HAL
open science

Action spectrale en géométrie non commutative et calcul pseudodifférentiel global

Cyril Levy

To cite this version:

Cyril Levy. Action spectrale en géométrie non commutative et calcul pseudodifférentiel global. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2009. Français. NNT : . tel-00413717

HAL Id: tel-00413717

https://theses.hal.science/tel-00413717v1

Submitted on 5 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Provence, Aix-Marseille I

THÈSE

Présentée par

Cyril LEVY

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Spécialité: Physique Théorique, Physique Mathématique

École Doctorale: Physique et Science de la Matière (ED 0352)

Titre:

Action Spectrale en Géometrie Non Commutative et Calcul Pseudodifférentiel Global

Soutenue publiquement le 12 Juin 2009

Membres du jury :

Moulay-Tahar Benameur, Professeur à l'Université Paul Verlaine, Metz
Ludwik Dąbrowski, Professeur à SISSA, Trieste (Rapporteur)
Bruno Iochum, Professeur à l'Université de Provence, Marseille (Directeur de thèse)
Sylvie Paycha, Professeur à l'Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (Présidente, Rapporteur)
Michael Puschnigg, Professeur à l'Université de la Méditerranée, Marseille
Thomas Schücker, Professeur à l'Université de Provence, Marseille

Centre de Physique Théorique
CNRS–UMR 6207

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Bruno Iochum, mon directeur de thèse, qui m'a conseillé, soutenu et beaucoup appris, le long de ces trois années de thèse. Ce fut un honneur et un plaisir de travailler sous sa direction. Je dois aussi beaucoup à Andrzej Sitarz et Driss Essouabri, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer au cours de cette thèse. Tous trois ont su me faire confiance et je tiens à leur exprimer ma plus sincère gratitude.

Je voudrais aussi remercier les nombreuses personnes, du CPT et de l'IML, qui m'ont aidé à progresser par des discussions stimulantes et intéressantes. Je remercie plus particulièrement Thomas Krajewski, Thomas Schücker, Michael Puschnigg, Christoph Stephan, Jan Jureit, Serge Lazzarini, Mathieu Beau, Baptiste Savoie, Jean-Philippe Michel, Pierre Duclos et Antony Wassermann.

Un grand merci aussi aux chercheurs que j'ai pu rencontrer au cours de séminaires et conférences et qui ont été une source de connaissances, de conseils et de suggestions très utiles. Je suis notamment très reconnaissant envers Sylvie Paycha, Jean-Marie Lescure, Gerd Grubb, Ryszard Nest, Moulay-Tahar Benameur, Salah Mehdi, Giovanni Landi, Ludwik Dąbrowski, Pierre Martinetti, Victor Gayral, Fabien Vignes-Tourneret, Fyodor Sukochev, Simon Brain, André Unterberger, et Rémi Léandre.

J'ai pu bénéficier au CPT d'excellentes conditions de travail. En particulier, j'adresse mes remerciements à l'ensemble du personnel administratif.

Table des matières

Introduction **9**

1 Action spectrale sur les triplets spectraux **21**
1.1 Introduction 21
1.2 Intégration non commutative sur un triplet spectral 21
1.2.1 Opérateurs pseudodifférentiels sur triplets spectraux 21
1.2.2 Fonctions zêta, intégrale non commutative et action spectrale 25
1.3 Résidus de ζ_{D_A} pour un triplet spectral avec spectre de dimension simple 27
1.4 Intégrales non commutatives et tadpoles 33

2 Prolongements holomorphes et résidus de séries de fonctions zêta **37**
2.1 Résidus de séries et intégrales 37
2.2 Holomorphie de certaines séries 39
2.2.1 Démonstration du Lemme 2.2.3 pour $i = 1$: 41
2.2.2 Démonstration du Lemme 2.2.3 pour $i = 0$: 43
2.2.3 Démonstration du point $(i.2)$ du Théorème 2.2.2 : 43
2.2.4 Démonstration du point (iii) du Théorème 2.2.2: 43
2.2.5 Commutation entre somme et résidu 45
2.3 Calculs de résidus de fonctions zêta 47
2.4 Prolongement méromorphe d'une classe de fonctions zêta 49
2.4.1 Une famille de polynômes 49
2.4.2 Résidus d'une classe de fonctions zêta 50

3 Action spectrale sur le tore non commutatif **53**
3.1 Introduction 53
3.2 Le tore non commutatif 54
3.2.1 Notations 54
3.2.2 Noyaux et spectre de dimension 56
3.2.3 Calculs d'intégrales non commutatives 58
3.3 L'action spectrale 62
3.3.1 Calculs de $⨍$ 64
3.3.2 Démonstration du résultat principal 80

4 Action spectrale sur $SU_q(2)$ 81
4.1 Introduction . . . 81
4.2 Action spectrale en dimension 3 . . . 82
4.2.1 Tadpoles et cocycles . . . 82
4.2.2 Terme invariant d'échelle de l'action spectrale . . . 84
4.3 Le triplet $SU_q(2)$ . . . 86
4.3.1 Le triplet spectral . . . 86
4.3.2 Les intégrales non commutatives . . . 90
4.3.3 Le tadpole . . . 92
4.4 Opérateur de réalité action spectrale sur $SU_q(2)$ . . . 93
4.4.1 Action spectrale en dimension 3 avec $[F, \mathcal{A}] \in OP^{-\infty}$ . . . 93
4.4.2 Action spectrale sur $SU_q(2)$: résultat principal . . . 94
4.4.3 Composantes équilibrées et base de Poincaré–Birkhoff–Witt de $\mathcal{A}$ . . . 95
4.4.4 L'opérateur de réalité J sur $SU_q(2)$ . . . 96
4.4.5 L'algèbre $C^\infty(SU_q(2))$ . . . 101
4.4.6 Intégrales non commutatives avec opérateur de réalité et 1-formes sur $SU_q(2)$ 102
4.4.7 Démonstration du Théorème 4.4.3 et corollaires . . . 105
4.5 Calcul différentiel sur $SU_q(2)$ et applications . . . 107
4.5.1 Le signe de $\mathcal{D}$ . . . 107
4.5.2 L'idéal $\mathcal{R}$ . . . 109
4.6 Exemples d'action spectrale . . . 116
4.7 La sphère commutative $\mathbb{S}^3$ . . . 117
4.7.1 Translation de l'opérateur de Dirac . . . 118
4.7.2 Tadpole et action spectrale sur $\mathbb{S}^3$ . . . 119
4.8 Appendice . . . 120

5 Tadpoles et triplets spectraux commutatifs 127
5.1 Introduction . . . 127
5.2 Tadpoles et variétés spinorielles compactes avec bord . . . 128
5.3 Triplets spectraux commutatifs . . . 133
5.3.1 Géométrie commutative . . . 133
5.3.2 Absence de tadpole . . . 134
5.3.3 Annulation de certaines intégrales non commutatives . . . 134

6 Calcul pseudodifférentiel global sur variétés avec linéarisation 145
6.1 Introduction . . . 145
6.2 Variétés avec linéarisation et espaces de base . . . 145
6.2.1 Application exponentielle, définitions et notations . . . 145
6.2.2 Transport parallèle sur un fibré hermitien . . . 147
6.2.3 Géométrie de type $\mathcal{O}_M$ et S_σ . . . 147
6.2.4 Espaces de fonctions et de distributions de base . . . 152
6.2.5 Opérateurs et espaces de Schwartz . . . 154
6.2.6 Transformation de Fourier . . . 156
6.3 Linéarisation et application symboles . . . 157
6.3.1 Les difféomorphismes Φ_λ, Υ_t . . . 157
6.3.2 $\mathcal{O}_M$-linéarisations . . . 159

6.3.3 Applications symboles et λ-quantification 160
6.3.4 Produit de Moyal 161
6.4 Calcul symbolique des opérateurs pseudodifférentiels 162
6.4.1 Symboles 162
6.4.2 Amplitudes et opérateurs associés sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ 166
6.4.3 S_σ-linéarisations 173
6.4.4 Opérateurs pseudodifférentiels 177
6.4.5 Lien avec le calcul pseudodifférentiel standard sur $\mathbb{R}^n$ et continuité L^2 . . 178
6.4.6 Composition des opérateurs pseudodifférentiels 179
6.5 Exemples 192
6.5.1 Une famille de S_σ-linéarisations sur l'espace euclidien 192
6.5.2 S_1-géométrie du plan hyperbolique 194

Conclusion **199**

Introduction

Cette thèse constitue un recueil des travaux de recherche que j'ai effectués ces trois dernières années en collaboration avec Driss Essouabri, Bruno Iochum et Andrzej Sitarz.

La géométrie non commutative est un vaste domaine des mathématiques dont l'objet est la généralisation de l'ensemble des concepts apparaissant en géométrie classique. Plus particulièrement, à l'aide d'un formalisme issu de l'analyse fonctionnelle, de la théorie des algèbres d'opérateurs, de la théorie spectrale et de la géométrie spinorielle, la géométrie non commutative généralise notamment les concepts d'espace topologique localement compact, de variété riemannienne orientée compacte à spin et les calculs différentiels et intégraux de la géométrie différentielle. Au-delà de l'intérêt purement mathématique de la géométrie non commutative, il existe des motivations physiques profondes qui poussent les physiciens théoriciens à utiliser ces concepts pour décrire les éléments fondamentaux de la physique (l'espace-temps et les champs). Plus spécifiquement, la géométrie non commutative apparaît comme un cadre mathématique particulièrement adapté à la formulation des concepts quantiques et des processus de quantification.

Il est possible de considérer que la géométrie non commutative (ou tout au moins sa composante topologique) est née lorsqu'a été établi le théorème suivant (premier théorème de Gelfand–Naimark) : toute C^*-algèbre commutative unifère est isométriquement isomorphe à la C^*-algèbre des fonctions continues sur un compact, à savoir l'espace des caractères sur l'algèbre. Étant donné que toute l'information topologique d'un espace est contenue dans l'ensemble des fonctions continues sur cet espace, on peut constater que la notion de C^*-algèbre unifère permet de généraliser la notion d'espace topologique compact. La généralisation non commutative nous fait donc changer de point de vue : ce n'est plus l'ensemble des points (l'espace topologique) qui est fondamental, mais plutôt l'ensemble des fonctions sur l'ensemble des points.

Ce théorème de Gelfand–Naimark a été le point de départ de la géométrie non commutative. À partir de ce résultat fondamental, il a été possible d'étendre la généralisation au-delà des concepts purement topologiques et de construire une véritable géométrie riemannienne non commutative avec ses propres versions non commutatives des notions classiques de calcul différentiel, de calcul intégral, de fibré vectoriel, de mesure, de variétés riemanniennes à spin, etc. Ce travail colossal a été réalisé principalement par Alain Connes [26–30].

Les deux aspects de la géométrie non commutative (non-commutativité et "perte" de la notion de point) ne sont pas sans rappeler la structure fondamentale de la physique quantique. En effet, en physique quantique, les observables ne commutent pas forcément et l'évaluation $f(x)$ d'une observable f en un point x, n'est pas définie. En revanche, la notion d'observable existe toujours

et $x(f)$ a un sens, pourvu que x soit un état, c'est à dire l'équivalent non commutatif du caractère (du point) pouvant évaluer les observables f.

Cette ressemblance frappante entre la géométrie non commutative et la structure de la physique quantique n'est pas anodine et constitue même la source principale qui a motivé le développement de la géométrie non commutative et son application en physique. En particulier, la géométrie non commutative fournit les concepts permettant d'appliquer l'idée fondamentale de la non-commutativité des observables à l'espace-temps lui-même, donnant par là même une de ses motivations fondamentales à la physique.

Les deux théories des interactions fondamentales, à savoir la théorie quantique des champs (modèle standard) pour les interactions électrofaibles et fortes, et la relativité générale pour l'interaction gravitationnelle, n'utilisent pas le même formalisme (la première est quantique, la seconde est classique) et ne voient pas l'espace-temps de la même façon (celui-ci est fixe et minkowskien pour la première, et dynamique pour la seconde). Ces différences fondamentales ne sont pas gênantes pour l'étude des phénomènes favorisant l'interaction gravitationnelle devant les autres ou réciproquement, car ces théories ont chacune un grand succès expérimental dans leur domaine d'application. Cependant, pour l'étude des phénomènes mettant manifestement en jeu toutes les interactions (objets compacts, trous noirs, big-bang), il est nécessaire de rendre compatible ces deux théories, et de les réunir sous un même formalisme. L'idée généralement poursuivie par les théoriciens consiste à généraliser le formalisme de la théorie quantique des champs à la gravitation, autrement dit, réaliser une gravitation quantique. La poursuite de cet objectif s'est développée à travers plusieurs approches différentes, dont notamment la théorie des cordes, qui utilise une augmentation du nombre de dimensions, dont certaines sont compactifiées, et la théorie de la gravité quantique à boucle, qui utilise une structure en "spin foam" pour l'espace-temps sans utiliser de métrique spatio-temporelle en "background" comme le fait la théorie des cordes. Aucune de ces théories n'a reçu de confirmation expérimentale, les prédictions théoriques étant elles-mêmes difficiles.

L'approche suggérée par la géométrie non commutative consiste à utiliser une généralisation non commutative de la variété lorentzienne modélisant l'espace-temps. En introduisant la non-commutativité au niveau même de la structure de l'espace-temps, cette approche permet d'appréhender l'impossibilité de la continuité de l'espace-temps suggérée par la mécanique quantique et la limite intrinsèque que constitue la longueur de Planck $l_p = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33}$ cm. Cette approche a notamment permis d'unifier, au niveau classique, les trois interactions du modèle standard avec la gravitation, et d'interpréter géométriquement le mécanisme de Higgs en physique des particules. L'objet central dans l'interface entre la GNC et la physique fondamentale est celui de triplet spectral, généralisation non commutative de la notion de variété riemannienne à spin, point de départ naturel pour l'élaboration de théories physiques. En considérant un triplet spectral dit "presque commutatif", c'est-à-dire un produit d'un triplet spectral commutatif (variété riemannienne compacte, modélisant l'espace-temps "continu") avec un triplet spectral de dimension nulle (une algèbre matricielle), on peut, à l'aide d'une fonctionnelle d'action particulière sur le produit obtenu, appelée action spectrale de Chamseddine–Connes, retrouver le modèle standard et la relativité générale. Plus précisément, l'action spectrale $S = \operatorname{Tr} \Phi(\mathcal{D}/\Lambda)$ permet d'unifier au niveau classique les interactions électro-faible, forte et gravitationnelle [17, 21–25, 33, 37, 86, 87, 131, 136]. Elle est définie à partir du spectre d'un opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ et correspond au nombre des valeurs propres de l'opérateur de Dirac inférieures ou égales à une certaine échelle de masse Λ. En procé-

dant à une fluctuation de la métrique, c'est-à-dire, au niveau algébrique, à une transformation de jauge généralisée au groupe des unitaires de l'algèbre du triplet spectral, il est possible d'obtenir le Lagrangien du modèle standard couplé au Lagrangien gravitationnel d'Einstein–Hilbert, en développant cette fonctionnelle d'action en puissances de Λ.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à certaines questions mathématiques associées au calcul d'action spectrale sur certains espaces non commutatifs tels que le tore non commutatif et la 3-sphère non commutative $SU_q(2)$. Nous nous sommes aussi intéressés à l'existence de tadpoles (termes linéaires associés au potentiel A de la fluctuation métrique dans l'action spectrale) dans le cas de géométries riemanniennes commutatives et à la construction d'un calcul symbolique global générant un produit de Wey–Moyal sur les sections rapidement décroissantes d'un fibré d'une variété avec linéarisation. Dans tous ces travaux, l'outil fondamental a été le calcul pseudodifférentiel, qu'il soit abstrait (sur un triplet spectral quelconque), ou symbolique (sur les variétés).

Cette thèse est divisée en six parties. Voici un résumé de chacune de ces parties :

1. Action spectrale sur triplets spectraux

Ce chapitre, ainsi que les deux chapitres suivant, a fait l'objet de la publication *Spectral action on noncommutative torus* [53], qui est un travail en collaboration avec Driss Essouabri, Bruno Iochum et Andrzej Sitarz.

Un triplet spectral est la donnée d'une algèbre involutive $\mathcal{A}$ représentée fidèlement par des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un opérateur autoadjoint $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{H}$ à résolvante compacte. On demande d'autre part que les commutateurs de $[\mathcal{D}, \mathcal{A}]$ soient bornés. Afin de pouvoir construire un calcul pseudodifférentiel et une théorie de champ non commutative, il est utile d'introduire des hypothèses supplémentaires sur le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. On dit notamment que le triplet est de dimension n si les valeurs singulières $(\lambda_j)_j$ de l'opérateur $\mathcal{D}$ sont du type $\lambda_j = \mathcal{O}(j^{-1/n})$ et qu'il est régulier si $\mathcal{A}$ et $[\mathcal{D}, \mathcal{A}]$ sont dans $\cap_k \operatorname{Dom} \delta^k$, où $\delta(T) := [|\mathcal{D}|, T]$ (c'est à dire, qu'il est possible de "dériver" tout élément de l'algèbre). Afin d'avoir une théorie contenant un opérateur de conjugaison de charge, il est nécessaire d'introduire une notion de structure réelle sur le triplet spectral: il s'agit d'un opérateur anti-unitaire J qui commute ou anticommute avec $\mathcal{D}$, selon la dimension du triplet: $\mathcal{D}J = \varepsilon J \mathcal{D}$, avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Dans cet environnement, les bosons de jauge sont vus comme des fluctuations internes de l'opérateur de Dirac (c'est-à-dire, au niveau classique, de la métrique): $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_A := \mathcal{D} + A + \varepsilon J A J^{-1}$, où ici A est une 1-forme autoadjointe, c'est à dire une combinaison linéaire d'opérateurs du type $a[\mathcal{D}, b]$, où a et b sont des éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Étant donné un triplet régulier $(A, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ avec structure réelle J, un point fondamental pour faire le lien avec la physique, est d'obtenir une fonctionnelle d'action. Le principe de l'action spectrale de A. Chamseddine et A. Connes dit que la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) := \operatorname{Tr}\big(\Phi(\mathcal{D}_A/\Lambda)\big)$$

où Φ est une fonction de cut-off et Λ un paramètre d'échelle de masse, est la fonctionnelle fondamentale qui peut être utilisée à la fois au niveau classique pour comparer différents espaces géométriques et au niveau quantique dans la formulation par intégrale fonctionnelle, après rotation de Wick à partir de la signature euclidienne.

Afin de pouvoir calculer précisément cette fonctionnelle en fonction de A et en retirer le maximum d'information, il apparait fondamental de pouvoir développer un calcul pseudodifférentiel abstrait sur le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$.

En posant $D := \mathcal{D} + P_0$, où P_0 est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} \mathcal{D}$, et

$$\begin{aligned} OP^0 &:= \{T \,:\, t \mapsto F_t(T) \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big)\}, \\ OP^\alpha &:= \{\, T \,:\, T|D|^{-\alpha} \in OP^0 \,\}, \end{aligned}$$

où $F_t(T) := e^{it|\mathcal{D}|}\, T\, e^{-it|\mathcal{D}|}$, on peut introduire la définition suivante des opérateurs pseudodifférentiels, qui forment une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée, en tenant compte à la fois de la valeur absolue de l'opérateur de Dirac, et de la structure réelle J :

Définition. Soit $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ l'algèbre générée par $\mathcal{A}$, $J\mathcal{A}J^{-1}$, $\mathcal{D}$ et $|\mathcal{D}|$. Un opérateur pseudodifférentiel est un opérateur T tel qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}_0$, $P \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $R \in OP^{-N}$ tels que $P\, D^{-2p} \in OP^d$ et

$$T = P\, D^{-2p} + R\,.$$

Il se trouve que si le triplet spectral est *simple*, c'est dire si les fonctions $s \mapsto \zeta_D^P(s) := \operatorname{Tr}(P|D|^{-s})$, où P est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre zéro (la structure réelle J étant prise en compte), sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ avec uniquement des pôles simples, alors la fonctionnelle suivante (appelée intégrale non commutative)

$$⨍ P := \operatorname{Res}_{s=0} \operatorname{Tr} P|D|^{-s}$$

est une trace sur l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels. Etant donné qu'un développement du type "noyau de la chaleur" (voir par exemple [37, Theorem 1.145]) implique

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) \;=\; \sum_{0<k\in Sd^+} \Phi_k\, \Lambda^k ⨍ |D_A|^{-k} + \Phi(0)\, \zeta_{D_A}(0) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}),$$

où $\Phi_k = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)\, t^{k/2-1}\, dt$ et Sd^+ est la partie strictement positive du spectre de dimension de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ (ensemble des pôles des fonctions ζ_D^P), la principale difficulté est le calcul des termes $⨍ |D_A|^{-k}$, $\zeta_{D_A}(0)$. En utilisant le calcul pseudodifférentiel précédent et le fait que l'intégrale non commutative est nulle sur l'espace des opérateurs dans $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, on peut alors établir les résultats suivants, en notant $\widetilde{A} := A + \varepsilon JAJ^{-1}$, $X := \{\, \widetilde{A}, \mathcal{D} \,\} + \widetilde{A}^2$, $\nabla(T) := [\mathcal{D}^2, T]$, $\varepsilon(T) := \nabla(T) D^{-2}$, $g(s,r) := \binom{s/2}{r}$:

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q} ⨍ (\widetilde{A} D^{-1})^q\,,$$

$$⨍ |D_A|^{-(n-k)} = ⨍ |D|^{-(n-k)} + \sum_{p=1}^{k} \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{k-p} \operatorname*{Res}_{s=n-k} h(s,r,p)\, \operatorname{Tr}\big(\varepsilon^{r_1}(Y) \cdots \varepsilon^{r_p}(Y) |D|^{-s}\big)\,,$$

$$h(s,r,p) := (-s/2)^p \int_{0\le t_1 \le \cdots \le t_p \le 1} g(-st_1, r_1) \cdots g(-st_p, r_p)\, dt\,,$$

$$Y \sim \sum_{p=1}^{N} \sum_{k_1,\cdots,k_p=0}^{N-p} \frac{(-1)^{|k|_1+p+1}}{|k|_1+p} \nabla^{k_p}(X \nabla^{k_{p-1}}(\cdots X \nabla^{k_1}(X) \cdots)) D^{-2(|k|_1+p)} \mod OP^{-N-1}\,.$$

2. Prolongements holomorphes et résidus de séries de fonctions zêta

Le calcul des intégrales non commutatives précédentes fait intervenir des termes du type JAJ^{-1}. Il en résulte que nous sommes amenés à étudier, sur le tore, des résidus de séries de fonctions zêta pondérées par des suites rapidement décroissantes et faisant intervenir une phase dépendante de la pondération. Plus précisément, nous avons à étudier du point de vue de l'analyse complexe, les fonctions du type

$$g(s) := \sum\nolimits_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q} b(l)\, f_{\Theta\,\sum_{i=1}^q \varepsilon_i l_i}(s)$$

où $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $b \in \mathcal{S}((\mathbb{Z}^n)^q)$, $f_a(s) := \sum'_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{|k|^s}\, e^{2\pi i k.a}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et P un polynôme homogène de degré d. Il apparaît alors que nous pouvons connaitre précisément les pôles de ces fonctions et calculer précisément les résidus correspondants si nous faisons une hypothèse reliée à la théorie de l'approximation diophantienne sur la matrice de déformation Θ. Plus exactement, on établit que si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice diophantienne, la fonction précédente g est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec au plus un pôle simple en $s = d + n$. Le résidu en ce pôle est (Théorème 2.2.2)

$$\operatorname*{Res}_{s=d+n} g(s) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q} b(l) \operatorname*{Res}_{s=d+n} f_{\Theta\,\sum_{i=1}^q \varepsilon_i l_i}(s) = \big(\sum_{l\in\mathcal{Z}} b(l)\big) \int_{u\in S^{n-1}} P(u)\, dS(u)$$

où $\mathcal{Z} := \{l \in (\mathbb{Z}^n)^q \ : \ \sum_{i=1}^q \varepsilon_i l_i = 0\}$.

3. Action spectrale sur le tore non commutatif

Nous avons appliqué ces résultats au tore non commutatif. Il s'agit du triplet spectral non commutatif le plus simple possible. Il est basé sur l'algèbre $C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ représentée par des fonctions rapidements décroissantes du type $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_l U_l$ où $(a_l) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ et les éléments U_l sont des unitaires vérifiant la loi de commutation

$$U_l U_k = e^{-i\, l\cdot\Theta k} U_k U_l$$

où Θ est une matrice antisymétrique de déformation. L'opérateur de Dirac est de la forme $\mathcal{D} = -i\gamma^\mu \delta_\mu$, où les γ^μ sont les matrices gamma usuelles agissant sur $\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$ et $\delta_\mu(U_k) := ik_\mu U_k$. La fonctionnelle $\tau(a) := a_0$ où $a := \sum_l a_l U_l$ génère un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de type GNS à partir duquel un triplet spectral réel régulier de dimension n peut être construit. Finalement, nous obtenons grâce aux résultats du chapitre 2, le théorème suivant:

Théorème. *Si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice réelle antisymétrique diophantienne, alors le tore non commutatif (avec structure réelle) est un triplet spectral simple et son action spectrale est:*
(i) pour $n = 2$,

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) = 4\pi\, \Phi_2\, \Lambda^2 + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}),$$

(ii) pour $n = 4$,

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) = 8\pi^2\, \Phi_4\, \Lambda^4 - \tfrac{4\pi^2}{3}\, \Phi(0)\, \tau(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}),$$

(iii) de façon générale:

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \Phi_{n-k}\, c_{n-k}(A)\, \Lambda^{n-k} + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}),$$

où $c_{n-2}(A) = 0$, $c_{n-k}(A) = 0$ pour k impair. En particulier, $c_0(A) = 0$ quand n est impair.

Lorsque $n = 4$, un terme de type Yang-Mills non commutatif apparait au niveau du terme invariant d'échelle (en Λ^0): $\tau(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$, où $F_{\mu\nu} := \delta_\mu(A_\nu) - \delta_\nu(A_\mu) - [A_\mu, A_\nu]$. La forme de l'action spectrale du tore non commutatif est donc très fortement similaire à celle du tore commutatif, à condition que la déformation Θ vérifie une condition diophantienne. Nous ne savons pas cependant si cette condition, bien que suffisante, est effectivement nécessaire pour obtenir une telle action. Nous conjecturons que c'est bien le cas, comme le suggère un argument heuristique (Remarque 2.2.5).

4. Action spectrale sur $SU_q(2)$

Le quatrième chapitre correspond à un travail en collaboration avec Bruno Iochum et Andrzej Sitarz: *Spectral action on $SU_q(2)$* [82].

L'objectif consiste à appliquer les techniques pseudodifférentielles vues précédemment au calcul de l'action spectrale sur le triplet spectral de Dąbrowski et al. [48] basé sur le groupe quantique $SU_q(2)$. Ce groupe quantique (ou algèbre de Hopf) peut être vu comme une q-déformation de la 3-sphère commutative.

L'algèbre $\mathcal{A} := \mathcal{A}(SU_q(2))$ de ce triplet est définie comme étant l'algèbre polynomialement engendrée par deux éléments a et b qui sont assujettis aux règles de commutation suivantes, où $0 < q < 1$:

$$ba = q\,ab, \qquad b^*a = q\,ab^*, \qquad bb^* = b^*b, \quad a^*a + q^2\,b^*b = 1, \qquad aa^* + bb^* = 1\,.$$

On définit un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\uparrow \oplus \mathcal{H}^\downarrow$ avec les bases orthonormales $v^{j\uparrow}_{m,l}$ et $v^{j\downarrow}_{m,l}$ où $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $0 \leq m \leq 2j$, $0 \leq l \leq 2j+1$ et $v^{\downarrow,j}_{m,l}$ est nul si $j = 0$ ou $l = 2j$ ou $2j+1$.

On représente alors $\mathcal{A}$ avec l'application π initialement définie sur a, b et qui est donnée à la section 2.2. Cette représentation faisant intervenir des coefficients assez compliqués $\alpha^\pm_{j\mu n}$, $\beta^\pm_{j\mu n}$, et non diagonaux, il apparait très utile de définir une représentation approximée $\underline{\pi}$ telle que

$$\underline{\pi}(a) := a_+ + a_-, \quad \underline{\pi}(b) := b_+ + b_-$$

où on a posé (ici $q_n := \sqrt{1 - q^{2n}}$):

$$\begin{aligned} a_+\, v^j_{m,l} &= q_{m+1}\, q_{l+1}\, v^{j^+}_{m+1,l+1}\,, & a_-\, v^j_{m,l} &= q^{m+l+1}\, v^{j^-}_{m,l}\,, \\ b_+\, v^j_{m,l} &= q^l\, q_{m+1}\, v^{j^+}_{m+1,l}\,, & b_-\, v^j_{m,l} &= -q^m\, q_l\, v^{j^-}_{m,l-1}\,. \end{aligned}$$

Cette approximation ne modifiera pas les calculs d'intégrale non commutative puisque pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\pi(x) - \underline{\pi}(x) \in \mathcal{K}_q$ où $\mathcal{K}_q$ est un idéal inclus dans les opérateurs de type $OP^{-\infty}$. Autrement dit, $\pi(x) - \underline{\pi}(x)$ est un opérateur pseudodifférentiel régularisant.

L'opérateur de Dirac est défini de la façon suivante: $\mathcal{D}\, v^j_{ml} = \left(\begin{smallmatrix} 2j+\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2j-\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) v^j_{ml}$. Il possède donc le même spectre que l'opérateur de Dirac associé à la structure spinorielle de la 3-sphère standard. Cependant, l'opérateur de Dirac sur $SU_q(2)$ possède une caractéristique très particulière qui n'existe pas sur la 3-sphère commutative: le signe de $\mathcal{D}$, noté $F := \mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-1}$, commute modulo $OP^{-\infty}$ avec les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$. Ceci a pour conséquence que les 1-formes $a[\mathcal{D}, b]$ sont essentiellement équivalentes aux δ-1-formes $a[|\mathcal{D}|, b]$ dans les calculs d'intégrales non commutatives. On peut construire avec cet opérateur de Dirac un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ régulier

et de spectre de dimension $\{1,2,3\}$ sur $SU_q(2)$. D'autre part, une structure réelle J peut être construite sur ce triplet, avec la relation $J\mathcal{D} = \mathcal{D}J$. Cette structure réelle est définie par

$$J\, v^{j\uparrow}_{m,l} = i^{2(m+l)-1} v^{j\uparrow}_{2j-m,2j+1-l}\,, \qquad J\, v^{j\downarrow}_{m,l} = i^{-2(m+l)+1} v^{j\downarrow}_{2j-m,2j-1-l}\,.$$

En utilisant une décomposition de type Poincaré–Birkhoff–Witt sur les δ-1-formes pour calculer les intégrales $⨍ |D_A|^{-k}$, nous avons été amenés à étudier certains produits de séries faisant intervenir une inversion d'indice $m \mapsto 2j-m$ (sections 2.4.4 et 2.8.C, 2.8.D). Ces résultats ont permis de montrer que la structure réelle ne modifie pas le spectre de dimension $\{1,2,3\}$ de $SU_q(2)$, et que l'action spectrale du triplet $(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ qui tient compte de la structure réelle, c'est à dire associée à la perturbation $\mathcal{D} \to \mathcal{D} + A + JAJ^{-1}$, est totalement déterminée par les intégrales suivantes (qui ne font plus intervenir la structure réelle J)

$$⨍ A^q_\delta |\mathcal{D}|^{-p}, \qquad 1 \le q \le p \le 3\,,$$

où A_δ est une δ-1-forme. Afin de calculer précisément ces intégrales, un calcul différentiel sur $SU_q(2)$ modulo un idéal $\mathcal{R}$ a été défini. Cet idéal est conçu de telle sorte que tout opérateur T dans $\mathcal{R}$ est invisible par intégration non commutative avec $|\mathcal{D}|^{-2}, |\mathcal{D}|^{-3}$: $⨍ T|\mathcal{D}|^{-2} = ⨍ T|\mathcal{D}|^{-3} = 0$. Le calcul d'intégrale du type $⨍ A^q_\delta |\mathcal{D}|^{-p}$ est alors réduit à certains types particuliers de $\delta-1$-formes A_δ. Par exemple, il est possible d'obtenir toutes ces intégrales avec $p=1$ à partir des intégrales suivantes (Proposition 4.5.16):

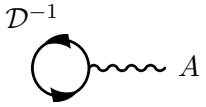
$$\begin{aligned}
&⨍ (bb^*)^n\, |\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-2(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2}\,,\\
&⨍ (bb^*)^n b^*\, \delta b\, |\mathcal{D}|^{-1} = ⨍ (bb^*)^n b\, \delta b^*\, |\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{2}{1-q^{2n+2}}\,,\\
&⨍ (bb^*)^n a\, \delta a^*\, |\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-2q^{4n+2}-2q^{4n}-2q^{2n+2}+6q^{2n}}{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n+2})}\,,\\
&⨍ (bb^*)^n a^*\, \delta a\, |\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{6q^{2n+2}-2q^{2n}-2q^2-2}{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n+2})}\,.
\end{aligned}$$

Ces résultats permettent finalement de retrouver toutes les actions spectrales possibles sur $SU_q(2)$. Nous avons constaté, à l'aide de certains exemples, que les termes de l'action spectrale n'ont pas toujours une limite finie lorsque $q \to 1$, c'est à dire lorsque $SU_q(2)$ "s'approche" de la 3-sphère commutative $\mathbb{S}^3$. D'autre part, même lorsque cette limite existe, le terme obtenu n'est pas égal au terme correspondant à la 3-sphère. Il existe donc un "mur" entre la q-géométrie de $SU_q(2)$ et $\mathbb{S}^3$ qui n'apparait pas au niveau des déformations du tore ou des plans de Moyal. Le calcul d'action spectrale sur d'autres géométries, telles que les sphères de Podleś [43, 46], le plan projectif [45], ou les q-sphères euclidiennes [44, 47, 96] pourrait faire l'objet d'investigations futures.

5. Tadpoles et triplets spectraux commutatifs

Ce chapitre présente un travail fait en collaboration avec Bruno Iochum: *Tadpoles and commutatives spectral triples* [83]. Nous nous sommes intéressés à certaines questions concernant l'annulation d'intégrales non commutatives apparaissant dans l'action spectrale de Chamseddine–Connes. Plus particulièrement, nous avons étudié les intégrales du type $⨍ A\mathcal{D}^{-1}$ (linéaires en A,

où A est une 1-forme) qui correspondent, en théorie des champs, à des tadpoles (têtards en français). Ici, $\mathcal{D}^{-1}$ est le propagateur fermionique de Feynman et $A\mathcal{D}^{-1}$ est un graphe à une boucle avec une ligne fermionique interne et une ligne bosonique externe :



Plus généralement, on définit un tadpole comme étant un terme linéaire en A apparaissant dans l'action spectrale $\mathcal{S}(\mathcal{D}+A,\Phi,\Lambda)$. Si d est la dimension d'un triplet spectral $(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$, on peut montrer que la partie linéaire en A du terme en Λ^{d-k} de l'action spectrale, que l'on note $\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+A}(d-k)$ (tadpole d'ordre k) vérifie:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+A}(d-k) &= -(d-k)\fint A\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-(d-k)-2}, \quad \forall k\neq d,\\ \mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+A}(0) &= -\fint A\mathcal{D}^{-1}.\end{aligned}$$

Il apparait alors que pour tout triplet spectral riemannien, c'est à dire du type $\big(\mathcal{A} := C^\infty(M),\, \mathcal{H} := L^2(M,S),\, \mathcal{D}\big)$ où M est une variété compacte sans bord riemannienne à spin de dimension d, $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des spineurs de carré intégrable et $\mathcal{D}$ l'opérateur de Dirac associé à la structure spin, tous ces termes sont nuls. Cette propriété est basée sur le fait que ce triplet est réel et commutatif. La structure réelle de $\big(\mathcal{A} := C^\infty(M),\, \mathcal{H} := L^2(M,S),\, \mathcal{D}\big)$ provient de l'existence de la structure spin, car celle-ci implique l'existence d'un opérateur de conjugaison de charge J, qui est une isométrie antilinéaire satisfaisant:

$$JaJ^{-1} = a^*, \quad \forall a\in\mathcal{A}\,.$$

De façon plus générale, on peut montrer, en utilisant le résidu de Wodzicki, que $\fint B|\mathcal{D}|^{-(2k+1)}$, où B est un polynôme généré par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, est toujours nul si la dimension est paire, alors que $\fint B\mathcal{D}^{-2k}$ est toujours nul en dimension impaire. Dit autrement, $\fint B|D|^{-(d-q)} = 0$ pour tout q impair.

Nous nous sommes aussi intéressés au cas d'une variété de dimension paire compacte avec bord, et d'une condition au bord de type chirale, c'est-à-dire telle que l'opérateur de Dirac perturbé $\mathcal{D}+A$ agit sur le domaine $\{\, s\in C^\infty(V)\,:\,\Pi_- s_{|\partial M} = 0\,\}$ où $\Pi_\pm := \frac{1}{2}(1\pm\chi)$. Ici χ est un opérateur de chiralité sur le bord, c'est-à-dire tel que $\chi^2 = 1$ et

$$\{\chi,\gamma^d\} = 0\,, \qquad [\chi,\gamma^a] = 0, \qquad \forall a\in\{\,1,\cdots,d-1\,\}\,.$$

On obtient alors une condition au bord mixte naturelle sur l'opérateur de type Laplace $(\mathcal{D}+A)^2$:

$$\mathcal{B}^A_\chi s := \Pi_-(D+A)^2 s_{|\partial M} \oplus \Pi_- s_{|\partial M}\ .$$

En se basant sur les formes explicites des coefficients du noyau de la chaleur dans le cadre des conditions aux bords mixtes [11, 12], on peut alors montrer qu'aucun tadpole ne peut exister dans l'action $\mathrm{Tr}(\Phi((D+A)^2_{B^A_\chi}/\Lambda^2))$, au moins jusqu'à l'ordre 5. Nous nous attendons à ce que ceci se généralise à tous les ordres, et à d'autres types de conditions aux bords, notamment celles d'Atiyah-Patodi-Singer. Une approche de cette question, associée aux triplets spectraux commutatifs, fait l'objet d'un travail en cours [84].

6. Calcul pseudodifférentiel global sur variétés avec linéarisation

Le sixième et dernier chapitre présente la construction d'un calcul symbolique et pseudodifférentiel global sur les variétés avec linéarisation [101].

Il a été montré par Gayral et al. [59] que les plans de Moyal sont des triplets spectraux non compacts. En d'autres termes, les plans de Moyal peuvent être vus comme des variétés à spin non compactes et non commutatives. Ce lien entre la théorie de la quantification par déformation et la géométrie non commutative montre en particulier que le paradigme des triplets spectraux est adapté aux questions de quantification. Le produit de Moyal est défini sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ des fonctions rapidement décroissantes

$$f \star g(x) := (\pi\theta)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{4n}} dy\, dz\, f(y)\, g(z)\, e^{\frac{2i}{\theta}(x-y)\cdot S(x-z)}$$

où $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et donne à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ une structure de pré-C^*-algèbre de Fréchet. Le triplet spectral décrit dans [59] est basé sur cette algèbre. L'extension de cette construction remarquable à un fibré cotangent T^*M d'une variété M non isométrique à $\mathbb{R}^n$ reste un problème ouvert. Nous proposons dans ce chapitre la construction d'un calcul pseudodifférentiel global afin d'obtenir un produit de Moyal plus général que celui défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

Le calcul pseudodifférentiel global [9, 49, 148, 149] permet d'établir une notion globale de symbole total d'un opérateur pseudodifférentiel, modulo l'algèbre résiduelle des opérateurs régularisants $\Psi^{-\infty}$ (à noyau lisse). Il est basé sur la définition d'une connexion sur la variété (ou plus généralement, d'une linéarisation [9]), et utilise l'application exponentielle, ainsi que le transport parallèle sur les géodésiques associées, pour obtenir un isomorphisme global (modulo $\Psi^{-\infty}$) entre les algèbres symboliques et opératorielles.

Lorsque la variété M n'est pas compacte, il apparaît utile, afin d'avoir une continuité de type $L^2(M)$ pour les opérateurs d'ordre 0, de considérer des espaces de symboles qui contrôlent à la fois la variable x et la covariable θ. Ces contrôles ont été utilisés sur $\mathbb{R}^n$ dans le cadre du calcul pseudodifférentiel de type SG (voir par exemple [124]). Nous avons été amenés à définir un tel calcul dans le cadre des variétés à linéarisation, c'est à dire telles qu'il existe une application exponentielle abstraite (ou linéarisation) $\exp : TM \to M$ établissant un difféomorphisme $\exp_x : T_xM \to M$ en chaque point $x \in M$. Ce cadre est suffisamment général pour contenir les variétés de Cartan–Hadamard, qui sont les variétés simplement connexes, complètes, et de courbure négative.

L'outil essentiel de la définition du calcul global dans le cadre des variétés à linéarisation est la combinatoire liée à la formule de Faa-di-Bruno à plusieurs variables [39]. Celle-ci s'exprime de la façon suivante: si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ alors pour tout n-multi-indice $\nu \neq 0$,

$$\partial^\nu(f \circ g) = \sum_{1 \leq |\lambda| \leq |\nu|} (\partial^\lambda f) \circ g \sum_{s=1}^{|\nu|} \sum_{p_s(\nu,\lambda)} \nu! \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{k^j!(l^j!)^{|k^j|}} (\partial^{l^j} g)^{k^j}$$

où les multi-indices k^j, l^j appartenant à l'ensemble $p_s(\nu, \lambda)$ vérifient $\sum_{j=1}^s k^j = \lambda$ et $\sum_{j=1}^s |k^j| l^j = \nu$. A l'aide de cette formule, il est possible de définir, de façon intrinsèque et dans le cadre des variétés à linéarisation, des espaces de Fréchet nucléaires de fonctions rapidement décroissantes $\mathcal{S}(M)$, $\mathcal{S}(M \times M)$, $\mathcal{S}(TM)$, $\mathcal{S}(T^*M)$ pourvu que l'application exponentielle satisfasse une hypothèse de contrôle à l'infini de type polynomial. Cette hypothèse dit plus précisément que les

applications de changement de coordonnées normales $\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'} := L_{\mathfrak{b}} \exp_z^{-1} \exp_{z'} L_{\mathfrak{b}'}^{-1}$ (où $z, z' \in M$, $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ bases de T_zM, $T_{z'}M$ et $L_{\mathfrak{b}}$ isomorphisme linéaire associé à $\mathfrak{b}$) sont dans l'espace $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ des fonctions (avec leurs dérivées) polynomialement dominées à l'infini.

Il est d'autre part possible de définir, sous ces conditions, des isomorphismes topologiques de quantifications $\mathfrak{Op}_\lambda$ paramétrés par $\lambda \in [0,1]$ qui permettent de passer de l'espace des opérateurs (plus exactement des noyaux) $\mathcal{S}'(M \times M)$ à l'espace des "symboles" $\mathcal{S}'(T^*M)$. Ces isomorphismes envoient $S(M \times M)$ dans $\mathcal{S}(T^*M)$ et il apparait alors possible de définir un λ-produit (ou produit de Moyal si $\lambda = \frac{1}{2}$) sur $\mathcal{S}(T^*M)$ simplement par transfert de la convolution de noyau dans $\mathcal{S}(M \times M)$. Plus précisément, le produit

$$a \circ_\lambda b\,(x,\eta) = \int_{T_x(M)\times M} d\mu_x(\xi) d\mu(y) \int_{V^\lambda_{x,\xi,y}} d\mu^*_{x,\xi,y}(\theta,\theta')\, g^\lambda_{x,\xi,y}\, e^{2\pi i \omega^\lambda_{x,\xi,y}(\eta,\theta,\theta')} a(y^\lambda_{x,\xi},\theta)\, b(y^{1-\lambda}_{x,-\xi},\theta')$$

où les applications V, g, ω sont déterminées (Proposition 6.3.11) par l'application exponentielle et la densité $d\mu$ considérée sur la variété, donne à $\mathcal{S}(T^*M)$ une structure d'algèbre de Fréchet, et se réduit précisément au produit de Moyal classique lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$ et $M = \mathbb{R}^n$.

Nous avons ensuite étudié l'extension du SG-calcul sur les variétés à linéarisation. Les espaces de symboles $S^{l,m}$ (ayant un controle séparé en x et θ) peuvent être définis si on renforce l'hypothèse précédente de controle polynomial sur les difféomorphismes $\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}$. Plus précisément, si les applications $\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}$ vérifient (S_1), c'est-à-dire si pour tout n-multi-indice $\alpha \neq 0$ (ici $\langle \mathrm{x} \rangle := (1 + \|\mathrm{x}\|^2)^{1/2}$)

$$\partial^\alpha \psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}(\mathrm{x}) = \mathcal{O}\big(\langle \mathrm{x} \rangle^{1-|\alpha|}\big)\,,$$

alors les espaces $S^{l,m}$ de symboles a, définis par les estimations suivantes, pour tout système de coordonées normal $(z, \mathfrak{b})$,

$$\partial^{(\alpha,\beta)}_{z,\mathfrak{b}} a(x,\theta) = \mathcal{O}\big(\langle x \rangle^{l-|\alpha|}_{z,\mathfrak{b}} \langle \theta \rangle^{m-|\beta|}_{z,\mathfrak{b},x}\big)\,,$$

sont des espaces de Fréchet homéomorphes aux espaces de SG-symboles classiques sur $\mathbb{R}^n$. A partir de ces espaces, on peut définir les opérateurs pseudodifférentiels sur M en posant $\Psi^{l,m} := \mathfrak{Op}_\lambda(S^{l,m})$ pourvu que cet espace ne dépende pas du paramètre de quantification λ et qu'il stabilise à la fois $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{S}'(M)$. Ceci a été rendu possible par une analyse des espaces d'amplitudes a et des opérateurs associés

$$\langle \mathfrak{Op}_\Gamma(a), u \rangle := \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i \langle \vartheta, \zeta \rangle} \operatorname{Tr}\big(a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\, \Gamma(u)^*(\mathrm{x},\zeta)\big)\, d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}$$

où Γ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ vérifiant certaines hypothèses de contrôle à l'infini (Proposition 6.4.14 et 6.4.17 et Lemma 6.4.18).

La partie suivante est consacrée à un résultat sur la composition des opérateurs pseudodifférentiels. Il est établi (Theorem 6.4.47) sous une hypothèse particulière (C_σ) (Definition 6.4.37) sur l'application exponentielle, que $\Psi := \cup_{l,m} \Psi^{l,m}$ est une $*$-algèbre sous la composition d'opérateurs et le symbole (pour $\lambda = 0$) du produit de deux opérateurs A, B satisfait la relation asymptotique

$$\sigma_0(AB)_{z,\mathfrak{b}} \sim \sum_{\beta,\gamma \in \mathbb{N}^n} c_\beta c_\gamma \partial^{\gamma,\gamma}_{\zeta,\vartheta}\big(a(\mathrm{x},\vartheta) \partial^\beta_{\zeta'}\big(e^{2\pi i \langle \vartheta, \varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') \rangle} (\partial^\beta_{\vartheta'} f_b)(\mathrm{x},\zeta,\zeta',L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\big)_{\zeta'=0}\big)_{\zeta=0}$$

où $a := \sigma_0(A)_{z,\mathfrak{b}}$, $b := \sigma_0(B)_{z,\mathfrak{b}}$, et les termes L, ϕ capturent la "courbure" liée à l'application exponentielle abstraite exp. Nous montrons en dernière partie que l'espace hyperbolique $\mathbb{H}$ de dimension 2 est une variété avec linéarisation (l'application exponentielle étant celle venant de la structure riemanienne) vérifiant l'hypothèse de contrôle $(S1)$. Ceci permet de définir de façon globale et intrinsèque les espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{H})$, $\mathcal{S}(T^*\mathbb{H})$, $\mathcal{S}(T\mathbb{H})$ ainsi que les espaces de symboles $S_1^{l,m}(T^*\mathbb{H})$.

L'analyse détaillée des λ-produits sur $\mathcal{S}(T^*\mathbb{H})$ (ou plus généralement sur $\mathcal{S}(T^*M)$, pour M avec $\mathcal{O}_M$-linéarisation) et les propriétés spectrales associées restent à étudier. Il serait par exemple intéressant de voir sous quelle condition les algèbres $(\mathcal{S}(T^*M), \circ_\lambda)$ peuvent générer un triplet spectral non compact. D'autre part, il est possible d'envisager de connecter ou d'étendre le calcul symbolique présenté ici avec les opérateurs de Fourier intégraux [42, 117, 118], les traces régularisées [110] et les espaces de Gelfand–Shilov [15].

Chapitre 1

Action spectrale sur les triplets spectraux

1.1 Introduction

L'action spectrale de Chamseddine–Connes [21] joue un rôle important en géométrie non commutative. Plus précisément, étant donné un triple spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ l'action spectrale où $\mathcal{A}$ est une algèbre agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ est un opérateur de Dirac [28,68], l'action spectrale ne dépend que du spectre de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}_A := \mathcal{D} + A + \epsilon\, JAJ^{-1} \tag{1.1}$$

où A est une 1-forme représentée sur $\mathcal{H}$, et a donc la décomposition suivante:

$$A = \sum_i a_i[\mathcal{D},\, b_i], \tag{1.2}$$

où a_i, $b_i \in \mathcal{A}$, J est une structure réelle sur le triplet correspondant à la conjugaison de charge et $\epsilon \in \{\, 1, -1 \,\}$ dépend de la dimension de ce triplet et vient de la relation

$$J\mathcal{D} = \epsilon\, \mathcal{D}J. \tag{1.3}$$

Dans ce chapitre, nous revisitons les notions d'opérateur pseudodifférentiel sur les triplets spectraux, les fonctions zêta, l'intégrale non commutative, le spectre de dimension, et l'action spectrale. L'opérateur de réalité J est incorporé et nous tenons compte en particulier des noyaux des opérateurs qui peuvent jouer un rôle dans le terme constant invariant d'échelle de l'action spectrale.

1.2 Intégration non commutative sur un triplet spectral

1.2.1 Opérateurs pseudodifférentiels sur triplets spectraux

La géométrie non commutative, avec sa notion de triplet spectral, fournit un cadre minimal dans lequel il est possible de construire une théorie non commutative des champs.

Définition 1.2.1. Un triplet $(A, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est appelé triplet spectral si $\mathcal{A}$ est une $*$-algèbre unifère fidèlement représentée sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, et $\mathcal{D}$ est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte tel que les commutateurs $[\mathcal{D}, a]$ soient bornés pour $a \in \mathcal{A}$.

Un triplet spectral est de dimension n, si les valeurs caractéristiques de $\mathcal{D}$ satisfont $\lambda_j = \mathcal{O}(j^{-1/n})$ lorsque $j \to \infty$.

Un triplet spectral est dit régulier si $\mathcal{A}$ et $[\mathcal{D}, \mathcal{A}]$ sont dans $\cap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Dom} \delta^k$ où $\delta(T) := [|\mathcal{D}|, T]$.

Dans ce formalisme, $\mathcal{D}$ joue le rôle de l'opérateur de Dirac de la géométrie classique riemannienne à spin. Dit autrement, $\mathcal{D}^{-1}$ représentera le propagateur fermionique euclidien. Afin d'avoir une conjugaison de charge dans notre théorie, on ajoute une structure réelle, qui correspond à un opérateur antiunitaire J qui commute ou anticommute avec $\mathcal{D}$. Dans ce cadre, les bosons de jauge sont vues comme fluctuations internes de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_A := \mathcal{D} + A + \varepsilon JAJ^{-1}$, où A est une 1-forme auto-adjointe, c'est à dire un opérateur de la forme $\sum a_i\,[\mathcal{D}, b_i]$, où a_i et b_i sont dans $\mathcal{A}$.

La notion de structure réelle sur un triplet spectral est reliée à la K-homology réelle, et est définie par:

Définition 1.2.2. Une structure réelle J sur un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ de dimension n est une isométrie antilinéaire J telle que $JD = \varepsilon DJ$, $J^2 = \varepsilon'$, $J\chi = \varepsilon''\chi J$, où $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{-1, 1\}$ et

n mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
$J^2 = \pm 1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$JD = \pm DJ$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$J\chi = \pm\chi J$	$+$		$-$		$+$		$-$	

De plus, tout élément de $J\mathcal{A}J^{-1}$ commute avec tout élément de $\mathcal{A} \cup [\mathcal{D}, \mathcal{A}]$.

Remarquons que la notion de triplet spectral peut être étendu dans le cadre des algèbres de von Neumann [6].

Lemme 1.2.3. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral avec structure réelle J et chiralité χ. Si $A \in \Omega^1_{\mathcal{D}}$ est une 1-forme, l'opérateur de Dirac perturbé*

$$\mathcal{D}_A := \mathcal{D} + A + \epsilon JAJ^{-1}$$

est un opérateur à résolvante compacte et en particulier son noyau $\operatorname{Ker} \mathcal{D}_A$ est un espace de dimension finie. Cet espace est invariant par J et χ.

Démonstration. Soit T un opérateur borné et soit z dans l'ensemble résolvant de $\mathcal{D} + T$ et z' dans l'ensemble résolvant de $\mathcal{D}$. Alors

$$(\mathcal{D} + T - z)^{-1} = (\mathcal{D} - z')^{-1}\,[1 - (T + z' - z)(\mathcal{D} + T - z)^{-1}].$$

Etant donné que $(\mathcal{D} - z')^{-1}$ est compact et puisque le terme entre crochets est borné, $\mathcal{D} + T$ est un opérateur à résolvante compacte. □

Nous fixons $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, J)$ un triplet spectral réel régulier de dimension n, et A une 1-forme auto-adjointe. On note

$$P_0 \text{ la projection sur } \operatorname{Ker} \mathcal{D}\,, P_A \text{ la projection sur } \operatorname{Ker} \mathcal{D}_A\,,$$
$$D := \mathcal{D} + P_0\,, D_A := \mathcal{D}_A + P_A\,.$$

Ainsi, P_0 et P_A sont des opérateurs de rang fini et auto-adjoint. Remarquons que D et D_A sont des opérateurs inversibles à résolvante compacte.

Remarque 1.2.4. *Le procédé consistant à ajouter P_0 à $\mathcal{D}$ afin d'obtenir un opérateur inversible est en fait un cas particulier du procédé de Higson [79] qui montre que l'on peut ajouter n'importe quel opérateur de type régularisant à $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}_A$ tel que le resultat soit inversible et sans changer le calcul des résidus (voir aussi [37]).*

Notons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} OP^0 &:= \{T \,:\, t \mapsto F_t(T) \in C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big)\}, \\ OP^\alpha &:= \{\, T \,:\, T|D|^{-\alpha} \in OP^0 \,\}. \end{aligned}$$

où $F_t(T) := e^{it|D|}\, T\, e^{-it|D|} = e^{it|\mathcal{D}|}\, T\, e^{-it|\mathcal{D}|}$ puisque $|D| = |\mathcal{D}| + P_0$. On pose

$$\begin{aligned} \delta(T) &:= [|D|, T], \\ \nabla(T) &:= [\mathcal{D}^2, T], \\ \sigma_s(T) &:= |D|^s T |D|^{-s},\ s \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Il a été montré [38] que $OP^0 = \bigcap_{p\geq 0} \mathrm{Dom}(\delta^p)$. En particulier, OP^0 est une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{A} \subseteq OP^0$, $J\mathcal{A}J^{-1} \subseteq OP^0$, $[\mathcal{D}, \mathcal{A}] \subseteq OP^0$. Notons que $P_0 \in OP^{-\infty}$ et $\delta(OP^0) \subseteq OP^0$.

Pour tout $t > 0$, $\mathcal{D}^t$ et $|\mathcal{D}|^t$ sont dans OP^t et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, D^\alpha$ et $|D|^\alpha$ sont dans OP^α. Par hypothèse, $|D|^{-n} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$ et donc pour tout $\alpha > n$, $OP^{-\alpha} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Lemme 1.2.5. *[38]*
(i) Pour tout $T \in OP^0$ et $s \in \mathbb{C}$, $\sigma_s(T) \in OP^0$.
(ii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $OP^\alpha OP^\beta \subseteq OP^{\alpha+\beta}$.
(iii) Si $\alpha \leq \beta$, $OP^\alpha \subseteq OP^\beta$.
(iv) Pour tout α, $\delta(OP^\alpha) \subseteq OP^\alpha$.
(v) Pour tout α et $T \in OP^\alpha$, $\nabla(T) \in OP^{\alpha+1}$.

Démonstration. (i) Nous avons $|D|T|D|^{-1} = T + \delta(T)|D|^{-1}$ et $|D|^{-1}T|D| = T - |D|^{-1}\delta(T)$. Une récurrence prouve que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|D|^k T|D|^{-k} = \sum_{q=0}^k \binom{q}{k} \delta^q(T)|D|^{-q}$ et on obtient $|D|^{-k}T|D|^k = \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{q}{k} |D|^{-q}\delta^q(T)$.

Par conséquent, puisque T, $|D|^{-q}$ et $\delta^q(T)$ sont dans OP^0 pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|D|^k T|D|^{-k} \in OP^0$. Fixons $p \in \mathbb{N}_0$ et posons $F_p(s) := \delta^p(|D|^s T|D|^{-s})$ pour $s \in \mathbb{C}$. Puisque $k \in \mathbb{Z}$, $F_p(k)$ est borné, une interpolation complexe prouve que $F_p(s)$ est borné, ce qui donne $|D|^s T|D|^{-s} \in OP^0$.
(ii) Soit $T \in OP^\alpha$ et $T' \in OP^\beta$. Ainsi, $T|D|^{-\alpha}$, $T'|D|^{-\beta}$ sont dans OP^0. D'après (i) nous obtenons $|D|^\beta T|D|^{-\alpha}|D|^{-\beta} \in OP^0$, et donc $T'|D|^{-\beta}|D|^\beta T|D|^{-\beta-\alpha} \in OP^0$. Ainsi, $T'T|D|^{-(\alpha+\beta)} \in OP^0$.
(iii) Pour $T \in OP^\alpha$, $|D|^{\alpha-\beta}$ et $T|D|^{-\alpha}$ sont dans OP^0, ainsi $T|D|^{-\beta} = T|D|^{-\alpha}|D|^{\alpha-\beta} \in OP^0$.
(iv) est une conséquence de $\delta(OP^0) \subseteq OP^0$.
(v) Puisque $\nabla(T) = \delta(T)|D| + |D|\delta(T) - [P_0, T]$, le résultat découle de (ii), (iv) et du fait que P_0 soit dans $OP^{-\infty}$. □

Remarque 1.2.6. *Tout opérateur dans OP^α, où $\alpha \in \mathbb{R}$, a une extension linéaire continue de* $\mathrm{Dom}\,|D|^{\alpha+1}$ *à* $\mathrm{Dom}\,|D|$ *où* $\mathrm{Dom}\,|D|^\alpha$ *est muni de sa norme naturelle (voir [38, 79]).*

Nous introduisons maintenant une définition des opérateurs pseudodifférentiels d'une façon légèrement différente que dans [29, 38, 79], qui tient compte de l'opérateur de réalité J et du noyau de $\mathcal{D}$, et permet à $|D|$, $\mathcal{D}$ d'être des opérateurs pseudodifférentiels. Notre définition est dans l'esprit de [22].

Définition 1.2.7. Soit $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ l'algèbre polynomiale générée par $\mathcal{A}$, $J\mathcal{A}J^{-1}$, $\mathcal{D}$ et $|\mathcal{D}|$.

Un opérateur pseudodifférentiel est un opérateur T tel que il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}_0$, $P \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $R \in OP^{-N}$ (p, P et R peuvent dépendre de N) avec $P\,D^{-2p} \in OP^d$ et

$$T = P\,D^{-2p} + R\,.$$

On note $\Psi(\mathcal{A})$ l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels et $\Psi(\mathcal{A})^k := \Psi(\mathcal{A}) \cap OP^k$.

Notons que si A est une 1-forme, A et JAJ^{-1} sont dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ et de plus $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \cup_{p\in\mathbb{N}_0} OP^p$. Étant donné que $|\mathcal{D}| \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, P_0 sont des opérateurs pseudodifférentiels, pour $p \in \mathbb{Z}$, $|D|^p$ est aussi un opérateur pseudodifférentiel (dans OP^p). Remarquons que $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \subseteq \cup_{k\in\mathbb{Z}} OP^k$.

Lemme 1.2.8. *[29, 38] L'ensemble de tous les opérateurs pseudodifférentiels $\Psi(\mathcal{A})$ est une algèbre. De plus, si $T \in \Psi(\mathcal{A})^d$ et $T \in \Psi(\mathcal{A})^{d'}$, alors $TT' \in \Psi(\mathcal{A})^{d+d'}$.*

Démonstration. La partie non triviale de la preuve est la stabilité sous produit. Soient $T, T' \in \Psi(\mathcal{A})$. Il existe $d, d' \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N > |d| + |d'|$, il existe P, P' dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $p, p' \in \mathbb{N}_0$, $R \in OP^{-N-d'}$, $R' \in OP^{-N-d}$ tel que $T = PD^{-2p} + R$, $T' = P'D^{-2p'} + R'$, $PD^{-2p} \in OP^d$ et $P'D^{-2p'} \in OP^{d'}$.

Ainsi, $TT' = PD^{-2p}P'D^{-2p'} + RP'D^{-2p'} + PD^{-2p}R' + RR'$.

Nous avons $RP'D^{-2p'} \in OP^{-N-d'+d'} = OP^{-N}$ et $PD^{-2p}R' \in OP^{-N}$. Puisque $RR' \in OP^{-2N}$, on obtient

$$TT' \sim PD^{-2p}P'D^{-2p'} \mod OP^{-N}.$$

Si $p = 0$, alors $TT' \sim QD^{-2p'} \mod OP^{-N}$ où $Q = PP' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $QD^{-2p'} \in OP^{d+d'}$. Supposons $p \neq 0$. Une récurrence prouve que pour tout $q \in \mathbb{N}_0$,

$$D^{-2}P' \sim \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \nabla^k(P')D^{-2k-2} + (-1)^{q+1}D^{-2}\nabla^{q+1}(P')D^{-2q-2} \mod OP^{-\infty}.$$

D'après le Lemme 1.2.5 (v), le reste est dans $OP^{d'+2p'-q-3}$, puisque $P' \in OP^{d'+2p'}$. Une autre récurrence donne pour tout $q \in \mathbb{N}_0$,

$$D^{-2p}P' \sim \sum_{k_1,\cdots,k_p=0}^{q} (-1)^{|k|_1}\nabla^{|k|_1}(P')D^{-2|k|_1-2p} \mod OP^{d'+2p'-q-1-2p}.$$

Ainsi, avec $q_N = N + d + d' - 1$,

$$TT' \sim \sum_{k_1,\cdots,k_p=0}^{q_N} (-1)^{|k|_1}P\nabla^{|k|_1}(P')D^{-2|k|_1-2(p+p')} \mod OP^{-N}.$$

La dernière somme peut être écrite $Q_N D^{-2r_N}$ où $r_N := p\,q_N + (p + p')$. Puisque $Q_N \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $Q_N D^{-2r_N} \in OP^{d+d'}$, le résultat s'en déduit. □

Nous introduisons aussi :

Définition 1.2.9. Soit $\mathcal{D}_1(\mathcal{A})$ l'algèbre générée par $\mathcal{A}$, $J\mathcal{A}J^{-1}$ et $\mathcal{D}$, et $\Psi_1(\mathcal{A})$ l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels construit comme précédemement avec $\mathcal{D}_1(\mathcal{A})$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Notons que $\Psi_1(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $\Psi(\mathcal{A})$.

Remarquons que $\Psi_1(\mathcal{A})$ ne contient pas nécessairement les opérateurs $|D|^k$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$ est impair. Cette algèbre est similaire à celle définie dans [22].

1.2.2 Fonctions zêta, intégrale non commutative et action spectrale

Pour tout opérateur B et si X est D ou D_A, on pose

$$\zeta_X^B(s) := \mathrm{Tr}\left(B|X|^{-s}\right),$$
$$\zeta_X(s) := \mathrm{Tr}\left(|X|^{-s}\right).$$

Le spectre de dimension $Sd(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ d'un triplet spectral a été défini dans [29,38]. Nous étendons cette définition ici afin de tenir compte de l'opérateur J et de notre définition d'opérateur pseudodifférentiel.

Définition 1.2.10. Le spectre de dimension d'un triplet spectral est l'ensemble $Sd(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ de tous les pôles des fonctions $\zeta_D^P := s \mapsto \mathrm{Tr}\left(P|D|^{-s}\right)$ où P est un opérateur pseudodifférentiel dans OP^0. Le triplet spectral $(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ est simple lorsque ces pôles sont tous simples.

Remarque 1.2.11. *Si $Sp(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ est l'ensemble de tous les pôles des fonctions $s \mapsto \mathrm{Tr}\left(P|D|^{-s}\right)$ où P est un opérateur pseudodifférentiel, alors, $Sd(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D}) \subseteq Sp(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$.*

Lorsque $Sp(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D}) = \mathbb{Z}$, $Sd(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D}) = \{\, n-k \ : \ k \in \mathbb{N}_0 \,\}$: en effet, si P est un opérateur pseudodifférentiel dans OP^0, et $q \in \mathbb{N}$ est tel que $q > n$, alors $P|D|^{-s}$ est dans $OP^{-\Re(s)}$ et donc q n'est pas un pôle de $s \mapsto \mathrm{Tr}\left(P|D|^{-s}\right)$.

Remarque 1.2.12. *$Sp(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ est aussi l'ensemble des pôles des fonctions $s \mapsto \mathrm{Tr}\left(B|D|^{-s-2p}\right)$ où $p \in \mathbb{N}_0$ et $B \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Nous introduisons la notation suivante, pour tout opérateur T :

$$\varepsilon(T) := \nabla(T)D^{-2}.$$

On obtient à partir de [22, (2.44)] le développement suivant pour $T \in OP^q$

$$\sigma_z(T) \sim \sum_{r=0}^{N} g(z,r)\,\varepsilon^r(T) \mod OP^{-N-1+q} \tag{1.4}$$

où $g(z,r) := \frac{1}{r!}(\frac{z}{2})\cdots(\frac{z}{2}-(r-1)) = \binom{z/2}{r}$ avec la convention $g(z,0) := 1$.
On définit l'intégrale non commutative par

$$\fint T := \operatorname*{Res}_{s=0} \zeta_D^T(s) = \operatorname*{Res}_{s=0} \mathrm{Tr}\left(T|D|^{-s}\right).$$

L'intégrale non commutative joue le rôle du résidu de Wodzicki dans le cadre des triplets spectraux.

Proposition 1.2.13. *[38] Si le triplet spectral est simple, $⨍$ est une trace sur $\Psi(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Soient $P \in OP^{k_1}$, $Q \in OP^{k_2} \in \Psi(\mathcal{A})$. Avec $[Q, |D|^{-s}] = \big(Q - \sigma_{-s}(Q)\big)\,|D|^{-s}$ et l'équivalence $Q - \sigma_{-s}(Q) \sim -\sum_{r=1}^{N} g(-s,r)\,\varepsilon^r(Q) \mod OP^{-N-1+k_2}$, on obtient

$$P[Q, |D|^{-s}] \sim -\sum_{r=1}^{N} g(-s,r)\,P\varepsilon^r(Q)|D|^{-s} \mod OP^{-N-1+k_1+k_2-\Re(s)}$$

ce qui donne, si on pose $N = n + k_1 + k_2$,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(P[Q, |D|^{-s}]\big) = -\sum_{r=1}^{n+k_1+k_2} \operatorname*{Res}_{s=0} g(-s,r) \operatorname{Tr}\big(P\varepsilon^r(Q)|D|^{-s}\big).$$

Par hypothèse, $s \mapsto \operatorname{Tr}\big(P\varepsilon^r(Q)|D|^{-s}\big)$ possède seulement des pôles simples. Ainsi, puisque $s = 0$ est un zéro de la fonction analytique $s \mapsto g(-s,r)$ pour tout $r \geq 1$, nous avons $\operatorname*{Res}_{s=0} g(-s,r) \operatorname{Tr}\big(P\varepsilon^r(Q)|D|^{-s}\big) = 0$, ce qui entraîne que $\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(P[Q, |D|^{-s}]\big) = 0$ et ainsi

$$⨍ PQ = \operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(P|D|^{-s}Q\big).$$

Lorsque $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 2\max(k_1 + n + 1, k_2)$, l'opérateur $P|D|^{-s/2}$ est traçable alors que $|D|^{-s/2}Q$ est borné, donc $\operatorname{Tr}\big(P|D|^{-s}Q\big) = \operatorname{Tr}\big(|D|^{-s/2}QP|D|^{-s/2}\big) = \operatorname{Tr}\big(\sigma_{-s/2}(QP)|D|^{-s}\big)$. Ainsi, en utilisant (1.4) encore une fois,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(P|D|^{-s}Q\big) = ⨍ QP + \sum_{r=1}^{n+k_1+k_2} \operatorname*{Res}_{s=0} g(-s/2,r) \operatorname{Tr}\big(\varepsilon^r(QP)|D|^{-s}\big).$$

Pour tout $r \geq 1$, $\operatorname*{Res}_{s=0} g(-s/2,r) \operatorname{Tr}\big(\varepsilon^r(QP)|D|^{-s}\big) = 0$ puisque $g(0,r) = 0$ et le triplet spectral est simple. Finalement,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(P|D|^{-s}Q\big) = ⨍ QP.$$

ce qui implique le résultat. □

Sur a triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, le role de l'action est joué par l'"action spectrale" telle qu'introduite par A. Chamseddine et A. Connes :

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) := \operatorname{Tr}\big(\Phi(\mathcal{D}_A/\Lambda)\big) \tag{1.5}$$

où Φ est une fonction positive de cut-off [54] et Λ fixe l'échelle de masse. Ceci signifie que $\mathcal{S}$ compte le nombre de valeurs spectrales de $|\mathcal{D}_A|$ qui sont plus petites que l'échelle de masse Λ (notons que la résolvante de $\mathcal{D}_A$ est compacte puisque c'est le cas de $\mathcal{D}$, voir Lemme 1.2.3).

Le principe de l'action spectrale de Chamseddine–Connes dit que (voir [37, p. 197]) l'action spectrale *est la fonctionnelle d'action fondamentale S qui peut être utilisée à la fois au niveau classique pour comparer différents espaces géométriques et au niveau quantique dans la formulation de l'intégrale fonctionnelle, après une rotation de Wick.* En d'autres termes, la fonctionnelle $\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda)$ qui est reliée au spectre de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$, contient toute l'information

physique de la théorie des champs quantique géométrique associée au triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Il est donc crucial de pouvoir calculer cette fonctionnelle sur quelques exemples fondamentaux. L'action spectrale est connue dans le cadre de certains exemples: [17,22,24,37,53,60–62,69,93]. Nous étudierons le cas du tore non commutatif dans le chapitre 2, et le cas de $SU_q(2)$ au chapitre 3. Nous verrons au chapitre 4 certaines questions concernant les tadpoles, termes linéaires en A dans l'action spectrale. Dans le cas d'un triplet spectral avec spectre de dimension simple, nous avons (voir par exemple [37, Theorem 1.145])

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) = \sum_{0<k\in Sd^+} \Phi_k \, \Lambda^k \fint |D_A|^{-k} + \Phi(0)\, \zeta_{D_A}(0) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}), \tag{1.6}$$

où $\Phi_k = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)\, t^{k/2-1}\, dt$ et Sd^+ est la partie strictement positive du spectre de dimension de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Ainsi, le problème principal est le calcul des termes $\fint |D_A|^{-k}$, $\zeta_{D_A}(0)$. Nous étudions cette question dans la section suivante.

1.3 Résidus de ζ_{D_A} pour un triplet spectral avec spectre de dimension simple

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, J)$ un triplet spectral régulier réel de dimension n et A une 1-forme auto-adjointe.
Rappelons que

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_A := \mathcal{D} + \widetilde{A} \text{ où } \widetilde{A} := A + \varepsilon J A J^{-1}, \\ &D_A := \mathcal{D}_A + P_A \end{aligned}$$

où P_A est la projection sur $\operatorname{Ker} \mathcal{D}_A$. Remarquons que $\widetilde{A} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap OP^0$ et $\mathcal{D}_A \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap OP^1$.

On note

$$V_A := P_A - P_0.$$

Le lemme suivant montre que V_A est un opérateur régularisant:

Lemme 1.3.1. *(i)* $\bigcap_{k\geq 1} \operatorname{Dom}(\mathcal{D}_A)^k \subseteq \bigcap_{k\geq 1} \operatorname{Dom} |D|^k$.
(ii) $\operatorname{Ker} \mathcal{D}_A \subseteq \bigcap_{k\geq 1} \operatorname{Dom} |D|^k$.
(iii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|D|^\beta P_A |D|^\alpha$ *est borné.*
(iv) $P_A \in OP^{-\infty}$.

Démonstration. *(i)* Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $R_p := (\mathcal{D}_A)^p - \mathcal{D}^p$, de telle sorte que $R_p \in OP^{p-1}$ et $R_p\big(\operatorname{Dom} |D|^p\big) \subseteq \operatorname{Dom} |D|$ (voir Remarque 1.2.6).

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Puisque $\operatorname{Dom} \mathcal{D}_A = \operatorname{Dom} \mathcal{D} = \operatorname{Dom} |D|$, nous avons

$$\operatorname{Dom}(\mathcal{D}_A)^k = \{\, \phi \in \operatorname{Dom} |D| \ : \ (\mathcal{D}^j + R_j)\, \phi \in \operatorname{Dom} |D| \ , \ \forall j \ \ 1 \leq j \leq k-1 \,\}.$$

Soit $\phi \in \operatorname{Dom}(\mathcal{D}_A)^k$. On prouve par récurrence que pour tout $j \in \{\, 1, \cdots, k-1 \,\}$, $\phi \in \operatorname{Dom} |D|^{j+1}$, nous avons $\phi \in \operatorname{Dom} |D|$ et $(\mathcal{D}+R_1)\, \phi \in \operatorname{Dom} |D|$. Ainsi, puisque $R_1\, \phi \in \operatorname{Dom} |D|$, $\mathcal{D}\phi \in \operatorname{Dom} |D|$, ce qui prouve que $\phi \in \operatorname{Dom} |D|^2$. Ainsi, le cas $j = 1$ est résolu.

Supposons maintenant que $\phi \in \operatorname{Dom} |D|^{j+1}$ pour un $j \in \{\, 1, \cdots, k-2 \,\}$. Puisque $(\mathcal{D}^{j+1} + R_{j+1})\, \phi \in \operatorname{Dom} |D|$, et $R_{j+1}\, \phi \in \operatorname{Dom} |D|$, on obtient $\mathcal{D}^{j+1}\, \phi \in \operatorname{Dom} |D|$, ce qui prouve que $\phi \in \operatorname{Dom} |D|^{j+2}$.

Finalement, si on pose $j = k-1$, on obtient $\phi \in \operatorname{Dom}|D|^k$, et donc $\operatorname{Dom}(\mathcal{D}_A)^k \subseteq \operatorname{Dom}|D|^k$.

(ii) se déduit de $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_A \subseteq \bigcap_{k\geq 1}\operatorname{Dom}(\mathcal{D}_A)^k$ et (i).

(iii) Vérifions d'abord que $|D|^\alpha P_A$ est borné. On définit D_0 comme l'opérateur avec domaine $\operatorname{Dom} D_0 = \operatorname{Im} P_A \cap \operatorname{Dom}|D|^\alpha$ et tel que $D_0\,\phi = |D|^\alpha\,\phi$. Puisque $\operatorname{Dom} D_0$ est de dimension finie, D_0 s'étend en un opérateur borné sur $\mathcal{H}$ avec rang fini. Nous avons

$$\sup_{\phi\in\operatorname{Dom}|D|^\alpha P_A,\ \|\phi\|\leq 1} \||D|^\alpha P_A\,\phi\| \leq \sup_{\phi\in\operatorname{Dom} D_0,\ \|\phi\|\leq 1} \||D|^\alpha\,\phi\| = \|D_0\| < \infty$$

donc $|D|^\alpha P_A$ est borné.

On peut remarquer que d'après (ii), $\operatorname{Dom} D_0 = \operatorname{Im} P_A$ et $\operatorname{Dom}|D|^\alpha P_A = \mathcal{H}$.

Montrons maintenant que $P_A|D|^\alpha$ est borné : Soit $\phi \in \operatorname{Dom} P_A|D|^\alpha = \operatorname{Dom}|D|^\alpha$. D'après (ii), nous avons $\operatorname{Im} P_A \subseteq \operatorname{Dom}|D|^\alpha$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\|P_A|D|^\alpha\,\phi\| &\leq \sup_{\psi\in\operatorname{Im} P_A,\ \|\psi\|\leq 1} |<\psi, |D|^\alpha\,\phi>| \leq \sup_{\psi\in\operatorname{Im} P_A,\ \|\psi\|\leq 1} |<|D|^\alpha\psi, \phi>| \\ &\leq \sup_{\psi\in\operatorname{Im} P_A,\ \|\psi\|\leq 1} \||D|^\alpha\psi\|\,\|\phi\| = \|D_0\|\,\|\phi\|\,.\end{aligned}$$

(iv) Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ et $t \in \mathbb{R}$, $\delta^k(P_A)|D|^t$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $|D|^\beta P_A|D|^\alpha$, donc le résultat se déduit de (iii). □

Remarque 1.3.2. *Nous verrons plus loin sur le tore non commutatif que $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}+A$ produisent des actions spectrales très différentes. En particulier, l'inclusion* $\operatorname{Ker}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{D} + A$ *n'est pas satisfaite puisque A ne préserve pas* $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$ *contrairement à $\widetilde{A}$.*

Le coefficient du terme non constant Λ^k $(k > 0)$ dans le développement (1.6) de l'action spectrale $S(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda)$ est égal au résidu de $\zeta_{D_A}(s)$ en k. Nous verrons dans cette section comment calculer ces résidus en fonction d'intégrales non commutative de certains opérateurs.

Posons pour tout opérateur T, $p \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$,

$$K_p(T,s) := (-\tfrac{s}{2})^p \int_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_p\leq 1} \sigma_{-st_1}(T)\cdots\sigma_{-st_p}(T)\,dt$$

avec $dt := dt_1\cdots dt_p$.

Notons que si $T \in OP^\alpha$, alors $\sigma_z(T) \in OP^\alpha$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $K_p(T,s) \in OP^{\alpha p}$.

On définit

$$\begin{aligned} X &:= \mathcal{D}_A^2 - \mathcal{D}^2 = \widetilde{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{A} + \widetilde{A}^2, \\ X_V &:= X + V_A, \end{aligned}$$

ainsi, $X \in \mathcal{D}_1(\mathcal{A}) \cap OP^1$ et d'après le Lemme 1.3.1,

$$X_V \sim X \mod OP^{-\infty}. \tag{1.7}$$

On utilisera

$$Y := \log(D_A^2) - \log(D^2)$$

où $D_A^2 = \mathcal{D}_A^2 + P_A$ est inversible pour tout A.

Par définition de X_V, on obtient

$$Y = \log(D^2 + X_V) - \log(D^2).$$

Lemme 1.3.3. *[22]*

(i) Y est un opérateur pseudodifférentiel dans OP^{-1} avec le développement suivant pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$Y \sim \sum_{p=1}^{N} \sum_{k_1,\cdots,k_p=0}^{N-p} \frac{(-1)^{|k|_1+p+1}}{|k|_1+p} \nabla^{k_p}(X\nabla^{k_{p-1}}(\cdots X\nabla^{k_1}(X)\cdots))D^{-2(|k|_1+p)} \mod OP^{-N-1}.$$

(ii) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{C}$,

$$|D_A|^{-s} \sim |D|^{-s} + \sum_{p=1}^{N} K_p(Y,s)|D|^{-s} \mod OP^{-N-1-\Re(s)}. \tag{1.8}$$

Démonstration. (i) On suit [22, Lemme 2.2]. D'après le calcul fonctionnel, $Y = \int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda$, où

$$I(\lambda) \sim \sum_{p=1}^{N} (-1)^{p+1}\big((D^2+\lambda)^{-1}X_V\big)^p (D^2+\lambda)^{-1} \mod OP^{-N-3}.$$

D'après (1.7), $\big((D^2+\lambda)^{-1}X_V\big)^p \sim \big((D^2+\lambda)^{-1}X\big)^p \mod OP^{-\infty}$ et on obtient

$$I(\lambda) \sim \sum_{p=1}^{N} (-1)^{p+1}\big((D^2+\lambda)^{-1}X\big)^p (D^2+\lambda)^{-1} \mod OP^{-N-3}.$$

On pose $A_p(X) := \big((D^2+\lambda)^{-1}X\big)^p (D^2+\lambda)^{-1}$ et $L := (D^2+\lambda)^{-1} \in OP^{-2}$ pour un λ fixé. Puisque $[D^2+\lambda, X] \sim \nabla(X) \mod OP^{-\infty}$, une récurrence prouve que si T est un opérateur dans OP^r, alors, pour $q \in \mathbb{N}_0$,

$$A_1(T) = LTL \sim \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \nabla^k(T) L^{k+2} \mod OP^{r-q-5}.$$

Avec $A_p(X) = LXA_{p-1}(X)$, une autre récurrence donne pour tout $q \in \mathbb{N}_0$,

$$A_p(X) \sim \sum_{k_1,\cdots,k_p=0}^{q} (-1)^{|k|_1} \nabla^{k_p}(X\nabla^{k_{p-1}}(\cdots X\nabla^{k_1}(X)\cdots))L^{|k|_1+p+1} \mod OP^{-q-p-3},$$

ce qui implique que

$$I(\lambda) \sim \sum_{p=1}^{N} (-1)^{p+1} \sum_{k_1,\cdots,k_p=0}^{N-p} (-1)^{|k|_1} \nabla^{k_p}(X\nabla^{k_{p-1}}(\cdots X\nabla^{k_1}(X)\cdots))L^{|k|_1+p+1} \mod OP^{-N-3}.$$

Avec $\int_0^\infty (D^2+\lambda)^{-(|k|_1+p+1)} d\lambda = \frac{1}{|k|_1+p} D^{-2(|k|_1+p)}$, on obtient le résultat si on a un contrôle du reste. Un tel contrôle est donné dans [22, (2.27)].

(ii) Nous avons $|D_A|^{-s} = e^{B-(s/2)Y} e^{-B} |D|^{-s}$ où $B := (-s/2)\log(D^2)$. En suivant [22, Theorem 2.4], on obtient

$$|D_A|^{-s} = |D|^{-s} + \sum_{p=1}^{\infty} K_p(Y,s)|D|^{-s}. \tag{1.9}$$

et chaque $K_p(Y,s)$ est dans OP^{-p}. □

Corollaire 1.3.4. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $r_1, \cdots, r_p \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon^{r_1}(Y) \cdots \varepsilon^{r_p}(Y) \in \Psi_1(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Si pour tous $q \in \mathbb{N}$ et $k = (k_1, \cdots, k_q) \in \mathbb{N}_0^q$,

$$\Gamma_q^k(X) := \tfrac{(-1)^{|k|_1+q+1}}{|k|_1+q} \nabla^{k_q}(X \nabla^{k_{q-1}}(\cdots X \nabla^{k_1}(X) \cdots)),$$

alors, $\Gamma_q^k(X) \in OP^{|k|_1+q}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$Y \sim \sum_{q=1}^{N} \sum_{k_1,\cdots,k_q=0}^{N-q} \Gamma_q^k(X) D^{-2(|k|_1+q)} \mod OP^{-N-1}. \tag{1.10}$$

Note que les opérateurs $\Gamma_q^k(X)$ sont dans $\mathcal{D}_1(\mathcal{A})$, ce qui prouve, avec (1.10) que Y et donc $\varepsilon^r(Y) = \nabla^r(Y) D^{-2r}$, sont dans $\Psi_1(\mathcal{A})$. □

Nous remarquons que les fluctuations laissent invariant le premier terme de l'action spectrale (1.6). C'est une généralisation du fait que dans le cas commutatif, l'intégrale non commutative $⨍ |D|^{-n}$ ne dépend que du symbole principal de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ et ce symbole est stable par ajout d'un potentiel de jauge A. Notons cependant que le potentiel symétrisé $A + \epsilon J A J^{-1}$ est toujours nul dans ce cas si A est auto-adjointe.

Lemme 1.3.5. *Si le triplet spectral est simple,*

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = \sum_{q=1}^{n} \tfrac{(-1)^q}{q} ⨍ (\widetilde{A} D^{-1})^q. \tag{1.11}$$

Démonstration. Puisque le triplet spectral est simple, l'équation (1.9) implique que

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = \mathrm{Tr}(K_1(Y,s)|D|^{-s})_{|s=0}\,.$$

Ainsi, avec (1.4), on obtient $\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = -\frac{1}{2} ⨍ Y$. En replaçant A par $\widetilde{A}$, la même preuve que dans [22] donne

$$-\tfrac{1}{2} ⨍ Y = \sum_{q=1}^{n} \tfrac{(-1)^q}{q} ⨍ (\widetilde{A} D^{-1})^q.$$ □

Lemme 1.3.6. *Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,*

$$\operatorname*{Res}_{s=n-k} \zeta_{D_A}(s) = \operatorname*{Res}_{s=n-k} \zeta_D(s) + \sum_{p=1}^{k} \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{k-p} \operatorname*{Res}_{s=n-k} h(s,r,p)\ \mathrm{Tr}\left(\varepsilon^{r_1}(Y) \cdots \varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-s}\right),$$

où

$$h(s,r,p) := (-s/2)^p \int_{0 \le t_1 \le \cdots \le t_p \le 1} g(-st_1, r_1) \cdots g(-st_p, r_p)\, dt\,.$$

Démonstration. D'après le Lemme 1.3.3 (ii), nous avons $|D_A|^{-s} \sim |D|^{-s} + \sum_{p=1}^{k} K_p(Y,s)|D|^{-s}$ mod $OP^{-(k+1)-\Re(s)}$, où la convention $\sum_{\emptyset} = 0$ est utilisée. Ainsi, on obtient pour s dans un voisinage de $n-k$,

$$|D_A|^{-s} - |D|^{-s} - \sum_{p=1}^{k} K_p(Y,s)|D|^{-s} \in OP^{-(k+1)-\Re(s)} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$$

ce qui donne

$$\operatorname*{Res}_{s=n-k} \zeta_{D_A}(s) = \operatorname*{Res}_{s=n-k} \zeta_D(s) + \sum_{p=1}^{k} \operatorname*{Res}_{s=n-k} \operatorname{Tr}\big(K_p(Y,s)|D|^{-s}\big). \tag{1.12}$$

Fixons $1 \leq p \leq k$ et $N \in \mathbb{N}$. D'après (1.4) on obtient

$$K_p(Y,s) \sim (-\tfrac{s}{2})^p \int_{0\leq t_1 \leq \cdots t_p \leq 1} \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{N} g(-st_1,r_1)\cdots g(-st_p,r_p) \\ \varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)\,dt \quad \text{mod } OP^{-N-p-1}. \tag{1.13}$$

Si on pose $N = k-p$, on obtient pour s dans un voisinage de $n-k$

$$K_p(Y,s)|D|^{-s} - \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{k-p} h(s,r,p)\,\varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-s} \in OP^{-k-1-\Re(s)} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$$

donc (1.12) implique le résultat. □

Les opérateurs $|D_A|^k$ sont des opérateurs pseudodifférentiels :

Lemme 1.3.7. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|D_A|^k \in \Psi^k(\mathcal{A})$.*

Démonstration. En utilisant (1.13), on voit que $K_p(Y,s)$ est un opérateur pseudodifférentiel dans OP^{-p}, et donc (1.8) montre que $|D_A|^k$ est un opérateur pseudodifférentiel dans OP^k. □

Le résultat suivant montre que l'on peut utiliser D ou D_A pour l'intégrale non commutative :

Proposition 1.3.8. *Si le triplet spectral est simple,* $\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(P|D_A|^{-s}\big) = ⨍ P$ *pour tout opérateur pseudodifférentiel P. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$*

$$⨍ |D_A|^{-(n-k)} = \operatorname*{Res}_{s=n-k} \zeta_{D_A}(s).$$

Démonstration. Supposons $P \in OP^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et posons $p \geq 1$. Avec (1.13), il apparaît que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$PK_p(Y,s)|D|^{-s} \sim \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{N} h(s,r,p)\,P\varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-s} \quad \text{mod } OP^{-N-p-1+k-\Re(s)}.$$

Ainsi si on pose $N = n - p + k$, on obtient

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(PK_p(Y,s)|D|^{-s}\big) = \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{n-p+k} \operatorname*{Res}_{s=0} h(s,r,p) \operatorname{Tr}\big(P\varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-s}\big).$$

Puisque $s = 0$ un zéro de la fonction $s \mapsto h(s,r,p)$ et $s \mapsto \operatorname{Tr} P\varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-s}$ n'a que des pôles simples par hypothèse, on voit que $\operatorname*{Res}_{s=0} h(s,r,p) \operatorname{Tr}\big(P\varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-s}\big) = 0$ et

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(PK_p(Y,s)|D|^{-s}\big) = 0. \tag{1.14}$$

D'après (1.8), $P|D_A|^{-s} \sim P|D|^{-s} + \sum_{p=1}^{k+n} PK_p(Y,s)|D|^{-s} \mod OP^{-n-1-\Re(s)}$ et ainsi,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}(P|D_A|^{-s}) = ⨍ P + \sum_{p=1}^{k+n} \operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(PK_p(Y,s)|D|^{-s}\big). \tag{1.15}$$

Le résultat se déduit donc de (1.14) et (1.15). Pour obtenir la dernière égalité, on utilise l'opérateur pseudodifférentiel $|D_A|^{-(n-k)}$. □

Proposition 1.3.9. *Si le triplet spectral est simple, alors*

$$⨍ |D_A|^{-n} = ⨍ |D|^{-n}. \tag{1.16}$$

Démonstration. Le Lemme 1.3.6 et la proposition précédente pour $k = 0$ donnent le résultat. □

Lemme 1.3.10. *Si le triplet spectral est simple,*

(*i*) $⨍ |D_A|^{-(n-1)} = ⨍ |D|^{-(n-1)} - (\frac{n-1}{2}) ⨍ X|D|^{-n-1}$.

(*ii*) $⨍ |D_A|^{-(n-2)} = ⨍ |D|^{-(n-2)} + \frac{n-2}{2}\big(- ⨍ X|D|^{-n} + \frac{n}{4} ⨍ X^2|D|^{-2-n}\big)$.

Démonstration. (*i*) D'après (1.8),

$$\operatorname*{Res}_{s=n-1} \zeta_{D_A}(s) - \zeta_D(s) = \operatorname*{Res}_{s=n-1} (-s/2) \operatorname{Tr}\big(Y|D|^{-s}\big) = -\tfrac{n-1}{2} \operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(Y|D|^{-(n-1)}|D|^{-s}\big)$$

où pour la dernière égalité on utilise le caractère simple du spectre de dimension. Le Lemme 1.3.3 (*i*) implique $Y \sim XD^{-2} \mod OP^{-2}$ et $Y|D|^{-(n-1)} \sim X|D|^{-n-1} \mod OP^{-n-1} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. Ainsi,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(Y|D|^{-(n-1)}|D|^{-s}\big) = \operatorname*{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(X|D|^{-n-1}|D|^{-s}\big) = ⨍ X|D|^{-n-1}.$$

(*ii*) Le Lemme 1.3.6 (*ii*) donne

$$\operatorname*{Res}_{s=n-2} \zeta_{D_A}(s) = \operatorname*{Res}_{s=n-2} \zeta_D(s) + \operatorname*{Res}_{s=n-2} \sum_{r=0}^{1} h(s,r,1) \operatorname{Tr}\big(\varepsilon^r(Y)|D|^{-s}\big) + h(s,0,2) \operatorname{Tr}\big(Y^2|D|^{-s}\big).$$

Nous avons $h(s,0,1) = -\frac{s}{2}$, $h(s,1,1) = \frac{1}{2}(\frac{s}{2})^2$ et $h(s,0,2) = \frac{1}{2}(\frac{s}{2})^2$. En utilisant encore une fois le Lemme 1.3.3 (i),

$$Y \sim XD^{-2} - \tfrac{1}{2}\nabla(X)D^{-4} - \tfrac{1}{2}X^2D^{-4} \mod OP^{-3}.$$

Ainsi,

$$\operatorname*{Res}_{s=n-2} \operatorname{Tr}\big(Y|D|^{-s}\big) = ⨍ X|D|^{-n} - \tfrac{1}{2}⨍(\nabla(X) + X^2)|D|^{-2-n}.$$

De plus, d'après $⨍ \nabla(X)|D|^{-k} = 0$ pour tout $k \geq 0$ puisque $⨍$ is a trace,

$$\operatorname*{Res}_{s=n-2} \operatorname{Tr}\big(\varepsilon(Y)|D|^{-s}\big) = \operatorname*{Res}_{s=n-2} \operatorname{Tr}\big(\nabla(X)D^{-4}|D|^{-s}\big) = ⨍ \nabla(X)|D|^{-2-n} = 0.$$

De façon similaire, puisque $Y \sim XD^{-2} \mod OP^{-2}$ et $Y^2 \sim X^2D^{-4} \mod OP^{-3}$, on obtient

$$\operatorname*{Res}_{s=n-2} \operatorname{Tr}\big(Y^2|D|^{-s}\big) = \operatorname*{Res}_{s=n-2} \operatorname{Tr}\big(X^2D^{-4}|D|^{-s}\big) = ⨍ X^2|D|^{-2-n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=n-2} \zeta_{D_A}(s) = \operatorname*{Res}_{s=n-2} \zeta_D(s) + (-\tfrac{n-2}{2})\big(⨍ X|D|^{-n} - \tfrac{1}{2}⨍(\nabla(X) + X^2)|D|^{-2-n}\big)\\ + \tfrac{1}{2}(\tfrac{n-2}{2})^2⨍ \nabla(X)|D|^{-2-n} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{n-2}{2})^2⨍ X^2|D|^{-2-n}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\operatorname*{Res}_{s=n-2} \zeta_{D_A}(s) = \operatorname*{Res}_{s=n-2} \zeta_D(s) + (-\tfrac{n-2}{2})\big(⨍ X|D|^{-n} - \tfrac{1}{2}⨍ X^2|D|^{-2-n}\big) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{n-2}{2})^2⨍ X^2|D|^{-2-n}$$

et le résultat se déduit de la Proposition 1.3.8. □

Corollaire 1.3.11. *Si le triplet spectral est simple et satisfait* $⨍ |D|^{-(n-2)} = ⨍ \widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-n} = ⨍ \mathcal{D}\widetilde{A}|D|^{-n} = 0$, *alors*

$$⨍ |D_A|^{-(n-2)} = \tfrac{n(n-2)}{4}\big(⨍ \widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-n-2} + \tfrac{n-2}{n}⨍ \widetilde{A}^2|D|^{-n}\big).$$

Démonstration. D'après le lemme précédent,

$$\operatorname*{Res}_{s=n-2} \zeta_{D_A}(s) = \tfrac{n-2}{2}\big(-⨍ \widetilde{A}^2|D|^{-n} + \tfrac{n}{4}⨍(\widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A} + \widetilde{A}\mathcal{D}^2\widetilde{A} + \mathcal{D}\widetilde{A}^2\mathcal{D})|D|^{-n-2}\big).$$

Puisque $\nabla(\widetilde{A}) \in OP^1$, la propriété de trace de $⨍$ donne le résultat. □

1.4 Intégrales non commutatives et tadpoles

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, J)$ un triplet spectral réel régulier de dimension d. Rappelons qu'une 1-forme A est une somme finie d'opérateurs du type $a_1[\mathcal{D}, a_2]$ où $a_i \in \mathcal{A}$. L'ensemble des 1-formes est noté $\Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$.

Lemme 1.4.1. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{H})$ *un triplet spectral et* $X \in \Psi(\mathcal{A})$. *Alors*

$$\fint X^* = \overline{\fint X}.$$

Si le triplet spectral est réel, alors, pour $X \in \Psi(\mathcal{A})$, $JXJ^{-1} \in \Psi(\mathcal{A})$ *et*

$$\fint JXJ^{-1} = \fint X^* = \overline{\fint X}.$$

Démonstration. Le premier résultat découle de (pour s suffisament grand, afin que les opérateurs soient à trace)

$$\mathrm{Tr}(X^*|\mathcal{D}|^{-s}) = \mathrm{Tr}\left((|\mathcal{D}|^{-\bar{s}})X)^*\right) = \overline{\mathrm{Tr}(|\mathcal{D}|^{-\bar{s}}X)} = \overline{\mathrm{Tr}(X|\mathcal{D}|^{-\bar{s}})}.$$

Le deuxième resultat est dû à l'antilinearité de J, $\mathrm{Tr}(JYJ^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(Y)}$, et $J|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}|J$, de telle sorte que

$$\mathrm{Tr}(X|\mathcal{D}|^{-s}) = \overline{\mathrm{Tr}(JX|\mathcal{D}|^{-s}J^{-1})} = \overline{\mathrm{Tr}(JXJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-\bar{s}})}.$$ □

Corollaire 1.4.2. *Pour toute 1-forme* $A = A^*$, *et pour* k, $l \in \mathbb{N}$,

$$\fint A^l\,\mathcal{D}^{-k} \in \mathbb{R}, \quad \fint \left(A\mathcal{D}^{-1}\right)^k \in \mathbb{R}, \quad \fint A^l\,|\mathcal{D}|^{-k} \in \mathbb{R}, \quad \fint \chi A^l\,|\mathcal{D}|^{-k} \in \mathbb{R}, \quad \fint A^l\,\mathcal{D}\,|\mathcal{D}|^{-k} \in \mathbb{R}.$$

Dans [37], est introduite la définition suivante :

Définition 1.4.3. Dans un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, le tadpole $Tad_{\mathcal{D}+A}(k)$ d'ordre k, pour $k \in \{\, d - l \,:\, l \in \mathbb{N}\,\}$ est le terme linéaire en $A = A^* \in \Omega^1_{\mathcal{D}}$, dans le terme en Λ^k de (1.6) (considerée comme une série formelle) où $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A$.

Si, de plus, le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, J)$ est réel, le tadpole $Tad_{\mathcal{D}+\tilde{A}}(k)$ est le terme linéaire en A, dans le terme en Λ^k de (1.6) où $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + \widetilde{A}$.

Proposition 1.4.4. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ *un triplet spectral de dimension* d *à spectre de dimension simple. Alors*

$$\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+A}(d-k) = -(d-k)\fint A\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-(d-k)-2}, \quad \forall k \neq d, \tag{1.17}$$

$$\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+A}(0) = -\fint A\mathcal{D}^{-1}. \tag{1.18}$$

De plus, si le triplet is réel, $\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+\widetilde{A}} = 2\,\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+A}$.

Démonstration. D'après le Lemme 1.3.6 et la Proposition 1.3.8, nous avons la formule suivante, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\fint |\mathcal{D}_A|^{-(d-k)} = \fint |\mathcal{D}|^{-(d-k)} + \sum_{p=1}^{k} \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{k-p} \operatorname*{Res}_{s=d-k} h(s,r,p)\ \mathrm{Tr}\left(\varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|\mathcal{D}|^{-s}\right),$$

où

$$
\begin{aligned}
&h(s,r,p) := (-s/2)^p \int_{0\le t_1\le\cdots\le t_p\le 1} g(-st_1,r_1)\cdots g(-st_p,r_p)\,dt,\\
&\varepsilon^r(T) := \nabla(T)\mathcal{D}^{-2r},\ \nabla(T) := [\mathcal{D}^2,T],\\
&g(z,r) := \tbinom{z/2}{r} \text{ avec } g(z,0) := 1,\\
&Y \sim \sum_{q=1}^{N}\sum_{k_1,\cdots,k_q=0}^{N-q} \Gamma_q^k(X)\mathcal{D}^{-2(|k|_1+q)} \mod OP^{-N-1} \text{ pour tout N} \in \mathbb{N}^*,\\
&X := \widetilde{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{A} + \widetilde{A}^2, \widetilde{A} := A + \epsilon JAJ^{-1},\\
&\Gamma_q^k(X) := \tfrac{(-1)^{|k|_1+q+1}}{|k|_1+q}\nabla^{k_q}\left(X\nabla^{k_{q-1}}(\cdots X\nabla^{k_1}(X)\cdots)\right),\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\ k=(k_1,\cdots,k_q)\in\mathbb{N}^q.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, pour $k \neq n$, seuls les termes avec $p = 1$ contribuent à la partie linéaire:

$$
\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+\widetilde{A}}(d-k) = \mathrm{Lin}_A(⨍ |\mathcal{D}_A|^{-(d-k)}) = \sum_{r=0}^{k-1} \operatorname*{Res}_{s=d-k} h(s,r,1)\ \mathrm{Tr}\left(\varepsilon^r(\mathrm{Lin}_A(Y))|\mathcal{D}|^{-s}\right).
$$

On vérifie que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$
\mathrm{Lin}_A(Y) \sim \sum_{l=0}^{N-1} \Gamma_1^l(\widetilde{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{A})\mathcal{D}^{-2(l+1)} \mod OP^{-N-1}.
$$

Puisque $\Gamma_1^l(\widetilde{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{A}) = \frac{(-1)^l}{l+1}\nabla^l(\widetilde{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{A}) = \frac{(-1)^l}{l+1}\{\nabla^l(\widetilde{A}), \mathcal{D}\}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+\widetilde{A}}(d-k) &= \sum_{r=0}^{k-1} \operatorname*{Res}_{s=d-k} h(s,r,p)\ \mathrm{Tr}\left(\varepsilon^r(\mathrm{Lin}_A(Y))|\mathcal{D}|^{-s}\right)\\
&= \sum_{r=0}^{k-1} h(d-k,r,1) \sum_{l=0}^{k-1-r} \tfrac{(-1)^l}{l+1} \operatorname*{Res}_{s=d-k} \mathrm{Tr}\left(\varepsilon^r(\{\nabla^l(\widetilde{A}),\mathcal{D}\})|\mathcal{D}|^{-s-2(l+1)}\right)\\
&= 2\sum_{r=0}^{k-1} h(d-k,r,1) \sum_{l=0}^{k-1-r} \tfrac{(-1)^l}{l+1} ⨍ \nabla^{r+l}(\widetilde{A})\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-(d-k+2(r+l))-2}\\
&= -(d-k) ⨍ \widetilde{A}\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-(d-k)-2},
\end{aligned}
$$

puisque dans le dernière somme, il ne reste que le cas $r + l = 0$, et donc $r = l = 0$.

La formule (1.18) est une application directe de (1.11).

Le lien entre $\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+\widetilde{A}}$ et $\mathrm{Tad}_{\mathcal{D}+A}$ se déduit de $J\mathcal{D} = \epsilon\mathcal{D}J$ et du Lemme 1.4.1. □

Corollaire 1.4.5. *Dans un triplet spectral réel* $(\mathcal{A}, H, \mathcal{D})$*, si* $A = A^* \in \Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ *est tel que* $\widetilde{A} = 0$*, alors* $\mathrm{Tad}_{D+A}(k) = 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*,* $k \le d$*.*

Remarque 1.4.6. *Notons que* $\tilde{A} = 0$ *pour tout* $A = A^* \in \Omega^1_{\mathcal{D}}$*, lorsque* $\mathcal{A}$ *est commutatif et* $JaJ^{-1} = a^*$*, pour tout* $a \in \mathcal{A}$*, d'après* (5.10)*.*

Mais il est possible d'avoir $\mathcal{A}$ commutative et $JaJ^{-1} \neq a^*$ [33, 94]:
Soit $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ représentée sur $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^3$ avec, pour un nombre complexe $m \neq 0$,

$$\pi_1(a) := \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}, \ for\ a = (b_1,\, b_2) \in \mathcal{A}$$

$$\mathcal{D}_1 := \begin{pmatrix} 0 & m & m \\ \bar{m} & 0 & 0 \\ \bar{m} & 0 & b \end{pmatrix}, \ \chi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ J_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ cc$$

où cc est la conjugation complexe. Alors $(\mathcal{A}_1,\, \mathcal{H}_1,\, \mathcal{D}_1)$ est un triplet spectral commutatif de dimension $d = 0$ avec des 1-formes non nulles et tel que $J_1\pi_1(a)J_1^{-1} = \pi_1(a^*)$ seulement si $a = (b_1, b_1)$.

Prenons une géométrie non commutative $\big(\mathcal{A}_2 = C^\infty(M),\, \mathcal{H} = L^2(M, S),\, \mathcal{D}_2,\, \chi_2,\, J_2\big)$ (Définition 5.3.1) où $d = dimM$ est pair. On considère le produit tensoriel des deux triplets spectraux $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \otimes \chi_2 + 1 \otimes \mathcal{D}_2$, $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ et J est soit $\chi_1 J_1 \otimes J_2$ quand $d \in \{\, 2, 6 \,\}$ mod 8 ou $J_1 \otimes J_2$ dans les autres cas, voir [33, 140].

On peut alors constater que $(\mathcal{A},\, \mathcal{H},\, \mathcal{D})$ est un triplet spectral commutatif réel de dimension d tel que $\tilde{A} \neq 0$ pour une 1-forme auto-adjointe A, et donc n'est pas exactement comme dans la Définition 5.3.1.

L'hypothèse de l'annulation des tadpoles à l'ordre de zéro est équivalente à (voir [22]):

$$⨍ A\mathcal{D}^{-1} = 0,\ \forall A \in \Omega^1_D(\mathcal{A}) \iff ⨍ ab = ⨍ a\alpha(b),\ \forall a, b \in \mathcal{A}, \tag{1.19}$$

où $\alpha(b) := \mathcal{D}b\mathcal{D}^{-1}$. Cette équivalence peut être généralisée :

Lemme 1.4.7. *Dans un triplet spectral $(\mathcal{A},\, \mathcal{H},\, \mathcal{D})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^n = 0,\ \forall A \in \Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}),\ \forall n \in \{\, 1, \cdots, k \,\} \iff ⨍ \prod_{j=1}^{k} a_j\alpha(b_j) = ⨍ \prod_{j=1}^{k} a_j b_j,\ \forall a_j,\, b_j \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. Notons que $a[\mathcal{D}, b]\mathcal{D}^{-1} = a\,\tilde{\alpha}(b)$ où $\tilde{\alpha}(b) := \alpha(b) - b$.

En supposant $⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= ⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^n = ⨍ a_1\tilde{\alpha}(b_1) \dots a_j\tilde{\alpha}(b_j) \dots a_n\tilde{\alpha}(b_n) \\ &= ⨍ a_1\tilde{\alpha}(b_1) \dots a_j\alpha(b_j)a_{j+1}\tilde{\alpha}(b_{j+1}) \dots a_k\tilde{\alpha}(b_k) - ⨍ a_1\tilde{\alpha}(b_1) \dots a_j b_j a_{j+1}\tilde{\alpha}(b_j) \dots a_n\tilde{\alpha}(b_n) \end{aligned}$$

$\forall\, a_j,\, b_j \in \mathcal{A}$. Le dernier terme est nul si $⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^{n-1} = 0$ pour tout A. Par induction, on obtient $0 = ⨍ a_1\alpha(b_1) \cdots a_{n-1}\alpha(b_{n-1})\, a_n\tilde{\alpha}(b_n)$. En faisant varier n entre 1 et k, on obtient le résultat. □

Chapitre 2

Prolongements holomorphes et résidus de séries de fonctions zêta

Puisque le calcul des résidus de fonctions zêta est particulièrement important pour la détermination de l'action spectrale, nous étudions dans ce chapitre certaines propriétés d'analycité et de prolongement méromorphe de séries de certaines fonctions zêta avec phase. En particulier, nous verrons au chapitre suivant qu'une condition diophantienne sur la matrice de déformation du tore Θ permet d'obtenir un calcul explicite des pôles et des résidus associés aux termes de l'action spectrale du tore non commutatif pour l'opérateur $\mathcal{D}_A$.

Dans ce qui suit, le symbole prime dans $\sum'$ signifie que nous omettons les termes comprenant une division par zéro dans la sommation. On notera B^n (resp. S^{n-1}) la boule fermée (resp. la sphère) de $\mathbb{R}^n$ avec centre 0 et rayon 1 et la mesure de Lebesgue sur S^{n-1} sera notée dS.

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nous notons $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ la norme euclidienne et $|x|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ l'ensemble des entiers postifs.

La notation $f(x, y) \ll_y g(x)$ uniformément en x signifie que $|f(x, y)| \leq a(y)\, |g(x)|$ pour tout x et y et pour un $a(y) > 0$.

2.1 Résidus de séries et intégrales

Afin de pouvoir calculer les résidus de certaines séries de fonctions zêta, on prouve ici le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{d} P_j(X) \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme où P_j est la partie homogène de P de degré j. La fonction*

$$\zeta^P(s) := \sum\nolimits'_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{|k|^s}, \quad s \in \mathbb{C}$$

a une extension méromorphe au plan complexe $\mathbb{C}$.

De plus, $\zeta^P(s)$ est non entière si et seulement si $\mathcal{P}_P := \{j \ : \ \int_{u \in S^{n-1}} P_j(u)\, dS(u) \neq 0\} \neq \varnothing$. Dans ce cas, ζ^P n'a que des pôles simples aux points $j + n$, $j \in \mathcal{P}_P$, avec

$$\operatorname*{Res}_{s=j+n} \zeta^P(s) = \int_{u \in S^{n-1}} P_j(u)\, dS(u).$$

La preuve de ce théorème est basée sur les lemmes suivants.

Lemme 2.1.2. *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré total $\delta(P) := \sum_{i=1}^n deg_{X_i} P$ et si $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, nous avons*

$$\partial^\alpha \left(P(x)|x|^{-s}\right) \ll_{P,\alpha,n} (1+|s|)^{|\alpha|_1} |x|^{-\sigma-|\alpha|_1+\delta(P)}$$

uniformément en $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|x| \geq 1$, où $\sigma = \Re(s)$.

Démonstration. Par linéarité, on peut supposer que $P(X) = X^\gamma$ est un monôme. On vérifie par induction sur $|\alpha|_1$ que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\partial^\alpha \left(|x|^{-s}\right) = \alpha! \sum_{\substack{\beta,\mu \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta+2\mu=\alpha}} \binom{-s/2}{|\beta|_1+|\mu|_1} \frac{(|\beta|_1+|\mu|_1)!}{\beta!\ \mu!} \frac{x^\beta}{|x|^{\sigma+2(|\beta|_1+|\mu|_1)}}.$$

On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, nous avons uniformément en $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|x| \geq 1$:

$$\partial^\alpha \left(|x|^{-s}\right) \ll_{\alpha,n} (1+|s|)^{|\alpha|_1} |x|^{-\sigma-|\alpha|_1}. \tag{2.1}$$

D'après la formle de Leibniz (2.1), nous avons uniformément en $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|x| \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \left(x^\gamma |x|^{-s}\right) &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta(x^\gamma)\ \partial^{\alpha-\beta}\left(|x|^{-s}\right) \\
&\ll_{\gamma,\alpha,n} \sum_{\beta \leq \alpha; \beta \leq \gamma} x^{\gamma-\beta}\ (1+|s|)^{|\alpha|_1-|\beta|_1}\ |x|^{-\sigma-|\alpha|_1+|\beta|_1} \\
&\ll_{\gamma,\alpha,n} (1+|s|)^{|\alpha|_1}\ |x|^{-\sigma-|\alpha|_1+|\gamma|_1}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.1.3. *[73] Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme de degré d. Alors, la différence*

$$\Delta_P(s) := \sum\nolimits'_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{|k|^s} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n} \frac{P(x)}{|x|^s}\, dx$$

qui est définie pour $\Re(s) > d+n$, s'étend holomorphiquement sur le plan complexe $\mathbb{C}$.

Démonstration. Nous fixons dans la suite une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$0 \leq \psi(x) \leq 1, \quad \psi(x) = 1 \text{ si } |x| \geq 1 \quad \text{et} \quad \psi(x) = 0 \text{ si } |x| \leq 1/2.$$

La fonction $f(x,s) := \psi(x)\ P(x)\ |x|^{-s}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $s \in \mathbb{C}$, est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C})$ et dépend holomorphiquement de s.

Le Lemme 2.1.2 précédent montre que f est un "symbole jaugé" dans la terminologie de [73, p. 4]. Ainsi, [73, Théorème 2.1] implique que $\Delta_P(s)$ s'étend holomorphiquement sur le plan complexe $\mathbb{C}$. Cependant, afin d'être exhaustif, nous allons donner ici une preuve du Lemme 2.1.3.

On déduit de la formule de Euler–Maclaurin formula que pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ vérifiant $\lim_{|t| \to +\infty} h^{(k)}(t) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} |h^{(k)}(t)|\ dt < +\infty$ pour tout $k = 0 \ldots, N+1$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) = \int_{\mathbb{R}} h(t) + \frac{(-1)^N}{(N+1)!} \int_{\mathbb{R}} B_{N+1}(t)\ h^{(N+1)}(t)\ dt$$

où B_{N+1} est la fonction de Bernoulli d'ordre $N+1$ (c'est une fonction borné périodique).

On fixe $m' \in \mathbb{Z}^{n-1}$ et $s \in \mathbb{C}$. En appliquant ceci à la fonction suivante $h(t) := \psi(m',t)\ P(m',t)\ |(m',t)|^{-s}$ (on utilise le Lemme 2.1.2 pour vérifier les hypothèses), nous obtenons que pour tout $N \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{m_n \in \mathbb{Z}} \psi(m',m_n)\ P(m',m_n)\ |(m',m_n)|^{-s} = \int_{\mathbb{R}} \psi(m',t)\ P(m',t)\ |(m',t)|^{-s}\ dt + \mathcal{R}_N(m';s) \quad (2.2)$$

où $\mathcal{R}_N(m';s) := \frac{(-1)^N}{(N+1)!} \int_{\mathbb{R}} B_{N+1}(t)\ \frac{\partial^{N+1}}{\partial {x_n}^{N+1}} \left(\psi(m',t)\ P(m',t)\ |(m',t)|^{-s}\right)\ dt.$
D'après le Lemme 2.1.2,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| B_{N+1}(t)\ \frac{\partial^{N+1}}{\partial {x_n}^{N+1}} \left(\psi(m',t)\ P(m',t)\ |(m',t)|^{-s}\right) \right|\ dt \ll_{P,n,N} (1+|s|)^{N+1}\ (|m'|+1)^{-\sigma-N+\delta(P)}.$$

Ainsi $\sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \mathcal{R}_N(m';s)$ converge absolument et définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\sigma = \Re(s) > \delta(P) + n - N\}$.

Puisque N est un entier arbitraire, en prenant $N \to \infty$ et en utilisant (2.2), on conclut que :

$$s \mapsto \sum_{(m',m_n) \in \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}} \psi(m',m_n)\ P(m',m_n)\ |(m',m_n)|^{-s} - \sum_{m' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \psi(m',t)\ P(m',t)\ |(m',t)|^{-s}\ dt$$

a une extension holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Après n itérations, nous obtenons que

$$s \mapsto \sum\nolimits_{m \in \mathbb{Z}^n} \psi(m)\ P(m)\ |m|^{-s} - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\ P(x)\ |x|^{-s}\ dx$$

has une extension holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Pour finir la preuve du Lemme 2.1.3, il est suffisant de noter que

- $\psi(0) = 0$ et $\psi(m) = 1$, $\forall m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$;
- $s \mapsto \int_{B^n} \psi(x)\ P(x)\ |x|^{-s}\ dx = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : 1/2 \le |x| \le 1\}} \psi(x)\ P(x)\ |x|^{-s}\ dx$ est une fonction holomorphie sur $\mathbb{C}$. □

Démonstration du Théorème 2.1.1. En utilisant la décomposition polaire de la forme volume $dx = \rho^{n-1}\, d\rho\, dS$ de $\mathbb{R}^n$, on obtient pour $\Re(s) > d+n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n} \frac{P_j(x)}{|x|^s} dx = \int_1^\infty \frac{\rho^{j+n-1}}{\rho^s} \int_{S^{n-1}} P_j(u)\, dS(u) = \frac{1}{j+n-s} \int_{S^{n-1}} P_j(u)\, dS(u).$$

Le Lemme 2.1.3 donne alors le résultat. □

2.2 Holomorphie de certaines séries

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous présentons ici quelque notions de théorie de l'approximation diophantienne.

Définition 2.2.1. (i) Soit $\delta > 0$. Un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ est dit $\delta-$diophantient si il existe $c > 0$ tel que $|q.a - m| \geq c\,|q|^{-\delta}$, $\forall q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$.
On note $\mathcal{BV}(\delta)$ l'ensemble des vecteurs $\delta-$diophantiens et $\mathcal{BV} := \cup_{\delta>0}\mathcal{BV}(\delta)$ l'ensemble des vecteurs diophantiens.

(ii) Une matrice $\Theta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite diophantienne s'il existe $u \in \mathbb{Z}^n$ tel que ${}^t\Theta(u)$ soit un vecteur diophantien de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. Un résultat classique de l'approximation diophantienne dit que pour tout $\delta > n$, la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{BV}(\delta)$ est nulle (i.e presque tout élément de $\mathbb{R}^n$ est $\delta-$diophantien).

Soit $\Theta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si sa ligne d'indice i est un vecteur diophantien de $\mathbb{R}^n$ (i.e. si $L_i \in \mathcal{BV}$) alors ${}^t\Theta(e_i) \in \mathcal{BV}$ et ainsi Θ est une matrice diophantienne. Il en résulte que presque toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ est diophantienne.

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.2. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ un polynôme homogène de degré d et soit b dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n \times \cdots \times \mathbb{Z}^n)$ (q fois, $q \in \mathbb{N}$).*

(i) Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On pose $f_a(s) := \sum'_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{|k|^s}\, e^{2\pi i k.a}$.

1. Si $a \in \mathbb{Z}^n$, alors f_a s'étend méromorphiquement au plan complexe $\mathbb{C}$. De plus, f_a n'est pas entière si et seulement si $\int_{u\in S^{n-1}} P(u)\, dS(u) \neq 0$. Dans ce cas f_a n'a que des pôles simples aux points $d+n$, avec $\operatorname*{Res}_{s=d+n} f_a(s) = \int_{u\in S^{n-1}} P(u)\, dS(u)$.

2. Si $a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$, alors $f_a(s)$ s'étend holomorphiquement au plan complexe $\mathbb{C}$.

(ii) Soit $\Theta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diophantienne. Pour tout $(\varepsilon_i)_i \in \{-1, 0, 1\}^q$, la fonction

$$g(s) := \sum\nolimits_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q} b(l)\, f_{\Theta \sum_i \varepsilon_i l_i}(s)$$

s'étend méromorphiquement au plan complexe $\mathbb{C}$ avec au plus un pôle simple en $s = d+n$.

De plus, si on note $\mathcal{Z} := \{l \in (\mathbb{Z}^n)^q \ : \ \sum_{i=1}^q \varepsilon_i l_i = 0\}$ et $V := \sum_{l\in\mathcal{Z}} b(l)$, alors

1. Si $V \int_{S^{n-1}} P(u)\, dS(u) \neq 0$, alors $s = d+n$ est un pôle simple de $g(s)$ et

$$\operatorname*{Res}_{s=d+n} g(s) = V \int_{u\in S^{n-1}} P(u)\, dS(u).$$

2. Si $V \int_{S^{n-1}} P(u)\, dS(u) = 0$, alors $g(s)$ s'étend holomorphiquement au plan complexe $\mathbb{C}$.

(iii) Soit $\Theta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diophantienne. Pour tout $(\varepsilon_i)_i \in \{-1, 0, 1\}^q$, la fonction

$$g_0(s) := \sum\nolimits_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l)\, f_{\Theta \sum_{i=1}^q \varepsilon_i l_i}(s)$$

où $\mathcal{Z} := \{l \in (\mathbb{Z}^n)^q \ : \ \sum_{i=1}^q \varepsilon_i l_i = 0\}$ s'étend holomorphiquement au plan complexe $\mathbb{C}$.

Démonstration du Théorème 2.2.2 : Tout d'abord nous remarquons que si $a \in \mathbb{Z}^n$ alors $f_a(s) = \sum'_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{|k|^s}$. Ainsi, le point $(i.1)$ est une conséquence du Théorème 2.1.1. D'autre part, $g(s) := \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l)\, f_{\Theta \sum_i \varepsilon_i l_i}(s) + \big(\sum_{l\in\mathcal{Z}} b(l)\big) \sum'_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{|k|^s}$. Ainsi, le point (ii) est une conséquence de (iii) et du Théorème 2.1.1.

Ainsi, pour compléter la preuve, il reste à prouver $(i.2)$ et (iii).

La preuve directe de $(i.2)$ est simple mais n'est pas suffisante pour déduire (iii) qui nécessite une analyse plus délicate et une version plus précise du point $(i.2)$. Le prochain lemme donne une telle version cruciale, mais avant, donnons quelques notations :

$$\mathcal{F} := \{\tfrac{P(X)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2+1)^{r/2}} \ : \ P(X) \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n] \text{ et } r \in \mathbb{N}_0\}.$$

On pose $g = \deg(G) = \deg(P) - r \in \mathbb{Z}$, le degré de $G = \frac{P(X)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2+1)^{r/2}} \in \mathcal{F}$. Par convention on pose $\deg(0) = -\infty$.

Lemme 2.2.3. *Pour $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $d\,(a.u,\mathbb{Z}) := \inf_{m\in\mathbb{Z}} |a.u-m| > 0$ pour un $u \in \mathbb{Z}^n$. Pour tout $G \in \mathcal{F}$, on définit formellement,*

$$F_0(G;a;s) := \sum\nolimits'_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{G(k)}{|k|^s}\, e^{2\pi i\, k.a} \quad \textit{et} \quad F_1(G;a;s) := \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{G(k)}{(|k|^2+1)^{s/2}}\, e^{2\pi i\, k.a}.$$

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, tout $G \in \mathcal{F}$ et tout $i \in \{0,1\}$, il existe des constantes positives $C_i := C_i(G,N,u)$, $B_i := B_i(G,N,u)$ et $A_i := A_i(G,N,u)$ telles que $s \mapsto F_i(G;\alpha;s)$ s'étende holomorphiquement sur le demi-plan $\{\Re(s) > -N\}$ et vérifie :

$$|F_i(G;a;s)| \le C_i(1+|s|)^{B_i}\left(d\,(a.u,\mathbb{Z})\,\right)^{-A_i}.$$

Remarque 2.2.4. *Le point important ici est que nous obtenons une borne explicite de $F_i(G;\alpha;s)$ dans $\{\Re(s) > -N\}$ qui dépend des vecteurs a seulement par $d(a.u,\mathbb{Z})$, et donc dépend de u et indirectement de a (dans la suite, a sera variable). En particulier, les constantes $C_i := C_i(G,N,u)$, $B_i = B_i(G,N)$ et $A_i := A_i(G,N)$ ne dépendent pas du vecteur a mais seulement de u. Ceci est crucial pour la preuve des points (ii) et (iii) du Théorème 2.2.2 !*

2.2.1 Démonstration du Lemme 2.2.3 pour $i = 1$:

Pour $N \in \mathbb{N}_0$ un entier fixé, posons $g_0 := n + N + 1$.
Nous allons prouver le Lemme 2.2.3 par induction sur $g = \deg(G) \in \mathbb{Z}$. Plus précisément afin de prouver le cas $i = 1$, il suffit de prouver que :

1. le Lemme 2.2.3 est vrai pour tout $G \in \mathcal{F}$ satisfaisant $\deg(G) \le -g_0$.

2. Soit $g \in \mathbb{Z}$ avec $g \ge -g_0 + 1$. Si le Lemme 2.2.3 est vrai pour tout $G \in \mathcal{F}$ tel que $\deg(G) \le g - 1$, alors il est aussi vrai pour tout $G \in \mathcal{F}$ satisfaisant $\deg(G) = g$.

• Étape 1: vérification du Lemme 2.2.3 pour $\deg(G) \le -g_0 := -(n+N+1)$.

Soit $G(X) = \frac{P(X)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2+1)^{r/2}} \in \mathcal{F}$ vérifiant $\deg(G) \le -g_0$. Il est aisé de constater que nous avons uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ et en $k \in \mathbb{Z}^n$

$$\tfrac{|G(k)\, e^{2\pi i\, k.a}|}{(|k|^2+1)^{\sigma/2}} = \tfrac{|P(k)|}{(|k|^2+1)^{(r+\sigma)/2}} \ll_G \tfrac{1}{(|k|^2+1)^{(r+\sigma-deg(P))/2}} \ll_G \tfrac{1}{(|k|^2+1)^{(\sigma-deg(G))/2}} \ll_G \tfrac{1}{(|k|^2+1)^{(\sigma+g_0)/2}}.$$

Il en résulte que $F_1(G;a;s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{G(k)}{(|k|^2+1)^{s/2}}\, e^{2\pi i\, k.a}$ converge absolument et définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\sigma > -N\}$. Ainsi, nous avons pour tout $s \in \{\Re(s) > -N\}$:

$$|F_1(G;a;s)| \ll_G \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{1}{(|k|^2+1)^{(-N+g_0)/2}} \ll_G \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{1}{(|k|^2+1)^{(n+1)/2}} \ll_G 1.$$

Ainsi, le Lemme 2.2.3 est vrai lorsque $\deg(G) \le -g_0$.

- Étape 2: induction.

Posons maintenant $g \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $g \geq -g_0+1$ et supposons que le Lemme 2.2.3 soit valide pour tout $G \in \mathcal{F}$ vérifiant $\deg(G) \leq g-1$. Soit $G \in \mathcal{F}$ avec $\deg(G) = g$. Nous allons prouver que G vérifie aussi les conclusions du Lemme 2.2.3:

Il existe $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré $d \geq 0$ et $r \in \mathbb{N}_0$ tel que $G(X) = \frac{P(X)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2+1)^{r/2}}$ et $g = \deg(G) = d-r$.

Puisque $G(k) \ll (|k|^2+1)^{g/2}$ uniformément en $k \in \mathbb{Z}^n$, on en déduit que $F_1(G;a;s)$ converge absolument sur $\{\sigma = \Re(s) > n+g\}$.

Puisque $k \mapsto k+u$ est une bijection de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{Z}^n$, il en résulte que pour $\Re(s) > n+g$

$$\begin{aligned}
F_1(G;a;s) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{P(k)}{(|k|^2+1)^{(s+r)/2}}\, e^{2\pi i\, k.a} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{P(k+u)}{(|k+u|^2+1)^{(s+r)/2}}\, e^{2\pi i\,(k+u).a} \\
&= e^{2\pi i\, u.a} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{P(k+u)}{(|k|^2+2k.u+|u|^2+1)^{(s+r)/2}}\, e^{2\pi i\, k.a} \\
&= e^{2\pi i\, u.a} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n;|\alpha|_1=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leq d} \tfrac{u^\alpha}{\alpha!} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{\partial^\alpha P(k)}{(|k|^2+2k.u+|u|^2+1)^{(s+r)/2}}\, e^{2\pi i\, k.a} \\
&= e^{2\pi i\, u.a} \sum_{|\alpha|_1\leq d} \tfrac{u^\alpha}{\alpha!} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{\partial^\alpha P(k)}{(|k|^2+1)^{(s+r)/2}} \big(1+\tfrac{2k.u+|u|^2}{(|k|^2+1)}\big)^{-(s+r)/2}\, e^{2\pi i\, k.a}.
\end{aligned}$$

Soit $M := \sup(N+n+g, 0) \in \mathbb{N}_0$. Nous avons uniformément en $k \in \mathbb{Z}^n$

$$\big(1+\tfrac{2k.u+|u|^2}{(|k|^2+1)}\big)^{-(s+r)/2} = \sum_{j=0}^{M} \tbinom{-(s+r)/2}{j} \tfrac{\big(2k.u+|u|^2\big)^j}{(|k|^2+1)^j} + O_{M,u}\big(\tfrac{(1+|s|)^{M+1}}{(|k|^2+1)^{(M+1)/2}}\big).$$

Ainsi, pour $\sigma = \Re(s) > n+d$,

$$\begin{aligned}
F_1(G;a;s) &= e^{2\pi i\, u.a} \sum_{|\alpha|_1\leq d} \tfrac{u^\alpha}{\alpha!} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{\partial^\alpha P(k)}{(|k|^2+1)^{(s+r)/2}} \big(1+\tfrac{2k.u+|u|^2}{(|k|^2+1)}\big)^{-(s+r)/2} e^{2\pi i\, k.a} \\
&= e^{2\pi i\, u.a} \sum_{|\alpha|_1\leq d} \sum_{j=0}^{M} \tfrac{u^\alpha}{\alpha!} \tbinom{-(s+r)/2}{j} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{\partial^\alpha P(k)\big(2k.u+|u|^2\big)^j}{(|k|^2+1)^{(s+r+2j)/2}}\, e^{2\pi i\, k.a} \\
&\qquad + O_{G,M,u}\big((1+|s|)^{M+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{1}{(|k|^2+1)^{(\sigma+M+1-g)/2}}\big). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Posons $I := \{(\alpha,j) \in \mathbb{N}_0^n \times \{0,\ldots,M\} \mid |\alpha|_1 \leq d\}$ et $I^* := I \setminus \{\,(0,0)\,\}$.

Posons aussi $G_{(\alpha,j);u}(X) := \frac{\partial^\alpha P(X)\big(2X.u+|u|^2\big)^j}{(|X|^2+1)^{(r+2j)/2}} \in \mathcal{F}$ pour tout $(\alpha,j) \in I^*$.

Puisque $M \geq N+n+g$, il apparaît d'après (2.3) que

$$(1-e^{2\pi i\, u.a})\; F_1(G;a;s) = e^{2\pi i\, u.a} \sum_{(\alpha,j)\in I^*} \tfrac{u^\alpha}{\alpha!} \tbinom{-(s+r)/2}{j} F_1\big(G_{(\alpha,j);u};\alpha;s\big) + R_N(G;a;u;s) \qquad (2.4)$$

où $s \mapsto R_N(G;a;u;s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\sigma = \Re(s) > -N\}$, qui vérifie $R_N(G;a;u;s) \ll_{G,N,u} 1$.

De plus, on peut vérifier aisément que pour tout $(\alpha,j) \in I^*$,

$$\deg\big(G_{(\alpha,j);u}\big) = \deg(\partial^\alpha P) + j - (r+2j) \leq d - |\alpha|_1 + j - (r+2j) = g - |\alpha|_1 - j \leq g-1.$$

La relation (2.4) et l'hypothèse d'induction impliquent alors que

$$(1 - e^{2\pi i\, u.a})\ F_1(G; a; s) \text{ vérifie les conclusions du Lemme 2.2.3.} \tag{2.5}$$

Puisque $|1-e^{2\pi i\, u.a}| = 2|\sin(\pi u.a)| \geq d\,(u.a, \mathbb{Z})$, la relation (2.5) implique que $F_1(G; a; s)$ satisfait les conclusions du Lemme 2.2.3. Ceci termine l'induction et la preuve pour $i = 1$.

2.2.2 Démonstration du Lemme 2.2.3 pour $i = 0$:

Soit $N \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Soit $G(X) = \frac{P(X)}{(X_1^2+\cdots+X_n^2+1)^{r/2}} \in \mathcal{F}$ et $g = \deg(G) = d - r$ où $d \geq 0$ est le degré du polynôme P. On pose $M := \sup(N + g + n, 0) \in \mathbb{N}_0$.

Puisque $P(k) \ll |k|^d$ pour $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\,0\,\}$, il en résulte que $F_0(G; a; s)$ et $F_1(G; a; s)$ convergent absolument dans le demi-plan $\{\sigma = \Re(s) > n + g\}$.
De plus, nous avons pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > n + g$:

$$\begin{aligned}
F_0(G; a; s) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\,0\,\}} \tfrac{G(k)}{(|k|^2+1-1)^{s/2}}\, e^{2\pi i\, k.a} = {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{G(k)}{(|k|^2+1)^{s/2}} \Big(1 - \tfrac{1}{|k|^2+1}\Big)^{-s/2}\, e^{2\pi i\, k.a} \\
&= {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \sum_{j=0}^{M} \tbinom{-s/2}{j} (-1)^j \tfrac{G(k)}{(|k|^2+1)^{(s+2j)/2}}\, e^{2\pi i\, k.a} \\
&\qquad + O_M\Big((1+|s|)^{M+1} {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{|G(k)|}{(|k|^2+1)^{(\sigma+2M+2)/2}}\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{M} \tbinom{-s/2}{j} (-1)^j F_1(G; a; s+2j) \\
&\qquad + O_M\Big[(1+|s|)^{M+1}\Big(1 + {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{|G(k)|}{(|k|^2+1)^{(\sigma+2M+2)/2}}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous avons uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > -N$,

$${\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{|G(k)|}{(|k|^2+1)^{(\sigma+2M+2)/2}} \ll {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{|k|^g}{(|k|^2+1)^{(-N+2M+2)/2}} \ll {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{1}{|k|^{n+1}} < +\infty.$$

Ainsi (2.6) et le Lemme 2.2.3 pour $i = 1$ impliquent que le Lemme 2.2.3 est aussi vrai pour $i = 0$. Ceci termine la preuve du Lemme 2.2.3. □

2.2.3 Démonstration du point $(i.2)$ du Théorème 2.2.2 :

Puisque $a \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i_0} \notin \mathbb{Z}$. En particulier $d(a.e_{i_0}, \mathbb{Z}) = d(a_{i_0}, \mathbb{Z}) > 0$. Par conséquent, a satisfait les conditions du Lemme 2.2.3 avec $u = e_{i_0}$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $s \mapsto f_a(s) = F_0(P; a; s)$ s'étend holomorphiquement au demi-plan $\{\Re(s) > -N\}$. Il en résulte, en prenant $N \to \infty$, que $s \mapsto f_a(s)$ a une extension holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2.2.4 Démonstration du point (iii) du Théorème 2.2.2:

Soient $\Theta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\varepsilon_i)_i \in \{-1, 0, 1\}^q$ et $b \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$. On suppose que Θ est une matrice diophantienne. Posons $\mathcal{Z} := \{\, l = (l_1, \ldots, l_q) \in (\mathbb{Z}^n)^q \ :\ \sum_i \varepsilon_i l_i = 0\,\}$ et $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ de

degré $d \geq 0$.
On peut vérifier aisément que pour $\sigma > n + d$:

$$\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} |b(l)| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{|P(k)|}{|k|^\sigma} \left|e^{2\pi i\, k.\Theta \sum_i \varepsilon_i l_i}\right| \ll_P \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} |b(l)| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{1}{|k|^{\sigma-d}} \ll_{P,\sigma} \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} |b(l)| < +\infty.$$

Ainsi

$$g_0(s) := \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l)\, f_{\Theta \sum_i \varepsilon_i l_i}(s) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l) \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{P(k)}{|k|^s} e^{2\pi i\, k.\Theta \sum_i \varepsilon_i l_i}$$

converge absolument dans le demi-plan $\{\Re(s) > n + d\}$.
De plus, avec les notations du Lemme 2.2.3, nous avons pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > n + d$:

$$g_0(s) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l) f_{\Theta \sum_i \varepsilon_i l_i}(s) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l) F_0(P; \Theta \sum\nolimits_i \varepsilon_i l_i; s) \tag{2.7}$$

Puisque Θ est diophantienne, il existe $u \in \mathbb{Z}^n$ et $\delta, c > 0$ tels que

$$|q.\,{}^t\Theta u - m| \geq c\,(1 + |q|)^{-\delta},\ \forall q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\,0\,\},\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que $\forall l \in (\mathbb{Z}^n)^q \setminus \mathcal{Z}$,

$$|\big(\Theta \sum\nolimits_i \varepsilon_i l_i\big).u - m| = |\big(\sum\nolimits_i \varepsilon_i l_i\big).{}^t\Theta u - m| \geq c\,\big(1 + |\sum\nolimits_i \varepsilon_i l_i|\big)^{-\delta} \geq c\,(1 + |l|)^{-\delta}.$$

Il en résulte qu'il existe $u \in \mathbb{Z}^n$, $\delta > 0$ et $c > 0$ tels que

$$\forall l \in (\mathbb{Z}^n)^q \setminus \mathcal{Z}, \quad d\big((\Theta \sum\nolimits_i \varepsilon_i l_i).u; \mathbb{Z}\big) \geq c\,(1 + |l|)^{-\delta}. \tag{2.8}$$

Ainsi, pour tout $l \in (\mathbb{Z}^n)^q \setminus \mathcal{Z}$, le vecteur $a = \Theta \sum_i \varepsilon_i l_i$ vérifie les conditions du Lemme 2.2.3 avec le même u. De plus δ et c dans (2.8) sont aussi indépendant de l.
Nous fixons maintenant $N \in \mathbb{N}$. Le Lemme 2.2.3 implique qu'il existe des constantes positives $C_0 := C_0(P, N, u)$, $B_0 := B_i(P, N, u)$ et $A_0 := A_0(P, N, u)$ telles que pour tout $l \in (\mathbb{Z}^n)^q \setminus \mathcal{Z}$, $s \mapsto F_0(P; \Theta \sum_i \varepsilon_i l_i; s)$ s'étende *holomorphiquement* sur le demi-plan $\{\Re(s) > -N\}$ et vérifie

$$F_0(P; \Theta \sum_i \varepsilon_i l_i; s) \leq C_0\,(1 + |s|)^{B_0}\ d\big((\Theta \sum\nolimits_i \varepsilon_i l_i).u; \mathbb{Z}\big)^{-A_0}.$$

Ceci et (2.8) impliquent que pour tout compact K inclus dans le demi-plan $\{\Re(s) > -N\}$, il existe deux constantes $C := C(P, N, c, \delta, u, K)$ et $D := D(P, N, c, \delta, u)$ (indépendantes de $l \in (\mathbb{Z}^n)^q \setminus \mathcal{Z}$) telles que

$$\forall s \in K \text{ et } \forall l \in (\mathbb{Z}^n)^q \setminus \mathcal{Z}, \quad F_0(P; \Theta \sum_i \varepsilon_i l_i; s) \leq C\,(1 + |l|)^D. \tag{2.9}$$

Il en résulte que $s \mapsto \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l) F_0(P; \Theta \sum_i \varepsilon_i l_i; s)$ a une extension holomorphe sur le demi-plan $\{\Re(s) > -N\}$.
Ceci et (2.7) impliquent que $s \mapsto g_0(s) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q\setminus\mathcal{Z}} b(l) f_{\Theta \sum_i \varepsilon_i l_i}(s)$ a une extension holomorphe sur $\{\Re(s) > -N\}$. Puisque N est un entier arbitraire, en prenant $N \to \infty$, il en résulte que $s \mapsto g_0(s)$ a une extension holomorphe sur $\mathbb{C}$, ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Remarque 2.2.5. *D'après l'équation (2.5), nous voyons que la condition diophantienne est suffisante pour obtenir le Lemme 2.2.3. Notre condition diophantienne apparaît aussi (sous une forme équivalente) dans [27, Prop. 49] (voir Remarque 4.2). L'argument heuristique suivant montre que notre condition semble être nécessaire pour obtenir le résultat du Théorème 2.2.2: Supposons pour simplifier que $n = 1$ (l'argument s'étend aisément à tout n).*
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Rappelons la formule de réflexion [52, p. 6] selon laquelle pour tout $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$g_{\theta l}(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}{}' \frac{e^{2\pi i\theta lk}}{|k|^s} = \frac{\pi^{s-1/2}}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}\Gamma(\tfrac{s}{2})\ h_{\theta l}(1-s) \text{ où } h_{\theta l}(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{|\theta l+k|^s}.$$

Ainsi, pour tout $(a_l) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, l'existence d'un prolongement méromorphe de la fonction $g_0(s) := \sum'_{l\in\mathbb{Z}} a_l\, g_{\theta l}(s)$ est équivalent à l'existence d'un prolongement méromorphe de

$$h_0(s) := \sum_{l\in\mathbb{Z}}{}' a_l\, h_{\theta l}(s) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}{}' a_l \sum_{k\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{|\theta l+k|^s}.$$

Donc pour au moins un $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, nous devons avoir $\frac{|a_l|}{|\theta l+k|^{\sigma_0}} = O(1)$ uniformly in $k, l \in \mathbb{Z}^*$.

It en résulte que pour tout $(a_l) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, $|\theta l + k| \gg |a_l|^{1/\sigma_0}$ uniformément en $k, l \in \mathbb{Z}^*$. Par conséquent notre condition diophantienne semble nécessaire.

2.2.5 Commutation entre somme et résidu

Soit $p \in \mathbb{N}$. Rappelons que $\mathcal{S}((\mathbb{Z}^n)^p)$ est l'ensemble des suites de Schwartz sur $(\mathbb{Z}^n)^p$. En d'autre termes, $b \in \mathcal{S}((\mathbb{Z}^n)^p)$ si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{N}_0$, $(1 + |l_1|^2 + \cdots |l_p|^2)^r\, |b(l_1, \cdots, l_p)|^2$ est borné sur $(\mathbb{Z}^n)^p$. On remarque que si $Q \in \mathbb{R}[X_1, \cdots, X_{np}]$ est un polynôme, $(a_j) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)^p$, $b \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ et ϕ une fonction à valeurs réelles, alors $l := (l_1, \cdots, l_p) \mapsto \widetilde{a}(l)\, b(-\widehat{l_p})\, Q(l)\, e^{i\phi(l)}$ est un suite de Schwartz sur $(\mathbb{Z}^n)^p$, où

$$\widetilde{a}(l) := a_1(l_1) \cdots a_p(l_p),$$
$$\widehat{l_i} := l_1 + \ldots + l_i.$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons plusieurs fois le fait que pour tout $(k, l) \in (\mathbb{Z}^n)^2$ tel que $k \neq 0$ et $k \neq -l$, nous avons

$$\frac{1}{|k+l|^2} = \frac{1}{|k|^2} - \frac{2k.l + |l|^2}{|k|^2|k+l|^2}. \tag{2.10}$$

Lemme 2.2.6. *Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \cdots, X_p]$ de degré $4p$ et avec des coefficients positifs tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, et $l := (l_1, \cdots, l_p) \in (\mathbb{Z}^n)^p$ tel que $k \neq 0$ et $k \neq -\widehat{l_i}$ pour tout $1 \leq i \leq p$,*

$$\frac{1}{|k+\widehat{l_1}|^2 \ldots |k+\widehat{l_p}|^2} \leq \frac{1}{|k|^{2p}}\ P(|l_1|, \cdots, |l_p|).$$

Démonstration. Fixons i tel que $1 \leq i \leq p$. En utilisant deux fois (2.10), l'inégalité de Cauchy–Schwarz et $|k + \widehat{l_i}|^2 \geq 1$,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{|k+\widehat{l_i}|^2} &\leq \tfrac{1}{|k|^2} + \tfrac{2|k||\widehat{l_i}|+|\widehat{l_i}|^2}{|k|^4} + \tfrac{(2|k||\widehat{l_i}|+|\widehat{l_i}|^2)^2}{|k|^4|k+\widehat{l_i}|^2}\\ &\leq \tfrac{1}{|k|^2} + \tfrac{2}{|k|^3}|\widehat{l_i}| + \big(\tfrac{1}{|k|^4} + \tfrac{4}{|k|^2}\big)|\widehat{l_i}|^2 + \tfrac{4}{|k|^3}|\widehat{l_i}|^3 + \tfrac{1}{|k|^4}|\widehat{l_i}|^4.\end{aligned}$$

Puisque $|k| \geq 1$, et $|\widehat{l_i}|^j \leq |\widehat{l_i}|^4$ si $1 \leq j \leq 4$, on obtient

$$\frac{1}{|k+\widehat{l_i}|^2} \leq \frac{5}{|k|^2}\sum_{j=0}^{4} |\widehat{l_i}|^j \leq \frac{5}{|k|^2}\big(1+4|\widehat{l_i}|^4\big) \leq \frac{5}{|k|^2}\big(1+4(\sum_{j=1}^{p}|l_j|)^4\big),$$
$$\frac{1}{|k+\widehat{l_1}|^2\ldots|k+\widehat{l_p}|^2} \leq \frac{5^p}{|k|^{2p}}\big(1+4(\sum_{j=1}^{p}|l_j|)^4\big)^p.$$

En prenant $P(X_1,\cdots,X_p) := 5^p\big(1+4(\sum_{j=1}^{p}X_j)^4\big)^p$ on obtient le résultat. □

Lemme 2.2.7. *Soient $b \in \mathcal{S}((\mathbb{Z}^n)^p)$, $p \in \mathbb{N}$, $P_j \in \mathbb{R}[X_1,\cdots,X_n]$ un polynôme homogène de degré j, $k \in \mathbb{Z}^n$, $l := (l_1,\cdots,l_p) \in (\mathbb{Z}^n)^p$, $r \in \mathbb{N}_0$, ϕ une fonction à valeurs réelles sur $\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z}^n)^p$ et*

$$h(s,k,l) := \frac{b(l)\,P_j(k)\,e^{i\phi(k,l)}}{|k|^{s+r}|k+\widehat{l_1}|^2\cdots|k+\widehat{l_p}|^2}\,,$$

avec $h(s,k,l) := 0$ si, pour $k \neq 0$, un des dénominateurs est nul.

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > n+j-r-2p$, la série

$$H(s) := \sum\nolimits'_{(k,l)\in(\mathbb{Z}^n)^{p+1}} h(s,k,l)$$

est absolument sommable. En particulier,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p} h(s,k,l) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' h(s,k,l)\,.$$

Démonstration. Soit $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > n+j-r-2p$. D'après le Lemme 2.2.6 on obtient, pour $k \neq 0$,

$$|h(s,k,l)| \leq |b(l)\,P_j(k)|\,|k|^{-r-\sigma-2p}\,P(l),$$

où $P(l) := P(|l_1|,\cdots,|l_p|)$ et P est un polynôme de degré $4p$ avec coefficients positifs. Ainsi, $|h(s,k,l)| \leq F(l)\,G(k)$ où $F(l) := |b(l)|\,P(l)$ et $G(k) := |P_j(k)||k|^{-r-\sigma-2p}$. La sommabilité de $\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p} F(l)$ est une conséquence du fait que $b \in \mathcal{S}((\mathbb{Z}^n)^p)$. La sommabilité de $\sum'_{k\in\mathbb{Z}^n} G(k)$ résulte de $\sigma > n+j-r-2p$. Finalement, en tant que produit de deux séries sommables $\sum_{k,l} F(l)G(k)$ est une série sommable, ce qui prouve que $\sum_{k,l} h(s,k,l)$ est aussi absolument sommable. □

Définition 2.2.8. Soit f une fonction sur $D \times (\mathbb{Z}^n)^p$ où D est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$.

On dit que f satisfait (H1) si et seulement si il existe $\rho > 0$ tel que

(i) pour tout l, $s \mapsto f(s,l)$ s'étend en une fonction holomorphe sur U_ρ, où U_ρ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ,

(ii) la série $\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p} \|H(\cdot,l)\|_{\infty,\rho}$ est sommable, où $\|H(\cdot,l)\|_{\infty,\rho} := \sup_{s\in U_\rho}|H(s,l)|$.

On dit que f satisfait (H2) si et seulement si il existe $\rho > 0$ tel que

(i) pour tout l, $s \mapsto f(s,l)$ s'étend en une fonction holomorphe sur $U_\rho - \{0\}$,

(ii) pour tout δ tel que $0 < \delta < \rho$, la série $\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p} \|H(\cdot,l)\|_{\infty,\delta,\rho}$ est sommable, où $\|H(\cdot,l)\|_{\infty,\delta,\rho} := \sup_{\delta<|s|<\rho}|H(s,l)|$.

Remarque 2.2.9. *Notons que (H1) implique (H2). De plus, si f satisfait (H1) (resp. (H2) pour $\rho > 0$, alors il est aisé de vérifier que $f : s \mapsto \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p} f(s,l)$ s'étend en une fonction holomorphe sur U_ρ (resp. on $U_\rho \setminus \{0\}$).*

Corollaire 2.2.10. *Avec les mêmes notations que le Lemme 2.2.7, supposons que $r+2p-j>n$. La fonction $H(s,l) := \sum'_{k\in\mathbb{Z}^n} h(s,k,l)$ satisfait (H1).*

Démonstration. (i) Fixons $\rho>0$ tel que $\rho<r+2p-j-n$. Puisque $r+2p-j>n$, U_ρ est à l'intérieur du demi-plan de convergence absolue de la série définie par $H(s,l)$. Ainsi, $s\mapsto H(s,l)$ est holomorphe sur U_ρ.
(ii) Puisque $\big||k|^{-s}\big| \le |k|^\rho$ pour tout $s\in U_\rho$ et $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$, on obtient comme dans la preuve précédente

$$|h(s,k,l)| \le |b(l)\,P_j(k)|\,|k|^{-r+\rho-2p}\,P(|l_1|,\cdots,|l_p|).$$

Puisque $\rho<r+2p-j-n$, la série $\sum'_{k\in\mathbb{Z}^n}|P_j(k)||k|^{-r+\rho-2p}$ est sommable.

Ainsi, $\|H(\cdot,l)\|_{\infty,\rho} \le K\,F(l)$ où $K := \sum_k{}'|P_j(k)||k|^{-r+\rho-2p}<\infty$. Nous avons déjà vu que la série $\sum_l F(l)$ est sommable, ce qui implique le résultat. □

Notons que si f et g satisfont (H1) (ou (H2)), alors c'est aussi le cas de $f+g$. Nous pouvons donc définir la relation d'équivalence

$$f\sim g \Longleftrightarrow f-g \text{ satisfait (H1)}.$$

Lemme 2.2.11. *Soient f et g des fonctions sur $D\times(\mathbb{Z}^n)^p$ où D est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$, telles que $f\sim g$. Si g satisfait (H2), alors*

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p} f(s,l) = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p}\operatorname*{Res}_{s=0} g(s,l)\,.$$

Démonstration. Puisque $f\sim g$, f satisfait (H2) pour un certain $\rho>0$. On fixe η tel que $0<\eta<\rho$ et on définit C_η comme le cercle de centre 0 et de rayon η. On a

$$\operatorname*{Res}_{s=0} g(s,l) = \operatorname*{Res}_{s=0} f(s,l) = \tfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_\eta} f(s,l)\,ds = \int_I u(t,l)dt\,.$$

où $I=[0,2\pi]$ et

$$u(t,l) := \tfrac{1}{2\pi}\eta e^{it} f(\eta\, e^{it},l)\,.$$

Le fait que f satisfait (H2) implique que la série $\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p}\|f(\cdot,l)\|_{\infty,C_\eta}$ est sommable. Ainsi, puisque $\|u(\cdot,l)\|_\infty = \frac{1}{2\pi}\eta\,\|f(\cdot,l)\|_{\infty,C_\eta}$, la série $\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p}\|u(\cdot,l)\|_\infty$ est sommable, donc, par conséquent, $\int_I\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p}u(t,l)dt = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^p}\int_I u(t,l)dt$ ce qui donne le résultat. □

2.3 Calculs de résidus de fonctions zêta

Définition 2.3.1.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty n^{-s},$$
$$Z_n(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}'\,|k|^{-s},$$
$$\zeta_{p_1,\dots,p_n}(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}'\,\frac{k_1^{p_1}\cdots k_n^{p_n}}{|k|^s}\ \text{, pour } p_i\in\mathbb{N},$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann [51, 76].

Par symétrie $k \to -k$, il est clair que ces fonctions $\zeta_{p_1,\dots,p_n}$ sont toutes nulles pour des valeurs impaires de p_i.

Calculons $\zeta_{0,\cdots,0,1_i,0\cdots,0,1_j,0\cdots,0}(s)$ en termes de $Z_n(s)$:
Puisque $\zeta_{0,\cdots,0,1_i,0\cdots,0,1_j,0\cdots,0}(s) = A_i(s)\,\delta_{ij}$, en échangeant les composantes k_i et k_j, on obtient

$$\zeta_{0,\cdots,0,1_i,0\cdots,0,1_j,0\cdots,0}(s) = \tfrac{\delta_{ij}}{n}\, Z_n(s-2).$$

De façon similaire,

$$\sum\nolimits'_{\mathbb{Z}^n} \tfrac{k_1^2 k_2^2}{|k|^{s+8}} = \tfrac{1}{n(n-1)} Z_n(s+4) - \tfrac{1}{n-1} \sum\nolimits'_{\mathbb{Z}^n} \tfrac{k_1^4}{|k|^{s+8}}$$

mais il est difficile d'exprimer explicitement $\zeta_{p_1,\dots,p_n}(s)$ en termes de $Z_n(s-m)$ lorsque au moins quatre indices p_i sont non nuls.

Lorsque tous les p_i sont pairs, $\zeta_{p_1,\dots,p_n}(s)$ est une série non nulle de fractions $\frac{P(k)}{|k|^s}$ où P est un polynôme homogène de degré $p_1 + \cdots + p_n$. Le Théorème 2.1.1 donne maintenant la proposition suivante :

Proposition 2.3.2. *$\zeta_{p_1,\dots,p_n}$ a une extension méromorphe sur le plan complexe avec un unique pôle en $n + p_1 + \cdots + p_n$. Ce pôle est simple et le résidu en ce pôle est*

$$\operatorname*{Res}_{s=n+p_1+\cdots+p_n} \zeta_{p_1,\dots,p_n}(s) = 2\,\frac{\Gamma(\frac{p_1+1}{2})\cdots\Gamma(\frac{p_n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+p_1+\cdots+p_n}{2})} \tag{2.11}$$

lorsque tous les p_i sont pairs. Ce résidu est nul dans le cas contraire.
En particulier, pour $n = 2$,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}' \tfrac{k_i k_j}{|k|^{s+4}} = \delta_{ij}\,\pi\,, \tag{2.12}$$

et pour $n = 4$,

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^4}{}' \tfrac{k_i k_j}{|k|^{s+6}} = \delta_{ij}\,\tfrac{\pi^2}{2}\,, \\ &\operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^4}{}' \tfrac{k_i k_j k_l k_m}{|k|^{s+8}} = (\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl})\,\tfrac{\pi^2}{12}\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Démonstration. L'équation (2.11) découle du Théorème 2.1.1

$$\operatorname*{Res}_{s=n+p_1+\cdots+p_n} \zeta_{p_1,\dots,p_n}(s) = \int_{k\in S^{n-1}} k_1^{p_1}\cdots k_n^{p_n}\, dS(k)$$

et des formules standard (voir par exemple [133, VIII,1;22]). L'équation (2.12) est une conséquence directe de l'équation (2.11). L'équation (2.13) peut être vérifiée pour les cas $i = j \neq l = m$ et $i = j = l = m$. □

Notons que $Z_n(s)$ est une fonction zêta de Epstein associée à la forme quadratique $q(x) := x_1^2 + \dots + x_n^2$, et donc Z_n satisfait à l'équation fonctionnelle

$$Z_n(s) = \pi^{s-n/2}\Gamma(n/2 - s/2)\Gamma(s/2)^{-1}\, Z_n(n-s).$$

Puisque $\pi^{s-n/2}\Gamma(n/2-s/2)\,\Gamma(s/2)^{-1}=0$ pour tout entier négatif pair n et $Z_n(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un seul pôle en $s=n$ avec résidu $2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}$ d'après la proposition précédente, on obtient donc $Z_n(0)=-1$. Nous avons montré que

$$\operatorname*{Res}_{s=0} Z_n(s+n) = 2\pi^{n/2}\,\Gamma(n/2)^{-1}, \tag{2.14}$$

$$Z_n(0) = -1. \tag{2.15}$$

2.4 Prolongement méromorphe d'une classe de fonctions zêta

Soient $n, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, et $p = (p_1, \ldots, p_{q-1}) \in \mathbb{N}_0^{q-1}$.
Posons $I := \{i \mid p_i \neq 0\}$ et supposons que $I \neq \emptyset$ et

$$\mathcal{I} := \{\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I\ \alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p_i}) \in \mathbb{N}_0^{p_i}\} = \prod_{i\in I} \mathbb{N}_0^{p_i}.$$

Nous utiliserons par la suite les notations suivantes :

- pour $x = (x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{R}^t$, rappelons que $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_t|$ et $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_t^2}$;

- pour tout $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathcal{I} = \prod_{i\in I} \mathbb{N}_0^{p_i}$,

$$|\alpha|_1 = \sum_{i\in I} |\alpha_i|_1 = \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{p_i} |\alpha_{i,j}| \text{ et } \tbinom{1/2}{\alpha} = \prod_{i\in I} \tbinom{1/2}{\alpha_i} = \prod_{i\in I}\prod_{j=1}^{p_i} \tbinom{1/2}{\alpha_{i,j}}.$$

2.4.1 Une famille de polynômes

Dans ce paragraphe, nous définissons une famille de polynômes qui jouent un rôle dans le calcul du spectre de dimension sur le tore non commutatif.

Considérons dans un premier temps les variables suivantes :

- pour $X_1, \ldots, X_n$ on pose $X = (X_1, \ldots, X_n)$;

- pour tout $i = 1, \ldots, 2q$, on considère $Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,n}$ et on pose $Y_i := (Y_{i,1}, \ldots, Y_{i,n})$ et $Y := (Y_1, \ldots, Y_{2q})$;

- pour $Y = (Y_1, \ldots, Y_{2q})$, on pose pour tout $1 \leq j \leq q$, $\widetilde{Y}_j := Y_1 + \cdots + Y_j + Y_{q+1} + \cdots + Y_{q+j}$.

On définit pour tout $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathcal{I} = \prod_{i\in I} \mathbb{N}_0^{p_i}$ le polynôme

$$P_\alpha(X,Y) := \prod_{i\in I}\prod_{j=1}^{p_i} (2\langle X, \widetilde{Y}_i\rangle + |\widetilde{Y}_i|^2)^{\alpha_{i,j}}. \tag{2.16}$$

Il est clair que $P_\alpha(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$, $\deg_X P_\alpha \leq |\alpha|_1$ et $\deg_Y P_\alpha \leq 2|\alpha|_1$.

Fixons un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X_1, \cdots, X_n]$ et notons $d := \deg Q$. Pour $\alpha \in \mathcal{I}$, nous souhaitons développer $P_\alpha(X,Y)\,Q(X)$ en polynôme homogènes en X et Y, donc en définissant

$$L(\alpha) := \{\, \beta \in \mathbb{N}_0^{(2q+1)n} \ :\ |\beta|_1 - d_\beta \leq 2|\alpha|_1 \text{ et } d_\beta \leq |\alpha|_1 + d \,\}$$

où $d_\beta := \sum_1^n \beta_i$, on pose

$$\tbinom{1/2}{\alpha} P_\alpha(X,Y)\,Q(X) =: \sum_{\beta\in L(\alpha)} c_{\alpha,\beta}\, X^\beta Y^\beta$$

où $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, $X^\beta := X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}$ et $Y^\beta := Y_{1,1}^{\beta_{n+1}} \cdots Y_{2q,n}^{\beta_{(2q+1)n}}$. Par définition, X^β est un polynôme homogène de degré en X égal à d_β. On pose

$$M_{\alpha,\beta}(Y) := c_{\alpha,\beta}\, Y^\beta.$$

2.4.2 Résidus d'une classe de fonctions zêta

Dans cette section, nous allons prouver le résultat suivant, utilisé dans la Proposition 3.2.4 pour le calcul du spectre de dimension du tore non commutatif (en tenant compte de l'opérateur de réalité) :

Théorème 2.4.1. *(i) Soit $\frac{1}{2\pi}\Theta$ une matrice diophantienne et $\widetilde{a} \in \mathcal{S}\big((\mathbb{Z}^n)^{2q}\big)$. Alors*

$$s \mapsto f(s) := \sum_{l \in [(\mathbb{Z}^n)^q]^2} \widetilde{a}_l \sideset{}{'}\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \prod_{i=1}^{q-1} |k + \widetilde{l}_i|^{p_i} |k|^{-s}\, Q(k)\, e^{ik.\Theta \sum_1^q l_j}$$

a une extension méromorphe sur le plan complexe $\mathbb{C}$ avec des pôles simples au points $s = n + d + |p|_1 - m$ où $m \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Pour $m \in \mathbb{N}_0$, posons $I(m) := \{\, (\alpha,\beta) \in \mathcal{I} \times \mathbb{N}_0^{(2q+1)n} \,:\, \beta \in L(\alpha) \text{ et } m = 2|\alpha|_1 - d_\beta + d \,\}$. Alors $I(m)$ est un ensemble fini et $s = n + d + |p|_1 - m$ est un pôle de f si et seulement si

$$C(f,m) := \sum_{l \in Z} \widetilde{a}_l \sum_{(\alpha,\beta) \in I(m)} M_{\alpha,\beta}(l) \int_{u \in S^{n-1}} u^\beta\, dS(u) \neq 0,$$

avec $Z := \{l \,:\, \sum_1^q l_j = 0\}$ et la convention $\sum_\emptyset = 0$. Dans ce cas $s = n + d + |p|_1 - m$ est un pôle simple de résidu égal à : $\operatorname*{Res}_{s=n+d+|p|_1-m} f(s) = C(f,m)$.

Afin de prouver ce théorème, nous montrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.4.2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\prod_{i=1}^{q-1} |k + \widetilde{l}_i|^{p_i} = \sum_{\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \{0,\dots,N\}^{p_i}} \tbinom{1/2}{\alpha} \tfrac{P_\alpha(k,l)}{|k|^{2|\alpha|_1 - |p|_1}} + \mathcal{O}_N(|k|^{|p|_1 - (N+1)/2})$$

uniformément en $k \in \mathbb{Z}^n$ et $l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}$ vérifiant $|k| > U(l) := 36\,(\sum_{i=1,\, i \neq q}^{2q-1} |l_i|)^4$.

Démonstration. Pour $i = 1, \dots, q-1$, nous avons uniformément en $k \in \mathbb{Z}^n$ et $l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}$ vérifiant $|k| > U(l)$,

$$\tfrac{\left|2\langle k, \widetilde{l}_i\rangle + |\widetilde{l}_i|^2\right|}{|k|^2} \leq \tfrac{\sqrt{U(l)}}{2|k|} < \tfrac{1}{2\sqrt{|k|}}. \tag{2.17}$$

Dans ce cas,

$$|k + \widetilde{l}_i| \;=\; \big(|k|^2 + 2\langle k, \widetilde{l}_i\rangle + |\widetilde{l}_i|^2\big)^{1/2} = |k|\big(1 + \tfrac{2\langle k, \widetilde{l}_i\rangle + |\widetilde{l}_i|^2}{|k|^2}\big)^{1/2} = \sum_{u=0}^{\infty} \tbinom{1/2}{u} \tfrac{1}{|k|^{2u-1}} P_u^i(k,l)$$

où pour tout $i = 1, \dots, q-1$ et pour tout $u \in \mathbb{N}_0$,

$$P_u^i(k,l) := \big(2\langle k, \widetilde{l}_i\rangle + |\widetilde{l}_i|^2\big)^u,$$

avec la convention $P_0^i(k,l) := 1$.

En particulier $P_u^i(k,l) \in \mathbb{Z}[k,l]$, $\deg_k P_u^i \leq u$ et $\deg_l P_u^i \leq 2u$. L'inégalité (2.17) implique que pour tout $i = 1, \ldots, q-1$ et pour tout $u \in \mathbb{N}$,

$$\tfrac{1}{|k|^{2u}} \, |P_u^i(k,l)| \leq \big(2\sqrt{|k|}\big)^{-u}$$

uniformément en $k \in \mathbb{Z}^n$ et $l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}$ vérifiant $|k| > U(l)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On déduit de ce qui précède que pour tous $k \in \mathbb{Z}^n$ et $l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}$ vérifiant $|k| > U(l)$ et pour tout $i = 1, \ldots, q-1$, nous avons

$$\begin{aligned} |k + \widetilde{l}_i| &= \sum_{u=0}^{N} \tbinom{1/2}{u} \tfrac{1}{|k|^{2u-1}} P_u^i(k,l) + \mathcal{O}\big(\sum_{u>N} |k| \, |\tbinom{1/2}{u}| \, (2\sqrt{|k|})^{-u} \big) \\ &= \sum_{u=0}^{N} \tbinom{1/2}{u} \tfrac{1}{|k|^{2u-1}} P_u^i(k,l) + \mathcal{O}_N\big(\tfrac{1}{|k|^{(N-1)/2}}\big). \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons uniformément en $k \in \mathbb{Z}^n$ et $l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}$ vérifiant $|k| > U(l)$ et pour tout $i \in I$,

$$|k + \widetilde{l}_i|^{p_i} = \sum_{\alpha_i \in \{0,\ldots,N\}^{p_i}} \tbinom{1/2}{\alpha_i} \tfrac{1}{|k|^{2|\alpha_i|_1 - p_i}} P_{\alpha_i}^i(k,l) + \mathcal{O}_N\left(\tfrac{1}{|k|^{(N+1)/2 - p_i}}\right)$$

où $P_{\alpha_i}^i(k,l) = \prod_{j=1}^{p_i} P_{\alpha_{i,j}}^i(k,l)$ pour tout $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p_i}) \in \{0, \ldots, N\}^{p_i}$ et

$$\prod_{i \in I} |k + \widetilde{l}_i|^{p_i} = \sum_{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i \in I} \{0,\ldots,N\}^{p_i}} \tbinom{1/2}{\alpha} \tfrac{1}{|k|^{2|\alpha|_1 - |p|_1}} P_\alpha(k,l) + \mathcal{O}_N\big(\tfrac{1}{|k|^{(N+1)/2 - |p|_1}}\big)$$

où $P_\alpha(k,l) = \prod_{i \in I} P_{\alpha_i}^i(k,l) = \prod_{i \in I} \prod_{j=1}^{p_i} P_{\alpha_{i,j}}^i(k,l)$. □

Démonstration du Théorème 2.4.1.

(i) Les quantités n, q, $p = (p_1, \ldots, p_{q-1})$ et $\widetilde{a} \in \mathcal{S}\left((\mathbb{Z}^n)^{2q}\right)$ sont fixées comme précédemment. On définit formellement pour tout $l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}$

$$F(l,s) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n}{}' \prod_{i=1}^{q-1} |k + \widetilde{l}_i|^{p_i} \, Q(k) \, e^{ik.\Theta \sum_1^q l_j} \, |k|^{-s}. \tag{2.18}$$

Ainsi, toujours formellement,

$$f(s) := \sum_{l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}} \widetilde{a}_l \; F(l,s). \tag{2.19}$$

Il est clair que $F(l,s)$ converge absolument dans le demi-plan $\{\sigma = \Re(s) > n + d + |p|_1\}$ où $d = \deg Q$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Le Lemme 2.4.2 implique que pour tous $l \in (\mathbb{Z}^n)^{2q}$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > n + |p|_1 + d$,

$$\begin{aligned} F(l,s) = &\sum_{|k| \leq U(l)}{}' \prod_{i=1}^{q-1} |k + \widetilde{l}_i|^{p_i} \, Q(k) \, e^{ik.\Theta \sum_1^q l_j} \, |k|^{-s} \\ &+ \sum_{\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \{0,\ldots,N\}^{p_i}} \tbinom{1/2}{\alpha} \sum_{|k| > U(l)} \tfrac{1}{|k|^{s + 2|\alpha|_1 - |p|_1}} P_\alpha(k,l) Q(k) \, e^{ik.\Theta \sum_1^q l_j} + G_N(l,s). \end{aligned}$$

où $s \mapsto G_N(l,s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $D_N := \{\sigma > n+d+|p|_1 - \frac{N+1}{2}\}$ et vérifie $G_N(l,s) \ll_{N,\sigma} 1$ uniformément en l.

Il en résulte que

$$F(l,s) = \sum_{\alpha=(\alpha_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\{0,\dots,N\}^{p_i}} H_\alpha(l,s) + R_N(l,s), \tag{2.20}$$

où

$$\begin{aligned} H_\alpha(l,s) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tbinom{1/2}{\alpha} \tfrac{1}{|k|^{s+2|\alpha|_1-|p|_1}} P_\alpha(k,l)\, Q(k)\, e^{ik.\Theta\sum_1^q l_j}, \\ R_N(l,s) &:= \sum_{|k|\le U(l)}{}' \prod_{i=1}^{q-1} |k+\widetilde{l}_i|^{p_i}\, Q(k)\, e^{ik.\Theta\sum_1^q l_j}\, |k|^{-s} \\ &\quad - \sum_{|k|\le U(l)}{}' \sum_{\alpha=(\alpha_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\{0,\dots,N\}^{p_i}} \tbinom{1/2}{\alpha} \tfrac{P_\alpha(k,l)}{|k|^{s+2|\alpha|_1-|p|_1}} Q(k)\, e^{ik.\Theta\sum_1^q l_j} + G_N(l,s). \end{aligned}$$

En particulier, il existe $A(N) > 0$ tel que $s \mapsto R_N(l,s)$ s'étende holomorphiquement au demi-plan D_N et vérifie $R_N(l,s) \ll_{N,\sigma} 1 + |l|^{A(N)}$ uniformément en l.

Notons formellement

$$h_\alpha(s) := \sum_l \widetilde{a}_l\, H_\alpha(l,s).$$

L'équation (2.20) et $R_N(l,s) \ll_{N,\sigma} 1 + |l|^{A(N)}$ impliquent que

$$f(s) \sim_N \sum_{\alpha=(\alpha_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\{0,\dots,N\}^{p_i}} h_\alpha(s), \tag{2.21}$$

où $\sim_N$ signifie modulo une fonction holomorphe dans D_N.

Rappelons la décomposition $\binom{1/2}{\alpha} P_\alpha(k,l)\, Q(k) = \sum_{\beta\in L(\alpha)} M_{\alpha,\beta}(l)\, k^\beta$ et de façon similaire $h_\alpha(s) = \sum_{\beta\in L(\alpha)} h_{\alpha,\beta}(s)$. Le Théorème 2.2.2 implique alors que pour tout $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\{0,\dots,N\}^{p_i}$ et $\beta \in L(\alpha)$,

- l'application $s \mapsto h_{\alpha,\beta}(s)$ a une extension méromorphe au plan complexe $\mathbb{C}$ avec au plus un pôle simple en $s = n + |p|_1 - 2|\alpha|_1 + d_\beta$,
- le résidu en ce point est égal à

$$\operatorname*{Res}_{s=n+|p|_1-2|\alpha|_1+d_\beta} h_{\alpha,\beta}(s) = \sum_{l\in\mathcal{Z}} \widetilde{a}_l\, M_{\alpha,\beta}(l) \int_{u\in S^{n-1}} u^\beta dS(u) \tag{2.22}$$

où $\mathcal{Z} := \{l \in (\mathbb{Z})^n)^{2q} \,:\, \sum_1^q l_j = 0\}$. Si le côté droit est nul, $h_{\alpha,\beta}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

D'après (2.21), on déduit que $f(s)$ s'étend méromorphiquement au demi-plan D_N, avec au plus des pôles simple dans l'ensemble $\{\, n + |p|_1 + k \,:\, -2N|p|_1 \le k \le d \,\}$. On obtient le résultat en prenant $N \to \infty$.

(ii) Pour $m \in \mathbb{N}_0$, posons $I(m) := \{\, (\alpha,\beta) \in \mathcal{I} \times \mathbb{N}_0^{(2q+1)n} \,:\, \beta \in L(\alpha) \text{ et } m = 2|\alpha|_1 - d_\beta + d \,\}$. Si $(\alpha,\beta) \in I(m)$, alors $|\alpha|_1 \le m$ et $|\beta|_1 \le 3m + d$, donc $I(m)$ est fini.

En choisissant un N tel que $2N|p|_1 + d > m$, on obtient d'après (2.21) et (2.22)

$$\operatorname*{Res}_{s=n+d+|p|_1-m} f(s) = \sum_{l\in\mathcal{Z}} \widetilde{a}_l \sum_{(\alpha,\beta)\in I(m)} M_{\alpha,\beta}(l) \int_{u\in S^{n-1}} u^\beta\, dS(u) = C(f,m)$$

avec la convention $\sum_\emptyset = 0$. Ainsi, $n + d + |p|_1 - m$ est un pôle de f si et seulement si $C(f,m) \neq 0$. $\square$

Chapitre 3

Action spectrale sur le tore non commutatif

3.1 Introduction

Dans [60], l'action spectrale sur le tore non commutatif a été calculée pour les opérateurs du type $\mathcal{D}+A$ et du type $\mathcal{D}_A$ dans [62]. Il apparaît que l'implémentation de la structure réelle via J, ne change pas l'action spectrale, à un coefficient multiplicatif global près, lorsque la dimension du tore est égale à 4. Ici nous montrons que ceci peut être obtenu directement par l'analyse de Chamseddine–Connes [22]. Rappelons que

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) \;=\; \sum_{0<k\in Sd^+} \Phi_k\, \Lambda^k \fint |D_A|^{-k} + \Phi(0)\, \zeta_{D_A}(0) + \mathcal{O}(\Lambda^{-1})$$

où $D_A = \mathcal{D}_A + P_A$, P_A la projection sur $\operatorname{Ker} \mathcal{D}_A$, $\Phi_k = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)\, t^{k/2-1}\, dt$ et Sd^+ est la partie strictement positive du spectre de dimenstion de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$.

Dans la section 2, les points techniques vu précédemment au chapitre 1 seront utilisés pour calculer les termes de (1.6) et (1.11) sur le tore non commutatif. La plupart de ces termes sont basés sur des résidus de certaines fonctions zêta et de séries de fonctions zêta qui ont été étudiés au chapitre précédent. Nous montrons en particulier que les tadpoles s'annulent toujours sur le tore non commutatif.

L'action spectrale est obtenue en section 3 et nous conjecturons que l'action spectrale non commutative pour toute dimension associée à $\mathcal{D}_A$ est propotionnelle à l'action spectrale de $\mathcal{D}+A$ sur le tore commutatif, ce qui est constaté en dimension inférieure à 4.

Tous ces résultats sur l'action spectrale ont une importance en physique, et plus particulièrement en théorie quantique des champs et en physique des particules, où l'on ajoute à l'action effective certains contre-termes explicitement donnés par (1.11) [17, 21, 22, 24, 58, 60, 62, 66, 93, 135, 142–144].

3.2 Le tore non commutatif

3.2.1 Notations

Soit $C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ le tore non commutatif de dimension n associé à une matrice antisymétrique non nulle de déformation $\Theta \in M_n(\mathbb{R})$ (voir [26], [115]). Ceci signifie que $C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ est l'algèbre générée par n unitaries u_i, $i = 1, \ldots, n$ assujettis aux relations

$$u_i\, u_j = e^{i\Theta_{ij}}\, u_j\, u_i, \tag{3.1}$$

et avec coefficients de Schwartz: un element $a \in C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ peut être écrit de la façon suivante $a = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k\, U_k$, où $\{a_k\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ avec les éléments de Weyl $U_k := e^{-\frac{i}{2}k.\chi k}\, u_1^{k_1} \cdots u_n^{k_n}$, $k \in \mathbb{Z}^n$. La relation (3.1) donne

$$U_k U_q = e^{-\frac{i}{2}k.\Theta q}\, U_{k+q}, \text{ et } U_k U_q = e^{-ik.\Theta q}\, U_q U_k \tag{3.2}$$

où χ est la restriction de Θ à sa partie triangulaire supérieure. Ainsi, les opérateurs unitaires U_k satisfont $U_k^* = U_{-k}$ et $[U_k, U_l] = -2i \sin(\frac{1}{2}k.\Theta l)\, U_{k+l}$.

Soit τ la trace sur $C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ définie par $\tau\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k\, U_k\big) := a_0$ et $\mathcal{H}_\tau$ l'espace de Hilbert GNS obtenu par complétion de $C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ pour la norme induite par le produit scalaire $\langle a, b\rangle := \tau(a^*b)$. Sur $\mathcal{H}_\tau = \{\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k\, U_k \,:\, \{a_k\}_k \in l^2(\mathbb{Z}^n)\,\}$, on considère les représentation à gauche et à droite de $C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ par des opérateurs bornés, que nous notons respectivement by $L(.)$ et $R(.)$.

Soient δ_μ, $\mu \in \{\,1, \ldots, n\,\}$, les n (deux à deux commutantes) dérivations canoniques définies par

$$\delta_\mu(U_k) := ik_\mu U_k. \tag{3.3}$$

Nous fixons aussi les notations suivantes : soit $\mathcal{A}_\Theta := C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta)$ agissant sur $\mathcal{H} := \mathcal{H}_\tau \otimes \mathbb{C}^{2^m}$ avec $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ (i.e., $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$), les sections de carré intégrable du fibré spinoriel trivial sur $\mathcal{T}^n$.

Chaque élément de $\mathcal{A}_\Theta$ est représenté sur $\mathcal{H}$ par $L(a) \otimes 1_{2^m}$ où L (resp. R) est la multiplication à gauche (resp. droite). La conjugaison de Tomita $J_0(a) := a^*$ vérifie $[J_0, \delta_\mu] = 0$ et on pose $J := J_0 \otimes C_0$ où C_0 est un opérateur sur $\mathbb{C}^{2^m}$. L'opérateur de Dirac est donné par

$$\mathcal{D} := -i\, \delta_\mu \otimes \gamma^\mu, \tag{3.4}$$

où l'on a utilisé les matrices hermitiennes de Dirac γ. L'opérateur de Dirac est symétrique et densément défini sur une partie dense de $\mathcal{H}$ donné par $C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta) \otimes \mathbb{C}^{2^m}$. On notera aussi par $\mathcal{D}$ son extension auto-adjointe. Ceci implique que

$$C_0 \gamma^\alpha = -\varepsilon \gamma^\alpha C_0, \tag{3.5}$$

et

$$\mathcal{D}\; U_k \otimes e_i = k_\mu U_k \otimes \gamma^\mu e_i,$$

où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{C}^{2^m}$. De plus, $C_0^2 = \pm 1_{2^m}$ selon la parité de m. Finalement, on introduit l'opérateur de chiralité (qui, dans le cas pair, est $\chi := id \otimes (-i)^m \gamma^1 \cdots \gamma^n$) et ceci implique que $(\mathcal{A}_\Theta, \mathcal{H}, \mathcal{D}, J, \chi)$ satisfait tous les axiomes d'un triplet spectral [28, 68].

L'opérateur de Dirac perturbé $V_u \mathcal{D} V_u^*$ par l'opérateur unitaire

$$V_u := \big(L(u) \otimes 1_{2^m}\big) J \big(L(u) \otimes 1_{2^m}\big) J^{-1},$$

défini pour tout unitaire $u \in \mathcal{A}$, $uu^* = u^*u = U_0$, doit satisfaire (1.3) (ce qui est équivalent à $\mathcal{H}$ vu comme un $\mathcal{A}_\Theta$-bimodule). Ceci amène à considérer un opérateur de Dirac symétrisé et covariant :

$$\mathcal{D}_A := \mathcal{D} + A + \epsilon J\, A\, J^{-1}$$

Puisque $V_u \mathcal{D} V_u^* = \mathcal{D}_{L(u)\otimes 1_{2^m}[\mathcal{D}, L(u^*)\otimes 1_{2^m}]}$, pour $a \in \mathcal{A}_\Theta$ et comme $J_0 L(a) J_0^{-1} = R(a^*)$, on obtient

$$\epsilon J\big(L(a)\otimes\gamma^\alpha\big)J^{-1} = -R(a^*)\otimes\gamma^\alpha$$

et les représentations L, R sont $\mathbb{C}$-linear, commutent et satisfont

$$[\delta_\alpha, L(a)] = L(\delta_\alpha a), \quad [\delta_\alpha, R(a)] = R(\delta_\alpha a).$$

Ceci induit une propriété de covariance sur l'opérateur de Dirac : on vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$L(U_k)\otimes 1_{2^m}[\mathcal{D}, L(U_k^*)\otimes 1_{2^m}] = 1\otimes(-k_\mu\gamma^\mu), \tag{3.6}$$

donc avec (3.5), on obtient $U_k[\mathcal{D}, U_k^*] + \epsilon J U_k[\mathcal{D}, U_k^*]J^{-1} = 0$ et

$$V_{U_k}\,\mathcal{D}\,V_{U_k}^* = \mathcal{D} = \mathcal{D}_{L(U_k)\otimes 1_{2^m}[\mathcal{D}, L(U_k^*)\otimes 1_{2^m}]}. \tag{3.7}$$

De plus, on obtient la transformation de jauge :

$$V_u \mathcal{D}_A V_u^* = \mathcal{D}_{\gamma_u(A)} \tag{3.8}$$

où la transformation de jauge de la 1-forme A est

$$\gamma_u(A) := u[\mathcal{D}, u^*] + uAu^*, \tag{3.9}$$

avec l'abus de notation $L(u)\otimes 1_{2^m} \longrightarrow u$.

Par conséquent, l'action spectrale est invariante par transformation de jauge :

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) = \mathcal{S}(\mathcal{D}_{\gamma_u(A)}, \Phi, \Lambda).$$

Une 1-forme A auto-adjointe peut être écrite

$$A = L(-iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha,\ A_\alpha = -A_\alpha^* \in \mathcal{A}_\Theta, \tag{3.10}$$

ainsi

$$\mathcal{D}_A = -i\left(\delta_\alpha + L(A_\alpha) - R(A_\alpha)\right)\otimes\gamma^\alpha. \tag{3.11}$$

En notant

$$\tilde{A}_\alpha := L(A_\alpha) - R(A_\alpha),$$

on obtient $\mathcal{D}_A^2 = -g^{\alpha_1\alpha_2}(\delta_{\alpha_1} + \tilde{A}_{\alpha_1})(\delta_{\alpha_2} + \tilde{A}_{\alpha_2})\otimes 1_{2^m} - \frac{1}{2}\Omega_{\alpha_1\alpha_2}\otimes\gamma^{\alpha_1\alpha_2}$ où

$$\gamma^{\alpha_1\alpha_2} := \tfrac{1}{2}(\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2} - \gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_1}),$$
$$\Omega_{\alpha_1\alpha_2} := [\delta_{\alpha_1} + \tilde{A}_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2} + \tilde{A}_{\alpha_2}] = L(F_{\alpha_1\alpha_2}) - R(F_{\alpha_1\alpha_2})$$

avec

$$F_{\alpha_1\alpha_2} := \delta_{\alpha_1}(A_{\alpha_2}) - \delta_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}) + [A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}]. \tag{3.12}$$

En résumé,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_A^2 = -\delta^{\alpha_1\alpha_2}\Big(\delta_{\alpha_1} + L(A_{\alpha_1}) - R(A_{\alpha_1})\Big)\Big(\delta_{\alpha_2} + L(A_{\alpha_2}) - R(A_{\alpha_2})\Big)\otimes 1_{2^m}\\ -\tfrac{1}{2}\left(L(F_{\alpha_1\alpha_2}) - R(F_{\alpha_1\alpha_2})\right)\otimes\gamma^{\alpha_1\alpha_2}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2.2 Noyaux et spectre de dimension

Nous calculons maintenant le noyau de l'opérateur de Dirac perturbé :

Proposition 3.2.1. *(i)* $\operatorname{Ker}\mathcal{D} = U_0 \otimes \mathbb{C}^{2^m}$, *so* $\dim \operatorname{Ker}\mathcal{D} = 2^m$.
(ii) Pour tout 1-forme auto-adjointe A, $\operatorname{Ker}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$.
(iii) Pour tout unitaire $u \in \mathcal{A}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_{\gamma_u(A)} = V_u \operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$.

Démonstration. (i) Soit $\psi = \sum_{k,j} c_{k,j}\, U_k \otimes e_j \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}$. Ainsi, $0 = \mathcal{D}^2\psi = \sum_{k,i} c_{k,j}|k|^2\, U_k \otimes e_j$ ce qui implique que $c_{k,j}|k|^2 = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ et $1 \leq j \leq 2^m$. On en déduit le résultat.

(ii) Soit $\psi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}$. Donc $\psi = U_0 \otimes v$ avec $v \in \mathbb{C}^{2^m}$ et d'après (3.11), on obtient

$$\mathcal{D}_A\psi = \mathcal{D}\psi + (A + \epsilon JAJ^{-1})\psi = (A + \epsilon JAJ^{-1})\psi = -i[A_\alpha, U_0] \otimes \gamma^\alpha v = 0$$

puisque U_0 est l'unité de l'algèbre, ce qui prouve que $\psi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$.

(iii) C'est une conséquence directe de (3.8). □

Corollaire 3.2.2. *Soit* A *une 1-forme auto-adjointe. Alors* $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_A = \operatorname{Ker}\mathcal{D}$ *dans les cas suivants :*
(i) $A_u := L(u) \otimes 1_{2^m}[\mathcal{D}, L(u^*) \otimes 1_{2^m}]$ *quand* u *est un unitaire dans* $\mathcal{A}$.
(ii) $||A|| < \frac{1}{2}$.
(iii) La matrice $\frac{1}{2\pi}\Theta$ *n'a que des coefficients entiers.*

Démonstration. (i) Ceci vient de résultats précédents puisque $V_u(U_0 \otimes v) = U_0 \otimes v$ pour tout $v \in \mathbb{C}^{2^m}$.

(ii) Soit $\psi = \sum_{k,j} c_{k,j}\, U_k \otimes e_j$ dans $\operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$ (donc $\sum_{k,j} |c_{k,j}|^2 < \infty$) et $\phi := \sum_j c_{0,j}\, U_0 \otimes e_j$. Ainsi $\psi' := \psi - \phi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$ puisque $\phi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$ et

$$||\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}^n,\, j} c_{k,j}\, k_\alpha\, U_k \otimes \gamma^\alpha e_j||^2 = ||\mathcal{D}\psi'||^2 = ||-(A + \epsilon JAJ^{-1})\psi'||^2 \leq 4||A||^2||\psi'||^2 < ||\psi'||^2.$$

En posant $X_k := \sum_\alpha k_\alpha\gamma_\alpha$, $X_k^2 = \sum_\alpha |k_\alpha|^2\, 1_{2^m}$ est inversible et les vecteurs $\{\, U_k \otimes X_k e_j \,\}_{0\neq k\in\mathbb{Z}^n,\, j}$ sont orthogonaux dans $\mathcal{H}$, donc

$$\sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}^n,\, j} \big(\sum_\alpha |k_\alpha|^2\big)\, |c_{k,j}|^2 < \sum_{0\neq k\in\mathbb{Z}^n,\, j} |c_{k,j}|^2$$

ce qui est possible seulement si $c_{k,j} = 0$, $\forall k$, j soit $\psi' = 0$ et $\psi = \phi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}$.

(iii) C'est une conséquence du fait que l'algèbre est commutative, et ainsi $A + \epsilon JAJ^{-1} = 0$. □

Notons que si $\widetilde{A}_u := A_u + \epsilon JA_uJ^{-1}$, alors d'après (3.6), $\widetilde{A}_{U_k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$ et $\|A_{U_k}\| = |k|$, mais pour un unitaire arbitraire $u \in \mathcal{A}$, $\widetilde{A}_u \neq 0$, donc $\mathcal{D}_{A_u} \neq \mathcal{D}$.

Le résultat précédent est aussi une conséquence directe du fait que l'espace propre d'une valeur propre isolée d'un opérateur n'est pas modifiée par de petites perturbations. Cependant il peut être intéressant d'obtenir ce resultat par calcul direct pour mettre en avant la difficulté du cas général :

Soit $\psi = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n, 1\leq j\leq 2^m} c_{l,j}\, U_l \otimes e_j \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$, donc $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n, 1\leq j\leq 2^m} |c_{l,j}|^2 < \infty$. Nous devons montrer que $\psi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}$, c'est-à-dire $c_{l,j} = 0$ quand $l \neq 0$.

En prenant le produit scalaire de $\langle U_k \otimes e_i|$ avec

$$0 = \mathcal{D}_A \psi = \sum_{l,\alpha,j} c_{l,j}(l^\alpha U_l - i[A_\alpha, U_l]) \otimes \gamma^\alpha e_j,$$

on obtient

$$0 = \sum_{l,\alpha,j} c_{l,j}\big(l^\alpha \delta_{k,l} - i\langle U_k, [A_\alpha, U_l]\rangle\big)\langle e_i, \gamma^\alpha e_j\rangle.$$

Si $A_\alpha = \sum_{\alpha,l} a_{\alpha,l}\, U_l \otimes \gamma^\alpha$ avec $\{\, a_{\alpha,l}\,\}_l \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, remarquons que $[U_l, U_m] = -2i\sin(\frac{1}{2}l.\Theta m)\, U_{l+m}$ et

$$\langle U_k, [A_\alpha, U_l]\rangle = \sum_{l'\in\mathbb{Z}^n} a_{\alpha,l'}(-2i\sin(\tfrac{1}{2}l'.\Theta l)\langle U_k, U_{l'+l}\rangle = -2i\, a_{\alpha,k-l}\, \sin(\tfrac{1}{2}k.\Theta l).$$

Ainsi

$$0 = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^m} c_{l,j}\big(l^\alpha\delta_{k,l} - 2a_{\alpha,k-l}\, \sin(\tfrac{1}{2}k.\Theta l)\big)\,\langle e_i, \gamma^\alpha e_j\rangle, \quad \forall k\in\mathbb{Z}^n,\ \forall i, 1\le i\le 2^m. \tag{3.14}$$

Nous conjecturons que $\operatorname{Ker}\mathcal{D} = \operatorname{Ker}\mathcal{D}_A$ *au moins pour des matrices* Θ *génériques* :

Les contraintes (3.14) devraient impliquer $c_{l,j} = 0$ pour tout j et tout $l \neq 0$, c'est-à-dire $\psi \in \operatorname{Ker}\mathcal{D}$. Quand $\frac{1}{2\pi}\Theta$ n'a que des coefficient entiers, la partie sinus de ces contraintes disparaît, ce qui implique le résultat.

Lemme 3.2.3. *Si* $\frac{1}{2\pi}\Theta$ *est une matrice diophantienne (voir Définition 2.2.1), alors on a* $Sp\big(C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta), \mathcal{H}, \mathcal{D}\big) = \mathbb{Z}$ *et tous ces pôles sont simples.*

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $p \in \mathbb{N}_0$. Supposons que B soit de la forme

$$B = a_r b_r \mathcal{D}^{q_{r-1}}|\mathcal{D}|^{p_{r-1}} a_{r-1} b_{r-1} \cdots \mathcal{D}^{q_1}|\mathcal{D}|^{p_1} a_1 b_1$$

où $r \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathcal{A}$, $b_i \in J\mathcal{A}J^{-1}$, $q_i, p_i \in \mathbb{N}_0$. Nous notons $a_i =: \sum_l a_{i,l}\, U_l$ et $b_i =: \sum_i b_{i,l}\, U_l$. Avec les notations $k_{\mu_1,\mu_{q_i}} := k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_{q_i}}$ et $\gamma^{\mu_1,\mu_{q_i}} = \gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{q_i}}$, on obtient

$$\mathcal{D}^{q_1}|\mathcal{D}|^{p_1} a_1 b_1\, U_k \otimes e_j = \sum_{l_1, l_1'} a_{1,l_1} b_{1,l_1'} U_{l_1} U_k U_{l_1'}\, |k + l_1 + l_1'|^{p_1}\, (k + l_1 + l_1')_{\mu_1,\mu_{q_1}} \otimes \gamma^{\mu_1,\mu_{q_1}} e_j$$

ce qui donne, après r itérations,

$$BU_k \otimes e_j = \sum_{l,l'} \widetilde{a}_l \widetilde{b}_l U_{l_r}\cdots U_{l_1} U_k U_{l_1'}\cdots U_{l_r'} \prod_{i=1}^{r-1} |k + \widehat{l}_i + \widehat{l}_i'|^{p_i} (k + \widehat{l}_i + \widehat{l}_i')_{\mu_1^i,\mu_{q_i}^i} \otimes \gamma^{\mu_1^{r-1},\mu_{q_{r-1}}^{r-1}} \cdots \gamma^{\mu_1^1,\mu_{q_1}^1} e_j$$

où $\widetilde{a}_l := a_{1,l_1}\cdots a_{r,l_r}$ et $\widetilde{b}_{l'} := b_{1,l_1'}\cdots b_{r,l_r'}$.

Notons $F_\mu(k,l,l') := \prod_{i=1}^{r-1} |k + \widehat{l}_i + \widehat{l}_i'|^{p_i}(k + \widehat{l}_i + \widehat{l}_i')_{\mu_1^i,\mu_{q_i}^i}$ et $\gamma^\mu := \gamma^{\mu_1^{r-1},\mu_{q_{r-1}}^{r-1}} \cdots \gamma^{\mu_1^1,\mu_{q_1}^1}$. Ainsi, avec la notation $\sim_c$ signifiant modulo une fonction constante de s,

$$\operatorname{Tr}\big(B|D|^{-2p-s}\big) \sim_c {\sum_k}' \sum_{l,l'} \widetilde{a}_l \widetilde{b}_{l'}\, \tau\big(U_{-k} U_{l_r}\cdots U_{l_1} U_k U_{l_1'}\cdots U_{l_r'}\big) \tfrac{F_\mu(k,l,l')}{|k|^{s+2p}} \operatorname{Tr}(\gamma^\mu)\,.$$

Puisque $U_{l_r}\cdots U_{l_1}U_k = U_kU_{l_r}\cdots U_{l_1}e^{-i\sum_1^r l_i.\Theta k}$ on obtient

$$\tau\big(U_{-k}U_{l_r}\cdots U_{l_1}U_kU_{l'_1}\cdots U_{l'_r}\big) = \delta_{\sum_1^r l_i+l'_i,0}\, e^{i\phi(l,l')}\, e^{-i\sum_1^r l_i.\Theta k}$$

où ϕ est une fonction à valeurs réelles. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(B|D|^{-2p-s}\right) &\sim_c \sum_k{}' \sum_{l,l'} e^{i\phi(l,l')}\,\delta_{\sum_1^r l_i+l'_i,0}\,\widetilde{a}_l\widetilde{b}_{l'}\,\frac{F_\mu(k,l,l')\,e^{-i\sum_1^r l_i.\Theta k}}{|k|^{s+2p}}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu)\\ &\sim_c f_\mu(s)\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu).\end{aligned}$$

La fonction $f_\mu(s)$ peut se décomposer linéairement en fonctions zêta du type étudié au Théorème 2.4.1 (ou, si $r=1$ ou tout les p_i sont nuls, au Théorème 2.2.2). Ainsi, $s\mapsto \mathrm{Tr}\left(B|D|^{-2p-s}\right)$ n'a que des pôles dans $\mathbb{Z}$ et chaque pôle est simple. Finalement, par linéarité, on obtient le résultat. □

Le spectre de dimension du tore non commutatif est simple :

Proposition 3.2.4. *(i) Si la matrice $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est diophantienne, le spectre de dimension de $\big(C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta),\mathcal{H},\mathcal{D}\big)$ est égal à l'ensemble $\{\,n-k\,:\,k\in\mathbb{N}_0\,\}$ et tous ces pôles sont simples.*
(ii) $\zeta_D(0)=0$.

Démonstration. (i) C'est une conséquence du Lemme 3.2.3 et de la Remarque 1.2.11.
(ii) $\zeta_D(s)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{1\le j\le 2^m}\langle U_k\otimes e_j\,,\,|D|^{-s}U_k\otimes e_j\rangle = 2^m(\sum'_{k\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{|k|^s}+1) = 2^m(\,Z_n(s)+1)$. D'après (2.15), on obtient le résultat. □

3.2.3 Calculs d'intégrales non commutatives

Soit A une 1-forme auto-adjointe sur le tore non commutatif de dimension n.

Proposition 3.2.5. *Si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice diophantienne, alors les premiers éléments du développement (1.6) sont donnés par*

$$\begin{aligned}&⨍ |D_A|^{-n} = ⨍ |D|^{-n} = 2^{m+1}\pi^{n/2}\,\Gamma(\tfrac{n}{2})^{-1}. \qquad (3.15)\\ &⨍ |D_A|^{n-k} = 0 \text{ pour } k \text{ impair.}\\ &⨍ |D_A|^{n-2} = 0.\end{aligned}$$

Nous avons besoin de quelques lemmes techniques :

Lemme 3.2.6. *Sur le tore non commutatif, pour tout $t\in\mathbb{R}$,*

$$⨍ \widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-t} = ⨍ \mathcal{D}\widetilde{A}|D|^{-t} = 0.$$

Démonstration. En utilisant les notations de (3.10), nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-s}) &\sim_c \sum_j\sum_k{}'\langle U_k\otimes e_j, -ik_\mu|k|^{-s}[A_\alpha,U_k]\otimes\gamma^\alpha\gamma^\mu e_j\rangle\\ &\sim_c -i\,\mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu)\sum_k{}' k_\mu|k|^{-s}\langle U_k,[A_\alpha,U_k]\rangle = 0\end{aligned}$$

puisque $\langle U_k, [A_\alpha, U_k]\rangle = 0$. De façon similaire,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathcal{D}\widetilde{A}|D|^{-s}) &\sim_c \sum\nolimits_j \sum\nolimits_k{}' \langle U_k \otimes e_j, |k|^{-s} \sum\nolimits_l a_{\alpha,l}\, 2\sin\tfrac{k.\Theta l}{2}(l+k)_\mu U_{l+k} \otimes \gamma^\mu\gamma^\alpha e_j\rangle \\ &\sim_c 2\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\alpha) \sum\nolimits_k{}' \sum\nolimits_l a_{\alpha,l} \sin\tfrac{k.\Theta l}{2}\,(l+k)_\mu\,|k|^{-s}\langle U_k, U_{l+k}\rangle = 0.\end{aligned}$$

□

Tout élément h dans l'algèbre générée par $\mathcal{A}$ et $[\mathcal{D},\mathcal{A}]$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de termes du type ${a_1}^{p_1}\cdots {a_n}^{p_r}$ où a_i sont des éléments de $\mathcal{A}$ ou $[\mathcal{D},\mathcal{A}]$. Ces termes peuvent s'écrire comme séries $b := \sum a_{1,\alpha_1,l_1}\cdots a_{q,\alpha_q,l_q}U_{l_1}\cdots U_{l_q}\otimes\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_q}$ où a_{i,α_i} sont des suites de Schwartz et quand $a_i =: \sum_l a_l U_l \in \mathcal{A}$, nous posons $a_{i,\alpha,l} = a_{i,l}$ avec $\gamma^\alpha = 1$. On définit

$$L(b) := \tau\big(\sum\nolimits_l a_{1,\alpha_1,l_1}\cdots a_{q,\alpha_q,l_q}U_{l_1}\cdots U_{l_q}\big)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_q}).$$

Par linéarité, L est défini comme une forme linéaire sur l'algèbre générée par $\mathcal{A}$ et $[\mathcal{D},\mathcal{A}]$.

Lemme 3.2.7. *Si h est un élément de l'algèbre générée par $\mathcal{A}$ et $[\mathcal{D},\mathcal{A}]$,*

$$\mathrm{Tr}\left(h|D|^{-s}\right) \sim_c L(h)\,Z_n(s).$$

En particulier, $\mathrm{Tr}\left(h|D|^{-s}\right)$ *a au plus un pôle en $s = n$.*

Démonstration. On obtient avec b de la forme $\sum a_{1,\alpha_1,l_1}\cdots a_{q,\alpha_q,l_q}U_{l_1}\cdots U_{l_q}\otimes\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_q}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(b|D|^{-s}\right) &\sim_c \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \langle U_k, \sum_l a_{1,\alpha_1,l_1}\cdots a_{q,\alpha_q,l_q}U_{l_1}\cdots U_{l_q}U_k\rangle\ \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_q})|k|^{-s} \\ &\sim_c \tau(\sum_l a_{1,\alpha_1,l_1}\cdots a_{q,\alpha_q,l_q}U_{l_1}\cdots U_{l_q})\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_q})\,Z_n(s) = L(b)\,Z_n(s).\end{aligned}$$

Les résultats découlent alors de la linéarité de la trace. □

Lemme 3.2.8. *Si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice diophantienne, la fonction $s \mapsto \mathrm{Tr}\left(\varepsilon JAJ^{-1}A|D|^{-s}\right)$ s'étend méromorphiquement sur le plan complexe avec au plus un pôle en $s = n$. De plus, ce pôle est simple et*

$$\operatorname*{Res}_{s=n}\mathrm{Tr}\left(\varepsilon JAJ^{-1}A|D|^{-s}\right) = a_{\alpha,0}\,a_0^\alpha\ 2^{m+1}\pi^{n/2}\,\Gamma(n/2)^{-1}.$$

Démonstration. Avec $A = L(-iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha$, on obtient $\epsilon JAJ^{-1} = R(iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha$, et par multiplication $\varepsilon JAJ^{-1}A = R(A_\beta)L(A_\alpha)\otimes\gamma^\beta\gamma^\alpha$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\varepsilon JAJ^{-1}A|D|^{-s}\right) &\sim_c \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \langle U_k, A_\alpha U_k A_\beta\rangle\,|k|^{-s}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\beta\gamma^\alpha) \\ &\sim_c \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \sum_l a_{\alpha,l}\,a_{\beta,-l}\,e^{ik.\Theta l}\,|k|^{-s}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\beta\gamma^\alpha) \\ &\sim_c 2^m \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \sum_l a_{\alpha,l}\,a_{-l}^\alpha\,e^{ik.\Theta l}\,|k|^{-s}.\end{aligned}$$

Le Théorème 2.2.2 (ii) implique que $\sum'_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_l a_{\alpha,l}\,a_{-l}^\alpha\,e^{ik.\Theta l}\,|k|^{-s}$ s'étend méromorphiquement sur le plan complexe avec au plus un pôle en $s = n$. De plus, ce pôle est simple et

$$\operatorname*{Res}_{s=n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \sum_l a_{\alpha,l}\,a_{-l}^\alpha\,e^{ik.\Theta l}\,|k|^{-s} = a_{\alpha,0}\,a_0^\alpha \operatorname*{Res}_{s=n} Z_n(s).$$

L'équation (2.14) implique le résultat. □

Lemme 3.2.9. *Si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice diophantienne, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\fint X|D|^{-t} = \delta_{t,n}\, 2^{m+1}\big(-\sum_l a_{\alpha,l}\, a^{\alpha}_{-l} + \, a_{\alpha,0}\, a^{\alpha}_0\big)\; 2\pi^{n/2}\, \Gamma(n/2)^{-1}. \tag{3.16}$$

où $X = \widetilde{A}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{A} + \widetilde{A}^2$ et $A =: -i\sum_l a_{\alpha,l}\, U_l \otimes \gamma^{\alpha}$.

Démonstration. D'après le Lemme 3.2.6, on obtient $\fint X|D|^{-t} = \mathrm{Res}_{s=0}\, \mathrm{Tr}(\widetilde{A}^2|D|^{-s-t})$. Puisque A et εJAJ^{-1} commutent, nous avons $\widetilde{A}^2 = A^2 + JA^2J^{-1} + 2\varepsilon JAJ^{-1}A$. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{A}^2|D|^{-s-t}) = \mathrm{Tr}(A^2|D|^{-s-t}) + \mathrm{Tr}(JA^2J^{-1}|D|^{-s-t}) + 2\,\mathrm{Tr}(\varepsilon JAJ^{-1}A|D|^{-s-t}).$$

Puisque $|D|$ et J commutent, nous avons avec le Lemme 3.2.7,

$$\mathrm{Tr}\left(\widetilde{A}^2|D|^{-s-t}\right) \sim_c 2L(A^2)\, Z_n(s+t) + 2\,\mathrm{Tr}\left(\varepsilon JAJ^{-1}A|D|^{-s-t}\right).$$

Ainsi le Lemme 3.2.8 implique que $\mathrm{Tr}(\widetilde{A}^2|D|^{-s-t})$ est holomorphe en 0 si $t \neq n$. Quand $t = n$,

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\, \mathrm{Tr}\left(\widetilde{A}^2|D|^{-s-t}\right) = 2^{m+1}\big(-\sum_l a_{\alpha,l}\, a^{\alpha}_{-l} + \, a_{\alpha,0}\, a^{\alpha}_0 \,\big)\, 2\pi^{n/2}\, \Gamma(n/2)^{-1},$$

ce qui donne le résultat. □

Lemme 3.2.10. *Si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice diophantienne, alors*

$$\fint \widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-2-n} = -\tfrac{n-2}{n}\fint \widetilde{A}^2|D|^{-n}.$$

Démonstration. Avec $\mathcal{D}J = \varepsilon J\mathcal{D}$, on obtient

$$\fint \widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-2-n} = 2\fint A\mathcal{D}A\mathcal{D}|D|^{-2-n} + 2\fint \varepsilon JAJ^{-1}\mathcal{D}A\mathcal{D}|D|^{-2-n}.$$

Calculons $\fint A\mathcal{D}A\mathcal{D}|D|^{-2-n}$. Nous avons, avec $A =: -iL(A_\alpha) \otimes \gamma^{\alpha} =: -i\sum_l a_{\alpha,l} U_l \otimes \gamma^{\alpha}$,

$$\mathrm{Tr}\left(A\mathcal{D}A\mathcal{D}|D|^{-s-2-n}\right) \sim_c -{\sum_k}' \sum_{l_1,l_2} a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\, \tau(U_{-k}U_{l_2}U_{l_1}U_k)\, \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}}{|k|^{s+2+n}}\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha,\mu})$$

où $\gamma^{\alpha,\mu} := \gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}$. Ainsi,

$$\fint A\mathcal{D}A\mathcal{D}|D|^{-2-n} = -\sum_l a_{\alpha_2,-l}\, a_{\alpha_1,l} \operatorname*{Res}_{s=0}\big({\sum_k}' \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+2+n}}\big)\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha,\mu}).$$

Nous avons aussi, avec $\varepsilon JAJ^{-1} = iR(A_\alpha) \otimes \gamma^{a}$,

$$\mathrm{Tr}\left(\varepsilon JAJ^{-1}\mathcal{D}A\mathcal{D}|D|^{-s-2-n}\right) \sim_c {\sum_k}' \sum_{l_1,l_2} a_{\alpha_2,l_2} a_{\alpha_1,l_1} \tau(U_{-k}U_{l_1}U_kU_{l_2}) \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}}{|k|^{s+2+n}}\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha,\mu}).$$

ce qui donne

$$\fint \varepsilon JAJ^{-1}\mathcal{D}A\mathcal{D}|D|^{-2-n} = a_{\alpha_2,0}a_{\alpha_1,0} \operatorname*{Res}_{s=0}\big({\sum_k}' \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+2+n}}\big)\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha,\mu}).$$

Ainsi,

$$\tfrac{1}{2}\fint \widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-2-n} = \big(a_{\alpha_2,0}a_{\alpha_1,0} - \sum_l a_{\alpha_2,-l}a_{\alpha_1,l}\big)\,\mathrm{Res}_{s=0}\,\big(\sum_k{}' \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+2+n}}\big)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha,\mu}).$$

Avec $\sum_k{}' \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+2+n}} = \frac{\delta_{\mu_1\mu_2}}{n} Z_n(s+n)$ et $C_n := \mathrm{Res}_{s=0}\, Z_n(s+n) = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}$ nous obtenons

$$\tfrac{1}{2}\fint \widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-2-n} = \big(a_{\alpha_2,0}a_{\alpha_1,0} - \sum_l a_{\alpha_2,-l}a_{\alpha_1,l}\big)\tfrac{C_n}{n}\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha_1}\gamma_\mu).$$

Puisque $\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha_1}\gamma_\mu) = 2^m(2-n)\delta^{\alpha_2,\alpha_1}$,

$$\tfrac{1}{2}\fint \widetilde{A}\mathcal{D}\widetilde{A}\mathcal{D}|D|^{-2-n} = 2^m\big(-a_{\alpha,0}\,a_0^{\alpha} + \sum_l a_{\alpha,-l}\,a_l^{\alpha}\big)\tfrac{C_n(n-2)}{n}.$$

L'équation (3.16) prouve finalement le lemme. □

Lemme 3.2.11. *Si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice diophantienne, alors pour tous $P \in \Psi_1(\mathcal{A})$ et $q \in \mathbb{N}$, q impair,*

$$\fint P|D|^{-(n-q)} = 0.$$

Démonstration. Il existe $B \in \mathcal{D}_1(\mathcal{A})$ et $p \in \mathbb{N}_0$ tels que $P = BD^{-2p} + R$ où R est dans OP^{-q-1}. Par conséquent, $\fint P|D|^{-(n-q)} = \fint B|D|^{-n-2p+q}$. Supposons $B = a_r b_r \mathcal{D}^{q_{r-1}} a_{r-1} b_{r-1} \cdots \mathcal{D}^{q_1} a_1 b_1$ où $r \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathcal{A}$, $b_i \in J\mathcal{A}J^{-1}$, $q_i \in \mathbb{N}$. Si nous prouvons que $\fint B|D|^{-n-2p+q} = 0$, alors le cas général suivra par linéarité. Nous notons $a_i =: \sum_l a_{i,l}\,U_l$ et $b_i =: \sum_l b_{i,l}\,U_l$.

En définissant $k_{\mu_1,\mu_{q_i}} := k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_{q_i}}$ et $\gamma^{\mu_1,\mu_{q_i}} = \gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{q_i}}$, on obtient

$$\mathcal{D}^{q_1} a_1 b_1 U_k \otimes e_j = \sum_{l_1,l_1'} a_{1,l_1}\, b_{1,l_1'}\, U_{l_1}U_kU_{l_1'}\,(k+l_1+l_1')_{\mu_1,\mu_{q_1}} \otimes \gamma^{\mu_1,\mu_{q_1}} e_j$$

ce qui donne, après itération,

$$B\,U_k \otimes e_j = \sum_{l,l'} \widetilde{a}_l \widetilde{b}_l U_{l_r}\cdots U_{l_1}U_kU_{l_1'}\cdots U_{l_r'} \prod_{i=1}^{r-1}(k+\widehat{l_i}+\widehat{l_i'})_{\mu_1^i,\mu_{q_i}^i} \otimes \gamma^{\mu_1^{r-1},\mu_{q_{r-1}}^{r-1}}\cdots\gamma^{\mu_1^1,\mu_{q_1}^1} e_j$$

où $\widetilde{a}_l := a_{1,l_1}\cdots a_{r,l_r}$ et $\widetilde{b}_{l'} := b_{1,l_1'}\cdots b_{r,l_r'}$. Notons $Q_\mu(k,l,l') := \prod_{i=1}^{r-1}(k+\widehat{l_i}+\widehat{l_i'})_{\mu_1^i,\mu_{q_i}^i}$ et $\gamma^\mu := \gamma^{\mu_1^{r-1},\mu_{q_{r-1}}^{r-1}}\cdots\gamma^{\mu_1^1,\mu_{q_1}^1}$. Ainsi,

$$\fint B\,|D|^{-n-2p+q} = \operatorname*{Res}_{s=0}\sum_k{}' \sum_{l,l'} \widetilde{a}_l\,\widetilde{b}_{l'}\,\tau\big(U_{-k}U_{l_r}\cdots U_{l_1}U_kU_{l_1'}\cdots U_{l_r'}\big)\,\tfrac{Q_\mu(k,l,l')}{|k|^{s+2p+n-q}}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu)\,.$$

Puisque $U_{l_r}\cdots U_{l_1}U_k = U_kU_{l_r}\cdots U_{l_1}e^{-i\sum_1^r l_i.\Theta k}$, on obtient

$$\tau\big(U_{-k}U_{l_r}\cdots U_{l_1}U_kU_{l_1'}\cdots U_{l_r'}\big) = \delta_{\sum_1^r l_i+l_i',0}\,e^{i\phi(l,l')}\,e^{-i\sum_1^r l_i.\Theta k}$$

où ϕ est une fonction à valeurs réelles. Ainsi,

$$\begin{aligned}\fint B\,|D|^{-n-2p+q} &= \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_k{}' \sum_{l,l'} e^{i\phi(l,l')}\,\delta_{\sum_1^r l_i+l'_i,0}\,\widetilde{a}_l\,\widetilde{b}_{l'}\,\frac{Q_\mu(k,l,l')e^{-i\sum_1^r l_i.\Theta k}}{|k|^{s+2p+n-q}}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu)\\ &=: \operatorname*{Res}_{s=0} f_\mu(s)\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu).\end{aligned}$$

On décompose le terme $Q_\mu(k,l,l')$ comme une somme $\sum_{h=0}^r M_{h,\mu}(l,l')\,Q_{h,\mu}(k)$ où le terme $Q_{h,\mu}$ est un polynôme homogène dans $(k_1,\cdots,k_n)$ et $M_{h,\mu}(l,l')$ est un polynôme dans $\big((l_1)_1,\cdots,(l_r)_n,(l'_1)_1,\cdots,(l'_r)_n\big)$.

De façon similaire, on décompose $f_\mu(s)$ as $\sum_{h=0}^r f_{h,\mu}(s)$. Le Théorème 2.2.2 (ii) implique que $f_{h,\mu}(s)$ s'étend méromorphiquement au plan complexe avec au plus un pôle en $s+2p+n-q=n+d$ où $d:=\deg Q_{h,\mu}$. Autrement dit, si $d+q-2p\neq 0$, $f_{h,\mu}(s)$ est analytique en $s=0$. Supposons maintenant que $d+q-2p=0$ (ceci implique que d est impair, puisque q est impair par hypothèse), alors, d'après le Théorème 2.2.2 (ii)

$$\operatorname*{Res}_{s=0} f_{h,\mu}(s) = V\int_{u\in S^{n-1}} Q_{h,\mu}(u)\,dS(u)$$

où $V:=\sum_{l,l'\in Z} M_{h,\mu}(l,l')\,e^{i\phi(l,l')}\,\delta_{\sum_1^r l_i+l'_i,0}\,\widetilde{a}_l\,\widetilde{b}_{l'}$ et $Z:=\{\,l,l'\,:\,\sum_{i=1}^r l_i=0\,\}$. Puisque d est impair, $Q_{h,\mu}(-u)=-Q_{h,\mu}(u)$ et $\int_{u\in S^{n-1}} Q_{h,\mu}(u)\,dS(u)=0$. Ainsi, $\operatorname*{Res}_{s=0} f_{h,\mu}(s)=0$ dans tous les cas, ce qui donne le résultat. □

Remarquons que le point crucial du résultat précédent est la décomposition du numérateur des séries $f_\mu(s)$ en polynômes en k. Ceci a été possible car nous avons restreint les opérateurs pseudodifférentiels à la partie $\Psi_1(\mathcal{A})$.

Démonstration de la Proposition 3.2.5. L'expression de l'élément de plus haut degré découle de la Proposition 1.3.9 et d'après (2.14),

$$\fint |D|^{-n} = \operatorname*{Res}_{s=0}\ \mathrm{Tr}\left(|D|^{-s-n}\right) = 2^m \operatorname*{Res}_{s=0} Z_n(s+n) = \frac{2^{m+1}\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\,.$$

Pour la deuxième égalité, on obtient à partir des Lemmes 3.2.7 et 1.3.6

$$\operatorname*{Res}_{s=n-k} \zeta_{D_A}(s) = \sum_{p=1}^{k}\ \sum_{r_1,\cdots,r_p=0}^{k-p} h(n-k,r,p)\fint \varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-(n-k)}.$$

Le Corollaire 1.3.4 et le Lemme 3.2.11 impliquent que $\fint \varepsilon^{r_1}(Y)\cdots\varepsilon^{r_p}(Y)|D|^{-(n-k)}=0$, ce qui donne le résultat.

La dernière égalité découle du Lemme 3.2.10 et du Corollaire 1.3.11. □

3.3 L'action spectrale

Voici le résultat principal:

Théorème 3.3.1. *Soit* $\big(C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta), \mathcal{H}, \mathcal{D}\big)$ *le tore non commutatif de dimension* n*, où* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\frac{1}{2\pi}\Theta$ *est une matrice réelle* $n \times n$ *antisymétrique diophantienne, et une 1-forme auto-adjointe* $A = L(-iA_\alpha) \otimes \gamma^\alpha$*. Alors, l'action spectrale associée à* $\mathcal{D}_A = \mathcal{D} + A + \epsilon JAJ^{-1}$ *du tore non commutatif est :*
(i) pour $n = 2$*,*

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) = 4\pi\, \Phi_2\, \Lambda^2 + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}),$$

(ii) pour $n = 4$*,*

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) = 8\pi^2\, \Phi_4\, \Lambda^4 - \tfrac{4\pi^2}{3}\, \Phi(0)\, \tau(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}),$$

(iii) plus généralement,

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \Phi_{n-k}\, c_{n-k}(A)\, \Lambda^{n-k} + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}),$$

où $c_{n-2}(A) = 0$*,* $c_{n-k}(A) = 0$ *pour* k *impair. En particulier,* $c_0(A) = 0$ *quand* n *est impair.*

Ce résultat (pour $n = 4$) a aussi été obtenu dans [62] en utilisant une méthode de noyau de la chaleur. Il est cependant intéressant d'obtenir ce résultat par des calculs directs de (1.6) puisque ceci permet de prouver le caractère efficace de cette formule. Comme nous le verrons, la détermination de toutes les intégrales non commutatives nécessitent un grand nombre d'étapes techniques. Un des points principaux est d'isoler à quel endroit la condition diophantienne sur Θ est réellement utile.

Remarque 3.3.2. *Notons que tous les termes de l'action spectrale sont invariants par transformation de jauge, d'après (3.9),* $A_\alpha \longrightarrow \gamma_u(A_\alpha) = uA_\alpha u^* + u\delta_\alpha(u^*)$*. Un cas particulier est* $u = U_k$ *où* $U_k\delta_\alpha(U_k^*) = -ik_\alpha U_0$*.*

Notons aussi que la formule obtenue de l'action spectrale n'est pas en contradiction avec le cas commutatif, car pour tout 1-forme auto-adjointe A*,* $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$ *si* $\mathcal{A}$ *est commutatif (*$\Theta = 0$*), alors que la condition* Θ *diophantienne ne contient pas le cas* $\Theta = 0$*.*

Conjecture 3.3.3. *Le terme constant (invariant d'échelle) de l'action spectrale de* $\mathcal{D}_A$ *du tore non commutatif de dimension* n *est proportionnel au terme constant de l'action spectrale de* $\mathcal{D}+A$ *sur le tore commutatif de dimension* n*.*

Remarque 3.3.4. *La condition diophantienne pour* Θ *a été détectée en dimension 2 par Connes [27, Prop. 49] où dans ce cas* $\Theta = \theta\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$*. La cohomologie de Hochschild* $H(\mathcal{A}_\Theta, \mathcal{A}_\Theta{}^*)$ *satisfait dim* $H^j(\mathcal{A}_\Theta, \mathcal{A}_\Theta{}^*) = 2$ *(ou 1) pour* $j = 1$ *(ou* $j = 2$*) si et seulement si le nombre irrationnel* θ *satisfait à la condition diophantienne* $|1 - e^{i2\pi n\theta}|^{-1} = \mathcal{O}(n^k)$ *pour un* $k \in \mathbb{N}$*.*

Rappelons d'autre part que lorsque la matrice Θ *est "assez irrationelle" [68, Cor. 2.12], alors la* C^**-algèbre générée par* $\mathcal{A}_\Theta$ *est simple.*

Remarque 3.3.5. *Il est possible de generaliser le théorème précédent au cas où* $\mathcal{D} = -i\, g^\mu{}_\nu\, \delta_\mu \otimes \gamma^\nu$ *lorsque* g *est une matrice définie-positive constante. Les formules du Théorème 3.3.1 sont toujours valides.*

3.3.1 Calculs de $⨍$

Afin d'obtenir ce théorème, nous prouvons quelques lemmes techniques.

Supposons que Θ soit une matrice antisymétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Aucune autre hypothèse n'est faite sur Θ, sauf lorsqu'on le dira explicitement.

Lorsque A est une 1-forme auto-adjointe, on pose, pour $n \in N$, $q \in \mathbb{N}$, $2 \leq q \leq n$ et $\sigma \in \{-,+\}^q$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^+ &:= A\mathcal{D}D^{-2}, \\
\mathbb{A}^- &:= \epsilon JAJ^{-1}\mathcal{D}D^{-2}, \\
\mathbb{A}^\sigma &:= \mathbb{A}^{\sigma_q}\cdots\mathbb{A}^{\sigma_1}.
\end{aligned}$$

Lemme 3.3.6. *Nous avons pour tout $q \in \mathbb{N}$,*

$$⨍(\widetilde{A}D^{-1})^q = ⨍(\widetilde{A}\mathcal{D}D^{-2})^q = \sum_{\sigma\in\{+,-\}^q} ⨍\,\mathbb{A}^\sigma.$$

Démonstration. Puisque $P_0 \in OP^{-\infty}$, $D^{-1} = \mathcal{D}D^{-2} \mod OP^{-\infty}$ et $⨍(\widetilde{A}D^{-1})^q = ⨍(\widetilde{A}\mathcal{D}D^{-2})^q$. □

Lemme 3.3.7. *Soit A une 1-forme auto-adjointe, $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ avec $2 \leq q \leq n$ et $\sigma \in \{-,+\}^q$. Alors*

$$⨍\,\mathbb{A}^\sigma = ⨍\,\mathbb{A}^{-\sigma}.$$

Démonstration. Vérifions d'abord que $JP_0 = P_0J$. Puisque $\mathcal{D}J = \varepsilon J\mathcal{D}$, on obtient $\mathcal{D}JP_0 = 0$ so $JP_0 = P_0JP_0$. Puisque J est un opérateur antiunitaire, on obtient $P_0J = P_0JP_0$ et finalement, $P_0J = JP_0$. Par conséquent, on obtient $JD^2 = D^2J$, $J\mathcal{D}D^{-2} = \varepsilon\mathcal{D}D^{-2}J$, $J\mathbb{A}^+J^{-1} = \mathbb{A}^-$ et $J\mathbb{A}^-J^{-1} = \mathbb{A}^+$. En résumé, $J\mathbb{A}^{\sigma_i}J^{-1} = \mathbb{A}^{-\sigma_i}$. La propriété de trace $⨍$ donne ainsi :

$$⨍\,\mathbb{A}^\sigma = ⨍\,\mathbb{A}^{\sigma_q}\cdots\mathbb{A}^{\sigma_1} = ⨍\,J\mathbb{A}^{\sigma_q}J^{-1}\cdots J\mathbb{A}^{\sigma_1}J^{-1}⨍\,\mathbb{A}^{-\sigma_q}\cdots\mathbb{A}^{-\sigma_1} = ⨍\,\mathbb{A}^{-\sigma}.$$ □

Définition 3.3.8. Il a été introduit dans [22] l'hypothèse d'absence de tadpole :

$$⨍\,AD^{-1} = 0, \text{ pour tout } A \in \Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}). \tag{3.17}$$

D'après le lemme suivant, cette condition est satisfaite sur le tore non commutatif, popriété déjà connue de la communauté de géométrie non commutative [137].

Lemme 3.3.9. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $A = L(-iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha = -i\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_{\alpha,l}\,U_l\otimes\gamma^\alpha$, $A_\alpha \in \mathcal{A}_\Theta$, $\{a_{\alpha,l}\}_l \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, une 1-forme auto-adjointe. Alors,*
(i) $⨍\,A^pD^{-q} = ⨍(\epsilon JAJ^{-1})^pD^{-q} = 0$ pour $p \geq 0$ et $1 \leq q < n$ (le cas $p = q = 1$ est l'hypothèse d'absence de tadpole)
(ii) Si $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est une matrice diophantiennne, alors $⨍\,BD^{-q} = 0$ pour $1 \leq q < n$ et pour B dans l'algèbre générée par $\mathcal{A}$, $[\mathcal{D},\mathcal{A}]$, $J\mathcal{A}J^{-1}$ et $J[\mathcal{D},\mathcal{A}]J^{-1}$.

Démonstration. (i) Calculons

$$\fint A^p(\epsilon JAJ^{-1})^{p'}D^{-q}.$$

Avec $A = L(-iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha$ et $\epsilon JAJ^{-1} = R(iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha$, on obtient

$$A^p = L(-iA_{\alpha_1})\cdots L(-iA_{\alpha_p})\otimes\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_p}$$

et

$$(\epsilon JAJ^{-1})^{p'} = R(iA_{\alpha'_1})\cdots R(iA_{\alpha'_{p'}})\otimes\gamma^{\alpha'_1}\cdots\gamma^{\alpha'_{p'}}.$$

Notons $\widetilde{a}_{\alpha,l} := a_{\alpha_1,l_1}\cdots a_{\alpha_p,l_p}$. Puisque

$$L(-iA_{\alpha_1})\cdots L(-iA_{\alpha_p})R(iA_{\alpha'_1})\cdots R(iA_{\alpha'_{p'}})U_k = (-i)^p\, i^{p'}\sum_{l,l'}\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\widetilde{a}_{\alpha',l'}\,U_{l_1}\cdots U_{l_p}U_kU_{l'_{p'}}\cdots U_{l'_1},$$

et

$$U_{l_1}\cdots U_{l_p}U_k = U_kU_{l_1}\cdots U_{l_p}\,e^{-i(\sum_i l_i).\Theta k},$$

on obtient, avec

$$\begin{aligned}
&U_{l,l'} := U_{l_1}\cdots U_{l_p}U_{l'_{p'}}\cdots U_{l'_1},\\
&g_{\mu,\alpha,\alpha'}(s,k,l,l') := e^{ik.\Theta\sum_j l_j}\,\tfrac{k_{\mu_1}\ldots k_{\mu_q}}{|k|^{s+2q}}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\widetilde{a}_{\alpha',l'},\\
&\gamma^{\alpha,\alpha',\mu} := \gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_p}\gamma^{\alpha'_1}\cdots\gamma^{\alpha'_{p'}}\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_q},
\end{aligned}$$

$$A^p(\epsilon JAJ^{-1})^{p'}D^{-q}|D|^{-s}U_k\otimes e_i \sim_c (-i)^p\, i^{p'}\sum_{l,l'} g_{\mu,\alpha,\alpha'}(s,k,l,l')\,U_kU_{l,l'}\otimes\gamma^{\alpha,\alpha',\mu}e_i.$$

Ainsi, $\fint A^p(\epsilon JAJ^{-1})^{p'}D^{-q} = \operatorname*{Res}_{s=0} f(s)$ où

$$\begin{aligned}
f(s) :&= \operatorname{Tr}\big(A^p(\epsilon JAJ^{-1})^{p'}D^{-q}|D|^{-s}\big)\\
&\sim_c (-i)^p\, i^{p'}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}'\langle U_k\otimes e_i, \sum_{l,l'} g_{\mu,\alpha,\alpha'}(s,k,l,l')U_kU_{l,l'}\otimes\gamma^{\alpha,\alpha',\mu}e_i\rangle\\
&\sim_c (-i)^p\, i^{p'}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}'\,\tau\big(\sum_{l,l'} g_{\mu,\alpha,\alpha'}(s,k,l,l')U_{l,l'}\big)\operatorname{Tr}(\gamma^{\mu,\alpha,\alpha'})\\
&\sim_c (-i)^p\, i^{p'}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}'\sum_{l,l'} g_{\mu,\alpha,\alpha'}(s,k,l,l')\,\tau\big(U_{l,l'}\big)\operatorname{Tr}(\gamma^{\mu,\alpha,\alpha'}).
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que la série $\sum'_{k,l,l'} g_{\mu,\alpha,\alpha'}(s,k,l,l')\,\tau\big(U_{l,l'}\big)$ est absolument sommable pour tout s tel que $\Re(s) > 0$. Ainsi, il est possible d'échanger les sommes sur k et l,l', ce qui donne

$$f(s) \sim_c (-i)^p\, i^{p'}\sum_{l,l'}{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' g_{\mu,\alpha,\alpha'}(s,k,l,l')\,\tau\big(U_{l,l'}\big)\operatorname{Tr}(\gamma^{\mu,\alpha,\alpha'}).$$

Si on suppose maintenant que $p' = 0$, il apparaît que

$$f(s) \sim_c (-i)^p\sum_l{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}'\tfrac{k_{\mu_1}\ldots k_{\mu_q}}{|k|^{s+2q}}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\delta_{\sum_{i=1}^p l_i,0}\operatorname{Tr}(\gamma^{\mu,\alpha,\alpha'})$$

et ceci est, d'après la Proposition 2.3.2, analytique en 0. En particulier, pour $p = q = 1$, nous voyons que $⨍ AD^{-1} = 0$, i.e. l'hypothèse d'absence de tadpole est vérifiée. De façon similaire, si on suppose $p = 0$, on obtient

$$f(s) \sim_c (-i)^{p'} \sum_{l'} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}\dots k_{\mu_q}}{|k|^{s+2q}}\, \widetilde{a}_{\alpha,l'}\, \delta_{\sum_{i=1}^{p'} l'_i,0}\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu,\alpha,\alpha'})$$

qui est holomorphe en 0.

(ii) En adaptant la preuve du Lemme 3.2.11, (en prenant $q_i = 0$, et en ajoutant les composantes des matrices gamma), nous voyons que

$$⨍ B\, D^{-q} = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_k{}' \sum_{l,l'} e^{i\phi(l,l')}\, \delta_{\sum_1^r l_i + l'_i,0}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \widetilde{b}_{\beta,l'}\, \tfrac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_q}\, e^{-i\sum_1^r l_i.\Theta k}}{|k|^{s+2q}}\, \mathrm{Tr}(\gamma^{(\mu,\alpha,\beta)})$$

où $\gamma^{(\mu,\alpha,\beta)}$ est un produit de matrices gamma. D'après le Théorème 2.2.2 (ii), ce résidu est nul puisque nous supposons ici que $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est un matrice diophantienne. □

Cas de la dimension paire

Corollaire 3.3.10. *On fait les mêmes hypothèses que dans le Lemme 3.3.9.*

(i) Cas $n = 2$:

$$⨍ A^q D^{-q} = -\delta_{q,2}\, 4\pi\, \tau\big(A_\alpha A^\alpha\big)\,.$$

(ii) Cas $n = 4$: avec la notation $\delta_{\mu_1,\dots,\mu_4} := \delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\mu_3\mu_4} + \delta_{\mu_1\mu_3}\delta_{\mu_2\mu_4} + \delta_{\mu_1\mu_4}\delta_{\mu_2\mu_3}$,

$$⨍ A^q D^{-q} = \delta_{q,4}\, \tfrac{\pi^2}{12} \tau\big(A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_4}\big)\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_4})\delta_{\mu_1,\dots,\mu_4}\,.$$

Démonstration. (i, ii) Le même calcul que dans le Lemme 3.3.9 (i) (avec $p' = 0$, $p = q = n$) donne

$$⨍ A^n D^{-n} = \operatorname*{Res}_{s=0} (-i)^n \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}\dots k_{\mu_n}}{|k|^{s+2n}}\Big)\, \tau\Big(\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^n} \widetilde{a}_{\alpha,l} U_{l_1}\cdots U_{l_n}\Big)\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_n}\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n})$$

et le résultat découle de la Proposition 2.3.2. □

Nous utiliserons les notations suivantes :

Si $n \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $l := (l_1, \cdots, l_{q-1}) \in (\mathbb{Z}^n)^{q-1}$, $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_q) \in \{1, \cdots, n\}^q$, $k \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$, $\sigma \in \{-, +\}^q$, $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n))^n$,

$$l_q := -\sum_{1\leq j\leq q-1} l_j\,, \quad \lambda_\sigma := (-i)^q \prod_{j=1\dots q} \sigma_j\,, \quad \widetilde{a}_{\alpha,l} := a_{\alpha_1,l_1}\dots a_{\alpha_q,l_q}\,,$$

$$\phi_\sigma(k,l) := \sum_{1\leq j\leq q-1} (\sigma_j - \sigma_q)\, k.\Theta l_j + \sum_{2\leq j\leq q-1} \sigma_j\, (l_1 + \ldots + l_{j-1}).\Theta l_j\,,$$

$$g_\mu(s,k,l) := \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}\dots(k+l_1+\ldots+l_{q-1})_{\mu_q}}{|k|^{s+2}|k+l_1|^2\dots|k+l_1+\ldots+l_{q-1}|^2}\,,$$

avec la convention $\sum_{2\leq j\leq q-1} = 0$ lorsque $q = 2$, et $g_\mu(s,k,l) = 0$ lorsque $\widehat{l_i} = -k$ pour un $1 \leq i \leq q-1$.

Lemme 3.3.11. *Soient* $A = L(-iA_\alpha) \otimes \gamma^\alpha = -i \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_{\alpha,l}\, U_l \otimes \gamma^\alpha$ *où* $A_\alpha = -A_\alpha^* \in \mathcal{A}_\Theta$ *et* $\{\, a_{\alpha,l} \,\}_l \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$*, avec* $n \in \mathbb{N}$*, une 1-forme auto-adjointe, et soient* $2 \le q \le n$*,* $\sigma \in \{-,+\}^q$*.*

Alors, $⨍ \mathbb{A}^\sigma = \operatorname*{Res}_{s=0} f(s)$ *où*

$$f(s) := \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^{q-1}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \lambda_\sigma\; e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma(k,l)}\; g_\mu(s,k,l)\; \widetilde{a}_{\alpha,l}\; \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_q}\gamma^{\mu_q}\cdots\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}).$$

Démonstration. Par définition, $⨍ \mathbb{A}^\sigma = \operatorname*{Res}_{s=0} f(s)$ où

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{A}^{\sigma_q}\cdots\mathbb{A}^{\sigma_1}|D|^{-s}) \sim_c \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \langle U_k \otimes e^i, |k|^{-s}\, \mathbb{A}^{\sigma_q}\cdots\mathbb{A}^{\sigma_1} U_k \otimes e_i\rangle =: f(s).$$

Soit $r \in \mathbb{Z}^n$ et $v \in \mathbb{C}^{2^m}$. Puisque $A = L(-iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha$, et $\epsilon JAJ^{-1} = R(iA_\alpha)\otimes\gamma^\alpha$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^+ U_r \otimes v &= A\mathcal{D}D^{-2}U_r\otimes v = A\tfrac{r_\mu}{|r|^2+\delta_{r,0}}U_r\otimes\gamma^\mu v = -i\tfrac{r_\mu}{|r|^2+\delta_{r,0}}A_\alpha U_r\otimes\gamma^\alpha\gamma^\mu v\,,\\
\mathbb{A}^- U_r \otimes v &= \epsilon JAJ^{-1}\mathcal{D}D^{-2}U_r\otimes v = \epsilon JAJ^{-1}\tfrac{r_\mu}{|r|^2+\delta_{r,0}}U_r\otimes\gamma^\mu v = i\tfrac{r_\mu}{|r|^2+\delta_{r,0}}U_r A_\alpha\otimes\gamma^\alpha\gamma^\mu v.
\end{aligned}$$

Avec $U_l U_r = e^{\frac{i}{2}r.\Theta l}U_{r+l}$ et $U_r U_l = e^{-\frac{i}{2}r.\Theta l}U_{r+l}$, nous obtenons, pour tout $1 \le j \le q$,

$$\mathbb{A}^{\sigma_j} U_r \otimes v = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} (-\sigma_j)\, i\, e^{\sigma_j\,\frac{i}{2}r.\Theta l}\,\tfrac{r_\mu}{|r|^2+\delta_{r,0}}\, a_{\alpha,l}\, U_{r+l}\otimes\gamma^\alpha\gamma^\mu v.$$

Nous appliquons maintenant q fois cette formule afin d'obtenir

$$|k|^{-s}\mathbb{A}^{\sigma_q}\cdots\mathbb{A}^{\sigma_1}U_k\otimes e_i = \lambda_\sigma \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q} e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma(k,l)}\; g_\mu(s,k,l)\; \widetilde{a}_{\alpha,l}\; U_{k+\sum_j l_j}\otimes\gamma^{\alpha_q}\gamma^{\mu_q}\cdots\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}e_i$$

avec

$$\phi_\sigma(k,l) := \sigma_1\, k.\Theta l_1 + \sigma_2\,(k+l_1).\Theta l_2 + \ldots + \sigma_q\,(k+l_1+\ldots+l_{q-1}).\Theta l_q.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tau\big(\lambda_\sigma \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q} e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma(k,l)}\; g_\mu(s,k,l)\; \widetilde{a}_{\alpha,l}\; U_{\sum_j l_j} e^{\frac{i}{2}k.\Theta\sum_j l_j}\big)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_q}\gamma^{\mu_q}\cdots\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \lambda_\sigma \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^q} e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma(k,l)}\; g_\mu(s,k,l)\; \widetilde{a}_{\alpha,l}\; \delta(\sum_j l_j)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_q}\gamma^{\mu_q}\cdots\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \lambda_\sigma \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^{q-1}} e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma(k,l)}\; g_\mu(s,k,l)\; \widetilde{a}_{\alpha,l}\; \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_q}\gamma^{\mu_q}\cdots\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})
\end{aligned}$$

où dans la dernière somme l_q est fixé à $-\sum_{1\le j\le q-1} l_j$ et ainsi,

$$\phi_\sigma(k,l) = \sum_{1\le j\le q-1} (\sigma_j - \sigma_q)\, k.\Theta l_j + \sum_{2\le j\le q-1} \sigma_j\,(l_1+\ldots+l_{j-1}).\Theta l_j.$$

D'après le lemme 2.2.7, il existe un $R > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > R$, la famille

$$\big(e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma(k,l)}\ g_\mu(s,k,l)\ \widetilde{a}_{\alpha,l}\big)_{(k,l)\in(\mathbb{Z}^n\setminus\{0\})\times(\mathbb{Z}^n)^{q-1}}$$

soit absolument sommable en tant que combinaison linéaire de familles du type considéré dans ce lemme. Par conséquent, il est possible d'échanger les sommations sur k et l, ce qui donne le résultat. □

Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation

$$c := \tfrac{4\pi^2}{3}.$$

Lemme 3.3.12. *Supposons $n = 4$. Alors, avec les mêmes hypothèses que celles du Lemme 3.3.11,*

(i) $\quad \frac{1}{2}⨍(\mathbb{A}^+)^2 = \frac{1}{2}⨍(\mathbb{A}^-)^2 = c\sum_{l\in\mathbb{Z}^4} a_{\alpha_1,l}\, a_{\alpha_2,-l}\,\big(l^{\alpha_1}l^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}|l|^2\big).$

(ii) $\quad -\frac{1}{3}⨍(\mathbb{A}^+)^3 = -\frac{1}{3}⨍(\mathbb{A}^-)^3 = 4c\sum_{l_i\in\mathbb{Z}^4} a_{\alpha_3,-l_1-l_2}\, a^{\alpha_1}_{l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\ \sin\frac{l_1.\Theta l_2}{2}\, l_1^{\alpha_3}.$

(iii) $\quad \frac{1}{4}⨍(\mathbb{A}^+)^4 = \frac{1}{4}⨍(\mathbb{A}^-)^4 = 2c\sum_{l_i\in\mathbb{Z}^4} a_{\alpha_1,-l_1-l_2-l_3}\, a_{\alpha_2,l_3}\, a^{\alpha_1}_{l_2}\, a^{\alpha_2}_{l_1}\sin\frac{l_1.\Theta(l_2+l_3)}{2}\ \sin\frac{l_2.\Theta l_3}{2}.$

(iv) Supposons que $\frac{1}{2\pi}\Theta$ soit une matrice diophantienne. Alors les termes croisés dans $⨍(\mathbb{A}^+ + \mathbb{A}^-)^q$ s'annulent: si C est l'ensemble de tous les $\sigma \in \{-,+\}^q$ avec $2 \le q \le 4$, tels qu'il existe i, j vérifiant $\sigma_i \neq \sigma_j$, nous avons $\sum_{\sigma\in C} ⨍\,\mathbb{A}^\sigma = 0$.

Démonstration. (i) Le Lemme 3.3.11 implique que $⨍\,\mathbb{A}^{++} = \operatorname*{Res}_{s=0}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} -f(s,l)$ où

$$f(s,l) := {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+2}|k+l|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}\ \operatorname{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})\ \text{ et }\ \widetilde{a}_{\alpha,l} := a_{\alpha_1,l}\, a_{\alpha_2,-l}\,.$$

Nous allons maintenant réduire le calcul des résidus d'une expression basée sur les termes du type $|k+l|^2$ dans le dénominateur au calcul de résidus de fonctions zêta. Pour ce faire, nous utilisons (2.10) dans une expression du type $f(s,l)$. Nous voyons que le dernier terme du côté droit donne une fonction de type $Z_n(s)$ alors que le premier terme est moins divergent en k d'un degré. En répétant cette procédure suffisamment, il possible d'obtenir à la fin que des termes convergents, modulo des termes qui peuvent s'exprimer par des fonctions Z_n. En utilisant trois fois (2.10),

$$\tfrac{1}{|k+l|^2} = \tfrac{1}{|k|^2} - \tfrac{2k.l+|l|^2}{|k|^4} + \tfrac{(2k.l+|l|^2)^2}{|k|^6} - \tfrac{(2k.l+|l|^2)^3}{|k|^6|k+l|^2}\,. \tag{3.18}$$

Posons

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) := {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+2}|k+l|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}$$

de sorte que $f(s,l) = f_{\alpha,\mu}(s,l)\operatorname{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})$. L'équation (3.18) donne

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) = f_1(s,l) - f_2(s,l) + f_3(s,l) - r(s,l)$$

avec identifications évidentes. Notons que la fonction

$$r(s,l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(2kl+|l|^2)^3}{|k|^{s+8}|k+l|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}$$

est une combinaison linéaire de fonctions du type $H(s,l)$ satisfaisant les hypothèses du Corollaire 2.2.10. Ainsi, $r(s,l)$ satisfait (H1) et avec la relation d'équivalence modulo des fonctions satisfaisant cette hypothèse, nous obtenons $f_{\alpha,\mu}(s,l) \sim f_1(s,l) - f_2(s,l) + f_3(s,l)$.

Calculons $f_1(s,l)$.

$$f_1(s,l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} = \widetilde{a}_{\alpha,l} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+4}} + 0.$$

La Proposition 2.1.1 implique que $s \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}$ est holomorphe en 0. Ainsi, $f_1(s,l)$ satisfait (H1), et $f_{\alpha,\mu}(s,l) \sim -f_2(s,l) + f_3(s,l)$.

Calculons $f_2(s,l)$ modulo (H1). En utilisant plusieurs fois la Proposition 2.1.1,

$$\begin{aligned} f_2(s,l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(2kl+|l|^2)}{|k|^{s+6}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{(2kl)k_{\mu_1}k_{\mu_2}+(2kl)k_{\mu_1}l_{\mu_2}+|l|^2k_{\mu_1}k_{\mu_2}+l_{\mu_2}|l|^2k_{\mu_1}}{|k|^{s+6}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} \\ &\sim 0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{(2kl)k_{\mu_1}l_{\mu_2}}{|k|^{s+6}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{|l|^2k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+6}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} + 0\,. \end{aligned}$$

Rappelons que $\sum'_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{k_ik_j}{|k|^{s+6}} = \frac{\delta_{ij}}{n} Z_n(s+4)$. Ainsi,

$$f_2(s,l) \sim 2l^il_{\mu_2}\widetilde{a}_{\alpha,l}\tfrac{\delta_{i\mu_1}}{n}Z_n(s+4) + |l|^2\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\tfrac{\delta_{\mu_1\mu_2}}{n}Z_n(s+4).$$

Finalement, calculons $f_3(s,l)$ modulo (H1) en suivant les mêmes principes :

$$\begin{aligned} f_3(s,l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(2kl+|l|^2)^2}{|k|^{s+8}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{(2kl)^2k_{\mu_1}k_{\mu_2}+(2kl)^2k_{\mu_1}l_{\mu_2}+|l|^4k_{\mu_1}k_{\mu_2}+|l|^4k_{\mu_1}l_{\mu_2}+(4kl)|l|^2k_{\mu_1}k_{\mu_2}+(4kl)|l|^2k_{\mu_1}l_{\mu_2}}{|k|^{s+8}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} \\ &\sim 4l^il^j \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_ik_jk_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+8}}\widetilde{a}_{\alpha,l} + 0. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) \sim -\tfrac{1}{4}(2l_{\mu_1}l_{\mu_2} + |l|^2\ \delta_{\mu_1\mu_2})\widetilde{a}_{\alpha,l}Z_n(s+4) + 4l^il^j\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_ik_jk_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+8}} =: g_{\alpha,\mu}(s,l).$$

La Proposition (2.1.1) implique que $Z_n(s+4)$ et $s \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \frac{k_ik_jk_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+8}}$ s'étend holomorphiquement dans un disque pointé centré en 0. Ainsi, $g_{\alpha,\mu}(s,l)$ satisfait (H2) et nous pouvons appliquer le Lemme 2.2.11 afin d'obtenir

$$-\!\!\!\!\!\!\int (\mathbb{A}^+)^2 = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(s,l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \operatorname*{Res}_{s=0}\ g_{\alpha,\mu}(s,l)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}) =: \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \operatorname*{Res}_{s=0}\ g(s,l).$$

Le problème est ainsi réduit au calcul de $\operatorname*{Res}_{s=0} g(s,l)$. Rappelons que $\mathrm{Res}_{s=0} Z_4(s+4) = 2\pi^2$ d'après (2.14) ou (2.11), et

$$\mathrm{Res}_{s=0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_i k_j k_l k_m}{|k|^{s+8}} = (\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl})\, \tfrac{\pi^2}{12}.$$

Ainsi,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} g_{\alpha,\mu}(s,l) = -\tfrac{\pi^2}{3}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, (l_{\mu_1} l_{\mu_2} + \tfrac{1}{2}|l|^2 \delta_{\mu_1\mu_2}).$$

On utilisera

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2j}}) = \mathrm{Tr}(1) \sum_{Pappariement} s(P)\, \delta_{\mu_{P_1}\mu_{P_2}} \delta_{\mu_{P_3}\mu_{P_4}} \cdots \delta_{\mu_{P_{2j-1}}\mu_{P_{2j}}} \tag{3.19}$$

où $s(P)$ est la signature de la permutation P lorsque $P_{2m-1} < P_{2m}$ pour $1 \le m \le n$. Ceci donne

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}) = 2^m(\delta^{\alpha_2\mu_2}\delta^{\alpha_1\mu_1} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}\delta^{\mu_2\mu_1} + \delta^{\alpha_2\mu_1}\delta^{\mu_2\alpha_1}). \tag{3.20}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=0} g(s,l) &= -c\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, (l_{\mu_1} l_{\mu_2} + \tfrac{1}{2}|l|^2 \delta_{\mu_1\mu_2})(\delta^{\alpha_2\mu_2}\delta^{\alpha_1\mu_1} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}\delta^{\mu_2\mu_1} + \delta^{\alpha_2\mu_1}\delta^{\mu_2\alpha_1}) \\ &= -2c\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, (l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}|l|^2).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tfrac{1}{2} ⨍ (\mathbb{A}^+)^2 = \tfrac{1}{2} ⨍ (\mathbb{A}^-)^2 = c \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} a_{\alpha_1,l}\, a_{\alpha_2,-l} \left(l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}|l|^2\right).$$

(ii) Le Lemme 3.3.11 implique que $⨍ \mathbb{A}^{+++} = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{(l_1,l_2)\in(\mathbb{Z}^n)^2} f(s,l)$ où

$$\begin{aligned} f(s,l) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' i\, e^{\frac{i}{2} l_1 \Theta l_2}\, \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+\widehat{l}_2)_{\mu_3}}{|k|^{s+2}|k+l_1|^2|k+\widehat{l}_2|^2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}) \\ &=: f_{\alpha,\mu}(s,l)\, \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}),\end{aligned}$$

et $\widetilde{a}_{\alpha,l} := a_{\alpha_1,l_1}\, a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_3,-\widehat{l}_2}$ avec $\widehat{l}_2 := l_1 + l_2$.

Nous utilisons la même technique que pour (i) :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{|k+l_1|^2} &= \tfrac{1}{|k|^2} - \tfrac{2k.l_1+|l_1|^2}{|k|^4} + \tfrac{(2k.l_1+|l_1|^2)^2}{|k|^4|k+l_1|^2}\,, \\ \tfrac{1}{|k+\widehat{l}_2|^2} &= \frac{1}{|k|^2} - \tfrac{2k.\widehat{l}_2+|\widehat{l}_2|^2}{|k|^4} + \tfrac{(2k.\widehat{l}_2+|\widehat{l}_2|^2)^2}{|k|^4|k+\widehat{l}_2|^2}\end{aligned}$$

et ainsi,

$$\tfrac{1}{|k+l_1|^2|k+\widehat{l}_2|^2} = \tfrac{1}{|k|^4} - \tfrac{2k.l_1}{|k|^6} - \tfrac{2k.\widehat{l}_2}{|k|^6} + R(k,l) \tag{3.21}$$

où le reste $R(k,l)$ est un terme d'ordre au plus -6 en k. L'équation (3.21) donne

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) = f_1(s,l) + r(s,l)$$

où $r(s,l)$ correspond à $R(k,l)$. Notons que la fonction

$$r(s,l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(k+\widehat{l}_2)_{\mu_3}R(k,l)}{|k|^{s+2}}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}$$

est une combinaison linéaire de fonctions du type $H(s,l)$ satisfaisant les hypothèses du Corollaire (2.2.10). Ainsi, $r(s,l)$ satisfait (H1) et $f_{\alpha,\mu}(s,l) \sim f_1(s,l)$.

Calculons $f_1(s,l)$ modulo (H1) :

$$\begin{aligned}
f_1(s,l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+\widehat{l}_2)_{\mu_3}}{|k|^{s+6}}\, \widetilde{a}_{\alpha,l} - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+\widehat{l}_2)_{\mu_3}(2k.l_1+2k.\widehat{l}_2)}{|k|^{s+8}}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\\
&\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}\widehat{l}_{2\mu_3}+k_{\mu_1}k_{\mu_3}l_{1\mu_2}}{|k|^{s+6}}\, \widetilde{a}_{\alpha,l} - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}(2k.l_1+2k.\widehat{l}_2)}{|k|^{s+8}}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\\
&= i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\big((l_{1\mu_2}\delta_{\mu_1\mu_3} + \widehat{l}_{2\mu_3}\delta_{\mu_1\mu_2})\ \tfrac{1}{4}Z_4(s+4) - 2(l_1^i + \widehat{l}_2^i)\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}k_i}{|k|^{s+8}}\big)\\
&=: g_{\alpha,\mu}(s,l).
\end{aligned}$$

Puisque $g_{\alpha,\mu}(s,l)$ satisfait (H2), nous pouvons appliquer le Lemme 2.2.11 afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
⨍(\mathbb{A}^+)^3 &= \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{(l_1,l_2)\in(\mathbb{Z}^n)^2} f(s,l)\\
&= \sum_{(l_1,l_2)\in(\mathbb{Z}^n)^2} \operatorname*{Res}_{s=0} g_{\alpha,\mu}(s,l)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}) =: \sum_l X_l.
\end{aligned}$$

Rappelons que $l_3 := -l_1 - l_2 = -\widehat{l}_2$. D'après (2.11) et (2.13),

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{s=0} g_{\alpha,\mu}(s,l) i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\big(&2(-l_1^i + l_3^i)\tfrac{\pi^2}{12}(\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\mu_3 i} + \delta_{\mu_1\mu_3}\delta_{\mu_2 i} + \delta_{\mu_1 i}\delta_{\mu_2\mu_3})\\
&+ (l_{1\mu_2}\delta_{\mu_1\mu_3} - l_{3\mu_3}\delta_{\mu_1\mu_2})\tfrac{\pi^2}{2}\big).
\end{aligned}$$

Nous décomposons X_l en cinq termes : $X_l = 2^m\ \frac{\pi^2}{2}\ i\, e^{\frac{i}{2}l_1\Theta l_2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\,(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5)$ où

$$\begin{aligned}
T_0 &:= \tfrac{1}{3}(-l_1^i + l_3^i)(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho i} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu i} + \delta_{\mu i}\delta_{\nu\rho}) + l_{1\nu}\delta_{\mu\rho} - l_{3\rho}\delta_{\mu\nu},\\
T_1 &:= (\delta^{\alpha_3\rho}\delta^{\alpha_2\nu}\delta^{\alpha_1\mu} - \delta^{\alpha_3\rho}\delta^{\alpha_2\alpha_1}\delta^{\mu\nu} + \delta^{\alpha_3\rho}\delta^{\alpha_2\mu}\delta^{\alpha_1\nu})T_0,\\
T_2 &:= (-\delta^{\alpha_2\alpha_3}\delta^{\rho\nu}\delta^{\alpha_1\mu} + \delta^{\alpha_2\alpha_3}\delta^{\alpha_1\rho}\delta^{\mu\nu} - \delta^{\alpha_2\alpha_3}\delta^{\rho\mu}\delta^{\alpha_1\nu})T_0,\\
T_3 &:= (\delta^{\alpha_3\nu}\delta^{\alpha_2\rho}\delta^{\alpha_1\mu} - \delta^{\alpha_3\nu}\delta^{\alpha_1\rho}\delta^{\alpha_2\mu} + \delta^{\alpha_3\nu}\delta^{\rho\mu}\delta^{\alpha_1\alpha_2})T_0,\\
T_4 &:= (-\delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\alpha_2\rho}\delta^{\mu\nu} + \delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\rho\nu}\delta^{\alpha_2\mu} - \delta^{\alpha_1\alpha_3}\delta^{\rho\mu}\delta^{\alpha_2\nu})T_0,\\
T_5 &:= (\delta^{\alpha_3\mu}\delta^{\alpha_2\rho}\delta^{\alpha_1\nu} - \delta^{\alpha_3\mu}\delta^{\rho\nu}\delta^{\alpha_1\alpha_2} + \delta^{\alpha_3\mu}\delta^{\alpha_1\rho}\delta^{\alpha_2\nu})T_0.
\end{aligned}$$

Avec les notations $p := -l_1 - 2l_3$, $q := 2l_1 + l_3$, $r := -p - q = -l_1 + l_3$, on calcule chaque T_i :

$$\begin{aligned}
3T_1 &= \delta^{\alpha_1\alpha_2}(2-2^m)p^{\alpha_3} + \delta^{\alpha_3\alpha_1}q^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_2\alpha_1}q^{\alpha_3} + \delta^{\alpha_3\alpha_2}q^{\alpha_1} + \delta^{\alpha_3\alpha_2}r^{\alpha_1} - \delta^{\alpha_2\alpha_1}r^{\alpha_3} + \delta^{\alpha_3\alpha_1}r^{\alpha_2},\\
3T_2 &= (2^m-2)\delta^{\alpha_2\alpha_3}p^{\alpha_1} - 2^m\delta^{\alpha_2\alpha_3}q^{\alpha_1} - 2^m\delta^{\alpha_2\alpha_3}r^{\alpha_1},\\
3T_3 &= \delta^{\alpha_1\alpha_3}p^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_2\alpha_3}p^{\alpha_1} + \delta^{\alpha_1\alpha_2}p^{\alpha_3} + 2^m\delta^{\alpha_2\alpha_1}q^{\alpha_3} + \delta^{\alpha_3\alpha_2}r^{\alpha_1} - \delta^{\alpha_3\alpha_1}r^{\alpha_2} + \delta^{\alpha_1\alpha_2}r^{\alpha_3},\\
3T_4 &= -\delta^{\alpha_1\alpha_3}2^m p^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_1\alpha_3}2^m q^{\alpha_2} + \delta^{\alpha_1\alpha_3}(2^m-2)r^{\alpha_2},\\
3T_5 &= \delta^{\alpha_1\alpha_3}p^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}p^{\alpha_3} + \delta^{\alpha_3\alpha_2}p^{\alpha_1} + \delta^{\alpha_3\alpha_2}q^{\alpha_1} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}q^{\alpha_3} + \delta^{\alpha_3\alpha_1}q^{\alpha_2} + (2-2^m)\delta^{\alpha_1\alpha_2}r^{\alpha_3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$X_l = 2^m \ \tfrac{2\pi^2}{3} i\, e^{\frac{i}{2} l_1.\Theta l_2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, (q^{\alpha_3}\delta^{\alpha_1\alpha_2} + r^{\alpha_2}\delta^{\alpha_1\alpha_3} + p^{\alpha_1}\delta^{\alpha_2\alpha_3}) \tag{3.22}$$

et

$$\fint (\mathbb{A}^+)^3 = i\, 2c\, (S_1 + S_2 + S_3),$$

où S_1, S_2 et S_3 correspond à respectivement $q^{\alpha_3}\delta^{\alpha_1\alpha_2}$, $r^{\alpha_2}\delta^{\alpha_1\alpha_3}$ et $p^{\alpha_1}\delta^{\alpha_2\alpha_3}$. Dans S_1, nous permutons les variables l_i de la façon suivante: $l_1 \mapsto l_3$, $l_2 \mapsto l_1$, $l_3 \mapsto l_2$. Ainsi, $l_3.\Theta\, l_1 \mapsto l_3.\Theta\, l_1$ et $q \mapsto r$. Avec une permutation similaire des α_i, nous voyons que $S_1 = S_2$. On applique les mêmes principes afin de prouver que $S_1 = S_3$ (en utilisant la permutation $l_1 \mapsto l_2$, $l_2 \mapsto l_3$, $l_3 \mapsto l_1$). Ainsi,

$$\tfrac{1}{3} \fint (\mathbb{A}^+)^3 = i\ 2c \sum_{l_i} \widetilde{a}_{\alpha,l}\, e^{\frac{i}{2} l_1.\Theta l_2}\ (l_1 - l_2)^{\alpha_3}\delta^{\alpha_1\alpha_2} = S_4 - S_5,$$

où S_4 correspond à l_1 et S_5 à l_2. Nous permutons les variables l_i dans S_5 de la façon suivante : $l_1 \mapsto l_2$, $l_2 \mapsto l_1$, $l_3 \mapsto l_3$, avec une perturbation similaire sur les α_i. Puisque $l_1.\Theta\, l_2 \mapsto -l_1.\Theta\, l_2$, on obtient finalement

$$\tfrac{1}{3} \fint (\mathbb{A}^+)^3 = -4c \sum_{l_i} a_{\alpha_1,l_1}\, a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_3,-l_1-l_2}\ \sin \tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\ l_1^{\alpha_3}\, \delta^{\alpha_1\alpha_2}.$$

(iii) Le Lemme 3.3.11 implique que $\fint \mathbb{A}^{++++} = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{(l_1,l_2,l_3)\in(\mathbb{Z}^n)^3} f_{\mu,\alpha}(s,l)\, \mathrm{Tr}\, \gamma^{\mu,\alpha}$ où

$$\begin{aligned}
&\theta := l_1.\Theta l_2 + l_1.\Theta l_3 + l_2.\Theta l_3,\\
&\mathrm{Tr}\, \gamma^{\mu,\alpha} := \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu 2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}),\\
&f_{\mu,\alpha}(s,l) := {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' e^{\frac{i}{2}\theta}\ \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+\widehat{l}_2)_{\mu_3}(k+\widehat{l}_3)_{\mu_4}}{|k|^{s+2}|k+l_1|^2|k+\widehat{l}_2|^2|k+\widehat{l}_3|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l},\\
&\widetilde{a}_{\alpha,l} := a_{\alpha_1,l_1}\, a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_3,l_3}\, a_{\alpha_4,-l_1-l_2-l_3}.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.10) et le Corollaire 2.2.10 successivement, on obtient

$$f_{\mu,\alpha}(s,l) \sim {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' e^{\frac{i}{2}\theta}\ \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}k_{\mu_4}}{|k|^{s+2}|k+l_1|^2|k+l_1+l_2|^2|k+l_1+l_2+l_3|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} \sim {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' e^{\frac{i}{2}\theta}\ \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}k_{\mu_4}}{|k|^{s+8}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}.$$

Puisque la fonction $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' e^{\frac{i}{2}\theta}\ \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}k_{\mu_4}}{|k|^{s+8}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}$ satisfait (H2), le Lemme 2.2.11 implique que

$$\fint (\mathbb{A}^+)^4 = \sum_{(l_1,l_2,l_3)\in(\mathbb{Z}^n)^3} e^{\frac{i}{2}\theta}\, \widetilde{a}_{\alpha,l} \operatorname*{Res}_{s=0} {\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}}' \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}k_{\mu_4}}{|k|^{s+8}}\, \mathrm{Tr}\, \gamma^{\mu,\alpha} =: \sum_l X_l.$$

Ainsi, avec (2.13), on obtient $X_l = \frac{\pi^2}{12}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, e^{\frac{i}{2}\theta}\, (A + B + C)$, où

$$\begin{aligned}
A &:= \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_3}\gamma_{\mu_4}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma_{\mu_2}),\\
B &:= \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_2}\gamma_{\mu_4}\gamma^{\alpha_1}\gamma_{\mu_2}),\\
C &:= \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_3}\gamma_{\mu_2}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma_{\mu_4}).
\end{aligned}$$

En utilisant successivement $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$ et $\gamma^\mu\gamma_\mu = 2^m\ 1_{2^m}$,

$$\begin{aligned} A = C &= 4\ \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_1}), \\ B &= -4\ \big(\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}) + \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_4}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\alpha_1})\big). \end{aligned}$$

Ainsi, $A + B + C = 8\ 2^m\big(\delta^{\alpha_4\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_1} + \delta^{\alpha_4\alpha_1}\delta^{\alpha_3\alpha_2} - 2\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}\big)$, et

$$X_l = \tfrac{2\pi^2}{3}\ 2^m\ e^{\frac{i}{2}\theta}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\big(\delta^{\alpha_4\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_1} + \delta^{\alpha_4\alpha_1}\delta^{\alpha_3\alpha_2} - 2\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}\big). \tag{3.23}$$

D'après (3.23), on obtient

$$⨍(\mathbb{A}^+)^4 = 2c\ (-2T_1 + T_2 + T_3),$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &:= \sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_4,l_4}\, a_{\alpha_3,l_3}\, a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\, e^{\frac{i}{2}\theta}\ \delta_{0,\sum_i l_i}\ \delta^{\alpha_4\alpha_2}\,\delta^{\alpha_3\alpha_1}, \\ T_2 &:= \sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_4,l_4}\, a_{\alpha_3,l_3}\, a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\, e^{\frac{i}{2}\theta}\ \delta_{0,\sum_i l_i}\ \delta^{\alpha_4\alpha_3}\,\delta^{\alpha_2\alpha_1}, \\ T_3 &:= \sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_4,l_4}\, a_{\alpha_3,l_3}\, a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\, e^{\frac{i}{2}\theta}\ \delta_{0,\sum_i l_i}\ \delta^{\alpha_4\alpha_1}\,\delta^{\alpha_3\alpha_2}. \end{aligned}$$

Nous procédons maintenant aux permutations des variables l_i dans le terme T_1 : $l_1 \mapsto l_2$, $l_2 \mapsto l_1$, $l_3 \mapsto l_4$, $l_4 \mapsto l_3$. Tandis que $\sum_i l_i$ est invariant, θ est modifié : $\theta \mapsto l_2.\Theta l_1 + l_2.\Theta l_4 + l_1.\Theta l_4$. Avec $\delta_{0,\sum_i l_i}$ en facteur, nous pouvons laisser l_4 égal à $-l_1 - l_2 - l_3$, de sorte que $\theta \mapsto -\theta$. Nous permutons aussi les α_i de la même façon. Ainsi,

$$T_1 = \sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_3,l_3}\, a_{\alpha_4,l_4}\, a_{\alpha_1,l_1}\, a_{\alpha_2,l_2}\, e^{-\frac{i}{2}\theta}\ \delta_{0,\sum_i l_i}\ \delta^{\alpha_3\alpha_1}\,\delta^{\alpha_4\alpha_2}.$$

Nous obtenons

$$2T_1 = 2\sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_4,l_4}\, a_{\alpha_3,l_3}\, a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\ \cos\tfrac{\theta}{2}\ \delta_{0,\sum_i l_i}\ \delta^{\alpha_4\alpha_2}\,\delta^{\alpha_3\alpha_1}. \tag{3.24}$$

Les mêmes principes s'appliquent à T_2 et T_3. Précisément, la permutation $l_1 \mapsto l_1$, $l_2 \mapsto l_3$, $l_3 \mapsto l_2$, $l_4 \mapsto l_4$ dans T_2 et la permutation $l_1 \mapsto l_2$, $l_2 \mapsto l_3$, $l_3 \mapsto l_1$, $l_4 \mapsto l_4$ dans T_3 (les variables α_i sont permutées de la même façon) donnent

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_4,l_4} a_{\alpha_3,l_3} a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\, e^{\frac{i}{2}\phi}\ \delta_{0,\sum_i l_i}\ \delta^{\alpha_4\alpha_2}\,\delta^{\alpha_3\alpha_1}, \\ T_3 &= \sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_4,l_4}\, a_{\alpha_3,l_3} a_{\alpha_2,l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\, e^{-\frac{i}{2}\phi}\ \delta_{0,\sum_i l_i}\ \delta^{\alpha_4\alpha_2}\,\delta^{\alpha_3\alpha_1} \end{aligned}$$

où $\phi := l_1.\Theta\ l_2 + l_1.\Theta\ l_3 - l_2.\Theta\ l_3$. Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} ⨍(\mathbb{A}^+)^4 &= 4c \sum_{l_1,\dots,l_4} a_{\alpha_1,l_4}\, a_{\alpha_2,l_3}\, a^{\alpha_1}_{l_2}\, a^{\alpha_2}_{l_1}\, \delta_{0,\sum_i l_i}(\cos\tfrac{\phi}{2} - \cos\tfrac{\theta}{2}) \\ &= 8c \sum_{l_1,\dots,l_3} a_{\alpha_1,-l_1-l_2-l_3}\, a_{\alpha_2,l_3}\, a^{\alpha_1}_{l_2}\, a^{\alpha_2}_{l_1}\, \sin\tfrac{l_1.\Theta(l_2+l_3)}{2}\ \sin\tfrac{l_2.\Theta l_3}{2}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

(iv) Supposons $q = 2$. D'après le Lemme 3.3.11, on obtient

$$\fint \mathbb{A}^\sigma = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \lambda_\sigma f_{\alpha,\mu}(s,l)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})$$

où

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+2}|k+l|^2}\, e^{i\eta\, k.\Theta l}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}$$

et $\eta := \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \in \{-1, 1\}$. Comme dans la preuve de (i), puisque la présence de la phase ne change pas le fait que $r(s,l)$ satisfait (H1), on obtient

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) \sim f_1(s,l) - f_2(s,l) + f_3(s,l)$$

où

$$\begin{aligned}
f_1(s,l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\, e^{i\eta\, k.\Theta l}\, \widetilde{a}_{\alpha,l},\\
f_2(s,l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(2k.l+|l|^2)}{|k|^{s+6}}\, e^{i\eta\, k.\Theta l}\, \widetilde{a}_{\alpha,l},\\
f_3(s,l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(2k.l+|l|^2)^2}{|k|^{s+8}}\, e^{i\eta\, k.\Theta l}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}.
\end{aligned}$$

Supposons que $l = 0$. Alors $f_2(s,0) = f_3(s,0) = 0$ et la Proposition 2.1.1 implique

$$f_1(s,0) = \sum{}'_{k\in\mathbb{Z}^n} \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\, \widetilde{a}_{\alpha,0}$$

est holomorphe en 0 et donc est égale à $f_{\alpha,\mu}(s,0)$.

Puisque $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est diophantienne, le Théorème 2.2.2 3 nous donne le résultat.

Supposons $q = 3$. Alors le Lemme 3.3.11 donne

$$\fint \mathbb{A}^\sigma = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum{}_{l\in(\mathbb{Z}^n)^2} f_{\mu,\alpha}(s,l)\ \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_3}\gamma^{\alpha_3}\cdots\gamma^{\mu_1}\gamma^{\alpha_1})$$

où

$$f_{\mu,\alpha}(s,l) := \sum{}'_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_\sigma e^{ik.\Theta(\varepsilon_1 l_1+\varepsilon_2 l_2)} e^{\frac{i}{2}\sigma_2 l_1.\Theta l_2} \tfrac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+l_1+l_2)_{\mu_3}}{|k|^{s+2}|k+l_1|^2|k+l_1+l_2|^2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l},$$

et $\varepsilon_i := \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_3) \in \{-1, 0, 1\}$. Par hypothèse $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (0,0)$. Il y a six possibilités pour les valeurs de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, correspondant aux six possibilités pour les valeurs de σ: $(-,-,+)$, $(-,+,+)$, $(+,-,+)$, $(+,+,-)$, $(-,+,-)$, et $(+,-,-)$. Comme dans (ii), nous voyons que

$$\begin{aligned}
f_{\mu,\alpha}(s,l) \sim \Big(&\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{e^{ik.\Theta(\varepsilon_1 l_1+\varepsilon_2 l_2)} k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+\widehat{l}_2)_{\mu_3}}{|k|^{s+6}}\\
&- \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \tfrac{e^{ik.\Theta(\varepsilon_1 l_1+\varepsilon_2 l_2)} k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+\widehat{l}_2)_{\mu_3}(2k.l_1+2k.\widehat{l}_2)}{|k|^{s+8}}\, \lambda_\sigma\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, e^{\frac{i}{2}\sigma_2 l_1.\Theta l_2}.
\end{aligned}$$

Avec $Z := \{(l_1, l_2)\ :\ \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 = 0\}$, le Théorème 2.2.2 (iii) implique que $\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^2\setminus Z} f_{\mu,\alpha}(s,l)$ est holomorphe en 0. Afin de conclure, nous allons prouver que

$$\sum_\sigma g(\sigma) := \sum_\sigma \sum_{l\in Z} f_{\mu,\alpha}(s,l)\ \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_3}\gamma^{\alpha_3}\cdots\gamma^{\mu_1}\gamma^{\alpha_1})$$

est holomorphe en 0. Par définition, $\lambda_\sigma = i\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, par conséquent, nous vérifions que

$$g(-,-,+) = -g(+,+,-), \quad g(+,-,+) = -g(+,-,-), \quad g(-,+,+) = -g(-,+,-),$$

ce qui implique $\sum_\sigma g(\sigma) = 0$. Le résultat s'en déduit.

Supposons finalement $q = 4$. Le Lemme 3.3.11 implique que

$$\fint \mathbb{A}^\sigma = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^3} f_{\mu,\alpha}(s,l)\ \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_4}\cdots\gamma^{\mu_1}\gamma^{\alpha_1})$$

où

$$f_{\mu,\alpha}(s,l) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \lambda_\sigma\, e^{ik.\Theta\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i}\, e^{\frac{i}{2}(\sigma_2 l_1.\Theta l_2+\sigma_3(l_1+l_2).\Theta l_3)}\, \frac{k_{\mu_1}(k+l_1)_{\mu_2}(k+l_1+l_2)_{\mu_3}(k+l_1+l_2+l_3)_{\mu_4}}{|k|^{s+2}|k+l_1|^2|k+l_1+l_2|^2|k+l_1+l_2+l_3|^2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}$$

et $\varepsilon_i := \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_4) \in \{-1,0,1\}$. Par hypothèse $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \neq (0,0,0)$. Il y a quatorze possibilités pour les valeurs de $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, correspondant aux quartorze possiblités pour les valeurs de σ: $(-,-,-,+)$, $(-,-,+,+)$, $(-,+,-,+)$, $(+,-,-,+)$, $(-,+,+,+)$, $(+,-,+,+)$, $(+,+,-,+)$, $(+,+,+,-)$, $(-,-,+,-)$, $(-,+,-,-)$, $(+,-,-,-)$, $(-,+,+,-)$, $(+,-,+,-)$ et $(+,+,-,-)$. Comme dans (ii), nous voyons que, avec la notation $\theta_\sigma := \sigma_2 l_1.\Theta l_2 + \sigma_3(l_1+l_2).\Theta l_3$,

$$f_{\mu,\alpha}(s,l) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \lambda_\sigma\, e^{ik.\Theta\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i}\, e^{\frac{i}{2}\theta_\sigma}\, \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}k_{\mu_4}}{|k|^{s+8}}\widetilde{a}_{\alpha,l} =: g_{\mu,\alpha}(s,l)\,.$$

Avec $Z_\sigma := \{(l_1,l_2,l_3)\ :\ \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i = 0\}$, le Théorème 2.2.2 (iii), la série $\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^3\setminus Z_\sigma} f_{\mu,\alpha}(s,l)$ est holomorphe en 0. Afin de conclure, nous allons prouver que

$$\sum_\sigma g(\sigma) := \sum_\sigma \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{l\in Z_\sigma} g_{\mu,\alpha}(s,l)\ \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_4}\cdots\gamma^{\mu_1}\gamma^{\alpha_1}) = 0.$$

Soit C l'ensemble des quatorze valeurs de σ et C_7 l'ensemble des sept premières valeurs données précédemment. Le Lemme 3.3.7 implique que

$$\sum_{\sigma\in C} g(\sigma) = 2\sum_{\sigma\in C_7} g(\sigma).$$

Ainsi, dans ce qui suit, nous pouvons nous limiter à ces sept valeurs.

Notons $F_\mu(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}{}' \frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}k_{\mu_3}k_{\mu_4}}{|k|^{s+8}}$ tel que

$$g(\sigma) = \operatorname*{Res}_{s=0} F_\mu(s)\,\lambda_\sigma \sum_{l\in Z_\sigma} e^{\frac{i}{2}\theta_\sigma}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\ \mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_4}\cdots\gamma^{\mu_1}\gamma^{\alpha_1}).$$

Rappelons d'après (3.23) que

$$\operatorname*{Res}_{s=0} F_\mu(s)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_4}\gamma^{\alpha_4}\cdots\gamma^{\mu_1}\gamma^{\alpha_1}) = 2c\big(\delta^{\alpha_4\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_1} + \delta^{\alpha_4\alpha_1}\delta^{\alpha_3\alpha_2} - 2\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}\big).$$

Par conséquent, on obtient, avec $\widetilde{a}_{\alpha,l} := a_{\alpha_1,l_1}\cdots a_{\alpha_4,l_4}$,

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= 2c\lambda_\sigma \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} e^{\frac{i}{2}\theta_\sigma}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\delta_{\sum_{i=1}^4 l_i,0}\,\delta_{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i,0}\big(\delta^{\alpha_4\alpha_3}\delta^{\alpha_2\alpha_1} + \delta^{\alpha_4\alpha_1}\delta^{\alpha_3\alpha_2} - 2\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}\big) \\ &=: 2c\lambda_\sigma(T_1 + T_2 - 2T_3). \end{aligned}$$

On procède au changement de variable suivant dans T_1: $l_1 \mapsto l_1$, $l_2 \mapsto l_3$, $l_3 \mapsto l_2$, $l_4 \mapsto l_4$. Ainsi, $\theta_\sigma \mapsto \psi_\sigma := \sigma_2 l_1.\Theta l_3 + \sigma_3(l_1+l_3).\Theta l_2$, et $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i \mapsto \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_3 l_2 + \varepsilon_2 l_3 =: u_\sigma(l)$. Avec une permutation similaire sur les α_i,

$$T_1 = \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} e^{\frac{i}{2}\psi_\sigma}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \delta_{\sum_{i=1}^4 l_i,0}\, \delta_{\varepsilon_1 l_1+\varepsilon_3 l_2+\varepsilon_2 l_3,0}\, \delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}.$$

On procède au changement de variable suivant dans T_2: $l_1 \mapsto l_2$, $l_2 \mapsto l_3$, $l_3 \mapsto l_1$, $l_4 \mapsto l_4$. Ainsi, $\theta_\sigma \mapsto \phi_\sigma := \sigma_2 l_2.\Theta l_3 + \sigma_3(l_2+l_3).\Theta l_1$, et $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i \mapsto \varepsilon_3 l_1 + \varepsilon_1 l_2 + \varepsilon_2 l_3 =: v_\sigma(l)$. Après une permutation similaire sur les α_i, on obtient

$$T_2 = \sum\nolimits_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \delta_{\sum_{i=1}^4 l_i,0}\, \delta_{\varepsilon_3 l_1+\varepsilon_1 l_2+\varepsilon_2 l_3,0}\, \delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}.$$

Finalement, on procède au changement de variable suivant dans T_3: $l_1 \mapsto l_2$, $l_2 \mapsto l_1$, $l_3 \mapsto l_4$, $l_4 \mapsto l_3$. Ainsi, on obtient $\theta_\sigma \mapsto -\theta_\sigma$, et $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i \mapsto (\varepsilon_2-\varepsilon_3)l_1 + (\varepsilon_1-\varepsilon_3)l_2 - \varepsilon_3 l_3 =: w_\sigma(l)$. Avec une permutation similaire sur les α_i,

$$T_3 = \sum\nolimits_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} e^{-\frac{i}{2}\theta_\sigma}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \delta_{\sum_{i=1}^4 l_i,0}\, \delta_{(\varepsilon_2-\varepsilon_3)l_1+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)l_2-\varepsilon_3 l_3,0}\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}.$$

Par conséquent,

$$g(\sigma) = 2c\sum\nolimits_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} K_\sigma(l_1,l_2,l_3)\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \delta_{\sum_{i=1}^4 l_i,0}\, \delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1},$$

où $K_\sigma(l_1,l_2,l_3) = \lambda_\sigma\big(e^{\frac{i}{2}\psi_\sigma}\,\delta_{u_\sigma(l),0} + e^{\frac{i}{2}\phi_\sigma}\,\delta_{v_\sigma(l),0} - e^{\frac{i}{2}\theta_\sigma}\,\delta_{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i l_i,0} - e^{-\frac{i}{2}\theta_\sigma}\,\delta_{w_\sigma(l),0}\big)$.

Le calcul des $K_\sigma(l_1,l_2,l_3)$ pour les sept valeurs de σ donne

$$\begin{aligned}
K_{--++}(l_1,l_2,l_3) &= \delta_{l_1+l_3,0} + \delta_{l_2+l_3,0} - \delta_{l_1+l_2,0} - \delta_{l_1+l_2,0},\\
K_{-+-+}(l_1,l_2,l_3) &= \delta_{l_1+l_2,0} + \delta_{l_1+l_2,0} - \delta_{l_1+l_3,0} - \delta_{l_1+l_3,0},\\
K_{--++}(l_1,l_2,l_3) &= \delta_{l_2+l_3,0} + \delta_{l_1+l_3,0} - \delta_{l_2+l_3,0} - \delta_{l_2+l_3,0},\\
K_{---+}(l_1,l_2,l_3) &= -\big(e^{\frac{i}{2}l_1.\Theta l_2}\delta_{\sum_{i=1}^3 l_i,0} + e^{\frac{i}{2}l_2.\Theta l_1}\delta_{\sum_{i=1}^3 l_i,0} - e^{\frac{i}{2}l_2.\Theta l_1}\delta_{\sum_{i=1}^3 l_i,0} - e^{\frac{i}{2}l_1.\Theta l_2}\delta_{l_3,0}\big),\\
K_{-+++}(l_1,l_2,l_3) &= -\big(e^{\frac{i}{2}l_3.\Theta l_2}\delta_{l_1,0} + e^{\frac{i}{2}l_3.\Theta l_1}\delta_{l_2,0} - e^{\frac{i}{2}l_2.\Theta l_3}\delta_{l_1,0} - e^{\frac{i}{2}l_3.\Theta l_1}\delta_{l_2,0}\big),\\
K_{+-++}(l_1,l_2,l_3) &= -\big(e^{\frac{i}{2}l_1.\Theta l_2}\delta_{l_3,0} + e^{\frac{i}{2}l_2.\Theta l_1}\delta_{l_3,0} - e^{\frac{i}{2}l_1.\Theta l_3}\delta_{l_2,0} - e^{\frac{i}{2}l_3.\Theta l_2}\delta_{l_1,0}\big),\\
K_{++-+}(l_1,l_2,l_3) &= -\big(e^{\frac{i}{2}l_1.\Theta l_3}\delta_{l_2,0} + e^{\frac{i}{2}l_2.\Theta l_3}\delta_{l_1,0} - e^{\frac{i}{2}l_1.\Theta l_2}\delta_{l_3,0} - e^{\frac{i}{2}l_2.\Theta l_1}\delta_{\sum_{i=1}^3 l_i,0}\big).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{\sigma\in C_7} K_\sigma(l_1,l_2,l_3) = 2i(\delta_{l_3,0} - \delta_{\sum_{i=1}^3 l_i,0})\sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}$$

et

$$\sum_{\sigma\in C_7} g(\sigma) = i4c\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4}(\delta_{l_3,0} - \delta_{\sum_{i=1}^3 l_i,0})\sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\delta_{\sum_{i=1}^4 l_i,0}\,\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}.$$

Le changement de variables : $l_1 \mapsto l_2$, $l_1 \mapsto l_2$, $l_3 \mapsto l_4$, $l_4 \mapsto l_3$ donne

$$\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4}\delta_{\sum_1^3 l_i,0}\sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\delta_{\sum_1^4 l_i,0}\,\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1} = -\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4}\delta_{l_3,0}\sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}\,\delta_{\sum_1^4 l_i,0}\,\delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}$$

et donc

$$\sum_{\sigma\in C_7} g(\sigma) = i8c \sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} \delta_{l_3,0}\, \sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \delta_{\sum_1^4 l_i,0}\, \delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}.$$

Finalement, le changement de variables : $l_2 \mapsto l_4, l_4 \mapsto l_2$ donne

$$\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} \delta_{l_3,0}\, \sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \delta_{\sum_1^4 l_i,0}\, \delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1} = -\sum_{l\in(\mathbb{Z}^n)^4} \delta_{l_3,0}\, \sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\, \widetilde{a}_{\alpha,l}\, \delta_{\sum_1^4 l_i,0}\, \delta^{\alpha_4\alpha_2}\delta^{\alpha_3\alpha_1}$$

ce qui implique $\sum_{\sigma\in C_7} g(\sigma) = 0$. □

Lemme 3.3.13. *Soient $n = 4$ et $\frac{1}{2\pi}\Theta$ une matrice diophantienne. Pour toute 1-forme auto-adjointe A,*

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = -c\,\tau(F_{\alpha_1,\alpha_2}F^{\alpha_1\alpha_2}).$$

Démonstration. D'après (1.11) et le Lemme 3.3.6

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q} \sum_{\sigma\in\{+,-\}^q} ⨍ \mathbb{A}^\sigma.$$

D'après le Lemme 3.3.12 (*iv*), tous les termes croisés s'annulent. Ainsi, avec le Lemme 3.3.7, on obtient

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = 2\sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q} ⨍ (\mathbb{A}^+)^q. \tag{3.26}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} F_{\alpha_1\alpha_2} &= i\sum_k \big(a_{\alpha_2,k}\, k_{\alpha_1} - a_{\alpha_1,k}\, k_{\alpha_2}\big)U_k + \sum_{k,l} a_{\alpha_1,k}\, a_{\alpha_2,l}\, [U_k, U_l] \\ &= i\sum_k \big[(a_{\alpha_2,k}\, k_{\alpha_1} - a_{\alpha_1,k}\, k_{\alpha_2}) - 2\sum_l a_{\alpha_1,k-l}\, a_{\alpha_2,l}\, \sin(\tfrac{k.\Theta l}{2})\big]\, U_k. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \tau(F_{\alpha_1\alpha_2}F^{\alpha_1\alpha_2}) = \sum_{\alpha_1,\,\alpha_2=1}^{2^m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^4} &\big[(a_{\alpha_2,k}\, k_{\alpha_1} - a_{\alpha_1,k}\, k_{\alpha_2}) - 2\sum_{l'\in\mathbb{Z}^4} a_{\alpha_1,k-l'}\, a_{\alpha_2,l'}\, \sin(\tfrac{k.\Theta l'}{2})\big] \\ &\big[(a_{\alpha_2,-k}\, k_{\alpha_1} - a_{\alpha_1,-k}\, k_{\alpha_2}) - 2\sum_{l"\in\mathbb{Z}^4} a_{\alpha_1,-k-l"}\, a_{\alpha_2,l"}\, \sin(\tfrac{k.\Theta l"}{2})\big]. \end{aligned}$$

On vérifie que le terme en a^q dans $\tau(F_{\alpha_1\alpha_2}F^{\alpha_1\alpha_2})$ correspond au terme $⨍(\mathbb{A}^+)^q$ donné par Lemme 3.3.12. Pour $q = 2$, ceci est égal à

$$-2\sum_{l\in\mathbb{Z}^4,\,\alpha_1,\,\alpha_2} a_{\alpha_1,l}\, a_{\alpha_2,-l}\, \big(l_{\alpha_1}l_{\alpha_2} - \delta_{\alpha_1\alpha_2}|l|^2\big).$$

For $q = 3$, on calcule les termes croisés :

$$i\sum_{k,k',l} (a_{\alpha_2,k}\, k_{\alpha_1} - a_{\alpha_1,k}\, k_{\alpha_2})\; a_{k'}^{\alpha_1}\; a_l^{\alpha_2}\big(U_k[U_{k'}, l] + [U_{k'}, U_l]U_k\big),$$

ce qui donne le terme en a^3 dans $\tau(F_{\alpha_1\alpha_2}F^{\alpha_1\alpha_2})$:

$$-8\sum_{l_i} a_{\alpha_3,-l_1-l_2}\, a^{\alpha_1}_{l_2}\, a_{\alpha_1,l_1}\ \sin\tfrac{l_1.\Theta l_2}{2}\, l_1^{\alpha_3}.$$

Pour $q=4$, ce terme est

$$-4\sum_{l_i} a_{\alpha_1,-l_1-l_2-l_3}\, a_{\alpha_2,l_3}\, a^{\alpha_1}_{l_2}\, a^{\alpha_2}_{l_1} \sin\tfrac{l_1.\Theta(l_2+l_3)}{2}\ \sin\tfrac{l_2.\Theta l_3}{2}$$

ce qui correspond au terme $⨍(\mathbb{A}^+)^4$. On obtient finalement,

$$\sum_{q=1}^{n}\tfrac{(-1)^q}{q}⨍(\mathbb{A}^+)^q = -\tfrac{c}{2}\tau(F_{\alpha_1,\alpha_2}F^{\alpha_1\alpha_2}). \tag{3.27}$$

Les équations (3.26) et (3.27) donnent le résultat. □

Lemme 3.3.14. *Supposons $n=2$. Alors, avec les mêmes hypothèses que celles du Lemme 3.3.11,*

(i) $\quad ⨍(\mathbb{A}^+)^2 = ⨍(\mathbb{A}^-)^2 = 0.$

(ii) Supposons $\frac{1}{2\pi}\Theta$ diophantienne. Alors

$$⨍\mathbb{A}^+\mathbb{A}^- = ⨍\mathbb{A}^-\mathbb{A}^+ = 0.$$

Démonstration. (i) Le Lemme 3.3.11 implique $⨍\mathbb{A}^{++} = \operatorname*{Res}_{s=0}\sum_{l\in\mathbb{Z}^2} -f(s,l)$ où

$$f(s,l) := \sum\nolimits'_{k\in\mathbb{Z}^2}\tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+2}|k+l|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}\ \operatorname{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}) =: f_{\mu,\alpha}(s,l)\operatorname{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})$$

et $\widetilde{a}_{\alpha,l} := a_{\alpha_1,l}\, a_{\alpha_2,-l}$. Cette fois, puisque $n=2$, il suffit d'appliquer une seule fois (2.10) afin d'obtenir une série absolument convergente. En effet, on obtient avec (2.10)

$$f_{\mu,\alpha}(s,l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}'\tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} - \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}'\tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(2k.l+|l|^2)}{|k|^{s+4}|k+l|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}.$$

et la fonction $r(s,l) := \sum'_{k\in\mathbb{Z}^2}\frac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}(2k.l+|l|^2)}{|k|^{s+4}|k+l|^2}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}$ est une combinaison linéaire de fonctions du type $H(s,l)$ satisfaisant les hypothèses du Corollaire 2.2.10. Par conséquent, $r(s,l)$ satisfait (H1) et

$$f_{\mu,\alpha}(s,l) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}'\tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l} \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}'\tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}\,.$$

Notons que la fonction $(s,l)\mapsto h_{\mu,\alpha}(s,l) := \sum'_{k\in\mathbb{Z}^2}\frac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\ \widetilde{a}_{\alpha,l}$ satisfait (H2). Ainsi, le Lemme 2.2.11 donne

$$\operatorname*{Res}_{s=0} f(s,l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^2}\operatorname*{Res}_{s=0} h_{\mu,\alpha}(s,l)\operatorname{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}).$$

D'après la Proposition 2.3.2, on obtient $\operatorname*{Res}_{s=0} h_{\mu,\alpha}(s,l) = \delta_{\mu_1\mu_2}\,\pi\,\widetilde{a}_{\alpha,l}$. Ainsi,

$$\fint \mathbb{A}^{++} = -\pi \sum_{l\in\mathbb{Z}^2} \widetilde{a}_{\alpha,l}\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha_1}\gamma_{\mu}) = 0$$

d'après (3.20).

(ii) Avec le Lemme 3.3.11, nous obtenons $\fint \mathbb{A}^{-+} = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{l\in\mathbb{Z}^2} \lambda_\sigma f_{\alpha,\mu}(s,l)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1})$ où $\lambda_\sigma = -(-i)^2 = 1$ et

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+2}|k+l|^2}\, e^{i\eta\, k.\Theta l}\,\widetilde{a}_{\alpha,l}$$

et $\eta := \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = -1$. Comme dans la preuve de (i), puisque la présence de la phase ne change par le fait que $r(s,l)$ satisfait (H1), nous obtenons

$$f_{\alpha,\mu}(s,l) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}' \tfrac{k_{\mu_1}(k+l)_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\, e^{i\eta\, k.\Theta l}\,\widetilde{a}_{\alpha,l} := g_{\alpha,\mu}(s,l)\,.$$

Puisque $\frac{1}{2\pi}\Theta$ est diophantienne, les fonctions $s \mapsto \sum_{l\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} g_{\alpha,\mu}(s,l)$ sont holomorphes en $s=0$ d'après le Théorème 2.2.2 3. Par conséquent,

$$\fint \mathbb{A}^{-+} = \operatorname*{Res}_{s=0} g_{\alpha,\mu}(s,0)\,\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}) = \operatorname*{Res}_{s=0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}{}' \tfrac{k_{\mu_1}k_{\mu_2}}{|k|^{s+4}}\,\widetilde{a}_{\alpha,0}\;\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\mu_1}).$$

Rappelons que d'après la Proposition 2.1.1, $\mathrm{Res}_{s=0} \sum'_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{k_i k_j}{|k|^{s+4}} = \delta_{ij}\,\pi$. Ainsi, avec (3.20),

$$\fint \mathbb{A}^{-+} = \widetilde{a}_{\alpha,0}\,\pi\;\mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha_1}\gamma_{\mu}) = 0. \qquad \square$$

Lemme 3.3.15. *Supposons $n=2$ et $\frac{1}{2\pi}\Theta$ diophantienne. Pour tout 1-forme auto-adjointe A,*

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = 0.$$

Démonstration. Comme dans le Lemme 3.3.13, on utilise (1.11) et le Lemme 3.3.6, de sorte que le résultat est une conséquence du Lemme 3.3.14. $\square$

Cas de la dimension impaire

Lemme 3.3.16. *Supposons n impair et $\frac{1}{2\pi}\Theta$ diophantienne. Alors pour toute 1-forme auto-adjointe A et $\sigma \in \{-,+\}^q$ avec $2 \le q \le n$,*

$$\fint \mathbb{A}^{\sigma} = 0\,.$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{A}^{\sigma} \in \Psi_1(\mathcal{A})$, le Lemme 3.2.11 donne le résultat avec $k=n$. $\square$

Corollaire 3.3.17. *Sous les mêmes hypothèses que celles du Lemme 3.3.16, pour toute 1-forme auto-adjointe A, $\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = 0$.*

Démonstration. Comme dans le Lemme 3.3.13, on utilise (1.11) et le Lemme 3.3.6. Ainsi, le résultat découle du Lemme 3.3.16. $\square$

3.3.2 Démonstration du résultat principal

Démonstration du Théorème 3.3.1. (i) D'après (1.6) et la Proposition 3.2.5,

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) \;=\; 4\pi\Phi_2\,\Lambda^2 + \Phi(0)\,\zeta_{D_A}(0) + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}),$$

où $\Phi_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)\,dt$. D'après le Lemme 3.3.15, $\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = 0$ et la Proposition 3.2.4, $\zeta_D(0) = 0$, on obtient donc le résultat.
(ii) De façon similaire, $\mathcal{S}(\mathcal{D}_A, \Phi, \Lambda) \;= 8\pi^2\,\Phi_4\,\Lambda^4 + \Phi(0)\,\zeta_{D_A}(0) + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})$ avec $\Phi_4 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)\,t\,dt$. Le Lemme 3.3.13 implique que $\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = -c\,\tau(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ et d'après la Proposition 3.2.4, $\zeta_{D_A}(0) = -c\,\tau(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ ce qui donne le résultat.
(iii) est une conséquence directe de (1.6), des Propositions 3.2.4, 3.2.5, et du Corollaire 3.3.17. $\square$

Chapitre 4

Action spectrale sur $SU_q(2)$

4.1 Introduction

Le groupe quantique $SU_q(2)$ a déjà une longue histoire [92]. Il s'agit d'un des exemples les plus remarquables de déformation quantique. Ce groupe quantique a été étudié en utilisant la notion non commutative de triplet spectral [28, 37] et diverses notions d'opérateurs de Dirac ont été introduites dans [8, 18, 20, 31, 67]. Finalement, un triplet spectral réel a été construit dans [48]. Il est invariant par action à gauche et à droite de $\mathcal{U}_q(su(2))$ et satisfait presque tous les axiomes des triplets spectraux à l'exception des propriétés de commutation et de premier ordre. Ces propriétés sont cependant toujours valides modulo des infinitésimaux d'ordre arbitrairement grand. Cette dernière présentation généralise d'une façon directe tous les détails de la construction géométrique du triplet spectral spinoriel de la sphère classique de dimension 3. En particulier, la représentation équivariante et les symétries ont une limite classique lorsque $q \to 1$.

Le but de ce chapitre est d'obtenir l'action spectrale sur $SU_q(2)$ qui est un triplet spectral simple avec un opérateur de Dirac inversible. La principale difficulté ici est de contrôler le calcul différentiel généré par l'opérateur de Dirac. Cette question du calcul de l'action spectrale a été posée dans l'épilogue de [137]. Dans le cas de $SU_q(2)$, nous avons $Sd^+ = Sd = \{1, 2, 3\}$, donc

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}, \Phi, \Lambda) = \sum_{1 \leq k \leq 3} \Phi_k \, \Lambda^k \fint |D_{\mathbb{A}}|^{-k} + \Phi(0) \, \zeta_{D_{\mathbb{A}}}(0). \tag{4.1}$$

Notons que dans le cas de $SU_q(2)$ il n'y a pas de termes en Λ^{-k}, $k > 0$ car le spectre de dimension est minoré par 1.

Afin de procéder au calcul de (4.1), nous introduisons deux présentations de 1-formes. L'ingrédient principal est le signe de l'opérateur de Dirac $F := \text{sign}\,(\mathcal{D})$ qui apparaît être une 1-forme modulo $OP^{-\infty}$.

Dans la section 2, nous étudions l'action spectral dans un cadre abstrait d'un triplet spectral de dimension 3, en utilisant certains cocycles.

Dans les sections 3 et 4, nous rappelons les résultats principaux [48] sur $SU_q(2)$ et montrons que l'action spectrale complète (avec l'opérateur de réalité) donnée par (1.6) est entièrement déterminée par les termes :

$$\fint A^q |\mathcal{D}|^{-p}, \quad 1 \leq q \leq p \leq 3\,.$$

où A est une combinaison linéaire de termes $a[|\mathcal{D}|, b]$ avec $a, b \in \mathcal{A}$.

Dans la section 5, nous établissons un calcul différentiel modulo un idéal dans les opérateurs pseudodifférentiels et appliquont ces résultats au calcul précis des intégrales non commutatives précédentes.

La section 6 est dédiée au calcul explicite d'exemples, alors que la section suivante concerne différentes comparaisons entre le cas commutatif de la sphère de dimension 3, c'est à dire $SU(2)$, et le cas non commutatif $SU_q(2)$.

4.2 Action spectrale en dimension 3

4.2.1 Tadpoles et cocycles

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral de dimension 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_i \in \mathcal{A}$, posons

$$\phi_n(a_0, \cdots, a_n) := \fint a_0[\mathcal{D}, a_1]D^{-1} \cdots [\mathcal{D}, a_n]D^{-1}.$$

On utilise aussi les intégrales suivantes sur les n-formes universelles $\Omega_u^n(\mathcal{A})$ définies par

$$\int_{\phi_n} a_0 da_1 \cdots da_n := \phi_n(a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

et le fait que $(da_0)a_1 = d(a_0a_1) - a_0da_1$.

On utilisera le $b - B$-bicomplexe défini dans [28]: b est l'application de Hochschild (et b' est la troncation) définie sur les n-cochaines ϕ par

$$\begin{aligned} b\phi(a_0, \ldots, a_{n+1}) &:= b'\phi(a_0, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1}\phi(a_{n+1}a_0, a_1, \ldots, a_n), \\ b'\phi(a_0, \ldots, a_{n+1}) &:= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\phi(a_0, \ldots, a_ja_{j+1}, \ldots, a_{n+1}). \end{aligned}$$

Rappelons que B_0 est définie sur les cochaines normalisées ϕ_n par

$$B_0\phi_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) := \phi_n(1, a_0, \ldots, a_{n-1}), \text{ ainsi } \int_{\phi_n} d\omega = \int_{B_0\phi_n} \omega \text{ pour } \omega \in \Omega_u^{n-1}(\mathcal{A}).$$

Alors $B := NB_0$, où $N := 1 + \lambda + \ldots \lambda^n$ est l'antisymétriseur cyclique sur les n-cochaines et λ est la permutation cyclique $\lambda\phi(a_0, \ldots, a_n) := (-1)^n\phi(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Nous utiliserons aussi la 1-cochaine cyclique $N\phi_1$:

$$N\phi_1(a_0, a_1) := \phi_1(a_0, a_1) - \phi_1(a_1, a_0) \text{ et } \int_{N\phi_1} a_0da_1 := N\phi_1(a_0, a_1).$$

Remarque 4.2.1. *Supposons que l'intégrand de $\fint$ est dans OP^{-3}. Puisque $[D^{-1}, a] = -D^{-1}[D, a]D^{-1} \in OP^{-2}$, ce commutateur introduit un intégrand dans OP^{-4} et donc a une intégrale non commutative qui s'annule: sous l'intégrale, nous pouvons commuter D^{-1} avec tout $a \in \mathcal{A}$, mais pas avec les 1-formes. Remarquons aussi que, puisque $P_0 \in OP^{-\infty}$, tout intégrand contenant P_0 a une intégrale non commutative qui s'annule.*

Lemme 4.2.2. *Nous avons*

(*i*) $b\phi_1 = -\phi_2$.
(*ii*) $b\phi_2 = 0$.
(*iii*) $b\phi_3 = 0$.
(*iv*) $B\phi_1 = 0$.
(*v*) $B_0\phi_2 = -(1-\lambda)\phi_1$.
(*vi*) $bB_0\phi_2 = 2\phi_2 + B_0\phi_3$.
(*vii*) $B\phi_2 = 0$.
(*viii*) $B_0\phi_3 = Nb'\phi_1$.
(*ix*) $B\phi_3 = 3B_0\phi_3$.

Démonstration. (*i*)

$$\begin{aligned} b\phi_1(a_0,a_1,a_2) &= ⨍ a_0a_1[\mathcal{D},a_2]D^{-1} - ⨍ a_0\left(a_1[\mathcal{D},a_2] + [\mathcal{D},a_1]a_2\right)D^{-1} + ⨍ a_2a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1} \\ &= ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]\left(D^{-1}a_2 - a_2D^{-1}\right) = -⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1}[\mathcal{D},a_2]D^{-1} \\ &= -\phi_2(a_0,a_1,a_2) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété de trace de l'intégrale non commutative.

(*ii*) $b\phi_2(a_0,a_1,a_2,a_3)$

$$\begin{aligned} &= ⨍ a_0a_1[\mathcal{D},a_2]D^{-1}[\mathcal{D},a_3]D^{-1} - ⨍ a_0\left(a_1[\mathcal{D},a_2] + [\mathcal{D},a_1]a_2\right)D^{-1}[\mathcal{D},a_3]D^{-1} \\ &\quad + ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1}(a_2[\mathcal{D},a_3] + [\mathcal{D},a_2]a_3)D^{-1} - ⨍ a_3a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1}[\mathcal{D},a_2]D^{-1} \\ &= ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]\left(D^{-1}a_2 - a_2D^{-1}\right)[\mathcal{D},a_3]D^{-1} + ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1}[\mathcal{D},a_2]\left(a_3D^{-1} - D^{-1}a_3\right) \\ &= -⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1}[\mathcal{D},a_2]D^{-1}[D,a_3]D^{-1} + ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1}[\mathcal{D},a_2]D^{-1}[D,a_3]D^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(*iii*) En utilisant la Remarque 4.2.1, on obtient alors la relation $\phi_3(a_0,a_1,a_2,a_3) = ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1][\mathcal{D},a_2][\mathcal{D},a_3]|\mathcal{D}|^{-3}$, donc des calculs similaires donnent $b\phi_3 = 0$.

(*iv*) $B_0\phi_1(a_0) = ⨍[\mathcal{D},a_0]D^{-1} = ⨍\left(\mathcal{D}a_0D^{-1} - a_0\right) = 0$.

(*v*)
$$\begin{aligned} B_0\phi_2(a_0,a_1) &= ⨍[\mathcal{D},a_0]D^{-1}[\mathcal{D},a_1]D^{-1} = ⨍ a_0D^{-1}[\mathcal{D},a_1] - ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1} \\ &= ⨍ a_0a_1 - ⨍ a_0D^{-1}a_1\mathcal{D} - ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1} \\ &= -⨍ a_1[\mathcal{D},a_0]D^{-1} - ⨍ a_0[\mathcal{D},a_1]D^{-1} = -\phi_1(a_1,a_0) - \phi_1(a_0,a_1). \end{aligned}$$

(*vi*) Puisque $-b\lambda\phi_1(a_0,a_1,a_2) = \phi_1(a_2,a_0a_1) - \phi_1(a_1a_2,a_0) + \phi_1(a_1,a_2a_0)$, on obtient

$$-b\lambda\phi_1(a_0,a_1,a_2) = ⨍ a_0a_1D^{-1}a_2\mathcal{D} + a_0D^{-1}a_1\mathcal{D}a_2 - a_0D^{-1}a_1a_2\mathcal{D} - a_0a_1a_2.$$

Donc par développement direct, ceci est égal à $-\fint a_0 D^{-1}[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]$ ce qui signifie que

$$\begin{aligned}-b\lambda\phi_1(a_0, a_1, a_2) &= \fint [D^{-1}, a_0][\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2] - a_0[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1} \\ &= -B_0\phi_3(a_0, a_1, a_2) - \phi_2(a_0, a_1, a_2).\end{aligned}$$

Le résultat est alors une conséquence de $(i), (v)$.

(vii) $B\phi_2 = NB_0\phi_2 = -N(1-\lambda)\phi_1 = 0$ puisque $N(1-\lambda) = 0$.

$$\begin{aligned}(viii) \quad B_0\phi_3(a_0, a_1, a_2) &= \fint [\mathcal{D}, a_0]D^{-1}[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1} \\ &= \fint a_0 D^{-1}[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2] - \fint a_0[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1} \\ &= \fint a_0 a_1 D^{-1}[\mathcal{D}, a_2] - \fint a_0 D^{-1} a_1[\mathcal{D}, a_2] - \fint a_0[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1} \\ &= \fint a_0 a_1 a_2 - \fint a_0 a_1 D^{-1} a_2 \mathcal{D} - \fint a_0 D^{-1} a_1 \mathcal{D} a_2 + \fint a_0 D^{-1} a_1 a_2 \mathcal{D} \\ &\quad - \fint a_0[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1} \\ &= \fint a_0 a_1 a_2 - a_2\mathcal{D}a_1 a_0 D^{-1} + a_1 a_2 \mathcal{D} a_0 D^{-1} + a_2 \mathcal{D} a_0 a_1 D^{-1} \\ &\quad - \left(a_0\mathcal{D}a_1 a_2 D^{-1} - a_0\mathcal{D}a_1 D^{-1} - a_0 a_1 \mathcal{D} a_2 D^{-1} + a_0 a_1 a_2\right).\end{aligned}$$

En développant $(id + \lambda + \lambda^2)b'\phi_1(a_0, a_1, a_2)$, on retrouve l'expression précédente.

(ix) Conséquence de $(viii)$. □

4.2.2 Terme invariant d'échelle de l'action spectrale

Nous savons d'après [22] que le terme invariant d'échelle de l'action spectrale peut s'écrire

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = -\fint AD^{-1} + \tfrac{1}{2}\fint AD^{-1}AD^{-1} - \tfrac{1}{3}\fint AD^{-1}AD^{-1}AD^{-1}. \tag{4.2}$$

En fait, cette action peut s'exprimer en dimension 3 comme contributions de type tadpole et des termes de type Yang–Mills et Chern-Simons :

Proposition 4.2.3. *Pour toute 1-forme A,*

$$\zeta_{D_A}(0) - \zeta_D(0) = -\tfrac{1}{2}\int_{N\phi_1} A + \tfrac{1}{2}\int_{\phi_2}(dA + A^2) - \tfrac{1}{2}\int_{\phi_3}(AdA + \tfrac{2}{3}A^3). \tag{4.3}$$

Afin de prouver ceci, nous calculons chaque terme de l'action.

Lemme 4.2.4. *Pour toute 1-forme A, nous avons*

(i) $\int_{\phi_2} dA = \int_{B_0\phi_2} A = -\int_{\phi_1} A + \int_{\lambda\phi_1} A$.

(ii) $\fint AD^{-1} = \int_{\phi_1} A = \frac{1}{2}\int_{N\phi_1} A - \frac{1}{2}\int_{\phi_2} dA$.

(iii) $\fint AD^{-1}AD^{-1} = -\int_{\phi_3} AdA + \int_{\phi_2} A^2$.

(iv) $\fint AD^{-1}AD^{-1}AD^{-1} = \int_{\phi_3} A^3$.

Démonstration. (i) et (ii) sont conséquences directe du Lemme 4.2.2 (v).

(iii) Avec la notation $A = a_i db_i$ (somme sur i)

$$\begin{aligned}\fint AD^{-1}AD^{-1} &= \fint a_0[\mathcal{D}, b_0]D^{-1}a_1[\mathcal{D}, b_1]D^{-1} \\ &= -\int_{\phi_3} AdA + \fint a_0[\mathcal{D}, b_0]a_1b_1D^{-1} - \fint a_0[\mathcal{D}, b_0]a_1D^{-1}b_1.\end{aligned}$$

Nous calculons les termes restant

$$\begin{aligned}\fint a_0[\mathcal{D}, b_0]a_1b_1D^{-1} - \fint a_0[\mathcal{D}, b_0]a_1D^{-1}b_1 &= \fint a_0\mathcal{D}b_0a_1b_1D^{-1} - \fint a_0b_0\mathcal{D}a_1b_1D^{-1} \\ &\quad - \fint a_0\mathcal{D}b_0a_1D^{-1}b_1 + \fint a_0b_0\mathcal{D}a_1D^{-1}b_1,\end{aligned}$$

que l'on compare avec $\int_{\phi_2} A^2 = \int_{\phi_2} a_0(db_0)a_1db_1 = \int_{\phi_2} a_0d(b_0a_1)db_1 - a_0b_0da_1db_1$:

$$\begin{aligned}\int_{\phi_2} A^2 &= \fint a_0[\mathcal{D}, b_0a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, b_1]D^{-1} - \fint a_0b_0[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, b_1]D^{-1} \\ &= \fint a_0\mathcal{D}b_0a_1b_1D^{-1} - \fint a_0\mathcal{D}b_0a_1D^{-1}b_1 - \fint a_0b_0a_1\mathcal{D}b_1D^{-1} + \fint a_0b_0a_1b_1 \\ &\quad - \fint a_0b_0\mathcal{D}a_1b_1D^{-1} + \fint a_0b_0\mathcal{D}a_1D^{-1}b_1 + \fint a_0b_0a_1\mathcal{D}b_1D^{-1} - \fint a_0b_0a_1b_1 \\ &= \fint a_0\mathcal{D}b_0a_1b_1D^{-1} - \fint b_1a_0\mathcal{D}b_0a_1D^{-1} - \fint a_0b_0\mathcal{D}a_1b_1D^{-1} + \fint b_1a_0b_0\mathcal{D}a_1D^{-1}.\end{aligned}$$

(iv) Notons que

$$\begin{aligned}\int_{\phi_3} A^3 &= \int_{\phi_3} a_0(db_0)a_1(db_1)a_2db_2 = \int_{\phi_3} a_0d(b_0a_1)d(b_1a_2)db_2 - a_0b_0da_1d(b_1a_2)db_2 \\ &\quad - a_0d(b_0a_1b_1)d(a_2db_2 + a_0b_0d(a_1b_1)da_2db_2 \\ &= \fint a_0[\mathcal{D}, b_0a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, b_1a_2]D^{-1}[\mathcal{D}, b_2]D^{-1} - a_0b_0[\mathcal{D}, a_1]D^{-1}[\mathcal{D}, b_1a_2]D^{-1}[\mathcal{D}, b_2]D^{-1} \\ &\quad - a_0[\mathcal{D}, b_0a_1b_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1}[\mathcal{D}, b_2]D^{-1} + a_0b_0[\mathcal{D}, a_1b_1]D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1}[\mathcal{D}, b_2]D^{-1}.\end{aligned}$$

En sommant les deux premiers termes et les deux derniers termes, on obtient

$$\int_{\phi_3} A^3 = \fint a_0[\mathcal{D}, b_0]a_1D^{-1}[\mathcal{D}, b_1a_2]D^{-1}[\mathcal{D}, b_2]D^{-1} - a_0[\mathcal{D}, b_0]a_1b_1D^{-1}[\mathcal{D}, a_2]D^{-1}[\mathcal{D}, b_2]D^{-1}.$$

En utilisant la Remarque 4.2.1, nous pouvons commuter sous l'intégrale D^{-1} avec tout $a \in \mathcal{A}$ et de façon similaire

$$\fint AD^{-1}AD^{-1}AD^{-1} = \fint a_0[\mathcal{D}, b_0]a_1D^{-1}[\mathcal{D}, b_1]a_2D^{-1}[\mathcal{D}, b_2]D^{-1}$$

ce qui prouve (iv). □

On déduit la Proposition 4.2.3 à partir de (4.2) en utilisant le lemme précédent.

4.3 Le triplet $SU_q(2)$

4.3.1 Le triplet spectral

Nous rappelons brièvement les définitions et propriétés principales du triplet spectral réel $\big(\mathcal{A}(SU_q(2)), \mathcal{H}, \mathcal{D}\big)$ introduit dans [48] (voir aussi [18, 19, 31]).

L'algèbre:
Soit $\mathcal{A} := \mathcal{A}(SU_q(2))$ l'algèbre étoilée générée polynomialement par a et b, assujettis aux règles de commutation suivantes, avec $0 < q < 1$:

$$ba = q\,ab, \qquad b^*a = q\,ab^*, \qquad bb^* = b^*b, \quad a^*a + q^2\,b^*b = 1, \qquad aa^* + bb^* = 1\,. \tag{4.4}$$

Nous rappelons le lemme suivant de [153, Lemme A2.1] :

Lemme 4.3.1. *Pour toute représentation π de $\mathcal{A}$,*

$$\begin{aligned} &Spect\big(\pi(bb^*)\big) = \{\,0, q^{2k} \,|\, |k \in \mathbb{N}\,\} \text{ ou } \pi(b) = 0, \\ &Spect\big(\pi(aa^*)\big) = \{\,1, 1 - q^{2k} \,|\, k \in \mathbb{N}\,\} \text{ ou } \pi(b) = 0 \text{ et } \pi(a) \text{ est un unitaire.} \end{aligned}$$

Ce résultat est intéressant car il montre l'apparition d'une discrétisation pour $0 \leq q < 1$ alors que pour $q = 1$, $SU_q(2) = SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ et les spectres des opérateurs $\pi(aa^*)$ et $\pi(bb^*)$ sont égaux à $[0, 1]$. De plus, tous les résultats qui suivent sur les intégrales non commutatives feront intervenir q^2 et non q.

Tout élément de $\mathcal{A}$ peut se décomposer de façon unique en combinaison linéaire de termes de la forme $a^\alpha b^\beta b^{*\gamma}$ où $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{N}$, avec la convention

$$a^{-|\alpha|} := a^{*|\alpha|}.$$

L'espace de Hilbert spinoriel :
$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\uparrow \oplus \mathcal{H}^\downarrow$ a une base orthonormale constituée de vecteurs $|j\mu n\uparrow\rangle$ avec $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots,$ $\mu = -j, \ldots, j$ et $n = -j^+, \ldots, j^+$, ainsi que $|j\mu n\downarrow\rangle$ pour $j = \frac{1}{2}, 1, \ldots,$ $\mu = -j, \ldots, j$ et $n = -j^-, \ldots, j^-$ (ici $x^\pm := x \pm \frac{1}{2}$).
Il sera utile de manipuler une notation vectorielle, en posant :

$$|j\mu n\rangle\!\rangle := \left(\begin{smallmatrix} |j\mu n\uparrow\rangle \\ |j\mu n\downarrow\rangle \end{smallmatrix}\right) \tag{4.5}$$

et avec la convention selon laquelle la composante basse est nulle lorsque $n = \pm(j + \frac{1}{2})$ ou $j = 0$.

La représentation π et son approximation $\underline{\pi}$:
Il est connu que la théorie des représentations de $SU_q(2)$ est similaire à celle de $SU(2)$ [153]. La représentation π donnée dans [48] est:

$$\begin{aligned} \pi(a)\,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= \alpha^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^+n^+\rangle\!\rangle + \alpha^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^+n^+\rangle\!\rangle, \\ \pi(b)\,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= \beta^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^+n^-\rangle\!\rangle + \beta^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^+n^-\rangle\!\rangle, \\ \pi(a^*)\,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= \tilde{\alpha}^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^-n^-\rangle\!\rangle + \tilde{\alpha}^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^-n^-\rangle\!\rangle, \\ \pi(b^*)\,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= \tilde{\beta}^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^-n^+\rangle\!\rangle + \tilde{\beta}^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^-n^+\rangle\!\rangle \end{aligned} \tag{4.6}$$

où

$$\alpha^+_{j\mu n} := \sqrt{q^{\mu+n-1/2}[j+\mu+1]} \begin{pmatrix} q^{-j-1/2}\frac{\sqrt{[j+n+3/2]}}{[2j+2]} & 0 \\ q^{1/2}\frac{\sqrt{[j-n+1/2]}}{[2j+1][2j+2]} & q^{-j}\frac{\sqrt{[j+n+1/2]}}{[2j+1]} \end{pmatrix},$$

$$\alpha^-_{j\mu n} := \sqrt{q^{\mu+n+1/2}[j-\mu]} \begin{pmatrix} q^{j+1}\frac{\sqrt{[j-n+1/2]}}{[2j+1]} & -q^{1/2}\frac{\sqrt{[j+n+1/2]}}{[2j][2j+1]} \\ 0 & q^{j+1/2}\frac{\sqrt{[j-n-1/2]}}{[2j]} \end{pmatrix},$$

$$\beta^+_{j\mu n} := \sqrt{q^{\mu+n-1/2}[j+\mu+1]} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{[j-n+3/2]}}{[2j+2]} & 0 \\ -q^{-j-1}\frac{\sqrt{[j+n+1/2]}}{[2j+1][2j+2]} & q^{-1/2}\frac{\sqrt{[j-n+1/2]}}{[2j+1]} \end{pmatrix},$$

$$\beta^-_{j\mu n} := \sqrt{q^{\mu+n-1/2}[j-\mu]} \begin{pmatrix} -q^{-1/2}\frac{\sqrt{[j+n+1/2]}}{[2j+1]} & -q^{j}\frac{\sqrt{[j-n+1/2]}}{[2j][2j+1]} \\ 0 & -\frac{\sqrt{[j+n-1/2]}}{[2j]} \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{\alpha}^{\pm}_{j\mu n} := (\alpha^{\mp}_{j^{\pm}\mu^- n^-})^*$, $\tilde{\beta}^{\pm}_{j\mu n} := (\beta^{\mp}_{j^{\pm}\mu^- n^+})^*$ et avec le q-number de $\alpha \in \mathbb{R}$ défini par

$$[\alpha] := \tfrac{q^{\alpha}-q^{-\alpha}}{q-q^{-1}}.$$

Il est suffisant pour l'objectif de chapitre d'utiliser la représentation approximée $\underline{\pi}$ de $SU_q(2)$ présentée dans [48, 138], au lieu de la représentation spinorielle totale π.

Cette représentation approximée est

$$\underline{\pi}(a) := a_+ + a_-, \quad \underline{\pi}(b) := b_+ + b_-$$

avec les définitions suivantes, où $q_n := \sqrt{1-q^{2n}}$:

$$\begin{aligned} a_+ \,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= q_{j^++\mu^+} \left(\begin{smallmatrix} q_{j^++n^++1} & 0 \\ 0 & q_{j^++n} \end{smallmatrix}\right) |j^+\mu^+n^+\rangle\!\rangle, \\ a_- \,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= q^{2j+\mu+n+\frac{1}{2}} \left(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) |j^-\mu^+n^+\rangle\!\rangle, \\ b_+ \,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= q^{j+n-\frac{1}{2}} q_{j^++\mu^+} \left(\begin{smallmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) |j^+\mu^+n^-\rangle\!\rangle, \\ b_- \,|j\mu n\rangle\!\rangle &:= -q^{j+\mu} \left(\begin{smallmatrix} q_{j^++n} & 0 \\ 0 & q_{j^-+n} \end{smallmatrix}\right) |j^-\mu^+n^-\rangle\!\rangle. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Tous les termes résiduels n'ont pas de répercussion sur le calcul de résidu. Plus précisément, $\pi(x) - \underline{\pi}(x) \in \mathcal{K}_q$ où $\mathcal{K}_q$ est l'idéal principal généré par l'opérateur

$$J_q \,|j\mu n\rangle\!\rangle := q^j \,|j\mu n\rangle\!\rangle. \tag{4.8}$$

$\mathcal{K}_q$ est contenu dans l'idéal des opérateurs tels que $\mu_n = o(n^{-\alpha})$ (infinitésimal d'ordre α) pour tout $\alpha > 0$, et $\mathcal{K}_q \subset OP^{-\infty}$.

Nous définissons une base orthonormale alternative $v^{j\uparrow}_{m,l}$ et $v^{j\downarrow}_{m,l}$, et on note

$$v^j_{m,l} := \left(\begin{smallmatrix} v^{j\uparrow}_{m,l} \\ v^{j\downarrow}_{m,l} \end{smallmatrix}\right) \text{ où } v^{j\uparrow}_{m,l} := |j, m-j, l-j^+, \uparrow\rangle, \quad v^{j\downarrow}_{m,l} := |j, m-j, l-j^-, \downarrow\rangle.$$

Ici $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $0 \leq m \leq 2j$, $0 \leq l \leq 2j+1$ et $v^{\downarrow,j}_{m,l}$ est nul lorsque $j = 0$ ou $l = 2j$ ou $2j+1$. L'intérêt de cette base est que les opérateurs $a_\pm$ et $b_\pm$ ont une forme plus simple :

$$\begin{aligned} a_+ \, v^j_{m,l} &= q_{m+1} \, q_{l+1} \, v^{j^+}_{m+1,l+1} \,, & a_- \, v^j_{m,l} &= q^{m+l+1} \, v^{j^-}_{m,l} \,, \\ b_+ \, v^j_{m,l} &= q^l \, q_{m+1} \, v^{j^+}_{m+1,l} \,, & b_- \, v^j_{m,l} &= -q^m \, q_l \, v^{j^-}_{m,l-1} \,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a^*_+ \, v^j_{m,l} &= q_m \, q_l \, v^{j^-}_{m-1,l-1} \,, & a^*_- \, v^j_{m,l} &= q^{m+l+1} \, v^{j^+}_{m,l} \,, \\ b^*_+ \, v^j_{m,l} &= q^l \, q_m \, v^{j^-}_{m-1,l} \,, & b^*_- \, v^j_{m,l} &= -q^m \, q_{l+1} \, v^{j^+}_{m,l+1} \,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} a_- a_+ &= q^2 \, a_+ \, a_- \,, & b_- b_+ &= q^2 \, b_+ b_- \,, & b_+ a_+ &= q \, a_+ b_+ \,, & b_- a_- &= q \, a_- b_- \,, \\ a^*_- a_+ &= q^2 \, a_+ a^*_- \,, & a^*_- a_- &= a_- a^*_- \,, & a^*_- b_+ &= q \, b_+ a^*_- \,, & a^*_- b_- &= q \, b_- a^*_- \,, \\ a^*_+ a_- &= q^2 \, a_- a^*_+ \,, & b^*_- b_+ &= b_+ b^*_- \,, & b^*_- a_+ &= q \, a_+ b^*_- \,, & a_- b_+ &= q \, b_+ a_- \,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Notons par exemple que

$$\begin{aligned} a_+ a^*_+ \, v^j_{m,l} &= q^2_m q^2_l \, v^j_{m,l} \,, & a^*_+ a_+ \, v^j_{m,l} &= q^2_{m+1} q^2_{l+1} \, v^j_{m,l} \,, \\ b_+ b^*_+ \, v^j_{m,l} &= q^{2l} q^2_m \, v^j_{m,l} \,, & b^*_+ b_+ \, v^j_{m,l} &= q^{2l} q^2_{m+1} \, v^j_{m,l} \,, \end{aligned}$$

donc on appliquant $v^j_{m,l}$, on obtient la première relation (et de façon similaire, les autres)

$$a^*_+ a_+ - q^2 \, a_+ a^*_+ + q^2 \, (b^*_+ b_+ - b_+ b^*_+) = 1 - q^2, \tag{4.12}$$

$$a_+ a^*_+ + a_- a^*_- + b_+ b^*_+ + b_- b^*_- = 1, \tag{4.13}$$

$$a^*_+ a_+ + a^*_- a_- + q^2 \, (b^*_+ b_+ + b^*_- b_-) = 1, \tag{4.14}$$

$$a^*_- a_- - q^2 \, a_- a^*_- + q^2 \, b^*_- b_- - q^2 \, b_- b^*_- = 0, \tag{4.15}$$

$$a_+ a^*_- + b^*_- b_+ = 0, \qquad a^*_- a_+ + q^2 \, b^*_- b_+ = 0, \tag{4.16}$$

$$a_- a^*_+ + b^*_+ b_- = 0, \qquad a^*_+ a_- + q^2 \, b^*_+ b_- = 0, \tag{4.17}$$

$$b_+ b^*_+ - b^*_+ b_+ + b_- b^*_- - b^*_- b_- = 0, \tag{4.18}$$

$$q \, a_+ b_- - b_- a_+ + q \, a_- b_+ - b_+ a_- = 0. \tag{4.19}$$

Et deux autres :

Remarquons que nous pouvons aussi utiliser deux autres *-représentations $\pi_\pm$ de $\mathcal{A}$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$, définies sur la base orthonormale $\{ \, \varepsilon_n : n \in \mathbb{N} \, \}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ par

$$\pi_\pm(a) \, \varepsilon_n := q_{n+1} \, \varepsilon_{n+1}, \qquad \pi_\pm(b) \, \varepsilon_n := \pm q^n \, \varepsilon_n \,. \tag{4.20}$$

Ces représentations sont irréducibles mais non fidèles puisque $\pi_\pm(b - b^*) = 0$.

L'opérateur de Dirac :

Il est choisi de la même manière que dans le cas de la sphère classique de dimension 3 :

$$\mathcal{D}\,|j\mu n\rangle\!\rangle := \left(\begin{smallmatrix} 2j+\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2j-\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) |j\mu n\rangle\!\rangle, \tag{4.21}$$

ce qui signifie, avec notre convention, que $\mathcal{D}\,v^j_{ml} = \left(\begin{smallmatrix} 2j+\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2j-\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) v^j_{ml}$. Notons que cet opérateur est inversible (et donc $D = \mathcal{D}$, $P_0 = 0$). De plus, il est asymptotiquement diagonal et

les valeurs propres $2j + \frac{1}{2}$ pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, ont une multiplicité $(2j+1)(2j+2)$,

les valeurs propres $-(2j + \frac{1}{2})$ pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$, ont une multiplicité $2j(2j+1)$.

Cet opérateur de Dirac possède exactement le même spectre que l'opérateur de Dirac classique sur la sphère de dimension 3 [4, 80] avec un trou autour de 0.

Soit $\mathcal{D} = F|\mathcal{D}|$ la décomposition polaire de $\mathcal{D}$, ainsi

$$|\mathcal{D}|\,|j\mu n\rangle\!\rangle = \left(\begin{smallmatrix} d_{j^+} & 0 \\ 0 & d_j \end{smallmatrix}\right) |j\mu n\rangle\!\rangle, \quad d_j := 2j + \tfrac{1}{2}\,, \tag{4.22}$$

$$F\,|j\mu n\rangle\!\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) |j\mu n\rangle\!\rangle, \tag{4.23}$$

et il résulte de (4.7) et (4.23) que

$$F \text{ commute avec } a_\pm,\, b_\pm. \tag{4.24}$$

L'opérateur de réalité :

Cet opérateur antilinéaire J est défini sur la base de $\mathcal{H}$ par

$$J\,|j,\mu,n,\uparrow\rangle := i^{2(2j+\mu+n)}\,|j,-\mu,-n,\uparrow\rangle, \qquad J\,|j,\mu,n,\downarrow\rangle := i^{2(2j-\mu-n)}\,|j,-\mu,-n,\downarrow\rangle \tag{4.25}$$

et donc vérifie

$$J^{-1} = -J = J^* \text{ et } \mathcal{D}J = J\mathcal{D},$$
$$J\,v^{j\uparrow}_{m,l} = i^{2(m+l)-1} v^{j\uparrow}_{2j-m,2j+1-l}\,, \qquad J\,v^{j\downarrow}_{m,l} = i^{-2(m+l)+1} v^{j\downarrow}_{2j-m,2j-1-l}\,.$$

On note $\mathcal{B}$ la sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ générée par les opérateurs dans $\delta^k(\pi(\mathcal{A}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$\Psi^0_0(\mathcal{A})$ l'algèbre générée par $\delta^k\big(\pi(\mathcal{A})\big)$ et $\delta^k([\mathcal{D},\pi(\mathcal{A})])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

X la sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ algébriquement générée par l'ensemble $\{\, a_\pm, b_\pm \,\}$.

Remarquons que $\Psi^0_0(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $\Psi^0(\mathcal{A})$ (espace des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre inférieur ou égal à zero).

L'application de Hopf

Pour les calculs explicites de résidus nous avons besoin d'un *-homomorphisme $r : X \to \pi_+(\mathcal{A}) \otimes \pi_-(\mathcal{A})$ défini par le produit tensoriel des algèbres de Hopf des représentations π_+ et π_-:

$$r(a_+) := \pi_+(a) \otimes \pi_-(a), \qquad r(a_-) := -q\,\pi_+(b) \otimes \pi_-(b^*),$$
$$r(b_+) := -\pi_+(a) \otimes \pi_-(b), \qquad r(b_-) := -\pi_+(b) \otimes \pi_-(a^*). \tag{4.26}$$

En fait, $\mathcal{A}$ est une *-algèbre de Hopf sous le coproduit $\Delta(a) := a\otimes a - q\,b\otimes b^*$, $\Delta(b) := a\otimes b + b\otimes a^*$. Ces homomorphismes apparaissent dans [153] avec la traduction $\alpha \leftrightarrow a^*$, $\gamma \leftrightarrow -b$. En particulier,

$U := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{smallmatrix}\right)$ est le générateur canonique du $K_1(\mathcal{A})$-groupe $(\Delta a,\, \Delta b) = (a,\, b)\dot{\otimes}\, U$ où le dernier $\dot{\otimes}$ correspond au produit matriciel des composantes tensorielles.

La graduation :

D'après le décalage $j \to j^{\pm}$ apparaissant dans (4.9), (4.10), on obtient une $\mathbb{Z}$-graduation sur X définie par le degré $+1$ sur $a_+, b_+, {a_-}^*, {b_-}^*$ et -1 sur $a_-, b_-, {a_+}^*, {b_+}^*$.

Tout opérateur $T \in X$ peut se décomposer de façon unique comme $T = \sum_{j\in J\subset\mathbb{Z}} T_j$ où T_j est homogène de degré j.

Pour $T \in X$, T° designera la partie de degré 0 de T pour cette graduation et par un abus de notation nous écrivons $r(T)^\circ$ au lieu de $r(T^\circ)$.

L'application symbole:

Nous utilisons aussi le morphisme $\sigma\colon \pi_\pm(\mathcal{A}) \to C^\infty(S^1)$ défini pour $z \in S^1$ sur les générateurs par

$$\sigma\big(\pi_\pm(a)\big)(z) := z, \quad \sigma\big(\pi_\pm(a^*)\big)(z) := \bar{z}, \quad \sigma\big(\pi_\pm(b)\big)(z) = \sigma\big(\pi_\pm(b^*)\big)(z) := 0.$$

L'application $(\sigma\otimes\sigma)\circ r$ est définie sur X (et aussi sur $\mathcal{B}$) avec des valeurs dans $C^\infty(S^1)\otimes C^\infty(S^1)$.

On pose

$$dT := [\mathcal{D}, T] \text{ et } \delta(T) := [|\mathcal{D}|, T].$$

Lemme 4.3.2. *$a_\pm$, $b_\pm$ sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ tels que $p \in \mathbb{N}$,*
(i) $\delta(a_\pm) = \pm a_\pm\,, \quad \delta(b_\pm) = \pm b_\pm\,,$
(ii) $\delta^p(\underline{\pi}(a)) = a_+ + (-1)^p a_-\,, \quad \delta^p(\underline{\pi}(b)) = b_+ + (-1)^p b_-\,,$
(iii) $\delta(a_\pm^p) = \pm p\, a_\pm^p\,, \quad \delta(b_\pm^p) = \pm p\, b_\pm^p\,.$

Démonstration. (i) Par définition, $a_\pm\,|j\mu n\rangle\!\rangle = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_\pm & 0 \\ 0 & \beta_\pm \end{smallmatrix}\right)|j^\pm\mu^+n^+\rangle\!\rangle$ où les nombres $\alpha_\pm$ et $\beta_\pm$ dépendent de j, μ, n et q, donc d'après (4.22)

$$\begin{aligned}\delta(a_\pm)|j\mu n\rangle\!\rangle &= \left(\begin{smallmatrix} (d_{j^+\pm})\alpha_\pm & 0 \\ 0 & d_{j^\pm}\,\beta_\pm \end{smallmatrix}\right)|j^\pm\mu^+n^+\rangle\!\rangle - \left(\begin{smallmatrix} (d_{j^+})\alpha_\pm & 0 \\ 0 & d_j\,\beta_\pm \end{smallmatrix}\right)|j^\pm\mu^+n^+\rangle\!\rangle \\ &= \left(\begin{smallmatrix} \pm\alpha_\pm & 0 \\ 0 & \pm\beta_\pm \end{smallmatrix}\right)|j^\pm\mu^+n^+\rangle\!\rangle = \pm a_\pm\,|j\mu n\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

et des arguments similaires sont vrais pour $b_\pm$.

(ii) et (iii) sont des conséquences directes de (i) et de la définition de $\underline{\pi}$. □

Remarque 4.3.3. *D'après le Lemme 4.3.2, nous voyons que, modulo $OP^{-\infty}$, X est égal à $\mathcal{B}$ et en particulier contient $\pi(\mathcal{A})$.*

En utilisant (4.24)*, on obtient $\mathcal{B} \subset \Psi_0^0(\mathcal{A}) \subset$ algèbre générée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}F$.*

Notons que malgré la dernière inclusion, F n'est a priori pas dans $\Psi_0^0(\mathcal{A})$.

4.3.2 Les intégrales non commutatives

Rappelons que pour tout opérateur pseudodifférentiel T, $⨍ T := \operatorname*{Res}_{s=0} \zeta_{\mathcal{D}}^T(s)$ où $\zeta_{\mathcal{D}}^T(s) := \operatorname{Tr}(T|\mathcal{D}|^{-s})$.

Théorème 4.3.4. *Le spectre de dimension (sans la structure de réalité donnée par J) du triplet spectral $\big(\mathcal{A}(SU_q(2)), \mathcal{H}, \mathcal{D}\big)$ est simple et égal à $\{1,2,3\}$.*

De plus, les résidus correspondant pour $T \in \mathcal{B}$ sont

$$\begin{aligned}
&⨍ T|\mathcal{D}|^{-3} = 2(\tau_1 \otimes \tau_1)\big(r(T)^\circ\big),\\
&⨍ T|\mathcal{D}|^{-2} = 2\big(\tau_1 \otimes \tau_0 + \tau_0 \otimes \tau_1\big)\big(r(T)^\circ\big),\\
&⨍ T|\mathcal{D}|^{-1} = \big(2\,\tau_0 \otimes \tau_0 - \tfrac{1}{2}\,\tau_1 \otimes \tau_1\big)\big(r(T)^\circ\big),\\
&⨍ F\,T|\mathcal{D}|^{-3} = 0,\\
&⨍ F\,T|\mathcal{D}|^{-2} = 0,\\
&⨍ F\,T|\mathcal{D}|^{-1} = \big(\tau_0 \otimes \tau_1 - \tau_1 \otimes \tau_0\big)\big(r(T)^\circ\big),
\end{aligned}$$

où les fonctionnelles τ_0, τ_1 sont définies pour $x \in \pi_\pm(\mathcal{A})$ by

$$\tau_0(x) := \lim_{N\to\infty} \big(\operatorname{Tr}_N x - (N+1)\,\tau_1(x)\big), \qquad \tau_1(x) := \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma(x)(e^{i\theta})\,d\theta,$$

avec $\operatorname{Tr}_N x = \sum_{n=0}^N \langle \varepsilon_n, x\,\varepsilon_n\rangle$.

Démonstration. Consequence de [138, Théorème 4.1 et (4.3)]. □

Remarque 4.3.5. *Puisque F n'est pas dans $\mathcal{B}$, les équations du Théorème 4.3.4 ne sont pas valides pour tout $T \in \Psi_0^0(\mathcal{A})$.*
Mais lorsque $T \in \Psi_0^0(\mathcal{A})$, $⨍ T|\mathcal{D}|^{-k} = 0$ pour $k \notin \{1,2,3\}$ puisque le spectre de dimension est $\{1,2,3\}$ [138].

Dans [138], les fonctionnelles suivantes ont été définies :

$$\tau_0^{\uparrow}(x) := \lim_{N\to\infty} \operatorname{Tr}_N x - (N+\tfrac{3}{2})\,\tau_1(x), \qquad \tau_0^{\downarrow}(x) := \lim_{N\to\infty} \operatorname{Tr}_N x - (N+\tfrac{1}{2})\,\tau_1(x).$$

Nous avons alors :

$$\tau_0^{\uparrow} = \tau_0 - \tfrac{1}{2}\tau_1, \qquad \tau_0^{\downarrow} = \tau_0 + \tfrac{1}{2}\tau_1.$$

Notons que τ_1 est une trace sur $\pi_\pm(\mathcal{A})$ telle que $\tau_1(1) = 1$ et $\tau_1\big(\pi_+(aa^*)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 1$, tandis que τ_0 ne l'est pas puisque $\tau_0(1) = 0$ et

$$\tau_0\big(\pi_\pm(aa^*)\big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1-q^{2n}) - (N+1) = -\tfrac{1}{1-q^2}, \tag{4.27}$$

donc, en vertu du décalage, l'échange $a \leftrightarrow a^*$ donne

$$\tau_0\big(\pi_\pm(a^*a)\big) = q^2\,\tau_0\big(\pi_\pm(aa^*)\big). \tag{4.28}$$

4.3.3 Le tadpole

Lemme 4.3.6. *Pour $SU_q(2)$, l'hypothèse d'absence de tadpole (voir [37]) n'est pas satisfaite.*

Démonstration. Par exemple, un calcul explicite donne $⨍ \pi(b)[\mathcal{D}, \pi(b^*)]\mathcal{D}^{-1} = \frac{2}{1-q^2}$:

Soit $x, y \in \underline{\pi}(\mathcal{A})$. Puisque $[F, x] = 0$, nous avons

$$⨍ x[\mathcal{D}, y]\mathcal{D}^{-1} = ⨍ x\delta(y)|\mathcal{D}|^{-1} = \tau'\big(r(x\delta(y))^0\big)$$

où $\tau' := 2\,\tau_0 \otimes \tau_0 - \frac{1}{2}\,\tau_1 \otimes \tau_1$.

D'après le Lemme 4.3.2, $\underline{\pi}(b)\delta\big(\underline{\pi}(b^*)\big) = (b_+ + b_-)\big((b_-)^* - (b_+)^*\big) = -b_+{b_+}^* + b_-{b_-}^* + b_+{b_-}^* - b_-{b_+}^*$. Puisque seuls les deux premiers termes ont un degré 0, on obtient, en utilisant les formules du Théorème 4.3.4

$$\begin{aligned}\tau'\big(r(-b_+{b_+}^*)\big) &= -\tau'\big(\pi_+(aa^*) \otimes \pi_-(bb^*)\big)\\ &= -2\tau_0\big(\pi_+(aa^*)\big)\tau_0\big(\pi_-(bb^*)\big) + \tfrac{1}{2}\tau_1\big(\pi_+(aa^*)\big)\tau_1\big(\pi_-(bb^*)\big)\end{aligned}$$

et $\tau_1\big(\pi_-(bb^*)\big) = 0$. De façon similaire, en utilisant (4.28)

$$\tau'\big(r(b_-{b_-}^*)\big) = 2\tau_0\big(\pi_+(bb^*)\big)\tau_0\big(\pi_-(a^*a)\big) = 2q^2\tau_0\big(\pi_-(aa^*)\big)\tau_0\big(\pi_+(bb^*\big).$$

Puisque $\tau_0\big(\pi_\pm(bb^*)\big) = \mathrm{Tr}\,\big(\pi_\pm(bb^*)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{1}{1-q^2}$ et (4.27),

$$⨍ \pi(b)[\mathcal{D}, \pi(b^*)]\mathcal{D}^{-1} = 2\tfrac{1}{1-q^2}\tfrac{1}{1-q^2} + 2q^2\tfrac{-1}{1-q^2}\tfrac{1}{1-q^2} = \tfrac{2}{1-q^2}. \qquad \square$$

En particulier l'appariement du cocycle cyclique du tadpole ϕ_1 avec le générateur du K_1-groupe est non trivial :

Remarque 4.3.7. *Autres exemples (avec l'abus de notation indentifiant x et $\underline{\pi}(x)$) :*

$$\begin{aligned}
&(\tau_1 \otimes \tau_1)\, r\big(a\delta(a^*)^\circ\big) = -1, && (\tau_1 \otimes \tau_1) r\big(a^*\delta(a)^\circ\big) = 1,\\
&(\tau_0 \otimes \tau_0)\, r\big(a\delta(a^*)^\circ\big) = \tfrac{1}{q^2-1}\,, && (\tau_0 \otimes \tau_0)\, r\big(a^*\delta(a)^\circ\big) = \tfrac{q^2}{q^2-1}\,,\\
&⨍ a\delta(a^*)|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{q^2+3}{2(q^2-1)}\,, && ⨍ a^*\delta(a)|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{3q^2+1}{2(q^2-1)}\,,\\
&⨍ b\delta(b)|\mathcal{D}|^{-1} = 0, && ⨍ b^*\delta(b^*)|\mathcal{D}|^{-1} = 0,\\
&⨍ b\delta(b^*)|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-2}{q^2-1}\,, && ⨍ b^*\delta(b)|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-2}{q^2-1}\,.
\end{aligned}$$

En particulier, $N\phi_1$ ne s'annule pas sur les 1-formes puisque $\int_{N\phi_1} ada^* = N\phi_1(a, a^*) = -1$.

Soit U le générateur canonique du $K_1(\mathcal{A})$-groupe, $U = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{smallmatrix}\right)$ agissant sur $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^2$. Alors pour $A_U := \sum_{k,l=1}^{2} \pi(U_{kl})\, d\pi({U^*}_{kl})$, en utilisant la remarque précédente, $\int_{\phi_1} A_U = -2$ [138, page 391]. Avec $P := \frac{1}{2}(1 + F)$,

$$\psi_1(U, U^*) := 2\sum_{k,l} ⨍ U_{kl}\delta(U^*_{kl})P|\mathcal{D}|^{-1} - ⨍ U_{kl}\delta^2(U^*_{kl})P|\mathcal{D}|^{-2} + \tfrac{2}{3}⨍ U_{kl}\delta^3(U^*_{kl})P|\mathcal{D}|^{-3}$$

satisfait $\psi_1(U, U^*) = 2\sum_{k,l} ⨍ U_{kl}\delta(U^*_{kl})P|\mathcal{D}|^{-1} = \int_{\phi_1} A_U$.

4.4 Opérateur de réalité action spectrale sur $SU_q(2)$

4.4.1 Action spectrale en dimension 3 avec $[F, \mathcal{A}] \in OP^{-\infty}$

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral réel de dimension 3. Supposons que $[F, \mathcal{A}] \in OP^{-\infty}$, où $F := \mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-1}$ (on suppose $\mathcal{D}$ inversible). Soit $\mathbb{A}$ une 1-forme auto-adjointe, $\mathbb{A}$ est donc de la forme $\mathbb{A} = \sum_i a_i db_i$ où $a_i, b_i \in \mathcal{A}$.

Ainsi, $\mathbb{A} \simeq AF \mod OP^{-\infty}$ où $A := \sum_i a_i \delta(b_i)$ est la δ-1-forme associée à $\mathbb{A}$. Notons que A et F commutent modulo $OP^{-\infty}$.

On définit :

$$\begin{aligned} &D_{\mathbb{A}} := \mathcal{D}_{\mathbb{A}} + P_{\mathbb{A}}, \quad P_{\mathbb{A}} \text{ la projection sur } \operatorname{Ker} \mathcal{D}_{\mathbb{A}}, \\ &\mathcal{D}_{\mathbb{A}} := \mathcal{D} + \widetilde{\mathbb{A}}, \quad \widetilde{\mathbb{A}} := \mathbb{A} + J\mathbb{A}J^{-1}. \end{aligned}$$

Théorème 4.4.1. *Les coefficients de l'action spectrale complète (avec opérateur de réalité) sur tout triplet spectral réel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ de dimension 3 tel que $[F, \mathcal{A}] \in OP^{-\infty}$ sont :*

(i) $$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-3} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-3}.$$

(ii) $$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-2} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-2} - 4⨍ A|\mathcal{D}|^{-3}.$$

(iii) $$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-1} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-1} - 2⨍ A|\mathcal{D}|^{-2} + 2⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3} + 2⨍ AJAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3}.$$

(iv) $$\begin{aligned} \zeta_{D_{\mathbb{A}}}(0) = \zeta_D(0) - 2⨍ A|\mathcal{D}|^{-1} + ⨍ A(A + JAJ^{-1})|\mathcal{D}|^{-2} + ⨍ \delta(A)(A + JAJ^{-1})|\mathcal{D}|^{-3} \\ - \tfrac{2}{3}⨍ A^3|\mathcal{D}|^{-3} - 2⨍ A^2JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3}. \end{aligned}$$

Démonstration. (i) On applique la Proposition 1.3.9.

(ii) D'après le Lemme 1.3.10, nous avons $⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-2} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-2} - ⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{\mathbb{A}} + \widetilde{\mathbb{A}}^2)|\mathcal{D}|^{-4}$. D'après la propriété de trace de l'intégrale non commutative et le fait que $\widetilde{\mathbb{A}}^2|\mathcal{D}|^{-4}$ est à trace, on a $⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-2} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-2} - 2⨍ \widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-4} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-2} - 4⨍ \mathbb{A}\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-4}$. Puisque $\mathbb{A}\mathcal{D} \sim A|\mathcal{D}| \mod OP^{-\infty}$, on obtient le résultat.

(iii) D'après le Lemme 1.3.10 (ii),

$$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-1} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-1} - \tfrac{1}{2}⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{\mathbb{A}} + \widetilde{\mathbb{A}}^2)|\mathcal{D}|^{-3} + \tfrac{3}{8}⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{\mathbb{A}} + \widetilde{\mathbb{A}}^2)^2|\mathcal{D}|^{-5}.$$

En suivant les arguments du (ii), on obtient

$$\begin{aligned} ⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{\mathbb{A}} + \widetilde{\mathbb{A}}^2)|\mathcal{D}|^{-3} &= 4⨍ A|\mathcal{D}|^{-2} + 2⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3} + 2⨍ AJAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3}, \\ ⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D} + \mathcal{D}\widetilde{\mathbb{A}} + \widetilde{\mathbb{A}}^2)^2|\mathcal{D}|^{-5} &= 8⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3} + 8⨍ AJAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3}, \end{aligned}$$

et le résultat suit.

(iv) D'après (1.11), $\zeta_{D_{\mathbb{A}}}(0) = \sum_{j=1}^{3} \frac{(-1)^j}{j} ⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D}^{-1})^j$.

De plus, $⨍ \widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D}^{-1} = 2⨍ A|\mathcal{D}|^{-1}$ et $⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D}^{-1})^2 = 2⨍(A|\mathcal{D}|^{-1})^2 + 2⨍ A|\mathcal{D}|^{-1}JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-1}$. Puisque $\delta(A) \in OP^0$, on peut vérifier que $⨍(A|\mathcal{D}|^{-1})^2 = ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-2} + ⨍ \delta(A)A|\mathcal{D}|^{-3}$ et, avec le même argument, $⨍ A|\mathcal{D}|^{-1}JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-1} = ⨍ AJAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-2} + ⨍ \delta(A)JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3}$. Ainsi,

$$⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D}^{-1})^2 = 2⨍ A(A + JAJ^{-1})|\mathcal{D}|^{-2} + 2⨍ \delta(A)(A + JAJ^{-1})|\mathcal{D}|^{-3}. \tag{4.29}$$

Le troisième terme à calculer est

$$⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D}^{-1})^3 = 2⨍(A|\mathcal{D}|^{-1})^3 + 4⨍(A|\mathcal{D}|^{-1})^2JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-1} + 2⨍ A|\mathcal{D}|^{-1}JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-1}A|\mathcal{D}|^{-1}.$$

Tout opérateur dans OP^{-4} étant à trace,

$$⨍(\widetilde{\mathbb{A}}\mathcal{D}^{-1})^3 = 2⨍ A^3|\mathcal{D}|^{-3} + 4⨍ A^2JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3} + 2⨍ AJAJ^{-1}A|\mathcal{D}|^{-3}. \tag{4.30}$$

Puisque $⨍ AJAJ^{-1}A|\mathcal{D}|^{-3} = ⨍ A^2JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3}$ d'après la propriété de trace et le fait que $\delta(A) \in OP^0$, le résultat est une conséquence de (4.29) et (4.30). □

Corollaire 4.4.2. *Pour l'action spectrale de $\mathbb{A}$ sans l'opérateur de réalité (i.e. $\mathcal{D}_{\mathbb{A}} = \mathcal{D} + \mathbb{A}$),*

$$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-2} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-2} - 2⨍ A|\mathcal{D}|^{-3},$$
$$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-1} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-1} - ⨍ A|\mathcal{D}|^{-2} + ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3},$$
$$\zeta_{D_{\mathbb{A}}}(0) = \zeta_{\mathcal{D}}(0) - ⨍ A|\mathcal{D}|^{-1} + \tfrac{1}{2}⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-2} + \tfrac{1}{2}⨍ \delta(A)A|\mathcal{D}|^{-3} - \tfrac{1}{3}⨍ A^3|\mathcal{D}|^{-3}.$$

4.4.2 Action spectrale sur $SU_q(2)$: résultat principal

Sur $SU_q(2)$, puisque F commute avec $a_\pm$ et $b_\pm$, le Théorème 4.4.1 peut être utilisé pour le calcul de l'action spectrale.

Voici le résultat principal de cette section :

Théorème 4.4.3. *Dans l'action spectrale complète* (1.6) *(avec opérateur de réalité) de $SU_q(2)$ pour une 1-forme $\mathbb{A}$ et A sa δ-1-forme associée, les coefficients sont :*

$$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-3} = 2\,,$$
$$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-2} = -4⨍ A|\mathcal{D}|^{-3},$$
$$⨍ |D_{\mathbb{A}}|^{-1} = -\tfrac{1}{2} + 2\big(⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3} - ⨍ A|\mathcal{D}|^{-2}\big) + \big|⨍ A|\mathcal{D}|^{-3}\big|^2,$$
$$\zeta_{D_{\mathbb{A}}}(0) = -2⨍ A|\mathcal{D}|^{-1} + ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-2} - \tfrac{2}{3}⨍ A^3|\mathcal{D}|^{-3}$$
$$+ \overline{⨍ A|\mathcal{D}|^{-3}}\big(\tfrac{1}{2}⨍ A|\mathcal{D}|^{-2} - ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3}\big) + \tfrac{1}{2}⨍ A|\mathcal{D}|^{-3}\overline{⨍ A|\mathcal{D}|^{-2}}\,.$$

Afin de prouver ce théorème, nous allons utiliser une décomposition des 1-formes dans la base de Poincaré–Birkhoff–Witt de $\mathcal{A}$ avec une extension des représentations vues précédemment aux opérateurs du type $TJT'J^{-1}$ où T et T' sont dans X.

4.4.3 Composantes équilibrées et base de Poincaré–Birkhoff–Witt de $\mathcal{A}$

Notre objectif est de calculer les intégrales en terme de A et de montrer quelles sont les fonctions de symétries sur A qui apparaissent naturellement dans ces calculs.

On introduit donc ces fonctions :

Soit $\mathbb{A} = \sum_i \pi(x^i)d\pi(y^i)$ sur $SU_q(2)$ une 1-forme et A la δ-1-forme associée. Les x^i et y^i sont dans $\mathcal{A}$ et tels que (de façon unique) $x^i = \sum_\alpha x^i_\alpha m^\alpha$ et $y^i = \sum_\beta y^i_\beta m^\beta$ où $m^\alpha := a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} b^{*\alpha_3}$ est le monôme canonique de $\mathcal{A}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ basé sur une base de type Poincaré–Birkhoff–Witt de $\mathcal{A}$.

Remarque 4.4.4. *Toute 1-forme $\mathbb{A} = \sum_i \pi(x^i)d\pi(y^i)$ on $SU_q(2)$ est characterisée par une matrice à coefficients complexes $A^\beta_\alpha = \sum_i x^i_\alpha y^i_\beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Cette matrice est telle que*

$$A = A^\beta_\alpha M^\alpha_\beta$$

où $M^\alpha_\beta := \pi(m^\alpha)\delta\big(\pi(m^\beta)\big)$.

Dans ce qui suit, nous notons

$$\bar{A} := \bar{A}^\beta_\alpha M^\alpha_\beta$$

donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $⨍ \bar{A}|\mathcal{D}|^{-p} = \overline{⨍ A|\mathcal{D}|^{-p}}$.

Cette présentation des 1-formes n'est pas unique modulo $OP^{-\infty}$ puisque, comme nous le verrons, $F = \sum_i x_i dy_i$ où $x_i, y_i \in \mathcal{A}$, et donc pour tout générateur z, $[F, z] = \sum_i x_i d(y_i z) - x_i y_i dz - z x_i dy_i = 0 \mod OP^{-\infty}$. Nous ne savons pas cependant si elle est unique lorsque la partie $OP^{-\infty}$ est prise en compte.

Les δ-1-formes M^α_β sont dites *canoniques*. Tout produit de n δ-1-formes canoniques où $n \in \mathbb{N}^*$, est appelé *δ^n-1-forme canonique*. Ainsi, si A est une δ-1-forme, $A^n = (A^n)^{\bar\beta}_{\bar\alpha} M^{\bar\alpha}_{\bar\beta}$ où $\bar\alpha = (\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(n-1)})$, $\bar\beta = (\beta, \beta', \cdots, \beta^{(n-1)})$ sont dans $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, $(A^n)^{\bar\beta}_{\bar\alpha} := A^\beta_\alpha \cdots A^{\beta^{(n-1)}}_{\alpha^{(n-1)}}$ et $M^{\bar\alpha}_{\bar\beta}$ est la δ^n-1-forme égale à $M^\alpha_\beta \cdots M^{\alpha^{(n-1)}}_{\beta^{(n-1)}}$.

Définition 4.4.5. Une δ^n-1-forme est a-équilibrée si elle est de la forme

$$a^{\alpha_1}\delta(a^{\beta_1}) \cdots a^{\alpha_1^{(n-1)}}\delta(a^{\beta_1^{(n-1)}})$$

où $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^{(i)} + \beta_1^{(i)} = 0$.

Pour toute δ-1-forme A, la partie a-équilibrée de A^n est notée $B_a(A^n)^{\bar\beta}_{\bar\alpha}$.

Remarquons que

$$B_a(A)^{\bar\beta}_{\bar\alpha} = A^{\beta_1 00}_{-\beta_1 00}\, \delta_{\alpha_1+\beta_1,0}\, \delta_{\alpha_2+\alpha_3+\beta_2+\beta_3,0}.$$

Définition 4.4.6. Une δ^n-1-forme canonique est équilibrée si elle est de la forme

$$m^\alpha\delta(m^\beta) \cdots m^{\alpha^{(n-1)}}\delta(m^{\beta^{(n-1)}})$$

où $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_1^{(i)} + \beta_1^{(i)} = 0$ et $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_2^{(i)} + \beta_2^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_3^{(i)} + \beta_3^{(i)}$.

Pour toute δ-1-forme A, les composantes équilibrées de A^n sont notées $B(A^n)^{\bar\beta}_{\bar\alpha}$.

Remarquons que

$$B(A)_{\bar\alpha}^{\bar\beta} = A_{-\beta_1\alpha_2\alpha_3}^{\beta_1\beta_2\beta_3}\,\delta_{\alpha_1+\beta_1,0}\,\delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3}.$$

Comme nous le verrons, une contribution au coefficient d'ordre k dans l'action spectrale n'est apportée que par une 1-forme $\mathbb{A}$ telle que A^k soit équilibrée (et même a-équilibrée dans le cas $k=1$).

Remarquons aussi que si A est équilibrée, alors A^k pour $k \geq 1$ est équilibrée, alors que la réciproque est fausse.

4.4.4 L'opérateur de réalité J sur $SU_q(2)$

Posons pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$q_n := \sqrt{1-q^{2n}}, \qquad q_{-n} := 0 \text{ si } n > 0,$$
$$q_{n,p}^{\uparrow} := q_{n+1}\cdots q_{n+p}\,, \qquad q_{n,p}^{\downarrow} := q_n \cdots q_{n-(p-1)}\,,$$

avec la convention $q_{n,0}^{\uparrow} = q_{n,0}^{\downarrow} := 1$. Ainsi,

$$\pi_\pm(a^p)\,\varepsilon_n = q_{n,p}^{\uparrow}\,\varepsilon_{n+p}\,, \qquad \pi_\pm(a^{*p})\,\varepsilon_n = q_{n,p}^{\downarrow}\,\varepsilon_{n-p}\,,$$
$$\pi_\pm(b^p)\,\varepsilon_n = (\pm q^n)^p\,\varepsilon_n\,, \qquad \pi_\pm(b^{*p})\,\varepsilon_n = (\pm q^n)^p\,\varepsilon_n\,,$$

où $\varepsilon_k := 0$ si $k < 0$.

Le signe de $x \in \mathbb{R}$ est noté η_x. Par convention, $a_j := a$, $a_{\pm,j} := a_\pm$ si $j \geq 0$ et $a_j := a^*$, $a_{\pm,j} := a_\pm^*$ si $j < 0$. Avec les conventions

$$q_{n,p}^{\uparrow_{\alpha_1}} := q_{n,p}^{\uparrow} \text{ si } \alpha_1 > 0, \quad q_{n,p}^{\uparrow_{\alpha_1}} := q_{n,p}^{\downarrow} \text{ si } \alpha_1 < 0, \text{ et } q_{n,p}^{\uparrow_0} := 1,$$

nous avons pour tout $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ et $p \leq \alpha_1$, $\pi_\pm(a_{\alpha_1}^p)\,\varepsilon_n = q_{n,p}^{\uparrow_{\alpha_1}}\,\varepsilon_{n+\eta_{\alpha_1}p}$.

L'opérateur de réalité J est

$$J\,v_{m,l}^{j\uparrow} = i^{2(m+l)-1} v_{2j-m,2j+1-l}^{j\uparrow}\,, \qquad J\,v_{m,l}^{j\downarrow} = i^{-2(m+l)+1} v_{2j-m,2j-1-l}^{j\downarrow}\,,$$

et les opérateurs

$$\widehat{a}_\pm := J a_\pm J^{-1}, \quad \widehat{b}_\pm := J b_\pm J^{-1}$$

satisfont

$$\widehat{a}_+\,v_{m,l}^j := -q_{2j+1-m}\begin{pmatrix} q_{2j+2-l} & 0 \\ 0 & q_{2j-l}\end{pmatrix} v_{m,l}^{j^+}\,, \qquad \widehat{a}_-\,v_{m,l}^j := -q^{2j-m}\begin{pmatrix} q^{2j+2-l} & 0 \\ 0 & q^{2j-l}\end{pmatrix} v_{m-1,l-1}^{j^-},$$
$$\widehat{b}_+\,v_{m,l}^j := q_{2j+1-m}\begin{pmatrix} q^{2j+1-l} & 0 \\ 0 & q^{2j-1-l}\end{pmatrix} v_{m,l+1}^{j^+}\,, \qquad \widehat{b}_-\,v_{m,l}^j := -q^{2j-m}\begin{pmatrix} q_{2j+1-l} & 0 \\ 0 & q_{2j-1-l}\end{pmatrix} v_{m-1,l}^{j^-}\,.$$

Ainsi, les opérateurs conjugués se comportent différemment sur les parties haute et basse de l'espace de Hilbert. La différence vient du fait que l'indice l n'est pas traité de la même manière par J sur les parties haute et basse.

On note $\widehat{X}$ l'algèbre générée par $\{\,\widehat{a}_\pm, \widehat{b}_\pm\,\}$, $\widetilde{X}$ l'algèbre générée par $\{\,a_\pm, b_\pm, \widehat{a}_\pm, \widehat{b}_\pm\,\}$ et on note $\mathcal{H}' := \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$. On construit deux $*$-représentations $\widehat{\pi}_\pm$ de $\mathcal{A}$:

La représentation $\widehat{\pi}_+$ donne des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}'$ alors que $\widehat{\pi}_-$ représente $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2)$.

La représentation $\widehat{\pi}_+$ est définie sur les générateurs

$$\widehat{\pi}_+(a)\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j} := q_{2j+1-m}\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j+1}, \qquad \widehat{\pi}_+(b)\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j} := -q^{2j-m}\,\varepsilon_{m+1} \otimes \varepsilon_{2j+1}$$

alors que $\widehat{\pi}_-$ est définie par :

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}_-(a)\,\varepsilon_l \otimes \varepsilon_{2j} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow} &:= -q_{2j+1\pm1-l}\,\varepsilon_l \otimes \varepsilon_{2j+1} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow}\,,\\ \widehat{\pi}_-(b)\,\varepsilon_l \otimes \varepsilon_{2j} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow} &:= -q^{2j\pm1-l}\,\varepsilon_{l+1} \otimes \varepsilon_{2j+1} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow}\,,\end{aligned}$$

où $\varepsilon_{\uparrow\downarrow}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et le $+$ dans $\pm$ correspond à $\uparrow$ dans $\uparrow\downarrow$.

On pose x_β égal à x si le signe de β est positif et égal x^* dans le cas négatif. On a

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}_+(a_\beta)^p\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j} &= q^{\uparrow_\beta}_{2j-m,p}\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j+\eta_\beta p}\,,\\ \widehat{\pi}_-(a_\beta)^p\,\varepsilon_l \otimes \varepsilon_{2j} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow} &= (-1)^p\,q^{\uparrow_\beta}_{2j\pm1-l,p}\,\varepsilon_l \otimes \varepsilon_{2j+\eta_\beta p} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow}\,,\\ \widehat{\pi}_+(b_\beta)^p\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j} &= (-1)^p\,q^{(2j-m)p}\,\varepsilon_{m+\eta_\beta p} \otimes \varepsilon_{2j+\eta_\beta p}\,,\\ \widehat{\pi}_-(b_\beta)^p\,\varepsilon_l \otimes \varepsilon_{2j} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow} &= (-1)^p\,q^{(2j\pm1-l)p}\,\varepsilon_{l+\eta_\beta p} \otimes \varepsilon_{2j+\eta_\beta p} \otimes \varepsilon_{\uparrow\downarrow}\,.\end{aligned}$$

Les représentations $\widehat{\pi}_\pm$ contiennent l'information de décalage, contrairement aux représentations $\pi_\pm$. De plus, $\widehat{\pi}_\pm(b) \neq \widehat{\pi}_\pm(b^*)$ alors que $\pi_\pm(b) = \pi_\pm(b^*)$.

Les opérateurs $\widehat{a}_\pm, \widehat{b}_\pm$ sont représentés sur $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}\widehat{a}_+ &\longleftrightarrow \widehat{\pi}_+(a) \otimes \widehat{\pi}_-(a), & \widehat{a}_- &\longleftrightarrow -q\,\widehat{\pi}_+(b^*) \otimes \widehat{\pi}_-(b^*),\\ \widehat{b}_+ &\longleftrightarrow -\widehat{\pi}_+(a) \otimes \widehat{\pi}_-(b), & \widehat{b}_- &\longleftrightarrow -\widehat{\pi}_+(b^*) \otimes \widehat{\pi}_-(a^*).\end{aligned} \tag{4.31}$$

On définit l'extension suivante sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ de π_+ et sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2)$ de π_- par

$$\begin{aligned}&\pi'_+(a) := \pi_+(a) \otimes V, \quad \pi'_+(b) := \pi_+(b) \otimes V \quad (\text{V est le shift de } \ell^2(\mathbb{Z})),\\ &\pi'_-(a) := \pi_-(a) \otimes V \otimes 1_2, \quad \pi'_-(b) := \pi_-(b) \otimes V \otimes 1_2.\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi définir un morphisme canonique d'algèbre $\widetilde{\rho}$ de $\widetilde{X}$ dans l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2$. Ce morphisme est défini sur les générateurs $\{\,\widehat{a}_\pm, \widehat{b}_\pm\,\}$ de $\widetilde{X}$ par la correspondance précédente et sur $\{\,a_\pm, b_\pm\,\}$ par (voir (4.26)) :

$$\begin{aligned}a_+ &\longleftrightarrow \pi'_+(a) \otimes \pi'_-(a), & a_- &\longleftrightarrow -q\,\pi'_+(b^*) \otimes \pi'_-(b^*),\\ b_+ &\longleftrightarrow -\pi'_+(a) \otimes \pi'_-(b), & b_- &\longleftrightarrow -\pi'_+(b^*) \otimes \pi'_-(a^*).\end{aligned} \tag{4.32}$$

On note S la surjection canonique de $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2$ sur $\mathcal{H}$. Cette surjection est associée à la restriction sur les paramètres m, j, l, j'. En particulier, l'indice j' associé au deuxième $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2$ est posé égal à j. Tout vecteur dans $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2$ ne satisfaisant pas ces restrictions est envoyé vers 0 dans $\mathcal{H}$.

Soit I l'injection canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}' \otimes \mathbb{C}^2$ (l'indice j est doublé). Ainsi, $S\widetilde{\rho}(\cdot)I$ est l'identité sur $\widetilde{X}$.

Dans le calcul de résidus de $\zeta^T_{\mathcal{D}}$, nous pouvons ainsi remplacer l'opérateur T par $S\widetilde{\rho}(T)I$.

Nous étendons τ_0 sur $\pi'_\pm(\mathcal{A})\widehat{\pi}_\pm(\mathcal{A})$: pour $x, y \in \mathcal{A}$, on pose

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_N\left(\pi'_+(x)\widehat{\pi}_+(y)\right) &:= \sum_{m=0}^{N} \langle \varepsilon_m \otimes \varepsilon_N \,,\, \pi'_+(x)\widehat{\pi}_+(y)\, \varepsilon_m \otimes \varepsilon_N \rangle \,, \\
\mathrm{Tr}_N^{\uparrow}\left(\pi'_-(x)\widehat{\pi}_-(y)\right) &:= \sum_{l=0}^{N} \langle \varepsilon_l \otimes \varepsilon_{N-1} \otimes \varepsilon_\uparrow \,,\, \pi'_-(x)\widehat{\pi}_-(y)\, \varepsilon_l \otimes \varepsilon_{N-1} \otimes \varepsilon_\uparrow \rangle \,, \\
\mathrm{Tr}_N^{\downarrow}\left(\pi'_-(x)\widehat{\pi}_-(y)\right) &:= \sum_{l=0}^{N} \langle \varepsilon_l \otimes \varepsilon_{N+1} \otimes \varepsilon_\downarrow \,,\, \pi'_-(x)\widehat{\pi}_-(y)\, \varepsilon_l \otimes \varepsilon_{N+1} \otimes \varepsilon_\downarrow \rangle \,.
\end{aligned}$$

Un calcul sur les monômes de $\mathcal{A}$ montre que $\mathrm{Tr}_N^{\downarrow}\left(\pi'_-(x)\widehat{\pi}_-(y)\right) = \mathrm{Tr}_N^{\uparrow}\left(\pi'_-(x)\widehat{\pi}_-(y)\right)$. On notera $\mathrm{Tr}_N\left(\pi'_-(x)\widehat{\pi}_-(y)\right)$ cette fonctionnelle.

Lemme 4.4.7. *Soient $x, y \in \mathcal{A}$. Alors,*
(i) $\tau_0\big(\pi'_\pm(x)\widehat{\pi}_\pm(y)\big) := \lim_{N\to\infty} U_N$ existe où

$$U_N := \mathrm{Tr}_N\left(\pi'_\pm(x)\widehat{\pi}_\pm(y)\right) - (N+1)\tau_1\big(\pi_\pm(x)\big)\,\tau_1\big(\pi_\pm(y)\big).$$

(ii) $U_N = \tau_0\big(\pi'_\pm(x)\widehat{\pi}_\pm(y)\big) + \mathcal{O}(N^{-k})$ pour tout $k > 0$.

Démonstration. (i) On peut supposer que x et y sont des monômes, puisque le résultat suivra par linéarité. On donnera une preuve dans le cas de la représentation π_+, le cas π_- étant similaire.

Nous avons $\widehat{\pi}_+(y) = (\widehat{\pi}_+ a_{\beta_1})^{|\beta_1|}\,(\widehat{\pi}_+ b)^{\beta_2}\,(\widehat{\pi}_+ b^*)^{\beta_3}$. Un calcul donne

$$\widehat{\pi}_+(y)\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j} = (-1)^{\beta_2+\beta_3}\, q^{(2j-m)(\beta_2+\beta_3)}\, q^{\uparrow_{\beta_1}}_{2j-m,|\beta_1|}\, \varepsilon_{m-\beta_3+\beta_2} \otimes \varepsilon_{2j-\beta_3+\beta_2+\beta_1}$$

et avec la notation $t_{2j,m} := \langle \varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j} \,,\, \pi'_\pm(x)\widehat{\pi}_\pm(y)\,\varepsilon_m \otimes \varepsilon_{2j}\rangle$ et $T_{2j} := \sum_{m=0}^{2j} t_{2j,m}$, on obtient

$$\begin{aligned}
t_{2j,m} &= (-1)^{\beta_2+\beta_3}\, q^{(2j-m)(\beta_2+\beta_3)}\, q^{\uparrow_{\beta_1}}_{2j-m,|\beta_1|}\, q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{m-\beta_3+\beta_2,|\alpha_1|}\, q^{(m+\beta_2-\beta_3)(\alpha_2+\alpha_3)}\, \delta_{\alpha_1+\beta_2-\beta_3,0} \\
&\qquad \times \delta_{-\alpha_3+\alpha_2+\beta_1,0} \\
&= (-1)^{\alpha_1}\, q^{(2j-m)(\beta_2+\beta_3)+(m-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_3)}\, q^{\uparrow_{\beta_1}}_{2j-m,|\beta_1|}\, q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{m-\alpha_1,|\alpha_1|}\, \delta_{\alpha_1+\beta_2-\beta_3,0}\, \delta_{\alpha_2-\alpha_3+\beta_1,0} \\
&=: f_{\alpha,\beta}\, q^{2j\lambda}\, t'_{2j,m} =: f_{\alpha,\beta}\, q^{2j\kappa}\, t''_{2j,2j-m}
\end{aligned}$$

où

$$t'_{2j,m} := q^{m(\kappa-\lambda)}\, q^{\uparrow_{\beta_1}}_{2j-m,|\beta_1|}\, q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{m-\alpha_1,|\alpha_1|}\,, \tag{4.33}$$

$$t''_{2j,m} := q^{m(\lambda-\kappa)}\, q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|}\, q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{2j-m-\alpha_1,|\alpha_1|}\,, \tag{4.34}$$

avec $\lambda := \beta_2 + \beta_3 \geq 0$ et $\kappa := \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0$. Nous allons maintenant montrer que si $\lambda \neq \kappa$, alors (T_{2j}) est une suite convergente. Supposons $\kappa > \lambda$. On pose $U'_{2j} := \sum_{m=0}^{2j} t'_{2j,m}$. Puisque les termes $t'_{2j,m}$ sont positifs et $t'_{2j+1,m} \geq t'_{2j,m}$ pour tout j, m, U'_{2j} est une suite réelle croissante. L'estimation

$$U'_{2j} \leq \sum_{m=0}^{2j} q^{m(\kappa-\lambda)} \leq \tfrac{1}{1-q^{\kappa-\lambda}} < \infty$$

prouve alors que U'_{2j} est une suite convergente. Avec $T_{2j} = f_{\alpha,\beta}\, q^{2j\lambda}\, U'_{2j}$, nous obtenons le résultat.

Supposons maintenant que $\lambda > \kappa$. On pose $U''_{2j} := \sum_{m=0}^{2j} t''_{2j,m}$. Puisque les termes $t''_{2j,m}$ sont positifs et $t''_{2j+1,m} \geq t''_{2j,m}$ pour tout j, m, U''_{2j} est une suite réelle croissante. L'estimation

$$U''_{2j} \leq \sum_{m=0}^{2j} q^{m(\lambda-\kappa)} \leq \tfrac{1}{1-q^{\lambda-\kappa}} < \infty$$

prouve alors que U''_{2j} est une suite convergente. Avec $T_{2j} = f_{\alpha,\beta}\, q^{2j\kappa}\, U''_{2j}$, nous avons encore une fois le résultat. De plus, si λ et κ sont non nuls, la limite de (T_{2j}) est nulle et plus précisément,

$$T_{2j} = \mathcal{O}(q^{2j\lambda}) \text{ si } \kappa > \lambda > 0, \tag{4.35}$$

$$T_{2j} = \mathcal{O}(q^{2j\kappa}) \text{ si } \lambda > \kappa > 0. \tag{4.36}$$

Supposons maintenant que $\lambda = \kappa \neq 0$. Dans ce cas, (T_{2j}) converge rapidement vers zero. En effet, fixons $q < \varepsilon < 1$. Nous avons $\varepsilon^{-2j\lambda}\, T_{2j} = \sum_{m=0}^{2j} c_m d_{2j-m} = c * d(2j)$ où on a noté $c_m := f_{\alpha,\beta}\, (q/\varepsilon)^{\lambda m}\, q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{m-\alpha_1,|\alpha_1|}$ et $d_m := (q/\varepsilon)^{\lambda m} q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|}$. Puisque $\sum_m c_m$ et $\sum_m d_m$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy $\sum_{2j} \varepsilon^{-2j\lambda}\, T_{2j}$ converge. En particulier, nous avons $\lim_{j\to\infty} \varepsilon^{-2j\lambda}\, T_{2j} = 0$, et

$$T_{2j} = \mathcal{O}(\varepsilon^{2j\lambda}). \tag{4.37}$$

Finalement, T_{2j} a une limite finie dans tous les cas sauf éventuellement lorsque $\lambda = \kappa = 0$, ce qui est le cas lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Dans ce cas, $t_{2j,m} = 1$.

Un calcul direct implique $\tau_1\big(\pi_\pm(x)\big)\, \tau_1\big(\pi_\pm(y)\big) = \delta_{\alpha_1,0}\, \delta_{\beta_1,0}\, \delta_{\alpha_2,0}\, \delta_{\beta_2,0}\, \delta_{\alpha_3,0}\, \delta_{\beta_3,0}$. Ainsi,

$$U_{2j} = T_{2j} - (2j+1)\delta_{\alpha_1,0}\, \delta_{\beta_1,0}\, \delta_{\alpha_2,0}\, \delta_{\beta_2,0}\, \delta_{\alpha_3,0}\, \delta_{\beta_3,0}$$

a toujours une limite finie quand $j \to \infty$.

(ii) Le résultat est clair si $\lambda = \kappa = 0$ (dans ce cas $U_N = \tau_0 = 0$). Supposons que λ ou κ soient non nuls. Dans ce cas $U_{2j} = T_{2j}$. D'après (4.36), (4.35) et (4.37), nous voyons que si $\lambda > \kappa > 0$ ou $\kappa > \lambda > 0$ ou $\kappa = \lambda$, (T_{2j}) converge vers 0 avec un taux dans $\mathcal{O}(\varepsilon^{2j\alpha})$ où $\alpha > 0$ et $q \leq \varepsilon < 1$. Ainsi, il reste à vérifier les cas $(\kappa > 0, \lambda = 0)$ et $(\kappa = 0, \lambda > 0)$. Dans le premier cas, on obtient à partir de (4.33), $U_{2j} = f_{\alpha,\beta} \sum_{m=0}^{2j} q^{m\kappa} q^{\uparrow_{\beta_1}}_{2j-m,|\beta_1|}$. Si $\beta_1 = 0$, c'est fini.

Supposons $\beta_1 > 0$. Nous avons $q^{\uparrow_{\beta_1}}_{2j-m,|\beta_1|} = \sum_{p=0}^{\infty} l_p\, q^{r_p}\, q^{2|p|_1(2j-m)}$ où $p = (p_1, \cdots, p_{\beta_1})$ et $l_p = (-1)^{|p|_1} \binom{\frac{1}{2}}{p}$, $r_p := 2p_1 + \cdots + 2\beta_1 p_{\beta_1}$. Ainsi, en coupant la somme en deux, on obtient, en notant $L_{2j} := f_{\alpha,\beta} \sum_{m=0}^{2j} q^{m\kappa}$,

$$U_{2j} - L_{2j} = f_{\alpha,\beta} \sum_{|p|_1 > \kappa/2} l_p\, q^{r_p}\, \tfrac{q^{4|p|_1 j} - q^{(2j+1)\kappa - 2|p|_1}}{1-q^{\kappa-2|p|_1}} + f_{\alpha,\beta} \sum_{0 \neq |p|_1 \leq \kappa/2} l_p\, q^{r_p}\, q^{4|p|_1 j} \sum_{m=0}^{2j} q^{m(\kappa-2|p|_1)}.$$

Puisque $\sum_{0\neq|p|_1\leq\kappa/2} l_p\, q^{r_p}\, q^{4|p|_1 j} \sum_{m=0}^{2j} q^{m(\kappa-2|p|_1)}$ est dans $\mathcal{O}_{j\to\infty}(jq^{4j})$, nous avons, modulo une suite rapidement décroissante,

$$U_{2j} - L_{2j} \sim f_{\alpha,\beta} \sum_{|p|_1 > \kappa/2} l_p\, q^{r_p}\, \tfrac{q^{4|p|_1 j} - q^{(2j+1)\kappa - 2|p|_1}}{1-q^{\kappa-2|p|_1}} =: f_{\alpha,\beta} q^{2\kappa j} V_{2j}$$

avec

$$V_{2j} = \sum_{|p|_1>\kappa/2} l_p\, q^{r_p}\, \tfrac{1-q^{(2|p|_1-\kappa)(2j+1)}}{1-q^{2|p|_1-\kappa}} = \sum_{|p|_1>\kappa/2} \sum_{m=0}^{2j} l_p\, q^{r_p}\, q^{(2|p|_1-\kappa)m}.$$

La famille $v_{m,p} := (l_p\, q^{r_p}\, q^{(2|p|_1-\kappa)m})_{(p,m)\in I}$, où $I = \{\, (p,m) \in \mathbb{N}^{\beta_1} \times \mathbb{N} \;:\; |p|_1 > \kappa/2 \,\}$ est (absolument) sommable. En effet $|v_{m,p}| \leq |l_p| q^{r_p}\, q^m$ donc $|v_{m,p}|$ est sommable en tant que produit de deux fammilles sommables. Par conséquent, $\lim_{j\to\infty} V_{2j}$ existe et est finie, ce qui prouve que $(q^{2\kappa j} V_{2j})$, et donc $(U_{2j} - L_{2j})$ converge rapidement vers 0.

Supposons maintenant que $\beta_1 < 0$. Dans ce cas,

$$q^{\uparrow_{\beta_1}}_{2j-m,|\beta_1|} = q^{\downarrow}_{2j-m,|\beta_1|} = q^{\uparrow}_{2j-(m+|\beta_1|),|\beta_1|}$$

et d'après (4.33), on obtient

$$U_{2j} = f_{\alpha,\beta} \sum_{m=0}^{2j} q^{m\kappa} q^{\uparrow}_{2j-(m+|\beta_1|),|\beta_1|} = f_{\alpha,\beta}\, q^{-|\beta_1|\kappa} \sum_{m=|\beta_1|}^{2j+|\beta_1|} q^{m\kappa} q^{\uparrow}_{2j-m,|\beta_1|},$$

donc les mêmes arguments s'appliquent, la sommation sur m étant simplement décalée de $|\beta_1|$.

La même preuve peut s'appliquer dans les cas $(\kappa = 0, \lambda > 0)$. Cette fois, on utilise (4.34) au lieu de (4.33) et le remplacement de κ par λ et de β_1 par α_1. □

Remarque 4.4.8. *Contrairement à l'ancienne fonctionnelle τ_0, la nouvelle fonctionnelle contient l'information de décalage. En particulier, elle filtre les parties de degré non nul.*

Si $T \in X\widehat{X}$, $\widetilde{\rho}(T) \in \pi_+(\mathcal{A})\widehat{\pi}_+(\mathcal{A}) \otimes \pi_-(\mathcal{A})\widehat{\pi}_-(\mathcal{A})$.
On définit τ_1 sur $\pi'_\pm(\mathcal{A})\widehat{\pi}_\pm(\mathcal{A})$:

$$\tau_1\big(\pi'_\pm(x)\widehat{\pi}_\pm(y)\big) := \tau_1\big(\pi_\pm(x)\big)\, \tau_1\big(\pi_\pm(y)\big).$$

Dans la suite, le symbole $\sim_e$ signifie égal modulo une fonction entière.

Théorème 4.4.9. *Soit $T \in X\widehat{X}$. Alors*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \zeta^T_{\mathcal{D}}(s) \sim_e 2(\tau_1\otimes\tau_1)\big(\widetilde{\rho}(T)\big)\,\zeta(s-2) + 2(\tau_0\otimes\tau_1 + \tau_1\otimes\tau_0)\big(\widetilde{\rho}(T)\big)\,\zeta(s-1) \\
&\qquad\qquad + 2(\tau_0\otimes\tau_0 - \tfrac{1}{2}\tau_1\otimes\tau_1)\big(\widetilde{\rho}(T)\big)\,\zeta(s), \\
&(ii) \quad \fint T|\mathcal{D}|^{-3} = 2(\tau_1\otimes\tau_1)\big(\widetilde{\rho}(T)\big), \\
&(iii) \quad \fint T|\mathcal{D}|^{-2} = 2(\tau_0\otimes\tau_1 + \tau_1\otimes\tau_0)\big(\widetilde{\rho}(T)\big), \\
&(iv) \quad \fint T|\mathcal{D}|^{-1} = 2(\tau_0\otimes\tau_0 - \tfrac{1}{2}\tau_1\otimes\tau_1)\big(\widetilde{\rho}(T)\big).
\end{aligned}$$

Démonstration. (i) Comme $T \in X\widehat{X}$, $\widetilde{\rho}(T)$ est une combinaison linéaire de termes du type $\pi'_+(x)\widehat{\pi}_+(y) \otimes \pi'_-(z)\widehat{\pi}_-(t)$, où $x, y, z, t \in \mathcal{A}$. Un tel terme est noté $T_+ \otimes T_-$. Les combinaisons

linéaires sont implicites. Avec la notation $T_{c_1,\cdots,c_p} := \langle \varepsilon_{c_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{c_p}, T\varepsilon_{c_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{c_p} \rangle$,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathcal{D}}^T(s) &= \sum_{2j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2j} \sum_{l=0}^{2j+1} \langle \left(\begin{smallmatrix} v_{m,l}^{j,\uparrow} \\ 0 \end{smallmatrix}\right), S\widetilde{\rho}(T) I \left(\begin{smallmatrix} v_{m,l}^{j,\uparrow} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \, d_{j^+}^{-s} + \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ v_{m,l}^{j,\downarrow} \end{smallmatrix}\right), S\widetilde{\rho}(T) I \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ v_{m,l}^{j,\downarrow} \end{smallmatrix}\right) \rangle \, d_{j}^{-s} \\
&= \sum_{2j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2j} \sum_{l=0}^{2j+1} \widetilde{\rho}(T)_{m,2j,l,2j,\uparrow} \, d_{j^+}^{-s} + \sum_{2j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2j} \sum_{l=0}^{2j-1} \widetilde{\rho}(T)_{m,2j,l,2j,\downarrow} \, d_{j}^{-s} \\
&= \sum_{2j=0}^{\infty} \big(\mathrm{Tr}_{2j}(T_+) \, \mathrm{Tr}_{2j+1}^{\uparrow}(T_-) + \mathrm{Tr}_{2j+1}(T_+) \, \mathrm{Tr}_{2j}^{\downarrow}(T_-) \big) \, d_{j^+}^{-s} \, .
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.4.7 (ii), pour tout $k > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{2j}(T_\pm) &= (2j + \tfrac{3}{2})\tau_1(T_\pm) + \tau_0(T_\pm) - \tfrac{1}{2}\tau_1(T_\pm) + \mathcal{O}\big((2j)^{-k}\big), \\
\mathrm{Tr}_{2j+1}(T_\pm) &= (2j + \tfrac{3}{2})\tau_1(T_\pm) + \tau_0(T_\pm) + \tfrac{1}{2}\tau_1(T_\pm) + \mathcal{O}\big((2j)^{-k}\big) \, .
\end{aligned}$$

Le résultat est alors une conséquence du fait que la différence entre la fonction zêta de Hurwitz $\zeta(s, \frac{3}{2})$ et la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est entière.
(ii, iii, iv) sont des conséquence directes de (i). □

4.4.5 L'algèbre $C^\infty(SU_q(2))$

Dans [31, 138], l'algèbre $C^\infty(SU_q(2)$ est définie à partir de la structure de $C^\infty(D^2_{q^\pm})$ dans la C^*-algèbre générée par $\mathcal{A}$, du morphisme ρ et de l'application λ (la compression qui donne un opérateur sur $\mathcal{H}$ à partir d'un opérateur sur $l^2(\mathbb{N}) \otimes l^2(\mathbb{N}) \otimes l^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^2$). Le point important est qu'avec [31, Lemme 2, p. 69], cette algèbre est stable par calcul holomorphe. En posant $\rho := \widetilde{\rho} \circ c$ et $\lambda(\cdot) := S(\cdot)I$, le même lemme (avec les mêmes notations) peut s'appliquer à notre cadre, avec $c := \pi(x) \mapsto \underline{\pi}(x)$ et

$$\mathcal{C} := C^\infty(D^2_{q^+}) \otimes C^\infty(S^1) \otimes C^\infty(D^2_{q^+}) \otimes C^\infty(S^1) \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

comme algèbre stable par calcul holomorphe contenant l'image de $\widetilde{\rho}$. Ici, nous utilisons des suites de Schwartz afin de définir les structures lisses. Nous obtenons finalement $C^\infty(SU_q(2))$ avec une structure réelle en tant que sous-algèbre stable par calcul holomorphe de la C^*-algèbre générée par $\pi(\mathcal{A}) \cup J\pi(\mathcal{A})J^{-1}$ et contenant $\pi(\mathcal{A}) \cup J\pi(\mathcal{A})J^{-1}$.

Corollaire 4.4.10. *Le spectre de dimension du triplet spectral réel* $\big(C^\infty(SU_q(2)), \mathcal{H}, D\big)$ *est simple et est donné par* $\{1, 2, 3\}$. *Sa KO-dimension est* 3.

Démonstration. Puisque F commute avec $\underline{\pi}(\mathcal{A})$, les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 (sans la structure réelle) sont exactement (modulo $OP^{-\infty}$) les opérateurs dans $\mathcal{B} + \mathcal{B}F$. D'après le Théorème 4.3.4 nous voyons que le spectre de dimension de $SU_q(2)$ sans prendre en compte l'opérateur de réalité est $\{1, 2, 3\}$, autrement dit, les pôles éventuels de $\zeta_{\mathcal{D}}^b : s \mapsto \mathrm{Tr}(bF^\varepsilon|\mathcal{D}|^{-s})$ (avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $b \in \mathcal{B}$) sont dans $\{1, 2, 3\}$. Le Théorème 4.4.9 (i) montre que les pôles éventuels sont toujours dans $\{1, 2, 3\}$ si nous prenons en compte la structure réelle de $SU_q(2)$, c'est-à-dire, lorsque $\mathcal{B}$ est étendue à $\mathcal{B}J\mathcal{B}J^{-1}$. En effet, tout élément de $\mathcal{B}J\mathcal{B}J^{-1}$ est dans $X\widehat{X}$ et il est clair d'après la preuve précédente qu'ajouter F dans la fonction zêta précédente n'ajoute pas de pôle à $\{1, 2, 3\}$.

Les arguments précédents s'étendent de l'algèbre polynomiale $\mathcal{A}(SU_q(2))$ à la pré-C*-algèbre $C^\infty(SU_q(2))$. □

4.4.6 Intégrales non commutatives avec opérateur de réalité et 1-formes sur $SU_q(2)$

Le but de cette section est d'obtenir la suppression de J :

Théorème 4.4.11. *Soient A et B deux δ-1-formes. Alors*

$$
\begin{aligned}
&(i) && \fint AJBJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3} = \tfrac{1}{2}\fint A|\mathcal{D}|^{-3}\overline{\fint B|\mathcal{D}|^{-3}},\\
&(ii) && \fint AJBJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-2} = \tfrac{1}{2}\fint A|\mathcal{D}|^{-2}\overline{\fint B|\mathcal{D}|^{-3}} + \tfrac{1}{2}\fint A|\mathcal{D}|^{-3}\overline{\fint B|\mathcal{D}|^{-2}},\\
&(iii) && \fint A^2JBJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3} = \tfrac{1}{2}\fint A^2|\mathcal{D}|^{-3}\overline{\fint B|\mathcal{D}|^{-3}},\\
&(iv) && \fint \delta(A)A|\mathcal{D}|^{-3} = \fint \delta(A)JAJ^{-1}|\mathcal{D}|^{-3} = 0.
\end{aligned}
$$

Nous rassemblons ici les principales notations qui serons utilisées dans les lemmes techniques qui vont suivre.

Pour toute paire $(k,p) \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}^3$ tel que $k_i \leq |\alpha_i|$, $p_i \leq |\beta_i|$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit

$$
\begin{aligned}
v_{k,p} &:= g(p)\ \tbinom{|\alpha_1|}{k_1}_{q^{2\eta\alpha_1}} \tbinom{\alpha_2}{k_2}\tbinom{\alpha_3}{k_3}\tbinom{|\beta_1|}{p_1}_{q^{2\eta\beta_1}} \tbinom{\beta_2}{p_2}\tbinom{\beta_3}{p_3}\,(-1)^{k_1+p_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_2+\beta_3}\, q^{\sigma_{k,p}},\\
h_{k,p} &:= \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-2(\eta_{\alpha_1}k_1+k_2-k_3)+g(p)\,,\\
g(p) &:= \beta_1+\beta_2-\beta_3-2(\eta_{\beta_1}p_1+p_2-p_3)\,,\\
\sigma_{k,p} &:= k_1+p_1+\sigma^t_{k,p}+\sigma^u_{k,p}\,,\\
\sigma^t_{k,p} &:= k_1\widehat{k}_2-\widehat{k}_3(k_1+k_2)+\eta_{\beta_1}\widehat{p}_1|k|_1+\widehat{p}_2(|k|_1+p_1)-\widehat{p}_3(|k|_1+p_1+p_2)\,,\\
\sigma^u_{k,p} &:= (k_3+\eta_{\beta_1}\widehat{p}_1-p_2+p_3)(k_1+\widehat{k}_2+\widehat{k}_3)-k_2(k_1+\widehat{k}_2)+(p_1+\widehat{p}_2)(-p_2+p_3)+\widehat{p}_3p_3\,,\\
t_{k,p} &= a^{\widehat{k}_1}_{\alpha_1}\, a^{\widehat{k}_2}\, a^{*\widehat{k}_3}\, a^{\widehat{p}_1}_{\beta_1}\, a^{\widehat{p}_2}\, a^{*\widehat{p}_3}\, b^{|k|_1+|p|_1}\,,\\
u_{k,p} &= a^{\widehat{k}_1}_{\alpha_1}\, a^{*k_2}\, a^{k_3}\, a^{\widehat{p}_1}_{\beta_1}\, a^{*p_2}\, a^{p_3}\, b^{|\widetilde{k}|_1+|\widetilde{p}|_1}\,.
\end{aligned}
$$

où

$$\widehat{k}_i := |\alpha_i| - k_i,\ \widehat{p}_i := |\beta_i| - p_i,$$

de sorte que $0 \leq \widehat{k}_i \leq |\alpha_i|$, $0 \leq \widehat{p}_i \leq |\beta_i|$. On pose $\widetilde{k} := (k_1, \widehat{k}_2, \widehat{k}_3)$.

Pour $\beta_1 \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$, on définit

$$
\begin{aligned}
w_1(\beta_1, j) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \big(q^{2jn}(q^{\uparrow_{\beta_1}}_{n,|\beta_1|})^2 - \delta_{j,0}\big),\\
w^\alpha_\beta &:= 2\beta_1\, q^{\beta_1(2\alpha_3+\beta_3-\beta_2)}\, w_1(\beta_1, \alpha_3+\beta_3).
\end{aligned}
$$

On pose :

$$q^+_{k,p,n} := q^{n(|k|_1+|p|_1)} q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{n+r^+_{k,p}-\eta_{\alpha_1}\widehat{k}_1,\widehat{k}_1} q^{\uparrow}_{n-\widehat{k}_3+\eta_{\beta_1}\widehat{p}_1+\widehat{p}_2-\widehat{p}_3,\widehat{k}_2} q^{\downarrow}_{n+\eta_{\beta_1}\widehat{p}_1+\widehat{p}_2-\widehat{p}_3,\widehat{k}_3} q^{\uparrow_{\beta_1}}_{n+\widehat{p}_2-\widehat{p}_3,\widehat{p}_1} q^{\uparrow}_{n-\widehat{p}_3,\widehat{p}_2} q^{\downarrow}_{n,\widehat{p}_3} ,$$

$$q^-_{k,p,n} := q^{n(|\widetilde{k}|_1+|\widetilde{p}|_1)} q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{n+r^-_{k,p}-\eta_{\alpha_1}\widehat{k}_1,\widehat{k}_1} q^{\downarrow}_{n+k_3+\eta_{\beta_1}\widehat{p}_1-p_2+p_3,k_2} q^{\uparrow}_{n+\eta_{\beta_1}\widehat{p}_1-p_2+p_3,k_3} q^{\uparrow_{\beta_1}}_{n-p_2+p_3,\widehat{p}_1} q^{\downarrow}_{n+p_3,p_2} q^{\uparrow}_{n,p_3}$$
$$\times (-1)^{|\widetilde{k}|_1+|\widetilde{p}|_1},$$

$$r^+_{k,p} := \eta_{\alpha_1}\widehat{k}_1 + \widehat{k}_2 - \widehat{k}_3 + \eta_{\beta_1}\widehat{p}_1 + \widehat{p}_2 - \widehat{p}_3 ,$$

$$r^-_{k,p} := \eta_{\alpha_1}\widehat{k}_1 - k_2 + k_3 + \eta_{\beta_1}\widehat{p}_1 - p_2 + p_3 .$$

Ainsi, $\pi_+(t_{k,p})\varepsilon_n = q^+_{k,p,n}\varepsilon_{n+r^+_{k,p}}$ et $\pi_-(u_{k,p})\varepsilon_n = q^-_{k,p,n}\varepsilon_{n+r^-_{k,p}}$.

Lemme 4.4.12. *Nous avons*

$$r\left((M^\alpha_\beta)^\circ\right) = \sum_{k,p} \delta_{h_{k,p},0}\, v_{k,p}\, \pi_+(t_{k,p}) \otimes \pi_-(u_{k,p})$$

où l'on somme sur k_i, p_i dans $\mathbb{N}$ tels que $k_i \leq |\alpha_i|, p_i \leq |\beta_i|$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

Démonstration. Puisque

$$\underline{\pi}(m^\alpha) = (a_+ + a_-)^{\alpha_1}(b_+ + b_-)^{\alpha_2}(b^*_+ + b^*_-)^{\alpha_3} ,$$

avec $v_k := \binom{|\alpha_1|}{k_1}_{q^{2\eta_{\alpha_1}}} \binom{\alpha_2}{k_2}\binom{\alpha_3}{k_3}$,

$$\underline{\pi}(m^\alpha) = \sum\nolimits_k v_k\, c_k \text{ où } c_k := a^{|\alpha_1|-k_1}_{+,\alpha_1}\, a^{k_1}_{-,\alpha_1}\, b^{\alpha_2-k_2}_+\, b^{k_2}_-\, b^{*\,\alpha_3-k_3}_+\, b^{*\,k_3}_- .$$

D'après le Lemme 4.3.2 (iii) nous voyons que $\delta(\underline{\pi}(m^\beta)) = \sum_p w_p\, d_p$ où l'on introduit :
$w_p := \binom{|\beta_1|}{p_1}_{q^{2\eta_{\beta_1}}} \binom{\beta_2}{p_2}\binom{\beta_3}{p_3}$ et $d_p := g(p)\, a^{|\beta_1|-p_1}_{+,\beta_1}\, a^{p_1}_{-,\beta_1}\, b^{\beta_2-p_2}_+\, b^{p_2}_-\, b^{*\,\beta_3-p_3}_+\, b^{*\,p_3}_-$.
Par conséquent, $(M^\alpha_\beta)^\circ = \sum_{k,p} \delta_{h(k,p),0}\; g(p)\; v_k\, w_p\, c_{k,p}$ où

$$c_{k,p} = a^{\widehat{k}_1}_{+,\alpha_1}\, a^{k_1}_{-,\alpha_1}\, b^{\widehat{k}_2}_+\, b^{k_2}_-\, b^{*\,\widehat{k}_3}_+\, b^{*\,k_3}_-\, a^{\widehat{p}_1}_{+,\beta_1}\, a^{p_1}_{-,\beta_1}\, b^{\widehat{p}_2}_+\, b^{p_2}_-\, b^{*\,\widehat{p}_3}_+\, b^{*\,p_3}_- \tag{4.38}$$

Avec (4.38), on obtient $r(c_{k,p}) = (-1)^{k_1+p_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_2+\beta_3}\, q^{k_1+p_1}\, \pi_+(t'_{k,p}) \otimes \pi_-(u'_{k,p})$ où

$$t'_{k,p} = a^{\widehat{k}_1}_{\alpha_1}\, b^{k_1}\, a^{\widehat{k}_2}\, b^{k_2}\, a^{*\widehat{k}_3}\, b^{k_3} a^{\widehat{p}_1}_{\beta_1}\, b^{p_1}\, a^{\widehat{p}_2}\, b^{p_2}\, a^{*\widehat{p}_3}\, b^{p_3} ,$$
$$u'_{k,p} = a^{\widehat{k}_1}_{\alpha_1}\, b^{k_1}\, b^{\widehat{k}_2}\, a^{*k_2}\, b^{\widehat{k}_3} a^{k_3}\, a^{\widehat{p}_1}_{\beta_1}\, b^{p_1}\, b^{\widehat{p}_2}\, a^{*p_2}\, b^{\widehat{p}_3}\, a^{p_3} .$$

Une itération de $ba_j = q^{\eta_j} a_j b$ donne le résultat. □

Lemme 4.4.13. *Nous avons*
(i) $(\tau_1 \otimes \tau_1)\big(r(M^\alpha_\beta)^\circ\big) = \beta_1\; \delta_{\alpha_1,-\beta_1}\, \delta_{\alpha_2,0}\, \delta_{\alpha_3,0}\, \delta_{\beta_2,0}\, \delta_{\beta_3,0}$.
(ii) $(\tau_1 \otimes \tau_0 + \tau_0 \otimes \tau_1)\big(r(M^\alpha_\beta)^\circ\big) = \delta_{\alpha_1,-\beta_1}\, \delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3}\, w^\alpha_\beta$.
En particulier, si A est une δ-1-forme,

$$⨍ A|\mathcal{D}|^{-3} = 2\beta_1\, A^{\beta_1 00}_{-\beta_1 00} ,$$
$$⨍ A|\mathcal{D}|^{-2} = 2w^\alpha_\beta\, B(A)^\beta_\alpha .$$

où nous avons implicitement sommé sur tous les indices α, β.

Démonstration. Voir Appendice A. □

Avec les notations du Lemme 4.4.12, on peut vérifier que que pour $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(n-1)})$ et $\bar{\beta} = (\beta, \beta', \cdots, \beta^{(n-1)})$,

$$r\big((M^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}})^\circ\big) = \sum_{K,P} \delta_{h_{K,P},0}\, v_{K,P}\, \pi_+(t_{K,P}) \otimes \pi_-(u_{K,P}) \tag{4.39}$$

où $K = (k, k', \cdots k^{(n-1)})$, $P = (p, p', \cdots, p^{(n-1)})$ avec $0 \leq k_i^{(j)} \leq |\alpha_i^{(j)}|$, $0 \leq p_i^{(j)} \leq |\beta_i^{(j)}|$,

$$t_{K,P} := t_{k,p}\, t_{k',p'} \cdots t_{k^{(n-1)},p^{(n-1)}}\ , \qquad u_{K,P} := u_{k,p} u_{k',p'} \cdots u_{k^{(n-1)},p^{(n-1)}}\ ,$$
$$v_{K,P} := v_{k,p}\, v_{k',p'} \cdots v_{k^{(n-1)},p^{(n-1)}}\ , \qquad h_{K,P} := h_{k,p} + h_{k',p'} + \cdots h_{k^{(n-1)},p^{(n-1)}}\ .$$

On pose $A_i := \alpha_i + \alpha'_i + \cdots + \alpha_i^{(n-1)}$, $B_i := \beta_i + \beta'_i + \cdots + \beta_i^{(n-1)}$.
Dans le cas $n = 2$, on note $r^{\pm}_{K,P} := r^{\pm}_{k,p} + r^{\pm}_{k',p'}$ et $q^{\pm}_{K,P,n} := q^{\pm}_{k',p',n}\, q^{\pm}_{k,p,n+r^{\pm}_{k',p'}}$.
Ainsi, nous avons $\pi_+(t_{K,P})\, \varepsilon_m = q^{+}_{K,P,m}\, \varepsilon_{m+r^{+}_{K,P}}$ et $\pi_-(u_{K,P})\, \varepsilon_m = q^{-}_{K,P,n}\, \varepsilon_{m+r^{-}_{K,P}}$.
On introduit pour $n = 2$,

$$v_{\beta_1,\alpha'_1,\beta'_1}(l,j) := \sum_{n=0}^{\infty} \big(q^{l+2nj}\, q^{\uparrow_{-\beta'_1-\alpha'_1-\beta_1}}_{n+\beta'_1+\alpha'_1+\beta_1,|\beta'_1+\alpha'_1+\beta_1|} q^{\uparrow_{\beta_1}}_{n+\beta'_1+\alpha'_1,|\beta_1|} q^{\uparrow_{\alpha'_1}}_{n+\beta'_1,|\alpha'_1|} q^{\uparrow_{\beta'_1}}_{n,|\beta'_1|} - \delta_{j,0}\big),$$
$$V^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} := 2[\beta_1\beta'_1 + (\beta_2 - \beta_3)(\beta'_2 - \beta'_3)]\, q^{2\beta_1(\alpha_2+\alpha_3)+2\beta'_1(\alpha'_2+\alpha'_3)}$$
$$\times\, v_{\beta_1,\alpha'_1,\beta'_1}((\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3)(\alpha'_1 + \beta'_1), A_3 + B_3).$$

Lemme 4.4.14. *Nous avons*
(i) $(\tau_1 \otimes \tau_1)\big(r(M^{\alpha}_{\beta} M^{\alpha'}_{\beta'})^\circ\big) = \beta_1\beta'_1\ \delta_{A_1,-B_1}\, \delta_{A_2,0}\, \delta_{A_3,0}\, \delta_{B_2,0}\delta_{B_3,0}$.
(ii) $(\tau_1 \otimes \tau_0 + \tau_0 \otimes \tau_1)\big(r(M^{\alpha}_{\beta} M^{\alpha'}_{\beta'})^\circ\big) = \delta_{A_2+B_2,A_3+B_3}\delta_{A_1,-B_1} V^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$.
(iii) $(\tau_1 \otimes \tau_1)\big(r(M^{\alpha}_{\beta} M^{\alpha'}_{\beta'} M^{\alpha''}_{\beta''})^0\big) = \beta_1\beta'_1\beta''_1\ \delta_{A_1,-B_1}\, \delta_{A_2,0}\, \delta_{A_3,0}\, \delta_{B_2,0}\delta_{B_3,0}$.
(iv) $(\tau_1 \otimes \tau_1)\ \big(r(\delta(M^{\alpha}_{\beta}) M^{\alpha'}_{\beta'})^0\big) = -(\alpha'_1 + \beta'_1)\beta_1\beta'_1\ \delta_{A_1,-B_1}\, \delta_{A_2,0}\, \delta_{A_3,0}\, \delta_{B_2,0}\delta_{B_3,0}$.
(v) En particulier, si A est une δ-1-forme,

$$⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3} = 2\beta_1\beta'_1\ B_a(A^2)^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}}\,,$$
$$⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-2} = 2V^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\ B(A^2)^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}}\,,$$
$$⨍ A^3|\mathcal{D}|^{-3} = 2\beta_1\beta'_1\beta''_1\ B_a(A^3)^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}}\,,$$
$$⨍ \delta(A)A|\mathcal{D}|^{-3} = ⨍ A\delta(A)|\mathcal{D}|^{-3} = 0.$$

Démonstration. Voir Appendice B. □

Pour une δ-1-forme A donnée, on dit que A est homogène de degré en a égal à $n \in \mathbb{Z}$ si elle est combinaison linéaire de M^{α}_{β} tels que $\alpha_1 + \beta_1 = n$. D'après le Lemme 4.4.14 (iv) on obtient,

Corollaire 4.4.15. *Soient A, A' deux δ-1-formes, alors*

$$\fint (A|\mathcal{D}|^{-1})^2 = \fint A^2|\mathcal{D}|^{-2}\,,$$
$$\fint A|\mathcal{D}|^{-1}A'|\mathcal{D}|^{-1} = \fint AA'|\mathcal{D}|^{-2} - n\fint AA'|\mathcal{D}|^{-3}\,,\ \textit{lorsque } A' \textit{ homogène de degré } n.$$

Lemme 4.4.16. *Nous avons*

(i) $(\tau_1\otimes\tau_1)\,\widetilde{\rho}\big(M^{\alpha}_{\beta}JM^{\alpha'}_{\beta'}J^{-1}\big) = \beta_1\beta_1'\ \delta_{\alpha_1,-\beta_1}\,\delta_{\alpha_1',-\beta_1'}\,\delta_{A_2,0}\,\delta_{A_3,0}\,\delta_{B_2,0}\delta_{B_3,0}\,.$

(ii) $(\tau_0\otimes\tau_1+\tau_1\otimes\tau_0)\,\widetilde{\rho}\big(M^{\alpha}_{\beta}JM^{\alpha'}_{\beta'}J^{-1}\big) = \delta_{\alpha_1,-\beta_1}\,\delta_{\alpha_1',-\beta_1'}\big(\beta_1'w^{\alpha}_{\beta}\delta_{\alpha_2'+\beta_2'+\alpha_3'+\beta_3',0}\,\delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3}$
$+\beta_1 w^{\alpha'}_{\beta'}\delta_{\alpha_2+\beta_2+\alpha_3+\beta_3,0}\,\delta_{\alpha_2'+\beta_2',\alpha_3'+\beta_3'}\big)\,.$

(iii) $(\tau_1\otimes\tau_1)\,\widetilde{\rho}\big(M^{\alpha}_{\beta}M^{\alpha'}_{\beta'}JM^{\alpha''}_{\beta''}J^{-1}\big) = \beta_1\beta_1'\beta_1''\ \delta_{\alpha_1+\alpha_1',-\beta_1-\beta_1'}\,\delta_{\alpha_1'',-\beta_1''}\,\delta_{A_2,0}\,\delta_{A_3,0}\,\delta_{B_2,0}\delta_{B_3,0}\,.$

(iv) $(\tau_1\otimes\tau_1)\ \widetilde{\rho}\big(\delta(M^{\alpha}_{\beta})JM^{\alpha'}_{\beta'}J^{-1}\big) = -(\alpha_1'+\beta_1')\beta_1\beta_1'\ \delta_{\alpha_1,-\beta_1}\,\delta_{\alpha_1',-\beta_1'}\,\delta_{A_2,0}\,\delta_{A_3,0}\,\delta_{B_2,0}\delta_{B_3,0}\ .$

(v) En particulier, si A et A' sont des δ-1-formes,

$$\fint AJA'J^{-1}|\mathcal{D}|^{-3} = 2(\beta_1 A^{\beta_1 00}_{-\beta_1 00})(\beta_1\bar{A'}^{\beta_1 00}_{-\beta_1 00}),$$
$$\fint AJA'J^{-1}|\mathcal{D}|^{-2} = 2(\beta_1\bar{A'}^{\beta_1 00}_{-\beta_1 00})(w^{\alpha}_{\beta}B(A)^{\beta}_{\alpha}) + 2(\beta_1 A^{\beta_1 00}_{-\beta_1 00})(w^{\alpha}_{\beta}B(\bar{A'})^{\beta}_{\alpha}),$$
$$\fint A^2JA'J^{-1}|\mathcal{D}|^{-3} = 2(\beta_1\bar{A'}^{\beta_1 00}_{-\beta_1 00})(\beta_1\beta_1' B_a(A^2)^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}}),$$
$$\fint \delta(A)JAJ^{-1} = 0.$$

Démonstration. Voir Appendice C. □

Lemme 4.4.17. *Soient $\beta,\beta'\in\mathbb{Z}$. Alors,*

$$\lim_{2j\to\infty}\sum_{m=0}^{2j}\big((q^{\uparrow_\beta}_{m,|\beta|}q^{\uparrow_{\beta'}}_{2j-m,|\beta'|})^2-1\big) = \sum_{m=0}^{\infty}\big((q^{\uparrow_\beta}_{m,|\beta|})^2-1\big) + \sum_{m=0}^{\infty}\big((q^{\uparrow_{\beta'}}_{m,|\beta'|})^2-1\big).$$

Démonstration. Voir Appendice D. □

Démonstration du Théorème 4.4.11. Le résultat est une conséquence des Lemmes 4.4.13, 4.4.14 (v) et 4.4.16 (v). □

4.4.7 Démonstration du Théorème 4.4.3 et corollaires

Lemme 4.4.18. *Nous avons sur $SU_q(2)$,*

(i) $\fint|\mathcal{D}|^{-3} = 2.$

(ii) $\fint|\mathcal{D}|^{-2} = 0.$

(iii) $\fint|\mathcal{D}|^{-1} = -\frac{1}{2}.$

(iv) $\zeta_{\mathcal{D}}(0) = 0.$

Démonstration. (iv) Par définition,

$$\zeta_{\mathcal{D}}(s) := \mathrm{Tr}(|\mathcal{D}|^{-s}) = \sum_{2j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2j}\sum_{l=0}^{2j+1} \langle v^j_{m,l}\,,\, |\mathcal{D}|^{-s}\, v^j_{m,l}\rangle.$$

Puisque $|\mathcal{D}|^{-s}v^j_{m,l} = \begin{pmatrix} d_{j^+}^{-s} & 0 \\ 0 & d_j^{-s}\end{pmatrix} v^j_{m,l}$ où $d_j := 2j+\frac{1}{2}$,

$$\zeta_{\mathcal{D}}(s) = \sum_{2j=0}^{\infty}(2j+1)(2j+2)\, d_{j^+}^{-s} + \sum_{2j=1}^{\infty}(2j+1)(2j)\, d_j^{-s} = 2\sum_{2j=0}^{\infty}(2j+1)(2j)\, d_j^{-s}.$$

Avec les égalités $(2j+1)(2j) = d_j^2 - \frac{1}{4}$ et $\zeta(s,\frac{1}{2}) = (2^s-1)\zeta(s)$ (ici $\zeta(s,x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+x)^s}$ est la fonction zêta de Hurwitz et $\zeta(s) := \zeta(s,1)$ est la fonction zêta de Riemann) on obtient

$$\zeta_{\mathcal{D}}(s) = 2(2^{s-2}-1)\zeta(s-2) - \tfrac{1}{2}(2^s-1)\zeta(s) \tag{4.40}$$

ce qui implique $\zeta_{\mathcal{D}}(0) = 0$.

(i, ii, iii) sont des conséquences directes de l'équation (4.40). □

Démonstration du Théorème 4.4.3. Ce résultat est une conséquence du Lemme 4.4.18 et des Théorèmes 4.4.1, 4.4.11. □

Comme nous l'avons vu, le calcul d'intégrales non commutatives sur $SU_q(2)$ aboutit à certaines fonctions de A qui filtrent certaines symétries sur le degré en a, a^*, b, b^* de la décomposition canonique. Précisément, ce sont les caractéristiques d'équilibre qui apparaissent fondamentales. Ces caractéristiques sont données par les fonctions suivantes de A^n, $n \in \{1,2,3\}$:

$$⨍ A^n|\mathcal{D}|^{-p} \tag{4.41}$$

où $1 \le n \le p \le 3$. Nous verrons dans la section suivante une méthode pour calculer explicitement ces intégrales.

Corollaire 4.4.19. *Soit u un unitaire dans $C^\infty\big(SU_q(2)\big)$ et $\gamma_u(\mathbb{A}) := \pi(u)\mathbb{A}\pi(u^*) + \pi(u)d\pi(u^*)$ une transformation de jauge de $\mathbb{A}$. Alors les termes suivants du Théorème 4.4.3 sont invariants de jauge :*

$$⨍ A|\mathcal{D}|^{-3}\,, \qquad ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3} - ⨍ A|\mathcal{D}|^{-2}\,, \qquad -2⨍ A|\mathcal{D}|^{-1} + ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-2} - \tfrac{2}{3}⨍ A^3|\mathcal{D}|^{-3}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que les termes $⨍|D_{\mathbb{A}}|^{-k}$ et $\zeta_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}}}(0)$ de l'action spectrale (1.6) sont invariants de jauge. Ceci peut se voir par le calcul de $D_{\gamma_u(\mathbb{A})} = V_u\mathcal{D}V_u^* + V_uP_0V_u^*$ où P_0 est la projection sur $\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}$ et $V_u = \pi(u)J\pi(u)J^{-1}$ et $⨍|D_{\mathbb{A}}|^{n-k} = \mathrm{Res}_{s=n-k}\ \mathrm{Tr}\ \big(|D_{\mathbb{A}}|^{n-k}\big)$ (voir Proposition 3.2.1 (iii) et Proposition 1.3.8). □

Corollaire 4.4.20. *Dans le cas de l'action spectrale sans l'opérateur de réalité (i.e. $D_{\mathbb{A}} = \mathcal{D}+\mathbb{A}$),*

$$⨍|D_{\mathbb{A}}|^{-3} = 2, \qquad ⨍|D_{\mathbb{A}}|^{-2} = -2⨍ A|\mathcal{D}|^{-3}\,, \qquad ⨍|D_{\mathbb{A}}|^{-1} = -\tfrac{1}{2} - ⨍ A|\mathcal{D}|^{-2} + ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-3},$$

$$\zeta_{D_{\mathbb{A}}}(0) = -⨍ A|\mathcal{D}|^{-1} + \tfrac{1}{2}⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-2} - \tfrac{1}{3}⨍ A^3|\mathcal{D}|^{-3}\,.$$

Par conséquent, si $\mathbb{A}$ est une 1-forme telle que $⨍ A|\mathcal{D}|^{-3} = 0$, alors le terme invariant d'échelle de l'action spectrale avec ou sans J est le même modulo un facteur global égal à 2.

4.5 Calcul différentiel sur $SU_q(2)$ et applications

4.5.1 Le signe de $\mathcal{D}$

Il existe un certain nombre de calculs différentiels sur $SU_q(2)$ [92,153]. D'après [121, Théorème 3], les calculs différentiels $3D$ et $4D_\pm$ ne coïncident pas avec celui que nous considérons ici : la multiplication à droite des 1-formes par un élément de l'algèbre est une conséquence des propriétés d'équivariance l'opérateur de Dirac vis-à-vis de la dualité entre les algèbres de Hopf $SU_q(2)$ et $\mathcal{U}_q(su(2))$.

Il est connu que le module de Fredholm associé à $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est 1-sommable puisque $[F, \pi(x)]$ est à trace pour tout $x \in \mathcal{A}$. D'autre part, [1]:

Proposition 4.5.1. *Nous avons*

$$\tfrac{1}{1-q^2}\,\big(\underline{\pi}(a^*)\,d\underline{\pi}(a) + q^2\,\underline{\pi}(b)\,d\underline{\pi}(b^*) + q^2\,\underline{\pi}(a)\,d\underline{\pi}(a^*) + q^2\,\underline{\pi}(b^*)\,d\underline{\pi}(b)\big) = F, \tag{4.42}$$

et en particulier, F est une 1-forme centrale modulo $OP^{-\infty}$.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} a^*\,\delta a + q^2\,b\,\delta b^* + q^2\,a\,\delta a^* + q^2\,b^*\,\delta b \\ &= (a_+^* + a_-^*)(a_+ - a_-) + q^2\,(b_+ + b_-)(b_-^* - b_+^*) + q^2\,(a_+ + a_-)(a_-^* - a_+^*) \\ &\qquad + q^2\,(b_+^* + b_-^*)(b_+ - b_-) \\ &= [a_+^* a_+ - q^2\,a_+ a_+^* + q^2\,b_+^* b_+ - q^2\,b_+ b_+^*] + R = (1-q^2) + R \end{aligned} \tag{4.43}$$

d'après (4.12), et nous vérifions que R est nul :

$$\begin{aligned} R = &-[a_+^* a_- + q^2\,b_+^* b_-] + [a_-^* a_+ + q^2\,b_-^* b_+] - [a_-^* a_- - q^2\,a_- a_-^* + q^2\,b_-^* b_- - q^2\,b_- b_-^*] \\ &+ (q^2\,a_+ a_-^* + q^2\,q_-^* b_+) - (a_+^* a_- + q^2\,b_+^* b_-), \end{aligned}$$

ainsi, en appliquant (4.15), (4.16), (4.17), $R = +(q^2\,a_+ a_-^* + q^2\,q_-^* b_+) - (a_+^* a_- + q^2\,b_+^* b_-) = 0$ en utilisant les relations de commutation (4.11).

En remplaçant δ par d dans (4.43) ceci donne (4.42) puisque F commute avec $a_\pm$, $b_\pm$ et F est centrale d'après (4.24). □

Proposition 4.5.2. *La 1-forme dans* (4.42) *est en fait une fonction de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$:*

$$\pi(a^*)\,d\pi(a) + q^2\,\pi(b)\,d\pi(b^*) + q^2\,\pi(a)\,d\pi(a^*) + q^2\,\pi(b^*)\,d\pi(b) = \xi_q(\mathcal{D}) = F\,\xi_q(|\mathcal{D}|), \tag{4.44}$$

où $\xi_q(s) := q^{\frac{[2s]-2s}{[s+1/2][s-1/2]}}$.

De plus, $F = \lim_{q\to 0}\,\xi_q(\mathcal{D})$.

Démonstration. Tout d'abord, observons que la 1-forme ω dans (4.44) est invariante sous l'action de $\mathcal{U}_q(su(2)) \times \mathcal{U}_q(su(2))$: $h \triangleright \omega = \epsilon(h)\,\omega$ pour tout $h \in \mathcal{U}_q(su(2)) \times \mathcal{U}_q(su(2))$. Par exemple, en utilisant les notations de [48]

$$e \triangleright \omega = q^{\frac{1}{2}} a^* db + q^2 \left(-q^{\frac{1}{2}-1} b da^* + q^{-\frac{1}{2}} b da^* - q^{-1-\frac{1}{2}} a^* db \right) = 0 = \epsilon(e)\,\omega.$$

1. Un résultat similaire pour un triplet spectral différent sur $SU_q(2)$ lorsque $q = 0$ a été obtenu dans [31, eq. (48)]

Ainsi, puisque les deux représentations π et l'opérateur $\mathcal{D}$ sont équivariants, l'image de ω doit être diagonale dans la base spinorielle. Après calcul avec la représentation spinorielle π donnée en (4.6),

$$\begin{aligned}\langle v^{j\uparrow}_{ml},\, \omega\, v^{j\uparrow}_{ml}\rangle &= \tfrac{q^{8j+8}-q^{8j+6}-(4j+3)\,q^{4j+6}+(8j+6)\,q^{4j+4}-(4j+3)\,q^{4j+2}-q^2+1}{(q^{4j+4}-1)(q^{4j+2}-1)} = \xi_q(2j+\tfrac{3}{2}),\\ \langle v^{j\downarrow}_{ml},\, \omega\, v^{j\downarrow}_{ml}\rangle &= \tfrac{-q^{8j+4}+q^{8j+2}+(4j+1)\,q^{4j+4}-(8j+2)\,q^{4j+2}+(4j+1)\,q^{4j}+q^2-1}{(q^{4j+2}-1)(q^{4j}-1)} = -\xi_q(2j+\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

Ces expressions ont une limite lorsque $q \to 0$, égale respectivement à 1 et -1, donc $\omega \to F$ lorsque $q \to 0$. □

Dans le cas où $q \to 1$, ces expressions donnent 0, ce qui est confirmé par le fait que toute 1-forme est alors centrale. Nous ne savons pas si une forme centrale ω est automatiquement invariante par l'action de $U_q(su(2))$: $h \triangleright \omega = \epsilon(h)\omega$.

Proposition 4.5.3. *Le calcul différentiel d'ordre 1 modulo $OP^{-\infty}$ n'est pas universel.*

Démonstration. Prenons la 1-forme ω_F de (4.42). Alors, pour tout $x \in \mathcal{A}(SU_q(2))$ nous avons $\underline{\pi}(x\omega_F - \omega_F x) = 0$. □

Notons que puisque $\omega_F \sim (1-q^2)^{-1}\omega \mod OP^{-\infty}$, on obtient $1 \sim (1-q^2)^{-1}\xi_q(|\mathcal{D}|) \mod OP^{-\infty}$.

Corollaire 4.5.4. *Modulo $OP^{-\infty}$, $1 \in \pi\big(\Omega^2_u(\mathcal{A})\big)$.*

Démonstration. $1 = F^2$ est par définition dans $\pi\big(\Omega^2_u(\mathcal{A})\big)$. □

En fait, on voit d'après (4.12), (4.15), (4.18) que

$$q^2\, da\, da^* - da^*\, da = 1 - q^2 \tag{4.45}$$

ce qui montre encore que $1 \in \pi\big(\Omega^2_u(\mathcal{A})\big)$.

De façon similaire, d'après (4.11) et (4.13), (4.18), (4.19), on obtient modulo $OP^{-\infty}$

$$\begin{aligned} &q\, da\, db = db\, da, && q\, da\, db^* = db^*\, da,\\ &da^*\, db = q\, db\, da^*, && da^*\, db^* = q\, db^*\, da^*\\ &db\, db^* = db^*\, db, && da\, da^* + db\, db^* = -1. \end{aligned} \tag{4.46}$$

La dernière égalité de (4.46) et (4.45) donne

Proposition 4.5.5. *Modulo $OP^{-\infty}$, F n'est pas une 1-forme fermée universelle :*

$$da^*\, da + q^2\, da\, da^* + q^2\, db^*\, db + q^2\, db\, db^* = -1 - q^2. \tag{4.47}$$

4.5.2 L'idéal $\mathcal{R}$

Afin de pouvoir calculer explicitement tous les termes de l'action spectrale, nous observons que chaque δ-1-forme peut s'exprimer en terme de $x\delta(z)y$ où z est un des générateurs a, a^*, b, b^* et x, y sont des éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(SU_q(2))$.

Pour le calcul de $\fint x dz y|\mathcal{D}|^{-1}$, on peut utiliser la propriété de trace de l'intégrale non commutative pour obtenir :

$$\fint x\delta(z)y\,|\mathcal{D}|^{-1} = \fint yx\delta(z)\,|\mathcal{D}|^{-1} + \fint x\delta(z)\,|\mathcal{D}|^{-1}\delta(y)\,|\mathcal{D}|^{-1}.$$

Ainsi, le problème du calcul de l'intégrale de type tadpole peut être réduit au calcul d'intégrales beaucoup plus simples : $\fint x\delta(z)|\mathcal{D}|^{-1}$ pout tout générateur z et les intégrales d'ordre supérieur en $|\mathcal{D}|^{-1}$.

Cependant, il apparaît que les calculs d'ordre supérieur se simplifient grandement lorsque l'on se restreint à un idéal invisible sous intégration par des intégrales de dimension 2 et 3. Par exemple, considérons l'espace des opérateurs pseudodifférentiels $T \in \Psi^0(\mathcal{A})$ d'ordre inférieur ou égal à zéro (voir [38]) qui vérifient

$$\fint T\,t\,|\mathcal{D}|^{-2} = \fint t\,T\,|\mathcal{D}|^{-2} = \fint T\,t\,|\mathcal{D}|^{-3} = \fint t\,T\,|\mathcal{D}|^{-3} = 0,\ \forall t \in \Psi^0_0(\mathcal{A}). \tag{4.48}$$

Les éléments $a_-,\ b_-b_+,\ b_-b_+^*$ et leurs adjoints sont dans cet espace modulo $OP^{-\infty}$: ceci est dû au fait que dans le Théorème 4.3.4, $\tau_1 \otimes \tau_1\big(r(x)\big) = 0$ lorsque $r(x) \in \pi_\pm(\mathcal{A}) \otimes \pi_\pm(\mathcal{A})$ mod $OP^{-\infty}$ contient les produits tensoriels de $\pi_\pm(b)$ ou $\pi_\pm(b^*)$ puisque ces éléments sont dans le noyau de σ.

Définition 4.5.6. Soit R le noyau dans X de $(\sigma \otimes \sigma) \circ r$ où r est l'application de Hopf définie en (4.26) et σ est l'application symbole, et soit $\mathcal{R}$ l'espace vectoriel généré par R et $R\,F$.

Notons que R est un *-idéal dans X et

$$a_-,\ b_-b_+(= q^2\,b_+b_-),\ b_-b_+^* \text{ sont dans } \mathcal{R}.$$

Par construction et d'après le Théorème 4.3.4, tout $T \in \mathcal{R}$ satisfait (4.48) et $\mathcal{R}$ est invariant par F.

De plus, d'après (4.15), $[b_-, b_-^*] \in R$, donc d'après (4.12) et (4.18), $a_+^*a_+ - q^2\,a_+a_+^* - (1-q^2) \in R$ et (4.19) implique $q\,a_+b_- - b_-a_+ \in R$.

Il est intéressant de noter que grâce au Théorème 4.3.4, si $x \in R$, alors $\fint F\,x\,|\mathcal{D}|^{-1} = 0$ tandis que, a priori, $\fint x\,|\mathcal{D}|^{-1} \neq 0$.

Notons que $F \in \Psi^0(\mathcal{A})$ satisfait aussi (4.48) d'après le Théorème 4.3.4 alors que $F \notin \mathcal{R}$ puisque $F^2 = 1$.

De plus, d'autres éléments sont dans $\mathcal{R}$ comme par exemple $d(b^*b) = d(bb^*)$:

$$\begin{aligned}\delta(bb^*) &= -\delta(aa^*) = -\delta a\,a^* - a\,\delta a^* = -(a_+ - a_-)(a_+^* + a_-^*) - (a_+ + a_-)(a_-^* - a_+^*)\\ &= 2(a_+a_-^* - a_-a_+^*)\end{aligned}$$

est dans R puisque $a_- \in R$, donnant $d(bb^*) \in R\,F$.

Nous ne savons pas si $\mathcal{R}$ est égal à la partie de l'algèbre générée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\,F$ satisfaisant (4.48).

Lemme 4.5.7. *$\mathcal{R}$ est un $*$-idéal dans $\Psi^0(\mathcal{A})$ qui est invariant par F, d, δ.*

Démonstration. Puisque R est un idéal dans $X = \mathcal{B}$ mod $OP^{-\infty}$ (voir la Remarque 4.3.3), $\mathcal{R}$ apparaît être un idéal dans $\Psi^0(\mathcal{A}) \subset$ algèbre générée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\,F$. Puisque $\mathcal{R}$ est invariant par F, son invariance par d résulte de son invariance par δ, qui est vérifiée sur les générateurs de R. □

D'après le Théorème 4.4.13, $⨍ da\,|\mathcal{D}|^{-2} = ⨍ da\,|\mathcal{D}|^{-3} = 0$ alors que $⨍ a^* da\,|\mathcal{D}|^{-3} = 2$, ce qui met en avant le rôle du "pour tout t" dans (4.48).

Lemme 4.5.8. *Pour tout $t \in \Psi^0_0(\mathcal{A})$ et $T \in \mathcal{R}$, nous avons $⨍ t\,T\,|\mathcal{D}|^{-1} = ⨍ T\,t\,|\mathcal{D}|^{-1}$.*

Démonstration. Pour tout $t \in \mathcal{B}$, nous avons $⨍ T\,t\,|\mathcal{D}|^{-1} = ⨍ t\,T\,|\mathcal{D}|^{-1} + ⨍ T\,|\mathcal{D}|^{-1}\,\delta(t)\,|\mathcal{D}|^{-1}$ et, de plus, $⨍ T\,|\mathcal{D}|^{-1}\,\delta(t)\,|\mathcal{D}|^{-1} = ⨍ T\,\delta(t)\,|\mathcal{D}|^{-2} - ⨍ T\,\delta^2(t)\,|\mathcal{D}|^{-3}$ ce qui vient de

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}|^{-1}\delta(t)|\mathcal{D}|^{-1} &= \delta(t)|\mathcal{D}|^{-2} + [|\mathcal{D}|^{-1}, \delta(t)]|\mathcal{D}|^{-1} = \delta(t)|\mathcal{D}|^{-2} - |\mathcal{D}|^{-1}\delta^2(t)|\mathcal{D}|^{-2}\\ &= \delta(t)|\mathcal{D}|^{-2} - \delta^2(t)|\mathcal{D}|^{-3} + |\mathcal{D}|^{-1}\delta^3(t)|\mathcal{D}|^{-3}.\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat puisque T satisfait (4.48). □

Lemme 4.5.9. *Si $\simeq$ signifie égalité modulo l'idéal $\mathcal{R}$, les règles suivantes du calcul différentiel du premier ordre sont valides, avec $d(.) = [\mathcal{D}, .]$,*

$$\begin{array}{llll} a\,da \simeq da\,a, & a^*\,da \simeq -da^*\,a, & b\,da \simeq q\,da\,b, & b^*\,da \simeq q\,da\,b^*,\\ a\,da^* \simeq -da\,a^*, & a^*\,da^* \simeq da^*\,a^*, & b\,da^* \simeq q^{-1}\,da^*\,b, & b^*\,da^* \simeq q^{-1}\,da^*\,b^*,\\ a\,db \simeq q^{-1}\,db\,a, & a^*\,db \simeq q\,db\,a^*, & b\,db \simeq db\,b, & b^*\,db \simeq db\,b^* \simeq -b\,db^*,\\ a\,db^* \simeq q^{-1}\,db^*\,a, & a^*\,db^* \simeq q\,db^*\,a^*, & b\,db^* \simeq db^*\,b \simeq -b^*\,db, & b^*\,db^* \simeq db^*\,b^*. \end{array}$$

De plus,

$$a^*\,da - q^2 da\,a^* \simeq (1-q^2)\,F, \qquad\qquad q^2\,a\,da^* - da^*\,a \simeq (1-q^2)\,F. \tag{4.49}$$

Démonstration. La table est une conséquence des relations (4.4) et du Lemme 4.3.2 avec (4.24) (on peut aussi utiliser (4.11)). Par exemple, puisque $a_- \in \mathcal{R}$, en utilisant le fait que $\mathcal{R}$ est invariant par F,

$$\begin{aligned}b\,da &= (b_+ + b_-)(a_+ - a_-)\,F \simeq (b_+ + b_-)(a_+ + a_-)\,F = ba\,F = q\,ab\,F \simeq q\,(a_+ - a_-)\,F\,b\\ &= q\,da\,b\end{aligned}$$

ou de façon similaire, $a^*\,da = (a_+^* + a_-^*)(a_+ - a_-)F \simeq (a_+^* - a_-^*)(a_+ + a_-)F = -da^*\,a$.

La deuxième équivalence de (4.49) est l'adjointe de la première, qui résulte de :

$$\begin{aligned}a^*\,da - q^2 da\,a^* &= (a_+^* + a_-^*)(a_+ - a_-)F - q^2\,(a_+ - a_-)F(a_+^* + a_-^*)\\ &\simeq (a_+^* + a_-^*)(a_+ + a_-)F - q^2\,(a_+ + a_-)(a_+^* + a_-^*)F = (a^*a - q^2\,aa^*)\,F\\ &= (1-q^2)\,F.\end{aligned}$$

□

Remarque 4.5.10. *Les règles précédentes restent valides si dx est remplacé par $\delta(x)$ et F par 1.*

Travailler modulo $\mathcal{R}$ simplifie l'écriture d'une 1-forme :

Lemme 4.5.11. *(i) Toute 1-forme A peut être, modulo $\mathcal{R}$, présentée de la façon suivante :*

$$A \simeq x_a\, da + da^*\, x_{a^*} + x_b\, db + db^*\, x_{b^*},$$

où tous les x_* sont des éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) Lorsque A est auto-adjointe, A peut être écrite modulo $\mathcal{R}$ (mais pas de façon unique) de la façon suivante :

$$A \simeq x_a\, da - da^*\, (x_a)^* + x_b\, db - db^*\, (x_b)^*\,,$$

où x_a, x_b sont des éléments de $\mathcal{A}$.

Démonstration. (i) Les 1-formes suivantes constituent une base : $a^\alpha b^\beta (b^*)^\gamma\, d\big(a^{\alpha'} b^{\beta'} (b^*)^{\gamma'}\big)$, où $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}$ et $\beta, \gamma, \beta', \gamma' \in \mathbb{N}$.

En utilisant les règles de commutation dans l'algèbre (modulo $\mathcal{R}$, d'après le Lemme 4.5.9), on réduit le problème au cas des 1-formes suivantes : $\big(a^\alpha b^\beta (b^*)^\gamma\big)\, dx\, \big(a^{\alpha'} b^{\beta'} (b^*)^{\gamma'}\big)$, où x peut être égal à a, a^*, b, b^*. Si $x = b$ ou $x = b^*$, l'application directe des règles du calcul différentiel précédent implique que les 1-formes peuvent s'exprimer de la façon suivante : $a^\alpha b^\beta (b^*)^\gamma\, db$ et $db^*\, a^\alpha b^\beta (b^*)^\gamma$.

Des considérations similaires pour les cas $x = a, a^*$ donnent les termes restants.

Remarquons que la présentation n'est pas unique puisque il peut rester des termes qui sont dans $\mathcal{R}$, par exemple: $b^* db + db^* b = d(bb^*) \in \mathcal{R}$.

(ii) est direct. □

Nous pouvons ainsi commencer le calcul explicite des intégrales, en commençant par les termes de type tadpole.

Une application de la règle de Leibniz montre que chaque δ-1-forme peut s'exprimer comme une somme finie de termes du type $x\delta(z)y$, où z est un générateur a, a^*, b, b^* et x, y sont des éléments de l'algèbre $\mathcal{A}\big(SU_q(2)\big)$.

Proposition 4.5.12. *Pour tous $x, y \in \mathcal{A}\big(SU_q(2)\big)$ et $z \in \{a, a^*, b, b^*\}$ nous avons*

$$⨍ x\delta(z)y\, |\mathcal{D}|^{-1} = ⨍ yx\delta(z)\, |\mathcal{D}|^{-1} + ⨍ x\delta(z)\delta(y)\, |\mathcal{D}|^{-2} - ⨍ x\delta(z)\delta^2(y)\, |\mathcal{D}|^{-3}.$$

Démonstration. Ceci est une simple application de la propriété de trace de l'intégrale non commutative et de l'identité $|\mathcal{D}|^{-1}\delta(z)|\mathcal{D}|^{-1} = -\big[|\mathcal{D}|^{-1}, z\big]$. □

Remarque 4.5.13. *Le calcul des intégrales de type tadpole est réduite aux intégrales suivantes : $⨍ x\delta(z)|\mathcal{D}|^{-1}$ pour tout générateur z et les intégrales d'ordre supérieur en $|\mathcal{D}|^{-2}$. Cependant, les calculs d'ordre supérieur se simplifient grâce à l'idéal $\mathcal{R}$: $⨍ x\delta(z)\, |\mathcal{D}|^{-1}$ mis à part, nous avons seulement besoin de calculer $⨍ x\delta(z)\delta(z')\, |\mathcal{D}|^{-2}$ où z et z' sont des générateurs, puisque toutes les intégrales en $|\mathcal{D}|^{-3}$ ont déjà été calculées explicitement en section 3.4.6 (ces intégrales ne dépendent par de q).*

A part les intégrales de type tadpole, nous avons besoin de calculer $⨍ A\, |\mathcal{D}|^{-2}$ et $⨍ A^2\, |\mathcal{D}|^{-2}$ où A est une δ-1-forme. En travaillant modulo $\mathcal{R}$ et en utilisant encore une fois la règle de Leibniz, il suffit alors de calculer $⨍ x\delta(z)\, |\mathcal{D}|^{-2}$ et les intégrales précédentes $⨍ x\delta(z)\delta(z')\, |\mathcal{D}|^{-2}$.

Les opérateurs L_q et M_q

Soient L_q et M_q les opérateurs diagonaux

$$L_q\, v^j_{m,l} := q^{2l}\, v^j_{m,l}\,,$$
$$M_q\, v^j_{m,l} := q^{2m}\, v^j_{m,l}\,.$$

On obtient immédiatement

Lemme 4.5.14. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $⨍(L_q)^n\, |\mathcal{D}^{-2}| = ⨍(M_q)^n\, |\mathcal{D}^{-2}| = \frac{2}{1-q^{2n}}$.*

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(L_q^n|\mathcal{D}|^{-2-s}\right) &= \sum_{2j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2j}\sum_{l=0}^{2j+1}\langle v^j_{m,l}, L_q^n|\mathcal{D}|^{-2-s}v^j_{m,l}\rangle\\ &= \sum_{2j=0}^{\infty}(2j+1)\tfrac{1-q^{2n(2j+2)}}{1-q^{2n}}d_{j^+}^{-2-s} + \sum_{2j=0}^{\infty}(2j+1)\tfrac{1-q^{2n(2j+2)}}{1-q^{2n}}d_j^{-2-s}\\ &\sim_0 \tfrac{1}{1-q^{2n}}\left(\zeta(s+1,\tfrac{3}{2})+\zeta(s+1,\tfrac{1}{2})\right) \sim_e \tfrac{2}{1-q^{2n}}\zeta(s+1)\,.\end{aligned}$$

où $\sim_0$ signifie modulo une fonction holomorphe en 0. Ceci donne le résultat pour L_q^n et un calcul similaire peut être fait pour M_q^n. □

L'intérêt de ces opérateurs réside dans le lemme suivant :

Lemme 4.5.15. *Nous avons $L_qM_q \in \mathcal{R}$. De plus,*

$$\begin{aligned}&b\,\delta b^* \simeq M_q - L_q, \quad b^*\delta b \simeq L_q - M_q, \quad bb^* \simeq L_q + M_q,\\ &a\,\delta(a^*) \simeq -aa^* \simeq L_q + M_q - 1, \quad a^*\,\delta a \simeq a^*a \simeq 1 - q^2(L_q+M_q),\\ &da\,da^* \simeq L_q + M_q - 1, \quad da^*\,da \simeq q^2(L_q+M_q) - 1,\\ &b^{n-2}(b^*)^n\,db\,db \simeq (L_q)^n + (M_q)^n,\\ &b^{n-1}\,(b^*)^{n-1}\,db\,db^* \simeq -(L_q)^n - (M_q)^n,\\ &b^n(b^*)^{n-2}\,db^*\,db^* \simeq (L_q)^n + (M_q)^n.\end{aligned}$$

Démonstration. Puisque $L_qM_q = q^2\, a_-a_-^* \in \mathcal{R}$, on calcule modulo $\mathcal{R}$

$$b\,\delta b^* = (b_+ + b_-)(b_-^* - b_+^*) \simeq -b_+b_+^* + b_-b_-^* = M_q - L_q + L_qM_q(1-q^2) \simeq M_q - L_q$$

et de façon similaire, on peut montrer les autres relations. □

Automorphismes de l'algèbre et symétries des intégrales

Proposition 4.5.16. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned}&⨍(bb^*)^n\,|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-2(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2}\,,\\ &⨍(bb^*)^n b^*\,\delta b\,|\mathcal{D}|^{-1} = ⨍(bb^*)^n b\,\delta b^*\,|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{2}{1-q^{2n+2}}\,,\\ &⨍(bb^*)^n a\,\delta a^*\,|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-2q^{4n+2}-2q^{4n}-2q^{2n+2}+6q^{2n}}{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n+2})}\,,\\ &⨍(bb^*)^n a^*\,\delta a\,|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{6q^{2n+2}-2q^{2n}-2q^2-2}{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n+2})}\,.\end{aligned}$$

Notons que la connaissance de ces intégrales est suffisante pour le calcul de n'importe quel terme de la forme $⨍ x\delta(z)|\mathcal{D}|^{-1}$, où z est un générateur, puisque tout autre δ-1-forme sera non équilibrée.

Afin de montrer cette proposition, on utilisera certaines symétries, l'idéal $\mathcal{R}$ et la réduction des δ-1-formes aux termes L_q, M_q.

Soit U l'opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert défini par :

$$U\, v^{j\uparrow}_{m,l} = (-1)^{m+l}\, v^{j^+\downarrow}_{l,m}, \quad U\, v^{j\downarrow}_{m,l} = (-1)^{m+l}\, v^{j^-\uparrow}_{l,m}.$$

Alors, un calcul explicite donne

$$U^*aU = a, \qquad U^*a^*U = a^*, \qquad U^*bU = b^*, \qquad U^*b^*U = b, \qquad \text{et} \quad U^*\mathcal{D}U = -\mathcal{D}.$$

Lemme 4.5.17. *Chaque intégrale non commutative* (4.41) *d'un élément de l'algèbre ou d'une forme différentielle est (modulo un signe) invariant sous l'action de l'automorphisme ρ défini par*

$$\rho(a) := a, \;\; \rho(a^*) := a^*, \;\; \rho(b) := b^*, \;\; \rho(b^*) := b. \tag{4.50}$$

Démonstration. Pour tout polynôme homogène p et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ⨍ p(a, a^*, b, b^*, \mathcal{D})\, \mathcal{D}^{-k} &= ⨍ U^*p(a, a^*, b, b^*, \mathcal{D})\, \mathcal{D}^{-k}U \\ &= (-1)^k ⨍ p(U^*aU, U^*a^*U, U^*bU, U^*b^*U, U^*\mathcal{D}U)\, \mathcal{D}^{-k} \\ &= (-1)^{k+d} ⨍ p(\rho(a), \rho(a^*), \rho(b), \rho(b^*), \mathcal{D})\, \mathcal{D}^{-k}, \end{aligned}$$

où d est le degré de p par rappport à $\mathcal{D}$. □

Corollaire 4.5.18. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $⨍ (bb^*)^n\, b^*\, db\, \mathcal{D}^{-1} = ⨍ (bb^*)^n\, b\, db^*\, \mathcal{D}^{-1}$.*

Lemme 4.5.19. *Pour tout $x, y \in \Psi^0(\mathcal{A})$,*

$$(i) \quad ⨍ xy|\mathcal{D}|^{-1} = ⨍ yx|\mathcal{D}|^{-1} + ⨍ x\delta(y)|\mathcal{D}|^{-2} - ⨍ x\delta^2(y)\, |\mathcal{D}|^{-2}.$$

$$(ii) \quad ⨍ z\, x\, \mathcal{D}^{-1} y\, \mathcal{D}^{-1} = ⨍ z\, xy\, \mathcal{D}^{-2}, \text{ où } z \in \mathcal{A} \text{ contient } b \text{ ou } b^*.$$

Démonstration. (i) est une conséquence directe de la propriété de trace de $⨍$.

(ii) On calcule :

$$\begin{aligned} ⨍ z\, x\, \mathcal{D}^{-1} y\, \mathcal{D}^{-1} &= ⨍ z\, x\, \big(y\, \mathcal{D}^{-1} - \mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}, y]\, \mathcal{D}^{-1}\big)\, \mathcal{D}^{-1} = ⨍ z\, xy\, \mathcal{D}^{-2} - ⨍ z\, x\mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}, y]\, \mathcal{D}^{-2} \\ &= ⨍ z\, xy\, \mathcal{D}^{-2}. \end{aligned}$$

La dernière étape est basée sur l'observation selon laquelle toute intégrale avec $\mathcal{D}^{-3}$ s'annule si l'expression intégrée contient b ou b^*. □

Lemme 4.5.20. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

(i) $\displaystyle\fint (bb^*)^n\, b^*\, db\, \mathcal{D}^{-1} = \tfrac{2}{1-q^{2n+2}}$.

(ii) $\displaystyle\fint (bb^*)^n d(bb^*)\, \mathcal{D}^{-1} = 0.$

(iii) $\displaystyle\fint (bb^*)^n |\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-2(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2}$.

Démonstration. (i) Avec $n > 1$, on commence par $\fint d\left((b\,b^*)^n\right)\mathcal{D}^{-1} = 0$, qui résulte directement de la propriété de trace de l'intégrale non commutative. En développant l'expression par la règle de Leibniz et la commutation

$$x\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^{-1}x + \mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}, x]\mathcal{D}^{-1}, \tag{4.51}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{n-1} \fint b^k\, db\, b^{n-k-1}(b^*)^n\, \mathcal{D}^{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \fint b^n (b^*)^k\, db^*\, (b^*)^{n-k-1}\, \mathcal{D}^{-1} \\
=& n\left(\fint b^{n-1}(b^*)^n\, db\, \mathcal{D}^{-1} + \fint b^n (b^*)^{n-1}\, db^*\, \mathcal{D}^{-1}\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \fint \left(b^k\, db\, \mathcal{D}^{-1} d(b^{n-k-1}(b^*)^n)\mathcal{D}^{-1} + b^n (b^*)^k\, db^*\, \mathcal{D}^{-1} d((b^*)^{n-k-1})\mathcal{D}^{-1}\right).
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.5.19,

$$\begin{aligned}
0 =& n \fint (bb^*)^{n-1}(b^*\, db + b\, db^*)\, \mathcal{D}^{-1} \\
&+ \fint \left(\tfrac{1}{2}n(n-1)b^{n-2}(b^*)^n\, db\, db + n^2 b^{n-1}\, (b^*)^{n-1}\, db\, db^* + \tfrac{1}{2}n(n-1)b^n (b^*)^{n-2}\, db^*\, db^*\right)\mathcal{D}^{-2}.
\end{aligned}$$

Les intégrales avec $\mathcal{D}^{-2}$ peuvent se calculer aisément grâce à l'idéal $\mathcal{R}$:

$$n \fint (bb^*)^{n-1}(b^*\, db + b\, db^*)\, \mathcal{D}^{-1} = -2\left(n(n-1) - 2n^2 + n(n-1)\right)\tfrac{1}{1-q^{2n}} = 4n\tfrac{1}{1-q^{2n}}\,.$$

Ainsi $\fint (bb^*)^{n-1}(b^*\, db + b\, db^*)\, \mathcal{D}^{-1} = \frac{4}{1-q^{2n}}$, ce qui avec le Corollaire 4.5.18 prouve (i).

(ii) D'une façon similaire, $\fint (bb^*)^{n-1} d(bb^*)\, \mathcal{D}^{-1} = 0 = \fint (bb^*)^{n-1} d(aa^*)\, \mathcal{D}^{-1}$ implique :

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{n-1} (bb^*)^{n-k-1} d(bb^*)(bb^*)^k\, \mathcal{D}^{-1} \\
=& n \fint (bb^*)^{n-1} d(bb^*)\, \mathcal{D}^{-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1) \fint (bb^*)^{n-2} d(bb^*)\, d(bb^*)\, \mathcal{D}^{-2} \\
=& n \fint (bb^*)^{n-1} d(bb^*)\, \mathcal{D}^{-1},
\end{aligned}$$

où, dans la dernière étape, nous avons utilisé $d(bb^*) \in \mathcal{R}$. L'identité (ii) résulte alors de l'égalité $aa^* = 1 - bb^*$.

(iii) D'après le Lemme 4.5.19,

$$\begin{aligned} A_n &:= \fint (bb^*)^n |\mathcal{D}|^{-1} = \fint (bb^*)^n (aa^* + bb^*) |\mathcal{D}|^{-1} \\ &= A_{n+1} + \fint (bb^*)^n q^{2n} a^* a \, |\mathcal{D}|^{-1} + \fint (bb^*)^n q^{2n} a\delta(a^*) \, |\mathcal{D}|^{-2} \end{aligned}$$

le dernier terme étant calculé explicitement, puisque modulo $\mathcal{R}$, $a\delta(a^*) \simeq L_q + M_q - 1$,

$$= A_{n+1}(1 - q^{2n+2}) + q^{2n} A_n + 4 \left(\tfrac{1}{1-q^{2n+2}} - \tfrac{1}{1-q^{2n}} \right),$$

ce qui donne

$$A_n(1 - q^{2n}) + \tfrac{4}{1-q^{2n}} = A_{n+1}(1 - q^{2n+2}) + \tfrac{4}{1-q^{2n+2}} \, .$$

En supposant $A_n = \frac{f_n}{(1-q^{2n})^2}$ nous avons $\frac{f_n+4}{1-q^{2n}} = \frac{f_{n+1}+4}{1-q^{2n+2}}$, et en prenant en compte l'égalité $A_0 = -2\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}$, nous obtenons $A_n = -2\frac{1+q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}$. □

Finalement, pour obtenir la Proposition 4.5.16, il reste à prouver le

Lemme 4.5.21. *For $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} \fint (bb^*)^n a \, da^* \, \mathcal{D}^{-1} &= \tfrac{-2q^{4n+2} - 2q^{4n} - 2q^{2n+2} + 6q^{2n}}{(1-q^{2n})^2 (1-q^{2n+2})} \, , \\ \fint (bb^*)^n a^* \, da \, \mathcal{D}^{-1} &= \tfrac{6q^{2n+2} - 2q^{2n} - 2q^2 - 2}{(1-q^{2n})^2 (1-q^{2n+2})} \, . \end{aligned}$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après la règle de Leibniz, (4.51) et le Lemme 4.5.19, pour $n \geq 1$,

$$\fint (bb^*)^n a \, da^* \, \mathcal{D}^{-1} = -q^{2n} \fint (bb^*)^n a^* \, da - \fint (bb^*)^n da \, da^* \, \mathcal{D}^{-2}.$$

De plus d'après l'identité (4.42):

$$\fint (bb^*)^n \left(a^* \, da + q^2 a \, da^* + q^2 b \, db^* + q^2 b^* \, db \right) \mathcal{D}^{-1} = (1 - q^2) \fint (bb^*)^n \, |\mathcal{D}|^{-1}.$$

Ces équations donnent un système linéaire d'équations

$$\begin{aligned} \fint (bb^*)^n a \, da^* \, \mathcal{D}^{-1} + q^{2n} \fint (bb^*)^n a^* \, da \, \mathcal{D}^{-1} &= -4 \left(\tfrac{1}{1-q^{2n+2}} - \tfrac{1}{1-q^{2n}} \right), \\ q^2 \fint (bb^*)^n a \, da^* \, \mathcal{D}^{-1} + \fint (bb^*)^n a^* \, da \, \mathcal{D}^{-1} &= -2(1 - q^2) \tfrac{1+q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} - \tfrac{4q^2}{1-q^{2n+2}} \end{aligned}$$

qui, après résolution, donne le résultat. □

Les intégrales non commutatives en $|\mathcal{D}|^{-2}$

Nous avons besoin de diviser ce calcul en deux p. Tout d'abord, nous calculerons toutes les intégrales du type $\fint x \, \delta(z) |\mathcal{D}|^{-2}$, avec $x \in \mathcal{A}(SU_q(2))$ et z un des générateurs. Le deuxième problème est le calcul de $\fint x \, \delta(y) \, \delta(z) \, |\mathcal{D}|^{-2}$, avec y et z des générateurs $\{a, a^*, b, b^*\}$.

Lemme 4.5.22. *Les seules intégrales non nulles a priori sont du type* $⨍ x\,\delta(z)\,|\mathcal{D}|^{-2}$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$⨍ (bb^*)^n b^*\delta(b)\,|\mathcal{D}|^{-2} = ⨍ (bb^*)^n b\delta(b^*)\,|\mathcal{D}|^{-2} = 0,$$
$$⨍ (bb^*)^n a\delta(a^*)\,|\mathcal{D}|^{-2} = \tfrac{4q^{2n}(1-q^2)}{(q^{2n+2}-1)(1-q^{2n})}\,, \quad n > 0$$
$$⨍ (bb^*)^n a^*\delta(a)\,|\mathcal{D}|^{-2} = \tfrac{4(1-q^2)}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n})}\,.$$

Démonstration. Puisque $a\delta(a^*) \simeq L_q + M_q - 1$ et $(bb^*)^n \simeq L_q^n + M_q^n$,

$$(bb^*)^n a\delta(a^*) \simeq L_q^{n+1} + M_q^{n+1} - L_q^n - M_q^n$$

et le deuxième résultat est obtenu grâce au Lemme 4.5.14. Les autres intégrales sont calculées d'une façon similaire. □

Lemme 4.5.23. *Les seules intégrales non nulles du type* $⨍ x\,dy\,dz\,|\mathcal{D}|^{-2}$ *sont, pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$⨍ (bb^*)^n\,(b^*)^2 db\,db\,|\mathcal{D}|^{-2} = \tfrac{4}{1-q^{2n+4}},$$
$$⨍ (bb^*)^n\,db\,db^*\,|\mathcal{D}|^{-2} = \tfrac{4}{1-q^{2n+2}},$$
$$⨍ (bb^*)^n\,(a^*b^*)(da\,db)\,|\mathcal{D}|^{-2} = 0,$$
$$⨍ (bb^*)^n\,(ab^*)(da^*\,db)\,|\mathcal{D}|^{-2} = 0,$$
$$⨍ (bb^*)^n\,(a^*b)(da\,db^*)\,|\mathcal{D}|^{-2} = 0,$$
$$⨍ (bb^*)^n\,(ab)(da^*\,db^*)\,|\mathcal{D}|^{-2} = 0,$$
$$⨍ (bb^*)^n\,(da\,da^*)\,|\mathcal{D}|^{-2} = \tfrac{4(q^{2n+2}-q^{2n})}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n})}\,, \quad n > 0$$
$$⨍ (bb^*)^n\,(da^*\,da)\,|\mathcal{D}|^{-2} = \tfrac{4(q^2-1)}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n})}\,.$$

Démonstration. Ceci résulte du Lemme 4.5.14 avec les équivalences modulo $\mathcal{R}$ du Lemme 4.5.15. □

4.6 Exemples d'action spectrale

Il est clair d'après le Théorème 4.4.3 que toute 1-forme du type ada, bdb, adb, a^*db, etc... ne contribue pas à l'action spectrale. En effet, seules les parties équilibrées des 1-formes peuvent éventuellement donner des termes non nuls dans les coefficients. On donne dans la table suivante les valeurs des termes $⨍ A^n\,|\mathcal{D}|^{-p}$ et $\zeta_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}}}(0)$ pour quelques exemples de 1-formes.
1) Clairement, l'action spectrale dépend de q : par exemple,

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_{a^*da}, \Phi, \Lambda) \;=\; 2\,\Phi_3\,\Lambda^3 - 8\,\Phi_2\,\Lambda^2 + \tfrac{q^2+15}{2(1-q^2)}\,\Phi_1\,\Lambda^1 + \tfrac{11q^4+36q^2+13}{3(q^4-1)}\,\Phi(0).$$

TABLE 4.1 – Valeurs d'intégrales non commutatives

$\mathbb{A}$	$⨍ A\,\lvert\mathcal{D}\rvert^{-3}$	$⨍ A^2\,\lvert\mathcal{D}\rvert^{-3}$	$⨍ A^3\,\lvert\mathcal{D}\rvert^{-3}$	$⨍ A\,\lvert\mathcal{D}\rvert^{-2}$	$⨍ A^2\,\lvert\mathcal{D}\rvert^{-2}$	$⨍ A\,\lvert\mathcal{D}\rvert^{-1}$	$\zeta_{\mathcal{D}_{\mathbb{A}}}(0)$
a^*da	2	2	2	$\frac{4q^2}{q^2-1}$	$\frac{4q^2(q^2+2)}{q^4-1}$	$\frac{3q^2+1}{2(q^2-1)}$	$\frac{11q^4+36q^2+13}{3(q^4-1)}$
b^*db	0	0	0	0	$\frac{-4}{q^4-1}$	$\frac{-2}{q^2-1}$	$\frac{4q^2}{q^4-1}$
ada^*	-2	2	-2	$\frac{-4}{q^2-1}$	$\frac{4(2q^2+1)}{q^4-1}$	$\frac{q^2+3}{2(q^2-1)}$	$\frac{13q^4+36q^2+11}{3(q^4-1)}$
bdb^*	0	0	0	0	$\frac{-4}{q^4-1}$	$\frac{-2}{q^2-1}$	$\frac{4q^2}{q^4-1}$

2) De plus, pour $B := a\,\delta a^*$ et $A := B + B^*$, on obtient puisque $B \simeq B^* \mod \mathcal{R}$,

$$⨍ A^p|\mathcal{D}|^{-k} = 2^p ⨍ B^p|\mathcal{D}|^{-k}, \quad 1 \le p \le k \le 3\,. \tag{4.52}$$

Ainsi, l'action spectrale de la 1-forme auto-adjointe $\mathbb{A} := ada^* + (ada^*)^*$ est

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}, \Phi, \Lambda) \;=\; 2\,\Phi_3\,\Lambda^3 + 16\,\Phi_2\,\Lambda^2 + \tfrac{q^2-33}{2(1-q^2)}\,\Phi_1\,\Lambda^1 + \tfrac{122q^4+168q^2-2}{3(q^4-1)}\,\Phi(0).$$

3) Lorsque $B_n := (bb^*)^n\,b\,\delta b^*$, d'après le Lemme (4.5.15), $B_n \simeq B_n^*$, donc pour $A_n := B_n + B_n^*$, l'équation (4.52) est toujours valide et $⨍ B_n^p\,|\mathcal{D}|^{-k}$ sont tous nuls sauf $⨍ B_n\,|\mathcal{D}|^{-1} = \frac{2}{1-q^{2n+2}}$ et $⨍ B_n^2\,|\mathcal{D}|^{-2} = \frac{4}{1-q^{4n+4}}$, donc

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathbb{A}_n}, \Phi, \Lambda) \;=\; 2\,\Phi_3\,\Lambda^3 - \tfrac{1}{2}\,\Phi_1\Lambda^1 + \tfrac{8}{1+q^{2n+2}}\,\Phi(0). \tag{4.53}$$

Remarquons que cette action spectrale existe toujours lorsque $q \to 1$!

Notons cependant que le procédé de symétrisation (4.52) n'est pas toujours valide en général, par exemple si $B := a\,\delta b$ et $A := B + B^*$, alors $⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-1} = \frac{8(q^4-q^2-1)}{(1-q^4)^2}$ while $⨍ B^2|\mathcal{D}|^{-1} = 0$ ou $⨍[B,\,B^*]|\mathcal{D}|^{-1} = \frac{4}{1-q^4}$.

4) L'action spectrale peut aussi être rendue indépendante de q : par exemple, si $\mathbb{A} = \frac{1}{1-q^2}\,\xi(\mathcal{D})$ (voir (4.44)), alors,

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathbb{A}}, \Phi, \Lambda) \;=\; 2\,\Phi_3\,\Lambda^3 - 8\,\Phi_2\,\Lambda^2 + \tfrac{15}{2}\,\Phi_1\,\Lambda^1 - \tfrac{13}{3}.$$

4.7 La sphère commutative $\mathbb{S}^3$

Puisque $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$, on obtient une représentation spinorielle concrète de l'algèbre suivante $\mathcal{A} := C^\infty(\mathbb{S}^3)$ sur le même espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et le même opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ avec (4.6) où $q = 1$, ce qui signifie que les q-nombres sont triviaux : $[\alpha] = \alpha$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\pi(a)\,|j\mu n\rangle\rangle &:= \alpha^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^+n^+\rangle\rangle + \alpha^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^+n^+\rangle\rangle,\\
\pi(b)\,|j\mu n\rangle\rangle &:= \beta^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^+n^-\rangle\rangle + \beta^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^+n^-\rangle\rangle,\\
\pi(a^*)\,|j\mu n\rangle\rangle &:= \tilde\alpha^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^-n^-\rangle\rangle + \tilde\alpha^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^-n^-\rangle\rangle,\\
\pi(b^*)\,|j\mu n\rangle\rangle &:= \tilde\beta^+_{j\mu n}\,|j^+\mu^-n^+\rangle\rangle + \tilde\beta^-_{j\mu n}\,|j^-\mu^-n^+\rangle\rangle
\end{aligned} \tag{4.54}$$

où

$$\alpha^+_{j\mu n} := \sqrt{j+\mu+1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{j+n+3/2}}{2j+2} & 0 \\ \frac{\sqrt{j-n+1/2}}{(2j+1)(2j+2} & \frac{\sqrt{j+n+1/2]}}{2j+1} \end{pmatrix},$$

$$\alpha^-_{j\mu n} := \sqrt{j-\mu}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{j-n+1/2}}{2j+1} & -\frac{\sqrt{j+n+1/2}}{2j(2j+1)} \\ 0 & \frac{\sqrt{j-n-1/2}}{2j} \end{pmatrix},$$

$$\beta^+_{j\mu n} := \sqrt{j+\mu+1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{j-n+3/2}}{2j+2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{j+n+1/2}}{(2j+1)(2j+2)} & \frac{\sqrt{j-n+1/2}}{2j+1} \end{pmatrix},$$

$$\beta^-_{j\mu n} := \sqrt{j-\mu}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{j+n+1/2}}{2j+1} & -\frac{\sqrt{j-n+1/2}}{2j(2j+1} \\ 0 & -\frac{\sqrt{j+n-1/2}}{2j} \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{\alpha}^{\pm}_{j\mu n} := (\alpha^{\mp}_{j^{\pm}\mu^- n^-})^*$, $\tilde{\beta}^{\pm}_{j\mu n} := (\beta^{\mp}_{j^{\pm}\mu^- n^+})^*$.

Notons que la représentation sur les vecteurs $v^j_{m,l}$ n'est pas aussi pratique que dans le cas non commutatif (voir (4.7)).

On peut vérifier que les générateurs $\pi(a)$, $\pi(b)$ et leurs adjoints commutent et que $[x,[\mathcal{D},y]]=0$ pour tout x, $y \in \mathcal{A}$.

4.7.1 Translation de l'opérateur de Dirac

En général, l'opérateur de Dirac est défini d'une façon plus symétrique que nous l'avons fait. Bien que cela ne soit pas absolument nécessaire ici, nous définissons pour le lecteur intéressé un opérateur de Dirac translaté :

$$\mathcal{D}' := \mathcal{D} + \lambda.$$

Par exemple, ceci donne pour $\lambda = -\frac{1}{2}$ dans le cas de $\mathbb{S}^3$ (voir [80]), $\mathcal{D}'\, v^j_{m,l} = (2j+1)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) v^j_{m,l}$ donc $v^j_{m,l}$ est un vecteur propre de $|\mathcal{D}'|$. On définit $D := \mathcal{D} + P_0$ et $D' := \mathcal{D}' + P'_0$ où P_0 est la projection sur $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$ et P'_0 est la projection sur $\operatorname{Ker}\mathcal{D}'$.

Comme le montre le lemme suivant, le calcul d'intégrales non commutatives impliquant $\mathcal{D}$ peut se réduire au calcul de certaines intégrales faisant uniquement intervenir $\mathcal{D}'$:

Lemme 4.7.1. *Si* $⨍' T := \operatorname{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(T|D'|^{-s}\big)$, *alors pour toute 1-forme* $\mathbb{A}$ *sur un triplet spectral de dimension* n,

$$⨍ A\,|D|^{-(n-2)} = ⨍' A\,|D'|^{-(n-2)} + \lambda\,(n-2) ⨍' A\,\mathcal{D}'|D'|^{-n} + \lambda^2\,\tfrac{(n-1)(n-2)}{2} ⨍' A\,|D'|^{-n},$$

$$⨍ A\,D^{-(n-2)} = ⨍' A\,D'^{-(n-2)} + \lambda\,(n-2) ⨍' A\,D'^{-(n-1)} + \lambda^2\,\tfrac{(n-1)(n-2)}{2} ⨍' A\,D'^{-n}.$$

Démonstration. Rappelons que d'après Proposition 1.3.8, pour tout opérateur pseudodifférentiel P,

$$⨍ P|D|^{-r} = \operatorname{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}\big(P|D|^{-r}|D'|^{-s}\big).$$

De plus, d'après le Lemme 1.3.3, pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}^*$

$$|D|^{-s} = |D'|^{-s} + \sum_{p=1}^{N} K_{p,s}\, Y^p\, |D'|^{-s} \mod OP^{-N-1-\Re(s)} \tag{4.55}$$

où $Y = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(-2\lambda D' + \lambda^2)^k D'^{-2k} \mod OP^{-N-1}$ et $K_{p,s}$ sont des nombres complexes qui peuvent être calculés explicitement. Précisément, $K_{p,s} = (-\frac{s}{2})^p\, V(p)$ où $V(p)$ est le volume du p-simplexe. Puisque la dimension spectrale est n, on travaille modulo $OP^{-(n+1)}$, et on obtient d'après (4.55), pour $s = n-2$, $|D|^{-(n-2)} = |D'|^{-(n-2)} + \lambda(n-2)\mathcal{D}'|D'|^{-n} + \lambda^2 \frac{(n-1)(n-2)}{2}|D'|^{-n}$ mod $OP^{-(n+1)}$.

Par conséquent, pour $P \in OP^0$ (les espaces OP^0 sont identiques pour $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$),

$$\fint P|D|^{-(n-2)} = \fint' P|D'|^{-(n-2)} + \lambda(n-2)\fint' P\mathcal{D}'|D'|^{-n} + \lambda^2 \frac{(n-1)(n-2)}{2}\fint' P|D'|^{-n}.$$

Puisque A et AF sont dans OP^0, on obtient les deux formules. □

4.7.2 Tadpole et action spectrale sur $\mathbb{S}^3$

On considère maintenant le triplet spectral commutatif $(C^\infty(\mathbb{S}^3),\, \mathcal{H},\, \mathcal{D})$. Il est 1-sommable puisque $\langle\!\langle j\mu n\, s \,|\, [F, \pi(x)]\, |j\mu n\, s\rangle\!\rangle = 0$ lorsque $x = a, a^*, b, b^*$ pour tout j, μ, n, $s = \uparrow, \downarrow$.

Toutes les intégrales du lemme précédent sont nulles pour $\mathbb{S}^3$:

Proposition 4.7.2. *Il n'existe pas de tadpole sur le triplet commutatif réel* $(C^\infty(\mathbb{S}^3),\, \mathcal{H},\, \mathcal{D})$. *Plus généralement, pour toute 1-forme* $\mathbb{A}$, $\fint \mathbb{A}F|\mathcal{D}|^{-p} = 0$ *pour* $p \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Puisque la représentation est réelle, la trace de $\mathbb{A}F|\mathcal{D}|^{-p}$ est réelle. Ainsi, $\fint \mathbb{A}F|\mathcal{D}|^{-p} = \fint \mathbb{A}^*F|\mathcal{D}|^{-p}$.

L'opérateur de réalité J introduit en (4.25) satisfait, lorsque $q = 1$, la relation $JxJ^{-1} = x^*$ pour $x \in \mathcal{A}$. Ainsi $J\mathbb{A}J^{-1} = -\mathbb{A}^*$ et $\fint \mathbb{A}F|\mathcal{D}|^{-p} = \fint J\,(\mathbb{A}^*F|\mathcal{D}|^{-p})\,J^{-1} = -\fint \mathbb{A}F|\mathcal{D}|^{-p}$ et $\fint \mathbb{A}F|\mathcal{D}|^{-p} = 0$. □

Pour toute 1-forme auto-adjointe $\mathbb{A}$, $\mathcal{D}_\mathbb{A} := \mathcal{D} + \widetilde{\mathbb{A}} = \mathcal{D}$. Ainsi, l'action spectrale de $\big(C^\infty(\mathbb{S}^3),\, \mathcal{H},\, \mathcal{D}\big)$ pour $\mathcal{D}_\mathbb{A}$ se trivialise

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_\mathbb{A}, \Phi, \Lambda) \;=\; 2\,\Phi_3\,\Lambda^3 - \tfrac{1}{2}\,\Phi_1\,\Lambda^1 + \mathcal{O}(\Lambda^{-1}). \tag{4.56}$$

Il est plus naturel de comparer l'action spectrale avec celle de $\mathcal{D} + \mathbb{A}$ sur la sphère commutative. D'après le Lemme 4.4.18 et une approche de noyau de la chaleur [65] :

$$\mathcal{S}(\mathcal{D} + \mathbb{A}, \Phi, \Lambda) \;=\; 2\,\Phi_3\,\Lambda^3 + \fint |\mathcal{D} + \mathbb{A}|^{-1}\,\Phi_1\,\Lambda^1 + \mathcal{O}(\Lambda^{-1})$$

puisque tous les termes de (1.6) dans Λ^{n-k} sont nuls pour k impair et $\zeta_{\mathcal{D}+\mathbb{A}}(0) = 0$ quand n est impair. On vérifie que $\fint |\mathcal{D} + \mathbb{A}|^{-2}$ est nul d'après le Lemme 1.3.10, les Lemmes 4.4.18 et la Proposition 4.7.2. De façon similaire, $\zeta_{\mathcal{D}+\mathbb{A}}(0) = 0$ car dans (1.11), tous les termes avec k impair sont nuls (même preuve que pour la Proposition 4.7.2) mais pour k pair, il n'est pas aisé de montrer que $\fint \mathbb{A}\mathcal{D}^{-1}\mathbb{A}\mathcal{D}^{-1} = 0$.

De plus, le terme de courbure ne dépend pas de $\mathbb{A}$:

Lemme 4.7.3. *Pour toute 1-forme $\mathbb{A}$ sur un triplet commutatif de dimension n basé sur une variété compacte Riemannienne spin^c sans bord, nous avons*

$$⨍ |\mathcal{D}+\mathbb{A}|^{-(n-2)} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-(n-2)}. \tag{4.57}$$

Démonstration. Se déduit de [68, première formule p.511] avec $\rho := \mathbb{A} = \mathbb{A}^*$, $N(\rho) = \rho$. On peut aussi utiliser [37, Proposition 1.149]. □

D'après le Lemme 1.3.10,

$$⨍ |\mathcal{D}+\mathbb{A}|^{-(n-2)} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-(n-2)} + \tfrac{n(n-2)}{4} ⨍ (\mathbb{A}F)^2|\mathcal{D}|^{-3} + \tfrac{(n-2)^2}{4} ⨍ \mathbb{A}^2|\mathcal{D}|^{-3}$$

où $X := \mathbb{A}\mathcal{D}+\mathcal{D}\mathbb{A}+\mathbb{A}^2$ et $[|\mathcal{D}|,\mathbb{A}] \in OP^0$, mais il n'est pas facile de montrer directement que les deux derniers termes s'annulent : par exemple ici, pour $\mathbb{B} = b[\mathcal{D}, b^*]$, nous obtenons par calcul direct (en utilisant la translation $\mathcal{D}'$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}^2|\mathcal{D}'|^{-3-s}\right) &= \mathrm{Tr}\left((\mathbb{B}^*)^2|\mathcal{D}'|^{-3-s}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{B}^*|\mathcal{D}'|^{-3-s}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}^*\mathbb{B}|\mathcal{D}'|^{-3-s}\right)\\ &= \tfrac{4}{3}\sum_{2j\in\mathbb{N}} \tfrac{j+1}{(2j+1)^{2+s}}\,,\end{aligned}$$

donc $⨍ \mathbb{B}^2|\mathcal{D}'|^{-3} = \frac{2}{3}$. De façon similaire, on vérifie que $⨍ (\mathbb{B}F)^2|\mathcal{D}|^{-3} = \frac{1}{2}⨍ \mathbb{B}F\mathbb{B}^*F|\mathcal{D}|^{-3} = -\frac{2}{9}$. Ainsi si $\mathbb{A} := \mathbb{B}+\mathbb{B}^*$, $⨍ \mathbb{A}^2|\mathcal{D}|^{-3} = ⨍ \mathbb{A}^2|\mathcal{D}'|^{-3} = 4$ et $⨍ (\mathbb{A}F)^2|\mathcal{D}|^{-3} = -\frac{4}{3}$ ce qui implique (4.57).

Ainsi pour toute 1-forme $\mathbb{A}$ sur la 3-sphère,

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}+\mathbb{A},\Phi,\Lambda) \;=\; 2\,\Phi_3\,\Lambda^3 - \tfrac{1}{2}\,\Phi_1\,\Lambda^1 + \mathcal{O}(\Lambda^{-1},\mathbb{A})$$

ce qui est bien différent de (4.53), car ce dernier contient un terme non nul en Λ^0 pour $q = 1$.

4.8 Appendice

A. Démonstration du Lemme 4.4.13

(i) En utilisant les mêmes notations que le Lemme 4.4.12, nous obtenons par définition de τ_1,

$$\tau_1\big(\pi_+(t_{k,p})\big) = \delta_{k,0}\,\delta_{p,0}\;\delta_{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\beta_1+\beta_2-\beta_3,0}\,, \tag{4.58}$$

$$\tau_1\big(\pi_-(u_{k,p})\big) = \delta_{\widetilde{k},0}\,\delta_{\widetilde{p},0}\;\delta_{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\beta_1-\beta_2+\beta_3,0}\,. \tag{4.59}$$

On obtient $\tau_1\big(\pi_+(t_{k,p})\big)\,\tau_1\big(\pi_-(u_{k,p})\big) = \delta_{k,0}\,\delta_{p,0}\,\delta_{\alpha_2,0}\,\delta_{\alpha_3,0}\,\delta_{\beta_2,0}\,\delta_{\beta_3,0}\,\delta_{\alpha_1,-\beta_1}$, donc le Lemme 4.4.12 donne le résultat.

(ii) Puisque $\pi_+(t_{k,p})\varepsilon_n = q^+_{k,p,n}\varepsilon_{n+r^+_{k,p}}$ et $\pi_-(u_{k,p})\varepsilon_n = q^-_{k,p,n}\varepsilon_{n+r^-_{k,p}}$,

$$\tau_0\big(\pi_+(t_{k,p})\big) = \delta_{r^+_{k,p},0}\sum_{n=0}^{\infty}\big(q^+_{k,p,n} - \delta_{k,0}\,\delta_{p,0}\,\delta_{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\beta_1+\beta_2-\beta_3,0}\big)\,, \tag{4.60}$$

$$\tau_0\big(\pi_-(u_{k,p})\big) = \delta_{r^-_{k,p},0}\sum_{n=0}^{\infty}\big(q^-_{k,p,n} - \delta_{\widetilde{k},0}\,\delta_{\widetilde{p},0}\,\delta_{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\beta_1-\beta_2+\beta_3,0}\big)\,. \tag{4.61}$$

Avec (4.58) et (4.61),

$$\begin{aligned}\tau_1\big(\pi_+(t_{k,p})\big)\,\tau_0\big(\pi_-(u_{k,p})\big) &= \delta_{k,0}\,\delta_{p,0}\,\delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3}\,\delta_{\alpha_1,-\beta_1}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\delta_{k,0}\,\delta_{p,0}\,q^-_{k,p,n}-\delta_{\alpha_3+\beta_3,0}\big)\\ &= \delta_{k,0}\,\delta_{p,0}\,\delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3}\,\delta_{\alpha_1,-\beta_1}w_1(\beta_1,\alpha_3+\beta_3).\end{aligned}$$

D'après (4.59) et (4.60),

$$\begin{aligned}\tau_0\big(\pi_+(t_{k,p})\big)\,\tau_1\big(\pi_-(u_{k,p})\big) &= \delta_{\widetilde{k},0}\,\delta_{\widetilde{p},0}\,\delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3}\,\delta_{\alpha_1,-\beta_1}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\delta_{\widetilde{k},0}\,\delta_{\widetilde{p},0}\,q^+_{k,p,n}-\delta_{\alpha_3+\beta_3,0}\big)\\ &= \delta_{\widetilde{k},0}\,\delta_{\widetilde{p},0}\,\delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3}\,\delta_{\alpha_1,-\beta_1}w_1(\beta_1,\alpha_3+\beta_3).\end{aligned}$$

Le Lemme 4.4.12 donne le résultat.

B. Démonstration du Lemme 4.4.14

Nous avons

$$\tau_1(\pi_+(t_{K,P})) = \delta_{K,0}\,\delta_{P,0}\,\delta_{A_1+A_2-A_3+B_1+B_2-B_3,0}\,, \tag{4.62}$$
$$\tau_1(\pi_-(u_{K,P})) = \delta_{\widetilde{K},0}\,\delta_{\widetilde{P},0}\,\delta_{A_1-A_2+A_3+B_1-B_2+B_3,0}\,. \tag{4.63}$$

et

$$\tau_0(\pi_+(t_{K,P})) = \delta_{r^+_{K,P},0}\sum_{n=0}^{\infty}\big(q^+_{K,P,n}-\delta_{K,0}\,\delta_{P,0}\,\delta_{A_1+A_2-A_3+B_1+B_2-B_3,0}\big)\,, \tag{4.64}$$
$$\tau_0(\pi_-(u_{K,P})) = \delta_{r^-_{K,P},0}\sum_{n=0}^{\infty}\big(q^-_{K,P,n}-\delta_{\widetilde{K},0}\,\delta_{\widetilde{P},0}\,\delta_{A_1-A_2+A_3+B_1-B_2+B_3,0}\big)\,. \tag{4.65}$$

(i) Les équations (4.62) et (4.63) donnent $(\tau_1\otimes\tau_1)\,r(\underline{A}\,\underline{A}')^0 = \delta_{A_1,-B_1}\delta_{A_2,0}\delta_{A_3,0}\delta_{B_2,0}\delta_{B_3,0}\,\lambda_{0,0}$. Un calcul de $v_{0,0}$ avec $\delta_{A_1,-B_1}\,\delta_{A_2,0}\,\delta_{A_3,0}\,\delta_{B_2,0}\,\delta_{B_3,0}=1$ donne le résultat.

(ii) Les équations (4.62) et (4.65) impliquent

$$\begin{aligned}\tau_1(\pi_+(t_{K,P}))\,\tau_0(\pi_-(u_{K,P})) = {}& \delta_{K,0}\,\delta_{P,0}\,\delta_{A_2+B_2,A_3+B_3}\,\delta_{A_1,-B_1}\\ &\times v_{\beta_1,\alpha_1',\beta_1'}((\alpha_2+\beta_2+\alpha_3+\beta_3)(\alpha_1'+\beta_1'),A_3+B_3).\end{aligned}$$

Les équations (4.64) et (4.63) impliquent

$$\begin{aligned}\tau_0(\pi_+(t_{K,P}))\,\tau_1(\pi_-(u_{K,P})) = {}& \delta_{\widetilde{K},0}\,\delta_{\widetilde{P},0}\,\delta_{A_2+B_2,A_3+B_3}\,\delta_{A_1,-B_1}\\ &\times v_{\beta_1,\alpha_1',\beta_1'}((\alpha_2+\beta_2+\alpha_3+\beta_3)(\alpha_1'+\beta_1'),A_3+B_3)\end{aligned}$$

et le résultat suit.

(iii) Avec (4.39) un calcul direct donne

$$\tau_1(\pi_+(t_{K,P})) = \delta_{K,0}\,\delta_{P,0}\,\delta_{A_1+A_2-A_3+B_1+B_2-B_3,0}\,, \tag{4.66}$$
$$\tau_1(\pi_-(u_{K,P})) = \delta_{\widetilde{K},0}\,\delta_{\widetilde{P},0}\,\delta_{A_1-A_2+A_3+B_1-B_2+B_3,0}\,. \tag{4.67}$$

D'après (4.66) et (4.67), $(\tau_1 \otimes \tau_1)\big(r(\underline{A}\,\underline{A}'\,\underline{A}'')^\circ\big) = \delta_{A_1,-B_1}\,\delta_{A_2,0}\,\delta_{A_3,0}\,\delta_{B_2,0}\,\delta_{B_3,0}\,v_{0,0}$. Un calcul de $v_{0,0}$ avec $\delta_{A_1,-B_1}\,\delta_{A_2,0}\,\delta_{A_3,0}\,\delta_{B_2,0}\,\delta_{B_3,0} = 1$ donne le résultat.

(iv) Nous avons $\delta(M^\alpha_\beta)M^{\alpha'}_{\beta'} = \delta(x)\delta(y)x'\delta(y') + x\delta^2(y)x'\delta(y')$ où x, x', y, y' sont des monômes ($\underline{\pi}$ omis). Puisque

$$\underline{\pi}(x) = \sum_k \tbinom{\alpha}{k} a^{\widehat{k}_1}_{+,\alpha_1} a^{k_1}_{-,\alpha_1} b^{\widehat{k}_2}_+ b^{k_2}_- b^{*\,\widehat{k}_3}_+ b^{*\,k_3}_- =: \sum_k \tbinom{\alpha}{k} c_k,$$

on obtient $\delta(\underline{\pi}(x)) = \sum_k g(k)\tbinom{\alpha}{k}\, c_k$.

De façon similaire, $\delta(\underline{\pi}(y)) = \sum_p g(p)\tbinom{\beta}{p}\, c_p$ et $\delta^2(\underline{\pi}(y)) = \sum_p g(p)^2\tbinom{\beta}{p} c_p$.

Ainsi, avec $c_{K,P} := c_k\, c_p\, c_{k'}\, c_{p'}$,

$$\begin{aligned}
\delta(x)\delta(y)x'\delta(y') &= \sum_{K,P} g(k)\, g(p)\, g(p')\tbinom{\alpha}{K}\tbinom{\beta}{P}\, c_{K,P}\,,\\
x\delta^2(y)x'\delta(y') &= \sum_{K,P} g(p)^2 g(p')\tbinom{\alpha}{K}\tbinom{\beta}{P}\, c_{K,P}\,,\\
r(\delta(M^\alpha_\beta)M^{\alpha'}_{\beta'})^0 &= \sum_{K,P} \delta_{h_{K,P},0}\big(g(k)+g(p)\big)\, g(p)\, g(p')\,\tbinom{\alpha}{K}\tbinom{\beta}{P}\, r(c_{K,P}) =: \sum_{K,P} \lambda_{K,P}\; r(c_{K,P})\,.
\end{aligned}$$

Puisque $r(c_k) = (-q)^{k_1}(-1)^{\alpha_2+\alpha_3}\pi_+(t_k)\otimes\pi_-(u_k)$ avec t_k, u_k défini par

$$t_k := a^{\widehat{k}_1}_{\alpha_1}\, b^{k_1}\, a^{\widehat{k}_2}\, b^{k_2}\, a^{*\widehat{k}_3}\, b^{k_3} \text{ et } u_k := a^{\widehat{k}_1}_{\alpha_1}\, b^{k_1}\, b^{\widehat{k}_2}\, a^{*k_2}\, b^{\widehat{k}_3}\, a^{k_3},$$

on obtient

$$r(\delta(M^\alpha_\beta)M^{\alpha'}_{\beta'})^0 = \sum_{K,P} \lambda_{K,P}\,(-q)^{k_1+k_1'+p_1+p_1'}(-1)^{A_2+A_3+B_2+B_3}\pi_+(t_{K,P})\otimes\pi_-(u_{K,P})$$

où $t_{K,P} = t_k t_p t_{k'} t_{p'}$ et $u_{K,P} = u_k u_p u_{k'} u_{p'}$. Des calculs directs donnent

$$\begin{aligned}
\tau_1\big(\pi_+(t_{K,P})\big) &= \delta_{K,0}\,\delta_{P,0}\,\delta_{A_1+A_2-A_3+B_1+B_2-B_3,0}\,,\\
\tau_1\big(\pi_-(u_{K,P})\big) &= \delta_{\widetilde{K},0}\,\delta_{\widetilde{P},0}\,\delta_{A_1-A_2+A_3+B_1-B_2+B_3,0}\,.
\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit.

(v) Pour la dernière égalité, notons que d'après (iv)

$$\fint \delta(A)A|\mathcal{D}|^{-3} = -2\sum_{\alpha_1,\alpha_1',\beta_1,\beta_1'} (\alpha_1'+\beta_1')\beta_1\beta_1'\, A^{\beta_1 00}_{\alpha_1 000}\, A^{\beta_1' 00}_{\alpha_1' 00}\,\delta_{\alpha_1+\alpha_1'+\beta_1+\beta_1',0}.$$

Le changement de variable $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1'$, $\beta_1 \leftrightarrow \beta_1'$, implique par symétrie que ceci est égal à zero.

C. Démonstration du Lemme 4.4.16

(i) En suivant les notations du Lemme 4.4.12, nous avons

$$M^\alpha_\beta J M^{\alpha'}_{\beta'} J^{-1} = \sum_{K,P} v_{K,P}\, c_{k,p} J c_{k',p'} J^{-1}$$

où $K = (k, k')$, $P = (p, p')$, $\lambda_{K,P} = g(p)g(p')v_k v_{k'} w_p w_{p'}$. Ainsi,

$$\widetilde{\rho}(M_\beta^\alpha J M_{\beta'}^{\alpha'} J^{-1}) = (-1)^{A_2+A_3+B_2+B_3} \sum_{K,P} (-q)^{k_1+k_1'+p_1+p_1'} \lambda_{K,P}\, T_{K,P}^+ \otimes T_{K,P}^-$$

où $T_{K,P}^+ := \pi_+'(t_k t_p)\widehat{\pi}_+(t_{k'} t_{p'})$ et $T_{K,P}^- := \pi_-'(u_k u_p)\widehat{\pi}_-(u_{k'} u_{p'})$ avec

$$\begin{aligned} t_k &:= a_{\alpha_1}^{\widehat{k}_1}\, b^{*k_1}_{\alpha_1}\, a^{\widehat{k}_2}\, b^{*k_2}\, a^{*\widehat{k}_3} b^{k_3}, \\ u_k &:= a_{\alpha_1}^{\widehat{k}_1}\, b^{*k_1}_{\alpha_1}\, b^{\widehat{k}_2}\, a^{*k_2}\, b^{*\widehat{k}_3} a^{k_3}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \tau_1(T_{K,P}^+) &= \delta_{K,0}\, \delta_{P,0}\, \delta_{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\beta_1+\beta_2-\beta_3,0}\, \delta_{\alpha_1'+\alpha_2'-\alpha_3'+\beta_1'+\beta_2'-\beta_3',0}\,, \\ \tau_1(T_{K,P}^-) &= \delta_{\widetilde{K},0}\, \delta_{\widetilde{P},0}\, \delta_{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\beta_1-\beta_2+\beta_3,0}\, \delta_{\alpha_1'-\alpha_2'+\alpha_3'+\beta_1'-\beta_2'+\beta_3',0} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

(ii) En utilisant les relations de commutation de $\mathcal{A}$, on voit qu'il existe des fonctions réelles de (K, P), notées $\sigma_{K,P}^t$ et $\sigma_{K,P}^u$ telles que

$$\begin{aligned} T_{K,P}^+ &= q^{\sigma_{K,P}^t}\, \pi_+'(t_{k,p})\widehat{\pi}_+(t_{k',p'}), \\ T_{K,P}^- &= q^{\sigma_{K,P}^u}\, \pi_-'(u_{k,p})\widehat{\pi}_-(u_{k',p'}), \\ t_{k,p} &:= a_{\alpha_1}^{\widehat{k}_1}\, a^{\widehat{k}_2}\, a^{*\widehat{k}_3}\, a_{\beta_1}^{\widehat{p}_1}\, a^{\widehat{p}_2}\, a^{*\widehat{p}_3}\, b^{*k_1}_{\alpha_1}\, b^{*p_1}_{\beta_1}\, b^{*k_2+p_2} b^{k_3+p_3}, \\ u_{k,p} &:= a_{\alpha_1}^{\widehat{k}_1}\, a^{*k_2}\, a^{k_3}\, a_{\beta_1}^{\widehat{p}_1}\, a^{*p_2}\, a^{p_3}\, b^{*k_1}_{\alpha_1}\, b^{*p_1}_{\beta_1}\, b^{\widehat{k}_2+\widehat{p}_2} b^{*\widehat{k}_3+\widehat{p}_3}. \end{aligned}$$

Nous avons, sous l'hypothèse $\tau_1(T_{K,P}^-) = 1$,

$$\begin{aligned} &\widehat{\pi}_+(t_{k',p'})\varepsilon_{m,2j} = (-1)^{\lambda'} q^{(2j-m)\lambda'}\, q^{\uparrow_{\alpha_1'}}_{2j-m-s+\beta_1',|\alpha_1'|}\, q^{\uparrow_{\beta_1'}}_{2j-m-s,|\beta_1'|}\, \varepsilon_{m+s,2j}\,, \\ &s := -\alpha_2' + \alpha_3' - \beta_2' + \beta_3' = \alpha_1' + \beta_1'\,, \\ &\lambda' := \alpha_2' + \alpha_3' + \beta_2' + \beta_3'\,, \\ &\lambda := \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3 \\ &\tau_1(T_{K,P}^+) = \delta_{\lambda,0}\, \delta_{\lambda',0}\,. \end{aligned}$$

et alors,

$$\begin{aligned} &(T_{K,P}^+)_{m,2j} = q^{\sigma_{K,P}^t + s\lambda}(-1)^{\lambda'} q^{(2j-m)\lambda' + m\lambda}\, F_m\, F_{2j-m}'\, \delta_{A_1+B_1,0}\,, \\ &F_{2j-m}' := q^{\uparrow_{\alpha_1'}}_{2j-m-\alpha_1',|\alpha_1'|}\, q^{\uparrow_{\beta_1'}}_{2j-m-\alpha_1'-\beta_1',|\beta_1'|}\,, \\ &F_m := q^{\uparrow_{\alpha_1}}_{m-\alpha_1,|\alpha_1|} q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m-\beta_1-\alpha_1,|\beta_1|}\,. \end{aligned}$$

En suivant la preuve du Lemme 4.4.7, nous voyons que $\tau_0(T_{K,P}^+)$ est éventuellement non nul dans les deux cas $\lambda' = 0$ ou $\lambda = 0$.

Supposons d'abord $\lambda = \lambda' = 0$. Dans ce cas, nous avons

$$\tau_0(T^+_{K,P}) = \lim_{2j\to\infty} \sum_{m=0}^{2j} \big((q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|} q^{\uparrow_{\beta'_1}}_{2j-m,|\beta'_1|})^2 - 1\big) = \sum_{m=0}^{\infty} \big((q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|})^2 - 1\big) + \sum_{m=0}^{\infty} \big((q^{\uparrow_{\beta'_1}}_{m,|\beta'_1|})^2 - 1\big)$$

où la deuxième égalité provient du Lemme 4.4.17.

Dans le cas $(\lambda = 0, \lambda' > 0)$, on obtient $\alpha'_1 = -\beta'_1$ et ainsi,

$$(T^+_{K,P})_{m,2j} = q^{\sigma^t_{K,P}} q^{m\lambda} \, (q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|} q^{\uparrow_{\beta'_1}}_{2j-m,|\beta'_1|})^2 \delta_{\alpha_1+\beta_1,0}.$$

Notons $U_{2j} = \sum_{m=0}^{2j} q^{m\lambda} \, (q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|} q^{\uparrow_{\beta'_1}}_{2j-m,|\beta'_1|})^2$ et $L_{2j} = \sum_{m=0}^{2j} q^{m\lambda} \, (q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|})^2$.

Supposons $\beta'_1 > 0$. Puisque $(q^{\uparrow_{\beta'_1}}_{2j-m,|\beta'_1|})^2 - 1 = \sum_{|p|_1\neq 0, p_i\in\{0,1\}} (-1)^{|p|_1} q^{r_p} \, q^{2(2j-m)|p|_1}$ où on a noté $r_p = 2 + \cdots + 2\beta'_1$. Comme dans la preuve du Lemme 4.4.7 (ii), on peut conclure que $U_{2j} - L_{2j}$ converge vers 0. Le cas $\beta'_1 \leq 0$ est similaire.

Dans le cas $(\lambda > 0, \lambda' = 0)$, les arguments sont identiques, en remplaçant λ par λ' et α_1, β_1 par α'_1, β'_1. Finalement,

$$\tau_0(T^+_{K,P})\tau_1(T^-_{K,P}) = \delta_{\widetilde{K},0} \, \delta_{\widetilde{P},0} \, \delta_{\alpha_1,-\beta_1} \, \delta_{\alpha'_1,-\beta'_1} (\delta_{\lambda',0} \, \delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3} \, s_{\alpha,\beta} + \delta_{\lambda,0} \, \delta_{\alpha'_2+\beta'_2,\alpha'_3+\beta'_3} \, s_{\alpha',\beta'}),$$

$$s_{\alpha\beta} := q^{\beta_1(\alpha_3-\alpha_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(q^{m\lambda} \, (q^{\uparrow_{\beta_1}}_{m,|\beta_1|})^2 - \delta_{\lambda,0}\right).$$

Un calcul similaire de $\tau_0(T^-_{K,P})$ peut être fait en suivant les mêmes arguments. On trouve finalement

$$\tau_1(T^+_{K,P})\tau_0(T^-_{K,P}) = \delta_{K,0} \, \delta_{P,0} \, \delta_{\alpha_1,-\beta_1} \, \delta_{\alpha'_1,-\beta'_1} (\delta_{\lambda',0} \, \delta_{\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3} \, s_{\alpha,\beta} + \delta_{\lambda,0} \, \delta_{\alpha'_2+\beta'_2,\alpha'_3+\beta'_3} \, s_{\alpha',\beta'})$$

et le résultat s'en déduit.

(iii) Les mêmes arguments que pour (i) s'appliquent ici avec des changements mineurs.

(iv) est une conséquence du modification légère de la preuve du Lemme 4.4.14 (iv).

(v) est une conséquence directe de (i, ii, iii, iv).

D. Démonstration du Lemme 4.4.17

On donne ici une preuve pour β et $\beta' > 0$, les autres cas étant similaires.

Puisque $(q^{\uparrow_\beta}_{m,|\beta|})^2 = \sum_{p_i\in\{0,1\}} (-1)^{|p|_1} q^{r_p} q^{2|p|_1 m}$ où $p = (p_1, \cdots, p_\beta)$ et $r_p := 2(p_1 + \cdots + \beta p_\beta)$, on obtient, avec les notations $\lambda_{p,p'} := (-1)^{|p+p'|_1} q^{r_p + r_{p'}}$ et $U_{2j} := \sum_{m=0}^{2j} (q^{\uparrow_\beta}_{m,|\beta|} q^{\uparrow_{\beta'}}_{2j-m,|\beta'|})^2 - 1$,

$$\begin{aligned} U_{2j} &= \sum_{m=0}^{2j} \sum_{|p+p'|_1>0} \lambda_{p,p'} q^{2|p|_1 m + 2|p'|_1(2j-m)} \\ &= \sum_{|p|_1\geq|p'|_1, |p|_1>0} \lambda_{p,p'} V_{2j,p,p'} + \sum_{|p|_1<|p'|_1, |p'|_1>0} \lambda_{p,p'} V'_{2j,p,p'} \end{aligned}$$

où

$$V_{2j,p,p'} = q^{4j|p'|_1} \sum_{m=0}^{2j} q^{2(|p|_1-|p'|_1)m}, \qquad V'_{2j,p,p'} = q^{4j|p|_1} \sum_{m=0}^{2j} q^{2(|p'|_1-|p|_1)m}.$$

Il est clair que $V_{2j,p,p'}$ a 0 pour limite quand $j \to \infty$ et $|p'|_1 > 0$, et $V'_{2j,p,p'}$ a 0 pour limite quand $j \to \infty$ et $|p|_1 > 0$. Par conséquent,

$$U_{2j} = \sum_{|p|_1>0} \lambda_{p,0} V_{2j,p,0} + \sum_{|p'|_1>0} \lambda_{0,p'} V'_{2j,0,p'} + o(1).$$

Le résultat s'en déduit puisque $\sum_{m=0}^{2j} \left((q_{m,|\beta|}^{\uparrow_\beta})^2 - 1 \right) = \sum_{|p|_1>0} \lambda_{p,0} V_{2j,p,0}$ et

$$\sum_{m=0}^{2j} \left((q_{m,|\beta'|}^{\uparrow_{\beta'}})^2 - 1 \right) = \sum_{|p'|_1>0} \lambda_{0,p'} V'_{2j,0,p'} \, .$$

Chapitre 5

Tadpoles et triplets spectraux commutatifs

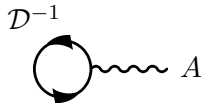
5.1 Introduction

L'histoire du résidu non commutatif est aujourd'hui assez longue [89], nous la résumons donc ici brièvement. Après certaines approches de Adler [2] et Manin [103] sur l'équation de Korteweg-de Vries en utilisant une trace sur l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels à une dimension, et l'approche de Guillemin de la loi de Weyl sur les valeurs propres d'un opérateur elliptique [72], le résidu non commutatif a été essentiellement introduit par Wodzicki dans sa thèse [150]. Ce résidu donne l'unique trace non triviale sur l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels. Un lien entre ce résidu et la trace de Dixmier a alors été donné par Connes dans [25]. Grâce à Connes encore une fois [28, 29], le cadre classique des opérateurs pseudodifférentiels sur les variétés riemanniennes sans bord a été étendu au cadre non commutatif où la variété est remplacée par une algèbre $\mathcal{A}$ non nécessairement commutative, et un opérateur de type Dirac $\mathcal{D}$ via la notion de triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ où $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert support de l'action de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$. La trace de Dixmier précédente a alors été étendue à l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels naturellement associée au triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. Ce point de vue spectral apparaît assez naturel dans le cadre général de la géométrie non commutative qui va au delà de la géométrie riemannienne. D'un point de vue physique, ce cadre a de nombreux avantages : l'approche spectrale est motivée par la physique quantique, mais pas seulement, puisque les observables classiques et les infinitésimaux sont maintenant traités de la même façon et la trace de Dixmier a un lien avec la renormalisation. Il est intéressant de constater que la plupart des notions de la géométrie classique telles que celles de la relativité générale peuvent s'étendre dans ce cadre réellement non commutatif. Par exemple, certaines actions physiques ont toujours un sens [25] et utilisent la trace de Dixmier pour calculer l'action de Yang–Mills dans le contexte de la géométrie différentielle non commutative. Un autre exemple est donné par l'action de Einstein–Hilbert : sur une variété compacte riemannienne de dimension 4, $⨍ \mathcal{D}^{-2}$ coincide (modulo un scalaire universel) avec l'action de Einstein–Hilbert, où $⨍$ est précisément le résidu non commutatif, un point d'abord remarqué par Connes. Ce fait a été prouvé aussi par un calcul technique [90] (voir aussi [1, 88]).

Depuis, le cas des variétés compactes avec bord a été étudié, rendant plus clair les liens qui existent entre les résidus non commutatifs, la trace de Dixmier et le développement du noyau de la chaleur. Ceci a été fait dans le cadre de l'algèbre de Boutet de Monvel [55, 71, 124], dans le cas

de singularités coniques [99, 123] ou quand les symboles sont log-polyhomogènes [98]. De plus, il existe des applications du résidu non commutatif sur ces variétés à la gravité classique [147] et à l'unification de la gravité avec les interactions fondamentales [23]. En théorie des champs, le calcul des divergences à une boucle, les anomalies et les différentes asymptotiques de l'action effective sont directement reliés à la méthode du noyau de la chaleur [141], donc les résultats mathématiques précédents ont des applications profondes en physique.

Nous sommes intéressé dans ce chapitre par les annulations éventuelles de termes apparaissant dans l'action spectrale de Chamseddine–Connes (1.6). Nous verrons essentiellement le cas des triplets spectraux commutatifs, où il apparaît qu'il n'existe pas de tadpole (voir la Définition 1.4.3). En particulier, les termes du type $⨍ A\mathcal{D}^{-1}$ sont nuls : en théorie des champs, $\mathcal{D}^{-1}$ est le propagateur de Feynman et $A\mathcal{D}^{-1}$ est un graphe à une boucle avec une ligne interne fermionique et une ligne externe bosonique A, qui ressemble à un têtard (tadpole en anglais). Plus génralement, les tadpoles sont les termes A-linéaires dans (1.6).



Dans [114], des calculs de $⨍ |\mathcal{D}|^{-k}$ sont présentés et une formule du type (1.11) apparaît aussi dans [100] dans le contexte des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques.

Nous étudions, en section 5.2, l'existence de tadpoles pour les variétés avec bord, en considérant, après Chamseddine et Connes [23], le cas d'une condition au bord chirale sur l'opérateur de Dirac. Une des motivations de Chamseddine et Connes a été de montrer que les deux premiers termes de l'action spectrale ont alors la même forme que l'action euclidienne modifiée utilisée en gravitation. On généralise cette approche au cas de l'opérateur perturbé par une fluctuation interne, et on observe alors qu'il n'existe pas de tadpole jusqu'à l'ordre 5.

Cependant, cette approche étant basée sur les calculs explicites des premiers coefficients du noyau de la chaleur sur les variétés ayant une condition mixte au bord, nous ne pouvons donc pas conclure que tous les tadpoles s'annulent. Nous étudions alors par la suite le cas des variétés sans bord, en utilisant une autre méthode.

Après quelques propriétés utiles des liens entre $⨍$ le résidu de Wodzicki, nous montrons en section 5.3, en utilisant des résultats de 1.4 et des techniques pseudodifférentielles, que beaucoup d'intégrales de type tadpole s'annulent sur les variétés sans bord.

5.2 Tadpoles et variétés spinorielles compactes avec bord

Soit M une variété lisse compacte riemannienne de dimension d avec bord lisse ∂M et soit V un fibré vectoriel lisse sur M. On note dx (resp. dy) la forme volume riemannienne sur M (resp. sur ∂M.)

Rappelons qu'un opérateur différentiel P est de type Laplace s'il est localement de la forme

$$P = -(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \mathbb{A}^\mu\partial_\mu + \mathbb{B}) \tag{5.1}$$

où $(g^{\mu\nu})_{1\leq\mu,\nu\leq d}$ est la matrice inverse associée à la métrique g sur M, et $\mathbb{A}^\mu$ et $\mathbb{B}$ sont des $L(V)$-sections lisses sur M (endomorphismes). Un opérateur différentiel D est de type Dirac si D^2 est

de type Laplace, ou de façon équivalente, il peut s'écrire localement

$$D = -i\gamma^\mu \partial_\mu + \phi$$

où $(\gamma^\mu)_{1\leq\mu\leq d}$ donne à V une structure de module de Clifford : $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{Id}_V$, $(\gamma^\mu)^* = \gamma^\mu$.

Un cas particulier est donné par :

$$D = -i\gamma^\mu(\partial_\mu + \omega_\mu) \tag{5.2}$$

où les ω_μ sont dans $C^\infty\big(L(V)\big)$.

Si P est un opérateur de type Laplace de la forme (5.1), alors (voir [65, Lemme 1.2.1]) il existe une unique connexion ∇ sur V et un unique endomorphisme E tel que $P = L(\nabla, E)$ où par définition

$$L(\nabla, E) := -(\mathrm{Tr}_g\,\nabla^2 + E), \quad \nabla^2(X,Y) := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{\nabla^g_X Y}\,,$$

X, Y sont des champs de vecteurs sur M et ∇^g est la connexion de Levi-Civita sur M. Localement

$$\mathrm{Tr}_g\,\nabla^2 := g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\nabla_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\nabla_\rho)$$

où $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ sont les coefficients de Christoffel de ∇^g. De plus (avec ces coordonnées locales sur T^*M et V), $\nabla = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \omega_\mu)$ et E sont reliés à $g^{\mu\nu}$, $\mathbb{A}^\mu$ et $\mathbb{B}$ par

$$\omega_\nu = \tfrac{1}{2} g_{\nu\mu}(\mathbb{A}^\mu + g^{\sigma\varepsilon}\Gamma^\mu_{\sigma\varepsilon}\,\mathrm{Id})\,, \tag{5.3}$$

$$E = \mathbb{B} - g^{\nu\mu}(\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu\omega_\mu - \omega_\sigma\Gamma^\sigma_{\nu\mu})\,. \tag{5.4}$$

Supposons que $P = L(\nabla, E)$ soit un opérateur de type Laplace sur M, et χ un endomorphisme de $V_{\partial M}$ tel que $\chi^2 = \mathrm{Id}_V$. On étend χ sur un voisinage tubulaire $\mathcal{C}$ de ∂M dans M avec la condition $\nabla_d(\chi) = 0$ où la d^{me} coordonée est la coordonnée radiale (la distance géodésique d'un point dans M au bord ∂M).

Soient $V_\pm := \Pi_\pm V$ les sous-fibrés de V sur $\mathcal{C}$ où $\Pi_\pm := \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_V \pm\chi)$ sont les projections sur les espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 de χ. On fixe un endomorphisme auxiliaire S sur $V_{+\partial M}$ étendu à $\mathcal{C}$.

Ceci permet de définir l'opérateur de condition mixte $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\chi, S)$ tel que

$$\mathcal{B}s := \Pi_+(\nabla_d + S)\Pi_+ s_{|\partial M} \oplus \Pi_- s_{|\partial M}\,, \quad s \in C^\infty(V). \tag{5.5}$$

Ces conditions au bord généralisent celles de Dirichlet (où $\Pi_- = \mathrm{Id}_V$) et de Neumann–Robin (où $\Pi_+ = \mathrm{Id}_V$).

On note $P_\mathcal{B}$ la réalisation de P sur $\mathcal{B}$, c'est à dire la fermeture de P agissant sur l'espace des sections lisses s de V satisfaisant la condition $\mathcal{B}s = 0$.

Nous sommes ici intéressé par le comportement des coefficients du noyau de la chaleur a_{d-n} définis par le développement en $\Lambda \to \infty$ (voir [65, Théorème 1.4.5]) :

$$\mathrm{Tr}(e^{-\Lambda^{-2}D^2_\mathcal{B}}) \sim \sum_{n\geq 0} \Lambda^{d-n}\, a_{d-n}(D, \mathcal{B})$$

où D est un opérateur auto-adjoint de type Dirac. Nous allons considérer la perturbation $D \to D + A$, où A est une 1-forme (une combinaison linéaire de termes du type $f[D, g]$, où f et g sont des fonctions lisses sur M). Plus précisément, on étudiera la dépendance linéaire en A de ces coefficients. It est clair que puisque A est un opérateur différentiel d'ordre 0, une perturbation $D \mapsto D + A$ transforme un opérateur de type Dirac vers un autre opérateur de type Dirac.

Cette perturbation a des conséquences sur les termes E et ∇ :

Lemme 5.2.1. *Soit D un opérateur de type Dirac de la forme (5.2) tel que $\nabla_\mu := \partial_\mu + \omega_\mu$ soit une connection compatible l'action de Clifford γ. Soit A une 1-forme associée à D, telle que A s'écrive localement $-i\gamma^\mu a_\mu$ avec $a_\mu \in C^\infty(U)$, (U, x_μ) un système de coordonnées locales de M.*

Alors $(D+A)^2 = L(\nabla^A, E^A)$ et $D^2 = L(\nabla, E)$ où,

$$\omega_\mu^A = \omega_\mu + a_\mu\,, \ \textit{ainsi}\ \nabla_\mu^A = \nabla_\mu + a_\mu\, Id_V\,,$$
$$E^A = E + \tfrac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}, \quad E = \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu[\nabla_\mu, \nabla_\nu], \quad F_{\mu\nu} := \partial_\mu(a_\nu) - \partial_\nu(a_\mu)$$

De plus, la courbure de la connexion ∇^A est $\Omega_{\mu\nu}^A = \Omega_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$, où $\Omega_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$.

En particulier $\operatorname{Tr} E^A = \operatorname{Tr} E$.

Démonstration. Ceci apparaît dans [141, equation (3.27)].

$(D+A)^2 = L(\nabla^A, E^A) := -g^{\mu\nu}(\nabla_\mu^A\nabla_\nu^A - \Gamma_{\mu\nu}^\rho\nabla_\rho^A) - E^A$ et on obtient avec $\nabla_\mu^A := \nabla_\mu + a_\mu \mathrm{Id}_V$:

$$\begin{aligned}
-(D+A)^2 &= \gamma^\mu\nabla_\mu^A\gamma^\nu\nabla_\nu^A = \gamma^\mu[\nabla_\mu^A, \gamma^\nu]\nabla_\nu^A + \gamma^\mu\gamma^\nu\nabla_\mu^A\nabla_\nu^A \\
&= \gamma^\mu[\nabla_\mu, \gamma^\nu]\nabla_\nu^A + \tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\nu)\nabla_\mu^A\nabla_\nu^A + \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu[\nabla_\mu^A, \nabla_\nu^A] \\
&= -\gamma^\mu\gamma^\rho\Gamma_{\mu\rho}{}^\nu\nabla_\nu^A + g^{\mu\nu}\nabla_\mu^A\nabla_\nu^A + \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu[\nabla_\mu + a_\mu Id_V, \nabla_\nu + a_\nu \mathrm{Id}_V]. \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Puisque $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$, on obtient par comparaison,

$$\begin{aligned}
E^A &= \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu[\nabla_\mu + a_\mu\,\mathrm{Id}_V, \nabla_\nu + a_\nu\,\mathrm{Id}_V] = \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\big([\nabla_\mu, \nabla_\nu] + \partial_\mu(a_\nu) - \partial_\nu(a_\mu)\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu[\nabla_\mu, \nabla_\nu] + \tfrac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\big(\partial_\mu(a_\nu) - \partial_\nu(a_\mu)\big).
\end{aligned}$$

□

Remarquons que même si des termes quadratiques en A^2 appaissent dans la présentation locale de la perturbation $D^2 \to (D+A)^2$ (dans le terme b), ces termes n'apparaissent pas dans la formulation invariante (∇, E) puisqu'ils sont en fait dans $\nabla_\mu^A\nabla_\nu^A$ de (5.6).

Dans ce qui suit, D et A sont fixés et satisfont les hypothèses du Lemme 5.2.1. Les indices i, j, k, et l vont de 1 à la dimension d de la variété et sont associés à une base orthonormale locale $\{e_1, ..., e_d\}$ du fibré tangent. Les indices a, b, c, vont de 1 à $d-1$ et sont associés à une base orthonormale locale du fibré tangent du bord ∂M. Les champs de vecteurs e_d sont dirigés vers l'intérieur. Les indices $\mu, \nu, \rho, ...$ seront associés à des coordonnées locales quelconques.

Soient R_{ijkl}, $\rho_{ij} := R_{ikkj}$ et $\tau := \rho_{ii}$ les composantes, respectivement, du tenseur de Riemann, du tenseur de Ricci, et de la courbure scalaire de la connexion de Levi-Civita. On notera la seconde forme fondamentale de l'hypersurface ∂M dans M par $L_{ab} := (\nabla_{e_a} e_b, e_d)$. On utilisera ";" pour noter les dérivées covariantes par rapport à ∇^A et ":" les dérivées covariantes par rapport à ∇ et la connexion de Levi-Civita de M.

Nous allons nous intéresser à la condition chirale. Cette condition au bord mixte apparaît naturellement lorsque l'on cherche à préserver l'existence de chiralités sur M et son bord ∂M qui sont compatibles avec l'action de Clifford (auto-adjointe) : on suppose que χ est auto-adjoint et satisfait

$$\{\chi, \gamma^d\} = 0\,, \qquad [\chi, \gamma^a] = 0,\ \forall a \in \{\,1, \cdots, d-1\,\}\,. \qquad (5.7)$$

Il a été montré dans [23] que cette condition implique l'hermiticité de la réalisation de l'opérateur de Dirac. Il est connu [65, Lemme 1.5.3] d'autre part que l'ellipticité est préservée.

Puisque γ^d est inversible, $\dim V_+ = \dim V_-$ et $\operatorname{Tr}\chi = 0$.

Pour une variété orientée de dimension paire, il existe un candidat naturel pour χ satisfaisant (5.7) :

$$\chi := \chi_{\partial M} = (-i)^{d/2-1}\gamma(e_1)\cdots\gamma(e_{d-1})$$

(cette notation est compatible avec (5.9)). Rappelons que

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{i_1}\cdots\gamma^{i_{2k+1}}) = 0\,,\ \forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Tr}(\gamma^i\gamma^j) = \dim V\,\delta^{ij}\,. \tag{5.8}$$

La réalisation naturelle de cette condition au bord pour l'opérateur de type Dirac $D+A$ est la fermeture de l'opérateur $(D+A)_\chi$ qui agit comme $D+A$ sur l'ensemble $\{\, s\in C^\infty(V)\ :\ \Pi_- s_{|\partial M} = 0\,\}$. Il se trouve alors (voir [12, Lemme 7]) que l'opérateur de bord naturel B^A_χ défini par

$$\mathcal{B}^A_\chi s := \Pi_-(D+A)s_{|\partial M}\oplus\Pi_- s_{|\partial M}$$

est un opérateur de bord mixte de la forme (5.5) pourvu que $S = \frac{1}{2}\Pi_+(-i[\gamma^d,A] - L_{aa}\chi)\Pi_+$.

Lemme 5.2.2. *En fait, S et $\chi_{;a}$ sont indépendant de la perturbation A :*
(i) $S = -\frac{1}{2}L_{aa}\,\Pi_+$.
(ii) $\chi_{;a} = \chi_{:a}$.

Démonstration. (i) Puisque A est localement de la forme $-i\gamma^j a_j$ avec $a_j\in C^\infty(U)$, nous avons d'après (5.7),

$$\chi[\gamma^d,A] = -ia_j\,\chi[\gamma^d,\gamma^j] = -i\sum_{j<d}a_j\,\chi[\gamma^d,\gamma^j] = i\sum_{j<d}a_j\,[\gamma^d,\gamma^j]\chi = -[\gamma^d,A]\chi$$

et le résultat est donc une conséquence de $\Pi_+\,[\gamma^d,A] = [\gamma^d,A]\,\Pi_-$ et $\Pi_+\Pi_- = 0$.

(ii) Nous avons $\nabla^A_i = \nabla_i + a_i\,\mathrm{Id}_V$ où $A =: -i\gamma^j a_j$, et puisque $(\nabla^A_i\chi)s = \nabla^A_i(\chi s) - \chi(\nabla^A_i s)$ pour tout $s\in C^\infty(V)$, d'après le Lemme 5.2.1, $\nabla^A_i(\chi) = [\nabla_i + a_i\,\mathrm{Id}_V,\chi] = [\nabla_i,\chi] = \nabla_i(\chi)$. □

Bien que S ne soit pas sensible à la perturbation A, l'opérateur de bord $\mathcal{B}^A_\chi$ dépend a priori de A. On notera $\mathcal{B}_\chi$ l'opérateur de bord $\mathcal{B}^A_\chi$ lorsque $A=0$.

Les coefficients a_{d-k} pour $0\le k\le 4$ ont été calculés dans [11] pour des conditions au bord mixtes générales dans le cas d'opérateurs de type Laplace et dans [12, Lemme 8] pour des opérateurs de type Dirac avec conditions chirales. Nous rappelons ici ces coefficients dans notre cadre :

Proposition 5.2.3.

$$a_d(D+A,\mathcal{B}^A_\chi) = (4\pi)^{-d/2}\int_M \mathrm{Tr}_V\,1\,dx\,,$$

$$a_{d-1}(D+A,\mathcal{B}^A_\chi) = 0\,,$$

$$a_{d-2}(D+A,\mathcal{B}^A_\chi) = \tfrac{(4\pi)^{-d/2}}{6}\Big\{\int_M \mathrm{Tr}_V(6E^A+\tau)\,dx + \int_{\partial M}\mathrm{Tr}_V(2L_{aa}+12S)\,dy\,\Big\},$$

$$a_{d-3}(D+A,\mathcal{B}^A_\chi) = \tfrac{(4\pi)^{-(d-1)/2}}{384}\int_{\partial M}\mathrm{Tr}_V\,\big\{96\chi E^A + 3L^2_{aa} + 6L^2_{ab} + 96SL_{aa} + 192S^2 - 12\chi^2_{;a}\big\}\,dy,$$

$$a_{d-4}(D+A,\mathcal{B}^A_\chi) = \tfrac{(4\pi)^{-d/2}}{360}\Big\{\int_M \mathrm{Tr}_V\,\big\{60\tau E^A + 180(E^A)^2 + 30(\Omega^A_{ij})^2 + 5\tau^2 - 2\rho^2 + 2R^2\big\}\,dx$$
$$+\int_{\partial M}\mathrm{Tr}_V\,\big\{180\chi E^A_{;d} + 120E^A L_{aa} + 720SE^A + 60\chi\chi_{;a}\Omega^A_{ad} + T\big\}\,dy\,\Big\}.$$

où

$$T := 20\tau L_{aa} + 4R_{adad}L_{bb} - 12R_{adbd}L_{ab} + 4R_{abcb}L_{ac} + \tfrac{1}{21}\big(160L_{aa}^3 - 48L_{ab}^2L_{cc} + 272L_{ab}L_{bc}L_{ac} + 120\tau S + 144SL_{aa}^2 + 48SL_{ab}^2 + 480(S^2L_{aa} + S^3) - 42\chi_{;a}^2L_{bb} + 6\chi_{;a}\chi_{;b}L_{ab} - 120\chi_{;a}^2S\big)$$

est indépendant de A.

La proposition suivante montre qu'il n'existe pas de tadpole jusqu'à l'ordre 5 dans les variétés spinorielles à bord munies d'une condition chirale :

Théorème 5.2.4. *Soit M une variété compacte de dimension d, orientée, à spin, riemannienne, avec bord lisse ∂M et fibré spinoriel V. Soit $D := -i\gamma^j\nabla_j$ l'opérateur classique de Dirac, et $\chi = \chi_{\partial M} = (-i)^{d/2-1}\gamma(e_1)\cdots\gamma(e_{d-1})$ où $(e_i)_{1\le i\le d}$ est une base locale orthonormale de TM.*

La perturbation $D \to D + A$ où $A = -i\gamma^j a_j$ est une 1-forme pour D, induit, sous la condition au bord chirale, les perturbations suivantes sur les coefficients du noyau de la chaleur, on l'on pose $c_{d-k}(A) := a_{d-k}(D + A, \mathcal{B}_\chi^A) - a_{d-k}(D, \mathcal{B}_\chi)$:

(i) $c_d(A) = c_{d-1}(A) = c_{d-2}(A) = c_{d-3}(A) = 0$.

(ii) $c_{d-4}(A) = -\frac{1}{6(2\pi)^{d/2}}\int_M F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,dx$.

En d'autres termes, les coefficients a_{d-k} pour $0 \le k \le 3$ ne sont pas perturbés, a_{d-4} est seulement perturbée par des termes quadratiques en A et il n'existe pas de terme linéaire en A dans $a_{d-k}(D + A, \mathcal{B}_\chi^A)$ pour $k \le 5$.

Remarque 5.2.5. *Lorsque A est auto-adjointe, tous les coefficients $a_{d-k}(D + A, \mathcal{B}_\chi^A)$ et $a_{d-k}(D, \mathcal{B}_\chi)$ sont réels alors que les contributions linéaires en A sont purement imaginaires, modulo des traces de matrices γ et χ et leurs dérivées covariantes. Les termes invariants apparaissant comme intégrands de $\int_M$ et $\int_{\partial M}$ dans les coefficients d'ordre plus élevé sont des polynômes en S, χ, R, E^A et Ω^A, et leurs dérivées covariantes. On s'attend donc à ce qu'aucun terme linéaire en A n'apparaissent à tout ordre.*

Démonstration. (i) Le fait que $c_d(A) = c_{d-1}(A) = 0$ est une conséquence de la Proposition 5.2.3.

Puisque d'après le Lemme 5.2.2, $c_{d-2}(A) = (4\pi)^{-d/2}\int_M \mathrm{Tr}_V(E^A - E_A)\,dx$, on obtient $c_{d-2}(A) = 0$ car $\mathrm{Tr}_V E^A = \mathrm{Tr}_V E$ d'après le Lemme 5.2.1.

D'après la Proposition 5.2.3 et le Lemme 5.2.2,

$$c_{d-3}(A) = \tfrac{1}{4}(4\pi)^{-(d-1)/2}\int_{\partial M}\mathrm{Tr}_V\big\{\chi(E^A - E)\big\}.$$

Puisque $\chi(E^A - E) = (-i)^{d/2}\gamma^1\cdots\gamma^{d-1}[\gamma^j, \gamma^k]F_{jk}$, (5.8) donne $\mathrm{Tr}_V\,\chi(E^A - E) = 0$ car d est pair.

(ii) Puisque $\mathrm{Tr}_V(E^A - E) = 0$ et $\mathrm{Tr}_V\,\chi(E^A - E) = 0$, nous obtenons $\mathrm{Tr}_V\,S(E^A - E) = 0$ du Lemme 5.2.2. Ainsi, en utilisant la Proposition 5.2.3 et le Lemme 5.2.2,

$$c_{d-4}(A) = \tfrac{(4\pi)^{-d/2}}{360}\Big\{\int_M \mathrm{Tr}_V\big\{180((E^A)^2 - E^2) + 30\big((\Omega_{ij}^A)^2 - (\Omega_{ij})^2\big)\big\}\,dx + \int_{\partial M}\mathrm{Tr}_V\big\{180\chi(E_{;d}^A - E_{:d}) + 60\chi\chi_{;a}(\Omega_{ad}^A - \Omega_{ad})\big\}\,dy\Big\}.$$

On obtient localement $\mathrm{Tr}_V\left((E^A)^2 - E^2\right) = \frac{1}{16}\,\mathrm{Tr}([\gamma^\mu,\gamma^\nu][\gamma^\rho,\gamma^\sigma])F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ en utilisant la formule de Lichnérowicz $E = -\frac{1}{4}\tau$. Puisque $\mathrm{Tr}_V([\gamma^\mu,\gamma^\nu][\gamma^\rho,\gamma^\sigma]) = 4.2^{d/2}(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$,

$$\mathrm{Tr}_V\left((E^A)^2 - E^2\right) = -\,2^{d/2-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

∇ étant la connexion spinorielle de M, nous avons $\Omega_{ij} = \frac{1}{4}\gamma^k\gamma^l R_{ijkl}$. Donc $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ implique $\mathrm{Tr}_V\,\Omega_{ij} = 0$. Ainsi, avec le Lemme 5.2.1,

$$\mathrm{Tr}_V\left((\Omega^A_{ij})^2 - \Omega^2_{ij}\right) = 2^{d/2}F^2_{ij} = 2^{d/2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,.$$

De plus, $E^A_{;d} = [\nabla_d + a_d, E^A] = [\nabla_d, E + \frac{1}{4}[\gamma^i,\gamma^j]F_{ij}] = E_{:d} + \frac{1}{4}[\nabla_d,[\gamma^i,\gamma^j]]F_{ij}$.

Avec $[\nabla_i,\gamma^i] = \gamma(\nabla_i e_j)$ et (5.8),

$$\mathrm{Tr}_V\left(\chi(E^A_{;d} - E_{:d})\right) = (-i)^{d/2}\tfrac{1}{2}\,F_{ij}\,\mathrm{Tr}_V\left\{\gamma^1\cdots\gamma^{d-1}\big(\gamma(\nabla_d e_i)\gamma^j + \gamma^i\gamma(\nabla_d e_j)\big)\right\} = 0\,.$$

Il reste à vérifier que $\mathrm{Tr}_V\left(\chi\chi_{:a}(\Omega^A_{ad} - \Omega_{ad})\right) = 0$. Soit $\chi_M = -i\chi\gamma^d$ l'opérateur de graduation (voir (5.9)). Puisque χ_M commute avec l'opérateur ∇ (voir [68, p. 396]),

$$0 = [\nabla_a,\chi_M] = [\nabla_a,\chi\gamma^d] = \chi_{:a}\gamma^d + \chi[\nabla_a,\gamma^d] = \chi_{:a}\gamma^d + \chi\gamma(\nabla_a e_d)$$

et ainsi $\chi\chi_{:a} = -\gamma(\nabla_a e_d)\gamma^d = -\Gamma^j_{ad}\gamma^j\gamma^d$, où $\Gamma^j_{ad} = -\Gamma^d_{aj}$ puisque (e_j) est une base locale orthonormale. Donc $\mathrm{Tr}_V(\chi\chi_{:a}) = -\Gamma^j_{ad}\delta^{jd} = -\Gamma^d_{ad} = 0$. Finalement, le résultat sur c_{d-4} est une conséquence du Lemme 5.2.1 car $\mathrm{Tr}_V\left(\chi\chi_{:a}(\Omega^A_{ad} - \Omega_{ad})\right) = \mathrm{Tr}_V(\chi\chi_{:a})F_{ad}$.

Le coefficient $a_{d-5}(D + A, \mathcal{B}^A_\chi)$ est calculé dans [13]. On peut vérifier de la même manière que les termes linéaires en A sont absents. Le calcul utilise notamment le fait que la trace des termes $\chi E^A_{;dd}$, $E^A_{;d}S$, $\chi(E^A)^2$, E^AS^2, $\chi_{;a}\chi_{;b}\Omega^A_{ab}$, $\chi^2_{;a}E^A$, ne possède pas de terme linéaire en A. □

Dans ce qui suit, nous étudions la conjecture précédente à l'aide du calcul pseudodifférentiel de Chamseddine–Connes appliqué aux variétés compactes à spin sans bord et les triplets spectraux riemanniens. Nous verrons aussi, en utilisant le résidu de Wodzicki, comment calculer certaines intégrales non commutatives dans ce cadre.

5.3 Triplets spectraux commutatifs

5.3.1 Géométrie commutative

Définition 5.3.1. Un triplet spectral riemannien est un triplet spectral commutatif $\big(\mathcal{A} := C^\infty(M)$, $\mathcal{H} := L^2(M,S)$, $\mathcal{D}\big)$ où M est une variété riemannienne à spin compacte sans bord de dimension d et $\mathcal{D}$ son opérateur de Dirac, avec S le fibré spinoriel sur M. Ce triplet est réel car l'opérateur de conjugaison de charge génère une isométrie antilinéaire J sur $\mathcal{H}$ telle que

$$JaJ^{-1} = a^*, \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

et lorsque d est pair, la graduation est donnée par la matrice de chiralité

$$\chi_M := (-i)^{d/2}\,\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^d. \tag{5.9}$$

Un tel triplet est une géométrie commutative (voir [33] et [34] pour le rôle du J dans la nuance entre variétés spin et spin^c).

Puisque $JaJ^{-1} = a^*$ pour $a \in \mathcal{A}$, dans une géométrie commutative,

$$JAJ^{-1} = -\epsilon\,A^*, \quad \forall A \in \Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}). \tag{5.10}$$

5.3.2 Absence de tadpole

L'apparition de tadpole ne se produit jamais dans le cadre de géométries commutatives, comme noté dans [37, Lemme 1.145] pour la dimension $d = 4$. Ceci signifie qu'étant donné une géométrie commutative, le triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est un point critique de l'action spectrale (1.6).

Théorème 5.3.2. *Il n'y a pas de tadpole sur une géométrie commutative. Dit autrement, pour toute 1-forme $A = A^* \in \Omega^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$, $Tad_{\mathcal{D}+A}(k) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq d$.*

Démonstration. Puisque $\tilde{A} = 0$ lorsque $A = A^*$ d'après (5.10), le résultat est une conséquence du Corollaire 1.4.5. □

Lemme 5.3.3. *Sous les mêmes hypothèses, pour tout k, $l \in \mathbb{N}$*
(i) $⨍ A\,\mathcal{D}^{-k} = -\epsilon^{k+1} ⨍ A\,\mathcal{D}^{-k}$,
(ii) $⨍ \chi A\,\mathcal{D}^{-k} = -\epsilon^{k+1} ⨍ \chi A\,\mathcal{D}^{-k}$,
(iii) $⨍ A^l|\mathcal{D}|^{-k} = (-\epsilon)^l ⨍ A^l|\mathcal{D}|^{-k}$,
(iv) $⨍ \chi A^l|\mathcal{D}|^{-k} = (-\epsilon)^l ⨍ \chi A^l|\mathcal{D}|^{-k}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} ⨍ A\,\mathcal{D}^{-k} &= \overline{⨍ JA\,\mathcal{D}^{-k}J^{-1}} = \overline{⨍ JAJ^{-1}(\epsilon^k\mathcal{D}^{-k})} = -\epsilon^{k+1}\overline{⨍ A^*\,\mathcal{D}^{-k}} = -\epsilon^{k+1} ⨍ \mathcal{D}^{-k}A \\ &= -\epsilon^{k+1} ⨍ A\,\mathcal{D}^{-k}. \end{aligned}$$

Le même argument donne les autres égalités en utilisant $\chi A = -A\chi$ et $\chi|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}|\chi$. □

Lemme 5.3.4. *Pour toute 1-forme A, $⨍ \left(A\,\mathcal{D}^{-1}\right)^k = 0$ quand $k \in \mathbb{N}$ est impair.*

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} ⨍ \left(A\,\mathcal{D}^{-1}\right)^k &= \overline{⨍ J\left(A\mathcal{D}^{-1}\right)^k J^{-1}} = \overline{⨍ \left(JAJ^{-1}\,J\mathcal{D}^{-1}J^{-1}\right)^k} = (-1)^k\epsilon^{2k}\overline{⨍ \left(A^*\mathcal{D}^{-1}\right)^k} \\ &= (-1)^k ⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^k \end{aligned} \tag{5.11}$$

(ce qui montre encore que $⨍ A\mathcal{D}^{-1} = 0$). □

5.3.3 Annulation de certaines intégrales non commutatives

Au delà des tadpoles, nous allons maintenant montrer qu'un grand nombre d'intégrales non commutatives dans les géométries commutatives s'annulent, même lorsque la technique liée à l'opérateur J dans (5.11) n'est plus suffisante. L'outil fondamental que nous allons utiliser est le résidu de Wodzicki (voir [151, 152]): dans un système de coordonnées locales et une trivialisation locale (x, ξ) de T^*M, ce résidu est

$$wres_x(X) := \int_{S^*_xM} \mathrm{Tr}\left(\sigma^X_{-d}(x,\xi)\right)|d\xi|\,|dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d|, \tag{5.12}$$

où $\sigma^X_{-d}(x,\xi)$ est le symbole de l'opérateur pseudodifférentiel classique X dans le système de coordonnées $(x_1, \cdots, x_d)$ homogène de degré $-d := -\dim(M)$ et pris au point $(x, \xi) \in T^*(M)$,

et $d\xi$ est la forme volume normalisée sur la sphère unité $S_x^*M \simeq \mathbb{S}^{d-1}$. On suppose $d \geq 2$ afin d'avoir S_x^*M connexe.

L'expression $wres_x(X)$ est en fait une 1-densité et ne dépend pas de l'écriture locale du symbole (voir [68, 152]), ainsi

$$Wres(X) := \int_M wres_x(X) \tag{5.13}$$

est bien défini.

L'intégrale non commutative $⨍$ coïncide avec le résidu de Wodzicki, à un facteur scalaire près. Ceci est une conséquence de l'unicité de la trace sur l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels classiques, et du fait que $⨍$ et $Wres$ soient bien des traces. Ainsi

$$⨍ X = c_d\, Wres(X) \tag{5.14}$$

où c_d est une constante dépendante de d. En calculant séparément $⨍ |\mathcal{D}|^{-d}$ et $Wres(|\mathcal{D}|^{-d})$, on obtient $c_d > 0$ ($⨍$ n'est pas une fonctionnelle positive, voir Lemme 5.3.18).

Le Lemme 1.4.1 découle par exemple du fait que $\int_M wres_x(X^*) = \overline{\int_M wres_x(X)}$.

Notons que $⨍ X$ est égal à -2 fois le coefficient en $\log t$ de l'asymptotique de $\mathrm{Tr}(X\, e^{-t\,\mathcal{D}^2})$ quand $t \to 0$. Il est remarquable que ce coefficient soit indépendant de $\mathcal{D}$ et ceci donne une relation entre les fonctions zêta et le développement du noyau de la chaleur avec $Wres$. Précisément, d'après [70, Théorème 2.7]

$$\mathrm{Tr}(X\, e^{-t\,\mathcal{D}^2}) \sim_{t\to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^{(j-ord(X)-d)/2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-a'_k\, \log t + b_k)\, t^k, \tag{5.15}$$

donc $⨍ X = 2a'_0$. Puisque $\mathrm{Tr}(X\,\mathcal{D}^{-2s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}\, \mathrm{Tr}(X\, e^{-t\,\mathcal{D}^2})\, dt$, le coefficient non nul a'_k, $k \neq 0$ crée un pôle de $\mathrm{Tr}(X\,\mathcal{D}^{-2s})$ d'ordre $k+2$ puisque $\int_0^1 t^{s-1} \log(t)^k = \frac{(-1)^k k!}{s^{k+1}}$ et

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} + \gamma + s\, g(s) \tag{5.16}$$

où γ est la constante de Euler et la fonction g est holomorphe en 0.

Nous avons $⨍ 1 = 0$ et plus généralement, $Wres(P) = 0$ pour toute projection pseudodifférentielle d'ordre zero [151].

Pour une extension aux opérateurs pseudodifférentiels log-polyhomogènes, voir [98].

Quand M a un bord, certains a'_k sont non nuls, le spectre de dimension peut être non simple (même s'il est simple pour l'opérateur de Dirac, voir [99]).

Sur un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, le fait de changer le produit sur $\mathcal{A}$ peut changer ou non le spectre de dimension : par exemple, il n'y a pas de changement lorsque l'on passe du tore commutatif au tore non commutatif, alors qu'il y a un changement dans le cas de $SU_q(2)$.

Soit un système de coordonnées locales $(U, (x_i)_{1\leq i\leq n})$ normal en $x_0 \in M$, et notons σ_k^X le symbole k-homogène dans ce système de coordonnées, d'un opérateur pseudodifférentiel classique X sur M. L'opérateur de Dirac est localement de la forme

$$\mathcal{D} = -i\gamma(dx^j)\, \big(\partial_{x^j} + \omega_j(x)\big) \tag{5.17}$$

où ω_j est la connexion spin, γ est la multiplication de Clifford des 1-formes [68, page 392]. Ici on fait le choix de jauge $h := \sqrt{g}$, ce qui donne [68, Exercise 9.6]

$$\omega_i = -\tfrac{1}{4}\left(\Gamma^k_{ij}\, g_{kl} - \partial_{x^j}(h^\alpha_j)\delta_{\alpha\beta}\, h^\beta_l\right)\gamma(dx^j)\,\gamma(dx^l), \quad \gamma(dx^j) = \sqrt{g^{-1}}^{jk}\,\gamma_k$$

où $\gamma^j = \gamma_j$ sont les matrices auto-adointes constantes γ vérifiant $\{\,\gamma^i, \gamma^j\,\} = \delta^{ij}$. Ainsi

$$\sigma^{\mathcal{D}}(x,\xi) = \sqrt{g^{-1}}^{jk}\,\gamma_k\big(\xi_j - i\,\omega_j(x)\big).$$

Nous avons choisis des coordonnées normales (ou géodésiques) en x_0. Puisque

$$\begin{aligned}
&g_{ij}(x) = g_{ij}(x_0) + \tfrac{1}{3}R_{ijkl}\,x^k x^l + o(||x||^3),\\
&g^{ij}(x) = g^{ij}(x_0) - \tfrac{1}{3}R^i{}_k{}^j{}_l\,x^k x^l + o(||x||^3),\\
&g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}, \quad \Gamma^k_{ij}(x_0) = 0,
\end{aligned}$$

les matrices $h(x)$ et $h^{-1}(x)$ n'ont pas de termes linéaires en x. Ainsi

$$\omega_i(x_0) = 0.$$

On aurait aussi pu dire qu'un transport parallèle d'une base du fibré cotangent le long des géodésiques radiales passant par x_0 donne une trivialisation telle que $\omega_i(x_0) = 0$. En utilisant la formule de composition de symboles, on obtient pour $k \in \mathbb{N}$

$$\sigma^{\mathcal{D}}_1(x,\xi) = \sqrt{g^{-1}}^{jk}(x)\,\gamma_k\xi_j = \gamma(\xi), \qquad \sigma^{\mathcal{D}}_1(x_0,\xi) = \gamma^j\xi_j, \tag{5.18}$$

$$\sigma^{\mathcal{D}}_0(x,\xi) = -i\sqrt{g^{-1}}^{jk}(x)\,\gamma_k\omega_j(x), \qquad \sigma^{\mathcal{D}}_0(x_0,\xi) = 0, \tag{5.19}$$

$$\partial_{x^k}\sigma^{\mathcal{D}}_1(x_0,\xi) = 0, \tag{5.20}$$

$$\sigma^{\mathcal{D}^{-1}}_{-1}(x,\xi) = \sqrt{g^{-1}}^{jk}(x)\,\gamma_j\xi_k\,||\xi||^{-2}_x, \qquad ||\xi||^2_x := g^{jk}(x)\,\xi_j\xi_k \tag{5.21}$$

$$\partial_{x^k}\sigma^{\mathcal{D}^{-1}}_{-1}(x_0,\xi) = 0. \tag{5.22}$$

On utilisera librement le fait que le symbole d'une 1-forme A puisse s'écrire

$$\sigma^A(x,\xi) = \sigma^A_0(x) = -i\,a_k(x)\,\gamma^k \tag{5.23}$$

avec $a_k(x) \in i\mathbb{R}$ quand $A = A^*$.

Lorsque d est pair (et donc $\epsilon = 1$), remarquons que pour $k = l$ et $A_i = a_i[\mathcal{D}, b_i]$ et $a = \prod_{i=1}^k a_i$, alors d'après [38, page 231], [113] ou [68, p. 479] quand $k = d$, (M est supposée orientée)

$$⨍ \chi A_1 \cdots A_k |\mathcal{D}|^{-k} = c'_k \int_M \hat{A}(R)^{(d-k)} \wedge a db_1 \wedge \cdots \wedge db_k$$

où $\hat{A}(R)$ est le $\hat{A}$-genus associé à la courbure riemannienne R. Puisque nous avons $\hat{A}(R) \in \oplus_{j\in\mathbb{N}}\Omega^{4j}(M,\mathbb{R})$, $⨍ \chi A^k|D|^{-k}$ peut être non nul seulement quand $k = d - 4j$. Par exemple, en dimension d =2, pour $j = 0$,

$$\sigma^{\chi A_1 A_2 \mathcal{D}^{-2}}_{-2}(x,\xi) = \sigma^{\chi A_1 A_2}_0(x)\,\sigma^{\mathcal{D}^{-2}}_{-2}(x,\xi) = -a_1(x)\,a_2(x)\,\chi g^{jk}(x)\gamma_j\gamma_k\,\tfrac{1}{g^{lm}(x)\xi_l\xi_m}.$$

Ainsi $wres_x(\chi A_1 A_2 \mathcal{D}^{-2}) = -2\, a_1(x)\, a_2(x) \sqrt{\det g_x}\ \mathrm{Tr}(\chi\gamma^j\gamma^k)$, donc si ν_g est la densité riemannienne,

$$\fint \chi A_1 A_2\, \mathcal{D}^{-2} = -2c_d\ \mathrm{Tr}(\chi\gamma^j\gamma^k) \int_M a_1 a_2\, \nu_g. \tag{5.24}$$

Cette dernière égalité n'est rien d'autre que le théorème de Wodzicki–Connes, voir [68, section 7.6], et ceci est égal à $c'_d \int_M a_1 a_2 db_1 \wedge db_2$ comme dit précédemment.

Nous introduisons maintenant quelques sous-espaces d'opérateurs pseudodifférentiels classiques. Soient

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_e &:= \{\, P \in \Psi(M) \,:\, \sigma_j^P \in E_j,\, \forall j \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{e pour even (pair)},\\ \mathcal{B}_o &:= \{\, P \in \Psi(M) \,:\, \sigma_j^P \in O_j,\, \forall j \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{o pour odd (impair)}, \end{aligned}$$

tels que, pour $m = 2^{[d/2]}$,

$$\begin{aligned} E_j := \{\, f \in C^\infty\big(U \times \mathbb{R}^d \backslash \{\,0\,\}, \mathcal{M}_m(\mathbb{C})\big) \ :\ f(x,\xi) = \sum_{i\in I} \tfrac{\xi^{\beta^i}}{\|\xi\|_x^{2k_i}} h_i(x)\ ,\ I \neq \emptyset,\\ k_i \in \mathbb{N},\ \beta^i \in \mathbb{N}^d\ , |\beta^i| - 2k_i = j\ ,\ h_i \in C^\infty(U, \mathcal{M}_m(\mathbb{C}))\,\}\,,\\ O_j := \{\, f \in C^\infty\big(U \times \mathbb{R}^d \backslash \{\,0\,\}, \mathcal{M}_m(\mathbb{C})\big) \ :\ f(x,\xi) = \sum_{i\in I} \tfrac{\xi^{\beta^i}}{\|\xi\|_x^{2k_i+1}} h_i(x)\ ,\ I \neq \emptyset,\\ k_i \in \mathbb{N},\ \beta^i \in \mathbb{N}^d,\ |\beta^i| - (2k_i+1) = j\ ,\ h_i \in C^\infty(U, \mathcal{M}_m(\mathbb{C}))\,\}\,. \end{aligned}$$

Lemme 5.3.5. *Pour tous j, $j' \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*
(i) $E_j E_{j'} \subseteq E_{j+j'}$ et $\partial_\xi^\alpha E_j \subseteq E_{j-|\alpha|}$, $\partial_x^\alpha E_j \subseteq E_j$.
(ii) $O_j O_{j'} \subseteq E_{j+j'}$ et $\partial_\xi^\alpha O_j \subseteq O_{j-|\alpha|}$, $\partial_x^\alpha O_j \subseteq O_j$.
(iii) $O_j E_{j'}$ et $E_{j'} O_j$ sont inclus dans $O_{j+j'}$.
(iv) $\mathcal{B}_e$ est une sous-algèbre de $\Psi(M)$.
(v) $\mathcal{B}_e\mathcal{B}_e$, $\mathcal{B}_o\mathcal{B}_o$ sont inclus dans $\mathcal{B}_e$, et $\mathcal{B}_e\mathcal{B}_o$, $\mathcal{B}_o\mathcal{B}_e$ sont inclus dans $\mathcal{B}_o$.

Démonstration. (i) Soient $f \in E_j$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Nous avons, si $f(x,\xi) = \sum_{i\in I} \frac{\xi^{\beta^i}}{\|\xi\|_x^{2k_i}}\, h_i(x)$,

$$\partial_\xi^\alpha f = \sum_{i\in I} \partial_\xi^\alpha\big(\tfrac{\xi^{\beta^i}}{\|\xi\|_x^{2k_i}}\big)\, h_i(x) = \sum_{i\in I}\sum_{\gamma\leq\alpha} \tbinom{\alpha}{\gamma} \partial_\xi^{\alpha-\gamma}(\xi^{\beta^i}) \partial_\xi^\gamma\big(\tfrac{1}{\|\xi\|_x^{2k_i}}\big)\, h_i(x).$$

On vérifie par induction que

$$\partial_\xi^\gamma\big(\tfrac{1}{\|\xi\|_x^{2k_i}}\big) = \tfrac{1}{\|\xi\|_x^{2k_i(|\gamma|+1)}} \sum_p \lambda_p \prod_{j=1}^{|\gamma|} \partial_\xi^{\beta^{j,p}}\, \|\xi\|_x^{2k_i}$$

où λ_p sont des réels, la somme sur les indices p est finie, et $\sum_{j=1}^{|\gamma|} \beta^{j,p} = \gamma$. Par conséquent, puisque $\|\xi\|_x^{2k_i} = (g^{kl}(x)\xi_k\xi_l)^{k_i}$ est un polynôme homogène en ξ de degré $2k_i$, on obtient $\partial_\xi^\alpha f \in E_{j-|\alpha|}$. Les inclusions $E_j E_{j'} \subseteq E_{j+j'}$, $\partial_x^\alpha E_j \subseteq E_j$ sont directes.

(ii) La preuve est similaire à celle de (i) puisque par induction

$$\partial_\xi^\gamma\big(\tfrac{1}{\|\xi\|_x}\big) = \tfrac{1}{\|\xi\|_x^{2|\gamma|+1}} \sum_p \lambda_p \prod_{j=1}^{|\gamma|} \partial_\xi^{\beta^{j,p}} \|\xi\|_x^2$$

où λ_p sont des réels, la somme sur les indices p est finie et $\sum_{j=1}^{|\gamma|} \beta^{j,p} = \gamma$.

(iii) Direct.

(iv) La formule du produit de symboles pour deux opérateurs pseudodifférentiels classiques $P \in \Psi^p(M)$, $Q \in \Psi^q(M)$ donne

$$\sigma_{p+q-j}^{PQ} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \sum_{k\geq 0,\ |\alpha|+k\leq j} i^{|\alpha|} \tfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_{p-j+|\alpha|+k}^P \partial_x^\alpha \sigma_{q-k}^Q \,. \tag{5.25}$$

La présence du facteur $i^{|\alpha|}$ sera importante par la suite (Lemme 5.3.10).

Si $P, Q \in \mathcal{B}_e$, on voit que d'après (i), $\partial_\xi^\alpha \sigma_{p-j+|\alpha|+k}^P \in E_{p-j+k}$ et $\partial_x^\alpha \sigma_{q-k}^Q \in E_{q-k}$. Encore d'après (i), $\partial_\xi^\alpha \sigma_{p-j+|\alpha|+k}^P \partial_x^\alpha \sigma_{q-k}^Q \in E_{p+q-j}$, donc le résultat est une conséquence de (5.25).

(v) Un argument similaire peut s'appliquer, en utilisant (ii) pour obtenir $\mathcal{B}_o\mathcal{B}_o \subseteq \mathcal{B}_e$ et (iii) et avoir $\mathcal{B}_o\mathcal{B}_e \subseteq \mathcal{B}_o$, $\mathcal{B}_e\mathcal{B}_o \subseteq \mathcal{B}_o$. □

$\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_o$ sont stables par inversion :

Lemme 5.3.6. *Soit $P \in \mathcal{B}_e$ (resp. $\mathcal{B}_o$) un opérateur pseudodifférentiel classique elliptique dans $\Psi^p(M)$ avec $\sigma_p^P(x,\xi) = \|\xi\|_x^p$, $p \in \mathbb{N}$. Alors tout paramétrix P^{-1} de P est dans $\mathcal{B}_e$ (resp. $\mathcal{B}_o$).*

Démonstration. Supposons $P \in \mathcal{B}_e$, de sorte que p soit pair. De l'équation $PP^{-1} = 1$, nous obtenons $\sigma_{-p}^{P^{-1}} = (\sigma_p^P)^{-1} = \|\xi\|_x^{-p} \in E_{-p}$. De plus, d'après (5.25), on voit que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma_{-p-j}^{P^{-1}} = -(\sigma_p^P)^{-1}\Big(\sum_{0\leq k<j} \sigma_{p-j+k}^P \sigma_{-p-k}^{P^{-1}} + \sum_{0<|\alpha|\leq j} \sum_{k=0}^{j-|\alpha|} i^{|\alpha|} \tfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_{p-j+|\alpha|+k}^P \partial_x^\alpha \sigma_{-p-k}^{P^{-1}}\Big). \tag{5.26}$$

On prouve par induction que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\sigma_{-p-j}^{P^{-1}} \in E_{-p-j}$: supposons que pour un $j \in \mathbb{N}^*$, nous avons pour tout $j' < j$, $\sigma_{-p-j'}^{P^{-1}} \in E_{-p-j'}$. On vérifie alors directement avec le Lemme 5.3.5 et (5.26) que $\sigma_{-p-j}^{P^{-1}} \in E_{-p-j}$.

Le cas $P \in \mathcal{B}_o$ est similaire. □

Lemme 5.3.7. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}^k \in \mathcal{B}_e$ et quand k est impair, $|\mathcal{D}|^k \in \mathcal{B}_o$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{D} \in \mathcal{B}_e$, $\mathcal{D}^{-2}$ est dans $\mathcal{B}_e$ d'après le Lemme 5.3.6 et 5.3.5 et donc c'est le cas de $\mathcal{D}^k$.

En utilisant (5.25) pour l'équation $|\mathcal{D}||\mathcal{D}| = \mathcal{D}^2$, on vérifie que $\sigma_1^{|\mathcal{D}|}(x,\xi) = \|\xi\|_x$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma_{1-j}^{|\mathcal{D}|} = \tfrac{1}{2\|\xi\|_x}\Big(\sigma_{2-j}^{\mathcal{D}^2} - \sum_{0<k<j} \sigma_{1-j+k}^{|\mathcal{D}|} \sigma_{1-k}^{|\mathcal{D}|} + \sum_{0<|\alpha|\leq j} \sum_{k=0}^{j-|\alpha|} i^{|\alpha|} \tfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_{1-j+|\alpha|+k}^{|\mathcal{D}|} \partial_x^\alpha \sigma_{1-k}^{|\mathcal{D}|}\Big). \tag{5.27}$$

Un argument par induction direct montre que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\sigma_{1-j}^{|\mathcal{D}|} \in O_{1-j}$, et donc $|\mathcal{D}| \in \mathcal{B}_o$. Le résultat s'en déduit. □

Lemme 5.3.8. *(i) Si d est impair, alors pour tout $P \in \mathcal{B}_e$, $⨍ P = 0$.*
(ii) Si d est pair, alors pour tout $P \in \mathcal{B}_o$, $⨍ P = 0$.
(iii) Pour tout opérateur pseudodifférentiel $P \in \Psi_1(\mathcal{A})$,
- si d est impair, alors $⨍ P = 0$,
- si d est pair, alors $⨍ P|\mathcal{D}|^{-1} = 0$.

Démonstration. (i) Puisque $\sigma^P_{-d} \in E_{-d}$, $\sigma^P_{-d}(x,\xi) = \sum_{i\in I} \frac{\xi^{\beta^i}}{\|\xi\|_x^{2k_i}} h_i(x)$ où les $|\beta^i|$ sont impairs. Ainsi, l'intégration sur la cosphère dans (5.12) s'annule.
(ii) Le même argument s'applique.
(iii) Conséquence directe de (i) et (ii). □

Remarque 5.3.9. *Le Lemme 5.3.8 (iii) entraîne par exemple que $⨍ B|\mathcal{D}|^{-(2k+1)}$ où B est un polynôme en $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, et $k \in \mathbb{N}$, s'annule toujours en dimension paire, alors que $⨍ B\mathcal{D}^{-2k}$ est toujours nul en dimension impaire. Dit autrement, $⨍ B|D|^{-(d-q)} = 0$ pour tout entier impair q.*

Nous allons maintenant nous intéresser au caractère réel ou purement imaginaire (modulo la présence de matrices gamma) des symboles homogènes d'un opérateur pseudodifférentiel classique donné. On pose

$$\mathcal{C} := \{\, P \in \Psi^p(M) \,:\, \sigma^P_{p-j} \in I_j,\ \forall j \in \mathbb{N} \,\}$$

où $I_k = I_e$ si k est pair et $I_k = I_o$ si k est impair, avec

$$I_e := \{\, f \in C^\infty\big(U \times \mathbb{R}^n, \mathcal{M}_m(\mathbb{C})\big) \,:\, f = \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_q}\, h(x,\xi)\ ,\ h \text{ à valeurs réelles} \,\},$$
$$I_o := \{\, f \in C^\infty\big(U \times \mathbb{R}^n, \mathcal{M}_m(\mathbb{C})\big) \,:\, f = i\ \gamma_{k_1} \cdots \gamma_{k_q}\, h(x,\xi)\ ,\ h \text{ à valeurs réelles} \,\}.$$

Lemme 5.3.10. *(i) $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de $\Psi(M)$.*
(ii) Si $P \in \mathcal{C}$ est hypo-elliptique alors $P^{-1} \in \mathcal{C}$.
(iii) $\mathcal{D}^k \in \mathcal{C}$ et $|\mathcal{D}|^k \in \mathcal{C}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. (i) Conséquence de (5.25).
(ii) Conséquence de (5.26).
(iii) Il est clair que $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$ et le fait que $|\mathcal{D}| \in \mathcal{C}$ est un conséquence de (5.27). □

Lemme 5.3.11. *Soit $k \in \mathbb{N}$ impair. Alors tout élément B de l'algèbre polynomialement générée par $\mathcal{A}$ et $[D,\mathcal{A}]$ satisfait à $⨍ B|\mathcal{D}|^{-(d-k)} = ⨍ BF|\mathcal{D}|^{-(d-k)} = 0$.*

Démonstration. On peut supposer B auto-adjoint, donc $⨍ B\mathcal{D}^{-(d-k)} \in \mathbb{R}$.
D'après le Lemme 5.3.10, $\sigma^{B\mathcal{D}^{-(d-k)}}_{-d} = \sigma^B_0 \sigma^{\mathcal{D}^{-(d-k)}}_{-d} \in I_k$. Ainsi $⨍ A\mathcal{D}^{-k} \in i\mathbb{R}$ et le résultat s'en déduit. Le cas $⨍ BF|\mathcal{D}|^{-(d-k)}$ est similaire. □

Nous regardons maintenant l'information donnée par les matrices gamma.

Lemme 5.3.12. *Pour toute 1-forme A, $⨍ A|\mathcal{D}|^{-q} = 0$, $q \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :*
- $d \neq 1 \mod 8$ et $d \neq 5 \mod 8$,
- ($d = 1 \mod 8$ ou $d = 5 \mod 8$) et (q est pair ou $q \geq \frac{d+3}{2}$).

Démonstration. Dans le cas $d \neq 1 \mod 8$ et $d \neq 5 \mod 8$, le résultat découle du fait que $\varepsilon = 1$.

Le cas d pair et q impair ou d impair et q pair est donné par le Lemme 5.3.8 (*iii*).

Supposons d pair et q pair. Si $q = 2k$, avec une récurrence et la formule de produit de symboles, on voit que $\sigma_{2k-j}^{\mathcal{D}^{2k}}$ et ses dérivées sont des combinaisons linéaires de termes du type $f(x,\xi) \otimes \gamma^{j_1} \cdots \gamma^{j_i}$ où i est pair et inférieur ou égal à $2j$ (avec la convention $\gamma^{j_1} \cdots \gamma^{j_i} = 1$ si $i = 0$). On appelle (P_j) cette propriété. L'équation $\mathcal{D}^{2k}\mathcal{D}^{-2k} = 1$ implique que $\sigma_{-2k}^{\mathcal{D}^{-2k}} = (\sigma_{2k}^{\mathcal{D}^{2k}})^{-1}$ et pour tout $j \geq 1$,

$$\sigma_{-2k-j}^{\mathcal{D}^{-2k}} = -\sigma_{-2k}^{\mathcal{D}^{-2k}} \Big(\sum_{r=\max\{j-2k,0\}}^{j-1} \sigma_{2k-(j-r)}^{\mathcal{D}^{2k}} \sigma_{-2k-r}^{\mathcal{D}^{-2k}} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2k} \sum_{r=\max\{j-2k,0\}}^{j-|\alpha|} \tfrac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_{2k-(j-|\alpha|-r)}^{\mathcal{D}^{2k}} \, \partial_x^\alpha \sigma_{-2k-r}^{\mathcal{D}^{-2k}} \Big).$$

Notons que $\sigma_{-2k}^{\mathcal{D}^{-2k}}$ satisfait (P_0). Par récurrence, cette formule montre que $\sigma_{-2k-j}^{\mathcal{D}^{-2k}}$ satisfait (P_j) pour tout $j \in \mathbb{N}$. En particulier, $\sigma_{-d}^{\mathcal{D}^{-2k}}$ satisfait (P_{-2k+d}) et le résultat est ainsi une conséquence de (5.23) et du fait que le produit d'un nombre impair (différent de la dimension) de matrices gamma est de trace nulle.

Supposons maintenant d impair, q impair et $d \geq q$. Dans cette situation, tout produit d'un nombre impair de matrices gamma $\gamma^{i_1} \cdots \gamma^{i_r}$ est de trace nulle si $r < d$.

D'après (5.25) pour l'équation $|\mathcal{D}|^{-q}|\mathcal{D}|^{-q} = \mathcal{D}^{-2q}$, on vérifie que $\sigma_{-q}^{|\mathcal{D}|^{-q}}(x,\xi) = \|\xi\|_x^{-q}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma_{-q-j}^{|\mathcal{D}|^{-q}} = \tfrac{1}{2\|\xi\|_x^{-q}} \Big(\sigma_{-2q-j}^{\mathcal{D}^{-2q}} - \sum_{0<k<j} \sigma_{-q-j+k}^{|\mathcal{D}|^{-q}} \sigma_{-q-k}^{|\mathcal{D}|^{-q}} + \sum_{0<|\alpha|\leq j} \sum_{k=0}^{j-|\alpha|} i^{|\alpha|} \tfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_{-q-j+|\alpha|+k}^{|\mathcal{D}|^{-q}} \partial_x^\alpha \sigma_{-q-k}^{|\mathcal{D}|^{-q}} \Big).$$

On a vu que chaque $\sigma_{-2q-j}^{|\mathcal{D}|^{-2q}}$ satisfait (P_j). Un argument par induction montre que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\sigma_{-q-j}^{|\mathcal{D}|^{-q}}$ satisfait (P_j). En particulier $\sigma_{-d}(A|\mathcal{D}|^{-q})$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $f(x,\xi) \otimes \gamma^{j_1} \cdots \gamma^{j_r}$ où $r \leq 2(d-q)+1$ est impair. Ceci donne le résultat. □

Le fait que $\fint A\, \mathcal{D}^{-d+1} = 0$, conséquence des Lemmes 5.3.8 et 5.3.11, est aussi une conséquence du fait que $\sigma_{-d}^{\mathcal{D}^{-d+1}}(x_0,\xi) = 0$:

Lemme 5.3.13. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\sigma_{k-1}^{\mathcal{D}^k}(x_0,\xi) = \sigma_{-k-1}^{\mathcal{D}^{-k}}(x_0,\xi) = 0$.*

Démonstration. Nous savons déjà que $\sigma_0^{\mathcal{D}}(x_0,\xi) = 0$, voir (5.19). On procède par récurrence, en supposant $\sigma_{k-1}^{\mathcal{D}^k}(x_0,\xi) = 0$ pour $k = 1, \cdots, n$. Alors $\sigma_n^{\mathcal{D}^{n+1}} = \sigma_n^{\mathcal{D}^n}\sigma_0^{\mathcal{D}} + \sigma_{n-1}^{\mathcal{D}^n}\sigma_1^{\mathcal{D}} - i\,\partial_{\xi_k}\sigma_n^{\mathcal{D}^n}\,\partial_{x^k}\sigma_1^{\mathcal{D}}$, ainsi d'après (5.19) et (5.20), $\sigma_n^{\mathcal{D}^{n+1}}(x_0,\xi) = 0$.

Puisque $\mathcal{D}\mathcal{D}^{-1} = 1$ donne $\sigma_{-2}^{\mathcal{D}^{-1}}(x_0,\xi) = -\big(\sigma_{-1}^{\mathcal{D}^{-1}}\sigma_0^{\mathcal{D}}\big)(x_0,\xi) = 0$, on suppose $\sigma_{-k-1}^{\mathcal{D}^{-k}}(x_0,\xi) = 0$ pour $k = 1, \cdots n$. Alors $\sigma_{-n-2}^{\mathcal{D}^{-n-1}} = \sigma_{-n}^{\mathcal{D}^{-n}}\sigma_{-2}^{\mathcal{D}^{-1}} + \sigma_{-n-1}^{\mathcal{D}^{-n}}\sigma_{-1}^{\mathcal{D}^{-1}} - i\,\partial_{\xi_k}\sigma_{-n}^{\mathcal{D}^{-n}}\,\partial_{x^k}\sigma_{-1}^{\mathcal{D}^{-1}}$. En utilisant (5.22) et l'hypothèse de récurrence, $\sigma_{-n-2}^{\mathcal{D}^{-n-1}}(x_0,\xi) = 0$. □

Remarque 5.3.14. *La regularité de $\zeta_X(s) := \mathrm{Tr}(|X|^{-s})$ au point 0 quand X est un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint d'ordre 1 (voir [64]) :*

On vérifie que $\zeta_X(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr}(e^{-t|X|})\, dt$ pour $\Re(s) > d$. D'après

$$\operatorname{Tr}(e^{-t|X|}) = t^{-d} \sum_{n=0}^{N} t^n\, a_n[X] + \mathcal{O}(t^{N+1-d}) \tag{5.28}$$

et l'extension méromorphe au plan complexe, $\operatorname*{Res}_{s=d-n} \zeta_X(s) = \frac{a_n[X]}{\Gamma(d-n)}$. En particulier, nous avons $\zeta_X(s) = \Gamma(s)^{-1}\big(\frac{a_d[X]}{s} + f(s)\big)$, où f est holomorphe en $s = 0$. D'après (5.16), $\zeta_X(s)$ est régulière en 0 et $\zeta_X(0) = a_d[X]$ si d est pair et $\zeta_X(0) = 0$ si d est impair.

Corollaire 5.3.15. *$\zeta_{\mathcal{D}+A}(0) = \zeta_{\mathcal{D}}(0) = 0$ lorsque $d = dim(M)$ est impair.*

Quand d est pair, $\zeta_{\mathcal{D}+A}(0) - \zeta_{\mathcal{D}}(0) = \sum_{k=1}^{d/2} \frac{1}{2k} ⨍ (A\,\mathcal{D}^{-1})^{2k}$.

Démonstration. Le résultat est une conséquence de (1.11) et du Lemme 5.3.4. □

On voit que (1.11) est aussi une conséquence de $\sigma^{\log(1+A\mathcal{D}^{-1})} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sigma^{(A\mathcal{D}^{-1})^k}$ avec $\log(X) := \frac{\partial}{\partial z}_{|z=0} X^z$. Ainsi $Wres\big(\log(1 + A\mathcal{D}^{-1})\big) = \sum_{k=1}^{d} \frac{(-1)^k}{k} Wres\big(A\mathcal{D}^{-1})^k\big)$ puisque $(A\mathcal{D}^{-1})^k$ a un résidu de Wodzicki nul si $k > d$ et de plus $\zeta_{\mathcal{D}+A}(0) = -Wres\big(\log(\mathcal{D} + A)\big)$. Le point important est le caractère multiplicatif de $\det(X) := e^{Wres\big(\log(X)\big)}$ (voir [100]). De plus, ce déterminant est différent du ζ-déterminant $e^{-\zeta'_X(0)}$ utilisé par exemple par Hawking [77] dans sa régularisation via la fonction de partition qui souffre d'anomalies conformes.

Le fait que dans le développement asymptotique du noyau de la chaleur (5.28), le terme $a_2[\mathcal{D} + A]$ ne dépende que de la courbure scalaire et donc ne dépende pas de A se voit en dimension 2 par l'invariance de la fonction zêta :

Lemme 5.3.16. *Dans tout triplet spectral de dimension 2 (commutatif ou non) avec absence de tadpole d'ordre zero (i.e.* (1.19) *est satisfaite), $\zeta_{\mathcal{D}+A}(0) = \zeta_{\mathcal{D}}(0)$ pour toute 1-forme A.*

Démonstration. Soient a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathcal{A}$. Alors, avec $A_1 = a_1[\mathcal{D}, b_1]$,

$$⨍ A_1\, \mathcal{D}^{-1}\, a_2[\mathcal{D}, b_2]\, \mathcal{D}^{-1} = ⨍ A_1[\mathcal{D}^{-1}, a_2][\mathcal{D}, b_2]D^{-1} + ⨍ A_1 a_2 \mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}, b_2]\mathcal{D}^{-1}\,.$$

Le premier terme est nul puisque l'intégrand est dans OP^{-3}, alors que le deuxième terme est égal à $⨍ \big(a_1\alpha(b_1a_2) - a_1b_1\alpha(a_2)\big)\big(\alpha(b_2) - b_2\big)$, donc est nul d'après les égalités $\alpha(x)\alpha(y) = \alpha(xy)$, $⨍ xy = ⨍ x\alpha(y)$. Ainsi $⨍ \big(A\mathcal{D}^{-1}\big)^2 = 0$ et le Corollaire 5.3.15 donne le résultat. □

Notons que $\zeta_{\mathcal{D}+A}(0) - \zeta_{\mathcal{D}}(0)$ est normalement non nul : par exemple, sur le tore de dimension 4, on peut prendre

$$A := \phi \in [0, 2\pi[^4 \mapsto -i\gamma^\alpha \sum\nolimits_{l\in\mathbb{Z}^4} a_{\alpha,l}\, e^{i\, l^k \phi_k},$$

où $a_{\alpha,l}$ est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(Z^4)$ et $a_{\alpha,l} = -\overline{a_{\alpha,-l}}$. Nous avons d'après le Lemme 3.3.12, (avec $c = \frac{8\pi^2}{3}$, $|l|^2 = \sum_k l^{k^2}$ et $\Theta = 0$)

$$\zeta_{\mathcal{D}+A}(0) - \zeta_{\mathcal{D}}(0) = ⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^2 = c \sum_{l\in\mathbb{Z}^4} a_{\alpha_1,l}\, a_{\alpha_2,-l}\, (l^{\alpha_1} l^{\alpha_2} - \delta^{\alpha_1\alpha_2}|l|^2)$$

puisque $⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^4 = 0$.

La dernière égalité suggère que le Lemme 5.3.16 peut s'étendre :

Proposition 5.3.17. *Pour toute 1-forme A, $⨍ (A\mathcal{D}^{-1})^d = 0$ si $d = dim(M)$.*

Démonstration. Comme dans la preuve du Lemme 5.3.16, $\mathcal{D}^{-1}$ commute avec les éléments de l'algèbre car l'intégrand est dans OP^{-d}. Donc pour une famille $a_i, b_i \in \mathcal{A}$ et avec $a := \prod_{i=1}^d a_i$,

$$⨍ \prod_{i=1}^d \big(a_i[\mathcal{D}, b_i]\, D^{-1}\big) = ⨍ \big(\prod_{i=1}^d a_i\big) \prod_{i=1}^d \big([\mathcal{D}, b_i]\, \mathcal{D}^{-1}\big) = ⨍ a \prod_{i=1}^d \big(\alpha(b_i) - b_i\big).$$

On obtient, puisque $\alpha(b_i) - b_i \in OP^{-1}$,

$$\sigma_{-d}^{a\prod_{i=1}^d \alpha(b_i)-b_i} = a \prod_{i=1}^d \sigma_{-1}^{\alpha(b_i)-b_i} = a \prod_{i=1}^d \sigma_{-1}^{\alpha(b_i)}.$$

De plus, $\sigma_{-1}^{\mathcal{D}b_i\mathcal{D}^{-1}}(x_0, \xi) = 0$: on sait déjà par le Lemme 5.3.13 que $\sigma_{-2}^{\mathcal{D}^{-1}}(x_0, \xi) = 0$, et d'après (5.21) que $\partial_{x^k}\sigma_{-1}^{\mathcal{D}^{-1}}(x_0, \xi) = 0$ pour tout k, et $\sigma_0^{\mathcal{D}b_i}(x_0, \xi) = b_i(x_0)\, \sigma_0^{\mathcal{D}}(x_0, \xi) = 0$ ce qui donne le résultat. □

Cette proposition n'est plus vraie dans le cadre des triplets spectraux non commutatifs, voir par exemple [82, Table 1].

Notons que pour une 1-forme A, $⨍ A^d\, \mathcal{D}^{-d} \neq ⨍ (A\, D^{-1})^{-d} = 0$. En dimension $d = 2$,

$$⨍ A^2\, \mathcal{D}^{-2} = -2c_d\ \mathrm{Tr}(\gamma^k\gamma^l) \int_M a_k a_l\, \nu_g.$$

Il est connu (voir [37, Proposition 1.153]) que le terme d'ordre $d - 2$ (pour $d = 4$) dans l'action spectrale $⨍ |\mathcal{D} + A|^{-2}$ est indépendant de la perturbation A. C'est la raison pour laquelle l'action de Einstein–Hilbert $S(\mathcal{D}) = ⨍ |\mathcal{D}|^{-d+2} = -c \int_M \tau\sqrt{g}\, dx$ (voir [68, Théorème 11.2]) est si fondamentale. Ici τ est la courbure scalaire (positive sur la sphère) et c est une constante positive.

On donne ici une autre preuve de ce résultat.

Lemme 5.3.18. *Nous avons $⨍ |\mathcal{D} + A|^{-d+2} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-d+2} = -c \int_M \tau\sqrt{g}\, dx$ avec $c = \frac{d-2}{24} ⨍ |\mathcal{D}|^{-d}$.*

Démonstration. On obtient à partir du Lemme 1.3.10 (ii), l'égalité suivante, où $X := A\mathcal{D} + \mathcal{D}A + A^2$:

$$⨍ |\mathcal{D} + A|^{-d+2} - ⨍ |\mathcal{D}|^{-d+2} = \tfrac{(d-2)}{2} \big(\tfrac{d}{4} ⨍ X^2|\mathcal{D}|^{-d-2} - ⨍ X|\mathcal{D}|^{-d}\big).$$

Puisque les tadpoles n'existent pas ici, nous avons $⨍ X|\mathcal{D}|^{-d} = ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-d}$. De plus, puisque modulo OP^1, $X^2 = (A\mathcal{D})^2 + (\mathcal{D}A)^2 + A\mathcal{D}^2A + \mathcal{D}A^2\mathcal{D}$, on obtient avec $[\mathcal{D}^2, A] \in OP^1$,

$$⨍ X^2|\mathcal{D}|^{-d-2} = 2⨍ (A\mathcal{D})^2|\mathcal{D}|^{-d-2} + 2⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-d}$$

ce qui donne

$$⨍ |\mathcal{D} + A|^{-d+2} - ⨍ |\mathcal{D}|^{-d+2} = \tfrac{d(d-2)}{4} \big(⨍ (A\mathcal{D})^2|\mathcal{D}|^{-d-2} - \tfrac{2-d}{d} ⨍ A^2|\mathcal{D}|^{-d}\big).$$

Ainsi, il est suffisant de vérifier que

$$\int_{S^*_{x_0}M} \mathrm{Tr}\left(\sigma_{-d}((A\mathcal{D})^2|\mathcal{D}|^{-d-2})(x_0,\xi)\right) d\xi = \tfrac{2-d}{d} \int_{S^*_{x_0}M} \mathrm{Tr}\left(\sigma_{-d}(A^2|\mathcal{D}|^{-d})\,(x_0,\xi)\right) d\xi.$$

Un calcul direct donne, avec $A =: -ia_\mu\gamma^\mu$, et $\sigma_1^{\mathcal{D}}(x_0,\xi) = \gamma^\mu\xi_\mu$,

$$\int_{S^*_{x_0}M} \sigma_{-d}((A\mathcal{D})^2|\mathcal{D}|^{-d-2})(x_0,\xi)\, d\xi = -\tfrac{1}{d}\, a_\mu a_\tau\, \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu)\, \mathrm{Vol}(S^{d-1})\,,$$
$$\int_{S^*_{x_0}M} \sigma_{-d}(A^2|\mathcal{D}|^{-d})(x_0,\xi)\, d\xi = -a_\mu a_\tau\, \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\tau)\, \mathrm{Vol}(S^{d-1})\,.$$

Ainsi, $⨍ |\mathcal{D}+A|^{-d+2} = ⨍ |\mathcal{D}|^{-d+2}$ est une conséquence de l'égalité suivante $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\tau\gamma_\nu) = (2-d)\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\tau)$. La constante c est donnée dans [68, Théorème 11.2 et (11.2)]. □

Remarque 5.3.19. *Comme noté dans [37, Definition 1.143], le résultat précédent justifie la définition de la courbure scalaire d'un triplet $(\mathcal{A},\mathcal{H},\mathcal{D})$ comme étant $\mathcal{R}(a) := ⨍ a|\mathcal{D}|^{-d+2}$ pour $a \in \mathcal{A}$. Cette application est bien sûr une trace sur $\mathcal{A}$ pour une géométrie commutative. Mais ce n'est pas une trace pour le triplet associé au groupe quantique $SU_q(2)$:*

$$\mathcal{R}(aa^*) = ⨍ aa^*\,|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{-q^4+6q^2+3}{2(1-q^2)^2} \quad \textit{et} \quad \mathcal{R}(a^*a) = ⨍ a^*a\,|\mathcal{D}|^{-1} = \tfrac{3q^4+6q^2-1}{2(1-q^2)^2}\,.$$

Chapitre 6

Calcul pseudodifférentiel global sur variétés avec linéarisation

6.1 Introduction

Le calcul pseudodifférentiel global [9, 49, 63, 111, 112, 120, 125, 126, 148, 149] permet d'établir une notion globale de symbole total d'un opérateur pseudodifférentiel, modulo l'algèbre résiduelle des opérateurs régularisants $\Psi^{-\infty}$ (à noyau lisse). Il est basé sur la définition d'une connexion sur la variété (ou plus généralement, d'une linéarisation [9]), et utilise l'application exponentielle, ainsi que le transport parallèle sur les géodésiques associées, pour obtenir un isomorphisme global (modulo $\Psi^{-\infty}$) entre les algèbres symboliques et opératorielles. D'autre part, des applications en physique et dans le domaine de la quantification ont été considérées dans [10,56,57,74,75,145,146].

Ces calculs pseudodifférentiels sont basés sur des estimations locales en x. Dans le cadre des variétés non compactes, il est nécessaire de pouvoir contrôler uniformément en x les symboles et leurs dérivées. Il existe pour cela le calcul standard sur $\mathbb{R}^n$ de Hörmander [5, 81, 129], le calcul isotropique [105,127,128], et le calcul pseudodifférentiel SG [40,41,102,109,122,128,132]. D'autres approches basées sur les structures de Lie à l'infini ont aussi été explorées [3, 104, 106, 107].

Notre objectif ici est de construire un calcul pseudodifférentiel global généralisant les calculs standard et SG sur $\mathbb{R}^n$, sur les variétés avec linéarisation. Ces variétés fournissent un cadre naturel pour traiter à la fois de la non compacité et de l'isomorphisme global entre les symboles et les opérateurs.

6.2 Variétés avec linéarisation et espaces de base

6.2.1 Application exponentielle, définitions et notations

La notion de linéarisation sur une variété a été d'abord introduite par Bokobza-Haggiag dans [9] et est définie comme une application lisse ν de $M \times M$ dans TM telle que $\pi \circ \nu = \pi_1$, $\nu(x, x) = 0$ pour tout $x \in M$ et $(d_y\nu)_{y=x} = \mathrm{Id}_{T_xM}$. Dans ce qui suit, nous allons travailler avec des linéarisations "globales" dans le sens suivant :

Définition 6.2.1. Une variété avec linéarisation (ou variété exponentielle) est un couple $(M, \exp)$ où M est une variété lisse et exp une application lisse de TM dans M telle que :

(i) pour tout $x \in M$, $\exp_x : T_xM \to M$ définie par $\exp_x(\xi) := \exp(x, \xi)$, est un difféomorphisme entre T_xM et M,
(ii) pour tout $x \in M$, $\exp_x(0) = x$ et $(d\exp_x)_0 = \mathrm{Id}_{T_xM}$.
L'application exp sera appelée application exponentielle, et $(x, y) \mapsto \exp_x^{-1}(y)$ la linéarisation, de la variété exponentielle $(M, \exp)$. On utilisera la notation $e_x^\xi := \exp_x(\xi)$.

Notons que (M, ∇) (resp. (M, g)) où ∇ est une connexion linéaire sur M (resp. g est une structure pseudo-riemannienne sur M) est exponentielle (dans le sens où l'application exponentielle associée vérifie la définition précédente) si et seulement si
- M est géodésiquement complète,
- pour tout $x, y \in M$, il existe une et une seule géodésique maximale γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$,
- pour tout $x \in M$, $\exp_x$ est un difféomorphisme local.

Remarque 6.2.2. *Une variété de Cartan–Hadamard est, par définition, une variété riemannienne complète simplement connexe et de courbure sectionnelle négative ou nulle. D'après le théorème de Cartan–Hadamard (voir par exemple [97, Théorème 3.8]) toute variété de Cartan–Hadamard est exponentielle.*

Remarque 6.2.3. *La structure exponentielle peut se transporter par difféomorphisme : si $(M, \exp_M)$ est une variété exponentielle, N une variété lisse $\varphi : M \to N$ est un difféomorphisme, alors $(N, \exp_N := \varphi \circ \exp_M \circ T\varphi^{-1})$ est une variété exponentielle.*

Hypothèse 6.2.4. *On suppose à partir de maintenant que $(M, \exp)$ est une variété réelle exponentielle de dimension n.*

Pour tout $x, y \in M$, on définit γ_{xy} comme la courbe $\mathbb{R} \to M$, $t \mapsto \exp_x(t \exp_x^{-1} y)$, et $\widetilde{\gamma}_{xy}(t) := \gamma_{yx}(1-t)$. Notons que $\gamma_{xy}(0) = x$ et $\gamma_{xy}(1) = y$. Si l'application exponentielle est dérivée d'une connexion, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_{xy}(t) = \widetilde{\gamma}_{xy}(t)$. Dans le cas général, ceci est vrai seulement pour $t = 0$ et $t = 1$.

Si $z \in M$ et $\mathfrak{b}$ est une base de T_zM on appelle $(z, \mathfrak{b})$ une base normale (ou simplement base) sur M. Pour toute base $(z, \mathfrak{b})$, on pose $n_z^{\mathfrak{b}} := L_{\mathfrak{b}} \circ \exp_z^{-1}$ avec $L_{\mathfrak{b}}$ l'isomorphisme de T_zM sur $\mathbb{R}^n$ associé à $\mathfrak{b}$. Par conséquent, $n_z^{\mathfrak{b}}$ est un difféomorphisme de M sur $\mathbb{R}^n$.

On pose $\psi_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'} := n_z^{\mathfrak{b}} \circ (n_{z'}^{\mathfrak{b}'})^{-1}$, il s'agit d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ (changement de coordonnées normales). On note $(\partial_{i,z,\mathfrak{b}})_{i \in \mathbb{N}_n}$ et $(dx^{i,z,\mathfrak{b}})_{i \in \mathbb{N}_n}$ (avec $\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$) les champs de vecteurs de base et les 1-formes associées à $n_z^{\mathfrak{b}}$. On note $n_{z,*}^{\mathfrak{b}}$ le difféomorphisme de T^*M sur $\mathbb{R}^{2n}$, $n_{z,T}^{\mathfrak{b}} : (x, \xi) \to (n_z^{\mathfrak{b}}(x), M_{z,x}^{\mathfrak{b}}(\xi))$ le difféomorphisme de TM sur $\mathbb{R}^{2n}$, et $n_{z,M^2}^{\mathfrak{b}}$ le difféomorphisme de $M \times M$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, associés à la carte globale $n_z^{\mathfrak{b}}$.

Si $\mathfrak{E}$ est un espace vectoriel complexe normé, de dimension finie, et ν un $(2n)$-multi-indice, on définit les opérateurs suivants sur $C^\infty(T^*M, \mathfrak{E})$ (resp. $C^\infty(TM, \mathfrak{E})$, $C^\infty(M \times M, \mathfrak{E})$) :

$$\partial_{z,\mathfrak{b}}^\nu := \prod_{k=1}^{2n} \partial_{k,z,\mathfrak{b}}^{\nu_k}.$$

Si α est un n-multi-indice, $\partial_{z,\mathfrak{b}}^\alpha$ est un opérateur sur $C^\infty(M, \mathfrak{E})$. On introduit les notations suivantes pour $(z, \mathfrak{b})$ base, $x, y \in M$, $\theta \in T_x^*(M)$, $\xi \in T_x(M)$:

$$\langle x \rangle_{z,\mathfrak{b}} := \langle n_z^{\mathfrak{b}}(x) \rangle, \qquad \langle \theta \rangle_{z,\mathfrak{b},x} := \langle \widetilde{M}_{z,x}^{\mathfrak{b}}(\theta) \rangle, \qquad \langle \xi \rangle_{z,\mathfrak{b},x} := \langle M_{z,x}^{\mathfrak{b}}(\xi) \rangle,$$
$$\langle x, y \rangle_{z,\mathfrak{b}} := \langle (n_z^{\mathfrak{b}}(x), n_z^{\mathfrak{b}}(y)) \rangle, \quad \langle x, \theta \rangle_{z,\mathfrak{b}} := \langle (n_z^{\mathfrak{b}}(x), \widetilde{M}_{z,x}^{\mathfrak{b}}(\theta)) \rangle, \quad \langle x, \xi \rangle_{z,\mathfrak{b}} := \langle (n_z^{\mathfrak{b}}(x), M_{z,x}^{\mathfrak{b}}(\xi)) \rangle.$$

Si f et g sont dans $C^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{p'})$ on note $f \asymp g$ la relation d'équivalence : $\langle f \rangle = \mathcal{O}(\langle g \rangle)$ et $\langle g \rangle = \mathcal{O}(\langle f \rangle)$.

6.2.2 Transport parallèle sur un fibré hermitien

Soit un E un fibré vectoriel hermitien (avec fibre typique $\mathbb{E}$) sur $(M, \exp)$. E admet une connection ∇^E compatible avec la métrique hermitienne [7]. On notera $(\psi|\psi')$ le produit scalaire hermitien et $|\psi|^2 := (\psi|\psi)$. Par convention, la forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)_x$ sur E_x est antilinéaire en la deuxième variable. Si γ est un courbe sur M définie sur un interval J et γ^*E le fibré associé sur J, il existe une connexion naturelle sur γ^*E, notée ∇^{γ^*E}, compatible avec ∇^E.

Fixons $x, y \in M$ et $\gamma : J \to M$ un courbe telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Pour tout $v \in E_x$, il existe une section lisse unique β de $\gamma^*E \to J$ telle que $\beta(0) = v$ et $\nabla^{\gamma^*E}\beta = 0$. Clairement, $\beta(1) \in E_y$ et on peut définir un isomorphisme linéaire τ_γ de E_x vers E_y par $\tau_\gamma(v) = \beta(1)$. L'application τ_γ est le transport parallèle associé à γ de E_x vers E_y. La compatibilité de ∇^E avec la métrique hermitienne implique que τ_γ soit une isométrie.

Le fibré vectoriel $L(E) \to M$, défini par $L(E)_x := L(E_x)$, est relevé à T^*M, TM et $M \times M$ en posant la fibre en (x, θ) égale à $L(E_x)$ pour T^*M ou TM, et la fibre en (x, y) égale à $L(E_y, E_x)$ pour $M \times M$. La projection canonique de T^*M ou TM vers M est notée π.

On note $\tau_{xy} := \tau_{\gamma_{xy}}$. Remarquons que $\tau_{xy}^{-1} = \tau_{\widetilde{\gamma}_{yx}}$. On définit $\tau_z : x \mapsto \tau_{zx}$ et on pose $\tau_z^{-1} : x \mapsto \tau_{zx}^{-1} = \tau_{zx}^*$.

Si $u \in C^\infty(M, E)$ et $z \in M$, on note $u^z(x) := (\tau_z^{-1}\, u)(x)$ pour tout $x \in M$. Si a est une section de $L(E) \to T^*M$ ou $L(E) \to TM$, on note $a^z := (\tau_z^{-1} \circ \pi)\, a\, (\tau_z \circ \pi)$. Si a est une section de $L(E) \to M \times M$, on note $a^z(x, y) := \tau_z^{-1}(x)\, a(x, y)\, \tau_z(y)$. On note $\tau^z := (x, y) \mapsto \tau_z^{-1}(y)\tau(x, y)\tau_z(x) \in L(E_z)$. En notant $\pi_1(x, y) := x$, $\pi_2(x, y) := y$, on obtient alors $a^z = (\tau_z^{-1} \circ \pi_1)\, a\, (\tau_z \circ \pi_2)$ et $\tau^z = (\tau_z^{-1} \circ \pi_2)\, a\, (\tau_z \circ \pi_1)$.

Le résultat suivant est classique.

Lemme 6.2.5. *(i) L'application $\tau : (x, y) \mapsto \tau_{xy}$ (resp. $\tau^{-1} : (x, y) \mapsto \tau_{xy}^{-1}$) est une section lisse du fibré vectoriel $L(E)^\vee \to M \times M$ où la fibre en (x, y) est $L(E_x, E_y)$ (resp. du fibré vectoriel $L(E) \to M \times M$).*
(ii) $\tau_z \in C^\infty(M, L(E_z, E))$ et $\tau_z^{-1} \in C^\infty(M, L(E, E_z))$.
(iii) $\tau^z \in C^\infty(M \times M, L(E_z))$.

Corollaire 6.2.6. *Si u est dans l'espace $C^\infty(M, E)$, alors $u^z \in C^\infty(M, E_z)$. De façon similaire $a \in C^\infty(T^*M, L(E))$ (resp. $C^\infty(TM, L(E))$, $C^\infty(M \times M, L(E))$), alors $a^z \in C^\infty(T^*M, L(E_z))$ (resp. $C^\infty(TM, L(E_z))$, $C^\infty(M \times M, L(E_z))$).*

Remarque 6.2.7. *Le fibré vectoriel E sur M est trivialisable et le transport parallèle donne une famille de d trivialisations, puisque pour tout $z \in M$, $f_z : E \mapsto M \times \mathbb{E}, (x, v) \mapsto (x, \tau_{xz}(v))$, $\mathrm{Id} : M \mapsto M, x \mapsto x$, est un isomorphisme de fibrés vectoriels de $E \to M$ dans $M \times \mathbb{E} \to M$. Notons que si $\exp$ est dérivée d'une connection, $\tau_{xy}^{-1} = \tau_{yx}$ pour tout $x, y \in M$.*

6.2.3 Géométrie de type $\mathcal{O}_M$ et S_σ

Définition 6.2.8. Soit $\sigma \in [0, 1]$. La variété exponentielle $(M, \exp)$ est dite de type S_σ si pour tous $(z, \mathfrak{b})$, $(z', \mathfrak{b}')$, et tout n-multi-indice $\alpha \neq 0$,

$$(S_\sigma 1) \qquad \partial^\alpha \psi_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma(|\alpha|-1)}),$$

et de type $\mathcal{O}_M$ si pour tout $(z,\mathfrak{b})$, $(z',\mathfrak{b}')$, et tout n-multi-indice α, il existe $p_\alpha \geq 1$ tel que

$$(\mathcal{O}_M 1) \qquad \partial^\alpha \psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{p_\alpha})\,.$$

Définition 6.2.9. Considérons le triplet $(M,\exp,E)$ où $(M,\exp)$ est exponentielle. E est un fibré hermitien sur M est de type S_σ si $(M,\exp)$ est de type S_σ et pour tous $(z,\mathfrak{b})$, z',z'', et tout n-multi-indice α,

$$(S_\sigma 2) \qquad \partial^\alpha_{z,\mathfrak{b}} \tau_{z'}^{-1} \tau_{z''}(x) = \mathcal{O}(\langle x\rangle^{-\sigma|\alpha|}_{z,\mathfrak{b}})\,,$$

et de type $\mathcal{O}_M$ si $(M,\exp)$ est de type $\mathcal{O}_M$ pour tous $(z,\mathfrak{b})$, $(z',\mathfrak{b}')$, et tout n-multi-indice α, il existe $p_\alpha \geq 1$ tel que

$$(\mathcal{O}_M 2) \qquad \partial^\alpha_{z,\mathfrak{b}} \tau_{z'}^{-1} \tau_{z''}(x) = \mathcal{O}(\langle x\rangle^{p_\alpha}_{z,\mathfrak{b}})\,.$$

Lemme 6.2.10. *Soient $\sigma \in [0,1]$ et $(z,\mathfrak{b})$, $(z',\mathfrak{b}')$ des bases.*
(i) Si $(M,\exp)$ est de type S_σ, il existe $K,C,C'>0$ tels que pour tout $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$, $x\in M$, $\theta\in T^*_x(M)$, $\xi\in T_x(M)$,

$$\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'} \asymp \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{et} \qquad \langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}} \leq K\langle x\rangle_{z',\mathfrak{b}'}\,, \tag{6.1}$$

$$\langle\theta\rangle_{z,\mathfrak{b},x} \leq C\langle\theta\rangle_{z',\mathfrak{b}',x} \qquad \text{et} \qquad \langle\xi\rangle_{z,\mathfrak{b},x} \leq C'\langle\xi\rangle_{z',\mathfrak{b}',x}\,, \tag{6.2}$$

et si $(M,\exp)$ est de type $\mathcal{O}_M$, il existe $K,K',K'',C,C'>0$ et $q\geq 1$ tels que pour tout $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$, $x\in M$, $\theta\in T^*_x(M)$, $\xi\in T_x(M)$,

$$K'\langle\mathrm{x}\rangle^{1/q} \leq \langle\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}(\mathrm{x})\rangle \leq K''\langle\mathrm{x}\rangle^q \qquad \text{et} \qquad \langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}} \leq K\langle x\rangle^q_{z',\mathfrak{b}'}\,, \tag{6.3}$$

$$\langle\theta\rangle_{z,\mathfrak{b},x} \leq C\langle x\rangle^q_{z',\mathfrak{b}'}\langle\theta\rangle_{z',\mathfrak{b}',x} \qquad \text{et} \qquad \langle\xi\rangle_{z,\mathfrak{b},x} \leq C'\langle x\rangle^q_{z',\mathfrak{b}'}\langle\xi\rangle_{z',\mathfrak{b}',x}\,, \tag{6.4}$$

(ii) Pour tout n-multi-indice α,

$$\partial^\alpha_{z,\mathfrak{b}} = \sum_{0\leq|\alpha'|\leq|\alpha|} f_{\alpha,\alpha'}\,\partial^{\alpha'}_{z',\mathfrak{b}'}$$

où les fonctions $(f_{\alpha,\alpha'})$ sur M sont lisses, réelles et telles que pour tout n-multi-indices α,α',

(a) si $(M,\exp)$ est de type S_σ, il existe $C_\alpha>0$ tel que pour tout $x\in M$, $|f_{\alpha,\alpha'}(x)| \leq C_\alpha\langle x\rangle^{-\sigma(|\alpha|-|\alpha'|)}_{z,\mathfrak{b}}$,

(b) si $(M,\exp)$ est de type $\mathcal{O}_M$, il existe $C_\alpha>0$ et $q_\alpha\geq 1$ tel que pour tout $x\in M$, $|f_{\alpha,\alpha'}(x)| \leq C_\alpha\langle x\rangle^{q_\alpha}_{z,\mathfrak{b}}$.

Démonstration. (i) Supposons que $(M,\exp)$ soit de type S_σ. La formule de Taylor implique que $\left\|\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}(\mathrm{x})\right\| \leq \left\|\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}(0)\right\| + C_0\,\|\mathrm{x}\|$ pour tout $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$, où $C_0 := \sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n}\left\|(d\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'})_{\mathrm{x}}\right\|$. Par conséquent $\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\|\mathrm{x}\|)$ et alors, il existe $K''>0$ tel que $\langle\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'}(\mathrm{x})\rangle \leq K''\langle\mathrm{x}\rangle$. Le même argument pour $\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z} = (\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'})^{-1}$ donne $\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'} \asymp \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}} \leq K\langle x\rangle_{z',\mathfrak{b}'}$ s'en déduit. Puisque $x \mapsto \left\|\widetilde{M}^{\mathfrak{b}}_{z,x}(\widetilde{M}^{\mathfrak{b}'}_{z',x})^{-1}\right\| = \left\|(d\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z})_{n^{\mathfrak{b}}_z(x)}\right\|$ et $x \mapsto \left\|M^{\mathfrak{b}}_{z,x}(M^{\mathfrak{b}'}_{z',x})^{-1}\right\| = \left\|(d\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z'})_{n^{\mathfrak{b}'}_{z'}(x)}\right\|$ sont des fonctions bornées, (6.2) suit. Le cas où $(M,\exp)$ est de type $\mathcal{O}_M$ est similaire.
(ii) Nous avons pour tout $f\in C^\infty(M,\mathfrak{E})$,

$$\partial^\alpha_{z,\mathfrak{b}}(f) = \partial^\alpha(f\circ(n^{\mathfrak{b}}_z)^{-1})\circ n^{\mathfrak{b}}_z = \partial^\alpha(f\circ(n^{\mathfrak{b}'}_{z'})^{-1}\circ\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z})\circ n^{\mathfrak{b}}_z\,.$$

On applique alors la formule de Faa di Bruno à plusieurs variables obtenue par G.M. Constantine et T.H. Savits dans [39], que nous avons reformulée au Théorème 6.2.11. Cette formule implique que pour tout n-multi-indice $\alpha \neq 0$,

$$\partial^\alpha (f \circ (n^{\mathfrak{b}'}_{z'})^{-1} \circ \psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z}) = \sum_{1 \leq |\alpha'| \leq |\alpha|} P_{\alpha,\alpha'}(\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z}) \, (\partial^{\alpha'} f \circ (n^{\mathfrak{b}'}_{z'})^{-1}) \circ \psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z}$$

et ainsi

$$\partial^\alpha_{z,\mathfrak{b}} = \sum_{1 \leq |\alpha'| \leq |\alpha|} (P_{\alpha,\alpha'}(\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z}) \circ n^{\mathfrak{b}}_z) \; \partial^{\alpha'}_{z',\mathfrak{b}'} =: \sum_{1 \leq |\alpha'| \leq |\alpha|} f_{\alpha,\alpha'} \; \partial^{\alpha'}_{z',\mathfrak{b}'}$$

où $P_{\alpha,\alpha'}(g)$ est une combinaison linéaire de $\prod_{j=1}^s (\partial^{l^j} g)^{k^j}$, où $1 \leq s \leq |\alpha|$ et les k^j et l^j sont des n-multi-indices avec $|k^j| > 0$, $|l^j| > 0$, $\sum_{j=1}^s |k^j| = |\alpha'|$ et $\sum_{j=1}^s |k^j||l^j| = |\alpha|$. Dans le cas où $(M, \exp)$ est de type S_σ, pour chaque $s, (k^j), (l^j)$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\prod_{j=1}^s (\partial^{l^j} \psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z})^{k^j}(\mathrm{x})| \leq K \langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma \sum_{j=1}^s (|l^j|-1)|k^j|} = K \langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma(|\alpha|-|\alpha'|)}$$

ce qui donne le résultat. Le cas où $(M, \exp)$ est de type $\mathcal{O}_M$ est similaire. □

Théoreme 6.2.11. *[39] Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}^p, \mathfrak{E})$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors pour tout n-multi-indice $\nu \neq 0$,*

$$\partial^\nu (f \circ g) = \sum_{1 \leq |\lambda| \leq |\nu|} (\partial^\lambda f) \circ g \sum_{s=1}^{|\nu|} \sum_{p_s(\nu,\lambda)} \nu! \prod_{j=1}^s \frac{1}{k^j! (l^j!)^{|k^j|}} (\partial^{l^j} g)^{k^j}$$

où $p_s(\nu, \lambda)$ est l'ensemble des p-multi-indices k^j et n-multi-indices l^j $(1 \leq j \leq s)$ tels que $0 \prec l^1 \prec \cdots \prec l^s$ ($l \prec l'$ étant défini par "$|l| < |l'|$ ou $|l| = |l'|$ et $l <_L l'$" où $<_L$ est l'ordre lexicographique strict), $|k^j| > 0$, $\sum_{j=1}^s k^j = \lambda$ et $\sum_{j=1}^s |k^j| l^j = \nu$.

Notons que d'après le Lemme 6.2.10, si $(M, \exp)$ satisfait $(S_\sigma 1)$ (resp. $(\mathcal{O}_M 1)$), alors $(S_\sigma 2)$ (resp. $(\mathcal{O}_M 2)$) est équivalent à : pour tout $z', z'' \in M$, il existe une base $(z, \mathfrak{b})$ telle que $\partial^\alpha_{z,\mathfrak{b}} \tau_{z'}^{-1} \tau_{z''}(x) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-\sigma|\alpha|}_{z,\mathfrak{b}})$ (resp. $\mathcal{O}(\langle x \rangle^{p_\alpha}_{z,\mathfrak{b}})$ pour un $p_\alpha \geq 1$) pour tout n-multi-indice α.

Les caractéristiques S_σ ou $\mathcal{O}_M$ peuvent se transporter par difféomorphisme :

Proposition 6.2.12. *Si $(M, \exp_M)$ est de type S_σ (resp. $\mathcal{O}_M$), N une variété lisse et $\varphi : M \to N$ un difféomorphisme, alors $(N, \exp_N := \varphi \circ \exp_M \circ d\varphi^{-1})$ est de type S_σ (resp. $\mathcal{O}_M$).*

Démonstration. Notons $\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z',N} := n^{\mathfrak{b}}_{z,N} \circ (n^{\mathfrak{b}'}_{z',N})^{-1}$ où $n^{\mathfrak{b}}_{z,N} := L_{\mathfrak{b}} \circ \exp^{-1}_{N,z}$ et $(z, \mathfrak{b})$, $(z', \mathfrak{b}')$ sont deux bases sur N. Puisque $\exp_{z',N} = \varphi \circ \exp_{M,\varphi^{-1}(z')} \circ (d\varphi^{-1})_{z'}$ et d'autre part $\exp^{-1}_{N,z} = (d\varphi^{-1})^{-1}_z \circ \exp^{-1}_{M,\varphi^{-1}(z)} \circ \varphi^{-1}$, nous obtenons $\psi^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}_{z,z',N} = \psi^{\mathfrak{b}_z,\mathfrak{b}'_{z'}}_{\varphi^{-1}(z),\varphi^{-1}(z'),M}$ où $\mathfrak{b}_z$ est la base de $T_{\varphi^{-1}(z)}(M)$ telle que $L_{\mathfrak{b}_z} = L_{\mathfrak{b}} \circ (d\varphi)_{\varphi^{-1}(z)}$. Le résultat s'en déduit. □

Le lemme technique suivant sera utilisé pour la transformation de Fourier et la définition des sections rapidement décroissantes sur les fibrés tangent et cotangent.

Lemme 6.2.13. *Soient* $(z, \mathfrak{b})$, $(z', \mathfrak{b}')$ *des bases.*
(i) On peut exprimer $\partial_{z,\mathfrak{b}}^{(\alpha,\beta)}$, *vu comme un opérateur sur* $C^\infty(T^*M, \mathfrak{E})$ *(resp.* $C^\infty(TM, \mathfrak{E})$*) , où* (α, β) *est un* $2n$*-multi-indice, avec la somme finie :*

$$\partial_{z,\mathfrak{b}}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{\substack{0\leq|(\alpha',\beta')|\leq|(\alpha,\beta)| \\ |\beta'|\geq|\beta|}} f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}\, \partial_{z',\mathfrak{b}'}^{(\alpha',\beta')}$$

où les fonctions lisses réelles $f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}$ *sur* T^*M *(resp.* TM*) vérifient*

(a) si $(M, \exp)$ *est de type* S_σ *pour un* $\sigma \in [0, 1]$, *il existe* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *tel que pour tout* $(x, \theta) \in T^*M$ *(resp.* TM*),*

$$|f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}(x, \theta)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{\sigma(|\alpha'|-|\alpha|)}\langle\theta\rangle_{z,\mathfrak{b},x}^{|\beta'|-|\beta|}. \tag{6.5}$$

(b) si $(M, \exp)$ *de type* $\mathcal{O}_M$, *il existe* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *et* $q_{\alpha,\beta} \geq 1$ *tels que pour tout* $(x, \theta) \in T^*M$ *(resp.* TM*),*

$$|f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}(x, \theta)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{q_{\alpha,\beta}}\langle\theta\rangle_{z,\mathfrak{b},x}^{|\beta'|-|\beta|}. \tag{6.6}$$

(ii) On peut exprimer $\partial_{z,\mathfrak{b}}^{(\alpha,\beta)}$, *vu comme un opérateur sur* $C^\infty(M \times M, \mathfrak{E})$, *avec la somme finie :*

$$\partial_{z,\mathfrak{b}}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{\substack{0\leq|\alpha'|\leq|\alpha| \\ 0\leq|\beta'|\leq|\beta|}} f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}\, \partial_{z',\mathfrak{b}'}^{(\alpha',\beta')}$$

où les fonctions lisses réelles $f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}$ *sur* $M \times M$ *sont telles que*

(a) si $(M, \exp)$ *est de type* S_σ *pour un* $\sigma \in [0, 1]$, *il existe* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *tel que pour tout* $(x, y) \in M \times M$,

$$|f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}(x, y)| \leq C_{\alpha,\beta}\,\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{\sigma(|\alpha'|-|\alpha|)}\,\langle y\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{\sigma(|\beta'|-|\beta|)}. \tag{6.7}$$

(b) si $(M, \exp)$ *est de type* $\mathcal{O}_M$, *il existe* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *et* $q_\alpha, q_\beta \geq 1$ *tel que pour tout* $(x, y) \in M \times M$,

$$|f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}(x, y)| \leq C_{\alpha,\beta}\,\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{q_\alpha}\,\langle y\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{q_\beta}. \tag{6.8}$$

Démonstration. (i) Supposons que $(M, \exp)$ soit de type S_σ. On note $\psi_* := n_{z',*}^{\mathfrak{b}'} \circ (n_{z,*}^{\mathfrak{b}})^{-1}$ et $\psi_T := n_{z',T}^{\mathfrak{b}'} \circ (n_{z,T}^{\mathfrak{b}})^{-1}$. Nous avons $\psi_* = (\psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}} \circ \pi_1, L)$ où π_1 est la projection de $\mathbb{R}^{2n}$ sur la première copie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et L est l'application lisse de $\mathbb{R}^{2n}$ vers $\mathbb{R}^n$ définie par

$$L(\mathrm{x}, \vartheta) := {}^t(d\psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}})_{\mathrm{x}}^{-1}(\vartheta) = {}^t(d\psi_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'})_{\psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}(\mathrm{x})}(\vartheta).$$

En notant $(L_i)_{1\leq i\leq n}$ les composantes de L, nous avons $L_i(\mathrm{x}, \vartheta) = \sum_{1\leq p\leq n} L_{i,p}(\mathrm{x})\,\vartheta_p$, où $L_{i,p} := (\partial_i\psi_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'})_p \circ \psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}$. Par conséquent, pour $1 \leq i \leq n$ et α, β, n-multi-indices tel que $|(\alpha, \beta)| > 0$

$$(\partial^{(\alpha,\beta)}\psi_*)_i = \delta_{\beta,0}(\partial^\alpha\psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}})_i \circ \pi_1\,, \qquad (\partial^{(\alpha,\beta)}\psi_*)_{n+i} = (\partial^{(\alpha,\beta)}L)_i\,,$$

$$(\partial^{(\alpha,\beta)}L)_i(\mathrm{x}, \vartheta) = \sum_{1\leq p\leq n} (\partial^\alpha L_{i,p})(\mathrm{x})\; F_{\beta,p}(\vartheta)\,,$$

$$\partial^\alpha L_{i,p} = \sum_{1\leq|\alpha'|\leq|\alpha|} P_{\alpha,\alpha'}(\psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}})\;((\partial^{\alpha'+e_i}\psi_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'})_p \circ \psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}) \quad \text{si} \quad |\alpha| > 0\,,$$

où $F_{\beta,p}(\vartheta)$ est égal à ϑ_p si $\beta = 0$, to $\delta_{p,r}$ si $\beta = e_r$, et à 0 sinon. On obtient de la preuve du Lemme 6.2.10 que (pour $1 \leq |\alpha'| \leq |\alpha|$) $P_{\alpha,\alpha'}(\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z})(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\alpha|-|\alpha'|)})$. Par conséquent, d'après (6.1), on voit que $\partial^\alpha L_{i,p}(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma|\alpha|})$. Ainsi, si $|\beta| > 1$, $\partial^{(\alpha,\beta)}\psi_* = 0$ et

$$\begin{aligned}
&\text{si } \beta = 0\,, \quad (\partial^{(\alpha,\beta)}\psi_*)_i(\mathrm{x},\vartheta) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\alpha|-1)}) \quad \text{et} \quad (\partial^{(\alpha,\beta)}\psi_*)_{n+i}(\mathrm{x},\vartheta) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma|\alpha|}\langle\vartheta\rangle)\,,\\
&\text{si } |\beta| = 1\,, \quad (\partial^{(\alpha,\beta)}\psi_*)_i = 0 \quad \text{et} \quad (\partial^{(\alpha,\beta)}\psi_*)_{n+i}(\mathrm{x},\vartheta) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma|\alpha|})\,.
\end{aligned}$$

Des résultats similaires sont vérifiés pour ψ_T, en prenant $\widetilde{L} := (d\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z})_{\mathrm{x}}(\vartheta)$ au lieu de L.
Nous avons pour tout $f \in C^\infty(T^*M, \mathfrak{E})$,

$$\partial^\nu_{z,\mathfrak{b}}(f) = \partial^\nu(f \circ (n^{\mathfrak{b}}_{z,*})^{-1}) \circ n^{\mathfrak{b}}_{z,*} = \partial^\nu(f \circ (n^{\mathfrak{b}'}_{z',*})^{-1} \circ \psi_*) \circ n^{\mathfrak{b}}_{z,*}\,.$$

En utilisant encore une fois la fomule de Faa di Bruno du Théorème 6.2.11, on obtient

$$\partial^\nu_{z,\mathfrak{b}} = \sum_{1\leq|\nu'|\leq|\nu|} (P_{\nu,\nu'}(\psi_*) \circ n^{\mathfrak{b}}_{z,*})\ \partial^{\nu'}_{z',\mathfrak{b}'} =: \sum_{1\leq|\nu'|\leq|\nu|} f_{\nu,\nu'}\ \partial^{\nu'}_{z',\mathfrak{b}'}$$

où $P_{\nu,\nu'}(\psi_*)$ est une combinaison linéaire de $\prod_{j=1}^s (\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j}$, où $1 \leq s \leq |\nu|$, les k^j et l^j sont des $2n$-multi-indices avec $|k^j| > 0$, $|l^j| > 0$, $\sum_{j=1}^s k^j = \nu'$ et $\sum_{j=1}^s |k^j||l^j| = \nu$.

Notons $l^j =: (l^{j,1}, l^{j,2})$, $k^j =: (k^{j,1}, k^{j,2})$ où $l^{j,1}, l^{j,2}, k^{j,1}, k^{j,2}$ sont des n-multi-indices. Ainsi,

$$(\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j} = \prod_{i=1}^n ((\partial^{l^j}\psi_*)_i)^{k^{j,1}_i}\ ((\partial^{l^j}\psi_*)_{n+i})^{k^{j,2}_i}$$

et on obtient, pour un s donné, (l^j), (k^j) tels que $(\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j} \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq s$,

$$\begin{aligned}
&\text{si } l^{j,2} = 0\,, \qquad (\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j} = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|l^j|-1)|k^j|-\sigma|k^{j,2}|}\langle\vartheta\rangle^{|k^{j,2}|})\,,\\
&\text{si } |l^{j,2}| = 1\,, \qquad k^{j,1} = 0 \text{ et } (\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j} = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|l^j|-1)|k^j|})\,.
\end{aligned}$$

Puisque $k^j \neq 0$ et $(\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j} \neq 0$, $l^{j,2}$ satisfait $|l^{j,2}| \leq 1$. Par permutation sur les indices j, on peut supposer que pour $1 \leq j \leq j_1 - 1$, nous avons $l^{j,2} = 0$, pour $j_1 \leq j \leq s$, nous avons $|l^{j,2}| = 1$, où $1 \leq j_1 \leq s+1$. Ainsi,

$$\prod_{j=1}^s (\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j} = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(\sum_{j=1}^s(|l^j|-1)|k^j|+\sum_{j=1}^{j_1-1}|k^{j,2}|)}\langle\vartheta\rangle^{\sum_{j=1}^{j_1-1}|k^{j,2}|})\,.$$

Avec $\nu = (\alpha,\beta)$, $\nu' = (\alpha',\beta')$,

$$\sum_{j=1}^{j_1-1}|k^{j,2}| = \sum_{j=1}^s |k^{j,2}| - \sum_{j=j_1}^s |k^{j,2}| = |\beta'| - \sum_{j=j_1}^s |k^j||l^{j,2}| = |\beta'| - |\beta|\,.$$

Si on pose $f_{0,0,0,0} := 1$ et $f_{\alpha,0,0,0} := 0$ si $\alpha \neq 0$, alors pour tout $2n$-multi-indice (α,β),

$$\partial^{(\alpha,\beta)}_{z,\mathfrak{b}} = \sum_{\substack{0\leq|(\alpha',\beta')|\leq|(\alpha,\beta)|\\ |\beta'|\geq|\beta|}} f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}\ \partial^{(\alpha',\beta')}_{z',\mathfrak{b}'}$$

et l'estimation (6.5) suit pour tout $f_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}$. Dans le cas de $\mathcal{O}_M$, la preuve est similaire, et nous obtenons pour un $r_\nu \geq 1$, $\prod_{j=1}^s(\partial^{l^j}\psi_*)^{k^j} = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{r_\nu}\langle\vartheta\rangle^{|\beta'|-|\beta|})$, ce qui donne le résultat.

(ii) En remplaçant ψ_* by $\psi^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}_{z',z,M^2} := n^{\mathfrak{b}'}_{z',M^2} \circ (n^{\mathfrak{b}}_{z,M^2})^{-1}$ dans (i), nous obtenons le résultat par des arguments identiques. □

6.2.4 Espaces de fonctions et de distributions de base

On suppose dans cette section que E est un fibré vectoriel hermitien sur la variété exponentielle $(M, \exp)$. On définit pour toute base $(z, \mathfrak{b})$ sur M,

$$T_{z,\mathfrak{b}}(u) := u^z \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1}.$$

Pour une base donnée $(z, \mathfrak{b})$, on note $|dx^{z,\mathfrak{b}}|$ la densité associée à la forme volume sur M : $dx^{z,\mathfrak{b}} := dx^{1,z,\mathfrak{b}} \wedge \cdots \wedge dx^{n,z,\mathfrak{b}}$ et $|\partial_{z,\mathfrak{b}}|$ la codensité définie par $|\partial_{1,z,\mathfrak{b}} \wedge \cdots \wedge \partial_{n,z,\mathfrak{b}}|$. Pour une densité strictement positive donnée $d\mu$, on notera aussi $d\mu$ la mesure (positive, de Borel–Radon, σ-finie) associée sur M. Ceci permet de définir les espaces de Banach $L^p(M, d\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. En fait, $L^\infty(M) := L^\infty(M, d\mu)$ ne dépend pas de $d\mu$.

On définit $G_\sigma(\mathbb{R}^p, \mathfrak{E})$ (resp. $S_\sigma(\mathbb{R}^p)$), où $\sigma \in [0, 1]$, comme l'espace des applications lisses g de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathbb{R}$) telles que pour tout p-multi-indice $\nu \neq 0$ (resp. tout p-multi-indice ν), il existe $C_\nu > 0$ tel que $\|\partial^\nu g(\mathrm{v})\| \leq C_\nu \langle \mathrm{v} \rangle^{-\sigma(|\nu|-1)}$ (resp. $|\partial^\nu g(\mathrm{v})| \leq C_\nu \langle \mathrm{v} \rangle^{-\sigma|\nu|}$) pour tout $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$. On note $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^p, \mathfrak{E})$ l'espace des fonctions lisses à valeurs dans $\mathfrak{E}$ avec dérivées polynomialement bornées. On utilisera les notations $G_\sigma(\mathbb{R}^p) := G_\sigma(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^p) := \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Lemme 6.2.14. *(i) Soient $f \in G_\sigma(\mathbb{R}^p, \mathfrak{E})$ (resp. $S_\sigma(\mathbb{R}^p)$) et $g \in G_\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telles que, si $\sigma > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\langle g(\mathrm{v}) \rangle \geq \varepsilon \langle \mathrm{v} \rangle$ pour tout $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors $f \circ g \in G_\sigma(\mathbb{R}^n, \mathfrak{E})$ (resp. $S_\sigma(\mathbb{R}^n)$).*
(ii) L'ensemble $G_\sigma^\times(\mathbb{R}^p)$ des difféomorphismes g on $\mathbb{R}^p$ tels que g et g^{-1} soient dans $G_\sigma(\mathbb{R}^p)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^p)$ et contient $GL_p(\mathbb{R})$ comme sous-groupe.
(iii) Nous avons $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^p, \mathfrak{E}) \circ \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \subseteq \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n, \mathfrak{E})$. En particulier, l'espace $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ est un monoïde sous la composition des fonctions. L'ensemble des éléments inversibles du monoïde $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$, noté $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$, est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^p)$ et contient $G_\sigma^\times(\mathbb{R}^p)$ comme sous-groupe.
(iv) $(M, \exp)$ est de type S_σ (resp. $\mathcal{O}_M$) si et seulement s'il existe une base $(z_0, \mathfrak{b}_0)$ telle que pour toute base $(z, \mathfrak{b})$, $\psi_{z_0,z}^{\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}} \in G_\sigma^\times(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$).
(v) L'ensemble, noté $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^p)$), des fonctions lisses $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^*$ telles que f et $1/f$ soient dans $S_\sigma(\mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^p)$) est un groupe commutatif sous la multiplication de fonctions. De plus, $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^p) \leq S_{\sigma'}^\times(\mathbb{R}^p) \leq \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^p)$ si $1 \geq \sigma \geq \sigma' \geq 0$.
(vi) Si $g \in G_\sigma^\times(\mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$) alors son déterminant jabobien $J(g)$ est dans $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^p)$).

Démonstration. Applications directes de la formule de Faa di Bruno (Théorème 6.2.11). □

Remarquons que pour tout $g \in G_\sigma^\times(\mathbb{R}^p)$, nous avons $g \asymp \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}$. La multiplication par une fonction dans $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^n)$ est un automorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$. Si on note $J_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}$ le jacobien de $\psi_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}$, alors $1/J_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'} = J_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}} \circ \psi_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}$ et

$$J_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'} \circ n_{z'}^{\mathfrak{b}'}(x) = dx^{z,\mathfrak{b}}/dx^{z',\mathfrak{b}'}(x) = \det M_{z,x}^{\mathfrak{b}} (M_{z',x}^{\mathfrak{b}'})^{-1} = \det(M_{z',x}^{\mathfrak{b}'})^{-1} M_{z,x}^{\mathfrak{b}}\,.$$

On déduit du Lemme 6.2.14 (vi) que si $(M, \exp)$ est de type S_σ (resp. $\mathcal{O}_M$) alors $J_{z,z'}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}$ est dans $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^n)$).

Définition 6.2.15. Une fonction lisse f est dans S_σ (resp. $\mathcal{O}_M$) si pour toute base $(z, \mathfrak{b})$, $f \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1} \in S_\sigma(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$). Une fonction lisse f est dans $S_\sigma^\times$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times$) si pour toute base $(z, \mathfrak{b})$, $f \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1} \in S_\sigma^\times(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^n)$).

Lemme 6.2.16. *Si* $(M, \exp)$ *est de type* S_σ*, alors une fonction lisse* f *sur* M *est dans* S_σ *(resp.* $S_\sigma^\times$*) s'il existe une base* $(z, \mathfrak{b})$ *telle que* $f \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1} \in S_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^n)$*). Si* $(M, \exp)$ *est de type* $\mathcal{O}_M$*, alors* f *est dans* $\mathcal{O}_M$ *(resp.* $\mathcal{O}_M^\times$*) s'il existe une base* $(z, \mathfrak{b})$ *telle que* $f \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^n)$*).*

Démonstration. Soit $(z', \mathfrak{b}')$ une base telle que $f \circ (n_{z'}^{\mathfrak{b}'})^{-1} \in S_\sigma(\mathbb{R}^n)$, et soit $(z, \mathfrak{b})$ une autre base. D'après le Lemme 6.2.10 (ii), si $(M, \exp)$ est de type S_σ, alors pour tout n-multi-indice α,

$$\partial^\alpha (f \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1}) = \sum_{0 \le |\alpha'| \le |\alpha|} f_{\alpha,\alpha'} \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1} \, (\partial^{\alpha'} f \circ (n_{z'}^{\mathfrak{b}'})^{-1}) \circ \psi_{z',z}^{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}}$$

où $(f_{\alpha,\alpha'} \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1})(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma(|\alpha|-|\alpha'|)})$. Par conséquent $\partial^\alpha (f \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1})(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma|\alpha|})$ et le résultat suit. Le cas $\mathcal{O}_M$ est similaire. □

Définition 6.2.17. Une densité $d\mu$ strictement positive est de type $S_\sigma^\times$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times$) si pour toute base $(z, \mathfrak{b})$, l'unique fonction strictement positive $f_{z,\mathfrak{b}}$ telle que $d\mu = f_{z,\mathfrak{b}} |dx^{z,\mathfrak{b}}|$ est dans $S_\sigma^\times$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times$). Dans ce cas, on notera $\mu_{z,\mathfrak{b}}$ la fonction strictement positive dans $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^n)$) telle que $d\mu = (\mu_{z,\mathfrak{b}} \circ n_z^{\mathfrak{b}}) \, |dx^{z,\mathfrak{b}}|$.

On dit que $(M, \exp, d\mu)$ est de type S_σ (resp. $\mathcal{O}_M$) si $(M, \exp)$ est de type S_σ (resp. $\mathcal{O}_M$) et $d\mu$ est une $S_\sigma^\times$(resp. $\mathcal{O}_M^\times$)-densité.

Lemme 6.2.18. *Si* $(M, \exp)$ *est de type* S_σ *(resp.* $\mathcal{O}_M$*), alors toute densité* $u \circ n_{z'}^{\mathfrak{b}'} |dx^{z,\mathfrak{b}}|$ *où* u *est une fonction strictement positive dans* $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$*) et* $(z, \mathfrak{b})$*,* $(z', \mathfrak{b}')$ *sont des bases, est une* $S_\sigma^\times$*-densité (resp.* $\mathcal{O}_M^\times$*-densité).*

Démonstration. Soit $(z'', \mathfrak{b}'')$ une base. En notant $d\mu := u \circ n_{z'}^{\mathfrak{b}'} |dx^{z,\mathfrak{b}}|$, on obtient

$$d\mu = (u \circ n_{z'}^{\mathfrak{b}'}) |J_{z,z''}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}''}| \circ n_{z''}^{\mathfrak{b}''} |dx^{z'',\mathfrak{b}''}|.$$

On a déjà vu que la fonction $J_{z,z''}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}''}$ est dans $S_\sigma^\times(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^n)$). D'après le Lemme 6.2.16, $(u \circ n_{z'}^{\mathfrak{b}'})(|J_{z,z''}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}''}| \circ n_{z''}^{\mathfrak{b}''})$ est dans $S_\sigma^\times$ (resp. $\mathcal{O}_M^\times$). □

Remarque 6.2.19. *En prenant* $u := \mathrm{x} \mapsto 1$ *dans le lemme précédent, on voit que pour toute variété exponentielle* $(M, \exp)$ *de type* S_σ *(resp.* $\mathcal{O}_M$*), on peut définir une famille canonique de* $S_\sigma^\times$*-densités (resp.* $\mathcal{O}_M^\times$*-densités) sur* M *:* $\mathcal{D} := (|dx^{z,\mathfrak{b}}|)_{(z,\mathfrak{b}) \in I}$ *où* I *est l'ensemble des bases sur* M*. Si* exp *est l'application exponentielle associée à une structure pseudo-riemannienne* g *sur* M*, on peut aussi définir une sous-famille canonique de* $\mathcal{D}$ *par* $\mathcal{D}_g := (|dx^z|)_{z \in M}$ *où* $|dx^z| := |dx^{z,\mathfrak{b}}|$ *avec* $\mathfrak{b}$ *une base orthonormale (dans le sens* $g_z(\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j) = \eta_i \delta_{i,j}$ *où* $\eta_i = 1$ *pour* $1 \le i \le m$ *et* $\eta_i = -1$ *pour* $i > m$*, où* g *a pour signature* $(m, n-m)$*) de* $T_z(M)$ *(*$|dx^z|$ *est alors indépendant de* $\mathfrak{b}$*). A priori, la densité riemannienne n'appartient pas à la famille* $\mathcal{D}_g$*.*

Nous allons avoir besoin d'intégrer sur les fibres tangentes et cotangentes. On définit donc $d\mu^* := (\mu_{z,\mathfrak{b}}^{-1} \circ n_z^{\mathfrak{b}}) \, |\partial_{z,\mathfrak{b}}|$ la codensité associée à $d\mu$, où $\mu_{z,\mathfrak{b}}^{-1} := \frac{1}{\mu_{z,\mathfrak{b}}}$ et $(z, \mathfrak{b})$ est une base. Notons que puisque $|\partial_{z,\mathfrak{b}}| / |\partial_{z',\mathfrak{b}'}| = |dx^{z',\mathfrak{b}'}| / |dx^{z,\mathfrak{b}}| = (\mu_{z,\mathfrak{b}} \circ n_z^{\mathfrak{b}}) / (\mu_{z',\mathfrak{b}'} \circ n_{z'}^{\mathfrak{b}'})$, $d\mu^*$ est indépendant de $(z, \mathfrak{b})$. Pour un point $x \in M$ donné, la densité sur $T_x(M)$ associée à $d\mu$ est $d\mu_x := (\mu_{z,\mathfrak{b}} \circ n_z^{\mathfrak{b}}(x)) \, |dx_x^{z,\mathfrak{b}}|$

et la densité associée sur $T_x^*(M)$ est $d\mu_x^* := (\mu_{z,\mathfrak{b}}^{-1} \circ n_z^{\mathfrak{b}}(x))\,|\partial_{z,\mathfrak{b}_x}|$. Pour une fonction f définie sur $T_x(M)$ ou $T_x^*(M)$, nous avons formellement :

$$\int_{T_x(M)} f(\xi)\,d\mu_x(\xi) = \mu_{z,\mathfrak{b}} \circ n_z^{\mathfrak{b}}(x) \int_{\mathbb{R}^n} f \circ (M_{z,x}^{\mathfrak{b}})^{-1}(\zeta)\,d\zeta\,,$$
$$\int_{T_x^*(M)} f(\theta)\,d\mu_x^*(\theta) = \mu_{z,\mathfrak{b}}^{-1} \circ n_z^{\mathfrak{b}}(x) \int_{\mathbb{R}^n} f \circ (\widetilde{M}_{z,x}^{\mathfrak{b}})^{-1}(\vartheta)\,d\vartheta\,,$$

et on peut vérifier directement que ces intégrales sont bien indépendantes de la base choisie $(z, \mathfrak{b})$.

6.2.5 Opérateurs et espaces de Schwartz

Hypothèse 6.2.20. *On suppose dans cette section et la section 6.2.6 que $(M, \exp, E, d\mu)$, où E est un fibré vectoriel hermitien sur M, est de type $\mathcal{O}_M$.*

La conséquence principale de la structure exponentielle est la possibilité de définir les fonctions de Schwartz sur M.

Définition 6.2.21. Une section $u \in C^\infty(M, E)$ est rapidement décroissante à l'infini si pour tout $(z, \mathfrak{b})$, tout n-multi-indice α et $p \in \mathbb{N}$, il existe $K_{\alpha,p} > 0$ tel que

$$\left\|\partial_{z,\mathfrak{b}}^\alpha u^z(x)\right\|_{E_z} < K_{\alpha,p}\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{-p} \tag{6.9}$$

uniformément en $x \in M$. On note $\mathcal{S}(M, E)$ l'espace de ces sections.

Lemme 6.2.22. *Une section $u \in C^\infty(M, E)$ est dans $\mathcal{S}(M, E)$ si et seulement s'il existe une base $(z, \mathfrak{b})$ telle que (6.9) soit valide.*

Démonstration. Supposons que (6.9) soit valide pour $(z', \mathfrak{b}')$ et soit $(z, \mathfrak{b})$ une autre base. Ainsi, avec le Lemme 6.2.10 (*ii*) et la règle de Leibniz,

$$\partial_{z,\mathfrak{b}}^\alpha u^z(x) = \sum_{0\le|\alpha'|\le|\alpha|} \sum_{\beta\le\alpha'} f_{\alpha,\alpha'} \tbinom{\alpha'}{\beta}\, \partial_{z',\mathfrak{b}'}^{\alpha'-\beta}(\tau_z^{-1}\tau_{z'})\, \partial_{z',\mathfrak{b}'}^\beta u^{z'}(x). \tag{6.10}$$

De plus, $|f_{\alpha,\alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \partial_{z',\mathfrak{b}'}^{\alpha'-\beta}(\tau_z^{-1}\tau_{z'})| \le C_\alpha\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{q_\alpha}$ pour un $C_\alpha > 0$ et un $q_\alpha \ge 1$. Ainsi (6.9) et (6.3) impliquent que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $K > 0$ tel que $\left\|\partial_{z,\mathfrak{b}}^\alpha u^z(x)\right\|_{E_z} \le K\langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{-p}$. Le résultat s'en déduit. □

Remarque 6.2.23. *Soit $u \in C^\infty(M, E)$ et $(z, \mathfrak{b})$ une base. Alors $u \in \mathcal{S}(M, E)$ si et seulement si $(\tau_z^{-1}u) \circ (n_z^{\mathfrak{b}})^{-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$. Dit autrement, si $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ alors $\tau_z(v \circ n_z^{\mathfrak{b}}) \in \mathcal{S}(M, E)$.*

Le lemme suivant montre qu'il est possible de définir des topologies canoniques de Fréchet sur $\mathcal{S}(M, E)$.

Lemme 6.2.24. *Soit $(z, \mathfrak{b})$ une base. Alors*
(i) L'ensemble suivant de semi-normes

$$q_{\alpha,p}(u) := \sup_{x\in M} \langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^p \left\|\partial_{z,\mathfrak{b}}^\alpha u^z(x)\right\|_{E_z}.$$

détermine une topologie localement convexe métrisable $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{S}(M, E)$.
(ii) L'application $T_{z,\mathfrak{b}}$ est un isomorphisme topologique de l'espace $\mathcal{S}(M, E)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$.
(iii) La topologie $\mathcal{T}$ est Fréchet et indépendante de la base choisie $(z, \mathfrak{b})$.

Démonstration. (i) et (ii) sont évidents.
(iii) Puisque $T_{z,\mathfrak{b}}$ est un isomorphisme topologique, $\mathcal{T}$ est complète. En suivant les arguments de la preuve du Lemme 6.2.22, on voit qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout n-multi-indice α et $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_{\alpha,p} > 0$, $r_{\alpha,p} \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $u \in \mathcal{S}(M,E)$,

$$q_{\alpha,p}^{(z,\mathfrak{b})}(u) \leq C_{\alpha,p} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} q_{\beta,r_{\alpha,p}}^{(z',\mathfrak{b}')}(u)\,.$$

L'indépendance par rapport à $(z,\mathfrak{b})$ suit. □

Remarque 6.2.25. *Si $(M, \exp, E, d\mu)$ est de type S_0, alors il est possible de définir l'espace de Fréchet $\mathcal{B}(M,E)$ des sections à dérivées bornées, par la même procédure que $\mathcal{S}(M,E)$, avec le Lemme 6.2.10.*

Dans ce qui suit, l'injection canonique des fonctions vers les distributions sera donnée par $u \mapsto \langle u, \cdot\rangle$ où $\langle u, v\rangle := \int (u|v)\, d\mu$. Notons que les injections continues $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S} \to L^p(d\mu) \to \mathcal{S}'$, $(1 \leq p < \infty)$ ont une image dense.

En utilisant les mêmes principes que pour la définition de $\mathcal{S}$ avec l'hypothèse $\mathcal{O}_M$ et le Lemme 6.2.13 (ii), on définit l'espace de Fréchet $\mathcal{S}(M \times M, L(E))$ tel que pour tout $(z,\mathfrak{b})$ les applications $T_{z,\mathfrak{b},M^2} := K \mapsto K^z \circ (n_{z,M^2}^{\mathfrak{b}})^{-1}$ soient des isomorphismes topologiques de $\mathcal{S}(M \times M, L(E))$ vers $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. En notant j_{M^2} l'injection dense continue de $\mathcal{S}(M \times M, L(E))$ dans son antidual $\mathcal{S}'(M\times M, L(E))$ définie par $\langle j_{M^2}(K), K'\rangle = \int_{M\times M} \mathrm{Tr}(K(x,y)(K'(x,y))^*)\, d\mu\otimes d\mu(x,y)$, nous avons le diagramme commutatif suivant, où j est l'injection continue dense classique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ dans son antidual, et $M_{\mu\otimes\mu}$ est l'opérateur, de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ dans lui-même, de multiplication par la fonction $\mu_{z,\mathfrak{b}} \otimes \mu_{z,\mathfrak{b}}$ (qui est dans $\mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^{2n})$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(M \times M, L(E)) \arrow[r, "j_{M^2}"] \arrow[d, "T_{z,\mathfrak{b},M^2}"'] & \mathcal{S}'(M \times M, L(E)) \\
\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z)) \arrow[r, "M_{\mu\otimes\mu}"'] & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z)) \arrow[r, "j"'] & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z)) \arrow[u, "T^*_{z,\mathfrak{b},M^2}"']
\end{tikzcd}\,.$$

Puisque $\mathcal{S}$ est nucléaire, $L(\mathcal{S},\mathcal{S}') \simeq \mathcal{S}'(M \times M, L(E))$ et $\mathcal{S}(M \times M, L(E)) \simeq \mathcal{S} \,\widehat{\otimes}\, \overline{\mathcal{S}}$ où $\overline{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(M, \overline{E})$. Ainsi, $\mathcal{S}'(M \times M, L(E)) \simeq \mathcal{S}' \widehat{\otimes}\, \overline{\mathcal{S}}'$, où $\overline{\mathcal{S}}'$ est le dual de $\mathcal{S}$ qui est aussi l'antidual de $\overline{\mathcal{S}}$. Notons que l'isomorphisme $L(\mathcal{S},\mathcal{S}') \simeq \mathcal{S}'(M \times M, L(E))$ est donné par

$$\langle A_K(v), u\rangle = K(u \otimes \overline{v})$$

où A_K est l'opérateur associé au noyau K, $u, v \in \mathcal{S}$, et $\overline{v}(y) := \overline{v(y)}$. Formellement,

$$\langle A_K(v), u\rangle = \int_{M\times M} (K(x,y)v(y)|u(x))d\mu \otimes d\mu(x,y)\,, \qquad (A_K v)(x) = \int_M K(x,y)v(y)d\mu(y).$$

Ainsi tout opérateur continu $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ est déterminé par son noyau $K_A \in \mathcal{S}'(M \times M, L(E))$. Le transfert de A dans la base $(z,\mathfrak{b})$ est l'opérateur $A_{z,\mathfrak{b}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_z)$ tel que

$$\langle A_{z,\mathfrak{b}}(v), u\rangle := \langle A(T_{z,\mathfrak{b}}^{-1}(v)), T_{z,\mathfrak{b}}^{-1}(u)\rangle.$$

Ainsi, si K_A est le noyau de A, nous avons $K_{A_{z,\mathfrak{b}}} := \widetilde{T}_{z,\mathfrak{b},M^2}(K_A)$ comme le noyau de $A_{z,\mathfrak{b}}$, où $\widetilde{T}_{z,\mathfrak{b},M^2}$ est ici l'inverse de l'adjoint de $T_{z,\mathfrak{b},M^2}$. $\widetilde{T}_{z,\mathfrak{b},M^2}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}'(M \times M, L(E))$ vers $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$.

Définition 6.2.26. Un opérateur $A \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ est régulier si A et son adjoint $A^\dagger$ envoient $\mathcal{S}$ dans lui-même de façon continue. Une opérateur régularisant isotrope est un opérateur avec noyau dans $\mathcal{S}(M \times M, L(E))$. L'espace des opérateurs réguliers et l'espace des opérateurs régularisants isotropes sont respectivement notés $\Re(\mathcal{S})$ et $\Psi^{-\infty}$.

Remarquons que l'espace des opérateurs réguliers est une $*$-algèbre sous la composition et $\Psi^{-\infty}$ est un $*$-idéal de cette algèbre. Nous avons la propriété suivante, qui est une conséquence directe du calcul isotropique sur $\mathbb{R}^n$ (voir par exemple [127]) :

Proposition 6.2.27. *Tout opérateur régularisant isotrope s'étend (de façon unique) en un opérateur de type Hilbert–Schmidt sur $L^2(d\mu)$.*

6.2.6 Transformation de Fourier

Nous étendons ici la transformation de Fourier classique sur $\mathbb{R}^n$ aux espaces de Schwartz de sections rapidement décroissantes de TM et T^*M. On utilise les fibres $T_x(M)$, $T_x^*(M)$ comme support de l'intégration.

Définition 6.2.28. Une section lisse $a \in C^\infty(T^*M, L(E))$ est dans $\mathcal{S}(T^*M, L(E))$ si pour tout $(z, \mathfrak{b})$, tout $2n$-multi-indice ν et tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $K_{p,\nu} > 0$ tel que

$$\left\|\partial^\nu_{z,\mathfrak{b}} a^z(x,\theta)\right\|_{L(E_z)} \leq K_{p,\nu} \langle x, \theta\rangle^{-p}_{z,\mathfrak{b}} \tag{6.11}$$

uniformément en $(x, \theta) \in T^*M$. On définit $\mathcal{S}(TM, L(E))$ de façon similaire.

Proposition 6.2.29. *(i) Une section $u \in C^\infty(T^*M, L(E))$ est dans $\mathcal{S}(T^*M, L(E))$ si et seulement s'il existe une base $(z, \mathfrak{b})$ telle que (6.11) soit valide. Une propriété similaire est vraie pour $\mathcal{S}(TM, L(E))$.*
(ii) Il y a une topologie de Fréchet sur $\mathcal{S}(T^*M, L(E))$ telle que chaque

$$T_{z,\mathfrak{b},*} : a \mapsto a^z \circ (n^{\mathfrak{b}}_{z,*})^{-1}$$

soit un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(T^*M, L(E))$ vers $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Une propriété similaire est vraie pour $\mathcal{S}(TM, L(E))$ et les applications $T_{z,\mathfrak{b},T} := a \mapsto a^z \circ (n^{\mathfrak{b}}_{z,T})^{-1}$.

Démonstration. La preuve suit la même technique que pour l'espace $\mathcal{S}(M, E)$, en utilisant l'invariance de changement de coordonnées donnée par le Lemme 6.2.13. On obtient en particulier, en notant $\nu = (\alpha, \beta)$, $\nu' = (\alpha', \beta')$, $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ et $\rho = (\rho^1, \rho^2)$,

$$\partial^\nu_{z,\mathfrak{b}} a^z = \sum_{\substack{0 \leq |\nu'| \leq |\nu| \\ |\beta'| \geq |\beta|}} \sum_{\rho \leq \lambda \leq \nu'} f_{\nu,\nu'} C_{\nu',\lambda,\rho}\, \partial^{\alpha'-\lambda^1}_{z',\mathfrak{b}'}(\tau_z^{-1}\tau_{z'})\, \partial^{(\rho^1,\beta')}_{z',\mathfrak{b}'}(a^{z'})\, \partial^{\lambda^1-\rho^1}_{z',\mathfrak{b}'}(\tau_{z'}^{-1}\tau_z) \tag{6.12}$$

où $C_{\nu',\lambda,\rho} = \delta_{\beta',\lambda^2}\delta_{\beta',\rho^2}\binom{\nu'}{\lambda}\binom{\lambda}{\rho}$. □

Remarque 6.2.30. *Si $(M, \exp, E)$ est de type S_0, nous avons vu en Remarque 6.2.25 que l'on peut définir de façon intrinsèque l'espaces des E-sections sur M avec dérivées bornées. Cependant, une définition similaire ne peut être réalisée de la même manière pour les $L(E)$-sections sur T^*M à dérivées bornées car le changement de coordonnées du Lemme 6.2.13 impose une puissance croissante en $\langle\theta\rangle$ (quand $|\beta'| > |\beta|$). Notons que l'indépendance sur $(z, \mathfrak{b})$ reste vraie pour les sections $L(E) \to T^*M$ avec dérivées polynomialement bornées.*

On note $\mathcal{S}'(T^*M, L(E))$ et $\mathcal{S}'(TM, L(E))$ les antiduals (avec topologie forte) de $\mathcal{S}(T^*M, L(E))$ et $\mathcal{S}(TM, L(E))$, respectivement. Nous avons l'injection continue avec image dense :

$$j_{T^*M} : \mathcal{S}(T^*M, L(E)) \to \mathcal{S}'(T^*M, L(E)) \qquad \big(\text{resp. } j_{TM} : \mathcal{S}(TM, L(E)) \to \mathcal{S}'(TM, L(E))\big)$$

définie par

$$\langle j_{T^*M}(a), b\rangle := \int_{TM^*} \mathrm{Tr}(ab^*)d\mu^* \qquad \Big(\text{resp. } \langle j_{TM}(a), b\rangle := \int_{TM} \mathrm{Tr}(ab^*)d\mu^T\Big)$$

où $d\mu^*$ est la mesure sur T^*M donnée par $d\mu^*(x,\theta) := d\mu^*_x(\theta)d\mu(x)$ et $d\mu^T$ est la mesure sur TM donnée par $d\mu^T(x,\xi) := d\mu_x(\xi)d\mu(x)$. Notons que pour tout $(z, \mathfrak{b})$, $d\mu^*(x,\theta) = |\partial_{z,\mathfrak{b}_x}|(\theta)|dx^{z,\mathfrak{b}}|(x)$ (c'est la mesure de Liouville sur T^*M) et $d\mu^T(x,\theta) = \mu^2_{z,\mathfrak{b}} \circ n^{\mathfrak{b}}_z(x)|dx^{z,\mathfrak{b}}_x|(\xi)|dx^{z,\mathfrak{b}}|(x)$. Nous avons le diagramme commutatif suivant, où M_{μ^2} est la multiplication par la fonction $(\mathrm{x}, \zeta) \mapsto \mu^2_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x})$ (qui est dans $\mathcal{O}^\times_M(\mathbb{R}^{2n})$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(TM, L(E)) \arrow[rr, "j_{TM}"] \arrow[d, "T_{z,\mathfrak{b},T}"'] & & \mathcal{S}'(TM, L(E)) \\
\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z)) \arrow[r, "M_{\mu^2}"'] & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z)) \arrow[r, "j"'] & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z)) \arrow[u, "T^*_{z,\mathfrak{b},T}"']
\end{tikzcd}$$

et, dans le cas de $\mathcal{S}(T^*M, L(E))$ un diagramme similaire est valide si M_{μ^2} est remplacé par l'identité.

Définition 6.2.31. La transformation de Fourier de $a \in \mathcal{S}(TM, L(E))$ est

$$\mathcal{F}(a) : (x,\theta) \mapsto \int_{T_x(M)} e^{-2\pi i\langle\theta,\xi\rangle}\, a(x,\xi)\, d\mu_x(\xi)\,.$$

Proposition 6.2.32. *$\mathcal{F}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(TM, L(E))$ sur $\mathcal{S}(T^*M, L(E))$ avec inverse*

$$\overline{\mathcal{F}}(a) := (x,\xi) \mapsto \int_{T^*_x(M)} e^{2\pi i\langle\theta,\xi\rangle}\, a(x,\theta)\, d\mu^*_x(\theta)\,.$$

L'adjoint $\overline{\mathcal{F}}^*$ de $\overline{\mathcal{F}}$ coïncide avec $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(TM, L(E))$, donc nous notons encore $\overline{\mathcal{F}}^*$ par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ par $\overline{\mathcal{F}}$.

Démonstration. Conséquence directe de la formule de Parseval pour l'automorphisme topologique (de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$) $\mathcal{F}_P$ donné par la transformation de Fourier partielle, où seules les variables dans la deuxième copie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ sont transformées. □

6.3 Linéarisation et application symboles

6.3.1 Les difféomorphismes Φ_λ, Υ_t

On considère, sur la variété exponentielle $(M, \exp, E, d\mu)$, une linéarisation (ou application exponentielle abstraite) ψ. On fixe $\lambda \in [0,1]$ et on définit Φ_λ une application de TM vers $M \times M$ par :

$$\Phi_\lambda : (x,\xi) \mapsto \big(\psi_x(\lambda\xi), \psi_x(-(1-\lambda)\xi)\big)\,.$$

Hypothèse 6.3.1. *On supposera que si λ, λ', sont dans $]0,1[$, alors ψ satisfait pour tout $x, y \in M$ et $t \in \mathbb{R}$, $\psi_x(t\psi_x^{-1}(y)) = \psi_y((1-t)\psi_y^{-1}(x))$. Cette hypothèse est appelée (H_ψ) dans ce qui suit.*

Un calcul montre que Φ_λ est un difféomorphisme avec pour inverse

$$\Phi_\lambda^{-1} : (x,y) \mapsto \alpha'_{yx}(1-\lambda)$$

pour $\lambda \neq 0$ et $\Phi_0^{-1}(x,y) :\mapsto -\alpha'_{xy}(0)$, où $\alpha_{xy}(t) := \psi_x(t\psi_x^{-1}(y))$.

En notant $\Phi_\lambda^{-1}(x,y) =: (m_\lambda(x,y), \xi_\lambda(x,y))$, on voit que $m_\lambda(x,y) = \alpha_{xy}(\lambda)$ et, si $\lambda \neq 0$, $\xi_\lambda(x,y) = \frac{1}{\lambda}\psi^{-1}_{m_\lambda(x,y)}(x)$, alors que $\xi_0(x,y) = -\psi_x^{-1}(y)$. Dans ce qui suit, on utilisera le symbole W (Weyl) pour la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$, et donc $m_W := m_{\frac{1}{2}}$, $\Phi_W := \Phi_{\frac{1}{2}}$.

Pour tout $t \in [-1,1]$ (si (H_ψ) n'est pas satisfaite, on se restreint à $t \in \{-1,0,1\}$), on pose

$$\Upsilon_t : (x,\xi) \mapsto \big(\psi_x(t\xi), \tfrac{-1}{t}\psi^{-1}_{\psi_x(t\xi)}(x)\big)$$

avec la convention $\frac{-1}{t}\psi^{-1}_{\psi_x(t\xi)}(x) := \xi$ si $t = 0$, et donc $\Upsilon_0 = \mathrm{Id}_{TM}$. On utilisera la notation $\Upsilon_{t,T}(x,\xi) := \frac{-1}{t}\psi^{-1}_{\psi_x(t\xi)}(x)$, de sorte que $\Upsilon_t = (\psi \circ\ t\,\mathrm{Id}_{TM}, \Upsilon_{t,T})$.

Remarque 6.3.2. *Notons que (H_ψ) implique que $(\Upsilon_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre de* $\mathrm{Diff}(TM)$.

Remarque 6.3.3. *Supposons que ψ soit l'application exponentielle associée à une connexion ∇ sur TM, et $\alpha_{x,\xi}$ l'unique géodésique maximale telle que $\alpha'_{x,\xi}(0) = (x,\xi)$.*

D'après un résultat standard de géométrie différentielle (voir par exemple [97, Théorème 3.3, p.206]), pour tout $v := (x,\eta) \in TM$, et $\xi \in T_x(M)$, il existe une unique courbe $\beta_v^\xi : \mathbb{R} \to TM$ telle que $\nabla_{\alpha'_v}\beta_v^\xi = 0$, $\pi\circ\beta_v^\xi = \alpha_v$ et $\beta_v^\xi(0) = (x,\xi)$. Par définition des géodésiques, $\beta^\eta_{x,\eta} = \alpha'_{x,\eta}$. De plus, $\beta^\xi_{x,\eta}(1) \in T_{\psi_x^\eta}(M)$, donc on peut définir l'isomorphisme $P_{x,\eta} : T_x(M) \to T_{\psi_x^\eta}(M)$, $\quad \xi \mapsto \beta^\xi_{x,\eta}(1)$.

Notons que $P^{-1}_{x,\eta} = P_{\psi_x^\eta, \psi^{-1}_{\psi_x^\eta}(x)} = P_{-\Upsilon_1(x,\eta)} = P_{\Upsilon_{-1}(x,-\eta)}$. Les applications $P_{x,\xi}$ correspondent au transport parallèle le long des géodésiques sur le fibré tangent. Ces applications sont reliées aux difféomorphismes Υ_t : pour tout $(x,\eta) \in TM$ et $t \in \mathbb{R}$, $P_{x,t\eta}(\eta) = \Upsilon_{t,T}(x,\eta)$.

Si $(z,\mathfrak{b})$ est une base, on définit $\Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}} := n^{\mathfrak{b}}_{z,M^2} \circ \Phi_\lambda \circ (n^{\mathfrak{b}}_{z,T})^{-1}$ et on note $J_{\lambda,z,\mathfrak{b}}$ son jacobien. On définit aussi $\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}} = n^{\mathfrak{b}}_{z,T} \circ \Upsilon_t \circ (n^{\mathfrak{b}}_{z,T})^{-1}$ et

$$\begin{aligned}
&\psi^{\mathfrak{b}}_z : (\mathrm{x},\zeta) \mapsto n^{\mathfrak{b}}_z \circ \psi \circ\ (n^{\mathfrak{b}}_{z,T})^{-1}(\mathrm{x},\zeta)\,,\\
&\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z} : (\mathrm{x},\mathrm{y}) \mapsto M^{\mathfrak{b}}_{z,(n^{\mathfrak{b}}_z)^{-1}(\mathrm{x})} \circ \psi^{-1}_{(n^{\mathfrak{b}}_z)^{-1}(\mathrm{x})} \circ (n^{\mathfrak{b}}_z)^{-1}(\mathrm{y}).
\end{aligned}$$

En notant $\psi^{\mathfrak{b}}_{z,\mathrm{x}}(\zeta) := \psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x},\zeta)$ et $\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_{z,\mathrm{x}}}(\mathrm{y}) := \overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, nous avons $(\psi^{\mathfrak{b}}_{z,\mathrm{x}})^{-1} = \overline{\psi^{\mathfrak{b}}_{z,\mathrm{x}}}$. Un calcul montre que pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{3n}$,

$$\Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\zeta) = (\psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x},\lambda\zeta), \psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x},-(1-\lambda)\zeta))\,, \qquad \Phi^{-1}_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (m_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y}), \xi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \quad (6.13)$$

où l'on a $m_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) := \psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x},\lambda\,\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z}(\mathrm{x},\mathrm{y}))$, et $\xi_{0,z,\mathfrak{b}} := -\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z}$ et pour $\lambda \neq 0$,

$$\xi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) := \tfrac{1}{\lambda}\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z}(m_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\mathrm{x}).$$

Nous avons aussi pour tout $t \in [-1,1]$, $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\zeta) = \left(\psi_z^{\mathfrak{b}}(\mathrm{x},t\zeta), \tfrac{-1}{t}\overline{\psi_z^{\mathfrak{b}}}(\psi_z^{\mathfrak{b}}(\mathrm{x},t\zeta),\mathrm{x})\right) =: \left(\psi_z^{\mathfrak{b}}(\mathrm{x},t\zeta), \Upsilon_{t,T}^{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\zeta)\right), \tag{6.14}$$

et $\Upsilon_{0,z,\mathfrak{b}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2n}}$. Notons que $\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},0) = (\mathrm{x},0)$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\Upsilon_{t,T}^{z,\mathfrak{b}} = \frac{1}{t}\Upsilon_{1,T}^{z,\mathfrak{b}} \circ I_{1,t}$ où $I_{r,r'}$ est la matrice diagonale avec coefficients $I_{ii} = r$ pour $i \leq n$ pour $1 \leq i \leq n$ et $I_{ii} = r'$ pour $n+1 \leq i \leq 2n$.

6.3.2 $\mathcal{O}_M$-linéarisations

On note $\tau^{z,\mathfrak{b}} = \tau^z \circ (n_{z,M^2}^{\mathfrak{b}})^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Remarquons que pour tout $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tau^{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ est un opérateur unitaire sur E_z. On pose pour $t \in \mathbb{R}$: $\tau_t(x,\eta) := \tau_x(\psi_x(t\eta))$ pour tout $(x,\eta) \in TM$ et $\tau_t^{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\zeta) := \tau^{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}, \psi_z^{\mathfrak{b}}(\mathrm{x},t\zeta))$.

Définition 6.3.4. Une linéarisation ψ sur la variété exponentielle $(M, \exp, E, d\mu)$ est une $\mathcal{O}_M$-linéarisation si pour toute base $(z,\mathfrak{b})$ les fonctions $\psi_z^{\mathfrak{b}}$ et $\overline{\psi_z^{\mathfrak{b}}}$ sont dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^n)$ et les fonctions $\tau_1^{z,\mathfrak{b}}$ et $(\tau_1^{z,\mathfrak{b}})^{-1}$ sont dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. On dit que $(M,\exp,E,d\mu,\psi)$ est de type $\mathcal{O}_M$, si c'est le cas de $(M,\exp,E,d\mu)$ et ψ est une $\mathcal{O}_M$-linéarisation.

Lemme 6.3.5. *Soit ψ une $\mathcal{O}_M$-linéarisation. Alors pour tous $(z,\mathfrak{b})$, $\lambda \in [0,1]$ et $t \in [-1,1]$,*
(i) $\Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \in \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$ et $J_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \in \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^{2n})$,
(ii) $\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}} \in \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$ et $J(\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}}) \in \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^{2n})$,
(iii) $\tau_t^{z,\mathfrak{b}}$ et $(\tau_t^{z,\mathfrak{b}})^{-1}$ sont dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$.

Démonstration. (i) D'après (6.13), nous avons $\Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}} = (\psi_z^{\mathfrak{b}} \circ I_{1,\lambda}, \psi_z^{\mathfrak{b}} \circ I_{1,\lambda-1})$ et

$$\Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}^{-1} = (m_{\lambda,z,\mathfrak{b}}, \xi_{\lambda,z,\mathfrak{b}})$$

où $m_{\lambda,z,\mathfrak{b}} = \psi_z^{\mathfrak{b}} \circ I_{1,\lambda} \circ (\pi_1, \overline{\psi_z^{\mathfrak{b}}})$ et si $\lambda \neq 0$, $\xi_\lambda = \frac{1}{\lambda}\overline{\psi_z^{\mathfrak{b}}} \circ (m_{\lambda,z,\mathfrak{b}}, \pi_1)$, alors que $\xi_{0,z,\mathfrak{b}} = -\overline{\psi_z^{\mathfrak{b}}}$. Ainsi, le résultat est une conséquence du Lemme 6.2.14 (iii) et (vi).
(ii) D'après (6.14), nous avons pour $t \neq 0$, $\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}} = (\psi_z^{\mathfrak{b}} \circ I_{1,t}, \frac{-1}{t}\overline{\psi_z^{\mathfrak{b}}} \circ (\psi_z^{\mathfrak{b}} \circ I_{1,t}, \pi_1))$. Le résultat est alors une conséquence du Lemme 6.2.14 (iii) et (vi).
(iii) Conséquence du Lemme 6.2.14 (iii). □

Lemme 6.3.6. *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\tau \in \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^p, GL(E_z))$ et $\Phi \in \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p)$. Alors les applications $L_\tau := u \mapsto \tau u$, $R_\tau := u \mapsto u\tau$ et $C_\Phi := u \mapsto u \circ \Phi$ sont des automorphismes topologiques de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p, L(E_z))$.*

Démonstration. Puisque $L_\tau^{-1} = L_{\tau^{-1}}$, $R_\tau^{-1} = R_{\tau^{-1}}$ et $C_\Phi^{-1} = C_{\Phi^{-1}}$, nous avons seulement besoin de vérifier les continuités de L_τ, R_τ et C_Φ. Les continuités de L_τ et R_τ sont des applications directes de la formule de Leibniz. Soient ν un p-multi-indice et $r \in \mathbb{N}$. Le Théorème 6.2.11 implique que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p, L(E_z))$,

$$q_{\nu,N}(u \circ \Phi) \leq \sum_{|\lambda| \leq |\nu|} \sup_{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^p} \langle \mathrm{x} \rangle^N |P_{\nu,\lambda}(\Phi)(\mathrm{x})| \left\| (\partial^\lambda u) \circ \Phi(\mathrm{x}) \right\|_{L(E_z)}$$

où les fonctions $P_{\nu,\lambda}(\Phi)$ sont telles que $|P_{\nu,\lambda}(\Phi)(\mathrm{x})| \leq C_\nu \langle \mathrm{x} \rangle^{q_\nu}$ pour un $q_\nu \in \mathbb{N}^*$ et un $C_\nu > 0$. Puisque $\langle \Phi^{-1}(\mathrm{x}) \rangle \leq C \langle \mathrm{x} \rangle^r$ pour un $r \in \mathbb{N}^*$ et un $C > 0$, il existe $C'_\nu > 0$ tel que

$$q_{\nu,N}(u \circ \Phi) \leq C'_\nu \sum_{|\lambda| \leq |\nu|} q_{\lambda,(q_\nu+N)r}(u),$$

ce qui donne le résultat. □

Lemme 6.3.7. *Si $(M, \exp, E, d\mu)$ est de type $\mathcal{O}_M$ et ψ est une linéarisation telle qu'il existe $(z_0, \mathfrak{b}_0)$ tel que les fonctions $\psi_{z_0}^{\mathfrak{b}_0}$, $\overline{\psi}_{z_0}^{\mathfrak{b}_0}$ soient dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$ et $\tau_1^{z_0,\mathfrak{b}_0}$, $(\tau_1^{z_0,\mathfrak{b}_0})^{-1}$ soient dans $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, L(E_{z_0}))$, alors ψ est une $\mathcal{O}_M$-linéarisation.*

Démonstration. Remarquons que $\psi_z^{\mathfrak{b}} = \psi_{z,z_0}^{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_0} \circ \psi_{z_0}^{\mathfrak{b}_0} \circ \psi_{z_0,z,T}^{\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}}$,

$$\overline{\psi}_{z,\mathrm{x}}^{\mathfrak{b}}(\mathrm{y}) = (d\psi_{z_0,z}^{\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}})_{\mathrm{x}}^{-1}\, \overline{\psi}_{z_0}^{\mathfrak{b}_0} \circ \psi_{z_0,z,M^2}^{\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

et $\tau^{z,\mathfrak{b}} = (\tau_z^{-1}\tau_{z_0}) \circ \pi_2 \circ (n_{z,M^2}^{\mathfrak{b}})^{-1}\, \tau^{z_0,\mathfrak{b}_0} \circ \psi_{z_0,z,M^2}^{\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}}\, (\tau_{z_0}^{-1}\tau_z) \circ \pi_1 \circ (n_{z,M^2}^{\mathfrak{b}})^{-1}$. Le résultat s'en déduit. □

6.3.3 Applications symboles et λ-quantification

Hypothèse 6.3.8. *On suppose dans cette section et la section 6.3.4 que $(M, \exp, E, d\mu, \psi)$ est de type $\mathcal{O}_M$.*

On définit l'application linéaire Γ_λ de $C^\infty(M \times M, L(E))$ dans $C^\infty(TM, L(E)))$ par :

$$\Gamma_\lambda(K) : v \mapsto K^{\pi(v)} \circ \Phi_\lambda(v)\,.$$

Par conséquent, $\Gamma_\lambda(K) = \tau_\lambda^{-1}\,(K \circ \Phi_\lambda)\,\tau_{\lambda-1}$ et $\Gamma_\lambda^{-1}(a) = (\tau_\lambda\, a\, \tau_{\lambda-1}^{-1}) \circ \Phi_\lambda^{-1}$. Pour une base donnée $(z, \mathfrak{b})$, on note $\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}} := T_{z,\mathfrak{b},T} \circ \Gamma_\lambda \circ T_{z,\mathfrak{b},M^2}^{-1}$. Un calcul montre que pour toute fonction lisse $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$, $\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(u) = (\tau_\lambda^{z,\mathfrak{b}})^{-1}(u \circ \Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}})\tau_{\lambda-1}^{z,\mathfrak{b}}$.

On définit les fonctions strictement positives sur respectivement $\mathbb{R}^{2n}$ et $M \times M$:

$$\mu_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) := \tfrac{\mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x})\mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{y})}{\mu_{z,\mathfrak{b}}^2(m_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y}))}\, |J_{\lambda,z,\mathfrak{b}}| \circ \Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}^{-1}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \qquad \mu_\lambda := \mu_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \circ (n_z^{\mathfrak{b}}, n_z^{\mathfrak{b}}). \tag{6.15}$$

Puisque $\mu_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \in \mathcal{O}_M^\times(\mathbb{R}^{2n})$, l'opérateur de multiplication M_{μ_λ} est un automorphisme topologique de $\mathcal{S}(M \times M, L(E))$. Notons que $\Gamma_\lambda \circ M_{\mu_\lambda} = M_{\mu_\lambda \circ \Phi_\lambda} \circ \Gamma_\lambda$.

Proposition 6.3.9. *Γ_λ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(M \times M, L(E))$ vers $\mathcal{S}(TM, L(E))$. De plus, $\widetilde{\Gamma}_\lambda \circ j_{M^2} = j_{TM} \circ \Gamma_\lambda \circ M_{\mu_\lambda}$, où $\widetilde{\Gamma}_\lambda := \Gamma_\lambda^{-1*}$.*

Démonstration. Soit $(z, \mathfrak{b})$ une base. Il suffit de prouver que $\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}$ est un automorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Puisque $\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}} = L_{(\tau_\lambda^{z,\mathfrak{b}})^{-1}} \circ R_{\tau_{\lambda-1}^{z,\mathfrak{b}}} \circ C_{\Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}}$, le résultat est une conséquence du Lemme 6.3.6 et du Lemme 6.3.5 (i) et (iii). Soient $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Nous avons, avec j l'inclusion canonique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\Gamma}_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \circ j(u))(v) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{Tr}\left(u(\mathrm{x},\mathrm{y})(\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}^{-1}(v)(\mathrm{x},\mathrm{y}))^*\right) d\mathrm{x}\, d\mathrm{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{Tr}\left((\tau_\lambda^{z,\mathfrak{b}})^{-1} \circ \Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}^{-1}(\mathrm{x},\mathrm{y})\; u(\mathrm{x},\mathrm{y})\; \tau_{\lambda-1}^{z,\mathfrak{b}} \circ \Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}^{-1}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right. \\
&\qquad\qquad \left. v^* \circ \Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}}^{-1}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right) d\mathrm{x}\, d\mathrm{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{Tr}(\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(u)(m,\zeta)v^*(m,\zeta))|J_{\lambda,z,\mathfrak{b}}|(m,\zeta)\, dm\, d\zeta \\
&= (j \circ M_{|J_{\lambda,z,\mathfrak{b}}|} \circ \Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(u))(v)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le changement de variables suivant $(m,\zeta) := \Phi^{-1}_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Ainsi, nous avons $\widetilde{\Gamma}_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \circ j = j \circ M_{|J_{\lambda,z,\mathfrak{b}}|} \circ \Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}$. La relation $\widetilde{\Gamma}_\lambda \circ j_{M^2} = j_{TM} \circ \Gamma_\lambda \circ M_{\mu_\lambda}$ s'en déduit puisque $M_{|J_{\lambda,z,\mathfrak{b}}|} \circ \Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}} = \Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \circ M_{|J_{\lambda,z,\mathfrak{b}}|\circ\Phi^{-1}_{\lambda,z,\mathfrak{b}}}$ et $T^*_{z,\mathfrak{b},T} \circ j \circ M_{\mu^2_{z,\mathfrak{b}}} = j_{TM} \circ T^{-1}_{z,\mathfrak{b},T}$. □

Définition 6.3.10. Soit $\lambda \in [0,1]$. L'application λ-symbole est l'isomorphisme topologique de $\mathcal{S}'(M\times M, L(E))$ vers $\mathcal{S}'(T^*M, L(E))$: $\sigma_\lambda := \mathcal{F}\circ\widetilde{\Gamma}_\lambda$. L'application de λ-quantification est l'inverse de σ_λ, noté $\mathfrak{Op}_\lambda$.

Remarquons que $\sigma_\lambda \circ j_{M^2} = j_{T^*M} \circ \mathcal{F} \circ \Gamma_\lambda \circ M_{\mu_\lambda}$ et $\mathfrak{Op}_\lambda \circ j_{T^*M} = j_{M^2} \circ M_{1/\mu_\lambda} \circ \Gamma_\lambda^{-1} \circ \overline{\mathcal{F}}$. Si $(z,\mathfrak{b})$ est une base, en notant $\mathfrak{Op}_{\lambda,z,\mathfrak{b}} := \widetilde{T}_{z,\mathfrak{b},M^2} \circ \mathfrak{Op}_\lambda \circ \widetilde{T}^{-1}_{z,\mathfrak{b},*}$, nous obtenons $\mathfrak{Op}_{\lambda,z,\mathfrak{b}} = \Gamma^*_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \circ M^*_{\mu_{z,\mathfrak{b}}} \circ \mathcal{F}^*_P$ de sorte que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ et $b \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$,

$$\langle \mathfrak{Op}_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(b), u\rangle = \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i\langle\zeta,\vartheta\rangle} \operatorname{Tr}\big(\mu b(\mathrm{x},\vartheta)(\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(u))^*(\mathrm{x},\zeta)\big)\, d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}\,. \tag{6.16}$$

où $\mu b : (\mathrm{x},\vartheta) \mapsto \mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x})\, b(\mathrm{x},\vartheta)$.

6.3.4 Produit de Moyal

Les applications $\mathfrak{Op}_0$, $\mathfrak{Op}_1$, $\mathfrak{Op}_W := \mathfrak{Op}_{\frac{1}{2}}$ correspondent respectivement aux quantifications normale, antinormale et de Weyl. Remarquons que pour tout $T \in \mathcal{S}'(T^*M, L(E))$,

$$\mathfrak{Op}_\lambda(T^*) = (\mathfrak{Op}_{1-\lambda}(T))^\dagger.$$

En particulier

$$\mathfrak{Op}_0(T^*) = (\mathfrak{Op}_1(T))^\dagger\,, \qquad \mathfrak{Op}_W(T^*) = (\mathfrak{Op}_W(T))^\dagger$$

où $\dagger$ est l'anti-isomorphisme topologique de $\mathcal{S}'(M\times M, L(E))$ défini par $\langle K^\dagger, u\rangle := \overline{\langle K, u^*\circ j\rangle}$ avec j le difféomorphisme sur $M\times M : (x,y) \mapsto (y,x)$ et $u \in \mathcal{S}(M\times M, L(E))$. Le noyau de l'adjoint $A^\dagger$ de tout opérateur $A \in L(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ est $(K_A)^\dagger$. Par conséquent, σ_λ est un isomorphisme topologique (et un $*$-isomorphisme dans le cas de la quantification de Weyl) de l'algèbre $\Re(\mathcal{S}) = L(S,S)\cap L(S',S')$ des opérateurs réguliers vers son image $\mathfrak{M}_\lambda := \sigma_\lambda(\Re(\mathcal{S}))$. On peut transporter la composition des opérateurs dans le monde des fonctions, en définisssant le λ-produit sur $\mathfrak{M}_\lambda$:

$$T \circ_\lambda T' := \sigma_\lambda(\mathfrak{Op}_\lambda(T)\,\mathfrak{Op}_\lambda(T'))$$

de sorte que $\mathfrak{M}_\lambda$ forme une algèbre, et $\mathfrak{M}^*_\lambda = \mathfrak{M}_{1-\lambda}$. Dans le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, on retrouve l'algèbre stellaire de Moyal $\mathfrak{M}_W$ et le produit de Moyal $\circ_W$. L'espace $\Psi^{-\infty}(M) \simeq \mathcal{S}(M\times M, L(E))$ étant un $*$-idéal de $\Re(\mathcal{S})$, l'espace $\mathcal{S}(T^*M, L(E)) = \sigma_\lambda(\Psi^{-\infty}(M))$ est un idéal de $\mathfrak{M}_\lambda$. Notons la propriété suivante du λ-produit sur $\mathcal{S}(T^*M) := \mathcal{S}(T^*M, L(M\times\mathbb{C})) \simeq \mathcal{S}(T^*M,\mathbb{C})$:

Proposition 6.3.11. $(\mathcal{S}(T^*M), \circ_\lambda)$ *est une algèbre de Fréchet (non commutative et non unifère). De plus,*

$$a \circ_\lambda b\,(x,\eta) = \int_{T_x(M)\times M} d\mu_x(\xi) d\mu(y) \int_{V^\lambda_{x,\xi,y}} d\mu^*_{x,\xi,y}(\theta,\theta')\, g^\lambda_{x,\xi,y}\, e^{2\pi i\omega^\lambda_{x,\xi,y}(\eta,\theta,\theta')} a(y^\lambda_{x,\xi},\theta)\, b(y^{1-\lambda}_{x,-\xi},\theta')$$

où $y^\lambda_{x,\xi} := m_\lambda(\psi_x^{\lambda\xi}, z)$, $\overline{y}^\lambda_{x,\xi} := \xi_\lambda(\psi_x^{\lambda\xi}, z)$ *et*

$$\begin{aligned}
&V^\lambda_{x,\xi,y} := T^*_{y^\lambda_{x,\xi}}(M) \times T^*_{y^{1-\lambda}_{x,-\xi}}(M)\,, \qquad d\mu^*_{x,\xi,y}(\theta,\theta') := d\mu^*_{y^\lambda_{x,\xi}}(\theta)\, d\mu^*_{y^{1-\lambda}_{x,-\xi}}(\theta')\,,\\
&g^\lambda_{x,\xi,y} := \tfrac{\mu_\lambda(\psi_x^{\lambda\xi},\psi_x^{(\lambda-1)\xi})}{\mu_\lambda(\psi_x^{\lambda\xi},y)\,\mu_\lambda(y,\psi_x^{(\lambda-1)\xi})}\,,\\
&\omega^\lambda_{x,\xi,y}(\eta,\theta,\theta') := \langle\theta,\overline{y}^\lambda_{x,\xi}\rangle - \langle\theta',\overline{y}^{1-\lambda}_{x,-\xi}\rangle - \langle\eta,\xi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Démonstration. Le produit $a \circ_\lambda b$ on $\mathcal{S}(T^*M)$ est obtenu par calcul de

$$\mathcal{F}\circ\Gamma_\lambda\circ M_{\mu_\lambda}\circ\big((M^{-1}_{\mu_\lambda}\circ\Gamma^{-1}_\lambda\circ\overline{\mathcal{F}}(a))\circ_V(M^{-1}_{\mu_\lambda}\circ\Gamma^{-1}_\lambda\circ\overline{\mathcal{F}}(b))\big),$$

où $\circ_V$ est la convolution de noyaux. Puisque σ_λ est un isomorphisme topologique entre $\mathcal{S}(M^2)$ et $\mathcal{S}(T^*M)$, la continuité du λ-produit est équivalente à la continuité de $\circ_V$, laquelle est équivalente à la continuité du produit suivant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$:

$$K\cdot K'(\mathrm{x},\mathrm{y}) := \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathrm{x},\mathrm{t})K(\mathrm{t},\mathrm{y})\mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{t})d\mathrm{t}.$$

La continuité de ce produit est une conséquence de l'estimation suivante :

$$q_{p,(\alpha,\beta)}(K\cdot K') \le C\, q_{2(p+r),(\alpha,0)}(K)\, q_{p,(0,\beta)}(K'), \qquad q_{p,\nu}(K) := \sup_{(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathbb{R}^{2n}} \langle(\mathrm{x},\mathrm{y})\rangle^p|\partial^\nu K(\mathrm{x},\mathrm{y})|$$

où $|\mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{t})| \le C_1\langle\mathrm{t}\rangle^{r-n-1}$ et $C := C_1\int_{\mathbb{R}^n}\langle\mathrm{t}\rangle^{-(n+1)}d\mathrm{t}$. □

Remarque 6.3.12. $(\mathcal{S}(T^*M),\circ_W)$ *est une* $*$*-algèbre puisque* $(a\circ_W b)^* = b^*\circ_W a^*$ *pour tout* $a,b\in\mathcal{S}(T^*M)$. *On peut aussi constuire une autre* $*$*-algèbre sur* $\mathcal{S}(T^*M)$ *avec le produit*

$$a\star b := \tfrac{1}{2}(a\circ_0 b + a\circ_1 b).$$

Ceci montre que lorsque (H_ψ) *(voir Hypothèse 6.3.1) n'est pas satisfaite, on peut encore définir un star-produit canonique sur* $\mathcal{S}(T^*M)$ *qui satisfait* $(a\star b)^* = b^*\star a^*$.

6.4 Calcul symbolique des opérateurs pseudodifférentiels

6.4.1 Symboles

Hypothèse 6.4.1. *Soit* $\sigma\in[0,1]$. *On suppose dans cette section que* $(M,\exp,E)$ *est de type* S_σ.

Définition 6.4.2. Un symbole de degré $(l,m)\in\mathbb{R}^2$ de type σ, sur M est une section lisse $a\in C^\infty(T^*M,L(E))$ telle que pour tout $(z,\mathfrak{b})$ et tout n-multi-indices α, β, il existe $K>0$ tel que

$$\left\|\partial^{(\alpha,\beta)}_{z,\mathfrak{b}}a^z(x,\theta)\right\|_{L(E_z)} \le K\langle x\rangle^{\sigma(l-|\alpha|)}_{z,\mathfrak{b}}\,\langle\theta\rangle^{m-|\beta|}_{z,\mathfrak{b},x} \tag{6.17}$$

pour tout $(x,\theta)\in T^*M$. L'espace des symboles de degré (l,m) et de type σ est noté $S^{l,m}_\sigma$.

Remarquons que $S^{l,m}_0$ est indépendant de l, on note cet espace S^m_0. On pose $S^{-\infty}_\sigma := \cap_{l,m}S^{l,m}_\sigma$ et dans le cas $\sigma>0$, on définit $S^{-\infty} := S^{-\infty}_\sigma = \mathcal{S}(T^*M,L(E))$ (il est indépendant de $\sigma>0$). On pose $S^\infty_\sigma := \cup_{l,m}S^{l,m}_\sigma$ et on définit $S^{l,m}_{\sigma,z} := S^{l,m}_\sigma(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$ sans référence à une base.

Proposition 6.4.3. *Soit $a \in C^\infty(T^*M, L(E))$. Alors $a \in S_\sigma^{l,m}$ si et seulement s'il existe une base $(z, \mathfrak{b})$ telle que a satisfasse (6.17).*

Démonstration. Supposons que (6.17) soit satisfaite pour $(z', \mathfrak{b}')$ et $(z, \mathfrak{b})$ une autre base. Pour $(x, \theta) \in T^*M$ et α, β deux n-multi-indices avec $\nu = (\alpha, \beta) \neq 0$, on obtient de l'équation (6.12) et du Lemme 6.2.13,

$$\left\|\partial_{z,\mathfrak{b}}^\nu a^z(x,\theta)\right\|_{L(E_z)} \leq K \sum_{\alpha',\beta'} \sum_{\rho \leq \lambda \leq \nu'} \langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{\sigma(|\alpha'|-|\alpha|)} \langle\theta\rangle_{z,\mathfrak{b},x}^{|\beta'|-|\beta|} \langle x\rangle_{z',\mathfrak{b}'}^{\sigma(|\lambda^1|-|\alpha'|)} \times \langle x\rangle_{z',\mathfrak{b}'}^{\sigma(l-|\rho^1|)} \langle\theta\rangle_{z',\mathfrak{b}',x}^{m-|\beta'|} \langle x\rangle_{z',\mathfrak{b}'}^{\sigma(|\rho^1|-|\lambda^1|)}.$$

En utilisant (6.1), (6.2) et le fait que $|\alpha| \geq |\rho^1|$, on obtient le résultat. □

Corollaire 6.4.4. *Si $a \in C^\infty(T^*M, L(E))$, alors $a \in S_\sigma^{l,m}$ si et seulement si pour tout $(z, \mathfrak{b})$, $a^z \circ (n_{z,*}^{\mathfrak{b}})^{-1} \in S_\sigma^{l,m}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$, ou de façon équivalente, il existe $(z, \mathfrak{b})$ tel que $a^z \circ (n_{z,*}^{\mathfrak{b}})^{-1} \in S_\sigma^{l,m}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$.*

Si $f \in S_\sigma(\mathbb{R}^n)$ alors $(\mathrm{x}, \vartheta) \mapsto f(\mathrm{x}) \operatorname{Id}_{L(E_z)} \in S_\sigma^{0,0}(\mathbb{R}^n, L(E_z))$. En particulier $(\mathrm{x}, \vartheta) \mapsto \mu_{z,\mathfrak{b}}^{\pm 1}(\mathrm{x}) \operatorname{Id}_{L(E_z)} \in S_\sigma^{0,0}(\mathbb{R}^n, L(E_z))$ si $d\mu$ est une $S_\sigma^\times$-densité.

Remarque 6.4.5. *On note $PS_\sigma^{l,m}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ le sous-espace de $S_\sigma^{l,m}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ constitué par les fonctions de la forme $\sum_{1 \leq i \leq (\dim E_z)^2} P_i e_i$ où (e_i) est une base linéaire de $L(E_z)$ et P_i sont de la forme $\sum_\beta c_{i,\beta}(\mathrm{x}) \vartheta^\beta$ (somme finie sur les n-multi-indices β), où $\partial^\alpha c_{i,\beta}(\mathrm{x}) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-|\alpha|)})$ pour tout n-multi-indices α, et $m = \max_i \deg_\vartheta P_i$. On vérifie que cette définition est indépendante de la base choisie (e_i).*

On appelle symbole polynomial d'ordre l, m et de type σ toute section de la forme

$$(\tau_z \circ \pi)(P \circ n_{z,*}^{\mathfrak{b}})(\tau_z^{-1} \circ \pi)$$

où $P \in PS_\sigma^{l,m}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ et $(z, \mathfrak{b})$ est une base. Cette définition est indépendant de $(z, \mathfrak{b})$. On note $PS_\sigma^{l,m}$ le sous-espace de $S_\sigma^{l,m}$ consistué par les symboles polynomiaux d'ordre l, m et de type σ. Remarquons que la section $I : (x, \theta) \mapsto I_{L(E_x)}$ est dans $PS_1^{0,0}$.

Lemme 6.4.6. *Les semi-normes suivantes sur $S_\sigma^{l,m}$, pour $N \in \mathbb{N}$,*

$$q_{(\alpha,\beta)}(a) := \sup_{(x,\theta) \in T^*M} \langle x\rangle_{z,\mathfrak{b}}^{\sigma(|\alpha|-l)} \langle\theta\rangle_{z,\mathfrak{b},x}^{|\beta|-m} \left\|\partial_{z,\mathfrak{b}}^{(\alpha,\beta)} a^z(x,\theta)\right\|_{L(E_z)}$$

déterminent une topologie de Fréchet sur $S_\sigma^{l,m}$, qui est indépendante de $(z, \mathfrak{b})$. Les applications $T_{z,\mathfrak{b},*}$ sont des isomorphismes topologiques de $S_\sigma^{l,m}$ vers $S_\sigma^{l,m}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Les inclusions suivantes sont continues : $S_\sigma^{l,m} \cdot S_\sigma^{l',m'} \subseteq S_\sigma^{l+l',m+m'}$, $S_\sigma^{l,m} \subseteq S_\sigma^{l',m'}$ ($m \leq m'$ et $l \leq l'$) et $S_\sigma^{-\infty} \subseteq S_\sigma^{l,m}$. De plus, la dernière inclusion est dense lorsque $S_\sigma^{l,m}$ a la topologie de $S_\sigma^{l',m'}$ pour $m < m'$ et $l < l'$.

Démonstration. L'indépendance de la topologie pour $(z, \mathfrak{b})$ est une conséquence directe de l'estimation suivante, pour tout (α, β),

$$q_{(\alpha,\beta)}^{(z,\mathfrak{b})}(a) \leq K_{\alpha,\beta} \sum_{\substack{0 \leq |(\alpha',\beta')| \leq |(\alpha,\beta)| \\ |\beta'| \geq |\beta|\,, \gamma \leq \alpha'}} q_{(\gamma,\beta')}^{(z',\mathfrak{b}')}(a).$$

où $K_{\alpha,\beta} > 0$. Par construction, les applications $T_{z,\mathfrak{b},*}$ sont des isomorphismes topologiques de $S^{l,m}_\sigma$ vers $S^{l,m}_\sigma(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Les continuités de $S^{l,m}_\sigma \cdot S^{l',m'}_\sigma \subseteq S^{l+l',m+m'}_\sigma$, $S^{l,m}_\sigma \subseteq S^{l',m'}_\sigma$ ($m \leq m'$ et $l \leq l'$) et $S^{-\infty}_\sigma \subseteq S^{l,m}_\sigma$ sont directes. En suivant [105], pour prouver le résultat de densité, nous allons prouver le résultat plus fort suivant : pour tout $a \in S^{l,m}_\sigma(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ la suite

$$a_p(\mathrm{x}, \vartheta) := (\rho(\mathrm{x}/p))^{1-\delta_{\sigma,0}}\, \rho(\vartheta/p)\, a(\mathrm{x}, \vartheta)$$

converge vers a pour la topologie de $S^{l',m'}_\sigma(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ où $m' > m$ et $l' > l$. Ici $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n, [0,1])$ avec $\rho = 1$ sur $B(0,1)$ et $\rho = 0$ on $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2)$. Tout d'abord, il est clair que $a_p \in S^{-\infty}_\sigma(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. En notant $R_p(\mathrm{x}, \vartheta) := \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(|\alpha|-l')} \langle \vartheta\rangle^{|\beta|-m'} \left\|\partial^{(\alpha,\beta)}(a - a_p)(\mathrm{x}, \vartheta)\right\|_{L(E_z)}$ pour un $2n$-multi-indice $\nu := (\alpha, \beta)$, on obtient, pour un $K > 0$ (par convention $\nu' < \nu$ si et seulement si $\nu' \leq \nu$ et $\nu' \neq \nu$):

$$\tfrac{1}{K}\, R_p(\mathrm{x}, \vartheta) \leq \Delta_p(\mathrm{x}, \vartheta) \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-l')} \langle \vartheta\rangle^{m-m'} + \sum_{\nu' < \nu} |\partial^{\nu-\nu'} \Delta_p(\mathrm{x}, \vartheta)| \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-l'+|\alpha|-|\alpha'|)} \langle \vartheta\rangle^{m-m'+|\beta|-|\beta'|}$$

où $\Delta_p(\mathrm{x}, \vartheta) := 1 - (\rho(\mathrm{x}/p))^{1-\delta_{\sigma,0}} \rho(\vartheta/p)$. Supposons que $\sigma = 0$. Dans ce cas, $|\Delta_p(\mathrm{x}, \vartheta)| \leq 1_{[p,+\infty[}(\vartheta)$ et si $\nu' < \nu$,

$$|\partial^{\nu-\nu'} \Delta_p(\mathrm{x}, \vartheta)| \leq \delta_{\alpha,\alpha'}\, K_\beta\, p^{-|\beta|+|\beta'|}\, 1_{[p,2p]}(\vartheta) \tag{6.18}$$

où $1_{[r,r']}$ est la fonction caractéristique de l'anneau $A_{r,r'} := \{\, \vartheta \in \mathbb{R}^n \ : \ r \leq \|\vartheta\| \leq r' \,\}$ et $K_\beta := \sup_{\beta' < \beta} \left\|\partial^{\beta-\beta'} \rho\right\|_\infty$. Par conséquent, pour $K' > 0$,

$$\tfrac{1}{K}\, R_p(\mathrm{x}, \vartheta) \leq \langle p\rangle^{m-m'} + K_\beta \sum_{\nu' < \nu} \delta_{\alpha,\alpha'}\, 1_{[p,2p]}(\vartheta)\; p^{-|\beta|+|\beta'|}\, \langle \vartheta\rangle^{m-m'+|\beta|-|\beta'|} \leq K' \langle p\rangle^{m-m'}$$

et le résultat suit. Supposons maintenant que $\sigma \neq 0$. Dans ce cas $|\Delta_p(\mathrm{x}, \vartheta)| \leq 1_{F_p}(\mathrm{x}, \vartheta)$ où $F_p := \mathbb{R}^{2n} - B(0,p)^2$ et si $\nu' < \nu$, pour une constante $K_\nu > 0$

$$|\partial^{\nu-\nu'} \Delta_p(\mathrm{x}, \vartheta)| \leq K_\nu\, 1_{[\mathrm{sgn}(\alpha-\alpha')p,2p]}(\mathrm{x})\; 1_{[\mathrm{sgn}(\beta-\beta')p,2p]}(\vartheta)\, p^{-|\nu|+|\nu'|}\,. \tag{6.19}$$

Par conséquent, pour $K', K'' > 0$, et avec $r := \max\{m - m', \sigma(l - l')\} < 0$,

$$\tfrac{1}{K}\, R_p(\mathrm{x}, \vartheta) \leq \langle p\rangle^r + K' \sum_{\nu' < \nu} 1_{[\mathrm{sgn}(\alpha-\alpha')p,2p]}(\mathrm{x})\; 1_{[\mathrm{sgn}(\beta-\beta')p,2p]}(\vartheta)\, \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-l')} \langle \vartheta\rangle^{m-m'} \leq K'' \langle p\rangle^r$$

et le résultat s'en déduit. □

Le lemme suivant est un résultat standard de la théorie des distributions.

Lemme 6.4.7. *L'application j_{T^*M} est injective et continue de $S^{l,m}_\sigma$ vers $\mathcal{S}'(T^*M, L(E))$.*

Nous allons avoir besoin d'approximation asymptotique de symboles modulo $S^{-\infty}_\sigma$. On définit ainsi :

Définition 6.4.8. Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $S_\sigma^{l_j,m_j}$ où (l_j) et (m_j) des suites strictement décroissantes telles que $\lim_{j\to\infty} l_j = \lim_{j\to\infty} m_j = -\infty$. On dit que a est un développement asymptotique de $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ et on note

$$a \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

si $a \in C^\infty(T^*M, L(E))$ est tel que $a - \sum_{j=1}^{k-1} a_j \in S_\sigma^{l_k,m_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$. En particulier, nous avons $a \in S_\sigma^{l_1,m_1}$.

Lemme 6.4.9. *Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $S_\sigma^{l_j,m_j}$ où (l_j) et (m_j) des suites strictement décroissantes telles que $\lim_{j\to\infty} l_j = \lim_{j\to\infty} m_j = -\infty$.*
(i) Il existe $a \in S_\sigma^{l_1,m_1}$ tel que $a \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.
(ii) Si un autre a' satisfait $a' \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j$, alors $a - a' \in S_\sigma^{-\infty}$.

Démonstration. (ii) est évident. Prouvons (i) pour une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ dans $S_\sigma^{l_j,m_j}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ et avec $a \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j \in S_\sigma^{l_1,m_1}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Le résultat suivra alors pour une suite (b_j) dans $S_\sigma^{l,m}$ en prenant $b := T_{z,\mathfrak{b},*}^{-1}(a)$ où $a_j := T_{z,\mathfrak{b},*}(b_j)$. On définit

$$a_j'(\mathrm{x},\vartheta) := \Delta_{p_j}(\mathrm{x},\vartheta)\, a_j(\mathrm{x},\vartheta)$$

où Δ_{p_j} est définie dans la preuve du Lemme 6.4.6 et (p_j) est une suite numérique dans $[1,+\infty[$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_j' - a_j \in S_\sigma^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Ainsi, le résultat sera prouvé si on montre que pour une suite (p_j) et pour tout $N \geq 0$, il existe $k_0(N) \geq 2$ tel que pour tout $k \geq k_0(N)$,

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} q_{N,l_k,m_k}(a_j') < \infty \tag{6.20}$$

où $q_{N,l_k,m_k} := \sup_{|\nu|\leq N} q_{\nu,l_k,m_k}$, et q_{ν,l_k,m_k} sont les semi-normes de $S_\sigma^{l_k,m_k}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. En effet, avec $\left\|\partial^\nu a_j'\right\|_\infty \leq q_{|\nu|,l_k,m_k}(a_j')$ pour $k \geq k_1(\nu)$, $a' := \sum_{j=1}^{\infty} a_j'$ est une fonction lisse bien définie et nous avons alors $a' - \sum_{j=1}^{k-1} a_j \in S_\sigma^{l_k,m_k}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. En utilisant la règle de Leibniz, on voit que pour tout $2n$-multi-indice $\nu := (\alpha,\beta)$, et tout $j \in \mathbb{N}^*$, il existe $K_{\nu,j} > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{K_{\nu,j}} \left\|\partial^\nu a_j'(\mathrm{x},\vartheta)\right\|_{L(E_z)} &\leq \Delta_p(\mathrm{x},\vartheta)\langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l_j-|\alpha|)}\langle\vartheta\rangle^{m_j-|\beta|} \\ &\quad + \sum_{\nu'<\nu} |\partial^{\nu-\nu'}\Delta_p(\mathrm{x},\vartheta)|\langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l_j-|\alpha'|)}\langle\vartheta\rangle^{m_j-|\beta'|}.\end{aligned}$$

Supposons que $\sigma = 0$. L'estimation (6.18) donne pour tout $N \geq 0, k \geq 2$, $j \geq k+1$,

$$q_{N,l_k,m_k}(a_j') \leq K_{N,j}\langle p_j\rangle^{m_j-m_{j-1}}$$

pour une constante $K_{N,j} > 0$. Si on fixe $p_j = (2^j \sup_{N\leq j}\{\, K_{N,j}, 1\,\})^{1/(m_{j-1}-m_j)}$, alors on voit que pour tout $N \geq 0$, $k \geq N+2$, $j \geq k+1$, nous avons $q_{N,l_k,m_k}(a_j') \leq 2^{-j}$ et (6.20) est satisfaite. Supposons $\sigma \neq 0$. L'estimation (6.19) donne pour tout $N \geq 0, k \geq 2$, $j \geq k+1$,

$$q_{N,l_k,m_k}(a_j') \leq K_{N,j}'\langle p_j\rangle^{r_j}$$

pour une constante $K_{N,j}' > 0$ et avec $r_j := \max\{m_j - m_{j-1}', \sigma(l_j - l_{j-1}')\} < 0$. Si on fixe $p_j = (2^j \sup_{N\leq j}\{\, K_{N,j}', 1\,\})^{-r_j^{-1}}$, alors on voit que pour tout $N \geq 0$, $k \geq N+2$, (6.20) est satisfaite comme pour le cas $\sigma = 0$. □

6.4.2 Amplitudes et opérateurs associés sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$

Nous allons voir dans cette section les amplitudes en tant que généralisation des symboles de $S^{l,m}_{\sigma,z} := S^{l,m}_{\sigma}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ où $z \in M$ est fixé. Pour chaque amplitude, un opérateur continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ dans lui-même sera défini. Les résultats présentés ici seront important dans la section suivante concernant les opérateurs pseudodifférentiels sur M.

Définition 6.4.10. Une amplitude d'ordre l, w, m et de type $\sigma \in [0,1]$, $\kappa \geq 0$, est une fonction lisse $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{3n}, L(E_z))$ telle que pour tout $3n$-multi-indice $\nu = (\alpha, \beta, \gamma)$, il existe $C_\nu > 0$ tel que

$$\left\| \partial^{(\alpha,\beta,\gamma)} a(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \right\|_{L(E_z)} \leq C_\nu \langle \mathrm{x} \rangle^{\sigma(l-|\alpha+\beta|)} \langle \zeta \rangle^{w+\kappa|\alpha+\beta|} \langle \vartheta \rangle^{m-|\gamma|} \tag{6.21}$$

pour tout $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \in \mathbb{R}^{3n}$. On note $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z} := \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^{3n}, L(E_z))$ l'espace des amplitudes d'ordre l, w, m et de type σ, κ.

Remarquons que $\Pi^{l,w,m}_{0,\kappa,z}$ est indépendant de l, on note cet space $\Pi^{0,w,m}_{0,\kappa,z}$.

On note $\Pi^{-\infty,w}_{\sigma,\kappa,z} := \cap_{l,m} \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$. On pose $\Pi^{\infty}_{\sigma,\kappa,z} := \cup_{l,w,m} \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$ et $\Pi^{-\infty}_{\sigma,z} := \cap_{l,m} \cup_{w,\kappa} \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$. On voit que $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z} \cdot \Pi^{l',w',m'}_{\sigma,\kappa,z} \subseteq \Pi^{l+l',w+w',m+m'}_{\sigma,\kappa,z}$ et $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z} \subseteq \Pi^{l',w',m'}_{\sigma,\kappa,z}$ pour $m \leq m'$, $w \leq w'$, et $l \leq l'$. Ainsi, $\Pi^{\infty}_{\sigma,\kappa,z}$ est une $*$-algèbre, qui est tri-graduée pour $\sigma > 0$ et bi-graduée pour $\sigma = 0$. Notons aussi que si $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$, alors $\partial^{(\alpha,\beta,\gamma)} a \in \Pi^{l-|\alpha+\beta|,w+\kappa|\alpha+\beta|,m-|\gamma|}_{\sigma,\kappa,z}$.

Amplitudes et symboles de $S^{l,m}_{\sigma,z}$ sont reliés par le lemme suivant :

Lemme 6.4.11. *(i) Pour tout $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$ nous avons $a_{\zeta=0} := (\mathrm{x}, \vartheta) \mapsto a(\mathrm{x}, 0, \vartheta)$ dans $S^{l,m}_{\sigma,z}$.*
(ii) Pour tout $s \in S^{l,m}_{\sigma,z}$, la fonction $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto s(\mathrm{x}, \vartheta)$ est dans $\Pi^{l,0,m}_{\sigma,0,z}$.
(iii) Pour tout $f \in S_\sigma(\mathbb{R}^n)$, la fonction $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto f(\mathrm{x}) \operatorname{Id}_{L(E_z)}$ est dans $\Pi^{0,0,0}_{\sigma,0,z}$.

Démonstration. (i) découle du fait que $\partial^\nu (a \circ P) = (\partial^{P(\nu)} a) \circ P$ où $P(\mathrm{x}, \vartheta) := (\mathrm{x}, 0, \vartheta)$.
(ii) En notant $Q(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := (\mathrm{x}, \vartheta)$, le résultat se déduit de $\partial^{\alpha,\beta,\gamma}(s \circ Q) = \delta_{\beta,0} (\partial^{\alpha,\gamma} s) \circ Q$.
(iii) est une conséquence de (ii) et du fait que $(\mathrm{x}, \vartheta) \mapsto f(\mathrm{x}) \operatorname{Id}_{L(E_z)} \in S^{0,0}_{\sigma,z}$. □

Comme les espaces de symboles, les espaces $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$ sont des espaces de Fréchet :

Lemme 6.4.12. *Les semi-normes suivantes sur $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$:*

$$q^{l,w,m}_{(\alpha,\beta,\gamma)}(a) := \sup_{(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \in \mathbb{R}^{3n}} \langle \mathrm{x} \rangle^{\sigma(|\alpha+\beta|-l)} \langle \zeta \rangle^{-w-\kappa|\alpha+\beta|} \langle \vartheta \rangle^{|\gamma|-m} \left\| \partial^{(\alpha,\beta,\gamma)} a(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \right\|_{L(E_z)}$$

déterminent une topologie de Fréchet sur $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$. Les inclusions suivantes sont continues : $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z} \cdot \Pi^{l',w',m'}_{\sigma,\kappa,z} \subseteq \Pi^{l+l',w+w',m+m'}_{\sigma,\kappa,z}$, $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z} \subseteq \Pi^{l',w',m'}_{\sigma,\kappa,z}$ ($m \leq m'$, $w \leq w'$ et $l \leq l'$) et $\Pi^{-\infty,w}_{\sigma,\kappa,z} \subseteq \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$. De plus, la dernière inclusion est dense lorsque $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$ a la topologie de $\Pi^{l',w,m'}_{\sigma,\kappa,z}$ pour $m < m'$ et $l < l'$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 6.4.6. □

On notera Δ_ζ l'opérateur differentiel $\sum_{i=1}^n \partial^2_{\zeta_i}$. La formule suivante est valide pour tout $\vartheta, \zeta \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\langle \vartheta \rangle^{2p} e^{2\pi i \langle \vartheta, \zeta \rangle} = (1 - (2\pi)^{-2} \Delta_\zeta)^p \, e^{2\pi i \langle \vartheta, \zeta \rangle} =: L^p_\zeta \, e^{2\pi i \langle \vartheta, \zeta \rangle} . \tag{6.22}$$

Un calcul montre que $(1-(2\pi)^{-2}\Delta_\zeta)^p = \sum_{0\le|\beta|\le p} c_{p,\beta}\,\partial_\zeta^{2\beta}$, où la sommation est sur les n-multi-indices β et $c_{p,\beta} := \binom{p}{|\beta|}(-1)^{|\beta|}(2\pi)^{-2|\beta|}\beta!$. On utilisera aussi la formule suivante valide pour tout $\vartheta\in\mathbb{R}^n$, $\zeta\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ et $p\in\mathbb{N}$,

$$e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} = \sum_{|\beta|=p} \lambda_\beta\,\frac{\zeta^\beta}{\|\zeta\|^{2p}}\,\partial_\vartheta^\beta\,e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} =: M_\vartheta^{p,\zeta}\,e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \tag{6.23}$$

où $\lambda_\beta := \beta!(2\pi)^{-|\beta|}i^{|\beta|}$. On définit ${}^tM_\vartheta^{p,\zeta} := \sum_{|\beta|=p}\lambda_\beta(-1)^p\frac{\zeta^\beta}{\|\zeta\|^{2p}}\partial_\vartheta^\beta$.

Définition 6.4.13. We note $\mathcal{O}_{f,z}$, où $f_1,f_2,f_3:\mathbb{N}^{3n}\to\mathbb{R}$, et $f:=(f_1,f_2,f_3)$, l'espace des fonctions lisses dans $C^\infty(\mathbb{R}^{3n},L(E_z))$ telles que pour tout $3n$-multi-indice $\nu=(\alpha,\beta,\gamma)$, il existe $C_\nu>0$ tel que

$$\|\partial^\nu a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\|_{L(E_z)} \le C_\nu\langle\mathrm{x}\rangle^{f_1(\nu)}\langle\zeta\rangle^{f_2(\nu)}\langle\vartheta\rangle^{f_3(\nu)}$$

uniformément en $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\in\mathbb{R}^{3n}$.

L'espace vectoriel $\mathcal{O}_{f,z}$ a une famille naturelle de seminormes q_ν^f données par les meilleures constantes C_ν dans l'estimation précédente. Avec cette famille, $\mathcal{O}_{f,z}$ est un espace de Fréchet. Les amplitudes de $\Pi_{\sigma,\kappa,z}^{l,w,m}$ forment un espace $\mathcal{O}_{f,z}$ où $f_1(\nu):=\sigma(l-|\alpha+\beta|)$, $f_2(\nu):=w+\kappa|\alpha+\beta|$ et $f_3(\nu):=m-|\gamma|$. Pour un triplet $f:=(f_1,f_2,f_3)$ donné et $\rho\in\mathbb{R}$, on notera $f_{3,\rho,\alpha,\gamma}:=\sup_\beta f_3(\alpha,\beta,\gamma)-\rho|\beta|$, $f_{2,\rho,\alpha,\beta}:=\sup_\gamma f_2(\alpha,\beta,\gamma)-\rho|\gamma|$ et $f_{1,\rho,\alpha,\beta}:=\sup_\gamma f_1(\alpha,\beta,\gamma)-\rho|\gamma|$.

Proposition 6.4.14. *Soient Γ un opérateur linéaire continu dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$ et $f:=(f_1,f_2,f_3)$ un triplet tel qu'il existe $\rho<1$ tel que $f_{3,\rho,0,0}<\infty$.*
(i) Pour toute fonction $a\in\mathcal{O}_{f,z}$ la forme antilinéaire suivante sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$

$$\langle\mathfrak{Op}_\Gamma(a),u\rangle := \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\,\mathrm{Tr}(a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,\Gamma(u)^*(\mathrm{x},\zeta))\,d\zeta\,d\vartheta\,d\mathrm{x}$$

est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$.
(ii) Pour tout $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$, la forme linéaire $L_{u,\Gamma}:=a\mapsto\langle\mathfrak{Op}_\Gamma(a),u\rangle$ est continue sur $\mathcal{O}_{f,z}$. En particulier $L_{u,\Gamma}$ est continue sur tout espace d'amplitude $\Pi_{\sigma,\kappa,z}^{l,w,m}$.

Démonstration. (i) Nous avons $\mathfrak{Op}_\Gamma(a)=I(a)\circ\Gamma$, où $I(a)$ est la forme antilinéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$:

$$\langle I(a),u\rangle := \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\,\mathrm{Tr}(a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,u^*(\mathrm{x},\zeta))\,d\zeta\,d\vartheta\,d\mathrm{x}\,.$$

Nous allons montrer que $I(a)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$, ce qui donnera le résultat. Soit $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$ et fixons pour l'instant x et $\vartheta\in\mathbb{R}^n$. On peut vérifier que l'application $\zeta\mapsto a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,u^*(\mathrm{x},\zeta)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,L(E_z))$. Par conséquent, avec (6.22) et des intégrations par parties, on obtient avec $R(\mathrm{x},\vartheta):=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,u^*(\mathrm{x},\zeta)\,d\zeta$,

$$\begin{aligned}R(\mathrm{x},\vartheta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\langle\vartheta\rangle^{-2p}(1-(2\pi)^{-2}\Delta_\zeta)^p\,a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,u^*(\mathrm{x},\zeta)\,d\zeta\\ &= \sum_{0\le|\beta|\le p}\sum_{\beta'\le 2\beta} c_{p,\beta}\binom{2\beta}{\beta'}\langle\vartheta\rangle^{-2p}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}(\partial^{(0,\beta',0)}\,a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta))\,(\partial^{(0,2\beta-\beta')}u^*(\mathrm{x},\zeta))\,d\zeta\,.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\mathrm{x}, \vartheta \in \mathbb{R}^n$, on obtient en fixant p tel que $2(\rho-1)p + f_{3,\rho,0,0} \leq -2n$ (ceci est possible car $\rho < 1$) que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\|R(\mathrm{x},\vartheta)\|_{L(E_z)} \leq C_p \langle \vartheta \rangle^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathrm{x}, \zeta \rangle^{-N+r_p}\, d\zeta \sum_{0 \leq |\beta| \leq p} \sum_{\beta' \leq 2\beta} q^f_{0,\beta',0}(a)\, q_{N,(0,2\beta-\beta')}(u)$$

pour un $C_p > 0$, où $r_p := \max_{|\beta'| \leq 2p} |f_1(0,\beta',0)| + |f_2(0,\beta',0)|$. Si on fixe N tel que $-N + r_p \leq -4n$, nous voyons, en utilisant l'inégalité $\langle \mathrm{x}, \zeta \rangle^{-2} \leq \langle \mathrm{x} \rangle^{-1} \langle \zeta \rangle^{-1}$, qu'il existe $C_{\rho,f} > 0$ tel que

$$|\langle I(a), u \rangle| \leq C_{\rho,f} \sum_{0 \leq |\beta| \leq p} \sum_{\beta' \leq 2\beta} q^f_{0,\beta',0}(a)\, q_{N,(0,2\beta-\beta')}(u) \tag{6.24}$$

ce qui donne le résultat.
(ii) Puisque $L_{u,\Gamma}(a) = \langle I(a), \Gamma(u) \rangle$, la continuité de $L_{u,\Gamma}$ sur $\mathcal{O}_{f,z}$ est une conséquence directe de (6.24). Puisque $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z} = \mathcal{O}_{f,z}$ pour un triplet $f = (f_1, f_2, f_3)$ tel que $f_{3,0,0,0} < \infty$, $L_{u,\Gamma}$ est continue sur tout espace d'amplitudes. □

Pour toute amplitude a, on notera aussi $\mathfrak{Op}_\Gamma(a)$ l'application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_z)$, associée à la distribution tempérée $u \mapsto \langle \mathfrak{Op}_\Gamma(a), u \rangle$.

Remarque 6.4.15. *Si $(M, \exp, E, d\mu, \psi)$ est de type $\mathcal{O}_M$, on avons vu que pour toute base $(z, \mathfrak{b})$ et $\lambda \in [0,1]$, les applications $\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}$ sont des automorphismes topologiques de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$. Ainsi, le Lemme 6.4.14 implique que pour un $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$, on peut définir une famille indicée par $\lambda \in [0,1]$ d'opérateurs $\mathfrak{Op}_{\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}}(a)$ qui sont continus de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E_z)$.*

Remarque 6.4.16. *Supposons que $(M, \exp, E, d\mu)$ soit de type $\mathcal{S}_\sigma$ et que ψ soit une $\mathcal{O}_M$-linéarisation. On déduit de (6.16) que si s est un symbol de $S^{l,m}_\sigma$ et $\lambda \in [0,1]$, nous avons $(\mathfrak{Op}_\lambda(s))_{z,\mathfrak{b}} = \mathfrak{Op}_{\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}}(\mu s_{z,\mathfrak{b}})$ où $(z, \mathfrak{b})$ est une base, $s_{z,\mathfrak{b}} := T_{z,\mathfrak{b},*}(s)$ et $\mu s_{z,\mathfrak{b}} := (\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto \mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x})\, s_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}, \vartheta) \in \Pi^{l,0,m}_{\sigma,0,z}$. On notera aussi $\mu^{-1} s_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := \mu^{-1}_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}) s_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}, \vartheta) \in \Pi^{l,0,m}_{\sigma,0,z}$.*

Nout établissons maintenant une condition suffisante sur Γ et a pour avoir $\mathfrak{Op}_\Gamma(a)$ stable (et continu) sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$. Ce résultat sera crucial pour l'établissement de la régularité des opérateurs pseudodifférentiels.

Lemme 6.4.17. *Soit Γ un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ de la forme $\Gamma = L_{\tau_1} \circ R_{\tau_2} \circ C_\Phi$, où $\tau_i \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ (pour $1 \leq i \leq 2$), et $\Phi := (\pi_1, \psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$ est tel que $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$ et il existe $c, \varepsilon, r > 0$, tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\langle \psi(\mathrm{x}, \zeta) \rangle \geq c \langle \mathrm{x} \rangle^\varepsilon \langle \zeta \rangle^{-r}$ et pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe $c_\mathrm{x} > 0$ tel que $\langle \psi(\mathrm{x}, \zeta) \rangle \geq c_\mathrm{x} \langle \zeta \rangle^\varepsilon$ uniformément en $\zeta \in \mathbb{R}^n$.*

Supposons que $f = (f_1, f_2, f_3)$ soit tel qu'il existe $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\rho_3 < 1$, $(r/\varepsilon)\rho_1 + \rho_2 < 1$ et pour tout $2n$-multi-indice μ, $f_{1,\rho_1,\mu} < \infty$, $f_{2,\rho_2,\mu} < \infty$, $f_{3,\rho_3,\mu} < \infty$ et pour tout n-multi-indice α $f_{3,\rho_3,\alpha} := \sup_\gamma f_{3,\rho_3,\alpha,\gamma} < \infty$. Alors pour toute fonction $a \in \mathcal{O}_{f,z}$, l'opérateur $\mathfrak{Op}_\Gamma(a)$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ dans lui-même. En particulier, c'est le cas de toute amplitude $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$.

Démonstration. Soient $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$. Par définition, $\langle \mathfrak{Op}_\Gamma(a)(v), u \rangle = \mathfrak{Op}_\Gamma(a)(u \otimes \overline{v})$ et $\Gamma(K) = \tau_1\, (K \circ \Phi)\, \tau_2$. En notant $a'(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := \tau_1^*(\mathrm{x}, \zeta)\, a(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\, \tau_2^*(\mathrm{x}, \zeta)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{Op}_\Gamma(a)(v), u \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i \langle \vartheta, \zeta \rangle} \big(a'(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\; v(\psi(\mathrm{x}, \zeta)) \,\big|\, u(\mathrm{x}) \big)\, d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(g(\mathrm{x}) \big|\, u(\mathrm{x}) \big)\, d\mathrm{x}\end{aligned}$$

où $g(\mathrm{x}) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\, a'(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\; v\circ\psi(\mathrm{x},\zeta)\, d\zeta\, d\vartheta$.

Un calcul avec la formule de Faa di Bruno montre que pour tout $2n$-multi-indice ν, tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$ il existe $C_{\mathrm{x},N,\nu}>0$ tel que $\|\partial^\nu(v\circ\psi)(\mathrm{x},\zeta)\|_{E_z}\le C_{\mathrm{x},N,\nu}\langle\zeta\rangle^{-N}$ uniformément en $\zeta\in\mathbb{R}^n$. Par conséquent, l'application $\zeta\mapsto\partial^{\alpha',0}a'(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,\partial^{\alpha-\alpha'}(v\circ\psi)(\mathrm{x},\zeta)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,E_z)$. On peut donc intégrer par partie successivement dans $g(\mathrm{x})$ de sorte que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$g(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\langle\vartheta\rangle^{-2p} L^p_\zeta(a'(v\circ\psi))(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\, d\zeta\, d\vartheta\,.$$

En prenant p tel que $(\rho_3-1)2p+c_0\le -2n$ où $c_\alpha := \sup_{\alpha'\le\alpha} f_{3,\rho_3,\alpha'}$, on voit que l'intégrand précédent est absolument intégrable, et on peut permuter l'ordre des intégrations $d\zeta d\vartheta\to d\vartheta d\zeta$. Puisque toutes les ϑ-derivées successives de $\langle\vartheta\rangle^{-2p}L^p_\zeta(a'(v\circ\psi))(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)$ convergent vers 0 quand $\langle\vartheta\rangle$ tend vers l'infini, on peut alors intégrer par parties dans ϑ de sorte que pour tout $q\in\mathbb{N}$ et $p\ge p_0$

$$g(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\langle\zeta\rangle^{-2q} L^q_\vartheta(\langle\vartheta\rangle^{-2p}L^p_\zeta(a'(v\circ\psi)))(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\, d\zeta\, d\vartheta\,.$$

En notant $h_{p,q}$ l'intégrand précédent, on voit que pour tout n-multi-indice α, $\partial^\alpha h_{p,q}$ est une combinaison linéaire de

$$e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\langle\zeta\rangle^{-2q}\langle\vartheta\rangle^{-2p-|\gamma-\gamma'|}\partial^{\alpha',\beta',\gamma'}a'\partial^{\alpha-\alpha',\beta-\beta'}v\circ\psi$$

où $|\gamma|\le 2p$, $\gamma'\le\gamma$, $|\beta|\le 2q$, $\beta'\le\beta$ et $\alpha'\le\alpha$. Un calcul avec la formule de Faa di Bruno montre que pour tout $2n$-multi-indice ν il existe $r_\nu\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N>0$, il existe $C_{\nu,N}>0$ tel que pour tout $w\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,E_z)$ et tout $(\mathrm{x},\zeta)\in\mathbb{R}^{2n}$, $\|\partial^\nu(w\circ\psi)(\mathrm{x},\zeta)\|_{E_z}\le C_{\nu,N}\langle\mathrm{x},\zeta\rangle^{r_\nu-N}\langle\zeta\rangle^{r_\nu+(r/\varepsilon)N}\sum_{|\nu'|\le|\nu|} q_{[N/\varepsilon]+1,\nu'}(w)$. De plus, on vérifie qu'il existe $K_{\alpha,p}>0$ tel que

$$\left\|\partial^{(\alpha',\beta',\gamma')}a'(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\right\|_{L(E_z)}\le C_{\alpha,p,q}\langle\mathrm{x}\rangle^{K_{\alpha,p}+\rho_1 2q}\langle\zeta\rangle^{K_{\alpha,p}+\rho_2 2q}\langle\vartheta\rangle^{c_\alpha+\rho_3 2p}\,.$$

Par conséquent, on obtient l'estimation

$$\|\partial^\alpha h_{p,q}\|\le C_{\alpha,p,q,N}\langle\mathrm{x}\rangle^{K'_{\alpha,p}+\rho_1 2q-N}\langle\zeta\rangle^{K'_{\alpha,p}+(\rho_2-1)2q+(r/\varepsilon)N}\langle\vartheta\rangle^{c_\alpha+(\rho_3-1)2p}\sum_{|\nu'|\le|\nu|} q_{[N/\varepsilon]+1,\nu'}(v)\,.$$

ou de façon équivalente, en remplaçant $K'_{\alpha,p}+\rho_1 2q-N$ by $-N$,

$$\|\partial^\alpha h_{p,q}\|\le C_{\alpha,p,q,N}\langle\mathrm{x}\rangle^{-N}\langle\zeta\rangle^{K''_{\alpha,p}+(\rho_2-1+(r/\varepsilon)\rho_1)2q+(r/\varepsilon)N}\langle\vartheta\rangle^{c_\alpha+(\rho_3-1)2p}\sum_{|\nu'|\le|\nu|} q_{[N+K'_{\alpha,p}+\rho_1 2q/\varepsilon]+1,\nu'}(v)\,.$$

En fixant, pour un N donné, p tel que $(\rho_3-1)2p+c_\alpha\le -2n$ et q tel que $K''_{\alpha,p}+(\rho_2-1+(r/\varepsilon)\rho_1)2q+(r/\varepsilon)N\le -2n$, nous obtenons le résultat. □

Le lemme suivant donne une caractérisation des noyaux régularisants dans les cas $\sigma=0$ et $\sigma\ne 0$. Si s est dans un espace de symboles et Γ est une application linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$, on notera $\mathfrak{Op}_\Gamma(s) := \mathfrak{Op}_\Gamma((\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\mapsto s(\mathrm{x},\vartheta))$. On utilisera l'espace de Fréchet $\mathcal{O}^{l,m}_{\sigma,f,z}$ de fonctions lisses a dans $C^\infty(\mathbb{R}^{3n},L(E_z))$ telles que pour tout $\nu:=(\mu,\gamma)\in\mathbb{N}^{2n}\times\mathbb{N}^n$

$$\|\partial^\nu a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\|_{L(E_z)}\le C_\nu\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l+f_1(\mu))}\langle\zeta\rangle^{f_2(\nu)}\langle\vartheta\rangle^{m+f_3(\mu)}\,.$$

On note $\mathcal{O}^{l,m}_{0,f,z} =: \mathcal{O}^m_{f_2,f_3,z}$. Clairement, $\mathfrak{Op}_\Gamma(a)$ (voir le Lemme 6.4.14) est une forme antilinéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ lorsque $a \in \mathcal{O}^{l,m}_{f,z}$ avec $m + f_3(0) < -n$.

On note F l'ensemble des fonctions $f_2 : \mathbb{N}^{3n} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $\rho < 1$ tel que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$, $f_{2,\rho,\alpha,\beta} := \sup_\gamma f_2(\alpha, \beta, \gamma) - \rho|\gamma| < \infty$.

Lemme 6.4.18. *Soit $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$, et Γ un isomorphisme topologique sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ de la forme $\Gamma = L_{\tau_1} \circ R_{\tau_2} \circ C_\Phi$ avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{O}^\times_M(\mathbb{R}^{2n}, GL(E_z))$, $\Phi \in \mathcal{O}^\times_M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$. Alors*
(i) Cas $\sigma = 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i-1) Il existe $f_3 : \mathbb{N}^{2n} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $m \leq -f_3(0) - 2n$, il existe $f_{2,m} \in F$, $a_m \in \mathcal{O}^m_{f_{2,m},f_3,z}$ tels que $K = \mathfrak{Op}_\Gamma(a_m)$.

(i-2) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ et pour tout $2n$-multi-indice ν, $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_{\nu,N} > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\|\partial^\nu K_\Gamma(\mathrm{x}, \zeta)\|_{L(E_z)} \leq C_{\nu,N} \langle\zeta\rangle^{-N}$, où $K_\Gamma := K \circ \Gamma = \widetilde{\tau}_1 K \circ \Phi \widetilde{\tau}_2 |J(\Phi)|$.

(i-3) Il existe $s \in S^{-\infty}_{0,z}$ tel que $K = \mathfrak{Op}_\Gamma(s)$.

(ii) Cas $\sigma > 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(ii-1) Il existe $f_1, f_3 : \mathbb{N}^{2n} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $m \leq -f_3(0) - 2n$, il existe $f_{2,m} \in F$ et $a_m \in \mathcal{O}^{m,m}_{\sigma,f_1,f_{2,m},f_3,z}$ tels que $K = \mathfrak{Op}_\Gamma(a_m)$.

(ii-2) $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$.

(ii-3) Il existe $s \in S^{-\infty}_z$ tel que $K = \mathfrak{Op}_\Gamma(s)$.

Démonstration. (i) L'implication *(i-3)* $\Rightarrow$ *(i-1)* est triviale. Nous allons prouver que *(i-1)* $\Rightarrow$ *(i-2)* $\Rightarrow$ *(i-3)*. Supposons *(i-1)*. Ainsi, pour tout $m \leq -2n - f_3(0)$, il existe $f_{2,m} \in F$, $a_m \in \mathcal{O}^m_{f_{2,m},f_3,z}$ tels que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$,

$$\langle K \circ \Gamma^{-1}, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \operatorname{Tr}\big(a_m(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\, u^*(\mathrm{x}, \zeta)\big)\, d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}.$$

Puisque $m \leq -2n - f_3(0)$, l'intégrale précédente est absolument convergente et on peut permuter l'ordre des intégrations. Par conséquent $\langle K \circ \Gamma^{-1}, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \operatorname{Tr}\big(U_m(\mathrm{x}, \zeta)\, u^*(\mathrm{x}, \zeta)\big)\, d\zeta\, d\mathrm{x}$ où $U_m(\mathrm{x}, \zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\, a_m(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\, d\vartheta$, On vérifie que U_m est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{2n}$. On peut en déduire que $U_m =: U$ est indépendant de m et $K \circ \Gamma^{-1}$ est une distribution qui est égale à la fonction continue U. En notant $b_m := e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\, a_m(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)$ on voit que pour tout $2n$-multi-indice $\mu := (\alpha, \beta)$, $\partial^\mu_{\mathrm{x},\zeta} b_m = e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\beta}{\beta'} (2\pi i\vartheta)^{\beta-\beta'} \partial^{\alpha,\beta',0} a_m$ et nous avons alors l'estimation

$$\|\partial^\mu b_m\| \leq C_{\mu,m} \langle\zeta\rangle^{\sup_{\beta' \leq \beta} f_{2,m}(\alpha,\beta',0)} \langle\vartheta\rangle^{m+c_\mu}$$

où $c_\mu = \sup_{\beta' \leq \beta} f_3(\alpha, \beta') + |\beta|$. En définissant $m_\mu := -2n - \sup_{|\mu'| \leq |\mu|} c_{\mu'}$, on voit que U est lisse et

$$\partial^\mu U = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \partial^\mu b_{m_\mu} d\vartheta = \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\beta}{\beta'} (2\pi i)^{|\beta-\beta'|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \vartheta^{\beta-\beta'} \partial^{\alpha,\beta',0} a_{m_\mu}(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Toutes les ϑ-dérivées de $\vartheta \mapsto \vartheta^{\beta-\beta'} \partial^{\alpha,\beta',0} a_{m_\mu}(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)$ convergent vers zéro lorsque $\|\vartheta\| \to \infty$, on peut donc intégrer par parties dans ϑ de sorte que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\partial^\mu U = \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\beta}{\beta'} (2\pi i)^{|\beta-\beta'|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \langle\zeta\rangle^{-2p} L^p_\vartheta\big(\vartheta^{\beta-\beta'} \partial^{\alpha,\beta',0} a_{m_\mu}\big)(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Puisque $a_{m_\mu} \in \mathcal{O}^{m_\mu}_{f_{2,m_\mu},f_3,z}$ et $f_{2,m_\mu,\rho_\mu,\lambda} < \infty$ pour un $\rho_\mu < 1$, on voit que l'intégrand h_p de l'intégrale précédente satisfait l'estimation

$$\|h_p(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\| \leq C_{p,\mu}\langle\zeta\rangle^{-2p+\sup_{\beta'\leq\beta} f_{2,m_\mu,\rho_\mu,\alpha,\beta'}+2p\rho_\mu}\langle\vartheta\rangle^{-2n}\,.$$

En prenant $N > 0$ et fixant p tel que $(\rho_\mu - 1)2p + \sup_{\beta'\leq\beta} f_{2,m_\mu,\rho_\mu,\alpha,\beta'} \leq -N$, on obtient finalement que $K \circ \Gamma^{-1} = U$ est lisse et satisfait pour tout $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$ et $N > 0$,

$$\left\|\partial^\mu K \circ \Gamma^{-1}(\mathrm{x},\zeta)\right\|_{L(E_z)} \leq C_{\mu,N}\langle\zeta\rangle^{-N}.$$

Pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$, $\langle K, u\rangle = \langle U, \Gamma(u)\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{Tr}(U'(\mathrm{x},\zeta)u^* \circ \Phi(\mathrm{x},\zeta))d\mathrm{x}\,d\zeta$ où $U'(\mathrm{x},\zeta) := \tau_1^*(\mathrm{x},\zeta)U(\mathrm{x},\zeta)\tau_2^*(\mathrm{x},\zeta)$.

En utilisant le changement de variable donné par le difféomorphisme Φ, on obtient

$$\langle K, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{Tr}(K(\mathrm{x},\mathrm{y})\,u^*(\mathrm{x},\mathrm{y}))\,d\mathrm{x}\,d\mathrm{y}$$

où $K(\mathrm{x},\mathrm{y}) := (|J(\Phi^{-1})|(\mathrm{x},\mathrm{y}))U' \circ \Phi^{-1}(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Le résultat s'en déduit.
Supposons maintenant *(i-2)*. Il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{F}_P$ envoit $S^{-\infty}_{0,z}$ (vu comme un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$) dans $S^{-\infty}_{0,z}$. En particulier, nous avons $s := \mathcal{F}_P(K_\Gamma) \in S^{-\infty}_{0,z}$. Un calcul montre que $\langle K, u\rangle = \langle \mathfrak{Op}_\Gamma(s), u\rangle$ pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$.
(ii) Supposons *(i-1)*. En suivant la preuve de (i), on voit qu'il est suffisant de prouver que U est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$, où $U(\mathrm{x},\zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} a_m(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,d\vartheta$ (indépendant de m). Fixons $N > 0$. Pour tout $2n$-multi-indice $\mu := (\alpha,\beta)$, $\partial^\mu_{\mathrm{x},\zeta} b_m = e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\sum_{\beta'\leq\beta}\binom{\beta}{\beta'}(2\pi i\vartheta)^{\beta-\beta'}\partial^{\alpha,\beta',0}a_m$ et nous avons l'estimation

$$\|\partial^\mu b_m\| \leq C_{\mu,m}\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma m+\sigma d_\mu}\langle\zeta\rangle^{\sup_{\beta'\leq\beta} f_{2,m}(\alpha,\beta',0)}\langle\vartheta\rangle^{m+c_\mu}$$

où $c_\mu = \sup_{\beta'\leq\beta} f_3(\alpha,\beta') + |\beta|$ et $d_\mu := \sup_{\beta'\leq\beta} f_1(\alpha,\beta')$. En définissant

$$m_{\mu,N} := \min\{-2n - \sup_{|\mu'|\leq|\mu|} c_{\mu'}, -N/\sigma - \sup_{|\mu'|\leq|\mu|} d_{\mu'}\}$$

on voit que U est lisse et

$$\partial^\mu U = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \partial^\mu b_{m_{\mu,N}}\,d\vartheta = \sum_{\beta'\leq\beta}\binom{\beta}{\beta'}(2\pi i)^{|\beta-\beta'|}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\vartheta^{\beta-\beta'}\partial^{\alpha,\beta',0}a_{m_{\mu,N}}(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,d\vartheta\,.$$

Toutes les ϑ-dérivées de $\vartheta \mapsto \vartheta^{\beta-\beta'}\partial^{\alpha,\beta',0}a_{m_{\mu,N}}(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)$ convergent vers zéro quand $\|\vartheta\| \to \infty$ on peut donc intégrer par parties en ϑ de sorte que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\partial^\mu U = \sum_{\beta'\leq\beta}\binom{\beta}{\beta'}(2\pi i)^{|\beta-\beta'|}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle}\langle\zeta\rangle^{-2p}L^p_\vartheta\big(\vartheta^{\beta-\beta'}\partial^{\alpha,\beta',0}a_{m_{\mu,N}}\big)(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\,d\vartheta\,.$$

Puisque $a_{m_{\mu,N}} \in \mathcal{O}^{m_{\mu,N},m_{\mu,N}}_{\sigma,f_1,f_{2,m_{\mu,N}},f_3,z}$ et $f_{2,m_{\mu,N},\rho_{\mu,N},\lambda} < \infty$ pour un $\rho_{\mu,N} < 1$, on voit que l'intégrand h_p de l'intégrale précédente satisfait l'estimation

$$\|h_p(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\| \leq C_{p,\mu,N}\langle\mathrm{x}\rangle^{-N}\langle\zeta\rangle^{-2p+\sup_{\beta'\leq\beta} f_{2,m_{\mu,N},\rho_{\mu,N},\alpha,\beta'}+2p\rho_{\mu,N}}\langle\vartheta\rangle^{-2n}\,.$$

En fixant p tel que $(\rho_{\mu,N} - 1)2p + \sup_{\beta'\leq\beta} f_{2,m_{\mu,N},\rho_{\mu,N},\alpha,\beta'} \leq -N$, nous obtenons finalement $\|\partial^\mu U\|_{L(E_z)} \leq C_{\mu,N}\langle\mathrm{x}\rangle^{-N}\langle\zeta\rangle^{-N}$, ce qui donne *(i-2)*. Les autres implications sont immédiates. $\square$

Corollaire 6.4.19. *Avec les mêmes hypothèses, nous avons (pour $\sigma = 0$ ou $\sigma > 0$),*

$$\mathfrak{Op}_\Gamma(S^{-\infty}_{\sigma,z}) = \cap_{l,m} \cup_{w,\kappa} \mathfrak{Op}_\Gamma(\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}) = \mathfrak{Op}_\Gamma(\Pi^{-\infty}_{\sigma,z}).$$

Lemme 6.4.20. *Soient $u \in S(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$ et β un n-multi-indice.*
(i) Pour tout triplet $f := (f_1, f_2, f_3)$ tel qu'il existe $\rho < 1$ tel que pour tout $2n$-multi-indice (α, γ), $f_{3,\rho,\alpha,\gamma} < \infty$, les formes linéaires suivantes sont continues sur $\mathcal{O}_{f,z}$

$$R_{\beta,u} : a \mapsto \int_{\mathbb{R}^{3n}} \zeta^\beta e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \operatorname{Tr}(a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\, u(\mathrm{x},\zeta))\, d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}\,,$$

$$S_{\beta,u} : a \mapsto (i/2\pi)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \operatorname{Tr}(\partial^\beta_\vartheta a(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\, u(\mathrm{x},\zeta))\, d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}\,.$$

(ii) $R_{\beta,u} = S_{\beta,u}$ sur tout espace $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$.

Démonstration. Conséquences directes de la Proposition 6.4.14 et du Lemme 6.4.12. □

Si $N \geq 1$ et β, γ, n-multi-indices, on note pour toute amplitude $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$, la fonction lisse $a_{\beta,\gamma,N}$ par $a_{\beta,\gamma,N}(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) := \int_0^1 (1-t)^N (\partial^{(0,\beta,\gamma)} a)(\mathrm{x}, t\zeta, \vartheta)\, dt$. Il est aisé de vérifier que l'application linéaire $a \mapsto a_{\beta,\gamma,N}$ est continue de $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$ dans $\Pi^{l-|\beta|,|w|+\kappa|\beta|,m-|\gamma|}_{\sigma,\kappa,z}$.

Le lemme suivant montre que la λ-quantification d'amplitudes et de symboles donnent exactement les mêmes opérateurs. Ce résultat de "réduction" d'amplitudes à des symboles sera important pour le Théorème 6.4.30 et donc pour la définition même des opérateurs pseudodifférentiels de façon λ-invariante.

Lemme 6.4.21. *(i) Pour tout $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$, $(\partial^{0,\beta,\beta} a)_{\zeta=0} \in S^{l-|\beta|,m-|\beta|}_{\sigma,z}$ pour tout n-multi-indice β.*
(ii) Soient Γ comme dans le Lemme 6.4.18 et $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$. Alors pour tout symbole $s \in S^{l,m}_{\sigma,z}$ tel que $s \sim \sum_\beta \frac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!} (\partial^{0,\beta,\beta} a)_{\zeta=0}$, il existe $r \in S^{-\infty}_{\sigma,z}$ tel que $\mathfrak{Op}_\Gamma(a) = \mathfrak{Op}_\Gamma(s + r)$. En particulier il existe un unique symbole $s(a) \in S^{l,m}_{\sigma,z}$ tel que $\mathfrak{Op}_\Gamma(a) = \mathfrak{Op}_\Gamma(s(a))$. De plus, nous avons $s(a) \sim \sum_\beta \frac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!} (\partial^{0,\beta,\beta} a)_{\zeta=0}$.
(iii) Supposons que $(M, \exp, E, d\mu)$ soit de type S_σ et ψ une $\mathcal{O}_M$-linéarisation. Soient $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$, $\lambda \in [0,1]$ et $(z, \mathfrak{b})$ une base donnée. Alors il existe un unique symbole $s_\lambda(a) \in S^{l,m}_\sigma$ tel que $\mathfrak{Op}_{\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}}(a) = (\mathfrak{Op}_\lambda(s_\lambda(a))_{z,\mathfrak{b}}$. De plus, $T_{z,\mathfrak{b},*}(s_\lambda(a)) \sim \sum_\beta \frac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!} \mu^{-1} (\partial^{0,\beta,\beta} a)_{\zeta=0}$.

Démonstration. (i) est une conséquence directe du Lemme 6.4.11 (i).
(ii) En utilisant un développement de Taylor de a en $\zeta = 0$, on voit que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$, $N \in \mathbb{N}^*$, $\langle \mathfrak{Op}_\Gamma(a), u\rangle = \sum_{0\leq|\beta|\leq N} I_\beta + \sum_{|\beta|=N+1} \frac{N+1}{\beta!} R_{\beta,N}$ où

$$I_\beta := \int_{\mathbb{R}^{3n}} \zeta^\beta e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \operatorname{Tr}\big(\tfrac{1}{\beta!}(\partial^{(0,\beta,0)} a)_{\zeta=0}(\mathrm{x},\vartheta)\Gamma(u)^*(\mathrm{x},\zeta)\big) d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}\,,$$

$$R_{\beta,N} := \int_{\mathbb{R}^{3n}} \zeta^\beta e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \operatorname{Tr}\big(a_{\beta,0,N}(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\, \Gamma(u)^*(\mathrm{x},\zeta)\big) d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}\,.$$

On obtient du Lemme 6.4.20 (ii),

$$I_\beta = \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \operatorname{Tr}\big(\tfrac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!}(\partial^{(0,\beta,\beta)} a)_{\zeta=0}(\mathrm{x},\vartheta)\Gamma(u)^*(\mathrm{x},\zeta)\big) d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}\,.$$

Soit $s \in S^{l,m}_{\sigma,z}$ un symbole tel que $s \sim \sum_\beta \frac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!}(\partial^{0,\beta,\beta}a)_{\zeta=0}$. Alors en notant

$$s_N := s - \sum_{|\beta|\leq N} \frac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!}(\partial^{0,\beta,\beta}a)_{\zeta=0} \in S^{l-(N+1),m-(N+1)}_{\sigma,z},$$

on obtient du Lemme 6.4.20 (ii) que $\mathfrak{Op}_\Gamma(a-s) = \mathfrak{Op}_\Gamma(r_N)$ où

$$r_N := \sum_{|\beta|=N+1} \frac{(N+1)(i/2\pi)^{N+1}}{\beta!} a_{\beta,\beta,N} - s_N\,.$$

On vérifie que $r_N \in \Pi^{l-(N+1),w_N,m-(N+1)}_{\sigma,\kappa,z}$ où $w_N = |w| + \kappa(N+1)$. Le Corollaire 6.4.19 appliqué à $\mathfrak{Op}_\Gamma(a-s)$ implique alors qu'il existe $r \in S^{-\infty}_{\sigma,z}$ tel que $\mathfrak{Op}_\Gamma(a) = \mathfrak{Op}_\Gamma(s+r)$. Par conséquent, il existe $s(a) \in S^{l,m}_{\sigma,z}$ tel que $\mathfrak{Op}_\Gamma(a) = (\mathfrak{Op}_\Gamma(s(a))$. L'unicité est une conséquence directe du fait que $\mathfrak{Op}_\Gamma = \Gamma^* \circ \mathcal{F}^*_P$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$.
(iii) Conséquence directe de (ii) et du fait que $(\mathfrak{Op}_\lambda(s))_{z,\mathfrak{b}} = \mathfrak{Op}_{\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}}(\mu_{z,\mathfrak{b}} s_{z,\mathfrak{b}})$. □

6.4.3 S_σ-linéarisations

Afin d'avoir un isomorphisme global entre symboles et opérateurs, un contrôle polynomial sur la linéarisation à l'infini ne suffit pas. Comme nous le verrons, un contrôle plus fort de type amplitude sur les applications $\psi^{\mathfrak{b}}_z$ et un équivalent du transport parallèle $P_{x,\xi}$ (voir Remarque 6.3.3) apparaît crucial pour le calcul pseudodifférentiel sur $(M, \exp, E)$ et la λ-invariance (voir Théorème 6.4.30).

On définit $H^w_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$ (resp. $E^w_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$), où $w \in \mathbb{R}$, $\sigma \in [0,1]$ et $\kappa \geq 0$, comme l'espace des fonctions lisses g de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathfrak{E}$ telles que pour tout $2n$-multi-indice ν, il existe $C_\nu > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\|\partial^\nu g(\mathrm{x},\zeta)\| \leq C_\nu \langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\nu|-1)}\langle\zeta\rangle^{w+\kappa(|\nu|-1)}$ (si $\nu \neq 0$) (resp. $\|\partial^\nu g(\mathrm{x},\zeta)\| \leq C_\nu \langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma|\nu|}\langle\zeta\rangle^{w+\kappa|\nu|}$).

On note $H_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E}) := \cup_{w\in\mathbb{R}} H^w_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$, $H_\sigma(\mathfrak{E}) := \cup_{\kappa\geq 0} H_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$, $E_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E}) = \cup_{w\in\mathbb{R}} E^w_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$ et $E_\sigma(\mathfrak{E}) = \cup_{\kappa\geq 0} E_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$.

Le lemme suivant décrit le comportement des espaces $E_{\sigma,\kappa}$ et $H_{\sigma,\kappa}$ sous la composition de fonctions.

Lemme 6.4.22. *(i) Soient $f \in H^{w'}_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$ (resp. $E^{w'}_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$) et $g \in H^w_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^{2n})$ telles qu'il existe $C, c > 0$, $r \geq 0$, tel que $\langle g_1(\mathrm{x},\zeta)\rangle \geq c\langle \mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^{-r}$ (si $\sigma \neq 0$) et $\langle g_2(\mathrm{x},\zeta)\rangle \leq C\langle\zeta\rangle$ pour tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, où $g =: (g_1, g_2)$. Alors $f \circ g \in H^{|w|+|w'|}_{\sigma,\kappa+|w|+r\sigma}(\mathfrak{E})$ (resp. $E^{|w'|}_{\sigma,\kappa+|w|+r\sigma}(\mathfrak{E})$).*
(ii) Si $P \in E^w_{\sigma,\kappa}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors $(\mathrm{x},\zeta) \mapsto P_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta) \in H^{w+\kappa+1}_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^n)$.
(iii) Soient $f \in G_\sigma(\mathbb{R}^n, \mathfrak{E})$ et $g \in H^w_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ telles qu'il existe $c > 0$, $r \geq 0$, tel que, si $\sigma \neq 0$, $\langle g(\mathrm{x},\zeta)\rangle \geq c\langle \mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^{-r}$ pour tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors $f \circ g \in H^{|w|}_{\sigma,\max\{r\sigma,\kappa\}+|w|}(\mathfrak{E})$. De plus, si $f \in G_\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors $df \circ g \in E^0_{\sigma,\max\{r\sigma,\kappa\}+|w|}(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}))$.

Démonstration. (i) La formule de Faa di Bruno donne pour tout $2n$-multi-indice $\nu \neq 0$,

$$\partial^\nu(f \circ g) = \sum_{1\leq|\lambda|\leq|\nu|} (\partial^\lambda f) \circ g\; P_{\nu,\lambda}(g) \tag{6.25}$$

où $P_{\nu,\lambda}(g)$ est une combinaison linéaire (avec coefficients indépendant de f et g) de fonctions de la forme $\prod_{j=1}^s (\partial^{l^j} g)^{k^j}$ où $s \in \{1, \cdots, |\nu|\}$. Les k^j et l^j sont des $2n$-multi-indices (pour

$1 \leq j \leq s$) tels que $|k^j| > 0$, $|l^j| > 0$, $\sum_{j=1}^s k^j = \lambda$ et $\sum_{j=1}^s |k^j| l^j = \nu$. Par conséquent, puisque $g \in H^w_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^{2n})$, on voit que pour chaque ν, λ avec $1 \leq |\lambda| \leq |\nu|$ il existe $C_{\nu,\lambda} > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^n$,

$$|P_{\nu,\lambda}(g)(\mathrm{x}, \zeta)| \leq C_{\nu,\lambda} \langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma(|\nu|-|\lambda|)} \langle \zeta \rangle^{w|\lambda|+\kappa(|\nu|-|\lambda|)} . \tag{6.26}$$

De plus, puisque $f \in H^{w'}_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^{2n})$ (resp. $E^{w'}_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^{2n})$), il existe $C'_\lambda > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, l'estimation

$$\left\| (\partial^\lambda f) \circ g(\mathrm{x}, \zeta) \right\| \leq C'_\lambda \langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma(|\lambda|-1)} \langle \zeta \rangle^{|w'|+(\kappa+r\sigma)(|\lambda|-1)}$$

(resp. $\left\| (\partial^\lambda f) \circ g(\mathrm{x}, \zeta) \right\| \leq C'_\lambda \langle \mathrm{x} \rangle^{-\sigma|\lambda|} \langle \zeta \rangle^{|w'|+(\kappa+r\sigma)|\lambda|}$) est valide. On déduit alors de (6.25) et (6.26) que $f \circ g$ appartient à $H^{w+|w'|}_{\sigma,\kappa+|w|+r\sigma}(\mathfrak{E})$ (resp. $E^{|w'|}_{\sigma,\kappa+|w|+r\sigma}(\mathfrak{E})$).
(ii) On note $P^{i,j}_{\mathrm{x},\zeta}$ les coefficients de la matrice $P_{\mathrm{x},\zeta}$. Chaque composante $(f^i)_{1 \leq i \leq n}$ de l'application $f := (\mathrm{x}, \zeta) \mapsto P_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta)$ est de la forme $f^i = \sum_{j=1}^n P^{i,j} \zeta_j$. On peut vérifier directement que les applications $(\mathrm{x}, \zeta) \mapsto \zeta_j$ satisfont pour tout $\nu \in \mathbb{N}^{2n}$, $\partial^\nu \zeta_j = \mathcal{O}(\langle \zeta \rangle^{1-|\nu|} \langle \mathrm{x} \rangle^{\sigma(1-|\nu|)})$. Le résultat est alors une conséquence de la règle de Leibniz.
(iii) se prouve de la même manière que (i). □

Les espaces $H_{\sigma,\kappa}$ et $E_{\sigma,\kappa}$ sont reliés aux symboles et aux amplitudes par le lemme suivant.

Lemme 6.4.23. *(i) Si $f \in E^w_{\sigma,\kappa,z}$, alors $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto f(\mathrm{x}, \zeta)$ est dans $\Pi^{0,w,0}_{\sigma,\kappa,z}$.*
(ii) Soient $s \in S^{l,m}_{\sigma,z}$, $m \in H^w_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ tels qu'il existe $C, c, r > 0$ tel que, si $\sigma \neq 0$, pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $c\langle \mathrm{x} \rangle \langle \zeta \rangle^{-r} \leq \langle m(\mathrm{x}, \zeta) \rangle \leq C \langle \mathrm{x} \rangle \langle \zeta \rangle^r$, et $P \in E^0_{\sigma,\kappa}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \in \mathbb{R}^{3n}$, $\langle P_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta) \rangle \geq c\langle \vartheta \rangle$. Alors $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto s(m(\mathrm{x}, \zeta), P_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))$ est dans $\Pi^{l,\sigma r|l|,m}_{\sigma,\kappa+|\sigma r-\kappa+w|,z}$.
(iii) Si $s \in S_\sigma(\mathbb{R}^n)$, $m \in H^w_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ tel que, si $\sigma \neq 0$, il existe $c, r > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$ $\langle m(\mathrm{x}, \zeta) \rangle \geq c\langle \mathrm{x} \rangle \langle \zeta \rangle^{-r}$, alors $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto s(m(\mathrm{x}, \zeta)) \operatorname{Id}_{L(E_z)}$ est dans $\Pi^{0,0,0}_{\sigma,\kappa+|\sigma r-\kappa+w|,z}$.
(iv) Si $a \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$ et $P \in E^0_{\sigma,\kappa}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est tel qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \in \mathbb{R}^{3n}$, $\langle P_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta) \rangle \geq c\langle \vartheta \rangle$, alors $a_P : (\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto a(\mathrm{x}, \zeta, P_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta)) \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$.

Démonstration. (i) est immédiat.
(ii) Notons $g(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := (m(\mathrm{x}, \zeta), P_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))$. Pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, on note $P^{i,j}_{\mathrm{x},\zeta}$ le coefficient (i, j) de la matrice $P_{\mathrm{x},\zeta}$. Puisque $P \in E^0_{\sigma,\kappa}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, nous avons $P^{i,j}_{\cdot,\cdot} \in E^0_{\sigma,\kappa}(\mathbb{R})$. La formule de Faa di Bruno du Théorème 6.2.11 donne pour tout $\nu \neq 0$

$$\partial^\nu (s \circ g) = \sum_{1 \leq |\lambda| \leq |\nu|} (P_{\nu,\lambda}(g)) \, (\partial^\lambda s) \circ g \tag{6.27}$$

où $P_{\nu,\lambda}(g)$ est une combinaison linéaire de $\prod_{j=1}^s (\partial^{l^j} g)^{k^j}$, où $1 \leq s \leq |\nu|$, les k^j (resp. l^j) sont des $2n$-multi-indices (resp. $3n$-multi-indices) avec $|k^j| > 0$, $|l^j| > 0$, $\sum_{j=1}^s k^j = \lambda$ et $\sum_{j=1}^s |k^j| l^j = \nu$. Notons $l^j =: (l^{j,1}, l^{j,2}, l^{j,3})$, $k^j =: (k^{j,1}, k^{j,2})$ où $l^{j,1}, l^{j,2}, l^{j,3}, k^{j,1}, k^{j,2}$ sont des n-multi-indices. Nous avons, avec $Q(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := (\mathrm{x}, \zeta)$,

$$(\partial^{l^j} g)^{k^j} = \prod_{i=1}^n (\delta_{l^{j,3},0} (\partial^{(l^{j,1}, l^{j,2})} m)_i \circ Q)^{k_i^{j,1}} \prod_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n \partial^{(l^{j,1}, l^{j,2})} P^{i,k}_{\cdot,\cdot} \, \partial^{l^{j,3}} \vartheta_k \Big)^{k_i^{j,2}}$$

et on obtient, pour un s donné, (l^j), (k^j) tels que $(\partial^{l^j} g)^{k^j} \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq s$,

$$\begin{aligned} &\text{si } l^{j,3} = 0\,, \qquad (\partial^{l^j} g)^{k^j} = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma|l^j||k^j|+\sigma|k^{j,1}|}\langle\zeta\rangle^{\kappa|l^j||k^j|-\kappa|k^{j,1}|+w|k^{j,1}|}\langle\vartheta\rangle^{|k^{j,2}|})\,,\\ &\text{si } |l^{j,3}| = 1\,, \qquad k^{j,1} = 0 \text{ et } (\partial^{l^j} g)^{k^j} = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma|l^j||k^j|+\sigma|k^j|}\langle\zeta\rangle^{\kappa|l^j||k^j|-\kappa|k^j|})\,. \end{aligned}$$

Le cas $|l^{j,3}| > 1$ est exclu puisque $k^j \neq 0$ et $(\partial^{l^j} g)^{k^j} \neq 0$. Par permutation des indices j, on peut supposer comme dans la preuve du Lemme 6.2.13 que pour $1 \leq j \leq j_1 - 1$, nous avons $l^{j,3} = 0$ et pour $j_1 \leq j \leq s$, nous avons $|l^{j,3}| = 1$, où $1 \leq j_1 \leq s+1$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{s} (\partial^{l^j} g)^{k^j} &= \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(\sum_{j=1}^{s}(|l^j|-1)|k^j|+\sum_{j=1}^{j_1-1}|k^{j,2}|)}\\ &\qquad \times \langle\zeta\rangle^{w\sum_{j=1}^{s}|k^{j,1}|+\kappa(\sum_{j=1}^{s}(|l^j|-1)|k^j|+\sum_{j=1}^{j_1-1}|k^{j,2}|)}\langle\vartheta\rangle^{\sum_{j=1}^{j_1-1}|k^{j,2}|})\,. \end{aligned}$$

On vérifie que $\sum_{j=1}^{j_1-1}|k^{j,2}| = |\lambda^2| - |\gamma|$ et $\sum_{j=1}^{s}(|l^j|-1)|k^j| = |\nu| - |\lambda|$ où $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ et $\nu = (\alpha, \beta, \gamma)$. Par conséquent,

$$P_{\nu,\lambda}(g) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\alpha+\beta|-|\lambda^1|)}\langle\zeta\rangle^{w|\lambda^1|+\kappa(|\alpha+\beta|-|\lambda^1|)}\langle\vartheta\rangle^{|\lambda^2|-|\gamma|})\,. \tag{6.28}$$

Puisqu'il existe $C, c > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$ $\langle m(\mathrm{x},\zeta)\rangle \leq C\langle \mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^r$ et $\langle m(\mathrm{x},\zeta)\rangle \geq c\langle \mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^{-r}$, on voit qu'il existe $K_\nu > 0$ tel que pour tout $1 \leq |\lambda| \leq |\nu|$ et tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\langle m(\mathrm{x},\zeta)\rangle^{\sigma(l-|\lambda^1|)} \leq K_\nu\langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-|\lambda^1|)}\langle\zeta\rangle^{\sigma r|l|+\sigma r|\lambda^1|}$. Par conséquent, on voit qu'il existe $C_\nu > 0$ tel que pour tout $1 \leq |\lambda| \leq |\nu|$ et tout $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \in \mathbb{R}^{3n}$,

$$\left\|(\partial^\lambda s)\circ g(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\right\|_{L(E_z)} \leq C_\nu\langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-|\lambda^1|)}\langle\zeta\rangle^{\sigma r|l|+\sigma r|\lambda^1|}\langle\vartheta\rangle^{m-|\lambda^2|}.$$

Ainsi, puisqu'on peut réduire la sommation dans (6.27) à des $2n$-multi-indices λ tels que $|\lambda^2| \geq |\gamma|$ (et donc $|\lambda^1| \leq |\alpha+\beta|$), nous obtenons le résultat de (6.28) et d'une vérification directe du cas $\nu = 0$.
(iii) est obenu exactement comme *(ii)* (avec $P_{\mathrm{x},\zeta} = \mathrm{Id}$), puisque $(\mathrm{x},\zeta) \mapsto \mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x})\,\mathrm{Id}_{L(E_z)} \in S^{0,0}_{\sigma,z}$. L'hypothèse $m(\mathrm{x},\zeta) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^r)$ n'est pas nécessaire puisque $l = 0$ ici.
(iv) Nous avons, en notant $g(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) := (\mathrm{x},\zeta,P_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))$, pour tout $3n$-multi-indices $\nu \neq 0$, $1 \leq |\nu'| \leq |\nu|$, $P_{\nu,\nu'}(g)$ comme combinaison linéaire de termes de la forme $\prod_{j=1}^{s}(\partial^{l^j} g)^{k^j}$, avec $\sum_{j=1}^{s}|k^j|l^j = \nu$ et $\sum_{j=1}^{s}k^j = \nu'$, en notant $k^j = (k^{j,1}, k^{j,2}), l^j = (l^{j,1}, l^{j,2})$, où $k^{j,1}$ et $l^{j,1}$ sont $2n$-multi-indices, on obtient, en suivant la preuve du *(ii)*,

$$P_{\nu,\nu'}(g) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\alpha+\beta|-|\alpha'+\beta'|)}\langle\zeta\rangle^{\kappa(|\alpha+\beta|-|\alpha'+\beta'|)}\langle\vartheta\rangle^{|\gamma'|-|\gamma|})\,.$$

Puisque $P_{\mathrm{x},\zeta} = \mathcal{O}(1)$ et $\langle P_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta)\rangle \geq \varepsilon\langle\vartheta\rangle$ on obtient le résultat. □

Définition 6.4.24. Soient $\sigma \in [0,1]$ et ψ une linéarisation sur $(M, \exp, E, d\mu)$. On dit que ψ est une S_σ-linéarisation si pour toute base $(z,\mathfrak{b})$, il existe $\kappa_{z,\mathfrak{b}} \geq 0$ tel que
(i) $\psi^{\mathfrak{b}}_z \in H_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathbb{R}^n)$ avec $\psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x},\zeta) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^r)$ pour un $r \geq 1$ et $\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$,
(ii) il existe $P^{z,\mathfrak{b}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que $P^{z,\mathfrak{b}}$ et $(P^{z,\mathfrak{b}})^{-1}$ sont dans $E^0_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et pour tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $P^{z,\mathfrak{b}}_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta) = \Upsilon^{z,\mathfrak{b}}_{1,T}(\mathrm{x},\zeta)$ et $P^{z,\mathfrak{b}}_{\mathrm{x},0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$,
(iii) $\tau^{z,\mathfrak{b}}_1$ et $(\tau^{z,\mathfrak{b}}_1)^{-1}$ sont dans $E^0_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(L(E_z))$.
On dit que $(M, \exp, E, d\mu, \psi)$ est de type S_σ si c'est le cas de $(M, \exp, E, d\mu)$ et ψ est une S_σ-linéarisation.

Il est clair qu'une S_σ-linéarisation est aussi une $\mathcal{O}_M$-linéarisation. Dans le cas S_σ, on peut vérifier les propriétés (i), (ii) et (iii) dans une base seulement :

Lemme 6.4.25. *Si $(M, \exp, E, d\mu)$ est de type S_σ et ψ est une linéarisation telle qu'il existe $(z_0, \mathfrak{b}_0)$, $\kappa_{z_0,\mathfrak{b}_0} \geq 0$, tels que les fonctions $\psi_{z_0}^{\mathfrak{b}_0}$, $\overline{\psi}_{z_0}^{\mathfrak{b}_0}$ vérifient (i), (ii) et (iii), alors ψ est une S_σ-linéarisation.*

Démonstration. Ceci est une application directe du Lemme 6.4.22. □

Remarque 6.4.26. *La condition (ii) de la Définition 6.4.24 décrit un transport parallèle abstrait en coordonnées normales. En effet, dans le cas où la linéarisation ψ est dérivée d'une connexion sur M, les fonctions lisses à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^{2n}$:*

$$P^{z,\mathfrak{b}} := (\mathrm{x}, \zeta) \mapsto M^{\mathfrak{b}}_{z,\exp\circ(n^{\mathfrak{b}}_{z,T})^{-1}(\mathrm{x},\zeta)} P_{(n^{\mathfrak{b}}_{z,T})^{-1}(\mathrm{x},\zeta)} (M^{\mathfrak{b}}_{z,(n^{\mathfrak{b}}_{z})^{-1}(\mathrm{x})})^{-1}$$

où les applications $P_{x,\xi}$ sont les isomorphismes de transport parallèle sur le fibré tangent (voir Remarque 6.3.3), satisfont pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $P^{z,\mathfrak{b}}_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta) = \Upsilon^{z,\mathfrak{b}}_{1,T}(\mathrm{x}, \zeta)$ et $P^{z,\mathfrak{b}}_{\mathrm{x},0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi, dans ce cas, (ii) est satisfaite si $P^{z,\mathfrak{b}}$ et $(P^{z,\mathfrak{b}})^{-1}$ sont dans $E^0_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ pour un $\kappa_{z,\mathfrak{b}} \geq 0$.

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, si $P^{z,\mathfrak{b}} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, GL_n(\mathbb{R}))$ satisfait (ii), alors $P^{z,\mathfrak{b}}_{\mathrm{x},t\zeta}(\zeta) = \Upsilon^{z,\mathfrak{b}}_{t,T}(\mathrm{x}, \zeta)$. On notera $P^{z,\mathfrak{b}}_t := (\mathrm{x}, \zeta) \mapsto P^{z,\mathfrak{b}}_{\mathrm{x},t\zeta}$, de sorte que $P^{z,\mathfrak{b}}_1 = P^{z,\mathfrak{b}}$ et $P^{z,\mathfrak{b}}_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi, $\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}, \zeta) = (\psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x}, t\zeta), P^{z,\mathfrak{b}}_{t,\mathrm{x},\zeta}(\zeta))$ et on définit le difféomorphisme suivant sur $\mathbb{R}^{3n}$,

$$\Xi_{t,z,\mathfrak{b}} := (\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto (\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}, \zeta), \widetilde{P}^{z,\mathfrak{b}}_{t,\mathrm{x},\zeta}(\vartheta)) \,. \tag{6.29}$$

On définit aussi la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ suivante $\widehat{\Xi}_{t,z,\mathfrak{b}} : (\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto (\psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x}, t\zeta), \widetilde{P}^{z,\mathfrak{b}}_{t,\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))$. On vérifie que $J(\Xi_{t,z,\mathfrak{b}}) = J(\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}})\,(\det(P^{z,\mathfrak{b}}_t)^{-1})$ et $J(\Xi^{-1}_{t,z,\mathfrak{b}}) = J(\Upsilon_{-t,z,\mathfrak{b}})\,(\det(P^{z,\mathfrak{b}}_t \circ \Upsilon_{-t,z,\mathfrak{b}}))$. Notons aussi que pour tout $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z}(\mathrm{y}, \mathrm{x}) = -P^{z,\mathfrak{b}}_{\mathrm{x},\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z}(\mathrm{x},\mathrm{y})}(\overline{\psi^{\mathfrak{b}}_z}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$.

Lemme 6.4.27. *Soit $(z, \mathfrak{b})$ une base donnée, $\lambda, \lambda' \in [0, 1]$ et $t \in [-1, 1]$. Supposons aussi que $(M, \exp, E, d\mu, \psi)$ soit de type S_σ. Alors*
(i) $P^{z,\mathfrak{b}}_t$, $(P^{z,\mathfrak{b}}_t)^{-1}$ sont dans $E^0_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et $\tau^{z,\mathfrak{b}}_t$, $(\tau^{z,\mathfrak{b}}_t)^{-1}$ sont dans $E^0_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(L(E_z))$.
(ii) $m^{z,\mathfrak{b}}_t := \psi^{\mathfrak{b}}_z \circ I_{1,t} \in H_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathbb{R}^n)$ et il existe $c > 0$, $r \geq 1$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\langle m^{z,\mathfrak{b}}_t(\mathrm{x}, \zeta)\rangle \geq c\langle \mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^{-r}$.
(iii) Il existe $c, \varepsilon > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\langle \psi^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x}, \zeta)\rangle \geq c\langle\zeta\rangle^{\varepsilon}\langle \mathrm{x}\rangle^{-1}$.
(iv) $\Phi_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \in H_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathbb{R}^{2n})$. En particulier $J_{\lambda,z,\mathfrak{b}} \in E_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathbb{R})$.
(v) $\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}} \in H_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathbb{R}^{2n})$. En particulier $J(\Upsilon_{t,z,\mathfrak{b}}) \in E_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathbb{R})$. De plus, il existe $C > 0$ tel que $\langle(\Upsilon^{z,\mathfrak{b}}_{t,T})(\mathrm{x}, \zeta)\rangle \leq C\langle\zeta\rangle$ pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$.
(vi) $J(\Xi_{t,z,\mathfrak{b}})$ et $J(\Xi^{-1}_{t,z,\mathfrak{b}})$ sont dans $E_{\sigma,\kappa_{z,\mathfrak{b}}}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates du Lemme 6.4.22. □

6.4.4 Opérateurs pseudodifférentiels

Hypothèse 6.4.28. *On suppose dans cette section et jusqu'à la section 6.5 que* $(M, \exp, E, d\mu, \psi)$ *est de type* S_σ.

Définition 6.4.29. Un opérateur pseudodifférentiel d'ordre l, m et de type σ est un élément de $\Psi_\sigma^{l,m} := \mathfrak{Op}_\lambda(S_\sigma^{l,m})$, où $\lambda \in [0,1]$.

D'après le Lemme 6.4.7, $S_\sigma^{l,m}$ peut être vu comme inclus dans $\mathcal{S}'(T^*M, L(E))$, donc $\mathfrak{Op}_\lambda(S_\sigma^{l,m})$ est bien défini. Le théorème suivant montre qu'il ne dépend pas de λ, et donc justifie la notation $\Psi_\sigma^{l,m}$. On note $\tau_R^{\lambda,\lambda'} := (\tau_\lambda^{z,\mathfrak{b}})^{-1} \circ \Upsilon_{\lambda'-\lambda,z,\mathfrak{b}}\, \tau_{\lambda'}^{z,\mathfrak{b}}$ et $\tau_L^{\lambda,\lambda'} := (\tau_{\lambda'-1}^{z,\mathfrak{b}})^{-1} \tau_{\lambda-1}^{z,\mathfrak{b}} \circ \Upsilon_{\lambda'-\lambda}^{z,\mathfrak{b}}$. Si $\psi = \exp$, nous avons $\tau_R^{\lambda,\lambda'} = \tau_{R,\lambda'-\lambda}$ et $\tau_L^{\lambda,\lambda'} = (\tau_{L,\lambda'-\lambda})^{-1}$ où $\tau_{L,t} := \tau_t^{z,\mathfrak{b}}$ si $t \neq 1$ et $\tau_{L,t} := (\tau_{-1}^{z,\mathfrak{b}})^{-1} \circ \Upsilon_{1,z,\mathfrak{b}}$ si $t = 1$, et $\tau_{R,t} := \tau_t^{z,\mathfrak{b}}$ si $t \neq -1$ et $\tau_{R,t} := (\tau_1^{z,\mathfrak{b}})^{-1} \circ \Upsilon_{-1,z,\mathfrak{b}}$ si $t = -1$.

Théoreme 6.4.30. *Soient* $\lambda, \lambda' \in [0,1]$ *et* $K = \mathfrak{Op}_\lambda(a)$, *avec* $a \in S_\sigma^{l,m}$. *Alors il existe (un unique)* $a' \in S_\sigma^{l,m}$ *tel que* $K = \mathfrak{Op}_{\lambda'}(a')$. *De plus, pour toute base* $(z, \mathfrak{b})$,

$$a'_{z,\mathfrak{b}} \sim \sum_\beta \frac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!} \left(\partial^{(0,\beta,\beta)} \tau_L^{\lambda,\lambda'} a_{\lambda'-\lambda}^{z,\mathfrak{b}} \tau_R^{\lambda,\lambda'}\right)_{\zeta=0}$$

où $a_{z,\mathfrak{b}} := T_{z,\mathfrak{b},*}(a)$, $a'_{z,\mathfrak{b}} := T_{z,\mathfrak{b},*}(a')$, *et* $a_t^{z,\mathfrak{b}}$ *est l'amplitude définie pour tout* $t \in [-1,1]$ *par*

$$a_t^{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := \frac{\mu_{z,\mathfrak{b}}(m_t^{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\zeta))}{\mu_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x})} |J\Xi_{t,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\zeta)| \left(a_{z,\mathfrak{b}} \circ \widehat{\Xi}_{t,z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\right).$$

Démonstration. Fixons une base $(z, \mathfrak{b})$ et notons $a_{z,\mathfrak{b}} := T_{z,\mathfrak{b},*}(a)$. Nous avons vu à la Remarque 6.4.16 que $\mathfrak{Op}_\lambda(a)_{z,\mathfrak{b}} = \mathfrak{Op}_{\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}}(\mu a_{z,\mathfrak{b}}))$. Ainsi, pour tout $u \in \mathcal{S}(M \times M, L(E))$, nous avons avec $u_{z,\mathfrak{b}} := T_{z,\mathfrak{b},M^2}(u) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$,

$$\langle K, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} \operatorname{Tr}\left(\mu a_{z,\mathfrak{b}}(\mathrm{x},\vartheta)\, (\Gamma_{\lambda,z,\mathfrak{b}}(u_{z,\mathfrak{b}})(\mathrm{x},\zeta))^*\right) d\zeta\, d\vartheta\, d\mathrm{x}\,.$$

Supposons $m \leq -2n$ de sorte que l'intégrale soit absolument convergente. On procède au changement de variable donné par le difféomorphisme $\Xi_{\lambda'-\lambda}^{z,\mathfrak{b}}$ de $\mathbb{R}^{3n}$ ($\Xi_{t,z,\mathfrak{b}}$ est défini à l'équation (6.29)). On obtient $\langle K, u\rangle = \langle \mathfrak{Op}_{\lambda',z,\mathfrak{b}}(\mu\tau_L^{\lambda,\lambda'} a_{\lambda'-\lambda}^{z,\mathfrak{b}} \tau_R^{\lambda,\lambda'}), u_{z,\mathfrak{b}}\rangle$. On vérifie avec les Lemmes 6.4.27 et 6.4.23 que $\tau_L^{\lambda,\lambda'} a_{\lambda'-\lambda}^{z,\mathfrak{b}} \tau_R^{\lambda,\lambda'}$ est une amplitude dans $\Pi_{\sigma,\kappa,z}^{l,w,m}$ pour un $\kappa \geq 0$ et un $w \in \mathbb{R}$. On voit aussi que $a_{z,\mathfrak{b}} \mapsto \mu\tau_L^{\lambda,\lambda'} a_{\lambda'-\lambda}^{z,\mathfrak{b}} \tau_R^{\lambda,\lambda'}$ est continue sur $S_{\sigma,z}^{l,m}$, ce qui implique, en utilisant la Proposition 6.4.14 (*ii*) et le résultat de densité du Lemme 6.4.6, l'égalité $\langle K, u\rangle = \langle \mathfrak{Op}_{\lambda',z,\mathfrak{b}}(\mu\tau_L^{\lambda,\lambda'} a_{\lambda'-\lambda}^{z,\mathfrak{b}} \tau_R^{\lambda,\lambda'}), u_{z,\mathfrak{b}}\rangle$, pour tout ordre m du symbole a. Le résultat découle maintenant du Lemme 6.4.21 (*iii*). □

Proposition 6.4.31. *Pour chaque* $\lambda \in [0,1]$ *et* $l, m \in \mathbb{R}$, σ_λ *est un isomorphisme linéaire de* $\Psi_\sigma^{l,m}$ *vers* $S_\sigma^{l,m}$ *et* $\sigma_\lambda(A^\dagger) = (\sigma_{1-\lambda}(A))^*$ *pour tout* $A \in \Psi_\sigma^{l,m}$. *En particulier un opérateur pseudodifférentiel* A *est formellement auto-adjoint (i.e* $A = A^\dagger$ *en tant qu'opérateurs sur* $\mathcal{S}$*) si et seulement si son symbole de Weyl* $\sigma_W(A)$ *est auto-adjoint (en tant que section de* $L(E) \to T^*M$*).*

Démonstration. Le fait que σ_λ soit un isomorphisme linéaire de $\Psi_\sigma^{l,m}$ vers $S_\sigma^{l,m}$ est une conséquence du Théorème 6.4.30 et du fait que σ_λ soit un isomorphisme topologique de l'espace $\mathcal{S}'(M \times M, L(E))$ vers $\mathcal{S}'(T^*M, L(E))$. On vérifie que pour tout $T \in \mathcal{S}'(T^*M, L(E))$, $\mathfrak{Op}_\lambda(T)^\dagger = \mathfrak{Op}_{1-\lambda}(T^*)$ qui est une conséquence directe du fait que $\Phi_\lambda(x, -\xi) = j \circ \Phi_{1-\lambda}(x, \xi)$ où $j(x, y) = (y, x)$. □

Proposition 6.4.32. *Tout opérateur de $\Psi_\sigma^{l,m}$ est régulier. De plus, pour tout $A \in \Psi_\sigma^{l,m}$ et $v \in \mathcal{S}$, nous avons*

$$A(v) \,:\, x \mapsto \int_{T_x^*(M)} d\mu_x^*(\theta) \int_{T_x(M)} d\mu_x(\xi)\; e^{2\pi i\langle\theta,\xi\rangle}\, \sigma_0(A)(x,\theta)\, \tau_{-1}^{-1}(x,\xi)\, v(\psi_x^{-\xi})\,.$$

Démonstration. Soient $A \in \Psi_\sigma^{l,m}$ et $a := \sigma_0(A)$. Ainsi, pour toute base $(z,\mathfrak{b})$, $A_{z,\mathfrak{b}} = \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(\mu a_{z,\mathfrak{b}})$ donc d'après les Lemmes 6.4.17, 6.4.27 (ii) et (iii), $A_{z,\mathfrak{b}}$ est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ dans lui-même. D'après la Proposition 6.4.31, $A^\dagger$ est un opérateur pseudodifférentiel dans $\Psi_\sigma^{l,m}$, donc nous avons $(A^\dagger)_{z,\mathfrak{b}}$ continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$ dans lui-même. Le résultat s'en déduit. □

6.4.5 Lien avec le calcul pseudodifférentiel standard sur $\mathbb{R}^n$ et continuité L^2

On suppose dans cette section que E est le fibré scalaire. Si $A \in \Psi_\sigma$, alors $A_{z,\mathfrak{b}}$ appartient à l'espace, noté $\Psi_{\sigma,\psi}$, des opérateurs réguliers B sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de la forme

$$B(v)(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} a(\mathrm{x},\vartheta) v(\psi_z^{\mathfrak{b}}(\mathrm{x},-\zeta)) d\zeta d\vartheta$$

où $a \in S_\sigma^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. On étudie dans cette section une condition suffisante sur ψ, telle que cet espace $\Psi_{\sigma,\psi}$ soit égal à l'algèbre usuelle $\Psi_{\sigma,std}$ des opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$ avec la linéarisation standard $\psi(x,\zeta) = x + \zeta$. Ici, $\Psi_{0,std}$ correspond au calcul de Hörmander [81] sur $\mathbb{R}^n$ et $\Psi_{1,std}$ au SG-calcul sur $\mathbb{R}^n$.

On notera $\psi := \psi_z^{\mathfrak{b}}$, $V_{\mathrm{x}}(\zeta) := -\psi(\mathrm{x},-\zeta) + \mathrm{x}$,

$$M_{\mathrm{x},\zeta} := [\int_0^1 \partial_j (V_x^{-1})^i(t\zeta) dt]_{i,j}\,, \qquad N_{\mathrm{x},\zeta} := [\int_0^1 \partial_j V_x^i(t\zeta) dt]_{i,j}.$$

On considère l'hypothèse suivante, notée (H_V):
(i) il existe $\varepsilon, \delta, \eta > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|\zeta\| \le \varepsilon\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma\eta}$, nous avons $\det M_{\mathrm{x},\zeta} \ge \delta$ et $\det N_{\mathrm{x},\zeta} \ge \delta$,
(ii) les fonctions $(dV_{\mathrm{x}})_{\mathrm{x},\zeta}$ et $(dV_{\mathrm{x}}^{-1})_{\mathrm{x},\zeta}$ sont dans $E_\sigma^0(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Proposition 6.4.33. *Si l'hypothèse (H_V) est vérifiée, nous avons $\Psi_{\sigma,\psi} = \Psi_{\sigma,std}$.*

Posons $\chi_{\varepsilon,\eta}(\mathrm{x},\zeta) := b(\frac{\|\zeta\|^2}{\varepsilon^2\langle\mathrm{x}\rangle^{2\sigma\eta}})$ où $b \in C_c^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ est telle que $b = 0$ sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$ et $b = 1$ sur $[-1/4, 1/4]$.

Lemme 6.4.34. *Supposons (H_V). Si $a \in S_\sigma^{l,m}(\mathbb{R}^{2n})$, alors l'application*

$$a_{\chi,M} : (\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto \chi_{\varepsilon,\eta}(\mathrm{x},\zeta) a(\mathrm{x}, \widetilde{M}_{\mathrm{x},\zeta}\vartheta) |J(V_{\mathrm{x}}^{-1}|(\zeta)\, (\det M_{\mathrm{x},\zeta})^{-1}$$

est une amplitude dans $\cup_{k,w}\, \Pi_{\sigma,\kappa,z}^{l,w,m}(\mathbb{R}^{3n})$. De façon similaire,

$$a_{\chi,N} : (\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto \chi_{\varepsilon,\eta}(\mathrm{x},\zeta) a(\mathrm{x}, \widetilde{N}_{\mathrm{x},\zeta}\vartheta) |J(V_{\mathrm{x}})|(\zeta)\, (\det N_{\mathrm{x},\zeta})^{-1}$$

est dans $\bigcup_{k,w} \Pi_{\sigma,\kappa,z}^{l,w,m}(\mathbb{R}^{3n})$.

Démonstration. Conséquences du Lemme 6.4.23 (ii) et de la Proposition 6.5.4. □

Démonstration de la Proposition 6.4.33. Supposons que $a \in S^{l,m}_{\sigma}(\mathbb{R}^{2n})$ et définissons A comme l'opérateur dans $\Psi_{\sigma,\psi}$ avec symbole normal a. Pour tout $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$

$$A(v)(\mathrm{x}) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} a(\mathrm{x},\vartheta) v(\psi(\mathrm{x},-\zeta)) d\zeta d\vartheta\,.$$

Supposons d'abord que $a \in S^{-\infty}_{\sigma}(\mathbb{R}^{2n})$. Après un changement de variables, et un découpage de l'intégrale en deux parties $A(v)(\mathrm{x}) = A_1(v)(\mathrm{x}) + A_2(v)(\mathrm{x})$ où

$$\begin{aligned} A_1(v)(\mathrm{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,M_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta)\rangle} \chi_{\varepsilon,\eta}(\mathrm{x},\zeta) a(\mathrm{x},\vartheta) |J(V_{\mathrm{x}}^{-1})|(\zeta) v(\mathrm{x}-\zeta) d\zeta d\vartheta\,, \\ A_2(v)(\mathrm{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,V_{\mathrm{x}}^{-1}(\zeta)\rangle} (1-\chi_{\varepsilon,\eta})(\mathrm{x},\zeta) a(\mathrm{x},\vartheta) |J(V_{\mathrm{x}}^{-1})|(\zeta) v(\mathrm{x}-\zeta) d\zeta d\vartheta\,, \end{aligned}$$

nous permutons dans A_1 les intégrations $d\zeta$ et $d\vartheta$ et procédons à un changement de variables ϑ, alors que dans A_2 on intègre par parties en ϑ en utilisant (6.23) de sorte que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_1(v)(\mathrm{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,\zeta\rangle} a_{\chi,M}(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) v(\mathrm{x}-\zeta) d\zeta d\vartheta\,, \\ A_2(v)(\mathrm{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\vartheta,V_{\mathrm{x}}^{-1}(\zeta)\rangle} (1-\chi_{\varepsilon,\eta})(\mathrm{x},\zeta)\, {}^t M_{\vartheta}^{p,V_{\mathrm{x}}^{-1}(\zeta)}(a) |J(V_{\mathrm{x}}^{-1})|(\zeta) v(\mathrm{x}-\zeta) d\zeta d\vartheta\,. \end{aligned}$$

Par conséquent avec le Lemme 6.4.34, et avec la densité de $S^{-\infty}_{\sigma}(\mathbb{R}^{2n})$ dans $S^{l,m}_{\sigma}(\mathbb{R}^{2n})$, on voit que A est la somme de deux opérateurs pseudodifférentiels dans $\Psi_{\sigma,std}$: $A = A_\chi + R$ où $R \in \Psi^{-\infty}_{\sigma,std}$ et A_χ a $a_{\chi,M}$ comme amplitude standard. L'implication dans l'autre sens est similaire. □

Remarque 6.4.35. *Dans le cas d'un opérateur pseudodifférentiel avec contrôle local sur des parties compactes sur la variable x et avec ψ venant d'une connection, en coupant l'intégrale selon la variable ζ, nous avons en fait $\Psi_{\sigma,\psi}$ égal à $\Psi_{\sigma,std}$ modulo des opérateurs régularisants (voir [125]).*

Par conséquent, on voit que si l'hypothèse (H_V) est satisfaite pour une base $(z,\mathfrak{b})$, alors $\Psi_{\sigma,\psi}(= \Psi_{\sigma,std})$ est stable sous la composition d'opérateurs et la formule de composition des symboles est donnée par une quadruple sommation asymptotique.

Nous allons montrer dans la section suivante que l'on peut aussi obtenir un résultat de stabilité sous composition directement, sans réduction au calcul standard sur $\mathbb{R}^n$. Ceci permettra d'obtenir une formule de composition de symboles sur $\Psi_{\sigma,\psi}$, généralisant celle de $\Psi_{\sigma,std}$.

Proposition 6.4.36. *Si (H_V) est satisfaite pour la fonction V_{x}^{-1} dans une base $(z,\mathfrak{b})$, alors tout opérateur pseudodifférentiel sur M d'ordre $(0,0)$ s'étend en un opérateur borné sur $L^2(M,d\mu)$.*

Démonstration. Puisque (H_V) est satisfaite pour V_{x}^{-1}, la preuve de la proposition précédente implique $\Psi^{0,0}_{\sigma,\psi} \subseteq \Psi^{0,0}_{\sigma,std}$, donc le résultat découle de la L^2-continuité des opérateurs pseudodifférentiels standard sur $\mathbb{R}^n$ [81]. □

6.4.6 Composition des opérateurs pseudodifférentiels

L'objectif de cette section est de montrer que les opérateurs pseudodifférentiels de Ψ^{∞}_{σ} sont stables par composition sans utiliser l'hypothèse de la section précédente, et d'obtenir une formule de composition de symboles correspondante. Nous allons adapter à notre situation une

technique utilisée par Coriasco [42], Ruzhansky et Sugimoto [117, 119], pour les opérateurs Fourier intégraux.

Notons pour $(x,\xi) \in TM$ et $\xi' \in T_{\psi_x^{-}\xi}(M)$, $\psi_{x,\xi,\xi'} := \psi^{-\xi'}_{\psi_x^{-}\xi}$, $r_x(\xi,\xi') := \psi_x^{-1}(\psi_{x,\xi,\xi'})$ et $q_x(\xi,\xi') := \psi^{-1}_{\psi_{x,\xi,\xi'}}(\psi_x^{-\xi})$. On définit la variété de dimension $2n$:

$$V_x := \{\, (\xi,\xi') \in T_x(M) \times \cup_{y\in M} T_y(M) \mid \xi' \in T_{\psi_x^{-}\xi}(M) \,\}.$$

Chaque V_x est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ via l'application $n^{\mathfrak{b}}_{z,V_x}(\xi,\xi') := (M^{\mathfrak{b}}_{z,x}(\xi), M^{\mathfrak{b}}_{z,\psi_x^{-}\xi}(\xi'))$, et possède un difféomorphisme involutif canonique R_x défini par

$$R_x : (\xi,\xi') \mapsto (r_x(\xi,\xi'), q_x(\xi,\xi'))\,.$$

Dans ce qui suit, on fixe une base $(z,\mathfrak{b})$, et on note ψ la fonction $m^{z,\mathfrak{b}}_{-1}$. On note

$$\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'} := \psi(\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta')\,.$$

Pour chaque $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, $R_{\mathrm{x}} := n^{\mathfrak{b}}_{z,V_{(n^{\mathfrak{b}}_z)^{-1}(\mathrm{x})}} \circ R_{(n^{\mathfrak{b}}_z)^{-1}(\mathrm{x})} \circ (n^{\mathfrak{b}}_{z,V_{(n^{\mathfrak{b}}_z)^{-1}(\mathrm{x})}})^{-1}$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^{2n}$, et on définit $R_{\mathrm{x}} =: (r_{\mathrm{x}}, q_{\mathrm{x}})$, $r = r^{z,\mathfrak{b}} := (\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto r_{\mathrm{x}}(\zeta,\zeta')$ et $q = q^{z,\mathfrak{b}} := (\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto q_{\mathrm{x}}(\zeta,\zeta')$. Remarquons que $r_{\mathrm{x}}(\zeta,\zeta') = -\overline{\psi}^{\mathfrak{b}}_z(\mathrm{x},\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'}) =: \overline{\psi}_{\mathrm{x}} \circ \psi_{\psi_{\mathrm{x}}(\zeta)}(\zeta')$ et $q_{\mathrm{x}}(\zeta,\zeta') = -P^{z,\mathfrak{b}}_{-1,\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'}(\zeta')$. L'application $r_{\mathrm{x},\zeta} : \zeta' \mapsto r_{\mathrm{x}}(\zeta,\zeta')$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ tel que $r^{-1}_{\mathrm{x},\zeta} = r_{\psi_{\mathrm{x}}(\zeta),\overline{\psi}_{\psi(\mathrm{x},\zeta)}(\mathrm{x})}$ de sorte que $(dr_{\mathrm{x},\zeta})^{-1}_{\zeta'} = (dr_{\psi_{\mathrm{x}}(\zeta),\overline{\psi}_{\psi(\mathrm{x},\zeta)}(\mathrm{x})})_{r_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')}$. On utilisera la notation $\tau := (\tau^{z,\mathfrak{b}}_{-1})^{-1}$.

On note $s(\mathrm{x},\zeta,\zeta') := r(\mathrm{x},\zeta,\zeta') - \zeta$. Nous avons $s(\mathrm{x},\zeta,\zeta') = s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')$ où $s_{\mathrm{x},\zeta} = T_{-\zeta} \circ \overline{\psi}_{\mathrm{x}} \circ \psi_{\psi_{\mathrm{x}}(\zeta)}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $s_{\mathrm{x},\zeta}(0) = 0$. On définit

$$\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') := r_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') - \zeta - (dr_{\mathrm{x},\zeta})_0(\zeta')$$

de sorte que $\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(0) = 0$ et $(d\varphi_{\mathrm{x},\zeta})_0 = 0$, et

$$V(\mathrm{x},\zeta,\zeta') := (dr_{\mathrm{x},\zeta})_{\zeta'}$$

comme fonction lisse de $\mathbb{R}^{3n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $(\mathrm{x},\zeta) \mapsto L_{\mathrm{x},\zeta} := -\,{}^t(dr_{\mathrm{x},\zeta})_0$.

On définit $\mathcal{O}^{l,w_0,w_1}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_0,\varepsilon_1,c}(\mathfrak{E})$, où $c \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{R}$, $w := (w_0,w_1) \in \mathbb{R}^2_+$, $\varepsilon := (\varepsilon_0,\varepsilon_1)$, $\varepsilon_0 \geq 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\sigma \in [0,1]$ et $\kappa \geq 0$, comme l'espace des fonctions lisses g de $\mathbb{R}^{3n}$ dans $\mathfrak{E}$ telles que pour tout $3n$-multi-indice $\nu = (\mu,\gamma) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{N}^n$, il existe $C_\nu > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \in \mathbb{R}^{3n}$, $\|\partial^\nu g(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\| \leq C_\nu \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-|\mu|-\varepsilon_1|\gamma|_c)} \langle\zeta\rangle^{w_0+\kappa|\mu|+\varepsilon_0|\gamma|} \langle\zeta'\rangle^{w_1+\kappa|\nu|}$. Ici, nous avons noté $|\gamma|_c := 0$ si $|\gamma| < c$ et $|\gamma|_c := |\gamma| - c$ si $|\gamma| \geq c$. On pose $\mathcal{O}_{\sigma,\kappa,\varepsilon}(\mathfrak{E}) := \cup_{c,l,w} \mathcal{O}^{l,w}_{\sigma,\kappa,\varepsilon,c}(\mathfrak{E})$. On vérifie que pour tout multi-indices γ,γ' et $c,c' \in \mathbb{N}$, $|\gamma|_c + |\gamma'|_c \geq |\gamma+\gamma'|_{c+c'}$, et $|\gamma+\gamma'|_c \geq |\gamma|_c + |\gamma'|_c$. Ainsi, $\mathcal{O}_{\sigma,\kappa,\varepsilon}(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_{\sigma,\kappa,\varepsilon}(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{O}_{\sigma,\kappa,\varepsilon,z} := \mathcal{O}_{\sigma,\kappa,\varepsilon}(L(E_z))$ sont des algèbres (graduées par les paramètres c, l, w_0 et w_1) et $\partial^\nu \mathcal{O}^{l,w}_{\sigma,\kappa,\varepsilon,c}(\mathfrak{E}) \subseteq \mathcal{O}^{l-|\mu|-\varepsilon_1|\gamma|_c,w_0+\kappa|\mu|+\varepsilon_0|\gamma|,w_1+\kappa|\nu|}_{\sigma,\kappa,\varepsilon,c}(\mathfrak{E})$. Si $f \in \mathcal{O}^{0,w}_{\sigma,\kappa,\varepsilon,c}(\mathfrak{E})$, alors $(\mathrm{x},\zeta) \mapsto f(\mathrm{x},\zeta,0) \in E^{w_0}_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$, et si $f \in \mathcal{O}^{l,w}_{\sigma,\kappa,\varepsilon,c,z}$, alors $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto f(\mathrm{x},\zeta,0) \in \Pi^{l,w_0,0}_{\sigma,\kappa,z}$. Remarquons que tout monôme de la forme $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \zeta'^{\beta}$ où $\beta \in \mathbb{N}^n$, est dans $\mathcal{O}^{0,0,|\beta|}_{\sigma,\kappa,\varepsilon,|\beta|}(\mathbb{R})$ pour tout $\kappa \geq 0$ et $\varepsilon_0 \geq 0$, $\varepsilon_1 > 0$.

Dans le cas d'une géométrie S'_σ, nous avons seulement besoin d'un contrôle polynomial des fonctions $\overline{\psi}^{\mathfrak{b}}_z$. Il apparaît que pour la question de la composition, un contrôle plus fort sur ces fonctions est important.

Définition 6.4.37. L'hypothèse (C_σ) est satisfaite s'il existe une base $(z, \mathfrak{b})$, $(\kappa_v, w_v) \in \mathbb{R}^2_+$ avec $\kappa_v \geq 1$, et $\varepsilon_v \in]0,1[$, tels que

$$V \in \mathcal{O}^{0,0,w_v}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,0}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\,, \quad \text{et} \quad (d\psi^{\mathfrak{b}}_{z,\mathrm{x}})_\zeta,\ (d\overline{\psi}^{\mathfrak{b}}_{z,\mathrm{x}})_\mathrm{y} = \mathcal{O}(1)\,. \tag{6.30}$$

En particulier, (C_σ) implique que $(dr_{\mathrm{x},\zeta})_0$ et donc L sont dans $E^0_{\sigma,\kappa_v}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

On note $\mathcal{R}^{w_0,w_1}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1}(\mathfrak{E})$ $(\varepsilon_1 > 0)$ l'espace des fonctions lisses g telles que pour tout $\nu = (\mu,\gamma) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{N}^n$ non nul, $\partial^\nu g = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(1-|\mu|-\varepsilon_1|\gamma|)}\langle\zeta\rangle^{w_0+\kappa(|\nu|-1)}\langle\zeta'\rangle^{w_1+\kappa(|\nu|-1)})$. Il resulte de (C_σ) que $r \in \cup_{w_0,w_1}\mathcal{R}^{w_0,w_1}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v/2}(\mathbb{R}^n)$.

Le lemme suivant donne le lien entre les espaces $\mathcal{O}$, $\mathcal{R}$, H, E et leurs comportement sous la composition.

Lemme 6.4.38. *(i) Soient $f \in H^w_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$ (resp. $E^w_{\sigma,\kappa}(\mathfrak{E})$) et $g \in \mathcal{R}^{w_0,w_1}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1}(\mathbb{R}^{2n})$ telles que*

$$g_2(\mathrm{x},\zeta,\zeta') = \mathcal{O}(\langle\zeta\rangle^{k_2}\langle\zeta'\rangle^{k_2'})$$

pour un $(k_2,k_2') \in \mathbb{R}^2_+$ et, si $\sigma \neq 0$, $\langle g_1(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\rangle \geq c\langle\mathrm{x}\rangle\langle\zeta\rangle^{-k_1}\langle\zeta'\rangle^{-k_1'}$, pour un $(k_1,k_1') \in \mathbb{R}^2_+$ et $c > 0$. Alors, $f \circ g \in \mathcal{R}^{w_0+k_2w,w_1+k_2'w}_{\sigma,\kappa_H,\varepsilon_1}(\mathfrak{E})$ (resp. $\mathcal{O}^{0,k_2w,k_2'w}_{\sigma,\kappa_E,\kappa_E,\varepsilon_1,0}(\mathfrak{E})$) où κ_H,κ_E sont dans $\mathbb{R}^*_+$.
(ii) $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto (\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta') \in \mathcal{R}^{w_\psi,0}_{\sigma,\kappa_\psi,1}(\mathbb{R}^{2n})$ et $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \mathrm{x}^{\zeta,\zeta'} \in \mathcal{R}_{\sigma,\kappa_\psi,1}$ pour un $(\kappa_\psi,w_\psi) \in \mathbb{R}^2_+$.
(iii) Les fonctions q, $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto (P^{z,\mathfrak{b}}_{-1,\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'})^{-1}$ et $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \det(P^{z,\mathfrak{b}}_{-1,\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'})^{-1}$ sont respectivement dans $\mathcal{R}_{\sigma,\kappa_q,1}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{O}^{0,0,0}_{\sigma,\kappa_q,\kappa_q,1,0}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et $\mathcal{O}^{0,0,0}_{\sigma,\kappa_q,\kappa_q,1,0}(\mathbb{R})$, pour un $\kappa_q \geq 0$. De plus, il existe $C > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \in \mathbb{R}^{3n}$, $\|q_\mathrm{x}(\zeta,\zeta')\| \leq C\langle\zeta'\rangle$.
(iv) $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \tau(\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'}, q_\mathrm{x}(\zeta,\zeta'))$ est dans $\mathcal{O}^{0,0,0}_{\sigma,\kappa_\tau,\kappa_\tau,1,0,z}$ pour un $\kappa_\tau \geq 0$.

Démonstration. Conséquences directes de la formule de Faa di Bruno. □

Lemme 6.4.39. *Supposons (C_σ). Alors*
(i) $s,\varphi \in \mathcal{O}^{0,0,w_s}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,1}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{O}^{-\varepsilon_v,\varepsilon_v,w_\varphi}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,2}(\mathbb{R}^n)$ où $w_s := w_v + 1$ et $w_\varphi := 2 + w_v + \kappa_v$.
(ii) $V = (dr_{\mathrm{x},\zeta})_{\zeta'}$ et $(dr_{\mathrm{x},\zeta})^{-1}_{\zeta'}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^{3n}$.
(iii) La fonction $J(R) : (\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto J(R_\mathrm{x})(\zeta,\zeta')$ est dans $\cup_{\kappa,w_0,w_1,\varepsilon_0,\varepsilon_1}\mathcal{O}^{0,w_0,w_1}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_0,\varepsilon_1,0}(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \tau(\mathrm{x}, r_\mathrm{x}(\zeta,\zeta'))$ est dans $\mathcal{O}^{0,0,0}_{\sigma,\kappa_\tau,\kappa_\tau,\varepsilon_v/2,0,z}$ pour $\kappa_\tau \geq 0$.

Démonstration. *(i)* Nous avons l'égalité $s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') = \sum_{i=1}^n \zeta_i' \int_0^1 \partial_{\zeta_i'} r_{\mathrm{x},\zeta}(t\zeta')\,dt$. Puisque $V \in \mathcal{O}^{0,0,w_v}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,0}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ chaque fonction $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \int_0^1 \partial_{\zeta_i'} r_{\mathrm{x},\zeta}(t\zeta')\,dt$ est dans $\mathcal{O}^{0,0,w_v}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,0}(\mathbb{R}^n)$ et alors, puisque $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \zeta_i' \in \mathcal{O}^{0,0,1}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,1}(\mathbb{R})$, on voit que $s \in \mathcal{O}^{0,0,w_s}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,1}(\mathbb{R}^n)$. Nous avons aussi

$$\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') = \sum_{|\beta|=2} \tfrac{2}{\beta!}(\zeta')^\beta \int_0^1 (1-t)\,\partial^\beta_{\zeta'} r_{\mathrm{x},\zeta}(t\zeta')\,dt$$

et chaque fonction $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto \int_0^1 (1-t)\,\partial^\beta_{\zeta'} r_{\mathrm{x},\zeta}(t\zeta')\,dt$ est dans $\mathcal{O}^{-\varepsilon_v,\varepsilon_v,w_v+\kappa_v}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,0}(\mathbb{R}^n)$. Avec $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \mapsto (\zeta')^\beta \in \mathcal{O}^{0,0,2}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,2}(\mathbb{R})$, on obtient $\varphi \in \mathcal{O}^{-\varepsilon_v,\varepsilon_v,w_\varphi}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,2}(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Conséquence directe de (C_σ) et des égalités suivantes pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \in \mathbb{R}^{3n}$,

$$(dr_{\mathrm{x},\zeta})_{\zeta'} = (d\overline{\psi}_\mathrm{x})_{\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'}}(d\psi_{\psi_\mathrm{x}(\zeta)})_{\zeta'}\ ,\ (dr_{\mathrm{x},\zeta})^{-1}_{\zeta'} = (d\overline{\psi}_{\psi_\mathrm{x}(\zeta)})_{\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'}}(d\psi_\mathrm{x})_{r_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')}.$$

(iii) La première assertion découle du Lemme 6.4.38 *(ii)*. La deuxième assertion découle du Lemme 6.4.38 *(i)* et de l'estimation $r_\mathrm{x}(\zeta,\zeta') = \mathcal{O}(\langle\zeta\rangle\langle\zeta'\rangle^{w_v})$. □

Nous allons utiliser une généralisation à quatre variables des espaces d'amplitudes $\Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$. On définit $\widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,m}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}$ $(0<\varepsilon_1\leq 1)$ comme l'espace des fonctions lisses $a\in C^\infty(\mathbb{R}^{4n},L(E_z))$ telles que pour tout $4n$-multi-indice $(\nu,\delta)\in\mathbb{N}^{3n}\times\mathbb{N}^n$, (avec $\nu=(\mu,\gamma)\in\mathbb{N}^{2n}\times\mathbb{N}^n$) il existe $C_{\nu,\delta}>0$ tel que pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta)\in\mathbb{R}^{4n}$,

$$\left\|\partial^{(\nu,\delta)}a(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta)\right\|_{L(E_z)}\leq C_{\nu,\delta}\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-|\mu|-\varepsilon_1|\gamma|)}\langle\zeta\rangle^{w_0+\kappa|\nu|}\langle\zeta'\rangle^{w_1+\kappa|\nu|}\langle\vartheta\rangle^{m-|\delta|}.$$

Ces espaces sont naturellement des espaces de Fréchet et forment une algèbre topologique graduée.

Lemme 6.4.40. *(i) Si $a\in\widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,m}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}$, alors $a_{\zeta'=0}:(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\mapsto a(\mathrm{x},\zeta,0,\vartheta)$ est dans $\Pi^{l,w_0,m}_{\sigma,\kappa,z}$.*
(ii) Si $h\in\mathcal{O}^{l,w_0,w_1}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_0,\varepsilon_1,0,z}$, alors $(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta)\mapsto h(\mathrm{x},\zeta,\zeta')$ est dans $\widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,0}_{\sigma,\max\{\kappa,\varepsilon_0\},\varepsilon_1,z}$.
(iii) Il existe $\kappa_\Xi,k_1\geq 0$ tel que pour tout $b\in S^{l,m}_{\sigma,z}$, l'application $b\circ\widetilde{\Xi}$, où

$$\widetilde{\Xi}(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta):=(\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'},-\widetilde{P}^{z,\mathfrak{b}}_{-1,\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'}(\vartheta)),$$

est dans $\widetilde{\Pi}^{l,\sigma k_1|l|,\sigma k_1|l|,m}_{\sigma,\kappa_\Xi,1,z}$.

Démonstration. (i) et (ii) sont directs.
(iii) est une conséquence de la formule de Faa di Bruno. □

Lemme 6.4.41. *Soit $s\in C^\infty(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout $p+n$-multi-indice $\nu=(\alpha,\beta)\neq 0$, nous avons*

$$\partial^\nu_{\mathrm{x},\vartheta}\,e^{i\langle\vartheta,s(\mathrm{x})\rangle}=P_\nu(\mathrm{x},\vartheta)\,e^{i\langle\vartheta,s(\mathrm{x})\rangle}$$

où P_ν est de la forme $\sum_{|\gamma|\leq|\alpha|}\vartheta^\gamma T_{\nu,\gamma}(\mathrm{x})$, et $T_{\nu,\gamma}$ est une combinaison linéaire de $\prod_{j=1}^m(\partial^{l^j}s)^{\mu^j}$ où $1\leq m\leq|\nu|$, (l^j) sont p-multi-indices et (μ^j) sont n-multi-indices. De plus, ils satisfont $|\mu^j|>0$, $\sum_{j=1}^m|\mu^j|=|\gamma|+|\beta|$, $\sum_{j=1}^m|\mu^j||l^j|=|\alpha|$ et si $|\beta|=0$, alors $|l^j|>0$ et $|\gamma|>0$.

Démonstration. On note $g(\mathrm{x},\vartheta):=\langle\vartheta,s(\mathrm{x})\rangle$. D'après le Théorème 6.2.11, on obtient l'égalité suivante pour tout $\nu\neq 0$, $\partial^\nu_{\mathrm{x},\vartheta}\,e^{i\langle\vartheta,s(\mathrm{x})\rangle}=P_\nu(\mathrm{x},\vartheta)e^{i\langle\vartheta,s(\mathrm{x})\rangle}$ où $P_\nu(\mathrm{x},\vartheta)=\sum_{1\leq k\leq|\nu|}P_{\nu,k}(g)$ et $P_{\nu,k}$ est une combinaison linéaire de $\prod_{j=1}^m(\partial^{l^j}g)^{k^j}$ tels que $|l^j|>0$, $k^j>0$, $\sum_1^m k^j=k$ et $\sum_1^m k^jl^j=\nu$. Si on suppose que les termes $\prod_{j=1}^m(\partial^{l^j}g)^{k^j}$ sont non nuls, alors $|l^j|\leq 1$ et si on définit j_1 tel que pour tout $1\leq j\leq j_1$, $l^{j,2}=0$, nous obtenons, en notant $l^j=(l^{j,1},l^{j,2})$,

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^m(\partial^{l^j}g)^{k^j}&=\prod_{j=1}^{j_1}\langle\vartheta,\partial^{l^{j,1}}s\rangle^{k^j}\prod_{j=j_1+1}^m(\partial^{l^{j,1}}s^{q_j})^{k^j}\\&=\sum_{|\gamma^j|=k^j,\,1\leq j\leq j_1}\gamma^1!\cdots\gamma^j!\;\vartheta^{\sum_1^{j_1}\gamma^j}\prod_{j=1}^{j_1}(\partial^{l^{j,1}}s)^{\gamma^j}\prod_{j=j_1+1}^m(\partial^{l^{j,1}}s^{q_j})^{k^j}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $P_{\nu,k}=\sum_{|\gamma|=k-|\beta|}\vartheta^\gamma T_{\nu,\gamma,k}(\mathrm{x})$ où $T_{\nu,\gamma,k}$ est une combinaison linéaire de $\prod_{j=1}^{j_1}(\partial^{l^{j,1}}s)^{\mu^j}\prod_{j=j_1+1}^m(\partial^{l^{j,1}}s^{q_j})^{k^j}$, où $1\leq q_j\leq n$, $1\leq j\leq m\leq|\nu|$, $1\leq j_1\leq m$, $l^{j,1}\in\mathbb{N}^p$, $k^j\in\mathbb{N}^*$, $\lambda^j\in\mathbb{N}^n$ sont tels que $\sum_1^m k^j=k$, $\sum_1^{j_1}|\lambda^j||l^{j,1}|+\sum_{j_1+1}^m k^j|l^{j,1}+1|=|\nu|$ et $\sum_{j_1+1}^m k^j=|\beta|$. Le résultat s'en déduit. □

Lemme 6.4.42. *Supposons* (C_σ). *Alors*
(i) En représentant par u *la lettre* s *ou* φ, *pour tout* $3n$*-multi-indice* $\nu = (\mu, \gamma) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{N}^n$, *nous avons l'égalité* $\partial^\nu_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta} e^{2\pi i \langle \vartheta, \mathrm{u}_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} = (\sum_{|\omega|\le|\mu|} \vartheta^\omega T_{\nu,\omega,\mathrm{u}}(\mathrm{x},\zeta,\zeta'))\, e^{2\pi i \langle \vartheta, \mathrm{u}_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}$ *où chaque terme* $T_{\nu,\omega,s} \in \mathcal{O}^{-|\mu|,\kappa_v|\mu|,w_s|\omega+\gamma|+\kappa_v|\mu|}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,|\omega+\gamma|}(\mathbb{R})$ *et* $T_{\nu,\omega,\varphi} \in \mathcal{O}^{-|\mu|-\varepsilon_v|\omega+\gamma|,\varepsilon_v|\omega+\gamma|+\kappa_v|\mu|,w_\varphi|\omega+\gamma|+\kappa_v|\mu|}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,2|\omega+\gamma|}(\mathbb{R})$. *En particulier, il satisfait l'estimation suivante pour tout* $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \in \mathbb{R}^{3n}$, *et tout* n*-multi-indice* ρ,

$$|\partial^\rho_{\zeta'} T_{\nu,\omega,s}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')| \le C_{\nu,\omega,\rho} \langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\mu|+\varepsilon_v|\rho|_{|\omega+\gamma|})} \langle\zeta\rangle^{\kappa_v|\mu|+\varepsilon_v|\rho|} \langle\zeta'\rangle^{w_s|\omega+\gamma|+\kappa_v(|\mu|+|\rho|)},$$
$$|\partial^\rho_{\zeta'} T_{\nu,\omega,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')| \le C_{\nu,\omega,\rho} \langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\mu|+(\varepsilon_v/2)|\rho|)} \langle\zeta\rangle^{\varepsilon_v|\omega+\gamma|+\kappa_v|\mu|+\varepsilon_v|\rho|} \langle\zeta'\rangle^{w_\varphi|\omega+\gamma|+\kappa_v(|\mu|+|\rho|)}.$$

(ii) Pour tout n*-multi-indice* β, *nous avons* $\partial^\beta_{\zeta'} e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} = P_{\beta,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta) e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}$ *où* $P_{\beta,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta)$ *est une combinaison linéaire de* $\vartheta^\omega \zeta'^\lambda t_{\omega,\lambda}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')$ *où* ω *et* λ *sont des* n*-multi-indices satisfaisant* $|\omega| \le |\beta|$, $(2|\omega| - |\beta|)_+ \le |\lambda| \le |\omega|$, *et* $t_{\omega,\lambda}$ *sont des fonctions dans* $\mathcal{O}^{-\varepsilon_v|\beta|/2,2\varepsilon_v,w'_s|\beta|}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,|\beta|}(\mathbb{R})$. *En particulier, ils vérifient*

$$t_{\omega,\lambda}(\mathrm{x},\zeta,\zeta') = \mathcal{O}(\langle\mathrm{x}\rangle^{-\sigma\varepsilon_v|\beta|/2} \langle\zeta\rangle^{2\varepsilon_v|\beta|} \langle\zeta'\rangle^{w'_s|\beta|})$$

où $w'_s := w_s + 2\kappa_v$. *De plus,* $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto P_{\beta,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,0,\vartheta)\, 1_{L(E_z)} \in \Pi^{-\varepsilon_v|\beta|/2,\varepsilon_v|\beta|,|\beta|/2}_{\sigma,\kappa_v,z}$.
(iii) Si $\beta \in \mathbb{N}^n$ *et* $f \in \widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,m}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}$ *alors la fonction*

$$f_{\beta,\varphi} : (\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto \partial^\beta_{\zeta'} \big(e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} \partial^{0,0,0,\beta} f(\mathrm{x},\zeta,\zeta',L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\big)_{\zeta'=0}$$

appartient à $\Pi^{l-\varepsilon'_1|\beta|,w_0+\kappa_2|\beta|,m-|\beta|/2}_{\sigma,\kappa_1,z}$, *où* $\varepsilon'_1 := \min\{\varepsilon_1/2, \varepsilon_v/2\} > 0$, $\kappa_1 := \max\{\kappa_v, \kappa\}$, $\kappa_2 := \kappa + |\varepsilon_v - \kappa|$, *et l' application* $f \mapsto f_{\beta,\varphi}$ *est continue.*

Démonstration. (i) D'après le Lemme 6.4.41, si $\nu \neq 0$, nous avons l'égalité suivante, valide pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta) \in \mathbb{R}^{4n}$, $\partial^\nu_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta} e^{2\pi i\langle\vartheta,\mathrm{u}_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} = (\sum_{|\omega|\le|\mu|} \vartheta^\omega T_{\nu,\omega,\mathrm{u}}(\mathrm{x},\zeta,\zeta'))\, e^{2\pi i\langle\vartheta,\mathrm{u}_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}$ où $T_{\nu,\omega,\mathrm{u}}$ est une combinaison linéaire de termes du type $\prod_{j=1}^m (\partial^{l^j}_{\mathrm{x},\zeta}\mathrm{u})^{\mu^j}$ avec $1 \le m \le |\nu|$, $\mu^j \neq 0$, $\sum_{j=1}^m |\mu^j| = |\omega+\gamma|$ et $\sum_{j=1}^m |\mu^j||l^j| = |\mu|$. Puisque d'après le Lemme 6.4.39 (i), $s \in \mathcal{O}^{0,0,w_s}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,1}(\mathbb{R}^n)$, il est direct de vérifier que $T_{\nu,\omega,s} \in \mathcal{O}^{-|\mu|,\kappa_v|\mu|,w_s|\omega+\gamma|+\kappa_v|\mu|}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,|\omega+\gamma|}(\mathbb{R})$. De plus, puisque $\varphi \in \mathcal{O}^{-\varepsilon_v,\varepsilon_v,w_\varphi}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,2}(\mathbb{R}^n)$, on obtient $T_{\nu,\omega,\varphi} \in \mathcal{O}^{-|\mu|-\varepsilon_v|\omega+\gamma|,\varepsilon_v|\omega+\gamma|+\kappa_v|\mu|,w_\varphi|\omega+\gamma|+\kappa_v|\mu|}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,2|\omega+\gamma|}(\mathbb{R})$. La première estimation est directe et la deuxième découle de l'inégalité $|\omega+\gamma| + |\rho|_{2|\omega+\gamma|} \ge |\rho|/2$.
(ii) D'après le Lemme 6.4.41, si $\beta \neq 0$, nous avons pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta) \in \mathbb{R}^{4n}$, la relation $\partial^\beta_{\zeta'} e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} = (\sum_{1\le|\omega|\le|\beta|} \vartheta^\omega T_{\beta,\omega,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')) e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}$ où $T_{\beta,\omega,\varphi}$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $\prod_{j=1}^m (\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta})^{\mu^j}$ avec $1 \le m \le |\beta|$, $\mu^j \neq 0$, $l^j \neq 0$, $\sum_{j=1}^m |\mu^j| = |\omega|$ et $\sum_{j=1}^m |\mu^j||l^j| = |\beta|$. On réordonne les indices l^j de sorte que pour tout $1 \le j \le j_1$, $|l^j| = 1$ et pour tout $j \ge j_1 + 1$, $|l^j| > 1$, où $j_1 \in \{0, \cdots m\}$. Ainsi $\prod_{j=1}^m (\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta})^{\mu^j} = \prod_{j=1}^{j_1} (\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta})^{\mu^j} \prod_{j\ge j_1+1} (\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta})^{\mu^j}$ et avec un développement de Taylor à l'ordre 1 de $\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta}$ en ζ' autour de 0 quand $1 \le j \le j_1$, on obtient $\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta} = \sum_{1\le i\le n} \zeta'_i t^k_{i,j}$ où $t^k_{i,j} = \int_0^1 \partial^{e_i+l^j}_{\zeta'} \varphi_{\mathrm{x},\zeta}(t\zeta')dt$. Ainsi, en utilisant le fait que $\varphi \in \mathcal{O}^{0,0,w_s}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,1}(\mathbb{R}^n)$, on voit que $\prod_{j=1}^{j_1} (\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta})^{\mu^j}$ est une combinaison linéaire de $\zeta'^\lambda V_\lambda$ où $|\lambda| = \sum_{j=1}^{j_1} |\mu^j|$ et

$$V_\lambda = \mathcal{O}(\langle\mathrm{x}\rangle^{-\sigma\varepsilon_v \sum_1^{j_1} |l^j||\mu^j|} \langle\zeta\rangle^{\varepsilon_v|\lambda|+\varepsilon_v \sum_1^{j_1} |\mu^j||l^j|} \langle\zeta'\rangle^{(k_v+w_s)|\lambda|+\kappa_v \sum_1^{j_1} |l^j||\mu^j|}).$$

Par conséquent, on voit que $\prod_{j=1}^m (\partial^{l^j}\varphi_{\mathrm{x},\zeta})^{\mu^j}$ est une combinaison linéaire de termes du type $\zeta'^{\lambda} W_\lambda$ où $|\lambda| = \sum_{j=1}^{j_1} |\mu^j|$ et

$$W_\lambda = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma\varepsilon_v(|\beta|-v)}\langle\zeta\rangle^{2\varepsilon_v|\beta|}\langle\zeta'\rangle^{w'_s|\beta|})$$

où $v := \sum_{j=j_1+1}^m |\mu^j| = |\omega| - |\lambda|$. La première assertion résulte alors de l'inégalité $2v \le |\beta| - |\lambda|$.

Puisque $\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(0) = 0$ et $(d\varphi_{\mathrm{x},\zeta})_0 = 0$, $P_{\beta,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,0,\vartheta)$ est une combinaison linéaire de termes du type $\vartheta^\omega \prod_{j=1}^m (\partial^{0,0,l^j}\varphi(\mathrm{x},\zeta,0))^{\mu^j}$ avec $1 \le |\omega| \le |\beta|/2$, $1 \le m \le |\beta|$, $\mu^j \ne 0$, $|l^j| \ge 2$, $\sum_{j=1}^m |\mu^j| = |\omega|$ et $\sum_{j=1}^m |\mu^j||l^j| = |\beta|$. On vérifie avec le Lemme 6.4.39 (i) que toute fonction de la forme $\prod_{j=1}^m (\partial^{0,0,l^j}\varphi(\mathrm{x},\zeta,\zeta'))^{\mu^j}$ est dans $\mathcal{O}^{-\varepsilon_v|\beta|/2,\varepsilon_v|\beta|,(w_s/2+\kappa_v)|\beta|}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,|\beta|/2}(\mathbb{R})$, et alors, $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto \prod_{j=1}^m (\partial^{0,0,l^j}\varphi(\mathrm{x},\zeta,0))^{\mu^j}\, 1_{L(E_z)} \in \Pi^{-\varepsilon_v|\beta|/2,\varepsilon_v|\beta|,0}_{\sigma,\kappa_v,z}$. Puisque $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto \vartheta^\omega\, 1_{L(E_z)} \in \Pi^{0,0,|\beta|/2}_{\sigma,\kappa_v,z}$ nous obtenons $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto P_{\beta,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,0,\vartheta)\, 1_{L(E_z)} \in \Pi^{-\varepsilon|\beta|/2,\varepsilon_v|\beta|,|\beta|/2}_{\sigma,\kappa_v,z}$.
(iii) Nous avons

$$\begin{aligned} f_{\beta,\varphi}(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) &= \sum_{\beta'\le\beta} \tbinom{\beta}{\beta'} \partial^{\beta'}_{\zeta'} (e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle})_{\zeta'=0}\, \partial^{0,0,\beta-\beta',\beta} f(\mathrm{x},\zeta,0,L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta)) \\ &= \sum_{\beta'\le\beta} \tbinom{\beta}{\beta'} P_{\beta',\varphi}(\mathrm{x},\zeta,0,\vartheta)\, \partial^{0,0,\beta-\beta',\beta} f(\mathrm{x},\zeta,0,L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\,. \end{aligned}$$

Puisque $(\mathrm{x},\zeta) \mapsto L_{\mathrm{x},\zeta} \in E^0_{\sigma,\kappa_v}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $L^{-1}_{\mathrm{x},\zeta} = \mathcal{O}(1)$, on déduit du Lemme 6.4.40 (i) et du Lemme 6.4.23 (iv) que $(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) \mapsto \partial^{0,0,\beta-\beta',\beta} f(\mathrm{x},\zeta,0,L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))$ appartient à l'espace d'amplitude $\Pi^{l-\varepsilon_1|\beta-\beta'|,w_0+\kappa|\beta-\beta'|,m-|\beta|}_{\sigma,\max\{\kappa,\kappa_v\},z}$. Le résultat découle alors de (ii). □

Nous introduisons maintenant deux fonctions de coupure paramétrées qui seront utilisées plus loin. Soit $b \in C^\infty_c(\mathbb{R},[0,1])$ tel que $b = 1$ sur $[-1/4,1/4]$ et $b = 0$ sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$. On définit pour $\varepsilon,\delta,\eta_1,\eta_2 > 0$ avec $\varepsilon,\delta < 1$,

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(\vartheta,\vartheta') &:= b(\tfrac{\|\vartheta'\|^2}{\varepsilon^2\langle\vartheta\rangle^2})\,, \\ \chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta') &:= b(\tfrac{\|\zeta'\|^2}{\delta^2\langle\mathrm{x}\rangle^{2\sigma\eta_1}\langle\zeta\rangle^{-2\eta_2}}). \end{aligned}$$

Lemme 6.4.43. *Les fonctions χ_ε et $\chi_{\delta,\eta}$ sont respectivement dans les espaces $C^\infty(\mathbb{R}^{2n},[0,1])$ et $C^\infty(\mathbb{R}^{3n},[0,1])$ et satisfont :*
(i) Pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta') \in \mathbb{R}^{3n}$, si $\|\zeta'\| \le \frac{1}{2}\delta\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma\eta_1}\langle\zeta\rangle^{-\eta_2}$, alors $\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta') = 1$, et si $\|\zeta'\| \ge \delta\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma\eta_1}\langle\zeta\rangle^{-\eta_2}$, alors $\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta') = 0$. En particulier, pour tout $(\mathrm{x},\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,0) = 1$ et pour tout $3n$-multi-indice $\nu \ne 0$, $(\partial^\nu\chi_{\delta,\eta})(\mathrm{x},\zeta,0) = 0$.
(ii) Pour tout $(\vartheta,\vartheta') \in \mathbb{R}^{2n}$, si $\|\vartheta'\| \le \frac{1}{2}\varepsilon\langle\vartheta\rangle$, alors $\chi_\varepsilon(\vartheta,\vartheta') = 1$, et si $\|\vartheta'\| \ge \varepsilon\langle\vartheta\rangle$, alors $\chi_\varepsilon(\vartheta,\vartheta') = 0$. En particulier, pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}^n$, $\chi_\varepsilon(\vartheta,0) = 1$ et pour tout $2n$-multi-indice $\nu \ne 0$, $(\partial^\nu\chi_\varepsilon)(\vartheta,0) = 0$.
(iii) Pour tout $3n$-muti-indice $\nu = (\alpha,\beta,\gamma)$, nous avons

$$\partial^\nu\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta') = \mathcal{O}(\langle\mathrm{x}\rangle^{-|\alpha|}\langle\zeta\rangle^{-\beta}\langle\zeta'\rangle^{-|\gamma|})$$

et

$$\partial^\nu\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta') = \mathcal{O}(\langle\mathrm{x}\rangle^{-\sigma|\nu|}\langle\zeta\rangle^{(-1+\eta_2/\eta_1)|\beta|+(\eta_2/\eta_1)|\gamma|}\langle\zeta'\rangle^{(\eta_1^{-1}-1)|\gamma|+\eta_1^{-1}|\beta|}).$$

En particulier, la fonction $\chi_{\delta,\eta}$ est dans $\mathcal{O}^{0,0,0}_{\sigma,\kappa'_\eta,\kappa'_\eta,1,0}(\mathbb{R})$ pour un $\kappa'_\eta > 0$.
(iv) Pour tout $2n$-muti-indice ν, $\partial^\nu\chi_\varepsilon(\vartheta,\vartheta') = \mathcal{O}(\langle\vartheta\rangle^{-|\nu|})$ et $\partial^\nu\chi_\varepsilon(\vartheta,\vartheta') = \mathcal{O}(\langle\vartheta'\rangle^{-|\nu|})$.

Démonstration. (i) et (ii) sont immédiates. Pour tout $\nu \neq 0$,

$$\partial^\nu \chi_{\delta,\eta} = \sum_{1\leq \nu' \leq |\nu|} P_{\nu,\nu'}(g)\,(\partial^{\nu'} b) \circ g$$

où $g(\mathrm{x},\zeta,\zeta') := \frac{\|\zeta\|^2}{\delta^2 \langle \mathrm{x}\rangle^{2\sigma\eta_1}\langle\zeta\rangle^{-2\eta_2}}$. On obtient d'un calcul direct l'estimation

$$P_{\nu,\nu'}(g) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-2\sigma\eta_1\nu'-|\alpha|}\langle\zeta\rangle^{2\eta_2\nu'-|\beta|}\langle\zeta'\rangle^{2\nu'-|\gamma|}).$$

Puisque pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $\partial^{\nu'} b = \mathcal{O}(1)$, nous obtenons $\partial^\nu \chi_{\delta,\eta} = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-|\alpha|}\langle\zeta\rangle^{-\beta}\langle\zeta'\rangle^{-|\gamma|}1_{D_\delta})$ où D_δ est l'ensemble des triplets $(\mathrm{x},\zeta,\zeta')$ satisfaisant les inégalités $\delta/2 \leq \langle\zeta'\rangle\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma\eta_1}\langle\zeta\rangle^{\eta_2} \leq \sqrt{2}$. L'estimation de (iii) en résulte. La preuve de (iv) est similaire. □

Nous allons utiliser dans le lemme suivant l'espace $\mathcal{O}_\kappa^{t_0,t_1,j}$ ($\kappa \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$, $(t_0,t_1) \in \mathbb{R}_+^2$) des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{4n},\mathbb{C})$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que pour tout $(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta) \in \mathbb{R}^{4n}$, $|\partial_{\zeta'}^\alpha f(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta)| \leq C_\alpha \langle\zeta\rangle^{t_0+\kappa|\alpha|}\langle\zeta'\rangle^{t_1+\kappa|\alpha|}\langle\vartheta\rangle^{-2j}$.

Clairement, $\mathcal{O}_\kappa^{t_0,t_1,j}\mathcal{O}_\kappa^{t_0',t_1',j'} \subseteq \mathcal{O}_\kappa^{t_0+t_0',t_1+t_1',j+j'}$ et $\partial_{\zeta'}^\alpha \mathcal{O}_\kappa^{t_0,t_1,j} \subseteq \mathcal{O}_\kappa^{t_0+\kappa|\alpha|,t_1+\kappa|\alpha|,j}$.

Lemme 6.4.44. . *En définissant* $h(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta) := \big(1+\big\|{}^t(ds_{\mathrm{x},\zeta})_{\zeta'}(\vartheta)\big\|^2-(i/2\pi)\langle\vartheta,(\Delta s_{\mathrm{x},\zeta})(\zeta')\rangle\big)^{-1}$, *nous avons la relation suivante, valide pour tout* $(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta) \in \mathbb{R}^{4n}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$e^{2\pi i\langle\vartheta,s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} = (h(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta)\,L_{\zeta'})^p e^{2\pi i\langle\vartheta,s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}$$

où $L_{\zeta'} := 1-(2\pi)^{-2}\Delta_{\zeta'}$. *De plus, si* (C_σ) *est vérifiée, il existe* $\kappa_L \geq 0$ *tel que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *il existe* $N_p \in \mathbb{N}^*$, $(h_k^p)_{1\leq k\leq N_p}$ *fonctions dans* $\mathcal{O}_{\kappa_L}^{2p\kappa_L,2p\kappa_L,p}$, $(\beta^{k,p})_{1\leq k\leq N_p}$ *n-multi-indices satisfaisant* $|\beta^{k,p}| \leq 2p$, *tels que* $(L_{\zeta'}\,h)^p = \sum_{k=1}^{N_p} h_k^p\,\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}}$.

Démonstration. On obtient $L_{\zeta'}e^{2\pi i\langle\vartheta,s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} = (1/h)e^{2\pi i\langle\vartheta,s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}$ par un calcul direct. Vérifions l'assertion restante par induction sur p. Notons que d'après le Lemme 6.4.39 (ii), nous avons $|1/h| \geq c\langle\vartheta\rangle^2$ pour un $c > 0$ et on vérifie que $1/h \in \widetilde{\Pi}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,z}^{0,\varepsilon_v,w_v',2}$ où $w_v' = \max\{\,2w_v, w_v+\kappa_v\,\}$. Avec une récurrence ou en utilisant la Proposition 6.5.4, on vérifie que $h \in \mathcal{O}_{\kappa_L}^{0,0,1}$ où on a posé $\kappa_L := \max\{\,2\varepsilon_v, w_v'+\kappa_v\,\}$. La propriété est bien sûr vraie pour $p = 0$. Supposons maintenant qu'elle soit vérifiée pour $p \geq 0$, de sorte que $(L_{\zeta'}\,h)^p = \sum_{k=1}^{N_p} h_k^p\,\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}}$ avec $N_p \in \mathbb{N}^*$, $(h_k^p)_{1\leq k\leq N_p}$ fonctions dans $\mathcal{O}_{\kappa_L}^{2p\kappa_L,2p\kappa_L,p}$ et $(\beta^{k,p})_{1\leq k\leq N_p}$ n-multi-indices satisfaisant $|\beta^{k,p}| \leq 2p$. Nous avons aussi

$$\begin{aligned}(L_{\zeta'}h)^{p+1} = (L_{\zeta'}h)\sum_{k=1}^{N_p} h_k^p\,\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}} &= \sum_{k=1}^{N_p} hh_k^p\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}} - (2\pi)^{-2}\big(\Delta_{\zeta'}(hh_k^p)\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}} \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{n}\partial_{\zeta_i'}(hh_k^p)\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}+e_i} + hh_k^p\Delta_{\zeta'}\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}}\big)\end{aligned}$$

donc la propriété est vérifiée pour $p+1$. □

On note $\mathcal{S}_{\sigma,c}(\mathbb{R}^{3n},L(E_z))$ l'espace des fonctions lisses f telles que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $\nu = (\mu,\gamma) \in \mathbb{N}^{2n}\times\mathbb{N}^n$, $\partial^\nu f(\mathrm{x},\zeta,\vartheta) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle^{-\sigma N}\langle\zeta\rangle^{c_0+c_1N+c_2|\mu|}\langle\vartheta\rangle^{-N})$. Il résulte du Lemme 6.4.18 que si $f \in \mathcal{S}_{\sigma,c}(\mathbb{R}^{3n},L(E_z))$, alors $\mathfrak{Op}_\Gamma(f) \in \mathfrak{Op}_\Gamma(S_{\sigma,z}^{-\infty})$. Ici, et par la suite, Γ satisfait les hypothèses du Lemme 6.4.18.

Lemme 6.4.45. *On suppose* (C_σ).
(i) Pour tout l, w_0, w_1, m, κ, $S_{m,w_1}(\widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,,m}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}) \subseteq \mathcal{S}_{\sigma,c}(\mathbb{R}^{3n}, L(E_z))$ *pour un triplet* $c := (c_0, c_1, c_2)$ *et l'application linéaire* $S_{m,w_1} : f \mapsto S_{m,w_1}(f)$ *est continue, où*

$$S_{m,w_1}(f) : (\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i(\langle \vartheta', \zeta'\rangle + \langle \vartheta, s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)}\, {}^t M^{p_{m,w_1},\zeta'}_{\vartheta'}(f)(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta')(1-\chi_{\delta,\eta})(\mathrm{x}, \zeta, \zeta')\, d\vartheta'\, d\zeta'$$

et $p_{m,w_1} := \max\{\, m + 2n, [|w_1|] + 1 + 2n \,\}$.
(ii) Pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}, L(E_z))$, *l'application linéaire* $f \mapsto \langle \mathfrak{O}\mathfrak{p}_\Gamma\, S_{m,w_1}(f), u\rangle$ *est continue.*

Démonstration. On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. Notons d'abord que $S_{m,w_1}(f)$ est bien définie puisque pour tout $(\mathrm{x}, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, il existe $C_{\mathrm{x},\zeta} > 0$ tel que

$$\left\| {}^t M^{p_{m,w_1},\zeta'}_{\vartheta'}(f)(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta')(1 - \chi_{\delta,\eta})(\mathrm{x}, \zeta, \zeta') \right\| \leq C_{\mathrm{x},\zeta} \langle \vartheta'\rangle^{-2n} \langle \zeta'\rangle^{-2n}.$$

Puisque pour tout n-multi-indice δ, $\partial^\delta_{\vartheta'}\, {}^t M^{p_{m,w_1},\zeta'}_{\vartheta'}(f)$ tend vers zéro en ϑ', on peut successivement intégrer par parties avec (6.23), qui est bien valide puisque $1 - \chi_{\delta,\eta}$ assure que $\|\zeta'\| \geq \frac{1}{2}\delta$ sur le domaine d'intégration. On obtient alors pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{m,w_1}(f) : (\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i(\langle \vartheta', \zeta'\rangle + \langle \vartheta, s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)}\, {}^t M^{p_{m,w_1}+q,\zeta'}_{\vartheta'}(f)(1 - \chi_{\delta,\eta})\, d\vartheta'\, d\zeta'\,.$$

On note f_q l'intégrand de l'intégrale précédente. Si $\nu = (\alpha, \beta, \gamma) = (\mu, \gamma)$ est un $3n$-multi-indice, on voit avec le Lemme 6.4.41 que

$$\begin{aligned}\partial^\nu_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta} f_q = e^{2\pi i\langle \vartheta', \zeta'\rangle} \sum_{\mu' \leq \mu} \tbinom{\mu}{\mu'} e^{2\pi i\langle \vartheta, s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle} \sum_{|\omega| \leq |\mu'|} \vartheta^\omega T_{\nu',\omega,s}(\mathrm{x}, \zeta, \zeta') \\ \sum_{|\widetilde{\delta}| = p_{m,w}+q} \lambda_\delta (-1)^{|\widetilde{\delta}|} \frac{\zeta'^{\widetilde{\delta}}}{\|\zeta'\|^{2(p_{m,w_1}+q)}} \partial^{\mu-\mu'}_{\mathrm{x},\zeta} \partial^{\widetilde{\delta}}_{\vartheta'}(f(1 - \chi_{\delta,\eta}))\,.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 6.4.43 (iii), $(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta') \mapsto \chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x}, \zeta, \zeta')\, 1_{L(E_z)}$ est dans $\widetilde{\Pi}^{0,0,0,0}_{\sigma,\kappa'_\eta,1,z}$, donc l'opérateur de multiplication $f \mapsto f(1 - \chi_{\delta,\eta})$ est continu de $\widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,m}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}$ dans $\widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,m}_{\sigma,\kappa_\eta,\varepsilon_1,z}$, où on a posé $\kappa_\eta = \max\{\, \kappa, \kappa'_\eta \,\}$. Puisque $\|\zeta'\| \geq \delta/2$ dans le support de $f(1 - \chi_{\delta,\eta})$, on obtient du Lemme 6.4.42 (i) l'estimation suivante, où $\kappa''_\eta := \kappa_v + w_s + \kappa_\eta$,

$$\begin{aligned}\left\|\partial^\nu_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta} f_q(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta, \zeta', \vartheta')\right\| &\leq C_{\nu,q} \langle \vartheta\rangle^{|\mu|} \langle \vartheta'\rangle^{m - p_{m,w_1} - q} \sum_{\mu' \leq \mu} \langle \zeta\rangle^{\kappa_v|\mu'| + w_0 + \kappa_\eta|\mu|} \\ &\quad \times \langle \zeta'\rangle^{w_1 + (\kappa_v + w_s)|\mu'| + \kappa_\eta|\mu| - (p_{m,w_1}+q) + w_s|\gamma|} \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma|l|} \\ &\leq C'_{\nu,q} \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma|l|} \langle \zeta\rangle^{w_0 + \kappa''_\eta|\mu|} \langle \vartheta\rangle^{|\mu|} \langle \vartheta'\rangle^{m - p_{m,w_1} - q} \langle \zeta'\rangle^{w_1 + \kappa''_\eta|\nu| - p_{m,w_1} - q}\,.\end{aligned}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, et si on pose $q := q_k$ tel que $w_1 + \kappa''_\eta k - p_{m,w_1} - q_k \leq -2n$, on voit par application théorème de dérivation sous l'intégrale que $S_{m,w}(f)$ est lisse et pour tout $3n$-multi-indice $\nu = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $q \in \mathbb{N}^*$, après integrations par parties en ϑ', avec $\nu' := (\mu', \gamma)$,

$$\begin{aligned}\partial^\nu S_{m,w_1}(f)(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) = \sum_{\mu' \leq \mu} \sum_{|\omega| \leq |\mu'|} \tbinom{\mu}{\mu'} \vartheta^\omega \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i(\langle \vartheta', \zeta'\rangle + \langle \vartheta, s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)} T_{\nu',\omega,s}(\mathrm{x}, \zeta, \zeta') \\ {}^t M^{p_{m,w_1}+q_{|\nu|}+q,\zeta'}_{\vartheta'} \partial^{\mu-\mu'}_{\mathrm{x},\zeta}(f(1 - \chi_{\delta,\eta}))\, d\vartheta'\, d\zeta'\,.\end{aligned}$$

On note $g_q(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta') := e^{2\pi i\langle\vartheta',\zeta'\rangle}T_{\nu',\omega,s}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')^t M_{\vartheta'}^{p_{m,w_1}+q_{|\nu|}+q,\zeta'}\partial_{\mathrm{x},\zeta}^{\mu-\mu'}(f(1-\chi_{\delta,\eta}))$. En utilisant maintenant le Lemme 6.4.44, on obtient pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\left\|(L_{\zeta'}h)^p g_q(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta')\right\| \le C_p\langle\zeta'\rangle^{2p\kappa_L}\langle\zeta\rangle^{2p\kappa_L}\langle\vartheta\rangle^{-2p}\sum_{k=1}^{N_p}\left\|\partial_{\zeta'}^{\beta^{k,p}}g_q(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta')\right\|.$$

Ainsi, avec le Lemme 6.4.42 (i), nous obtenons avec $k_1 := w_s+\kappa_v+\kappa_\eta+\kappa_L$,

$$\begin{aligned}&\left\|(L_{\zeta'}h)^p g_q(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta')\right\| \le C'_p\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma|l|}\langle\zeta'\rangle^{w_1+(2p+|\nu|)k_1-p_{m,w_1}-q_{|\nu|}-q}\langle\vartheta\rangle^{-2p}\\ &\langle\vartheta'\rangle^{2p+m-p_{m,w_1}-q_{|\nu|}-q}\langle\zeta\rangle^{(2p+|\mu|)k_1+w_0}\sum_{|\widetilde{\beta}|\le 2p}\sum_{\mu'\le\mu}\sum_{|\widetilde{\delta}|=p_{m,w_1}+q_{|\nu|}+q} q_{\mu',\widetilde{\beta},\widetilde{\delta}}(f(1-\chi_{\delta,\eta}))\,1_D(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\end{aligned}$$

où $D := \{\,(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\in\mathbb{R}^{2n}\mid \|\zeta'\|\ge\frac{1}{2}\delta\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma\eta_1}\langle\zeta\rangle^{-\eta_2}\,\}$. Si on fixe p tel que $-N-2\le -2p+|\mu|\le -N$, on voit qu'en prenant q tel que $A_q\le -N/\eta_1-|l|/\eta_1$ où $A_q := w_1+(2p+|\nu|)k_1-p_{m,w_1}-q_{|\nu|}-q+2n$, et $2p+m-p_{m,w_1}-q_{|\nu|}-q\le -2n$, on peut successivement intégrer par parties en ζ' (p fois) avec la formule du Lemme 6.4.44. On obtient alors pour certaines constantes $c_0,c_1,c_2>0$,

$$\begin{aligned}\|\partial^\nu S_{m,w_1}(f)(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\| \le{}& C_{\nu,N}\langle\mathrm{x}\rangle^{-\sigma N}\langle\zeta\rangle^{c_0+c_1N+c_2|\mu|}\langle\vartheta\rangle^{-N}\\ &\sum_{|\widetilde{\beta}|\le 2p}\sum_{\mu'\le\mu}\sum_{|\widetilde{\delta}|=p_{m,w_1}+q_{|\nu|}+q} q_{\mu',\widetilde{\beta},\widetilde{\delta}}(f(1-\chi_{\delta,\eta}))\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.
(ii) Ceci résulte de (i) et du Lemme 6.4.14 (ii). □

Lemme 6.4.46. *Supposons* (C_σ).
(i) En définissant pour tout $f\in\widetilde{\Pi}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}^{l,w_0,w_1,m}$,

$$\Pi(f):(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)\mapsto\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i(\langle\vartheta',\zeta'\rangle+\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)}f(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta'+L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\,\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\,d\zeta'\,d\vartheta',$$

il existe δ,η, *tel que pour tout* $N\ge|m|$, $\Pi(f)=\Pi_N(f)+\Pi_{R,N}(f)$ *où*

$$\Pi_N(f)=\sum_{0\le|\beta|\le N}\frac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!}f_{\beta,\varphi}$$

et il existe tel que $\Pi_{R,N}(f)$ *satisfait pour tout* $3n$*-multi-indice* $\nu=(\mu,\gamma)\in\mathbb{N}^{2n}\times\mathbb{N}^n$,

$$\partial^\nu\Pi_{R,N}(f)=\mathcal{O}(\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-\varepsilon'_1(N+1))}\langle\zeta\rangle^{k_0+k_1(N+1+|\mu|)+\varepsilon_v|\gamma|}\langle\vartheta\rangle^{m+|\mu|-(N+1)/2+n})$$

où $\varepsilon'_1,k_0,k_1>0$.
(ii) Nous avons pour tout $3n$*-multi-indice* $\nu=(\mu,\gamma)\in\mathbb{N}^{2n}\times\mathbb{N}^n$,

$$\partial^\nu\Pi(f)=\mathcal{O}(\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma l}\langle\zeta\rangle^{k'_0+k'_1|\mu|+\varepsilon_v|\gamma|}\langle\vartheta\rangle^m)$$

où $k'_0,k'_1>0$. *En particulier, pour tout* $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n},L(E_z))$, *l'application linéaire* $f\mapsto\langle\mathfrak{O}\mathfrak{p}_\Gamma\,\Pi(f),u\rangle$ *est continue.*

Démonstration. (i) On procède à un développement de Taylor de la fonction

$$\widetilde{f}(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta',\vartheta) := f(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta'+L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))$$

en ϑ' autour de zéro à l'ordre $N\in\mathbb{N}^*$, de sorte que

$$\Pi(f)=\sum_{0\le|\beta|\le N}\tfrac{1}{\beta!}I_\beta(f)+\sum_{|\beta|=N+1}\tfrac{N+1}{\beta!}R_{\beta,N}(f)=:\Pi_N(f)+\Pi_{R,N}(f)$$

où

$$\begin{aligned}I_\beta(f)&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\vartheta'^\beta e^{2\pi i(\langle\vartheta',\zeta'\rangle+\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)}\partial^{0,0,0,\beta}f(\mathrm{x},\zeta,\zeta',L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\,\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\,d\zeta'\,d\vartheta'\,,\\ R_{\beta,N}(f)&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\vartheta'^\beta e^{2\pi i(\langle\vartheta',\zeta'\rangle+\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)}r_{\beta,N,f}(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta',\vartheta)\,d\zeta'\,d\vartheta'\,,\end{aligned}$$

et $r_{\beta,N,f}:=\int_0^1(1-t)^N\partial^{0,0,0,\beta}f_\chi(\mathrm{x},\zeta,\zeta',t\vartheta'+L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\,dt$, $f_\chi:=f\chi_{\delta,\eta}\in\widetilde{\Pi}^{l,w_0,w_1,m}_{\sigma,\kappa_\eta,z}$. Par intégration par parties en ζ' dans les intégrales $I_\beta(f)$, on obtient

$$\Pi_N(f)=\sum_{0\le|\beta|\le N}\tfrac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!}\partial^\beta_{\zeta'}\big(e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}\partial^{0,0,0,\beta}f(\mathrm{x},\zeta,\zeta',L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\big)_{\zeta'=0}=\sum_{0\le|\beta|\le N}\tfrac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!}f_{\beta,\varphi}\,.$$

En utilisant une intégration par parties en ζ', nous obtenons $R_{\beta,N,f}=(i/2\pi)^{|\beta|}I_f$, où pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}I_f(\mathrm{x},\zeta,\vartheta)&:=\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{2\pi i\langle\vartheta',\zeta'\rangle}\partial^\beta_{\zeta'}G(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta',\vartheta)\,d\zeta'\,d\vartheta'\,,\\ G(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta',\vartheta)&:=e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}r_{\beta,N,f}(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta',\vartheta)\,.\end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties en ζ' et $e^{2\pi i\langle\vartheta',\zeta'\rangle}=\langle\vartheta'\rangle^{-2p}L^p_{\zeta'}e^{2\pi i\langle\vartheta',\zeta'\rangle}$, on vérifie que I_f est lisse sur $\mathbb{R}^{3n}$ et si ν est un $3n$-multi-indice, on voit que $\partial^\nu I_f$ est une combinaison linéaire de termes du type

$$J_f:=\vartheta^{\widetilde{\omega}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{2\pi i(\langle\vartheta',\zeta'\rangle+\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)}\partial^{\beta^1}_{\zeta'}T_{\nu',\widetilde{\omega},\varphi}P_{\beta^2,\varphi}\partial^{\nu-\nu'}_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta}\partial^{\beta^3}_{\zeta'}r_{\beta,N,f}\,d\zeta'\,d\vartheta'$$

où $|\widetilde{\omega}|\le|\mu'|$, $\nu'\le\nu$, $\sum\beta^i=\beta$, $|\beta|=N+1$. On découpe alors l'intégrale J_f en deux parties $J_\chi+J_{1-\chi}$, où la fonction de cut-off $\chi_\varepsilon(\vartheta,\vartheta')$ apparaît dans J_χ.

Analyse de J_χ

En utilisant le Lemme 6.4.42 (ii) et des intégration par parties en ζ', on voit que J_χ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$J_{\chi,\omega}=\vartheta^{\widetilde{\omega}}\vartheta^\omega\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{2\pi i(\langle\vartheta',\zeta'\rangle+\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle)}\langle\zeta'\rangle^{-2p}t_{\omega,\lambda}\,\partial_\zeta'^{\beta^1}T_{\nu',\widetilde{\omega},\varphi}\,\partial^{\lambda'}_{\vartheta'}\partial^{\nu-\nu'}_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta}\partial^{\beta^3}r_{\beta,N,f}\,\partial^{\lambda+\rho-\lambda'}\chi_\varepsilon\,d\zeta'\,d\vartheta'$$

où $p\in\mathbb{N}$, $|\rho|\le 2p$, $|\omega|\le|\beta^2|$, $(2|\omega|-|\beta^2|)_+\le|\lambda|\le|\omega|$, $\lambda'\le\lambda+\rho$. On fixe alors ε tel que $\varepsilon<c/2$ où c est une constante telle que $c\langle\vartheta\rangle\le\langle L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta)\rangle$. Ainsi, dans le domaine d'intégration

de $J_{\chi,\omega}$, nous avons pour tout $t \in [0,1]$, $\langle t\vartheta' + L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta)\rangle \geq c_1\langle\vartheta\rangle$ pour un $c_1 > 0$. Par conséquent, nous obtenons l'estimation :

$$\left\|\partial_{\vartheta'}^{\lambda'}\partial_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta}^{\nu-\nu'}\partial_{\zeta'}^{\beta^3} r_{\beta,N,f}\right\| \leq C\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-\varepsilon_1|\beta^3|)}\langle\zeta\rangle^{(\kappa_v+\kappa_\eta)|\mu-\mu'|+w_0+\kappa_\eta|\beta^3|}$$
$$\langle\zeta'\rangle^{w_1+\kappa_\eta(|\mu-\mu'|+|\beta^3|)}\langle\vartheta\rangle^{|\mu-\mu'|+m-|\beta|-|\lambda'|}\,.$$

On déduit alors du Lemme 6.4.42 l'estimation

$$|t_{\omega,\lambda}\,\partial_{\zeta}'^{\beta^1}T_{\nu',\widetilde{\omega},\varphi}| \leq C'\langle\mathrm{x}\rangle^{-\sigma(|\mu'|+(\varepsilon/2)|\beta^1+\beta^2|)}\langle\zeta\rangle^{2\varepsilon_v|\beta^1+\beta^2|+(\kappa_v+\varepsilon_v)|\mu|+\varepsilon_v|\gamma|}\langle\zeta'\rangle^{c_1(N+1)+c_2|\nu|}\,.$$

Par conséquent, en prenant p suffisamment grand, l'intégrand $j(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta,\vartheta')$ de $J_{\chi,\omega}$ satisfait l'estimation, pour un $\varepsilon_1' > 0$ et un $k_1 > 0$,

$$\|j\| \leq C''\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-\varepsilon_1'(N+1))}\langle\zeta\rangle^{w_0+k_1(N+1+|\mu|)+\varepsilon_v|\gamma|}\langle\zeta'\rangle^{-2n}\langle\vartheta\rangle^{m+|\mu|-(N+1)/2}\,1_{D_\varepsilon}(\vartheta,\vartheta')$$

où D_ε est l'ensemble de (ϑ,ϑ') dans $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|\vartheta'\| \leq \varepsilon\langle\vartheta\rangle$. On déduit finalement que pour tout $\nu \in \mathbb{N}^{3n}$,

$$J_\chi = \mathcal{O}(\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-\varepsilon_1'(N+1))}\langle\zeta\rangle^{w_0+k_1(N+1+|\mu|)+\varepsilon_v|\gamma|}\langle\vartheta\rangle^{m+|\mu|-(N+1)/2+n})\,.$$

Analyse de $J_{1-\chi}$

On pose la définition $\omega := \langle\zeta',\vartheta'\rangle + \langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle$. D'après le Lemme 6.4.39 (i), nous avons $\sum_i\left\|\partial_{\zeta_i'}\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\right\| \leq C\langle\mathrm{x}\rangle^{-\sigma\varepsilon_v}\langle\zeta\rangle^{c_1}\langle\zeta'\rangle^{c_2}$ pour $C, c_1, c_2 > 0$. La présence de $\chi_{\delta,\eta}$ dans l'intégrand de $J_{1-\chi}$ permet d'utiliser l'estimation $\langle\zeta'\rangle \leq \sqrt{2}\delta\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma\eta_1}\langle\zeta\rangle^{-\eta_2}$, de sorte que

$$\sum_i\left\|\partial_{\zeta_i'}\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\right\| \leq C\,2^{c_2/2}\,\delta^{c_2}$$

en prenant $\eta_1 \leq \varepsilon_v/c_2$ et $\eta_2 \geq c_1/c_2$. Par conséquent, nous obtenons l'estimation suivante dans le domaine d'intégration de $J_{1-\chi}$,

$$|\nabla_{\zeta'}\omega|^2 \geq \left\|\vartheta'\right\|^2(1-\tfrac{4}{\varepsilon}\,C\,2^{c_2/2}\,\delta^{c_2})\,.$$

On fixe maintenant δ tel que $\frac{4}{\varepsilon}\,C\,2^{c_2/2}\,\delta^{c_2} < 1$ de sorte qu'il existe $k > 0$ tel que $|\nabla_{\zeta'}\omega| \geq k\,\|\vartheta'\|$. En notant $U_{\zeta'} := (2\pi i|\nabla_{\zeta'}\omega|^2)^{-1}\sum_i(\partial_{\zeta_i'}\omega)\partial_{\zeta_i'}$ nous avons [119] $U_{\zeta'}e^{2\pi i\omega} = e^{2\pi i\omega}$ et

$$({}^tU_{\zeta'})^r = \tfrac{1}{|\nabla_{\zeta'}\omega|^{4r}}\sum_{|\rho|\leq r}P_{\rho,r}^{\omega}\partial_{\zeta'}^{\rho}$$

où $P_{\rho,r}^{\omega}$ est une combinaison linéaire de $(\nabla_{\zeta'}\omega)^{\pi}\partial_{\zeta'}^{\delta^1}\omega\cdots\partial_{\zeta'}^{\delta^r}\omega$, avec $|\pi| = 2r$, $|\delta^i| > 0$ et $\sum_{j=1}^r|\delta^j|+|\rho| = 2r$. On obtient ainsi après intégrations par parties en ζ', pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, que $J_{1-\chi}$ est une combinaison linéaire d'intégrales de la forme

$$\vartheta^{\widetilde{\omega}+\widehat{\omega}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{2\pi i\omega}({}^tU_{\zeta'})^r\big(\partial_{\zeta'}^{\beta^1}T_{\nu',\widetilde{\omega},\varphi}P_{\widehat{\omega},\beta^2,\varphi}\partial_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta}^{\nu-\nu'}\partial_{\zeta'}^{\beta^3}r_{\beta,N,f}\,\big)(1-\chi_\varepsilon)d\zeta'\,d\vartheta'$$

où $|\widehat{\omega}| \leq |\beta^2|$. Nous avons noté $P_{\beta^2,\varphi} =: \sum_{\widehat{\omega}}P_{\widehat{\omega},\beta^2,\varphi}\vartheta^{\widehat{\omega}}$. D'après le Lemme 6.4.42 (ii), on voit que $P_{\widehat{\omega},\beta^2,\varphi} \in \mathcal{O}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,2|\beta^2|}^{-\varepsilon_v|\beta^2|/2,2\varepsilon_v|\beta^2|,(w_s'+1)|\beta^2|}$. Notons $\widetilde{T} := \partial_{\zeta'}^{\beta^1}T_{\nu',\widetilde{\omega},\varphi}P_{\widehat{\omega},\beta^2,\varphi}$. Le Lemme 6.4.42 (i) donne

$\widetilde{T} \in \mathcal{O}^{-(\varepsilon_v/2)|\beta^1+\beta^2|, c_0(|\mu|+N)+\varepsilon_v|\gamma|, c_0(|\nu|+N)}_{\sigma,\kappa_v,\varepsilon_v,\varepsilon_v,2(|\nu|+N)}(\mathbb{R})$ pour une constante $c_0 > 0$. Avec notre choix des paramètres η_1 et η_2, nous avons l'estimation suivante, valide dans le domain d'intégration de $J_{1-\chi}$,

$$\partial^\lambda_{\vartheta'}\partial^{\gamma+e_i}_{\zeta'}\omega = \mathcal{O}\big(\langle\zeta\rangle^{\varepsilon_v|\gamma|}\langle\zeta'\rangle^{\kappa_v|\gamma|}\langle\vartheta'\rangle^{1-|\lambda|}\big)\,.$$

En particulier, en notant $\mathcal{O}^{l,m}_{\kappa_v}$ l'espace des fonctions lisses f telles que pour tout n-multi-indices λ,γ, $\partial^\lambda_{\vartheta'}\partial^\gamma_{\zeta'}f = \mathcal{O}\big((\langle\zeta\rangle\langle\zeta'\rangle)^{l+\kappa_v|\gamma|}\langle\vartheta'\rangle^m\big)$, on voit que $|\nabla_{\zeta'}\omega|^2 \in \mathcal{O}^{0,2}_{\kappa_v}$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\lambda_{\vartheta'}|\nabla_{\zeta'}\omega|^{-4r} = \mathcal{O}(\langle\vartheta'\rangle^{-4r})$. De plus, chaque terme $P^\omega_{\rho,r}$ est dans $\mathcal{O}^{\kappa_v r,3r}_{\kappa_v}$ de sorte que finalement, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^n$

$$\partial^\lambda_{\vartheta'}\tfrac{P^\omega_{\rho,r}}{|\nabla_{\zeta'}\omega|^{4r}} = \mathcal{O}\big((\langle\zeta\rangle\langle\zeta'\rangle)^{\kappa_v r}\langle\vartheta'\rangle^{-r}\big)\,.$$

On vérifie aisément que si $r \geq 2n$, alors $h := ({}^tU_{\zeta'})^r\big(\partial^{\beta^1}_{\zeta'}\widetilde{T}\partial^{\nu-\nu'}_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta}\partial^{\beta^3}_{\zeta'}r_{\beta,N,f}\big)(1-\chi_\varepsilon)$ satisfait pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\big\|L^q_{\vartheta'}h\big\| \leq C_{\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta,q}\langle\vartheta'\rangle^{-2n}$. Par conséquent, on peut permuter les intégrations $d\zeta' d\vartheta' \to d\vartheta' d\zeta'$ et successivement intégrer par parties en ϑ', de sorte que finalement $J_{1-\chi}$ soit une combinaison linéaire de

$$\vartheta^{\widetilde{\omega}+\widehat{\omega}}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\omega}\langle\zeta'\rangle^{-2q}\partial^{\lambda^1}_{\vartheta'}\tfrac{P^\omega_{\rho,r}}{|\nabla_{\zeta'}\omega|^{4r}}\,\partial^{\rho^1}_{\zeta'}\widetilde{T}\,\partial^{\lambda^2}_{\vartheta'}\partial^{\nu-\nu'}_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta}\partial^{\beta^3+\rho^2}_{\zeta'}r_{\beta,N,f}\,\partial^{\lambda^3}_{\vartheta'}(1-\chi_\varepsilon)d\vartheta'\,d\zeta'$$

où $\sum_i\lambda^i = \lambda$, $|\lambda| \leq 2q$, $\sum_i\rho^i = \rho$, $|\rho| \leq r$. Nous avons aussi les estimations suivantes pour $c'_0, c'_1 > 0$,

$$\partial^{\lambda^2}_{\vartheta'}\partial^{\nu-\nu'}_{\mathrm{x},\zeta,\vartheta}\partial^{\beta^3+\rho^2}_{\zeta'}r_{\beta,N,f} = \mathcal{O}\big(\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-|\beta^3|)}(\langle\zeta\rangle\langle\zeta\rangle)^{c'_0+c'_1(|\mu-\mu'|+|\beta^3|+|\rho^2|)}\big)\,.$$

Avec le Lemme 6.4.43 (iv) nous voyons maintenant que l'intégrand j' de l'intégrale précédente est estimé par

$$\big\|j'\big\| \leq C\langle\vartheta'\rangle^{-r+|\mu|+N+1}\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-\varepsilon'_1(N+1))}\langle\zeta\rangle^{k_0+k_1N+k_2r+k_3|\mu|+\varepsilon_v|\gamma|}\langle\zeta'\rangle^{-2q+k_0+k_1N+k_2r+k_3|\nu|}$$

pour des constantes $k_0, k_1, k_2, k_3 > 0$. Si on fixe $r \geq 2n$ tel que

$$-r+|\mu|+N+1+2n = m+|\mu|-(N+1)+n\,,$$

et q tel que $-2q+k_0+k_1N+k_2r+k_3|\nu| \leq -2n$ on obtient finalement $\nu \in \mathbb{N}^{3n}$,

$$J_{1-\chi} = \mathcal{O}\big(\langle\mathrm{x}\rangle^{\sigma(l-\varepsilon'_1(N+1))}\langle\zeta\rangle^{k'_0+k'_1(N+1+|\mu|)+\varepsilon_v|\gamma|}\langle\vartheta\rangle^{m+|\mu|-(N+1)+n}\big)\,.$$

Le résultat est alors une conséquence de cette estimation et de celle obtenue sur J_χ.
(ii) L'estimation est obtenue en appliquant (i) et $N+1 = \max\{\,2(n+|\mu|), |m|\,\}$. La deuxième assertion est alors une conséquence du Lemme 6.4.14 (ii). □

Théoreme 6.4.47. *Si (C_σ) est vérifiée, Ψ^∞_σ est une $*$-sous-algèbre de $\Re(\mathcal{S})$. De plus, si $A \in \Psi^{l',m'}_\sigma$ et $B \in \Psi^{l,m}_\sigma$, alors $AB \in \Psi^{l+l',m+m'}_\sigma$ avec le développement asymptotique suivant du symbole normal de AB, dans une base $(z,\mathfrak{b})$:*

$$\sigma_0(AB)_{z,\mathfrak{b}} \sim \sum_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n} c_\beta c_\gamma\partial^{\gamma,\gamma}_{\zeta,\vartheta}\big(a(\mathrm{x},\vartheta)\partial^\beta_{\zeta'}\big(e^{2\pi i\langle\vartheta,\varphi_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle}(\partial^\beta_{\vartheta'}f_b)(\mathrm{x},\zeta,\zeta',L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta))\big)_{\zeta'=0}\tau^{-1}_{\mathrm{x},\zeta}\big)_{\zeta=0}$$

où $a := \sigma_0(A)_{z,\mathfrak{b}}$, $b := \sigma_0(B)_{z,\mathfrak{b}}$, $c_\beta := (i/2\pi)^{|\beta|}/\beta!$ et

$$f_b(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta') := \tau_{\mathrm{x},r_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')}\,b\circ\widetilde{\Xi}(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta')\,\tau_{\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'},q_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')}\,|J(R)|(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\,|\det(P^{z,\mathfrak{b}}_{-1,\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'})^{-1}|\,.$$

Démonstration. On fixe une base $(z, \mathfrak{b})$. On note K_{AB} le noyau de l'opérateur AB. En conséquence de la Proposition 6.4.32 nous avons pour tout $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$,

$$\langle (K_{AB})_{z,\mathfrak{b}}, u \otimes \overline{v} \rangle = \big(A_{z,\mathfrak{b}}(\mu^{-1} B_{z,\mathfrak{b}}(v)) | u \big).$$

On note $g := A_{z,\mathfrak{b}}(\mu^{-1} B_{z,\mathfrak{b}}(v))$. Pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, $g(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu a(\mathrm{x}, \vartheta)\, \widetilde{b}(\mathrm{x}, \vartheta)\, d\vartheta$, et

$$\widetilde{b}(\mathrm{x}, \vartheta) := \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i (\langle \vartheta, \zeta \rangle + \langle \vartheta', \zeta' \rangle)} \tau_{\mathrm{x},\zeta} b(\psi(\mathrm{x}, \zeta), \vartheta') \tau_{\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'} v(\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'})\, d\zeta'\, d\vartheta'\, d\zeta\,.$$

On suppose tout d'abord que $b \in S^{l,-2n}_{\sigma,z}$. Puisque $\zeta' \mapsto v(\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E_z)$, on peut permuter l'ordre d'intégration $d\zeta' d\vartheta' \mapsto d\vartheta'\, d\zeta'$ dans $\widetilde{b}(\mathrm{x}, \vartheta)$. Ainsi, après intégrations par parties en ϑ', on obtient pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\widetilde{b}(\mathrm{x}, \vartheta) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i \langle \vartheta, \zeta \rangle} \tau_{\mathrm{x},\zeta} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle \vartheta', \zeta' \rangle} \langle \zeta' \rangle^{-2p} (L^p_{\vartheta'} b)(\psi(\mathrm{x}, \zeta), \vartheta')\, d\vartheta' \Big)\, \tau_{\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'}\, v(\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'})\, d\zeta'\, d\zeta\,.$$

Avec l'estimation $\langle \mathrm{x}^{\zeta,\zeta'} \rangle \geq c \langle \zeta \rangle \langle \mathrm{x} \rangle^{-1} \langle \zeta' \rangle^{-1}$ pour un $c > 0$, on voit que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\Big\| v(\mathrm{x}^{\zeta,\zeta'}) \Big\| \leq c_N q_{0,N}(v) \langle \mathrm{x} \rangle^N \langle \zeta' \rangle^N \langle \zeta \rangle^{-N}$. Par conséquent, on obtient pour les intégrands b_p de $\widetilde{b}(\mathrm{x}, \vartheta)$: pour tout $\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta, \vartheta'$, tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\big\| b_p(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta, \vartheta') \big\| \leq C_{p,N} \langle \zeta' \rangle^{N-2p} \langle \mathrm{x} \rangle^{\sigma|l|+N} \langle \zeta \rangle^{\sigma|l|-N} \langle \vartheta' \rangle^{-2n}.$$

En prenant N tel que $\sigma|l| - N \leq -2n$ et en prenant p tel que $N - 2p \leq -2n$, on voit que $(\vartheta', \zeta', \zeta) \mapsto b_p(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta', \vartheta)$ est absolument intégrable et on peut ainsi appliquer le changement de variables $(\zeta, \zeta', \vartheta') \mapsto (R_{\mathrm{x}}(\zeta, \zeta'), \vartheta')$ à $\widetilde{b}(\mathrm{x}, \vartheta)$. Après inversion de l'intégration par parties en ϑ' et en appliquant le changement de variables $\vartheta' = -\widetilde{P}^{z,\mathfrak{b}}_{-1,\psi(\mathrm{x},\zeta),\zeta'}(\vartheta'')$, on obtient

$$\widetilde{b}(\mathrm{x}, \vartheta) = \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2\pi i (\langle \vartheta, r_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') \rangle + \langle \vartheta', \zeta' \rangle)} f_b(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta')\, v(\psi(\mathrm{x}, \zeta))\, d\vartheta'\, d\zeta'\, d\zeta\,.$$

D'après le Lemme 6.4.40 (ii) et (iii), le Lemme 6.4.38 (iii) et (iv) et le Lemme 6.4.39 (iii), on voit que $f_b \in \widetilde{\Pi}^{l,w_l,w_l,m}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}$ pour un $(w_l, \kappa) \in \mathbb{R}^2_+$ et $\varepsilon_1 > 0$, et l'application linéaire $b \mapsto f_b$ est continue sur tout espace de symboles $S^{l,m}_{\sigma,z}$ dans $\widetilde{\Pi}^{l,w_l,w_l,m}_{\sigma,\kappa,\varepsilon_1,z}$. Nous avons $g(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle \zeta, \vartheta \rangle} \mu a(\mathrm{x}, \vartheta)\, c_b(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) v(\psi(\mathrm{x}, \zeta)\, d\zeta\, d\vartheta$ et $\langle (K_{AB})_{z,\mathfrak{b}}, u \otimes \overline{v} \rangle = \langle \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(d_b), u \otimes \overline{v} \rangle$ où $d_b(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := \mu a(\mathrm{x}, \vartheta)\, c_b(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\, \tau^{-1}(\mathrm{x}, \zeta)$ et

$$c_b(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i (\langle \vartheta, s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') \rangle + \langle \vartheta', \zeta' \rangle)} f_b(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta')\, d\vartheta'\, d\zeta'\,.$$

En utilisant maintenant la fonction de cut-off $(\mathrm{x}, \zeta, \zeta') \mapsto \chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x}, \zeta, \zeta')$ on voit que

$$c_b(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) = \Pi(f_b)(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta) + S_{m,w_l}(f_b)(\mathrm{x}, \zeta, \vartheta)\,.$$

Pour cette égalité nous avons utilisé la formule du Lemme 6.23 et des intégration par parties en ϑ' dans l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i (\langle \vartheta, s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta') \rangle + \langle \vartheta', \zeta' \rangle)} f_b(\mathrm{x}, \zeta, \zeta', \vartheta')(1 - \chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x}, \zeta, \zeta'))\, d\vartheta'\, d\zeta'\,,$$

qui sont autorisées car $b \in S^{l,-2n}_{\sigma,z}$ par hypothèse. Dans

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i(\langle\vartheta, s_{\mathrm{x},\zeta}(\zeta')\rangle + \langle\vartheta',\zeta'\rangle)} f_b(\mathrm{x},\zeta,\zeta',\vartheta')\chi_{\delta,\eta}(\mathrm{x},\zeta,\zeta')\, d\vartheta'\, d\zeta' ,$$

nous avons fait une translation des variables ϑ' par $-L_{\mathrm{x},\zeta}(\vartheta)$ et permuté l'ordre de l'intégration $d\vartheta'\, d\zeta' \to d\zeta'\, d\vartheta'$, ce qui est légal puisque $b \in S^{l,-2n}_{\sigma,z}$ et $\zeta' \mapsto \chi(\mathrm{x},\zeta,\zeta')$ est à support compact. On déduit du Lemme 6.4.45 (ii) et du Lemme 6.4.46 (ii) que $b \mapsto \langle \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(d_b), u \otimes \overline{v}\rangle$ est continu sur $S^{l,m}_{\sigma,z}$, et alors, d'après le résultat de densité du Lemme 6.4.6, nous avons l'égalité $\langle (K_{AB})_{z,\mathfrak{b}}, u \otimes \overline{v}\rangle = \langle \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(d_b), u \otimes \overline{v}\rangle$ même lorsque $b \in S^{l,-2n}_{\sigma,z}$ n'est pas supposé.

Rappelons que l'application linéaire $s : a \mapsto s(a)$ (pour $\Gamma = \Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}$) donnée au Lemme 6.4.21 (ii) est telle que $\mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(f) = \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(s(f))$ pour tout $f \in \Pi^{l,w,m}_{\sigma,\kappa,z}$.

On définit $f_{a,b,\beta} := \mu a(f_b)_{\beta,\varphi}\tau^{-1}$, $r_N := \mu a \Pi_{R,N}(f_b)\tau^{-1}$, $s_0 := \mu a S_{m,w_l}(f_b)\tau^{-1}$. On considère maintenant un symbole $s_{a,b}$ tel que

$$s_{a,b} \sim \sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} \tfrac{(i/2\pi)^{|\beta|}}{\beta!} s\big(f_{a,b,\beta}\big) .$$

Un tel symbole existe car d'après le Lemme 6.4.42 (iii), $s(f_{a,b,\beta}) \in S^{l+l'-\varepsilon_1'|\beta|, m+m'-|\beta|/2}_{\sigma,z}$. D'après le Lemme 6.4.46 (i), nous avons pour tout $N \geq |m|$,

$$u_N := s(\mu a \Pi_N(f_b)\tau^{-1}) - s_{a,b} \in S^{l+l'-\varepsilon_1'(N+1), m+m'-(N+1)/2}_{\sigma,z}.$$

Ainsi, en notant $S_0 := \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(s_0)$, qui est dans $\mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(S^{-\infty}_{\sigma,z})$ d'après le Lemme 6.4.45, et en posant $R_N := \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(r_N)$ et $U_N := \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(u_N)$ nous avons

$$\begin{aligned}(K_{AB})_{z,\mathfrak{b}} = \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(d_b) &= \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(s(\mu a \Pi_N(f_b)\tau^{-1})) + R_N + S_0 \\ &= \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(s_{a,b}) + U_N + R_N + S_0 .\end{aligned}$$

Les Lemme 6.4.18 et Lemme 6.4.46 (i) impliquent alors que le noyau $U_N + R_N$ (qui est indépendant de N) est dans $\mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(S^{-\infty}_{\sigma,z})$. Par conséquent, $(K_{AB})_{z,\mathfrak{b}} = \mathfrak{Op}_{\Gamma_{0,z,\mathfrak{b}}}(s_{a,b} + r)$ où $r \in S^{-\infty}_{\sigma,z}$ et la formule de produit de symboles est une conséquence du Lemme 6.4.21 (ii). □

6.5 Exemples

Afin de pouvoir appliquer les calculs symbolique et pseudodifférentiel précédents à des cas concrets, nous allons voir dans cette section des exemples de variétés exponentielles satisfaisant les hypothèses de géométrie de type S_σ.

6.5.1 Une famille de S_σ-linéarisations sur l'espace euclidien

Rappelons que $G^\times_\sigma(\mathbb{R}^n)$ $(0 \leq \sigma \leq 1)$ est défini comme le sous-groupe de difféomorphismes s sur $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout n-multi-indice $\alpha \neq 0$, il existe C_α, $C'_\alpha > 0$, tels que pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\partial^\alpha s(\mathrm{x})\| \leq C_\alpha \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(1-|\alpha|)}$ et $\big\|\partial^\alpha s^{-1}(\mathrm{x})\big\| \leq C'_\alpha \langle \mathrm{x}\rangle^{\sigma(1-|\alpha|)}$. $G^\times_\sigma(\mathbb{R}^n)$ contient $GL_n(\mathbb{R})$ et les translations $T_v := w \mapsto v + w$.

On fixe $\eta \in]0,1[$ tel que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|_1 \leq \eta$, nous avons $\det(I_n + A) \geq \frac{1}{2}$, où $\|A\|_1 := \max_{i,j} |A_{i,j}|$. En prenant $h \in G_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $1 \leq i,j \leq n$, $|\partial_j h^i| \leq \eta/16$, et $g(x) := h(x) - h(0) - dh_0(x)$ on voit que $s := \mathrm{Id} + g$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ appartenant à $G_0^\times(\mathbb{R}^n)$, satisfaisant $s(0) = 0$ et $ds_0 = \mathrm{Id}$.
On pose, pour $\sigma \in [0,1]$,

$$\psi(x,\xi) := x + \xi + \langle x\rangle^\sigma g(\tfrac{\xi}{\langle x\rangle^\sigma}) = x + \langle x\rangle^\sigma s(\tfrac{\xi}{\langle x\rangle^\sigma}).$$

On obtient alors

Proposition 6.5.1. *$(\mathbb{R}^n, +, d\lambda, \psi)$ est de type S_σ et satisfait (C_σ) (voir Définition 6.4.37).*

Démonstration. Un calcul montre que $\psi \in H_\sigma(\mathbb{R}^n)$ et $\psi(\mathrm{x}, \zeta) = \mathcal{O}(\langle \mathrm{x}\rangle\langle\xi\rangle)$.
Nous avons $\overline{\psi}(x,y) = \langle x\rangle^\sigma s^{-1}(\frac{y-x}{\langle x\rangle^\sigma})$, et ainsi $\overline{\psi} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$. En notant

$$\widehat{g} := g \circ (g + \mathrm{Id})^{-1} \circ -\mathrm{Id} \in G_0(\mathbb{R}^n),$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned}\Upsilon_{1,T}(x,\xi) &= \xi + \langle x\rangle^\sigma g(\tfrac{\xi}{\langle x\rangle^\sigma}) + \langle \psi(x,\xi)\rangle^\sigma \widehat{g}\big(\langle\psi(x,\xi)\rangle^{-\sigma}\langle x\rangle^\sigma s(\tfrac{\xi}{\langle x\rangle^\sigma})\big)\\ &= (\mathrm{Id} + V_{x,\xi} + W_{x,\xi})(\xi)\end{aligned}$$

où $V_{x,\xi} := [\int_0^1 \partial_j v_x^i(t\xi)dt]_{i,j}$, $W_{x,\xi} := [\int_0^1 \partial_j w_{x,\xi}^i(t\xi)dt]_{i,j}$, et $v_x := M_x \circ g \circ M_x^{-1}$,

$$w_{x,\xi} := M_{\psi(x,\xi)} \circ \widehat{g} \circ M_{\psi(x,\xi)}^{-1} \circ M_x \circ s \circ M_x^{-1},$$

M_x étant la multiplication par $\langle x\rangle^\sigma$. On obtient $dv_x = dg \circ M_x^{-1}$ et $dw_{x,\xi} = d\widehat{g} \circ (M_{\psi(x,\xi)}^{-1} \circ M_x \circ s \circ M_x^{-1})\, ds \circ M_x^{-1}$. Après calculs, on vérifie que $V_{x,\xi}$ et $W_{x,\xi}$ sont dans E_σ^0. De plus, nous avons $\|V_{x,\xi}\|_1 \leq \eta/2$ et $\|W_{x,\xi}\|_1 \leq \eta/2$, ce qui prouve que $P_{x,\xi} := \mathrm{Id} + V_{x,\xi} + W_{x,\xi}$ est inversible avec $\det P_{x,\xi} \geq \frac{1}{2}$. Par conséquent son inverse $P_{x,\xi}^{-1} = (\det P_{x,\xi})^{-1}\, {}^t\mathrm{cof}(P_{x,\xi})$ est aussi dans E_σ^0. On déduit alors que $(\mathbb{R}^n, +, d\lambda, \psi)$ est de type S_σ. Avec $r(x,\xi,\xi') = -\overline{\psi}(x, \psi(\psi(x,-\xi), -\xi'))$, on obtient

$$r(x,\xi,\xi') = -\langle x\rangle^\sigma s^{-1}\big(s(\tfrac{-\xi}{\langle x\rangle^\sigma}) + \tfrac{\langle\psi(x,-\xi)\rangle^\sigma}{\langle x\rangle^\sigma} s(\tfrac{-\xi'}{\langle\psi(x,-\xi)\rangle^\sigma})\big).$$

de sorte que $(dr_{x,\xi})_{\xi'} = (ds^{-1} \circ w)\,(ds \circ u)$ où

$$w(x,\xi,\xi') := s(\tfrac{-\xi}{\langle x\rangle^\sigma}) + v(x,\xi,\xi'), \quad v(x,\xi,\xi) := \tfrac{\langle\psi(x,-\xi)\rangle^\sigma}{\langle x\rangle^\sigma} s(\tfrac{-\xi'}{\langle\psi(x,-\xi)\rangle^\sigma}),$$

et $u(x,\xi,\xi') := -\frac{\xi'}{\langle\psi(x,-\xi)\rangle^\sigma}$. On vérifie que v satisfait

$$\partial^{(\mu,\gamma)} v = \mathcal{O}\big(\langle\psi(x,-\xi)\rangle^{-\sigma|\gamma|}\langle x\rangle^{-\sigma(|\mu|+1)}\langle\zeta\rangle^{\kappa_1|\mu|}\langle\zeta'\rangle^{|\mu|+1}\big).$$

Il résulte de l'inégalité de Peetre que pour tout $\varepsilon \in [0,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x+y\rangle \geq 2^{-\varepsilon/2}\frac{\langle x\rangle^\varepsilon}{\langle y\rangle^\varepsilon}$, ce qui implique que $\langle\psi(x,-\xi)\rangle^\sigma = \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-\sigma\varepsilon}\langle\xi\rangle^{\sigma\varepsilon}\big)$. Par conséquent on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}\partial^{(\mu,\gamma)} w &= \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-\sigma(1+|\mu|+\varepsilon|\gamma|)}\langle\zeta\rangle^{\kappa_1|\mu|+\varepsilon|\gamma|+\delta_{\gamma,0}}\langle\zeta'\rangle^{|\mu|+1}\big),\\ \partial^{(\mu,\gamma)} u &= \mathcal{O}\big(\langle x\rangle^{-\sigma(|\mu|+\varepsilon|\gamma|)}\langle\zeta\rangle^{\kappa_1|\mu|+\varepsilon|\gamma|}\langle\zeta'\rangle^{1-|\gamma|}\big).\end{aligned}$$

On déduit de ceci que (C_σ) est satisfaite. □

On vérifie aussi que l'hypothèse (H_V) de la section 6.4.5 est satisfaite de sorte que le calcul pseudodifférentiel précédent (pour $\lambda \in \{0,1\}$) est alors valide sur $(\mathbb{R}^n, +, d\lambda, \psi)$, et prouve en particulier que l'espace des operators de la forme

$$A(v)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2\pi i\langle\theta,\xi\rangle} a(x,\theta) v(\psi(x,-\xi))\, d\xi\, d\theta = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-2\pi i\langle\theta,\overline{\psi}_x(y)\rangle} a(x,\theta) v(y) |J(\overline{\psi}_x)|(y)\, dy\, d\theta$$

où $a \in S^\infty_\sigma(\mathbb{R}^{2n})$, est égal à l'algèbre standard des opérateurs pseudodifférentiels $\mathbb{R}^n$. Cependant nous avons ici à notre disposition une nouvelle formule de composition de symboles (Théorème 6.4.47), adaptée à la linéarisation ψ.

6.5.2 S_1-géométrie du plan hyperbolique

L'espace hyperbolique de dimension 2 est défini comme la sous-variété

$$\mathbb{H} := \{\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1 \text{ et } x_3 > 0 \,\}$$

de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$ avec la forme bilinéaire symétrique $\langle v, w\rangle_{2,1} = v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3$. La métrique induite sur $\mathbb{H}$ $ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 - (dx_3)^2$ est riemannienne et il connu que $\mathbb{H}$ est une variété symétrique de Cartan–Hadamard avec courbure sectionnelle constante et négative (égale à -1). L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$ donnée par

$$\varphi(x,y) := (\sinh x,\ \cosh x \sinh y,\ \cosh x \cosh y)$$

est un difféomorphisme avec inverse $\varphi^{-1}(x_1,x_2,x_3) = (\operatorname{argsh} x_1,\ \operatorname{argsh}(\frac{x_2}{\cosh(\operatorname{argsh} x_1)}))$. Par conséquent, on peut construire un autre modèle de l'espace hyperbolique, noté R^2 avec domaine $\mathbb{R}^2$ et métrique obtenue par transfert de celle sur $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{R}^2$. Un calcul montre que cette métrique est $ds^2 := (dx)^2 + \cosh^2 x\,(dy)^2$. On notera $\|\cdot\|_p$ la norme sur $T_pR^2 \simeq \mathbb{R}^2$ donnée par cette métrique, où p est un point dans $\mathbb{R}^2$, et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. L'équation des géodésiques sur R^2 aboutit au système suivant d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} &x'' - \cosh x\, \sinh x\, (y')^2 = 0\,, \\ &y'' + 2\tanh x\, x'\, y' = 0\,. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Pour chaque $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\|_p = 1$ il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ $\gamma_{p,v} = (x(t), y(t))$ de (6.31) telle que $\gamma_{p,v}(0) = p$ et $\gamma'_{p,v}(0) = v$.

En chaque point $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut définir l'ellipse centrée en 0 dans $T_pR^2 \simeq \mathbb{R}^2$ avec l'équation $X^2 + (\cosh^2 x)\, Y^2 = 1$. L'équation polaire de cette ellipse est

$$e_p(\theta) := \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x\, \sin^2\theta}}\,.$$

Ainsi, tout vecteur tangent $v \in T_pR^2$ avec décompostion $v = \|v\|\,(\cos\theta, \sin\theta)$ admet la décomposition polaire $v = \|v\|_p\,(\cos_p\theta, \sin_p\theta)$ où $\cos_p\theta := e_p(\theta)\,\cos\theta$ et $\sin_p\theta := e_p(\theta)\,\sin\theta$. Remarquons que e_p, $\cos_p$, $\sin_p$ et $\|\cdot\|_p$ sont en fait indépendant de la seconde coordonnée y de p. On utilisera donc les notations $e_x := e_{(x,y)}$ et de façon similaire pour $\cos_x$, $\sin_x$ et $\|\cdot\|_x$. Notons que pour tout vecteur $v := \|v\|\,(\cos\theta, \sin\theta)$, nous avons $\|v\|_x = \|v\|\,/e_x(\theta)$.

Si $p \in \mathbb{H}$ et $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ sont tels que $\langle p, v\rangle_{2,1} = 0$ et $\langle v, v\rangle_{2,1} = 1$, alors l'unique géodésique $\alpha_{p,v}$ sur $\mathbb{H}$ telle que $\alpha_{p,v}(0) = p$ et $\alpha'_{p,v}(0) = v$ est $\alpha_{p,v}(t) = \cosh t\, p + \sinh t\, v$ (voir par exemple [85,

p.195]). Par conséquent, les géodésiques $\gamma_{p,v}$ sur l'espace R^2 peuvent s'obtenir par transfert des géodésiques $\alpha_{p,v}$ par l'isométrie φ. On vérifie après de long calculs que pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ donné et $\theta \in \mathbb{R}$, la courbe suivante

$$\begin{aligned} \gamma^1_{p,\theta}(t) &= \operatorname{argsh}\big(\cosh t\, \sinh x + \sinh t\, \cosh x\, \cos_x \theta\big)\,, \\ \gamma^2_{p,\theta}(t) &= \operatorname{argsh}\Big(\tfrac{\cosh t\, \cosh x\, \sinh y + \sinh t\,(\sinh x\, \sinh y\, \cos_x \theta + \cosh x\, \cosh y\, \sin_x \theta)}{\cosh\big(\operatorname{argsh}(\cosh t\, \sinh x + \sinh t\, \cosh x\, \cos_x \theta)\big)}\Big)\,, \end{aligned} \tag{6.32}$$

où $t \in \mathbb{R}$, est l'unique solution maximale du système géodésique (6.31) satisfaisant les conditions initiales : $\gamma_{p,\theta}(0) = p$ et $\gamma'_{p,\theta}(0) = (\cos_x(\theta), \sin_x(\theta))$. Une formule explicite pour l'application exponentielle en tout point peut donc être obtenue, puisque nous avons $\exp_p(v) = \gamma_{p,\theta}(\|v\|_x)$ où $v \in T_pR^2 - \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $v = \|v\|\,(\cos\theta, \sin\theta)$. L'intérêt principal de ce modèle est qu'il est possible d'écrire explicitement l'application logarithme (l'inverse de l'application exponentielle) en tout point. On trouve, après des calculs techniques, que pour tout $p = (x, y)$ et $p' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \exp_p^{-1}(p') &= \tfrac{\operatorname{argch} f_p(p')}{\sqrt{(f_p(p'))^2 - 1}} \begin{pmatrix} -g_p(p') \\ \cosh x'\ \operatorname{sech} x\ \sinh(y' - y) \end{pmatrix}\,, \\ f_p(p') &:= \cosh(x')\cosh(y' - y)\cosh(x) - \sinh(x')\sinh(x)\,, \\ g_p(p') &:= \cosh(x')\cosh(y' - y)\sinh(x) - \sinh(x')\cosh(x)\,. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Nous avons $\left\|\exp_p^{-1}(p')\right\|_p = \operatorname{argch} f_p(p')$ qui est la distance géodésique entre deux points arbitraires p, p' dans le modèle hyperbolique R^2. Le but de cette section est de prouver le résultat suivant.

Théoreme 6.5.2. $\mathbb{H}$ *est de type* S_1.

On note $\mathbb{R}^2_C := \mathbb{R}^2 \backslash]-\infty, 0] \times \{0\}$ et $\mathbb{R}^2_P :=]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\chi_x : \mathbb{R}^2_C \to \mathbb{R}^2_P$ donnée par $\chi_x(v_1, v_2) := (\|v\|_x, \arctan(v_1, v_2))$ où $\arctan(v_1, v_2)$ est l'unique élément θ de $]-\pi, \pi[$ tel que $v_1 + iv_2 = \|v\| \exp(i\theta)$, est un difféomorphisme avec inverse $\chi_x^{-1}(r, \theta) = (r \cos_x \theta, r \sin_x \theta)$.

Lemme 6.5.3. *Soient* $x \in \mathbb{R}$ *et* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *tels que* $f \circ \chi_x^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2_P, \mathbb{R})$ *satisfait pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, *et* $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2_P$, $|\partial^{\alpha,\beta} f \circ \chi_x^{-1}(r, \theta)| \le C_{\alpha,\beta} \langle r \rangle^{1-\alpha}$ *où* $C_{\alpha,\beta} > 0$. *Alors* $f \in G_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Démonstration. D'après le Théorème 6.2.11, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \backslash \{(0, 0)\}$,

$$\partial^{\alpha,\beta} f = \sum_{1 \le |(\alpha',\beta')| \le |(\alpha,\beta)|} (\partial^{\alpha',\beta'} f \circ \chi_x^{-1}) \circ \chi_x\ P_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}(\chi_x)$$

sur $\mathbb{R}^2_C$, où $P_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}(\chi_x)$ est une combinaison linéaire de $\prod_{j=1}^s (\partial^{l^j} \chi_x)^{k^j}$ où $s \in \{1, \cdots, \alpha + \beta\}$. Les k^j et l^j sont des 2-multi-indices (pour $1 \le j \le s$) tels que $|k^j| > 0$, $\sum_{j=1}^s k^j = (\alpha', \beta')$ et $\sum_{j=1}^s |k^j| l^j = (\alpha, \beta)$.

Par définition, $\chi_x(v) = (\chi_x^1(v), \chi_x^2(v)) = (\|v\|_x, \arctan(v_1, v_2))$. On vérifie que pour tout 2-multi-indice ν, $|\partial^\nu \chi_x^1(v)| \le C_\nu \langle v \rangle^{1-|\nu|}$ et $|\partial^\nu \chi_x^2(v)| \le C'_\nu \langle v \rangle^{-|\nu|}$ sur $\mathbb{R}^2_C$. Par conséquent, pour chaque $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ avec $1 \le \alpha' + \beta' \le \alpha + \beta$ il existe $C_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^2_C$,

$$|P_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}(\chi_x)(v)| \le C_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} \langle v \rangle^{\alpha' - (\alpha+\beta)}\,.$$

De plus, par hypothèse, il existe $C_{\alpha',\beta'} > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^2_C$,

$$|(\partial^{\alpha',\beta'} f \circ \chi_x^{-1}) \circ \chi_x(v)| \leq C_{\alpha',\beta'} \langle v \rangle^{1-\alpha'}.$$

Ceci donne $f \in G_1(\mathbb{R}^2_C, \mathbb{R})$. L'extension à $G_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est une conséquence directe du caractère lisse de f sur $\mathbb{R}^2$ et du fait que $\mathbb{R}^2_C$ soit dense dans $\mathbb{R}^2$. □

On utilisera la proposition suivante, qui donne une expression formelle et la combinatoire des dérivées successives de l'inverse d'une fonction lisse.

Proposition 6.5.4. *Soit $s > 0$. Pour tout n-multi-indice ($n \in \mathbb{N}^*$) α non nul, il existe un ensemble fini non vide J_α, des nombres réels non nuls $(\lambda_{s,\alpha,p})_{p \in J_\alpha}$ et des n-multi-indices $\beta^{\alpha,p,j}$ (avec $p \in J_\alpha$, $1 \leq j \leq |\alpha|$) tels que*
- pour tout $p \in J_\alpha$, $\sum_{1 \leq j \leq |\alpha|} \beta^{\alpha,p,j} = \alpha$,
- pour toute fonction lisse $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^*_+)$,

$$\partial^\alpha \tfrac{1}{f^s} = \tfrac{1}{f^{|\alpha|+s}} \sum_{p \in J_\alpha} \lambda_{s,\alpha,p} \prod_{j=1}^{|\alpha|} \partial^{\beta^{\alpha,p,j}} f\,.$$

Démonstration. Le résultat est vrai pour $|\alpha| = 1$. Supposons alors que le résultat soit vérifié pour tout n-multi-indice α tel que $|\alpha| = k$, où $k \in \mathbb{N}^*$ et soit α' un n-multi-indice tel que $|\alpha'| = k+1$. Soit i le plus petit élément de $\{1, \cdots, n\}$ tel que $\alpha'_i \geq 1$, et posons

$$\alpha := (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_i - 1, \alpha'_{i+1}, \cdots, \alpha'_n).$$

Ainsi pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^*_+)$, $\partial^{\alpha'} \frac{1}{f^s} = \partial_i \partial^\alpha \frac{1}{f^s}$. Puisque $|\alpha| = k$, il existe un ensemble fini non vide J_α, des réels non nuls $(\lambda_{s,\alpha,p})_{p \in J_\alpha}$ et des n-multi-indices $\beta^{\alpha,p,j}$ (avec $p \in J_\alpha$, $1 \leq j \leq |\alpha|$) tels que pour tout $p \in J_\alpha$, $\sum_{1 \leq j \leq |\alpha|} \beta^{\alpha,p,j} = \alpha$, et tels que pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^*_+)$, $\partial^\alpha \frac{1}{f^s} = \frac{1}{f^{|\alpha|+s}} \sum_{p \in J_\alpha} \lambda_{s,\alpha,p} \prod_{j=1}^{|\alpha|} \partial^{\beta^{\alpha,p,j}} f$. Par conséquent, avec la formule $\partial_i \prod_{j=1}^{|\alpha|} g_j = \sum_{q=1}^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{|\alpha|} \partial^{\delta_{q,j} e_i} g_j$, nous obtenons pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^*_+)$,

$$\partial^{\alpha'} \tfrac{1}{f^s} = \tfrac{1}{f^{|\alpha'|+s}} \Big(\sum_{p \in J_\alpha} -(|\alpha|+s) \lambda_{s,\alpha,p} (\prod_{j=1}^{|\alpha|} \partial^{\beta^{\alpha,p,j}} f) \partial_i f + \sum_{(p,q) \in J_\alpha \times \mathbb{N}_{|\alpha|}} \lambda_{s,\alpha,p} (\prod_{j=1}^{|\alpha|} \partial^{\delta_{q,j} e_i + \beta^{\alpha,p,j}} f) f \Big)\,.$$

Ainsi, si on prend $J_{\alpha'} = J_\alpha \coprod (J_\alpha \times \mathbb{N}_{|\alpha|})$, $\lambda_{s,\alpha',\widetilde{p}} := -(s+|\alpha|)\lambda_{s,\alpha,p}$ si $\widetilde{p} = p \in J_\alpha$, $\lambda_{s,\alpha',\widetilde{p}} := \lambda_{s,\alpha,p}$ si $\widetilde{p} = (p,q) \in J_\alpha \times \mathbb{N}_{|\alpha|}$, $\beta^{\alpha',\widetilde{p},j} := \beta^{\alpha,p,j}$ si $\widetilde{p} = p \in J_\alpha$ et $1 \leq j \leq |\alpha|$, $\beta^{\alpha',\widetilde{p},j} := e_i$ si $\widetilde{p} = p \in J_\alpha$ et $j = |\alpha|+1 = |\alpha'|$, $\beta^{\alpha',\widetilde{p},j} := \delta_{q,j} e_i + \beta^{\alpha,p,j}$ si $\widetilde{p} = (p,q) \in J_\alpha \times \mathbb{N}_{|\alpha|}$ et $1 \leq j \leq |\alpha|$ et $\beta^{\alpha',\widetilde{p},j} := 0$ si $\widetilde{p} = (p,q) \in J_\alpha \times \mathbb{N}_{|\alpha|}$ et $j = |\alpha|+1 = |\alpha'|$, le résultat est alors vrai pour α'. □

Avec la convention $J_0 := \{1\}$, $\lambda_{s,0,1} := 1$ et $\prod_{j=1}^0 := 1$, la formule donnant $\partial^\alpha \frac{1}{f^s}$ dans le lemme précédent est encore valide lorsque $\alpha = 0$. Quand $s \in \mathbb{N}^*$, le résultat est aussi valide pour des fonctions lisses à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.

On note H_P l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^2_P, \mathbb{R})$ de la forme $(r,\theta) \mapsto a(\theta)\cosh r + b(\theta)\sinh r$ où $a, b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et $A_{P,k}$ l' espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2_P, \mathbb{R})$ telles que pour tout 2-multi-indice (α,β) avec $\alpha \leq k \in \mathbb{N}$, il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2_P$, $|\partial^{\alpha,\beta} f(r,\theta)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle r \rangle^{k-\alpha}$,

et aussi tel que pour tout 2-multi-indice (α,β) avec $\alpha \geq k+1$, il existe $C'_{\alpha,\beta} > 0$ tel que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2_P$, $|\partial^{\alpha,\beta} f(r,\theta)| \leq C'_{\alpha,\beta} e^{-2r}$. Clairement, $A_{P,k} \subset S_{P,k}$ où $S_{P,k}$ est l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2_P,\mathbb{R})$ telles que pour tout 2-multi-indice (α,β), il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2_P$, $|\partial^{\alpha,\beta} f(r,\theta)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle r\rangle^{k-\alpha}$. D'après la règle de Leibniz, $S_{P,k}S_{P,k'} \subseteq S_{P,k+k'}$. On note N_P l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2_P,\mathbb{R})$ telles que pour tout 2-multi-indice (α,β) il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2_P$, $|\partial^{\alpha,\beta} f(r,\theta)| \leq C_{\alpha,\beta} e^{-2r}$.

Si $r_0 > 0$ on définit les espaces H_{P,r_0}, A_{P,k,r_0}, S_{P,k,r_0} et N_{P,r_0} exactement comme avant, avec $\mathbb{R}^2_P$ remplacé par $\mathbb{R}^2_{P,r_0} :=]r_0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$.

Lemme 6.5.5. *Soient $f,g,h,w \in H_{P,r_0}$ où $r_0 > 0$, telles qu'il existe $\varepsilon > 0$, $C > 1$ tels que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2_{P,r_0}$, $f \geq C$, $f \geq \varepsilon\, e^r$ et $h^2+g^2 \geq \varepsilon\, e^{2r}$.*
(i) Les fonctions $\frac{w}{(h^2+g^2)^{3/2}}$, $\frac{w}{(f^2-1)^{3/2}}$ et toute fonction de la forme $(r,\theta) \mapsto \frac{\sum_{k=-4}^{4} b_k(\theta)e^{kr}}{((h^2+g^2)(1+h^2+g^2))^{3/2}}$, où $b_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sont dans N_{P,r_0}.
(ii) Les fonctions $\operatorname{argch}\sqrt{1+h^2+g^2}$ et $\operatorname{argch} f$ sont dans $A_{P,1,r_0}$.
(iii) Les fonctions $\frac{w}{\sqrt{h^2+g^2}}$ et $\frac{w}{\sqrt{f^2-1}}$ sont dans $A_{P,0,r_0}$.

Démonstration. (i) On donne une preuve pour $\frac{w}{(h^2+g^2)^{3/2}}$. Les autres cas sont similaires. D'après la Proposition 6.5.4 et la règle de Leibniz, nous avons pour tout 2-multi-indice ν,

$$\partial^\nu \frac{w}{(h^2+g^2)^{3/2}} = \sum_{\nu'\leq\nu} \binom{\nu}{\nu'} \frac{\partial^{\nu-\nu'} w}{(h^2+g^2)^{3/2+|\nu'|}} \sum_{p\in J_{\nu'}} \lambda_{3/2,\nu',p} \prod_{j=1}^{|\nu'|} \partial^{\beta^{\nu',p,j}}(h^2+g^2)\,.$$

Notons que nous avons pour tout 2-multi-indice ν, $\partial^\nu(h^2+g^2) = \mathcal{O}(e^{2r})$ et $\partial^\nu w = \mathcal{O}(e^r)$. Le résultat s'en déduit.
(ii) D'après (i), puisque $\partial_r^2 \operatorname{argch}\sqrt{1+h^2+g^2}$ est de la forme $(r,\theta) \mapsto \frac{\sum_{k=-4}^{4} b_k(\theta)e^{kr}}{((h^2+g^2)(1+h^2+g^2))^{3/2}}$ où $b_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et $\partial_r^2 \operatorname{argch} f$ est de la forme $\frac{w}{(f^2-1)^{3/2}}$ où $w \in H_{P,r_0}$, nous avons seulement besoin de vérifier que pour $0 \leq \alpha \leq 1$, et $\beta \in \mathbb{N}, \partial^{\alpha,\beta} \operatorname{argch}\sqrt{1+h^2+g^2} = \mathcal{O}(\langle r\rangle^{1-\alpha})$ et $\partial^{\alpha,\beta} \operatorname{argch} f = \mathcal{O}(\langle r\rangle^{1-\alpha})$. Puisque $\partial_r \operatorname{argch}\sqrt{1+h^2+g^2} = \frac{(\partial_r h)h+(\partial_r g)g}{\sqrt{(h^2+g^2)(1+h^2+g^2)}}$, $\partial_r \operatorname{argch} f = \frac{\partial_r f}{\sqrt{f^2-1}}$, $\partial_\theta \operatorname{argch}\sqrt{1+h^2+g^2} = \frac{(\partial_\theta h)h+(\partial_\theta g)g}{\sqrt{(h^2+g^2)(1+h^2+g^2)}}$ et $\partial_\theta \operatorname{argch} f = \frac{\partial_\theta f}{\sqrt{f^2-1}}$, le résultat découle d'une application de la Proposition 6.5.4.
(iii) D'après (i), puisque $\partial_r \frac{w}{\sqrt{h^2+g^2}}$ est de la forme $\frac{w_1}{(h^2+g^2)^{3/2}}$ où $w_1 \in H_{P,r_0}$, et $\partial_r \frac{w}{\sqrt{f^2-1}}$ est de la forme $\frac{w_2}{(f^2-1)^{3/2}}$ où $w_2 \in H_{P,r_0}$, nous avons seulement à vérifier que $\partial^{0,\beta} \frac{w}{\sqrt{h^2+g^2}} = \mathcal{O}(1)$ et $\partial^{0,\beta} \frac{w}{\sqrt{f^2-1}} = \mathcal{O}(1)$ pour $\beta \in \mathbb{N}$. Ceci est une conséquence de la Proposition 6.5.4. □

Démonstration du Théorème 6.5.2. D'après le Lemme 6.2.14 (iii) et la Proposition 6.2.12, il est suffisant de prouver que pour tout $p := (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $\exp_p^{-1}\circ\exp_0$ et $\exp_0^{-1}\circ\exp_p$ sont dans $G_1(\mathbb{R}^2)$. Un calcul basé sur (6.32) et (6.33) montre que sur $\mathbb{R}^2_P$,

$$\exp_p^{-1}\circ\exp_0\circ\chi_0^{-1} = (\operatorname{argch} f)\big(\tfrac{w_1}{\sqrt{f^2-1}}, \tfrac{w_2}{\sqrt{f^2-1}}\big)\,,$$
$$\exp_0^{-1}\circ\exp_p\circ\chi_x^{-1} = (\operatorname{argch}\sqrt{1+h^2+g^2})\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+g^2}}, \tfrac{g}{\sqrt{h^2+g^2}}\big)\,,$$

où

$$\begin{aligned}
f(r,\theta) &:= \cosh r \cosh y \cosh x - \sinh r(\sinh x \cos\theta + \sinh y \cosh x \sin\theta)\,,\\
w_1(r,\theta) &:= -\cosh r \cosh y \sinh x + \sinh r(\cosh x \cos\theta + \sinh y \sinh x \sin\theta)\,,\\
w_2(r,\theta) &:= -\cosh r \sinh y \operatorname{sech} x + \sinh r \sin\theta \cosh y \operatorname{sech} x\,,\\
h(r,\theta) &:= \cosh r \sinh x + \sinh r \cosh x \cos_x \theta\,,\\
g(r,\theta) &:= \cosh r \cosh x \sinh y + \sinh r(\sinh x \sinh y \cos_x \theta + \cosh x \cosh y \sin_x \theta)\,.
\end{aligned}$$

Ces fonctions sont dans H_P et $f \geq 1$. Notons que $f(r,\theta) = 1$ si et seulement si $\exp_0 \chi_0^{-1}(r,\theta) = p$, auquel cas $\exp_p^{-1} \circ \exp_0 \circ \chi_0^{-1}(r,\theta) = 0$, de sorte que $\exp_p^{-1} \circ \exp_0 \circ \chi_0^{-1}$ soit bien définie comme fonction lisse sur $\mathbb{R}^2_P$. Le même argument est valide pour $\exp_0^{-1} \circ \exp_p \circ \chi_x^{-1}$. On vérifie que

$$\tfrac{1}{2}(\cosh x \cosh y - \sqrt{\cosh^2 x \cosh^2 y - 1})e^r \leq f(r,\theta) \leq \cosh r\ e^{\operatorname{argch}(\cosh x \cosh y)}$$

de sorte qu'en définissant $r_0 := \log 2/\varepsilon$ où

$$0 < \varepsilon < \min\{\, 1, \tfrac{1}{2}(\cosh x \cosh y - \sqrt{\cosh^2 x \cosh^2 y - 1})\,\}\,,$$

nous avons pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2_{P,r_0}$, $f(r,\theta) \geq \varepsilon e^r \geq 2$. Notons aussi que pour tout $v \in \mathbb{R}^2_C$, nous avons $\operatorname{argch} f(\chi_0(v)) = \left\|\exp_p^{-1} \circ \exp_0(v)\right\|_p$ et

$$\operatorname{argch} \sqrt{1 + h^2(\chi_x(v)) + g^2(\chi_x(v))} = \left\|\exp_0^{-1} \circ \exp_p(v)\right\|_0\,.$$

La première égalité implique (puisque $\exp_p^{-1} \circ \exp_0(\mathbb{R}^2_C)$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}^2$) que pour tout v dans $\mathbb{R}^2$, $\cosh \|v\|_p \leq \cosh \left\|\exp_0^{-1} \circ \exp_p(v)\right\|_0 e^{\operatorname{argch}(\cosh x \cosh y)}$. On obtient alors pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2_P$, $\sqrt{1 + h^2 + g^2} \geq \cosh r\ e^{-\operatorname{argch}(\cosh x \cosh y)}$. En particulier, en posant

$$r_0' := \operatorname{argch}(\sqrt{2} \exp(\operatorname{argch}(\cosh x \cosh y))),$$

on obtient pour tout $r \geq r_0'$, l'estimation suivante $h^2 + g^2 \geq \frac{1}{8} e^{-2\operatorname{argch}(\cosh x \cosh y)} e^{2r}$. Si on applique alors le Lemme 6.5.5 pour l'espace $H_{P,r_0''}$ où $r_0'' := \max\{\, r_0, r_0' \,\}$, on voit que $\exp_p^{-1} \circ \exp_0 \circ \chi_0^{-1}$ et $\exp_0^{-1} \circ \exp_p \circ \chi_x^{-1}$ sont dans $S_{P,1}$. Le résultat découle alors du Lemme 6.5.3. $\square$

Conclusion

L'action spectrale de Chamseddine–Connes est un objet fondamental résidant à l'interface de la géométrie non commutative et de ses applications en physique des particules.

Dans cette thèse nous avons étudié l'action spectrale dans des espaces non commutatifs tels que le tore non commutatif et le groupe quantique $SU_q(2)$. Nous avons aussi été intéressé par certaines questions mathématiques associées aux géométries commutatives (variétés compactes à spin) et quantification par déformation sur variétés avec linéarisation. Dans tous ces travaux, le calcul pseudodifférentiel (sur triplets spectraux abstraits) a joué un role crucial. C'est avec l'aide de cet outil fondamental que les actions spectrales sur le tore et sur $SU_q(2)$ ont pu être calculées.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté un calcul de l'action spectrale sur le tore non commutatif $\big(C^\infty(\mathcal{T}^n_\Theta), \mathcal{H}, \mathcal{D}\big)$ qui est un triplet spectral simple, en tenant compte des opérateurs de la forme $J\mathcal{A}J^{-1}$. L'action spectrale en dimension 4 montre qu'un nouveau terme de type Yang–Mills apparaît : $\tau(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$, où $F_{\mu\nu} := \delta_\mu(A_\nu) - \delta_\nu(A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]$, qui étend le terme commutatif habituel $F_{\mu\nu} := \delta_\mu(A_\nu) - \delta_\nu(A_\mu)$. Une condition associée à la théorie de l'approximation diophantienne sur la matrice de déformation Θ apparaît cruciale dans le calcul de l'action spectrale, lorsque la perturbation $D \to D + A + \varepsilon JAJ^{-1}$ est considérée. Une question intéressante reste : est-ce que cette condition diophantienne est réellement nécessaire pour obtenir cette action spectrale, avec ce terme de type Yang–Mills $\tau(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$? Nous conjecturons que c'est bien le cas, comme le suggère des arguments heuristiques (Remarque 2.2.5).

Nous avons présenté au chapitre 4 le calcul de l'action spectrale sur le triplet spectrale de [48] associé au groupe quantique $SU_q(2)$. Une fois encore nous avons tenu compte de la structure réelle J et utilisé les techniques du calcul pseudodifférentiel sur triplets spectraux. Cependant, contrairement au cas du tore non commutatif, de nouveaux phénomènes remarquables apparaissent dans cet espace. Tout d'abord, le spectre de dimension de $SU_q(2)$ est minoré par 1, ce qui implique qu'il n'existe qu'un nombre fini de termes dans le développement de l'action spectrale. Deuxièmement, dans cet espace, les tadpoles existent, alors qu'ils n'existaient pas dans le cas du tore non commutatif. Nous avons aussi constaté que la limite $q \to 1$ (qui correspond à la limite de la 3-sphère quantique vers la 3-sphère commutative) de l'action spectrale n'existe pas toujours, et lorsqu'elle existe, elle ne donne pas l'action spectrale de la sphère commutative $\mathbb{S}^3$. Ces propriétés montrent qu'il existe un "mur" entre les géométries q-déformées telle que $SU_q(2)$ et le monde commutatif, qui n'existe pas dans le cas des Θ-déformations du tore ou des plans de Moyal. Il serait intéressant d'étudier plus en détail l'action spectrale associée à d'autres géométries telles que le plan projectif quantique [45], les sphères de Podleś [43, 46] ou les sphères euclidiennes quantiques [47, 96], et plus spécifiquement la 4-sphère [44].

Dans le cinquième chapitre, nous avons étudié certaines annulations de termes dans l'action

spectrale de Chamseddine–Connes. Dans ce cas aucun tadpole, c'est à dire un terme du type $\int A\mathcal{D}^{-1}$, n'apparaît dans le cadre de triplet spectraux commutatifs riemanniens. Nous aussi avons étudié, en suivant Chamseddine et Connes [23] le cas d'une condition aux bord chirale sur l'opérateur de Dirac dans une variétés spinorielle à bord. Dans ce cas, il n'existe pas de tadpole jusqu'à l'ordre 5. Cette approche est basée sur ces calculs explicites des premiers coefficients du noyau de la chaleur associés à une condition au bord mixte. Nous nous attendons à ce tous les tadpoles de n'importe quel ordre s'annulent et une approche de cette question à l'aide de triplet spectraux fait l'objet d'un travail en cours [84].

Nous avons vu, au chapitre 6 certaines hypothèses sur la géométrie d'une variété avec linéarisation qui permettent une définition intrinsèque des espaces vectoriels topologiques qui sont nécessaires à l'analyse de Fourier et à un calcul global symbolique des opérateurs pseudodifférentiels avec un contrôle uniforme ou décroissant sur la variable x. Étant donné une linéarisation sur la variété, avec certaines propriétés de contrôle à l'infini, nous avons construit des applications de λ-quantification, un star-produit de Moyal explicite sur le fibré cotangent et des classes d'opérateurs pseudodifférentiels. Nous avons prouvé un résultat de stabilité par composition et une formule de composition de symbole sous une hypothèse de contrôle à l'infini de la linéarisation. Le calcul présenté ici est une généralisation du calcul SG standard sur $\mathbb{R}^n$ et peut être appliqué au cas de l'espace hyperbolique de dimension 2. L'analyse détaillée de ce produit de Moyal sur $\mathcal{S}(T^*M)$ et des propriétés spectrales des opérateurs dans $\Psi_\sigma^{l,m}$ reste à faire. Un des objectifs d'une telle analyse est la construction d'un triplet spectrale non commutatif basé sur l'algèbre $(\mathcal{S}(T^*M), \circ_W)$, qui étendrait le triplet spectral décrit dans [58].

Finalement, les actions spectrales que nous avons calculées sont de nature classique. La quantification de ces actions par intégration fonctionnelle reste un problème ouvert.

Bibliographie

[1] T. Ackermann, "A note on the Wodzicki residue", J. Geom. Phys. **20** (1996), 404–406.

[2] M. Adler, "On trace functional pour formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of Korteweg–de Vries type equations", Invent. Math. **50** (1979), 219-248.

[3] B. Ammann, R. Lauter and V. Nistor, "Pseudodifferential operators on manifolds with a Lie structure at infinity", Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 3, 717Ű-747.

[4] C. Bär, "The Dirac operator on homogeneous spaces and its spectrum on 3-dimensional lens spaces", Arch. Math. **59** (1992), 65–79.

[5] R. Beals, "A general calculus of pseudodifferential operators and applications", Duke Math. J. **44** (1977), 45–57.

[6] M.-T. Benameur and T. Fack, "Type II non-commutative geometry I. Dixmier trace in von Neumann algebras", Adv. Math. **199** (2006), 29–87.

[7] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[8] P.N. Bibikov and P.P. Kulish, "Dirac operators on the quantum group $SU_q(2)$ and the quantum sphere", Zap. Nauchn. Sem. St. Petersburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. **245** (1997), 49, Vopr. Kvant. Teor. Polya i Stat. fiz. **14** (1997), 49–65; translated in J. Math. Sci. **100** (2000), 2039–2050.

[9] J. Bokobza-Haggiag, "Operateurs pseudodifférentiels sur une variété différentiable", Ann. Inst. Fourier. **19** (1969), 125–177.

[10] M. Bordemann, N. Neumaier and S. Waldmann, "Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles. I. Weyl and standard ordering avec differential operator representation", Comm. Math. Phys. **198** (1998), no. 2, 363–396.

[11] T. Branson and P. Gilkey, "The asymptotics of the Laplacian on a manifold with boundary", Partial Differential Equations **15** (1990), 245–272.

[12] T. Branson and P. Gilkey, "Residues of the eta function for an operator of Dirac type avec local boundary conditions", Differential Geometry and its Applications **2** (1992), 249–267.

[13] T. Branson, P. Gilkey, K. Kirsten and D. Vassilevich, "Heat kernel asymptotics with mixed boundary conditions", Nuclear Physics B **563** (1999), 603–626.

[14] M. Braverman, O. Milatovich and M. Shubin, "Essential selfadjointness of Schrödinger-type operators on manifolds", Russian Math. Surveys **57** (2002), no. 4, 641–692.

[15] M. Cappiello, T. Gramchev and L. Rodino, "Gelfand–Shilov spaces, pseudodifferential operators and localization operators" *Modern trends in pseudodifferential operators*, 297Ű-312, Oper. Theory Adv. Appl., **172**, Birkhauser, Basel, 2007.

[16] A. L. Csonty, J. Phillips, A. Rennie and F. A. Sukochev, "The local index formula in semifinite von Neumann algebras I: Spectral flow", Advances in Math. **202** (2006), 415–516.

[17] L. Carminati, B. Iochum and T. Schücker, "Noncommutative Yang-Mills and noncommutative relativity: a bridge over troubled water, Eur. Phys. J. **C 8** (1999) 697–709.

[18] P. S. Chakraborty and A. Pal, "Equivariant spectral triples on the quantum $SU(2)$ group", K-Theory **28** (2003), 107–126.

[19] P. S. Chakraborty and A. Pal, "On equivariant Dirac operator for $SU_q(2)$", Proc. Indian Acad. Sci. **116** (2003), 531–541.

[20] P. S. Chakraborty and A. Pal, "Spectral triples and associated Connes-de Rham complex for the quantum $SU(2)$ and the quantum sphere," Commun. Math. Phys. **240** (2003), 447–456.

[21] A. Chamseddine and A. Connes, "The spectral action principle", Commun. Math. Phys. **186** (1997), 731–750.

[22] A. Chamseddine and A. Connes, "Inner fluctuations of the spectral action", J. Geom. Phys. **57** (2006), 1–21.

[23] A. Chamseddine and A. Connes, "Quantum gravity boundary terms from the spectral action on noncommutative space", PRL **99** (2007), 071302.

[24] A. Chamseddine, A. Connes and M. Marcolli, "Gravity and the standard model avec neutrino mixing", Adv. Theor. Math. Phys. **11** (2007), 991–1089.

[25] A. Connes, "The action functional in noncommutative geometry", Comm. Math. Phys. **117** (1988), 673–683.

[26] A. Connes, "C^*-algèbres and géométrie différentielle", *C. R. Acad. Sci. Paris* **290** (1980), 599–604.

[27] A. Connes, "Noncommutative differential geometry", Pub. Math. IHÉS, **39** (1985), 257–360.

[28] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London and San Diego, 1994.

[29] A. Connes, "Geometry from the spectral point of view", Lett. Math. Phys., **34** (1995), 203–238.

[30] A. Connes, "Noncommutative geometry and reality", J. Math. Phys. **36** (1995), 6194–6231.

[31] A. Connes, "Cyclic cohomology, quantum group symmetries and the local index formula for $SU_q(2)$", J. Inst. Math. Jussieu **3** (2004), 17–68.

[32] A. Connes, Cours au Collège de France, january 2001.

[33] A. Connes, "Gravity coupled avec matter and the foundation of non commutative geometry", Commun. Math. Phys. **182** (1996), 155–177.

[34] A. Connes, "On the spectral characterization of manifolds", arXiv:0810.2088v1.

[35] A. Connes and D. Kreimer, "Hopf algebras, renormalization and Noncommutative geometry", Commun. Math. Phys. **199**, (1998) 203-242.

[36] A. Connes and G. Landi, "Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations", Commun. Math. Phys. **221** (2001), 141–159.

[37] A. Connes and M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, Colloquium Publications, Vol. 55, American Mathematical Society, 2008.

[38] A. Connes and H. Moscovici, "The local index formula in noncommutative geometry", Geom. And Funct. Anal. **5** (1995), 174–243.

[39] G.M. Constantine and T.H. Savits, "A multivariate Faa di Bruno formula avec applications", Trans. Amer. Math. Soc. **348** (2) (1996), 503–520.

[40] H.O. Cordes, "A global parametrix for pseudodifferential operators over $\mathbb{R}^n$, with applications", preprint **90** (1976), SFB 72, Bonn.

[41] H.O. Cordes, *The technique of pseudodifferential operators*, Cambridge Univ. Press 1995.

[42] S. Coriasco, "Fourier integral operators in SG classes I Composition theorems and action on SG Sobolev spaces", Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **57** 4 (1999), 249–302.

[43] F. D'Andrea and L. Dąbrowski, "Local index formula on the equatorial Podleś sphere", Lett. Math. Phys. **75** (2006), 235–254.

[44] F. D'Andrea, L. Dąbrowski and G. Landi, "The isospectral Dirac operator on the 4-dimensional quantum Euclidean sphere", Comm. Math. Phys. **279** (2008), no. 1, 77–116.

[45] F. D'Andrea, L. Dąbrowski and G. Landi, "The noncommutative geometry of the quantum projective plane", Rev. Math. Phys. **20** (2008), no. 8, 979–1006.

[46] F. D'andrea, L. Dąbrowki, G. Landi and E. Wagner, "Dirac operators on all Podleś spheres", J. Noncommut. Geom. **1** (2007), 213–239.

[47] L. Dąbrowski, "Geometry of quantum spheres", J. Geom. Phys. **56** (2005), 86–107.

[48] L. Dąbrowski, G. Landi, A. Sitarz, W. van Suijlekom and J. Várilly, "The Dirac operator on $SU_q(2)$", Commun. Math. Phys. **259** (2005), 729–759.

[49] L. Drager, "On the intrinsic symbol calculus for pseudodifferential operators on manifolds", Ph.D. Dissertation, Brandeis University, 1978.

[50] F. Dumitrescu, "Superconnections and parallel transport", Ph.D. Dissertation, University of Notre Dame, 2006.

[51] A. Edery, "Multidimensional cut-off technique, odd-dimensional Epstein zeta functions and Casimir energy of massless scalar fields", J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 678–712.

[52] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko and S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, Singapore, World Scientific, 1994.

[53] D. Essouabri, B. Iochum, C. Levy and A. Sitarz, "Spectral action on noncommutative torus", J. Noncommut. Geom. **2** (2008), 53–123.

[54] R. Estrada, J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "On summability of distributions and spectral geometry", Commun. Math. Phys. **191** (1998), 219–248.

[55] B. Fedosov, F. Golse, E. Leichtnam and E. Schrohe, "The noncommutative residue for manifolds with boundary", J. Funct. Anal. **142** (1996), 1–31.

[56] S. Fulling, "Pseudodifferential operators, covariant quantization, the inescapable VanVleck-Morette determinant, and the $R/6$ controversy", Proceedings of the Richard Arnowitt Fest. Relativity, Particle Physics and Cosmology, Texas A&M University, College Station, 1999, 329–342.

[57] S. Fulling and G. Kennedy, "The resolvent parametrix of the general elliptic linear differential opérateur: a closed form for the intrinsic symbol", Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 583–617.

[58] V. Gayral, "Heat-kernel approach to UV/IR Mixing on isospectral deformation manifolds", Ann. H. Poincaré **6** (2005), 991–1023.

[59] V. Gayral, J.M. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker and J. Várilly, "Moyal planes are spectral triples", Commun. Math. Phys. **246** (2004), 569–623.

[60] V. Gayral and B. Iochum, "The spectral action for Moyal plane", J. Math. Phys. **46** (2005), no. 4, 043503, 17 pp.

[61] V. Gayral, B. Iochum and J. C. Várilly, "Dixmier traces on noncompact isospectral deformations", J. Funct. Anal. **237** (2006), 507–539.

[62] V. Gayral, B. Iochum and D. Vassilevich, "Heat kernel and number theory on NC-torus", Comm. Math. Phys. **273** (2007), no. 2, 415–443.

[63] E. Getzler, "Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem", Commun. Math. Phys. **92** (1983), 163–178.

[64] P. B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat equation, and the Atiyah–Singer Index Theory*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[65] P. B. Gilkey, *Asymptotic Formulae in Spectral Geometry*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[66] A. de Goursac, J.-C. Wallet and R. Wulkenhaar, "Noncommutative induced gauge theory", Eur. Phys. J. C Part. Fields **51** (2007), no. 4, 977–987.

[67] D. Goswami, "Some noncommutative geometric aspects of $SU_q(2)$", math-ph/018003.

[68] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly and H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Boston, 2001.

[69] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "8D-spectral triple on 4D-Moyal space and the vacuum of noncommutative gauge theory", arXiv: 0709.0095.

[70] G. Grubb and R. Seeley, "Weakly parametric pseudodifferential operators and the Atiyah–Patodi–Singer boundary problem", Invent. Math. **121** (1995), 481–529.

[71] G. Grubb and E. Schrohe, "Trace expansions and the noncommutative residue for manifolds with boundary, J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal) **536** (2001), 167–207.

[72] V. Guillemin, "A new proof of Weyl's formula on the asymptotic distribution of eigenvalues", Adv. Math. **55** (1985), 131–160.

[73] V.W. Guillemin, S. Sternberg and J. Weitsman, "The Ehrhart function for symbols", Surv. Differ. Geom, **10**, Int. Press, Somerville, MA, 2006.

[74] K.S. Güntürk, "Covariant Weyl quantization, symbolic calculus and the product formula", Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, 2006.

[75] S. Gutt, "An explicit $*$-product on the cotangent bundle of a Lie group", Lett. Math. Phys. **7** (1983), 249–258.

[76] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clsontndon, Oxford, 1979.

[77] S. Hawking, "Zeta function regularization of path integrals on curved spacetime", Comm. Math. Phys. **55** (1977), 133–148.

[78] E. Hawkins and G. Landi, "Fredholm modules for quantum Euclidean spheres", J. Geom. Phys. **49** (2004), 272–293.

[79] N. Higson, "The local index formula in noncommutative geometry", Lectures given at the School and Conference on Algebraic K-theory and its applications, Trieste (2002).

[80] Y. Homma, "A representation of $Spin(4)$ on the eigenspinors of the Dirac operator on S^3", Tokyo J. Math. **23** (2000), 453–472.

[81] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer, New York, 1984.

[82] B. Iochum, C. Levy and A. Sitarz, "Spectral action on $SU_q(2)$", Commun. Math. Phys. **289** (2009), 107–155.

[83] B. Iochum and C. Levy, "Tadpoles and commutative spectral triples", arXiv: 0904.0222 [math.MP].

[84] B. Iochum and C. Levy, "Spectral triples and manifolds with boundaries", to appear.

[85] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2005.

[86] J-H. Jureit, T. Krajewski, T. Schücker, C. Stephan, "Seesaw and noncommutative geometry", Phys. Lett. B **654** (2007), no. 3-4, 127–132.

[87] J-H. Jureit, T. Krajewski, T. Schücker, C. Stephan, "On the noncommutative standard model", Acta Phys. Polon. B **38** (2007), no. 10, 3181–3202.

[88] W. Kalau and M. Walze, "Gravity, non-commutative geometry, and the Wodzicki residue", J. Geom. Phys. **16** (1995), 327–344.

[89] C. Kassel, "Le résidu non commutatif (d'après Wodzicki)", Séminaire Bourbaki, Astérisque **177-178** (1989), 199–229.

[90] D. Kastler, " The Dirac operator and gravitation", Comm. Math. Phys. **166** (1995), 633–643.

[91] T. Kato, *Perturbation Theory For Linear Operators*, Springer–Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1980).

[92] A. Klimyk and K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Text and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[93] M. Knecht and T. Schücker, "Spectral action and big desert", Phys. Lett. B **640** (2006), 272–277.

[94] T. Krajewski, "Classification of finite spectral triples", J. Geom. Phys. **18** (1997), 1–30.

[95] D. Kreimer, "On the Hopf Algebra Structure of Perturbative Quantum Field Theories", Adv. Theor. Math. Phys. **2.2** (1998) 303–334.

[96] G. Landi, "Noncommutative spheres and instantons", in *Quantum field theory and noncommutative geometry*, U. Carow-Watamura, Y. Maeda, S. Watamura, Lecture Notes in Physics, Springer, 2005, 3–56.

[97] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.

[98] M. Lesch, "On the noncommutative residue for pseudodifferential operators with log-polyhomogeneous symbols", Ann. Global Anal. Geom. **17** (1999), 151–187.

[99] J.-M. Lescure, "Triplets spectraux pour les variándés à singularité conique isolée", Bull. Soc. Math. France **129** (2001), 593–623.

[100] J.-M. Lescure and S. Paycha, 'Uniqueness of multiplicative determinants on elliptic pseudodifferential operators, Proc. London Math. Soc. **94** (2007), 772–812.

[101] C. Levy, "Pseudodifferential operators on manifolds with linearization", arXiv: 0811.1667 [math.FA].

[102] L. Maniccia and P. Pansontse, "Eigenvalue asymptotics for a class of md-elliptic ψdo's on manifolds with cylindrical exits", Ann. Mat. Pura Appl. (4) **181** no. 3 (2002), 283–308.

[103] Yu. I. Manin, "Algebraic aspects of nonlinear equations", J. Soviet Math. **11** (1979), 1–122.

[104] R. Mazzeo and R. Melrose, "Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundary", Asian Journal of Mathematics **2** No. 4 (1999), 833–866.

[105] R. Melrose, *Introduction to microlocal analysis*, Lecture notes from courses taught at MIT, 2007.

[106] R. Melrose, "Pseudodifferential operators, corners and singular limits", Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Kyoto, August 1990), Math. Society of Japan, Tokyo, Springer-Verlag, New York, 1990, 217–234.

[107] B. Monthubert, "Groupoids and pseudodifferential calculus on manifolds with corners", J. Funct. Anal. **199** (2003), no. 1, 243–286.

[108] R. Nest, E. Vogt and W. Werner, "Spectral action and the Connes–Chamseddine model", p. 109-132 in *Noncommutative Geometry and the Standard Model of Elementary Particle Physics*, F. Scheck, H. Upmeier and W. Werner (Eds.), Lecture Notes in Phys., **596**, Springer, Berlin, 2002.

[109] C. Parenti, "Operatori pseudodifferenziali in $\mathbb{R}^n$ e applicazioni", Ann. Mat. Pura Appl. **93** (1972), 359–389.

[110] S. Paycha, "(Second) Quantised resolvents and regularised traces", Journal of Geometry and Physics **57** (2007), 1345–1369.

[111] M.J. Pflaum, "A deformation theoretical approach to Weyl quantization on Riemannian manifolds", Lett. Math. Physics **45** (1998), 277–294.

[112] M.J. Pflaum, "The normal symbol on Riemannian manifolds", New York J. Math. **4** (1998), 97–125.

[113] R. Ponge, "A new short proof of local index formula and some of its applications", Commun. Math. Phys. **241** (2003), 215–234. Erratum: Commun. Math. Phys. **248** (2004), 639.

[114] R. Ponge, "Noncommutative geometry and lower dimensional volumes in Riemannian geometry", Lett. Math. Phys. **83** (2008), 19–32.

[115] M. A. Rieffel, "C^*-algebras associated with irrational rotations", Pac. J. Math. **93** (1981), 415–429.

[116] M. A. Rieffel, *Deformation Quantization for Actions of* $\mathbb{R}^d$, Memoirs Amer. Soc. **506**, Providence, RI, 1993.

[117] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, "Global calculus of Fourier integral operators, weighted estimates, and applications to global analysis of hyperbolic equations", in Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 164, 65–78, 2006.

[118] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, "Global L^2-boundedness theorems for a class of Fourier integral operators", Comm. Partial Differential Equations, **31** (2006), 547–569.

[119] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, "Weighted Sobolev L^2 estimates for a class of Fourier integral operators", arXiv:0711.2868v1 [math.AP].

[120] Y. Safarov, "Pseudodifferential operators and linear connections", Proc. London. Math. Soc. (3) **74** (1997), 379–416.

[121] K. Schmüdgen, "Commutator representations of differential calculi on the quantum group $SU_q(2)$", J. Geom. Phys. **31** (1999), 241–264.

[122] E. Schrohe "Spaces of weighted symbols and weighted Sobolev spaces on manifolds", in Proceedings, Oberwolfach, **1256** (eds. H.O. Cordes, B. Gramsch and H. Widom), Springer LNM, New York, 1986, 360–377.

[123] E. Schrohe, "Noncommutative residues and manifolds with conical singularities", J. Funct. Anal. **150** (1997), 146–174.

[124] E. Schrohe, "Noncommutative residues, Dixmier's trace, and heat trace expansions on manifolds with boundary", In: B. Booss-Bavnbek and K. Wojciechowski (eds), Geometric Aspects of Partial Differential Equations. Contemporary Mathematics, **242** Amer. Math. Soc. Providence, R.I., (1999), pp. 161 – 186.

[125] V.A. Sharafutdinov, "Geometric symbol calculus for pseudodifferential operators. I", Siberian Adv. Math. **15** (2005), no. 3, 81–125.

[126] V.A. Sharafutdinov, "Geometric symbol calculus for pseudodifferential operators. II", Siberian Adv. Math. **15** (2005), no. 4, 71–95.

[127] M. Shubin, *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.

[128] M. Shubin, "Pseudodifferential operators in $\mathbb{R}^n$", Soviet Math. Dokl. Vol. **12** (1971), No. I, 147–151.

[129] M. Shubin, "Pseudodifferential almost-periodic operators and von Neumann algebras", Trans. Moscow Math. Soc., Issue **1** (1979), 103–166.

[130] M. Shubin, "Spectral theory of the Schrödinger operators on non-compact manifolds: qualitative results", *Spectral theory and geometry* (Edinburgh, 1998), 226–283, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **273**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[131] T. Schücker, "Noncommutative geometry and the standard model", Internat. J. Modern Phys. A **20** (2005), no. 11, 2471–2480.

[132] B.W. Schulze, *Boundary value problems and singular pseudodifferential operators*, J. Wiley & Sons, Chichester, 1998.

[133] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1979.

[134] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, London Math. Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[135] A. Strelchenko, "Heat kernel of non-minimal gauge field kinetic operators on Moyal plane, Int. J. Mod. Phys. **A22** (2007), 181–202.

[136] C. Stephan, "Massive neutrinos in almost-commutative geometry", J. Math. Phys. **48** (2007), no. 2, 023513, 12 pp.

[137] W. van Suijlekom, *The Geometry of Noncommutative Spheres and their Symmetries*, PhD thesis, Trieste, 2005.

[138] W. van Suijlekom, L. Dąbrowski, G. Landi, A. Sitarz and J. C. Várilly, "The local index formula for $SU_q(2)$", K-Theory **35** (2005), 375–394.

[139] F. Treves, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators*, Plenum Press, New York, 1980.

[140] F. J. Vanhecke, "On the product of real spectral triples, Lett. Math. Phys. **50** (1999), 151–162.

[141] D. V. Vassilevich, "Heat kernel expansion: user's manual, Phys. Rep. **388** (2003), 279–360.

[142] D. V. Vassilevich, "Non-commutative heat kernel", Lett. Math. Phys. **67** (2004), 185–194.

[143] D. V. Vassilevich, "Heat kernel, effective action and anomalies in noncommutative theories", JHEP **0508** (2005), 085.

[144] D. V. Vassilevich, "Induced Chern–Simons action on noncommutative torus", Modern Phys. Lett. A **22** (2007), no. 17, 1255–1263.

[145] T. Voronov, "Quantization on supermanifolds and the analytic proof of the Atiyah–Singer index theorem", J. Soviet Math. **64**(4) (1993), 993–1069.

[146] T. Voronov, "Quantization of forms on cotangent bundle", Comm. Math. Phys. **205** (1999), no. 2, 315–336.

[147] Y. Wang, "Gravity and the noncommutative residue for manifolds with boundary, Lett. Math. Phys. **80** (2007), 37–56.

[148] H. Widom, "Families of pseudodifferential operators", Advances in Mathematics Supplementary Studies **3** (1978), 345–395.

[149] H. Widom, "A complete symbolic calculus for pseudodifferential operators", Bull. Sci. Math. **104** (1980), 19–63.

[150] M. Wodzicki, "Spectral asymmetry and local invariants (in russian)", Habilitation thesis, Moscow: Steklov Math. Inst. (1984).

[151] M. Wodzicki, "Local invariants of spectral asymmetry", Invent. Math. **75** (1984), 143–177.

[152] M. Wodzicki, "Noncommutative residue. Chapter I: Fundamentals", 320–399, in *K-theory, Arithmetic and Geometry*, Yu. I. Manin, ed., Lecture Notes in Mathematics **1289**, Springer, Berlin, 1987.

[153] S. Woronowicz, "Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus", Publ. RIMS, Kyoto Univ. **23** (1987), 117–181.

[154] C. Yang, "Isospectral deformations of Eguchi–Hanson spaces as nonunital spectral triples", Commun. Math. Phys. **288** (2009), 615–652.