 > R} \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{R}\, \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}} \\ &\leq \pi\, R\, \big\|\tilde{f}^\epsilon(\cdot, \cdot, t)\big\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^2; L^\infty_\#([0,2\pi]^2)\right)} + \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2\, \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}}\,. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Par conséquent, nous avons

$$\tilde{\rho}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t) \leq 2\sqrt{\pi}\, \big\|\tilde{f}^\epsilon(\cdot, \cdot, t)\big\|^{1/2}_{L^\infty\left(\mathbb{R}^2; L^\infty_\#([0,2\pi]^2)\right)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2\, \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}}\right)^{1/2}, \tag{4.50}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\big\|\tilde{\rho}^\epsilon\big\|^2_{L^2\left(0,T; L^2_\#([0,2\pi]^2)\right)} \\ &\quad\leq 4\pi \int_0^T \big\|\tilde{f}^\epsilon(\cdot, \cdot, t)\big\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^2; L^\infty_\#([0,2\pi]^2)\right)} \int_{[0,2\pi]^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2\, \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}}\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \\ &\quad\leq 4\pi\, \big\|\tilde{f}^\epsilon\big\|_{L^\infty\left([0,T)\times\mathbb{R}^2; L^\infty_\#([0,2\pi]^2)\right)} \int_0^T \int_{[0,2\pi]^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2\, \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}}\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\,. \end{aligned} \tag{4.51}$$

En intégrant l'équation (4.2.b) en $\tilde{\mathbf{v}}$ sur $\mathbb{R}^2$, nous obtenons

$$\partial_t \tilde{\rho}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}^\epsilon = 0 \,, \tag{4.52}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{J}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\mathbf{v}}\, \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}} \,. \tag{4.53}$$

De la même façon, en multipliant (4.2.b) par $|\tilde{\mathbf{v}}|^2$ et en intégrant en $\tilde{\mathbf{x}}$ et en $\tilde{\mathbf{v}}$ sur $[0, 2\pi]^2 \times \mathbb{R}^2$, nous obtenons

$$\partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, d\tilde{\mathbf{v}} + \epsilon \int_{[0,2\pi]^2} \left|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t)\right|^2 d\tilde{\mathbf{x}} \right) = 0 \,. \tag{4.54}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, d\tilde{\mathbf{v}}\, dt \leq T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})\, d\tilde{\mathbf{x}}\, d\tilde{\mathbf{v}} \\ + \epsilon T \int_{[0,2\pi]^2} \left|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, 0)\right|^2 d\tilde{\mathbf{x}} \,. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Grâce aux hypothèses (4.42) et (4.43), nous pouvons affirmer que $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\cdot, 0)$ est dans $H^1_\#\big([0, 2\pi]^2\big)$ et est indépendant de ϵ. Par conséquent, il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de ϵ telle que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, d\tilde{\mathbf{v}} \leq C_2 \,. \tag{4.56}$$

En combinant (4.48), (4.51) et (4.56), nous en concluons qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ϵ telle que

$$\left\|\tilde{\rho}^\epsilon\right\|^2_{L^2\left(0,T; L^2_\#([0,2\pi]^2)\right)} \leq C \,. \tag{4.57}$$

et donc que la suite $(\tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^2\big(0, T; L^2_\#\big([0, 2\pi]^2\big)\big)$.

Ecrivons l'équation de transport vérifiée par f^ϵ :

$$\partial_t f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{v}^\perp, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \left[\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{v}^\perp, t) + \frac{\mathbf{v}^\perp}{\epsilon}\right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 \,, \tag{4.58}$$

avec

$$\mathbf{v}^\perp = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \,. \tag{4.59}$$

Grâce à (4.48), nous pouvons affirmer que la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big([0, T) \times \mathbb{R}^2; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]^2\big)\big)$, et qu'il est possible d'en extraire une sous-suite $(f^{\epsilon_n})_{n \geq 0}$ qui converge faiblement-* vers une fonction $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in L^\infty\big([0, T) \times \mathbb{R}^2; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]^2\big)\big)$.

Multiplions (4.58) par une fonction $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in \mathcal{D}\big([0, T) \times \mathbb{R}^2; \mathcal{C}^\infty_\#\big([0, 2\pi]^2\big)\big)$ et intégrons le tout sur $[0, T) \times [0, 2\pi]^2 \times \mathbb{R}^2$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \partial_t \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v}\, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{v}^\perp, t)^\perp \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v}\, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{v}^\perp, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v}\, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} f^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \frac{\mathbf{v}^\perp}{\epsilon} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v}\, dt = 0 \,. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Posons $\epsilon = \epsilon_n$. Alors en multipliant l'égalité ci-dessus par ϵ_n, et en passant à la limite $n \to +\infty$, nous obtenons

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \mathbf{v}^\perp \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v}\, dt = 0\,. \tag{4.61}$$

Nous en déduisons donc que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ne dépend que de $\mathbf{x}$, $|\mathbf{v}|$ et t. En effet, en passant en coordonnées polaires $\mathbf{v} = (\sqrt{2k}\, \cos\alpha, \sqrt{2k}\, \sin\alpha)$ dans l'intégrale ci-dessus, nous avons

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} \partial_\alpha f(\mathbf{x}, \sqrt{2k}\cos\alpha, \sqrt{2k}\sin\alpha, t)\, \varphi(\mathbf{x}, \sqrt{2k}\cos\alpha, \sqrt{2k}\sin\alpha, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt = 0\,.$$

Posons

$$\begin{aligned} f_r^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) &= f^\epsilon(\mathbf{x}, \sqrt{2k}\, \cos\alpha, \sqrt{2k}\, \sin\alpha, t)\,, \\ f_r(\mathbf{x}, k, \alpha, t) &= f(\mathbf{x}, \sqrt{2k}\, \cos\alpha, \sqrt{2k}\, \sin\alpha, t)\,, \\ f_{0,r}(\mathbf{x}, k, \alpha, t) &= f_0(\mathbf{x}, \sqrt{2k}\, \cos\alpha, \sqrt{2k}\, \sin\alpha, t)\,, \\ \varphi_r(\mathbf{x}, k, \alpha, t) &= \varphi(\mathbf{x}, \sqrt{2k}\, \cos\alpha, \sqrt{2k}\, \sin\alpha, t)\,. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Alors $f_r(\mathbf{x}, k, \alpha, t)$ ne dépend pas de α. Supposons que $\varphi_r(\mathbf{x}, k, \alpha, t)$ ne dépende pas non plus de α. Alors l'équation (4.60) se réécrit :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_r^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\, \partial_t \varphi_r(\mathbf{x}, k, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_{0,r}(\mathbf{x}, k, \alpha)\, \varphi_r(x, y, k)\, dx\, dy\, dk\, d\alpha \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_r^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) \\ &\qquad\qquad \times \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(x_1 - \sqrt{2k}\, \sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\, \cos\alpha, t)^\perp \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_r(\mathbf{x}, k, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_r^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\, \partial_k \varphi_r(\mathbf{x}, k, t) \\ &\qquad\qquad \times \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(x_1 - \sqrt{2k}\, \sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\, \cos\alpha, t) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2k}\cos\alpha \\ \sqrt{2k}\sin\alpha \end{pmatrix} d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt = 0\,. \end{aligned} \tag{4.63}$$

En posant $\epsilon = \epsilon_n$, et en passant à la limite $n \to +\infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_r(\mathbf{x}, k, t)\, \partial_t \varphi_r(\mathbf{x}, k, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_{0,r}(\mathbf{x}, k, \alpha)\, \varphi_r(\mathbf{x}, k)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_r(\mathbf{x}, k, t) \\ &\qquad\qquad \times \tilde{\mathbf{E}}(x_1 - \sqrt{2k}\, \sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\, \cos\alpha, t)^\perp \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_r(\mathbf{x}, k, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{[0,2\pi]^2} f_r(\mathbf{x}, k, t)\, \partial_k \varphi_r(x, y, k, t) \\ &\qquad\qquad \times \tilde{\mathbf{E}}(x_1 - \sqrt{2k}\, \sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\, \cos\alpha, t) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2k}\cos\alpha \\ \sqrt{2k}\sin\alpha \end{pmatrix} d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt = 0\,. \end{aligned} \tag{4.64}$$

En notant $\tilde{\phi}$ le potentiel associé à $\tilde{\mathbf{E}}$, c'est-à-dire vérifiant

$$-\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{E}}\,, \tag{4.65}$$

nous avons

$$\begin{aligned}\partial_\alpha\Big(\tilde\phi(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,t)\Big)\\ = \tilde{\mathbf{E}}(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,t)\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2k}\cos\alpha\\ \sqrt{2k}\sin\alpha\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.66}$$

Alors l'équation (4.64) se réduit à

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{[0,2\pi]^2} f_r(\mathbf{x},k,t)\,\partial_t\varphi_r(\mathbf{x},k,t)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,dt\\ &\quad+\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{[0,2\pi]^2} f_{0,r}(\mathbf{x},k,\alpha)\,\varphi_r(\mathbf{x},k)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\\ &\quad+\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{[0,2\pi]^2} f_r(\mathbf{x},k,t)\\ &\qquad\times\tilde{\mathbf{E}}(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,t)^\perp\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\varphi_r(\mathbf{x},k,t)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,dt=0\,.\end{aligned} \tag{4.67}$$

Nous reconnaissons alors la formulation faible de

$$\begin{cases}\partial_t f_r(\mathbf{x},k,t)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\tilde{\mathbf{E}}(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,t)^\perp\,d\alpha\cdot\nabla_{\mathbf{x}}f_r(\mathbf{x},k,t)=0\,,\\ f_r(\mathbf{x},k,0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_{0,r}(\mathbf{x},k,\alpha)\,d\alpha\,.\end{cases} \tag{4.68}$$

En posant $g=2\pi\,f_r$, nous obtenons

$$\begin{cases}\partial_t g+\langle\mathcal{E}_2\rangle\,\partial_{x_1}g-\langle\mathcal{E}_1\rangle\,\partial_{x_2}g=0\,,\\ g(\mathbf{x},k,0)=\displaystyle\int_0^{2\pi}f_0(\mathbf{x},\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\sqrt{2k}\,\sin\alpha)\,d\alpha\,,\\ \langle\mathcal{E}\rangle(\mathbf{x},k,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\tilde{\mathbf{E}}\big(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, y_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,t\big)\,d\alpha\,.\end{cases} \tag{4.69}$$

Par ailleurs, en considérant une fonction $\varphi=\varphi(\tilde{\mathbf{x}},t)\in\mathcal{D}\big([0,T);\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]^2\big)\big)$ par laquelle nous multiplions l'équation (4.2.e), nous obtenons en intégrant sur $[0,T)\times[0,2\pi]^2$ l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}-\int_0^T\int_{[0,2\pi]^2}&\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde\phi^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,\varphi(\tilde{\mathbf{x}},t)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt\\ &=\int_0^T\int_{[0,2\pi]^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\tilde f^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)\,d\tilde{\mathbf{v}}\right)\varphi(\tilde{\mathbf{x}},t)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt\\ &\qquad-\int_0^T\int_{[0,2\pi]^2}\varphi(\tilde{\mathbf{x}},t)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt\\ &=\int_0^T\int_{[0,2\pi]^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}f^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{v}}^\perp,\tilde{\mathbf{v}},t)\,d\tilde{\mathbf{v}}\right)\varphi(\tilde{\mathbf{x}},t)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt\\ &\qquad-\int_0^T\int_{[0,2\pi]^2}\varphi(\tilde{\mathbf{x}},t)\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dt\,.\end{aligned} \tag{4.70}$$

En posant $\epsilon = \epsilon_n$ et en passant à la limite $n \to +\infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{[0,2\pi]^2} \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, \varphi(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \\ = \int_0^T \int_{[0,2\pi]^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}^\perp, \tilde{\mathbf{v}}, t)\, d\tilde{\mathbf{v}} \right) \varphi(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \\ - \int_0^T \int_{[0,2\pi]^2} \varphi(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\,, \end{aligned} \tag{4.71}$$

Nous reconnaissons alors la formulation faible de

$$-\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} g(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\, \sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\, \cos\alpha, k, t)\, dk\, d\alpha - 1\,, \tag{4.72}$$

ce qui conclut la démonstration du théorème. □

2 Utilisation des coordonnées canoniques centre-guide

D'après ce que nous avons rappelé dans les paragraphes précédents, le théorème 19 nécessite des hypothèses bien plus fortes que celles du théorème 18 afin d'établir des résultats de convergence faible-* et de proposer une expression du modèle limite. En effet, d'après le théorème 18, nous n'avons besoin que de vérifier

- $\tilde{f}_0 \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap L^p(\mathbb{R}^4)$ pour $p \geq 2$,
- $\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) \geq 0$ pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^4$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^4} |\tilde{\mathbf{v}}|^2\, \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})\, d\tilde{\mathbf{x}}\, d\tilde{\mathbf{v}} < +\infty$,
- $\tilde{n}_e$ ne dépend pas de t et est dans $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^{3/2}(\mathbb{R}^2)$,

pour prouver que $\tilde{f}^\epsilon$ et $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ convergent faiblement-*, alors que pour établir le modèle (4.44)-(4.45) en suivant la démarche de M. Bostan, il est nécessaire de renforcer considérablement les hypothèses du théorème 18. En effet, il est nécessaire d'ajouter les hypothèses suivantes :

- le domaine de l'espace physique est restreint à $[0, 2\pi]^2$ au lieu de $\mathbb{R}^2$,
- la distribution initiale $\tilde{f}_0$ est supposée 2π-périodique en $\tilde{x}_1$ et en $\tilde{x}_2$,
- $\tilde{n}_e = 1$,
- il existe une fonction F_0 vérifiant (4.43),
- $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ converge fortement.

Il est donc naturel de se demander s'il est possible d'établir un modèle de la forme (4.44)-(4.45) en n'utilisant que les hypothèses du théorème 18.

En s'inspirant des premières lignes de [6], nous allons donc dans un premier temps réécrire le système (4.2) en utilisant un nouveau système de coordonnées. Puis nous établirons des résultats de convergence 2-échelles sur ce nouveau modèle qui permettront d'améliorer les résultats de convergence faible-* de M. Bostan.

2.1 Changement de variables

Commençons par rappeler le système de Vlasov-Poisson sur lequel nous allons travailler :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\, \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{f}^\epsilon + \left(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} \tilde{v}_2 \\ -\tilde{v}_1 \end{pmatrix} \right) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{f}^\epsilon = 0\,, \\ \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t = 0) = \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})\,, \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon = -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon\,, \quad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon\, d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e\,, \end{cases} \tag{4.73}$$

où $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in \mathbb{R}^2$.

Comme cela a été fait dans la démonstration du théorème 19, l'idée consiste à écrire l'équation (4.73.a) dans les variables canoniques au sens de la mécanique hamiltonienne, selon le même procédé que dans les travaux de R. Littlejohn [47] ou A. Brizard [7] : nous notons ces variables p_1, p_2, q_1, q_2, et nous notons f^ϵ la fonction de distribution dans ces variables. Alors en notant P_1, P_2, Q_1, Q_2 les caractéristiques associées à p_1, p_2, q_1, q_2, nous avons

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t P_1(t) & = & \partial_{q_1} H\big(P_1(t), P_2(t), Q_1(t), Q_2(t), t\big)\,, \\ \partial_t Q_1(t) & = & -\partial_{p_1} H\big(P_1(t), P_2(t), Q_1(t), Q_2(t), t\big)\,, \\ \partial t P_2(t) & = & \partial_{q_2} H\big(P_1(t), P_2(t), Q_1(t), Q_2(t), t\big)\,, \\ \partial_t Q_2(t) & = & -\partial_{p_2} H\big(P_1(t), P_2(t), Q_1(t), Q_2(t), t\big)\,, \end{array}\right. \tag{4.74}$$

où $H = H(p_1, p_2, q_1, q_2, t)$ est le hamiltonien du système. Si nous parvenons à démontrer que f^ϵ est constante le long des caractéristiques P_1, P_2, Q_1, Q_2, c'est-à-dire démontrer que f^ϵ vérifie

$$\partial_t\Big(f^\epsilon\big(P_1(t), P_2(t), Q_1(t), Q_2(t)\big)\Big) = 0\,, \tag{4.75}$$

alors nous pourrons établir une équation de transport pour f^ϵ de la forme

$$\partial_t f^\epsilon + \partial_{q_1} H\, \partial_{p_1} f^\epsilon - \partial_{p_1} H\, \partial_{q_1} f^\epsilon + \partial_{q_2} H\, \partial_{p_2} f^\epsilon - \partial_{p_2} H\, \partial_{q_2} f^\epsilon = 0\,. \tag{4.76}$$

Plus précisément, ces variables, notées $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, k et α, sont liées à $\tilde{\mathbf{x}}$ et $\tilde{\mathbf{v}}$ par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbf{x}} & = & \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}^\perp\,, \\ \tilde{v}_1 & = & \sqrt{2k}\,\cos\alpha\,, \\ \tilde{v}_2 & = & \sqrt{2k}\,\sin\alpha\,. \end{array}\right. \tag{4.77}$$

Nous définissons alors f^ϵ à partir de $\tilde{f}^\epsilon$ par la relation suivante :

$$\begin{aligned} f^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) &= \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}, t) \\ &= \tilde{f}^\epsilon\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\sin\alpha, t\big)\,. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Afin de déterminer une équation de la forme (4.76) pour f^ϵ, nous définissons les caractéristiques $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, K et A liées à ce système de coordonnées. Elles sont définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbf{X}} & = & \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{V}}^\perp\,, \\ \tilde{V}_1 & = & \sqrt{2K}\,\cos A\,, \\ \tilde{V}_2 & = & \sqrt{2K}\,\sin A\,, \end{array}\right. \tag{4.79}$$

où $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ et $\tilde{\mathbf{V}} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$ sont les caractéristiques associées à l'équation de transport (4.73.a) et vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t \tilde{\mathbf{X}}(t) & = & \dfrac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{V}}(t)\,, \\ \\ \partial_t \tilde{\mathbf{V}}(t) & = & \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon\big(\tilde{\mathbf{X}}(t), t\big) + \dfrac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{V}}(t)^\perp\,. \end{array}\right. \tag{4.80}$$

Il est alors clair que

$$\partial_t\Big(f^\epsilon\big(\mathbf{X}(t), K(t), A(t), t\big)\Big) = \partial_t\Big(\tilde{f}^\epsilon\big(\tilde{\mathbf{X}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t), t\big)\Big) = 0\,. \tag{4.81}$$

Il reste donc à calculer les dérivées en t de X_1, X_2, K et A afin d'établir une équation de transport pour f^ϵ.

En dérivant en t les caractéristiques X_1, X_2, nous obtenons :

$$\partial_t \mathbf{X}(t) = \mathbf{E}^\epsilon\big(\mathbf{X}(t), K(t), A(t), t\big)^\perp\,, \tag{4.82}$$

où $\mathbf{E}^\epsilon$ est lié à $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ par

$$\mathbf{E}^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t) = \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\,. \tag{4.83}$$

En dérivant en t la relation $K = \frac{1}{2}\,|\tilde{\mathbf{V}}|^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_t K(t) = \sqrt{2K(t)}\,\Big(&\cos\big(A(t)\big)\,E_1^\epsilon\big(\mathbf{X}(t),K(t),A(t),t\big)\\ &+\sin\big(A(t)\big)\,E_2^\epsilon\big(\mathbf{X}(t),K(t),A(t),t\big)\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.84}$$

En dérivant en t les relations $\tilde{V}_1 = \sqrt{2K}\,\cos A$ et $\tilde{V}_2 = \sqrt{2K}\,\sin A$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{V}_1(t) &= \frac{\partial_t K(t)}{\sqrt{2K(t)}}\,\cos\big(A(t)\big) - \sqrt{2K(t)}\,\partial_t A(t)\,\sin\big(A(t)\big)\,,\\ \partial_t\tilde{V}_2(t) &= \frac{\partial_t K(t)}{\sqrt{2K(t)}}\,\sin\big(A(t)\big) + \sqrt{2K(t)}\,\partial_t A(t)\,\cos\big(A(t)\big)\,,\end{aligned} \tag{4.85}$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\partial_t A(t) &= \frac{1}{\sqrt{2K(t)}}\Big[\cos\big(A(t)\big)\,\partial_t\tilde{V}_1(t) - \sin\big(A(t)\big)\,\partial_t\tilde{V}_2(t)\Big]\\ &= -\frac{1}{\epsilon} + \frac{\cos\big(A(t)\big)\,E_2^\epsilon\big(\mathbf{X}(t),K(t),A(t),t\big) - \sin\big(A(t)\big)\,E_1^\epsilon\big(\mathbf{X}(t),K(t),A(t),t\big)}{\sqrt{2K(t)}}\,.\end{aligned} \tag{4.86}$$

Les coordonnées x_1, x_2, k, α sont bien des coordonnées canoniques pour l'équation (4.73.a) : en effet, en définissant ϕ^ϵ par

$$\phi^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t) = \tilde{\phi}^\epsilon\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\,, \tag{4.87}$$

Nous constatons alors que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t X_1(t) &=& -\partial_{x_2} H\big(X_1(t),X_2(t),K(t),A(t),t\big)\,,\\ \partial_t X_2(t) &=& \partial_{x_1} H\big(X_1(t),X_2(t),K(t),A(t),t\big)\,,\\ \partial_t K(t) &=& \partial_\alpha H\big(X_1(t),X_2(t),K(t),A(t),t\big)\,,\\ \partial_t A(t) &=& -\partial_k H\big(X_1(t),X_2(t),K(t),A(t),t\big)\,,\end{array}\right. \tag{4.88}$$

où H est défini par

$$H(\mathbf{x},k,\alpha,t) = \frac{k}{\epsilon} + \phi^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,. \tag{4.89}$$

Alors, dans le système de coordonnées x_1, x_2, k, α, l'équation (4.73.a) s'écrit :

$$\begin{aligned}\partial_t f^\epsilon + (\mathbf{E}^\epsilon)^\perp\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f^\epsilon + \sqrt{2k}\,(E_1^\epsilon\,\cos\alpha + E_2^\epsilon\,\sin\alpha)\,\partial_k f^\epsilon\\ + \frac{E_2^\epsilon\,\cos\alpha - E_1^\epsilon\,\sin\alpha}{\sqrt{2k}}\,\partial_\alpha f^\epsilon - \frac{1}{\epsilon}\,\partial_\alpha f^\epsilon = 0\,,\end{aligned} \tag{4.90}$$

et nous complétons cette équation de transport avec les équations de Poisson suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{E}^\epsilon(x_1,x_2,k,\alpha,t) = \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\,,\\[2ex] -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,,\\[2ex] -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} f^\epsilon\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, \alpha, t\big)\,dk\,d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,,\end{array}\right. \tag{4.91}$$

ainsi que la condition initiale suivante :

$$\begin{aligned}f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t=0) &= f_0(\mathbf{x},k,\alpha)\\ &= \tilde{f}_0\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\sin\alpha\big)\,.\end{aligned} \tag{4.92}$$

2.2 Passage à la limite 2-échelles

Dans ce paragraphe, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]\,, \qquad \Gamma = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+\,, \qquad \mathcal{S} = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]\,. \tag{4.93}$$

En considérant l'espace de Banach $X(\Omega)$, nous définissons le sous-espace $X_{\mathcal{P}}(\Omega)$ par

$$X_{\mathcal{P}}(\Omega) = \Big\{ u \in X(\Omega) \,:\, \forall\, (\mathbf{x}, k) \in \Gamma,\ \textit{la fonction } \alpha \mapsto u(\mathbf{x}, k, \alpha) \ \textit{est } 2\pi\textit{-périodique} \Big\}\,, \tag{4.94}$$

et nous le munissons de la norme usuelle sur $X(\Omega)$.

Etant donné que f^ϵ et $\mathbf{E}^\epsilon$ sont liés à $\tilde{f}^\epsilon$ et $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$, nous pouvons établir des résultats de convergence 2-échelles sur la solution du modèle (4.90)-(4.91)-(4.92) à partir d'hypothèses similaires à celle du théorème 18 :

Théorème 20. *Supposons que f_0 et $\tilde{n}_e$ vérifient les hypothèses suivantes :*
- *f_0 est dans $L^1_{\mathcal{P}}(\Omega) \cap L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)$ pour $p \geq 2$,*
- *$f_0(\mathbf{x}, k, \alpha) \geq 0$ pour tout $(\mathbf{x}, k, \alpha) \in \Omega$,*
- *f_0 vérifie $\displaystyle\int_\Omega k\, f_0(\mathbf{x}, k, \alpha)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha < +\infty$,*
- *$\tilde{n}_e$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^{3/2}(\mathbb{R}^2)$.*

Alors $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ sont des suites bornées indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0, T; L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$ et $\big(L^\infty\big(0, T; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$. Il existe des fonctions $F = F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)$ et $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)$ respectivement dans $L^\infty\big(0, T; L^\infty_{\#}\big([0, 2\pi]; L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)\big)$ et $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_{\#}\big([0, 2\pi]; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\big)^2$ telles que, quitte à en extraire des sous-suites, f^ϵ converge à 2 échelles vers F et $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ converge à 2 échelles vers $\tilde{\mathcal{E}}$.
De plus, il existe des fonctions $G = G(\mathbf{x}, k, \alpha, t)$ dans $L^\infty\big(0, T; L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)$ dans $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_{\#}\big([0, 2\pi]; W^{1,3/2}_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)\big)\big)^2$ telles que

$$F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = G(\mathbf{x}, k, \alpha + \tau, t)\,, \tag{4.95}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = \tilde{\mathcal{E}}\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \tau, t\big)\,, \tag{4.96}$$

et vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t G + \langle \mathcal{E}^\perp \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G + \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle\, \partial_\alpha G = 0\,, \\ G(\mathbf{x}, k, \alpha, t = 0) = \dfrac{1}{2\pi}\, f_0(\mathbf{x}, k, \alpha)\,, \\ -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t) = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\,, \\ -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t) = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} G\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, \alpha + \tau, t\big)\, dk\, d\alpha - \frac{1}{2\pi}\, \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,, \\ \mathcal{F}_\alpha(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = \dfrac{\mathcal{E}_2(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\,\cos\alpha - \mathcal{E}_1(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\,\sin\alpha}{\sqrt{2k}}\,, \end{cases} \tag{4.97}$$

où la notation $\langle \cdot \rangle$ désigne

$$\langle u \rangle(\mathbf{x}, k, t) = \int_0^{2\pi} u(\mathbf{x}, k, -\tau, \tau, t)\, d\tau\,. \tag{4.98}$$

Démonstration. Commençons par démontrer que la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty\big(0, T; L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$ indépendamment de ϵ : pour cela, nous multiplions (4.90) par $(f^\epsilon)^{p-1}$ et nous intégrons sur Ω. De part le choix des variables $\mathbf{x}, k, \alpha$, nous obtenons naturellement

$$\partial_t \Big(\big\| f^\epsilon(\cdot, t) \big\|^p_{L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)} \Big) = 0\,, \tag{4.99}$$

ce qui induit

$$\forall\, t\,, \qquad \big\| f^\epsilon(\cdot, t) \big\|_{L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)} = \big\| f_0 \big\|_{L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)}\,. \tag{4.100}$$

Alors, quitte à en extraire une sous-suite, $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une limite 2-échelles $F = F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)$ dans $L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)\big)$.

En réécrivant l'équation (4.90) sous la forme

$$\partial_t f^\epsilon + \mathbf{A}^\epsilon \cdot \nabla f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{L} \cdot f^\epsilon = 0\,, \tag{4.101}$$

avec

$$\mathbf{A}^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)^\perp \\ \sqrt{2k}\,\big(E_1^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\cos\alpha + E_2^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\sin\alpha\big) \\ \dfrac{E_2^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\cos\alpha - E_1^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\sin\alpha}{\sqrt{2k}} \end{pmatrix}, \tag{4.102}$$

$$\mathbf{L} = M \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ k \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{4.103}$$

nous constatons que nous ne nous plaçons pas tout à fait dans le cadre du théorème 4 : en effet, dans notre cas, la matrice M est nulle. De ce fait, le vecteur $(0, 0, 0, -1)^T$ n'est pas dans $Im(M)$. Cependant, en suivant une démarche très proche de la démonstration du théorème 4, nous pouvons aboutir au résultat recherché. Pour cela, nous allons suivre le raisonnement suivant :

1. nous montrons que $\nabla \cdot \mathbf{A}^\epsilon = 0$ et que $\mathbf{A}^\epsilon$ admet une sous-suite qui converge à 2 échelles vers une fonction $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)$ dans $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; W^{1,3/2}_{\mathcal{P}}(K)\big)\big)\big)^4$ pour tout compact $K = K_\Gamma \times [0, 2\pi]$ de Ω avec $K_\Gamma \subset \Gamma$ compact,
2. nous démontrons qu'il existe une fonction $G = G(\mathbf{x}, k, \alpha, t) \in L^\infty\big(0, T; L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$ telle que
$$F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = G(\mathbf{x}, k, \alpha + \tau, t)\,, \quad \forall\,(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \in \Omega \times [0, 2\pi] \times [0, T)\,, \tag{4.104}$$
3. nous définissons la suite de fonctions $(g^\epsilon)_{\epsilon>0}$ par
$$f^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) = g^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha + \frac{t}{\epsilon}, t)\,, \quad \forall\,(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \in \Omega \times [0, T)\,, \tag{4.105}$$
et nous montrons que g^ϵ converge fortement vers $2\pi G$ dans $L^\infty\big(0, T; (W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\big)$,
4. nous établissons une équation de transport dont G est solution dans $L^\infty\big(0, T; L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$ en faisant intervenir $\mathcal{A}$.

Il est évident de part le choix des variables $\mathbf{x}, k, \alpha$ que $\nabla \cdot \mathbf{A}^\epsilon$ est nul.

Afin de démontrer le premier point, nous établissons au préalable le résultat suivant sur $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$:

Proposition 21. *$(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une suite bornée indépendamment de ϵ dans $\big(L^\infty\big(0, T; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$ et, quitte à en extraire une sous-suite, converge à 2 échelles vers une fonction $\mathcal{E}$ dans l'espace $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\big)^2$. De la même façon, $(\tilde{\phi}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0, T; W^{2,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$ et admet une limite 2-échelles $\tilde{\Phi}$ dans $L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; W^{2,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)$.*

Démonstration de la proposition 21. Pour cela, nous nous inspirons des démonstrations des théorèmes 18 et 19 en introduisant la suite $(\tilde{n}_i^\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie par

$$\tilde{n}_i^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \int_{\mathcal{S}} f^\epsilon(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, \alpha, t)\,dk\,d\alpha\,. \tag{4.106}$$

Si nous démontrons que cette suite est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;L^{3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$, alors nous pourrons en déduire les résultats de la proposition.

Soit $R>0$ fixé. Alors nous avons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\big|\tilde{n}_i^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\big| &\leq \int_0^{2\pi}\int_0^R \big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|\,dk\,d\alpha\\ &\quad+\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\int_R^{+\infty} k\,\big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|\,dk\,d\alpha\\ &\leq \sqrt{\pi R}\left(\int_{\mathcal{S}}\big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|^2\,dk\,d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad+\frac{1}{R}\int_{\mathcal{S}} k\,\big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|\,dk\,d\alpha\,.\end{aligned}\tag{4.107}$$

Comme le minimum de la fonction $P(R)=a\sqrt{R}+\frac{b}{R}$ sur $]0,+\infty[$ est atteint en $\left(\frac{2b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\big|\tilde{n}_i^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\big| &\leq C\left(\int_{\mathcal{S}}\big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|^2\,dk\,d\alpha\right)^{\frac{1}{3}}\\ &\quad\times\left(\int_{\mathcal{S}} k\,\big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|\,dk\,d\alpha\right)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}\tag{4.108}$$

où C est une constante indépendante de R. Nous en déduisons finalement que

$$\begin{aligned}\big\|\tilde{n}_i^\epsilon(\cdot,t)\big\|^{3/2}_{L^{3/2}(\mathbb{R}^2)} &\leq C\left(\int_\Omega\big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|^2\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dk\,d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\times\left(\int_\Omega k\,\big|f^\epsilon(\tilde{x}_1+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{x}_2-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha,t)\big|\,d\tilde{\mathbf{x}}\,dk\,d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\,\big\|f^\epsilon(\cdot,t)\big\|_{L^2_{\mathcal{P}}(\Omega)}\times\left(\int_\Omega k\,\big|f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\big|\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{4.109}$$

Montrons qu'il existe une constante C_1 indépendante de ϵ et de t telle que, pour tout $\epsilon>0$ et pour tout $t\in[0,T)$, nous ayons

$$\int_\Omega k\,\big|f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\big|\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\leq C_1\,.\tag{4.110}$$

Pour cela, nous multiplions (4.90) par k et nous intégrons sur Ω. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\int_\Omega k\,f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\right)\\ &\quad-\int_\Omega\sqrt{2k}\,E_1^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,\cos\alpha\,f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\\ &\quad-\int_\Omega\sqrt{2k}\,E_2^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,\sin\alpha\,f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha=0\,.\end{aligned}\tag{4.111}$$

Par ailleurs, en dérivant $\tilde{n}_i^\epsilon$ en t, nous avons

$$\partial_t\tilde{n}_i^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)+\frac{1}{\epsilon}\,\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\cdot\tilde{\mathbf{J}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)=0\,,\tag{4.112}$$

où $\tilde{\mathbf{J}}^\epsilon$ est défini par

$$\tilde{\mathbf{J}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = \int_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \sqrt{2k}\,\cos\alpha \\ \sqrt{2k}\,\sin\alpha \end{pmatrix} f^\epsilon(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, \alpha, t)\, dk\, d\alpha\,. \tag{4.113}$$

En posant $x_1 = \tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha$ et $x_2 = \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha$ dans les deux dernières intégrales de (4.111), nous avons

$$\partial_t \left(\int_\Omega k\, f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha \right) - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\cdot\tilde{\mathbf{J}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, d\tilde{\mathbf{x}} = 0\,. \tag{4.114}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\cdot\tilde{\mathbf{J}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, d\tilde{\mathbf{x}} &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\cdot\tilde{\mathbf{J}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, d\tilde{\mathbf{x}} \\ &= -\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, \partial_t \tilde{n}_i^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, d\tilde{\mathbf{x}} \\ &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\, d\tilde{\mathbf{x}} \\ &= -\frac{\epsilon}{2}\, \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\right|^2 d\tilde{\mathbf{x}} \right). \end{aligned} \tag{4.115}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega k\, f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha &= \int_\Omega k\, f_0(\mathbf{x},k,\alpha)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},0)\right|^2 d\tilde{\mathbf{x}} - \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\right|^2 d\tilde{\mathbf{x}}\,. \end{aligned} \tag{4.116}$$

Enfin, en remarquant que $f_0 \in L^1_{\mathcal{P}}(\Omega)$ et $\tilde{n}_e \in L^1(\mathbb{R}^2)$, nous démontrons que $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\cdot,0)$ ne dépend pas de ϵ et est dans $\big(H^1(\mathbb{R}^2)\big)^2$. Par conséquent, il existe une constante C_1 ne dépendant que de f_0 et $\tilde{n}_e$ telle que

$$\int_\Omega k\, \left|f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\right|\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha \le C_1\,. \tag{4.117}$$

Alors l'inégalité (4.109) induit

$$\left\|\tilde{n}_i^\epsilon(\cdot,t)\right\|^{3/2}_{L^{3/2}(\mathbb{R}^2)} \le C\, C_1\, \left\|f^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2_{\mathcal{P}}(\Omega)} \le C\, C_1\, \left\|f_0\right\|_{L^2_{\mathcal{P}}(\Omega)}\,, \tag{4.118}$$

pour tout $t \in [0,T)$. La suite $(\tilde{n}_i^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est alors bornée indépendamment de ϵ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;L^{3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$. Par conséquent, $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$ indépendamment de ϵ, et il en est de même pour $(\tilde{\phi}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;W^{2,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$. Par conséquent, nous pouvons également affirmer que $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ admet une limite 2-échelles notée $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\big)^2$, et que $\tilde{\phi}^\epsilon$ converge à 2 échelles vers une fonction $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)$ dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{2,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)$, quitte à en extraire des sous-suites. □

Nous déduisons alors aisément de cette proposition que, pour tout compact K de Ω de la forme $K = K_\Gamma \times [0,2\pi]$ avec $K_\Gamma \subset \Gamma$ compact, la suite $(\phi^\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie en (4.87) est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;W^{2,3/2}_{\mathcal{P}}(K)\big)$, et, quitte à en extraire une sous-suite, converge à 2 échelles vers $\Phi = \Phi(\mathbf{x},k,\alpha,\tau,t)$ dans l'espace $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{2,3/2}_{\mathcal{P}}(K)\big)\big)$. Par ailleurs, Φ est liée à $\tilde{\Phi}$ et $\mathcal{E}$ à $\tilde{\mathcal{E}}$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x},k,\alpha,\tau,t) &= \tilde{\Phi}\big(x_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \tau, t\big)\,, \\ \mathcal{E}(\mathbf{x},k,\alpha,\tau,t) &= \tilde{\mathcal{E}}\big(x_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \tau, t\big)\,, \end{aligned} \tag{4.119}$$

pour tout $(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \in \Omega \times [0, 2\pi] \times [0, T)$.

Etant donné que $\mathbf{A}^\epsilon$ peut s'écrire en fonction de ϕ^ϵ de la façon suivante

$$\mathbf{A}^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2}\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) \\ \partial_{x_1}\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) \\ \partial_\alpha\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) \\ -\partial_k\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) \end{pmatrix}, \tag{4.120}$$

nous pouvons affirmer que $\mathbf{A}^\epsilon$ admet une sous-suite qui converge à 2 échelles vers $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)$ dans $\big(L^\infty\big(0, T; L^\infty_\#\big([0, 2\pi]; W^{1,3/2}_\mathcal{P}(K)\big)\big)\big)^4$. Grâce à (4.120), nous pouvons écrire $\mathcal{A}$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2}\Phi(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \\ \partial_{x_1}\Phi(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \\ \partial_\alpha\Phi(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \\ -\partial_k\Phi(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \end{pmatrix}. \tag{4.121}$$

De plus, en utilisant les relations (4.119) entre Φ, $\tilde{\Phi}$, $\mathcal{E}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$, nous pouvons écrire une formule plus explicite pour $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)^\perp \\ \sqrt{2k}\,\big(\mathcal{E}_1(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\,\cos\alpha + \mathcal{E}_2(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\,\sin\alpha\big) \\ \dfrac{\mathcal{E}_2(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\,\cos\alpha - \mathcal{E}_1(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\,\sin\alpha}{\sqrt{2k}} \end{pmatrix}. \tag{4.122}$$

Ceci achève la démonstration du premier point.

Démontrons maintenant qu'il existe une fonction $G \in L^\infty\big(0, T; L^p_\mathcal{P}(\Omega)\big)$ telle que

$$F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = G(\mathbf{x}, k, \alpha + \tau, t)\,, \quad \forall\,(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \in \Omega \times [0, 2\pi] \times [0, T)\,. \tag{4.123}$$

Pour cela, nous considérons une fonction test $\psi = \psi(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \in \mathcal{D}\big([0, T) \times \Gamma; \mathcal{C}^\infty_\#\big([0, 2\pi]^2\big)\big)$ de support K_Γ dans Γ. En multipliant l'équation (4.90) par $\psi(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t)$ et en intégrant sur $[0, T) \times \Omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega f^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\Big[\partial_t\psi\big(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t\big) + \frac{1}{\epsilon}\,\partial_\tau\psi\big(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t\big) \\
&\quad - \partial_{x_2}\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\partial_{x_1}\psi\big(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t\big) + \partial_{x_1}\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\partial_{x_2}\psi\big(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t\big) \\
&\quad + \partial_\alpha\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\partial_k\psi\big(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t\big) - \partial_k\phi^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\,\partial_\alpha\psi\big(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t\big) \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon}\,\partial_\alpha\psi\big(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\Big]\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,dt = -\int_\Omega f_0(\mathbf{x}, k, \alpha)\,\psi(\mathbf{x}, k, \alpha, 0, 0)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,.
\end{aligned}$$

Multiplions cette équation par ϵ et passons à la limite en $\epsilon \to 0$: du fait que ϕ^ϵ soit bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0, T; W^{2,3/2}_\mathcal{P}(K)\big)$ où $K = K_\Gamma \times [0, 2\pi]$, nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} \int_0^T \int_\Omega F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\Big[\partial_\tau\psi(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) - \partial_\alpha\psi(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\Big]\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,d\tau = 0\,. \tag{4.124}$$

Il s'agit de la formulation faible de $\partial_\tau F - \partial_\alpha F = 0$. Par conséquent, il existe une fonction $G \in L^\infty\big(0, T; L^p_\mathcal{P}(\Omega)\big)$ telle que

$$F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = G(\mathbf{x}, k, \alpha + \tau, t)\,. \tag{4.125}$$

Démontrons le troisième point : nous définissons la suite $(g^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ par

$$g^\epsilon(\mathbf{x}, k, \alpha, t) = f^\epsilon\big(\mathbf{x}, k, \alpha - \frac{t}{\epsilon}, t\big)\,. \tag{4.126}$$

L'objectif est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 22. *Quitte à en extraire une sous-suite, g^ϵ converge fortement vers $2\pi G$ dans $L^\infty\big(0,T;(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\big)$ pour tout compact $K = K_\Gamma \times [0,2\pi]$ de Ω, où $K_\Gamma \subset \Gamma$.*

Démonstration de la proposition 22. Etant donné que la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$, il en est de même pour $(g^\epsilon)_{\epsilon>0}$. Alors, quitte à en extraire une sous-suite, $(g^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet une limite 2-échelles dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)\big)$, et il s'agit de la fonction G définie en (4.125). En effet, pour $\psi = \psi(\mathbf{x},k,\alpha,\tau,t)$ dans $\mathcal{D}\big([0,T)\times\Gamma;\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]^2\big)\big)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega g^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,\psi\big(\mathbf{x},k,\alpha,\frac{t}{\epsilon},t\big)\,d\mathbf{x}\;dk\,d\alpha\,dt\\
&\quad=\int_0^T\int_\Omega f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,\psi\big(\mathbf{x},k,\alpha+\frac{t}{\epsilon},\frac{t}{\epsilon},t\big)\,d\mathbf{x}\;dk\,d\alpha\,dt\\
&\quad\to\int_0^{2\pi}\int_0^T\int_\Omega F(\mathbf{x},k,\alpha,\tau,t)\,\psi(\mathbf{x},k,\alpha+\tau,\tau,t)\,d\mathbf{x}\;dk\,d\alpha\,dt\,d\tau\\
&\quad=\int_0^{2\pi}\int_0^T\int_\Omega G(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,\psi(\mathbf{x},k,\alpha,\tau,t)\,d\mathbf{x}\;dk\,d\alpha\,dt\,d\tau\,.
\end{aligned}\tag{4.127}$$

Par conséquent, g^ϵ converge faiblement-* vers $2\pi\,G$ dans $L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$.

Par ailleurs, étant donné que f^ϵ vérifie (4.101), g^ϵ est solution de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases}\partial_t g^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)+\mathbf{A}^\epsilon\big(\mathbf{x},k,\alpha-\dfrac{t}{\epsilon},t\big)\cdot\nabla g^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)=0\\ g^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t=0)=f_0(\mathbf{x},k,\alpha)\,.\end{cases}\tag{4.128}$$

Soit $K = K_\Gamma\times[0,2\pi]$ un compact de Ω. Etant donné que $(g^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans l'epace $L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(K)\big)$ et que $(\mathbf{A}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ l'est aussi dans $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,3/2}_{\mathcal{P}}(K)\big)^4$, nous en déduisons successivement que

- $(\mathbf{A}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^q_{\mathcal{P}}(K)\big)\big)^4$, où $q\in[1,\frac{12}{5}[$ indépendamment de ϵ,
- $\big(g^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,\mathbf{A}^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha-\frac{t}{\epsilon},t)\big)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^r_{\mathcal{P}}(K)\big)\big)^4$indépendamment de ϵ, où r est défini par $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ ($r\in[1,\frac{12}{5}[$),
- $(\partial_t g^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;\big(W^{1,r^*}_{0,\mathcal{P}}(K)\big)^*\big)$ où $\frac{1}{r^*}+\frac{1}{r}=1$.

Soit $\mathcal{U}$ l'espace fonctionnel défini par

$$\mathcal{U}=\Big\{u\in L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(K)\big)\;:\;\partial_t u\in L^\infty\big(0,T;\big(W^{1,r^*}_{0,\mathcal{P}}(K)\big)^*\big)\Big\}\,,\tag{4.129}$$

et muni de la norme induite par la norme usuelle sur $L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(K)\big)$. Remarquons que, pour tout $p\geq 2$, l'inclusion $L^p_{\mathcal{P}}(K)\subset(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*$ est compacte en vertu du théorème de Rellich-Kondrakov (voir [1]).

Si $r^*\geq 3/2$, alors nous avons l'inclusion compacte $W^{1,r^*}_{0,\mathcal{P}}(K)\subset W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K)$. De fait, nous avons les inclusions compactes suivantes :

$$L^p_{\mathcal{P}}(K)\subset(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\subset(W^{1,r}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\,.\tag{4.130}$$

En appliquant le lemme d'Aubin-Lions, nous constatons que l'inclusion $\mathcal{U}\subset L^\infty\big(0,T;(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\big)$ est compacte et que, de ce fait, g^ϵ converge fortement vers $2\pi G$ dans $L^\infty\big(0,T;(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\big)$.

Si $r^*<3/2$, alors l'inclusion $(W^{1,r^*}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\subset(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*$ est compacte. La suite $(g^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est alors bornée indépendamment de ϵ dans l'espace fonctionnel $\mathcal{U}'$ défini par

$$\mathcal{U}'=\Big\{u\in L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(K)\big)\;:\;\partial_t u\in L^\infty\big(0,T;(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\big)\Big\}\,,\tag{4.131}$$

et muni de la norme induite par la norme ususelle sur $L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(K)\big)$. En utilisant le lemme d'Aubin-Lions, nous en déduisons que l'inclusion $\mathcal{U}'\subset L^\infty\big(0,T;(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\big)$ est compacte, et donc que g^ϵ converge fortement vers $2\pi G$ dans cet espace. □

Il reste donc à établir une équation de transport dont G est solution dans $L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$. Pour cela, nous considérons une fonction $\psi=\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)\in\mathcal{D}\big([0,T)\times\Gamma;\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$ de support $K=K_\Gamma\times[0,2\pi]$ dans Ω, avec $K_\Gamma\subset\Gamma$. En multipliant (4.128) par $\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)$ et en intégrant sur $[0,T)\times\Omega$, nous obtenons :

$$\int_0^T\int_K g^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)\Big[\partial_t\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)+\mathbf{A}^\epsilon\big(\mathbf{x},k,\alpha-\frac{t}{\epsilon},t\big)\cdot\nabla\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)\Big]\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,dt \\ +\int_K f_0(\mathbf{x},k,\alpha)\,\psi(\mathbf{x},k,\alpha,0)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha=0\,.$$

Etant donné que, quitte à en extraire une sous-suite, $\mathbf{A}^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha-\frac{t}{\epsilon},t)$ converge à 2-échelles vers $\mathcal{A}(\mathbf{x},k,\alpha-\tau,\tau,t)$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{1,3/2}_{\mathcal{P}}(K)\big)\big)\big)^4$ et que g^ϵ converge fortement dans $L^\infty\big(0,T;(W^{1,3/2}_{0,\mathcal{P}}(K))^*\big)$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}2\pi\int_0^T\int_K G(\mathbf{x},k,\alpha,t)\Bigg[&\partial_t\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)\\ &+\Big(\int_0^{2\pi}\mathcal{A}\big(\mathbf{x},k,\alpha-\tau,\tau,t\big)\,d\tau\Big)\cdot\nabla\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)\Bigg]\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,dt\\ &+\int_K f_0(\mathbf{x},k,\alpha)\,\psi(\mathbf{x},k,\alpha,0)\,dx\,dy\,dk\,d\alpha=0\,.\end{aligned}\tag{4.132}$$

Nous reconnaissons alors la formulation faible de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases}\partial_t G(\mathbf{x},k,\alpha,t)+\Big[\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathcal{A}(\mathbf{x},k,\alpha-\tau,\tau,t)\,d\tau\Big]\cdot\nabla G(\mathbf{x},k,\alpha,t)=0\,,\\ G(\mathbf{x},k,\alpha,t=0)=\dfrac{1}{2\pi}\,f_0(\mathbf{x},k,\alpha)\,.\end{cases}\tag{4.133}$$

Afin d'achever la démonstration du quatrième point, il reste encore à démontrer que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\mathcal{A}(\mathbf{x},k,\alpha-\tau,\tau,t)\,d\tau\tag{4.134}$$

ne dépend pas de α. Pour cela, nous démontrons le résultat suivant :

Lemme 23. *Pour tout $(\mathbf{x},k,\alpha,t)\in\Omega\times[0,T)$, nous avons l'égalité suivante :*

$$\partial_\alpha\Big(\int_0^{2\pi}\Phi(\mathbf{x},k,\alpha-\tau,\tau,t)\,d\tau\Big)=0\,.\tag{4.135}$$

Démonstration du lemme 23. Soit $K=K_\Gamma\times[0,2\pi]\subset\Omega$ avec $K_\Gamma\subset\Gamma$ compact. Alors la suite $(\phi^\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie en (4.87) est bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty\big(0,T;W^{2,3/2}_{\mathcal{P}}(K)\big)$ et converge à 2 échelles vers la fonction Φ dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{2,3/2}_{\mathcal{P}}(K)\big)\big)$, quitte à en extraire une sous-suite. En considérant alors une fonction $\psi=\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)\in\mathcal{D}\big([0,T)\times\Gamma;\mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$, de support K_Γ dans Γ, nous avons le passage à la limite suivant :

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\partial_\alpha\phi^\epsilon\big(\mathbf{x},k,\alpha-\frac{t}{\epsilon},t\big)\,\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,dt\\ &\quad\to\int_0^T\int_\Omega\partial_\alpha\Big(\int_0^{2\pi}\Phi(\mathbf{x},k,\alpha-\tau,\tau,t)\,d\tau\Big)\,\psi(\mathbf{x},k,\alpha,t)\,d\mathbf{x}\,dk\,d\alpha\,dt\,,\end{aligned}\tag{4.136}$$

ce qui traduit le passage à la limite faible-* suivant :

$$\partial_\alpha \phi^\epsilon\big(\mathbf{x}, k, \alpha - \frac{t}{\epsilon}, t\big) \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad \partial_\alpha \left(\int_0^{2\pi} \Phi(\mathbf{x}, k, \alpha - \tau, \tau, t)\, d\tau \right). \tag{4.137}$$

Par ailleurs, en définissant $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) \in \mathcal{D}\big([0,T) \times \Gamma; \mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]^2)\big)$ par

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = \psi(\mathbf{x}, k, \alpha + \tau, t)\,, \tag{4.138}$$

nous avons

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \partial_\alpha \phi^\epsilon\big(\mathbf{x}, k, \alpha - \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, \psi(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt \\ &\qquad = -\epsilon \int_0^T \int_\Omega \phi^\epsilon\big(\mathbf{x}, k, \alpha, t\big)\, \partial_\tau \bar{\psi}(\mathbf{x}, k, \alpha, \frac{t}{\epsilon}, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt\,. \end{aligned} \tag{4.139}$$

De ce fait, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de K_Γ telle que

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \int_\Omega \partial_\alpha \phi^\epsilon\big(\mathbf{x}, k, \alpha - \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, \psi(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt \right| \\ &\qquad \leq \epsilon\, C \left\| \phi^\epsilon(\cdot, t) \right\|_{W^{2,3/2}_{\mathcal{P}}(K)} \times \int_0^T \sup_{K \times [0,2\pi]} \left| \partial_\tau \bar{\psi}(\cdot, t) \right| dt\,, \end{aligned} \tag{4.140}$$

Nous en déduisons alors que

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_\alpha \phi^\epsilon\big(\mathbf{x}, k, \alpha - \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, \psi(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\, d\mathbf{x}\, dk\, d\alpha\, dt \quad \to \quad 0\,, \tag{4.141}$$

et donc que

$$\partial_\alpha \phi^\epsilon\big(\mathbf{x}, k, \alpha - \frac{t}{\epsilon}, t\big) \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad 0\,. \tag{4.142}$$

Par unicité de la limite faible-*, Nous en déduisons l'égalité (4.135). □

En conséquence directe de ce lemme, nous avons :

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{A}(\mathbf{x}, k, \alpha - \tau, \tau, t)\, d\tau = \begin{pmatrix} -\displaystyle\int_0^{2\pi} \partial_{x_2} \Phi(\mathbf{x}, k, -\tau, \tau, t)\, d\tau \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \partial_{x_1} \Phi(\mathbf{x}, k, -\tau, \tau, t)\, d\tau \\ 0 \\ -\displaystyle\int_0^{2\pi} \partial_k \Phi(\mathbf{x}, k, -\tau, \tau, t)\, d\tau \end{pmatrix}. \tag{4.143}$$

Alors l'équation (4.133) se réécrit sous la forme suivante :

$$\partial_t G + \langle \mathcal{E}^\perp \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G + \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle\, \partial_\alpha G = 0\,, \tag{4.144}$$

où $\mathcal{F}_\alpha$ est définie par

$$\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t) = \frac{\mathcal{E}_2(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\, \cos\alpha - \mathcal{E}_1(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\, \sin\alpha}{\sqrt{2k}}\,, \tag{4.145}$$

et où la notation $\langle \cdot \rangle$ correspond à

$$\langle u \rangle(\mathbf{x}, k, t) = \int_0^{2\pi} u(\mathbf{x}, k, -\tau, \tau, t)\, d\tau\,. \tag{4.146}$$

Ceci achève la démonstration du point 4.

Afin de compléter la démonstration du théorème 20, il reste encore à démontrer les égalités (4.97.c) et (4.97.d). Soit $\psi = \psi(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t) \in \mathcal{D}\big([0,T) \times \mathbb{R}^2; \mathcal{C}^\infty_\#\big([0,2\pi]\big)\big)$. Alors, en multipliant les équations (4.91) par $\psi(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t)$, et en intégrant sur $[0,T) \times \mathbb{R}^2$, nous obtenons

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, \psi\big(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \to \int_0^{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, \psi(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\, d\tau\,, \tag{4.147}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, \psi\big(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \to \int_0^{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, \psi(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\, d\tau\,, \tag{4.148}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}, t)\, \psi\big(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \to \int_0^{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, \psi(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\, d\tau\,, \tag{4.149}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathcal{S}} f^\epsilon\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\, \sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\, \sin\alpha, k, \alpha, t\big)\, dk\, d\alpha \right) \psi\big(\tilde{\mathbf{x}}, \frac{t}{\epsilon}, t\big)\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt \\ &\to \int_0^{2\pi} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{S}} F\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\, \sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\, \sin\alpha, k, \alpha, \tau, t\big)\, \psi(\tilde{\mathbf{x}}, \tau, t)\, dk\, d\alpha\, d\tilde{\mathbf{x}}\, dt\, d\tau\,, \end{aligned} \tag{4.150}$$

quitte à extraire des sous-suites de $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$, $(\tilde{\phi}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$. Enfin, étant donné que $\tilde{n}_e$ ne dépend pas de ϵ, il est évident que $\tilde{n}_e$ converge à 2 échelles dans $L^\infty\big(0,T; L^\infty_\#\big([0,2\pi]; L^{3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)$ vers $\frac{1}{2\pi}\, \tilde{n}_e$, et converge faiblement-* vers $\tilde{n}_e$ dans $L^\infty\big(0,T; L^{3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$. En rassemblant ces résultats, nous obtenons finalement les équations (4.97.c) et (4.97.d), ce qui achève la démonstration du théorème 20.

□

2.3 Quelques remarques sur le nouveau modèle limite 2-échelles

Nous avons donc proposé une nouvelle expression du modèle limite 2-échelles d'E. Frénod et E. Sonnendrücker en nous basant sur les mêmes hypothèses sur $\tilde{f}_0$ et $\tilde{n}_e$ que celles du théorème 18. La première remarque que nous pouvons faire est que l'énergie cinétique adimensionnée k est un invariant adiabatique de ce nouveau modèle. En effet, en notant $\mathbf{X}$, K, et A les caractéristiques associées aux variables $\mathbf{x}$, k et α pour l'équation de transport (4.97.a), nous constatons que K vérifie l'équation différentielle

$$\partial_t K(t) = 0\,. \tag{4.151}$$

Par conséquent $|\tilde{\mathbf{v}}^\perp|^2 = 2k$ est un invariant adiabatique du modèle (4.97), ce qui rejoint les résultats constatés par T.-S. Hahm, A. Brizard, W.-W. Lee, R.-G. Littlejohn *et al.* (voir [7, 8], [43, 44], [47]) quant à l'invariance adiabatique du moment magnétique μ, tel qu'il est défini en (4.4).

D'un point de vue numérique, nous pouvons également noter qu'il est possible de construire un algorithme de splitting de Strang sans que cela n'altère le caractère conservatif de l'équation de transport (4.97.a) : en effet, étant donné que les termes de transport $\langle \mathcal{E}_1 \rangle$, $\langle \mathcal{E}_2 \rangle$ et $\langle \mathcal{F}_\alpha \rangle$ ne dépendent pas de α, nous avons

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathcal{E}^\perp \rangle = \partial_\alpha \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle = 0\,. \tag{4.152}$$

Par conséquent, il est possible de remplacer la résolution de l'équation de transport

$$\partial_t G + \langle \mathcal{E}^\perp \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G + \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle\, \partial_\alpha G = 0\,, \tag{4.153}$$

et la nécessité de résoudre un système différentiel 3D de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{X}(t) & = & \langle \mathcal{E}^\perp \rangle \big(\mathbf{X}(t), k, t\big)\,, \\ \partial_t A(t) & = & \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle \big(\mathbf{X}(t), k, t\big)\,, \\ \mathbf{X}(s) & = & \mathbf{x}\,, \\ A(s) & = & \alpha\,, \end{array} \right. \tag{4.154}$$

par la résolution successive de

$$\partial_t G + \langle \mathcal{E}^\perp \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G = 0\,, \tag{4.155}$$

et

$$\partial_t G + \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle\, \partial_\alpha G = 0\,, \tag{4.156}$$

et donc la résolution de systèmes différentiels 2D et 1D de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{X}(t) & = & \langle \mathcal{E}^\perp \rangle \big(\mathbf{X}(t), k, t\big)\,, \\ \mathbf{X}(s) & = & \mathbf{x}\,, \end{array} \right. \tag{4.157}$$

pour l'équation (4.155) et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t A(t) & = & \langle \mathcal{F}_\alpha \rangle \big(\mathbf{x}, k, t\big)\,, \\ A(s) & = & \alpha\,, \end{array} \right. \tag{4.158}$$

pour l'équation (4.156).

Cette propriété est un atout numérique que l'équation de transport (4.19.a) ne présente pas. Rappelons qu'il s'agit de l'équation suivante :

$$\partial_t \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) + \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}} \tilde{G}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) = 0\,, \tag{4.159}$$

avec $\tilde{\mathbf{A}}$ défini par

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}, t) = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(-\sigma)\, \tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big)\, d\sigma \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} R(-\sigma)\, \tilde{\mathcal{E}}\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big)\, d\sigma \end{array} \right). \tag{4.160}$$

En développant les différents termes de la somme $\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$, nous avons

$$\begin{aligned} &\partial_{\tilde{y}_1} \int_0^{2\pi} \Big[-\sin\sigma\, \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) + (1 - \cos\sigma)\, \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma \\ &\quad = \int_0^{2\pi} \Big[-\sin\sigma\, \partial_{\tilde{x}_1} \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) + (1 - \cos\sigma)\, \partial_{\tilde{x}_1} \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma\,, \end{aligned} \tag{4.161}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{\tilde{y}_2} \int_0^{2\pi} \Big[(\cos\sigma - 1)\, \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) - \sin\sigma\, \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma \\ &\quad = \int_0^{2\pi} \Big[(\cos\sigma - 1)\, \partial_{\tilde{x}_2} \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) - \sin\sigma\, \partial_{\tilde{x}_2} \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma\,, \end{aligned} \tag{4.162}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{\tilde{u}_1} \int_0^{2\pi} \Big[\cos\sigma\, \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) - \sin\sigma\, \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma \\ &\qquad = \int_0^{2\pi} \Big[\cos\sigma\, \sin\sigma\, \partial_{\tilde{x}_1} \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \\ &\qquad\quad + (\cos^2\sigma - \sin^2\sigma - \cos\sigma)\, \partial_{\tilde{x}_2} \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \\ &\qquad\qquad + (\sin\sigma - \sin\sigma\, \cos\sigma)\, \partial_{\tilde{x}_2} \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma\,, \end{aligned} \tag{4.163}$$

et

$$\begin{aligned} &\partial_{\tilde{u}_2} \int_0^{2\pi} \Big[\sin\sigma\, \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) + \cos\sigma\, \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma \\ &\qquad = \int_0^{2\pi} \Big[(\sin\sigma - \cos\sigma\, \sin\sigma)\, \partial_{\tilde{x}_1} \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \\ &\qquad\quad + (\sin^2\sigma - \cos^2\sigma + \cos\sigma)\, \partial_{\tilde{x}_2} \tilde{\mathcal{E}}_1\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \\ &\qquad\qquad + \sin\sigma\, \cos\sigma\, \partial_{\tilde{x}_2} \tilde{\mathcal{E}}_2\big(\tilde{\mathbf{y}} + \mathcal{R}(\sigma)\, \tilde{\mathbf{u}}, \sigma, t\big) \Big]\, d\sigma\,. \end{aligned} \tag{4.164}$$

Il est alors évident qu'il est impossible d'écrire

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_2 \,, \\ \nabla_{\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1 = \nabla_{\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{u}}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2 = 0 \,, \end{cases} \tag{4.165}$$

à moins d'avoir $\tilde{\mathbf{A}}_1 = 0$ ou $\tilde{\mathbf{A}}_2 = 0$.

2.4 Construction du système limite faible-*

Nous avons démontré dans le paragraphe précédent que, quitte à extraire des sous-suites, la suite $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge à 2-échelles vers une fonction F dans $L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)\big)$ et que $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ converge à 2 échelles vers $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;L^\infty_\#\big([0,2\pi];W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)\big)^2$. Cependant, notre objectif initial est la résolution d'un système d'équations n'impliquant que les limites faibles-* des suites $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ dont l'existence est prouvée grâce à un corollaire direct du théorème 20 :

Corollaire 24. *Quitte à extraire des sous-suites,*

- *f^ϵ converge faiblement-* vers une fonction f dans $L^\infty\big(0,T;L^p_{\mathcal{P}}(\Omega)\big)$ définie par*

$$f(\mathbf{x},k,\alpha,t) = \int_0^{2\pi} F(\mathbf{x},k,\alpha,\tau,t)\,d\tau \,, \tag{4.166}$$

- *$\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ converge faiblement-* vers une fonction $\tilde{\mathbf{E}}$ dans $\big(L^\infty\big(0,T;W^{1,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)\big)^2$ définie par*

$$\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}},t) = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,d\tau \,, \tag{4.167}$$

- *$\tilde{\phi}^\epsilon$ converge faiblement-* vers une fonction $\tilde{\phi}$ dans $L^\infty\big(0,T;W^{2,3/2}(\mathbb{R}^2)\big)$ définie par*

$$\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}},t) = \int_0^{2\pi} \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}},\tau,t)\,d\tau \,. \tag{4.168}$$

En se basant sur des méthodes de compacité et des hypothèses plus fortes que celles du théorème 20, M. Bostan a démontré dans [6] des résultats de convergence faible-* sur $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et a également établi un système d'équations de la forme (4.45) vérifié par f. Ici, nous proposons d'aboutir à ce modèle limite faible-* en n'utilisant que les hypothèses du théorème 20, et en nous basant sur les résultats de convergence 2-échelles obtenus dans le paragraphe 2.2 et sur le corollaire 24 :

Théorème 25. *Il existe une fonction $g \in L^\infty\big(0,T;L^p(\Gamma)\big)$ telle que*

$$f(\mathbf{x},k,\alpha,t) = \frac{1}{2\pi}\,g(\mathbf{x},k,t)\,, \qquad \forall\,(\mathbf{x},k,\alpha,t) \in \Omega\times[0,T)\,, \tag{4.169}$$

où g vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t g + \langle \mathcal{E}^\perp\rangle \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g = 0 \,, \\ g(\mathbf{x},k,t=0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(\mathbf{x},k,\alpha)\,d\alpha \,, \\ \langle\mathcal{E}\rangle(\mathbf{x},k,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}\big(x_1 - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2 + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\,d\alpha \,, \\ -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}},t) \,, \\ -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}},t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{S}} g\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, t\big)\,dk\,d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}}) \,. \end{cases} \tag{4.170}$$

Démonstration. Grâce à la relation (4.95) entre F et G, nous constatons que $f = f(\mathbf{x}, k, \alpha, t)$ ne dépend pas de α. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha f(\mathbf{x}, k, \alpha, t) &= \partial_\alpha \int_0^{2\pi} F(\mathbf{x}, k, \alpha, \tau, t)\, d\tau \\
&= \partial_\alpha \int_0^{2\pi} G(\mathbf{x}, k, \alpha + \tau, t)\, d\tau \\
&= \partial_\alpha \int_0^{2\pi} G(\mathbf{x}, k, \tau, t)\, d\tau \\
&= 0\,.
\end{aligned} \tag{4.171}$$

Par ailleurs, grâce au lemme 23, nous savons que les fonctions $\langle \mathcal{E} \rangle$ et $\langle \mathcal{F}_\alpha \rangle$ définies dans le théorème 20 ne dépendent que de $\mathbf{x}$, k et t. De ce fait, en intégrant l'équation (4.97.a) en α sur $[0, 2\pi]$, nous obtenons

$$\partial_t \int_0^{2\pi} G(\mathbf{x}, k, \alpha, t)\, d\alpha + \langle \mathcal{E}^\perp \rangle(\mathbf{x}, k, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \int_0^{2\pi} G(x, y, k, \alpha, t)\, d\alpha = 0\,, \tag{4.172}$$

que nous pouvons reformuler de la façon suivante :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, k, t) + \langle \mathcal{E}^\perp \rangle(\mathbf{x}, k, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, k, t) = 0\,. \tag{4.173}$$

En divisant cette équation par 2π, nous obtenons l'équation (4.170.a). De la même façon, en intégrant l'équation (4.97.b) en α, nous avons

$$f(\mathbf{x}, k, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\mathbf{x}, k, \alpha)\, d\alpha\,, \tag{4.174}$$

et donc (4.170.b).
En intégrant l'équation (4.97.c) en τ sur $[0, 2\pi]$, nous obtenons

$$-\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)\,. \tag{4.175}$$

De la même façon, en intégrant l'équation (4.97.d) en τ et en faisant un changement de variables, nous avons

$$\begin{aligned}
-\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{S}} G\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\, \sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\, \cos\alpha, k, \alpha + \tau, t\big)\, dk\, d\alpha\, d\tau - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}}) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{S}} G\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\, \sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\, \cos\alpha, k, \tau, t\big)\, dk\, d\alpha\, d\tau - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}}) \\
&= \int_{\mathcal{S}} f\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\, \sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\, \cos\alpha, k, t\big)\, dk\, d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} g\big(\tilde{x}_1 + \sqrt{2k}\, \sin\alpha, \tilde{x}_2 - \sqrt{2k}\, \cos\alpha, k, t\big)\, dk\, d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,.
\end{aligned} \tag{4.176}$$

Enfin, le lemme 23 nous indique que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{E}(\mathbf{x}, k, \alpha - \tau, \tau, t)\, d\tau$ ne dépend pas de α. Alors

$$\langle \mathcal{E} \rangle(x, y, k, t) = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{E}}\big(x - \sqrt{2k}\, \sin(\alpha - \tau), y + \sqrt{2k}\, \cos(\alpha - \tau), \tau, t\big)\, d\tau\,, \tag{4.177}$$

pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$. Nous pouvons alors écrire

$$\langle \mathcal{E} \rangle(\mathbf{x}, k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{E}}\big(x_1 - \sqrt{2k}\, \sin(\alpha - \tau), x_2 + \sqrt{2k}\, \cos(\alpha - \tau), \tau, t\big)\, d\tau\, d\alpha\,. \tag{4.178}$$

Alors, en faisant un changement de variables dans cette intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{E}\rangle(\mathbf{x},k,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\mathcal{E}}\big(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\tau,t\big)\,d\tau\,d\alpha\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\mathbf{E}}\big(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,t\big)\,d\alpha\,,\end{aligned} \tag{4.179}$$

ce qui conclut la démonstration du théorème.

□

3 Méthode numérique 2-échelles

Dans cette partie, nous présentons la méthode semi-lagrangienne 2-échelles permettant de valider numériquement la solution $(f,\tilde{\mathbf{E}})$ du modèle (4.169)-(4.170) comme étant la limite faible-* d'une suite $(f^\epsilon,\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ où, pour tout $\epsilon>0$ fixé, $(f^\epsilon,\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ est solution du modèle

$$\begin{cases} f^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)=\tilde{f}^\epsilon\big(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\sqrt{2k}\,\sin\alpha,t\big)\,,\\ \partial_t\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)+\dfrac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)+\Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)+\dfrac{\tilde{\mathbf{v}}^\perp}{\epsilon}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)=0\,,\\ \tilde{f}^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t=0)=\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\,,\\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)=-\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,,\quad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)\,d\tilde{\mathbf{v}}-\tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,,\end{cases} \tag{4.180}$$

Pour cela, l'objectif sera d'approcher $(f,\tilde{\mathbf{E}})$ par une suite $(\tilde{f}_h^\epsilon,\tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon)$, où f_h^ϵ est définie par

$$f_h^\epsilon(\mathbf{x},k,\alpha,t)=\tilde{f}_h^\epsilon\big(x_1-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, x_2+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\sqrt{2k}\,\sin\alpha,t\big)\,, \tag{4.181}$$

et où $(\tilde{f}_h^\epsilon,\tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon)$ est une approximation de la solution du modèle (4.180.b)-(4.180.e).

Grâce aux remarques que nous avons pu faire dans le chapitre précédent, et comme cela a été évoqué dans l'introduction du présent chapitre, le choix d'une discrétisation semi-lagrangienne en arrière de l'équation de transport (4.170.a) impliquerait la résolution numérique d'un grand nombre de problèmes de points fixes. En effet, en notant $\mathbf{X}=(X_1,X_2)$ les caractéristiques associées aux coordonnées $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ du centre-guide, une méthode semi-lagrangienne en arrière appliquée à (4.170.a) s'écrit

$$g(\mathbf{x},k,t_{n+1})=g\big(\mathbf{X}\big(t;(\mathbf{x},k),t_{n+1}\big),k,t\big)\,, \tag{4.182}$$

pour un instant $t\le t_{n+1}$, où $t\mapsto\mathbf{X}\big(t;(\mathbf{x},k),t_{n+1}\big)$ est la solution de

$$\begin{cases}\partial_t\mathbf{X}(t) &= \langle\mathcal{E}^\perp\rangle\big(\mathbf{X}(t),k,t\big)\,,\\ \mathbf{X}(t_{n+1}) &= \mathbf{x}\,.\end{cases} \tag{4.183}$$

Comme dans le chapitre précédent, une solution envisageable serait de poser $t=t_{n-1}$, et d'approcher $\mathbf{X}\big(t;(\mathbf{x},k),t_{n+1}\big)$ par

$$\mathbf{X}\big(t;(\mathbf{x},k),t_{n+1}\big)\approx\mathbf{x}-2\mathbf{d}^n(\mathbf{x},k)\,, \tag{4.184}$$

où $\mathbf{d}^n(\mathbf{x},k)$ est solution du problème de point fixe suivant :

$$\mathbf{d}^n(\mathbf{x},k)=\Delta t\,\langle\mathcal{E}^\perp\rangle\big(\mathbf{x}-\mathbf{d}^n(\mathbf{x},k),k,t_n\big)\,. \tag{4.185}$$

Même s'il s'agit de problèmes de points fixes 2D, il faut tenir compte des variables k et α qui sont nécessaires au calcul de $\langle\mathcal{E}\rangle$, ce qui augmente considérablement la complexité globale de la méthode numérique. Il est alors préférable d'envisager une autre approche, celle d'un schéma semi-lagrangien *en avant*. Cependant, à ce jour, une telle méthode numérique n'a été implémentée que sur un modèle de type Vlasov 2D dans l'espace des phases (voir Crouseilles *et al.* [16]), mais pas

encore sur un modèle de type Vlasov 4D dans l'espace des phases. Par conséquent, nous choisissons de tester au préalable une telle méthode numérique dans un cadre mathématique connu, comme celui du modèle de Vlasov-Poisson 2D :

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0\,, \\ f_{|t=0} = f_0\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \phi = \mathbf{E}\,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}} \phi = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\mathbf{v} - 1\,. \end{cases} \tag{4.186}$$

En effet, plusieurs articles furent consacrés à l'étude de ce modèle comme ceux de N. Crouseilles *et al.* [14], ou de F. Filbet et E. Sonnendrücker [21, 22], offrant ainsi un cadre de travail relativement confortable, ainsi que des résultats numériques fiables sur lesquels nous pourrons nous appuyer.

Dans un premier temps, nous rappellerons le principe de base d'une méthode semi-lagrangienne en avant, et nous effectuerons un test préliminaire de cette méthode sur un modèle de Vlasov-Poisson 2D de la forme (4.186) afin de nous assurer que les techniques mises en oeuvre sont efficaces. Puis nous discrétiserons les modèles (4.169)-(4.170) et (4.180) à l'aide de méthodes semi-lagrangiennes en avant. Enfin, nous proposerons un cas test dans lequel nous connaissons la solution exacte $(f, \tilde{\mathbf{E}})$ du modèle (4.169)-(4.170), l'objectif étant de vérifier si la suite d'approximations $(f_h^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ converge vers $(f, \tilde{\mathbf{E}})$.

3.1 Principe de la méthode semi-lagrangienne en avant

Nous considérons l'équation de transport suivante :

$$\partial_t f + \mathbf{U} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = 0\,, \tag{4.187}$$

où $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et où $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et vérifie $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{U} = 0$. Rappelons que le principe d'une méthode semi-lagrangienne repose sur le fait que la fonction f est stationnaire le long des courbes caractéristiques associées à l'équation (4.187), c'est-à-dire

$$f\big(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, s), t\big) = f(\mathbf{x}, s)\,, \tag{4.188}$$

où $t \mapsto \mathbf{X}(t; \mathbf{x}, s)$ est la solution de

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{X}(t) &= \mathbf{U}\big(\mathbf{X}(t), t\big)\,, \\ \mathbf{X}(s) &= \mathbf{x}\,. \end{cases} \tag{4.189}$$

Une méthode semi-lagrangienne en arrière consiste à remonter ces caractéristiques de l'instant t_{n+1} jusqu'à un instant $t < t_{n+1}$ en posant

$$f\big(\mathbf{x}, t_{n+1}\big) = f\big(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, t_{n+1}), t\big)\,, \qquad t < t_{n+1}\,, \tag{4.190}$$

et donc résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{X}(t) &= \mathbf{U}\big(\mathbf{X}(t), t\big)\,, \\ \mathbf{X}(t_{n+1}) &= \mathbf{x}\,, \end{cases} \tag{4.191}$$

afin de calculer $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, t_{n+1})$. Comme nous avons pu le voir dans le chapitre précédent, $\mathbf{U}$ n'est connu qu'aux instants t_k dans la plupart des cas rencontrés, et cela complique singulièrement le travail en nécessitant parfois la résolution de problèmes de points fixes afin d'obtenir une méthode d'ordre 2 en temps.

A contrario, une méthode semi-lagrangienne en avant consiste à avancer le long des caractéristiques de l'instant t_n jusqu'à l'instant t_{n+1}, c'est-à-dire utiliser l'égalité

$$f\big(\mathbf{x}, t_n\big) = f\big(\mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}, t_n), t_{n+1}\big)\,. \tag{4.192}$$

Par conséquent, nous devons résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{X}(t) & = & \mathbf{U}\big(\mathbf{X}(t), t\big)\,, \\ \mathbf{X}(t_n) & = & \mathbf{x}\,, \end{array} \right. \tag{4.193}$$

afin de calculer $\mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}, t_n)$, et un tel système différentiel peut être résolu à l'aide d'une méthode numérique classique (Runge-Kutta, méthodes multi-pas, ...).

Principe de base

Considérons un maillage $(\mathbf{x}_i)_{i\in I}$ de Ω uniforme où le volume d'une maille dans la direction x_k est Δx_k, ainsi qu'une suite d'instants $(t_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$. Alors, en notant f^n l'approximation obtenue à l'instant t_n par la méthode semi-lagrangienne en avant, une itération de cette méthode se déroule de la façon suivante :

1. Pour $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [t_n, t_{n+1}]$, nous définissons la fonction f_h par

$$f_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i\in I} \omega_i^n\, \psi\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_i, t_n)\big)\,, \tag{4.194}$$

   où ψ est une fonction de forme vérifiant les propriétés suivantes :
   - $\psi(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$,
   - ψ est à support compact dans Ω,
   - $\displaystyle\int_\Omega \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$,
   - ψ est paire en chaque composante de $\mathbf{x}$,
   - $\Delta x_1 \ldots \Delta x_n \displaystyle\sum_{i\in I} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 1$.

   En supposant que f^n est connu en chaque point $\mathbf{x}_i$, nous calculons les poids ω_i^n en posant

$$\forall\, k\,, \qquad f^n(\mathbf{x}_k) = f_h(\mathbf{x}_k, t_n) = \sum_{i\in I} \omega_i^n\, \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)\,. \tag{4.195}$$

   Nous avons ainsi un système linéaire de taille $\#(I)$ à résoudre, dont les inconnues sont les ω_i^n.

2. Nous résolvons le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{X}(t) & = & \mathbf{U}\big(\mathbf{X}(t), t\big)\,, \\ \mathbf{X}(t_n) & = & \mathbf{x}_i\,, \end{array} \right. \tag{4.196}$$

   pour chaque point $\mathbf{x}_i$, ce qui permet d'obtenir les fonctions $t \mapsto \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_i, t_n)$. S'il n'est pas possible de résoudre ce système explicitement, nous pouvons en approcher numériquement la solution avec une méthode classique d'ordre supérieur ou égal à 2.

3. Une fois que les $\mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}_i, t_n)$ et les ω_i^n sont calculés, nous calculons les $f^{n+1}(\mathbf{x}_k)$ en évaluant (4.194) en $(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x}_k, t_{n+1})$:

$$f^{n+1}(\mathbf{x}_k) = f_h(\mathbf{x}_k, t_{n+1}) = \sum_{i\in I} \omega_i^n\, \psi\big(\mathbf{x}_k - \mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}_i, t_n)\big)\,. \tag{4.197}$$

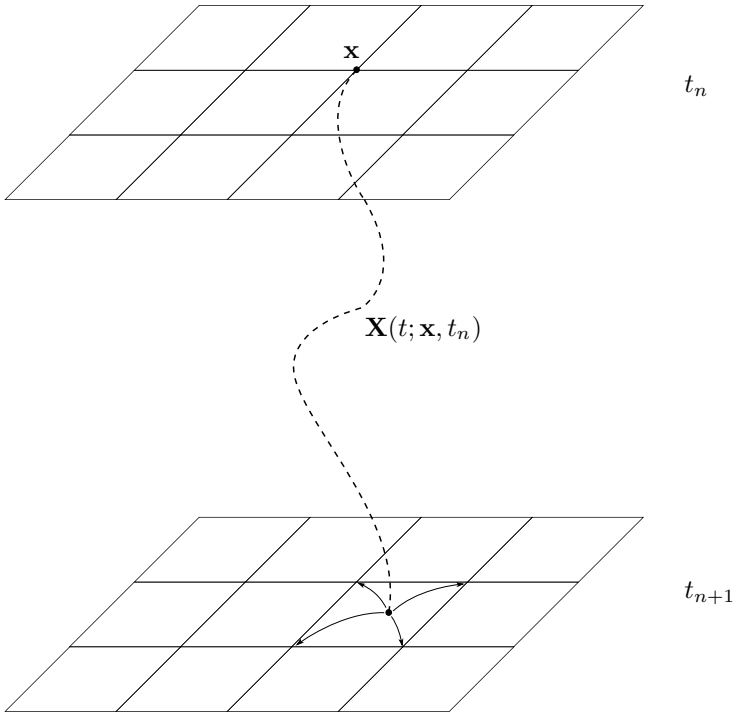


FIGURE 4.1 – Méthode semi-lagrangienne en avant.

Le principe de cette méthode est alors similaire à celui d'une méthode Particle-In-Cell (PIC) : en effet, il s'agit de considérer les caractéristiques $\mathbf{X}$ passant aux noeuds du maillage en t_n, et de suivre ces courbes dans $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq t_n}$ jusqu'à l'instant t_{n+1}, puis redéposer les contributions ainsi portées par ces macro-particules sur les noeuds du maillage, comme cela est illustré dans la Figure 3.1.

Approximation numérique des caractéristiques

Dans la plupart des cas, il est impossible de résoudre le système différentiel (4.196) de façon explicite. Par conséquent, il est nécessaire d'approcher $\mathbf{X}(t_{n+1};\mathbf{x}_i,t_n)$ en résolvant numériquement (4.196) à l'aide d'un schéma d'ordre supérieur ou égal à 2. Par la suite, nous utiliserons la méthode de Runge qui permet d'obtenir l'approximation suivante :

$$\mathbf{X}(t_{n+1};\mathbf{x}_i,t_n) \approx \mathbf{x}_i + \Delta t\, \mathbf{U}\big(\mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2}\, \mathbf{U}(\mathbf{x}_i,t_n), t_{n+1/2}\big)\,, \tag{4.198}$$

où $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. A l'image des modèles (4.73), (4.170), ou (4.186), $\mathbf{U}$ n'est parfois pas connu à l'instant intermédiaire $t_{n+1/2}$, et il est alors nécessaire de le calculer à cet instant afin de définir correctement l'approximation (4.198). Pour cela, nous reconstruisons une approximation de la fonction f en $t_{n+1/2}$ à partir de laquelle nous pourrons approcher $\mathbf{U}(\cdot,t_{n+1/2})$. Pour cela, nous procédons de la façon suivante :

1. Nous définissons la fonction $f_h : \Omega \times [t_n,t_{n+1}] \to \mathbb{R}$ par

$$f_h(\mathbf{x},t) = \sum_{i\in I} \omega_i^n\, \psi\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t;\mathbf{x}_i,t_n)\big)\,, \tag{4.199}$$

où les poids ω_i^n sont calculés en résolvant le système linéaire constitué des équations de la forme

$$\forall\, k \in I\,, \qquad f^n(\mathbf{x}_k) = f_h(\mathbf{x}_k,t_n) = \sum_{i\in I} \omega_i^n\, \psi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)\,. \tag{4.200}$$

2. Nous reconstruisons une approximation de $f^{n+1/2}$ en posant

$$f^{n+1/2}(\mathbf{x}_k) = f_h(\mathbf{x}_k, t_{n+1/2}) = \sum_{i \in I} \omega_i^n \, \psi\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t_{n+1/2}; \mathbf{x}_i, t_n)\big) \,, \tag{4.201}$$

où $\mathbf{X}(t_{n+1/2}; \mathbf{x}_i, t_n)$ est approché à l'aide d'une méthode d'Euler appliquée à (4.196) :

$$\mathbf{X}(t_{n+1/2}; \mathbf{x}_i, t_n) \approx \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \, \mathbf{U}(\mathbf{x}_i, t_n) \,. \tag{4.202}$$

3. Nous calculons une approximation de $\mathbf{U}(\cdot, t_{n+1/2})$ à partir des $f^{n+1/2}(\mathbf{x}_k)$, et nous calculons en particulier les $\mathbf{U}\big(\mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \, \mathbf{U}(\mathbf{x}_i, t_n), t_{n+1/2}\big)$.
4. Nous calculons l'approximation de $\mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}_i, t_n)$ donnée par

$$\mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}_i, t_n) \approx \mathbf{x}_i + \Delta t \, \mathbf{U}\big(\mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \, \mathbf{U}(\mathbf{x}_i, t_n), t_{n+1/2}\big) \,. \tag{4.203}$$

5. Nous calculons enfin $f^{n+1}(\mathbf{x}_k)$ en posant

$$f^{n+1}(\mathbf{x}_k) = f_h(\mathbf{x}_k, t_{n+1}) = \sum_{i \in I} \omega_i^n \, \psi\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t_{n+1}; \mathbf{x}_i, t_n)\big) \,. \tag{4.204}$$

Splitting de Strang

Tout comme dans le chapitre précédent, lorsque nous travaillons sur une équation de transport en n dimension, le calcul des poids ω_i^n peut devenir extrêmement coûteux en temps de calcul lorsque n devient grand. De plus, si nous sommes amenés à résoudre le système différentiel nD (4.196) à l'aide d'une méthode numérique d'ordre 2 ou plus, il est parfois nécessaire de reconstruire la fonction f à des instants intermédiaires dans $[t_n, t_{n+1}]$, ce qui ajoute un temps de calcul supplémentaire important.

Supposons que l'équation de transport (4.187) puisse s'écrire sous la forme

$$\partial_t f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{U}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{U}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_2} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = 0 \,, \tag{4.205}$$

avec $\mathbf{x}_i \in \Omega_i$,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \,, \tag{4.206}$$

et $\nabla_{\mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{U}_1 = \nabla_{\mathbf{x}_2} \cdot \mathbf{U}_2 = 0$. La solution exacte de cette équation de transport vérifie alors

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_n) = f\big(\mathbf{X}_1\big(t_{n+1}; (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_n\big), \mathbf{X}_2\big(t_{n+1}; \mathbf{x}_2, t_n\big), t_{n+1}\big) \,, \tag{4.207}$$

où les fonctions $t \mapsto \mathbf{X}_1\big(t; (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_n\big)$ et $t \mapsto \mathbf{X}_2\big(t; (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_n\big)$ consistuent la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{X}_1(t) & = & \mathbf{U}_1\big(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), t\big) \,, \\ \partial_t \mathbf{X}_2(t) & = & \mathbf{U}_2\big(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), t\big) \,, \\ \mathbf{X}_1(t_n) & = & \mathbf{x}_1 \,, \\ \mathbf{X}_2(t_n) & = & \mathbf{x}_2 \,. \end{array} \right. \tag{4.208}$$

Comme nous l'avions fait dans le cadre d'une méthode semi-lagrangienne en arrière, nous pouvons utiliser un algorithme de splitting de Strang basé sur une discrétisation semi-lagrangienne en avant afin d'approcher $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1})$:

1. Nous résolvons

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{U}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = 0 \,, \\ g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_n) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_n) \,, \end{array} \right. \tag{4.209}$$

sur un demi-pas de temps. La solution exacte f_* de cette équation vérifie alors

$$\begin{aligned} f_*\big(\mathbf{X}_1\big(t_{n+1/2};(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_n\big),t_{n+1/2}\big) &= f_*(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_n) \\ &= f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_n)\,, \end{aligned} \tag{4.210}$$

étant donné que $\nabla_{\mathbf{x}_1}\cdot\mathbf{U}_1=0$. Dans cette équation, $t\mapsto\mathbf{X}_1\big(t;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_n\big)$ est la solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\mathbf{X}_1(t) &=& \mathbf{U}_1\big(\mathbf{X}_1(t),\mathbf{x}_2,t\big)\,, \\ \mathbf{X}_1(t_n) &=& \mathbf{x}_1\,. \end{array}\right. \tag{4.211}$$

Afin de calculer $f_*(\cdot,\cdot,t_{n+1/2})$ aux noeuds $(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j})$ du maillage du domaine de simulation, nous définissons les fonctions $f_j^n:\Omega_1\times[t_n,t_{n+1/2}]\to\mathbb{R}$ par

$$f_j^n(\mathbf{x}_1,t)=\sum_i\omega_{i,j}^n\,\psi_{\mathbf{x}_1}\big(\mathbf{x}_1-\mathbf{X}_1\big(t;(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j}),t_n\big)\big)\,, \tag{4.212}$$

où les poids $\omega_{i,j}^n$ sont calculés en résolvant le système linéaire suivant :

$$\forall\,i\,,\forall\,j\,,\qquad f(\mathbf{x}_{1,k},\mathbf{x}_{2,j},t_n)=f_j^n(\mathbf{x}_{1,i},t_n)=\sum_i\omega_{i,j}^n\,\psi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{1,k}-\mathbf{x}_{1,i})\,. \tag{4.213}$$

Puis nous approchons $f_*(\mathbf{x}_{1,k},\mathbf{x}_{2,j},t_{n+1/2})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_*(\mathbf{x}_{1,k},\mathbf{x}_{2,j},t_{n+1/2}) &\approx f_j^n(\mathbf{x}_{1,i},t_{n+1/2}) \\ &\approx \sum_i\omega_{i,j}^n\,\psi_{\mathbf{x}_1}\big(\mathbf{x}_{1,k}-\mathbf{X}_1\big(t_{n+1/2};(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j}),t_n\big)\big)\,, \end{aligned} \tag{4.214}$$

où $t\mapsto\mathbf{X}_1\big(t;(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j}),t_n\big)$ est la solution de (4.211) en $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j})$.

2. Nous résolvons ensuite

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)+\mathbf{U}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)\cdot\nabla_{\mathbf{x}_2}g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)=0\,, \\ g(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_n)=f_*(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1/2})\,, \end{array}\right. \tag{4.215}$$

sur un pas de temps. La solution exacte f_{**} de cette équation vérifie alors

$$\begin{aligned} f_{**}\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2\big(t_{n+1};(\mathbf{x}_1,t_n\big),t_{n+1}\big) &= f_{**}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_n) \\ &= f_*(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_{n+1/2})\,, \end{aligned} \tag{4.216}$$

étant donné que $\nabla_{\mathbf{x}_2}\cdot\mathbf{U}_2=0$. Dans cette équation, $t\mapsto\mathbf{X}_2\big(t;(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),t_n\big)$ est la solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\mathbf{X}_2(t) &=& \mathbf{U}_2\big(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2(t),t\big)\,, \\ \mathbf{X}_2(t_n) &=& \mathbf{x}_2\,. \end{array}\right. \tag{4.217}$$

Afin de calculer $f_{**}(\cdot,\cdot,t_{n+1})$ aux noeuds $(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j})$ du maillage du domaine de simulation, nous définissons les fonctions $f_i^*:\Omega_2\times[t_n,t_{n+1}]\to\mathbb{R}$ par

$$f_i^*(\mathbf{x}_2,t)=\sum_j\omega_{i,j}^*\,\psi_{\mathbf{x}_2}\big(\mathbf{x}_2-\mathbf{X}_2\big(t;(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,j}),t_n\big)\big)\,, \tag{4.218}$$

où les poids $\omega_{i,j}^*$ sont calculés en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \forall\,i\,,\forall\,j\,,\qquad f_*(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,l},t_{n+1/2}) &= f_{**}(\mathbf{x}_{1,i},\mathbf{x}_{2,l},t_n) \\ &= f_i^*(\mathbf{x}_{2,l},t_n) \\ &= \sum_j\omega_{i,j}^*\,\psi_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_{2,l}-\mathbf{x}_{2,j})\,. \end{aligned} \tag{4.219}$$

Puis nous approchons $f_{**}(\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,l}, t_{n+1})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_{**}(\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,l}, t_{n+1}) &\approx f_i^*(\mathbf{x}_{2,l}, t_{n+1}) \\ &\approx \sum_j \omega_{i,j}^* \, \psi_{\mathbf{x}_2}\big(\mathbf{x}_{2,l} - \mathbf{X}_2\big(t_{n+1}; (\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j}), t_n\big)\big) \,, \end{aligned} \tag{4.220}$$

où $t \mapsto \mathbf{X}_2\big(t; (\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j}), t_n\big)$ est la solution de (4.217) en $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j})$.

3. Enfin, nous résolvons

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \mathbf{U}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = 0 \,, \\ g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1/2}) = f_{**}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1}) \,, \end{array} \right. \tag{4.221}$$

sur un demi-pas de temps. La solution exacte f_{***} de cette équation vérifie alors

$$\begin{aligned} f_{***}\big(\mathbf{X}_1\big(t_{n+1}; (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_{n+1/2}\big), t_{n+1}\big) &= f_{***}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1/2}) \\ &= f_{**}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1}) \,. \end{aligned} \tag{4.222}$$

Dans cette équation, $t \mapsto \mathbf{X}_1\big(t; (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), t_{n+1/2}\big)$ est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{X}_1(t) & = & \mathbf{U}_1\big(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{x}_2, t\big) \,, \\ \mathbf{X}_1(t_{n+1/2}) & = & \mathbf{x}_1 \,. \end{array} \right. \tag{4.223}$$

Afin de calculer $f_{***}(\cdot, \cdot, t_{n+1})$ aux noeuds $(\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j})$ du maillage du domaine de simulation, nous définissons les fonctions $f_j^{**} : \Omega_1 \times [t_{n+1/2}, t_{n+1}] \to \mathbb{R}$ par

$$f_j^{**}(\mathbf{x}_1, t) = \sum_i \omega_{i,j}^{**} \, \psi_{\mathbf{x}_1}\big(\mathbf{x}_1 - \mathbf{X}_1\big(t; (\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j}), t_{n+1/2}\big)\big) \,, \tag{4.224}$$

où les poids $\omega_{i,j}^{**}$ sont calculés en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \forall\, i \,, \forall\, j \,, \qquad f_{**}(\mathbf{x}_{1,k}, \mathbf{x}_{2,j}, t_{n+1}) &= f_{***}(\mathbf{x}_{1,k}, \mathbf{x}_{2,j}, t_{n+1/2}) \\ &= f_j^{**}(\mathbf{x}_{1,i}, t_{n+1/2}) \\ &= \sum_i \omega_{i,j}^{**} \, \psi_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{1,k} - \mathbf{x}_{1,i}) \,. \end{aligned} \tag{4.225}$$

Puis nous approchons $f_{***}(\mathbf{x}_{1,k}, \mathbf{x}_{2,j}, t_{n+1})$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_{***}(\mathbf{x}_{1,k}, \mathbf{x}_{2,j}, t_{n+1}) &\approx f_j^{**}(\mathbf{x}_{1,i}, t_{n+1}) \\ &\approx \sum_i \omega_{i,j}^{**} \, \psi_{\mathbf{x}_1}\big(\mathbf{x}_{1,k} - \mathbf{X}_1\big(t_{n+1}; (\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j}), t_{n+1/2}\big)\big) \,, \end{aligned} \tag{4.226}$$

où $t \mapsto \mathbf{X}_1\big(t; (\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j}), t_{n+1/2}\big)$ est la solution de (4.223) en $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_{1,i}, \mathbf{x}_{2,j})$.

4. Nous considérons finalement l'approximation de $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1})$ suivante :

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1}) \approx f_{***}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_{n+1}) \,. \tag{4.227}$$

S'il est possible de résoudre les systèmes différentiels (4.211), (4.217) et (4.223) de manière exacte, alors l'algorithme de splitting présenté ci-dessus permet de construire une approximation de $f(\cdot, \cdot, t_{n+1})$ à partir de $f(\cdot, \cdot, t_n)$ d'ordre 2 en t. Dans le cas contraire, nous pouvons tout de même construire une telle approximation d'ordre 2 en t à condition d'approcher les solutions de (4.211), (4.217) et (4.223) à l'aide de méthodes numériques d'ordre 2 ou plus.

3.2 Test préliminaire sur un modèle de Vlasov-Poisson 2D

Avant d'utiliser les techniques présentées ci-dessus pour discrétiser les modèles (4.169)-(4.170) et (4.180), il est recommandé de les tester dans un premier temps dans un cadre mathématique plus simple et mieux connu que celui du modèle de rayon de Larmor fini 2D. Nous choisissons donc d'effectuer quelques tests préliminaires sur le modèle de Vlasov-Poisson 2D suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0\,, \\ f(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v} - 1\,, \end{cases} \tag{4.228}$$

où $\mathbf{x} = (x,y) \in \Omega_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y) \in \Omega_{\mathbf{v}}$, où $\Omega_{\mathbf{x}}$ est un sous-espace borné de $\mathbb{R}^2$ et $\Omega_{\mathbf{v}}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$, et où f_0 est supposée vérifier

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}}\int_{\Omega_{\mathbf{x}}} f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{v} = 1\,. \tag{4.229}$$

Par ailleurs, nous pouvons inscrire cette phase de test préliminaire dans le prolongement des travaux de N. Crouseilles *et al.* détaillés dans [16] autour du comportement d'une méthode semi-lagrangienne en avant appliquée au modèle de Vlasov-Poisson 1D

$$\begin{cases} \partial_t f(x,v,t) + v\,\partial_x f(x,y,t) + E(x,t)\,\partial_v f(x,v,t) = 0\,, \\ f(x,v,0) = f_0(x,v)\,, \\ \partial_x E(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,v,t)\,dv - 1\,, \end{cases} \tag{4.230}$$

ainsi qu'au modèle centre-guide 2D

$$\begin{cases} \partial_t \rho(\mathbf{x},t) + \mathbf{E}^{\perp}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\rho(\mathbf{x},t) = 0\,, \\ \rho(\mathbf{x},0) = \rho_0(\mathbf{x})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)\,. \end{cases} \tag{4.231}$$

En effet, dans cet article, de résultats numériques ont permis de constater que la méthode semi-lagrangienne en avant permettait d'obtenir sur ces modèles des résultats comparables à ceux fournis par une méthode semi-lagrangienne en arrière (voir Sonnendrücker *et al.* [62]).

Présentation de la méthode numérique

Considérons les domaines de simulation suivants :

$$\Omega_{\mathbf{x}} = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]\,, \qquad \Omega_{\mathbf{v}} = [v_{x\,min}, v_{x\,max}] \times [v_{y_{min}}, v_{y_{max}}]\,, \tag{4.232}$$

ainsi que les maillages uniformes $M(\Omega_{\mathbf{x}}) = (x_i, y_j)_{i,j}$ et $M(\Omega_{\mathbf{v}}) = (v_{x\,k}, v_{y\,l})_{k,l}$, et supposons que f, $\mathbf{E}$ et ϕ soient périodiques sur $\Omega_{\mathbf{x}}$ et nuls aux bords de $\Omega_{\mathbf{v}}$. Nous considérons également les 4 fonctions de forme suivantes :

$$\begin{array}{rccl} \psi_x : & [x_{min}, x_{max}] & \to & \mathbb{R}\,, \\ & x & \mapsto & \psi_x(x) = \frac{1}{\Delta x}\,S\big(\frac{x}{\Delta x}\big)\,, \\ \psi_y : & [y_{min}, y_{max}] & \to & \mathbb{R}\,, \\ & y & \mapsto & \psi_y(y) = \frac{1}{\Delta y}\,S\big(\frac{y}{\Delta y}\big)\,, \\ \psi_{v_x} : & [v_{x\,min}, v_{x\,max}] & \to & \mathbb{R}\,, \\ & v_x & \mapsto & \psi_{v_x}(v_x) = \frac{1}{\Delta v_x}\,S\big(\frac{v_x}{\Delta v_x}\big)\,, \\ \psi_{v_y} : & [v_{y_{min}}, v_{y_{max}}] & \to & \mathbb{R}\,, \\ & v_y & \mapsto & \psi_{v_y}(v_y) = \frac{1}{\Delta v_y}\,S\big(\frac{v_y}{\Delta v_y}\big)\,, \end{array} \tag{4.233}$$

où $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y = y_{j+1} - y_j$, $\Delta v_x = v_{xk+1} - v_{xk}$, $\Delta v_y = v_{y_{l+1}} - v_{y_l}$, et où $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\big(2 - |x|\big)^3 & \text{si } |x| \in [1,2], \\ \frac{2}{3} - x^2 + \frac{|x|^3}{2} & \text{si } |x| \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.234}$$

Etant donné que $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0$, nous pouvons utiliser un algorithme de splitting de Strang sans altérer les propriétés de conservation du modèle (4.228) et remplacer la résolution numérique de l'équation de transport (4.228.a) par la résolution successive de

$$\partial_t g_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0\,, \tag{4.235}$$

et

$$\partial_t g_2 + \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} g_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0\,. \tag{4.236}$$

Les solutions exactes de ces équations de transport vérifient

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, s) = g_1\big(\mathbf{x} + (t-s)\,\mathbf{v}, \mathbf{v}, t\big)\,, \tag{4.237}$$

et

$$g_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, s) = g_2\big(\mathbf{x}, \mathbf{v} + (t-s)\,\mathbf{E}(\mathbf{x}, s), t\big)\,, \tag{4.238}$$

pour tous $t \geq s$. En effet, si nous couplons l'équation de transport (4.236) avec l'équation de Poisson (4.228.d), nous constatons que

$$-\partial_t \Delta_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t) = 0\,, \tag{4.239}$$

et donc que ϕ et $\mathbf{E}$ sont stationnaires sur l'intervalle $[s, t] \subset \mathbb{R}_+$.

En notant f^n l'approximation de $f(\cdot, \cdot, t_n)$ sur le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}}) \times M(\Omega_{\mathbf{v}})$, et $\mathbf{E}^n$ l'approximation de $\mathbf{E}(\cdot, t_n)$ sur le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})$, une itération de la méthode numérique se déroule de la façon suivante :

1. Supposons que f^n est connu sur $M(\Omega_{\mathbf{x}}) \times M(\Omega_{\mathbf{v}})$ et que $\mathbf{E}^n$ est connu sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})$. Nous définissons alors f^* sur $M(\Omega_{\mathbf{x}}) \times M(\Omega_{\mathbf{v}})$ par

$$\begin{aligned} & f^*(x_i, y_j, v_{xk}, v_{y_l}) \\ & \quad = \sum_{\alpha,\beta} \omega^n_{i,j,\alpha,\beta}\, \psi_{v_x}\big(v_{xk} - v_{x\alpha} - \frac{\Delta t}{2}\, E^n_x(x_i, y_j)\big)\, \psi_{v_y}\big(v_{y_l} - v_{y\beta} - \frac{\Delta t}{2}\, E^n_y(x_i, y_j)\big)\,, \end{aligned} \tag{4.240}$$

où, pour chaque couple (i, j), les poids $\omega^n_{i,j,\alpha,\beta}$ constituent la solution du système linéaire suivant :

$$\forall\, k, l\,, \qquad f^n(x_i, y_j, v_{xk}, v_{y_l}) = \sum_{\alpha,\beta} \omega^n_{i,j,\alpha,\beta}\, \psi_{v_x}(v_{xk} - v_{x\alpha})\, \psi_{v_y}(v_{y_l} - v_{y\beta})\,. \tag{4.241}$$

2. Nous effectuons une advection dans la direction $\mathbf{x}$ en définissant f^{**} sur $M(\Omega_{\mathbf{x}}) \times M(\Omega_{\mathbf{v}})$ par

$$f^{**}(x_i, y_j, v_{xk}, v_{y_l}) = \sum_{\alpha,\beta} \omega^*_{\alpha,\beta,k,l}\, \psi_x(x_i - x_\alpha - \Delta t\, v_{xk})\, \psi_y(y_j - y_\beta - \Delta t\, v_{y_l})\,, \tag{4.242}$$

où, pour chaque couple (k, l), les poids $\omega^*_{\alpha,\beta,k,l}$ constituent la solution du système linéaire suivant :

$$\forall\, i, j\,, \qquad f^*(x_i, y_j, v_{xk}, v_{y_l}) = \sum_{\alpha,\beta} \omega^*_{\alpha,\beta,k,l}\, \psi_x(x_i - x_\alpha)\, \psi_y(y_j - y_\beta)\,. \tag{4.243}$$

3. Nous calculons $\mathbf{E}^{n+1}$ sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})$ en résolvant l'équation de Poisson suivante :

$$-\nabla_{\mathbf{x}}\phi^{n+1} = \mathbf{E}^{n+1}\,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}}\phi^{n+1} = \int_{\Omega_{\mathbf{v}}} f^{**}\,d\mathbf{v} - 1\,. \tag{4.244}$$

4. Nous calculons finalement f^{n+1} sur le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}}) \times M(\Omega_{\mathbf{v}})$ par

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x_i, y_j, v_{xk}, v_{yl}) = \sum_{\alpha,\beta} \omega^{**}_{i,j,\alpha,\beta}\, \psi_{v_x}\big(v_{xk} - v_{x\alpha} - \frac{\Delta t}{2}\, E_x^{n+1}(x_i, y_j)\big) \\ \times\, \psi_{v_y}\big(v_{yl} - v_{y\beta} - \frac{\Delta t}{2}\, E_y^{n+1}(x_i, y_j)\big)\,, \end{aligned} \tag{4.245}$$

où, pour chaque couple (i, j), les poids $\omega^{**}_{i,j,\alpha,\beta}$ constituent la solution du système linéaire suivant :

$$\forall\, k, l\,, \qquad f^{**}(x_i, y_j, v_{xk}, v_{yl}) = \sum_{\alpha,\beta} \omega^{**}_{i,j,\alpha,\beta}\, \psi_{v_x}(v_{xk} - v_{x\alpha})\, \psi_{v_y}(v_{yl} - v_{y\beta})\,. \tag{4.246}$$

Etant donné que nous pouvons calculer de manière exacte les caractéristiques associées aux équations de transport (4.235) et (4.236), la méthode numérique que nous proposons est d'ordre 2 en temps.

Calcul des poids

Etant donné que $S(0) = \frac{2}{3}$ et $S(\pm 1) = \frac{1}{6}$, le système linéaire (4.241) se simplifie de la façon suivante :

$$\forall\, k, l\,, \qquad f^n(x_i, y_j, v_{xk}, v_{yl}) = \sum_{\alpha=k-1}^{k+1} \sum_{\beta=l-1}^{l+1} \omega^n_{i,j,\alpha,\beta}\, \psi_{v_x}(v_{xk} - v_{x\alpha})\, \psi_{v_y}(v_{yl} - v_{y\beta})\,. \tag{4.247}$$

Avec les conditions aux bords de $\Omega_{\mathbf{v}}$ que nous nous sommes fixées, et en supposant que le support numérique de f^n soit suffisamment éloigné de $\partial\Omega_{\mathbf{v}}$, nous pouvons calculer les $\omega^n_{i,j,\alpha,\beta}$ de la façon suivante : nous posons

$$f^n(x_i, y_j, v_{xk}, v_{yl}) = \sum_{\alpha=k-1}^{k+1} \eta^n_{i,j,\alpha,l}\, \psi_{v_x}(v_{xk} - v_{x\alpha})\,, \tag{4.248}$$

avec $\eta^n_{i,j,\alpha,l}$ défini par

$$\eta_{i,j,\alpha,l} = \sum_{\beta=l-1}^{l+1} \omega^n_{i,j,\alpha,\beta}\, \psi_{v_y}(v_{yl} - v_{y\beta})\,. \tag{4.249}$$

Alors nous calculons dans un premier temps les $\eta^n_{i,j,\alpha,l}$ en inversant le système

$$A(\Delta v_x) \begin{pmatrix} \eta^n_{i,j,0,l} \\ \vdots \\ \eta^n_{i,j,P_{v_x},l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f^n(x_i, y_j, v_{x1}, v_{yl}) \\ \vdots \\ f^n(x_i, y_j, v_{xP_{v_x}}, v_{yl}) \end{pmatrix}, \tag{4.250}$$

pour chaque triplet (i, j, l), où la matrice $A(\Delta v_x)$ est définie par

$$A(\Delta v_x) = \frac{1}{6\Delta v_x} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{P_{v_x}+1}(\mathbb{R})\,. \tag{4.251}$$

Puis nous calculons les $\omega^n_{i,j,\alpha,\beta}$ en inversant le système

$$A(\Delta v_y)\begin{pmatrix}\omega^n_{i,j,\alpha,0}\\ \vdots\\ \omega^n_{i,j,\alpha,P_{v_y}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \eta^n_{i,j,\alpha,1}\\ \vdots\\ \eta^n_{i,j,\alpha,P_{v_y}}\end{pmatrix}, \tag{4.252}$$

pour chaque triplet (i,j,α), où $A(\Delta v_y)\in\mathcal{M}_{P_{v_y}+1}(\mathbb{R})$ est définie comme $A(\Delta v_x)$.

De la même façon, le système linéaire (4.243) se simplifie de la façon suivante :

$$\forall\, i,j\,,\qquad f^*(x_i,y_j,v_{x\,k},v_{y\,l})=\sum_{\alpha=i-1}^{i+1}\sum_{\beta=j-1}^{j+1}\omega^*_{\alpha,\beta,k,l}\,\psi_x(x_i-x_\alpha)\,\psi_y(y_j-y_\beta)\,. \tag{4.253}$$

Avec les conditions aux bords de $\Omega_{\mathbf{x}}$ que nous nous sommes fixées, nous pouvons calculer les $\omega^*_{\alpha,\beta,k,l}$ de la façon suivante : nous posons

$$f^*(x_i,y_j,v_{x\,k},v_{y\,l})=\sum_{\alpha=i-1}^{i+1}\eta^*_{\alpha,j,k,l}\,\psi_x(x_i-x_\alpha)\,, \tag{4.254}$$

avec $\eta^*_{\alpha,j,k,l}$ défini par

$$\eta_{\alpha,j,k,l}=\sum_{\beta=j-1}^{j+1}\omega^*_{\alpha,\beta,k,l}\,\psi_y(y_j-y_\beta)\,. \tag{4.255}$$

Alors nous calculons dans un premier temps les $\eta^*_{\alpha,j,k,l}$ en inversant le système

$$B(\Delta x)\begin{pmatrix}\eta^*_{0,j,k,l}\\ \vdots\\ \eta^*_{P_x,j,k,l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f^*(x_0,y_j,v_{x\,k},v_{y\,l})\\ \vdots\\ f^*(x_{P_x},y_j,v_{x\,k},v_{y\,l})\end{pmatrix}, \tag{4.256}$$

pour chaque triplet (j,k,l), où la matrice $B(\Delta x)$ est définie par

$$B(\Delta x)=\frac{1}{6\Delta x}\begin{pmatrix}4&1&&&&&1\\ 1&4&1&&&&\\ &\ddots&\ddots&\ddots&&0&\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&&\\ &&&\ddots&\ddots&\ddots&\\ &&0&&1&4&1\\ 1&&&&&1&4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{P_x+1}(\mathbb{R})\,. \tag{4.257}$$

Puis nous calculons les $\omega^*_{\alpha,\beta,k,l}$ en inversant le système

$$B(\Delta y)\begin{pmatrix}\omega^*_{\alpha,0,k,l}\\ \vdots\\ \omega^*_{\alpha,P_y,k,l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta^*_{\alpha,0,k,l}\\ \vdots\\ \eta^*_{\alpha,P_y,k,l}\end{pmatrix}, \tag{4.258}$$

pour chaque triplet (α,k,l), où $B(\Delta y)\in\mathcal{M}_{P_y+1}(\mathbb{R})$ est définie comme $B(\Delta x)$.

Simulations numériques d'amortissements Landau linéaire

Nous proposons de tester la méthode présentée ci-dessus sur des cas d'amortissements Landau, où la distribution initiale f_0 est donnée par

$$f_0(x,y,v_x,v_y)=\frac{1}{2\pi}\big(1+\alpha\,\cos(k_x\,x+k_y\,y)\big)\,\exp\Big(-\frac{v_x^2+v_y^2}{2}\Big)\,, \tag{4.259}$$

avec $k_x, k_y \in [0,1]$, $\alpha \geq 0$.

Nous nous plaçons dans le cadre d'un régime linéaire, c'est-à-dire avec une valeur de α proche de 0. Dans un tel régime, il est possible de résoudre l'équation de Vlasov linéarisée : en effet, en posant $f = f_{eq} + \delta f_p$ où

$$f_{eq}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(- \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} \Big) , \tag{4.260}$$

nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t f_p(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_p(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{eq}(\mathbf{v}) = 0 \,, \\ f_{0,p}(x,y,v_x,v_y) = \dfrac{1}{2\pi} \alpha \cos(k_x\, x + k_y\, y) \exp\Big(- \dfrac{v_x^2 + v_y^2}{2} \Big) , \\ f_p(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f_{0,p}(\mathbf{x},\mathbf{v}) \,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f_p(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\, d\mathbf{v} \,. \end{cases} \tag{4.261}$$

En utilisant une transformée de Fourier en $\mathbf{x}$ et une transformée de Laplace en t, nous pouvons montrer que

$$\tilde{\hat{\phi}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{N(\mathbf{k},\omega)}{D(\mathbf{k},\omega)} \,, \tag{4.262}$$

où $\omega \mapsto \tilde{\hat{\phi}}(\mathbf{k},\omega)$ est la transformée de Laplace de $t \mapsto \hat{\phi}(\mathbf{k},t)$, et $\mathbf{k} \mapsto \hat{\phi}(\mathbf{k},t)$ est la transformée de Fourier de $\mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x},t)$. Dans la formule (4.262), N et D ont pour expressions respectives

$$N(\mathbf{k},\omega) = \frac{\alpha}{4i\pi} \psi(\mathbf{k},\omega) \,, \quad D(\mathbf{k},\omega) = |\mathbf{k}|^2 + \frac{1}{2\pi} \big(2\pi + \omega\, \psi(\mathbf{k},\omega)\big) \,, \tag{4.263}$$

où ψ est définie par

$$\psi(\mathbf{k},\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{|\mathbf{k}|} Z\big(\frac{\omega}{\sqrt{2}\,|\mathbf{k}|}\big) \,, \qquad Z(\zeta) = \pi\, e^{-\zeta^2} \big(i - \mathrm{erfi}(\zeta)\big) \,, \qquad \mathrm{erfi}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{x^2}\, dx \,. \tag{4.264}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\hat{\phi}(\mathbf{k},t) = \sum_j \mathrm{Res}_{\omega=\omega_j} \tilde{\hat{\phi}}(\mathbf{k},\omega)\, e^{-i\omega_j t} \,, \tag{4.265}$$

où, pour $\mathbf{k}$ fixé, les ω_j sont solutions de l'équation de dispersion suivante (voir B. Fried & S. Conte [25], et F. Chen [10]) :

$$D(\mathbf{k},\omega) = 0 \,, \tag{4.266}$$

et où les résidus sont

$$\mathrm{Res}_{\omega=\omega_j} \tilde{\hat{\phi}}(\mathbf{k},\omega) = \frac{N(\mathbf{k},\omega_j)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(\mathbf{k},\omega_j)} \,. \tag{4.267}$$

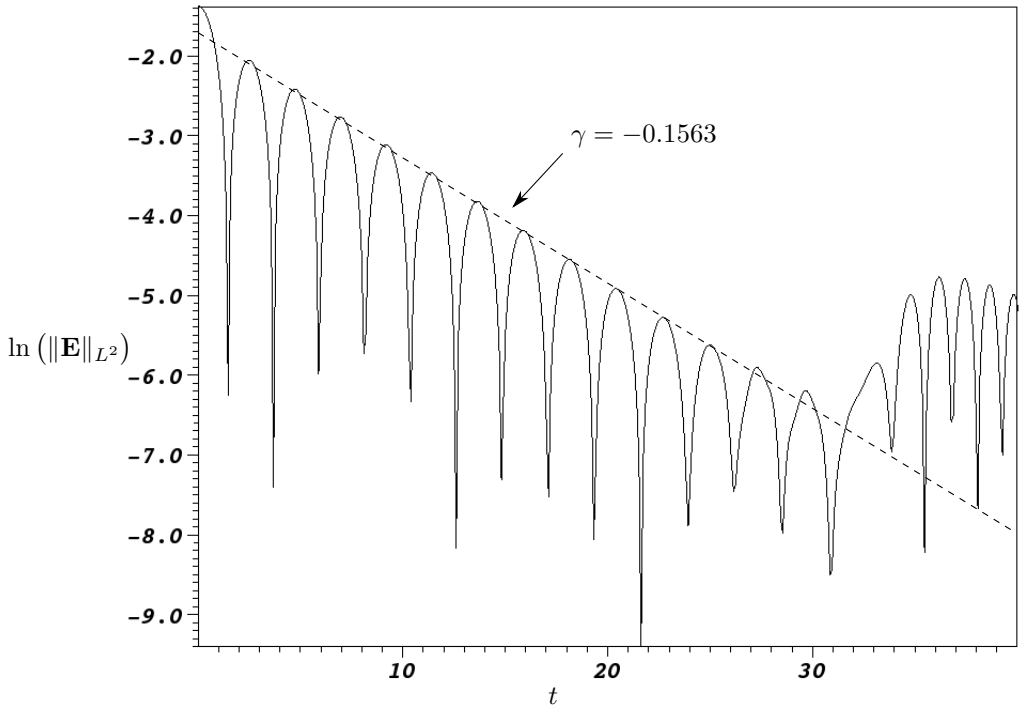


FIGURE 4.2 – Energie électrique en échelle logarithme pour un amortissement Landau linéaire avec $\alpha = 0.05$, $k_x = 0.5$, $k_y = 0$, sur un maillage de $\Omega_{\mathbf{v}}$ de taille 64×64.

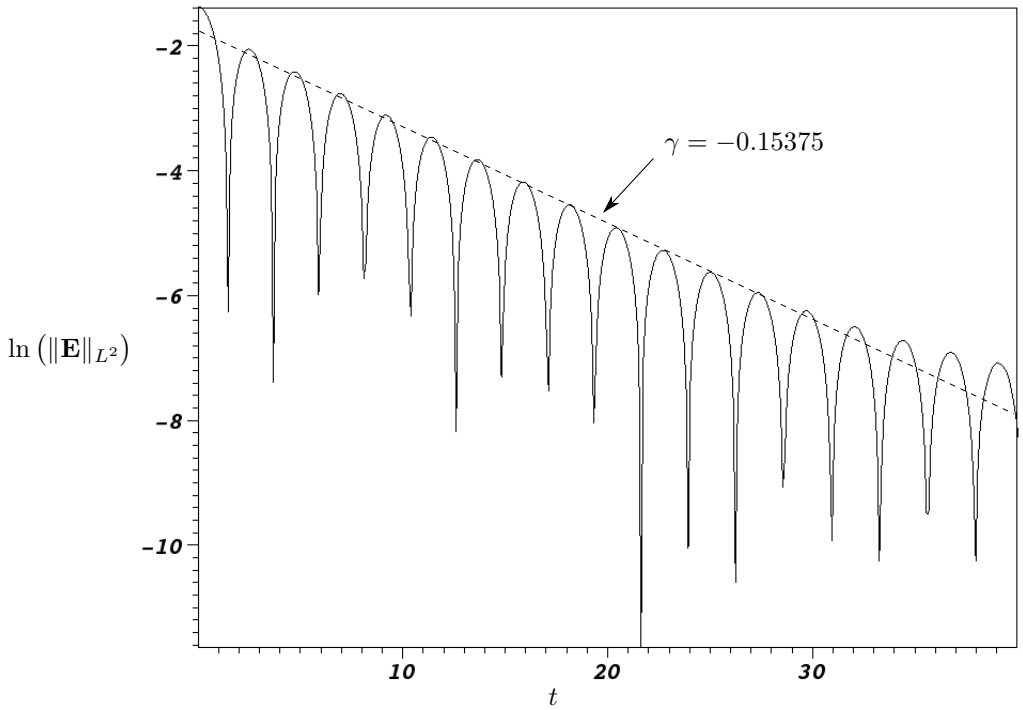


FIGURE 4.3 – Energie électrique en échelle logarithme pour un amortissement Landau linéaire vec $\alpha = 0.05$, $k_x = 0.5$, $k_y = 0$, sur un maillage de $\Omega_{\mathbf{v}}$ de taille 128×128.

Etant donné que, si $\omega_+ = \omega_r + i\,\omega_i$ est solution de (4.266), $\omega_- = -\omega_r + i\,\omega_i$ l'est aussi, nous pouvons alors montrer que $\hat{\phi}(\mathbf{k}, t)$ est approché par

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, t) \approx \left(c_+\, e^{-i\omega_r^* t} + c_-\, e^{i\omega_r^* t}\right) e^{\omega_i^* t}\,, \tag{4.268}$$

où $\omega^* = \omega_r^* + i\omega_i^*$ est la solution de (4.266) ayant la plus petite partie imaginaire, et où

$$c_+ = \mathrm{Res}_{\omega=\omega_r^*+i\omega_i^*}\tilde{\hat{\phi}}(\mathbf{k}, \omega)\,, \qquad c_- = \mathrm{Res}_{\omega=-\omega_r^*+i\omega_i^*}\tilde{\hat{\phi}}(\mathbf{k}, \omega)\,. \tag{4.269}$$

Dans les 3 cas tests que nous proposons, nous supposons que $\alpha = 0.05$, et nous considérons le domaine de simulation en vitesse $\Omega_\mathbf{v} = [-6, 6] \times [-6, 6]$. Nous supposons également que le maillage que nous nous donnons sur $\Omega_\mathbf{x}$ possède 64 points dans les directions x et y.

Dans un premier cas, nous supposons que $k_x = 0.5$ et $k_y = 0$, et nous considérons le domaine de simulation $\Omega_\mathbf{x} = [0, \frac{2\pi}{k_x}] \times [0, 1]$ dans l'espace physique. En résolvant l'équation de dispersion (4.266) à l'aide d'une routine Maple, nous obtenons une approximation de ω^* :

$$\omega^* \approx 1.415661889 - 0.1533594667\, i\,. \tag{4.270}$$

Dans les figures 4.2 et 4.3, nous présentons l'évolution de l'énergie électrique en échelle logarithmique, où nous considérons des maillages sur $\Omega_\mathbf{v}$ de tailles 64×64 et 128×128 respectivement. Comme nous pouvons le constater l'amortissement est bien retranscrit dans les 2 situations car nous observons les valeurs expérimentales $\omega_i^* = -0.1563$ et $\omega_r^* = 1.4012$ lorsque $\Omega_\mathbf{v}$ est maillé par une grille de taille 64×64, et $\omega_i^* = -0.15375$ et $\omega_r^* = 1.3966$ lorsque $\Omega_\mathbf{v}$ est maillé par une grille de taille 128×128. Par ailleurs, nous constatons qu'il est nécessaire de considérer un maillage sur $\Omega_\mathbf{v}$ relativement fin afin de simuler correctement l'amortissement Landau sur un temps long : en effet, comme nous pouvons l'observer dans la figure 4.2, la méthode semi-lagrangienne génère un bruit numérique qui devient trop important lors de simulations sur des temps longs si nous considérons un maillage de l'espace des vitesses trop grossier. Ainsi, en considérant un maillage de $\Omega_\mathbf{v}$ de taille 128×128 au lieu de 64×64, nous parvenons à réduire de manière significative le bruit numérique observé dans la figure 4.2.

Dans un second cas, nous supposons que $k_x = 0$ et $k_y = 0.5$, et nous considérons le domaine de simulation $\Omega_\mathbf{x} = [0, 1] \times [0, \frac{2\pi}{k_y}]$ dans l'espace physique. En résolvant l'équation de dispersion, nous obtenons à nouveau

$$\omega^* \approx 1.415661889 - 0.1533594667\, i\,. \tag{4.271}$$

Comme dans le cas précédent, nous constatons que l'amortissement est bien simulé sur des maillages de $\Omega_\mathbf{v}$ de tailles 64×64 et 128×128 : en effet, en observant les figures 4.4 et 4.5, nous observons à nouveau les valeurs expérimentales $\omega_i^* = -0.1563$ et $\omega_r^* = 1.4012$ lorsque $\Omega_\mathbf{v}$ est maillé à l'aide d'une grille de taille 64×64, et $\omega_i^* = -0.15375$ et $\omega_r^* = 1.3966$ lorsque $\Omega_\mathbf{v}$ est maillé par une grille de taille 128×128. Par ailleurs, en observant les figures 4.4 et 4.5, nous pouvons à nouveau tirer les mêmes conclusions que dans le premier cas quant à la nécessité de considérer un maillage de l'espace des vitesses relativement fin.

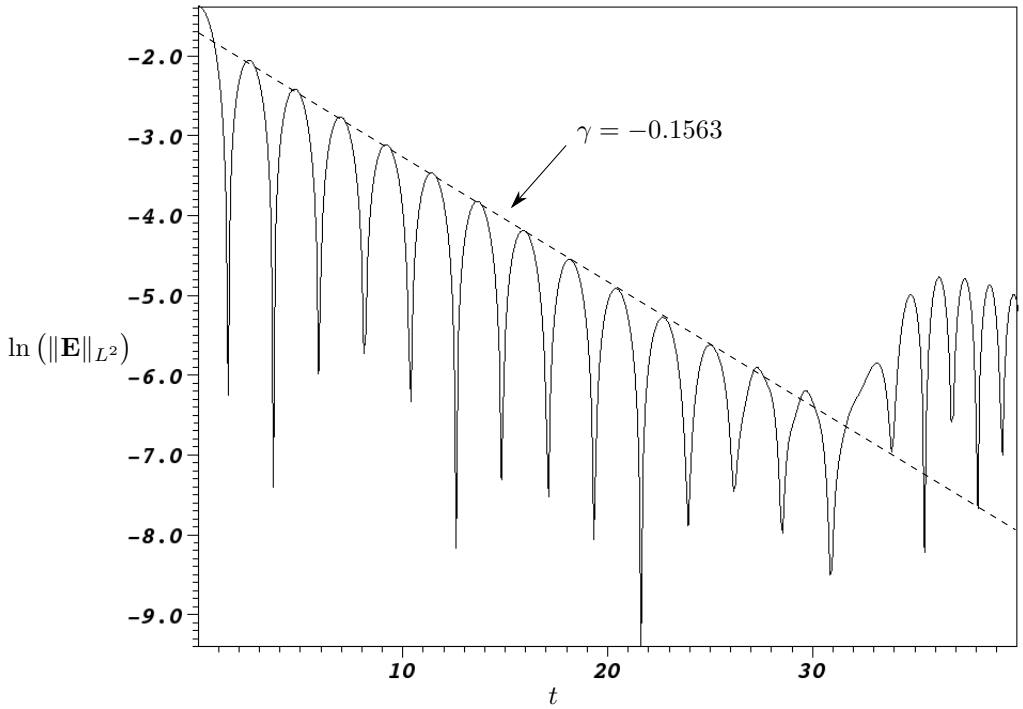


FIGURE 4.4 – Energie électrique en échelle logarithme pour un amortissement Landau linéaire avec $\alpha = 0.05$, $k_x = 0$, $k_y = 0.5$, sur un maillage de $\Omega_{\mathbf{v}}$ de taille 64×64.

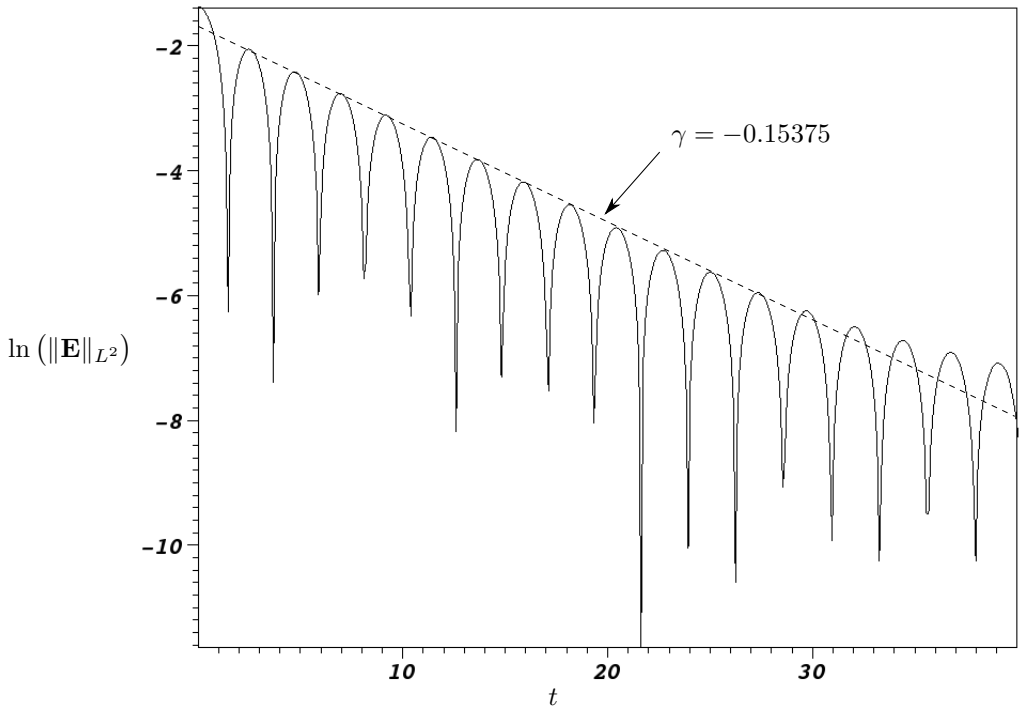


FIGURE 4.5 – Energie électrique en échelle logarithme pour un amortissement Landau linéaire avec $\alpha = 0.05$, $k_x = 0$, $k_y = 0.5$, sur un maillage de $\Omega_{\mathbf{v}}$ de taille 128×128.

Dans un troisième cas, nous supposons que $k_x = k_y = 0.5$, et nous considérons le domaine de simulation $\Omega_{\mathbf{x}} = [0, \frac{2\pi}{k_y}] \times [0, \frac{2\pi}{k_y}]$ dans l'espace physique. En résolvant l'équation de dispersion (4.266), nous obtenons l'approximation de ω^* suivante :

$$\omega^* \approx 1.682893274 - 0.4020805510\, i\,. \tag{4.272}$$

A nouveau, nous constatons que l'amortissement est correctement simulé aussi bien sur des maillages de $\Omega_{\mathbf{v}}$ de tailles 64×64 que 128×128 : en effet, nous pouvons relever dans la figure 4.6 les valeurs expérimentales $\omega_i^* = -0.4133$ et $\omega_r^* = 1.6632$, tandis que dans la figure 4.7, nous relevons les valeurs expérimentales $\omega_i^* = -0.4118$ et $\omega_r^* = 1.673$. Par ailleurs, en observant les figures 4.6 et 4.7, nous pouvons à nouveau tirer les mêmes conclusions que dans les deux cas précédents quant à la nécessité de considérer un maillage de l'espace des vitesses relativement fin.

Nous pouvons donc affirmer que les techniques présentées dans le paragraphe 3.1 sont efficaces sur un modèle de type Vlasov-Poisson 2D dans l'espace des phases associé à des conditions aux bords périodiques en $\mathbf{x}$ et nulles en $\mathbf{v}$. Cependant, il est nécessaire de considérer un maillage de l'espace des vitesses relativement fin afin de produire des résultats de bonne qualité dans le cadre de simulations sur des temps longs.

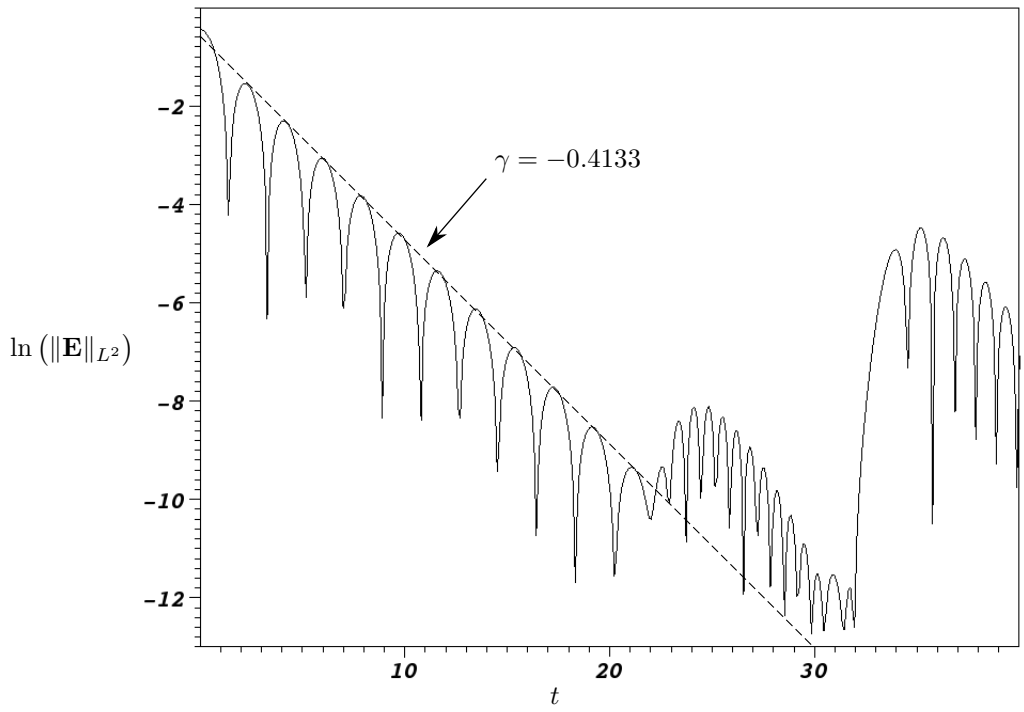


FIGURE 4.6 – Energie électrique en échelle logarithme pour un amortissement Landau linéaire avec $\alpha = 0.05$, $k_x = k_y = 0.5$, sur un maillage de $\Omega_{\mathbf{v}}$ de taille 64×64.

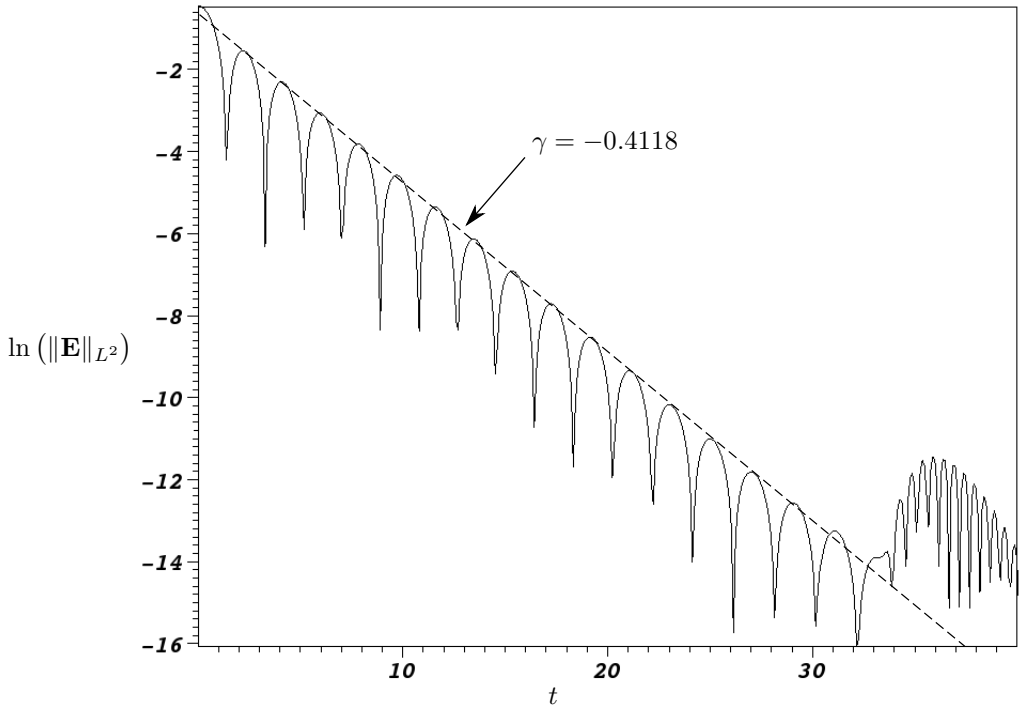


FIGURE 4.7 – Energie électrique en échelle logarithme pour un amortissement Landau linéaire avec $\alpha = 0.05$, $k_x = k_y = 0.5$, sur un maillage de $\Omega_{\mathbf{v}}$ de taille 128×128.

3.3 Méthode semi-lagrangienne 2-échelles

Maintenant que nous nous sommes assurés qu'une méthode semi-lagrangienne en avant peut être efficace sur un modèle de type Vlasov-Poisson 2D, nous pouvons construire une telle méthode numérique sur le modèle (4.170). Rappelons qu'il s'agit du modèle suivant

$$\begin{cases} \partial_t g(x,y,k,t) + \langle \mathcal{E}_y \rangle(x,y,k,t)\, \partial_x g(x,y,k,t) - \langle \mathcal{E}_x \rangle(x,y,k,t)\, \partial_y g(x,y,k,t) = 0\,, \\ g(x,y,k,,0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(x,y,k,\alpha)\, d\alpha\,, \\ \langle \mathcal{E} \rangle(x,y,k,t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\, d\alpha\,, \\ -\nabla_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{x}},t)\,, \\ -\Delta_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathcal{S}} g\big(\tilde{x} + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{y} - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, t\big)\, dk\, d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{x},\tilde{y})\,, \end{cases} \tag{4.273}$$

et que l'objectif est de vérifier numériquement que le couple $(f, \tilde{\mathbf{E}})$, où f est lié à g par

$$f(x,y,k,\alpha,t) = \frac{1}{2\pi}\, g(x,y,k,t)\,, \qquad \forall\, (x,y,k,\alpha,t) \in \Omega \times [0,T)\,, \tag{4.274}$$

est la limite faible-* d'une suite $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ telle que, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ est solution de

$$\begin{cases} f^\epsilon(x,y,k,\alpha,t) = \tilde{f}^\epsilon\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\sin\alpha, t\big)\,, \\ \partial_t \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) + \dfrac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) + \Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) + \dfrac{\tilde{\mathbf{v}}^\perp}{\epsilon}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) = 0\,, \\ \tilde{f}^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t=0) = \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\,, \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,, \quad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)\,d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,, \end{cases} \tag{4.275}$$

avec $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ et $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_x, \tilde{v}_y)$.

Discrétisation du modèle limite faible-*

Nous présentons donc dans ce paragraphe une méthode semi-lagrangienne en avant discrétisant le modèle (4.273)-(4.274). Pour cela, nous considérons les domaines de simulation

$$\Omega_{\mathbf{x}} = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]\,, \qquad \Omega_{\mathbf{v}} = [0, k_{max}] \times [0, 2\pi]\,, \qquad \Omega = \Omega_{\mathbf{x}} \times \Omega_{\mathbf{v}}\,, \tag{4.276}$$

et nous associons à $\Omega_{\mathbf{x}}$ et $[0, 2\pi]$ les maillages uniformes suivants

$$\begin{aligned} M(\Omega_{\mathbf{x}}) &= \Big\{(x_i, y_j) \,:\, i = 0\ldots, P_x,\, j = 0, \ldots, P_y\Big\}\,, \\ M\big([0,2\pi]\big) &= \Big\{\alpha_m \,:\, m = 0, \ldots, P_\alpha\Big\}\,, \end{aligned} \tag{4.277}$$

où les tailles de maille dans les directions x, y et α sont respectivement Δx, Δy et $\Delta\alpha$. Enfin, nous associons à $[0, k_{max}]$ le maillage quadratique suivant :

$$M\big([0, k_{max}]\big) = \Big\{k_l = l^2\Delta k^2 \,:\, l = 0, \ldots, P_k\Big\}\,, \tag{4.278}$$

où $\Delta k = \dfrac{\sqrt{k_{max}}}{P_k + 1}$. Nous supposons que nous nous plaçons dans des situations où les fonctions g, $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\langle\mathcal{E}\rangle$ sont périodiques en x et en y sur $\Omega_{\mathbf{x}}$.

Notons ici qu'il est impossible de splitter l'équation de transport (4.273.a) sans perdre son caractère conservatif. En effet, nous ne pouvons nous assurer d'avoir

$$\partial_x\langle\mathcal{E}_y\rangle = 0 \quad \underline{et} \quad \partial_y\langle\mathcal{E}_x\rangle = 0\,, \tag{4.279}$$

sauf dans des cas très particuliers. La méthode semi-lagrangienne en avant que nous allons décrire va devoir s'appuyer sur

$$g\big(x,y,k,t_n\big) = g\big(X\big(t_{n+1};(x,y,k),t_n\big), Y\big(t_{n+1};(x,y,k),t_n\big), k, t_{n+1}\big)\,, \tag{4.280}$$

où les fonctions $t \mapsto X\big(t;(x,y,k),t_n\big)$ et $t \mapsto Y\big(t;(x,y,k),t_n\big)$ constituent la solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \partial_t X(t) &= \langle\mathcal{E}_y\rangle\big(X(t),Y(t),k,t\big)\,, \\ \partial_t Y(t) &= -\langle\mathcal{E}_x\rangle\big(X(t),Y(t),k,t\big)\,, \\ X(t_n) &= x\,, \\ Y(t_n) &= y\,. \end{cases} \tag{4.281}$$

Il est évident que, dans la plupart des cas, il sera impossible de trouver une formulation analytique de cette solution. De ce fait, il faut calculer $X\big(t_{n+1};(x,y,k),t_n\big)$ et $Y\big(t_{n+1};(x,y,k),t_n\big)$ en résolvant le système différentiel (4.281) à l'aide d'une méthode d'ordre 2 ou plus. Nous proposons donc

d'appliquer la méthode d'ordre 2 en t proposée dans le paragraphe 3.1 qui se base sur une résolution numérique de (4.281) à l'aide d'une méthode de Runge. Ici, nous obtenons l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} X\big(t_{n+1};(x,y,k),t_n\big) &\approx x + \Delta t\,\langle \mathcal{E}_y^{n+1/2}\rangle\Big(x+\frac{\Delta t}{2}\,\langle \mathcal{E}_y^n\rangle(x,y,k), y-\frac{\Delta t}{2}\,\langle \mathcal{E}_x^n\rangle(x,y,k),k\Big)\,,\\ Y\big(t_{n+1};(x,y,k),t_n\big) &\approx y - \Delta t\,\langle \mathcal{E}_x^{n+1/2}\rangle\Big(x+\frac{\Delta t}{2}\,\langle \mathcal{E}_y^n\rangle(x,y,k), y-\frac{\Delta t}{2}\,\langle \mathcal{E}_x^n\rangle(x,y,k),k\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.282}$$

Notons g^n l'approximation de $g(\cdot,\cdot,\cdot,t_n)$ sur le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$, $\tilde{\mathbf{E}}^n$ l'approximation de $\tilde{\mathbf{E}}(\cdot,\cdot,t_n)$ sur le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})$, et $\langle\mathcal{E}^n\rangle$ l'approximation de $\langle\mathcal{E}\rangle(\cdot,\cdot,\cdot,t_n)$ sur le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$. En suivant l'algorithme présenté en page 129, une itération de la méthode semi-lagrangienne en avant se déroule de la façon suivante :

1. Supposons que g^n est connu sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$. Nous calculons $\tilde\rho^n$ sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})$ de la façon suivante :

$$\tilde\rho^n(x_i,y_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} g^n(x_i+\sqrt{2k}\,\sin\alpha, y_j-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k)\,dk\,d\alpha\,. \tag{4.283}$$

Etant donné que g^n n'est connue que sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$, nous remplaçons l'intégrale ci-dessus par

$$\tilde\rho^n(x_i,y_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \Pi_2 g^n(x_i+\sqrt{2k}\,\sin\alpha, y_j-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k)\,dk\,d\alpha\,, \tag{4.284}$$

où Π_2 est un opérateur d'interpolation 2D basé sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})$. Nous pouvons alors calculer $\tilde{\mathbf{E}}^n$ sur le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})$ en résolvant l'équation de Poisson suivante :

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\tilde\phi^n = \tilde\rho^n - \tilde n_e\,, \qquad -\nabla_{\mathbf{x}}\tilde\phi^n = \tilde{\mathbf{E}}^n\,. \tag{4.285}$$

2. Nous calculons $\langle\mathcal{E}^n\rangle$ sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$ par

$$\langle\mathcal{E}^n\rangle(x_i,y_j,k_l) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}^n\big(x_i-\sqrt{2k_l}\,\sin\alpha, y_j+\sqrt{2k_l}\,\cos\alpha\big)\,d\alpha\,. \tag{4.286}$$

Etant donné que $\tilde{\mathbf{E}}^n$ n'est connu que sur $M(\Omega_{\mathbf{x}})$, nous remplaçons cette intégrale par

$$\langle\mathcal{E}^n\rangle(x_i,y_j,k_l) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi_2\tilde{\mathbf{E}}^n\big(x_i-\sqrt{2k_l}\,\sin\alpha, y_j+\sqrt{2k_l}\,\cos\alpha\big)\,d\alpha\,. \tag{4.287}$$

3. Nous reconstruisons une approximation d'ordre 1 de $g(\cdot,\cdot,\cdot,t_{n+1/2})$, notée $g^{n+1/2}$, aux noeuds du maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$:

$$\begin{aligned} g^{n+1/2}(x_i,y_j,k_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_x}\sum_{\beta=0}^{P_y} \omega^n_{\alpha,\beta,l}\,\psi_x\big(x_i - X\big(t_{n+1/2};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)\big)\\ \times\psi_y\big(y_j - Y\big(t_{n+1/2};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)\big)\,. \end{aligned} \tag{4.288}$$

Dans ce calcul, nous utilisons des fonctions de forme ψ_x et ψ_y définies en (4.233)-(4.234), et nous approchons $X\big(t_{n+1/2};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)$ et $Y\big(t_{n+1/2};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)$ à l'aide d'une méthode d'Euler explicite, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl} X\big(t_{n+1/2};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big) & \approx & x_\alpha + \dfrac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}_y^n\rangle(x_\alpha,y_\beta,k_l)\,,\\[2ex] Y\big(t_{n+1/2};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big) & \approx & y_\beta - \dfrac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}_x^n\rangle(x_\alpha,y_\beta,k_l)\,. \end{array}\right. \tag{4.289}$$

Quant aux poids $\omega^n_{\alpha,\beta,l}$, nous les calculons en résolvant le système linéaire suivant :

$$\forall\, i,j, \qquad g^n(x_i,y_j,k_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_x}\sum_{\beta=0}^{P_y} \omega^n_{\alpha,\beta,l}\,\psi_x(x_i-x_\alpha)\,\psi_y(y_j-y_\beta)\,, \tag{4.290}$$

pour chaque valeur de l, en suivant la méthode exposée en (4.254)-(4.258).

4. Nous reconstruisons $\tilde{\mathbf{E}}^{n+1/2}$. Dans un premier temps, nous calculons $\tilde\rho^{n+1/2}$ aux noeuds du maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})$ en posant

$$\tilde\rho^{n+1/2}(x_i,y_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \Pi_2 g^{n+1/2}(x_i+\sqrt{2k}\,\sin\alpha, y_j-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k)\,dk\,d\alpha\,. \tag{4.291}$$

puis nous résolvons l'équation de Poisson suivante :

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\tilde\phi^{n+1/2} = \tilde\rho^{n+1/2}-\tilde n_e\,, \qquad -\nabla_{\mathbf{x}}\tilde\phi^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{E}}^{n+1/2}\,. \tag{4.292}$$

5. Nous calculons $\langle\mathcal{E}^{n+1/2}\rangle$ aux points $\big(x_i+\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_y\rangle(x_i,y_j,k_l), y_j-\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_x\rangle(x_i,y_j,k_l),k_l\big)$ pour tout $(x_i,y_j,k_l)\in M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$:

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{E}^{n+1/2}\rangle\big(&x_i+\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_y\rangle(x_i,y_j,k_l), y_j-\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_x\rangle(x_i,y_j,k_l),k_l\big)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Pi_2\tilde{\mathbf{E}}^{n+1/2}\Big(x_i+\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_y\rangle(x_i,y_j,k_l)-\sqrt{2k_l}\,\sin\alpha,\\ &\qquad\qquad y_j-\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_x\rangle(x_i,y_j,k_l)+\sqrt{2k_l}\,\cos\alpha\Big)\,d\alpha\,.\end{aligned} \tag{4.293}$$

6. Nous calculons les caractéristiques $X\big(t_{n+1};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)$ et de $Y\big(t_{n+1};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)$ en utilisant l'approximation (4.282), ce qui nous permet d'obtenir g^{n+1} aux noeuds du maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$:

$$\begin{aligned}g^{n+1}(x_i,y_j,k_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_x}\sum_{\beta=0}^{P_y}\omega^n_{\alpha,\beta,l}\,&\psi_x\big(x_i-X\big(t_{n+1};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)\big)\\ &\times\psi_y\big(y_j-Y\big(t_{n+1};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big)\big)\,.\end{aligned} \tag{4.294}$$

Nous obtenons alors une approximation de f à l'instant t_{n+1} donnée par

$$f(x_i,y_j,k_l,\alpha_m,t_{n+1}) \approx \frac{1}{2\pi}\,g^{n+1}(x_i,y_j,k_l)\,. \tag{4.295}$$

Nous pouvons remarquer que le choix des points auxquels $\langle\mathcal{E}^{n+1/2}\rangle$ est calculé dans l'étape 5 permet de réduire l'erreur numérique du schéma : en effet, le calcul de $\langle\mathcal{E}^{n+1/2}\rangle$ aux noeuds du maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$ sollicite l'opérateur d'interpolation Π_2 tout comme le calcul de $\langle\mathcal{E}^{n+1/2}\rangle$ aux points $\big(x_i+\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_y\rangle(x_i,y_j,k_l), y_j-\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_x\rangle(x_i,y_j,k_l),k_l\big)$. Ces deux calculs introduisent donc une erreur numérique du même ordre. Cependant, le calcul de $\langle\mathcal{E}^{n+1/2}\rangle$ aux noeuds de $M(\Omega_{\mathbf{x}})\times M\big([0,k_{max}]\big)$ nous impose de remplacer l'approximation (4.282) par

$$\begin{aligned}X\big(t_{n+1};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big) &\approx x_\alpha+\Delta t\,\Pi_2\langle\mathcal{E}^{n+1/2}_y\rangle\Big(x_\alpha+\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_y\rangle(x_\alpha,y_\beta,k_l),\\ &\qquad\qquad y_\beta-\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_x\rangle(x_\alpha,y_\beta,k_l),k_l\Big)\,,\\ Y\big(t_{n+1};(x_\alpha,y_\beta,k_l),t_n\big) &\approx y_\beta-\Delta t\,\Pi_2\langle\mathcal{E}^{n+1/2}_x\rangle\Big(x_\alpha+\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_y\rangle(x_\alpha,y_\beta,k_l),\\ &\qquad\qquad y_\beta-\frac{\Delta t}{2}\langle\mathcal{E}^n_x\rangle(x_\alpha,y_\beta,k_l),k_l\Big)\,,\end{aligned} \tag{4.296}$$

et donc d'ajouter une erreur numérique liée à cette utilisation supplémentaire de Π_2.

Discrétisation du modèle non-homogénéisé

Afin de compléter notre démarche de validation numérique des résultats de convergence faible-* du théorème 25, nous devons également construire une suite d'approximations $(f_h^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon)$ avec

$$f_h^\epsilon(x,y,k,\alpha,t) = \tilde{f}_h^\epsilon\big(x-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, y+\sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\sin\alpha, t\big)\,, \tag{4.297}$$

et où $(\tilde{f}_h^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon)$ est une approximation de la solution $(\tilde{f}^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ de

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) + \dfrac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) + \Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) + \dfrac{\tilde{\mathbf{v}}^\perp}{\epsilon}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) = 0\,, \\ \tilde{f}^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t=0) = \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\,, \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,, \quad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)\,d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,, \end{cases} \tag{4.298}$$

où $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x},\tilde{y})$ et $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_x,\tilde{v}_y)$.

Comme dans le paragraphe précédent, nous considérons les domaines de simulation

$$\begin{aligned} \Omega_{\tilde{\mathbf{x}}} &= [\tilde{x}_{min},\tilde{x}_{max}]\times[\tilde{y}_{min},\tilde{y}_{max}]\,, \\ \Omega_{\tilde{\mathbf{v}}} &= [\tilde{v_x}_{min},\tilde{v_x}_{max}]\times[\tilde{v_y}_{min},\tilde{v_y}_{max}]\,, \\ \Omega &= \Omega_{\tilde{\mathbf{x}}}\times\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}}\,, \end{aligned} \tag{4.299}$$

et nous associons à $\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}}$ et $\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}}$ les maillages uniformes suivants

$$\begin{aligned} M(\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}}) &= \Big\{(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j)\,:\, i=0,\dots,P_{\tilde{x}},\, j=0,\dots,P_{\tilde{y}}\Big\}\,, \\ M(\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}}) &= \Big\{(\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l)\,:\, k=0,\dots,P_{\tilde{v_x}},\, l=0,\dots,P_{\tilde{v_y}}\Big\}\,, \end{aligned} \tag{4.300}$$

où les tailles de maille dans les directions $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{v}_x$, et $\tilde{v}_y$ sont respectivement $\Delta\tilde{x}$, $\Delta\tilde{y}$, $\Delta\tilde{v}_x$ et $\Delta\tilde{v}_y$. Enfin, nous supposons que nous plaçons dans des situations dans lesquelles $\tilde{f}^\epsilon$, $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ et $\tilde{\phi}^\epsilon$ sont périodiques en $\tilde{x}$ et en $\tilde{y}$ sur $\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}}$ et nulles aux bords de $\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}}$.

Il est possible d'effectuer un splitting de Strang sur l'équation de transport satisfaite par $\tilde{f}^\epsilon$ sans en altérer le caractère conservatif : en effet, nous avons

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\cdot\Big(\frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\epsilon}\Big) = \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}}\cdot\Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix}\tilde{v_y}\\ -\tilde{v_x}\end{pmatrix}\Big) = 0\,. \tag{4.301}$$

Nous pouvons donc remplacer la résolution de l'équation

$$\partial_t\tilde{f}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{f}^\epsilon + \Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix}\tilde{v_y}\\ -\tilde{v_x}\end{pmatrix}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{f}^\epsilon = 0\,, \tag{4.302}$$

par la résolution successive de

$$\partial_t\tilde{f}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{f}^\epsilon = 0\,, \tag{4.303}$$

et

$$\partial_t\tilde{f}^\epsilon + \Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix}\tilde{v_y}\\ -\tilde{v_x}\end{pmatrix}\Big)\cdot\nabla_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{f}^\epsilon = 0\,. \tag{4.304}$$

Les caractéristiques associées à l'équation de transport (4.303) sont solutions de

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{X}(t) &= \dfrac{1}{\epsilon}\tilde{V}_x(t)\,, \\ \partial_t\tilde{Y}(t) &= \dfrac{1}{\epsilon}\tilde{V}_y(t)\,, \\ \partial_t\tilde{V}_x(t) &= 0\,, \\ \partial_t\tilde{V}_y(t) &= 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{X}(s) &= \tilde{x}\,, \\ \tilde{Y}(s) &= \tilde{y}\,, \\ \tilde{V}_x(s) &= \tilde{v_x}\,, \\ \tilde{V}_y(s) &= \tilde{v_y}\,, \end{cases} \tag{4.305}$$

et les caractéristiques associées à l'équation (4.304) sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t \tilde{X}(t) & = & 0\,, \\ \partial_t \tilde{Y}(t) & = & 0\,, \\ \partial_t \tilde{V}_x(t) & = & \tilde{E}^\epsilon_x\big(\tilde{X}(t),\tilde{Y}(t),t\big) + \dfrac{1}{\epsilon}\tilde{V}_y(t)\,, \\ \partial_t \tilde{V}_y(t) & = & \tilde{E}^\epsilon_y\big(\tilde{X}(t),\tilde{Y}(t),t\big) - \dfrac{1}{\epsilon}\tilde{V}_x(t)\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \tilde{X}(s) & = & \tilde{x}\,, \\ \tilde{Y}(s) & = & \tilde{y}\,, \\ \tilde{V}_x(s) & = & \tilde{v_x}\,, \\ \tilde{V}_y(s) & = & \tilde{v_y}\,. \end{array}\right. \tag{4.306}$$

Nous pouvons alors constater qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser une méthode numérique afin de calculer une solution approchée de ces systèmes différentiels : en effet, la solution exacte de (4.305) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{X}\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{x} + \dfrac{t-s}{\epsilon}\tilde{v_x}\,, \\ \tilde{Y}\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{y} + \dfrac{t-s}{\epsilon}\tilde{v_y}\,, \\ \tilde{V}_x\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{v_x}\,, \\ \tilde{V}_y\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{v_y}\,, \end{array}\right. \tag{4.307}$$

et la solution exacte du système (4.306) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{X}\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{x}\,, \\ \tilde{Y}\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{y}\,, \\ \begin{pmatrix} \tilde{V}_x(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s) \\ \tilde{V}_y(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s) \end{pmatrix} & = & e^{tM_\epsilon}\left[\displaystyle\int_s^t e^{-\bar{t}M_\epsilon}\,\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{x},\tilde{y},\bar{t})\,d\bar{t} + e^{-sM_\epsilon}\begin{pmatrix} \tilde{v_x} \\ \tilde{v_y} \end{pmatrix}\right], \end{array}\right. \tag{4.308}$$

où la matrice M_ϵ est définie par

$$M_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.309}$$

Nous pouvons simplifier l'expression des caractéristiques $\tilde{V}_x$ et $\tilde{V}_y$ dans (4.308) : en effet, si nous couplons l'équation de transport (4.304) avec les équations de Poisson (4.298.c) et (4.298.d), nous constatons que le champ électrique est stationnaire car, en dérivant l'équation (4.298.d) en t, nous obtenons

$$-\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\partial_t\tilde{\phi}^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^2}\partial_t\tilde{f}^\epsilon\,d\tilde{\mathbf{v}} = -\int_{\mathbb{R}^2}\nabla_{\tilde{\mathbf{v}}}\cdot\left[\left(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix} \tilde{v_y} \\ -\tilde{v_x} \end{pmatrix}\right)\tilde{f}^\epsilon\right]d\tilde{\mathbf{v}} = 0\,. \tag{4.310}$$

Etant donné que $\tilde{\phi}^\epsilon$ est périodique en $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$, nous en concluons que $\tilde{\phi}^\epsilon$ est stationnaire.

Nous en déduisons donc que les caractéristiques associées à l'équation de transport (4.304) et solutions de (4.306) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{X}\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{x}\,, \\ \tilde{Y}\big(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s\big) & = & \tilde{y}\,, \\ \begin{pmatrix} \tilde{V}_x(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s) \\ \tilde{V}_y(t;(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}),s) \end{pmatrix} & = & e^{tM_\epsilon}\Big[M_\epsilon^{-1}\big(e^{-sM_\epsilon} - e^{-tM_\epsilon}\big)\,\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{x},\tilde{y},\bar{t}) \\ & & \qquad\qquad + e^{-sM_\epsilon}\begin{pmatrix} \tilde{v_x} \\ \tilde{v_y} \end{pmatrix}\Big], \end{array}\right. \tag{4.311}$$

pour tout $\bar{t} \in [s,t]$.

Considérons une suite d'intants $t_n = n\Delta t$ auxquels nous approcherons $\tilde{f}^\epsilon$ par $\tilde{f}^\epsilon_n$, $\tilde{\phi}^\epsilon$ par $\tilde{\phi}^\epsilon_n$ et $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ par $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon_n$. En appliquant les techniques décrites au paragraphe 3.1, nous discrétisons le modèle (4.298) de la façon suivante :

1. En supposant que $\tilde{f}_n^\epsilon$ est connue aux noeuds du maillage $M(\Omega)$, et que $\tilde{\mathbf{E}}_n^\epsilon$ est connu aux noeuds du maillage $M(\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}})$, nous définissons $\tilde{f}_*^\epsilon$ sur le maillage $M(\Omega)$ par

$$\begin{aligned}\tilde{f}_*^\epsilon(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_{\tilde{v_x}}}\sum_{\beta=0}^{P_{\tilde{v_y}}} \omega^n_{i,j,\alpha,\beta}\,\psi_{\tilde{v_x}}\big(\tilde{v_x}_k - \tilde{V}_x\big(t_{n+1/2};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_n\big)\big)\\ \times\,\psi_{\tilde{v_y}}\big(\tilde{v_y}_l - \tilde{V}_y\big(t_{n+1/2};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_n\big)\big)\,.\end{aligned} \tag{4.312}$$

Dans cette formule, nous utilisons les fonctions de poids définies en (4.233)-(4.234), et nous calculons les poids $\omega^n_{i,j,\alpha,\beta}$ en posant

$$\forall\, k,l,\qquad \tilde{f}_n^\epsilon(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_{\tilde{v_x}}}\sum_{\beta=0}^{P_{\tilde{v_y}}} \omega^n_{i,j,\alpha,\beta}\,\psi_{\tilde{v_x}}(\tilde{v_x}_k - \tilde{v_x}_\alpha)\,\psi_{\tilde{v_y}}(\tilde{v_y}_l - \tilde{v_y}_\beta)\,, \tag{4.313}$$

pour chaque couple (i,j). Avec les conditions aux bords que nous nous sommes fixées en $\tilde{\mathbf{v}}$, nous avons donc à inverser des systèmes linéaires de la forme (4.248)-(4.252). Enfin, les caractéristiques $\tilde{V}_x\big(t_{n+1/2};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_n\big)$ et $\tilde{V}_y\big(t_{n+1/2};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_n\big)$ sont calculées à partir de (4.311) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\tilde{V}_x(t_{n+1/2};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_n)\\ \tilde{V}_y(t_{n+1/2};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_n)\end{pmatrix}\\ &\qquad = e^{t_{n+1/2}M_\epsilon}\left[M_\epsilon^{-1}\big(e^{-t_nM_\epsilon}-e^{-t_{n+1/2}M_\epsilon}\big)\,\tilde{\mathbf{E}}_n^\epsilon(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j) + e^{-t_nM_\epsilon}\begin{pmatrix}\tilde{v_x}_\alpha\\ \tilde{v_y}_\beta\end{pmatrix}\right].\end{aligned} \tag{4.314}$$

2. Nous définissons $\tilde{f}_{**}^\epsilon$ sur le maillage $M(\Omega)$ par

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{**}^\epsilon(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_{\tilde{x}}}\sum_{\beta=0}^{P_{\tilde{y}}} \omega^*_{\alpha,\beta,k,l}\,\psi_{\tilde{x}}\big(\tilde{x}_i - \tilde{X}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big)\big)\\ \times\,\psi_{\tilde{y}}\big(\tilde{y}_j - \tilde{Y}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big)\big)\,,\end{aligned} \tag{4.315}$$

Dans ce calcul nous utilisons les fonctions de forme définies en (4.233)-(4.234), et nous calculons les poids $\omega^*_{\alpha,\beta,k,l}$ en résolvant pour chaque couple (k,l) le système linéaire suivant :

$$\forall\, i,j,,\qquad \tilde{f}_*^\epsilon(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_{\tilde{x}}}\sum_{\beta=0}^{P_{\tilde{y}}} \omega^*_{\alpha,\beta,k,l}\,\psi_{\tilde{x}}(\tilde{x}_i-\tilde{x}_\alpha)\,\psi_{\tilde{y}}(\tilde{y}_j-\tilde{y}_\beta)\,. \tag{4.316}$$

Quant aux caractéristiques $\tilde{X}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big)$ et $\tilde{Y}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big)$, nous les calculons à partir de (4.307) :

$$\begin{aligned}\tilde{X}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big) &= \tilde{x}_\alpha + \frac{\Delta t}{\epsilon}\,\tilde{v_x}_k\,,\\ \tilde{Y}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big) &= \tilde{y}_\beta + \frac{\Delta t}{\epsilon}\,\tilde{v_y}_l\,.\end{aligned} \tag{4.317}$$

3. Nous calculons le champ électrique à l'instant t_{n+1} en résolvant l'équation de Poisson suivante :

$$-\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon_{n+1} = \int_{\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}}} f^\epsilon_{**}\,d\tilde{\mathbf{v}}\,,\qquad -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}}\tilde{\phi}^\epsilon_{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon_{n+1}\,. \tag{4.318}$$

4. Nous calculons $\tilde{f}^\epsilon_{n+1}$ sur le maillage $M(\Omega)$ par

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{n+1}^\epsilon(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_{\tilde{v_x}}}\sum_{\beta=0}^{P_{\tilde{v_y}}} \omega^{**}_{i,j,\alpha,\beta}\,\psi_{\tilde{v_x}}\big(\tilde{v_x}_k - \tilde{V}_x\big(t_{n+1};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_{n+1/2}\big)\big)\\ \times\,\psi_{\tilde{v_y}}\big(\tilde{v_y}_l - \tilde{V}_y\big(t_{n+1};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_{n+1/2}\big)\big)\,.\end{aligned} \tag{4.319}$$

Dans cette formule, les poids $\omega^{**}_{i,j,\alpha,\beta}$ sont calculés en posant

$$\forall\, k,l, \qquad \tilde{f}^{\epsilon}_{**}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l) = \sum_{\alpha=0}^{P_{\tilde{v_x}}}\sum_{\beta=0}^{P_{\tilde{v_y}}} \omega^{**}_{i,j,\alpha,\beta}\,\psi_{\tilde{v_x}}(\tilde{v_x}_k-\tilde{v_x}_\alpha)\,\psi_{\tilde{v_y}}(\tilde{v_y}_l-\tilde{v_y}_\beta)\,, \tag{4.320}$$

pour chaque couple (i,j), et en utilisant les mêmes techniques qu'à l'étape 1. Enfin, les caractéristiques $\tilde{V}_x\big(t_{n+1};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_{n+1/2}\big)$ et $\tilde{V}_y\big(t_{n+1};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_{n+1/2}\big)$ sont calculées à partir de (4.311) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\tilde{V}_x(t_{n+1};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_{n+1/2})\\ \tilde{V}_y(t_{n+1};(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{v_x}_\alpha,\tilde{v_y}_\beta),t_{n+1/2})\end{pmatrix}\\ &\quad= e^{t_{n+1}M_\epsilon}\left[M_\epsilon^{-1}\big(e^{-t_{n+1/2}M_\epsilon}-e^{-t_{n+1}M_\epsilon}\big)\,\tilde{\mathbf{E}}^{\epsilon}_{n+1}(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j)+e^{-t_{n+1/2}M_\epsilon}\begin{pmatrix}\tilde{v_x}_\alpha\\ \tilde{v_y}_\beta\end{pmatrix}\right].\end{aligned} \tag{4.321}$$

5. Nous pouvons alors calculer une approximation de f^ϵ à l'instant t_{n+1} donnée par

$$\begin{aligned}&f^\epsilon(x_i,y_j,k_l,\alpha_m,t_{n+1})\\ &\quad\approx \Pi\tilde{f}^{\epsilon}_{n+1}\big(x_i-\sqrt{2k_l}\,\sin\alpha_m,y_j+\sqrt{2k_l}\,\cos\alpha_m,\sqrt{2k_l}\,\cos\alpha_m,\sqrt{2k_l}\,\sin\alpha_m\big)\,,\end{aligned} \tag{4.322}$$

où Π est un opérateur d'interpolation sur $M(\Omega)$.

Nous pouvons constater que les termes d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$ présents dans l'équation de transport (4.298.a) imposent au pas de temps Δt d'être d'ordre ϵ. En effet, lorsque nous effectuons l'advection en $\tilde{\mathbf{x}}$ décrite dans l'étape 2, les déplacements effectués sont d'ordre $\frac{\Delta t}{\epsilon}$ en raison de (4.317). Par conséquent, si nous n'imposons pas à Δt d'être d'ordre ϵ, il y a une forte probabilité d'évaluer $\psi_{\tilde{x}}$ et $\psi_{\tilde{y}}$ en des points de la forme $\big(\tilde{x}-\tilde{X}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big),\tilde{y}-\tilde{Y}\big(t_{n+1};(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l),t_n\big)\big)$ très éloignés de $\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}}$, cela pour tout $(\tilde{x},\tilde{y})\in\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}}$ et pour tout $(\tilde{x}_\alpha,\tilde{y}_\beta,\tilde{v_x}_k,\tilde{v_y}_l)\in M(\Omega)$. Il y a donc un risque bien réel de perdre des macro-particules ainsi que leurs contributions si nous ne contrôlons pas Δt correctement. Nous retrouvons le même problème dans les demi-advections en $\tilde{\mathbf{v}}$: en effet, le calcul explicite des caractéristiques indique en (4.314) et en (4.321) que les particules subissent des rotations d'angle θ d'ordre $\frac{\Delta t}{\epsilon}$. Il est alors nécessaire de considérer un pas de temps Δt d'ordre ϵ afin de simuler correctement ces petits déplacements dans l'espace des vitesses.

3.4 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats numériques obtenus grâce à la méthode 2-échelles présentée dans le paragraphe précédent, l'objectif étant de valider numériquement les résultats de convergence faible-* décrits dans le théorème 25.

Pour cela, nous proposons une famille de tests du type Landau linéaire, avec une distribution initiale $\tilde{f}_0$ de la forme

$$\tilde{f}_0(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{v_x},\tilde{v_y}) = \frac{1}{2\pi\, v_{th}}\big(1+\eta\,\sin(k_x\tilde{x}+k_y\tilde{y})\big)\exp\Big(-\frac{\tilde{v_x}^2+\tilde{v_y}^2}{2v_{th}}\Big)\,, \tag{4.323}$$

avec $k_x,k_y\in[0,1]$, $v_{th},\eta>0$, ainsi qu'une densité d'électrons $\tilde{n}_e$ identiquement égale à 1. $\tilde{f}_0$ étant $\frac{2\pi}{k_x}$-périodique en $\tilde{x}$ et $\frac{2\pi}{k_y}$-périodique en $\tilde{y}$, nous pouvons nous limiter à des simulations dans le pavé $[0,\frac{2\pi}{k_x}]\times[0,\frac{2\pi}{k_y}]$ dans l'espace physique.

Dans la famille de tests qui sera présentée, nous supposons que $k_x=0$. Nous en déduisons alors que la fonction f_0 définie à partir de $\tilde{f}_0$ par

$$f_0(x,y,k,\alpha) = \tilde{f}_0\big(\tilde{x}-\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{y}+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\sqrt{2k}\,\sin\alpha\big)\,, \tag{4.324}$$

ne dépend pas de y. Par conséquent, la solution g du système (4.170) ne dépend pas de y à l'instant initial. Par ailleurs, étant donné que nous considérons la distribution initiale $\tilde{f}_0$ comme

étant périodique en $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$, il en est de même pour la fonction g en $t = 0$. Nous en déduisons alors que le potentiel $\tilde{\phi}$ associé à $\tilde{\mathbf{E}}$ ne dépend pas de y à cet instant, et donc que $\tilde{E}_y$ et $\langle \mathcal{E}_y \rangle$ sont nuls en $t = 0$. Nous en concluons donc que, dans cette situation, g est stationnaire et égale à $g(\cdot, \cdot, \cdot, 0)$.

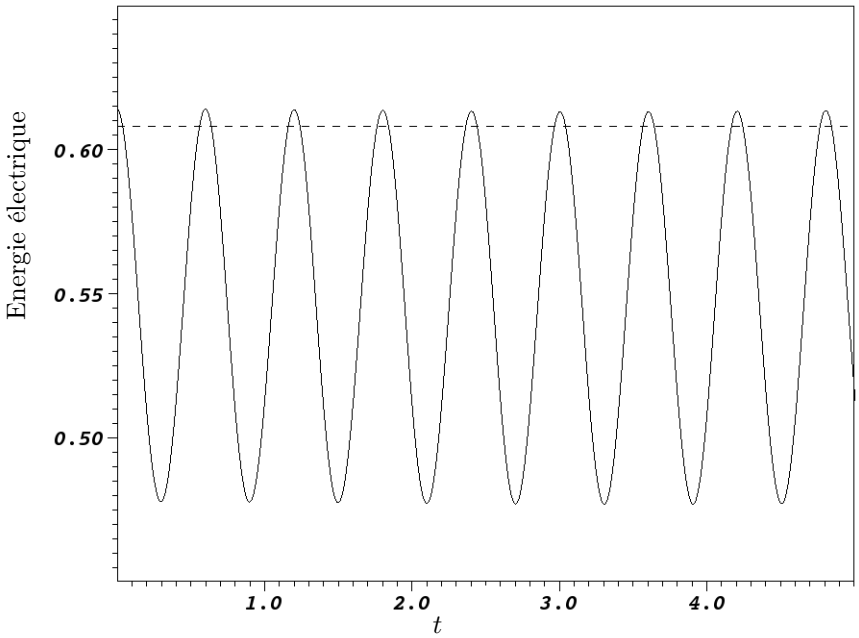


FIGURE 4.8 – Evolution de $\left\|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\cdot, t)\right\|_{L^2}$ (trait plein) et $\left\|\tilde{\mathbf{E}}(\cdot, t)\right\|_{L^2}$ (pointillés) pour $\epsilon = 0.1$ et $t \in [0, 5]$.

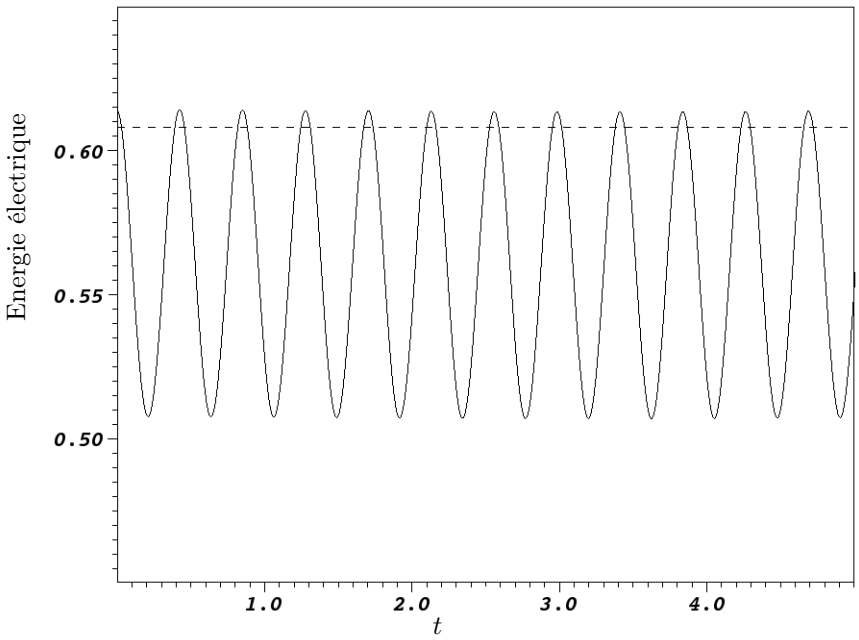


FIGURE 4.9 – Evolution de $\left\|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\cdot, t)\right\|_{L^2}$ (trait plein) et $\left\|\tilde{\mathbf{E}}(\cdot, t)\right\|_{L^2}$ (pointillés) pour $\epsilon = 0.07$ et $t \in [0, 5]$.

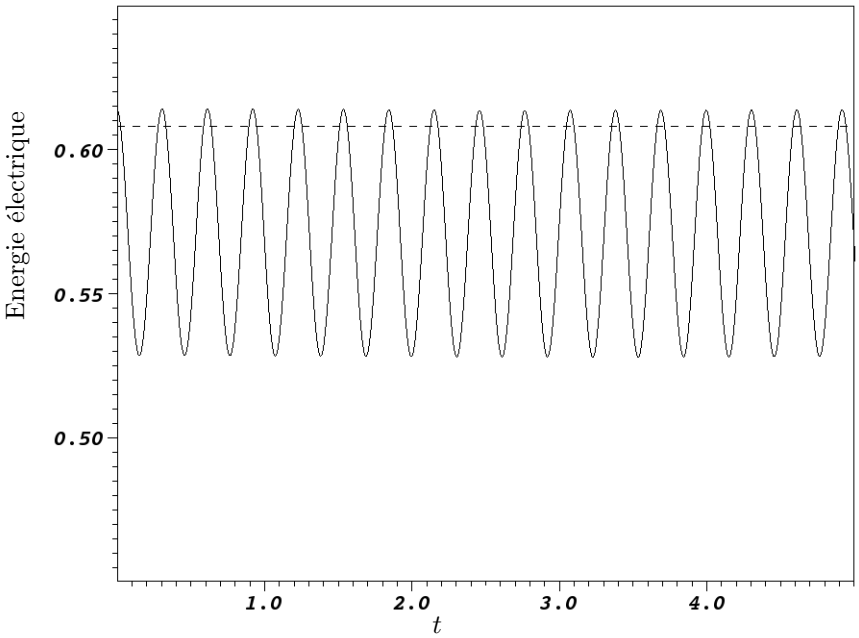


FIGURE 4.10 – Evolution de $\left\|\tilde{\mathbf{E}}^{\epsilon}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ (trait plein) et $\left\|\tilde{\mathbf{E}}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ (pointillés) pour $\epsilon = 0.05$ et $t \in [0,5]$.

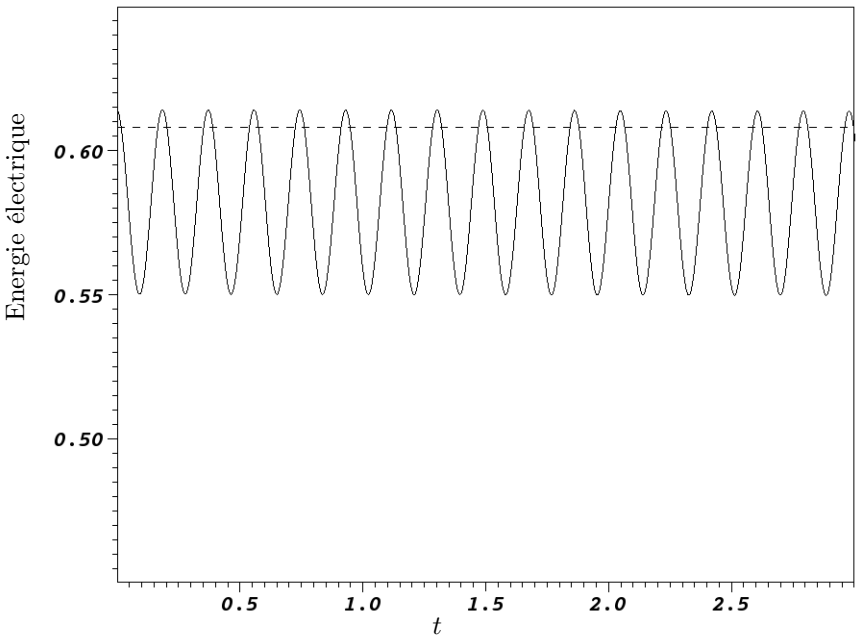


FIGURE 4.11 – Evolution de $\left\|\tilde{\mathbf{E}}^{\epsilon}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ (trait plein) et $\left\|\tilde{\mathbf{E}}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ (pointillés) pour $\epsilon = 0.03$ et $t \in [0,3]$.

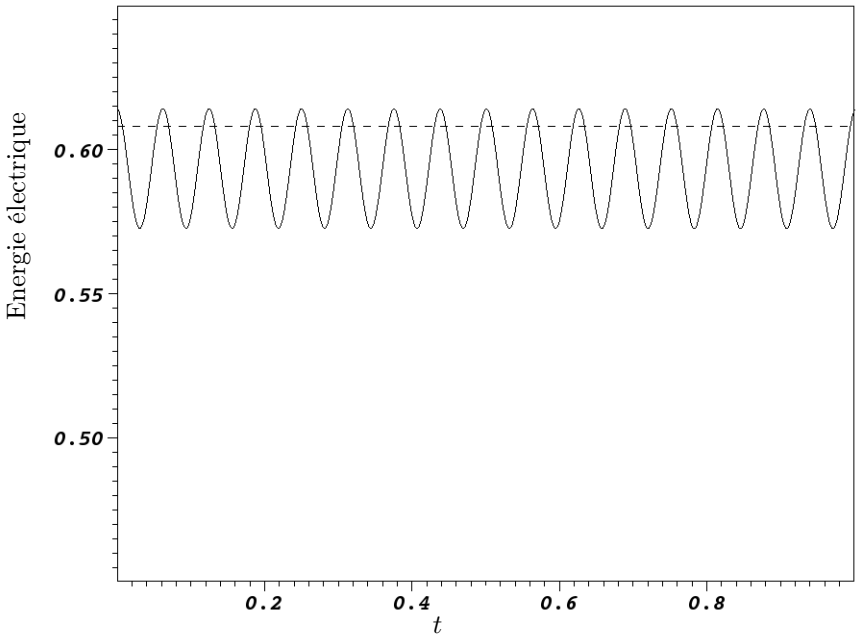


FIGURE 4.12 – Evolution de $\left\|\tilde{\mathbf{E}}^{\epsilon}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ (trait plein) et $\left\|\tilde{\mathbf{E}}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ (pointillés) pour $\epsilon = 0.01$ et $t \in [0,1]$.

Dans les tests que nous proposons, nous fixons $k_y = 0.5$, $\eta = 0.05$ et $v_{th} = 0.1$. Etant donné que nous nous plaçons dans le cadre de conditions aux bords périodiques dans l'espace physique, nous pouvons assimiler $\Omega_{\mathbf{x}}$ à $\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}}$, et poser

$$\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}} = \Omega_{\mathbf{x}} = [0,6] \times [0,4\pi]\,. \tag{4.325}$$

Dans le cadre de la discrétisation du modèle (4.298), nous supposons que $\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}} = [-1.5,1.5]^2$, que $M(\Omega_{\tilde{\mathbf{x}}})$ possède 64 points dans chaque direction, et que $M(\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}})$ possède 128 points dans chaque direction. Dans le cadre de la discrétisation du modèle limite (4.273), nous supposons que

$$k_{max} = \frac{1}{2}\max_{\tilde{\mathbf{v}}\in\Omega_{\tilde{\mathbf{v}}}} |\tilde{\mathbf{v}}|^2\,, \tag{4.326}$$

que le maillage $M(\Omega_{\mathbf{x}})$ possède 128 points dans les directions x et y, que $M\big([0,k_{max}]\big)$ possède 128 points, et que le maillage de $[0,2\pi]$ possède 8 points.

Dans les figures 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12, nous représentons l'évolution des énergies électriques $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}_h^{\epsilon}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ et $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}_h(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ pour différentes valeurs de ϵ. Etant donné qu'il est nécessaire de contrôler le pas de temps Δt_{NH} utilisé dans la méthode résolvant le modèle (4.298), nous fixons sur ce pas de temps la condition suivante :

$$\frac{\Delta t_{NH}}{\epsilon} = 0.1\,, \tag{4.327}$$

de sorte que les déplacements d'ordre $\frac{\Delta t_{NH}}{\epsilon}$ soient correctement simulés. Par ailleurs, étant donné que le modèle (4.273) ne dépend pas de ϵ, nous fixons le pas de temps $\Delta t_H = 0.05$ pour la résolution numérique de ce modèle.

Comme nous pouvons le constater sur les figures 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12 ainsi que dans le tableau 4.1, l'amplitude et la période des oscillations de l'énergie électrique $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}_h^{\epsilon}(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ diminuent à mesure que ϵ se rapproche de 0. De plus, en effectuant une régression linéaire sur les

données répertoriées dans le tableau 4.1, nous constatons que l'amplitude maximale et la période des oscillations de l'énergie électrique $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ décroissent respectivement comme $K_1\epsilon$ et $K_2\epsilon$ lorsque ϵ tend vers 0, où $K_1 \approx 1.062$ et $K_2 \approx 6.222$, comme cela est illustré dans la figure 4.13.

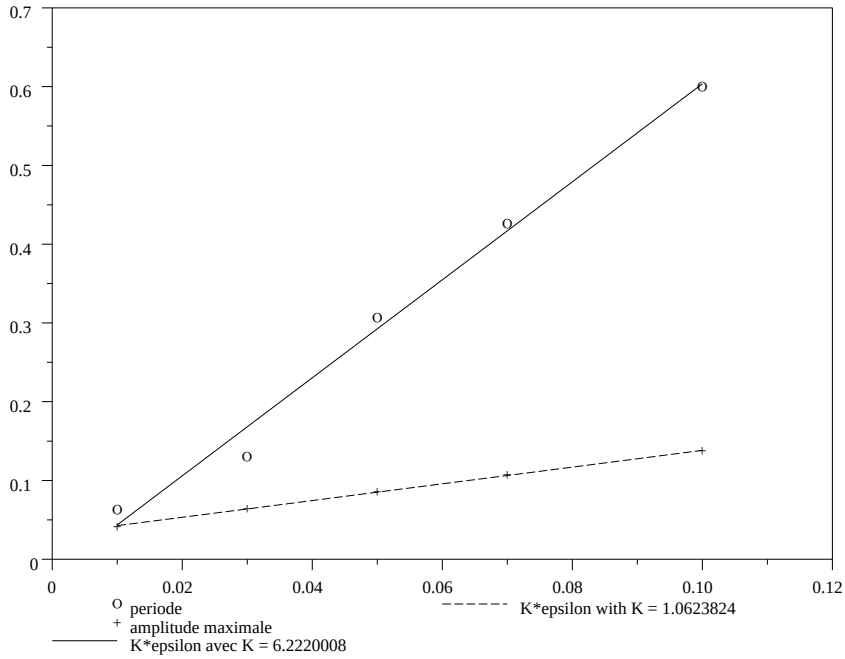


FIGURE 4.13 – Evolution de l'amplitude maximale et de la période de $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ en fonction de ϵ.

ϵ	Δt_{NH}	Amplitude maximale	période
0.1	0.01	0.137254	0.6
0.07	0.007	0.107193	0.425727636
0.05	0.005	0.08621	0.306666667
0.03	0.003	0.064203	0.13
0.01	0.001	0.041628	0.062533333

TABLE 4.1 – Amplitude maximale et période des oscillations de $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}_h^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2}$.

4 Conclusion

Dans un premier temps, nous avons repris et étendu les résultats de convergence faible-* de M. Bostan démontrés dans [6] en nous inspirant des résultats de convergence 2-échelles établis par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans [31]. Nous avons également proposé une nouvelle expression du modèle limite 2-échelles établi par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans laquelle un invariant adiabatique proportionnel au moment magnétique μ est mis en évidence.

Dans un deuxième temps, nous avons construit une méthode semi-lagrangienne en avant visant à valider numériquement ces nouveaux résultats de convergence faible-*. Etant donné que le comportement d'une méthode semi-lagrangienne en avant est peu connu sur un modèle de type Vlasov 2D, nous avons effectué au préalable quelques tests de cette méthode sur le modèle de Vlasov-Poisson

2D (4.228) et plus particulièrement sur des cas d'amortissements Landau linéaires. Ces tests étant concluants, nous avons ensuite appliqué ces techniques aux modèles (4.298) et (4.273), en construisant ainsi une méthode numérique 2-échelles permettant de valider les résultats de convergence faible-* que nous avons établis. Nous avons effectué des tests de cette nouvelle méthode 2-échelles en nous plaçant dans une situation où la solution du modèle limite (4.273) est stationnaire, et nous avons observé l'évolution de l'énergie électrique de chacun des 2 modèles discrétisés. Ces observations ont confirmé les résultats de convergence faible-* établis précédemment, mais ont également permis de constater que l'amplitude et la période de l'énergie électrique $\left\|\tilde{\mathbf{E}}^{\epsilon}\right\|_{L^2}$ du modèle (4.298) tendent vers 0 lorsque $\epsilon \to 0$, et plus précisément en décroissant proportionnellement à ϵ.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

Ces travaux de recherches ont eu pour objectif de développer une méthode numérique impliquant des notions de convergence 2-échelles dans le cas du modèle de rayon de Larmor fini 2D.

Dans une première partie, nous nous sommes intéressés au comportement d'une méthode numérique 2-échelles sur un modèle relativement simple issu de la mécanique des fluides 1D faiblement compressibles que nous rappelons ici :

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon + u^\epsilon\, \partial_x u^\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon^2\, \tilde{\rho}^\epsilon}\, \partial_x\big(p(\tilde{\rho}^\epsilon)\big) = 0\,, \\ \partial_t \tilde{\rho}^\epsilon + \partial_x\big(\tilde{\rho}^\epsilon u^\epsilon\big) = 0\,, \\ u^\epsilon(x,0) = u_0(x)\,, \\ \tilde{\rho}^\epsilon(x,0) = 1 + \epsilon\, \rho_0(x)\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Bien qu'il soit éloigné de la physique des plasmas magnétisés, ce contexte mathématique a été un cadre de travail idéal pour développer et tester une méthode numérique 2-échelles sur un modèle non-linéaire simple. En effet, après avoir rappelé quelques résultats clés sur la suite de solutions $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)_{\epsilon>0}$, nous avons mené une analyse rigoureuse du comportement asymptotique de la suite $(u^\epsilon, \rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ où $\tilde{\rho}^\epsilon = 1 + \epsilon\, \rho^\epsilon$, et démontré que cette suite converge à 2-échelles dans l'espace $\big(L^\infty\big(0,T; H^s_\#\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$ vers un couple (U,R) défini par

$$\begin{cases} U(x,\tau,t) = F(x-\tau,t) + B(x+\tau,t) + \dfrac{\overline{u}}{2\pi}\,, \\ R(x,\tau,t) = F(x-\tau,t) - B(x+\tau,t) + \dfrac{\overline{\rho}}{2\pi}\,, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $\overline{u}$ et $\overline{\rho}$ sont définis par

$$\overline{u} = \int_0^{2\pi} u_0(x)\, dx\,, \qquad \overline{\rho} = \int_0^{2\pi} \rho_0(x)\, dx\,, \tag{5.3}$$

et où (F,B) est solution de

$$\begin{cases} \partial_t F + \partial_x\Big(\dfrac{\gamma+1}{4}\, F^2 + \dfrac{2\overline{u} + (\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\, F\Big) = 0\,, \\ \partial_t B + \partial_x\Big(\dfrac{\gamma+1}{4}\, B^2 + \dfrac{2\overline{u} - (\gamma-1)\overline{\rho}}{4\pi}\, B\Big) = 0\,, \\ F(x,t=0) = \dfrac{1}{2}\Big(u_0(x) + \rho_0(x) - \dfrac{\overline{u}+\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,, \\ B(x,t=0) = \dfrac{1}{2}\Big(u_0(x) - \rho_0(x) - \dfrac{\overline{u}-\overline{\rho}}{2\pi}\Big)\,, \end{cases} \tag{5.4}$$

et nous avons démontré que cette convergence 2-échelles est forte dans $\big(L^\infty\big(0,T;H^{s-1}_{\#}\big([0,2\pi]\big)\big)\big)^2$. Enfin, nous avons proposé une estimation de la vitesse de cette convergence en norme L^2 en nous basant sur des techniques employées par E. Frénod *et al.* dans [27].

Nous avons ensuite utilisé ces résultats de convergence pour construire une méthode 2-échelles de volumes finis permettant de reconstruire une approximation de $(u^\epsilon,\rho^\epsilon)$ et ainsi une approximation de la solution de (5.1) à partir d'une discrétisation du modèle (5.4) à l'aide d'une méthode de volumes finis de Roe. Après avoir étudié les propriétés de convergence de cette méthode numérique, nous avons effectué quelques tests numériques. Nous avons pu ainsi vérifier numériquement les résultats d'analyse fonctionnelle que nous avons établis, mais nous avons également pu comparer la méthode 2-échelles que nous avons construite à une méthode de volumes finis classique appliquée à (5.1) en terme de temps de calcul : à qualité de résultat comparable, nous avons constaté que la méthode 2-échelles est nettement plus rapide car indépendante de toute contrainte liée à ϵ à l'inverse d'une méthode classique. Ce résultat est confirmé à travers des simulations 2-échelles de cas induisant des valeurs de ϵ très proches de 0, situations qu'il est impossible de simuler à l'aide d'une méthode classique en raison d'un temps de calcul trop important.

Dans une deuxième partie, nous nous sommes intéressés au couplage de résultats de convergence 2-échelles avec un schéma semi-lagrangien, ainsi qu'au comportement d'une méthode numérique 2-échelles appliquée à un modèle dont la solution peut présenter des discontinuités. Afin de répondre à ces questions, nous nous sommes placés dans le cadre d'un faisceau de particules chargées soumis à un champ électrique de focalisation fort et oscillant. Là encore, le choix de ce contexte mathématique et physique a été motivé essentiellement par sa simplicité ainsi que sa richesse en résultats théoriques et numériques. En effet, un tel phénomène physique peut être modélisé par le système de Vlasov-Poisson 1D axisymétrique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \dfrac{v_r}{\epsilon}\,\partial_r f^\epsilon + \big(E^\epsilon_r + \Xi^\epsilon_r\big)\,\partial_{v_r} f^\epsilon = 0\,, \\ f^\epsilon(r,v_r,t=0) = f_0(r,v_r)\,, \\ \dfrac{1}{r}\,\partial_r(r\,E^\epsilon_r) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^\epsilon\,dv_r\,, \\ \Xi^\epsilon_r(r,t) = -\dfrac{1}{\epsilon}\,H_0\,r + H_1\Big(\omega_1\,\dfrac{t}{\epsilon}\Big)\,r\,. \end{cases} \tag{5.5}$$

Après avoir rappelé les résultats de convergence 2-échelles établis par E. Frénod *et al.* de la suite $(f^\epsilon,E^\epsilon_r)$ vers $(F,\mathcal{E}_r)$ solution de

$$F(r,v_r,\tau,t) = G\big(\cos(\tau)\,r - \sin(\tau)\,v_r, \sin(\tau)\,r + \cos(\tau)\,v_r, t\big)\,, \tag{5.6}$$

avec

$$\begin{cases} \partial_t G(q,u_r,t) - \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\sigma)\,\Big[\mathcal{E}_r\big(\cos(\sigma)\,q + \sin(\sigma)\,u_r,\sigma,t\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\,H_1(\omega_1\,\sigma)\,\big(\cos(\sigma)\,q + \sin(\sigma)\,u_r\big)\Big]\,d\sigma\,\partial_q G(q,u_r,t) \\ \quad + \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\sigma)\,\Big[\mathcal{E}_r\big(\cos(\sigma)\,q + \sin(\sigma)\,u_r,\sigma,t\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{I_{\mathbb{Q}}(\omega_1)}{2\pi}\,H_1(\omega_1\,\sigma)\,\big(\cos(\sigma)\,q + \sin(\sigma)\,u_r\big)\Big]\,d\sigma\,\partial_{u_r} G(q,u_r,t) = 0\,, \\ G(q,u_r,t=0) = \dfrac{1}{2\pi}\,f_0(q,u_r)\,, \\ \dfrac{1}{r}\,\partial_r\big(r\,\mathcal{E}_r(r,\tau,t)\big) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} G\big(\cos(\tau)\,r - \sin(\tau)\,v_r, \sin(\tau)\,r + \cos(\tau)\,v_r, t\big)\,dv_r\,, \end{cases} \tag{5.7}$$

nous avons présenté une méthode numérique basée sur une discrétisation semi-lagrangienne en arrière du modèle limite (5.6)-(5.7) et permettant de reconstruire une approximation de la solution $(f^\epsilon,E^\epsilon_r)$ du modèle (5.5). Nous avons également proposé une variante de cette nouvelle méthode 2-échelles en nous basant sur l'utilisation d'une famille de maillages mobiles, avec pour objectif de

simplifier la résolution de l'équation de Poisson (5.7.c).

Nous avons implémenté et testé ces 2 méthodes numériques 2-échelles sur des cas de faisceaux semi-gaussiens : en effet, en comparant les résultats produits par les 2 méthodes numériques 2-échelles à ceux peut produire une méthode semi-lagrangienne classique en arrière appliquée au modèle (5.5), nous avons constaté que les méthodes 2-échelles sont bien plus efficaces que la méthode classique non seulement en termes de qualité de résultats mais aussi en termes de temps de calcul : en effet, cette dernière méthode nécessite un pas de temps d'ordre ϵ afin de simuler correctement les rotations rapides du faisceau dans l'espace des phases. Cela a pour effet d'augmenter considérablement son temps d'exécution, mais aussi la diffusion numérique introduite à chaque itération. Par conséquent, elle nécessite aussi de raffiner considérablement le maillage de l'espace des phases afin de produire des résultats précis. *A contrario*, les méthodes 2-échelles que nous avons construites utilisent un pas de temps qui ne dépend pas de ϵ, ce qui permet de réduire significativement le temps d'exécution ainsi que la diffusion numérique globale. Par ailleurs, dans le cadre d'un test sur un cas linéaire, nous avons pu observer l'incidence de l'utilisation des maillages mobiles dans la résolution du modèle (5.6)-(5.7) : comme prévu, nous avons pu constater une baisse significative de l'erreur numérique commise lorsque les maillages mobiles sont utilisés à la place d'un maillage uniforme étendu.

Dans une troisième partie, nous nous intéressé à la validation numérique de la solution $(f, \tilde{\mathbf{E}})$ du modèle de rayon de Larmor fini 2D

$$\begin{cases} f(x,y,k,t) = \dfrac{1}{2\pi} g(x,y,k,t)\,, \\ \partial_t g(x,y,k,t) + \langle \mathcal{E}_y \rangle(x,y,k,t)\, \partial_x g(x,y,k,t) - \langle \mathcal{E}_x \rangle(x,y,k,t)\, \partial_y g(x,y,k,t) = 0\,, \\ g(x,y,k,0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(x,y,k,\alpha)\, d\alpha\,, \\ \langle \mathcal{E} \rangle(x,y,k,t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, t\big)\, d\alpha\,, \\ -\nabla_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{x},\tilde{y},t)\,, \\ -\Delta_{\tilde{x},\tilde{y}} \tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y},t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathcal{S}} g\big(\tilde{x} + \sqrt{2k}\,\sin\alpha, \tilde{y} - \sqrt{2k}\,\cos\alpha, k, t\big)\, dk\, d\alpha - \tilde{n}_e(\tilde{x},\tilde{y})\,, \end{cases} \tag{5.8}$$

comme étant la limite faible-* d'une suite $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ où, pour chaque $\epsilon > 0$ fixé, le couple $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ est solution de

$$\begin{cases} f^\epsilon(x,y,k,\alpha,t) = \tilde{f}^\epsilon\big(x - \sqrt{2k}\,\sin\alpha, y + \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\cos\alpha, \sqrt{2k}\,\sin\alpha, t\big)\,, \\ \partial_t \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) + \dfrac{1}{\epsilon}\,\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) + \Big(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) + \dfrac{\tilde{\mathbf{v}}^\perp}{\epsilon}\Big) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t) = 0\,, \\ \tilde{f}^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{v},t=0) = \tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})\,, \\ \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = -\nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t)\,, \quad -\Delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\phi}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^\epsilon(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}},t)\, d\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{n}_e(\tilde{\mathbf{x}})\,, \end{cases} \tag{5.9}$$

avec $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{v}_x, \tilde{v}_y)$. Suite à un rappel de quelques résultats sur le comportement asymptotique de la suite $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$, nous avons établi un lien explicite entre les résultats de convergence 2-échelles d'E. Frénod et E. Sonnendrücker démontrés dans [31] et le résultat de convergence faible-* démontré par M. Bostan dans [6]. Grâce à ce travail, nous avons proposé une nouvelle expression du modèle limite 2-échelles établi par E. Frénod et E. Sonnendrücker dans lequel nous avons mis en évidence un invariant adiabatique proportionnel au moment magnétique μ. Par ailleurs, nous avons proposé une nouvelle démonstration du résultat de convergence faible-* de M. Bostan en utilisant des hypothèses plus faibles sur la distribution initiale $\tilde{f}_0$, sur la suite $(\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)_{\epsilon>0}$, ainsi que

sur la géométrie du domaine de définition dans l'espace physique.

Après avoir présenté les principes de base d'une méthode semi-lagrangienne en avant, nous avons appliqué une telle méthode sur le modèle de Vlasov-Poisson 2D

$$\begin{cases} \partial_t f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0\,, \\ f(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})\,, \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \qquad -\Delta_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v} - 1\,, \end{cases} \tag{5.10}$$

et nous avons effectué quelques tests sur des cas d'amortissements Landau linéaires, afin de nous assurer qu'une méthode semi-lagrangienne en avant est efficace sur un modèle de type Vlasov 2D. Ces tests préliminaires furent concluants même si un maillage relativement fin de l'espace des vitesses est nécessaire afin d'assurer une bonne qualité de résultat dans le cadre d'une simulation sur un temps long.

Nous avons alors discrétisé les modèles (5.8) et (5.9) à l'aide de méthodes semi-lagrangiennes en avant, constituant ainsi une méthode numérique 2-échelles qui permet de valider numériquement le passage à la limite faible-* de $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ vers $(f, \tilde{\mathbf{E}})$. Nous avons implémenté et testé cette méthode numérique sur un cas dans lequel nous connaissons la solution $(f, \tilde{\mathbf{E}})$ du modèle limite (5.8). Nous avons ainsi pu constater que l'énergie électrique $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ présente des oscillations d'amplitude et de période d'ordre ϵ, ce qui valide numériquement les résultats de convergence faible-* que nous avons redémontrés.

Perspectives

Cette thèse a permis de répondre à de nombreuses questions concernant le comportement des méthodes numériques 2-échelles ainsi que les modèles que nous avons traités. Cependant, ce travail a également permis d'ouvrir la voie sur plusieurs problèmes qui méritent d'être explorés dans un futur proche.

En ce qui concerne la méthode 2-échelles de volumes finis développée dans le cadre des équations d'Euler 1D (5.1), il est naturel de se demander si une telle méthode peut simuler correctement des solutions non-classiques $(u^\epsilon, \tilde{\rho}^\epsilon)$ de ce modèle, ou se baser sur l'approximation d'une solution non-classique (F, B) du modèle (5.4).

Par ailleurs, pour des raisons mathématiques, nous nous sommes placés dans le cadre d'un domaine compact dans l'espace physique et nous avons considéré des conditions aux bords périodiques. Il serait donc intéressant d'étudier la possibilité d'établir des résultats de convergence 2-échelles similaires en se plaçant dans un domaine de définition plus général.

Enfin, nous avons proposé une méthode numérique permettant de résoudre les équations d'Euler 1D homentropiques faiblement compressibles à la fois rapide et précise. La question d'une extension d'une telle approche à d'autres modèles issus de la mécanique des fluides impliquant des phénomènes de petites échelles est à envisager, autant d'un point de vue théorique que numérique.

La méthode semi-lagrangienne 2-échelles que nous avons développée pour simuler des faisceaux de particules dans un champ électrique fort et oscillant présente la même particularité que la méthode 2-échelles de volumes finis développée dans la première partie, à savoir qu'elle est à la fois plus rapide est parfois plus précise qu'une méthode semi-lagrangienne classique pour reconstruire les phénomènes oscillants à très haute fréquence. Cependant, dans l'absolu, son temps d'exécution est grandement pénalisé par la résolution des problèmes de points fixes. Comme nous l'avons constaté dans la troisième partie de cette thèse, nous pourrions envisager une approche semi-lagrangienne en avant afin d'éviter ce problème.

Par ailleurs, nous avons développée cette méthode numérique dans le cadre d'un faisceau soumis à un champ électrique externe ayant une expression bien précise. Il serait alors interéssant de développer de telles méthodes numériques afin de simuler des faisceaux de particules focalisés par un autre type de champ électromagnétique présentant des oscillations à haute fréquence.

Enfin, nous avons proposé et testé avec succès une méthode numérique intégrant l'utilisation d'une famille de maillages mobiles dépendant de l'échelle de temps rapide τ. Il serait utile d'étudier plus en profondeur le comportement d'une telle méthode numérique 2-échelles sur d'autres systèmes d'évolution.

Faute de temps, nous n'avons pu étudier en profondeur le comportement de la méthode semi-lagrangienne en avant appliquée au modèle de Vlasov-Poisson 2D (5.10) : en effet, comme ce travail peut s'inscrire dans le prolongement des travaux de N. Crouseilles *et al.* publiés dans [16], il est nécessaire de procéder à une analyse rigoureuse du comportement d'une telle méthode numérique, de diversifier la palette de résultats, et d'étudier les possibilités de cette méthode en termes de parallélisation informatique.

Par ailleurs, nous avons proposé des résultats numériques de notre méthode 2-échelles sur un cas test dans lequel nous connaissions le comportement de $(f, \tilde{\mathbf{E}})$, et nous nous sommes basés sur l'observation des oscillations de l'énergie électrique $t \mapsto \left\|\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon(\cdot,t)\right\|_{L^2}$ pour différentes valeurs de ϵ. Même si ces observations numériques viennent confirmer les résultats de convergence faible-* que nous avons établis, il nous est difficile de prédire le comportement des modes dominants de $\tilde{\mathbf{E}}^\epsilon$ à l'aide d'une relation de dispersion comme nous pouvons le faire dans le cadre du modèle de Vlasov-Poisson 2D (5.10). Il serait donc intéressant d'explorer cette piste afin de mieux cerner le comportement de ces oscillations lorsque ϵ devient petit, et/ou lorsque nous effectuons des simulations en temps très long. En effet, un tel résultat permettrait de prédire également le comportement des modes domainants de $\tilde{\mathbf{E}}$ lorsque nous nous plaçons dans des cas où il est plus difficile de proposer une expression analytique de la solution $(f, \tilde{\mathbf{E}})$ de (5.8).

Etant donné que la discrétisation du modèle (5.9) nécessite de prendre un pas de temps Δt_{NH} d'ordre ϵ, il est évident que, pour des valeurs de ϵ trop petites, il sera impossible d'exécuter la méthode numérique 2-échelles telle qu'elle a été présentée ici afin d'étudier le comportement des oscillations de la solution $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ de (5.9) lorsque ϵ est très proche de 0. Il serait donc intéressant de remplacer la discrétisation du modèle (5.9) par une méthode numérique basée sur l'approximation

$$f^\epsilon(x,y,k,\alpha,t) \approx 2\pi\, F_h\big(x,y,k,\alpha,\frac{t}{\epsilon},t\big)\,, \tag{5.11}$$

où F_h est une approximation de la limite 2-échelles de $(f^\epsilon)_{\epsilon>0}$ obtenue en discrétisant le modèle suivant :

$$\begin{cases}
F(x,y,k,\alpha,\tau,t) = G(\mathbf{x},k,\alpha+\tau,t)\,, \\[2ex]
\mathcal{E}(x,y,k,\alpha,\tau,t) = \tilde{\mathcal{E}}\big(x-\sqrt{2k}\,\sin\alpha, y+\sqrt{2k}\,\cos\alpha,\tau,t\big)\,, \\[2ex]
\partial_t G + \langle\mathcal{E}_y\rangle\,\partial_x G - \langle\mathcal{E}_x\rangle\,\partial_y G + \langle\mathcal{F}_\alpha\rangle\,\partial_\alpha G = 0\,, \\[2ex]
G(x,y,k,\alpha,t=0) = \dfrac{1}{2\pi}\,f_0(x,y,k,\alpha)\,, \\[2ex]
-\nabla_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{\Phi}(\tilde{x},\tilde{y},\tau,t) = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x},\tilde{y},\tau,t)\,, \\[2ex]
-\Delta_{\tilde{x},\tilde{y}}\tilde{\Phi}(\tilde{x},\tilde{y},\tau,t) = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} G\big(\tilde{x}+\sqrt{2k}\,\sin\alpha,\tilde{y}-\sqrt{2k}\,\cos\alpha,k,\alpha+\tau,t\big)\,dk\,d\alpha - \frac{\tilde{n}_e(\tilde{x},\tilde{y})}{2\pi}\,, \\[2ex]
\mathcal{F}_\alpha(x,y,k,\alpha,\tau,t) = \dfrac{\mathcal{E}_y(x,y,k,\alpha,\tau,t)\,\cos\alpha - \mathcal{E}_x(x,y,k,\alpha,\tau,t)\,\sin\alpha}{\sqrt{2k}}\,, \\[2ex]
\langle u\rangle(x,y,k,t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} u(x,y,k,-\tau,\tau,t)\,d\tau\,.
\end{cases} \tag{5.12}$$

En effet, une telle approche permettrait de reconstruire les oscillations de $(f^\epsilon, \tilde{\mathbf{E}}^\epsilon)$ tout en utilisant un pas de temps $\tilde{\Delta} t_{NH}$ indépendant de ϵ. De plus, nous avons pu constater en page 122 qu'il est possible de splitter l'équation de transport (5.12.c) sans altérer son caractère conservatif.

Enfin, jusqu'à présent, nous avons supposé que le champ magnétique externe $\mathbf{B}$ est constant et fort, et nous avons négligé le champ magnétique auto-consistant. Ce cadre de travail simplifié nous a permis d'établir plusieurs résultats théoriques de convergence ainsi que de nouvelles méthodes numériques. Cependant, les différentes expériences de fusion magnétique nécessitent un champ magnétique externe non uniforme, et indiquent que le champ magnétique auto-consistant n'est pas à négliger non plus. Par conséquent, il sera nécessaire d'envisager un jour de construire des modèles et des méthodes numériques 2-échelles basés sur un couplage entre les équations de Vlasov et de Maxwell.

Appendices

Annexe A

Publications et communications

Nous incluons ici la liste des publications et des communications relatives à ce travail de thèse :

1. E. Frénod, A. Mouton et E. Sonnendrücker : *Two-scale numerical simulation of the weakly compressible 1D isentropic Euler equations*, Numer. Math., **108**-2 (2007), 263-293.

   Résumé : De nombreuses méthodes numériques robustes ont été développées pour la résolution des équations d'Euler aussi bien compressibles qu'incompressibles. Néanmoins, la zone de transition, *i.e.* les équations d'Euler faiblement compressibles pose des problèmes à la plupart des solveurs. Nous considérons ici une approche originale pour traiter cette zone de transition qui est basée sur un modèle à 2 échelles de temps. Cette méthode se base sur la convergence à 2 échelles développée par G. Nguetseng[53] et G. Allaire[3] et nous permet d'obtenir un modèle approché du modèle initial à faible nombre de Mach en faisant intervenir une deuxième échelle de temps. Nous utiliserons ici ces notions sur les équations d'Euler isentropiques 1D faiblement compressibles : dans un premier temps, nous développerons le modèle à 2 échelles de temps en utilisant la théorie de Allaire-Nguetseng, puis nous verrons comment résoudre numériquement ce nouveau modèle afin d'obtenir des solutions approchées des équations d'Euler pour un nombre de Mach faible, solutions approchées que nous comparerons aux résultats d'une résolution numérique directe du problème initial.

   Mots-clés : convergence 2-échelles, équations d'Euler isentropiques, méthodes de volumes finis.

   Communications relatives à cette publication :

   (a) Séminaire des doctorants (IRMA), Strasbourg : *Simulation numérique 2-échelles des équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles*, 18/05/2006.

   (b) 37ème Congrès National d'Analyse Numérique, Guidel : *Simulation numérique 2-échelles des équations d'Euler 1D isentropiques faiblement compressibles*, 01/06/2006.

2. A. Mouton : *Two-scale semi-lagrangian simulation of a charged particles beam in a periodic focusing channel*, Kinet. Relat. Models, **2**-2 (2009), 251-274.

   Résumé : L'objectif de cet article est de développer une méthode numérique 2-échelles semi-lagrangienne pour simuler un faisceau de particules chargées soumis à un champ électrique externe à oscillations rapides. Après avoir rappelé le contexte physique et mathématique du problème, nous rappelerons brièvement le passage à la limite 2-échelles du modèle décrivant le phénomène physique étudié. Puis nous construirons une méthode semi-lagrangienne 2-échelles, et nous proposerons une famille de maillages mobiles permettant de réduire la diffusion numérique. Enfin, nous présenterons quelques résultats numériques obtenus avec

ces 2 nouvelles méthodes numériques, et nous les comparerons à des résultats obtenus d'une méthode semi-lagrangienne classique appliquée au modèle de départ.

Mots-clés : convergence 2-échelles, système de Vlasov-Poisson, approximation paraxiale, équations cinétiques, méthode semi-lagrangienne, homogénéisation.

Communications relatives à cette publication :

(a) Séminaire du groupe de travail Transport (IMT), Toulouse : *Simulation semi-lagrangienne 2-échelles d'un faisceau de particules soumis à un champ électrique périodique de focalisation*, 20/04/2009.

(b) Séminaire du groupe de travail CALVI (INRIA), Nancy : *Simulation semi-lagrangienne 2-échelles d'un faisceau de particules soumis à un champ électrique périodique de focalisation*, 25/06/2009.

Bibliographie

[1] R. Adams et J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975 - 2ème éd. en 2003).

[2] P. Ailliot, E. Frénod, et V. Monbet, *Long term object drift in the ocean with tide and wind*, Multiscale Model. Simul., **5**-2 (2006), 514-531.

[3] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23**-6 (1992), 1482-1518.

[4] N. Besse, *Convergence of a semi-Lagrangian scheme for the one-dimensional Vlasov-Poisson system*, J. Numer. Anal., **42**-1, (2004), 350-382.

[5] C.-K. Birdsall et A.-B. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*, Inst. of Phys. Publishing, Bristol/Philadelphia (1991).

[6] M. Bostan, *The Vlasov-Poisson system with strong external magnetic field. Finite Larmor radius regime*, Rapport de recherche de l'INRIA 6159, (2007).

[7] A. Brizard, *Nonlinear gyrokinetic tokamak physics*, PhD thesis of Princeton University (1990).

[8] A. Brizard et T.-S. Hahm, *Foundations of nonlinear gyrokinetic theory*, Rev. Mod. Phys., **79** (2007), 421-468.

[9] M. Campos-Pinto et M. Mehrenberger, *Convergence of an adaptive semi-Lagrangian scheme for the Vlasov-Poisson system*, Numer. Math., **108**-3 (2007), 407-444.

[10] F. Chen, *Introduction to plasma physics*, Springer (1995).

[11] C.-Z. Cheng et G. Knorr, *The integration of the Vlasov equation in configuration space*, J. Comp. Phys., **22**-3 (1976), 330-351.

[12] C.-J. Cotter, J. Frank et S. Reich, *The remapped particle-mesh semi-Lagrangian advection scheme*, Q. J. Meteorol. Soc., **133** (2007), 251-260.

[13] N. Crouseilles, A. Ghizzo et S. Salmon, *Vlasov laser-plasma interaction simulations with a moving grid*, Rapport de recherche de l'INRIA 6109 (2007).

[14] N. Crouseilles, M. Gutnic, G. Latu et E. Sonnendrücker, *Comparison of two Eulerian solvers for the four-dimensional Vlasov equation*, Proceedings of the 2nd international conference of Vlasovia on plasma simulation, Firenze, Italie (2006).

[15] N. Crouseilles, G. Latu et E. Sonnendrücker, *Hermite spline interpolation on patches for a parallel solving of the Vlasov-Poisson equation*, Rapport de recherche de l'INRIA 5926, (2006).

[16] N. Crouseilles, T. Respaud et E. Sonnendrücker, *A forward semi-Lagrangian method for the numerical solution of the Vlasov equation*, Rapport de recherche de l'INRIA 6727, (2008).

[17] J.-M. Dawson, *Particle simulation of plasmas*, Rev. Modern Phys., **25**-2 (1983), 403-447.

[18] P. Degond et P.-A. Raviart, *On the paraxial approximation of the stationary Vlasov-Maxwell system*, Math. Models Methods Appl. Sci., **3**-4 (1993), 513-562.

[19] D.-H. Dubin, J.-A. Krommes, C. Oberman et W.-W. Lee, *Nonlinear gyrokinetic equations*, Phys. Fluids, **26**-12 (1983), 3524-3535.

[20] F. Filbet, *Contribution à l'analyse et la simulation numérique de l'équation de Vlasov*, thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré de Nancy (2001).

[21] F. Filbet et E. Sonnendrücker, *Comparison of Eulerian Vlasov solvers*, Comp. Phys. Comm., **151** (2003), 247-266.

[22] F. Filbet et E. Sonnendrücker, *Modeling and numerical simulation of space charge dominated beams in the paraxial approximation*, Math. Models Methods Appl. Sci., **16**-5 (2006), 763-791.

[23] E. Forest, *Geometric integration for particle accelerators*, J. Phys. A, **39** (2006), 5321Ũ5377.

[24] R. Fortenbach, E. Frénod, R. Klein, C.-D. Munz et E. Sonnendrücker, *Multiple scale consideration for sound generation in low Mach number flow*, 8th DFG Workshop on French German Research Program Numerical Flow Simulation (Oct. 2001).

[25] B.-D. Fried et S.-D. Conte, *The plasma dispersion function*, Academic Press, New York (1961).

[26] E. Frénod, A. Mouton et E. Sonnendrücker, *Two-scale numerical simulation of the weakly compressible 1D isentropic Euler equations*, Numer. Math., **108**-2 (2007), 263-293.

[27] E. Frénod, P.-A. Raviart et E. Sonnendrücker, *Two-scale expansion of a singularly perturbed convection equation*, J. Math. Pures Appl., **80**-8 (2001), 815-843.

[28] E. Frénod, F. Salvarani et E. Sonnendrücker, *Long time simulation of a beam in a periodic focusing channel via a two-scale PIC-method*, Math. Models Methods Appl. Sci., **19**-2 (2009), 175-197.

[29] E. Frénod et E. Sonnendrücker, *Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field*, Asymp. Anal., **18**-3-4 (1998), 193-214.

[30] E. Frénod et E. Sonnendrücker, *Long time behavior of the Vlasov equation with a strong external magnetic field*, Math. Models Methods Appl. Sci., **10**-4 (2000), 539-553.

[31] E. Frénod et E. Sonnendrücker, *The finite Larmor radius approximation*, SIAM J. Math. Anal., **32**-6 (2001), 1227-1247.

[32] S.-K. Godunov, *A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations*, Math. Sbornik, **47** (1959), 271-306, translated US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226 (1969).

[33] F. Golse et L. Saint-Raymond, *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field*, J. Math. Pures Appl., **78** (1999), 791-817.

[34] F. Golse et L. Saint-Raymond, *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime*, Math. Models Methods Appl. Sci., **13**-5 (2003), 661-714.

[35] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbet, P. Ghendrih, G. Manfredi, Y. Sarazin, O. Sauter, E. Sonnendrücker, J. Vaclavik et L. Villard, *A drift-kinetic semi-lagrangian 4D code for ion turbulence simulation*, J. Comp. Phys., **217** (2006), 395-423.

[36] E. Grenier, *Oscillatory pertubation of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl., **76** (2001), 477-498.

[37] F.-H. Harlow, *A machine calculation method for hydrodynamics problems*, Los Alamos Scientific Laboratory Report LAMS-1956 (1955).

[38] J.-A. Heikkinen, S.-J. Janhunen, T.-P. Kiviniemi et F. Ogando, *Full-f gyrokinetic method for particle simulation of tokamak transport*, J. Comp. Phys., **227**-11 (2008), 5582-5609.

[39] I.-M. Kapchinsky, and V.-V. Vladimirsky, *Proceedings of the 9th international conference on high energy accelerators*, edited by L. Kowarski (CERN, Geneva) (1959), 274-.

[40] S. Klainerman et A. Majda, *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of the compressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math., **34**-4 (1981), 481-524.

[41] S. Klainerman et A. Majda, *Compressible and imcompressible fluids*, Comm. Pure. Appl. Math., **35**-5 (1982), 629-651.

[42] J. Lang, W. Cao, W. Huang et R. D. Russell, *A two-dimensional moving finite element method with local refinement based on a posteriori error estimates*, Appl. Numer. Math., **46**-1 (2003), 75-94.

[43] W.-W. Lee, *Gyrokinetic approach in particle simulation*, Phys. Fluids, **26**-2 (1983), 555-562.

[44] W.-W. Lee, *Gyrokinetic particle simulation model*, J. Comp. Phys., **72**-1 (1987), 243-269.

[45] R. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, *Cambridge texts in Applied mathematics* (2002).

[46] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars (1969).

[47] R.-G. Littlejohn, *A guiding center Hamiltonian : A new approach*, J. Math. Phys., **20**-12 (1979), 2445-2458.

[48] A. Majda, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Academic Press, New York (1984).

[49] E. Marusic-Paloka et A. Piatnitski, *Homogenization of nonlinear convection-diffusion equation with rapidly oscillating coefficients and strong convection*, J. London Math. Soc., **72**-2 (2005), 391-409.

[50] G. Métivier et S. Schochet, *The incompressible limit of the non-isotropic Euler equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **158** (2001), 61-90.

[51] A. Mouton, *Two-scale semi-lagrangian simulation of a charged particle beam in a periodic focusing channel*, Kinet. Relat. Models, **2**-2 (2009), 251-274.

[52] C.-D. Munz, *Computational fluid dynamics and aeroacoustics for low Mach number flow*, communication personnelle.

[53] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **20**-3 (1989), 608-623.

[54] S. Reich, *An explicit and conservative remapping strategy for semi-Lagrangian advection*, Atmospheric Science Letters **8** (2007), 58-63.

[55] M. Reiser, *Theory and design of charged particle beams*, Wiley, New-York (1994).

[56] P.-L. Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*, J. Comput. Phys., **43** (1981), 357-372.

[57] S. Schochet, *Asymptotic for symmetric hyperbolic systems with a large parameter*, J. of Diff. Eq., **75** (1988), 1-27.

[58] S. Schochet, *Fast singular limit of hyperbolic pdes*, J. Diff. Equ., **114** (1994), 476-512.

[59] S. Schochet, *Symmetric hyperbolic systems with a large parameter*, Comm. in PDE, **11**-15 (1986), 1627-1651.

[60] S. Schochet, *The compressible Euler equations in a bounded domain existence of solutions and the incompressible limit*, Commun. Math. Phys., **104** (1986), 46-75.

[61] D. Serre, *Systems of conservations laws 1*, Cambridge University Press (1999).

[62] E. Sonnendrücker, J.-R. Roche, P. Bertrand et A. Ghizzo, *The semi-lagrangian method for the numerical resolution of Vlasov equations*, J. Comp. Phys., **149**-2 (1999), 201-220.

[63] H. Yoshida, *Construction of higher order symplectic integrators*, Phys. Lett. A, **150**-5-7 (1990), 262-268.