



HAL
open science

Méthodes garanties pour l'estimation d'état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu.

Gaétan Videau

► To cite this version:

Gaétan Videau. Méthodes garanties pour l'estimation d'état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu.. Automatique / Robotique. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2009. Français. NNT: . tel-00412596

HAL Id: tel-00412596

<https://theses.hal.science/tel-00412596>

Submitted on 2 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
présentée à
L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR
par
Gaétan Videau
pour obtenir le grade de
DOCTEUR
SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

**Méthodes garanties pour l'estimation d'état
et le contrôle de cohérence des systèmes
non linéaires à temps continu**

Soutenu le : 17 juillet 2009

Après avis des rapporteurs :

José RAGOT	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine
Luc Jaulin	Professeur, ENSIETA Brest

Devant la commission d'examen composée de :

Jean Francois GIOVANNELLI	Professeur, Université Bordeaux I	Président
José RAGOT	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine	Rapporteur
Luc JAULIN	Professeur, ENSIETA Brest	Rapporteur
Nacim RAMDANI	Maître de conférences HDR, INRIA Sophia Antipolis .	Examineur
Ali ZOLGHADRI	Professeur, Université Bordeaux I	Directeur
Tarek RAÏSSI	Maître de conférences, Université Bordeaux I	Co-directeur

– 2009 –

A ma femme et mes enfants.

*"La religion et la science : comment
pourrait-il y avoir contradiction entre le
vrai et le vérifié ? C'est toujours le
second qui tarde."*

Pr. Jérôme Lejeune^[1]

^[1]Pédiatre et professeur de génétique, à qui l'on doit, entre autres, la découverte de l'anomalie chromosomique à l'origine de la trisomie 21.

Remerciements

Ce mémoire présente les travaux de recherche effectués au cours de ma thèse de doctorat au sein de l'équipe Approche Robuste et Intégrée de l'Automatique (ARIA) du laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS), unité mixte de recherche : Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) - Université Bordeaux 1.

Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse, Monsieur Ali Zolghadri, de m'avoir accueilli dans son équipe de recherche. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour les conseils qu'il m'a prodigués au cours de ces trois années, pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues et pour m'avoir accordé sa confiance pour travailler à ses côtés. Je tiens également à remercier sincèrement mon co-directeur de thèse, Monsieur Tarek Raïssi, pour m'avoir soutenu et encouragé durant l'ensemble de mes travaux de recherche. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa haute compétence, il m'a initié à la recherche et m'a appris la rigueur scientifique. En outre, je tiens à les remercier tous les deux pour la qualité et l'intensité de leur encadrement.

Je tiens à remercier particulièrement Messieurs José Ragot et Luc Jaulin, qui ont consacré une partie de leurs temps, malgré leurs responsabilités, à l'évaluation de mon travail. Leurs remarques et leurs commentaires ont contribué à l'amélioration de ce manuscrit. Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs Nacim Ramdani et Jean-Francois Giovannelli qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Mes remerciements s'adressent également aux membres de l'équipe, Messieurs David Henry, Franck Cazaurang, Loic Lavigne, Christophe Farges et Jérôme Cieslak, pour leur soutien, leurs précieux conseils et leur convivialité, ainsi qu'à mes collègues de bureau Pascal Simon, Irwin Issuri, Alexandre Falcoz et Vincent Morio qui ont contribué à ce que ces trois années de travail se déroulent dans un cadre très agréable. J'adresse également une pensée particulière aux autres membres du laboratoire et particulièrement à Firas Khemane pour la bonne ambiance d'échange et de travail que nous avons pu développer.

Enfin, je ne peux pas finir sans remercier ma famille et plus particulièrement ma femme qui m'a soutenu au quotidien et sans qui ces travaux n'auraient pu avoir lieu. Elle a su prendre part à mes activités tout en étant une femme attentionnée et une maman bienveillante envers nos enfants. Que Quitterie, Louis, Marc et nos autres enfants à venir soient fiers de l'avoir comme maman et moi comme épouse.

Table des matières

Remerciements	v
Table des figures	xi
Publications de l’auteur	xiii
Introduction générale	1
1 Problématique de contrôle de cohérence et de diagnostic à base de modèles	5
1.1 Introduction	5
1.2 Position du problème	6
1.3 Techniques à base d’estimation des variables externes	8
1.4 Tests de cohérence sur les variables internes	12
1.4.1 Détection de variations paramétriques par le test de chi-deux	12
1.4.2 Tests basés sur les régions de confiance	13
1.5 Techniques basées sur une formulation explicite des objectifs de diagnostic	15
1.5.1 Découplage par projection dans l’espace de parité	18
1.5.2 Découplage à l’aide d’observateurs de diagnostic	20
1.5.3 Approche par synthèse directe de filtres de diagnostic	23
1.6 Conclusion	25
2 Analyse par intervalles : un outil du calcul ensembliste	27
2.1 Introduction	27
2.2 Notions sur les ensembles	28
2.2.1 Ensembles	28
2.2.2 Opérations sur des ensembles réels	29
2.2.2.1 Opérations ensemblistes pures	30
2.2.2.2 Opérations étendues	31
2.2.3 Distance entre deux ensembles compacts	32
2.3 Arithmétique des intervalles	33
2.3.1 Intervalles	33
2.3.2 Vecteurs et matrices d’intervalles	35
2.3.3 Pessimisme	35

2.3.3.1	Phénomène de dépendance	35
2.3.3.2	Phénomène d'enveloppement	36
2.3.4	Fonctions d'inclusion	37
2.3.4.1	Fonction d'inclusion de fonctions élémentaires	38
2.3.4.2	Fonction d'inclusion naturelle	39
2.3.4.3	Fonction d'inclusion moyenne	40
2.3.4.4	Fonction d'inclusion "pente"	41
2.3.4.5	Fonctions d'inclusion de Taylor	43
2.3.4.6	Propriétés des fonctions d'inclusion	43
2.3.4.7	Convergence d'une fonction d'inclusion	44
2.3.5	Partitionnement de pavés	46
2.4	Inversion ensembliste par arithmétique d'intervalles	49
2.5	Caractérisation d'ensembles par contraction	51
2.5.1	Contrainte	51
2.5.2	Consistance locale et consistance globale	53
2.5.2.1	Consistance d'un point	53
2.5.2.2	Consistance d'un intervalle	53
2.5.3	Contracteur	54
2.6	Conclusion	57

3 Couverture ensembliste minimale de l'état : cas des systèmes non linéaires à temps continu 59

3.1	Introduction	59
3.2	Ensemble atteignable d'un système dynamique	61
3.2.1	Intégration numérique garantie basée sur les modèles de Taylor intervalle	62
3.2.1.1	Existence, unicité et solution <i>a priori</i>	63
3.2.1.2	Réduction de l'encadrement <i>a priori</i>	64
3.2.2	Théorèmes de comparaison et encadrement d'EDO dans un contexte incertain	65
3.2.2.1	Propriétés et notations	66
3.2.2.2	Encadrement d'un système incertain	69
3.2.2.3	Construction de systèmes bornants	71
3.3	Estimation d'état de systèmes non linéaires à temps continu	75
3.3.1	Estimation d'état par prédiction/correction	77
3.3.2	Estimation par retour de sortie	79
3.3.2.1	Cas linéaire à une injection de sortie près	80
3.3.2.2	Approximation garantie d'un modèle non linéaire par un modèle qLPV	82
3.3.2.3	Synthèse d'estimateurs "intervalle" pour des modèles non linéaires	88
3.3.3	Exemple de simulation	95

3.3.3.1	Présentation du système	95
3.3.3.2	Approximation qLPV et calcul du gain L	97
3.3.3.3	Estimation des bornes majorante et minorante	98
3.4	Conclusion	100
4	Approche ensembliste du contrôle d'intégrité	101
4.1	Introduction	101
4.2	Compromis "Garantie/Conservatisme"	102
4.3	Détection garantie basée sur l'estimation d'état	103
4.3.1	Tests de cohérence pour des modèles linéaires à temps discret	103
4.3.2	Tests de cohérence pour des systèmes non linéaires	108
4.3.2.1	Génération de résidu intervalle	108
4.3.2.2	Étude de la dynamique du résidu	109
4.3.2.3	"Plus petit" défaut détectable	111
4.3.2.4	Illustration :Exemple de simulation	113
4.4	Tests de rupture paramétrique et localisation	120
4.4.1	Approche par inversion ensembliste	121
4.4.2	Approche par satisfaction de contraintes	123
4.4.3	Exemple de simulation	126
4.5	Conclusion	131
	Conclusion générale	133
	A Définitions des espaces et normes utilisées	137
	Bibliographie	148

Table des figures

1.3.1 Détection à base d'estimation de variables externes	8
1.5.1 Techniques de détection à base d'estimation des variables externes	20
1.5.2 Problème d'estimation de défauts \mathcal{H}_∞ , où Δ représente un bloc d'incertitudes (ayant une structure bloc diagonale).	24
2.2.1 Opérations sur les ensembles	30
2.2.2 Illustration graphique de la distance de Hausdorff $h_\infty(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$	33
2.3.1 Effet d'enveloppement	36
2.3.2 Evaluation d'une fonction d'inclusion non minimale et d'une fonction d'inclusion minimale	37
2.3.3 Fonction d'inclusion moyenne de $\sin(x)$, pour $x_o = x_c$	41
2.3.4 Fonction d'inclusion moyenne et à pente de $f(x) = x(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$	42
2.3.5 Effet du partitionnement d'un pavé sur une fonction d'inclusion	47
2.4.1 Ensemble de pavés générés par SIVIA pour l'exemple 2.4.1	50
2.5.1 Réduction d'un pavé initial \mathbb{X}_0 sous une contrainte \mathbb{C}_j	52
2.5.2 Consistance locale et globale d'une valeur de x_1	54
2.5.3 Consistance globale et locale d'un intervalle	55
3.2.1 Modèle bi-compartmental (Kieffer et Walter, 1998, 2006)	73
3.2.2 Encadrement de l'ensemble atteignable des trajectoires d'état du système bi-compartmental (3.2.36) pour $\mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0]$ et $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$	75
3.3.1 Estimation d'état par prédiction/correction pour un système bi-compartmental (3.2.36) pour $\mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0]$ et $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$	79
3.3.2 Maquette 3TANKS	95
3.3.3 Ensemble \mathbb{L} de valeurs admissibles de \mathbf{L}	98
3.3.4 Structure de l'observateur avec mise à jour des bornes de $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$	99
3.3.5 Estimation d'état pour $\mathbf{L} \in \mathbb{L}$ et les bornes de $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ fixes	99
3.3.6 Estimation d'état pour $\mathbf{L} \in \mathbb{L}$ et les bornes de $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ mises à jour	100
4.3.1 Tests de cohérence par estimation d'état	104
4.3.2 Test de cohérence pour le modèle nominal $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_0}$	106
4.3.3 Test de cohérence pour le modèle défaillant $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_1}$	107
4.3.4 Test de cohérence pour une fuite de 3% sur la vanne " a_1 "	116
4.3.5 Test de cohérence pour une fuite de 5% sur la vanne " a_1 "	117

4.3.6 Test de cohérence pour une fuite de 7% sur la vanne " a_1 "	117
4.3.7 Test de cohérence pour une fuite de 10% sur la vanne " a_1 "	118
4.3.8 Test de cohérence pour une fuite de 15% sur la vanne " a_1 "	118
4.3.9 Test de cohérence pour une fuite de 20% sur la vanne " a_1 "	119
4.4.1 Tests de cohérence paramétrique par satisfaction de contraintes	124
4.4.2 Influence de la taille de l'horizon h_j sur l'estimation de \mathbb{P}_{F_0} , en fonction- nement nominal	127
4.4.3 Tests de cohérence paramétrique pour le modèle \mathcal{M}_{F_0}	128
4.4.4 Tests de cohérence paramétrique pour le modèle \mathcal{M}_{F_1}	130
4.4.5 Évolution du vecteur de paramètre du modèle \mathcal{M}_{F_1}	131

Publications de l'auteur

Communications dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture

1. G. Videau, T. Raïssi, A. Zolghadri, "Guaranteed state estimation for nonlinear continuous-time systems based on qLPV transformations", *European Control Conference (ECC'09)*, Budapest, Hungary, 2009.
2. G. Videau, T. Raïssi, A. Zolghadri. "Set-observer design for consistency checks of nonlinear systems", *Safeprocess09*, Barcelona, Spain, 2009.
3. G. Videau, T. Raïssi, A. Zolghadri. "Contrôle d'intégrité paramétrique par satisfaction de contraintes : Cas des systèmes non linéaires à temps continu", *CIFA*, Bucarest, Roumanie, 2008.
4. G. Videau, T. Raïssi, A. Zolghadri. "Set membership state estimation for nonlinear systems using contraction theory. A study case", *17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

Communications dans des congrès nationaux avec actes et comité de lecture

1. G. Videau, T. Raïssi, A. Zolghadri, "Détection de défauts par analyse par intervalles", *Journées Identification et Modélisation Expérimentale*, Poitiers, France, 2006.

Articles soumis à des revues internationales

1. T. Raïssi, G. Videau, A. Zolghadri, "Set-membership state and parameter estimation for nonlinear continuous-time systems based on consistency techniques", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, En révision (3^{ème} tour).
2. T. Raïssi, G. Videau, A. Zolghadri, "Interval observers design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems", *Automatica*, Révisé (2^{ème} soumission le 6 mai 2009).

Introduction générale

Les tâches de surveillance et de contrôle d'intégrité sont devenues une préoccupation majeure dans la conception, le développement, la validation et l'exploitation de systèmes industriels. De par la complexité croissante des procédés et l'augmentation des éléments technologiques intégrés, les anomalies de fonctionnement imprévues peuvent avoir un impact inacceptable sur la mission et les objectifs assignés au système. Cette problématique générale couvre un spectre disciplinaire et interdisciplinaire très large et a fait l'objet de nombreux travaux de la part de la communauté scientifique depuis quelques années (voir par exemple [Ding 2008, Chen et Patton 1999, Blanke *et al.* 2006, Ragot *et al.* 2007]). Pour garantir le fonctionnement sûr des systèmes, au niveau fonctionnel (local) et/ou comportemental (global), une étape essentielle est la mise en œuvre des fonctions de surveillance et de diagnostic fiables. L'enjeu est très important pour la surveillance des systèmes complexes critiques où le déterminisme des tâches de diagnostic et de contrôle de cohérence est une condition *sine qua non*. En d'autres termes, le résultat de ces tâches doit être en quelque sorte "garanti", ce qui tranche parfois avec la notion classique de risque, défini habituellement en termes de probabilité d'occurrence et fausse détection. En aéronautique par exemple, chaque actionneur est piloté par plusieurs calculateurs ; lorsqu'une panne est détectée dans la boucle de contrôle d'un actionneur, le calculateur associé est déconnecté et un autre prend le relais. Par conséquent, la détection doit être très robuste afin de ne pas détecter intempestivement des pannes et déconnecter à tort des calculateurs non défectueux. Pour des raisons de sécurité, les probabilités de fausse alarme et de non détection doit être "extrêmement faible".

Les méthodes auxquelles nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse sont celles à base de modèles, permettant d'assurer un haut niveau de robustesse vis-à-vis des imprécisions de connaissance. Depuis les premiers travaux précurseurs de Beard et Jones [Beard 1971, Jones 1973] à MIT où la notion de filtre de détection a été introduite pour la première fois, de nombreuses techniques et méthodes ont été développées au sein de la communauté scientifique pour résoudre ce problème (voir par exemple [Ding 2008]). La notion

de "modèle" (implicite ou explicite) se trouve être naturellement la clef de voûte et l'étape primordiale dans la construction de stratégies de diagnostic à base de modèles. La démarche générale consiste à estimer, ou reconstruire, les variables internes et/ou externes dont la déviation en dehors d'une plage de référence est révélatrice de l'apparition d'un phénomène anormal. Le fonctionnement estimé est "comparé" avec un fonctionnement de référence attendu en l'absence de pannes. Cette comparaison peut être effectuée dans l'espace des sorties, ou dans l'espace décrivant l'état interne (état/paramètres) du système. Les signaux indicateurs sont ensuite structurés (si possible, en prenant en compte des contraintes structurelles de type rang) et traités par un test de décision de façon à fournir les indicateurs de diagnostic.

Cette démarche suppose la disponibilité, *a priori*, d'une caractérisation de l'ensemble des sources d'incertitudes affectant le modèle nominal du système, généralement sous forme stochastique. Typiquement, dans le cas d'une modélisation d'état, il s'agit de caractériser le bruit d'état (connaissance imparfaite du modèle) et le bruit de mesure (imperfections des chaînes d'instrumentation/capteurs). Sur la base de cette description, la famille des techniques à base de filtre de Kalman (dans ses variantes linéaires ou non linéaires) ont été largement utilisées pour concevoir des méthodes de détection et diagnostic. Cependant, dans certaines situations, la description de l'ensemble des sources d'incertitudes en termes stochastiques pourrait s'avérer insuffisante. Par exemple, une erreur de biais, ou certaines dynamiques mal connues, de nature déterministe, peuvent plus naturellement être décrites et caractérisées à partir d'une couverture ensembliste^[2]. Fondamentalement, ces approches de modélisation placent le problème dans un contexte "erreurs inconnues mais bornées", où les incertitudes peuvent être englobées par des ensembles compacts. Les développements ultérieurs qui seront présentés dans ce mémoire se situent dans ce périmètre.

Le mémoire est organisé de la façon suivante :

Le **chapitre 1** est dédié à un tour d'horizon rapide des principales techniques de détection et de diagnostic à base de modèles. Comme nous l'avons souligné, ce thème a connu un essor important durant ces trois dernières décennies et a fait l'objet d'un nombre très important de travaux et publications (voir par exemple [Ding 2008] pour une étude récente). L'ambition de ce chapitre est par conséquent très limitée : il s'agit de faire un tour d'horizon rapide en mettant l'accent sur les caractéristiques en corrélation avec nos travaux.

^[2]L'approche "Stochastic Embedding" [Goodwin *et al.* 1992] permet de traiter le cas des dynamiques négligées par une couverture probabiliste, moyennant des approximations

Dans le **deuxième chapitre**, nous allons présenter les outils mathématiques qui sont utilisés dans la suite de ce document. Dans une première partie, nous présentons quelques définitions de base sur les ensembles. Bien que ce chapitre soit essentiellement dédié aux définitions et à la représentation des ensembles, il nous a paru pertinent d’y consacrer un chapitre, de façon à faciliter la lecture des chapitres suivants, qui contiennent notre contribution propre. La représentation des ensembles est fondamentale dans notre démarche. Un effort a été fait pour présenter de façon pédagogique et simple les outils de base afin de permettre la manipulation efficace et aisée des sous-ensembles. Parmi les approches classiques pour représenter des sous-ensembles (équation/inéquation, nuage de points, recouvrement, encadrement), l’analyse par intervalles est un moyen efficace permettant de manipuler des ensembles de façon approchée mais garantie dans un contexte non linéaire. Nous détaillons ainsi dans la seconde partie de ce chapitre les principaux outils de l’analyse par intervalles qui sont utilisés tout au long de ce document.

Le **troisième chapitre** est consacré à l’estimation d’état dans le cas de modèles non linéaires à temps continu et incertains. Les systèmes physiques sont généralement décrits par un ensemble d’équations différentielles non linéaires du premier ordre. Les composantes du vecteur d’état forment un espace dans lequel évolue les états internes du processus. Dans un grand nombre de cas, ces variables correspondent à des grandeurs qui ont un sens physique. Par conséquent, l’analyse du comportement des estimations de ces variables permettrait de mettre en place des procédures de surveillance et de contrôle de cohérence. De plus, ces variables sont généralement très sensibles aux modifications de comportement dynamique provoqué par l’impact des phénomènes externes. Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons deux approches pour déterminer un encadrement de l’espace atteignable d’une équation différentielle ordinaire (EDO). La première, basée sur une extension des modèles de Taylor aux intervalles, permet d’obtenir une approximation numérique garantie de l’encadrement de la solution d’équations différentielles incertaines. La seconde s’appuie sur les propriétés de monotonie des modèles et les théorèmes de comparaison qui en découlent. L’idée est d’encadrer les valeurs admissibles d’espaces atteignables d’EDOs incertaines par des trajectoires ponctuelles minorante et majorante. Les techniques d’approximation d’espaces atteignables d’EDOs sont utilisées dans la deuxième partie de ce chapitre afin de développer des estimateurs. Après avoir présenté l’approche par prédiction/correction, nous nous intéressons aux estimateurs d’état bornants à retour de sortie, s’appuyant sur des propriétés de monotonie et plus particulièrement de coopérativité. Nous abordons le cas des modèles linéaires à une injection près, puis nous nous intéressons à une large classe de mod-

èles non linéaires à temps continu. Pour cela, nous introduisons une approximation qLPV (quasi-Linéaire à Paramètres Variants) "garantie" des modèles non linéaires basée sur des outils de l'arithmétique par intervalles.

Enfin, le **quatrième chapitre** contient nos contributions relatives au diagnostic à base de modèles dans un contexte erreurs bornées. Après avoir décrit le compromis "garantie / conservatisme", traduisant la notion de "robustesse / sensibilité" dans un contexte ensembliste, nous nous intéressons, dans une première partie, à la formulation de tests de cohérence basés sur l'estimation d'état. D'abord, nous présentons une démarche existante basée sur les mêmes principes que les estimateurs par prédiction/correction. Puis nous développons une méthodologie de détection d'incohérences par la génération de résidus intervalles, issus d'estimateurs d'état à retour de sortie. L'idée est d'introduire un paramètre de réglage permettant d'agir sur les performances des tests de cohérence. Nous proposons également une méthode permettant de quantifier la détectabilité. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous proposons d'élaborer des tests de cohérence basés sur l'estimation paramétrique, en utilisant les outils de l'analyse par intervalles. Nous allons également, dans chacune de ces parties, appliquer les méthodologies développées à un procédé hydraulique de laboratoire.

Chapitre 1

Problématique de contrôle de cohérence et de diagnostic à base de modèles

1.1 Introduction

Dans le milieu industriel, les tâches de diagnostic sont souvent accomplies via la redondance matérielle : les chaînes matérielles sont "multipliées" en utilisant des systèmes de fonctionnalité identique. Si une incohérence de fonctionnement est détectée et confirmée, la chaîne fonctionnelle incriminée est mise hors service et un autre ensemble sain prend le relais. Ce principe simple (et robuste) fonctionne sur la plupart des systèmes industriels dits "critiques" où la sûreté de fonctionnement est une préoccupation permanente. D'autre part, la littérature traitant des méthodes de diagnostic dites "à base de modèles" ou "analytiques" a connu un essor très important depuis ces dernières années et a fait l'objet d'un nombre important de travaux. C'est probablement le thème qui a fait l'objet de plus de publications (dans toutes ses dimensions) dans le champ scientifique "Automatique", depuis le déclin du "boum" de la commande adaptative au début des années quatre-vingt dix.

Ce chapitre n'a donc pas pour objet de décrire le spectre très large des techniques de diagnostic à base de modèles. De très bons états de l'art récents existent dans la littérature, voir par exemple [Ding 2008]. Notre choix a porté sur la présentation synthétique des techniques en mettant l'accent sur les aspects qui peuvent être en corrélation avec les développements ultérieurs qui constituent le cœur de nos travaux. Le bon niveau de détails n'est certes pas aisé à trouver, tant les solutions analytiques proposées au problème de diagnostic dans la littérature sont variées. Le critère qui va guider les paragraphes suivants est surtout la mise en évidence des problèmes liés au compromis "robustesse/sensibilité" dès lors qu'il s'agit de mettre en place une démarche méthodologique de contrôle de cohérence et d'intégrité des systèmes dynamiques.

1.2 Position du problème

De façon générale, la fonction de surveillance (ou diagnostic) est définie comme l'ensemble des actions mises en œuvre afin de détecter, caractériser et localiser tout phénomène anormal affectant le comportement d'un système. Le vocable "faute", "défaut", "panne" ou "défaillance" est souvent utilisé pour qualifier le phénomène anormal qui peut être d'origine externe (lié à l'environnement dans lequel le système évolue) ou interne (lié à la modification des caractéristiques d'une ou plusieurs composantes du système). Par la suite, nous utilisons les terminologies "défaut" ou "défaillance"^[1] pour désigner "toute déviation non permise d'au moins une propriété ou d'un paramètre caractéristique" du système surveillé (voir par exemple [Isermann 1993, Ploix 1998]). Les défauts peuvent affecter les unités fonctionnelles (organes de mesure, d'action, de commande, ...) constituant le système et peuvent conduire à un mauvais fonctionnement de celui-ci. Il peut y avoir des situations où le défaut affectant une unité fonctionnelle n'entraîne pas forcément une déviation non permise du comportement dynamique global du système. Cette situation se produit notamment dans le cas des systèmes commandés en boucle fermée, où par nature, l'effet des défauts de faible amplitude ou basse fréquence sur les variables observées est rapidement compensé sur le comportement entrée/sortie par l'action du régulateur. Il n'en reste pas moins que ce type de défauts doit aussi être détecté et localisé, de façon précoce, pour identifier les composantes incriminées et mettre en place des actions correctives, sous peine d'une propagation incontrôlée vers d'autres éléments fonctionnels du système. L'ensemble des fonctions qui vise à détecter, localiser et caractériser les défauts sont élaborées à partir des techniques dites FDI (Fault Detection and Isolation) ou DLD (Détection et Localisation de Défauts). Par la suite, lorsque l'on intègre des contraintes de robustesse vis-à-vis des perturbations internes et/ou externes, on emploiera le vocable de DLRD (Détection et Localisation Robustes de Défauts).

Par ailleurs, dans la suite de ce mémoire, nous emploierons parfois le terme "contrôle de cohérence" ou d'intégrité, afin de placer le problème de surveillance dans un contexte plus large où la surveillance peut concerner aussi bien le niveau fonctionnel que le niveau comportemental.

Classiquement, trois familles de défaillances sont couramment considérées :

^[1]Le terme "défaut" ou "faute" est généralement utilisé pour désigner une anomalie de comportement au sein d'un système physique. Le terme "défaillance", quant à lui, désigne habituellement une anomalie fonctionnelle entraînant une interruption permanente de la capacité du système à assurer une fonction requise dans des conditions opérationnelles spécifiques.

- les défauts des chaînes d'instrumentation/capteurs qui affectent les sorties mesurées du système. Ils sont souvent représentés comme une entrée additive dans l'espace des sorties ;
- les défauts actionneurs qui affectent, de façon additive ou multiplicative, les signaux de commande du système ;
- les défauts agissant sur le procédé, qui se traduisent par une variation anormale des caractéristiques d'un ou plusieurs composants du système. Ces défauts sont le plus souvent de type multiplicatif et dégradent le comportement dynamique du système.

Le principe des techniques de diagnostic basées sur le concept de redondance d'informations consiste à estimer, ou reconstruire, les variables dont la déviation en dehors d'une plage de référence autorisée serait révélatrice de l'apparition d'un phénomène anormal. Le fonctionnement estimé est ensuite comparé à un fonctionnement de référence attendu en l'absence de pannes pour former des indicateurs de défauts. Ces indicateurs doivent répondre à des critères de robustesse vis-à-vis de variations internes jugées normales, et des perturbations externes. Ils doivent aussi être sensibles à tout phénomène dont l'effet peut être interprété comme un défaut agissant sur le système.

Afin d'estimer, de façon complète ou partielle, les variables internes (états, paramètres) et externes (sorties) du système à surveiller, on est amené à appliquer des techniques d'estimation et de filtrage. Considérons la représentation d'état d'un système physique, à temps discret, perturbé par un bruit d'état (représentant la connaissance imparfaite du modèle) et un bruit d'observation (représentant les bruits de mesure et d'instrumentation) :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}) + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}) + \mathbf{w}_k \end{cases}, \quad (1.2.1)$$

où \mathbf{f} et \mathbf{g} peuvent être non linéaires, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ le vecteur de commande, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ le vecteur contenant des grandeurs mesurées, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentent respectivement le bruit d'état et d'observation et $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ un vecteur de paramètre.

De façon générale, les résultats d'estimation peuvent être utilisés de deux manières différentes pour surveiller l'état de fonctionnement d'un système.

- Si l'on s'intéresse aux sorties estimées, la démarche consisterait à former des signaux résidus définis par la différence entre les données issues des chaînes de mesures et le vecteur de sorties estimées. On effectue ensuite différents tests sur la séquence d'innovation résultante, qui peut être structurée afin de réaliser les tâches de surveillance.
- Si l'on s'intéresse à la surveillance des variables internes (état et/ou paramètres), il existe des tests de cohérence dans l'espace paramétrique ou l'espace d'état pour conclure sur un changement anormal de comportement.

L'objectif des deux paragraphes suivants est de présenter brièvement les techniques d'estimation, de modélisation et de filtrage ainsi que les tests de décision classiquement utilisés pour mettre en place une démarche analytique de surveillance. Nous soulignerons ensuite les inconvénients et les limitations de ces techniques, ce qui motivera le paragraphe 1.5 dans lequel nous formulerons le problème général de surveillance comme un problème de découplage approximatif, résultant d'un critère d'optimisation min/max. Une présentation non exhaustive des techniques de résolution sera faite, en mettant l'accent sur leurs limitations spécifiques.

1.3 Techniques à base d'estimation des variables externes

Le principe est basé sur l'estimation, partielle ou intégrale, des variables de sortie et sur la comparaison de l'estimation avec les sorties mesurées pour former une séquence d'innovation qui servira d'indicateur de défauts (résidus). Les résidus sont ensuite structurés et évalués par un test d'hypothèse (voir figure 1.3.1). Le test de décision peut être simplement une logique à seuil ou un mécanisme plus complexe si les probabilités de fausses décisions sont imposées *a priori* : par exemple le test séquentiel de Wald ou le test de Pearson (voir par exemple [Brunet *et al.* 1990]).

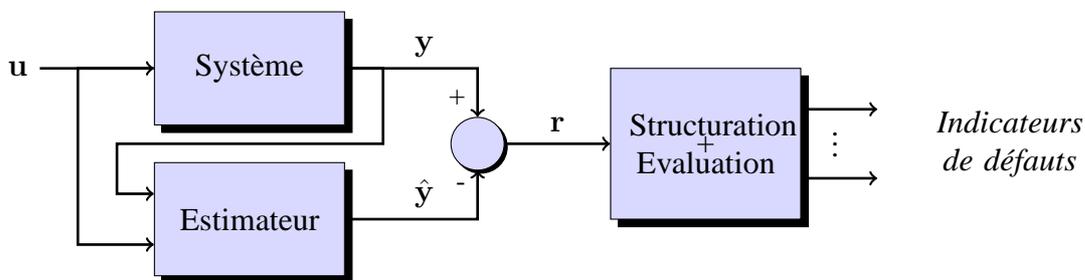


FIG. 1.3.1 – Détection à base d'estimation de variables externes

Les techniques d'estimation et leurs propriétés en termes de convergence, stabilité et performances (biais, variance, ...) ont été largement étudiées dans un contexte général (voir par exemple [Crassidis et Junkins 2004, Ljung 1999]). Supposons que les bruits d'état et de mesure sont des séquences blanches, mutuellement non corrélées, de moyennes nulles et de matrices de variance-covariance $\mathbf{Q}_k = E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$, $\mathbf{R}_k = E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T)$, supposées connues *a priori*. Dans le cas où les fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} sont linéaires et les paramètres connus *a priori*, le filtre de Kalman fournit l'estimateur optimal de l'état au sens du minimum de variance. Dans le cas général, où l'on souhaite estimer également un certain nombre de paramètres inconnus et/ou les fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} sont non linéaires, l'estimateur optimal du système représenté par les équations d'état non linéaires n'est pas réalisable en dimension finie [Lewis 1986]. La résolution du problème conduit donc à différentes techniques d'approximation des équations de filtrage. L'algorithme le plus populaire est le filtre de Kalman étendu (EKF). Ce dernier repose sur la linéarisation des fonctions non linéaires \mathbf{f} et \mathbf{g} à l'aide d'un développement de Taylor, limité à l'ordre un, autour de l'estimation courante. Les équations de filtrage peuvent être résumées comme suit^[2] :

Modèle	$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$ $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$
Initialisation	$\mathcal{C}_0 = E\{\tilde{\mathbf{x}}_0 \tilde{\mathbf{x}}_0^T\}$
Prédiction Propagation	$\hat{\mathbf{x}}_{k k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1 k-1}, \mathbf{u}_k)$ $\mathcal{C}_{k k-1} = \mathbf{F}_k \mathcal{C}_{k-1 k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$ $\mathbf{F}_k \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right _{\hat{\mathbf{x}}_{k-1 k-1}}$
Calcul du gain	$\mathbf{K}_k = \mathcal{C}_{k k-1} \mathbf{G}_k^T [\mathbf{G}_k \mathcal{C}_{k k-1} \mathbf{G}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}$ $\mathbf{G}_k \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right _{\hat{\mathbf{x}}_{k k-1}}$
Mise à jour	$\hat{\mathbf{x}}_{k k} = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k [\tilde{\mathbf{y}}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k k-1})]$ $\mathcal{C}_{k k} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k] \mathcal{C}_{k k-1}$

avec $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ l'estimation de l'état à l'instant k , $\mathcal{C}_{k|k}$ la matrice de variance-covariance de l'erreur, $\tilde{\mathbf{y}}_k$ le vecteur de mesure à l'instant k et \mathbf{I} une matrice identité de dimension appropriée.

Il est à noter qu'il existe des versions entièrement continues ou hybrides (équations d'état continues, équations d'observation discrètes, voir par exemple [Crassidis et Junkins 2004]). La formulation hybride correspondant naturellement à un contexte de description / modélisation où les dynamiques mises en jeu sont exprimées à temps continu, tandis que les mesures

^[2]Le vecteur d'état \mathbf{x} peut être un état augmenté, et contenir ainsi un certain nombre de paramètres. Dans ce cas, les fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} sont modifiées. Par souci de lisibilité, ces notations sont conservées dans la suite.

sont récupérées à temps discret. Pour cette dernière, les équations de filtrage s'écrivent de la façon suivante :

Modèle	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t) \sim N(0, \mathbf{Q}(t))$ $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}(t) \sim N(0, \mathbf{R}(t))$
Initialisation	$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0$ $\mathcal{C}_0 = E\{\tilde{\mathbf{x}}(t_0)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_0)\}$
Prédiction Propagation	$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$ $\dot{\mathcal{C}}(t) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t)\mathcal{C}(t) + \mathcal{C}(t)\mathbf{F}^T(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{Q}(t)$ $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right _{\hat{\mathbf{x}}(t)}$
Calcul du gain	$\mathbf{K}_k = \mathcal{C}_{k k-1} \mathbf{G}_k^T [\mathbf{G}_k \mathcal{C}_{k k-1} \mathbf{G}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}$ $\mathbf{G}_k \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right _{\hat{\mathbf{x}}_{k k-1}}$
Mise à jour	$\hat{\mathbf{x}}_{k k} = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k [\tilde{\mathbf{y}}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k k-1})]$ $\mathcal{C}_{k k} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k] \mathcal{C}_{k k-1}$

Quelle que soit la version utilisée, tant que l'estimée courante reste au voisinage de l'état réel du système, la linéarisation au premier ordre reste valable. Cependant, si les erreurs deviennent trop importantes (comportement du système réel trop éloigné vis-à-vis de son modèle, par exemple suite à un changement de point de fonctionnement ou à l'apparition d'un défaut), la linéarisation peut ne plus être valable et conduire à la divergence de l'estimateur. De plus, mis à part les difficultés d'implantation intrinsèques à la méthode (calcul des Jacobiens à chaque pas d'échantillonnage), certaines difficultés liées à la différence de vitesse de convergence des paramètres et de l'état peuvent parfois apparaître, compromettant la robustesse numérique de l'algorithme (vitesse de convergence des paramètres plus lente que celle des variables d'état [Reif et Unbehauen 1999]).

Il existe des versions améliorées de l'EKF développées pour limiter ces inconvénients. On peut citer le filtre de Kalman étendu du second ordre [Sadeghi et Moshiri 2007] qui, en calculant la matrice hessienne, permet de limiter les risques de divergence de l'estimateur mais présente, en contrepartie, un coût calculatoire plus important. Une autre alternative peut consister à employer des techniques d'approximations polynomiales des fonctions non linéaires. C'est notamment le cas des filtres présentés dans [Nørgaard *et al.* 2000]. Ces filtres ont été utilisés dans des domaines d'application variées :

- problème de surveillance des pics de pollution atmosphérique [Zolghadri *et al.* 2004];

- estimation de données inertielles pour des systèmes de navigation intégrés [Wan 2006] ;
- diagnostic des pannes oscillatoires d'une chaîne d'asservissement en position d'une gouverne de l'A380 [Lavigne *et al.* 2008] ;
- estimation de données pour le suivi de trajectoire d'un robot mobile [Peralta-Cabezas *et al.* 2008].

Dans cette approche, les non linéarités sont approximées par l'extension multidimensionnelle de la formule d'interpolation de Stirling [Nørgaard *et al.* 2000]. En comparaison avec l'approximation de Taylor, elle ne nécessite pas de calculs de Jacobiens, mais simplement des évaluations de fonctions. Cela permet d'avoir une mise en œuvre plus facile et il n'est plus nécessaire d'assurer la dérivabilité des non linéarités. De plus, elle est facilement re-paramétrable, d'où sa plus grande portabilité. Enfin, citons d'autres techniques de résolution comme le filtrage particulaire [Liu et Chen 1998, Pitt et Shephard 1999] ou le filtre de Kalman non parfumé (UKF) [Wan et Van Der Merwe 2000], qui offrent certains avantages par rapport à l'EKF.

Quel que soit le contexte d'utilisation "orienté surveillance" et quel que soit l'algorithme de résolution utilisé, le point crucial est le réglage adapté des matrices de variance-covariance des bruits d'état et de mesure (\mathbf{Q} et \mathbf{R}). Ces dernières conditionnent les performances de l'estimateur et doivent alors être perçues comme des paramètres de réglage de haut niveau (ou hyper-paramètres). Notons que cette vision "hyper-paramètres" de réglage correspond à une interprétation déterministe qui tranche avec les hypothèses stochastiques faites au départ au sujet des sources d'incertitudes \mathbf{v} et \mathbf{w} . Le réglage de la matrice \mathbf{Q} permet de moduler la flexibilité du modèle (le degré de confiance que l'on accorde au modèle), alors que la matrice \mathbf{R} contrôle la flexibilité de l'équation d'observation. Dans le cas linéaire, il existe des techniques pour un réglage systématique de ces paramètres, d'après un critère de performance donné [Mehra 1970]. Dans le cas non linéaire, le problème de réglage est plus complexe et on a recours à certaines techniques itératives, comme par exemple l'approche présentée dans [Badr *et al.* 2008].

Le paragraphe suivant a pour objectif de décrire brièvement quelques tests de décision dans l'espace paramétrique afin de détecter un changement anormal des paramètres internes pouvant être révélateur de l'apparition d'un ou plusieurs défauts affectant le comportement du système.

1.4 Tests de cohérence sur les variables internes

Supposons que l'on dispose d'un estimateur (par exemple un de ceux cités dans le paragraphe précédent). Ce dernier fournit une estimation de la valeur nominale d'un vecteur de paramètres $\hat{\mathbf{p}}$ du modèle spécifié ainsi que sa matrice de variance-covariance associée $\hat{\mathbf{C}}$, censée traduire la variabilité des paramètres en fonctionnement normal. Par la suite, on note le couple $(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{C}})$ obtenu en fonctionnement normal par $(\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{C}}_1)$ et le couple estimé à partir des données en ligne par $(\hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{C}}_2)$. On suppose également que les "hyper-paramètres", contrôlant les performances de l'estimateur, ont été réglés selon un critère de performance spécifié (temps de réponse, robustesse, ...).

Supposons que l'on dispose d'un couple vecteur de paramètre et matrice de variance-covariance calculés *a priori* à partir d'un cycle de fonctionnement jugé normal. Dans l'hypothèse où les paramètres sont constants en fonctionnement normal, leur variabilité est uniquement due à la propagation des perturbations. Ainsi, toute variation significative d'un paramètre peut être interprétée comme la révélation d'un ou plusieurs défauts affectant le comportement du système.

Le problème de détection revient donc à décider si pour un modèle donné l'estimation des paramètres en ligne est cohérente avec l'estimation de référence. Cette décision peut être prise par la mise en place de tests de détection de changements internes. Dans la suite de ce paragraphe, nous présentons deux types de tests. Le premier, correspond à un test de *chi-deux* (χ^2). Ce test est basé sur l'évaluation d'une distance dans l'espace paramétrique. Le second, dit RC2^[3], repose sur le suivi de l'évolution de l'espace paramétrique admissible obtenu au cours du fonctionnement du système (en ligne) et sur sa comparaison avec un espace de référence issu d'une phase de fonctionnement normal.

1.4.1 Détection de variations paramétriques par le test de chi-deux

Le problème que nous cherchons à résoudre consiste à choisir l'une des deux hypothèses suivantes :

- H_0 : le système est dans un état jugé "normal", c'est-à-dire les variations paramétriques observées ne sont pas provoquées suite à l'apparition d'un défaut ;
- H_1 : H_0 n'est pas vrai.

^[3]Pour : deux Régions de Confiance

La procédure de détection d'un changement dans les caractéristiques du système peut être basée sur l'étude de la différence des paramètres estimés :

$$\widehat{\delta\mathbf{p}} = \widehat{\mathbf{p}}_1 - \widehat{\mathbf{p}}_2. \quad (1.4.1)$$

D'après [Ljung 1999], si la structure du modèle est assez riche pour inclure le vrai vecteur de paramètre \mathbf{p} et si le nombre de données (noté N) est assez grand, $(\mathbf{p} - \widehat{\mathbf{p}}_1)$ et $(\mathbf{p} - \widehat{\mathbf{p}}_2)$ sont des vecteurs aléatoires suivant une distribution gaussienne :

$$\sqrt{N_i}(\widehat{\mathbf{p}}_1 - \mathbf{p}) \in AsN^{[4]}(0, \mathcal{P}_i), \text{ avec } \mathcal{C}_i = \frac{\widehat{\mathcal{P}}_i}{N_i}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (1.4.2)$$

où N_i est le nombre de données et la matrice de covariance asymptotique $\widehat{\mathcal{P}}_i$ peut être estimée d'après les mesures.

Sous l'hypothèse H_0 et en admettant que $\widehat{\mathbf{p}}_1$ et $\widehat{\mathbf{p}}_2$ sont indépendants, nous avons :

$$\widehat{\delta\mathbf{p}} \in AsN(0, \delta\mathcal{P}), \quad (1.4.3)$$

$$\widehat{\delta\mathcal{P}} \cong \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2. \quad (1.4.4)$$

En se basant sur la relation statistique (1.4.3), différents tests peuvent être construits pour détecter un changement [Carlsson *et al.* 1988]. Par exemple, il est possible de poser le test de chi-deux :

$$T = \widehat{\delta\mathbf{p}}^T \widehat{\delta\mathcal{P}}^{-1} \widehat{\delta\mathbf{p}}, \quad (1.4.5)$$

où la variable T est distribuée asymptotiquement suivant une loi de χ^2 avec n_p degrés de libertés. Tester H_0 en testant T sur un intervalle de confiance donné (la probabilité du rejet de H_0 quand H_0 est vrai) donne lieu au test bien connu de chi-deux.

1.4.2 Tests basés sur les régions de confiance

Le test RC2 a été développé, dans sa version originale par [Kerr *et al.* 1980] pour des applications liées à la navigation inertielle dans le domaine aéronautique. La solution initiale proposée dans [Kerr *et al.* 1980] conduit à un problème d'optimisation, délicat à résoudre dans certaines situations où le test de décision est censé converger en un temps très court. Dans [Zolghadri 1996] une technique géométrique de résolution, radicalement différente, a été proposée conduisant à un mécanisme de résolution plus simple.

^[4]Asymptotiquement Normalement Distribué

Dans ce paragraphe, nous allons présenter le principe et l'algorithme de résolution qui en résulte. Le lecteur intéressé pourra se référer aux références citées plus haut pour de plus amples détails.

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent et en supposant que la loi de distribution de $(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_i)$, $i \in \{1, 2\}$ est effectivement gaussienne, on montre [Ljung 1999] que les scalaires :

$$x_i = (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_i)^T \mathcal{C}_i^{-1} (\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_i), \quad i \in \{1, 2\}, \quad (1.4.6)$$

suivent une loi de chi-deux à n_p degrés de libertés :

$$P_i(\alpha) = Prob(x_i \leq \alpha) = Prob(\chi_{n_p}^2 \leq \alpha). \quad (1.4.7)$$

Ainsi, si l'on fixe le même niveau de confiance ρ dans les deux estimations, il est possible de construire des régions de confiance des variables représentables par deux ellipsoïdes de confiance centrés sur $\hat{\mathbf{p}}_1$ et $\hat{\mathbf{p}}_2$:

$$E(\hat{\mathbf{p}}_i, \rho) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p} \mid (\hat{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p})^T \mathcal{C}_i^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}) \leq \alpha\} \quad i \in \{1, 2\}. \quad (1.4.8)$$

Le test RC2 consiste à :

- Choisir H_0 si $\exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$, tel que : $\{\mathbf{p} \in E(\hat{\mathbf{p}}_1, \rho) \wedge \mathbf{p} \in E(\hat{\mathbf{p}}_2, \rho)\}$;
- Choisir H_1 sinon.

Ce qui revient à décider s'il existe une partie commune entre la région de confiance autour des variables de référence en fonctionnement nominal et la région de confiance autour des variables estimées en ligne. On peut souligner que le test RC2 et le test de chi-deux coïncident dans le cas monodimensionnel comme des tests sur le chevauchement des intervalles de confiance. En général le test chi-deux est bien placé pour détecter des défauts "soft", tandis que le test RC2 est plus approprié pour détecter des changements brusques dans les applications où un très faible taux de fausses alarmes est d'une importance majeure.

Dans le cas où le vecteur de paramètres ne serait pas constant dans le temps, les approches présentées dans ce paragraphe sont applicables, si l'on peut disposer d'une estimation *a priori* du scénario d'évolution des variables internes étudiées.

Le mécanisme de déroulement de l'algorithme RC2 est donné par l'algorithme 1.

Algorithme 1 Test RC2

ENTRÉES : $\hat{\mathbf{p}}_1, \mathcal{C}_1, \hat{\mathbf{p}}_2(k), \mathcal{C}_2(k), \rho$

1: **Si** $(\hat{\mathbf{p}}_2(k) - \hat{\mathbf{p}}_1)^T \mathcal{C}_1^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_2(k) - \hat{\mathbf{p}}_1) \not\leq \alpha \Rightarrow \hat{\mathbf{p}}_1 \in E(\hat{\mathbf{p}}_2, \rho)$, **Alors**

2: **Retourne** H_0 (les deux régions de confiance chevauchent)

3: **Fin (Si)**

4: Chercher la racine négative λ_0 de $F(\lambda)$,

où $F(\lambda) = V^T(\lambda) \mathcal{C}_2^{-1}(k) V(\lambda) - \alpha$,

$V(\lambda) = (\lambda \mathcal{C}_2^{-1}(k) - \mathcal{C}_1^{-1})^{-1} \mathcal{C}_1^{-1} (\hat{\mathbf{p}}_2(k) - \hat{\mathbf{p}}_1)$,

$F(-\infty) = -\alpha$ et $F(0) > 0$,

avec une valeur initiale $A < 0$ telle que $F(A) < 0$.

5: $W = (\lambda_0 \mathcal{C}_2^{-1}(k) - \mathcal{C}_1^{-1})^{-1} \mathcal{C}_2^{-1}(k) (\hat{\mathbf{p}}_2(k) - \hat{\mathbf{p}}_1)$

6: **Si** $\lambda_0^2 W^T \mathcal{C}_1^{-1} W > \alpha$, **Alors**

7: **Retourne** H_0

8: **Sinon**

9: **Retourne** H_1

10: **Fin (Si)**

SORTIE : H_0 ou H_1

1.5 Techniques basées sur une formulation explicite des objectifs de diagnostic

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté un certain nombre de techniques d'estimation et de tests de décision pour résoudre le problème de diagnostic. Ces approches, s'inscrivent dans un contexte stochastique et reposent sur l'estimation d'un certain nombre de variables internes et/ou externes du système qui, une fois traitées, sont censées fournir des indicateurs plus ou moins fiables sur l'état de santé du système. Associées à une certaine dose d'expertise et de savoir faire, ces techniques sont aujourd'hui bien ancrées dans différents domaines d'application. Cependant, elles présentent un inconvénient qui, dans un contexte de diagnostic et contrôle de cohérence, devient handicapant. En effet, ces techniques ne permettent pas de formuler explicitement les objectifs de robustesse et de sensibilité lorsque l'on aborde le problème de synthèse en diagnostic. En d'autres termes, la phase de génération ne permet pas d'intégrer pleinement les objectifs de sensibilité et de robustesse des résidus, ces objectifs sont souvent gérés lors de l'évaluation par un test de décision. Le niveau de performances atteint est alors souvent issu de procédures itératives visant à régler les différents paramètres de réglage, intrinsèques à l'algorithme employé, jusqu'à l'obtention de résultats jugés satisfaisants, obtenus à l'issu de longues campagnes de tests et de simulations.

Le problème de diagnostic peut être abordé d'une manière différente en formulant de façon explicite les objectifs de robustesse et de sensibilité lors de la synthèse des résidus. Ainsi, idéalement, le vecteur de résidus doit être nul en fonctionnement normal et présenter un changement de comportement statistique significatif en présence d'une défaillance. Autrement dit, l'ensemble des perturbations \mathbf{d} ne doit pas, contrairement aux défauts \mathbf{f} , affecter le résidu. Pour illustrer le concept, considérons que le système à surveiller est commandé en boucle ouverte. Le signal de commande $\mathbf{u}(t)$ est donc parfaitement connu et n'influe pas sur les propriétés du signal indicateur de défauts. Aussi, on admettra que le résidu $\mathbf{r}(t)$ ne dépend que des vecteurs de perturbations \mathbf{d} et de défaillances \mathbf{f} , via une fonction vectorielle Ψ , telle que :

$$\mathbf{r}(t) = \Psi(\mathbf{d}(t), \mathbf{f}(t)). \quad (1.5.1)$$

Les objectifs du problème de DLRD (*Détection et Localisation Robustes de Défauts*) peuvent alors s'exprimer comme :

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{d}(t), 0) = \mathbf{0} \\ \Psi(\mathbf{d}(t), \mathbf{f}(t)) \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Ces objectifs expriment un découplage parfait entre les effets des perturbations et des défauts. Il est rare que l'on puisse atteindre cet objectif de découplage parfait. Pour cette raison, la problématique de détection peut être redéfinie comme un problème de découplage approximatif :

$$\begin{cases} \|\Psi(\mathbf{d}(t), 0)\|_p < \alpha \\ \|\Psi(\mathbf{d}(t), \mathbf{f}(t))\|_p > \beta \end{cases} \quad (1.5.3)$$

où $\|\cdot\|_p$ avec $p = \{1, 2, \infty\}$ est une norme (voire annexe A) et où α et β représentent les niveaux respectifs de robustesse vis-à-vis des perturbations \mathbf{d} et de sensibilité vis-à-vis des défauts \mathbf{f} .

Autrement dit, d'un point de vue synthèse, le problème de DLRD consiste à construire des signaux indicateurs de défauts qui soient le plus robuste possible vis-à-vis des entrées inconnues et le plus sensible possible vis-à-vis de tout phénomène dont l'effet peut être interprété comme un défaut agissant sur le système. Il s'agit donc typiquement d'un problème d'optimisation de type min/max.

Qualitativement, le problème de robustesse se traduit par la génération d'un vecteur de résidus \mathbf{r} de telle sorte que le rapport entre une mesure (par exemple la norme 2) de \mathbf{r} et une mesure du vecteur des entrées inconnues \mathbf{d} soit minimisé. De même, on peut considérer que la contrainte de sensibilité revient à générer un vecteur de résidus de telle sorte que

le rapport entre cette même mesure de l'erreur d'estimation \mathbf{r} et une mesure du vecteur de défaut \mathbf{f} soit maximisé. Ce qui revient à formuler le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sup_{\|\mathbf{d}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{d}\|_2} \\ \max \inf_{\|\mathbf{f}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}, \end{array} \right. \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (1.5.4)$$

où Ω_f est une zone de fréquence spécifiée sur laquelle la sensibilité de \mathbf{r} vis-à-vis de \mathbf{f} doit être atteinte.

En termes d'opérateurs, ces relations sont équivalentes à un problème de min/max qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \|T_{\mathbf{dr}}(p)\|_{\infty} \\ \max \|T_{\mathbf{fr}}(p)\|_{-} \end{array} \right. \quad (1.5.5)$$

où $\|\cdot\|_{\infty}$ représente la norme \mathcal{H}_{∞} , $\|\cdot\|_{-}$ la norme \mathcal{H}_{-} (voir l'annexe A) et où $T_{\mathbf{dr}}(p)$ et $T_{\mathbf{fr}}(p)$ sont respectivement la matrice de transfert entre \mathbf{r} et \mathbf{d} et la matrice de transfert entre \mathbf{r} et \mathbf{f} .

Le problème consiste à générer un résidu tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{\mathbf{dr}}(j\omega)) < \alpha \\ \inf_{\omega} \underline{\sigma}(T_{\mathbf{fr}}(j\omega)) > \beta, \end{array} \right. \quad \forall \omega \in \Omega_f \quad (1.5.6)$$

où $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ représentent respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière.

Idéalement, pour obtenir un bon niveau de détection, le niveau de robustesse α doit être le plus petit possible. A l'inverse, le niveau de sensibilité β (qui assure une sensibilité minimale), doit être le plus grand possible. Ceci conduit à minimiser le critère suivant pour résoudre le problème de détection robuste :

$$J_{+/-} = \frac{\|T_{\mathbf{dr}}(p)\|_{\infty}}{\|T_{\mathbf{fr}}(p)\|_{-}}. \quad (1.5.7)$$

Parmi le vaste panel des méthodes ou techniques de résolution qui existent dans la littérature pour résoudre ce problème, nous allons brièvement présenter trois familles de méthodologies fréquemment utilisées. De très bons états de l'art sur l'analyse de ces méthodes peuvent être trouvés dans la liste non exhaustive des références suivantes [Chen et Patton 1999, Edelmayer et Bokor 2000, Frank *et al.* 2000, Blanke *et al.* 2006, Isermann

2005 ; 2006, Ding 2008]. Ces trois grandes approches sont :

- l’approche par projection dans l’espace de parité ;
- les approches à base d’observateurs de diagnostic ;
- les approches basées sur la synthèse directe de filtres.

Par la suite, nous allons mettre l’accent sur la manière dont ces approches répondent aux spécifications décrites dans ce paragraphe. L’approche à base de vecteur de parité (voir par exemple [Chen et Patton 1999, Chow et Willsky 1984]), le résidu est généré en projetant les données mesurées dans un espace appartenant au sous espace vectoriel supplémentaire au sous espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice d’observabilité d’ordre réduit (ordre de l’espace de parité). Dans un contexte min/max, cet espace de projection est déterminé de façon à ce que le résidu obtenu soit le plus robuste possible vis-à-vis des entrées inconnues et le plus sensible possible vis-à-vis des défauts. Dans les approches à base d’observateurs (voir par exemple [Chen et Patton 1999]) tout comme dans une approche par synthèse directe de filtre DLD (voir par exemple [Mangoubi 1998, Rank et Niemann 1999, Henry et Zolghadri 2005]), l’idée est de définir le résidu comme étant la différence entre une combinaison linéaire des sorties et des entrées et leurs estimations respectives, tout en minimisant le critère d’optimisation min/max.

1.5.1 Découplage par projection dans l’espace de parité

La méthode est basée sur l’exploitation de la redondance analytique présente dans les équations d’état lorsque celles-ci sont écrites sur un horizon d’observation s (voir par exemple [Chow et Willsky 1984]).

Considérons le modèle d’état discret :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_1\mathbf{d}(t) + \mathbf{K}_1\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_2\mathbf{d}(t) + \mathbf{K}_2\mathbf{f}(t) \end{cases} \quad (1.5.8)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n_f}$ sont respectivement les vecteurs d’état, de commande, de mesure, de perturbation et de défaut.

Sur un horizon d'observation s , les équations d'état peuvent être mises sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}(t-s) \\ \mathbf{y}(t-s+1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}(t-s,t)} = \underbrace{OBS}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{COM_u}_{\mathbf{u}(t-s,t)} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t-s) \\ \mathbf{u}(t-s+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{COM_d}_{\mathbf{d}(t-s,t)} \begin{pmatrix} \mathbf{d}(t-s) \\ \mathbf{d}(t-s+1) \\ \vdots \\ \mathbf{d}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{COM_f}_{\mathbf{f}(t-s,t)} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t-s) \\ \mathbf{f}(t-s+1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t) \end{pmatrix} \quad (1.5.9)$$

où OBS est la matrice d'observabilité d'ordre s , COM_u , COM_d et COM_f sont respectivement les matrices de Hankel des quadruplés $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, $(\mathbf{A}, \mathbf{E}_1, \mathbf{C}, \mathbf{E}_2)$ et $(\mathbf{A}, \mathbf{K}_1, \mathbf{C}, \mathbf{K}_2)$, voir [Chow et Willsky 1984]. Le résidu est alors défini par :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}^T (\mathbf{y}(t-s, t) - COM_u \mathbf{u}(t-s, t)), \quad (1.5.10)$$

où le vecteur de parité \mathbf{v} est construit de telle sorte que :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^T COM_d = 0 \\ \mathbf{v}^T COM_f \neq 0 \end{cases} \quad (1.5.11)$$

Les conditions issues de (1.5.11) impliquent un découplage parfait avec les perturbations. Le critère de découplage approximatif revient à minimiser le rapport :

$$J_{+/-} = \frac{\|\mathbf{v}^T COM_d\|_2}{\|\mathbf{v}^T COM_f\|_2}. \quad (1.5.12)$$

On montre que ce problème d'optimisation peut être formulé comme un problème de valeurs propres/vecteurs propres généralisé qui peut être résolu à l'aide du théorème de Gantmacher (voir par exemple [Frank 1990]). Plus précisément, on peut réécrire le critère précédent de la manière suivante :

$$J_{+/-} = \frac{\|\mathbf{w}^T \mathbf{v}_0 COM_d\|_2}{\|\mathbf{w}^T \mathbf{v}_0 COM_f\|_2}. \quad (1.5.13)$$

où \mathbf{v}_0 est une solution de :

$$\mathbf{v}_0^T OBS = 0. \quad (1.5.14)$$

Très souvent, on choisit la solution orthonormale parmi une infinité de solutions possibles. En appliquant le théorème de Gantmacher [Frank 1990], on trouve ainsi le "sélecteur" optimal \mathbf{w}^T , qui fournit la meilleure solution en termes de robustesse vis à vis de \mathbf{d} et de

sensibilité vis à vis de f .

Les limitations d'une telle approche proviennent essentiellement de la modélisation utilisée, qui ne permet pas de considérer les dynamiques négligées dans le modèle, ni d'intégrer dans le critère des objectifs sur la dynamique d'évolution du vecteur de résidus. Certains travaux tentent de contourner le problème des dynamiques mal connues et/ou inconnues en utilisant des seuils adaptatifs dans la phase d'évolution des signaux indicateurs de défauts (voir par exemple [Patton 1997]).

1.5.2 Découplage à l'aide d'observateurs de diagnostic

La présentation qui va suivre est faite dans un contexte continu, afin de faciliter la lecture de l'analyse min/max qui est effectuée à l'aide des normes et opérateurs, souvent définis en temps continu. Néanmoins, l'analyse est facilement transposable en temps discret, sachant que l'étude est faite dans un contexte linéaire.

L'idée de base des observateurs de diagnostic est d'estimer une combinaison linéaire des sorties à partir d'un modèle du procédé. Ce principe est illustré sur la figure 1.5.1. L'erreur d'estimation (directe ou pondérée) est alors prise comme résidu.

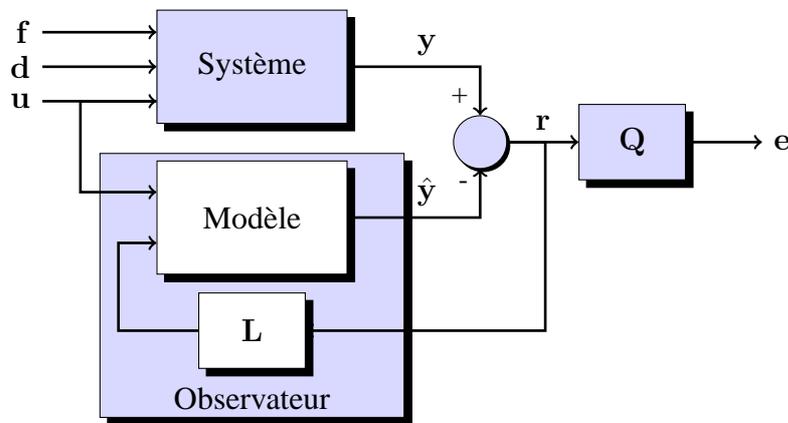


FIG. 1.5.1 – Techniques de détection à base d'estimation des variables externes

Considérons alors le modèle nominal à temps continu :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_1\mathbf{d}(t) + \mathbf{K}_1\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_2\mathbf{d}(t) + \mathbf{K}_2\mathbf{f}(t) \end{cases} \quad (1.5.15)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n_f}$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de mesure, de perturbation et de défaut, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ est la réalisation d'état

nominale du système à surveiller et $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ sont des matrices de distribution de dimensions appropriées.

Le modèle de l'observateur de diagnostic (figure 1.5.1) se représente de la manière suivante :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{e}(t) &= \mathbf{Q}\mathbf{r}(t) \end{cases} \quad (1.5.16)$$

où $\mathbf{r}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)$, \mathbf{L} est le gain de l'observateur et \mathbf{Q} est une matrice de structuration.

Dans le cas où $\mathbf{D} = 0$, l'erreur d'estimation de sortie est dépendante des vecteurs de perturbations et de défauts, et indépendante de la commande nominale \mathbf{u} du système. Ainsi on peut écrire :

$$\mathbf{e} = \mathbf{Q}(T_{\mathbf{dr}}(p)\mathbf{d} + T_{\mathbf{fr}}(p)\mathbf{f}) = T_{\mathbf{de}}(p)\mathbf{d} + T_{\mathbf{fe}}(p)\mathbf{f}, \quad (1.5.17)$$

où $T_{\mathbf{dr}}(p)$ et $T_{\mathbf{fr}}(p)$ sont respectivement les matrices de transfert de \mathbf{d} vers \mathbf{r} et de \mathbf{f} vers \mathbf{r} et $T_{\mathbf{de}}(p)$ et $T_{\mathbf{fe}}(p)$ sont respectivement les matrices de transfert entre l'erreur d'estimation de sortie \mathbf{e} et le vecteur \mathbf{d} et la matrice de transfert entre l'erreur d'estimation de sortie \mathbf{e} et le vecteur \mathbf{f} .

Le problème que l'on cherche à résoudre consiste alors à déterminer \mathbf{L} et \mathbf{Q} satisfaisant des objectifs spécifiés en terme de robustesse et de sensibilité. Dans la suite de ce paragraphe, nous présentons deux approches récentes à base d'observateur permettant de déterminer le gain d'observateur \mathbf{L} tout en minimisant le critère $J_{+/-}$.

Une première approche, décrite par exemple dans [Chen et Patton 1999], consiste à exprimer le critère $J_{+/-}$ à l'aide des normes $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_-$ et à utiliser des techniques d'optimisation LMIs (Linear Matrix Inequalities) pour sa résolution. Nous invitons le lecteur intéressé à se référer à l'annexe A pour les définitions des normes \mathcal{H}_∞ et \mathcal{H}_- . Cette approche résout donc le problème de DLRD en garantissant un niveau de sensibilité minimal à $\omega = 0$, ce qui permet de maximiser le gain statique de $T_{\mathbf{fe}}(p)$. En revanche, elle ne permet pas de maîtriser la dynamique de l'évolution $T_{\mathbf{fe}}(p)$, ce qui constitue un handicap majeur.

L'observateur $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_-$, développé dans [Rambeaux 2001] permet, quant à lui, de minimiser la norme \mathcal{H}_∞ du transfert $T_{\mathbf{de}}(p)$ et de maximiser la norme \mathcal{H}_- du transfert $T_{\mathbf{fe}}(p)$ sur un espace fréquentiel fini. Cette approche comprend deux étapes : la première consiste à synthétiser un observateur permettant de générer un résidu robuste vis-à-vis des perturbations, tout en maximisant la sensibilité vis-à-vis des défaillances. La seconde consiste à construire un seuillage optimum du résidu qui prend en compte les incertitudes de type paramétrique. Le gain de l'observateur \mathbf{L} est alors la solution de deux LMIs associées aux contraintes de

robustesse de sensibilité minimale (1.5.6). L'existence d'une matrice \mathbf{P} symétrique définie positive ainsi que d'une matrice \mathbf{L} solution de ces LMIs permet de déduire le gain de l'observateur.

Ce gain garantit les niveaux de performances nominales prédéfinis en robustesse et en sensibilité. Pour optimiser cette méthode, des pondérations sur $T_{dy}(p)$ et $T_{fy}(p)$ (matrices de transfert respectives entre les entrées perturbatrices et les défaillances, et la sortie y) peuvent être introduites de façon à spécifier l'espace des fréquences sur lequel les performances doivent être optimum.

Une autre approche, développée dans [Chen *et al.* 1996, Chen et Patton 1999], propose de synthétiser le gain d'observateur \mathbf{L} dans un contexte \mathcal{H}_∞ , comme la solution d'un problème d'optimisation multi-objectifs en empilant toutes les contraintes de robustesse et tous les objectifs de performances ; par exemple :

- contrainte de sensibilité :

$$J_1 = \max_{\mathbf{L}} \inf_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} \underline{\sigma}(T_{fe}(j\omega)). \quad (1.5.18)$$

Cet objectif, qui est un problème de maximisation, est transformé en un problème de minimisation en utilisant la propriété sur les valeurs singulières : $\bar{\sigma}(\mathbf{A}^{-1}) = \underline{\sigma}(\mathbf{A})$. Le critère J_1 devient alors :

$$J_1 = \min_{\mathbf{L}} \sup_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} \bar{\sigma}(T_{fe}^{-1}(j\omega)) ; \quad (1.5.19)$$

- contrainte de robustesse :

$$J_2 = \min_{\mathbf{L}} \sup_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} \bar{\sigma}(T_{de}(j\omega)) ; \quad (1.5.20)$$

- contrainte de maximisation du gain statique entre le résidu et les défauts :

$$J_3 = \max_{\mathbf{L}} \|\mathbf{A} - \mathbf{LC}\|_\infty ; \quad (1.5.21)$$

- contrainte de placement de pôles afin d'imposer la dynamique du résidu ;
- contrainte sur la localisation des défauts.

Tout comme dans le paragraphe précédent, des matrices de pondérations sont attribuées

à chaque contrainte de façon à optimiser les performances du résidu. La technique de résolution qui est proposée dans [Chen et Patton 1999] s'appuie sur un algorithme génétique.

Les techniques de synthèse à base d'observateurs, que nous venons de décrire très brièvement, proposent des solutions pour minimiser le critère $J_{+/-}$. Chacune de ces approches comporte des limitations spécifiques. Si l'optimisation des résidus est faite dans un contexte \mathcal{H}_∞ , les résultats obtenus sont souvent conservateurs. Une analyse *a posteriori* serait donc nécessaire pour qualifier le degré de conservatisme et pour tester la robustesse de l'observateur. Cette procédure d'analyse est nécessaire pour conclure sur le degré d'atteinte des objectifs et de fournir des indications sur la manière dont les contraintes pourraient être réalisées et modifiées. De plus, l'empilement des contraintes pourrait rendre délicat la résolution numérique du problème de synthèse. Il est à noter également que, de façon générale, seule une classe restreinte d'incertitudes, les incertitudes dites structurées, peuvent être prises en compte dans la phase de génération des résidus. Toutes les approches à base d'observateurs (ou d'espace de parité), utilisant un mécanisme de découplage approximatif, supposent que les matrices de distribution des entrées inconnues sont "connues" ou bien qu'elles peuvent être estimées. On peut également souligner que dans le cas des systèmes incertains, l'observateur de diagnostic synthétisé verra ses performances modifiées si le système surveillé est commandé en boucle fermée. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, la boucle de commande a pour effet de minimiser l'influence des défauts sur le vecteur de résidus.

1.5.3 Approche par synthèse directe de filtres de diagnostic

Une autre approche, plus générale, pour résoudre le problème d'optimisation formulé par (1.5.7), correspond à la famille des méthodes qui ont été développées récemment dans un contexte \mathcal{H}_∞ (voir par exemple [Ding 2008]). On peut distinguer :

- les approches à base d'estimateurs robustes \mathcal{H}_∞ . Ces dernières reposent sur la synthèse d'un filtre dynamique tel que le signal indicateur de défauts soit une estimation robuste des défauts (voir par exemple [Mangoubi 1998]) ;
- les approches basées sur la génération de résidus. Ces approches reposent sur la synthèse conjointe d'un filtre dynamique et de deux matrices de structuration (statiques) M_y et M_u pour fusionner de façon optimale (au sens d'un critère) les informations issues des chaînes de mesure et des signaux de commande. Dans ces dernières approches, les objectifs de synthèse sont formulés et gérés dans un contexte $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_-$ permettant, à la différence des premières méthodes, une gestion plus aisée du com-

promis robustesse/sensibilité (voir par exemple [Henry et Zolghadri 2005]).

Les objectifs de synthèse sont formulés et gérés au moyen de fonctions de pondérations basées sur une connaissance sur le contenu énergétique des défaillances et des perturbations. Par ailleurs, ces techniques sont basées sur l'utilisation des outils de l'algèbre LFT (Transformation Linéaire Fractionnaire) qui offre une grande flexibilité de modélisation et autorise la prise en compte d'une grande classe d'incertitudes de modélisation.

Techniques basées sur le filtrage \mathcal{H}_∞

Dans l'approche à base d'estimateurs robustes \mathcal{H}_∞ , le problème de diagnostic repose sur la synthèse d'un filtre dynamique tel que le signal indicateur de défauts soit l'estimation elle-même des défauts, *i.e.* $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{f}}$. Le principe de base est illustré sur le schéma fonctionnel 1.5.2.

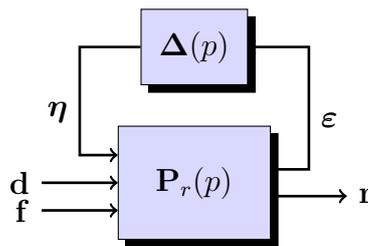


FIG. 1.5.2 – Problème d'estimation de défauts \mathcal{H}_∞ , où Δ représente un bloc d'incertitudes (ayant une structure bloc diagonale).

Il est alors montré (voir par exemple [Ding 2008, Henry et Zolghadri 2005]) que le problème d'estimation robuste de défauts peut être formulé comme un problème \mathcal{H}_∞ augmenté exprimé dans un formalisme LFT. Ce problème est ensuite formulé en termes LMI et résolu par des solveurs LMI disponibles. Pour de plus amples détails, le lecteur intéressé pourra se référer à l'ouvrage [Ding 2008].

Formulation dans un contexte $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_-$

Une solution alternative consiste à exprimer les contraintes de robustesse en termes \mathcal{H}_∞ , les spécifications de performance en termes \mathcal{H}_- , et transformer le problème min/max qui en résulte en un problème \mathcal{H}_∞ fictif. Cette approche a été notamment développée dans [Henry et Zolghadri 2005].

1.6 Conclusion

Après une brève introduction dans laquelle nous avons décrit la problématique abordée et le contexte général du chapitre, nous avons présenté quelques techniques basées sur le concept de redondance informationnelle afin de vérifier la cohérence du comportement d'un système dynamique. Ces techniques, dites analytiques, ou à base de modèles, utilisent un modèle des dynamiques mises en jeu et parfois un modèle (plus ou moins précis) des perturbations endogènes et/ou exogènes. Encore une fois, notre tour d'horizon n'est certes pas complet étant donné le large spectre des méthodes existantes dans la littérature. Le choix a porté sur les techniques jugées les plus répandues et qui ont été souvent utilisées dans différents domaines scientifiques et secteurs d'application. Les techniques présentées ont fait l'objet d'une analyse critique de manière à mettre en évidence leurs limitations. Cette analyse permet à présent d'introduire les développements qui font l'objet des chapitres suivants. L'étape primordiale dans la construction de stratégies de diagnostic et de contrôle de cohérence est l'étape de modélisation ; les performances obtenues sont conditionnées d'une part par la qualité du modèle, et d'autre part par la manière dont ce modèle sera utilisé. Le schéma directeur de la suite de ce mémoire est construit autour d'une approche de modélisation différente par rapport aux méthodes présentées dans ce chapitre. Il s'agit de construire la couverture ensembliste minimale pour effectuer les tâches de contrôle de cohérence et d'intégrité. Ces thèmes seront abordés dans les chapitres 3 et 4.

Le chapitre suivant est un chapitre de transition où nous introduisons l'ensemble des outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension des chapitres 3 et 4 comportant, encore une fois, notre contribution propre et le coeur de nos travaux.

Chapitre 2

Analyse par intervalles : un outil du calcul ensembliste

2.1 Introduction

Certains systèmes physiques sont décrits par des modèles mathématiques comportant des paramètres incertains dont le domaine est connu *a priori*. Dans ce cas, le comportement ne peut pas être déterminé d'une manière unique mais une enveloppe peut être calculée. Selon la méthode de caractérisation, ces enveloppes peuvent sur-estimer ou sous-estimer l'ensemble des trajectoires admissibles du système. Dans le cadre de cette thèse, nous allons nous intéresser à une méthodologie basée sur les ensembles permettant de garantir que les enveloppes englobent toutes les trajectoires admissibles.

L'avantage de cette approche est qu'aucune information stochastique sur les variables incertaines n'est nécessaire mais on suppose que leurs domaines admissibles sont disponibles. Ainsi, aucune hypothèse n'est faite sur la répartition des éléments composants ces supports et ils ont tous le même poids. Dans le domaine de l'estimation, cette approche se justifie en partie par le fait que les incertitudes de mesure introduites par les capteurs sont généralement données en terme de tolérance et non pas en terme de densité de probabilité. Les méthodes d'estimation basées sur les ensembles permettent de propager les domaines d'incertitude afin de déterminer une enveloppe contenant d'une manière garantie la "vraie" trajectoire du système.

Dans le cas non linéaire, la majorité des méthodes ensemblistes pour l'estimation sont basées sur l'analyse par intervalles. Initialement développée pour quantifier les erreurs numériques dues à la représentation finie des nombres réels sur un ordinateur [Moore 1966, Sunaga 1958], l'analyse par intervalles est devenue un outil de résolution numérique, globale et garantie de problèmes d'estimation. Durant ces dernières décennies, différents algorithmes basés sur l'analyse par intervalles ont été développés dans plusieurs domaines dans le but d'étudier et de quantifier les effets des incertitudes (numériques et physiques) sur les données manipulées. Dans ce chapitre, différentes méthodes de résolution de problèmes, données sous la forme de systèmes de contraintes, par analyse par intervalles, sont présen-

tées.

Ce chapitre est structuré comme suit : dans la section 2.2, nous allons commencer par rappeler brièvement les opérations élémentaires sur les ensembles qui seront instanciées aux intervalles dans la section 2.3. Enfin, dans les sections 2.4 et 2.5, des méthodes issues de l'analyse par intervalles permettant de résoudre des problèmes d'équations linéaires et non linéaires sont présentées.

2.2 Notions sur les ensembles

Le calcul par intervalles est un outil particulier du calcul ensembliste. Nous présentons dans cette section un certain nombre de notations et de définitions, qui permettent de manipuler les relations et les opérations entre ensembles. En particulier, nous présentons la notion d'ensemble, les opérations qui en découlent ainsi que la distance entre ensembles. Ces notions fondamentales se transposent aisément aux intervalles.

2.2.1 Ensembles

Un ensemble est une "collection" d'objets mathématiques appelés éléments ou points. Pour distinguer un élément d'un ensemble, on note un ensemble avec une lettre majuscule double et un élément par une lettre minuscule.

Soient \mathbb{X} un ensemble et x un élément de \mathbb{X} . On définit les notions suivantes :

- $x \in \mathbb{X}$: x appartient à \mathbb{X} ;
- $x \notin \mathbb{X}$: x n'appartient pas à \mathbb{X} ;
- $\{x \in \mathbb{X} \mid \mathcal{P}\}$: ensemble des éléments x de \mathbb{X} , ayant la propriété \mathcal{P} ;
- \emptyset : ensemble vide.

Définitions :

- **Inclusion** : Soient deux ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} , \mathbb{Y} est inclus dans \mathbb{X} (ou \mathbb{X} contient \mathbb{Y}) si et seulement si tout élément y de \mathbb{Y} appartient à \mathbb{X} . On définit alors l'inclusion d'ensemble par :

$$\mathbb{Y} \subset \mathbb{X} \text{ (ou } \mathbb{X} \supset \mathbb{Y}) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Y}, y \in \mathbb{X}.$$

De la même manière, \mathbb{Y} n'est pas inclus dans \mathbb{X} si et seulement s'il existe un élément de \mathbb{Y} qui n'appartient pas à \mathbb{X} :

$$\mathbb{Y} \not\subset \mathbb{X} \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Y} \text{ et } y \notin \mathbb{X}.$$

Il est à noter que dans certaines références (voir par exemple [Hansen 2004]), l'inclusion (appelée aussi inclusion large) est notée par \subseteq , cette dernière notation n'est pas utilisée dans la suite de ce document.

- **Egalité** : Soient \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux ensembles, \mathbb{Y} est égal à \mathbb{X} lorsque tout élément de \mathbb{Y} est un élément de \mathbb{X} et réciproquement. On a alors :

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \mathbb{Y} \subset \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{X} \subset \mathbb{Y}.$$

\mathbb{Y} n'est pas égal à \mathbb{X} si :

$$\exists y \in \mathbb{Y} \wedge y \notin \mathbb{X} \text{ ou } \exists x \in \mathbb{X} \wedge x \notin \mathbb{Y}.$$

- **Inclusion stricte** \mathbb{Y} est strictement inclus dans \mathbb{X} si et seulement si \mathbb{Y} est inclus dans \mathbb{X} sans lui être égal :

$$\mathbb{Y} \subsetneq \mathbb{X} \Leftrightarrow \mathbb{Y} \subset \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \neq \mathbb{X}.$$

- **Sous-ensemble** \mathbb{Y} est un sous-ensemble de \mathbb{X} si tout élément de \mathbb{Y} est aussi élément de \mathbb{X} :

$$\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}.$$

Dans la suite de ce document, nous allons nous intéresser à des sous-ensembles de \mathbb{R} (où \mathbb{R} représente l'ensemble des nombres réels). Afin d'alléger la notation et par abus de langage, nous emploierons le vocable "ensemble" pour désigner tout sous-ensemble de \mathbb{R} .

- **Espace produit** On appelle espace produit de \mathbb{R} , un ensemble noté \mathbb{R}^{n_x} dont les éléments sont des n -uplets :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_x})^T,$$

avec $x_i \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Opérations sur des ensembles réels

Dans cette section, nous allons détailler les *opérations ensemblistes pures* (intersection, union, produit cartésien, différence, projection) et étendre les opérations déjà définies pour les éléments aux ensembles.

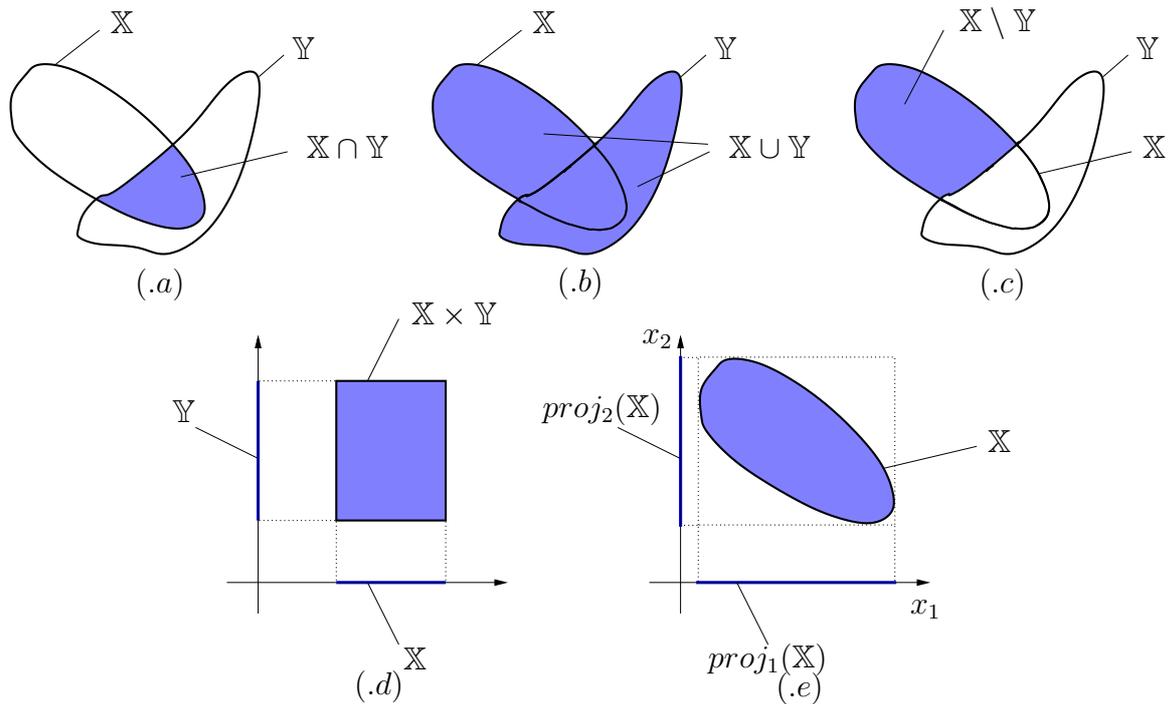


FIG. 2.2.1 – Opérations sur les ensembles

2.2.2.1 Opérations ensemblistes pures

Soient \mathbb{X} et $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$, on définit :

– l'intersection :

$$\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X} \text{ et } \mathbf{x} \in \mathbb{Y}\};$$

– l'union :

$$\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X} \text{ ou } \mathbf{x} \in \mathbb{Y}\};$$

– la différence :

$$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X} \text{ et } \mathbf{x} \notin \mathbb{Y}\};$$

– la projection canonique :

$$proj_i(\mathbb{X}) \triangleq \{x_i \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T \in \mathbb{X}\}.$$

On définit également le produit Cartésien de deux ensembles $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ et $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ par :

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \triangleq \{(\mathbf{x}^T \mathbf{y}^T)^T \in \mathbb{R}^{n_x+n_y} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_x} \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}\}.$$

Ces opérations sont illustrées sur la figure (2.2.1). La partie grisée de la figure (2.2.1.a) représente l'intersection des ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} , l'union de \mathbb{X} et \mathbb{Y} est représentée sur la figure (2.2.1.b) et la différence entre \mathbb{X} et \mathbb{Y} est représentée sur la figure (2.2.1.c). On note que $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ n'est pas égale à $\mathbb{Y} - \mathbb{X}$. Le produit cartésien de deux ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} est l'ensemble grisé sur la figure (2.2.1.d). La projection canonique sur l'axe i de l'ensemble $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$ est donnée sur la figure (2.2.1.e) pour $i = \{1, 2\}$.

De plus, on peut noter que la complémentation est un cas particulier de la différence, habituellement notée par $\overline{\mathbb{X}}$:

$$\overline{\mathbb{X}} = \mathbb{R}^{n_x} / \mathbb{X} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \mathbf{x} \notin \mathbb{X}\}.$$

2.2.2.2 Opérations étendues

Définition 2.2.1 Soient deux ensembles $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ et $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ et une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$, on définit :

– l'image directe de \mathbb{X} par \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}(\mathbb{X}) \triangleq \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\};$$

– l'image inverse de \mathbb{Y} par \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbb{Y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}.$$

Soient $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) \subset \mathbb{X}$, $(\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2) \subset \mathbb{Y}$ et $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$, on peut aisément démontrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2) &\subset \mathbf{f}(\mathbb{X}_1) \cap \mathbf{f}(\mathbb{X}_2), \\ \mathbf{f}(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) &= \mathbf{f}(\mathbb{X}_1) \cup \mathbf{f}(\mathbb{X}_2), \\ \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2) &= \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_2), \\ \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2) &= \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cup \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_2), \\ \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y})) &\subset \mathbb{Y}, \\ \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbb{X})) &\supset \mathbb{X}, \\ \mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}_2 &\Rightarrow \mathbf{f}(\mathbb{X}_1) \subset \mathbf{f}(\mathbb{X}_2), \\ \mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{Y}_2 &\Rightarrow \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_1) \subset \mathbf{f}^{-1}(\mathbb{Y}_2), \\ \mathbb{X} \subset \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{Y}_2 &\Rightarrow \mathbb{X} \subset \text{proj}_{\mathbb{Y}_1}(\mathbb{X}) \times \text{proj}_{\mathbb{Y}_2}(\mathbb{X}). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Les opérations arithmétiques sur les nombres réels peuvent être étendues aux ensembles ; ainsi si $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathbb{R}^n$, on peut définir :

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} \triangleq \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \mathbf{y} \in \mathbb{Y}\}, \quad (2.2.2)$$

$$\mathbb{X} - \mathbb{Y} \triangleq \{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \mathbf{y} \in \mathbb{Y}\}. \quad (2.2.3)$$

Notons que pour le cas de la soustraction $\mathbb{X} - \mathbb{X}$, une certaine confusion peut apparaître. En effet, le résultat doit être calculé par $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}\}$ et non par $\{\mathbf{x} - \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{X}\} = \{0\}$. Ce phénomène est appelé "effet de dépendance".

2.2.3 Distance entre deux ensembles compacts

L'objectif de cette section est de présenter une définition d'une distance entre deux ensembles. Une définition, communément admise, d'une distance (entre deux points par exemple, ou entre un point et une droite, etc.) est la longueur minimale des chemins possibles d'un point à un autre. Dans le cas de deux ensembles $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$, cette définition donne le scalaire positif (noté d), tel que :

$$d(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \inf\{d(x, y) \mid x \in \mathbb{X} \text{ et } y \in \mathbb{Y}\}. \quad (2.2.4)$$

Dans le cadre des ensembles compacts^[1], la distance de Hausdorff (voir par exemple [Berger 1979]) permet de mesurer la similitude entre deux ensembles. Cette distance est grande lorsque les deux ensembles sont très différents, elle est petite lorsqu'ils se ressemblent, et nulle s'ils sont identiques. Celle-ci est définie comme suit :

Définition 2.2.2 (Distance de Hausdorff [Berger 1979]) *La distance de Hausdorff entre deux ensembles $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ est donnée par :*

$$h_\infty(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \triangleq \max\{h_\infty^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), h_\infty^0(\mathbb{Y}, \mathbb{X})\}. \quad (2.2.5)$$

où $h_\infty^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $h_\infty^0(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ sont respectivement la proximité de \mathbb{X} à \mathbb{Y} et la proximité de \mathbb{Y} à \mathbb{X} données par :

$$\begin{aligned} h_\infty^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) &\triangleq \inf\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbb{X} \subset \mathbb{Y} + r\mathbb{U}\}, \\ h_\infty^0(\mathbb{Y}, \mathbb{X}) &\triangleq \inf\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbb{Y} \subset \mathbb{X} + r\mathbb{U}\}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

et où \mathbb{U} est une sphère unité de (\mathbb{R}^n, L_∞) et L_∞ est la distance entre deux points donnée

^[1]un ensemble compact de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble clos et borné de \mathbb{R}^n

par :

$$L_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |y_i - x_i|. \quad (2.2.7)$$

Considérons les deux ensembles $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^2$ sur la figure 2.2.2. Pour obtenir $h_\infty^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, on effectue une inflation sur \mathbb{Y} de $r\mathbb{U}$ jusqu'à ce que \mathbb{X} soit contenu dans $\mathbb{Y} + r\mathbb{U}$ (aussi appelé r -voisinage de \mathbb{Y}). On agit de la même manière sur \mathbb{X} pour obtenir $h_\infty^0(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.

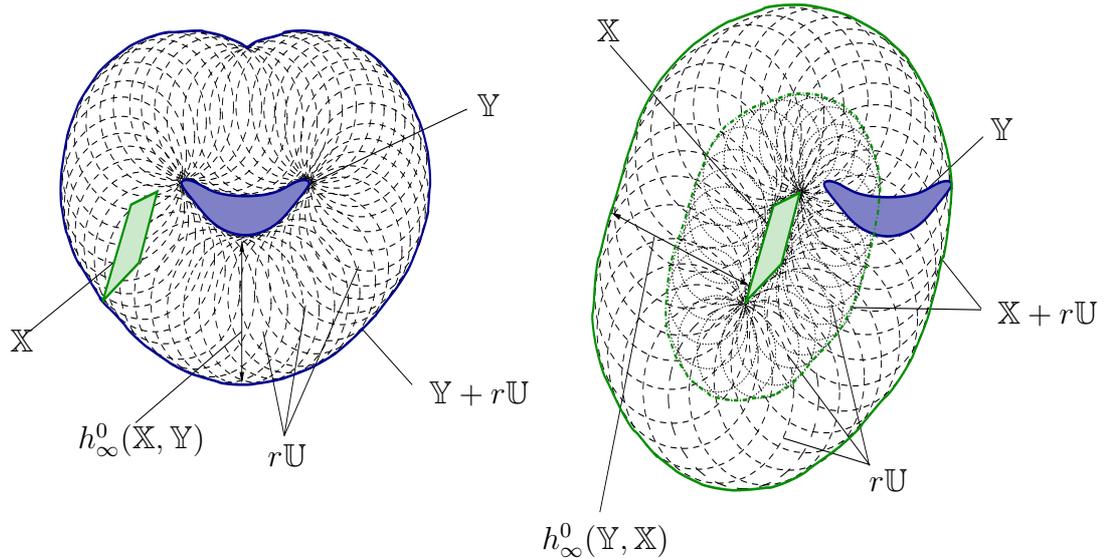


FIG. 2.2.2 – Illustration graphique de la distance de Hausdorff $h_\infty^0(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$

2.3 Arithmétique des intervalles

2.3.1 Intervalles

Définition 2.3.1 On appelle un intervalle, noté $[a]$, un ensemble connexe, borné, de bornes \underline{a} et \bar{a} , et fermé, de nombres réels :

$$[a] = [\underline{a}, \bar{a}] = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq a \leq \bar{a}\}, \quad (2.3.1)$$

avec $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des intervalles de \mathbb{R} est noté \mathbb{IR} . Ainsi, on dit qu'un intervalle $[a]$ est un élément de \mathbb{IR} , i.e. $[a] \in \mathbb{IR}$ et qu'il est aussi un sous-ensemble de \mathbb{R} , i.e. $[a] \subset \mathbb{R}$. Un intervalle est dégénéré lorsque $\underline{a} = \bar{a}$. Les intervalles dégénérés permettent la représentation des nombres réels exactement représentables sur un processeur à précision finie.

Comme pour les réels, les opérations mathématiques élémentaires sont étendues aux intervalles. Le résultat d'une opération entre deux intervalles de bornes finies est obtenu en travaillant uniquement sur leurs bornes.

Soient l'opération élémentaire $\circ \in \{+; -; *; /\}$ et deux intervalles $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, alors :

$$[a] \circ [b] = \{a \circ b \mid a \in [a], b \in [b]\}. \quad (2.3.2)$$

La relation (2.3.2) est valable pour toutes les opérations à l'exception de la division lorsque $0 \in [b]$. Dans ce dernier cas, le résultat n'est pas un intervalle mais la réunion de deux intervalles.

L'expression (2.3.2) peut s'écrire comme suit :

$$[a] + [b] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \quad (2.3.3)$$

$$[a] - [b] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \quad (2.3.4)$$

$$[a] * [b] = [\min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b})]. \quad (2.3.5)$$

Il n'existe pas de définition unique lorsque $[b] = [0, 0]$. Dans la suite de cette thèse, nous allons nous baser sur la définition suivante [Jaulin *et al.* 2001b] :

$$\begin{aligned} [a]/[b] &= \emptyset && \text{si } [b] = [0, 0], \\ &= [a] * [1/\bar{b}, 1/\underline{b}] && \text{si } 0 \notin [b], \\ &= [a] * [1/\bar{b}, +\infty[&& \text{si } \underline{b} = 0 \text{ et } \bar{b} > 0, \\ &= [a] *] - \infty, 1/\underline{b}] && \text{si } \underline{b} < 0 \text{ et } \bar{b} = 0, \\ &=] - \infty, +\infty[&& \text{si } \underline{b} < 0 \text{ et } \bar{b} > 0. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Définition 2.3.2 Soit $[a] \in \mathbb{IR}$, on définit :

- la borne inférieure : $\inf([a]) = \underline{a}$;
- la borne supérieure : $\sup([a]) = \bar{a}$;
- la largeur : $w([a]) = \bar{a} - \underline{a} \geq 0$;
- le milieu : $\text{mid}([a]) = (\bar{a} + \underline{a})/2$;
- le rayon : $\text{rad}([a]) = (\bar{a} - \underline{a})/2 \geq 0$.

Soit a une variable incertaine dont le support $[\underline{a}, \bar{a}]$ est disponible. Le centre de $[\underline{a}, \bar{a}]$ peut être interprété comme une estimation de a et le rayon comme étant l'incertitude sur cette variable.

2.3.2 Vecteurs et matrices d'intervalles

Un vecteur d'intervalles de dimension n , également appelé pavé, noté $\mathbf{a} = ([a_1], [a_2], \dots, [a_n])^T$ est un vecteur dont les éléments sont des intervalles. On note par \mathbb{IR}^n l'ensemble des intervalles de \mathbb{R}^n . Les fonctions élémentaires définies pour les intervalles sont également définies pour les vecteurs d'intervalles.

Définition 2.3.3 Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{IR}^n$, on définit :

- la borne inférieure : $\text{inf}(\mathbf{a}) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$;
- la borne supérieure : $\text{sup}(\mathbf{a}) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)^T$;
- la largeur : $w(\mathbf{a}) = \max_{j=1}^n (\bar{a}_j - \underline{a}_j) \geq 0$;
- le milieu : $\text{mid}(\mathbf{a}) = (\text{mid}([a_1]), \text{mid}([a_2]), \dots, \text{mid}([a_n]))^T$.

2.3.3 Pessimisme

Généralement, le résultat d'une suite d'opérations entre deux ou plusieurs intervalles n'est pas minimal, l'intervalle obtenu est donc pessimiste et l'opération est dite conservatrice. Ce problème majeur de l'algèbre des intervalles est dû principalement à deux phénomènes : la *dépendance* et l'*enveloppement*.

2.3.3.1 Phénomène de dépendance

Soit un intervalle non dégénéré $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ et une opération $\circ \in \{+, -, *, /\}$. En utilisant la relation (2.3.2), on obtient :

$$[a] \circ [a] = \{a \circ b \mid a \in [a], b \in [a]\}. \quad (2.3.7)$$

On constate que dans (2.3.7) les variables a et b sont considérées comme indépendantes malgré le fait que l'on fasse l'opération avec le même intervalle ; ce phénomène est appelé phénomène de dépendance (voir par exemple [Moore 1966]).

Exemple 2.3.1 Soit $[a] = [-2, 3]$, alors $[a] - [a] = [-2, 3] - [-2, 3] = [-5, 5] \neq \{0\}$.

Souvent ce phénomène rend le calcul intervalle pessimiste ; l'utilisateur devrait toujours chercher à écrire (ou réduire) le nombre d'occurrences d'une même variable. Par exemple, il est souhaitable d'évaluer $[a^2] = \{a^2 \mid a \in [a]\}$ au lieu de $\{a * a \mid a \in [a]\}$.

2.3.3.2 Phénomène d'enveloppement

On appelle effet d'enveloppement, le phénomène qui caractérise le pessimisme dû à la représentation d'un ensemble quelconque par un pavé (vecteur d'intervalles).

Exemple 2.3.2 Soient :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} [-1, 0] \\ [1, 2] \end{pmatrix}.$$

L'évaluation du pavé $[\mathbf{y}] = \mathbf{A}[\mathbf{x}]$ est donnée par :

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} [1, 4] \\ [1, 2] \end{pmatrix}.$$

D'un autre côté, l'ensemble exact $\mathbb{B} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\}$ est donné par le parallélogramme, dont les cotés ne sont pas parallèles aux axes du repère, tracé sur la figure (2.3.1). On remarque alors qu'un pessimisme est introduit.

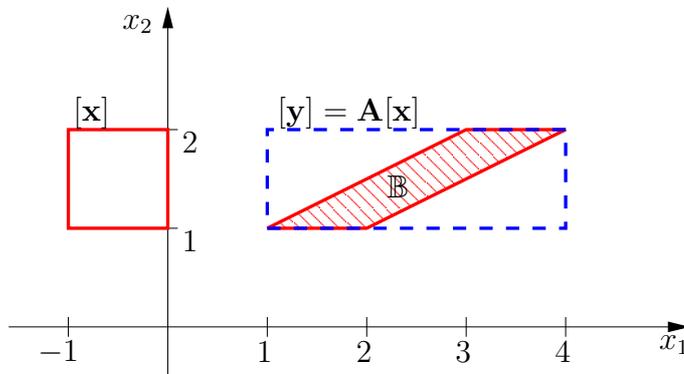


FIG. 2.3.1 – Effet d'enveloppement

Ainsi, la représentation de l'ensemble $\mathbb{B} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\}$ se fait en l'enveloppant par un rectangle $[\mathbf{y}]$ dont les côtés sont parallèles aux axes du repère.

Nous verrons dans les section suivantes qu'il existe des outils permettant de contrôler le pessimisme.

2.3.4 Fonctions d'inclusion

Considérons une fonction vectorielle $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$. L'évaluation de f sur un pavé $[\mathbf{x}]$ est donnée par l'ensemble :

$$f([\mathbf{x}]) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\}. \quad (2.3.8)$$

Il est possible d'obtenir une extension aux intervalles d'une fonction f . Celle-ci est généralement appelée fonction d'inclusion, notée $[f]$. Une fonction d'inclusion de f est définie comme une fonction de \mathbb{IR}^{n_x} dans \mathbb{IR}^{n_y} , vérifiant :

$$f([\mathbf{x}]) \subset [f]([\mathbf{x}]). \quad (2.3.9)$$

En général, la fonction d'inclusion n'est pas unique et dépend de la manière dont f est écrite. L'objectif de l'analyse par intervalles est de pouvoir utiliser des fonctions d'inclusion peu pessimistes dans le sens où la taille de $([f]([\mathbf{x}]) - f([\mathbf{x}]))$ est assez petite. Une fonction d'inclusion est minimale si pour tout $[\mathbf{x}]$, $[f]([\mathbf{x}])$ est le plus petit pavé qui contient $f([\mathbf{x}])$. La fonction d'inclusion minimale pour f est unique et est notée $[f]^*$. Sur la figure 2.3.2, nous illustrons ce principe pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si l'évaluation exacte $f([\mathbf{x}])$ d'une fonction f , pour un pavé $[\mathbf{x}]$ donné, est représentée par l'ensemble hachuré en rouge, la fonction d'inclusion minimale $[f]^*$ est le pavé en trait continu vert. Le pavé, représenté par un trait discontinu bleu, est une inclusion non minimale de $f([\mathbf{x}])$.

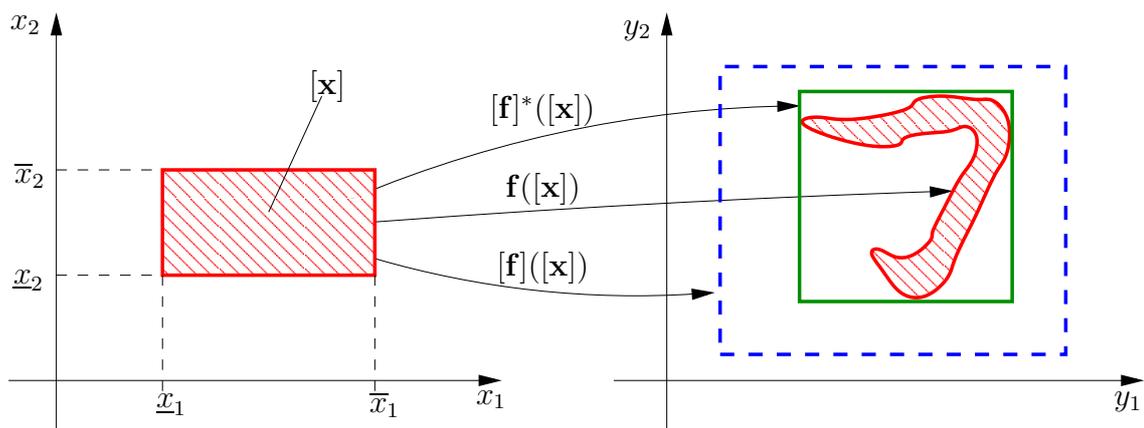


FIG. 2.3.2 – Evaluation d'une fonction d'inclusion non minimale et d'une fonction d'inclusion minimale

Lorsque chaque variable apparait une seule fois dans une fonction, la fonction d'inclusion minimale peut être obtenue directement. Par contre, pour des fonctions complexes, il est difficile de construire des fonctions d'inclusion minimales. Par ailleurs, il a été démontré dans [Kreinovich *et al.* 1998] que le calcul de l'intervalle $[f]([x])$ à δ près, défini par :

$$| \sup([f]([x]) - \sup(f([x])) | = \delta, \quad (2.3.10)$$

$$| \inf([f]([x]) - \inf(f([x])) | = \delta. \quad (2.3.11)$$

est un problème NP-difficile. En conséquence, les différentes fonctions d'inclusion que nous allons présenter dans les paragraphes suivants sont souvent des approximations pessimistes de $f([x])$.

2.3.4.1 Fonction d'inclusion de fonctions élémentaires

La construction de fonctions d'inclusion de fonctions élémentaires $\{exp, log, cos, sin, \dots\}$, est basée sur des propriétés de monotonie. En effet, si une fonction continue $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante (respectivement décroissante), alors la fonction intervalle qui, à tout intervalle $[x] \subset \mathbb{D}$, associe l'intervalle $[f(\underline{x}), f(\overline{x})]$ (respectivement $[f(\overline{x}), f(\underline{x})]$) est une fonction d'inclusion minimale de f (*i.e.* la fonction qui donne l'évaluation la moins pessimiste).

Exemples 2.3.3

– soit $f(x) = \log(x)$, le domaine de la fonction logarithme est $\mathbb{D} =]0, +\infty[$, alors :

$$\forall [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{D}, \log([x]) = [\log(\underline{x}), \log(\overline{x})];$$

– soit $f(x) = \cos(x)$, sur le domaine $\mathbb{D}_1 = [0, \pi]$ la fonction cosinus est décroissante, alors

$$\forall [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{D}_1, \cos([x]) = [\cos(\overline{x}), \cos(\underline{x})];$$

et sur le domaine $\mathbb{D}_2 = [\pi, 2\pi]$ la fonction cosinus est croissante, alors

$$\forall [x] = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{D}_2, \cos([x]) = [\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x})].$$

2.3.4.2 Fonction d'inclusion naturelle

Soit $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$, la fonction d'inclusion naturelle $[f]$ de f s'obtient en remplaçant chaque variable réelle x_i par son domaine $[x_i]$ et chaque opération arithmétique par son extension intervalle. Dans le cas où $n_y = 1$, la fonction d'inclusion naturelle est minimale si f est composée de fonctions continues et si toutes les variables sont mono-occurrences :

$$[f]([\mathbf{x}]) \equiv f([\mathbf{x}]). \quad (2.3.12)$$

Il est important de noter que $x_1 x_1$ est considéré comme deux occurrences.

Exemple 2.3.4 On considère une fonction f donnée par les quatre expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 &= x(1 - x), \\ f_2 &= x - x^2, \\ f_3 &= x - x * x, \\ f_4 &= \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2. \end{aligned}$$

L'évaluation des fonctions d'inclusion naturelles de ces quatre expressions sur l'intervalle $[x] = [-1, 1]$ donne :

$$\begin{aligned} [f_1]([x]) &= [-1, 1](1 - [-1, 1]) = [-2, 2], \\ [f_2]([x]) &= [-1, 1] - [-1, 1]^2 = [-2, 1], \\ [f_3]([x]) &= [-1, 1] - [-1, 1] * [-1, 1] = [-2, 2], \\ [f_4]([x]) &= \frac{1}{4} - ([-1, 1] - \frac{1}{2})^2 = [-2, \frac{1}{4}]. \end{aligned}$$

On remarque que la taille des intervalles obtenus par ces quatre fonctions d'inclusion dépend de l'expression utilisée pour l'écriture de f . Ceci est dû au phénomène de dépendance expliqué dans la section 2.3.3.1. Comme la fonction f est continue, la fonction d'inclusion naturelle est minimale lorsque le nombre d'occurrences des variables est égal à un. Dans cet exemple, la fonction d'inclusion naturelle $[f_4]$ est minimale ; elle permet de trouver l'image de $[x]$ par f . Notons qu'il est facile de vérifier, en étudiant les variations de f , que $f([-1, 1]) = [-2, \frac{1}{4}]$ est l'inclusion minimale de f sur le domaine $[-1, 1]$.

2.3.4.3 Fonction d'inclusion moyenne

Soient une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{D})$, un pavé $[\mathbf{x}_o] \subset \mathbb{D}$ et un point $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$. D'après le théorème de Taylor, il existe un scalaire $\xi \in [0, 1]$ tel que :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_o + \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)), \quad \forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]. \quad (2.3.13)$$

Il est important de noter que l'expression (2.3.13) est valable pour tout $\mathbf{x}_o \in [\mathbf{x}]$ et $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$, ainsi on a : $\mathbf{x}_o + \xi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \in [\mathbf{x}]$. En utilisant l'analyse par intervalles, l'expression (2.3.13) implique que :

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + [\mathbf{J}_f]([\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \quad (2.3.14)$$

où $[\mathbf{J}_f]$ est une fonction d'inclusion de \mathbf{J}_f . Ainsi :

$$\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + [\mathbf{J}_f]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_o). \quad (2.3.15)$$

La fonction intervalle

$$[\mathbf{f}_m]([\mathbf{x}]) \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + [\mathbf{J}_f]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_o), \quad (2.3.16)$$

est appelée fonction d'inclusion moyenne de \mathbf{f} . En général, le point \mathbf{x}_o est choisi comme étant le centre de $[\mathbf{x}]$ (i.e. $\mathbf{x}_o = \mathbf{x}_c$). Dans le cas de fonctions à une seule variable, l'expression :

$$[f_m](\tilde{x}) \triangleq \mathbf{f}(x_o) + [f']([x])(\tilde{x} - x_o), \quad \forall \tilde{x} \in [x], \quad (2.3.17)$$

peut s'interpréter comme étant une droite dont la pente n'est pas connue d'une manière exacte. Ainsi l'évaluation d'une fonction d'inclusion moyenne autour d'un point x_o est un ensemble de droites, passant par ce point.

Exemple 2.3.5 Soit une fonction sinusoidale $f(x) = \sin(x)$. Le tracé de $[f_m](\tilde{x})$ pour $\tilde{x} \in [x]$, représenté par un cône ayant pour centre $(x_c, f(x_c))$, est illustré sur la figure (2.3.3) pour plusieurs largeurs de $[x]$. Plus la largeur de $[x]$ est petite, meilleure est l'approximation de la fonction par le cône. Cette figure illustre le fait que :

$$\frac{w([f_m]([x]))}{w(f([x]))} \rightarrow 1, \quad (2.3.18)$$

quand la largeur de $[x]$ tend vers 0.

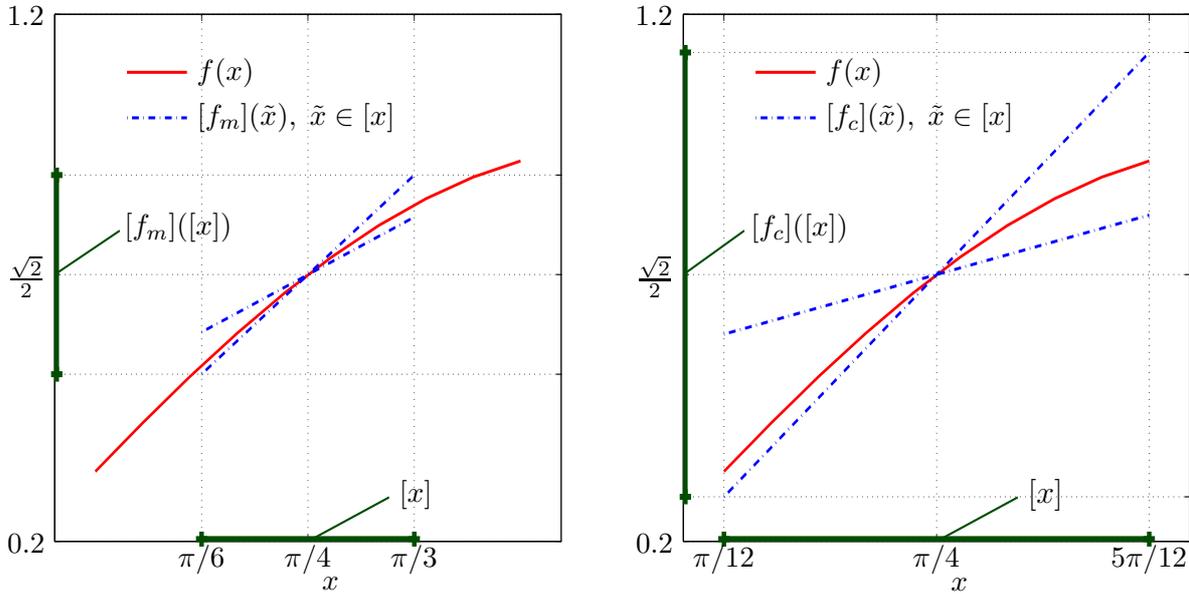


FIG. 2.3.3 – Fonction d’inclusion moyenne de $\sin(x)$, pour $x_o = x_c$

Les fonctions d’inclusion moyennes sont généralement utilisées lorsque la taille des intervalles manipulés est assez petite (et loin des points stationnaires de la fonction f). Dans ce dernier cas, la forme moyenne donne des résultats plus précis que la fonction d’inclusion naturelle.

2.3.4.4 Fonction d’inclusion "pente"

Dans la littérature (voir par exemple [Hansen 2004]), différentes fonctions d’inclusion semblables à (2.3.16) ont été proposées. La forme générale est donnée par :

$$f([x]) \triangleq f(x_o) + [g]([x] - x_o), \tag{2.3.19}$$

où $[g]$ est une fonction d’inclusion d’une fonction "pente" non nécessairement identique à la jacobienne de f . D’un autre côté, le point x_o n’appartient par forcément à $[x]$. Il a été démontré (voir [Hansen 2004]) que les fonctions à pente sont souvent meilleures que les fonctions d’inclusion moyennes.

Exemple 2.3.6 Soit $f(x) = x(1 - x)$ et $[x] = [0, 1]$. En étudiant les variations de f , on démontre que $f([0, 1]) = [0, 0.25]$. Par ailleurs, l’évaluation de la fonction d’inclusion moyenne donne $[f_o]([0, 1]) = [-0.25, 0.75]$.

Nous allons maintenant construire une fonction d'inclusion à pente. Soit $x \in [0, 1]$ et x_o un point quelconque dans \mathbb{D} . Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_o) &= x(1-x) - x_o(1-x_o) \\ &= x - x^2 - x_o + x_o^2 \\ &= (x - x_o) [1 - (x - x_o)] \\ \Rightarrow f(x) &= f(x_o) + [1 - (x - x_o)] (x - x_o) \end{aligned}$$

En remplaçant x par son domaine $[x]$, on obtient :

$$[f_p]([x]) = f(x_o) + [1 - ([x] - x_o)] ([x] - x_o). \quad (2.3.20)$$

Pour comparer les fonctions d'inclusion moyennes et à pente, on prend $x_o = \text{mid}([x]) = 0.5$. Ainsi, l'évaluation de $[f_p]$ donnée par (2.3.20) et $[f_p] = [0, 0.5]$. Nous remarquons alors que la fonction d'inclusion à pente est moins pessimiste que la forme moyenne. Les tracés de $[f_p](\tilde{x})$ et $[f_m](\tilde{x})$, pour $\tilde{x} \in [x]$, sont représentés par les cônes ayant pour centre $(x_c, f(x_c))$ où $x_c = 0.5$ et sont illustrés sur la figure (2.3.4).

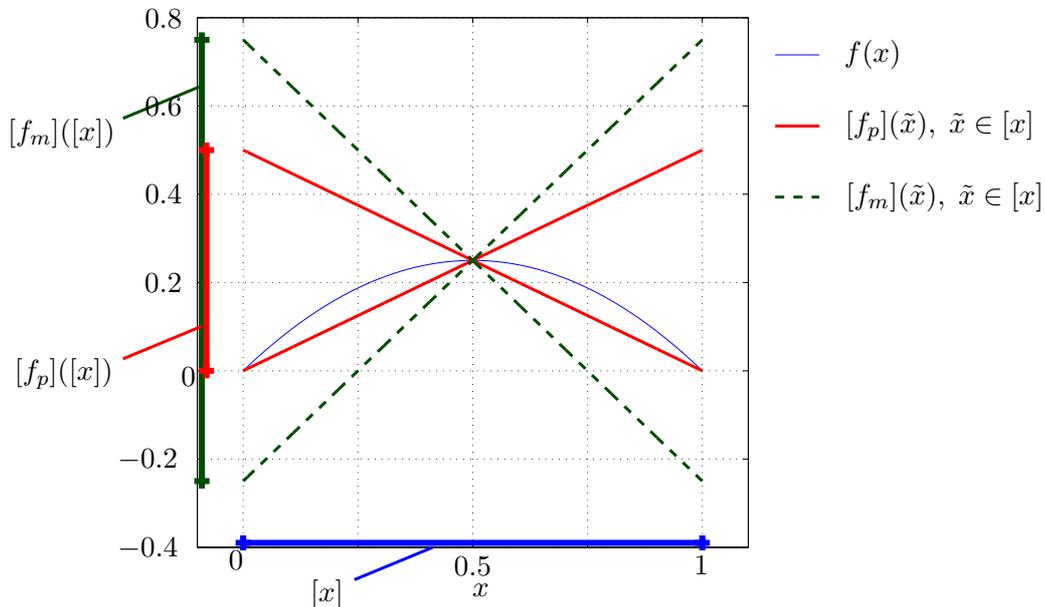


FIG. 2.3.4 – Fonction d'inclusion moyenne et à pente de $f(x) = x(1-x)$ pour $x \in [0, 1]$

2.3.4.5 Fonctions d'inclusion de Taylor

Les fonctions d'inclusion de Taylor sont obtenues en utilisant un ordre de dérivation plus élevé (voir par exemple [Neumaier 2003, Hansen 2004]). Elle peuvent être considérées comme étant une généralisation de la forme moyenne à un ordre plus élevé. A titre d'exemple, on donne ici la fonction d'inclusion de Taylor du second ordre :

$$[\mathbf{f}_T]([\mathbf{x}]) \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_o)([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_o) + \frac{1}{2}([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_o)^T [\mathbf{H}_f]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_o), \quad (2.3.21)$$

où $[\mathbf{H}_f]$ est une fonction d'inclusion du Hessien de la fonction \mathbf{f} .

Comme nous l'avons souligné pour le cas des fonctions d'inclusion moyenne ou à pente, le pessimisme peut être considérablement réduit en utilisant les fonctions d'inclusion de Taylor pour des intervalles de petites tailles.

Exemple 2.3.7 Soient $f(x) = x(1-x)$, $f'(x) = 1-2x$ et $f''(x) = 2$. Pour $x_o = -2$, on a :

$$[f_T]([x]) = \frac{1}{4} - \left([x] - \frac{1}{2} \right) \left([x] - \frac{1}{2} \right), \quad (2.3.22)$$

une évaluation "naïve" de (2.3.22), sur le domaine $\mathbb{D} = [0, 1]$, donne $[f_T]([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{2} \right]$ qui est identique à celle obtenue par la forme moyenne. Par ailleurs, (2.3.22) peut se réécrire sous la forme :

$$[f_T]([x]) = \frac{1}{4} - \left([x] - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (2.3.23)$$

L'évaluation de (2.3.23) donne $[f_T]([0, 1]) = [0, 0.25]$ identique à l'évaluation exacte $f([0, 1])$.

2.3.4.6 Propriétés des fonctions d'inclusion

Soit $[\mathbf{f}] : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{IR}^{n_y}$ une fonction d'inclusion, par exemple celles définies précédemment. On peut écrire les propriétés suivantes [Moore 1966] :

- $[\mathbf{f}]$ est monotone au sens de l'inclusion si :

$$[\mathbf{x}] \subset [\mathbf{y}] \Rightarrow [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{y}]); \quad (2.3.24)$$

- $[\mathbf{f}]$ est convergente si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w([\mathbf{x}](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w(\mathbf{f}([\mathbf{x}](k))) = 0. \quad (2.3.25)$$

La notion de convergence d'une fonction d'inclusion introduite précédemment implique immédiatement que pour un intervalle dégénéré $\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{x}]$, on a :

$$[\mathbf{f}]([\mathbf{x}, \mathbf{x}]) = [\mathbf{f}](\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.3.26)$$

Ainsi, il est possible d'introduire le théorème suivant, dont le but est d'assurer qu'une fonction intervalle de \mathbf{f} est bien une fonction d'inclusion.

Théorème 2.3.1 [Moore 1966]. *Toute fonction intervalle $[\mathbf{f}]$ vérifiant la monotonie au sens de l'inclusion et vérifiant :*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \mathbf{f}([\mathbf{x}]) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

est une fonction d'inclusion pour \mathbf{f} .

Démonstration 2.3.2 *Soient $[\mathbf{x}] \subset \mathbb{D}$ et $[\mathbf{f}]$ une fonction monotone au sens de l'inclusion, alors :*

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \Rightarrow [\mathbf{f}](\mathbf{x}) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]). \quad (2.3.27)$$

D'un autre côté, si $[\mathbf{f}]$ est convergente, on a :

$$[\mathbf{f}](\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.3.28)$$

Les expressions (2.3.27) et (2.3.28) peuvent se réécrire sous la forme : $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$, d'où :

$$\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]).$$

Ce qui prouve que $[\mathbf{f}]$ est une fonction d'inclusion pour \mathbf{f} . ■

2.3.4.7 Convergence d'une fonction d'inclusion

Les extensions aux intervalles d'une fonction \mathbf{f} sont des approximations de l'évaluation exacte $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$. Ces approximations engendrent du pessimisme, il est donc important d'évaluer la convergence des fonctions d'inclusion. Pour cela, Moore [Moore 1979] a introduit la notion d'ordre de convergence d'une fonction d'inclusion.

Définition 2.3.4 (Ordre de convergence) *Soient $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ et $[\mathbf{f}]$ une fonction d'inclusion de \mathbf{f} . On appelle ordre de convergence de $[\mathbf{f}]$, le plus grand entier α , tel que :*

$$\exists \beta > 0 \mid w([\mathbf{f}]([\mathbf{x}])) - w(\mathbf{f}([\mathbf{x}])) \leq \beta w([\mathbf{x}])^\alpha. \quad (2.3.29)$$

Lorsqu'une fonction d'inclusion est minimale, l'ordre de convergence est infini. L'ordre de convergence d'une fonction d'inclusion naturelle est au moins linéaire ($\alpha \geq 1$), celui de fonctions d'inclusion moyenne, à pente ou de Taylor est au moins quadratique ($\alpha \geq 2$).

Exemple 2.3.8 [Jaulin et al. 2001b] Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 + \sin(x),$$

et les intervalles :

$$[x_1] = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right] \quad \text{and} \quad [x_2] = \left[\frac{99\pi}{100}, \frac{101\pi}{100} \right],$$

où : $\text{mid}([x_1]) = \text{mid}([x_2]) = \pi$.

Nous proposons de comparer les approximations de f pour $[x_1]$ et $[x_2]$ obtenues en utilisant les fonctions d'inclusion naturelle, moyenne, de Taylor d'ordre deux et minimale, notées respectivement $[f]_n$, $[f]_c$, $[f]_T$ et $[f]^*$.

Les trois premières fonctions d'inclusion, pour $i = \{1, 2\}$, sont données par :

$$\begin{aligned} [f_n]([x_i]) &= [x_i]^2 + \sin([x_i]), \\ [f_m]([x_i]) &= \pi^2 + \sin(\pi) + ([x_i] - \pi)[f']([x_i]), \\ [f_T]([x_i]) &= \pi^2 + \sin(\pi) + ([x_i] - \pi)f'(\pi) + \frac{([x_i] - \pi)^2}{2}[f'']([x_i]). \end{aligned}$$

avec

$$f'(x_i) = 2x_i + \cos(x_i) \quad \text{et} \quad f''(x_i) = 2 - \sin(x_i).$$

La détermination de la fonction d'inclusion minimale est basée sur la monotonie de la fonction f sur $[x_i]$, on a alors :

$$[f]^*([x_i]) = [\underline{x}_i^2 + \sin(\underline{x}_i), \overline{x}_i^2 + \sin(\overline{x}_i)].$$

En effet, f est croissante sur les domaines $[x_1]$ et $[x_2]$.

Le résultat obtenu pour l'évaluation de ces fonctions d'inclusion sur $[x_1]$ et $[x_2]$ est présenté dans le tableau (2.3.1). On peut constater que l'utilisation des fonctions d'inclusion moyenne et de Taylor est plus intéressante que la fonction d'inclusion naturelle pour de petits intervalles. Généralement, pour les intervalles de grande taille, il est préférable d'utiliser la fonction d'inclusion naturelle. Ces remarques se justifient par le fait que la

convergence quadratique est meilleure que la convergence linéaire. Rappelons également que la convergence n'a de sens que pour des intervalles de petites tailles.

	$[x_1] = [2\pi/3, 4\pi/3]$	$[x_1] = [99\pi/100, 101\pi/100]$
$[f]$	$[f]([x_1])$	$[f]([x_2])$
$\cdot [f]_n$	[3.5204, 18.4120]	[9.6417, 10.0994]
$[f]_m$	[1.6202, 18.1190]	[9.7016, 10.0376]
$[f]_T$	[4.3370, 16.9737]	[9.7036, 10.0366]
$[f]^*$	[5.2525, 16.6800]	[9.7046, 10.0366]

avec la normalisation : $\Delta([f]([x_i])) = w([f]([x_i])) - w(f([x_i]))$

TAB. 2.3.1 – Comparatif des fonctions d'inclusion

2.3.5 Partitionnement de pavés

Exemple 2.3.9 Soient $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} [-1, 0] \\ [1, 2] \end{pmatrix}$. L'évaluation de la fonction d'inclusion naturelle de \mathbf{f} donne :

$$[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) = \begin{pmatrix} [1, 4] \\ [1, 2] \end{pmatrix}.$$

A présent, en partitionnant $[\mathbf{x}]$ en deux pavés $[\mathbf{x}_1]$ et $[\mathbf{x}_2]$ tels que : $[\mathbf{x}] = [\mathbf{x}_1] \cup [\mathbf{x}_2]$, avec :

$$[\mathbf{x}_1] = \begin{pmatrix} [-1, 0] \\ [1, 1.5] \end{pmatrix}, [\mathbf{x}_2] = \begin{pmatrix} [-1, 0] \\ [1.5, 2] \end{pmatrix},$$

l'évaluation de $[\mathbf{f}]$ sur les deux pavés générés donne :

$$[\mathbf{f}]([\mathbf{x}_1]) = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [1, 1.5] \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{f}]([\mathbf{x}_2]) = \begin{pmatrix} [2, 4] \\ [1.5, 2] \end{pmatrix}.$$

La représentation de ces évaluations pour chacun des pavés est illustrée sur la figure (2.3.5). On constate que $\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}_1]) \cup [\mathbf{f}]([\mathbf{x}_2]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$.

Comme nous venons de le montrer dans l'exemple précédent, pour réduire le pessimisme, dû à l'effet d'enveloppement, d'une fonction d'inclusion $[\mathbf{f}]$, on peut avoir recours au parti-

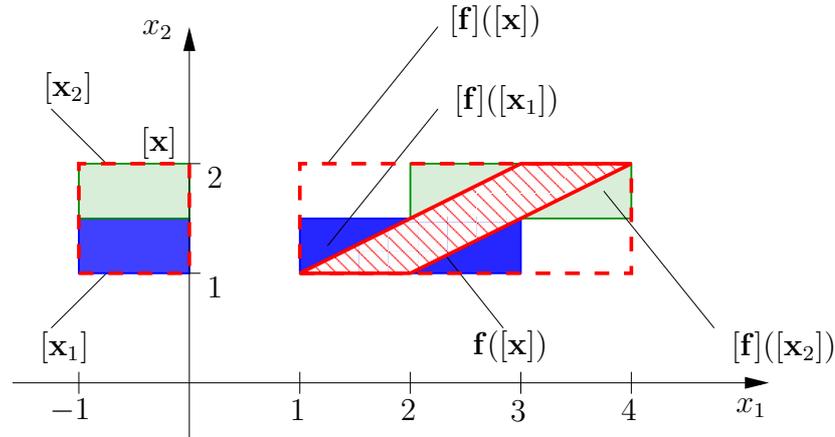


FIG. 2.3.5 – Effet du partitionnement d'un pavé sur une fonction d'inclusion

tionnement du pavé $[x]$. L'évaluation d'une fonction d'inclusion de f sur un sous-pavage de $[x]$ tel que :

$$[x] = \bigcup_{i=1}^n [x_i], \quad (2.3.30)$$

n'entraîne pas de perte d'information et réduit le pessimisme si $[f]$ est monotone au sens de l'inclusion. En effet, d'après les propriétés données par les équations (2.2.1) :

$$f([x]) = \bigcup_{i=1}^n f([x_i]). \quad (2.3.31)$$

D'un autre côté, d'après la relation (2.3.9), il vient que :

$$f([x_i]) \subset [f]([x_i]). \quad (2.3.32)$$

Ainsi :

$$\bigcup_{i=1}^n f([x_i]) \subset \bigcup_{i=1}^n [f]([x_i]). \quad (2.3.33)$$

De plus si $[f]$ est monotone au sens de l'inclusion, $[f]([x_i]) \subset [f]([x])$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on obtient alors :

$$\bigcup_{i=1}^n [f]([x_i]) \subset [f]([x]). \quad (2.3.34)$$

Le partitionnement du pavé $[x]$ en un nombre important de pavés $[x_i]$ permet de réduire considérablement le pessimisme de l'évaluation de f sur un domaine $[x]$. L'ensemble

$\bigcup_{i=1}^n [f]([x_i])$ permet alors de bien "épouser" l'ensemble $f([x])$. Néanmoins, la complexité calculatoire augmente en fonction de n .

Dans l'exemple précédent, le partitionnement du pavé $[x]$ a été effectué en bissectant $[x]$ suivant la direction 2 (suivant x_2). Ce partitionnement aurait également pu se faire suivant la direction 1. Dans le cas général, le partitionnement d'un pavé $[x] = ([x_1, \bar{x}_1], \dots, [x_n, \bar{x}_n])^T$, suivant la direction $k \in \{1, \dots, n\}$, permet de générer deux pavés $[x_L]$ et $[x_R]$ donnés par :

$$[x_L] = ([x_1, \bar{x}_1], \dots, [x_k, \frac{x_k + \bar{x}_k}{2}], \dots, [x_{n_x}, \bar{x}_{n_x}])^T, \quad (2.3.35)$$

$$[x_R] = ([x_1, \bar{x}_1], \dots, [\frac{x_k + \bar{x}_k}{2}, \bar{x}_k], \dots, [x_{n_x}, \bar{x}_{n_x}])^T. \quad (2.3.36)$$

On trouve dans la littérature [Moore 1966, Hansen 2004, Ratz 1992, Cendes et Ratz 1997] différentes stratégies pour sélectionner la direction optimale k . Elles sont basées sur le critère d'optimalité suivant :

$$k = \mathit{arg}(\max_{i \in \{1, \dots, n_x\}} (D(i))), \quad (2.3.37)$$

où $D(i)$ est une fonction métrique dépendant de la stratégie de partitionnement utilisée.

Le tableau (2.3.2) présente les quatre stratégies les plus utilisées pour déterminer la fonction métrique $D(i)$.

Stratégie	Métrique
Largeur de $[x]$ [Moore 1966]	$D(i) = w([x])$
Direction maximisant une quantité [Hansen 2004]	$D(i) = w([f'_i]([x]))w([x_i])$
Direction minimisant la taille de $[f]([x])$ [Ratz 1992]	$D(i) = w([f'_i]([x]))([x_i] - \mathit{mid}([x_i]))$
Largeur de $[x]$ en évitant le pessimisme dû aux erreurs d'arrondies [Cendes et Ratz 1997]	$D(i) = \begin{cases} w([x_i]) & \text{si } 0 \in [x_i] \\ w([x_i]) / \min\{ x_i \mid x_i \in [x_i]\} & \text{si } 0 \notin [x_i] \end{cases}$

avec $[f'_i]$ le $i^{\text{ème}}$ élément de la fonction d'inclusion (cf : § 2.3.4) du gradient de la fonction f .

TAB. 2.3.2 – Métrique $D(i)$ selon la stratégie de partitionnement

Il est à noter que dans la littérature, la première et la troisième stratégie sont les plus utilisées. Généralement la stratégie la moins efficace est celle selon une direction maximisant

une quantité (voir [Cendes et Ratz 1997]). La première stratégie nécessite seulement le calcul de la taille du pavé $[\mathbf{x}]$ et sa convergence est en général plus rapide que les autres. Les stratégies deux et trois nécessitent le calcul du gradient de la fonction f .

2.4 Inversion ensembliste par arithmétique d'intervalles

Soit $f : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$. Le but de cette section est de caractériser l'image inverse d'un ensemble \mathbb{Y} , donnée par :

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X}_0 \mid f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Y}\} = f^{-1}(\mathbb{Y}) \cap \mathbb{X}_0, \quad (2.4.1)$$

où $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{R}^{n_x}$ est le domaine initial de recherche, l'ensemble $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ est connu *a priori* et f peut être non linéaire et non nécessairement inversible au sens classique.

Le problème (2.4.1) est un problème d'inversion ensembliste qui peut être résolu d'une manière garantie en utilisant l'algorithme SIVIA (Set Inversion Via Interval Analysis) proposé dans [Jaulin et Walter 1993]. Cet algorithme permet de trouver, de manière garantie (lorsqu'au moins une solution existe), un encadrement de l'ensemble \mathbb{X} des solutions tel que :

$$\underline{\mathbb{X}} \subset \mathbb{X} \subset \overline{\mathbb{X}}. \quad (2.4.2)$$

L'approximation (ou encadrement) intérieure $\underline{\mathbb{X}}$ est constituée de l'ensemble des pavés acceptables. Un pavé $[\mathbf{x}] \subset \mathbb{X}$ est dit acceptable si $[f]([\mathbf{x}]) \subset \mathbb{Y}$. A l'inverse, un pavé est dit inacceptable si $[f]([\mathbf{x}]) \cap \mathbb{Y} = \emptyset$. Le cas échéant, si aucune décision n'est prise pour un pavé $[\mathbf{x}]$, on dit qu'il est ambigu et il est alors partitionné. Les deux pavés générés sont de nouveau testés, puis l'algorithme se propage tant qu'il reste un pavé ambigu. Les pavés ne pouvant être découpés à l'infini, une limite η appelée précision de sous-pavage, marquant l'arrêt de l'algorithme, doit être fixée. Ainsi les pavés acceptables et inacceptables représentent les feuilles de l'arborescence de l'algorithme, les pavés ambigus en sont les noeuds.

L'approximation extérieure est définie par :

$$\overline{\mathbb{X}} = \underline{\mathbb{X}} \cup \Delta\mathbb{X}, \quad (2.4.3)$$

où $\Delta\mathbb{X}$ est l'ensemble des pavés ambigus dont la taille est inférieure à η .

Les algorithmes d'inversion ensembliste peuvent être résumés en trois étapes :

- le choix d'un pavé initial \mathbb{X}_0 censé contenir les solutions recherchées ;

- l’élaboration d’un test d’inclusion, qui permet de déterminer si un pavé est acceptable, inacceptable ou ambigu ;
- le partitionnement des pavés ambigus afin de réduire le volume de $\Delta\mathbb{X}$.

Exemple 2.4.1 Soit \mathbb{X} l’ensemble des vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ de \mathbb{R}^2 , donné par :

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in [-1.5, 1.5]^2 \mid x_1^4 + x_1^2 + 2 * x_2^2 - 1 \in [-0.1, 0.1]\}. \quad (2.4.4)$$

La caractérisation de l’ensemble \mathbb{X} est un problème d’inversion ensembliste qui peut être résolu par l’algorithme SIVIA.

Sur la figure (2.4.1), les pavés bleu clair sont acceptables, ceux en vert foncé sont indéterminés. Le résultat est obtenu en 0.28s pour $\eta = 0.1$, figure (2.4.1.a) et en 4.38s pour $\eta = 0.01$, figure (2.4.1.b)^[2]

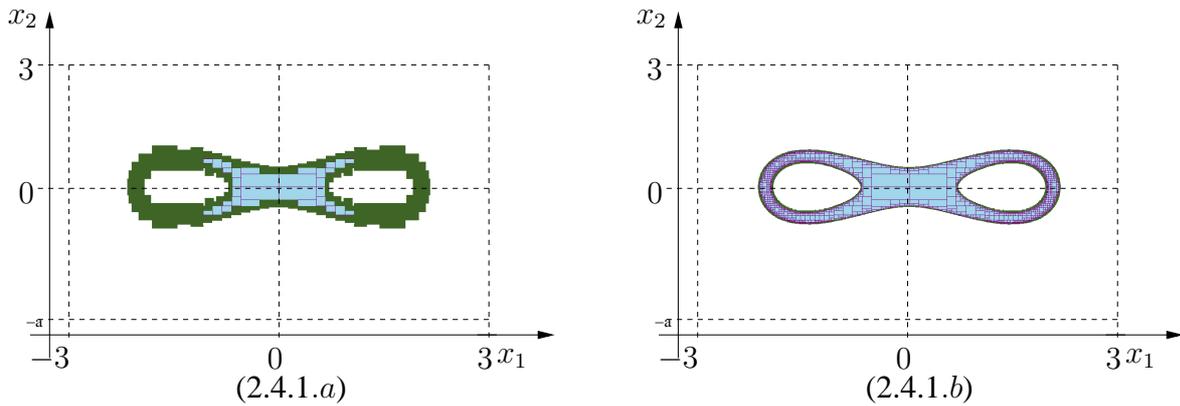


FIG. 2.4.1 – Ensemble de pavés générés par SIVIA pour l’exemple 2.4.1

Lorsque la dimension du vecteur \mathbf{x} est importante, il devient difficile de réaliser une bonne approximation. Dans le cas de l’algorithme SIVIA, la complexité est exponentielle par rapport à la dimension du vecteur \mathbf{x} . Le nombre N de bisections effectuées est inférieur à [Jaulin et Walter 1993] :

$$N = \left(\frac{w(\mathbb{X}_0)}{\eta} + 1 \right)^{n_x}, \quad (2.4.5)$$

où \mathbb{X}_0 est le pavé initial de recherche, n_x est la dimension du vecteur \mathbf{x} et η est la précision de sous-pavage. Pour réduire le nombre de bisections, un opérateur appelé contracteur peut être utilisé (voir par exemple [Hansen 2004]). Le principe de la contraction (ou réduction) est présenté dans le paragraphe suivant.

^[2]Processeur utilisé : un Pentium 4, 4GHz.

2.5 Caractérisation d'ensembles par contraction

Les outils développés dans le cadre de la caractérisation d'ensembles par contraction sont basés sur des techniques de consistance [Waltz 1975, Cleary 1987, Benhamou *et al.* 1994, Lebbah 1999] permettant de réduire les domaines des variables tout en limitant le recours aux bisections. Les parties du domaine qui sont inconsistantes par rapport à une contrainte (cf : § 2.5.1) peuvent être supprimées. L'exemple suivant va nous permettre d'illustrer ce qu'est une valeur inconsistante vis-à-vis d'une équation.

Exemple 2.5.1 Soit l'équation :

$$x_1 = x_2x_3, \quad (2.5.1)$$

où $(x_1, x_2, x_3) \in ([6, 30] \times [2, 3] \times [-4, 3])$.

$x_1 = 10$ est une valeur inconsistante vis à vis de (2.5.1). En effet :

$$\forall (x_2, x_3) \in [2, 3] \times [-4, 3], x_2x_3 \neq x_1 = 10.$$

De même, $[10, 30]$ est un domaine inconsistant pour (2.5.1) car :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in ([10, 30] \times [2, 3] \times [-4, 3]), x_2x_3 \neq x_1.$$

2.5.1 Contrainte

Dans un cadre général, une contrainte peut être une équation linéaire, une équation non linéaire, une inéquation, une équation différentielle, une équation aux dérivées partielles, *etc.* Nous nous intéresserons plus particulièrement dans ce travail aux contraintes statiques, données par la définition 2.5.1 :

Définition 2.5.1 (Contrainte) Une contrainte est une expression de la forme $f_j(\mathbf{x}) = 0$, où $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_j, \dots, f_{n_y}] : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ est une fonction continue et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n_x})^T$ est le vecteur des variables x_i . Cette contrainte peut être assimilée à un sous-ensemble \mathbb{C}_j de \mathbb{R}^{n_x} , avec :

$$\mathbb{C}_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid f_j(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.5.2)$$

Soit $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{R}^{n_x}$ le domaine initial de recherche, on définit alors :

$$\mathbb{S}_j \triangleq \mathbb{C}_j \cap \mathbb{X}_0, \quad (2.5.3)$$

comme l'ensemble solution du problème $\mathcal{H}_j(f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{X}_0)$.

La figure (2.5.1) illustre le principe de la réduction d'un domaine initial \mathbb{X}_0 sous une contrainte \mathbb{C}_j . $[\mathbb{S}_j]$ est le plus petit pavé contenant \mathbb{S}_j , il correspond à la réduction minimale de \mathbb{X}_0 .

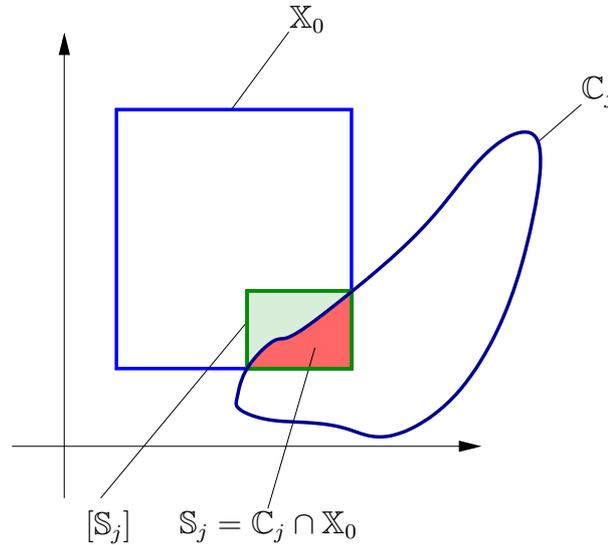


FIG. 2.5.1 – Réduction d'un pavé initial \mathbb{X}_0 sous une contrainte \mathbb{C}_j

Remarque 2.5.1 L'extension aux inéquations du type $f(\mathbf{x}) \geq 0$ (resp. \leq) peut être réalisée en introduisant une variable supplémentaire a . On obtient de nouveau un problème standard $f(\mathbf{x}) + a = 0$, $a \in]-\infty, 0]$ ($a \in [0, \infty[$).

Définition 2.5.2 (CSP) On appelle problème de satisfaction de contraintes (CSP), noté $\mathcal{H}(f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{X}_0)$, un problème composé :

- de variables $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$;
- de contraintes $f(\mathbf{x}) = 0$, où $f : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$;
- d'un domaine initial $\mathbb{X}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$.

L'ensemble solution du problème $\mathcal{H}(f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{X}_0)$ est donné par l'intersection des ensembles solutions des contraintes composant le CSP :

$$\mathbb{S} = \bigcap_{j=1}^{n_y} \mathbb{S}_j. \quad (2.5.4)$$

2.5.2 Consistance locale et consistance globale

Considérons une CSP : $\mathcal{H}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{X}_0)$. Dans cette section, nous définissons le vocable de consistance (locale et globale) d'un point, puis d'un intervalle, avec un CSP. Ces notions sont utilisées dans la section suivante pour résoudre \mathcal{H} .

2.5.2.1 Consistance d'un point

Définition 2.5.3 (Consistance globale) Une valeur $\tilde{x}_i \in [x_i]$ est dite globalement consistante avec \mathcal{H} s'il est possible de trouver un vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ dans \mathbb{S} l'ayant comme $i^{\text{ème}}$ coordonnée, i.e. :

$$\forall j \in \{1, \dots, n_y\}, \forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n_x\}, \exists \tilde{x}_k \in [x_k] \mid f_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_{n_x}) = 0. \quad (2.5.5)$$

La consistance globale d'une valeur $\tilde{x}_i \in [x_i]$ pour l'ensemble des contraintes d'un CSP \mathcal{H} n'est pas toujours vraie et dans certains cas, difficile à vérifier. Souvent, on cherche à relaxer le problème et opter pour la *consistance locale*.

Définition 2.5.4 (Consistance locale) Une valeur $\tilde{x}_i \in [x_i]$ est dite localement consistante avec \mathcal{H} si pour chaque contrainte \mathbb{C}_j ($j \in \{1, \dots, n_y\}$), prise séparément, il est possible de trouver un vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$, ayant \tilde{x}_i comme $i^{\text{ème}}$ coordonnée, consistant avec \mathbb{C}_j , i.e.

$$\forall \mathbb{C}_j, \forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n_x\}, \exists \tilde{x}_k \in [x_k] \mid f_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_{n_x}) = 0. \quad (2.5.6)$$

La figure (2.5.2) représente, pour un CSP \mathcal{H} ayant deux contraintes et pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, le principe de la consistance globale et locale d'une valeur \tilde{x}_1 de x_1 . La première valeur \tilde{x}_1 de x_1 (de gauche à droite) est dite inconsistante avec \mathcal{H} , En effet, il n'est pas possible de trouver une valeur \tilde{x}_2 dans \mathbb{S}_1 ayant \tilde{x}_1 comme première coordonnée. Les deux autres valeurs de x_1 sont localement consistantes mais seule la valeur la plus à droite est globalement consistante. En effet, il existe une valeur \tilde{x}_2 dans $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ ayant \tilde{x}_1 comme première coordonnée.

2.5.2.2 Consistance d'un intervalle

Un intervalle est dit consistant avec une contrainte \mathbb{C}_j , si toutes les valeurs de cet intervalle sont consistantes avec \mathbb{C}_j . Soit un CSP \mathcal{H} , un intervalle est dit globalement (resp. localement) consistant avec \mathcal{H} , si et seulement si toutes les valeurs de cet intervalle sont globalement (resp. localement) consistantes. La consistance globale d'un intervalle entraîne

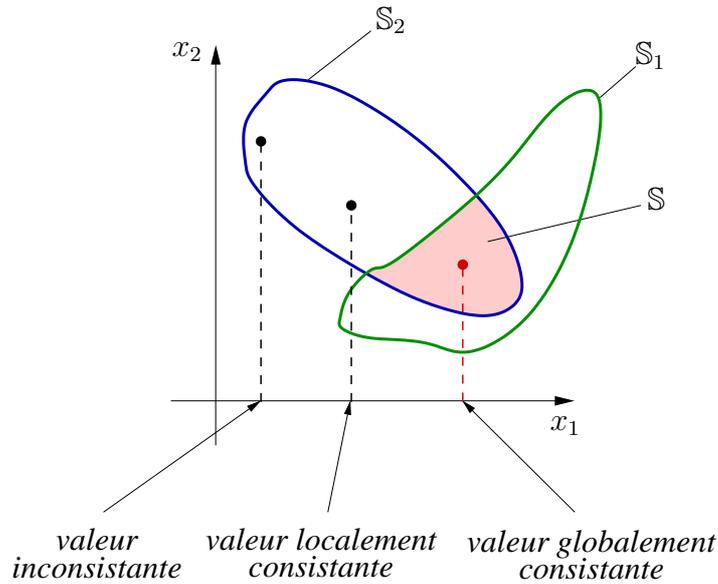


FIG. 2.5.2 – Consistance locale et globale d’une valeur de x_1

la consistance locale de cet intervalle. Souvent, les algorithmes de consistance permettent de déterminer des ensembles localement consistants.

L’exemple de la figure (2.5.3) illustre pour deux contraintes et pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ la consistance d’un intervalle. La figure de gauche représente un domaine de x_1 globalement consistant. En effet, $\forall \tilde{x}_1 \in [x_1]$, il est possible de trouver une valeur \tilde{x}_2 de x_2 dans \mathbb{S} . En d’autres termes, toutes les valeurs de l’intervalle $[x_1]$ sont globalement consistantes. La consistance locale est illustrée sur la figure (2.5.3) de droite. On remarque qu’il existe des valeurs de $[x_1]$ pour lesquelles il n’est pas possible de trouver des éléments de x_2 dans \mathbb{S} . Ainsi, les ensembles de solutions \mathbb{S}_1 et \mathbb{S}_2 sont étudiés séparément.

Il est à noter que la projection de \mathbb{S}_1 (resp. \mathbb{S}_2) sur l’axe de x_1 donne le plus grand intervalle de x_1 consistant avec \mathcal{H}_1 (\mathcal{H}_2), et $proj_1(\mathbb{C}_1) \cap proj_1(\mathbb{C}_2)$ donne le grand intervalle de x_1 localement consistant avec \mathcal{H} .

2.5.3 Contracteur

Soit un CSP $\mathcal{H}(f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in [\mathbf{x}])$, un opérateur $\mathcal{C} : \mathbb{IR}^{n_x} \rightarrow \mathbb{IR}^{n_x}$ est un contracteur pour \mathcal{H} , si pour tout pavé $[\mathbf{x}]$, il vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall [\mathbf{x}], \mathcal{C}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{x}] \quad (\text{contractance}), \tag{2.5.7}$$

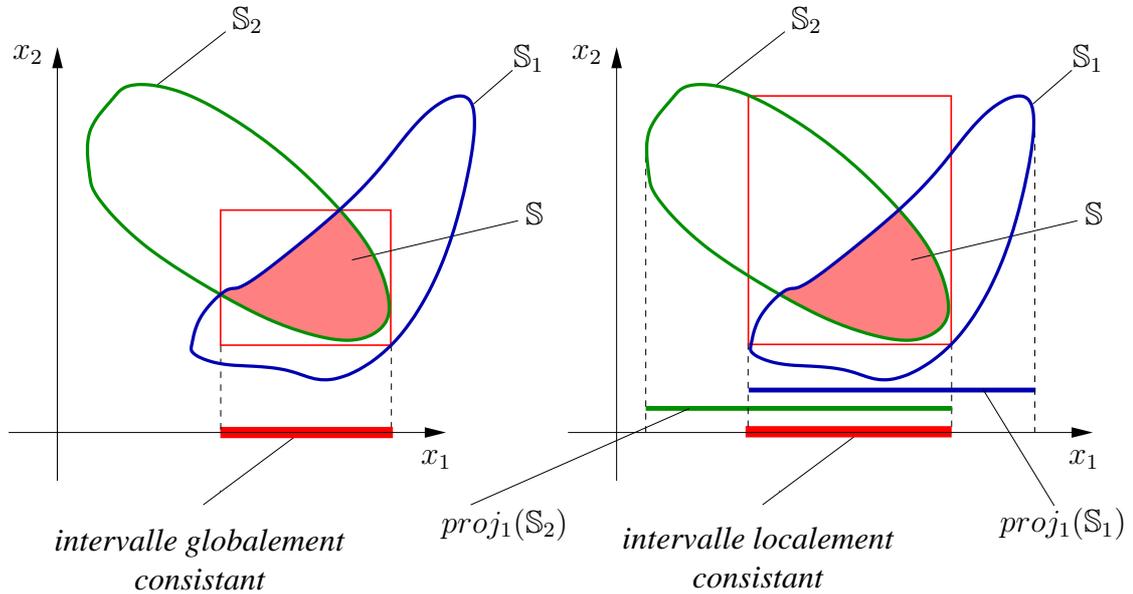


FIG. 2.5.3 – Consistance globale et locale d'un intervalle

$$\forall [\mathbf{x}], [\mathbf{x}] \cap \mathbb{S} \subset \mathcal{C}([\mathbf{x}]) \quad (\text{complétude}) \quad (2.5.8)$$

où \mathbb{S} est l'ensemble solution de \mathcal{H} . D'après les relations (2.5.7) et (2.5.8), on a :

$$\mathbb{S} \subset \mathcal{C}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{x}]. \quad (2.5.9)$$

Un contracteur est dit :

- monotone si : $[\mathbf{x}_1] \subset [\mathbf{x}_2] \Rightarrow \mathcal{C}([\mathbf{x}_1]) \subset \mathcal{C}([\mathbf{x}_2])$;
- minimal si : $\mathcal{C}([\mathbf{x}]) = [[\mathbf{x}] \cap \mathbb{S}]$;
- idempotent si : $\mathcal{C}(\mathcal{C}([\mathbf{x}])) = \mathcal{C}([\mathbf{x}])$.

où $[[\mathbf{x}] \cap \mathbb{S}]$ représente le plus petit pavé contenant $[\mathbf{x}] \cap \mathbb{S}$.

Un contracteur peut être considéré comme étant un moyen de caractériser un sous-ensemble de $[\mathbf{x}]$ contenant toutes les solutions d'un CSP \mathcal{H} .

Il existe dans la littérature différentes méthodes ou techniques permettant la résolution d'un tel problème. Dans le cas où f est une fonction linéaire, ces méthodes sont basées sur l'extension des algorithmes classiques comme celui de Gauss ou de Gauss-Seidel aux intervalles. Pour le cas non linéaire, différents contracteurs ont été proposés ; comme ceux

de Krawczyk [Neumaier 1990], de Newton [Hansen 2004] qui sont basés sur des linéarisations garanties de f . Initialement, ces contracteurs ont été proposés pour des systèmes de contraintes carrées. Néanmoins, ils ont été récemment étendus aux cas des systèmes non carrés (voir par exemple [Hansen 2004]). Ces deux contracteurs, basés sur des linéarisations, sont efficaces seulement lorsque les domaines de recherche sont assez petits. Le contracteur *propagation/rétropropagation* développé dans [Benhamou *et al.* 1999, Jaulin *et al.* 2001a] permet en général de résoudre des CSP indépendamment de ces dernières conditions ; le principe de ce dernier est présenté dans la suite.

Soit un CSP $\mathcal{H}(f(\mathbf{x}) \in [y], \mathbf{x} \in [\mathbf{x}])$, le principe du contracteur de propagation / rétropropagation, noté $\mathcal{C}_{\updownarrow}$ est inspiré de l'algorithme de Waltz [Waltz 1975]. Il consiste à décomposer la contrainte (ou les contraintes) en contraintes élémentaires^[3]. Un ensemble de variables intermédiaires est alors introduit. Il est ainsi possible de construire un graphe, dont les noeuds sont représentés par les variables et les arcs par les contraintes, appelées contraintes primitives.

L'algorithme de résolution de ce contracteur comporte deux phases : la première, dite *propagation*, consiste à projeter chacune des contraintes primitives une à une tout en parcourant le graphe des feuilles à la racine (pour un arbre). La deuxième phase, dite *rétropropagation*, consiste à parcourir le graphe dans le sens contraire en projetant à tour de rôle les contraintes primitives.

La réduction de ce contracteur est optimale si le graphe de propagation n'a pas de cycle. Un graphe possède un cycle lorsqu'une variable apparaît plusieurs fois. A cause de l'effet de dépendance, le fait de réaliser une seule propagation/rétropropagation ne permet pas de réduire, de manière optimale, le domaine des variables. Dans ce cas, le même processus peut être effectué tant qu'une amélioration (réduction) est possible (voir [Jaulin *et al.* 2001a])

Exemple 2.5.2 Soit le CSP $\mathcal{H}(x_1 \exp(x_2) + x_3^2) \in [y], \mathbf{x} \in [\mathbf{x}])$. La relation $y = x_1 \exp(x_2) + x_3^2$ peut se décomposer en contraintes primitives comme suit :

$$y = x_1 \exp(x_2) + (x_3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \exp(x_2) \\ a_2 = x_1 a_1 \\ a_3 = (x_3)^2 \\ y = a_2 + a_3 \end{cases} \quad (2.5.10)$$

où les a_i sont des variables intermédiaires, chacune d'entre elles n'apparaissent qu'une

^[3]Une contrainte élémentaire est une contrainte qui ne contient qu'une opération arithmétique telle que $\{+, -, *, /\}$ entre deux variables ou qu'une fonction élémentaire comme $\{\exp, \log, \dots\}$.

seule fois sur la colonne de gauche et qu'une seule fois sur celle de droite. Les variables x_i apparaissent une seule fois sur la colonne de droite et y une seule fois sur la colonne de gauche, le graphe est donc acyclique. La réduction de ce contracteur peut ainsi être optimale.

La phase de propagation se fait comme suit :

$$\begin{cases} [a_1] & := \exp([x_2]) \\ [a_2] & := [x_1][a_1] \\ [a_3] & := ([x_3])^2 \\ [y_0] & := [a_2] + [a_3] \end{cases} \quad (2.5.11)$$

Cette phase permet de propager les informations disponibles sur x_i afin d'évaluer $[a_j]$ et le domaine $[y_0]$ de y consistant avec x_i . Si $[y_0]$ est incompatible avec les informations disponibles a priori, i.e. $[y] \cap [y_0] \neq \emptyset$, alors l'ensemble solution est vide. Dans le cas contraire, une mise à jour de $[y_0]$ est effectuée ; on obtient alors :

$$[y_0] := [y_0] \cap [y].$$

La rétropropagation consiste à réduire, le cas échéant, les domaines des variables x_i en utilisant les informations sur y . Ce processus est l'inverse de la propagation et est illustré par le système suivant :

$$\begin{cases} [y_0] & := [y_0] \cap [y] \\ [a_2] & := [a_2] \cap ([y_0] - [a_3]) \\ [a_3] & := [a_3] \cap ([y_0] - [a_2]) \\ [x_3] & := [x_3] \cap (\sqrt{[a_3]}) \\ [a_1] & := [a_1] \cap ([a_2]/[x_1]) \\ [x_1] & := [x_1] \cap ([a_2]/[a_1]) \\ [x_2] & := [x_2] \cap (\log([a_1])) \end{cases} \quad (2.5.12)$$

2.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des outils fondamentaux pour la suite de cette thèse. Dans la première partie, nous avons présenté un bref rappel du formalisme et des notions importantes relatifs à la manipulation d'ensembles. Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés à l'arithmétique des intervalles ainsi qu'aux principaux problèmes rencontrés lors de la manipulation des intervalles. Nous avons souligné le fait que

l'utilisation de fonctions d'inclusion naturelles, dont l'implémentation est aisée, est souvent déconseillée, voire inefficace, en raison du pessimisme lié au phénomène de dépendance engendré par des variables multi-occurentes. Souvent, l'utilisation de fonctions d'inclusion plus élaborées permet de réduire ce pessimisme. Un autre problème, fréquemment rencontré lorsque l'on est amené à représenter un ensemble de forme géométrique quelconque par un pavé, est le phénomène d'enveloppement. Pour réduire ce pessimisme, nous avons constaté qu'il est souhaitable d'avoir recours au partitionnement des pavés utilisés. Enfin, nous avons présenté des outils mettant en oeuvre l'arithmétique des intervalles pour manipuler et caractériser de façon approchée mais garantie des ensembles de valeurs. Nous avons présenté le principe de l'inversion ensembliste par arithmétique d'intervalles, aussi appelé algorithme de partitionnement SIVIA, souvent utilisé pour des problèmes non linéaires.

Comme nous l'avons noté dans la section 2.4, la complexité de cette approche est exponentielle vis-à-vis du nombre des variables et dépend de la taille du pavé initial de recherche ainsi que de la précision de sous-pavage. Nous avons ensuite présenté le principe de la caractérisation d'ensembles par contraction, basé sur les notions de consistance. L'idée étant d'éliminer, pour un domaine initial, des parties inconsistantes par rapport à une contrainte. Cette approche permet alors de réduire le temps de calcul de l'algorithme SIVIA.

Dans le chapitre suivant nous abordons la première partie de nos travaux. Il s'agit de traiter, dans un contexte ensembliste, de l'estimation d'état de modèles non linéaires à temps continu. Pour cela nous nous intéresserons dans un premier temps à la caractérisation de l'encadrement de l'espace atteignable d'EDOs à l'aide d'outil intervalles ainsi que des propriétés de monotonie du modèle. Nous utilisons ensuite ces techniques d'approximation espace atteignable d'EDOs pour développer des observateurs fournissant une estimation majorante et minorante de l'état du système.

Chapitre 3

Couverture ensembliste minimale de l'état : cas des systèmes non linéaires à temps continu

3.1 Introduction

Souvent, les algorithmes de diagnostic nécessitent la connaissance de l'évolution des variables d'état du système considéré. Cependant, pour la plupart des applications réelles, ces variables ne sont pas directement accessibles. Dans ce cas, on a recours à l'estimation de l'évolution de l'état à partir des mesures des entrées et des sorties du système. Lorsque le modèle est linéaire, il est possible de reconstruire l'état du processus en utilisant l'observateur de Luenberger [Luenberger 1964] qui est souvent utilisé lorsqu'on ne possède pas d'informations satisfaisantes sur les perturbations ou lorsque l'effet de ces dernières est négligeable. Néanmoins, étant donné qu'un modèle n'est qu'une approximation du comportement du système réel, l'état estimé par l'observateur de Luenberger est souvent biaisé. Le filtrage de Kalman [Kalman 1960] représente une alternative et produit des estimations plus précises dans un cadre linéaire. L'importance du filtrage de Kalman vient du fait que sous certaines hypothèses statistiques, l'estimée calculée est optimale au sens de la minimisation de la variance de l'erreur entre l'état réel et son estimation. Cet "observateur" a été étendu au cas non linéaire en se basant sur des linéarisations autour du point de fonctionnement. Cependant, lorsque le modèle est fortement non linéaire, l'estimée obtenue peut être éloignée de la vraie solution (voir le chapitre 1).

Dans certaines applications, le bruit ne peut pas être décrit par une loi de probabilité (on ne dispose pas d'assez de données par exemple), dans ce cas il est plus judicieux de considérer que ces perturbations sont bornées. L'estimation d'état dans un contexte à erreurs bornées constitue alors une alternative aux méthodes statistiques. Le problème est de caractériser à chaque instant, d'une manière garantie, toutes les valeurs du vecteur d'état compatibles avec les mesures et avec les bornes d'erreurs supposées connues. L'estimation d'état dans un contexte à erreurs bornées a été largement traitée pour des modèles linéaires

(le lecteur peut se référer aux articles [Schweppe 1968, Durieu *et al.* 1996, Maksarov et Norton 2002, Durieu *et al.* 2001, Polyak *et al.* 2004]) où l'ensemble des solutions compatibles avec les mesures et avec les bornes d'erreur est un polyèdre convexe qui peut être exactement déterminé lorsque la dimension du vecteur d'état est réduite. En pratique, cette caractérisation exacte est un problème complexe et coûteux et d'autres approximations extérieures utilisant des formes géométriques simples, *i.e.* des ellipsoïdes, des parallélotopes ou des zonotopes, sont utilisées (voir par exemple [Fogel et Huang 1982, Belforte *et al.* 1990, Chisci *et al.* 1996, Maksarov et Norton 2002, Becis-Aubry 2003, Polyak *et al.* 2004, Alamo *et al.* 2005]).

Lorsque le modèle utilisé est non linéaire et à temps continu, ces dernières méthodes ne sont pas faciles à utiliser ; d'autres estimateurs basés principalement sur l'analyse par intervalles et la propagation de contraintes ont été développés pour des systèmes à temps discret [Jaulin *et al.* 2001b, Kieffer *et al.* 2002, Flans et Adrot 2003]. Pour les systèmes à temps continu, on distingue principalement trois méthodes pour l'estimation d'état. (i) La première [Jaulin 2002, Raïssi *et al.* 2004] est basée sur le mécanisme prédiction/correction comme dans le filtre de Kalman. La prédiction consiste à déterminer le domaine admissible de l'état à l'instant t_{j+1} ayant un encadrement à t_j en effectuant une résolution numérique garantie d'une équation différentielle ordinaire (ODE) [Nedialkov et Jackson 1999]. Lors de la phase de correction, l'ensemble prédit est contracté en supprimant un ensemble de valeurs du vecteur d'état incohérentes avec les mesures prélevées à l'instant t_{j+1} . Comme nous allons le voir dans ce chapitre, cette méthode peut s'appliquer pour une large classe de systèmes non linéaires. Néanmoins, l'effet d'enveloppement la rend efficace uniquement pour de faibles incertitudes. (ii) La seconde approche [Kieffer et Walter 2006, Meslem *et al.* 2008] est également basée sur le mécanisme prédiction/correction où la prédiction est réalisée en se basant sur le théorème de Müller [Müller 1926], connu également sous le nom du théorème de comparaison. Ainsi, le modèle incertain est encadré par deux modèles déterministes ne comportant aucune incertitude. Dans ce cas, l'analyse par intervalles n'est pas utilisée pour résoudre une équation différentielle. Néanmoins, la construction des modèles minorant et majorant reste un problème difficile à résoudre. (iii) La troisième approche (voir par exemple [Gouzé *et al.* 2000, Bernard 2004, Moisan *et al.* 2009]), développée pour des systèmes biotechnologiques, est basée sur une structure en boucle fermée où les mesures sont supposées à temps continu. Initialement, le gain de l'observateur a été choisi afin d'imposer une dynamique coopérative pour l'erreur d'estimation [Gouzé *et al.* 2000]. Dans ce cas, des bornes inférieure et supérieure du domaine d'état peuvent être déterminées tout en évitant le conservatisme dû à l'analyse par intervalles. Cette idée a été étendue dans

[Bernard 2004] afin de construire un ensemble d'observateurs intervalle au lieu d'un seul. L'encadrement de l'état est alors donné par l'intersection des différents domaines estimés. Enfin, cette méthode a été récemment étendue dans [Moisan *et al.* 2009] en ajoutant un critère d'optimalité.

Dans ce chapitre, nous allons étendre la méthodologie proposée dans [Gouzé *et al.* 2000] pour une classe large de systèmes non linéaires à temps continu. L'idée de base consiste d'abord à transformer le modèle non linéaire en un modèle qLPV (quasi Linéaire à Paramètres Variants), ensuite le gain de l'observateur est choisi afin d'avoir une dynamique coopérative pour l'erreur d'estimation.

3.2 Ensemble atteignable d'un système dynamique

Considérons un système physique décrit par des EDOs de la forme :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}), \quad (3.2.1)$$

où généralement l'état initial et les paramètres sont mal connus. On parle alors d'EDO incertaines. Souvent, ces grandeurs incertaines appartiennent à un ensemble compact, résultat des considérations physiques. Dans ce cas, la solution de l'EDO incertaine n'est pas une trajectoire unique, mais un ensemble de trajectoires admissibles que l'on peut appeler espace atteignable. Dans le cas général, le calcul ou la caractérisation exacte de l'espace atteignable est un problème difficile à résoudre et on se restreint généralement à des classes particulières comme par exemple les systèmes affines. Plus généralement, une approximation de cet espace peut être déterminée en réalisant des simulations de type Monte-Carlo en effectuant des tirages aléatoires dans le domaine initial. Néanmoins, cette technique ne permet pas de caractériser toutes les trajectoires admissibles. En effet, une question cruciale lorsqu'on effectue les campagnes de simulation Monte-Carlo, souvent longues et fastidieuses, est le choix du nombre de simulations devant être réalisées. En d'autres termes, il est relativement délicat de garantir que toutes les combinaisons paramétriques (y compris la "pire") aient été considérées à l'issue des simulations.

Une approche alternative consiste à déterminer un encadrement extérieur $[\mathbf{x}(t)]$ de l'espace atteignable $\mathbb{X}(t)$, tel que :

$$[\mathbf{x}(t)] \supset \mathbb{X}(t) = \{\mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}, \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})\}, \quad (3.2.2)$$

où $\mathbf{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x+n_u+n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{D})$ ^[1], $\mathbf{x}(t) = (x_1, \dots, x_{n_x})^T$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) = (u_1, \dots, u_{n_u})^T$ représente le vecteur d'entrée (ou de commande) et $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n_p})^T$ des paramètres inconnus.

Différentes méthodes ont été développées pour résoudre le problème général (3.2.2) (voir par exemple [Moore 1966, Eijgenraam 1981, Lohner 1998, Rihm 1994, Berz et Makino 1998, Nedialkov 1999]). Dans cette section, nous présentons deux approches pour caractériser l'ensemble atteignable d'une EDO incertaine dans un contexte ensembliste. La première est basée sur une extension des modèles de Taylor aux intervalles [Lohner 1987, Rihm 1994, Nedialkov 1999]. Cette méthode comporte deux étapes :

- D'abord, pour chaque valeur initiale de l'état et des paramètres, l'existence et l'unicité de la solution sont vérifiées pour tout instant t entre t_j et $t_{j+1} = t_j + h$ où h est le pas d'intégration. La vérification utilise l'opérateur de Picard-Lindelöf et le théorème du point fixe. Si l'existence est prouvée, un pavé *a priori* englobant toutes les trajectoires de l'état entre t_j et t_{j+1} est calculé.
- La deuxième étape, basée sur un développement de Taylor d'ordre élevé, consiste à réduire cet ensemble *a priori* pour déterminer un encadrement extérieur du domaine de l'état à l'instant t_{j+1} .

La seconde approche de caractérisation de l'espace atteignable $\mathbb{X}(t)$ d'une EDO incertaine est basée sur des théorèmes de comparaison d'inégalités différentielles [Müller 1926, Walter 1970, Smith 1995]. Initialement, le théorème de Müller [Müller 1926] est utilisé pour prouver l'existence d'une solution pour un type particulier d'équations différentielles. Dans le cas de systèmes dits *coopératifs* que nous allons présenter dans la suite, le théorème de Müller permet d'avoir un encadrement de l'ensemble atteignable tout en maîtrisant le conservatisme.

3.2.1 Intégration numérique garantie basée sur les modèles de Taylor intervalle

L'intégration numérique garantie présentée dans cette partie est basée sur une extension du développement de Taylor aux intervalles. Considérons une équation différentielle, où le vecteur de paramètres est inclu dans le vecteur d'état, tel que $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}^T, \mathbf{p}^T)^T$. Par souci de lisibilité, nous noterons ce vecteur d'état étendu \mathbf{x} . Ainsi, l'équation différentielle est donnée

^[1]Notons que dans le paragraphe 3.2.1, il est nécessaire que la $\gamma^{\text{ème}}$ dérivée de \mathbf{f} soit continue ($\gamma \in \mathbb{N}^+$)

par :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0], \quad (3.2.3)$$

où $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\gamma(\mathbb{D})$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ est un ensemble ouvert. L'objectif de cette technique est de calculer un encadrement de l'ensemble des valeurs admissibles de l'état à l'instant $k + 1$, connaissant un encadrement $[\mathbf{x}_k]$ de \mathbb{X}_k à l'instant k . Cet encadrement est obtenu en deux étapes successives :

- la première consiste à vérifier l'existence et l'unicité de la solution pour chaque condition initiale \mathbf{x}_0 . Si elles sont prouvées, un pas d'intégration et un encadrement *a priori* $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$ vérifiant :

$$\mathbf{x}(t) \in [\tilde{\mathbf{x}}_k], \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (3.2.4)$$

sont calculés [Corliss et Rihm 1996, Nedialkov et Jackson 1999] ;

- la seconde étape permet de calculer un pavé $[\mathbf{x}_{k+1}]^+ \subset [\tilde{\mathbf{x}}_k]$ contenant la solution à l'instant t_{k+1} pour toute condition initiale. Ceci revient à contracter le pavé $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$. Cette étape est généralement faite à l'aide d'un développement de Taylor, ou de contracteurs à point fixe [Hansen 2004].

3.2.1.1 Existence, unicité et solution *a priori*

Avant de calculer la solution d'une équation différentielle, il est nécessaire de vérifier son existence et son unicité. Les méthodes d'intégration numérique garantie d'EDO se basent sur le théorème du point fixe et l'opérateur de Picard-Lindelöf. On démontre (voir par exemple [Nedialkov *et al.* 2001]) que si un pavé $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$ vérifie l'inclusion :

$$[\mathbf{x}_k] + [0, h]\mathbf{f}([\tilde{\mathbf{x}}_k]) \subset [\tilde{\mathbf{x}}_k], \quad (3.2.5)$$

avec $h > 0$, alors l'équation différentielle (3.2.3) possède une solution unique à tout instant $t \in [t_k, t_{k+1}]$ et pour toute condition initiale $\mathbf{x}_k \in [\mathbf{x}_k]$. De plus, il est facile de montrer que le pavé $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$ est un encadrement extérieur de l'ensemble atteignable sur l'horizon temporel $[t_k, t_{k+1}]$. Notons que déterminer le plus petit pavé $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$ vérifiant (3.2.5) est un problème difficile à résoudre. Dans [Moore 1966] l'expression suivante est proposée :

$$[\tilde{\mathbf{x}}_k] \triangleq [\mathbf{x}_k] + [0, h]\mathbf{f}([\mathbf{x}_k]), \quad (3.2.6)$$

pour calculer $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$. Néanmoins, souvent l'expression (3.2.6) ne vérifie pas (3.2.5). Une méthode alternative [Nedialkov 1999, Nedialkov *et al.* 2001] consiste à effectuer une inflation de $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$ jusqu'à ce qu'il vérifie l'inclusion (3.2.5). Rappelons qu'une inflation d'un pavé $[\mathbf{x}]$

d'un facteur de $\alpha^{[2]}$ est donnée par :

$$([(1 - \alpha)\underline{x}_1, (1 + \alpha)\bar{x}_1], \dots, [(1 - \alpha)\underline{x}_{n_x}, (1 + \alpha)\bar{x}_{n_x}])^T. \quad (3.2.7)$$

Cette méthode peut être résumée par l'algorithme (2) (dit algorithme de validation), ci-dessous.

Algorithme 2 Validation

ENTRÉES : $[\mathbf{x}_k], \alpha$

- 1: $[\tilde{\mathbf{x}}_k] := [\mathbf{x}_k]$;
- 2: **Tant que** $[\mathbf{x}_k] + [0, h]\mathbf{f}([\tilde{\mathbf{x}}_k]) \not\subset [\tilde{\mathbf{x}}_k]$, **Faire :**
- 3: $[\tilde{\mathbf{x}}_k] := \text{Inflation}([\tilde{\mathbf{x}}_k], \alpha)$ (avec $0 < \alpha < 1$).
- 4: **Fin (Tant que)**

SORTIE : $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$

Il est à noter que si l'algorithme (2) échoue, le pas d'intégration h est réduit avant de reprendre la procédure d'inflation.

3.2.1.2 Réduction de l'encadrement *a priori*

Dans le cas où l'algorithme de validation réussit à déterminer un encadrement *a priori* $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$ vérifiant $\mathbf{x}_k \in [\tilde{\mathbf{x}}_k]$ pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}]$, un développement de Taylor d'ordre γ permet de calculer une approximation extérieure à l'instant t_{k+1} . Cette approximation est donnée par :

$$[\mathbf{x}_{k+1}]^+ = [\mathbf{x}_k] + \sum_{i=1}^{\gamma-1} h^i \mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_k]) + h^\gamma \mathbf{f}^{[\gamma]}([\tilde{\mathbf{x}}_k]), \quad (3.2.8)$$

où les $\mathbf{f}^{[i]}$ représentent les coefficients de Taylor calculés à l'aide de l'expression récursive suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{[1]} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{f}^{[i]} &= \frac{1}{i} \frac{\partial \mathbf{f}^{[i-1]}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

L'encadrement *a priori* $[\tilde{\mathbf{x}}_k]$ est utilisé afin d'évaluer l'erreur de troncature du développement de Taylor. Ce dernier terme étant implicitement proportionnel à $1/(\gamma!)$, le pessimisme induit peut être contrôlé en choisissant γ grand. Par ailleurs, on démontre (voir par exemple [Raïssi 2004]) que le pavé $[\mathbf{x}_{k+1}]^+$ contient d'une manière garantie l'ensemble atteignable à l'instant t_{k+1} .

^[2]Souvent, la valeur $\alpha = 0.05$ est choisie pour le facteur d'inflation.

Le pessimisme introduit par le développement de Taylor (3.2.8) peut être évalué en calculant la taille w du pavé $[\mathbf{x}_{k+1}]^+$, on obtient :

$$w([\mathbf{x}_{k+1}]^+) = w([\mathbf{x}_k]) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} h^i w(\mathbf{f}^{[i]}[\mathbf{x}_k]) + h^\gamma w(\mathbf{f}^{[\gamma]}([\tilde{\mathbf{x}}_k])), \quad (3.2.10)$$

Comme la taille d'un pavé est toujours positive, on a alors $w([\mathbf{x}_{k+1}]^+) \geq w([\mathbf{x}_k])$. Ainsi, l'équation (3.2.8) est numériquement instable et diverge au bout de quelques pas. Pour réduire le phénomène de conservatisme qui en résulte (dû aux effets d'enveloppement et de dépendance), les coefficients de Taylor sont évalués à l'aide d'une fonction d'inclusion centrée. Par ailleurs, des changements de bases, à l'aide d'une décomposition QR ou une forme parallépipédique (voir par exemple [Nedialkov 1999]), permettent de limiter l'effet d'enveloppement. On obtient ainsi l'algorithme "Encadrement" suivant, appelé aussi méthode de la valeur moyenne étendue [Rihm 1994], où \mathbf{I} est une matrice identité de dimension appropriée et les matrices d'initialisation \mathbf{p}_0 , \mathbf{q}_0 et le vecteur \mathbf{v}_0 sont choisis nuls. $\mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_k])$ est la matrice jacobienne du $i^{\text{ème}}$ coefficient $\mathbf{f}^{[i]}$ évaluée sur $[\mathbf{x}_k]$. Enfin, $\hat{\mathbf{x}}_k$, $[\mathbf{v}_k]$ et \mathbf{A}_k sont calculés au pas précédent. Rappelons que dans l'étape 6, la matrice \mathbf{A}_k peut également être calculée à l'aide d'une décomposition QR [Lohner 1998].

Algorithme 3 Encadrement

ENTRÉES : $[\mathbf{x}_k]$, $\hat{\mathbf{x}}_k$, $[\mathbf{v}_k]$, \mathbf{A}_k , h , α

- 1: $[\tilde{\mathbf{x}}_k] = \text{Validation}([\mathbf{x}_k], \alpha)$;
- 2: $[\mathbf{v}_{k+1}] = \hat{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^{\gamma-1} \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_k)h^i + \mathbf{f}^{[\gamma]}([\tilde{\mathbf{x}}_k])h^\gamma$;
- 3: $[\mathbf{S}_k] = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\gamma-1} \mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_k])h^i$;
- 4: $[\mathbf{q}_{k+1}] = ([\mathbf{S}_k]\mathbf{A}_k)[\mathbf{p}_k] + [\mathbf{S}_k]([\mathbf{v}_k] - \hat{\mathbf{x}}_k)$;
- 5: $[\mathbf{x}_{k+1}]^+ = [\mathbf{v}_{k+1}] + [\mathbf{q}_{k+1}]$;
- 6: $\mathbf{A}_{k+1} = \text{mid}([\mathbf{S}_k]\mathbf{A}_k)$;
- 7: $[\mathbf{p}_{k+1}] = \mathbf{A}_{k+1}^{-1}([\mathbf{S}_k]\mathbf{A}_k)[\mathbf{p}_k] + (\mathbf{A}_{k+1}^{-1}[\mathbf{S}_k])([\mathbf{v}_k] - \hat{\mathbf{x}}_k)$;
- 8: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \text{mid}([\mathbf{v}_{k+1}])$;

SORTIES : $[\mathbf{x}_{k+1}]^+$, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$, $[\mathbf{v}_{k+1}]$, $[\mathbf{p}_{k+1}]$, \mathbf{A}_{k+1}

3.2.2 Théorèmes de comparaison et encadrement d'EDO dans un contexte incertain

L'approche basée sur des théorèmes de comparaison permet également de déterminer un encadrement de l'ensemble des trajectoires admissibles décrites par (3.2.2). L'idée principale est de transformer un problème incertain (3.2.2) en un problème déterministe four-

nissant des estimations minorante et majorante, englobant de manière garantie l'ensemble $\mathbb{X}(t)$ des trajectoires de l'EDO. L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de s'affranchir du phénomène d'enveloppement dû à la manipulation d'intervalles dans le cas multidimensionnel.

Dans un premier temps, il est nécessaire de présenter différentes propriétés qui sont utilisées dans la suite de cette section pour encadrer un système incertain. Nous nous attardons particulièrement sur les systèmes coopératifs, qui possèdent des propriétés intéressantes pour l'encadrement d'EDOs en présence d'incertitudes. Ces propriétés sont exploitées tout au long de ce chapitre. Les conditions de l'existence d'un encadrement garanti des trajectoires possibles de (3.2.1) sont ensuite présentées. Enfin, nous allons présenter des règles, proposées dans [Kieffer et Walter 2006], pour construire des systèmes déterministes générant les trajectoires minorante et majorante encadrant $\mathbb{X}(t)$.

3.2.2.1 Propriétés et notations

L'encadrement de l'ensemble des trajectoires d'un système par des trajectoires, minorante et majorante, présenté dans la partie suivante, repose sur les propriétés de monotonie des systèmes dynamiques. En effet, si un système décrit par (3.2.1) est monotone^[3], ses trajectoires d'état respectent, sur un domaine de définition donné, la relation d'ordre définie par rapport aux conditions initiales, *i.e.* :

$$\mathbf{x}(t_0) \leq \mathbf{x}'(t_0) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}'(t), \forall t > t_0, \quad (3.2.11)$$

où la relation d'ordre doit être respectée composante par composante.

La monotonie d'un système est démontrée en étudiant les propriétés de \mathbf{f} , et plus particulièrement la quasi-monotonie croissante de \mathbf{f} (voir par exemple [Walter 1970, Smith 1995, Uhl 1996, Hirsch et Smith 2003]).

Propriété 3.2.1 (Condition de quasi-monotonie) Une fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ est quasi-monotone croissante en \mathbf{x} , aussi appelé *Q-condition*, si :

$$(\mathbf{x} \leq \mathbf{x}') \wedge (\mathbf{u} \leq \mathbf{u}') \wedge (x_i = x'_i) \Rightarrow f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq f_i(\mathbf{x}', \mathbf{u}'), \forall i \in \{1; \dots, n_x\}. \quad (3.2.12)$$

^[3]Nous attirons l'attention du lecteur sur la différence entre un système monotone et une fonction monotone. En effet, une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ est monotone croissante par rapport à \mathbf{x} sur le domaine \mathbb{D} , si : $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}' \Rightarrow f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}'), \forall i \in \{1; \dots, n_x\}$.

Notons que dans [Smith 1995] cette condition est également exprimée en termes de dérivées partielles de \mathbf{f} sur le domaine $\mathbb{D} \times \mathbb{U}$. Ainsi, pour un domaine $\mathbb{D} \times \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{n_x+n_u}$ convexe, si :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}, \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}, \quad (3.2.14)$$

alors \mathbf{f} est quasi-monotone croissante en \mathbf{x} sur $\mathbb{D} \times \mathbb{U}$. En effet, pour tout $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$, $\mathbf{u} \leq \mathbf{u}'$ et $x_i = x'_i$, on a :

$$f_i(\mathbf{x}', \mathbf{u}) - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^1 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n_x} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}))(x'_j - x_j) dr \geq 0, \quad (3.2.15)$$

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}') - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n_u} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}))(u'_j - u_j) dr \geq 0, \quad (3.2.16)$$

si et seulement si (3.2.13) et (3.2.14) sont vraies. Pour de plus amples détails, le lecteur intéressé pourra se référer à [Smith 1995, Angeli et Sontag 2003].

Remarque 3.2.1 Dans le cas des systèmes autonomes, décrit par $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, la condition de quasi-monotonie et appelée condition de Kamke ou K-condition [Kamke 1932, Smith 1995].

De la Q-condition découle le théorème suivant, qui permet de vérifier si un système est monotone.

Théorème 3.2.1 [Smith 1995, Hirsch et Smith 2003] Soit un système décrit par :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (3.2.17)$$

On considère deux vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n_x})^T$ et $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_{n_x})^T \in \mathbb{D}$ et une relation d'ordre $\prec \in \{\leq, <, \ll\}$. Si \mathbf{f} satisfait la condition de quasi-monotonie croissante en \mathbf{x} , alors :

$$\mathbf{x}(t_0) \prec \mathbf{x}'(t_0) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \prec \mathbf{x}'(t), \quad \forall t > t_0, \quad (3.2.18)$$

et le système (3.2.17) est par conséquent monotone.

Réciproquement, si (3.2.17) est monotone, alors la fonction \mathbf{f} satisfait la condition de quasi-monotonie croissante en \mathbf{x} .

Démonstration 3.2.2 La démonstration de ce théorème est donnée dans [Smith 1995]. ■

Dans la suite, nous allons présenter une classe particulière des systèmes monotones, appelés systèmes coopératifs. En effet, la coopérativité est une propriété forte qui implique en particulier la quasi-monotonie croissante en \mathbf{x} de la fonction \mathbf{f} . Cette implication peut être aisément démontrée en utilisant les relations (3.2.15), (3.2.16) et la définition suivante.

Définition 3.2.2 *Un système décrit par (3.2.1) est coopératif (voir par exemple [Smith 1995, Angeli et Sontag 2003]) si :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\geq 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}, \\ \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Notons que dans le cas des systèmes linéaires décrits par :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.2.20)$$

avec $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n_x \times n_x}$, l'étude de la coopérativité revient à vérifier les signes des éléments hors-diagonaux de \mathbf{A} . Ainsi, un système décrit par (3.2.20) est coopératif si $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$.

Exemple 3.2.1 *Soit la fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par :*

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ p_3 x_1 + p_4 x_2 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, nous allons étudier la K-condition de \mathbf{f} suivant les valeurs du vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$. Soient deux vecteurs $(x_1, x_2)^T$ et $(x'_1, x'_2)^T$:

- *pour f_1 on a : $(x_2 \leq x'_2)$ et $(x_1 = x'_1)$ alors $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_1 x'_1 + p_2 x'_2$, si et seulement si $p_2 \geq 0$;*
- *pour f_2 on a : $(x_1 \leq x'_1)$ et $(x_2 = x'_2)$ alors $p_3 x_1 + p_4 x_2 \leq p_3 x'_1 + p_4 x'_2$, si et seulement si, $p_3 \geq 0$.*

Ainsi \mathbf{f} respecte la condition de Kamke, si et seulement si $(p_2 \geq 0) \wedge (p_3 \geq 0)$. On peut noter que la K-condition \mathbf{f} n'implique pas nécessairement la monotonie croissante de \mathbf{f} . En effet, considérons par exemple le vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (1, 5, 2, -4)^T$ vérifiant la K-condition de \mathbf{f} et les deux points \mathbf{x}, \mathbf{x}' :

$$\mathbf{x} = (0, 1)^T \leq \mathbf{x}' = (1, 3)^T.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (5, -4)^T, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}') &= (21, -14)^T. \end{aligned}$$

La fonction \mathbf{f} n'est donc pas monotone croissante pour ce vecteur de paramètres.

3.2.2.2 Encadrement d'un système incertain

L'objectif de cette partie est de déterminer l'ensemble des trajectoires atteignables pour des classes particulières de systèmes dynamiques. En effet, ce problème reste difficile, voire impossible, à résoudre dans le cas général. La méthodologie utilisée est basée sur le théorème de Müller [Müller 1926] ; l'idée consiste à construire deux systèmes minorant et majorant permettant d'encadrer, d'une manière garantie, l'ensemble atteignable. Nous allons montrer que lorsque le système vérifie la propriété de coopérativité, l'encadrement est minimal.

Considérons un système dynamique décrit par :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.2.21)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ^[4] et $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$.

L'existence et la garantie de l'encadrement recherché, pour un système décrit par (3.2.21), peut se faire à l'aide du théorème de Müller.

Théorème 3.2.3 (Théorème de Müller) [Müller 1926, Uhl 1996]. Soient deux fonctions $\underline{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{x}} : [0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, vérifiant $\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t)$ ($0 \leq t \leq t_N$). On définit un domaine \mathbb{T} donné par :

$$\mathbb{T} = \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_p} \times \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{z}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \underline{\mathbf{u}}(t) \leq \mathbf{u}(t) \leq \bar{\mathbf{u}}(t) \\ \underline{\mathbf{p}}_0 \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}_0 \\ 0 \leq t \leq t_N \end{array} \right. \right\}. \quad (3.2.22)$$

Supposons que $\mathbf{f} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ est une fonction continue sur le domaine \mathbb{T} et qu'elle vérifie, pour $i \in \{1, \dots, n_x\}$:

$$z_i = \underline{x}_i(t) \Rightarrow \min_{\mathbb{T}} [f_i(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)] \geq \dot{\underline{x}}_i(t), \quad (3.2.23)$$

$$z_i = \bar{x}_i(t) \Rightarrow \max_{\mathbb{T}} [f_i(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)] \leq \dot{\bar{x}}_i(t). \quad (3.2.24)$$

^[4]Dans ce paragraphe, on considère qu'une partie du vecteur \mathbf{u} peut être inconnue mais bornée.

Supposons également que l'état initial du système (3.2.21) vérifie :

$$\underline{\mathbf{x}}(0) \leq \mathbf{x}_0 \leq \bar{\mathbf{x}}(0). \quad (3.2.25)$$

Alors l'EDO (3.2.21) a une solution $\mathbf{x} : [0, t_N] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, pour chaque état initial \mathbf{x}_0 et chaque valeur de \mathbf{p} et de $\mathbf{u}(t)$, satisfaisant la relation suivante :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t), \quad (3.2.26)$$

Par ailleurs, il a été démontré dans [Müller 1926, Marcelli et Rubbioni 1997, Walter 1997] que si la fonction \mathbf{f} est lipschitzienne par rapport à \mathbf{x} pour tout $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$ et $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}(t)]$, l'unicité de la solution est assurée. Notons que le théorème de Müller donne des conditions suffisantes pour assurer l'existence de solutions pour (3.2.21), mais ne permet pas de générer les trajectoires $\underline{\mathbf{x}}(t)$ et $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

Par ailleurs, dans le cas où le système (3.2.21) est coopératif, le théorème de comparaison (voir par exemple [Smith 1995, Walter 1997]) pose les bases pour l'encadrement garanti de toutes les trajectoires d'état possibles.

Théorème 3.2.4 (Principe de comparaison) Soient deux systèmes coopératifs décrits par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \end{cases} \quad (3.2.27)$$

avec $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_x+n_u+n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ et les vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_x}$.

Si $x_i(t_0) \leq y_i(t_0)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n_x\}$ et $\mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \leq \mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p})$, pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_x}$, alors :

$$x_i(t) \leq y_i(t) \quad \forall t > t_0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n_x\}. \quad (3.2.28)$$

Le théorème (3.2.4) a été utilisé dans [Walter 1997, Walter et Kieffer 2003, Kieffer et Walter 2006] afin d'encadrer l'ensemble atteignable de systèmes dynamiques en présence d'incertitudes. Il est montré que s'il existe deux systèmes coopératifs décrits par :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) &= \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t), \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t), \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

vérifiant $\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(t), \underline{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \leq \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t) \leq \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t)$, pour tout $\mathbf{u}(t) \in$

$[\underline{\mathbf{u}}(t), \overline{\mathbf{u}}(t)]$, $\mathbf{p} \in [\underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}]$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ et si $\underline{\mathbf{x}}_0 \leq \mathbf{x}_0 \leq \overline{\mathbf{x}}_0$, alors la solution de (3.2.21) satisfait :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \overline{\mathbf{x}}(t), \forall t \geq 0. \quad (3.2.30)$$

Ainsi, un encadrement des solutions de (3.2.21) est donné par $[\mathbf{x}(t)] = [\underline{\mathbf{x}}(t), \overline{\mathbf{x}}(t)]$, où $\underline{\mathbf{x}}(t)$ et $\overline{\mathbf{x}}(t)$ sont les solutions de (3.2.29).

Dans la suite, nous nous intéressons aux méthodes permettant de construire des systèmes déterministes pour calculer $\underline{\mathbf{x}}(t)$ et $\overline{\mathbf{x}}(t)$.

3.2.2.3 Construction de systèmes bornants

Dans ce paragraphe, nous allons présenter des règles, introduites dans [Kieffer et Walter 2006], basées sur le théorème de Müller [Müller 1926] et permettant de construire les deux systèmes bornants. Ces règles utilisent les propriétés de monotonie de la fonction \mathbf{f} par rapport à l'état \mathbf{x} , aux entrées \mathbf{u} et aux paramètres \mathbf{p} . Ces règles sont utiles surtout lorsque $\partial f_i / \partial x_k$ (avec $i \neq k$), $\partial f_i / \partial u_k$ et $\partial f_i / \partial p_k$ ne changent pas de signe sur le domaine \mathbb{D} .

Dans [Kieffer et Walter 2006], on définit la $i^{\text{ème}}$ composante du système minorant par :

$$\dot{\underline{x}}_i(t) = \underline{f}_i(\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t) = f_i(\underline{\boldsymbol{\kappa}}^i, \underline{\boldsymbol{\nu}}^i, \underline{\boldsymbol{\rho}}^i, t),$$

avec $\underline{\boldsymbol{\kappa}}^i = (\underline{\kappa}_1^i, \dots, \underline{\kappa}_{n_x}^i)^T$, $\underline{\boldsymbol{\nu}}^i = (\underline{\nu}_1^i, \dots, \underline{\nu}_{n_u}^i)^T$, $\underline{\boldsymbol{\rho}}^i = (\underline{\rho}_1^i, \dots, \underline{\rho}_{n_p}^i)^T$.

Et la $i^{\text{ème}}$ composante du système majorant par :

$$\dot{\overline{x}}_i(t) = \overline{f}_i(\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{p}}, t) = f_i(\overline{\boldsymbol{\kappa}}^i, \overline{\boldsymbol{\nu}}^i, \overline{\boldsymbol{\rho}}^i, t),$$

avec $\overline{\boldsymbol{\kappa}}^i = (\overline{\kappa}_1^i, \dots, \overline{\kappa}_{n_x}^i)^T$, $\overline{\boldsymbol{\nu}}^i = (\overline{\nu}_1^i, \dots, \overline{\nu}_{n_u}^i)^T$, $\overline{\boldsymbol{\rho}}^i = (\overline{\rho}_1^i, \dots, \overline{\rho}_{n_p}^i)^T$.

Les éléments $\underline{\nu}_k^i$, $\underline{\rho}_m^i$, $\overline{\nu}_k^i$, $\overline{\rho}_m^i$ et $\overline{\kappa}_j^i$ sont définis en fonction du signe des dérivées partielles suivantes (*i.e.* en fonction de la monotonie croissante ou décroissante de f_i par rapport à l'élément étudié) :

$$\underline{\nu}_k^i = \begin{cases} \underline{u}_k & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \geq 0 \\ \overline{u}_k & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial u_k} < 0 \end{cases}, \quad \overline{\nu}_k^i = \begin{cases} \overline{u}_k & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \geq 0 \\ \underline{u}_k & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial u_k} < 0 \end{cases}, \quad k \in \{i, \dots, n_u\}, \quad (3.2.31)$$

$$\underline{\rho}_m^i = \begin{cases} \underline{p}_m & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial p_m} \geq 0 \\ \overline{p}_m & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial p_m} < 0 \end{cases}, \quad \overline{\rho}_m^i = \begin{cases} \overline{p}_m & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial p_m} \geq 0 \\ \underline{p}_m & \text{si } \frac{\partial f_i}{\partial p_m} < 0 \end{cases}, \quad m \in \{i, \dots, n_p\}, \quad (3.2.32)$$

$$\kappa_j^i = \begin{cases} \underline{x}_i & si \quad i=j \\ \underline{x}_j & si \quad (i \neq j) \wedge \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0 \\ \bar{x}_j & si \quad (i \neq j) \wedge \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \end{cases}, \quad \bar{\kappa}_j^i = \begin{cases} \bar{x}_i & si \quad i=j \\ \bar{x}_j & si \quad (i \neq j) \wedge \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0 \\ \underline{x}_j & si \quad (i \neq j) \wedge \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \end{cases}, \quad j \in \{i, \dots, n_x\}, \quad (3.2.33)$$

L'encadrement garanti de l'ensemble atteignable du système décrit par (3.2.21) est donné par le système couplé :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t) & \underline{\mathbf{x}}(t_0) = \underline{\mathbf{x}}_0 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t) & \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \end{cases}, \quad (3.2.34)$$

où $\underline{\mathbf{f}} = (f_1, \dots, f_{n_x})^T$ et $\bar{\mathbf{f}} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n_x})^T$.

Il est important de souligner que les systèmes dynamiques couplés définis par (3.2.34) ne comportent aucune incertitude. En revanche, le couplage entre les dynamiques inférieure et supérieure peut conduire certains systèmes englobants de la forme (3.2.34) à une instabilité, même si le système englobé est stable.

Dans le cas particulier des systèmes coopératifs, cette construction est plus simple que dans le cas général, puisque par définition $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0$ pour $i \neq j$ et $\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \geq 0$. Seule l'étude de la monotonie de la fonction \mathbf{f} par rapport aux paramètres \mathbf{p} est nécessaire. Le principe consiste, pour la $i^{\text{ème}}$ composante du système minorant, à remplacer chaque paramètre p_m ($m \in \{1, \dots, n_p\}$) par sa borne inférieure si $\frac{\partial f_i}{\partial p_m} \geq 0$ ou bien par sa borne supérieure si $\frac{\partial f_i}{\partial p_m} \leq 0$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$, $\mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}(t)]$, $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$, et $t \in [t_0, t_N]$. Egalement, la $i^{\text{ème}}$ composante du système majorant est définie en remplaçant chaque paramètre p_m ($m \in \{1, \dots, n_p\}$) par sa borne supérieure si $\frac{\partial f_i}{\partial p_m} \geq 0$ ou par sa borne inférieure si $\frac{\partial f_i}{\partial p_m} \leq 0$.

Dans le cas des systèmes coopératifs, il n'y a pas de couplage entre les systèmes minorant et majorant. Si la fonction \mathbf{f} est monotone croissante (ou décroissante) par rapport à l'ensemble des paramètres (*i.e.* toutes les dérivées partielles par rapport aux paramètres sont de même signe), le système englobant (3.2.29) correspond à deux trajectoires réalisables par le système. Ainsi, l'espace atteignable $\mathbb{X}(t)$ est caractérisé de manière exacte par les systèmes minorant et majorant. Par contre, dans le cas où les dérivées partielles n'ont pas le même signe, du pessimisme est introduit dans la caractérisation de l'espace atteignable $\mathbb{X}(t)$. En effet, les systèmes minorant et majorant ne correspondent pas nécessairement à des trajectoires réalisables du système.

Exemple 3.2.2 *Considérons un modèle bi-compartimental (figure 3.2.1) décrit par :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (K_{12} - k_{10})x_1 + k_{21}x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= k_{12}x_1 - k_{21}x_2 \end{cases} \quad (3.2.35)$$

Ce type de modèle est fréquemment utilisé dans les domaines de la biologie (voir par exemple [Jacquez 1985]) et de la chimie pour étudier des phénomènes reposant sur les interactions de systèmes isolés. Par exemple les systèmes isolés peuvent représenter plusieurs populations vivants sur un même territoire et interagissant entre elles, des parties du corps reliées les unes aux autres, ou encore en chimie des masses de produits différents réagissant entre eux, etc.

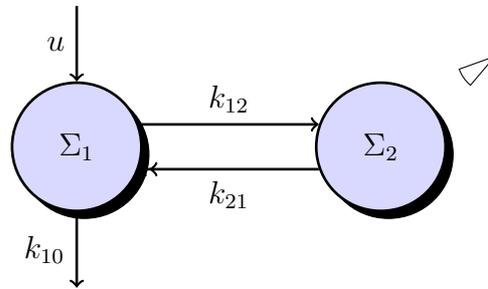


FIG. 3.2.1 – Modèle bi-compartimental [Kieffer et Walter 1998 ; 2006]

Les paramètres k_{12} et k_{21} sont supposés constants et k_{10} dépend d'une non linéarité décrite par une équation de Michaelis-Menten [Godfrey 1983] :

$$k_{10} = \frac{p_1}{1 + p_2 x_1}.$$

Ainsi, pour $\mathbf{p} = (p_1, p_2, k_{21}, k_{12})^T$, on peut réécrire le modèle comportemental comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -p_4 - \frac{p_1 x_1}{1 + p_2 x_1} + p_3 x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= p_4 x_1 - p_3 x_2 \\ y &= x_2 \end{cases} \quad (3.2.36)$$

où seule la variable x_2 peut être mesurée.

Nous proposons de reprendre les mêmes valeurs des paramètres que celles utilisées dans [Kieffer et Walter 2006] :

$$[\mathbf{p}] = ([0.9, 1.1], [1.1, 1.3], [0.45, 0.55], [0.2, 0.3])^T. \quad (3.2.37)$$

De plus, l'état initial est incertain et de bornes connues : $\mathbf{x}_0 \in ([0.95, 1.05], [0, 0.1])^T$. Dans cet exemple, aucune perturbation d'état n'est prise en compte.

Le but est de déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble atteignable du système décrit par (3.2.36) en tenant compte des incertitudes sur l'état initial et sur les paramètres. Pour cela nous allons nous baser sur les signes des éléments de la jacobienne :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{p_4 + 2p_4p_2x_1 + p_4p_2^2x_1^2 + p_1}{(1 + p_2x_1)^2} & p_3 \\ p_4 & -p_3 \end{pmatrix}, \quad (3.2.38)$$

Nous notons alors que si les paramètres p_3 et p_4 sont positifs, alors le système décrit par le modèle (3.2.36) est coopératif.

Ainsi, pour construire les trajectoires minorante et majorante, nous utilisons les règles (3.2.32). Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -\underline{p}_4 - \frac{\underline{p}_1 \underline{x}_1}{1 + \underline{p}_2 \underline{x}_1} + \underline{p}_3 \underline{x}_2 + u \\ \underline{p}_4 \underline{x}_1 - \underline{p}_3 \underline{x}_2 \end{pmatrix} \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -\overline{p}_4 - \frac{\overline{p}_1 \overline{x}_1}{1 + \overline{p}_2 \overline{x}_1} + \overline{p}_3 \overline{x}_2 + u \\ \overline{p}_4 \overline{x}_1 - \overline{p}_3 \overline{x}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.2.39)$$

Les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble atteignable décrites par les équations (3.2.39) sont tracées en pointillé sur la figure (3.2.2). Sur la même figure, nous avons tracé un ensemble de trajectoires admissibles (\mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2) obtenues par un tirage aléatoire dans les domaines de l'état initial et des paramètres. Nous remarquons que ces trajectoires sont à l'intérieur de l'encadrement. D'un autre côté, les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial p_i}$ n'ont pas le même signe, le domaine atteignable n'est donc pas déterminé d'une manière exacte ; du pessimisme est alors généré.

Nous avons présenté dans cette section deux approches pour caractériser un encadrement de l'espace atteignable d'EDO incertaines. Ces méthodes permettent d'assurer la garantie de l'encadrement, *i.e.* l'ensemble des valeurs admissibles de l'espace atteignable est compris dans l'encadrement calculé. Néanmoins, le résultat de l'intégration numérique peut être conservateur. Ce conservatisme est engendré par le pessimisme introduit par le phénomène d'enveloppement pour les approches basées sur les modèles de Taylor intervalle. Dans le cas des approches basées sur le théorème de comparaison et les propriétés de monotonie des

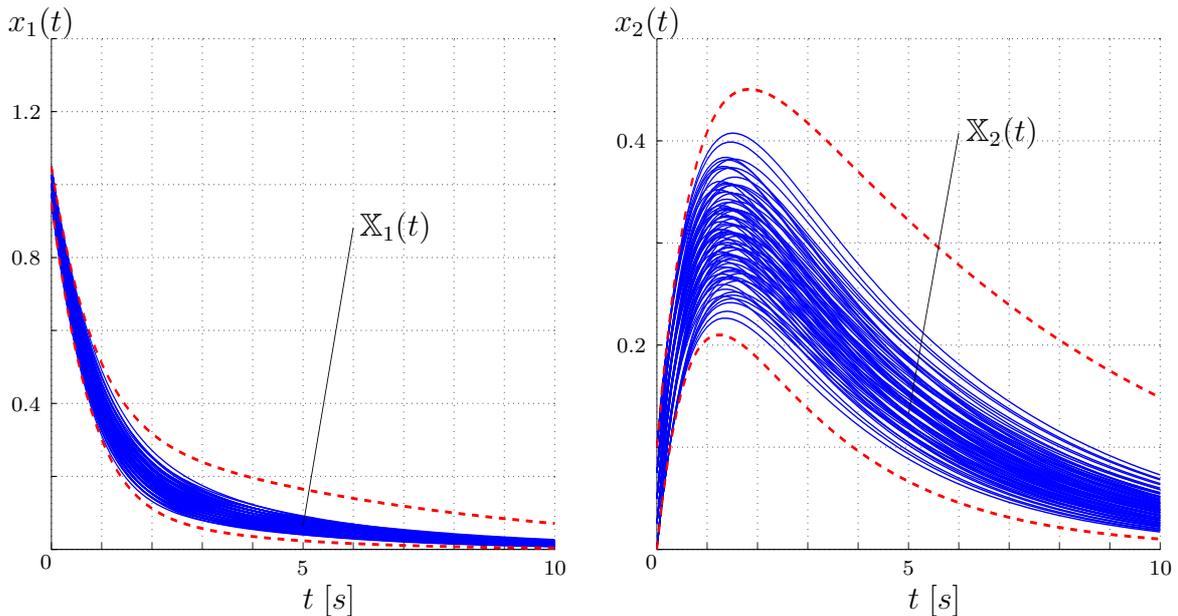


FIG. 3.2.2 – Encadrement de l'ensemble atteignable des trajectoires d'état du système bi-compartimental (3.2.36) pour $\mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0]$ et $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$.

EDOs, le conservatisme vient du couplage des variables incertaines dans l'élaboration des systèmes minorant et majorant.

Dans le paragraphe suivant, nous allons utiliser ces techniques pour développer une procédure de caractérisation de l'ensemble des valeurs admissibles du vecteur d'état d'un modèle dynamique incertain. L'étude est conduite pour le cas des systèmes non linéaires à temps continu.

3.3 Estimation d'état de systèmes non linéaires à temps continu

Dans un contexte à erreurs bornées, l'objectif est de calculer l'ensemble des valeurs du vecteur d'état appartenant à l'ensemble atteignable et compatibles avec les mesures. L'estimation d'état consiste alors à contracter l'ensemble $\mathbb{X}(t)$ en utilisant l'information fournie par les mesures. Comme l'ensemble solution est difficile à déterminer d'une manière exacte, des formes géométriques simples comme les ellipsoïdes [Polyak *et al.* 2004], les zonotopes [Alamo *et al.* 2005] ou les intervalles [Jaulin 2002, Raïssi *et al.* 2004] sont utilisées afin d'effectuer une approximation extérieure.

Dans le cas des modèles non linéaires à temps continu, on rencontre principalement trois approches permettant de résoudre le problème d'estimation d'état dans un contexte à erreurs bornées.

La première est basée sur le mécanisme *prédiction/correction*, semblable au filtre de Kalman (voir par exemple [Jaulin 2002, Raïssi *et al.* 2004]). L'étape de prédiction consiste à calculer, à l'instant t_{k+1} , un encadrement $[\mathbf{x}_{k+1}]^+$ de l'ensemble \mathbb{X} des trajectoires du vecteur d'état consistant avec l'ensemble $[\mathbf{x}_k]$ des valeurs admissibles à l'instant t_k ; ce qui revient à réaliser une intégration numérique garantie d'une équation différentielle en présence d'incertitudes [Nedialkov 1999]. La correction permet de réduire le pavé $[\mathbf{x}_{k+1}]^+$ en utilisant les informations provenant des mesures $\mathbf{y}^m(t_{k+1})$. En raison du phénomène d'enveloppement, cette méthode n'est efficace que lorsque les incertitudes sur l'état et le vecteur de paramètres restent suffisamment petites.

La seconde approche est également basée sur la prédiction/correction (voir par exemple [Kieffer et Walter 2006]). Dans cette approche, la prédiction est réalisée à l'aide du théorème de comparaison présenté dans la section précédente. Deux trajectoires d'état, minorant et majorant l'ensemble des trajectoires admissibles de l'EDO, sont construites en fonction de la monotonie de la fonction f . Le principal avantage de cette méthode est que l'analyse par intervalles n'est pas utilisée pour résoudre l'EDO incertaine. Ceci dans le but d'éviter le conservatisme dû aux phénomènes de dépendance et d'enveloppement inhérents à l'arithmétique des intervalles. Ainsi, pour un système coopératif, il est possible de caractériser de manière exacte l'encadrement de l'espace atteignable de l'EDO incertaine. Néanmoins, la construction des systèmes bornants, générant les trajectoires minorantes et majorante, reste une tâche difficile.

La troisième approche, développée pour les systèmes biotechnologiques (voir par exemple [Moisan *et al.* 2009]), revient à construire deux observateurs à retour de sortie fournissant des estimations minorante et majorante du vecteur d'état. Cette approche a été initialement proposée dans [Rapaport et Gouzé 1999] pour des modèles linéaires à une injection de sortie près. L'idée est de construire les deux observateurs bornants, tels que les systèmes dynamiques représentant le comportement de l'erreur d'observation minorante et majorante soient coopératifs. Cette approche a été étendue dans [Bernard 2004], où un ensemble d'observateurs intervalles est conçu (appelé aussi faisceau d'observateurs) en utilisant des sorties supplémentaires. L'intersection de toutes les estimations est ensuite effectuée afin d'améliorer le taux de convergence des bornes d'estimation. Enfin, dans [Moisan *et al.* 2009], cette approche a été améliorée par l'introduction d'un critère d'optimalité conduisant à la définition d'un observateur optimal. Il a été montré dans [Moisan *et al.* 2009]

que cette approche peut donner des résultats efficaces pour des systèmes biotechnologiques avec de larges incertitudes.

Dans la suite, nous allons présenter brièvement ces approches et nous allons les étendre à une large classe de systèmes non linéaires en passant par des approximations sous forme qLPV (quasi-Linéaire à Paramètres Variants).

3.3.1 Estimation d'état par prédiction/correction

Soit un système décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{y}(t_k) &= \mathbf{y}_k^m + \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \mathbf{x}(t_0) &\in \mathbb{X}_0 \\ \mathbf{p} &\in \mathbb{P} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où les fonctions $\mathbf{f} : \mathbb{D} \times \mathbb{U} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ et $\mathbf{g} : \mathbb{D} \times \mathbb{U} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ peuvent être non linéaires, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$, \mathbb{X}_0 est le domaine initial du vecteur d'état, $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^{n_p}$ est le domaine du vecteur de paramètres et \mathbf{y} , \mathbf{y}_y^m et $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ sont respectivement les vecteurs de sortie estimée, de mesure à l'instant t_k et de bruit de mesure à l'instant t_k .

La prédiction consiste à propager les incertitudes de l'état initial et des paramètres afin de calculer le pavé $[\mathbf{x}_{k+1}]^+$ encadrant l'ensemble \mathbb{X} des trajectoires de (3.3.1) à l'instant t_{k+1} . Les mesures \mathbf{y}_{k+1}^m ne sont pas utilisées dans cette étape. Dans la littérature, on peut trouver principalement deux méthodes pour réaliser cette prédiction. La première [Jaulin 2002, Raïssi *et al.* 2004, Kletting *et al.* 2006] est basée sur la résolution de l'équation différentielle (3.3.1) en utilisant une extension du développement de Taylor aux intervalles. La seconde est basée sur la caractérisation de l'encadrement de l'espace atteignable du vecteur d'état du modèle dynamique incertain par deux trajectoires minorante et majorante.

A l'instant t_{k+1} , la mesure $\mathbf{y}^m(t_{k+1}) = \mathbf{y}_{k+1}^m$ est disponible. L'étape de correction revient à déterminer l'encadrement $[\mathbf{x}_{k+1}]^*$ des valeurs du vecteur d'état compatibles avec le domaine des mesures à t_{k+1} par :

$$[\mathbf{x}_{k+1}]^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{D} \mid \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{p}, t_k) \in [\mathbf{y}(t_k)]\} = \mathbf{g}^{-1}([\mathbf{y}(t_{k+1})]) \cap \mathbb{D}. \quad (3.3.2)$$

avec $[\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{y}^m(t) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]$, où $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sont les bornes d'erreur de mesure supposées connues *a priori*.

L'estimation de l'état, à l'instant t_{k+1} , est donnée par l'intersection entre les ensembles $[\mathbf{x}_{k+1}]^+$ et $[\mathbf{x}_{k+1}]^*$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{k+1}] &= [\mathbf{x}_{k+1}]^+ \cap [\mathbf{x}_{k+1}]^* \\ &= \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_{k+1}]^+ \mid \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{p}, t_k) \in [\mathbf{y}(t_k)]\}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

La correction est donc un problème de caractérisation d'ensembles qui peut être résolu par les méthodes d'inversion ensembliste ou de satisfaction de contraintes présentées dans le chapitre (2). L'estimateur d'état est alors donné par l'algorithme (4) [Jaulin 2002, Raïssi et al. 2003b ; 2004].

Algorithme 4 Estimation d'état par prédiction/correction

ENTRÉES : $[\mathbf{x}_0], \mathbf{f}, [\mathbf{y}_1], \dots, [\mathbf{y}_N]$

1: **Pour** $k = 0$ à $N - 1$, **Faire :**

2: $[\mathbf{x}_{k+1}]^+ = \text{Encadrement}(\mathbb{X}(t_{k+1}))^{[5]}$;

3: $[\mathbf{x}_{k+1}]^* = \mathbf{g}^{-1}([\mathbf{y}(t_{k+1})])$, $\forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$;

4: $[\mathbf{x}_{k+1}] = [\mathbf{x}_{k+1}]^+ \cap [\mathbf{x}_{k+1}]^*$;

5: **Fin (Pour)**

SORTIES : $[\mathbf{x}_1], \dots, [\mathbf{x}_N]$

Par souci de clarté, il n'est pas mentionné dans les entrées de l'algorithme (4) les paramètres nécessaires à l'encadrement de l'ensemble $\mathbb{X}(t)$ des trajectoires de l'EDO (3.3.1).

Exemple 3.3.1 Reprenons l'exemple 3.2.2 du modèle bi-compartimental, l'encadrement de l'espace d'état atteignable par l'EDO incertaine du modèle (3.2.36) peut être obtenu par la résolution des deux EDOs certaines (3.2.39), construites en utilisant le théorème de Müller et les propriétés de monotonie de f .

Supposons que l'état x_2 est accessible aux instants t_k , tel que :

$$\mathbf{y}(t_k) = x_2(t_k) + w(t_k), \quad (3.3.4)$$

où w est un bruit de mesure appartenant à l'intervalle $[-0.01, 0.01]$.

Les mesures sont échantillonnées à une période de 2s sur un intervalle de simulation de 10s. On obtient alors le tableau des mesures suivant :

t_k [s]	0	4	6	8	10
$\mathbf{y}(t_k)$	0.2793	0.2077	0.1164	0.0727	0.0292

^[5]Voir l'algorithme 3, paragraphe 3.2.1.2.

Sur la figure 3.3.1, on présente en traits continus rouges l'estimation d'état obtenue par l'algorithme 4. On trace également, en traits discontinus bleus, l'encadrement de l'espace atteignable de l'EDO incertaine du modèle (3.2.36).

Il est à noter que l'algorithme de prédiction/correction permet de réduire l'encadrement du vecteur d'état. Néanmoins, cette réduction n'est effectuée qu'à chaque instant d'échantillonnage, ainsi entre deux instants t_k et t_{k+1} la dynamique de l'estimation de $[\mathbf{x}]$ dépend uniquement de la dynamique des EDOs certaines (3.2.39). La convergence de la taille de l'encadrement de l'état ne peut donc pas être réglée par un paramètre extérieur.

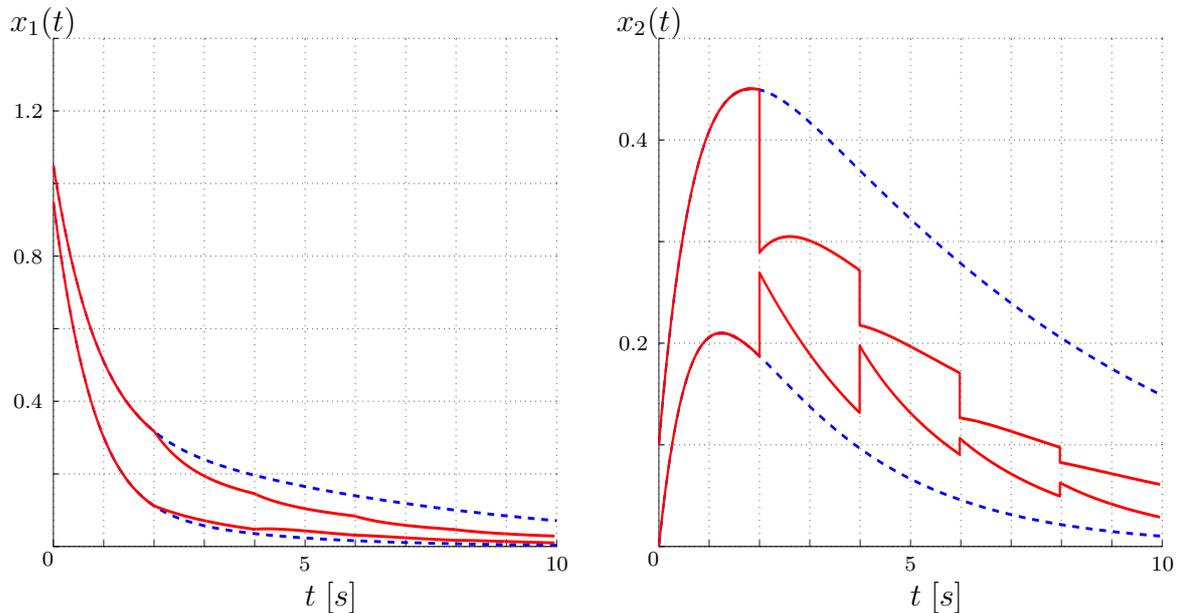


FIG. 3.3.1 – Estimation d'état par prédiction/correction pour un système bi-compartimental (3.2.36) pour $\mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0]$ et $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$.

3.3.2 Estimation par retour de sortie

La dynamique des estimateurs basés sur l'approche prédiction/correction que nous venons de présenter est implicitement fixée par la dynamique du système étudié. Or, pour certaines applications, il peut être intéressant de disposer de paramètres de réglage externes agissant sur la convergence de l'estimateur ainsi que sur le pessimisme de l'encadrement des valeurs admissibles du vecteur d'état (*i.e* sur la taille de $[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$).

Une autre limitation de l'estimation par prédiction/correction se situe dans la phase de correction. En effet, celle-ci consiste à poser un problème d'inversion ensembliste pour déterminer l'ensemble des valeurs du vecteur d'état cohérentes avec les mesures. Cette in-

version est réalisée à l'aide d'un contracteur et la convergence peut être accélérée en partitionnant le domaine du vecteur d'état à chaque instant t_k . Or, comme nous l'avons précisé dans le paragraphe (2.4) du chapitre (2), lorsque la dimension du vecteur \mathbf{x} est importante, le domaine initial de \mathbf{x} est grand ou la précision de sous-pavage doit être importante, le nombre de bisections augmente d'une manière exponentielle. Par conséquent, la complexité augmente, ce qui peut poser des problèmes pour des systèmes ayant des dynamiques rapides. En effet, pour une implémentation en ligne la durée de la correction doit être nettement plus petite que la période d'échantillonnage.

Dans cette section, nous proposons d'utiliser une autre approche pour l'encadrement de la trajectoire du vecteur d'état dont le but est, d'une part, de s'affranchir des phénomènes d'enveloppement et de dépendance rencontrés dans l'analyse par intervalles, et d'autre part, de disposer de paramètres de réglage pour la convergence de l'estimation. L'idée fondatrice consiste à transformer un problème incertain en un problème déterministe en utilisant les théorèmes de comparaison [Müller 1926, Smith 1995]. Deux observateurs minorant et majorant, basés sur une structure de Luenberger, seront construits. Le gain de ces observateurs est choisi afin de respecter un certain nombre de propriétés de monotonie.

Dans un premier temps, nous abordons brièvement le cas de systèmes linéaires certains à une injection de sortie près introduit dans [Rapaport et Gouzé 1999]. Puis, nous présentons notre contribution qui consiste à étendre l'approche proposée dans [Rapaport et Gouzé 1999] à une large classe de systèmes non linéaires. Pour cela, nous proposons une approximation garantie du modèle non linéaire en un modèle qLPV. Cette approximation permet de construire un estimateur intervalle linéaire, encadrant de façon garantie les trajectoires d'état d'un système non linéaire.

3.3.2.1 Cas linéaire à une injection de sortie près

Considérons un système décrit par le modèle :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \varphi(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ et $\varphi : \mathbb{R}^{n_y+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ une fonction dont on connaît les bornes $(\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$, telle que :

$$\underline{\varphi}(\mathbf{y}(t), t) \leq \varphi(\mathbf{y}(t), t) \leq \overline{\varphi}(\mathbf{y}(t), t). \quad (3.3.6)$$

Le but de cette section est de déterminer un encadrement de l'état du système représenté par le modèle (3.3.5) à chaque instant. Les bornes inférieure et supérieure sont calculées à l'aide d'observateurs basés sur une structure de Luenberger. Leurs dynamiques sont décrites par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}(t), t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}(t)) \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}(t), t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\overline{\mathbf{x}}(t)) \end{cases} \quad (3.3.7)$$

On note par $\underline{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}$ l'erreur entre la vraie valeur de l'état et la borne inférieure. Sa dynamique est donnée par :

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\underline{\mathbf{e}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), \quad (3.3.8)$$

avec $\underline{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}(t), \cdot) - \underline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}(t), t) \geq 0$.

Ainsi, si la matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ est coopérative, alors $\underline{\mathbf{e}}(0) \geq 0$ implique que $\underline{\mathbf{e}}(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. En effet, si $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ est coopérative, ses éléments non diagonaux sont tous positifs $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, \forall t \geq t_0$ et comme par hypothèse $\underline{\mathbf{b}}(t), \underline{b}_i(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$, alors les relations d'ordre sont maintenues pour tout instant $t \geq t_0$.

La même démarche peut être faite pour l'erreur supérieure $\overline{\mathbf{e}}(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$, ainsi que pour l'erreur totale $\mathbf{e}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) - \overline{\mathbf{x}}(t)$.

L'idée présentée dans [Rapaport et Gouzé 1999] est la suivante : s'il existe un gain \mathbf{L} tel que la matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ soit coopérative (la matrice \mathbf{A} n'étant pas nécessairement coopérative) et si l'état initial vérifie :

$$\mathbf{x}(0) \in [\underline{\mathbf{x}}(0), \overline{\mathbf{x}}(0)],$$

alors le système décrit par (3.3.7) est un estimateur par intervalle pour le système (3.3.5). Ces conditions d'existence, ainsi que la vitesse de convergence de l'estimation sont résumés par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit un système décrit par (3.3.5), tel que :*

- *il existe un gain \mathbf{L} pour que la matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ soit coopérative ;*
- *la matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ est inversible et stable ;*
- *$\mathbf{b}(t) = w([\underline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}(t), t), \overline{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}(t), t)])$ est bornée, i.e. $w([\underline{\boldsymbol{\varphi}}(t), \overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)]) \leq \mathcal{B}$.*

Alors l'erreur totale $\mathbf{e}(t) = \overline{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{e}}(t)$ converge asymptotiquement vers une valeur inférieure (terme à terme) à :

$$\mathbf{e}_{max} = -(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^{-1}\mathcal{B}. \quad (3.3.9)$$

Notons que cette approche repose sur deux hypothèses fortes concernant l'injection de sortie $\varphi(\mathbf{y}(t), t)$. La première est l'existence et la possibilité de construire deux fonctions $\underline{\varphi}(\mathbf{y}(t), t)$ et $\overline{\varphi}(\mathbf{y}(t), t)$ encadrant l'injection φ . La seconde porte sur la taille maximale de cet encadrement. En effet, le pessimisme de l'estimateur d'état (3.3.7), donné par (3.3.9), est directement lié à la largeur de cet encadrement.

Afin d'étendre cette approche à une large classe de modèles non linéaires, nous développons dans le paragraphe suivant une de nos contributions, présentée dans [Videau *et al.* 2009b], consistant à transformer un modèle non linéaire en un modèle qLPV (quasi-Linéaire à Paramètres Variants) par une approximation garantie basée sur les fonctions d'inclusion moyennes (présentées dans le chapitre 2).

3.3.2.2 Approximation garantie d'un modèle non linéaire par un modèle qLPV

Modèles LPV et qLPV

Les modèles LPV constituent une classe de modèles linéaires permettant de décrire des procédés dont les caractéristiques dynamiques évoluent en fonction des conditions de fonctionnement [Shamma et Athans 1990 ; 1992]. Plus précisément, l'approche LPV désigne des modèles dont la représentation d'état dépend d'un vecteur de paramètres $\boldsymbol{\rho}(t)$ borné et susceptible de varier dans le temps. Ces systèmes ont fait l'objet de nombreux travaux depuis ces dernières années, aussi bien en commande [Apkarian *et al.* 1995a ;b] qu'en observation (voir [Darengosse et Chevrel 2002]).

Définition 3.3.1 (Modèles Linéaires à Paramètres Variants) *Les modèles LPV sont des modèles linéaires dont les paramètres varient dans le temps. Ils sont décrits par des équations de la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.3.10)$$

où $\boldsymbol{\rho}(t) : [0, t_N] \rightarrow \mathcal{P}$ est une fonction dont on connaît le support et $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n_\rho}$ est un ensemble compact de \mathbb{R}^{n_ρ} .

Lorsque la fonction $\boldsymbol{\rho}$ dépend explicitement du vecteur d'état \mathbf{x} , le modèle (3.3.10) est appelé représentation quasi-LPV (qLPV). Les modèles qLPV sont par conséquent des modèles non linéaires écrits sous une forme linéaire avec une matrice dynamique dépendant de

l'état. Ainsi, le terme «quasi» est plus approprié pour définir cette catégorie de modèles. Cette classe est souvent utilisée pour des transformations de modèles non linéaires.

Pour de plus amples détails sur la représentation LPV et ses propriétés, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [Marcos et Balas 2004, Shamma et Cloutier 1993].

Dans cette section, nous proposons une de nos contributions qui consiste à élaborer une méthodologie permettant de transformer un modèle non linéaire à paramètres incertains, en un modèle qLPV "garanti". Par "garanti", nous entendons que la trajectoire du modèle non linéaire est sûre d'appartenir à l'ensemble des trajectoires admissibles du modèle qLPV. Cette approximation est basée sur une linéarisation garantie autour d'un domaine de fonctionnement et non pas autour d'un point d'équilibre. L'approximation qLPV proposée est réalisée au moyen de l'analyse par intervalles [Moore 1966, Hansen 2004].

Systèmes non linéaires autonomes

Soit un système non linéaire autonome, décrit par l'EDO :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.3.11)$$

avec $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ une fonction lipschitzienne et $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$, où $[\mathbf{x}]$ est un domaine d'évolution de l'état déterminé *a priori*, pour lequel l'approximation sera garantie.

Dans ce paragraphe, nous allons effectuer une linéarisation garantie du modèle non linéaire (3.3.11). En utilisant la fonction d'inclusion moyenne de \mathbf{f} , on a alors :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}(\mathbf{x}_c) + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x}](\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c). \quad (3.3.12)$$

où $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x}]$ est la fonction d'inclusion de la jacobienne de \mathbf{f} définie par : $\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}$ et \mathbf{x}_c peut être le milieu de $[\mathbf{x}]$.

Ainsi, pour tout $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$, il existe une matrice $\mathbf{A} \in [\mathbf{J}_{\mathbf{f}}]$ telle que :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \quad (3.3.13)$$

On pose le changement de variable : $\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) \boldsymbol{\chi}(t), \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) &\in [\mathbf{J}_{\mathbf{f}}](\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}], \quad \forall \boldsymbol{\chi}(t) \in [\mathbf{x}] - \mathbf{x}_c. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

On remarque que (3.3.14) est une linéarisation garantie de (3.3.11). Le modèle linéaire

obtenu dépend de l'état \mathbf{x} , il s'agit donc d'une représentation $qLPV$ de (3.3.11) autour de \mathbf{x}_c .

L'expression $[\mathbf{J}_f]$ de la jacobienne peut être obtenue par différentiation automatique (DA) [Rall et Corliss 2009]. La DA a été développée indépendamment par Moore [Moore 1962] et Wengert [Wengert 1964] dans le cadre du calcul formel. Elle permet d'obtenir des résultats sans qu'aucune approximation ne soit faite en se basant sur les propriétés élémentaires de dérivation.

Exemple 3.3.2 Reprenons l'exemple (2.3.5) du chapitre 2 :

$$\dot{x}(t) = \sin(x(t)), \quad (3.3.15)$$

où la jacobienne de $\sin(x(t))$ est donnée par :

$$\mathbf{J}_f = \frac{\partial \sin(x(t))}{\partial x(t)} = \cos(x(t)).$$

Pour un domaine d'évolution du vecteur d'état $x(t) \in [\mathbf{x}] = [\pi/6, \pi/3]$, une fonction d'inclusion de (3.3.15) peut être obtenue par une extension naturelle, telle que :

$$[\mathbf{J}_f]([\mathbf{x}]) = \cos([\pi/6, \pi/3]) = [1/2, \sqrt{3}/2].$$

La représentation $qLPV$ garantie de (3.3.15) autour de $\pi/4$, milieu de $[\mathbf{x}]$, pour tout $x(t) \in [\pi/6, \pi/3]$ est alors donnée par :

$$\dot{\chi}(t) = A(x(t))\chi(t), \quad A(x(t)) \in [1/2, \sqrt{3}/2] \quad (3.3.16)$$

Systèmes non linéaires non autonomes

Soit un système non linéaire non autonome décrit par l'EDO

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (3.3.17)$$

avec $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ une fonction lipschitzienne, $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$ et $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}]$.

Par souci de clarté et sans perte de généralité, on note le vecteur $\boldsymbol{\rho}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))^T$. La linéarisation garantie de (3.3.17) est obtenue en utilisant la fonction d'inclusion moyenne de \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t)) \in \mathbf{f}(\mathbf{x}_c, \mathbf{u}_c) + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{x}}]([\mathbf{x}], [\mathbf{u}])(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c) + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{u}}]([\mathbf{x}], [\mathbf{u}])(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_c), \quad (3.3.18)$$

où $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x}]$ et $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}_u}]$ sont les fonctions d'inclusion des jacobienes définies par :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{\mathbf{f}_u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)}.$$

Ainsi, pour tout $\rho \in [\mathbf{x}] \times [\mathbf{u}]$, il existe des matrices $\mathbf{A} \in [\mathbf{J}_f]$ et $\mathbf{B} \in [\mathbf{J}_g]$, telles qu'en posant les changements de variables $\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c$ et $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_c$, on obtienne :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\boldsymbol{\mu}(t), \\ \forall \mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}], \forall \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}], \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

qui est une linéarisation garantie de (3.3.17) sur le domaine $[\mathbf{x}] \times [\mathbf{u}]$. Le modèle linéaire (3.3.19) dépend de l'état \mathbf{x} et de la commande \mathbf{u} ; il représente donc une approximation qLPV garantie de (3.3.17) autour de $(\mathbf{x}_c, \mathbf{u}_c)^T$.

Extension aux systèmes incertains

La méthodologie que nous venons de présenter peut être étendue au cas des systèmes non linéaires, non autonomes, incertains, décrit par l'EDO :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}). \tag{3.3.20}$$

avec $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x+n_u+n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ une fonction lipschitzienne, $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}] \subset \mathbb{R}^{n_u}$ et \mathbf{p} un vecteur de paramètres incertains. Dans la suite, nous conservons la notation précédente $\boldsymbol{\rho}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))^T$.

Supposons que le vecteur de paramètres \mathbf{p} est borné, de bornes connues (*i.e.* $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$), la fonction d'inclusion moyenne de \mathbf{f} peut être écrite en considérant le vecteur de paramètres comme une variable ; on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) \in & \mathbf{f}(\mathbf{x}_c, \mathbf{u}_c, \mathbf{p}_c) + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x}]([\mathbf{x}], [\mathbf{u}], [\mathbf{p}])(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c) \\ & + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}_u}]([\mathbf{x}], [\mathbf{u}], [\mathbf{p}])(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_c) \\ & + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}_p}]([\mathbf{x}], [\mathbf{u}], [\mathbf{p}])(\mathbf{p} - \mathbf{p}_c), \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

où $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x}]$, $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}_u}]$ et $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}_p}]$ sont les fonctions d'inclusion des jacobienes :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}_x} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}(t)}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{f}_u} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}(t)}, \quad \mathbf{J}_{\mathbf{f}_p} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}.$$

Ainsi, pour le domaine $[\mathbf{x}] \times [\mathbf{u}] \times [\mathbf{p}]$, il existe des matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) &\in \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}(t)} \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}] \\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]} \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) &\in \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}(t)} \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}] \\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]} \\ \Delta_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) &\in \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}] \\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]} \end{aligned}$$

où $\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]$, $\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}(t)} \right]$ et $\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right]$ sont les fonctions d'inclusions des jacobienes $\mathbf{J}_{\mathbf{fx}}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{fu}}$ et $\mathbf{J}_{\mathbf{fp}}$.

En posant les changements de variables $\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c$ et $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_c$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\mu}(t) + \Delta_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_c), \\ \forall \mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}], \forall \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}], \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Etant donné que $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$, on a $\mathbf{p} - \mathbf{p}_c \in [\underline{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_c, \overline{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_c] = \left[\frac{-w([\mathbf{p}])}{2}, \frac{w([\mathbf{p}])}{2} \right]$. Ainsi, le modèle obtenu par l'approximation qLPV est une expression affine de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\mu}(t) + \Delta_{\mathbf{f}}^*(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}), \\ \forall \mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}], \forall \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}], \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

où $\Delta_{\mathbf{f}}^*(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) \in \Delta_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) \left[\frac{-w([\mathbf{p}])}{2}, \frac{w([\mathbf{p}])}{2} \right]$.

De la même manière, considérons l'équation de mesure d'un modèle non linéaire, donnée par :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}), \quad (3.3.24)$$

avec $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_x+n_u+n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ une fonction lipschitzienne. En suivant une démarche similaire, l'approximation qLPV de (3.3.24) autour de $(\mathbf{x}_c, \mathbf{u}_c, \mathbf{p}_c)^T$ et pour un domaine $[\mathbf{x}] \times [\mathbf{u}] \times [\mathbf{p}]$, est donnée par l'expression affine :

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\mu}(t) + \Delta_{\mathbf{g}}^*(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}), \quad (3.3.25)$$

avec $\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c$, $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_c$ et $\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_c, \mathbf{u}_c, \mathbf{p}_c)$ et les matrices \mathbf{C} ,

\mathbf{D} et $\Delta_{\mathbf{g}}$, données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) &\in \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}(t)} \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}] \\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]} \\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) &\in \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}(t)} \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}] \\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]} \\ \Delta_{\mathbf{g}}^*(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p}) &\in \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right] \left[\frac{-w([\mathbf{p}])}{2}, \frac{w([\mathbf{p}])}{2} \right] \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}] \\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]} \end{aligned}$$

Exemple 3.3.3 *Considérons un système décrit par l'EDO non linéaire à paramètres incertains :*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p) = a * \sin(x(t)), \quad (3.3.26)$$

où $x(t) \in [\pi/6, \pi/3]$, $p = a \in [0.95, 1.05]$. Le milieu de $[\mathbf{x}]$ est donné par $\mathbf{x}_c = \pi/4$.

On peut déterminer les jacobiniennes :

$$\begin{aligned} J_{fx} &= \frac{\partial f(x(t), p)}{\partial x(t)} = a * \cos(x(t)), \\ J_{fp} &= \frac{\partial f(x(t), p)}{\partial a} = \sin(x(t)). \end{aligned}$$

L'approximation qLPV de (3.3.26) autour de $x_c = \pi/4$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= A(\rho(t), p)\chi(t) + \Delta_f(\rho(t), p)^*, \\ \forall \rho(t) &\in [\pi/6, \pi/3], \forall p \in [0.95, 1.05], \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

où $\chi(t) = x(t) - \pi/4$, $A(\rho(t), p) \in [J_{fx}]([\mathbf{x}], [\mathbf{p}])$ et $\Delta_f(\rho(t), p)^* \in \frac{w[\mathbf{p}]}{2}[J_{fp}]([\mathbf{x}], [\mathbf{p}])$

La fonction d'inclusion naturelle de J_{fx} pour $\rho(t) \in [\pi/6, \pi/3]$ et $p \in [0.95, 1.05]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} [J_{fx}]([\mathbf{x}], [\mathbf{p}]) &= [0.95, 1.05] * \cos([\pi/6, \pi/3]) \\ &= [0.95 * 1/2, 1.05 * \sqrt{3}/2] \\ &= [0.475, 0.909], \end{aligned}$$

et celle de J_{fu} pour $\rho(t) \in [\pi/6, \pi/3]$ et $p \in [0.95, 1.05]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} [J_{fp}]([\mathbf{x}], [\mathbf{p}]) &= \sin([\pi/6, \pi/3]) \\ &= [1/2, \sqrt{3}/2], \end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} A(\rho(t), p) &\in [0.475, 0.909], \\ \Delta(\rho(t), p)^* &\in [1/2, \sqrt{3}/2] \left[\frac{-w[0.95, 1.05]}{2}, \frac{w[0.95, 1.05]}{2} \right] = [-0.0434, 0.0434]. \end{aligned}$$

3.3.2.3 Synthèse d'estimateurs "intervalle" pour des modèles non linéaires

Dans ce paragraphe, nous allons présenter une méthodologie pour la conception d'observateurs intervalles pour une large classe de systèmes non linéaires. Etant donné que la trajectoire du système original (non linéaire) est à l'intérieur des trajectoires de l'approximation qLPV développée dans la section 3.3.2.2, l'idée consiste à utiliser la transformation qLPV suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.3.28)$$

où le méta-paramètre $\boldsymbol{\rho}$ évolue dans un domaine compact de support connu et représentable par un pavé :

$$\boldsymbol{\rho}(t) \in [\boldsymbol{\rho}] \subset \mathbb{R}^{n_\rho}. \quad (3.3.29)$$

Par souci de clarté, on notera par \mathbf{M} l'une des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ou \mathbf{D} et $[\mathbf{M}](\boldsymbol{\rho})$ une fonction d'inclusion pour \mathbf{M} , avec $\underline{\mathbf{M}}$ et $\overline{\mathbf{M}}$ les bornes inférieure et supérieure de $[\mathbf{M}]$ (élément par élément).

Structure de l'estimateur

Pour estimer un encadrement de l'état du système (3.3.28), nous proposons deux observateurs inférieur et supérieur basés sur une structure de Luenberger. Ils sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.3.30)$$

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \overline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}(t) - \overline{\mathbf{y}}(t)) \\ \overline{\mathbf{y}}(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.3.31)$$

Les gains $\underline{\mathbf{L}}$ et $\overline{\mathbf{L}}$ ne sont pas forcément les mêmes et sont choisis en fonction des bornes des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} .

En admettant que les perturbations sur les mesures sont bornées et de bornes $\underline{\varepsilon}$ et $\overline{\varepsilon}$

connues *a priori*, le domaine admissible de la sortie est :

$$\mathbb{Y}(t) = [\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}], \quad (3.3.32)$$

où $\mathbf{y}^m(t)$ est le vecteur de mesure.

En utilisant l'expression (3.3.32) pour tenir compte des incertitudes sur les mesures, les estimateurs (3.3.30) et (3.3.31) peuvent se réécrire sous la forme :

$$\underline{\mathcal{O}}: \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = (\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.3.33)$$

$$\overline{\mathcal{O}}: \begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{x}}(t) + (\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \overline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ \overline{\mathbf{y}}(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.3.34)$$

Les estimateurs $\underline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ fournissent les bornes inférieure et supérieure du vecteur d'état \mathbf{x} du système (3.3.28) si l'inégalité :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \overline{\mathbf{x}}(t), \quad \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}], \quad (3.3.35)$$

est toujours vraie. La condition (3.3.35) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \leq 0 & \text{pour } \underline{\mathcal{O}} \\ \overline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \geq 0 & \text{pour } \overline{\mathcal{O}} \end{cases} \quad (3.3.36)$$

Par souci de clarté, nous allons prendre le même gain, $\mathbf{L} = \underline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}$, pour les deux observateurs $\underline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$. Néanmoins, la généralisation peut se faire sans difficulté.

Erreurs d'estimation

Les observateurs donnés par (3.3.33) et (3.3.34) sont garantis si les estimées $\underline{\mathbf{x}}$ et $\overline{\mathbf{x}}$ calculées par $\underline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ vérifient la condition (3.3.36) à chaque instant. Dans la suite, nous allons présenter une méthodologie pour déterminer un ensemble de valeurs du gain \mathbf{L} permettant d'assurer la garantie de l'encadrement calculé par $\underline{\mathcal{O}}$, $\overline{\mathcal{O}}$.

En utilisant (3.3.34), la dynamique de l'erreur supérieure $\overline{\mathbf{e}}(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ est donnée

par :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) &= \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}(t) + (\bar{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}^m(t) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ &\quad - \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t).\end{aligned}\quad (3.3.37)$$

Par définition les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} sont bornées, elles peuvent donc se réécrire sous la forme :

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}(t)) + \Delta_{\bar{\mathbf{M}}}(t), \quad (3.3.38)$$

où \mathbf{M} est l'une des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ou \mathbf{D} avec $0 \leq (\Delta_{\bar{\mathbf{M}}}(t))_{ij} \leq (w([\mathbf{M}]_{ij}))$.

Ainsi, en se basant sur la relation (3.3.38), on a :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) &= \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{x}}(t) - (\bar{\mathbf{M}} - \Delta_{\bar{\mathbf{M}}}(t))\mathbf{x}(t) \\ &= \bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) + \Delta_{\bar{\mathbf{M}}}(t)\mathbf{x}(t) \\ &= \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{e}}(t) + \Delta_{\bar{\mathbf{M}}}(t)\mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (3.3.39)$$

En injectant la relation (3.3.39) dans (3.3.37), l'équation dynamique de l'erreur supérieure peut se réécrire sous la forme :

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}}(t) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t), \quad (3.3.40)$$

avec :

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) = (\Delta_{\bar{\mathbf{A}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\bar{\mathbf{C}}}(t))\mathbf{x}(t) + (\Delta_{\bar{\mathbf{B}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\bar{\mathbf{D}}}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Ainsi, si le gain \mathbf{L} est choisi tel que $(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})$ soit coopérative et $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t)$ positif, alors la condition initiale $\bar{\mathbf{e}}(0) \geq 0$ implique que l'erreur $\bar{\mathbf{e}}(t)$ reste positive à chaque instant. Par conséquent, l'estimateur (3.3.34) donne une estimation majorante de la trajectoire d'état du modèle LPV (3.3.28).

L'ensemble \mathbb{L}_1 des valeurs du gain \mathbf{L} , satisfaisant la condition (3.3.35), est défini par la relation :

$$\mathbb{L}_1 = \{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \mid (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})_{ij, i \neq j} \geq 0, (\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t))_i \geq 0\}. \quad (3.3.41)$$

Une démarche similaire peut être entreprise pour l'estimateur minorant en utilisant la relation (3.3.33). La dynamique de l'erreur inférieure $\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) &= \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ &\quad - \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t).\end{aligned}\quad (3.3.42)$$

De la même manière, les bornes inférieures des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} peuvent se réécrire sous la forme :

$$\underline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}(t)) - \Delta_{\underline{\mathbf{M}}}(t), \quad (3.3.43)$$

où $\mathbf{M} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ et $0 \leq (\Delta_{\underline{\mathbf{M}}}(t))_{ij} \leq (w([\mathbf{M}]_{ij}))$. On a alors la relation :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}\mathbf{x}(t) - \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) &= \underline{\mathbf{M}}\mathbf{x}(t) - (\overline{\mathbf{M}} + \Delta_{\underline{\mathbf{M}}}(t))\mathbf{x}(t) \\ &= \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)) - \Delta_{\underline{\mathbf{M}}}(t)\mathbf{x}(t) \\ &= \underline{\mathbf{M}}\mathbf{e}(t) - \Delta_{\underline{\mathbf{M}}}(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

Ainsi, en injectant l'expression (3.3.44) dans (3.3.42), l'équation dynamique de l'erreur inférieure peut se réécrire sous la forme :

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) = (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{e}}(t) + \underline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t), \quad (3.3.45)$$

avec :

$$\underline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) = -(\Delta_{\underline{\mathbf{A}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\underline{\mathbf{C}}}(t))\mathbf{x}(t) - (\Delta_{\underline{\mathbf{B}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\underline{\mathbf{D}}}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Par conséquent, si le gain \mathbf{L} est choisi tel que $(\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})$ soit coopérative et $\underline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t)$ négatif, alors la condition initiale $\underline{\mathbf{e}}(0) \leq 0$ implique que l'erreur $\mathbf{e}(t)$ reste négative à chaque instant. Ainsi, l'estimation inférieure de la trajectoire d'état du modèle LPV (3.3.28) est donnée par l'observateur (3.3.33). L'ensemble \mathbb{L}_2 des valeurs du gain \mathbf{L} satisfaisant la condition (3.3.35) pour (3.3.33) est alors donné par :

$$\mathbb{L}_2 = \{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \mid (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})_{ij, i \neq j} \geq 0, (\underline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t))_i \leq 0\}. \quad (3.3.46)$$

Ainsi, l'ensemble \mathbb{L} des valeurs du gain \mathbf{L} , permettant d'assurer la garantie de l'estimation donnée par le couple d'observateurs $(\underline{\mathcal{Q}}, \overline{\mathcal{O}})$, est défini par la relation :

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2. \quad (3.3.47)$$

L'utilisation d'un gain \mathbf{L} vérifiant (3.3.41) et (3.3.46) permet de construire deux estimateurs coopératifs même si le modèle LPV du système ne l'est pas. De plus, le gain introduit un paramètre de réglage, pouvant agir sur la dynamique des estimateurs $(\underline{\mathcal{Q}}, \overline{\mathcal{O}})$, *i.e.* la convergence de l'estimation, et ainsi réduire le pessimisme de l'encadrement des valeurs admissibles $\mathbb{X}(t)$ du vecteur d'état.

Convergence de l'estimation

La stabilité asymptotique de l'estimateur intervalle est assurée si les trajectoires inférieure et supérieure des observateurs (3.3.33) et (3.3.34) convergent l'une vers l'autre. L'étude de la stabilité de l'estimateur est donc équivalente à l'étude de la stabilité de l'erreur totale :

$$\mathbf{e}(t) = \bar{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{e}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t). \quad (3.3.48)$$

On note respectivement par $\hat{\mathbf{x}}(t)$ et $\mathbf{R}_e(t)$ le centre et le rayon de l'estimé intervalle à l'instant t , ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\bar{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{x}}(t)}{2}, \\ \mathbf{R}_e(t) &= \frac{\bar{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)}{2} = \frac{\bar{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{e}}(t)}{2}. \end{aligned} \quad (3.3.49)$$

En utilisant (3.3.33), (3.3.34) et (3.3.49), la dynamique du centre $\hat{\mathbf{x}}(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \frac{\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) + \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left((\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}(t) + (\bar{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}^m(t) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right. \\ &\quad \left. + (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right). \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

De même, l'équation dynamique de $\mathbf{R}_e(t)$ est :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_e(t) &= \frac{\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left((\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{x}}(t) + (\bar{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}^m(t) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right. \\ &\quad \left. - (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) - (\underline{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right). \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

Or, par définition les bornes inférieure et supérieure des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} peuvent s'écrire sous la forme :

$$\underline{\mathbf{M}} = \left(\text{mid}([\mathbf{M}]) - \frac{w[\mathbf{M}]}{2} \right), \quad \bar{\mathbf{M}} = \left(\text{mid}([\mathbf{M}]) + \frac{w[\mathbf{M}]}{2} \right), \quad (3.3.52)$$

avec $\mathbf{M} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$.

Ainsi, en se basant sur (3.3.52), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathbf{M}\underline{\mathbf{x}}}(t) - \underline{\mathbf{M}\underline{\mathbf{x}}}(t) &= \left(\text{mid}([\mathbf{M}]) + \frac{w[\mathbf{M}]}{2} \right) \overline{\mathbf{x}}(t) - \left(\text{mid}([\mathbf{M}] - \frac{w[\mathbf{M}]}{2}) \right) \underline{\mathbf{x}}(t) \\
 &= \text{mid}([\mathbf{M}]) (\overline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)) + w[\mathbf{M}] \frac{\overline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{x}}(t)}{2} \\
 &= 2\text{mid}([\mathbf{M}]) \mathbf{R}_e(t) + w[\mathbf{M}] \hat{\mathbf{x}}(t),
 \end{aligned} \tag{3.3.53}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathbf{M}\underline{\mathbf{x}}}(t) + \underline{\mathbf{M}\underline{\mathbf{x}}}(t) &= \left(\text{mid}([\mathbf{M}]) + \frac{w[\mathbf{M}]}{2} \right) \overline{\mathbf{x}}(t) + \left(\text{mid}([\mathbf{M}] - \frac{w[\mathbf{M}]}{2}) \right) \underline{\mathbf{x}}(t) \\
 &= \text{mid}([\mathbf{M}]) (\overline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{x}}(t)) + w[\mathbf{M}] \frac{\overline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)}{2} \\
 &= 2\text{mid}([\mathbf{M}]) \hat{\mathbf{x}}(t) + w[\mathbf{M}] \mathbf{R}_e(t).
 \end{aligned} \tag{3.3.54}$$

En injectant les relations (3.3.53) et (3.3.54) dans (3.3.50) et (3.3.51), l'équation dynamique de l'estimateur intervalle, représentée par son centre et son rayon, s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\mathbf{R}}_e(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) & (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) \\ (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) & 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_e} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{R}_e(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda}_e(t), \tag{3.3.55}$$

avec

$$\boldsymbol{\lambda}_e(t) = \begin{pmatrix} (\text{mid}[\mathbf{B}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{D}]) \\ (w[\mathbf{B}] - \mathbf{L}w[\mathbf{D}]) \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\text{mid}[\boldsymbol{\varepsilon}] + \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{L}w[\boldsymbol{\varepsilon}] \end{pmatrix}, \tag{3.3.56}$$

et

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) & (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) \\ (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) & 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) \end{pmatrix}. \tag{3.3.57}$$

Si le gain \mathbf{L} est choisi tel que la matrice \mathbf{A}_e soit asymptotiquement stable et que $\boldsymbol{\lambda}_e(t)$ soit borné par un vecteur positif $\boldsymbol{\Lambda}_e$, alors l'estimation converge asymptotiquement vers une boule de centre $\hat{\mathbf{x}}_{max}$ et de rayon $\mathbf{R}_{e_{max}}$. Si \mathbf{A}_e est inversible, cette boule est définie par la relation :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{max} \\ \mathbf{R}_{e_{max}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) & (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) \\ (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) & 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_e. \tag{3.3.58}$$

Ainsi, l'ensemble \mathbb{L}_3 des valeurs du gain \mathbf{L} , garantissant la convergence asymptotique de l'estimateur intervalle vers une boule de centre $\hat{\mathbf{x}}_{max}$ et de rayon $\mathbf{R}_{e_{max}}$, est défini par la

relation :

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \left| \begin{array}{l} \mathbf{A}_e \text{ stable} \\ \max_{\forall t > 0} (w(\boldsymbol{\lambda}_e(t))) \leq \Lambda_e \end{array} \right. \right\}. \quad (3.3.59)$$

On peut noter que si la largeur de $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$ est nulle (*i.e.* les matrices ne dépendent pas de $\boldsymbol{\rho}$) et si $w[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ (*i.e.* le bruit de mesure est nul) alors l'erreur totale :

$$\mathbf{e}(t) = \bar{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{e}}(t) = 2 * \mathbf{R}_e(t),$$

tend vers zéro. C'est à dire que les trajectoires des estimateurs $(\underline{\mathcal{O}}, \overline{\mathcal{O}})$ convergent vers la "vraie" trajectoire d'état du système. Par conséquent, si la coopérativité est respectée, le centre $\hat{\mathbf{x}}(t)$ de l'estimateur intervalle converge vers l'état du système.

L'utilisation d'un gain \mathbf{L} appartenant à l'intersection des ensembles définis par les relations (3.3.41), (3.3.46) et (3.3.59) :

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3, \quad (3.3.60)$$

permet de construire un estimateur intervalle fournissant un encadrement garanti de l'état du système observé et qui converge vers une boule dont le rayon est inférieur à $\mathbf{R}_{e_{max}}$ (donnée par la relation 3.3.58).

L'expression (3.3.60) revient à caractériser un ensemble \mathbb{L} de valeurs admissibles du gain \mathbf{L} sous les contraintes de coopérativité et de stabilité de l'estimateur intervalle composé de (3.3.33) et (3.3.34) pour un domaine $[\boldsymbol{\rho}] \subset \mathbb{R}^{n_\rho}$ d'évolution du méta-paramètre $\boldsymbol{\rho}(t)$. Le problème (3.3.60) peut être formulé sous la forme d'un problème de satisfaction de contraintes (CSP). La résolution peut s'effectuer en utilisant le solveur RealPaver^[6] ou le langage de programmation QUIMPER^[7]. Ces outils permettent de calculer l'ensemble des valeurs admissibles de \mathbf{L} vérifiant (3.3.60).

Notons que le conservatisme de l'approximation qLPV dû aux phénomènes de dépendance et d'enveloppement peut engendrer une solution vide pour \mathbb{L} . Dans un tel cas, un estimateur intervalle basé sur l'approximation LPV et dont la dynamique de l'erreur est coopérative, ne peut être construit. Pour surmonter cet inconvénient, deux stratégies peuvent être adoptées :

- deux gains distincts $\underline{\mathbf{L}}$ et $\overline{\mathbf{L}}$ pourraient être utilisés pour les observateurs minorant et

^[6]Disponible à : <http://www.sciences.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/granvil/realpaver/index.html>

^[7]Disponible à : <http://www.ibex-lib.org/>

majorant ;

- En ajoutant un second retour, permettant d'agir sur l'erreur entre les bornes inférieure et supérieure.

3.3.3 Exemple de simulation

Nous allons illustrer la méthodologie développée dans le paragraphe précédent sur un exemple. Le support d'application utilisée est un procédé hydraulique de laboratoire, appelé maquette 3TANKS, illustré sur la figure (3.3.2).

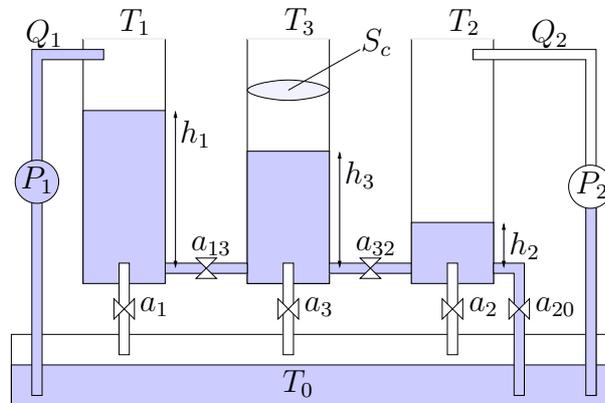


FIG. 3.3.2 – Maquette 3TANKS

3.3.3.1 Présentation du système

Le système se compose de trois cuves cylindriques T_1 , T_2 et T_3 de sections identiques S_c . Le liquide s'écoulant de la cuve T_2 , à travers un tube cylindrique doté d'une vanne a_{20} de section S_n , est recueilli dans le réservoir T_0 qui approvisionne les deux pompes P_1 et P_2 . Ces deux pompes alimentent les cuves T_1 et T_2 avec des débits Q_1 et Q_2 . Les trois niveaux d'eau dans les trois cuves sont notés par h_1 , h_2 et h_3 . Les tubes d'interconnexion entre les différentes cuves et le réservoir T_0 sont dotés de trois vannes a_1 , a_2 et a_3 de sections ajustables permettant de simuler diverses défaillances telles que des fuites plus ou moins importantes sur chaque cuve.

Le modèle mathématique de ce procédé, pour un comportement nominal (vannes a_1 , a_2 et a_3 fermées), est obtenu en utilisant la loi de Torricelli. Dans une cuve contenant un fluide parfait, où il existe un trou à la hauteur h en-dessous de la surface horizontale de ce fluide,

le liquide s'écoulant à travers une vanne a_i à un débit Q donné par :

$$Q(t) = a_{z_i} S_n \sqrt{2gh(t)}. \quad (3.3.61)$$

avec g l'accélération de la pesanteur, a_{z_i} le coefficient d'écoulement de la vanne a_i et S_n sa section.

Sous l'hypothèse que $h_1(t) > h_3(t) > h_2(t)$, le modèle de la maquette est alors donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} S_c \dot{h}_1(t) = -a_{z_{13}} S_n \sqrt{2g(h_1(t) - h_3(t))} + Q_1(t) \\ S_c \dot{h}_2(t) = a_{z_{32}} S_n \sqrt{2g(h_3(t) - h_2(t))} - a_{z_{20}} S_n \sqrt{2gh_2(t)} + Q_2(t) \\ S_c \dot{h}_3(t) = a_{z_{13}} S_n \sqrt{2g(h_1(t) - h_3(t))} - a_{z_{32}} S_n \sqrt{2g(h_3(t) - h_2(t))} \end{cases} \quad (3.3.62)$$

où les valeurs nominales des coefficients d'écoulement des vannes a_{13} , a_{32} , a_{20} sont : $a_{z_{13}} = 0.6$, $a_{z_{32}} = 0.6$, $a_{z_{20}} = 0.7$, leurs sections ont pour valeurs : $S_n = 5.10^{-5} m^2$ et $S_c = 0.0154 m^2$ et $g = 9.81 n/s^2$.

L'équation (3.3.62) peut être réécrite dans l'espace d'état de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_{13} \sqrt{x_1(t) - x_3(t)} + \frac{1}{S_c} u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{32} \sqrt{x_3(t) - x_2(t)} - a_{20} \sqrt{x_2(t)} + \frac{1}{S_c} u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = a_{13} \sqrt{x_1(t) - x_3(t)} - a_{32} \sqrt{x_3(t) - x_2(t)} \\ y_1(t) = x_1(t) + w_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) + w_2(t) \\ y_3(t) = x_3(t) + w_3(t) \end{cases} \quad (3.3.63)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (h_1, h_2, h_3)^T$ représente le vecteur d'état, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T = (Q_1, Q_2)^T$ le vecteur de commande, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ le vecteur de mesure, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ le bruit de mesure et $\mathbf{p} = (a_{13}, a_{32}, a_{20})^T$ le vecteur de paramètres normalisés des coefficients d'écoulement (avec $a_{13} = a_{z_{13}} S_n \sqrt{2g}/S_c$, $a_{32} = a_{z_{32}} S_n \sqrt{2g}/S_c$ et $a_{20} = a_{z_{20}} S_n \sqrt{2g}/S_c$).

Les trajectoires de références des niveaux h_1 et h_2 sont des créneaux de valeur moyenne $50cm$ pour h_1 , $10cm$ pour h_2 , d'amplitude $4cm$, avec un rapport cyclique de 0.6 et une période de $200s$. Les niveaux h_1 et h_2 sont contrôlés par deux régulateurs de types proportionnels intégraux. Les éléments du bruit de mesure $\mathbf{w}(t)$ sont supposés appartenir à l'intervalle $[-0.5cm, 0.5cm]$. Ce domaine de variation a été déterminé en effectuant des essais à commande nulle, pour différents points de fonctionnement.

3.3.3.2 Approximation qLPV et calcul du gain L

Les équations (3.3.63) du modèle de la maquette 3TANKS sont non linéaires par rapport à l'état. L'approximation qLPV de (3.3.63) sur le domaine $[x]$ est donnée par :

$$\dot{\chi}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\chi(t) + \mathbf{B}u, \quad (3.3.64)$$

$$\forall \mathbf{x}(t) \in [x],$$

où $\chi(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c$, $A(\mathbf{x}(t)) \in [J_{f_x}]([x])$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Avec $[J_{f_x}]$ une fonction d'inclusion de la matrice jacobienne :

$$\mathbf{J}_{f_x} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \quad (3.3.65)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-a_{13}}{2\sqrt{x_1(t)-x_3(t)}} & 0 & \frac{a_{13}}{2\sqrt{x_1(t)-x_3(t)}} \\ 0 & \frac{-a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} - \frac{a_{20}}{2\sqrt{x_2(t)}} & \frac{a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} \\ \frac{a_{13}}{2\sqrt{x_1(t)-x_3(t)}} & \frac{a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} & \frac{-a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} - \frac{a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} \end{pmatrix}.$$

Pour un domaine de variation du vecteur d'état, déterminé expérimentalement et donné par :

$$\mathbf{x} \in \begin{pmatrix} [0.44, 0.56] \\ [0.044, 0.164] \\ [0.24, 0.364] \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{x}_o = \text{mid}([x])$, on a l'égalité :

$$[J_{f_x}]([x]) = \begin{pmatrix} [-0.0153, -0.0076] & 0 & [0.0076, 0.0153] \\ 0 & [-0.0441, -0.0220] & [0.0076, 0.0153] \\ [0.0076, 0.0153] & [0.0076, 0.0153] & [-0.0306, -0.0152] \end{pmatrix}. \quad (3.3.66)$$

Sur la figure (3.3.3), est représenté un ensemble \mathbb{L} de valeurs admissibles du gain \mathbf{L} , tel que les contraintes \mathbb{L}_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, données par les relations (3.3.41), (3.3.46) et (3.3.59). Cet ensemble est obtenu à l'aide de RealPaver^[8] pour un domaine initial de recherche $\mathbb{L}_0 = ([-10, 10])^{3 \times 2}$.

^[8]Configuration de RealPaver : Contracteur "hull + box consistency + interval Newton", limitation à 5000 partitions.

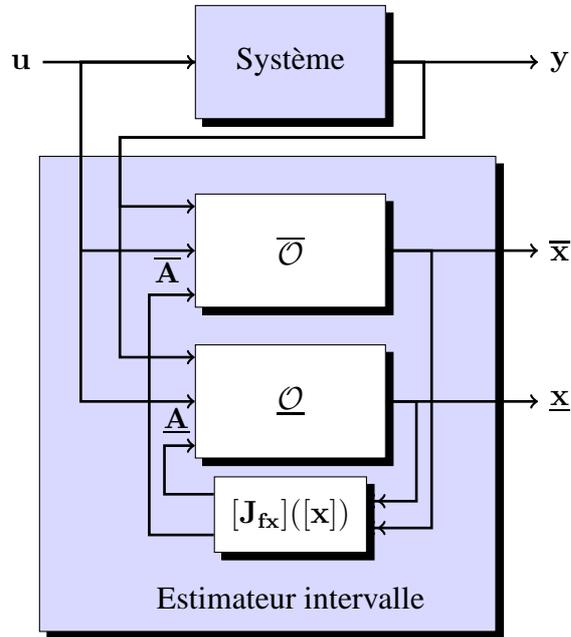


FIG. 3.3.4 – Structure de l'observateur avec mise à jour des bornes de $A(x(t))$

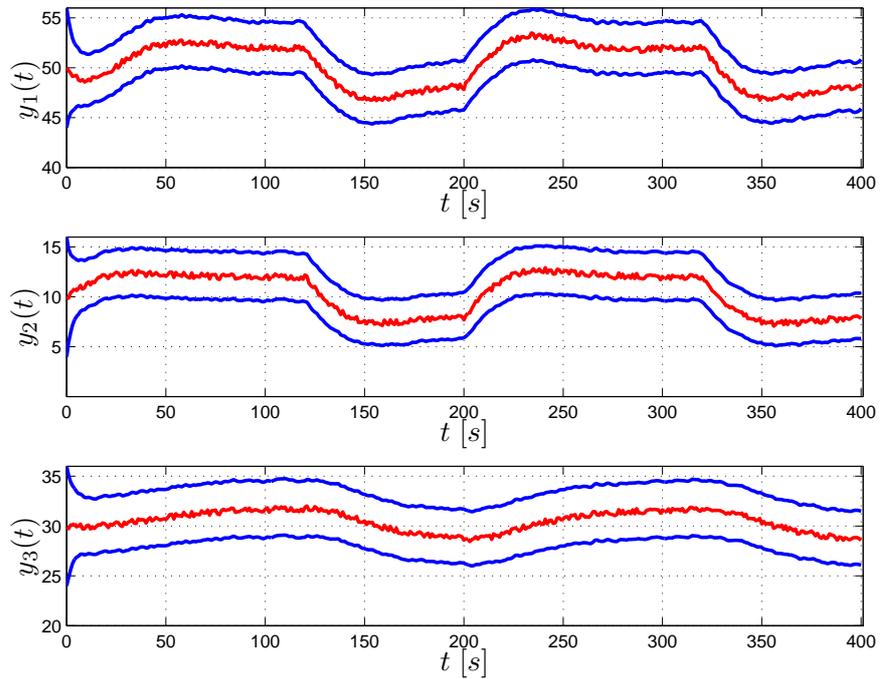


FIG. 3.3.5 – Estimation d'état pour $L \in \mathbb{L}$ et les bornes de $A(x(t))$ fixes

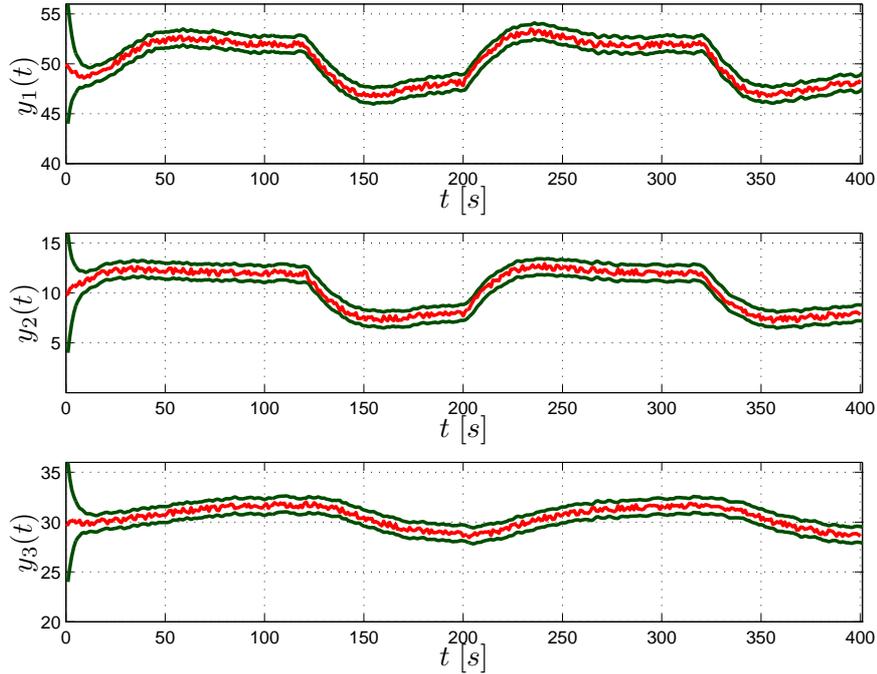


FIG. 3.3.6 – Estimation d'état pour $L \in \mathbb{L}$ et les bornes de $A(x(t))$ mises à jour

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème d'estimation d'état pour des systèmes représentés par des modèles non linéaires à temps continu et incertains. Dans un premier temps, nous avons présenté deux approches de résolution garantie d'EDO incertaines, l'une basée sur une extension des modèles de Taylor aux intervalles et l'autre sur le théorème de Müller et les propriétés de monotonie. Ces approches de résolution d'EDO ont été ensuite utilisées pour développer une méthode de synthèse d'observateur fournissant des bornes minorante et majorante de l'état. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur une de nos contributions qui consistent à approximer un modèle non linéaire par un modèle qLPV "garanti" en se basant sur l'analyse par intervalles. Enfin, nous avons illustré les différentes étapes de la méthodologie développée sur un exemple numérique.

Dans le chapitre suivant, nous abordons le deuxième volet de nos travaux. Il s'agit du problème de la détection d'incohérences des systèmes modélisés par un ensemble d'EDOs incertaines dans un contexte ensembliste. Les outils de caractérisation d'ensembles de valeurs présentés dans le chapitre 2, ainsi que l'estimation d'état traitée dans ce chapitre, fournissent les éléments de base des algorithmes de surveillance que nous allons développer.

Chapitre 4

Approche ensembliste du contrôle d'intégrité

4.1 Introduction

Dans le cadre de la mise en place d'une démarche de contrôle de cohérence et de surveillance à base de modèles, on est amené à estimer les variables du système (état, sorties, paramètres, ...) dont la déviation anormale pourrait être significative de l'apparition d'un défaut de fonctionnement. Dans un contexte ensembliste, la démarche revient à représenter la trajectoire de chaque variable du système par une enveloppe prenant en compte l'ensemble des incertitudes (de modélisation, perturbations, etc.). Cette couverture ensembliste représente le seuil au delà duquel le comportement observé représente un écart anormal par rapport au comportement nominal. Cet écart de comportement peut être l'objet d'une évaluation en termes de degré de sévérité afin de décider s'il peut conduire à une incapacité, provisoire ou permanente, du système à accomplir les objectifs initiaux qui lui ont été assignés. Cette approche doit être considérée comme une approche complémentaire (et non pas de remplacement) par rapport aux méthodes existantes ; elle présente en même temps des avantages et des inconvénients que nous nous efforcerons de souligner dans ce chapitre. Un des avantages, souvent mis en avant dans la littérature concernée, est que dans certaines situations le mécanisme de modélisation sous jacente pourrait se révéler avantageux et résoudre le problème de découplage d'une façon naturelle. En effet, comme nous l'avons déjà souligné, la description de l'ensemble des sources d'incertitudes en termes stochastiques pourrait s'avérer délicate. Par exemple, certaines dynamiques mal connues peuvent plus naturellement être décrites et caractérisées à partir d'une couverture ensembliste. Il en est de même pour certaines perturbations externes qui peuvent être plus aisément caractérisées par des bornes plutôt que par une quelconque distribution stochastique. En contrepartie, il faudra prendre en compte le fait que certains comportements couverts par des enveloppes calculées ne correspondent pas aux trajectoires admissibles, ce qui pourrait conduire à une fausse décision.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : après avoir décrit le compromis "garantie / conservatisme" dans un contexte ensembliste, nous nous intéressons dans une première partie à la formulation de tests de cohérence basés sur l'estimation d'état. Nous présentons d'abord le principe fédérateur de fonctionnement des méthodes ensemblistes existantes pour des modèles linéaires. Ensuite, nous abordons notre contribution qui consiste à exploiter les observateurs à retour de sortie développés dans le chapitre 3 pour mettre en place des tests de cohérence pour des systèmes non linéaires à temps continu. Enfin, la seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'élaboration de tests de cohérence dans l'espace paramétrique basées sur les outils ensemblistes présentés au chapitre 2.

4.2 Compromis "Garantie/Conservatisme"

Les algorithmes de détection et localisation de défauts que nous allons présenter dans ce chapitre reposent sur la mise en place de tests de cohérence entre un comportement attendu en fonctionnement normal et un comportement observé. Les tests de cohérence peuvent être réalisés dans l'espace d'état, l'espace paramétrique ou l'espace des sorties.

Dans le contexte ensembliste, on suppose que les bornes des grandeurs incertaines, choisies *a priori*, permettent de couvrir tous les comportements possibles du système physique en fonctionnement normal (et perturbé). L'ensemble des comportements possibles du système sont déterminés en propageant les bornes des incertitudes issues de différentes origines (bruit de mesure, bruit d'état, incertitudes paramétriques) sur la sortie du modèle du système. Dans le cas non linéaire, cet ensemble possède une forme géométrique complexe difficile à caractériser. Souvent, il est approximé par une forme simple comme les ellipsoïdes, les intervalles ou les parallélotopes. L'avantage de cette approche est que l'ensemble calculé est complet [Hansen 2004], *i.e.* il couvre tous les comportements possibles. Ainsi, une incohérence entre la sortie du système et l'ensemble des sorties du modèle s'explique forcément par la présence d'un ou plusieurs défaut(s). La complétude permet alors d'écarter toute indication de fausse alarme. Il s'agit d'une propriété importante pour la surveillance des systèmes critiques où la contrainte "zéro fausse alarme" est une préoccupation majeure. En contrepartie, comme l'ensemble calculé n'est pas minimal (*i.e.* des comportements inadmissibles sont couverts), certains défauts de faible amplitude peuvent ne pas être détectés, car leurs effets sur les trajectoires du système peuvent être masqués. Ce double effet correspond à ce qu'on peut appeler le compromis "*garantie / conservatisme*" traduisant un compromis bien connu en diagnostic entre un faible taux de fausses alarmes et un faible taux de non détection. Ce compromis est incontournable, l'amélioration d'un critère se fait au détriment

de l'autre. Il doit être géré pour chaque situation et en fonction des spécifications d'un cahier des charges donné.

Avant d'aborder le contrôle de cohérence basé sur les résultats issus du chapitre précédent, il nous paraît pertinent de présenter dans le paragraphe suivant la démarche générale de détection d'incohérence, souvent adoptée dans le contexte ensembliste. Notons que ce champ de recherche étant relativement récent, la littérature concernée est assez réduite.

4.3 Détection garantie basée sur l'estimation d'état

4.3.1 Tests de cohérence pour des modèles linéaires à temps discret

Les tests de cohérence que nous présentons dans ce paragraphe reposent sur le même principe que les estimateurs d'état par prédiction/correction présentés dans le chapitre 3. Cette approche a été initialement développée pour le cas de systèmes représentés par des modèles linéaires incertains à temps discret (voir par exemple [Lunze *et al.* 2003, Benothman *et al.* 2007, Planchon 2007])^[1], décrits par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}(0) &\in \mathbb{X}_0 \\ \mathbf{p} &\in \mathbb{P}_0 \end{cases} \quad (4.3.1)$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ et $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ les vecteurs d'état, de commande, de sortie et des paramètres incertains et les matrices d'état \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} de dimensions appropriées.

L'idée de base consiste à vérifier si le comportement prédit par ce modèle est compatible avec le comportement observé. Ces tests de cohérence sont conçus de façon à détecter et localiser un ensemble de défauts. Considérons un ensemble \mathcal{F} de défauts possibles :

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots\}, \quad (4.3.2)$$

auquel il est possible d'associer un ensemble modèles \mathcal{M}_{F_i} . Le comportement normal est décrit par le modèle \mathcal{M}_{F_0} et les modèles $\mathcal{M}_{F_1}, \mathcal{M}_{F_2}, \dots, \mathcal{M}_{F_N}$ décrivent les comportements défaillants devant être localisés par l'algorithme de diagnostic.

^[1]On trouve également dans la littérature des extensions aux cas des modèles non linéaires à temps continu [Wolff *et al.* 2008].

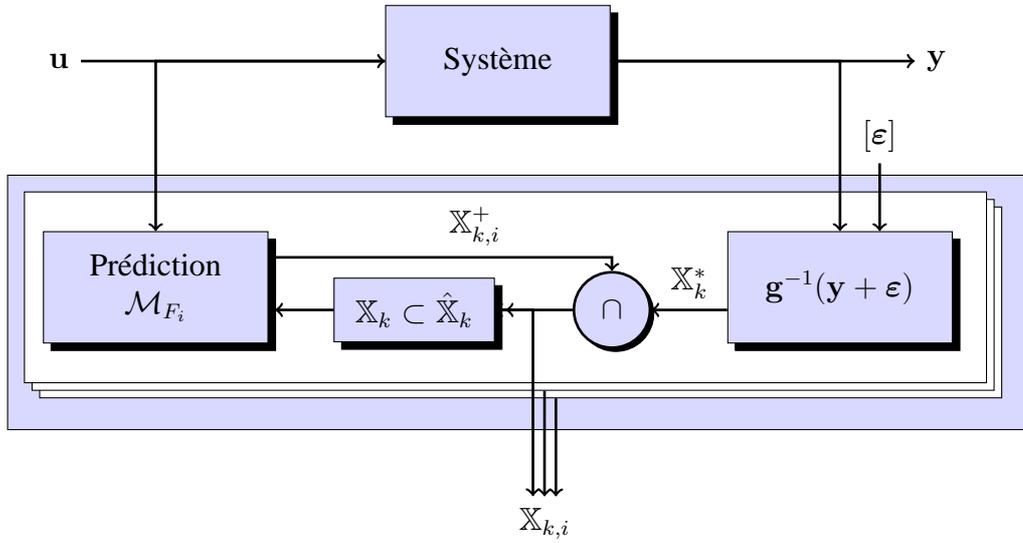


FIG. 4.3.1 – Tests de cohérence par estimation d'état

La démarche consiste à prédire le domaine $\mathbb{X}_{k,i}^+$ de l'état à l'instant t_k connaissant \mathbb{X}_{k-1} en utilisant les différents modèles \mathcal{M}_{F_i} . La détection et la localisation sont alors effectuées en analysant l'intersection des domaines prédits avec le domaine \mathbb{X}_k^* estimé en utilisant les de mesures. Ainsi, si $\mathbb{X}_{k,0}^+ \cap \mathbb{X}_k^* = \emptyset$, les mesures ne sont pas compatibles avec le modèle nominal ; un défaut est alors détecté. De plus, si pour le $i^{\text{ème}}$ comportement défaillant on a $\mathbb{X}_{k,i}^+ \cap \mathbb{X}_k^* \neq \emptyset$, traduisant la cohérence entre les mesures et le modèle \mathcal{M}_{F_i} , alors le défaut est isolé et correspond à F_i . Ce principe est illustré par le schéma 4.3.1.

Notons que la prédiction exacte du domaine $\mathbb{X}_{k,i}^+$, connaissant \mathbb{X}_{k-1} , peut nécessiter un volume de calcul conséquent, voire impossible, dans le cas non linéaire. Pour cette raison, on est souvent conduit à effectuer une approximation du domaine exact $\mathbb{X}_k := \mathbb{X}_{k,i}^+ \cap \mathbb{X}_k^*$ par une forme géométrique simple, comme les ellipsoïdes, les polytopes, les zonotopes ou les pavés. On note alors par $\hat{\mathbb{X}}_k$ l'approximation extérieure :

$$\mathbb{X}_k \subset \hat{\mathbb{X}}_k. \quad (4.3.3)$$

Dans ce cas, le domaine $\mathbb{X}_{k,i}^+$ prédit, ainsi que l'intersection $\mathbb{X}_{k,i}^+ \cap \mathbb{X}_k^*$, sont aisément calculables. Néanmoins, l'approximation $\hat{\mathbb{X}}_k$ engendre du conservatisme et conduit par conséquent à ne pas détecter certains défauts qui auraient pu être détectés si le domaine exact \mathbb{X}_k avait été utilisé [Armengol *et al.* 2000].

Exemple 4.3.1 *Considérons un modèle des variations de pH d'un processus biochimique [Lunze et al. 2003], décrit par :*

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + w(k) \\ \mathbf{x}(0) &\in \mathbb{X}_0^+ \\ w(k) &\in [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}] \end{cases} \quad (4.3.4)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ est le vecteur d'état (sans interprétation physique directe) ayant comme domaine initial $\mathbb{X}_0^+ = ([-4, 4], [6, 14])^T$, u est l'entrée, y est la mesure de pH, $\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}$ sont les bornes sur le bruit de mesure ($\pm 5\%$) et où $\mathbf{B} = (1, 1)^T$ et $\mathbf{C} = (1, 2)$.

En mode normal, la matrice \mathbf{A} est donnée par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_0} = \begin{pmatrix} 0.55 & -1.2 \\ 0.25 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

En mode défaillant, \mathbf{A} est donnée par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_1} = \begin{pmatrix} 0.55 & -1.2 \\ 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

L'approximation $\mathbb{X}_k \subset \hat{\mathbb{X}}_k$, que nous utilisons dans cet exemple, est issue de [Lunze et al. 2003], les auteurs proposent d'encadrer \mathbb{X}_k par un parallélotope décrit par :

$$\hat{\mathbb{X}}_k = \{\mathbf{x} \mid \forall i : s_i \mathbf{x} \in [a_i, b_i]\}, \quad (4.3.5)$$

où $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{n_s})$ $n_s \geq n_x$ est un vecteur unitaire et les bornes a_i et b_i sont calculées pour que le plus petit parallélotope $\hat{\mathbb{X}}_k$ vérifie la relation (4.3.3). Ces bornes sont données par :

$$\begin{aligned} a_i &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}_k} s_i \mathbf{x}, \\ b_i &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{X}_k} s_i \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Dans [Lunze et al. 2003], le vecteur s_1 est orienté dans la direction de la bande de contraintes représentant le domaine \mathbb{X}_k^* et s_2 est choisi parallèle à l'axe des ordonnées, i.e. :

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.7)$$

Sur les figures 4.3.2 et 4.3.3 sont représentés les résultats du test de cohérence pour

le mode normal (figure 4.3.2) et le mode défaillant (figure 4.3.3). Dans cette simulation, nous avons considéré un signal de commande nul et l'apparition d'un défaut (passage de $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_0}$ à $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_1}$) à $t = 9s$, avec un pas d'échantillonnage de 1s. Le domaine initial est représenté par le pavé \mathbb{X}_0^+ . Les valeurs exactes de l'état (obtenues par simulation) sont représentées par une croix et les bandes en pointillé représentent les quatre premières bandes correspondant aux domaines \mathbb{X}_k^* estimés en utilisant l'équation de mesure. Les parallélogrammes bleus représentent la prédiction du comportement du système pour le modèle normal (figure 4.3.2) et défaillant (figure 4.3.3) et les parallélogrammes rouges représentent les encadrements $\hat{\mathbb{X}}_k$ des intersections des domaines prédits \mathbb{X}_k^+ et estimés \mathbb{X}_k^* .

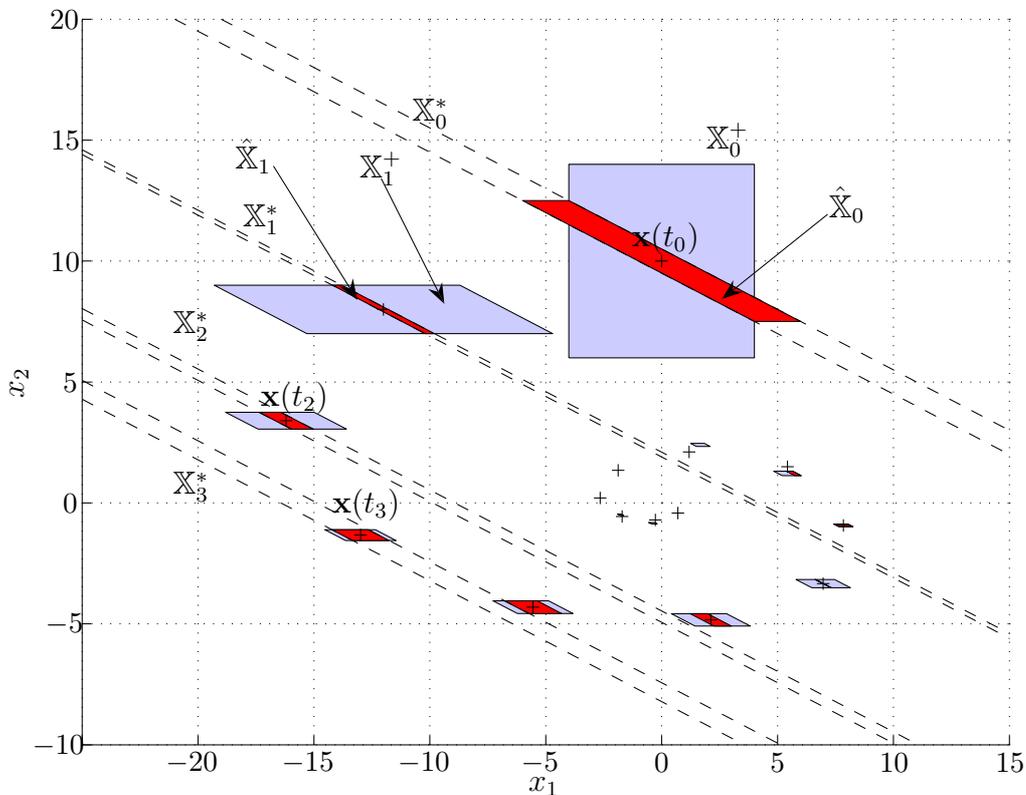
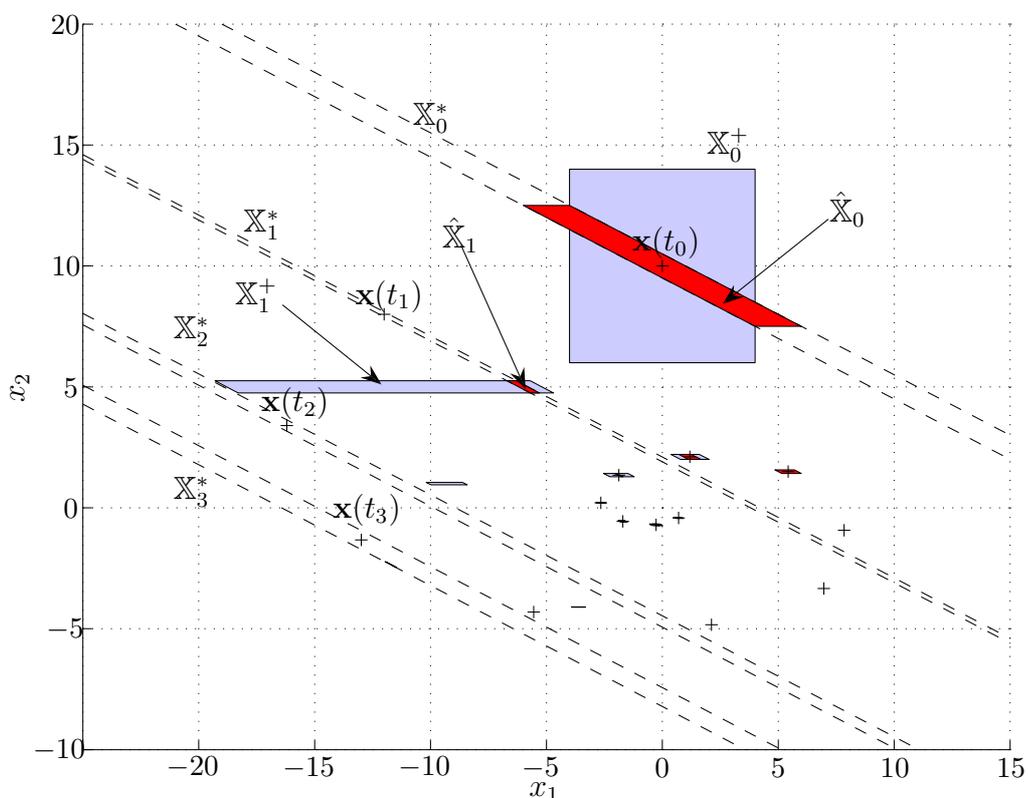


FIG. 4.3.2 – Test de cohérence pour le modèle nominal $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_0}$

Notons que sur la figure 4.3.2, l'ensemble solution est non vide jusqu'à $t = 11s$, le changement de mode est donc détecté avec un retard de deux pas. Sur la figure 4.3.3, pour les deux premiers pas, le test n'est pas "négatif" malgré l'absence de défauts. En effet, la prédiction entraîne du conservatisme qui ne permet pas de conclure sur l'incohérence entre les données et le mode défaillant. La solution de l'intersection est également non vide à

FIG. 4.3.3 – Test de cohérence pour le modèle défaillant $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{F_1}$

partir de $t = 10s$, ce qui indique que le modèle défaillant est cohérent avec les mesures à partir de cet instant.

Afin de gérer la perte d'information due au conservatisme entraîné lors de la phase de prédiction, un test stochastique a été proposé dans [Lunze et al. 2003] pour prédire le changement de mode.

Notons que dans l'approche que nous venons de présenter, la convergence de l'estimation (et par conséquent les performances de l'algorithme de diagnostic) dépend de la dynamique du modèle utilisé pour la prédiction ainsi que des bornes des erreurs de mesure. En effet, il n'y a pas de paramètre de réglage permettant de contrôler la vitesse de convergence. Dans le paragraphe suivant, nous proposons d'adapter l'estimateur à retour de sortie que nous avons développé dans le chapitre 3 afin d'utiliser le gain \mathbf{L} pour que l'algorithme de diagnostic réponde à des critères de performance souhaités *a priori*.

4.3.2 Tests de cohérence pour des systèmes non linéaires

Dans ce paragraphe, nous développons nos travaux présentés dans [Videau *et al.* 2009a] qui consistent à exploiter l'observateur basé sur l'approximation qLPV garantie que nous avons développé dans le chapitre 3 afin de construire un résidu intervalle. Dans un second temps, l'influence du gain sur les performances de la procédure de détection est analysée.

Les défauts que nous allons considérer dans la suite de ce paragraphe sont supposés de type additif^[2]. L'approximation qLPV d'un modèle non linéaire en présence d'un vecteur de défauts additif est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\phi(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\phi(t) \end{cases} \quad (4.3.8)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ et $\mathbf{D}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ sont des matrices variantes dans le temps, données dans le chapitre 3 et dont on connaît les bornes. \mathbf{F} et \mathbf{H} sont des matrices constantes de dimension appropriée et $\phi(t) \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ est le vecteur de défaut, pour lequel aucune hypothèse *a priori* n'est faite. Le terme $\mathbf{F}\phi(t)$ est censé modéliser l'impact de défauts de type "actionneur" ou "composant" alors que $\mathbf{H}\phi(t)$ modélise plutôt les défauts des chaînes d'instrumentation et de capteurs.

4.3.2.1 Génération de résidu intervalle

Dans le cas linéaire, la génération de résidus, quel que soit la méthode utilisée, revient à filtrer les signaux entrée-sortie par deux filtres linéaires \mathbf{H}_u et \mathbf{H}_y :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}_u \mathbf{u} + \mathbf{H}_y \mathbf{y}. \quad (4.3.9)$$

La construction des filtres \mathbf{H}_u et \mathbf{H}_y dépend du modèle utilisé et de la technique de génération employée (voir par exemple [Chen et Patton 1999]). Dans une seconde phase, les résidus sont structurés et évalués par des tests de décisions.

Dans un contexte à erreurs bornées, l'estimateur fournit des valeurs minorante \underline{y} et majorante \bar{y} de la sortie. Dans ce cas, la détection d'incohérence est effectuée par un test d'appartenance. En effet, l'estimation est incompatible avec les mesures si, à un instant t_k , on a :

$$\mathbf{y}(t_k) \notin [\underline{\mathbf{y}}(t_k), \bar{\mathbf{y}}(t_k)], \quad (4.3.10)$$

^[2]Plus précisément, l'effet ou l'impact du défaut est modélisé de façon additive. Il peut s'agir d'un défaut multiplicatif, modélisé sous forme additive, moyennant une approximation (voir [Zolghadri *et al.* 1998]).

où \mathbf{y} est le vecteur de sortie. Ce test peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & 0 \notin [\underline{\mathbf{y}}(t), \overline{\mathbf{y}}(t)] - \mathbf{y}(t) \\
 \Rightarrow & 0 \notin [\underline{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t), \overline{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)] \\
 \Rightarrow & 0 \notin [\underline{\mathbf{r}}(t), \overline{\mathbf{r}}(t)] \\
 \Rightarrow & 0 \notin [\mathbf{r}(t)],
 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

où \mathbf{r} est le vecteur de résidu. Notons que dans ce cas le résidu n'est pas un vecteur ponctuel mais un intervalle $[\mathbf{r}(t)]$.

4.3.2.2 Étude de la dynamique du résidu

Dans cette section, nous allons étudier la dynamique des bornes $\underline{\mathbf{r}}(t)$ et $\overline{\mathbf{r}}(t)$ du résidu intervalle $[\mathbf{r}(t)]$. Les bornes sont obtenues par un estimateur intervalle à retour de sortie en utilisant l'approximation qLPV (voir le paragraphe 3.3.2.3 du chapitre 3).

La borne supérieure du résidu $\mathbf{r}(t)$ est donnée par $\overline{\mathbf{r}}(t) = \overline{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$ où $\overline{\mathbf{y}}(t)$ est calculée à l'aide de l'observateur suivant :

$$\overline{\mathcal{O}} : \begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{x}}(t) + (\overline{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ \overline{\mathbf{y}}(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{4.3.12}$$

Ainsi, la dynamique de la borne supérieure du résidu est décrite par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{e}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{e}} + \overline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\boldsymbol{\phi}(t) \\ \overline{\mathbf{r}}(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{e}} + \overline{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) - \mathbf{H}\boldsymbol{\phi}(t) \end{cases} \tag{4.3.13}$$

où les termes

$$\begin{aligned}
 \overline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) &= (\Delta_{\overline{\mathbf{A}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\overline{\mathbf{C}}}(t))\mathbf{x}(t) + (\Delta_{\overline{\mathbf{B}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\overline{\mathbf{D}}}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\
 \overline{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) &= \Delta_{\overline{\mathbf{C}}}(t)\mathbf{x}(t) + \Delta_{\overline{\mathbf{D}}}(t)\mathbf{u}(s),
 \end{aligned}$$

caractérisent les effets des incertitudes dues à l'approximation qLPV et $((\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\boldsymbol{\phi}(t), \mathbf{H}\boldsymbol{\phi}(t))$ représentent les effets des défauts sur la borne supérieure du résidu.

Afin de différencier les effets des erreurs de modélisation et des défauts, la représentation

(4.3.13) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{e}}^o}(t) &= (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}}^o + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) \\ \bar{\mathbf{r}}^o(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{e}}^o + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}^d}(t) &= (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}}^d - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\phi(t) \\ \bar{\mathbf{r}}^d(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{e}}^d - \mathbf{H}\phi(t) \end{cases} \quad (4.3.14)$$

où l'on note $\bar{\mathbf{e}}^o$ le vecteur d'état $\bar{\mathbf{e}}$ en fonction des incertitudes $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e$ et $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_r$, et $\bar{\mathbf{e}}^o$ le vecteur d'état $\bar{\mathbf{e}}$ fonction du défaut ϕ . Ainsi, $\bar{\mathbf{r}}^d(t)$ et $\bar{\mathbf{r}}^o(t)$ représentent respectivement les effets du défaut et des incertitudes sur la borne supérieure du résidu. Notons que le résidu n'est généralement pas nul même en l'absence de défaut.

Par ailleurs, $\bar{\mathbf{r}}^o(t)$ peut être interprété comme un "seuillage adaptatif". En effet, un défaut est détecté via la borne supérieure de $\mathbf{r}(t)$ si :

$$\bar{\mathbf{r}}(t) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{r}}^d(t) \leq -\bar{\mathbf{r}}^o(t). \quad (4.3.15)$$

De la même manière, la borne inférieure du résidu est $\underline{\mathbf{r}}(t) = \underline{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$ où $\underline{\mathbf{y}}$ est estimée par :

$$\underline{\mathcal{O}} : \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) &= (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) &= \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (4.3.16)$$

Par analogie à (4.3.14), la dynamique de la borne inférieure $\underline{\mathbf{r}}(t)$ se décompose en deux termes donnés par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{e}}^o}(t) &= (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{e}}^o + \underline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) \\ \underline{\mathbf{r}}^o(t) &= \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{e}}^o + \underline{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{e}}^d}(t) &= (\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{e}}^d - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\phi(t) \\ \underline{\mathbf{r}}^d(t) &= \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{e}}^d - \mathbf{H}\phi(t) \end{cases} \quad (4.3.17)$$

où les effets des incertitudes dues à l'approximation qLPV et au bruit de mesure sont représentés par :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) &= (\Delta\underline{\mathbf{A}}(t) - \mathbf{L}\Delta\underline{\mathbf{C}}(t))\mathbf{x}(t) + (\Delta\underline{\mathbf{B}}(t) - \mathbf{L}\Delta\underline{\mathbf{D}}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \underline{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) &= \Delta\underline{\mathbf{C}}(t)\mathbf{x}(t) + \Delta\underline{\mathbf{D}}(t)\mathbf{u}(s). \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Enfin, en utilisant (4.3.14) et (4.3.17), le résidu peut se réécrire sous la forme suivante :

$$[\mathbf{r}(t)] = \begin{cases} [\underline{\mathbf{r}}^o(t), \bar{\mathbf{r}}^o(t)] & t < t_d \\ [\underline{\mathbf{r}}^o(t) + \underline{\mathbf{r}}^d(t), \bar{\mathbf{r}}^o(t) + \bar{\mathbf{r}}^d(t)] & t \geq t_d \end{cases} \quad (4.3.19)$$

où t_d est l'instant d'apparition du défaut.

En d'autres termes, pour un fonctionnement non défaillant, la taille de $[\mathbf{r}(t)]$ est non nulle et dépend du conservatisme dû à l'approximation qLPV ainsi qu'aux bornes d'incertitudes de l'erreur de mesure. Dans le cas d'un fonctionnement non défaillant, le test d'appartenance $0 \in [\mathbf{r}(t)]$ est toujours vrai. Cependant, il n'est pas possible de garantir l'absence de défauts dans ce cas. En effet, l'effet d'un défaut de faible amplitude peut être masqué par les erreurs de modélisation, ceci est également corrélé à un problème de détectabilité^[3]. Par contre, si à un instant t_d , le test n'est plus vrai (*i.e.* $0 \notin [\mathbf{r}(t)]$), alors on conclura à la présence d'un défaut. La principale caractéristique de cette approche est qu'aucune fausse alarme ne peut être signalée, sous l'hypothèse que les bornes d'erreurs choisies soient valides.

Dans le paragraphe suivant, nous allons quantifier la "taille" du plus petit défaut détectable pour la méthode présentée. En particulier, l'effet du gain de l'observateur sera analysé.

4.3.2.3 "Plus petit" défaut détectable

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédant le résidu généré est souvent non nul. En effet, les termes $\underline{\mathbf{r}}^o(t)$ et $\bar{\mathbf{r}}^o(t)$, qui représentent l'effet des erreurs de modélisation sont non nuls. Il apparaît donc important de déterminer quel est le plus petit défaut détectable en fonction des erreurs d'approximation et du gain \mathbf{L} .

Dans la suite, on appelle le plus petit défaut détectable pour la borne supérieure (respectivement sur la borne inférieure), le plus petit défaut dont l'effet sur le résidu $\bar{\mathbf{r}}$ (resp. $\underline{\mathbf{r}}$) entraîne $\bar{\mathbf{r}}^o(t) + \bar{\mathbf{r}}^d(t) \leq 0$ ($\underline{\mathbf{r}}^o(t) + \underline{\mathbf{r}}^d(t) \geq 0$). Nous allons établir la relation entre la taille de ce plus petit défaut détectable, le gain \mathbf{L} et les erreurs d'approximation. Pour cela, considérons un défaut dont l'effet peut être représenté par une variation du $j^{\text{ème}}$ élément de $\phi(t)$, tel que $\phi(t) = (0, \dots, 0, \varphi_j(t), 0, \dots, 0)^T$. L'effet de $\varphi_j(t)$ sur la $i^{\text{ème}}$ composante de la borne supérieure du résidu est donné par la relation dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) & = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}} - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})_j \varphi_j(t) \\ \bar{r}_i^d(t, \varphi_j) & = \bar{C}_i \bar{\mathbf{e}} - H_{ij} \varphi_j(t) \end{cases} \quad (4.3.20)$$

^[3]Il ne s'agit pas d'une détectabilité intrinsèque, mais d'une détectabilité orientée "sensibilité", voir [Bas-seville et Nikiforov 1993] pour une discussion à ce sujet.

où $(\mathbf{F} - \mathbf{LH})_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de $(\mathbf{F} - \mathbf{LH})$ et \overline{C}_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\overline{\mathbf{C}}$.

Considérons un défaut apparaissant sous la forme d'un échelon d'amplitude $\overline{\varphi}_{ji}$. En régime permanent, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{r}_i^d(t, \varphi_j|_{step}) = (\overline{C}_i(\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{LC})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{LH})_j - H_{ij}) \overline{\varphi}_{ji}. \quad (4.3.21)$$

Par ailleurs, nous avons montré dans le paragraphe précédent qu'un défaut est détecté par la borne supérieure de la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu si :

$$\overline{r}_i^o(t) - \overline{r}_i^d(t) \leq 0 \quad (4.3.22)$$

Ainsi, en utilisant les relations (4.3.21) et (4.3.22), la taille du plus petit défaut $\varphi_j(t)$ détectable par la borne supérieure de la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu, est donnée par :

$$\overline{\varphi}_{ij} = (\overline{C}_i(\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{LC})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{LH})_j - H_{ij})^{-1} \overline{r}_i^o, \quad (4.3.23)$$

où \overline{r}_i^o est la valeur maximum du "seuillage adaptatif" donnée par :

$$\overline{r}_i^o = -\overline{C}_i(\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{LC})^{-1} \overline{\Lambda}_e + \overline{\Lambda}_{ri}, \quad (4.3.24)$$

avec $\overline{\Lambda}_e$ et $\overline{\Lambda}_r$ les valeurs maximales de $\overline{\lambda}_e(t)$ et $\overline{\lambda}_r(t)$.

Une démarche similaire est effectuée pour la borne inférieure de la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu. En considérant un défaut se manifestant par une variation de type échelon sur le $j^{\text{ème}}$ élément de $\phi(t)$, la plus petite amplitude du défaut détectable par la $i^{\text{ème}}$ composante de la borne inférieure du résidu $[r(t)]$ est donnée par :

$$\underline{\varphi}_{ij} = (\underline{C}_i(\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{LC})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{LH})_j - H_{ij})^{-1} \underline{r}_i^o. \quad (4.3.25)$$

Enfin, l'amplitude du plus petit défaut détectable par la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu intervalle, tel que $0 \notin [r_i(t)]$, peut être définie par :

$$\varphi_{ijmin} = \max(|\underline{\varphi}_{ij}|, |\overline{\varphi}_{ij}|). \quad (4.3.26)$$

Notons que dans l'hypothèse où le plus petit défaut détectable est spécifié dans le cahier des charges, il est possible d'ajouter une contrainte supplémentaire au problème de synthèse d'un observateur intervalle $(\underline{\mathcal{O}}, \overline{\mathcal{O}})$ donné dans la section 3.3.2.3 du chapitre 3. Ainsi, l'ensemble \mathbb{L} des valeurs admissibles du gain \mathbf{L} peut être déterminé tel que les conditions

de garantie (3.3.47), de convergence (3.3.59), pour une amplitude du plus petit défaut détectable $\varphi_{ij_{min}}$ soient assurées. L'ensemble \mathbb{L} peut être réécrit tel que :

$$\mathbf{L} \in \mathbb{L} = \bigcap_{i=1}^4 \mathbb{L}_i, \quad (4.3.27)$$

où \mathbb{L}_4 est donné par :

$$\mathbb{L}_4 = \{ \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \mid \max(|\underline{\varphi}_{ij}(\mathbf{L})|, |\overline{\varphi}_{ij}(\mathbf{L})|) \leq \varphi_{ij_{min}} \},$$

avec $(\underline{\varphi}_{ij}(\mathbf{L}), \overline{\varphi}_{ij}(\mathbf{L}))$ représentant l'expression du plus petit défaut détectable donnée par (4.3.25) pour la borne inférieure $\underline{r}_i(t)$ et par (4.3.23) pour la borne supérieure $\overline{r}_i(t)$.

Remarque 4.3.1 Lors de la résolution du CSP permettant de caractériser \mathbb{L} , un ensemble solution vide peut être causé par :

- une amplitude du plus petit défaut détectable trop faible ;
- une incertitude sur l'erreur de sortie $[\varepsilon]$ trop élevée ;
- une approximation qLPV trop conservative.

4.3.2.4 Illustration : Exemple de simulation

Dans ce paragraphe, nous reprenons l'exemple présenté dans le paragraphe 3.3.3.1 du chapitre 3 pour illustrer la démarche que nous venons de présenter. Les mêmes conditions de fonctionnement sont mises en place afin d'effectuer des simulations dans lesquelles un défaut apparaît. Néanmoins, nous considérons que la hauteur h_3 n'est pas mesurable, ainsi le vecteur de sortie est donné par $\mathbf{y}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T + (w_1(t), w_2(t))^T$, où chaque composante du bruit de mesure $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t))^T$ est bornée par $[-0.5cm, 0.5cm]$.

En fonctionnement normal, le modèle du comportement dynamique de la maquette 3TANKS est décrit par les équations suivantes :

$$\mathcal{M}_{F_0} \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -a_{13} \sqrt{x_1(t) - x_3(t)} + \frac{1}{S_c} u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{32} \sqrt{x_3(t) - x_2(t)} - a_{20} \sqrt{x_2(t)} + \frac{1}{S_c} u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= a_{13} \sqrt{x_1(t) - x_3(t)} - a_{32} \sqrt{x_3(t) - x_2(t)} \\ y_1(t) &= x_1(t) + w_1(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) + w_2(t) \end{cases} \quad (4.3.28)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (h_1, h_2, h_3)^T$ représente le vecteur d'état, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T = (Q_1, Q_2)^T$ le vecteur de commande, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ le vecteur de mesure, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ le bruit de

mesure et $\mathbf{p} = (a_{13}, a_{32}, a_{20})^T$ le vecteur de paramètres normalisés des coefficients d'écoulement (avec $a_{13} = a_{z13}S_n\sqrt{2g}/Sc$, $a_{32} = a_{z32}S_n\sqrt{2g}/Sc$ et $a_{20} = a_{z20}S_n\sqrt{2g}/Sc$).

Enfin, le système fonctionne en boucle fermée, sous l'action d'un régulateur de type proportionnel intégral. La commande est de type rectangulaire avec une amplitude pouvant varier à chaque nouveau créneau.

Le scénario que nous proposons dans la suite de ce paragraphe concerne l'apparition d'un défaut de type fuite sur la cuve 1 à $t = 500s$ (ouverture de la vanne " a_1 "). Cette fuite est modélisable par un terme additif $-a_{10} * \sqrt{x_1(t)}$ sur l'équation d'état de x_1 du modèle (4.3.28), avec le coefficient d'écoulement a_{10} ayant une valeur proportionnelle a_{20} ($a_{10} = 1 * a_{20}$ la vanne " a_1 " est ouverte, $a_{10} = 0 * a_{20}$ la vanne " a_1 " est fermée). Ainsi, le modèle défaillant est décrit par les équations d'état suivantes :

$$\mathcal{M}_{F_1} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_{13}\sqrt{x_1(t)-x_3(t)} - a_{10}\sqrt{x_1(t)} + \frac{1}{S_c}u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{32}\sqrt{x_3(t)-x_2(t)} - a_{20}\sqrt{x_2(t)} + \frac{1}{S_c}u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = a_{13}\sqrt{x_1(t)-x_3(t)} - a_{32}\sqrt{x_3(t)-x_2(t)} \\ y_1(t) = x_1(t) + w_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) + w_2(t) \end{cases} \quad (4.3.29)$$

L'ensemble \mathbb{L} des valeurs admissibles du gain des observateurs \underline{Q} et \overline{O} est déterminé tel que les conditions de garantie $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ et de convergence \mathbb{L}_3 soient respectées. Pour cela, on considère la transformation qLPV garantie de (4.3.28) donnée par la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-a_{13}}{2\sqrt{x_1(t)-x_3(t)}} & 0 & \frac{a_{13}}{2\sqrt{x_1(t)-x_3(t)}} \\ 0 & \frac{-a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} - \frac{-a_{20}}{2\sqrt{x_2(t)}} & \frac{a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} \\ \frac{a_{13}}{2\sqrt{x_1(t)-x_3(t)}} & \frac{a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} & \frac{-a_{13}}{2\sqrt{x_1(t)-x_3(t)}} - \frac{a_{32}}{2\sqrt{x_3(t)-x_2(t)}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{S_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.3.30)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.3.31)$$

où seule la matrice de transition \mathbf{A} est variante dans le temps.

La relation permettant de quantifier l'amplitude du plus petit défaut détectable par la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu intervalle est construite en considérant que la fuite sur la cuve 1 est modélisable par la matrice :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -a_{10} * \sqrt{x_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.32)$$

et le vecteur de défauts : $\phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))^T$.

Ainsi, il est possible de déterminer l'ensemble \mathbb{L}_4 des valeurs du gain \mathbf{L} tel que :

$$\varphi_1 \geq \max(|\underline{\varphi}_{i1}|, |\overline{\varphi}_{i1}|) \Rightarrow 0 \notin [r_i(t)], \quad (4.3.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_{i1} &= (C_i(\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{C})^{-1}F_1)^{-1} \underline{r}_i^o, \\ \overline{\varphi}_{i1} &= (C_i(\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\mathbf{C})^{-1}F_1)^{-1} \overline{r}_i^o, \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

où C_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{C} et F_1 la première colonne de \mathbf{F} .

Il est également possible, connaissant une valeur du gain $\mathbf{L} \in \bigcap_{i=1}^3 \mathbb{L}_i$ (voir paragraphe 3.3.2.3 du chapitre 3), de déterminer *a posteriori* la valeur de la plus petite amplitude du défaut φ_1 entraînant $0 \notin [r_i(t)]$.

Par exemple, considérons le gain suivant :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.0463 & -0.0003 \\ -0.3287 & 0.7494 \\ 0.0074 & 0.0074 \end{pmatrix} \quad (4.3.35)$$

appartenant à $\bigcap_{i=1}^3 \mathbb{L}_i$ et un domaine initial du vecteur d'état :

$$\mathbf{x} \in \begin{pmatrix} [0.44, 0.56] \\ [0.044, 0.164] \\ [0.24, 0.364] \end{pmatrix}. \quad (4.3.36)$$

La valeur de l'amplitude du plus petit défaut détectable par la première composante du résidu intervalle est : $\varphi_{11min} = 0.187$, qui correspond à une ouverture de la vanne "a₁" de 18.7%. Cette valeur correspond au pire cas. En effet, en régime établi le rayon de $[x]$ converge vers $R_{e_{max}}$ ^[4], ce qui entraîne une diminution de l'amplitude du plus petit défaut détectable.

Les résultats de l'estimation des sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont représentés sur les figures 4.3.4 à 4.3.9, ainsi que les résultats des tests de cohérence, pour des défauts correspondant à l'ouverture de la vanne "a₁" de 3% à 20%. De plus, nous présentons dans le tableau 4.3.1 le temps de retard à la détection de l'incohérence en fonction de l'amplitude du défaut. Notons, qu'une incohérence est détectée pour tous les scénarios, toutefois, le retard à la détection diminue lorsque l'amplitude du défaut augmente. Enfin, il est important de noter qu'aucune fausse alarme n'a été détectée.

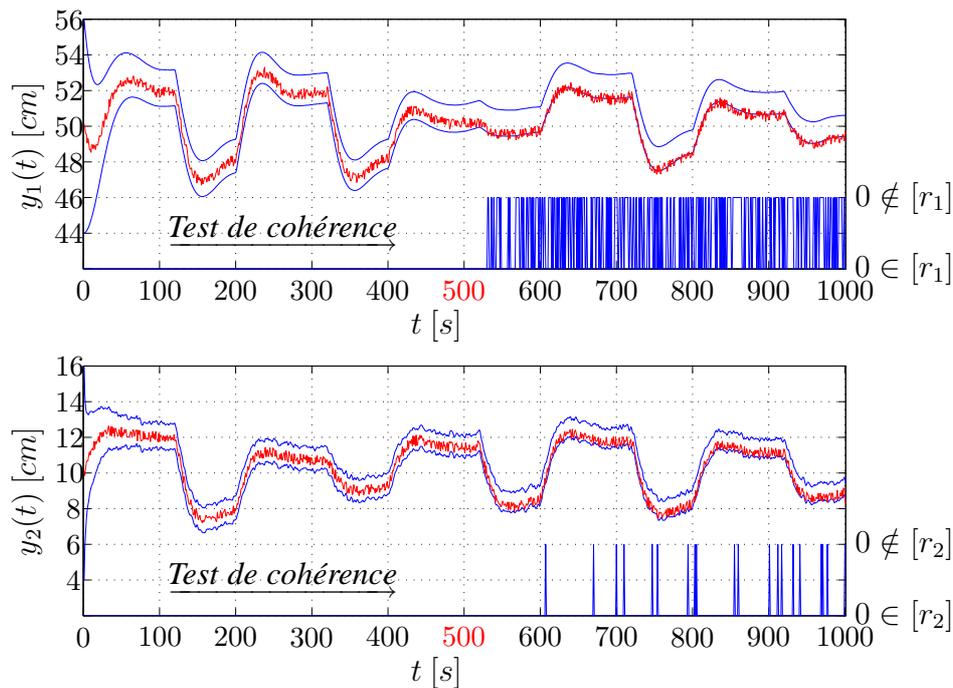


FIG. 4.3.4 – Test de cohérence pour une fuite de 3% sur la vanne "a₁"

^[4]Voir le paragraphe 3.3.2.3 du chapitre 3 pour plus de détail sur le calcul de $R_{e_{max}}$.

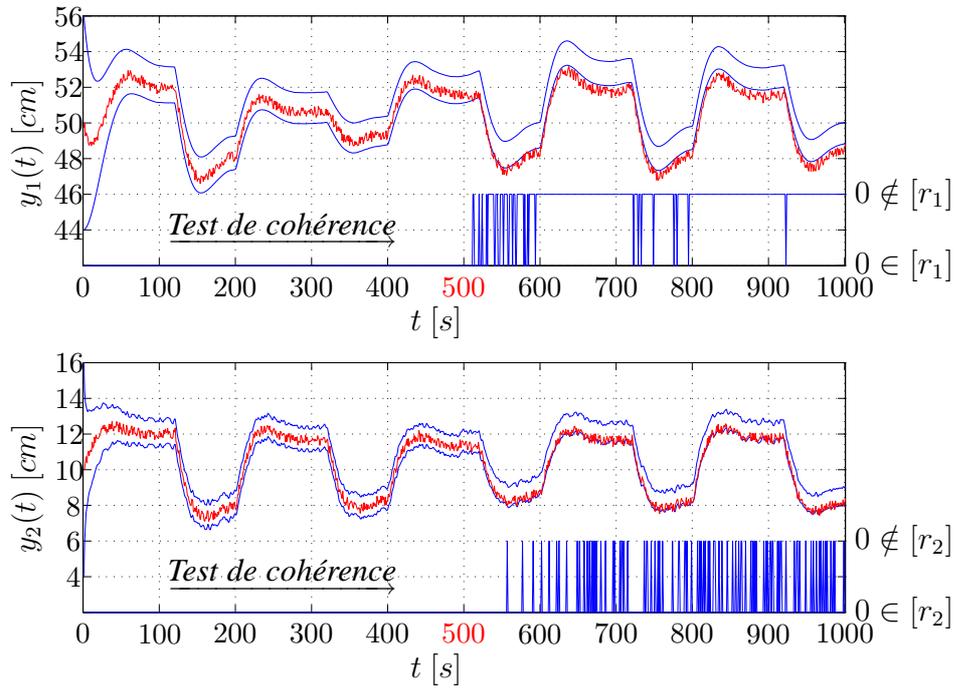


FIG. 4.3.5 – Test de cohérence pour une fuite de 5% sur la vanne "a₁"

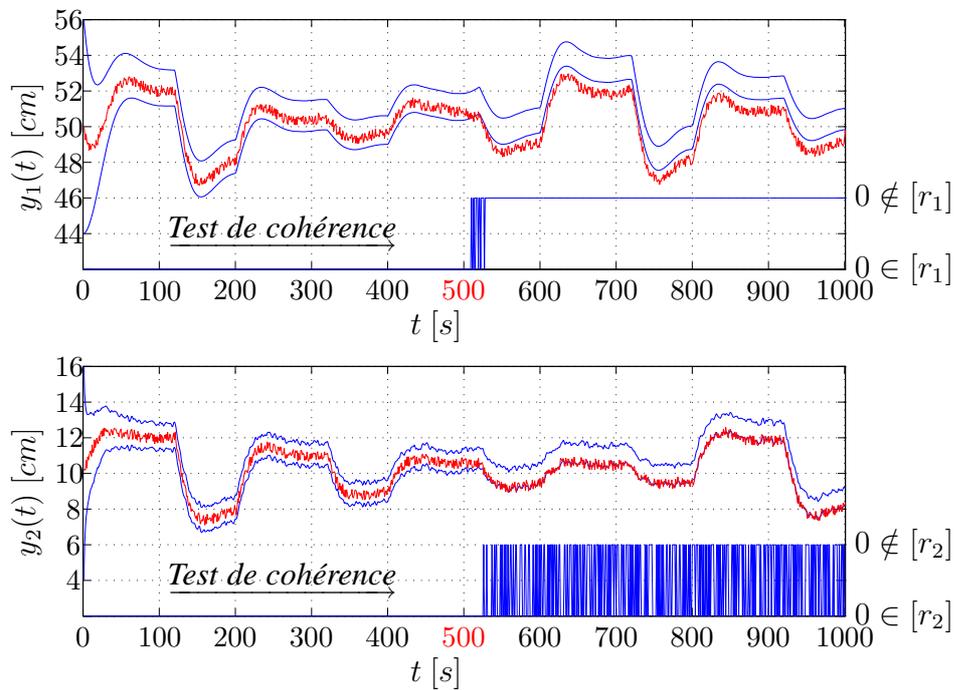


FIG. 4.3.6 – Test de cohérence pour une fuite de 7% sur la vanne "a₁"

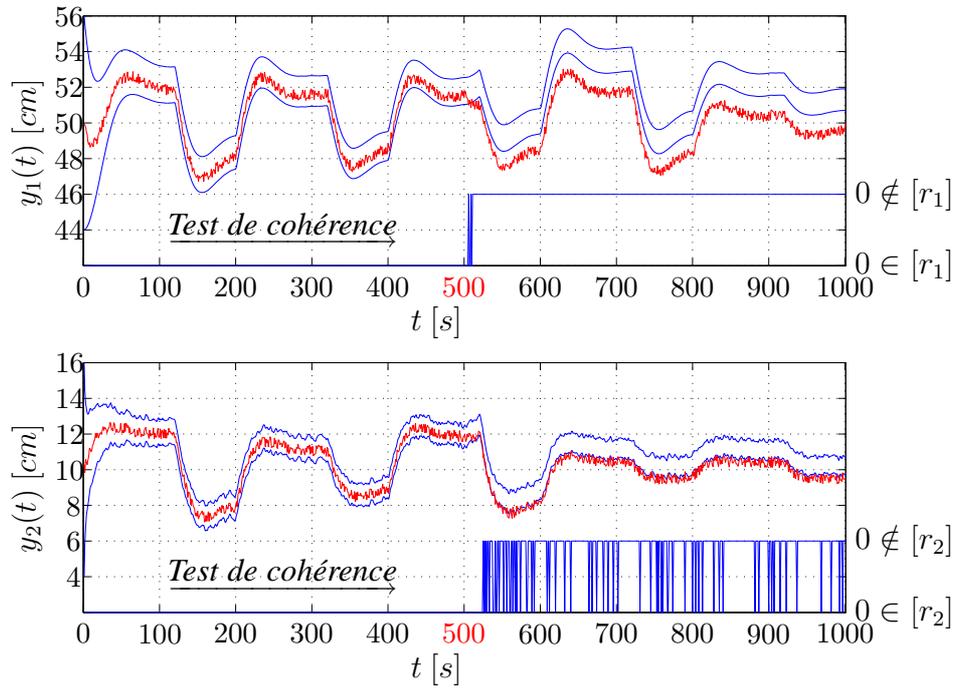


FIG. 4.3.7 – Test de cohérence pour une fuite de 10% sur la vanne "a₁"

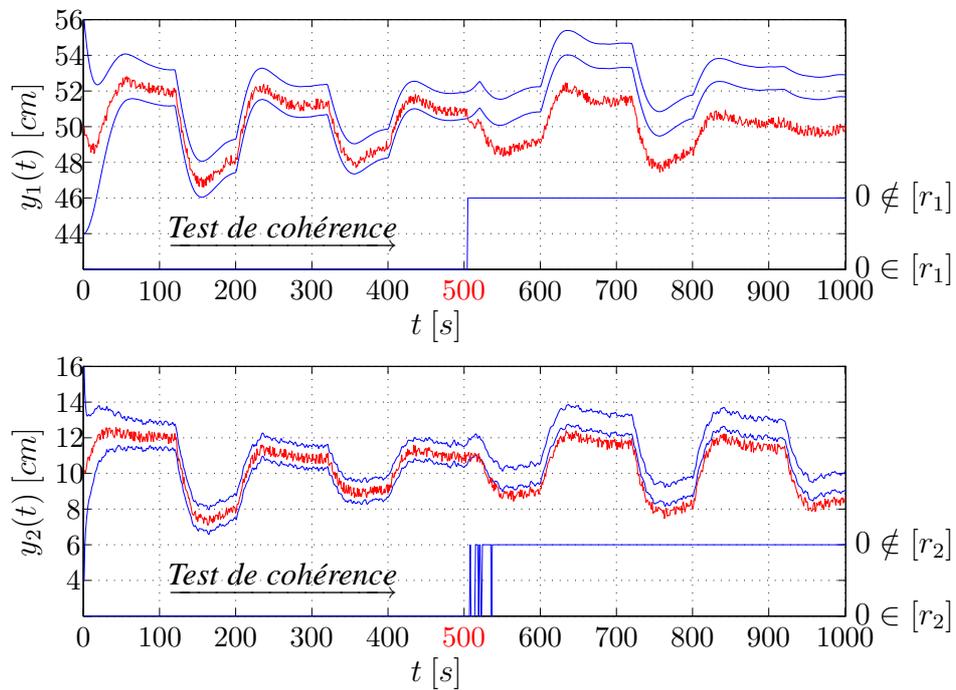
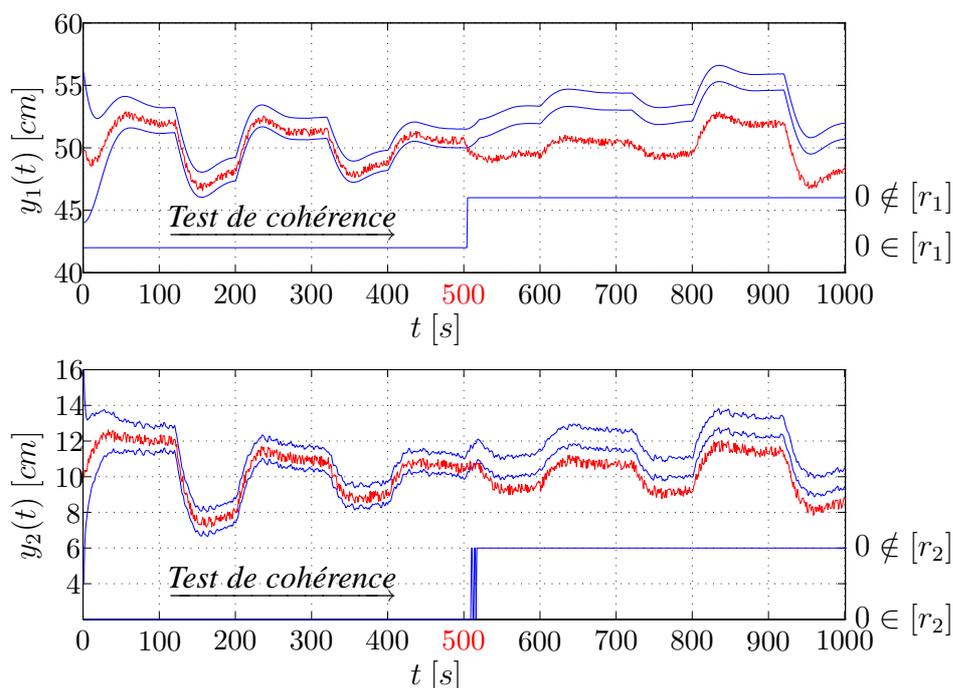


FIG. 4.3.8 – Test de cohérence pour une fuite de 15% sur la vanne "a₁"

FIG. 4.3.9 – Test de cohérence pour une fuite de 20% sur la vanne "a₁"

Ouverture de la vanne "a ₁ "	Retard à la détection
3%	30s
5%	12s
7%	10s
10%	6s
15%	4s
20%	3s

TAB. 4.3.1 – Retard à la détection pour plusieurs valeurs d'ouverture de la vanne "a₁"

Dans ce paragraphe, l'approche que nous avons présentée repose sur l'estimation des variables d'état. L'intérêt de cette approche se justifie par la manifestation rapide des effets d'un défaut interne sur le vecteur d'état, alors qu'ils apparaissent plus lentement sur les paramètres. Néanmoins, l'étude du vecteur de paramètres, en ligne ou hors ligne, peut permettre de fournir des indications précieuses pour la localisation et l'identification des défauts. Pour cela, nous présentons dans le paragraphe suivant des tests de cohérence paramétrique permettant de compléter le processus de contrôle d'intégrité.

4.4 Tests de rupture paramétrique et localisation

Considérons un système à surveiller représenté en fonctionnement normal par un modèle d'état non linéaire à temps continu, décrit par les équations suivantes :

$$\mathcal{M}_{F_0} := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{y}(t_k) &= \mathbf{y}_k^m + \mathbf{v}(t_k) \\ \mathbf{x}(t_0) &\in [\mathbf{x}_0] \\ \mathbf{v}(t) &\in [\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] \end{cases} \quad (4.4.1)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{y}_k^m \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée, de sortie, de mesure à l'instant t_k , de paramètres et de bruit de mesure supposé borné.

Dans un contexte à erreurs bornées, la détection de défauts à base d'estimation paramétrique, repose sur la mise en place d'un test de cohérence entre le domaine $\mathbb{P}_{F_0}^+$, estimé *a priori*, en fonctionnement normal, et un domaine \mathbb{P}_k^* estimé en ligne, à chaque pas de mesures ou sur un horizon glissant. Le domaine \mathbb{P}_k^* peut également être estimé hors ligne sur une fenêtre d'observation. Ce test de cohérence peut être décrit par la relation suivante :

$$\mathbb{P}_k = \mathbb{P}_{F_0}^+ \cap \mathbb{P}_k^*. \quad (4.4.2)$$

En fonctionnement non défaillant, l'ensemble \mathbb{P}_k solution du test n'est pas vide, *i.e.* il existe au moins une valeur du vecteur de paramètres consistante avec l'ensemble estimé *a priori* et l'ensemble estimé avec les données mesurées. L'apparition d'un défaut se manifeste par un ensemble \mathbb{P}_k solution vide.

Lorsqu'un défaut est détecté, il est souvent nécessaire d'isoler le paramètre (ou le groupe de paramètres) qui a (ont) subi l'impact ou l'effet du défaut. Cette information est utile pour identifier par la suite le degré de sévérité des défauts et les classer en fonction des directions paramétriques affectées. La localisation de défauts, en utilisant des tests de rupture paramétrique, est possible s'il existe un ensemble de couples (modèle, domaine admissible du vecteur de paramètres), noté $(\mathcal{M}_{F_1}, \mathbb{P}_{F_1}^+), \dots, (\mathcal{M}_{F_N}, \mathbb{P}_{F_N}^+)$, correspondant à des défauts (ou groupes de défauts). En posant en parallèle un ensemble des tests de cohérence :

$$\mathbb{P}_{k,F_i} = \mathbb{P}_{F_i}^+ \cap \mathbb{P}_{k,F_i}^*. \quad (4.4.3)$$

correspondant à chacun des couples $(\mathcal{M}_{F_i}, \mathbb{P}_{F_i}^+)$, où \mathbb{P}_{k,F_i}^* est l'estimation du vecteur de

paramètres du modèle \mathcal{M}_{F_i} . Si la solution d'un test \mathbb{P}_{k,F_i} est non vide, on peut conclure à la cohérence entre le modèle \mathcal{M}_{F_i} , le domaine initial $\mathbb{P}_{F_i}^+$ et les données mesurées. Si l'ensemble solution est vide alors on conclura à l'incohérence entre le couple $(\mathcal{M}_{F_i}, \mathbb{P}_{F_i}^+)$ et les données mesurées.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons de présenter les tests de cohérence paramétrique sous la forme d'un problème d'inversion ensembliste, dont le principe a été présenté dans le chapitre 2. Nous verrons qu'une telle approche peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul, ce qui peut s'avérer problématique pour une surveillance en ligne. Afin de pallier à ce problème, nous allons opter dans un second temps pour une formulation sous une forme de satisfaction de contraintes sur un horizon glissant.

4.4.1 Approche par inversion ensembliste

Nous supposons que le système à surveiller est représenté par le modèle non linéaire à temps continu (4.4.1). La procédure consiste à estimer dans un contexte ensembliste, les paramètres physiques de ce modèle. Ces paramètres sont ensuite comparés à un vecteur de paramètres de référence, dont les valeurs ont été déterminées lors d'un cycle de fonctionnement normal. Cette "comparaison" constitue la base des tests de détection et de localisation que nous allons développer pour décider si les déviations paramétriques observées peuvent être expliquées par les données expérimentales, et sinon, quel est le paramètre physique (ou le groupe de paramètres) incriminé(s).

Supposons que des mesures $[y_k]$ ont été prélevées sur l'horizon temporel $[t_1, t_N]$. L'ensemble des valeurs du vecteur de paramètres compatibles avec ces mesures est donné par :

$$\mathbb{P}_{k,F_i} = \left\{ \mathbf{p} \in [\mathbf{P}_{F_i}]^+ \left| \begin{array}{l} \forall t_k \in \{t_1, \dots, t_N\}, \forall \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0], \\ \left(\dot{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), \mathbf{p}) \right) \wedge \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), \mathbf{p}) \in [y_k] \right) \end{array} \right. \right\}. \quad (4.4.4)$$

où $[\mathbf{P}_{F_i}]^+$ est le domaine initial de recherche.

Le problème (4.4.4) est un problème de satisfaction de contraintes mixtes. En effet, les équations d'état et de mesure correspondent respectivement à un ensemble de contraintes dynamiques et statiques. Notons que la résolution de (4.4.4) peut se réaliser avec l'algorithme SIVIA [Jaulin et Walter 1993] mais la mise en oeuvre d'un contracteur reste un problème difficile et non résolu. Par ailleurs, l'utilisation de toutes les mesures conduit à un CSP avec un nombre croissant de contraintes, le temps de calcul serait ainsi de plus en plus

important. Dans la suite, nous proposons d'utiliser une approche à horizon glissant permettant de limiter à N' le nombre de mesures pour chaque procédure d'estimation.

Lorsque l'ensemble solution de (4.4.4) est vide, on peut conclure à l'incohérence entre le modèle \mathcal{M}_{F_i} , le domaine initial $\mathbb{P}_{F_i}^+$ et les mesures pour $t_{K-N'}, \dots, t_K$. En d'autres termes, il n'existe pas de valeur de \mathbf{p} dans $[\mathbf{P}_{F_i}]^+$ qui soit consistante avec le modèle \mathcal{M}_{F_i} et les mesures (*i.e.* $\mathbb{P}_{k,F_i} = [\mathbf{P}_{F_i}]^+ \cap \mathbb{P}_{k,F_i}^* = \emptyset$).

Il est important de souligner que l'ensemble \mathbb{P}_{k,F_i} ne peut pas être déterminé d'une manière exacte. En effet, l'algorithme SIVIA fournit un encadrement de \mathbb{P}_{k,F_i} .

L'évaluation du test de cohérence à l'aide de l'algorithme SIVIA nécessite le calcul du domaine $[\mathbf{x}_k]$ de l'état à chaque instant t_k . Ceci passe par une résolution numérique garantie d'une équation différentielle à l'aide de l'une des méthodes présentées dans le chapitre 3. Notons que le solveur VNODE^[5] contient une implémentation efficace de certains algorithmes de résolution d'EDOs. SIVIA utilise le test d'inclusion suivant :

- Un pavé $[\mathbf{p}] \subset [\mathbf{P}_{F_i}]^+$ ne contient aucune solution si :

$$\exists t_k \mid \mathbf{g}([\mathbf{x}(t_k)], \mathbf{u}(t_k), [\mathbf{p}]) \cap [\mathbf{y}_k] = \emptyset. \quad (4.4.5)$$

- Un pavé $[\mathbf{p}] \subset [\mathbf{P}_{F_i}]^+$ est dit acceptable si :

$$\mathbf{g}([\mathbf{x}(t_k)], \mathbf{u}(t_k), [\mathbf{p}]) \subset [\mathbf{y}_k], \quad \forall t_k \in \{t_{K-N'}, \dots, t_K\}. \quad (4.4.6)$$

- Un pavé $[\mathbf{p}] \subset [\mathbf{P}_{F_i}]^+$ est dit ambigu (ou indéterminé) si aucune des deux conditions précédentes n'est vérifiée.

Dans ces conditions, le test d'inclusion de l'algorithme SIVIA est donné par l'algorithme 5 (pour plus d'informations, le lecteur peut se référer par exemple à [Raïssi *et al.* 2003a]).

Les limitations de cette approche sont essentiellement dues au temps de calcul qu'elle engendre. En effet, pour l'étude de chaque sous-pavé $[\mathbf{p}] \subset [\mathbf{P}_{F_i}]$, il faut évaluer l'encadrement de l'état à l'aide de méthodes d'approximation numérique garantie d'équations différentielles, coûteuses en temps de calcul.

Cette approche est donc difficilement utilisable dans une procédure de diagnostic en

^[5]Disponible à : <http://www.cas.mcmaster.ca/nedialk/Software/VNODE/VNODE.shtml>

Algorithme 5 Test d'inclusion

ENTRÉES : $[\mathbf{p}], [\mathbf{x}_K], [\mathbf{y}_{K-N'}], \dots, [\mathbf{y}_K], N', \mathbf{f}, \mathbf{g}$

- 1: Compteur=0;
- 2: **Pour** $k = 0$ à $N' - 1$, **Faire** :
- 3: $[\mathbf{x}_{k+1}]^+ = \text{Encadrement}(\mathbb{X}(t_{k+1}))$ pour $[\mathbf{p}]$;
- 4: **Si** $\mathbf{g}([\mathbf{x}_{k+1}]^+) \cap [\mathbf{y}_{k+1}] = \emptyset$, **Alors**
- 5: **Retourne** NON_FAISABLE ;
- 6: **Fin (Si)**
- 7: **Si** $\mathbf{g}([\mathbf{x}_{k+1}]^+) \subset [\mathbf{y}_{k+1}]$, **Alors**
- 8: Compteur=Compteur+1 ;
- 9: **Fin (Si)**
- 10: **Fin (Pour)**
- 11: **Si** Compteur= N' , **Alors**
- 12: **Retourne** FAISABLE ;
- 13: **Sinon**
- 14: **Retourne** INDETERMINE ;
- 15: **Fin (Si)**

SORTIES : [NON_FAISABLE | FAISABLE | INDETERMINE]

ligne pour des systèmes complexes ayant un pas d'échantillonnage petit par rapport au temps de caractérisation du vecteur de paramètres. En revanche, dans le cas de certains systèmes ayant un pas d'échantillonnage long, comme certains systèmes biologiques, ces méthodes peuvent apparaître adaptées.

4.4.2 Approche par satisfaction de contraintes

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence la limitation en temps de calcul que pouvait entraîner un test de cohérence paramétrique sur des contraintes dynamiques. En effet, la résolution numérique d'EDOs est nécessaire pour chaque itération dans l'algorithme SIVIA.

Pour réduire le temps de calcul, nous proposons de relaxer le problème (4.4.4) en remplaçant les contraintes dynamiques dues aux EDOs par des contraintes "statiques" composées d'équations algébriques. Cette approche, présentée dans [Videau *et al.* 2008], s'articule en deux étapes. La première consiste à utiliser un estimateur du domaine $[\mathbf{x}(t_k)]$ de l'état \mathbf{x} ainsi que de sa dérivée $[\dot{\mathbf{x}}(t_k)]$ à chaque instant $t_k \in \{1, \dots, N\}$. La seconde consiste à formuler le test de cohérence sous la forme d'un CSP $\mathcal{H}_i(\mathcal{M}_i, [\mathbf{P}_{F_i}]^+)$ composé d'un pavé initial de recherche $[\mathbf{P}_{F_i}]^+$ et d'équations algébriques issues de l'équation d'état du

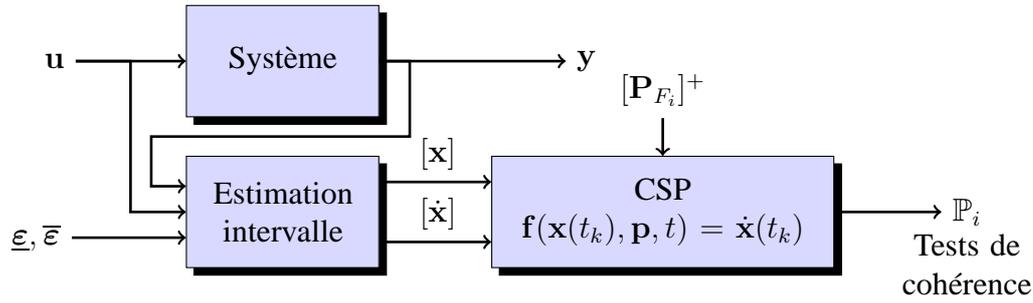


FIG. 4.4.1 – Tests de cohérence paramétrique par satisfaction de contraintes

modèle (4.4.1), données par :

$$f(x(t_k), p, t) = \dot{x}(t_k), \quad x(t_k) \in [x(t_k)], \quad \dot{x}(t_k) \in [\dot{x}(t_k)], \quad (4.4.7)$$

avec $f : \mathbb{R}^{n_x+n_p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $t_k \in \{1, \dots, N\}$, $[x(t_k)]$ et $[\dot{x}(t_k)]$ représentant des encadrements du vecteur d'état x et de sa dérivée \dot{x} aux instants t_k et p est le vecteur de paramètres. Le schéma de principe de cette approche est illustré sur la figure (4.4.1).

Le calcul de l'encadrement $[x(t_k)]$ du vecteur d'état x à l'instant t_k peut être obtenu par plusieurs approches en fonction de la forme de l'équation de mesure de (4.4.1). En effet, dans certains cas, le vecteur d'état est directement accessible, *i.e.* :

$$y(t) = x(t). \quad (4.4.8)$$

Le domaine $[x(t_k)]$ est alors donné par $[y_m(t_k) + \underline{\varepsilon}, y_m(t_k) + \bar{\varepsilon}]$.

Par ailleurs, si la sortie coïncide avec une partie du vecteur d'état, *i.e.* :

$$y(t) = x'(t), \quad (4.4.9)$$

où x' est une partie de vecteur x , tel que $x = (x', x'')^T$, l'estimation de l'encadrement de x'' doit être effectuée à l'aide d'un estimateur. Si le système respecte des conditions de monotonie, il est possible d'estimer $[x'']$ avec un observateur à retour de sortie, présenté dans la section 3.3.2. Plus généralement, le domaine $[x(t)]$ peut être estimé à l'aide d'observateurs ensemblistes présentés dans la section 3.3.

Le calcul de l'encadrement de la dérivée de l'état x est un problème complexe que nous ne traitons pas dans sa globalité. Néanmoins, différentes approches ont été implémentées. Si un observateur par retour de sortie est utilisé pour estimer l'encadrement de x , il est alors

possible d'obtenir une évaluation de l'encadrement de $\dot{\mathbf{x}}$ à l'aide d'une sortie supplémentaire de l'observateur. Dans le cas contraire, il faut effectuer une dérivation numérique de l'état. Dans un premier temps, nous nous sommes basés sur le schéma numérique suivant :

$$[\dot{\mathbf{x}}(t_{k+1})] = \frac{\text{mid}([\mathbf{x}(t_{k+1})]) - \text{mid}([\mathbf{x}(t_k)])}{t_{k+1} - t_k} + [\Delta]. \quad (4.4.10)$$

avec $[\Delta]$ un encadrement *a posteriori* de l'incertitude due à la dérivation. L'intérêt de cette approche est qu'elle est relativement simple à mettre en oeuvre. Néanmoins, elle n'assure pas la garantie de l'estimée. De plus, si l'état est perturbé, le terme $[\Delta]$ doit être grand, ce qui entraîne du conservatisme dans l'évaluation de $[\dot{\mathbf{x}}(t_{k+1})]$. Une seconde approche, qui semble intéressante mais que nous n'avons pas utilisée dans le cadre de nos travaux, est basée sur la notion de pseudo-dérivateurs. Elle est basée sur un filtrage adéquat de la dérivée de l'état.

Après avoir déterminé $[\mathbf{x}]$ et $[\dot{\mathbf{x}}]$, le test de cohérence est formulé sous la forme d'un CSP $\mathcal{H}_i(\mathcal{M}_i, [\mathbf{P}_{F_i}]^+)$ composé des équations algébriques du modèle \mathcal{M}_i et du pavé initial de recherche $[\mathbf{P}_{F_i}]^+$, donné par :

$$\mathbb{P}_{k,F_i} = \left\{ \mathbf{p} \in [\mathbf{P}_{F_i}]^+ \mid \begin{array}{l} \forall t_k \in \{t_1, \dots, t_N\}, \forall \mathbf{x}(t_k) \in [\mathbf{x}(t_k)], \forall \dot{\mathbf{x}}(t_k) \in [\dot{\mathbf{x}}(t_k)], \\ \dot{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), \mathbf{p}) \end{array} \right\}. \quad (4.4.11)$$

L'utilisation de toutes les mesures conduit à un CSP avec un nombre croissant de contraintes, le temps de calcul serait ainsi de plus en plus important. Nous proposons d'éviter cette difficulté en utilisant un horizon glissant h_j , qui limite à $N' * n_x$ (N' représente le nombre de mesures dans l'horizon h_j et n_x le nombre d'équations d'état) le nombre d'équations algébriques. La première étape de cette méthode consiste à estimer l'état sur l'horizon h_j . Le vecteur de paramètres \mathbf{p} constitue les variables du CSP \mathcal{H}_i et les contraintes sont composées des équations d'état du modèle. La démarche est résumée dans l'algorithme (6).

Notons que dans certains cas, l'effet d'un défaut peut être modélisé par une variation d'un paramètre qui est constant en fonctionnement normal. En d'autres termes, un coefficient physique du modèle \mathcal{M}_{F_i} censé être constant, devient un paramètre variant. Par exemple, l'effet d'une fuite peut être modélisé comme une augmentation de la section de la conduite de sortie, qui possède une valeur fixe en fonctionnement normal. Afin de localiser une telle déviation Δp_k du $k^{\text{ième}}$ paramètre du vecteur \mathbf{p} d'un modèle \mathcal{M}_{F_i} , l'encadrement $[\mathbf{P}_{F_i}]^+$ du domaine initial $\mathbb{P}_{F_i}^+$, utilisé dans le CSP $\mathcal{H}_i(\mathcal{M}_i, [\mathbf{P}_{\mathcal{M}_i}])$, est élargi. Ainsi, pour un nouveau pavé initial $[\mathbf{P}'_{F_i}]^+$ permettant de prendre en compte les variations de \mathbf{p} , l'ensemble solution \mathbb{P}_{k,F_i} du CSP $\mathcal{H}_i(\mathcal{M}_i, [\mathbf{P}'_{F_i}]^+)$ est non vide et correspond à une estimation du

Algorithme 6 Tests de cohérence par satisfaction de contraintes sur un horizon glissant de taille N'

ENTRÉES : $[\mathbf{x}]_{k-N'}, [\mathbf{y}]_{k-N'+1}, \dots, [\mathbf{y}]_k, [\mathbf{P}_{F_i}]^+$

- 1: Calculer $[\mathbf{x}]_{k-N'+1}, \dots, [\mathbf{x}]_k$;
- 2: Evaluer $[\dot{\mathbf{x}}]_{k-N'+1}, \dots, [\dot{\mathbf{x}}]_k$;
- 3: Résoudre le CSP $\mathbb{P}_{k,F_i} = \mathcal{H}_i(\mathcal{M}_i, [\mathbf{P}_{F_i}]^+)$;
- 4: **Si** $\mathbb{P} = \emptyset$, **Alors**
- 5: **Retourne** Incohérence ;
- 6: **Sinon**
- 7: **Retourne** Pas d'incohérence ;
- 8: **Fin (Si)**

SORTIE : \mathbb{P}_{k,F_i}

domaine admissible du vecteur variant \mathbf{p} . La distance de Hausdorff (voir chapitre 2) peut alors être utilisée pour mesurer la variation entre le domaine initial $\mathbb{P}_{F_i}^+$, correspondant au fonctionnement normal, et le domaine \mathbb{P}_{k,F_i} obtenu par l'estimation.

4.4.3 Exemple de simulation

Dans ce paragraphe, nous illustrons la démarche de détection et localisation de défauts par des tests de rupture paramétrique que nous venons de présenter. Pour cela, nous considérons un défaut interne de type fuite sur la cuve 1 de la maquette 3TANKS, présentée dans le paragraphe 3.3.3.1 du chapitre 3 ainsi que dans le paragraphe 4.3.2.4.

En fonctionnement normal, le comportement dynamique de la maquette est décrit par le modèle \mathcal{M}_{F_0} (équation 4.3.28) avec un vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (a_{13}, a_{32}, a_{20})^T$ et en mode défaillant (ouverture de la vanne " a_1 "), il est décrit par le modèle \mathcal{M}_{F_0} (équation 4.3.29) avec un vecteur de paramètres $\mathbf{p}' = (a_{13}, a_{32}, a_{20}, a_{10})^T$, où le coefficient a_{10} peut varier et ainsi être interprété comme un effet de la fuite sur la cuve 1 ($a_{10} = 1 * a_{20}$ la vanne " a_1 " est ouverte, $a_{10} = 0 * a_{20}$ la vanne " a_1 " est fermée). Dans la suite nous considérons une fuite sur la cuve 1 correspondant à une ouverture de la vanne " a_1 " de 7%.

Les encadrements $[\mathbf{x}(t_k)]$ et $[\dot{\mathbf{x}}(t_k)]$ du vecteur d'état \mathbf{x} et de sa dérivée à l'instant t_k sont obtenus à l'aide d'estimateurs intervalle à retour de sortie développés dans le chapitre 3.

Estimation de paramètre en mode normal et influence de l'horizon

Soient le modèle \mathcal{M}_{F_0} et le vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (a_{13}, a_{32}, a_{20})^T$. L'estimation du domaine admissible de \mathbf{p} en fonctionnement normal est effectuée en posant un problème de satisfaction de contraintes de type (4.4.11) pour un large domaine initial de recherche :

$$[\mathbf{P}_{F_i}]^+ = ([0, 0.0005], [0, 0.0005], [0, 0.0005])^T.$$

Un pavé englobant l'ensemble solution \mathbb{P}_{F_0} , pour différentes tailles d'horizons, est représenté sur la figure (4.4.2). Plus la taille N' de l'horizon h_j est grande, plus le pavé solution est contracté (donc précis). En effet, en augmentant la taille de h_j , on augmente le nombre de contraintes (et donc d'informations pour déterminer le pavé solution). Néanmoins, l'augmentation du nombre de contraintes augmente aussi le temps de calcul.

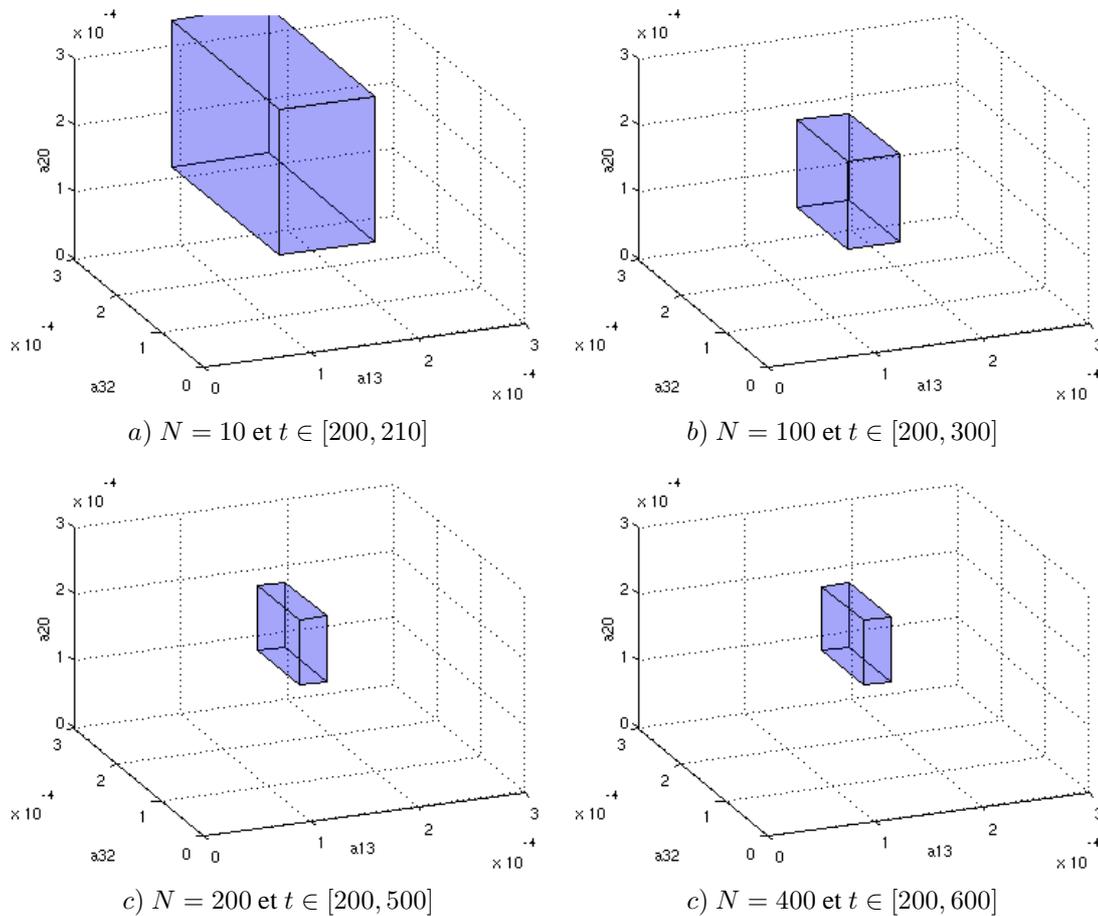


FIG. 4.4.2 – Influence de la taille de l'horizon h_j sur l'estimation de \mathbb{P}_{F_0} , en fonctionnement nominal

Test de rupture paramétrique

La détection de défauts est réalisée en effectuant un test de cohérence, par satisfaction de

contraintes, entre le modèle \mathcal{M}_{F_0} , un pavé initial (déterminé *a priori*) :

$$[\mathbf{P}_{F_1}]^+ = \begin{pmatrix} [1.19 * 10^{-4}, 1.46 * 10^{-4}] \\ [1.59 * 10^{-4}, 1.94 * 10^{-4}] \\ [1.19 * 10^{-4}, 1.46 * 10^{-4}] \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

et les estimations $[\mathbf{x}(t_k)]$ et $[\dot{\mathbf{x}}(t_k)]$; avec un horizon glissant $N' = 40s$.

Nous présentons sur la figure 4.4.3, les pavés solutions \mathbb{P}_{k,F_0} du vecteur de paramètres pour chaque horizon h_k . Le domaine *a priori* pour chaque paramètre est tracé en traits discontinus rouges. L'ensemble solution estimé sur chaque horizon est tracé en traits continus bleus.

Pour $t \in [0, 500s]$, le pavé solution du vecteur de paramètres est cohérent avec le domaine initial (intersection non vide). Le modèle \mathcal{M}_{F_0} du système non défaillant et le domaine initial $[\mathbf{P}_{F_1}]^+$ sont donc compatibles avec les mesures.

A partir de $t = 500s$, l'ensemble solution estimé devient vide. On conclut alors à une incohérence entre le modèle \mathcal{M}_{F_0} , le domaine initial $[\mathbf{P}_{F_1}]^+$ et les mesures ; une anomalie est alors détectée.

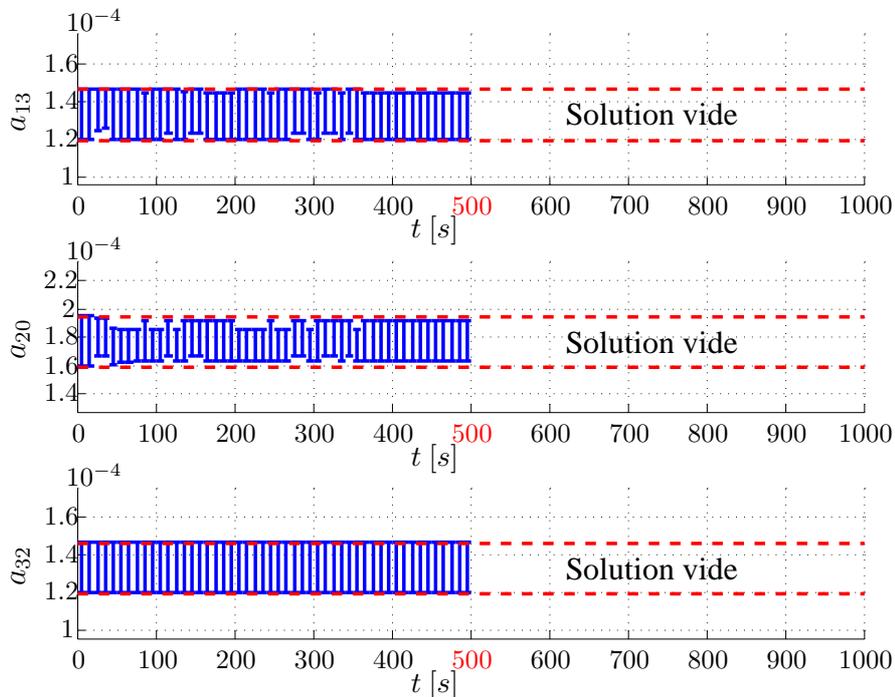


FIG. 4.4.3 – Tests de cohérence paramétrique pour le modèle \mathcal{M}_{F_0}

Test de cohérence et localisation

La localisation d'un défaut est basée sur l'utilisation d'une batterie de modèles. Chaque modèle prend en compte un (ou plusieurs) défaut(s).

Considérons le modèle \mathcal{M}_{F_1} , qui permet de prendre en compte une fuite sur la cuve 1. En fonctionnement non défaillant, le paramètre a_{10} du modèle \mathcal{M}_{F_1} est nul (on retrouve alors le modèle normal \mathcal{M}_{F_0}). Lors de l'apparition d'une fuite sur la cuve 1, l'effet de cette fuite se manifeste par la variation du paramètre a_{10} . Ainsi, un test de cohérence sur le modèle \mathcal{M}_{F_1} , permet de localiser un défaut relatif à une fuite sur la cuve T_1 .

Soit un nouveau vecteur de paramètres $\mathbf{p}' = (a_{13}, a_{32}, a_{20}, a_{10})^T$ ayant pour domaine initial de recherche :

$$[\mathbf{P}_{F_1}]^+ = \begin{pmatrix} [1.19 * 10^{-4}, 1.46 * 10^{-4}] \\ [1.59 * 10^{-4}, 1.94 * 10^{-4}] \\ [1.19 * 10^{-4}, 1.46 * 10^{-4}] \\ [0.115 * 10^{-4}, 0.133 * 10^{-4}] \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

Notons que le domaine initial de recherche du paramètre a_{10} correspond à une ouverture de la vanne a_1 comprise entre 6% et 8%.

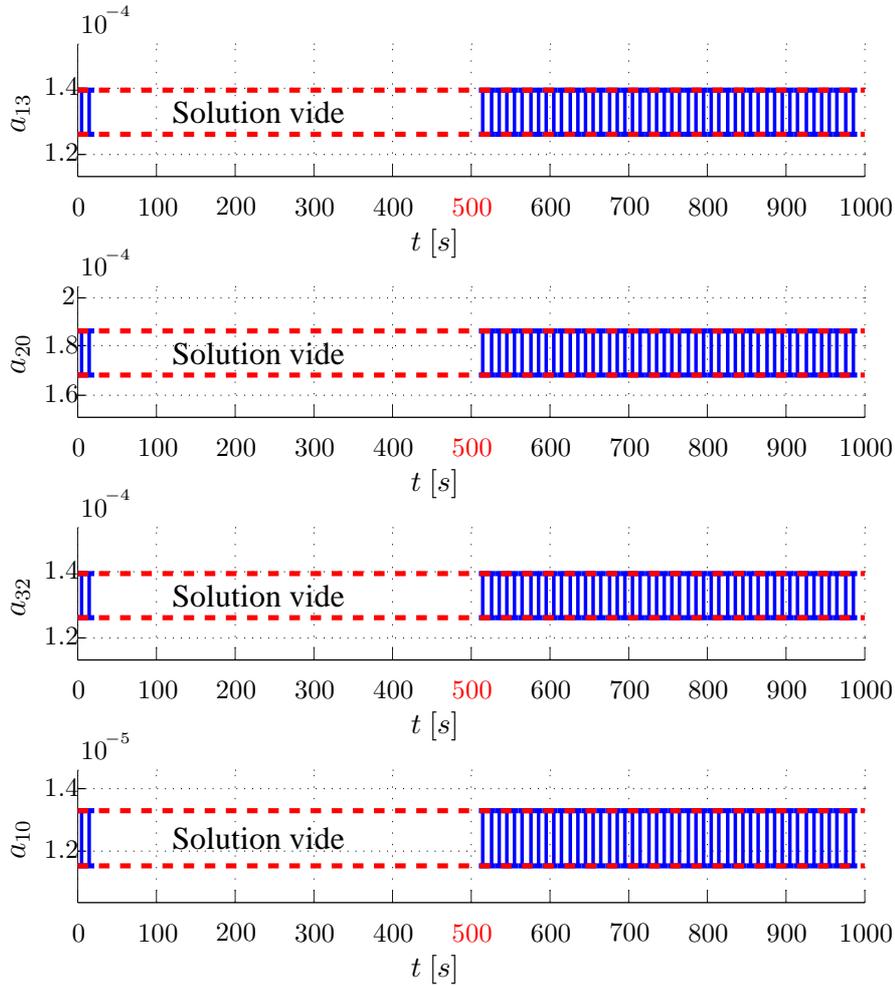
Ainsi le problème $\mathcal{H}_1(\mathcal{M}_{F_1}, [\mathbf{P}_{F_1}]^+)$ doit avoir une solution non vide lorsque les effets d'une fuite de 6% et 8% sur la cuve 1 se manifestent.

Sur la figure 4.4.4, les pavés solutions du vecteur de paramètres pour le CSP $\mathcal{H}_1(\mathcal{M}_{F_1}, [\mathbf{P}_{F_1}]^+)$ sont représentés pour un horizon de taille $N = 40s$.

Pour $t \in [0, 500s]$, l'ensemble solution estimé est vide. On conclut alors à une incohérence entre le modèle \mathcal{M}_{F_1} , le domaine initial $[\mathbf{P}_{F_1}]^+$ (qui prennent en compte une fuite sur la cuve 1) et les mesures. Ceci s'explique par l'absence de fuite sur la cuve 1. Notons que pour les deux premiers horizons, la solution est non vide, or on est en fonctionnement normal, ce phénomène est dû au conservatisme engendré par l'estimateur d'état qui n'a pas convergé pour les premiers horizons.

A partir de $t = 500s$, le vecteur de paramètres estimé est cohérent avec le domaine initial (intersection non vide). Le modèle \mathcal{M}_{F_1} et le domaine initial $[\mathbf{P}_{F_1}]^+$ sont donc compatibles avec les mesures, d'où la localisation d'une fuite sur la cuve 1.

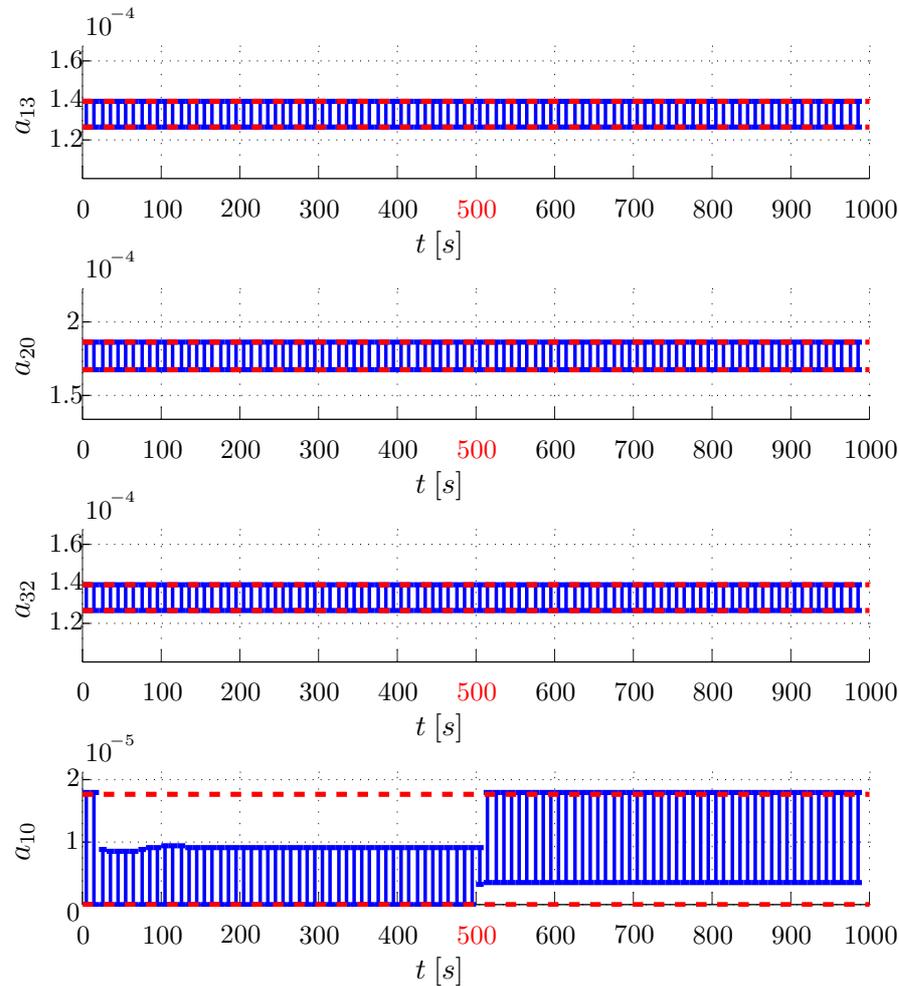
Enfin, nous présentons sur la figure 4.4.5, les pavés solutions pour un CSP composé des équations algébriques du modèle \mathcal{M}_{F_1} , et ayant un intervalle initial de recherche pour le paramètre a_{10} plus large, incluant la valeur nulle. Ceci dans l'objectif de mettre en valeur la


 FIG. 4.4.4 – Tests de cohérence paramétrique pour le modèle \mathcal{M}_{F_1}

variation paramétrique entraînée suite à l'apparition d'un défaut.

$$[\mathbf{P}'_{F_1}]^+ = \begin{pmatrix} [1.19 * 10^{-4}, 1.46 * 10^{-4}] \\ [1.59 * 10^{-4}, 1.94 * 10^{-4}] \\ [1.19 * 10^{-4}, 1.46 * 10^{-4}] \\ [0, 0.133 * 10^{-4}] \end{pmatrix}. \quad (4.4.14)$$

On note sur la figure 4.4.5, que pour $t \in [0, 500s]$ la valeur nulle appartient à l'encadrement de l'estimation du paramètre a_{10} , ce qui signifie que le modèle \mathcal{M}_{F_0} (qui est équivalent au modèle \mathcal{M}_{F_1} avec $a_{10} = 0$) est cohérent avec les mesures. Pour $t \in [500s, 1000]$ la valeur nulle n'appartient plus à l'encadrement de l'estimation du paramètre a_{10} .

FIG. 4.4.5 – Évolution du vecteur de paramètre du modèle \mathcal{M}_{F_1}

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une démarche de contrôle de cohérence basée sur l'estimation garantie de variable de modèles non linéaires à temps continu. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les estimateurs intervalle que nous avons développés dans le chapitre 3, ainsi que sur les outils issus de l'arithmétique des intervalles présentés dans le chapitre 2. Notre démarche permet, par l'intermédiaire de l'étude de l'intersection d'un domaine initial avec un domaine estimé, d'invalider un modèle de fonctionnement afin de conclure à la présence ou non d'un défaut.

Dans cette approche, à partir du moment où l'intersection entre ces deux domaines est non vide, on conclura à la cohérence possible entre des deux régimes. Or, nous avons relevé,

à travers la dernière application présentée, que l'étude de la déviation du domaine estimé par rapport au domaine initial, pourrait constituer une source d'informations intéressante pour l'identification des défauts. Ce point établirait le lien informationnel entre les techniques proposées ici et une couche de reconfiguration dans un cadre plus général de conduite globale.

Conclusion générale et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire aux problèmes d'estimation et de contrôle de cohérence à base de techniques ensemblistes. L'objectif qui a guidé nos travaux est la mise en place d'une démarche méthodologique pour la surveillance et la détection d'anomalies des systèmes où le déterminisme des indicateurs de contrôle de cohérence est une condition *sine qua non*. Une fois placée dans un contexte ensembliste, l'évolution de chaque variable du système est représentée par une enveloppe traduisant les incertitudes internes et externes. Cette enveloppe représente le seuil au delà duquel le comportement observé représente un écart anormal par rapport au comportement nominal, et pouvant ainsi conduire à une incapacité pour accomplir les objectifs de sa mission.

Dans le premier chapitre, nous avons proposé un tour d'horizon rapide des principales techniques de détection et de diagnostic à base de modèles. Après une brève introduction des notions fondamentales et des approches à base d'estimation et de filtrage, nous avons focalisé notre étude sur les mécanismes avec lesquels chaque grande famille de méthodes aborde le problème de découplage des signaux indicateurs par rapport aux sources de perturbations et aux incertitudes de modélisation. Notre analyse a mis en évidence le fait que le problème de découplage est généralement posé et résolu au moment de la synthèse en se basant sur un critère de performances (en termes de robustesse et/ou sensibilité) à optimiser. Le mécanisme avec lequel chaque méthode traite ce problème de découplage dépend de sa capacité à prendre en compte, dans le "modèle" de synthèse, la modélisation des phénomènes perturbateurs. Cette analyse nous a permis de motiver les développements ultérieurs et de mettre en exergue nos contributions par rapport aux travaux existants.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les outils fondamentaux jugés indispensables pour la bonne compréhension de la suite de cette thèse. Ces outils permettent de manipuler et caractériser des ensembles de valeurs. Après un bref rappel du formalisme et des notions importantes relatifs à la manipulation d'ensembles, nous nous sommes intéressés à l'arithmétique des intervalles ainsi qu'aux principaux problèmes rencontrés lors de la manipulation des intervalles. Nous avons souligné le fait que l'utilisation de fonctions

d'inclusion naturelles, dont l'implémentation est aisée, est souvent déconseillée, voire inefficace, en raison du pessimisme lié au phénomène de dépendance engendré par des variables multi-occurentes. Nous avons également souligné le fait que pour réduire le pessimisme engendré par le phénomène d'enveloppement (lorsqu'il s'agit de représenter un ensemble de forme géométrique quelconque par un pavé), il est souvent souhaitable d'avoir recours au partitionnement des pavés utilisés. Nous avons enfin présenté les techniques souvent utilisées pour manipuler et caractériser de façon approchée, mais garantie, des ensembles de valeurs. Enfin, nous avons rappelé les principes de l'inversion ensembliste par arithmétique d'intervalles et de caractérisation d'ensembles par contraction.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés au problème d'estimation d'état pour des systèmes représentés par des modèles non linéaires à temps continu et incertains. Dans un premier temps, nous avons présenté deux approches de résolution garantie d'EDO incertaines, l'une basée sur une extension des modèles de Taylor aux intervalles et l'autre sur le théorème de Müller et les propriétés de monotonie. Ces approches de résolution d'EDO ont été ensuite utilisées pour développer une méthode de synthèse d'observateur fournissant des bornes minorante et majorante de l'état. Ces bornes ont été synthétisées en utilisant une approximation qLPV "garantie" basée sur l'analyse par intervalles. Enfin, nous avons illustré les différentes étapes de la méthodologie développée sur un exemple numérique.

Le quatrième chapitre a été consacré à l'élaboration de tests de cohérence pour des variables internes (état, paramètres) au système, permettant de détecter un changement interne engendré par l'apparition d'un défaut. Dans la première partie du chapitre, nous avons présenté une approche reposant sur l'utilisation des estimateurs intervalle développés dans le troisième chapitre. L'utilisation de tels estimateurs permet, par l'intermédiaire d'un gain agissant sur le retour de sortie, d'influer sur la taille du plus petit défaut détectable. Dans la seconde partie, nous avons développé une procédure de détection de rupture paramétrique basée sur les outils issus de l'arithmétique des intervalles.

Les résultats obtenus dans ce mémoire offrent des perspectives intéressantes de développements ultérieurs.

En premier lieu, les observateurs présentés dans le cadre du troisième chapitre ont été développés en se basant sur une structure de type Luenberger. L'idée étant de synthétiser un gain L , tel que les bornes minorante et majorante de l'estimation respectent des conditions de garantie et de convergence. Une direction intéressante pour des travaux futurs serait d'employer un observateur ayant une structure plus complexe, intégrant par exemple un gain dynamique, offrant ainsi plus de flexibilité dans la gestion des compromis de synthèse.

En effet, un gain dynamique permettrait de pondérer la répartition de l'erreur d'estimation dans le domaine fréquentiel. Si de tels observateurs sont utilisés pour générer des résidus intervalles pour la surveillance, il paraît pertinent de pouvoir établir les relations liant les paramètres de réglage de l'observateur aux critères de performances en diagnostic, comme par exemple le retard à la détection.

Une autre direction à développer et à formaliser concerne l'analyse de tendance paramétrique en vue de mettre en place des fonctions de pronostic. En effet, dans l'approche paramétrique, c'est le résultat de l'intersection entre un domaine initial et un domaine estimé qui permet de conclure à la cohérence entre un modèle et les mesures. Cette démarche peut être complétée par des informations supplémentaires sur le "degré" de déviation afin de suivre l'évolution de l'écart paramétrique. Ces indicateurs d'écart peuvent être calculés par la distance de Hausdorff qui permet de mesurer le degré de similitude entre ces deux ensembles.

Annexe A

Définitions des espaces et normes utilisées

Définition de l'espace \mathcal{L}_q

On note \mathcal{L}_q l'espace des fonctions f telles que :

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} |f(t)|^q dt < \infty & \text{si } q < \infty \\ f(\cdot) \text{ est essentiellement borné} & \text{si } q = \infty \end{cases} \quad (1)$$

Définition des normes

On note $\|\cdot\|_q$ l'application de \mathcal{L}_q dans \mathbb{R}^+ définie par :

$$\|f\|_q = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^q dt \right)^{1/q} & \text{si } q < \infty \\ \text{ess sup } f & \text{si } q = \infty \end{cases} \quad (2)$$

Norme 2

La norme 2 d'un signal $s(t)$, noté $\|s\|_2$, est donnée par :

$$\|s\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s^T(t)s(t) dt \right)^{1/2}, \quad (3)$$

ou encore dans le domaine fréquentiel

$$\|s\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(j\omega)s(j\omega) d\omega \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Norme e (ou norme 2 tronquée)

Sur la base de la définition de la norme 2, dans [Ding *et al.* 2000], les auteurs définissent la "norme" suivante, appelée norme 2 tronquée ou norme e . Cette "norme" est une troncature sur une fenêtre temporelle et fréquentielle des relations respectives (3) et (4).

$$\|\mathbf{s}\|_e = \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{s}^T(t)\mathbf{s}(t)dt \right)^{1/2}, \quad (5)$$

$$\|\mathbf{s}\|_e = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathbf{s}^*(j\omega)\mathbf{s}(j\omega)d\omega \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Norme \mathcal{H}_∞

Soit une fonction de transfert $T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}$ dont le signal d'entrée est \mathbf{u} et le signal de sortie \mathbf{y} . La définition de la norme \mathcal{H}_∞ est basée sur la valeur maximale du rapport de la norme 2 des deux signaux :

$$\|T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}\|_\infty = \sup_{\substack{\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2 \\ \|\mathbf{u}\|_2 \neq 0}} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}, \quad (7)$$

ou de façon similaire dans le domaine fréquentiel :

$$\|T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}\|_\infty = \sup_{\omega \geq 0} \overline{\sigma}(T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}(j\omega)). \quad (8)$$

Norme \mathcal{H}_-

Soit une fonction de transfert $T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}$ dont le signal d'entrée est \mathbf{u} et le signal de sortie \mathbf{y} . La norme \mathcal{H}_- de $T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}$ (voir par exemple [Chen et Patton 1999]) est définie par :

$$\|T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}\|_- = \inf_{\omega \in [\omega_1, \omega_2]} \underline{\sigma}(T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}(j\omega)). \quad (9)$$

Il existe également une deuxième définition de la norme \mathcal{H}_- basée sur le rapport des normes e des deux signaux :

$$\|T_{\mathbf{u}\mathbf{y}}\|_- = \inf_{\substack{\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2 \\ \|\mathbf{u}\|_e \neq 0}} \frac{\|\mathbf{y}\|_e}{\|\mathbf{u}\|_e}. \quad (10)$$

Bibliographie

- ALAMO, T., BRAVO, J. M. et CAMACHO, E. F. (2005). Guaranteed state estimation by zonotopes. *Automatica*, 41(6):1035–1043.
- ANGELI, D. et SONTAG, E. D. (2003). Monotone control systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 48(10):1684–1698.
- APKARIAN, P., BIANNIC, J.-B. et GAHINET, P. (1995a). Self scheduled h_∞ control of missile via linear matrix inequalities. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(3):532–538.
- APKARIAN, P., GAHINET, P. et BECKER, G. (1995b). Self-scheduled h_∞ control of linear parameter-varying systems : a design example. *Automatica*, 31(9):1251–1261.
- ARMENGOL, J., VEHI, J., TRAVE-MASSUYES, L. et SAINZ, M. A. (2000). Interval model-based fault detection using multiple sliding time windows. *In 4th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFEPROCESS*, pages 168–173.
- BADR, N. A., CRASSIDIS, J. L. et CHENG, Y. (2008). Convergence properties of autocorrelation-based generalized multiple-model adaptive estimation. Honolulu, Hawaii. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit.
- BASSEVILLE, M. et NIKIFOROV, I. V. (1993). *Detection of abrupt changes : theory and application*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- BEARD, R. V. (1971). *Failure Accomodation in Linear System through Self-Reorganization*. Thèse de doctorat, Massachussets Institute of Technology.
- BECIS-AUBRY, Y. (2003). «*Contribution à l'estimation ensembliste des systèmes linéaires et non linéaires*». Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, France 2003.
- BELFORTE, G., BONA, B. et CERONE, V. (1990). Parameter estimation algorithms for a set membership description of uncertainty. *Automatica*, 26(5):887–898.
- BENHAMOU, F., GOUALARD, F. and Granvilliers, L. et PUGET, J. F. (1999). Revising hull and box consistency. *In SCHREYE, D. D., éditeur : 16th International Conference on*

-
- Logic Programming (ICLP 1999)*, pages 230–244, Las Cruces, New Mexico, USA. The MIT Press.
- BENHAMOU, F., MCALLESTER, D. et HENTENRYCK, P. v. (1994). CLP (intervals) revisited. In BRUYNNOOGHE, M., éditeur : *Proceedings of the International Logic Programming Symposium*, pages 124–138. Ithaca, NY.
- BENOTHMAN, K., MAQUIN, D., RAGOT, J. et BENREJEB, M. (2007). Diagnosis of uncertain linear systems : an interval approach. *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, 1(2):136–154.
- BERGER, M. (1979). *Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères*, volume 2. Cedic : Fernand Nathan.
- BERNARD, O., G. J. L. (2004). Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*, 14(7):765–774.
- BERZ, M. et MAKINO, K. (1998). Verified integration of odes and flows using differential algebraic methods on high-order taylor models. *Reliable Computing*, 4(4):361–369.
- BLANKE, M., KINNAERT, M., LUNZE, J., STAROSWIECKI, M. et SCHRÖDER, J. (2006). *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.
- BRUNET, J., JAUME, D., LABARRÈRE, M., RAULT, A. et VERGÉ, M. (1990). *Détection et diagnostic de pannes : approche par modélisation*. Hermès.
- CARLSSON, B., SALGADO, M. et GOODWIN, G. (1988). A New Method for Fault Detection and Diagnosis. Rapport technique, EE8842, Departement of electrical engineering and computer science, Université de Newcastle, Australie.
- CENDES, T. et RATZ, D. (1997). Subdivision direction selection in interval methods for global optimization. *SIAM Journal of numerical Analysis*, 34:922–938.
- CHEN, J. et PATTON, R. J. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers.
- CHEN, J., PATTON, R. J. et LIU, G. P. (1996). Optimal residual design for fault diagnosis using multi-objective optimisation and genetic algorithms. *International Journal of Systems Science*, 27(6):567–576.
- CHISCI, L., GARULLI, A. et ZAPPA, G. (1996). Recursive state bounding by parallelotopes. *Automatica*, 32(7):1049–1055.
- CHOW, E. et WILLSKY, A. (1984). Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 29(7):603–614.

-
- CLEARY, J. C. (1987). Logical arithmetic. *Future Computing Systems*, 2(2):125–149.
- CORLISS, G. F. et RIHM, R. (1996). Validating an a priori enclosure using high-order Taylor series. *In Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics*, pages 228–238, Berlin. Akademie Verlag.
- CRASSIDIS, J. L. et JUNKINS, J. L. (2004). *Optimal estimation of dynamic systems*. Chapman & Hall/CRC.
- DARENGOSSE, C. et CHEVREL, P. (2002). Expérimentation d'un observateur h_∞ l_pv pour la machine asynchrone. *APII-Jesa, Numéro spécial. Commande et observation de la machine asynchrone - Résultats expérimentaux*, 36(5):641–655.
- DING, S. X. (2008). *Model-based Fault Diagnosis Techniques. Design Schemes, Algorithms, and Tools*. Springer, Heidelberg, Berlin.
- DING, S. X., JEINSCH, T., FRANK, P. M. et DING, E. L. (2000). A unified approach to the optimization of fault detection systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 14(7):725–745.
- DURIEU, C., POLYAK, B. et WALTER, E. (1996). Trace versus determinant in ellipsoidal outer bounding with application to state estimation. *In Proc. 13th IFAC World Congress*, pages 43–48.
- DURIEU, C., WALTER, E. et POLYAK, B. (2001). Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111(2):273–303.
- EDELMAYER, A. et BOKOR, J. (2000). Scaled H_∞ filtering for sensitivity optimization of detection filters. Budapest, Hungary. SAFEPROCESS'2000, IFAC.
- EIJGENRAAM, P. (1981). *The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic*. Numéro 144 de Stichting Mathematisch Centrum. Mathematical Centre Tracts, Amsterdam.
- FLANS, J. M. et ADROT, O. (2003). Estimation d'état sûre pour procédés non linéaires par méthodes ensemblistes : Application à un procédé biotechnologique. *Journal européen des systèmes automatisés*, 37(9):1145–1161.
- FOGEL, E. et HUANG, Y. F. (1982). On the value of information in system identification-bounded noise case. *Automatica*, 18(2):229–238.
- FRANK, P. M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results. *Automatica*, 26(3):459 – 474.
- FRANK, P. M., DING, S. X. et KÖPPEN-SELIGER, B. (2000). Current developments in the theory of FDI. pages 16–27, IFAC, Budapest, Hungary. Safeprocess'2000.

-
- GODFREY, K. (1983). *Compartmental Models and Their Application*. Academic Press, London.
- GOODWIN, G., GEVERS, M. et NINNESS, B. (1992). Quantifying the error in estimated transfer functions with application to model order selection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:913–928.
- GOUZÉ, J. L., RAPAPORT, A. et HADJ-SADOK, M. Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 133:46–56.
- HANSEN, R. E. (2004). *Global optimization using interval analysis, second edition*. CRC.
- HENRY, D. et ZOLGHADRI, A. (2005). Design and analysis of robust residual generators for systems under feedback control. *Automatica*, 41(2):251–264.
- HIRSCH, M. W. et SMITH, H. L. (2003). Competitive and cooperative systems : A mini-review. In *POSTA*, pages 183–190.
- ISERMANN, R. (1993). Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing—tutorial paper. *Automatica*, 29(4):815 – 835.
- ISERMANN, R. (2005). Model-based fault-detection and diagnosis - status and applications. *Annual reviews in control*, 29(1):75–85.
- ISERMANN, R. (2006). *Fault-diagnosis systems - An introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer, Heidelberg, Berlin.
- JACQUEZ, J. (1985). *Compartmental analysis in biology and medicine*. University of Michigan Press, 2nd édition.
- JAULIN, L. (2002). Nonlinear bounded-error state estimation of continuous time systems. *Automatica*, 38(2):1079–1082.
- JAULIN, L., KIEFFER, M., BRAEMS, I. et WALTER, E. (2001a). Guaranteed nonlinear estimation using constraint propagation on sets. *International Journal of Control*, 74(18):1772–1782.
- JAULIN, L., KIEFFER, M. L., DIDRIT, O. et WALTER, E. (2001b). *Applied interval analysis*. Springer, London.
- JAULIN, L. et WALTER, E. (1993). Set-inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4):1053–1064.
- JONES, H. L. (1973). *Failure Detection in Linear Systems*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology.
- KALMAN, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1):35–45.

-
- KAMKE, E. (1932). Zur Theorie der Systeme Gewöhnlicher Differentialgleichungen, II. *Acta Math.*, 58:57–85.
- KERR, T., INTERMETRICS, I. et CAMBRIDGE, M. A. (1980). Statistical analysis of a two-ellipsoid overlap test for real-time failure detection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(4):762–773.
- KIEFFER, M., JAULIN, L. et WALTER, E. (2002). Guaranteed recursive non-linear state bounding using interval analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16:193–218.
- KIEFFER, M. et WALTER, E. (1998). Interval analysis for guaranteed nonlinear parameter estimation. *MODA*, pages 115–125.
- KIEFFER, M. et WALTER, E. (2006). Guaranteed nonlinear state estimation for continuous-time dynamical models from discrete-time measurements. Toulouse. ROCOND.
- KLETTING, M., RAUH, M., ASCHEMANN, H. et P., H. E. (2006). Interval observer design for nonlinear systems with uncertain time-varying parameters. Miedzyzdroje, Poland. 12th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics.
- KREINOVICH, V., LAKEYEV, A., ROHN, J. et KAHL, P. (1998). *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. Kluwer.
- LAVIGNE, L., ZOLGHADRI, A., GOUPIL, P. et SIMON, P. (2008). Robust and early detection of oscillatory failure case for new generation airbus. Honolulu, Hawaii. AIAA GNC'08.
- LEBBAH, Y. (1999). *Contribution à la résolution de contraintes par consistance forte*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.
- LEWIS, F. L. (1986). *Optimal estimation*. Wiley New York.
- LIU, J. S. et CHEN, R. (1998). Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems. *Journal of the American Statistical Association*, pages 1032–1044.
- LJUNG, L. (1999). *System identification : theory for the user*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 2nd édition.
- LOHNER, R. J. (1987). Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems. In KAUCHER, E., KULISCH, U. et ULLRICH, C., éditeurs : *Computer Arithmetic : Scientific Computation and Programming Languages*, Computer Science, Stuttgart, pages 255–286. Wiley-Teubner.
- LOHNER, R. J. (1998). *CEinschließung der Lösung gewöhnlicher Anfangs- und Randwertaufgaben und Anwendungen*. Thèse de doctorat, Universität Karlsruhe.

-
- LUENBERGER, D. G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Transaction on Military Electronics*, 8(2):74–80.
- LUNZE, J., STEFFEN, T. et RIEDEL, U. (2003). Fault diagnosis of dynamical systems based on state-set observers. Washington D.C., USA. 14th International Workshop on Principles of Diagnosis, DX'03, Bridge Day at SafeProcess - DX'03.
- MAKSAROV, D. et NORTON, J. (2002). Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(6).
- MANGOUBI, R. S. (1998). *Robust Estimation and Failure Detection : A Concise Treatment*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.
- MARCELLI, C. et RUBBIONI, P. (1997). A new extension of classical müller's theorem. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 28(11):1759–1767.
- MARCOS, A. et BALAS, J. (2004). Development of linear-parameter-varying models for aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(2).
- MEHRA, R. (1970). On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(2):175–184.
- MESLEM, N., RAMDANI, N. et CANDAU, Y. (2008). Interval observers for uncertain nonlinear systems. application to bioreactors. pages 9667–9672, Seoul, Korea. 17th IFAC World Congress.
- MOISAN, M., BERNARD, O. et GOUZÉ, J. L. (2009). Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45(1):291–295.
- MOORE, R. E. (1962). *Interval arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital computing*. Thèse de doctorat, Stanford University, Stanford-CA.
- MOORE, R. E. (1966). *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- MOORE, R. E. (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, PA.
- MÜLLER, M. (1926). Über das fundamental theorem in der theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen. *Math. Z*, 26:619–645.
- NEDIALKOV, N. (1999). *Computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation*. Thèse de doctorat, University of Toronto.
- NEDIALKOV, N. S. et JACKSON, K. R. (1999). An interval hermite-obreschkoff method for computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation. *Reliable Computing*, 5:289–310.

-
- NEDIALKOV, N. S., JACKSON, K. R. et PRYCE, J. D. (2001). An effective high-order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an ivp for an ode. *Reliable Computing*, 7(6):449–465.
- NEUMAIER, A. (1990). *Interval methods for systems of equations*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 37. Cambridge University Press, Cambridge.
- NEUMAIER, A. (2003). Taylor forms - use and limits. *Reliable Computing*, 9:43–79.
- NØRGAARD, M., POULSEN, N. K. et RAVN, O. (2000). New developments in state estimation for nonlinear systems. *Automatica*, 36(11):1627–1638.
- PATTON, R. J. (1997). Fault-tolerant control : the 1997 situation. Kingston Upon Hull,UK. SAFEPROCESS'97, IFAC Symp.
- PERALTA-CABEZAS, J. L., TORRES-TORRITI, M. et GUARINI-HERMANN, M. (2008). A comparison of Bayesian prediction techniques for mobile robot trajectory tracking. *Robotica*, 26(05):571–585.
- PITT, M. K. et SHEPHARD, N. (1999). Filtering Via Simulation : Auxiliary Particle Filters. *Journal of the American Statistical Association*, 94(446):590–591.
- PLANCHON, P. (2007). *Guaranteed Diagnosis of Uncertain Linear Systems Using State Set Observation*. Logos-Verl, Berlin.
- PLOIX, S. (1998). *Diagnostic des systèmes incertains : l'approche bornante*. Thèse de doctorat, Université de Nancy.
- POLYAK, B. T., NAZIN, S. A., DURIEU, C. et WALTER, E. (2004). Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*, 40(7):1171–1179.
- RAGOT, J., MAQUIN, D. et GENTIL, S. (2007). *Diagnostic fondé sur un modèle quantitatif*, chapitre 6 (Supervision des procédés complexes), pages 219–278. Hermès Science Publications, Paris.
- RAÏSSI, T., RAMDANI, N. et CANDAU, Y. (2003a). Parameter estimation for non-linear continuous-time systems in a bounded error context. pages 2240–2245, Hawaii. 42nd IEEE Conference on Decision and Control.
- RAÏSSI, T., RAMDANI, N. et CANDAU, Y. (2003b). State estimation for non-linear continuous systems in a bounded error context. pages 1725–1730, Rotterdam. 13th IFAC Symposium on System Identification, SYSID-2003.
- RAÏSSI, T., RAMDANI, N. et CANDAU, Y. (2004). Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. *Automatica*, 40: 1771–1777.

-
- RALL, L. B. et CORLISS, G. F. (2009). Automatic differentiation : Point and interval. *In Encyclopedia of Optimization*, pages 165–170.
- RAMBEAUX, F. (2001). *Génération et évaluation de résidus pour le diagnostic de systèmes incertains : approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, Université de Nancy.
- RANK, M. L. et NIEMANN, H. H. (1999). Norm based design of fault detectors. *International Journal of Control*, 72(9):773–783.
- RAPAPORT, A. et GOUZÉ, J. L. (1999). Practical observers for uncertain affine output injection systems. *Proceedings of the European Control Conference*.
- RATZ, D. (1992). *Automatische Ergebnisverifikation bei globalen Optimierungsproblemen*. Thèse de doctorat, Universität Karlsruhe.
- RAÏSSI, T. (2004). *Méthodes ensemblistes pour l'estimation d'état et de paramètre*. Thèse de doctorat, Université Paris XII Val de Marne.
- REIF, K. et UNBEHAUEN, R. (1999). The extended Kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(8):2324–2328.
- RIHM, R. (1994). Interval methods for initial value problems in odes. *In* HERZBERGER, J., éditeur : *Topics in Validated computations*, pages 173–208. Elsevier Science B.V.
- SADEGHI, B. et MOSHIRI, B. (2007). Second-order EKF and Unscented Kalman Filter Fusion for Tracking Maneuvering Targets. *In IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, 2007. IRI 2007*, pages 514–519.
- SCHWEPPE, F. (1968). Recursive state estimation : unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 13(1):22–28.
- SHAMMA, J. et CLOUTIER, J. (1993). Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(2): 256–261.
- SHAMMA, J. S. et ATHANS, M. (1990). Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 35(8):898–907.
- SHAMMA, J. S. et ATHANS, M. (1992). Gain scheduling : Potential hazard and possible remedies. *IEEE Control Syst. Mag.*, 12:101–107.
- SMITH, H. L. (1995). Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems. *In* SOCIETY, A. M., éditeur : *Mathematical Surveys and Monographs*, volume 41. Providence, Rhode Island.
- SUNAGA, T. (1958). Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. *In* KONDO, K., éditeur : *RAAG Memoirs*, volume 2, pages 29–46. Ggujutsu Bunken Fukuy-kai, Tokyo, Japan.

-
- UHL, R. (1996). An extension of max müller's theorem to differential equations in ordered banach spaces. *Funkcialaj Ekvacioj*, 39(2):203–216.
- VIDEAU, G., RAÏSSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2008). Contrôle d'intégrité paramétrique par satisfaction de contraintes : Cas des systèmes non linéaires à temps continu. Bucarest, Roumaine. CIFA.
- VIDEAU, G., RAÏSSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2009a). Guaranteed state estimation for nonlinear continuous-time systems based on qlpv transformations. Budapest, Hungary. European Control Conference (ECC'09).
- VIDEAU, G., RAÏSSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2009b). Set-observer design for consistency checks of nonlinear systems. Barcelona, Spain. Safeprocess09.
- WALTER, E. et KIEFFER, M. (2003). Interval analysis for guaranteed nonlinear parameter estimation. pages 259–270, Rotterdam. SYSID.
- WALTER, W. (1970). *Differential and Integral Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- WALTER, W. (1997). Differential inequalities and maximum principles : theory, new methods, and applications. *Nonlinear Anal.*, 30(9):4695–4711.
- WALTZ, D. L. (1975). Generating semantic descriptions from drawings of scenes with shadows. In WINSTON, P. H., éditeur : *The psychology of computer vision*, pages 19–91. McGraw-Hill, New York.
- WAN, E. (2006). Sigma-Point Filters : An Overview with Applications to Integrated Navigation and Vision Assisted Control. In *2006 IEEE Nonlinear Statistical Signal Processing Workshop*, pages 201–202.
- WAN, E. et VAN DER MERWE, R. (2000). The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In *The IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC*, pages 153–158.
- WENGERT, R. (1964). A simple automatic derivative evaluation program. *ACM*, 7:463–464.
- WOLFF, F., KRUTINA, P. et KREBS, V. (2008). Robust Consistency-Based Diagnosis of Nonlinear Systems by Set Observation. pages 10124–10129, Seoul, Korea. 17th IFAC World Congress.
- ZOLGHADRI, A. (1996). An algorithm for real-time failure detection in kalman filters. *IEEE transactions on automatic control*, 41(10):1537–1539.
- ZOLGHADRI, A., GOETZ, C., BERGEON, B. et DENOIZE, X. (1998). Integrity monitoring of flight parameters using analytical redundancy. In *Control'98. UKACC International Conference on (Conf. Publ. No. 455)*, pages 1534–1539.

ZOLGHADRI, A., MONSION, M., HENRY, D., MARCHIONINI, C. et PETRIQUE, O. (2004).
Development of an operational model-based warning system for tropospheric ozone concentrations in Bordeaux, France. *Environmental Modelling and Software*, 19(4):369–382.

Résumé : Cette thèse traite des problèmes d'estimation et de contrôle de cohérence par l'utilisation des techniques ensemblistes. L'objectif est la mise en place d'une démarche méthodologique pour la surveillance et la détection d'anomalies au sein des systèmes où le déterminisme des indicateurs relatifs à l'état de santé du système est une condition sine qua non. Une fois placé dans un contexte ensembliste, l'évolution de chaque variable du système est représentée par une enveloppe traduisant les incertitudes internes et externes ; cette enveloppe représente le seuil au delà duquel le comportement observé représente un écart anormal par rapport à son comportement nominal, et pouvant conduire à une incapacité pour accomplir les objectifs de sa mission. Les techniques développées sont appliquées à un procédé hydraulique de laboratoire .

Mots clés : Résidu intervalle ; test de cohérence ; systèmes non linéaires à temps continu ; approximation qLPV garantie ; estimation ensembliste ; coopérativité.

Abstract : This work deals with the development of set-membership methods for set estimation and consistency checks for nonlinear continuous-time systems. The main objective is to setup a methodology for fault detection and isolation for the systems where the determinism of faults indicators on the health system is a necessary condition. Once placed in a set-membership framework, the evolution of each variable is represented by an envelope reflecting the internal and external uncertainties. This envelope corresponds to the threshold beyond which the observed behavior is an abnormal discrepancy over its nominal behavior, thus preventing the accomplishment the mission objectives. The proposed methods are applied on a hydraulic laboratory process.

Keywords : Interval residual ; consistency checks ; observer design ; nonlinear continuous-time systems ; guaranteed qLPV approximation ; cooperativity.