



**HAL**  
open science

# Caractérisation et extraction de l'information dans des signaux optiques polarimétriques ou issus d'états sous-poissoniens de la lumière

Julien Fade

► **To cite this version:**

Julien Fade. Caractérisation et extraction de l'information dans des signaux optiques polarimétriques ou issus d'états sous-poissoniens de la lumière. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2009. Français. NNT: . tel-00418557v1

**HAL Id: tel-00418557**

**<https://theses.hal.science/tel-00418557v1>**

Submitted on 20 Sep 2009 (v1), last revised 18 Oct 2009 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Caractérisation et extraction de l'information dans des signaux optiques polarimétriques ou issus d'états sous-poissoniens de la lumière

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 Octobre 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Aix-Marseille III  
Optique, Photonique et Traitement d'Image  
(spécialité Traitement d'Image)

par

Julien FADE

### Composition du jury

*Rapporteurs* : André FERRARI (Pr., Université de Nice-Sophia Antipolis)  
Éric LANTZ (Pr., Université de Franche-Comté)

*Examineurs* : Claude FABRE (Pr., Université Pierre et Marie Curie Paris 6)  
Patrick FLANDRIN (DR, École Normale Supérieure de Lyon)  
Philippe RÉFRÉGIER (Pr., Directeur de thèse, École Centrale Marseille)  
Muriel ROCHE (MdC, Co-encadrante de thèse, École Centrale Marseille)



## Remerciements

Au moment de porter sous presse la version finale de ce manuscrit de thèse, je souhaite adresser mes sincères remerciements à André Ferrari et Éric Lantz pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse. Je suis sensible à l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ces travaux, qui transparaît dans les intéressantes discussions scientifiques que nous avons partagées.

Je remercie également Patrick Flandrin et Claude Fabre qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je voudrais encore remercier chaleureusement Claude Fabre et Nicolas Treppe pour m'avoir offert une passionnante collaboration durant ces trois années de doctorat. Ma reconnaissance s'adresse avec la même intensité à Mehdi Alouini et Daniel Dolfi qui m'ont permis d'agrémenter mon manuscrit de précieux résultats expérimentaux.

En ce qui concerne l'encadrement de ma thèse, je commencerai — galanterie oblige! — par remercier Muriel Roche pour m'avoir mis le pied à l'étrier de l'imagerie polarimétrique, pour son amical soutien quotidien... et pour sa patience à relire mes manuscrits et mes calculs fastidieux!

Je souhaite maintenant adresser mes plus vifs remerciements à Philippe Réfrégier, qui a su me convaincre, il y a bientôt quatre ans, de me lancer sur un sujet si passionnant et si riche. Grâce à ses qualités scientifiques et pédagogiques, grâce à son exigence et sa disponibilité, je crois que Philippe prend à cœur et remplit parfaitement son rôle de directeur de thèse soucieux de former au mieux ses étudiants au métier de chercheur. Je voudrais le remercier pour tout ce que j'ai pu apprendre de lui.

Je veux aussi adresser ma reconnaissance et mon amitié à tous les autres membres de l'équipe  $\Phi$ -TI (Nicolas, Antoine, Frédéric, Arnaud, Marc). Je resterai sincèrement touché par l'accueil, le soutien et l'aide qu'ils m'ont témoignés, par delà un simple rapport professionnel. Je remercie également les anciens, présents ou futurs doctorants de l'équipe (Jérôme, Éric, Gemma, Jean-François, Arnaud, Émilie, Anne-Gaëlle, Édouard et Aurélien) avec qui j'ai partagé doutes et satisfactions, astuces et bugs informatiques, cafés et tracasseries administratives!

Merci encore aux nombreux enseignants de l'Université Paul Cézanne ou de l'École Centrale Marseille grâce à qui j'ai pu vivre une expérience d'enseignement riche et variée tout au long de cette thèse. J'ai également une pensée pour tous ceux qui, un hiver 2008, partagèrent et défendirent l'idée que l'université n'est pas une entreprise, et que le savoir n'est pas une marchandise.

Enfin, plus personnellement, j'aimerais aussi saluer l'équipe radiophonique des *Savants de Marseille*, ou mes anciens acolytes du GÉNEPI, avec qui j'ai partagé des moments intenses à Marseille ces quatre dernières années.

Un grand merci enfin à tous les amis, présents ou non à ma soutenance, qui m'ont manifesté leur soutien continu au cours de mes études qui s'achèvent aujourd'hui par ce doctorat.

Je terminerai en renouvelant mon affection à ma famille qui m'a toujours soutenu dans mes projets de vie, ainsi qu'à Marie-Anne avec qui je partage ceux-ci avec bonheur depuis bientôt quatre ans.



# Table des matières

## Introduction

## I Polarisation partielle 5

### Chapitre 1

#### Introduction à l'imagerie de degré de polarisation

1.1	Polarisation de la lumière . . . . .	8
1.1.1	Formalisme de Jones . . . . .	8
1.1.2	Degré de polarisation et vecteur de Stokes . . . . .	10
1.2	Phénomène de speckle et statistiques associées . . . . .	11
1.2.1	Généralités sur le phénomène de speckle . . . . .	12
1.2.2	Modélisation standard du phénomène de speckle . . . . .	13
1.2.3	Généralisation à d'autres types de speckle . . . . .	17
1.2.4	Extension aux lumières non circulaires . . . . .	21
1.3	Introduction à l'imagerie polarimétrique . . . . .	22
1.3.1	Imagerie polarimétrique cohérente . . . . .	23
1.3.2	Imagerie de degré de polarisation . . . . .	25
1.4	Conclusion . . . . .	28

### Chapitre 2

#### Estimation du degré de polarisation à partir d'une image d'intensité

2.1	Principe de la méthode d'estimation à une image . . . . .	30
2.1.1	Hypothèses requises et modèle général de speckle . . . . .	30
2.1.2	Relation entre $\mathcal{P}$ et le contraste de speckle . . . . .	32
2.1.3	Principe général de l'estimation de $\mathcal{P}$ . . . . .	33
2.2	Bornes de Cramer-Rao de l'estimation . . . . .	34
2.2.1	BCR explicite pour un speckle d'ordre 1 . . . . .	36
2.2.2	BCR pour un speckle d'ordre supérieur . . . . .	40

---

2.2.3	Conclusion	42
2.3	Méthodes d'estimation	43
2.3.1	Estimateurs de $\beta$ au sens des moments	43
2.3.2	Autres estimateurs pour un speckle d'ordre 1	52
2.3.3	Discussion sur le biais des méthodes proposées	60
2.3.4	Comparaison avec les techniques classiques utilisant plusieurs images	62
2.3.5	Résultats expérimentaux sur des données réelles	66
2.3.6	Conclusion sur l'estimation de $\mathcal{P}$ à une image	73
2.4	Imagerie de degré de polarisation	74
2.4.1	Scène polarimétrique simulée	74
2.4.2	Scène polarimétrique d'intensité constante	80
2.4.3	Imagerie avec segmentation préalable	82
2.5	Analyse de la méthode pour des acquisitions à faible flux	84
2.5.1	Estimation au sens des moments à faible flux	85
2.5.2	Efficacité de l'estimateur au sens des moments	89
2.5.3	Imageur polarimétrique optimal à faible flux	90
2.5.4	Conclusion sur l'estimation de $\beta$ à faible flux	91
2.6	Conclusion	92

## II États sous-poissoniens de la lumière 95

**Chapitre 3**  
**Introduction aux lumières sous-poissoniennes**

3.1	Contexte physique	98
3.1.1	Introduction à l'optique quantique	98
3.1.2	Photodétection	101
3.1.3	Des états plus ou moins « classiques » de la lumière	103
3.2	Modèles de processus sous-poissoniens	108
3.2.1	Caractérisation des fluctuations sous-poissoniennes	108
3.2.2	Modèle phénoménologique temporel	112
3.2.3	Modèle de photocomptage binomial	118
3.3	Conclusion	119

**Chapitre 4**  
**Analyse de la précision d'estimation en lumière localement sous-poissonienne**

---

4.1	Modèle de formation d'image et hypothèses . . . . .	123
4.2	BCR pour l'estimation de paramètre . . . . .	125
4.2.1	Information de Fisher dans le cas général . . . . .	125
4.2.2	BCR pour l'estimation de déplacement en lumière poissonienne standard . . . . .	127
4.2.3	BCR pour l'estimation de déplacement en lumière sous-poissonienne . . . . .	129
4.3	Estimation de déplacement . . . . .	136
4.3.1	Méthode « petits signaux » . . . . .	136
4.3.2	Estimation par intercorrélacion logarithmique . . . . .	137
4.4	Résultats de simulation . . . . .	139
4.4.1	Optimalité de l'estimateur $\hat{d}_{MV}^{poi}$ . . . . .	139
4.4.2	Propriétés de l'estimateur $\hat{d}_{MV}^{poi}$ . . . . .	141
4.4.3	Robustesse des résultats établis . . . . .	145
4.5	Conclusion . . . . .	151

<p><b>Chapitre 5</b></p> <p><b>Analyse des performances d'une tâche de détection en lumière sous-poissonienne</b></p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

5.1	Introduction aux problèmes de détection . . . . .	154
5.1.1	Description du problème de détection . . . . .	154
5.1.2	Test de détection et courbe COR . . . . .	156
5.1.3	Probabilité d'erreur et mesure de Chernoff . . . . .	157
5.2	Évaluation des performances de détection avec la mesure de Chernoff . . . . .	158
5.2.1	Contraste entre lois binomiales et lois de Poisson . . . . .	159
5.2.2	Définition d'un critère de gain . . . . .	160
5.3	Caractérisation de l'amélioration des performances de détection . . . . .	165
5.3.1	Faibles contrastes . . . . .	165
5.3.2	Contrastes intermédiaires . . . . .	167
5.3.3	Forts contrastes . . . . .	168
5.4	Généralisation aux modèles sous-poissoniens non binomiaux . . . . .	171
5.4.1	Prise en compte d'un modèle non binomial . . . . .	171
5.4.2	Étude de la robustesse des résultats . . . . .	171
5.5	Conclusion . . . . .	174

<p><b>Conclusion</b></p>
--------------------------



---

<b>Annexe A</b> <b>Évaluation numérique de l'information de Fisher</b>
---------------------------------------------------------------------------

<b>Annexe B</b> <b>Calculs annexes à la partie I</b>
---------------------------------------------------------

B.1	BCR pour l'estimation de $\mathcal{P}$ à partir d'une unique image . . . .	181
B.1.1	BCR en speckle pleinement développé . . . . .	181
B.1.2	BCR approchée pour des speckles d'ordres élevés . . . .	187
B.2	Expression des moments centrés $\mathcal{M}_k^I$ et $\mathcal{M}_k^N$ en fonction des cumulants $\kappa_k$ de la loi normalisée $f$ . . . . .	188
B.2.1	Relations entre les cumulants $\mathcal{C}_k^I$ et les $\kappa_k$ . . . . .	188
B.2.2	Relations entre les $\mathcal{M}_j^I$ et les $\kappa_j$ . . . . .	189
B.2.3	Relations entre les $\mathcal{M}_j^N$ et les $\kappa_j$ . . . . .	189
B.3	Biais et variance des estimateurs de $\beta$ au sens des moments . .	191
B.3.1	Principe général du calcul . . . . .	191
B.3.2	Application aux estimateurs $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ . . . . .	193
B.3.3	Estimateurs de $\beta$ en présence de bruit de photon . . . .	196
B.4	Loi d'intensité pour un speckle d'ordre 1 en présence de bruit de photon . . . . .	200

<b>Annexe C</b> <b>Calculs annexes à la partie II</b>
----------------------------------------------------------

C.1	Effet d'une absorption sur les statistiques de photocomptage . .	203
C.1.1	Modèle d'absorption de Bernoulli . . . . .	203
C.1.2	Caractérisation du processus absorbé . . . . .	204
C.2	Modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes . . . . .	205
C.2.1	Propriétés statistiques du modèle temporel . . . . .	205
C.2.2	Simulation numérique du modèle temporel . . . . .	208
C.3	BCR pour l'estimation de paramètre dans une image . . . . .	210
C.3.1	BCR pour l'estimation d'un déplacement . . . . .	210
C.4	Estimation de déplacement d'image au sens du maximum de vraisemblance . . . . .	217
C.4.1	Cas de fluctuations Poissoniennes . . . . .	217
C.4.2	Cas de fluctuations gaussiennes à variance fixée . . . .	218
C.5	Équivalence de $\hat{d}_{MV}^{poi}$ et $\hat{d}_{lin}$ pour un motif gaussien à petits déplacements . . . . .	218
C.6	Mesures de séparabilité entre lois binomiales et lois de Poisson	220

---

C.6.1	Cas des lois binomiales . . . . .	220
C.6.2	Cas des lois de Poisson . . . . .	222
C.6.3	Validité de l'approximation de la mesure de Chernoff par la distance de Bhattacharyya . . . . .	224
C.6.4	Limite de $s^*$ et $s_p^*$ aux très faibles contrastes . . . . .	224
C.6.5	Limite de $s^*$ et $s_p^*$ à contraste maximal . . . . .	226
C.6.6	Approximation de $\mathcal{F}_B(F_1, \tau)$ aux faibles contrastes . . . . .	226
C.6.7	Expression approchée de $\mathcal{F}_C(F_1, \tau)$ à fort contraste . . . . .	228
<b>Bibliographie</b>		<b>231</b>
	<b>Liste des publications</b> . . . . .	<b>241</b>

---

# Introduction

Une conception simpliste de la mesure physique pourrait laisser croire qu'il est toujours possible d'améliorer la précision de mesure, à condition de pouvoir perfectionner à volonté le dispositif expérimental. S'il est vrai en effet qu'un appareillage de qualité est indispensable pour effectuer une mesure avec précision, le développement de la mécanique quantique et l'élaboration de la théorie de l'information depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle ont profondément remis en question cette vision.

D'une part, la mécanique quantique a introduit la notion d'incertitude qui limite fondamentalement la précision avec laquelle on peut mesurer deux observables qui ne commutent pas entre elles<sup>1</sup>. D'autre part, il est désormais admis que la mesure d'une grandeur physique est nécessairement le résultat d'une estimation réalisée à partir de données bruitées qui limitent la précision de mesure. Ainsi, en prenant en compte et en modélisant ce bruit de mesure, le développement de la théorie du traitement de l'information a mis à la disposition des scientifiques plusieurs concepts puissants, permettant d'évaluer la limite théorique des performances de traitement de ces données. La détermination de méthodes de traitement optimales qui atteignent ces limites théoriques de précision constitue également un important domaine d'investigation du traitement de l'information. L'utilisation croissante de ces concepts dans tous les domaines de la science n'a donc rien de surprenant : il est rare de nos jours que l'on tente d'améliorer un appareillage de mesure coûteux sans avoir étudié au préalable les limites théoriques de précision associées aux mesures effectuées.

Dans ce manuscrit, nous suivons cette démarche pour l'analyse de deux problèmes optiques : la détermination du degré de polarisation à partir d'une image d'intensité et l'apport des états sous-poissoniens de l'intensité lumineuse pour améliorer les précisions ultimes pour l'estimation de paramètre en imagerie et pour un problème de détection. En particulier, nous illustrons comment l'étude des bornes statistiques issues de la théorie de l'information peut constituer un outil intéressant pour analyser les performances de traitement associées aux deux problèmes physiques étudiés dans cette thèse.

## Objectifs de la thèse

Nous nous intéressons dans ce manuscrit à deux phénomènes optiques pour lesquels l'influence du bruit est importante. Dans le premier cas, nous souhaitons analyser comment une caractérisation précise du bruit de mesure peut permettre de simplifier les systèmes expérimentaux pour l'estimation du degré de polarisation en imagerie cohérente et nous étudions quelle est la perte en précision subie

---

<sup>1</sup> – Il s'agit là de la fameuse relation d'incertitude de Heisenberg.

---

lors de la simplification des systèmes d'acquisition. Dans le second cas, nous tentons de quantifier comment la complexification des systèmes expérimentaux qui parviennent à générer des bruits sous-poissoniens permet d'accroître la précision des mesures.

Ce manuscrit de thèse est donc composé de deux parties associées à ces deux situations physiques différentes. Les objectifs propres à ces deux études sont détaillés ci-dessous.

**Polarisation partielle de la lumière :** Lorsqu'un objet est illuminé par un éclairage cohérent, l'image d'intensité formée sur un détecteur captant la lumière rétrodiffusée par cet objet est perturbée par un bruit de speckle. Lorsque la lumière rétrodiffusée est partiellement polarisée, la modélisation statistique de l'intensité de l'image conduit dans ce cas à des densités de probabilité n'appartenant pas à la famille des lois exponentielles, et la forme de ces lois dépend du degré de polarisation de la lumière. En analysant le comportement statistique des échantillons d'intensité provenant d'une unique image de speckle acquise sous éclairage cohérent, il est donc possible d'estimer le degré de polarisation de la lumière rétrodiffusée par la scène imagée.

L'objectif de la première partie de ce manuscrit sera de caractériser les performances d'une telle méthode d'estimation du degré de polarisation à une image, qui permet de simplifier fortement les systèmes d'imagerie de degré de polarisation. En déterminant une borne sur la variance minimale d'une telle méthode, nous pourrons évaluer et comparer la qualité de différents estimateurs. Nous analyserons également théoriquement et par simulation numérique la perte en précision subie lorsque les techniques classiques d'estimation du degré de polarisation sont remplacées par cette méthode fondée sur l'acquisition d'une image d'intensité. Cette étude nous permettra de discuter le compromis entre la simplification du système de mesure polarimétrique et la diminution de la précision d'estimation.

**États sous-poissoniens de la lumière :** Grâce au développement de l'optique quantique et aux intenses recherches menées dans ce domaine au cours des dernières décennies, il est désormais possible de générer expérimentalement des états quantiques non standard de la lumière présentant un niveau de bruit inférieur au bruit de photon standard (bruit de Poisson). De tels états présentent un grand intérêt pour contribuer à l'amélioration de la précision des mesures optiques mais ils restent à l'heure actuelle difficiles et coûteux à produire.

Dans la seconde partie de ce manuscrit, notre objectif sera de caractériser l'apport de cette réduction du bruit quantique pour améliorer les performances optimales de traitement, lorsqu'on remplace un faisceau poissonien standard par une lumière présentant des fluctuations sous-poissoniennes. Nous considérerons dans un premier temps le cas de l'estimation d'un paramètre dans une image (tel qu'une translation, ou une rotation). Nous utiliserons deux modèles de lumières sous-poissoniennes grâce auxquels nous tenterons de compléter des résultats établis précédemment dans le cadre de l'estimation de très faibles déplacements [28, 29], avec un modèle de bruit sous-poissonien plus simple et valable uniquement pour de très hauts niveaux d'intensité. Plus précisément, nous analyserons le comportement des

---

bornes théoriques sur la variance minimale d'estimation ainsi que la précision de différents estimateurs lorsque l'intensité d'éclairement diminue ou lorsque l'amplitude des déplacements augmente.

Nous compléterons ensuite cette étude en analysant les performances d'un problème de détection, consistant à discriminer deux niveaux d'intensité lumineuse. Nous montrerons comment l'utilisation d'un modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes permet de définir un gain sur les performances optimales de détection lorsqu'on remplace un faisceau poissonien standard par un faisceau sous-poissonien.

## Plan de la thèse

Ce manuscrit est composé de deux parties qui reflètent les deux situations physiques qui ont été abordées au cours de ces travaux de thèse.

La première partie est consacrée à la caractérisation d'une méthode d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité en lumière cohérente. Le premier des deux chapitres qui composent cette partie est consacré à un rappel du formalisme utilisé pour décrire la polarisation de la lumière, ainsi que des principales modélisations statistiques du phénomène de speckle qui entache les images formées sous un éclairage cohérent. Nous dressons également dans ce chapitre introductif un rapide état de l'art des techniques d'imagerie polarimétrique usuelles.

Dans le second chapitre, le principe général de l'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image de speckle est tout d'abord exposé. Nous proposons dans la suite de ce chapitre une caractérisation détaillée de cette technique d'estimation, tant d'un point de vue théorique (performances optimales évaluées grâce à la borne de Cramer-Rao, détermination d'estimateurs et caractérisation théorique de ceux-ci, comparaison aux techniques existantes plus complexes, etc.) que d'un point de vue plus pratique (résultats de simulations numériques, validation sur des données réelles, application à l'imagerie, robustesse à l'influence du bruit de photon à très faible flux, etc.).

La seconde partie de ce manuscrit est introduite par le chapitre 3, dans lequel les bases du formalisme de l'optique quantique sont rapidement esquissées afin de présenter le contexte physique des états sous-poissoniens de la lumière. Nous présentons également dans ce même chapitre les deux modèles de fluctuations sous-poissoniennes qui seront utilisés dans ce travail de thèse.

Dans le chapitre 4, nous caractérisons l'apport des lumières sous-poissoniennes pour améliorer la précision d'estimation d'un paramètre dans une image au-delà des performances atteignables avec un faisceau cohérent classique perturbé par un bruit poissonien standard. Dans le cas de l'estimation d'un déplacement d'une image, une étude comparative de la borne de Cramer-Rao et de la variance d'un estimateur simple du déplacement nous permet d'étudier comment ce gain en terme de performance d'estimation évolue en fonction de l'intensité moyenne du faisceau lumineux.

Enfin, le dernier chapitre propose une caractérisation du gain en performance pour un problème de discrimination entre deux hypothèses. Après avoir vérifié que la mesure de Chernoff permet d'évaluer la performance d'une tâche de

---

discrimination pour un modèle binomial de bruit sous-poissonien, nous établissons un critère de gain qui est fondé sur cette grandeur issue de la théorie de l'information. L'analyse du comportement de ce critère nous permet de discuter l'apport des lumières sous-poissoniennes pour l'amélioration des performances de discrimination.

En conclusion, nous dressons un bilan général des principaux résultats obtenus durant cette thèse, puis nous proposons quelques pistes de recherche pouvant être envisagées en perspective à ces travaux.

Première partie  
Polarisation partielle





# Chapitre 1

## Introduction à l'imagerie de degré de polarisation

### Sommaire

---

<b>1.1 Polarisation de la lumière</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1.1 Formalisme de Jones . . . . .	8
1.1.2 Degré de polarisation et vecteur de Stokes . . . . .	10
<b>1.2 Phénomène de speckle et statistiques associées</b> . . . . .	<b>11</b>
1.2.1 Généralités sur le phénomène de speckle . . . . .	12
1.2.2 Modélisation standard du phénomène de speckle . . . . .	13
1.2.3 Généralisation à d'autres types de speckle . . . . .	17
1.2.4 Extension aux lumières non circulaires . . . . .	21
<b>1.3 Introduction à l'imagerie polarimétrique</b> . . . . .	<b>22</b>
1.3.1 Imagerie polarimétrique cohérente . . . . .	23
1.3.2 Imagerie de degré de polarisation . . . . .	25
<b>1.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>28</b>

---

Depuis leurs premières observations expérimentales au XVII<sup>e</sup> siècle, les phénomènes optiques liés à la polarisation de la lumière ont fasciné les physiciens, tant pour les expliquer théoriquement que pour les maîtriser expérimentalement. Si plusieurs espèces animales (abeilles, certaines espèces d'oiseaux, poissons ou batraciens) possèdent une sensibilité à la polarisation lumineuse, voire une véritable vision de la polarisation pour certains céphalopodes [135], l'œil humain est quant à lui aveugle à ces phénomènes. Le développement de systèmes d'imagerie polarimétrique présente donc un intérêt important pour pallier cette carence car les applications des systèmes de vision polarimétriques sont nombreuses, en particulier pour la caractérisation des états de surface des matériaux. Néanmoins, la complexité importante de ces systèmes qui nécessitent l'emploi de plusieurs composants optiques polarimétriques explique que de tels dispositifs d'imagerie polarimétrique soient encore peu répandus pour des applications usuelles.

La première partie de cette thèse s'attachera donc à caractériser théoriquement les performances d'un système d'imagerie polarimétrique original, qui ne nécessite pas de composants optiques polarimétriques lors de l'acquisition de l'image mais qui tire parti du bruit de speckle dû à l'utilisation d'un éclairage actif cohérent de la scène imagée. Dans ce chapitre, nous rappelons ainsi les bases du formalisme classique utilisé pour décrire la polarisation lumineuse, puis nous détaillerons les principaux modèles statistiques de fluctuations de speckle. Enfin, nous dresserons un très bref état de l'art des principales techniques d'imagerie polarimétriques standard.

## 1.1 Polarisation de la lumière

Dans cette section, nous rappelons brièvement le formalisme usuellement utilisé pour modéliser les états de polarisation de la lumière, ainsi que les différentes grandeurs permettant de décrire ces états de polarisation.

### 1.1.1 Formalisme de Jones

Étudier la polarisation de la lumière revient à décrire le comportement du champ électromagnétique associé à cette lumière. Dans toute cette partie du manuscrit, nous considérerons qu'une vibration lumineuse peut faire l'objet d'une décomposition en onde planes quasi-monochromatiques et qu'elle se propage dans un milieu homogène et isotrope. Si cette hypothèse est vérifiée, les champs électrique et magnétique sont alors des champs transverses et sont totalement liés : un seul suffit donc à décrire intégralement la vibration lumineuse. Par conséquent, nous nous intéresserons dans la suite au seul champ électrique, noté  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t)$  à l'instant  $t$ , à la coordonnée  $z$  dans la direction de propagation, et en un point  $\mathbf{r}$  du plan transverse orthogonal à celle-ci. Pour faciliter les notations, il est

souvent pratique d'introduire le signal analytique associé au champ électrique. Cette grandeur que nous noterons  $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, z, t)$  est reliée au champ électrique par l'équation suivante

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) = \text{Re}[\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, z, t)] = \text{Re}[\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}, z, t)e^{-2i\pi\nu t}], \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}, z, t)$  représente cette fois l'**enveloppe complexe du signal analytique** et  $\nu$  la fréquence centrale de l'onde lumineuse. Par ailleurs, puisque les effets de la propagation de la lumière ne seront pas pris en compte dans la suite, on supposera que l'abscisse  $z$  le long de la direction de propagation est constante et on ne notera plus la dépendance en  $z$  des grandeurs utilisées. On supposera en effet que les phénomènes lumineux sont modélisés pour un plan transverse unique, confondu avec le plan du détecteur sur lequel les signaux lumineux sont acquis.

En optique statistique, l'enveloppe complexe du signal analytique du champ est classiquement modélisée comme un vecteur aléatoire complexe à deux dimensions appelé **vecteur de Jones** :

$$\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_X(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}_Y(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Les deux composantes du vecteur de Jones sont définies relativement à une base orthonormée  $[\mathbf{u}_X, \mathbf{u}_Y]^T$ . Notons que ces deux vecteurs sont complexes dans le cas général, notamment pour pouvoir décrire les états de polarisation elliptiques.

Dans le cas particulier où le vecteur de Jones est considéré déterministe et indépendant du temps<sup>2</sup>, la lumière est dite totalement polarisée et l'enveloppe complexe du champ électrique s'écrit  $\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = A_X(\mathbf{r})\mathbf{u}_X + A_Y(\mathbf{r})\mathbf{u}_Y$ . Le signal analytique associé au champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  décrit alors une ellipse dans le plan transverse à la direction de propagation : les deux composantes du signal analytique évoluent de manière parfaitement corrélée [69].

Dans le cas d'une lumière partiellement polarisée en revanche, le vecteur de Jones est usuellement considéré comme un vecteur aléatoire et ses fluctuations doivent être prises en compte pour décrire correctement l'état de polarisation de la lumière. Il est d'usage en optique statistique de décrire ces fluctuations au second ordre<sup>3</sup> en calculant la matrice de covariance du vecteur de Jones, que l'on dénommera dans la suite **matrice de polarisation**. Cette matrice, parfois appelée également matrice de cohérence, est définie par

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) \triangleq \begin{pmatrix} \langle |A_X(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle & \langle A_X(\mathbf{r}, t)A_Y^*(\mathbf{r}, t) \rangle \\ \langle A_Y(\mathbf{r}, t)A_X^*(\mathbf{r}, t) \rangle & \langle |A_Y(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mu_X(\mathbf{r}, t) & c(\mathbf{r}, t) \\ c^*(\mathbf{r}, t) & \mu_Y(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Les éléments diagonaux  $\mu_X(\mathbf{r}, t)$  et  $\mu_Y(\mathbf{r}, t)$  de la matrice  $\Gamma(\mathbf{r}, t)$  représentent les intensités moyennes des deux composantes du champ, au point  $\mathbf{r}$  et à l'instant  $t$ , selon les états de polarisation correspondant aux vecteurs  $\mathbf{u}_X$  et  $\mathbf{u}_Y$ . Le terme

<sup>2</sup> – Par exemple lorsqu'on élabore une modélisation classique d'une lumière parfaitement cohérente et monochromatique.

<sup>3</sup> – Bien qu'elle soit très classiquement utilisée et très couramment répandue, cette description au second ordre ne sera rigoureusement exhaustive que dans le cas de fluctuations gaussiennes.

antidiagonal  $c(\mathbf{r}, t)$  désigne l'intercorrélacion des deux composantes du vecteur de Jones, traduisant ainsi la corrélation partielle de celles-ci. L'état de polarisation d'une lumière partiellement polarisée est donc caractérisée par quatre paramètres réels.

Toute matrice de covariance étant hermitique et définie positive, la matrice de polarisation  $\Gamma(\mathbf{r}, t)$  peut donc être diagonalisée dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont positives ou nulles. En omettant la dépendance en  $\mathbf{r}$  et la dépendance en temps des grandeurs introduites précédemment pour simplifier les notations, la matrice  $\Gamma$  peut donc s'écrire

$$\Gamma = U\Lambda U^\dagger = U \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} U^\dagger, \quad (1.4)$$

où  $U$  est une matrice unitaire et où l'on choisit par convention  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$ . Si la matrice diagonale  $\Lambda$  est de rang 1 (c'est-à-dire si  $\mu_2 = 0$ ), la matrice  $\Gamma$  est de la forme  $\mathbf{v}\mathbf{v}^\dagger$ , où  $\mathbf{v}$  est un vecteur complexe. Une telle situation correspond à un état de polarisation pur (lumière totalement polarisée) représenté par le vecteur  $\mathbf{v}$ . L'autre cas extrême survient si  $\mu_1 = \mu_2$  : la matrice de polarisation est alors proportionnelle à la matrice identité et caractérise une lumière totalement dépolarisée. Entre ces deux situations, la lumière est dite partiellement polarisée et peut être caractérisée au moyen du degré de polarisation.

### 1.1.2 Degré de polarisation et vecteur de Stokes

À partir de la définition de la matrice de polarisation et de sa forme diagonalisée, on définit classiquement le **degré de polarisation** par le coefficient

$$\mathcal{P} \triangleq \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (1.5)$$

Ce coefficient varie entre 0 (lumière dépolarisée) et 1 (lumière totalement polarisée). Entre ces deux valeurs, le degré de polarisation permet de quantifier la polarisation partielle d'une lumière. En effet, on peut montrer que tout état partiellement polarisé peut être décomposé en une superposition incohérente d'un état totalement dépolarisé et d'un état totalement polarisé [54]. Ce dernier est nommé *état de polarisation principal* et est caractérisé par le vecteur propre associé à la valeur propre la plus grande  $\mu_1$ . En effet on peut écrire

$$\Gamma = U \left\{ (\mu_1 - \mu_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} U^\dagger = \mu_I U \left\{ \mathcal{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - \mathcal{P}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} U^\dagger, \quad (1.6)$$

où  $\mu_I$  représente l'intensité totale de la lumière au point considéré  $\mu_I \triangleq \mu_X + \mu_Y = \text{tr}(\Gamma)$ . D'après l'équation précédente et d'après la définition donnée en (1.5) du degré de polarisation, les valeurs propres de la matrice  $\Gamma$  s'expriment simplement en fonction de  $\mathcal{P}$  et  $\mu_I$  puisque

$$\mu_1 = \frac{1 + \mathcal{P}}{2} \mu_I, \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{1 - \mathcal{P}}{2} \mu_I. \quad (1.7)$$

Notons enfin qu'il est possible d'exprimer le degré de polarisation défini ci-dessus en fonction des éléments de la matrice  $\Gamma$  sous sa forme non diagonale en écrivant

$$\mathcal{P} = \sqrt{1 - 4 \frac{\det(\Gamma)}{[\text{tr}(\Gamma)]^2}} = \sqrt{1 - 4 \frac{(\mu_X \mu_Y - |c|^2)}{\mu_I^2}}. \quad (1.8)$$

Si le degré de polarisation représente un paramètre utile pour quantifier la polarisation d'une lumière grâce à une unique valeur scalaire, il n'est cependant pas suffisant pour caractériser complètement l'état de polarisation de la lumière. Ce dernier ne pourra être décrit exhaustivement<sup>4</sup> qu'en utilisant la matrice de polarisation  $\Gamma$ . Historiquement, c'est l'usage du **vecteur de Stokes**, noté  $\mathbf{s}$ , qui a été privilégié pour décrire l'état de polarisation de la lumière. Ce vecteur consiste simplement en une réorganisation des termes de la matrice  $\Gamma$ , par une transformation bijective, en quatre paramètres réels :

$$\mathbf{s} = [s_0, s_1, s_2, s_3]^T = [\mu_X + \mu_Y, \mu_X - \mu_Y, 2 \text{Re}(c), 2 \text{Im}(c)]^T. \quad (1.9)$$

L'intérêt pratique du vecteur de Stokes réside surtout dans le fait que chacun de ses éléments est directement accessible expérimentalement par une mesure d'intensité, associée à une configuration particulière d'un analyseur de polarisation et d'une lame biréfringente (voir par exemple [69], p. 29). On peut noter enfin que le degré de polarisation s'exprime aisément en fonction des éléments du vecteur de Stokes par  $\mathcal{P} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}/s_0$ .

Nous verrons par la suite comment ces différentes grandeurs caractéristiques de l'état de polarisation de la lumière peuvent être mesurées pour des applications d'imagerie polarimétrique.

## 1.2 Phénomène de speckle et statistiques associées

Dès l'apparition des premiers lasers au début des années 1960, il est devenu habituel d'observer, lorsqu'un laser éclaire une surface diffusante rugueuse, une figure lumineuse contrastée, composée de taches lumineuses chatoyantes, entourées de régions plus sombres. Bien qu'il eût été déjà observé historiquement en lumière blanche [65], ce phénomène qualifié du terme anglo-saxon de **speckle**, signifiant « tache » ou « tavelure », a fait l'objet depuis les années 1960 de multiples études, tant pour s'en affranchir lorsqu'il dégrade la qualité de mesures optiques, que pour en tirer parti pour des applications de métrologie. Après une présentation succincte du phénomène, nous consacrerons la suite de cette section à un état de l'art des modèles statistiques des fluctuations d'intensité d'une figure de speckle, qui seront nécessaires pour appréhender l'influence du bruit de speckle dans l'imagerie cohérente et en particulier l'imagerie de degré de polarisation que nous présenterons dans la section suivante.

<sup>4</sup> – Dans la limite d'une description statistique au second ordre.

### 1.2.1 Généralités sur le phénomène de speckle

Lorsqu'elle subit une diffusion par une surface rugueuse, ou lors de la traversée d'un milieu hétérogène diffusant, une onde électromagnétique spatialement et temporellement cohérente subit des déviations et des déphasages aléatoires. En un point de l'espace éclairé par cette lumière diffusée (ou rétrodiffusée dans le cas d'un montage en réflexion), le champ électromagnétique peut être modélisé comme une somme de contributions élémentaires, associées à différents déphasages et déviations du champ incident initial. Ces ondes diffusées étant cohérentes mais déphasées entre elles, elles interfèrent alors, soit de manière constructive, et l'intensité observée alors dans un plan orthogonal à la direction d'incidence est dans ce cas importante, soit de manière destructive, auquel cas le point du plan d'observation apparaîtra plus sombre.

Chacune de ces zones claires entourée de régions plus sombres est associée à un *grain de speckle*, qui correspond à un élément volumique localisé, à l'intérieur duquel les différentes contributions du champ interfèrent de manière constructive. On convient habituellement de distinguer le speckle « *objectif* » qui correspond à une observation directe du motif d'intensité diffusé, sur un écran ou un capteur par exemple, et le speckle « *subjectif* » qui représente la figure d'interférence imagée à travers un système optique, tel que l'œil par exemple.

Pour une lumière incidente de longueur d'onde  $\lambda$ , le diamètre caractéristique  $\delta$  de ces grains de speckle est communément défini dans le cas du speckle subjectif par

$$\delta = 1,22 \frac{\lambda l}{D}, \quad (1.10)$$

où  $l$  représente alors la distance entre l'ouverture du système optique et le plan image et où  $D$  est le diamètre de l'objectif de l'imageur. On voit ainsi qu'on peut faire varier la taille des grains de speckle imagés à travers un système optique simplement en diaphragmant l'objectif.

Une autre quantité est très souvent utilisée pour caractériser le speckle. Il s'agit du **contraste de speckle**, défini par le rapport entre l'écart-type  $\sigma_I$  des fluctuations de l'intensité lumineuse et la moyenne de l'intensité  $\mu_I = \langle I \rangle$  :

$$\mathbf{C} \triangleq \frac{\sigma_I}{\mu_I}. \quad (1.11)$$

Dans la suite, nous détaillerons l'expression de ce contraste pour différents modèles de speckle.

On peut observer le phénomène de speckle dans un grand nombre de situations physiques, dès qu'une onde subit des déphasages aléatoires significatifs. Bien que nous présentions ici le speckle dans un cadre électromagnétique, ce phénomène se rencontre également souvent dans le domaine de l'acoustique, expliquant en particulier l'aspect très granuleux des images échographiques. Néanmoins, c'est en électromagnétisme que ce phénomène est le plus souvent rencontré. Les images RADAR par exemple, que l'on acquiert en enregistrant le champ rétrodiffusé par une scène après avoir éclairé celle-ci avec un faisceau cohérent, sont elles aussi fortement bruitées par ce phénomène de speckle. On peut également citer le cas des observations astronomiques qui se trouvent elles aussi limitées en précision à cause de la turbulence atmosphérique qui produit une figure de

speckle rapidement variable dans le temps<sup>5</sup>. Enfin, en ce qui concerne l'optique aux longueurs d'onde du visible, on rencontre ce phénomène dès que des sources cohérentes (lasers) sont utilisées, car la plupart des matériaux présentent une rugosité suffisante à l'échelle de la longueur d'onde pour donner naissance à des interférences et donc à un phénomène de speckle.

Pour toutes les techniques d'imagerie qui utilisent une source lumineuse cohérente (holographie, microscopie laser, etc.), le speckle est avant tout considéré comme un bruit dont il faut limiter les effets perturbatifs sur la qualité de l'image. Ainsi, l'investigation de techniques de réduction du contraste de speckle dans les images constitue un domaine de recherche à part entière. Généralement, toutes ces techniques reposent sur un moyennage de plusieurs figures de speckle pour tenter de réduire son contraste, soit par variation temporelle des chemins optiques empruntés par le faisceau incident (par utilisation d'une plaque diffusante mobile par exemple [92]), soit par superposition de plusieurs trains d'onde pour réduire la cohérence de l'éclairement laser [31] ou encore en utilisant des variations temporelles du spectre des sources utilisées [32]. On verra également plus en détail dans la section suivante comment un moyennage spatial des grains de speckle est encore la plus simple façon de réduire le contraste de speckle, au prix d'une perte en résolution. Dans le domaine de l'imagerie RADAR notamment, c'est ce type de moyennage qui est souvent réalisé pendant l'étape de post-traitement des données.

À l'inverse, il convient d'évoquer également les diverses applications de métrologie qui exploitent précisément la grande sensibilité des figures de speckle aux caractéristiques de la surface diffusante et qui se scindent très schématiquement en deux catégories entre les applications de mesure de déplacements, de déformation ou de vélocimétrie et les applications de mesure de rugosité de surface. La première catégorie d'applications exploite la très forte sensibilité de la figure de speckle à des déplacements ou des déformations infimes de la surface diffusante : la mesure de la décorrélation progressive du motif de speckle permet ainsi de remonter à la valeur de ces paramètres [114, 2]. D'autre part, plusieurs techniques reposant sur des modèles particuliers de statistiques de speckle permettent de réaliser une caractérisation optique de la rugosité des surfaces diffusantes tout en présentant l'avantage d'être non destructives et sans contacts (voir par exemple [90, 91, 139]).

### 1.2.2 Modélisation standard du phénomène de speckle

Pour compléter la présentation générale du speckle qui précède, nous proposons ici de rappeler dans ses grandes lignes la modélisation statistique standard de ce phénomène, élaborée par J. W. Goodman en 1975 et qui fait toujours référence dans le domaine de l'optique statistique. Puisqu'il est généralement très difficile de décrire précisément les irrégularités de la surface à l'échelle sub-micrométrique pour calculer la figure d'interférence exacte du speckle, il est nécessaire d'adopter une description statistique du mécanisme de rétrodiffusion sur la surface rugueuse. Cette description permet en effet d'appréhender les caractéristiques essentielles du problème et de déterminer les propriétés statistiques du

---

<sup>5</sup> – On peut noter ici que les techniques de correction du front d'onde par optique adaptative tentent notamment de limiter les effets néfastes de ce bruit de speckle.



champ électrique rétrodiffusé.

### 1.2.2.1 Champ scalaire polarisé

Dans un premier temps, nous considérons une onde monochromatique totalement polarisée<sup>6</sup> rétrodiffusée par une surface de rugosité et de réflectivité homogène. La modélisation classique suppose que la surface diffusante est composée de  $N_d$  diffuseurs élémentaires. En tout point  $\mathbf{r}$  du plan d'observation recevant une partie de la lumière rétrodiffusée, on suppose que le champ résulte de la somme des  $N_d$  contributions de chaque diffuseur élémentaire.

Le champ étant supposé scalaire, l'enveloppe complexe du champ au point  $\mathbf{r}$  définie à l'équation (1.1) peut donc s'écrire

$$\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = A_X(\mathbf{r})\mathbf{u}_X = \sum_{k=1}^{N_d} A_{X,k}(\mathbf{r})\mathbf{u}_X = \sum_{k=1}^{N_d} \frac{U_k(\mathbf{r})}{\sqrt{N_d}} e^{-\phi_k(\mathbf{r})} \mathbf{u}_X, \quad (1.12)$$

où  $A_{X,k}(\mathbf{r})$  représente l'enveloppe complexe du champ rétrodiffusé par un diffuseur unique (diffuseur  $k$ ). Les quantités  $U_k(\mathbf{r})/\sqrt{N_d}$  et  $\phi_k(\mathbf{r})$  représentent respectivement le module et la phase de ce champ rétrodiffusé élémentaire. Le champ rétrodiffusé au point considéré est donc décrit par la résultante d'une somme de  $N_d$  vecteurs du plan complexe (phaseurs) dont l'amplitude et la phase sont aléatoires. Les propriétés statistiques d'une telle somme de vecteurs complexes ont été largement étudiées dans le cadre de la théorie des marches aléatoires [54, 55].

Lorsque les hypothèses suivantes, proposées par Goodman [54], sont vérifiées, on se situe dans le cas particulier du speckle **pleinement développé**. En omettant désormais la dépendance en  $\mathbf{r}$ , ces hypothèses s'énoncent de la façon suivante :

1. les  $U_k$  et  $\phi_k$  peuvent être considérés comme des variables aléatoires indépendantes entre elles ;
2. pour chaque diffuseur, (c'est-à-dire  $\forall k$ ) les  $U_k$  ont la même distribution statistique, de moyenne  $\langle U \rangle$  et second moment  $\langle U^2 \rangle$  ;
3. les phases  $\phi_k$  sont réparties selon une loi uniforme sur  $[-\pi, \pi]$ <sup>7</sup>.

Dans ces conditions, le champ résultant est alors de moyenne nulle et les parties réelles et imaginaires du champ résultant sont décorrelées ( $\langle \text{Re}(A_X) \text{Im}(A_X) \rangle = 0$ ). On peut également montrer que les moments d'ordre deux des parties réelles et imaginaires sont égaux et s'écrivent  $\langle [\text{Re}\{A_X\}]^2 \rangle = \langle [\text{Im}\{A_X\}]^2 \rangle = \langle U^2 \rangle / 2 \triangleq \sigma^2$ .

Le champ résultant  $A_X$  s'écrit donc comme la somme de  $N_d$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon la même loi de probabilité. On applique alors classiquement le **théorème central limite** pour conclure que, dans la limite d'une sommation sur un nombre  $N_d$  très grand de diffuseurs, la densité de probabilité (DDP) de la somme de  $N_d$  variables aléatoires tend vers une distribution gaussienne. En appliquant ce résultat aux parties réelle et imaginaire de la variable aléatoire résultante  $A_X$ , on obtient finalement la loi

---

<sup>6</sup> – On se situe alors dans le cas le plus simple, monodimensionnel.

<sup>7</sup> – On verra dans la suite que cette hypothèse conditionne la **circularité** du speckle.

de probabilité conjointe suivante :

$$P(\text{Re}\{A_X\}, \text{Im}\{A_X\}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{[\text{Re}\{A_X\}]^2 + [\text{Im}\{A_X\}]^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.13)$$

Cette loi de probabilité obtenue pour un champ scalaire rétrodiffusé par une surface rugueuse est une **distribution gaussienne complexe circulaire** monodimensionnelle. En effet, comme cela est représenté sur la figure 1.1.a, les ellipses d'iso-probabilité du champ sont représentées dans le plan complexe (ou **plan de Fresnel**) par des cercles centrés sur l'origine car la moyenne du champ est nulle. En d'autres termes, on dira que le champ rétrodiffusé ne possède pas de **composante spéculaire**.

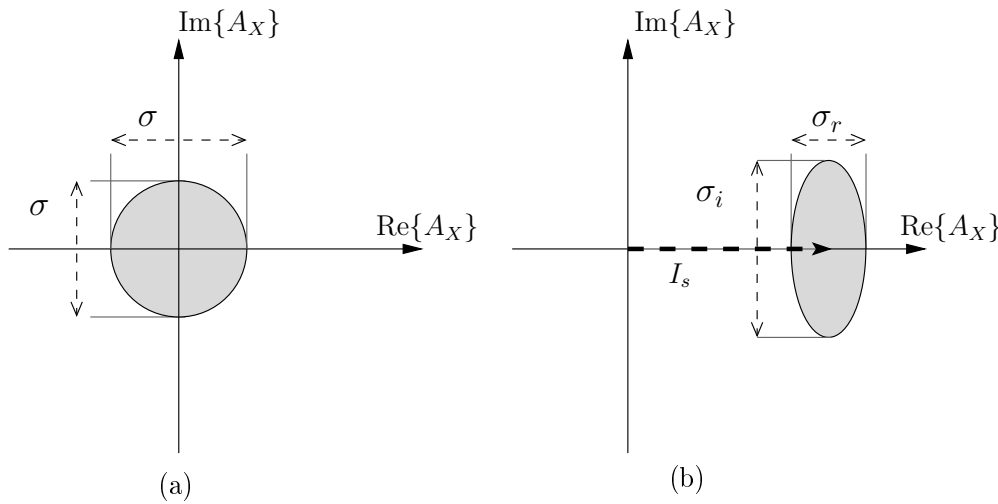


FIG. 1.1 – Représentation dans le plan de Fresnel d'un (a) champ gaussien complexe circulaire sans composante spéculaire. (b) champ gaussien complexe non circulaire de composante spéculaire non nulle et réelle.

La démarche proposée par J. W. Goodman permet d'accéder aux statistiques d'intensité lumineuse qui nous intéressent plus particulièrement pour ces travaux de thèse. En notant l'intensité lumineuse  $I = |A_X|^2$ , on obtient la DDP suivante pour l'intensité [54]

$$\forall I \geq 0, \quad P_I(I) = \frac{1}{\mu_I} \exp\left(-\frac{I}{\mu_I}\right), \quad (1.14)$$

où l'on a noté la moyenne de l'intensité  $\mu_I = \langle I \rangle = 2\sigma^2$ . Cette loi de probabilité est une **loi exponentielle**, dont les moments sont caractérisés par  $\langle I^n \rangle = n! \langle I \rangle^n$  [35]. Ainsi on en déduit aisément que dans cette situation, le contraste de speckle vaut

$$\mathbf{C} = \frac{\sigma_I}{\mu_I} = \frac{\sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}}{\langle I \rangle} = 1. \quad (1.15)$$

L'écart-type des fluctuations d'intensité est donc maximal et est égal à la moyenne de l'intensité de la figure de speckle : le speckle est alors dit **pleinement développé**. Pour l'imagerie cohérente, cette situation correspond à une dégradation très importante de la qualité des images, et a motivé les différentes techniques

de réduction de contraste de speckle évoquées précédemment.

### 1.2.2.2 Champ partiellement polarisé

Nous avons introduit le modèle statistique standard du speckle pleinement développé dans le cas d'une lumière totalement polarisée, dont la matrice de polarisation  $\Gamma$  est de rang 1.

Pour étendre ce modèle de speckle au cas partiellement polarisé, il suffit de passer d'une modélisation monodimensionnelle à celle d'un champ à deux dimensions. On propose donc ici de considérer le cas général d'une lumière partiellement polarisée, de matrice de polarisation arbitraire  $\Gamma$ , tout en supposant que les hypothèses précédentes qui caractérisent le speckle pleinement développé sont toujours vérifiées. On a vu à la section 1.1.2 que toute matrice de polarisation  $\Gamma$  pouvait être diagonalisée dans une base de vecteurs propres orthogonaux. Ainsi, dans cette base de diagonalisation, il devient possible d'écrire la variable aléatoire  $I$  associée à l'intensité lumineuse comme la somme de deux variables aléatoires décorréelées

$$I = I_1 + I_2, \quad (1.16)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  caractérisent les fluctuations d'intensité dans les deux directions de polarisation orthogonales associées aux vecteurs propres de  $\Gamma$ . Les valeurs moyennes de ces deux variables aléatoires sont clairement données par les valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui dépendent du degré de polarisation  $\mathcal{P}$  et de l'intensité moyenne totale  $\mu_I$  (voir équation (1.7)). Le speckle étant supposé pleinement développé, on peut alors montrer que chacune de ces deux composantes d'intensité  $I_j$ , ( $j = 1, 2$ ) est distribuée selon une loi **exponentielle** de moyenne  $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ) [54].

En outre, ces deux variables aléatoires sont non seulement décorréelées mais également **indépendantes** car elles résultent de deux composantes indépendantes du champ, dont l'enveloppe complexe  $\mathcal{E}^{(+)}$ , introduite à l'équation (1.2), est décrite dans ce cas par une densité de probabilité gaussienne complexe circulaire bidimensionnelle

$$P_{\mathcal{E}^{(+)}}(\mathcal{E}^{(+)}) = \frac{1}{\pi^2 \det[\Gamma]} \exp(-[\mathcal{E}^{(+)}]^\dagger \Gamma^{-1} [\mathcal{E}^{(+)}]), \quad (1.17)$$

qui généralise la DDP de l'équation (1.13) à deux dimensions [54].

Enfin, puisque les deux variables aléatoires  $I_1$  et  $I_2$  sont indépendantes, il est possible de calculer la DDP de l'intensité totale  $I$ . La loi de probabilité de la somme de deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de moyennes différentes s'écrit [54]

$$P_I(I) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \exp\left[-\frac{I}{\mu_1}\right] - \exp\left[-\frac{I}{\mu_2}\right] \right\}. \quad (1.18)$$

En remplaçant  $\mu_1$  et  $\mu_2$  par leurs expressions données en équation (1.7), on obtient alors [54]

$$P_I(I) = \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I} \left\{ \exp\left[-\frac{2I}{(1+\mathcal{P})\mu_I}\right] - \exp\left[-\frac{2I}{(1-\mathcal{P})\mu_I}\right] \right\}. \quad (1.19)$$

La forme de cette loi de probabilité, représentée sur la figure 1.2, évolue sensible-

ment lorsque le degré de polarisation varie entre 1 (lumière totalement polarisée) et 0 (lumière totalement dépolarisée). Pour une lumière totalement polarisée, on retrouve la loi exponentielle obtenue à l'équation (1.14), tandis que pour une lumière dépolarisée ( $\mathcal{P} = 0$ ),  $P_I(I)$  est alors une loi gamma d'ordre deux :

$$P_I(I) = \left(\frac{2}{\mu_I}\right)^2 I \exp\left(-2\frac{I}{\mu_I}\right). \quad (1.20)$$

On peut noter également que dans le cas général ( $0 < \mathcal{P} < 1$ ), cette loi de probabilité n'appartient pas à la famille des lois exponentielles [49].

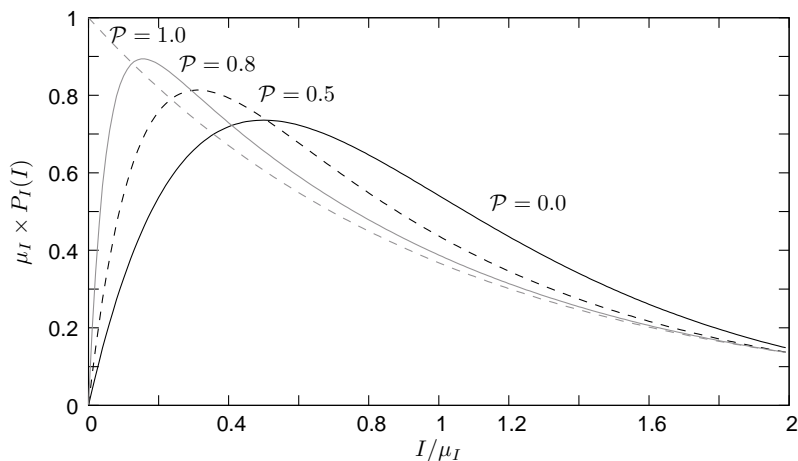


FIG. 1.2 – Densité de probabilité de l'intensité de speckle pleinement développé en lumière partiellement polarisée pour différentes valeurs de  $\mathcal{P}$ .

À partir de l'équation (1.19), on déduit aisément que l'écart-type de l'intensité  $I$  dans le cas partiellement polarisé vaut  $\sigma_I = \mu_I \sqrt{(1 + \mathcal{P}^2)/2}$ , ce qui permet d'écrire le contraste du speckle pleinement développé pour une lumière partiellement polarisée

$$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{1 + \mathcal{P}^2}{2}} \leq 1. \quad (1.21)$$

Il est important ici de remarquer qu'une dépolarisation partielle de la lumière se traduit par une réduction du contraste de speckle, jusqu'à un facteur  $1/\sqrt{2}$  si la lumière est totalement dépolarisée. Dans les travaux qui seront exposés dans le chapitre suivant, la relation entre le contraste de speckle et la valeur de  $\mathcal{P}$  sera utilisée pour élaborer une méthode d'estimation simple du degré de polarisation.

### 1.2.3 Généralisation à d'autres types de speckle

Le modèle standard que l'on vient de rappeler ci-dessus permet d'obtenir les statistiques de speckle pleinement développé en lumière partiellement polarisée. Toutefois, cette approche est dans certains cas inadaptée pour décrire correctement les statistiques de speckle (par exemple dans le cas de l'imagerie à travers des milieux turbulents [80, 1], ou de l'imagerie RADAR de certaines zones [3, 74, 75, 134, 107], etc.). Nous exposons brièvement dans cette section les principaux phénomènes physiques pour lesquels une modification de la mo-

délisation est nécessaire, ainsi que les conséquences sur les modèles statistiques décrivant les fluctuations d'intensité.

### 1.2.3.1 Statistiques de speckle intégré sur la surface d'un capteur

L'acquisition d'un motif de speckle sur un capteur représente une étape nécessaire pour réaliser des applications d'imagerie ou de métrologie de speckle. Il apparaît donc nécessaire d'étudier comment cette étape d'acquisition sur un capteur (photodiode, camera CCD, etc.) influence les modèles statistiques rappelés plus haut. En effet, lorsque l'extension spatiale de la surface sensible d'un détecteur ou d'un pixel d'une caméra CCD n'est pas négligeable devant la taille caractéristique  $\delta$  des grains de speckle (voir équation (1.10)), l'étape d'intégration modifie sensiblement les statistiques observées après cette étape d'acquisition.

Pour illustrer ces effets, on peut considérer simplement le cas d'un capteur unique parfait, en supposant que la réponse de ce dernier est unitaire sur toute sa surface notée  $S_c$  et qu'elle s'annule ailleurs. On se place également dans une situation où la surface du détecteur intègre un nombre  $L$  de grains de speckle, que nous supposons entier en première approximation. On admet de plus que les variables aléatoires associées aux intensités des différents grains de speckle contenus sur la surface du capteur sont indépendantes entre elles et distribuées selon la même loi de probabilité. En modélisant alors l'intensité intégrée par la totalité de la surface du capteur par une fonction constante par morceaux, on peut alors écrire l'intensité intégrée par le capteur  $I_c$  comme la somme de  $L$  variables aléatoires indépendantes [54]

$$I_c = \iint_{S_c} I dx dy = S_c \sum_{k=1}^L I_k. \quad (1.22)$$

Ainsi, dans le cas d'un champ scalaire (totalement polarisé), chacune des  $L$  variables aléatoires  $I_k$  intervenant dans la sommation obéit à une loi exponentielle de moyenne  $\mu_I$ . Dans le cas d'une lumière totalement polarisée ( $\mathcal{P} = 1$ ), la DDP de la somme de  $L$  variables exponentielles est une **loi gamma d'ordre  $L$**  et de moyenne  $\mu_{I_c} = \langle I_c \rangle = L\mu_I S_c$ , dont la densité de probabilité s'écrit

$$P_{I_c}(I_c) = \left(\frac{L}{\mu_{I_c}}\right)^L \frac{I_c^{L-1}}{\Gamma(L)} \exp\left(-L \frac{I_c}{\mu_{I_c}}\right), \quad (1.23)$$

où  $\Gamma(x)$  représente la **fonction gamma** (voir [60], p. xxxiv). Dans la suite des travaux présentés dans cette thèse, ce type de statistique de speckle sera qualifié de **speckle pleinement développé d'ordre  $L$** , ou plus généralement **speckle d'ordre supérieur**.

Dans le cas partiellement polarisé, la densité de probabilité de l'intensité intégrée résulte de la convolution de deux lois gamma d'ordre  $L$  et de moyennes différentes, ce qui conduit au résultat général suivant [54]

$$P_{I_c}(I_c) = \left[\frac{LI_c}{\mathcal{P}\mu_{I_c}}\right]^L \sqrt{\frac{4\pi\mathcal{P}L}{(1-\mathcal{P}^2)I_c\mu_{I_c}}} \frac{\exp\left(-\frac{2LI_c}{(1-\mathcal{P}^2)\mu_{I_c}}\right)}{\Gamma(L)} \mathbf{I}_{(L-\frac{1}{2})} \left[\frac{2\mathcal{P}LI_c}{(1-\mathcal{P}^2)\mu_{I_c}}\right], \quad (1.24)$$

où  $\mathbf{I}_n(x)$  désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre  $n$  [60].

On montrera par la suite que la variance d'une telle loi de probabilité vaut  $\text{var}(I_c) = \mu_{I_c}(1 + \mathcal{P}^2)/L$ , permettant alors d'écrire l'expression du contraste de speckle intégré sur un capteur

$$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{1 + \mathcal{P}^2}{2L}}. \quad (1.25)$$

En comparant cette expression avec l'équation (1.21), on en déduit que le moyennage de plusieurs grains de speckle sur un capteur conduit à une réduction du contraste. Cette technique est couramment utilisée pour limiter les perturbations dues au bruit de speckle en imagerie, et plus précisément dans le domaine RADAR où il est parfois possible de moyennner plusieurs acquisitions d'une même scène pour passer d'un speckle d'ordre 1 à un speckle d'ordre supérieur [118].

**Interprétation physique du paramètre  $L$  :** Comme nous venons de le présenter ici, on assimile souvent le paramètre  $L$  au nombre (supposé entier) de grains de speckle contenus dans la surface du capteur. Une modélisation plus fine de l'intégration d'une figure de speckle sur un capteur permet de montrer que ce paramètre  $L$  dépend de la dimension du détecteur et de l'aire de cohérence  $\mathcal{A}_{coh}$  de la lumière assimilée à l'aire moyenne des grains de speckle [54].

L'analyse proposée par Goodman démontre alors que si la taille du détecteur est très inférieure à la dimension des grains ( $S_c \ll \mathcal{A}_{coh}$ ), le paramètre  $L$  tend vers un : le speckle est alors bien échantillonné par le capteur et les conditions du speckle pleinement développé sont vérifiées. À l'inverse, lorsque la surface d'intégration  $S_c$  est grande devant l'aire de cohérence  $\mathcal{A}_{coh}$ , le paramètre  $L$  vaut approximativement  $S_c/\mathcal{A}_{coh}$ , valeur qui correspond bien approximativement au nombre moyen de grains de speckle contenus dans la surface du détecteur.

**Limites du modèle de speckle d'ordre supérieur :** Dans la suite, on considérera la plupart du temps des statistiques de speckle d'ordres supérieurs ( $L > 1$ ) à valeurs entières. Cependant, pour des applications réelles d'imagerie, cette hypothèse risque de n'être pas parfaitement respectée. Par ailleurs, les intensités des différentes figures de speckle moyennées par la surface du détecteur ont été supposées indépendantes entre elles. Si cette hypothèse d'indépendance n'est pas vérifiée, les statistiques présentées plus haut doivent être bien sûr corrigées : sommer des grains de speckle partiellement corrélés conduit en effet à une réduction du contraste de speckle moins importante que celle observée à l'équation (1.25) [54].

### 1.2.3.2 Modèles de speckle pour des réflectivités non constantes

D'autres phénomènes physiques nécessitent de corriger le modèle standard de speckle pleinement développé, pour prendre en compte par exemple le fait que la réflectivité de la surface réfléchissante n'est pas nécessairement constante, contrairement à l'hypothèse faite dans le cas du speckle pleinement développé. L'intensité de la figure de speckle reçue au niveau du capteur résulte alors d'un phénomène doublement aléatoire provenant

- d’une part du phénomène de speckle proprement dit causé par les interférences multiples de la lumière rétrodiffusée par une surface rugueuse ;
- et d’autre part des variations de la réflectivité  $\rho$  de la zone de la scène projetée sur le détecteur, modélisée ici par une variable aléatoire distribuée selon une loi  $P_\rho(\rho)$ .

L’intensité  $I_r$  peut alors s’écrire  $I_r = \rho I$ , où  $I$  désigne l’intensité qui serait obtenue pour une réflectivité uniforme, et que l’on suppose distribuée selon une loi de probabilité  $P_I(I)$ . Par une application de la relation de Bayes, on obtient alors la loi de probabilité suivante pour l’intensité  $I_r$

$$P_{I_r}(I_r) = \int P_{I_r|\rho}(I_r|\rho)P_\rho(\rho)d\rho = \int \frac{1}{\rho}P_I\left(\frac{I_r}{\rho}\right)P_\rho(\rho)d\rho. \quad (1.26)$$

Dans le cadre de l’imagerie RADAR à ouverture synthétique, des études phénoménologiques ont montré qu’un modèle de réflectivité obéissant à une loi gamma pouvait décrire correctement les fluctuations de réflectivité du sol. Ainsi, en supposant que  $P_\rho(\rho)$  est une loi gamma d’ordre  $\nu$ , de moyenne unitaire et que l’éclairement totalement polarisé produit un speckle d’ordre  $L$  entier<sup>8</sup>, l’intensité mesurée par le capteur suit alors une **loi  $\mathcal{K}$**  de paramètres  $L, \nu$  et  $\mu_{I_r} = \langle I_r \rangle$  [107, 75, 74, 3], dont l’expression est

$$P_{I_r}(I_r) = \frac{2}{I_r \Gamma(L) \Gamma(\nu)} \left[ \frac{L\nu I_r}{\mu_{I_r}} \right]^{\left(\frac{L+\nu}{2}\right)} \mathbf{K}_{\nu-L} \left( 2\sqrt{\frac{L\nu I_r}{\mu_{I_r}}} \right), \quad (1.27)$$

où la notation  $\mathbf{K}_n(x)$  désigne la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d’ordre  $n$  [60].

Dans d’autres références en imagerie RADAR [134], il a été montré également que pour modéliser le « fouillis » provenant des échos de sol, les fluctuations de speckle sont parfois plus fidèlement modélisées en remplaçant la loi exponentielle du modèle standard par une **loi de Weibull** de paramètres  $\eta$  et  $b$  [35]

$$P_I(I) = \frac{b}{\eta} \left( \frac{I}{\eta} \right)^{b-1} \exp \left[ - \left( \frac{I}{\eta} \right)^b \right], \quad (1.28)$$

où  $b$  est le paramètre de forme de la loi. La valeur moyenne de cette distribution est  $\mu_I = \eta \Gamma(1 + 1/b)$ , où  $\Gamma$  représente la fonction Gamma<sup>9</sup>.

Cette brève description des principaux modèles de speckle montre que les descriptions statistiques permettant de caractériser les fluctuations de l’intensité lumineuse observée évoluent sensiblement en fonction des conditions expérimentales ou de la nature des matériaux. Dans le chapitre suivant où nous verrons comment tirer parti des fluctuations de speckle pour estimer le degré de polarisation de la lumière, nous utiliserons différents modèles de speckle afin de généraliser au mieux les résultats obtenus.

<sup>8</sup> – C’est-à-dire que  $P_I(I)$  est une loi gamma d’ordre  $L$  et de moyenne  $\mu_I$ .

<sup>9</sup> – La fonction  $\Gamma$  est définie grâce à l’intégrale suivante  $\Gamma(x) \triangleq \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$  (voir [60], p. xxxiv).

### 1.2.4 Extension aux lumières non circulaires

Pour les différents modèles de speckle présentés jusqu'ici, le champ électromagnétique à l'origine des distributions d'intensité étudiées était supposé **gaussien** et **circulaire**, ce qui revient à supposer que le champ est distribué selon l'équation (1.13) dans le cas d'une lumière totalement polarisée. La première hypothèse (gaussianité) qui découle du théorème central limite nécessite que le nombre de diffuseurs qui contribuent au phénomène d'interférence multiples soit très grand (idéalement, infini). La seconde hypothèse (circularité) est vérifiée à condition que les différences des hauteurs des rugosités de la surface soient suffisamment élevées (en pratique, supérieures à la longueur d'onde  $\lambda$ ) pour assurer que les déphasages des différentes contributions rétrodiffusées au point  $\mathbf{r}$  soient uniformément réparties entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Ces deux conditions ne sont pas toujours vérifiées en pratique, par exemple pour des surfaces de faible rugosité. L'hypothèse de gaussianité doit quant à elle être remise en cause lorsque la résolution du système d'imagerie atteint la dimension transversale caractéristique des rugosités, conduisant ainsi à n'éclairer qu'un faible nombre de diffuseurs [8]. De nombreuses études ont donc tenté de compléter le modèle classique et d'analyser les statistiques de speckle non-gaussiennes [34, 46, 154, 8] et non circulaires [106, 155, 8]<sup>10</sup>.

Tout en restant dans l'hypothèse gaussienne, nous serons amenés dans la suite de ce manuscrit à évoquer la situation d'un champ scalaire (donc totalement et linéairement polarisé) **non circulaire**. Dans ce cas, la répartition des parties réelles et imaginaires du champ est dissymétrique car leurs variances, notées  $\sigma_r^2$  et  $\sigma_i^2$ , sont différentes, et les ellipses d'iso-probabilité ne sont désormais plus circulaires. Les quantités  $\sigma_r^2$  et  $\sigma_i^2$  désignent respectivement les projections des demi-axes de l'ellipse sur l'axe réel et imaginaire et sont représentés sur la figure 1.1.b dans le cas où le champ possède une composante spéculaire (moyenne de l'enveloppe complexe du champ non nulle) à valeur réelle.

Parmi les nombreuses contributions théoriques à l'élaboration d'un modèle statistique du speckle non circulaire, celle de Uozumi et Asakura [155] conduit, à notre connaissance, aux résultats les plus généraux, avec une composante spéculaire quelconque et prenant en compte une corrélation partielle entre les fluctuations des parties réelles et imaginaires du champ. Par souci de simplicité, nous rappelons ici les résultats obtenus par Ohtsubo et Asakura [106] dans lesquels les parties réelle et imaginaire du champ sont décorrélées. Nous supposons en outre que  $\sigma_i \geq \sigma_r$  et que la composante spéculaire du champ possède une partie imaginaire nulle  $\text{Im}\{A_X\} = 0$  (ce qui est le cas de la figure 1.1.b). L'**intensité spéculaire** sera quant à elle notée  $I_s \triangleq \langle A_X \rangle^2$ . Dans ce cas, la DDP du champ scalaire, exprimée à l'équation (1.13) dans le cas circulaire, devient

$$P(\text{Re}\{A_X\}, \text{Im}\{A_X\}) = \frac{1}{2\pi\sigma_i\sigma_r} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\text{Re}\{A_X\}^2}{2\sigma_r^2} + \frac{[\text{Im}\{A_X\}]^2}{2\sigma_i^2}\right)\right], \quad (1.29)$$

<sup>10</sup> – Notons que contrairement au cas du modèle standard gaussien et circulaire, la plupart des modélisations de speckle non-gaussien et/ou non circulaires dépendent explicitement des caractéristiques de rugosité de la surface rétrodiffusante. Cette propriété intéressante pour des applications de métrologie constitue donc une motivation supplémentaire pour obtenir une description statistique la plus fidèle qui soit.



avec  $\Delta\text{Re}\{A_X\} = \text{Re}\{A_X\} - \langle \text{Re}\{A_X\} \rangle = \text{Re}\{A_X\} - \sqrt{I_s}$ .

À partir de cette expression, Ohtsubo et Asakura ont déterminé la loi de probabilité de l'intensité  $I = |A_X|^2$  qui s'écrit [106]

$$P_I(I) = \frac{1}{2\sigma_r\sigma_i} \exp\left\{-\left[\frac{I}{4}\left(\frac{1}{\sigma_r^2} + \frac{1}{\sigma_i^2}\right) + \frac{I_s}{2\sigma_r^2}\right]\right\} \cdot \left[\mathbf{I}_0(\theta_1)\mathbf{I}_0(\theta_2) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{I}_n(\theta_1)\mathbf{I}_n(\theta_2)\right], \quad (1.30)$$

où  $\mathbf{I}_n(x)$  représente la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre  $n$  et où

$$\theta_1 = \frac{I}{4}\left(\frac{1}{\sigma_r^2} - \frac{1}{\sigma_i^2}\right), \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{\sqrt{II_s}}{\sigma_r^2}. \quad (1.31)$$

Ce modèle simplifié de fluctuations d'intensité pour des lumières non circulaires nous sera utile, au début de la seconde partie de ce manuscrit, pour introduire une description statistique des lumières sous-poissoniennes.

### 1.3 Introduction à l'imagerie polarimétrique

Le cadre applicatif des travaux présentés dans cette première partie de thèse est celui de l'imagerie polarimétrique cohérente, et plus particulièrement l'imagerie de degré de polarisation. Le but de l'imagerie polarimétrique consiste à obtenir une ou plusieurs images représentatives des propriétés polarimétriques de la lumière en provenance de tous les points de la scène imagée. L'intérêt et l'engouement que suscite aujourd'hui ce type d'imagerie s'explique par le fait que l'interaction de la lumière avec un objet influe sensiblement sur l'état de polarisation de la lumière rétrodiffusée, et cette influence dépend des caractéristiques de surface intrinsèques du matériau imagé (rugosité, orientation, etc.), voire des structures volumiques du matériau dans le cas où une diffusion en volume est également observée [30, 160]. En autorisant une caractérisation fine des mécanismes de rétrodiffusion à la surface des matériaux ou des tissus imagés, l'imagerie polarimétrique présente donc un grand intérêt pour des domaines aussi variés que la reconnaissance de matériaux, le diagnostic médical assisté par imagerie, le contrôle non destructif d'état de surface, etc. De manière plus générale, l'utilisation de techniques d'imagerie polarimétrique peut également bénéficier à certaines tâches de traitement d'image comme la détection, la classification ou encore la segmentation, car les informations polarimétriques révèlent dans de nombreuses situations des contrastes supérieurs à ceux visibles en imagerie de réflectivité standard [153, 12, 20, 77].

On fait habituellement la distinction entre l'**imagerie polarimétrique incohérente** et l'**imagerie polarimétrique cohérente**. La première vise à caractériser, en chaque point de la scène observée, l'état de polarisation de la lumière rétrodiffusée par les objets imagés sous une illumination incohérente active ou passive (lumière ambiante).<sup>11</sup> On peut citer plusieurs exemples d'application où des contrastes polarimétriques en lumière ambiante sont utilisés en reconnaissance des matériaux [160] (repérages de zones corrodées sur les coques de navires [162] ou discrimination de pistes métalliques sur des images de circuits impri-

<sup>11</sup> – Dans certains cas (imagerie infrarouge thermique par exemple) la lumière peut être directement émise par les objets de la scène imagée.

més [161]), ou pour détecter des occlusions [161] ou déterminer l'orientation des surfaces des objets imagés [161, 85, 78].

### 1.3.1 Imagerie polarimétrique cohérente

À la différence des techniques évoquées ci-dessus, l'**imagerie polarimétrique cohérente active** consiste à éclairer une scène avec une lumière cohérente (lumière laser) dont on contrôle l'émission en terme d'intensité, de cohérence et d'état de polarisation. La lumière diffusée par la scène est alors imagée, en réflexion ou en transmission, par un système optique polarimétrique. Outre le contrôle de l'état de la lumière incidente, ces techniques actives présentent l'avantage d'être moins sensibles aux conditions environnementales d'éclairage, en étant opérationnelles de nuit par exemple. Les domaines d'application de l'imagerie polarimétrique active sont similaires à celles évoquées plus haut (reconnaissance de matériaux, contrôle non-destructif, discrimination de cibles, détection de mines enterrées [130, 159], etc.) auxquelles on peut rajouter la télédétection [21, 12, 44], l'imagerie médicale (imagerie des couches superficielles de l'épiderme [26, 30] ou l'analyse de la rétine [15]) ou encore l'amélioration de la visibilité à travers un milieu diffusant (solution aqueuse ou brume) [129, 50].

Les diverses techniques d'imagerie polarimétrique cohérente se distinguent par les différentes caractéristiques polarimétriques imagées. Nous établirons ici un distinguo entre celles qui visent à l'acquisition de paramètres polarimétriques multidimensionnels (imagerie de Stokes ou de Mueller) et celles pour lesquelles l'information polarimétrique est caractérisée par un unique paramètre scalaire, typiquement l'imagerie de degré de polarisation. Avant de détailler dans le paragraphe suivant les différentes techniques d'estimation du degré de polarisation, il convient de rappeler brièvement les techniques d'imagerie à plusieurs composantes que sont l'imagerie de Stokes et l'imagerie de Mueller.

**Imagerie de Stokes :** Le principe de fonctionnement d'un système d'imagerie polarimétrique cohérente est illustré sur la figure 1.3. Le faisceau cohérent utilisé pour illuminer la scène est contrôlé en polarisation grâce à un **générateur d'état de polarisation**, constitué par l'association de composants optiques polarimétriques (lame quart d'onde, polariseur rectiligne, etc.), permettant de réaliser n'importe quel état de polarisation pur. La lumière rétrodiffusée par la scène est collectée par un montage télescopique, et vient former une image sur la surface d'un détecteur sensible à l'intensité lumineuse. Cependant, avant d'atteindre le capteur, la lumière traverse un **analyseur d'état de polarisation**, qui permet de mesurer la fraction d'énergie lumineuse contenue dans un état de polarisation donné.

Grâce à 4 configurations différentes de l'analyseur de polarisation, il devient dès lors possible de mesurer les 4 composantes du vecteur de Stokes en chaque pixel du détecteur [69]. Un tel dispositif permet donc d'accéder à une caractérisation complète de l'état de polarisation de la lumière rétrodiffusée par la scène et permet ainsi de remonter à des propriétés polarimétriques multiples (degré de polarisation, biréfringence, dichroïsme, etc.). L'inconvénient majeur de ce type d'imagerie provient du fait que de nombreuses acquisitions sont nécessaires pour effectuer la mesure, ce qui n'est pas sans poser des problèmes de recalage

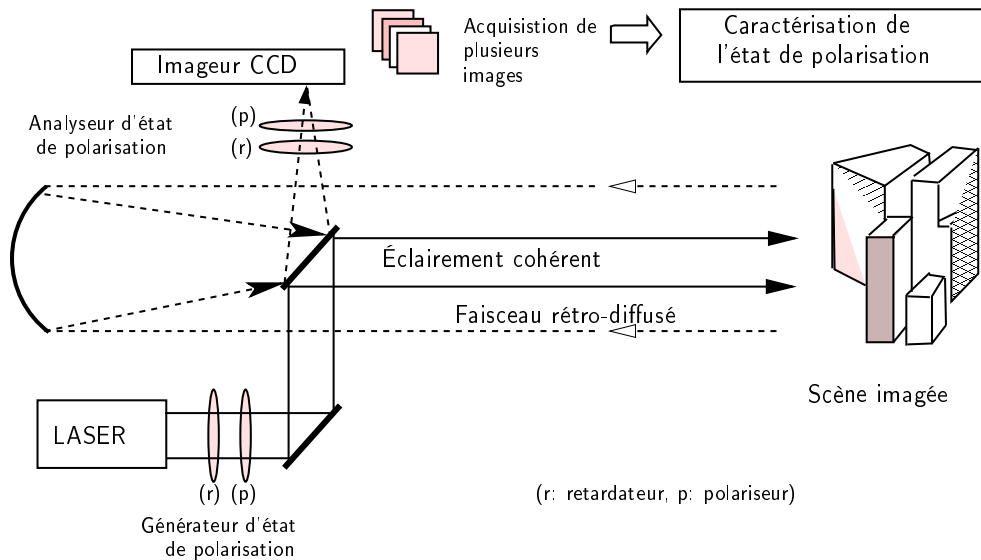


FIG. 1.3 – Schéma de principe d'un dispositif d'imagerie polarimétrique active cohérente.

d'images, dans le cas par exemple de l'imagerie médicale *in vivo* ou pour des systèmes d'imagerie mobiles. Par ailleurs, la complexité du système d'imagerie polarimétrique et la nécessité d'utiliser des composants optiques polarimétriques à configuration variable et mobile accroît le coût de ces systèmes, leur durée d'acquisition ainsi que les difficultés de maintenance (dus notamment à l'usure des systèmes de mécanisation de ces composants) et d'intégration spatiale dans des systèmes optiques miniaturisés.

Pallier ces différents problèmes représente donc un enjeu important pour le développement de systèmes d'imagerie polarimétrique. Ainsi, parmi les nombreuses innovations technologiques qui ont pu être proposées, on peut noter principalement le développement de dispositifs analyseurs d'états de polarisation à cristaux liquides [163, 147], dont le but est d'accélérer les mesures polarimétriques et de miniaturiser les composants optiques, en limitant le nombre de pièces mobiles.

**Imagerie de Mueller :** Si l'imagerie de Stokes permet de caractériser complètement l'état polarimétrique de la lumière rétrodiffusée, l'imagerie de Mueller consiste quant à elle à obtenir une caractérisation complète de la réponse polarimétrique d'un matériau, en mesurant sa matrice de Mueller [69]. Cette matrice  $4 \times 4$  contient donc 16 paramètres, qui sont accessibles à la mesure en répétant l'analyse du vecteur de Stokes pour 4 états de polarisations distincts de la lumière incidente. Historiquement, le premier imageur de Mueller a été développé en 1995 par Pezzaniti et Chipman [113] mais l'amélioration régulière des dispositifs d'imagerie fait de l'imagerie de Mueller un domaine d'investigation toujours actif [14, 88, 27]. On peut cependant noter que les systèmes d'acquisition sont encore plus complexes que dans le cas de l'imagerie de Stokes, ce qui fait de l'imagerie de Mueller une technique coûteuse et encore peu répandue pour l'instant dans les applications industrielles.

### 1.3.2 Imagerie de degré de polarisation

À l'inverse des deux modes d'imagerie polarimétrique présentés ci-dessus pour lesquels le résultat de la mesure se compose de plusieurs (4 ou 16) images associées à des grandeurs polarimétriques différentes, une autre approche de l'imagerie polarimétrique consiste à obtenir une unique image<sup>12</sup> qui puisse caractériser globalement la nature polarimétrique de la scène imagée, en fournissant ainsi une cartographie du contraste de polarisation de cette scène.

Comme nous l'avons présenté au paragraphe 1.1.2, le degré de polarisation<sup>13</sup> permet d'analyser l'état de polarisation de la lumière grâce à une unique mesure scalaire. La caractérisation polarimétrique des matériaux imagés sera bien entendu moins « riche » qu'avec une technique d'imagerie de Stokes ou de Mueller, mais la grande facilité d'interprétation qu'autorise l'acquisition d'un résultat sous forme d'une image unique peut intéresser de nombreuses applications (imagerie médicale, contrôle non destructif, applications industrielles, etc.). De plus, nous allons voir que ce type d'imagerie permet dans certains cas de simplifier considérablement les dispositifs de mesure mis en œuvre.

Nous rappelons ci-dessous la technique d'estimation standard fondée sur l'acquisition de quatre mesures polarimétriques (ou 4 images), puis nous évoquons les solutions qui ont pu être proposées pour simplifier le dispositif d'imagerie en réduisant le nombre de mesures nécessaires (2 images). Cet état de l'art nous permet ainsi d'introduire le chapitre suivant dans lequel nous caractériserons les performances d'une méthode d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image.

#### 1.3.2.1 Estimation exacte à partir de la matrice de polarisation :

De manière standard, l'estimation exacte du degré de polarisation nécessite de mesurer les composantes de la matrice de polarisation  $\Gamma$ , à partir desquelles le degré de polarisation est calculé en introduisant ces valeurs mesurées dans l'équation (1.8). En pratique pour des applications d'imagerie, l'acquisition des quatre images de Stokes évoquées précédemment est donc nécessaire pour calculer l'image de degré de polarisation recherchée. Cette méthode souffre donc des mêmes limitations que l'imagerie de Stokes. Toutefois, cette technique d'estimation exacte permet d'évaluer degré de polarisation, quelle que soit la nature de la surface diffusante, de la lumière incidente, et sans hypothèses sur les caractéristiques du bruit de speckle présent dans l'image.

#### 1.3.2.2 Méthodes simplifiées à deux mesures :

Sous certaines hypothèses il est possible de réduire à deux le nombre d'acquisitions nécessaires à la mesure du degré de polarisation. Nous présentons ici deux de ces techniques : l'**Imagerie de Contraste d'États Orthogonaux (ICÉO)** ou **Orthogonal States Contrast Imaging (OSCI)** en anglais, qui permet de caractériser correctement la nature polarimétrique des matériaux purement dépolarisants, et une **méthode paramétrique** qui permet d'obtenir la

<sup>12</sup> – C'est-à-dire mesurer un unique paramètre scalaire.

<sup>13</sup> – Parfois appelé également **dépolarisation** dans le « jargon » de l'imagerie cohérente.

valeur exacte du degré de polarisation lorsque le speckle est pleinement développé d'ordre 1.

**Imagerie de Contraste d'États Orthogonaux :** Cette technique d'imagerie consiste à éclairer la scène au moyen d'un faisceau cohérent<sup>14</sup> dont on contrôle l'état de polarisation (en général totalement et linéairement polarisé) et à analyser la lumière rétrodiffusée dans les deux directions de polarisation parallèle et orthogonale à la polarisation incidente. On acquiert ainsi, en chaque pixel  $k$  de l'image, deux valeurs d'intensité  $I_{//}(k)$  et  $I_{\perp}(k)$  qui permettent alors de synthétiser l'image de contraste polarimétrique  $P_{\text{iceo}}(k)$ , définie par la relation suivante [118, 57] :

$$P_{\text{iceo}}(k) = \frac{|I_{//}(k) - I_{\perp}(k)|}{I_{//}(k) + I_{\perp}(k)}. \quad (1.32)$$

L'ICÉO varie donc entre 0 et 1 : en l'absence de biréfringence, un matériau qui ne dépolarise pas du tout la lumière conservera la totalité de l'énergie lumineuse dans la direction parallèle au faisceau incident ( $P_{\text{iceo}} = 1$ ) tandis que si la lumière est totalement dépolarisée, l'énergie lumineuse sera équitablement répartie selon les deux directions et dans ce cas  $P_{\text{iceo}} = 0$ . Cette remarque dévoile ainsi des similitudes fortes entre l'ICÉO et le degré de polarisation.

En effet, on peut montrer facilement que l'ICÉO s'identifie au degré de polarisation à condition que le matériau imagé soit purement dépolarisant : c'est-à-dire qu'il modifie le degré de polarisation de la lumière incidente sans en changer l'état de polarisation principal. La matrice de polarisation  $\Gamma$  de la lumière rétrodiffusée par un tel matériau est diagonale, et les valeurs propres sont alors directement  $\mu_1 = \mu_X$  et  $\mu_2 = \mu_Y$ . En remarquant qu'en chaque pixel  $k$  de l'image  $\langle I_{//} \rangle = \mu_X$  et  $\langle I_{\perp} \rangle = \mu_Y$ , on peut voir facilement que l'ICÉO représente dans ce cas une estimation du degré de polarisation défini à l'équation (1.5) par  $\mathcal{P} = (\mu_1 - \mu_2) / (\mu_1 + \mu_2)$ . En revanche, si le matériau n'est pas purement dépolarisant (c'est-à-dire si le paramètre  $c$  de la matrice  $\Gamma$  est non nul), l'ICÉO sous estime la véritable valeur du degré de polarisation puisqu'on peut montrer [127], dans le cas général,

$$\mathcal{P}^2 = P_{\text{iceo}}^2 + 4 \frac{|c|^2}{\mu_I^2}. \quad (1.33)$$

L'importance de cette hypothèse est néanmoins à relativiser : des études expérimentales ont révélé qu'en configuration de réflexion, la surface de la plupart des matériaux naturels, imagés en incidence normale, se comportait comme un dépolariseur pur [12]. Cette hypothèse sera par contre mise en défaut si l'orientation des surfaces imagées n'est pas contrôlée, ou si l'on observe des matériaux biréfringents.

Malgré ces limitations, l'utilisation de ce type d'image de contraste polarimétrique est répandu en imagerie [138, 33, 153, 70, 87] car, outre l'estimation du degré de polarisation, il permet plus simplement de révéler des contrastes polarimétriques pour un coût expérimental limité. L'ICÉO a également fait l'objet de nombreuses études pour caractériser ses propriétés statistiques [120, 59, 57], ses

---

<sup>14</sup> – Notons que la technique présentée ici est parfois utilisée en lumière incohérente. Toutefois, dans la suite de ce manuscrit, l'ICÉO désignera uniquement la technique cohérente.

précisions ultimes d'estimation [120, 128, 59, 121, 7], ou encore son apport pour des tâches de détection et de segmentation d'image [56, 57].

**Méthode d'estimation paramétrique du degré de polarisation à deux mesures :** Dans des travaux préliminaires à cette thèse, nous avons montré que lorsqu'on suppose le speckle pleinement développé d'ordre 1, le terme correctif nécessaire (cf. équation précédente) pour obtenir la valeur exacte  $\mathcal{P}^2$  du carré du degré de polarisation à partir de la mesure  $P_{\text{iceo}}^2$  fournie par l'ICÉO peut être estimé à partir des deux images d'intensité mesurées dans les deux polarisations orthogonales, même lorsque la matrice de polarisation  $\Gamma$  n'est pas diagonale. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication (référence [127]) dans le cas d'un speckle pleinement développé d'ordre 1, mais pourraient s'étendre aisément à un ordre  $L$  entier quelconque en suivant la même démarche.

En effet, si le champ électrique est distribué selon une loi gaussienne complexe circulaire (voir équation (1.17)), et si la statistique de l'intensité intégrée par le capteur correspond à un speckle d'ordre 1 entier, l'intercorrélacion des deux intensités  $I_{//}$  et  $I_{\perp}$  permet de calculer la valeur  $|c|^2$  grâce à la relation [127]

$$\langle I_{//}I_{\perp} \rangle = \mu_X\mu_Y + |c|^2. \quad (1.34)$$

La méthode paramétrique d'estimation du degré de polarisation proposée dans la référence [127] consiste à utiliser une fenêtre glissante de taille fixée, à partir de laquelle on estime localement et empiriquement les valeurs  $\mu_X$  et  $\mu_Y$  sur les deux images d'intensité acquises. Quant à l'intercorrélacion  $\langle I_{//}I_{\perp} \rangle$ , il est possible de l'estimer empiriquement en calculant, pour une fenêtre de  $M$  pixels

$$\sum_{k=1}^M \frac{I_{//}(k)I_{\perp}(k)}{M}, \quad (1.35)$$

qui permet grâce à la relation (1.34) d'évaluer le paramètre  $|c|^2$ . Pour évaluer enfin le degré de polarisation, il suffit d'insérer les valeurs estimées des trois paramètres  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$  et  $|c|^2$  dans la définition du degré de polarisation donnée en équation (1.8).

Dans le cas de l'estimation du **carré du degré de polarisation**, qui sera noté  $\beta \triangleq \mathcal{P}^2$  par la suite, nous avons pu caractériser théoriquement cet estimateur paramétrique que nous noterons  $\hat{\beta}_{\text{par}}$ , et montrer qu'il est asymptotiquement non biaisé [127]. Par ailleurs, la **variance asymptotique** de cet estimateur, que l'on note  $\text{var}_a(\hat{\beta}_{\text{par}})$  et qui s'obtient en négligeant les termes en  $1/M^k$ ,  $k \geq 2$  devant le terme prépondérant en  $1/M$ , peut être calculée et vaut

$$\text{var}(\hat{\beta}_{\text{par}}) = \frac{1}{M} \left[ 2\mathcal{P}^2(1 - \mathcal{P}^2)^2 + (1 - \mathcal{P}^2)^2 + 64 \frac{\mu_X\mu_Y|c|^2}{\mu_I^4} \right], \quad (1.36)$$

où  $\mu_I = \mu_X + \mu_Y$  désigne l'intensité totale au point considéré. Le détail de ces calculs réalisés dans le cas d'un speckle d'ordre 1 se trouve dans la référence [127]. Dans le chapitre suivant, nous mettrons en œuvre cette méthode d'estimation à travers des simulations numériques qui nous permettront de comparer les performances des différentes techniques présentées ici avec les performances d'une

méthode d'estimation qui sera caractérisée théoriquement au chapitre suivant.

Notons enfin que d'autres travaux ont permis récemment de proposer une méthode alternative pour l'estimation exacte du degré de polarisation à partir de deux images d'intensité dans le cas d'un speckle pleinement développé d'ordre un [19]. La méthode obtenue, qui utilise un estimateur au sens du maximum de vraisemblance, permet d'obtenir une précision meilleure qu'avec l'estimateur paramétrique présenté ici, mais nécessite une complexité algorithmique plus importante.

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons rappelé le formalisme classique qui permet de caractériser l'état de polarisation de la lumière, au moyen de la matrice de polarisation  $\Gamma$  ou plus simplement du degré de polarisation  $\mathcal{P}$ . Dans le cadre de l'imagerie polarimétrique cohérente qui consiste à imager certaines de ces propriétés à partir de la lumière rétrodiffusée par une scène illuminée par une lumière laser, le phénomène de speckle dû à la nature cohérente de l'éclairement utilisé va conditionner le comportement statistique de l'intensité lumineuse enregistrée au niveau d'un capteur. Pour cette raison, nous avons ainsi rappelé la démarche classiquement utilisée pour modéliser le phénomène de speckle d'un point de vue statistique, de même que les principales modélisations alternatives lorsque les hypothèses classiques ne sont plus vérifiées.

Enfin, nous avons introduit les principales méthodes d'imagerie polarimétrique en rappelant leur mise en œuvre, leurs intérêts et défauts principaux. En ce qui concerne l'imagerie de degré de polarisation qui présente un potentiel applicatif intéressant, la réduction de la complexité des systèmes d'imagerie permet de diminuer les coûts, l'encombrement et les durées d'acquisition. Nous avons ainsi présenté les principales méthodes existantes qui permettent de réduire le nombre d'acquisitions d'images nécessaires à l'estimation du degré de polarisation.

Ce rapide état de l'art prendra tout son sens au chapitre suivant dans lequel nous caractériserons les performances d'un système d'imagerie polarimétrique fondé sur l'analyse des statistiques d'intensité d'une unique image, permettant ainsi de réduire *a minima* la complexité du dispositif d'imagerie pour la mesure du degré de polarisation.

# Chapitre 2

## Estimation du degré de polarisation à partir d'une image d'intensité

### Sommaire

---

<b>2.1 Principe de la méthode d'estimation à une image</b>	<b>30</b>
2.1.1 Hypothèses requises et modèle général de speckle . . . . .	30
2.1.2 Relation entre $\mathcal{P}$ et le contraste de speckle . . . . .	32
2.1.3 Principe général de l'estimation de $\mathcal{P}$ . . . . .	33
<b>2.2 Bornes de Cramer-Rao de l'estimation</b> . . . . .	<b>34</b>
2.2.1 BCR explicite pour un speckle d'ordre 1 . . . . .	36
2.2.2 BCR pour un speckle d'ordre supérieur . . . . .	40
2.2.3 Conclusion . . . . .	42
<b>2.3 Méthodes d'estimation</b> . . . . .	<b>43</b>
2.3.1 Estimateurs de $\beta$ au sens des moments . . . . .	43
2.3.2 Autres estimateurs pour un speckle d'ordre 1 . . . . .	52
2.3.3 Discussion sur le biais des méthodes proposées . . . . .	60
2.3.4 Comparaison avec les techniques classiques utilisant plusieurs images . . . . .	62
2.3.5 Résultats expérimentaux sur des données réelles . . . . .	66
2.3.6 Conclusion sur l'estimation de $\mathcal{P}$ à une image . . . . .	73
<b>2.4 Imagerie de degré de polarisation</b> . . . . .	<b>74</b>
2.4.1 Scène polarimétrique simulée . . . . .	74
2.4.2 Scène polarimétrique d'intensité constante . . . . .	80
2.4.3 Imagerie avec segmentation préalable . . . . .	82
<b>2.5 Analyse de la méthode pour des acquisitions à faible flux</b> . . . . .	<b>84</b>
2.5.1 Estimation au sens des moments à faible flux . . . . .	85
2.5.2 Efficacité de l'estimateur au sens des moments . . . . .	89
2.5.3 Imageur polarimétrique optimal à faible flux . . . . .	90
2.5.4 Conclusion sur l'estimation de $\beta$ à faible flux . . . . .	91
<b>2.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>92</b>

---



Lorsqu'un objet est éclairé par une illumination cohérente, l'image d'intensité formée sur un détecteur par la lumière rétrodiffusée en provenance de cet objet est perturbée par un bruit de speckle. Dans cette configuration expérimentale très simple et sans l'aide de composant optique polarimétrique ajustable, il est possible sous certaines hypothèses d'estimer le degré de polarisation de la lumière rétrodiffusée par l'objet à partir de cette seule image d'intensité. L'objectif de ce chapitre est ainsi de caractériser théoriquement et numériquement cette méthode qui permet de réduire fortement la complexité d'un dispositif d'imagerie polarimétrique.

Nous exposerons dans un premier temps le principe général de cette méthode d'estimation, puis nous déterminerons les précisions d'estimation optimales que l'on peut espérer obtenir avec celle-ci et qui nous permettront d'évaluer l'*efficacité* des différents estimateurs proposés par la suite en section 2.3. Nous illustrerons ensuite les perspectives offertes par cette méthode pour des applications d'imagerie polarimétrique (section 2.4) ou d'imagerie polarimétrique à faible flux (section 2.5)

## 2.1 Principe de la méthode d'estimation à une image

Le principe sur lequel est fondée la méthode étudiée dans ce chapitre diffère fondamentalement de l'approche commune aux différentes méthodes d'estimation du degré de polarisation présentées au chapitre précédent. Ces approches consistent à mesurer l'intensité moyenne de la lumière rétrodiffusée à travers plusieurs (4 ou 2) configurations d'un analyseur d'état de polarisation,<sup>15</sup> puis à déduire de ces quatre ou deux mesures la valeur estimée du degré de polarisation. Elle n'est bien sûr pas applicable dans le cas où l'on acquiert une seule image. En revanche, nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que la densité de probabilité de l'intensité lumineuse acquise sans aucun composant polarimétrique pouvait dépendre fortement du degré de polarisation  $\mathcal{P}$ , par exemple lorsque le speckle est pleinement développé d'ordre 1. Nous allons préciser dans cette section comment cette dépendance peut être mise à profit pour réaliser une estimation du degré de polarisation.

### 2.1.1 Hypothèses requises et modèle général de speckle

Nous énonçons tout d'abord les hypothèses nécessaires pour assurer la validité des méthodes d'estimation du degré de polarisation proposées dans ce chapitre.

---

<sup>15</sup> – Constitué rappelons-le, par l'association d'un polariseur linéaire et d'une lame retardatrice.

La mise en œuvre de ces techniques fondées sur l'acquisition d'une seule image d'intensité suppose en effet que les statistiques de speckle décrivant les fluctuations de l'intensité lumineuse obéissent aux hypothèses suivantes :

1. En un point du détecteur, ou du plan d'observation, l'intensité  $I$  peut être décrite comme la somme de deux variables aléatoires  $I_1$  et  $I_2$ , dont les valeurs moyennes valent respectivement  $\mu_1 = \frac{1+\mathcal{P}}{2}\mu_I$  et  $\mu_2 = \frac{1-\mathcal{P}}{2}\mu_I$ . Cette hypothèse découle directement de la diagonalisation de la matrice de polarisation  $\Gamma$  (voir équation 1.4) dont les valeurs propres valent  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .
2. Les variables aléatoires  $I_1$  et  $I_2$  associées à ces deux composantes d'intensité sont supposées **indépendantes**. Cette condition repose principalement sur le fait que la distribution statistique du champ électrique sous-jacent est supposée gaussienne.
3. Les densités de probabilité qui décrivent ces deux variables aléatoires appartiennent à la même famille de lois multiplicatives, mais de valeurs moyennes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  différentes, c'est-à-dire que l'on suppose

$$\forall k \in \{1; 2\}, \quad P_{I_k}(I_k) = \frac{1}{\mu_k} f\left(\frac{I_k}{\mu_k}\right), \quad (2.1)$$

où  $f(z)$  est une densité de probabilité (DDP) à support positif et de moyenne unitaire  $\langle Z \rangle = \int_0^\infty z f(z) dz = 1$ . En effet, si une variable aléatoire  $X$  est distribuée selon une loi appartenant à la famille de lois multiplicatives décrite à l'équation (2.1), alors la DDP de toute variable aléatoire  $Y \triangleq a X$ , avec  $a \in \mathbb{R}^+$  appartient aussi à cette famille. Dans ces conditions, on peut montrer que les moments d'ordres supérieurs des composantes d'intensité vérifient<sup>16</sup>

$$\forall k \in \{1; 2\}, \quad \forall j \geq 1, \quad \langle I_k^j \rangle = \int_0^\infty I_k^j \times P_{I_k}(I_k) dI_k = (\mu_k)^j \times \langle Z^j \rangle. \quad (2.2)$$

En supposant ces hypothèses vérifiées, on peut remarquer que la loi  $f$  fournit directement la forme de la DDP de l'intensité totale lorsque la lumière est totalement polarisée puisque dans ce cas  $\mu_2 = 0$ , et donc  $P_I(I) = \frac{1}{\mu_I} f\left(\frac{I}{\mu_I}\right)$  lorsque  $\mathcal{P} = 1$ . La forme particulière de la loi  $f$  va donc conditionner la statistique de l'intensité observée en lumière totalement polarisée, et définir ainsi le modèle de speckle considéré. Par exemple, un speckle pleinement développé d'ordre 1 sera caractérisé par une loi  $f$  unitaire exponentielle, c'est-à-dire  $f(z) = \exp(-z)$ .

Lorsque la lumière est partiellement polarisée en revanche, la densité de probabilité de l'intensité totale  $I$  prendra une forme différente. L'intensité  $I$  s'écrivant d'après les hypothèses précédentes comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes, on peut exprimer  $P_I(I)$  comme la convolution de  $P_{I_1}(I_1)$  et  $P_{I_2}(I_2)$  :

$$P_I(I) = \int_0^I P_{I_1}(I - I_2) P_{I_2}(I_2) dI_2 = \int_0^I \frac{1}{\mu_1 \mu_2} f\left(\frac{I - I_2}{\mu_1}\right) f\left(\frac{I_2}{\mu_2}\right) dI_2. \quad (2.3)$$

---

<sup>16</sup> – En utilisant l'équation (2.1), on a  $\langle I_k^j \rangle = \int_0^\infty \frac{I_k^j}{\mu_k} f\left(\frac{I_k}{\mu_k}\right) dI_k$ . En posant alors  $Z = I_k/\mu_k$  et en changeant la variable d'intégration, on obtient  $\langle I_k^j \rangle = \int_0^\infty (\mu_k)^j z^j f(z) dz = (\mu_k)^j \langle Z^j \rangle$ .

On peut montrer aisément que cette densité de probabilité reste bien sûr dans la famille des lois multiplicatives, cependant rien ne garantit que le calcul explicite de l'intégrale soit aisé.

### 2.1.2 Relation entre $\mathcal{P}$ et le contraste de speckle

La manipulation de la densité de probabilité de l'intensité  $I$  sous la forme intégrale précédente n'est pas commode. En revanche, il est possible d'obtenir une caractérisation statistique complète de l'intensité lumineuse  $I$  grâce à l'utilisation des **cumulants** de la DDP  $P_I(I)$ , dont nous rappelons ici la définition [110] :

**Définition 2.1** Soit  $Z$  une variable aléatoire. Ses cumulants, notés  $\mathcal{C}_k^Z$ , sont définis à partir de la **fonction génératrice des cumulants**

$$g(t) \triangleq \ln[\langle e^{tZ} \rangle] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k^Z \frac{t^k}{k!}, \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{C}_k^Z$  désigne le cumulants d'ordre  $k$  de la variable aléatoire  $Z$ .

À condition qu'ils puissent être définis, les cumulants d'ordre 1 et 2 d'une variable aléatoire désignent respectivement sa valeur moyenne et sa variance. On notera également que les cumulants d'ordre 3 et 4, quand ils sont définis, sont respectivement liés à la dissymétrie et à l'aplatissement de la loi de probabilité, permettant ainsi d'en caractériser la forme.

Ces grandeurs statistiques présentent un intérêt particulier ici car les cumulants sont des grandeurs **additives pour des variables aléatoires indépendantes** [110]. Puisque par hypothèse  $I = I_1 + I_2$  avec  $I_1$  et  $I_2$  indépendantes, cette propriété permet d'écrire, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathcal{C}_k^I = \mathcal{C}_k^{I_1} + \mathcal{C}_k^{I_2}. \quad (2.5)$$

Par ailleurs, comme les variables  $I_1$  et  $I_2$  se déduisent d'une même loi de probabilité  $f$ , les cumulants  $\mathcal{C}_k^{I_j}$  associés aux variables aléatoires  $I_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$  peuvent s'exprimer en fonction des cumulants d'ordre  $k$  de la loi normalisée  $f$ , notés  $\kappa_k$  :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathcal{C}_k^{I_1} = (\mu_1)^k \kappa_k, \quad \text{et}, \quad \mathcal{C}_k^{I_2} = (\mu_2)^k \kappa_k. \quad (2.6)$$

En introduisant ces relations dans l'équation (2.5) et en remplaçant  $\mu_1$  et  $\mu_2$  par leurs valeurs respectives données en équation (1.7), il est alors possible d'écrire le cumulants  $\mathcal{C}_k^I$  en fonction de l'intensité moyenne  $\mu_I$  et du degré de polarisation

$$\mathcal{C}_k^I = \kappa_k \left[ (\mu_1)^k + (\mu_2)^k \right] = \kappa_k \left[ (1 + \mathcal{P})^k + (1 - \mathcal{P})^k \right] \frac{\mu_I^k}{2^k}. \quad (2.7)$$

On peut alors vérifier que le cumulants d'ordre 1, qui s'identifie à la valeur moyenne, s'écrit  $\mathcal{C}_1^I = [\mu_1 + \mu_2] = \mu_I$ , car  $\kappa_1$  est toujours égal à 1 puisque la loi  $f$  est de moyenne unitaire. Le cumulants d'ordre 2 qui est égal à la variance de l'intensité vaut quant à lui

$$\mathcal{C}_2^I = \text{var}(I) = \kappa_2 \left[ (1 + \mathcal{P})^2 + (1 - \mathcal{P})^2 \right] \frac{\mu_I^2}{2^2} = \kappa_2 \left[ 1 + \mathcal{P}^2 \right] \frac{\mu_I^2}{2}. \quad (2.8)$$

Cette dernière équation permet finalement de déduire l'expression du contraste de speckle  $\mathbf{C}$  pour une loi  $f$  quelconque :

$$\mathbf{C} = \frac{\sqrt{\text{var}(I)}}{\mu_I} = \sqrt{\kappa_2 \frac{1 + \mathcal{P}^2}{2}}, \quad (2.9)$$

démontrant ainsi que le contraste de la figure de speckle est relié bijectivement à la valeur du degré de polarisation. Le contraste qui vaut  $\sqrt{\kappa_2}$  pour une lumière totalement polarisée ( $\mathcal{P} = 1$ ) décroît en effet jusqu'à  $\sqrt{\kappa_2}/2$  lorsque  $\mathcal{P} = 0$ .

À valeur moyenne de l'intensité  $\mu_I$  fixée, l'augmentation du degré de polarisation de la lumière entraîne un accroissement de la variance, ou autrement dit, accroît le désordre de la statistique d'intensité<sup>17</sup>, jusqu'à atteindre la valeur maximale  $\sup_{\mathcal{P} \in [0,1]}[\text{var}(I)] = \kappa_2 \mu_I^2$  pour un degré de polarisation  $\mathcal{P} = 1$ . À intensité moyenne  $\mu_I$  fixée, on a alors pour un degré de polarisation  $\mathcal{P}$  quelconque,

$$\frac{\text{var}(I)}{\sup_{\mathcal{P} \in [0,1]}[\text{var}(I)]} = \frac{1 + \mathcal{P}^2}{2} < 1, \quad (2.10)$$

montrant ainsi que la quantité  $(1 + \mathcal{P}^2)/2$  caractérise l'ordre partiel de la statistique d'intensité lumineuse. Nous verrons dans la seconde partie de ce manuscrit qu'il existe une analogie formelle entre cette quantité et le **facteur de Fano** qui caractérise l'ordre partiel des statistiques sous-poissoniennes par rapport aux statistiques poissoniennes.

### 2.1.3 Principe général de l'estimation de $\mathcal{P}$

La première méthode qui sera exposée dans la suite de ce chapitre pour estimer  $\mathcal{P}$  à partir d'une unique image de speckle repose sur l'existence de la relation bijective que nous venons de rappeler en équation (2.9) entre la valeur de  $\mathcal{P}$  et le contraste de speckle [119, 41]. En effet, en supposant que l'on connaisse précisément le modèle de speckle qui affecte l'intensité lumineuse acquise sur l'image, il suffit d'évaluer localement le contraste de la figure de speckle pour obtenir une information quantitative sur la valeur du degré de polarisation en ce point. Ce principe n'est pas sans rappeler les techniques d'**imagerie de contraste de speckle** très utilisées en imagerie médicale pour des mesures de vélocimétrie de flux sanguins par exemple [97, 13].

Plus généralement, tous les estimateurs du degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité présentés dans la suite nécessitent de mesurer localement certains paramètres statistiques de la densité de probabilité de  $I$  (moyenne, variance, contraste, log-moment, etc.). Pour réaliser cette estimation locale au niveau d'un pixel  $k$  d'une image, il faut par conséquent avoir accès aux valeurs des niveaux de gris des pixels situés dans un voisinage  $\mathcal{V}$  du pixel  $k$ , que nous supposons composé de  $M$  pixels ( $\text{card}[\mathcal{V}] = M$ ). De préférence, ces  $M$  pixels devront provenir d'un voisinage statistiquement homogène du pixel  $k$ , c'est-à-dire que les intensités  $\{I_1, \dots, I_M\}$  doivent être distribuées selon la même

<sup>17</sup> – Il est important ici de noter que cette remarque porte uniquement sur le désordre de la statistique d'intensité à  $\mu_I$  constante, et non pas sur le désordre du *champ électrique* qui décroît bien entendu lorsqu'on passe d'un champ bidimensionnel correspondant à une lumière partiellement polarisée, à un champ scalaire dans le cas d'une lumière totalement polarisée.

DDP.

Dans la suite de ce chapitre, on considérera dans un premier temps que les estimations sont réalisées à partir de régions statistiquement homogènes composées de  $M$  pixels. Puis, dans la section 2.4 où nous analyserons les résultats obtenus en imagerie de degré de polarisation, nous comparerons deux façons distinctes d'obtenir des voisinages homogènes : ils correspondront soit à une fenêtre carrée de  $M$  pixels centrée sur le pixel  $k$ , soit à une région homogène de forme plus complexe, déterminée par exemple grâce à des algorithmes de segmentation d'image en régions homogènes. Nous supposons par ailleurs que les intensités mesurées en chacun de ces pixels peuvent être considérées comme des variables aléatoires indépendantes. Par conséquent, nous nous limiterons à des situations pour lesquelles l'aire des grains de speckle est inférieure ou égale à la surface d'un pixel, ce qui reviendra à considérer uniquement des statistiques de speckle d'ordre supérieur ou égal à 1.

Avant de présenter et de caractériser les différentes méthodes d'estimation étudiées au cours de cette thèse, nous proposons préalablement d'analyser la précision optimale d'estimation que l'on peut espérer obtenir en utilisant une technique d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image de speckle, dans le cas où les fonctions  $f(z)$  correspondent à des lois gamma, c'est-à-dire pour des speckles pleinement développés.

## 2.2 Bornes de Cramer-Rao de l'estimation

L'estimation d'un paramètre  $\theta$  supposé déterministe à partir d'un échantillon  $\chi = \{x_1, \dots, x_M\}$  constitué de  $M$  mesures bruitées est un problème classique en théorie de l'estimation non bayésienne. Lorsqu'on suppose que ces  $M$  mesures correspondent à  $M$  réalisations indépendantes d'une variable aléatoire  $X$ , dont la densité de probabilité  $P_X(x)$  dépend du paramètre inconnu  $\theta$ , la **borne de Cramer-Rao** (BCR) permet d'évaluer la précision optimale d'un estimateur non biaisé de  $\theta$ , indépendamment de la technique d'estimation utilisée. En effet, lorsqu'on considère un estimateur non biaisé  $\hat{\theta}$  du paramètre  $\theta$ , c'est-à-dire tel que  $\langle \hat{\theta} \rangle = \theta$  où  $\langle \cdot \rangle$  définit l'opérateur de moyenne statistique<sup>18</sup> par rapport à  $\chi$ , la variance  $\text{var}(\hat{\theta})$  de cet estimateur peut être bornée inférieurement grâce au **théorème de Cramer-Rao** [49], que nous rappelons ci-dessous.

**Théorème 2.1** *Si  $\hat{\theta}$  est un estimateur non biaisé de  $\theta$ , alors*

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq BCR(\theta) \triangleq \frac{1}{I_F(\theta)}, \quad (2.11)$$

où  $BCR(\theta)$  représente la **borne de Cramer-Rao** pour l'estimation de  $\theta$ , et où  $I_F(\theta)$  désigne l'information de Fisher pour l'estimation de  $\theta$ .

L'**information de Fisher** permet de quantifier la quantité d'information disponible dans l'échantillon de mesure  $\chi$  pour estimer au mieux le paramètre inconnu  $\theta$ , et nous rappelons ici sa définition [49] :

---

<sup>18</sup> – Plus précisément  $\langle \hat{\theta} \rangle = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \hat{\theta} \times P_X(x_1) \times \dots \times P_X(x_M) dx_1 \dots dx_M$ .

**Définition 2.2** L'information de Fisher pour l'estimation de  $\theta$  à partir de l'échantillon de mesure  $\chi = \{x_1, \dots, x_M\}$  s'écrit

$$I_F(\theta) \triangleq - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\ell(\chi; \theta)] \right\rangle, \quad (2.12)$$

où la **logvraisemblance**  $\ell(\chi; \theta) \triangleq \ln L(\chi; \theta)$  de l'échantillon  $\chi$  est obtenue en calculant le logarithme de la **vraisemblance**

$$L(\chi; \theta) \triangleq \prod_{k=1}^M P_X(x_k | \theta), \quad (2.13)$$

qui représente la probabilité d'observer l'échantillon  $\chi$  quand le paramètre vaut  $\theta$ .

Le calcul de cette borne permet donc d'évaluer l'optimalité des méthodes d'estimation utilisées : en théorie de l'estimation, on définit usuellement l'**efficacité** d'une méthode d'estimation [49, 118] en calculant le rapport entre la BCR et la variance de l'estimateur considéré. L'efficacité est bien sûr une grandeur comprise entre 0 et 1 et une méthode sera dite **efficace** (efficacité égale à 1) lorsque sa variance atteint la variance minimale évaluée grâce à la BCR.

Pour déterminer l'efficacité des méthodes d'estimation qui seront proposées dans la suite de ce chapitre, nous proposons ici d'évaluer la BCR pour l'estimation du degré de polarisation  $\mathcal{P}$  à partir de la mesure d'un échantillon  $\chi = \{I_1, \dots, I_M\}$  constitué de  $M$  mesures d'intensité supposées **statistiquement indépendantes** et correspondant aux  $M$  pixels d'un voisinage homogène  $\mathcal{V}$  du point de l'image où l'on souhaite estimer le degré de polarisation. Nous présentons ici le résultat du calcul de la borne de Cramer-Rao (BCR) dans le cas le plus simple d'abord, où le speckle est supposé pleinement développé d'ordre un, puis nous montrerons comment la BCR peut être évaluée lorsque l'on considère d'autres statistiques de speckle, notamment des speckles d'ordres supérieurs tels qu'il peut en apparaître lors de l'acquisition d'une figure de speckle sur un capteur.

**Choix de la Borne de Cramer-Rao :** On peut noter à ce niveau que de nombreuses alternatives existent pour raffiner la borne de Cramer-Rao (borne de Bhattacharyya (voir [45] p. 396), borne de Chapman-Robbins [18], borne de Barankin [4], etc.), notamment pour des situations de faibles rapports signal à bruit. Néanmoins, ces autres bornes sont souvent plus complexes à mettre en œuvre que la BCR, ce qui empêche dans la majorité des cas d'obtenir une formulation explicite de ces bornes, diminuant ainsi leur facilité d'interprétation. La richesse d'interprétation dont on bénéficie en utilisant la BCR est également sensiblement diminuée lorsqu'on adopte une formulation bayésienne du problème d'estimation. En effet, le paramètre à estimer est dans ce cas considéré comme une variable aléatoire, caractérisée par une distribution de probabilité *a priori*. Les bornes statistiques applicables dans ce cas (borne de Cramer-Rao bayésienne (voir [156] p. 72), borne de Ziv-Zakai [167], etc.) permettent seulement de minorer l'erreur quadratique d'estimation, moyennée sur toutes les valeurs admissibles du paramètre définies par la densité de probabilité *a priori*. En dépit de la grande diversité des bornes statistiques existant dans la littérature pour évaluer la pré-

cision optimale d'estimation, nous nous limitons dans ce manuscrit à utiliser la borne de Cramer-Rao, pour sa simplicité d'une part, et son fort potentiel d'interprétation d'autre part.

### 2.2.1 Calcul explicite de la BCR pour un speckle pleinement développé d'ordre un

Le modèle standard de rétrodiffusion de la lumière par une surface diffusante proposé par J. W. Goodman permet d'obtenir la distribution de probabilité de l'intensité lumineuse d'une figure de speckle pleinement développée d'ordre 1 en lumière partiellement polarisée. Cette loi de probabilité, que nous avons rappelée à l'équation (1.19) du chapitre précédent dépend clairement du paramètre  $\mathcal{P}$  que nous cherchons à estimer. La distribution statistique de l'intensité lumineuse contiendra donc une part d'information, potentiellement utile pour estimer la valeur de  $\mathcal{P}$  à partir de l'observation d'échantillons d'intensité. Cette information peut être mesurée grâce à l'information de Fisher, à partir de laquelle on déduira la borne de Cramer-Rao. Pour le calcul de cette BCR, nous distinguons ici deux cas selon que la valeur moyenne de l'intensité  $\mu_I$  est connue *a priori* ou qu'elle doit être estimée conjointement à l'estimation du degré de polarisation.

#### 2.2.1.1 BCR à intensité moyenne connue

Lorsque l'intensité moyenne  $\mu_I$  est supposée connue, la vraisemblance de l'échantillon est notée  $L(\chi; \mathcal{P})$  et peut s'écrire

$$L(\chi; \mathcal{P}) = \prod_{k=1}^M P_I(I_k | \mathcal{P}), \quad (2.14)$$

où  $P_I(I)$  est donnée à l'équation (1.19) dans le cas considéré ici d'un speckle d'ordre un.

À partir de cette fonction de vraisemblance, on démontre en annexe B.1.1.2 (voir également la référence [41]) que la borne de Cramer-Rao pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  à partir d'une unique image s'écrit, dans le cas du speckle pleinement développé d'ordre 1,

$$BCR_{\mu_I}^{(1)}(\mathcal{P}) = -\frac{\mathcal{P}^2(1 - \mathcal{P}^2)}{M(1 + \mathcal{P}^2)} \left[ 1 - \frac{1 + \mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1 + \mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right) \right]^{-1}, \quad (2.15)$$

où l'exposant 1 signifie que le speckle est d'ordre  $L = 1$  (pleinement développé) et où l'indice  $\mu_I$  traduit le fait que la valeur moyenne de l'intensité  $\mu_I$  est supposée connue. La fonction  $\zeta(s, x)$  représente la **fonction Zeta de Riemann généralisée** d'ordre  $s$  qui est définie pour toute valeur de  $x$  vérifiant  $k + x \neq 0$ , par

$$\forall x / k + x \neq 0, \quad \zeta(s, x) \triangleq \sum_{k=0}^{+\infty} (k + x)^{-s}. \quad (2.16)$$

Bien que l'expression explicite de la BCR ne soit pas aisément interprétable, on peut remarquer en observant l'équation (2.15) qu'elle est logiquement inverse-

ment proportionnelle au nombre  $M$  d'échantillons utilisés pour l'estimation. De plus, sa valeur est indépendante de l'intensité moyenne  $\mu_I$ , ce qui permet d'affirmer qu'on ne peut pas améliorer la précision ultime d'estimation en augmentant la puissance lumineuse de l'éclairage cohérent utilisé. On montrera à la section 2.5 que cela n'est plus le cas lorsque les effets du bruit de photon doivent être pris en compte pour des acquisitions à faible flux lumineux.

On peut analyser le comportement de la BCR lorsque  $\mathcal{P}$  varie entre 0 et 1 en observant la figure 2.1.a, où la fonction  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\mathcal{P})$ , normalisée par le nombre de pixels  $M$  de l'échantillon, est tracée en fonction de  $\mathcal{P}$  en trait plein (—). On voit sur cette figure que la BCR pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  dépend très fortement de l'état de polarisation : cette borne diverge pour les faibles valeurs de  $\mathcal{P}$  alors qu'elle tend vers 0 lorsque la lumière devient totalement polarisée.

**BCR pour l'estimation de  $\beta = \mathcal{P}^2$  :** La relation (2.9) qui relie le contraste de speckle et le degré de polarisation fait apparaître le terme  $\mathcal{P}$  sous la forme de son carré, que nous proposons de noter dorénavant

$$\beta \triangleq \mathcal{P}^2. \quad (2.17)$$

En mesurant le contraste de speckle, c'est donc la valeur de  $\beta$  qui est directement obtenue, et nous verrons par la suite que les estimateurs proposés conduisent naturellement à évaluer  $\beta$  plutôt que  $\mathcal{P}$ . Il paraît donc intéressant ici d'exprimer également la BCR pour l'estimation de  $\beta$ , d'autant plus qu'elle permet une analyse des performances plus facile qu'en étudiant  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\mathcal{P})$ .

On peut déduire cette nouvelle BCR à partir de  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\mathcal{P})$  en utilisant un changement de variable. On peut montrer en effet [49] que  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\beta) = (\partial\beta/\partial\mathcal{P})^2 \times BCR_{\mu_I}^{(1)}(\mathcal{P})$ , et en remarquant que  $\partial\beta/\partial\mathcal{P} = 2\mathcal{P}$ , on obtient directement :

$$BCR_{\mu_I}^{(1)}(\beta) = -\frac{4\mathcal{P}^4(1-\mathcal{P}^2)}{M(1+\mathcal{P}^2)} \left[ 1 - \frac{1+\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right) \right]^{-1}. \quad (2.18)$$

Sur la figure 2.1.b, nous avons tracé en trait plein (—) le comportement de la BCR pour l'estimation de  $\beta$  en fonction de  $\mathcal{P}$ . On peut voir sur cette figure que  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\beta)$  tend vers 0 lorsque la lumière devient totalement polarisée ( $\mathcal{P} \rightarrow 1$ ). Ainsi, une méthode d'estimation dont la variance serait égale à la BCR (estimation efficace) permettrait d'estimer des valeurs élevées de  $\beta$  avec une grande précision. En revanche, pour des lumières faiblement polarisées ( $\mathcal{P} \simeq 0$ ), on remarque que  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\beta) \simeq 3/M$ , permettant d'espérer une variance d'estimation de 0,01 avec une taille d'échantillon  $M = 300$ , ce qui représente une zone homogène d'environ  $18 \times 18$  pixels. De façon générale, la BCR reste inférieure à approximativement  $4/M$ , quelle que soit la valeur de  $\mathcal{P}$ . Cette information permet donc de dimensionner la taille de l'échantillon homogène qu'il faut sélectionner afin de garantir, pour toute valeur de  $\mathcal{P}$ , une précision optimale minimale donnée.

Néanmoins, si la BCR nous permet d'évaluer la variance minimale qu'aucun estimateur non biaisé de  $\beta$  ne pourra surpasser, rien ne garantit qu'il existe une méthode d'estimation **efficace**, c'est-à-dire dont la variance atteigne la BCR



[49, 118]. En effet, la densité de probabilité  $P_I(I)$  considérée ici (cf. équation (1.19)) n'appartient pas à la **famille exponentielle** des lois de probabilités, et par conséquent, rien ne garantit qu'il existe une méthode d'estimation efficace [49, 118]. L'investigation d'une méthode d'estimation optimale fera précisément l'objet de la section suivante de ce chapitre.

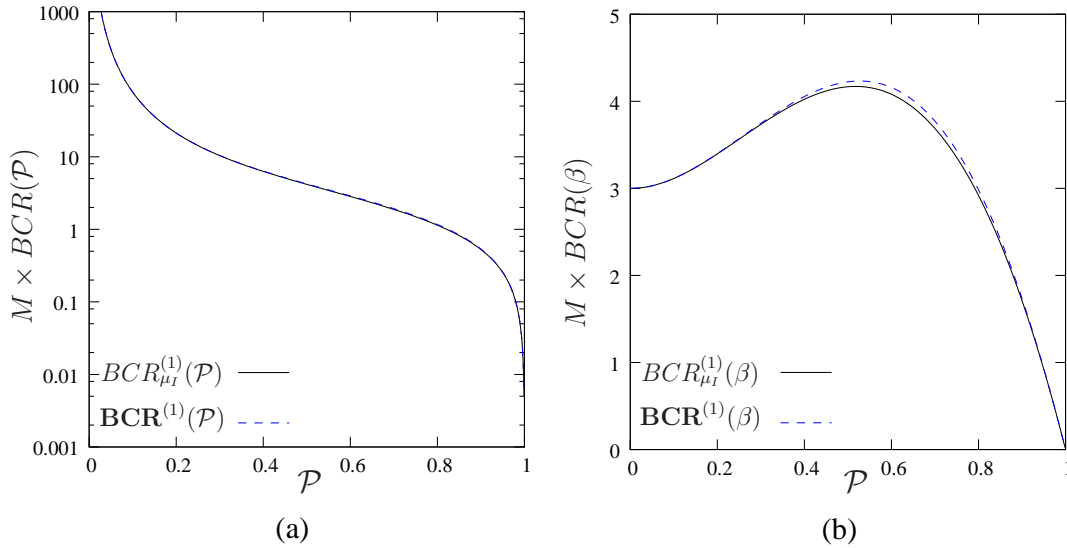


FIG. 2.1 – Évolution des BCRs pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  (figure (a)) ou de  $\beta$  (figure (b)) en fonction de  $\mathcal{P}$ , pour un speckle pleinement développé d'ordre 1. La BCR à  $\mu_I$  connu *a priori* est tracée en trait plein (—) tandis que les traits tiretés (---) correspondent à la BCR à  $\mu_I$  inconnu.

### 2.2.1.2 BCR à intensité moyenne inconnue

Dans des conditions expérimentales réelles, il semble peu réaliste de supposer l'intensité moyenne  $\mu_I$  connue. Bien au contraire, il sera en pratique nécessaire d'estimer conjointement à la fois le degré de polarisation  $\mathcal{P}$  et la valeur de  $\mu_I$  dont dépend la DDP de l'intensité. Par rapport au cas précédent où  $\mu_I$  était supposé connue *a priori*, la tâche d'estimation est rendue plus difficile, ce qui doit naturellement s'accompagner d'une diminution de la quantité d'information de Fisher disponible pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  (ou de  $\beta$ ).

Pour évaluer la borne de Cramer-Rao pour l'estimation d'un paramètre  $\theta$  lorsqu'un *paramètre de nuisance*  $\theta'$  doit être estimé conjointement, il faut alors utiliser une formulation « vectorielle » du théorème de Cramer-Rao, que l'on rappelle ici dans le cas bidimensionnel [49, 118] :

**Théorème 2.2** *Si  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\theta}'$  représentent des estimateurs non biaisés de deux paramètres  $\theta$  et  $\theta'$  réels, on a alors pour tout vecteur ligne bidimensionnel  $\mathbf{u}$*

$$\forall \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{C}(\hat{\theta}, \hat{\theta}') \cdot \mathbf{u}^T \geq \mathbf{u} \cdot \left[ \mathbf{J}_F(\theta, \theta') \right]^{-1} \cdot \mathbf{u}^T, \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{C}(\hat{\theta}, \hat{\theta}')$  représente la matrice de covariance des deux estimateurs  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\theta}'$  et où

$\mathbf{J}_F(\theta, \theta')$  désigne la **matrice d'information de Fisher**, définie par [49, 118]

$$\mathbf{J}_F(\theta, \theta') \triangleq - \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \theta, \theta')}{\partial \theta^2} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \theta, \theta')}{\partial \theta \partial \theta'} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \theta, \theta')}{\partial \theta' \partial \theta} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \theta, \theta')}{\partial \theta'^2} \right\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

où la logvraisemblance  $\ell(\chi; \theta, \theta')$  est dans ce cas une fonction des deux paramètres  $\theta$  et  $\theta'$ .

Grâce au calcul de la matrice d'information de Fisher, et en appliquant le théorème précédent pour le vecteur  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0]$ , il est facile de déduire la BCR pour l'estimation du seul paramètre  $\theta$  lorsque  $\theta'$  est supposé inconnu. En effet, on a dans ce cas  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{C}(\hat{\theta}, \hat{\theta}') \cdot \mathbf{u}_1^T = \text{var}(\theta)$  et le théorème précédent permet de montrer que cette variance est bornée par

$$\mathbf{BCR}(\theta) \triangleq \mathbf{u}_1 \cdot \left[ \mathbf{J}_F(\theta, \theta') \right]^{-1} \cdot \mathbf{u}_1^T, \quad (2.21)$$

où la notation en caractères gras  $\mathbf{BCR}(\theta)$  indique que la BCR est évaluée dans le cas « vectoriel ».

Les calculs de la matrice d'information de Fisher de taille  $2 \times 2$  associée aux paramètres  $\mathcal{P}$  et  $\mu_I$ , ainsi que de la BCR pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  dans le cas « vectoriel » où  $\mu_I$  est supposé inconnu sont détaillés en annexe B.1.1.1. L'expression de la BCR, notée  $\mathbf{BCR}^{(1)}(\mathcal{P})$ , pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  lorsque l'intensité moyenne  $\mu_I$  est inconnue est obtenue à l'équation (B.36) (voir aussi la référence [41]) et permet comme précédemment de déduire la BCR pour l'estimation de  $\beta$  par un changement de variable qui fournit :

$$\mathbf{BCR}^{(1)}(\beta) = \frac{2\mathcal{P}^4(1 - \mathcal{P}^2)}{M} \frac{[(1 - \mathcal{P}^2)\zeta(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}) + 2\mathcal{P}^2]}{[(1 + \mathcal{P}^2)\zeta(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}) - 2\mathcal{P}^2]}. \quad (2.22)$$

En dépit du fait que les expressions (2.18) et (2.22) soient significativement différentes et que la BCR à intensité moyenne inconnue  $\mathbf{BCR}^{(1)}(\beta)$  soit naturellement supérieure à  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\beta)$  à  $\mu_I$  connu, les valeurs prises par ces deux bornes sont en réalité très similaires [41]. Ceci peut être vérifié sur les figures 2.1.a et 2.1.b où  $\mathbf{BCR}^{(1)}(\mathcal{P})$  et  $\mathbf{BCR}^{(1)}(\beta)$  sont tracées en fonction  $\mathcal{P}$  en trait tireté (---). Par conséquent, on peut conclure que la connaissance *a priori* de l'intensité moyenne  $\mu_I$  ne permet pas de réduire significativement la difficulté de la tâche d'estimation.

Par ailleurs, ce résultat semble signifier également que la forme « scalaire » de la BCR, obtenue en supposant  $\mu_I$  connu *a priori* constitue un bon indicateur de la performance optimale d'estimation, même dans le cas où l'intensité moyenne doit être estimée conjointement. Dans la suite, nous admettrons donc que l'intensité moyenne  $\mu_I$  est connue afin de calculer plus aisément les BCRs dans les cas où le speckle est d'ordre supérieur à un. Enfin, la borne de Cramer-Rao sera dorénavant notée indifféremment  $BCR(\mathcal{P})$  ou  $BCR(\beta)$ , sans distinction sur la connaissance *a priori* du paramètre  $\mu_I$ .

## 2.2.2 BCR pour un speckle d'ordre supérieur

Nous proposons ici d'analyser succinctement le comportement de la BCR pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  (ou de  $\beta$ ) lorsque le speckle est d'ordre supérieur. En effet, on a vu au chapitre précédent que cette situation se rencontre couramment lorsque la surface du capteur intègre l'intensité lumineuse provenant de  $L > 1$  ( $L \in \mathbb{N}$ ) grains de speckle, et conduit à des fluctuations d'intensité gamma d'ordre  $L$  en lumière polarisée.

### 2.2.2.1 Évaluation numérique de la BCR

Lorsque l'on considère un modèle de speckle pleinement développé d'ordre  $L$ , la DDP de l'intensité  $P_I(I)$  résulte de la convolution de deux lois gamma d'ordre  $L$  mais de valeurs moyennes différentes (voir section 1.2.3.1). Dans ce cas cependant, la complexité de la loi  $P_I(I)$  que l'on obtient alors (voir équation (1.24)) rend difficile le calcul explicite de la BCR. Il est toutefois possible d'obtenir une **évaluation numérique** de ces bornes qui permet d'obtenir les indications nécessaires pour étudier comment se modifie la BCR pour l'estimation de  $\beta$  quand l'ordre du speckle augmente [41].

Pour réaliser cette évaluation numérique, nous avons utilisé un logiciel de calcul formel qui nous a tout d'abord permis d'obtenir, sous une forme explicite, la dérivée seconde par rapport à  $\beta$  de la logvraisemblance  $L(\chi; \beta)$  dans le cas de speckles d'ordres  $L \in \{1, 2, 3, 5, 10\}$ , et en supposant l'intensité moyenne  $\mu_I$  connue. Le calcul de l'information de Fisher, qui nécessite d'évaluer la valeur moyenne de cette dérivée seconde, n'a quant à lui pas pu être conduit de façon explicite, et a été effectué numériquement en utilisant un schéma d'intégration numérique. Une fois l'information de Fisher obtenue numériquement, il est aisé d'en déduire les valeurs numériques des bornes de Cramer-Rao, notées  $BCR^{(L)}(\beta)$ , et qui sont tracées en fonction de  $\mathcal{P}$  pour les différents ordres  $L$  considérés sur la figure 2.2<sup>19</sup>.

En observant la figure 2.2, on remarque tout d'abord que le comportement de la borne en fonction de  $\mathcal{P}$  se modifie significativement quand l'ordre du speckle augmente. Pour un speckle d'ordre 1, la courbe se superpose bien sûr au tracé de  $BCR_{\mu_I}^{(1)}(\mathcal{P})$  obtenue pour un speckle d'ordre 1 (voir figure 2.1.b). En revanche, le comportement des bornes  $BCR^{(L)}(\beta)$  est clairement différent lorsque l'ordre  $L$  augmente. Tout d'abord lorsque le degré de polarisation tend vers 1, la BCR ne tend plus vers 0 et atteint des valeurs d'autant plus élevées que l'ordre  $L$  augmente. À l'inverse, pour les faibles valeurs de  $\mathcal{P}$ , les valeurs prises par  $BCR^{(L)}(\beta)$  ont tendance à diminuer légèrement par rapport au cas pleinement développé. En analysant les valeurs numériques de  $BCR^{(L)}(\beta)$  pour les différents ordres  $L$  considérés, et aux faibles valeurs du degré de polarisation ( $\mathcal{P} \simeq 0$ ) nous avons observé que

$$BCR^{(L)}(\beta) \xrightarrow{\mathcal{P} \rightarrow 0} \frac{1}{M} \left( 2 + \frac{1}{L} \right). \quad (2.23)$$

Plus généralement, quand l'ordre du speckle devient élevé (par exemple  $L = 10$ ), l'observation de la figure 2.2 nous permet de conjecturer que  $BCR^{(L)}(\beta)$  devient une fonction croissante de  $\mathcal{P}$  [41]. On peut également conclure de ces observations que l'augmentation de l'ordre du speckle ne permet pas d'améliorer la précision

<sup>19</sup> – Notons que nous avons également vérifié numériquement que les valeurs de la BCR pour  $L = \{1, 2, 3, 5, 10\}$  ne dépendent pas de  $\mu_I$ , ce qui était déjà le cas pour un speckle d'ordre 1.

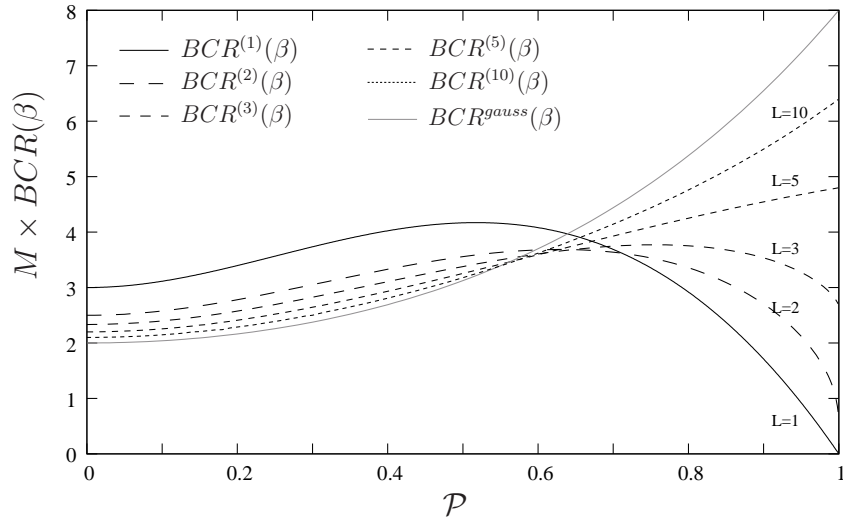


FIG. 2.2 – Évolution de la BCR pour l'estimation de  $\beta$  tracée en fonction de  $\mathcal{P}$  pour différentes valeurs de l'ordre  $L$  du speckle. La courbe en trait plein gris représente la forme asymptotique de la BCR pour un ordre de speckle  $L \rightarrow \infty$ , obtenue avec une approximation gaussienne de la DDP  $P_I(I)$ .

optimale d'estimation de  $\beta$ , et dégrade même fortement celle-ci pour des valeurs élevées du degré de polarisation.

### 2.2.2.2 BCR approchée pour un speckle d'ordre élevé

Pour vérifier ces dernières remarques, nous proposons d'utiliser une approximation classique consistant à remplacer une loi gamma d'ordre  $L$  élevé, de moyenne  $\mu$  et variance  $\sigma^2 = \mu^2/L$ , par une densité de probabilité gaussienne de même moyenne et même variance. Pour des ordres  $L$  élevés (typiquement  $L > 20$ ), la précision de cette approximation est satisfaisante [35] et permet ici de calculer une forme asymptotique de la BCR [41].

En utilisant cette approximation et d'après les hypothèses énoncées au début de ce chapitre en section 2.1.1, l'intensité  $I$  s'écrit comme la somme de deux variables aléatoires gaussiennes de moyennes respectives  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et de variances  $\mu_1^2/L$  et  $\mu_2^2/L$ . La densité de probabilité de l'intensité  $P_I(I)$  sera par conséquent gaussienne, de moyenne  $\mu_I = \mu_1 + \mu_2$  et de variance  $\text{var}(I) = \text{var}(I_1) + \text{var}(I_2) = \mu_I^2(1 + \mathcal{P}^2)/2L$ , soit

$$P_I(I) = \sqrt{\frac{L}{\pi(1 + \mathcal{P}^2)\mu_I}} \exp\left[-\frac{L(I - \mu_I)^2}{(1 + \mathcal{P}^2)\mu_I^2}\right]. \quad (2.24)$$

Grâce à cette approximation gaussienne, la BCR peut être calculée explicitement (voir annexe B.1.2), ce qui conduit au résultat suivant :

$$BCR^{gauss}(\beta) = 2 \frac{(1 + \mathcal{P}^2)^2}{M}. \quad (2.25)$$

On remarque immédiatement que cette borne ne dépend ni de l'intensité moyenne

$\mu_I$ , ni de l'ordre  $L$  du speckle<sup>20</sup>. Par ailleurs, en observant son tracé en trait plein (—) gris sur la figure 2.2, on remarque qu'elle varie entre  $2/M$  pour  $\mathcal{P} \simeq 0$  et atteint  $8/M$  lorsque la lumière devient totalement polarisée. Ces remarques confirment donc les observations faites au paragraphe précédent dans le cas d'un speckle d'ordre suffisamment élevé ( $L = 10$ ). On considérera par conséquent dans la suite que  $BCR^{gauss}(\beta)$  constitue une forme explicite satisfaisante de la variance minimale d'estimation de  $\beta$  lorsque le bruit de speckle perturbant l'image est d'un ordre  $L$  élevé. Cette BCR asymptotique, valable dans la limite des ordres de speckle importants, peut être comparée à la BCR obtenue pour un speckle d'ordre 1. Pour les plus faibles valeurs de  $\mathcal{P}$ , augmenter l'ordre  $L$  du speckle peut diminuer légèrement la variance minimale d'estimation. En revanche, dès que  $\mathcal{P} > 0,64$ , la situation est inversée et l'augmentation de la variance minimale d'estimation peut devenir importante pour des ordres très élevés, dépassant un facteur 10 dès que  $\mathcal{P} > 0,96$ .

### 2.2.3 Conclusion

Bien qu'il ne soit pas garanti que l'on puisse exhiber une méthode d'estimation efficace, la BCR que nous venons de déterminer dans plusieurs situations de speckle pleinement développé permet d'analyser les ordres de grandeurs de la variance minimale que l'on peut espérer atteindre avec un estimateur de  $\mathcal{P}$  (ou son carré  $\beta$ ) utilisant une unique image d'intensité de speckle. En observant la figure 2.2, on peut admettre grossièrement que l'ordre de grandeur indicatif de la BCR pour un échantillon de taille  $M$  est environ  $4/M$ . On déduit de cette valeur indicative un ordre de grandeur de l'écart-type  $\sigma(\hat{\beta})$  de l'estimation de  $\beta$  :

$$\sigma(\hat{\beta}) \simeq \sqrt{\frac{4}{M}} = \frac{2}{h}, \quad (2.26)$$

où  $h$  représenterait la largeur de la région homogène de  $M = h \times h$  pixels si celle-ci était carrée. On peut alors se rendre compte qu'en choisissant une petite région homogène de largeur  $h = 10$  pixels par exemple, l'écart-type  $\sigma(\hat{\beta}) \simeq 0,2$  que l'on obtient est trop important pour utiliser en pratique une telle méthode d'estimation de  $\beta$  à une image. En revanche, si l'on parvient à augmenter la taille des échantillons homogènes utilisés pour l'estimation, l'estimation de  $\beta$  à partir d'une seule image peut présenter une précision satisfaisante : par exemple avec  $h = 40$  pixels (soit  $M = 1600$  pixels), l'écart-type se réduit à  $0,05$ , et on peut même atteindre un écart-type de  $0,01$  à condition de sélectionner une région homogène de très grande taille  $h = 100$  pixels (soit  $M = 10^4$  pixels). Pour qu'une méthode d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image soit utilisable en pratique, il est donc nécessaire de disposer de capteurs comportant un nombre important de pixels.

Dans la section suivante, nous exposerons plusieurs techniques permettant d'estimer  $\mathcal{P}$  (ou  $\beta$ ) à partir des seules mesures d'intensité dans une zone homogène provenant d'une image unique, acquise sous éclairage cohérent. Les performances de ces estimateurs seront déterminées théoriquement dans la mesure du possible et numériquement, puis nous caractériserons leur efficacité.

---

<sup>20</sup> – Ce qui est normal puisqu'il s'agit d'une forme asymptotique pour  $L \rightarrow \infty$ .

## 2.3 Méthodes d'estimation

En introduction de ce chapitre, nous avons vu que l'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité de speckle repose sur la mesure de paramètres statistiques de la densité de probabilité de l'intensité (le contraste de speckle par exemple), à partir desquels il est possible de déduire la valeur de  $\mathcal{P}$  (ou de  $\beta$ ). Dans cette section, nous présentons et caractérisons plusieurs estimateurs associés à la mesure de grandeurs statistiques différentes qui ont été étudiés au cours de ces travaux de thèse.

Nous introduisons tout d'abord des estimateurs « naturels » de  $\beta$ , basés sur l'estimation du contraste de speckle, et facilement généralisables à de nombreux modèles de speckle. Dans un second temps nous exposerons deux méthodes alternatives, étudiées dans le cas le plus simple d'un speckle d'ordre 1, qui permettent d'approcher les performances optimales d'estimation données par la BCR.

### 2.3.1 Estimateurs de $\beta$ au sens des moments

Comme nous l'avons vu à la section 2.1.2, l'augmentation du degré de polarisation s'accompagne d'un accroissement du contraste de la figure de speckle. Pour le modèle général de fluctuations de speckle présenté à la section 2.1.1, la relation entre ce contraste  $\mathbf{C}$  et la valeur de  $\mathcal{P}$  a été donnée à l'équation (2.9). En « inversant » cette relation, il apparaît alors clairement que le carré du degré de polarisation  $\beta = \mathcal{P}^2$  peut se déduire à partir de la valeur des deux premiers moments de l'intensité lumineuse en écrivant

$$\beta = 2 \frac{\text{var}(I)}{\kappa_2 \mu_I^2} - 1, \quad (2.27)$$

où l'on rappelle que le cumulants  $\kappa_2$  représente la variance de la loi normalisée  $f$  qui définit le modèle de speckle adopté.

Cette équation montre ainsi qu'en estimant simplement la variance et la moyenne de l'intensité localement au pixel  $k$ , sur un voisinage homogène  $\mathcal{V}$  constitué de  $M$  pixels, on peut évaluer la valeur de  $\beta$  au pixel considéré. Nous proposons donc d'étudier les deux estimateurs suivants, qui seront qualifiés dans la suite d'**estimateurs au sens des moments** :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2}{\kappa_2 \mu_I^2} [\hat{S}_1] - 1, \quad \text{avec } \hat{S}_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_i^2 - \mu_I^2; \quad (2.28)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{2}{\kappa_2 \hat{\mu}_I^2} [\hat{S}_2] - 1, \quad \text{avec } \hat{S}_2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_i^2 - (\hat{\mu}_I)^2, \quad (2.29)$$

où  $\hat{\mu}_I$  représente l'estimateur de la **moyenne empirique**,  $\hat{\mu}_I = \sum_{i=1}^M I_i / M$ . Avec  $\hat{\beta}_1$ , la variance est estimée grâce à l'**estimateur empirique de la variance à moyenne connue**  $\hat{S}_1$ . En revanche, l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  utilise l'estimateur de la moyenne empirique  $\hat{\mu}_I$  pour calculer la **variance empirique à moyenne inconnue**  $\hat{S}_2$ .

L'expression de ces deux estimateurs fait intervenir le terme  $\kappa_2$ , qu'il est nécessaire de connaître préalablement à l'estimation. Le modèle statistique de

speckle qui traduit les fluctuations des niveaux de gris de l'image doit donc être connu avec précision, ce qui implique en particulier de maîtriser les conditions expérimentales d'imagerie avec une grande précision. Nous supposons dans la suite que le paramètre  $\kappa_2$  est connu ou qu'il peut être précisément mesuré lors d'une étape de calibration.

### 2.3.1.1 Caractérisation théorique de $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$

Les calculs du biais et de la variance théoriques des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont détaillés en annexe B.3 ou dans la référence [41], pour un modèle statistique des fluctuations d'intensité correspondant aux hypothèses mentionnées précédemment (section 2.1.1). Puisque nous avons utilisé une méthode de calcul approchée (voir annexe B.3), les résultats théoriques présentés ci-dessous seront valables pour des fluctuations pas trop fortes des résultats d'estimation autour de la vraie valeur de  $\beta$ .

**Biais :** Le calcul du biais théorique des deux estimateurs au sens des moments  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  permet de montrer qu'ils sont asymptotiquement non biaisés. En effet, l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  est clairement non biaisé, puisque l'estimateur  $\hat{S}_1$  est lui même sans biais [133], et donc

$$\langle \hat{\beta}_1 - \beta \rangle = 0. \quad (2.30)$$

L'estimateur  $\hat{\beta}_2$  est en revanche biaisé,

$$\langle \hat{\beta}_2 - \beta \rangle = \frac{1 + \beta}{M}, \quad (2.31)$$

mais comme ce biais tend à disparaître lorsque la taille de l'échantillon  $M$  augmente,  $\hat{\beta}_2$  est dit **asymptotiquement non biaisé**.

**Variance :** Pour caractériser la performance de ces estimateurs en terme de précision d'estimation, nous avons également déterminé leur variance théorique (voir calculs détaillés en annexe B.3 ou [41]). Celle-ci peut être exprimée en fonction des premiers cumulants  $\kappa_i$ ,  $i \in [2; 4]$  de la loi de probabilité normalisée  $f$  caractéristique du modèle de fluctuations de speckle choisi. La variance théorique de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  s'écrit donc (voir équation (B.81) de l'annexe B.3.2.1)

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{2(1 + \beta)^2}{M} + \frac{\gamma_2}{2M}(1 + 6\beta + \beta^2), \quad (2.32)$$

où le **coefficient de kurtosis**<sup>21</sup>  $\gamma_2$  de la loi normalisée  $f$  vaut

$$\gamma_2 \triangleq \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}. \quad (2.33)$$

En ce qui concerne l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ , sa variance théorique fait apparaître des termes en  $1/M^2$  et  $1/M^3$  (voir équation (B.89) en annexe B.3.2.2), que nous ne

---

<sup>21</sup> – Ce coefficient de kurtosis  $\gamma_2$  traduit l'« aplatissement » d'une loi de probabilité par rapport à une gaussienne de même variance. Un kurtosis négatif ( $\gamma_2 < 0$ ) caractérise une DDP plus « plate » qu'une loi gaussienne (DDP *platikurtique*), alors qu'une DDP plus « piquée » qu'une loi gaussienne possède un kurtosis positif (DDP *leptokurtique*).

détaillons pas ici. Nous nous limitons à rappeler la **variance asymptotique** de  $\hat{\beta}_2$ , notée  $\text{var}_a(\hat{\beta}_2)$ , qui s'obtient en ne conservant que les termes en  $1/M$  dans l'expression (B.89) :

$$\text{var}_a(\hat{\beta}_2) = \text{var}(\hat{\beta}_1) + 2\kappa_2 \frac{(1+\beta)^3}{M} - 2\gamma_1 \sqrt{\kappa_2} \frac{(1+\beta)(1+3\beta)}{M}, \quad (2.34)$$

où l'on fait apparaître le **coefficient de dissymétrie**<sup>22</sup>  $\gamma_1$  de la loi normalisée  $f$  défini par

$$\gamma_1 \triangleq \frac{\kappa_3}{(\kappa_2)^{3/2}}. \quad (2.35)$$

En analysant cette expression, on voit que la variance asymptotique de  $\hat{\beta}_2$  s'écrit comme la somme de la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  à moyenne connue et d'un terme supplémentaire, qui dépend du coefficient de dissymétrie  $\gamma_1$ . Nous avons montré que ce terme peut être négatif si  $\kappa_3 > \kappa_2^2$  [41]. Cette condition suffisante (mais non nécessaire) permet en d'autres termes d'obtenir la propriété suivante :

$$\gamma_1 > \sqrt{\kappa_2} \quad \Rightarrow \quad \forall \mathcal{P} \in [0, 1], \text{var}_a(\hat{\beta}_2) < \text{var}(\hat{\beta}_1). \quad (2.36)$$

Cette propriété nous indique donc que pour des loi normalisées  $f$  présentant une dissymétrie positive notable telle que  $\gamma_1 > \sqrt{\kappa_2}$ , l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  à moyenne inconnue conduit à une variance plus faible que l'estimateur  $\hat{\beta}_1$ . Ce résultat qui peut paraître contre-intuitif au premier abord, puisque l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  bénéficie de la connaissance *a priori* de  $\mu_I$ , peut néanmoins s'expliquer par un phénomène de « compensation » des grandes déviations des estimateurs de la moyenne et de la variance. En effet, si la densité de probabilité possède une dissymétrie vers les valeurs élevées de la variable aléatoire, un échantillon caractérisé par des valeurs exceptionnellement élevées d'intensité peut conduire à une surestimation importante de la variance. Cette surestimation est (au moins partiellement) compensée lorsqu'on utilise l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ , puisque l'intensité estimée empiriquement dans ce cas sera également surévaluée sur cet échantillon.

Par ailleurs, on peut noter également qu'un coefficient d'aplatissement (kurtosis) négatif  $\gamma_2 < 0$  conduit à des variances d'estimation inférieures : ainsi, plus la loi normalisée  $f$  sera « plate », pour une variance  $\kappa_2$  donnée, plus les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  seront précis.

**Cas particulier d'un speckle pleinement développé d'ordre  $L$  :** Dans le cas particulier où le modèle de speckle considéré est caractérisé par une loi normalisée  $f$  gamma d'ordre  $L$ , les cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$  peuvent s'écrire simplement en fonction de l'ordre  $L$  (voir tableau 2.1 page 50) et les expressions des variances théoriques des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  deviennent donc [41]

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{2(1+\beta)^2}{M} + \frac{3}{ML}(1+6\beta+\beta^2), \quad (2.37)$$

$$\text{var}_a(\hat{\beta}_2) = \text{var}(\hat{\beta}_1) - 2 \frac{(1+\beta)(1+4\beta-\beta^2)}{ML}. \quad (2.38)$$

<sup>22</sup> – Comme son nom l'indique, ce coefficient de dissymétrie  $\gamma_1$  (*skewness* en anglais) caractérise l'étalement de la distribution de probabilité vers les valeurs élevées ( $\gamma_1 > 0$ ) ou faibles ( $\gamma_1 < 0$ ).



Dans ce cas, quel que soit l'ordre  $L$ , l'estimateur au sens des moments à moyenne estimée  $\hat{\beta}_2$  conduit à une variance inférieure à celle de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$ , étant donné que le second terme est toujours négatif pour toute valeur de  $L$ , de  $M$  ou de  $\beta \in [0; 1]$ . En outre, on peut noter que la différence entre ces deux expressions tend à disparaître lorsque l'ordre du speckle augmente. Dans la limite des ordres élevés ( $L \gg 1$ ), les variances tendent toutes deux vers une limite identique [41]

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\beta}_1) = \lim_{L \rightarrow \infty} \text{var}_a(\hat{\beta}_2) = 2 \frac{(1 + \beta)^2}{M}. \quad (2.39)$$

Ceci s'interprète aisément en utilisant l'approximation, proposée au paragraphe 2.2.2.2, consistant à remplacer la loi gamma d'ordre  $L$  élevé par une distribution gaussienne. Dans ce cas en effet, si le cumulatif  $\kappa_2$  est inchangé ( $\kappa_2 = 1/L$ ), on a en revanche  $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$  [35], et l'on montre à partir des équations (2.32) et (2.34) que  $\text{var}(\hat{\beta}_1) = \text{var}_a(\hat{\beta}_2) = 2(1 + \beta)^2/M$ , qui s'identifie à la BCR obtenue à l'équation (2.25) avec cette même approximation gaussienne [41]. L'efficacité de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  n'est cependant pas surprenante car on peut montrer que  $\hat{\beta}_1$  correspond, sous cette hypothèse gaussienne, à l'estimateur de  $\beta$  au sens du maximum de vraisemblance<sup>23</sup>.

Les remarques qui précèdent nous permettent ainsi de conjecturer que les estimateurs de  $\beta$  fondés sur la mesure des deux premiers moments de l'intensité lumineuse tendent à devenir *efficaces* pour des ordres de speckle élevés. Pour de faibles ordres de speckle, l'analyse de leurs performances et de leur optimalité sera menée dans la suite à partir de simulations numériques.

### 2.3.1.2 Résultats de simulation

Pour évaluer le biais et la variance des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ , nous utilisons une méthode stochastique de type **Monte-Carlo** qui consiste à effectuer, pour chaque situation physique ou expérimentale considérée, un grand nombre  $R$  de **tirages indépendants** des échantillons de mesure simulés, que l'on suppose provenir d'une zone statistiquement homogène de l'image de  $M$  pixels. Chacun de ces  $R$  échantillons  $\chi_l$ ,  $l \in [1; R]$  se compose donc d'un ensemble de  $M$  tirages aléatoires indépendants et identiquement distribués de l'intensité lumineuse  $I$ , obtenus en sommant deux réalisations de variables aléatoires indépendantes  $I_1$  et  $I_2$ , de moyenne respectives  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et dont la forme est donnée par le choix de la loi  $f$  qui caractérise le modèle de speckle choisi.

Les estimateurs considérés  $\hat{\beta}_i$ ,  $i = 1, 2$  sont alors appliqués sur ces  $R$  échantillons  $\chi_l$ ,  $l \in [1; R]$ , et fournissent  $R$  valeurs  $\hat{\beta}_i(l)$ ,  $l \in [1; R]$  estimées dans des conditions expérimentales identiques. En choisissant un nombre de réalisations  $R$  suffisamment élevé, on peut dès lors obtenir une estimation fiable du biais de l'estimateur en moyennant ces  $R$  résultats, et en calculant

$$\frac{1}{R} \sum_{l=1}^R [\hat{\beta}_i(l)] - \beta, \quad (2.40)$$

<sup>23</sup> – On peut en effet s'assurer qu'il vérifie l'équation  $\partial \ell(\chi; \beta) / \partial \beta |_{\beta = \hat{\beta}_1} = 0$ , où la logvraisemblance  $\ell(\chi; \beta)$  est donnée en équation (B.41), annexe B.1.2.

de même que la variance peut être estimée empiriquement en calculant

$$\frac{1}{R} \sum_{l=1}^R [\hat{\beta}_i(l)^2] - \left[ \frac{1}{R} \sum_{l=1}^R \hat{\beta}_i(l) \right]^2. \quad (2.41)$$

Sauf mention du contraire, les résultats de simulation présentés dans ce chapitre sont obtenus à partir de  $R = 10^4$  réalisations, ce qui permet d'assurer une évaluation numérique des variances des estimateurs avec des barres d'erreur négligeables. Pour cette raison, celles-ci ne seront pas représentées sur les figures.

**Speckle pleinement développé :** Considérons dans un premier temps la situation standard d'un speckle pleinement développé d'ordre un<sup>24</sup> et on suppose que l'estimation est réalisée sur un échantillon homogène de taille importante  $M = 10^3$  (environ  $32 \times 32$  pixels). Nous avons vérifié tout d'abord que les estimateurs du carré du degré de polarisation  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  étudiés ici sont quasiment non biaisés : en effet, même si un faible biais est décelable, celui-ci reste toujours négligeable par rapport à l'écart-type des valeurs estimées (voir références [119, 41]). À la section 2.3.3, nous reviendrons sur le biais de ces estimateurs et discuterons le caractère non-biaisé de la méthode d'estimation au sens des moments lorsqu'il s'agit d'estimer  $\mathcal{P}$ .

Focalisons nous ici sur l'étude de la variance de ces estimateurs. Sur la figure 2.3.a, nous avons tracé les variances « expérimentales » (c'est-à-dire évaluées par simulation Monte-Carlo) des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  (symboles  $\Delta$ ) et  $\hat{\beta}_2$  (symboles  $\square$ ), en fonction des « vraies » valeurs du degré de polarisation  $\mathcal{P}$ . Sur cette même figure, nous avons aussi reporté leurs variances théoriques (traits tiretés (— —)), calculées à partir des équations (2.37) et (2.38), qui s'accordent avec une bonne précision aux valeurs estimées par simulation numérique. Enfin, en trait continu (—), nous avons représenté également la borne de Cramer-Rao  $BCR^{(1)}(\beta)$  pour l'estimation de  $\beta$ , calculée à l'équation (2.18).

On remarque en examinant cette figure que l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  demeure plus précis que  $\hat{\beta}_1$ , pour toute valeur de  $\mathcal{P}$ , conformément à ce que l'analyse des expressions des variances théoriques laissait présager. Il est plus remarquable en revanche de noter que l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  est quasiment efficace pour les faibles valeurs du degré de polarisation ( $\mathcal{P} < 0,3$ ) puisque sa variance atteint presque la courbe de la BCR [119]. Cependant, la performance des deux estimateurs décroît lorsque  $\mathcal{P}$  augmente : la variance de  $\hat{\beta}_2$  passe ainsi de  $3/M$  à  $15/M$  lorsque  $\mathcal{P}$  varie entre 0 et 1, la variance de  $\hat{\beta}_1$  s'accroissant quant à elle de  $5/M$  à  $30/M$ .

La dégradation de l'efficacité de ces estimateurs est donc tout à fait flagrante lorsque le degré de polarisation augmente : au delà de  $\mathcal{P} = 0,8$ , l'efficacité des deux estimateurs chute en dessous de 0,1 (voir aussi figure 2.4 pour  $L = 1$ ), ce qui correspond à un écart-type supérieur à trois fois la précision minimale donnée par la BCR.

**Speckles d'ordres supérieurs :** Pour des speckles d'ordres supérieurs, nous avons vérifié que le biais restait négligeable vis-à-vis de l'écart-type des estimateurs, confirmant ainsi que  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont asymptotiquement non biaisés [41].

<sup>24</sup> – On rappelle que cela correspond à choisir une loi normalisée  $f$  exponentielle  $f(z) = e^{-z}$ .

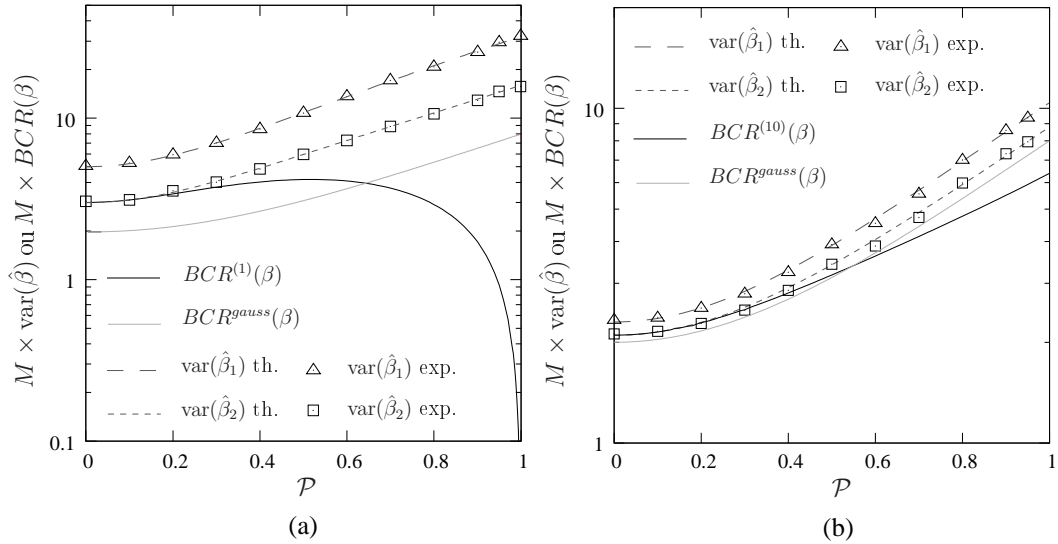


FIG. 2.3 – Comparaison entre la BCR (trait continu foncé (—)) et la variance des estimateurs de  $\beta$  au sens des moments, en fonction de  $\mathcal{P}$  pour  $L = 1$  (a), et  $L = 10$  (b). La variance est estimée numériquement à partir de simulations numériques (symboles) ou calculée théoriquement (traits tiretés (—)). La courbe en trait plein gris représente la forme asymptotique de la BCR pour un ordre de speckle  $L \rightarrow \infty$ , obtenue avec une approximation gaussienne de la DDP  $P_I(I)$ .

Nous proposons d'illustrer ici les performances des estimateurs au sens des moments à partir de simulations numériques<sup>25</sup> réalisées pour un speckle d'ordre  $L = 10$ . Sur la figure 2.3.b, nous avons comparé les variances théoriques (courbes en traits tiretés (—)) et expérimentales des estimateurs avec la borne de Cramer-Rao ( $\text{BCR}^{(10)}(\beta)$ ) obtenue numériquement pour  $L = 10$  et tracée en trait continu foncé (—). Cette comparaison permet d'illustrer que, contrairement au cas précédent avec  $L = 1$ , l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  reste ici efficace tant que  $\mathcal{P}$  est inférieur à 0,6 environ, et demeure assez proche de la BCR correspondante quelle que soit la valeur de  $\mathcal{P}$ . En effet lorsque  $L = 10$ , l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  permet d'évaluer toute valeur de  $\beta \in [0, 1]$  avec un écart-type n'excédant pas la BCR de plus 20%. On remarque également que les tracés de la variance théorique de  $\hat{\beta}_2$  d'une part, et de la BCR pour  $L = 10$  d'autre part, tendent tous deux vers la courbe limite tracée en trait continu gris, et qui représente la BCR pour un cas limite gaussien  $\text{BCR}^{\text{gauss}}(\beta)$  calculée à l'équation (2.25).

L'augmentation de l'ordre  $L$  se traduit par une légère amélioration de la précision des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  (de l'ordre d'un facteur 2 au mieux pour l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  lorsque  $L \gg 1$ ). En revanche, l'efficacité des méthodes d'estimation au sens des moments augmente quant à elle fortement avec l'ordre du speckle, en raison de l'accroissement de la BCR pour les ordres élevés. Ceci est clairement illustré sur la figure 2.4 où nous avons tracé l'efficacité théorique des deux estimateurs  $\hat{\beta}_1$  (fig. 2.4.a) et  $\hat{\beta}_2$  (fig. 2.4.b) en fonction de  $\mathcal{P}$  lorsque l'ordre de la loi gamma augmente. À l'extrême, pour des ordres de speckle très élevés ( $L = 100$ ), l'efficacité est quasiment égale à un, pour n'importe quelle valeur du degré de polarisation.

<sup>25</sup> – On trouvera dans la référence [41] des résultats de simulations plus exhaustifs pour des speckles d'ordres divers.

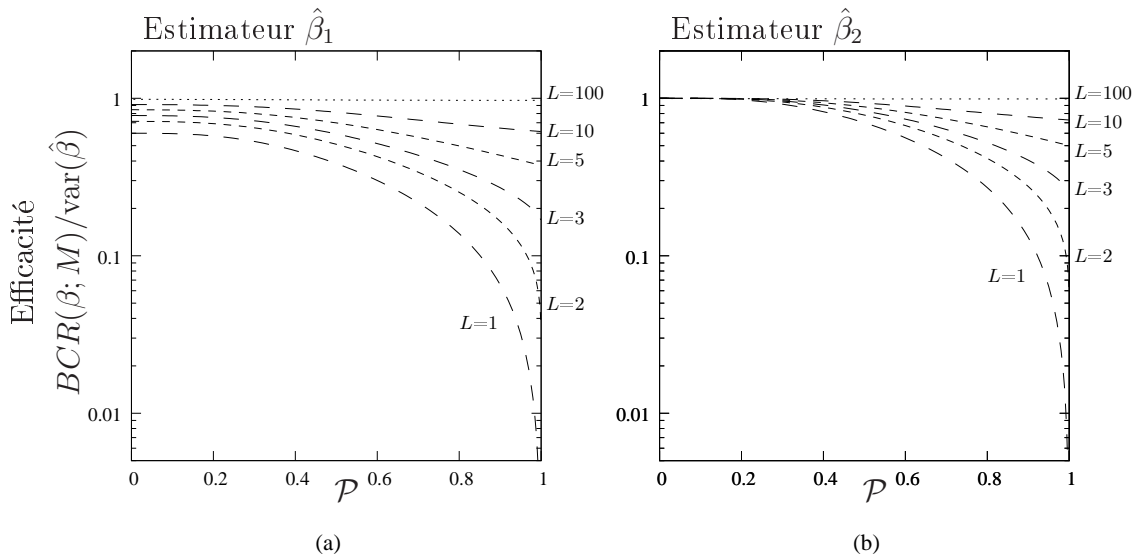


FIG. 2.4 – Efficacité théorique des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  (a), et  $\hat{\beta}_2$  (b) en fonction de  $\mathcal{P}$  pour plusieurs valeurs de l'ordre de speckle  $L \in \{1; 2; 5; 10; 100\}$ . Pour  $L \in \{1; 2; 5; 10\}$ , la BCR est évaluée numériquement. Pour  $L = 100$  l'efficacité est calculée à partir de la BCR pour le cas limite gaussien lorsque  $L \rightarrow \infty$ .

Plus généralement, si l'augmentation de l'ordre du speckle accroît l'efficacité des estimateurs au sens des moments, elle ne permet cependant pas d'améliorer significativement les performances d'estimation, confirmant ainsi un résultat que nous avons pressenti en analysant les valeurs de la BCR. Pour illustrer cette remarque, supposons que l'estimation est réalisée à partir d'une figure de speckle pleinement développée d'ordre 1 sur  $M$  pixels d'un capteur (c'est-à-dire qu'un pixel contient en moyenne un grain de speckle, voir figure 2.5.a). Pour améliorer les performances de cette estimation, on peut être tenté de réduire la taille des grains de speckle (en augmentant l'ouverture de l'imageur) afin d'accroître l'ordre du speckle, comme nous le schématisons sur la figure 2.5.b dans le cas d'un speckle d'ordre  $L = 9$ . Or, comme nous l'avons vu ci-dessus, cette solution ne permet pas de diminuer la variance de l'estimation au sens des moments au delà d'un facteur 2, et ne réduit pas non plus la variance minimale fournie par la BCR. En revanche, si l'on dispose d'un capteur qui comporte un plus grand nombre de pixels et que la taille de ces pixels est suffisamment petite pour échantillonner correctement ces grains de speckle de diamètre réduit (voir figure 2.5.c), on dispose alors d'un échantillon homogène de plus grande taille, ce qui permet, par rapport à la situation initiale, de diminuer la BCR et la variance d'estimation en proportion de l'augmentation du nombre de pixels. Dans la situation représentée sur la figure 2.5.c, cela correspondrait à une diminution de la variance par un facteur 9.

Pour une utilisation pratique des méthodes d'estimation du degré de polarisation (ou de son carré  $\beta$ ) à partir d'une unique image d'intensité de speckle, il est donc préférable, dans la mesure du possible, d'échantillonner correctement la figure de speckle pour que l'ordre du speckle soit le plus faible possible. Malheureusement, les estimateurs au sens des moments proposés dans cette section ne sont pas efficaces lorsque l'ordre du speckle est peu élevé (et *a fortiori* pour

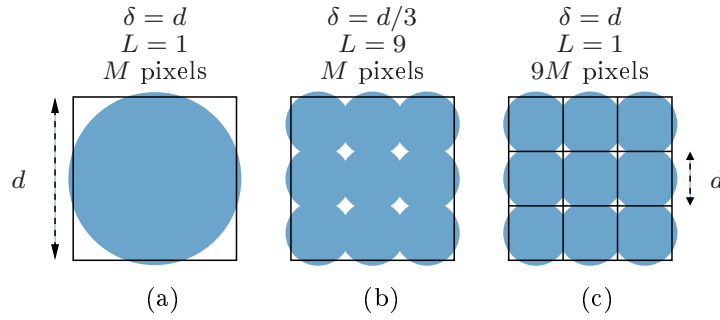


FIG. 2.5 – Dans les situations (a) et (c), le capteur échantillonne correctement la figure de speckle. Dans le cas (b), la diminution de la taille des grains de speckle augmente l'ordre du speckle intégré sur le capteur.

Densité de probabilité	Ordre de la loi	Cumulants de la loi $f$		
		$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\kappa_4$
Gamma	1	1	2	6
	$L$	$1/L$	$2/L^2$	$6/L^3$
Weibull	2	$2,73 \cdot 10^{-1}$	$9,01 \cdot 10^{-2}$	$1,83 \cdot 10^{-2}$
	5	$5,25 \cdot 10^{-1}$	$-3,05 \cdot 10^{-3}$	$-3,29 \cdot 10^{-4}$
Loi $\mathcal{K}$	1	3	26	426
	10	1.2	3.38	15.38

TAB. 2.1 – Cumulants  $\kappa_i$ ,  $i \in [2; 4]$  de la loi normalisée  $f$  pour plusieurs modèles de speckle. Les valeurs de ces cumulants ont été calculées grâce aux résultats de la référence [35].

un speckle d'ordre 1). Par conséquent, l'investigation de techniques d'estimation alternatives plus sophistiquées représente un enjeu intéressant pour améliorer l'efficacité de l'estimation. De telles solutions seront analysées dans la section suivante dans le cas d'un speckle d'ordre un.

**Généralisation à des statistiques de speckle différentes :** Si un modèle de speckle pleinement développé conduit à modéliser les statistiques de speckle par des lois gamma, on rencontre dans certains cas des modèles différents, notamment lorsque des réflectivités non uniformes doivent être prises en compte (voir section 1.2.3.2). Dans les limites des hypothèses énoncées en section 2.1.1 (c'est-à-dire tant que l'intensité totale  $I$  peut s'écrire comme la somme de deux variables aléatoires  $I_1$  et  $I_2$  indépendantes), la méthode d'estimation au sens des moments présentée dans cette section reste applicable néanmoins. De même, les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  peuvent toujours être caractérisés théoriquement à condition de connaître les cumulants  $\kappa_i$ ,  $i \in [2; 4]$  de la loi normalisée  $f$  qui définit le modèle de speckle considéré (voir tableau 2.1).

Nous nous sommes tout d'abord intéressés au cas d'une loi de Weibull d'ordre 2 et d'ordre 5 (voir équation 1.28). Les variances obtenues avec les deux estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont représentées en fonction de  $\mathcal{P}$  sur les figures 2.6.a et 2.6.b grâce auxquelles on remarque que  $\hat{\beta}_2$  est plus précis que  $\hat{\beta}_1$  si la loi de Weibull est

d'ordre 2, ce qui s'explique par les valeurs des cumulants fournies par le tableau 2.1 qui vérifient la condition donnée à l'équation (2.36), ou de façon équivalente  $\kappa_2^2 < \kappa_3$ . À l'inverse, pour une loi d'ordre 5 cette condition n'est plus vérifiée (coefficient de dissymétrie  $\gamma_1$  négatif) et on remarque que la variance de  $\hat{\beta}_1$  est alors la plus faible.

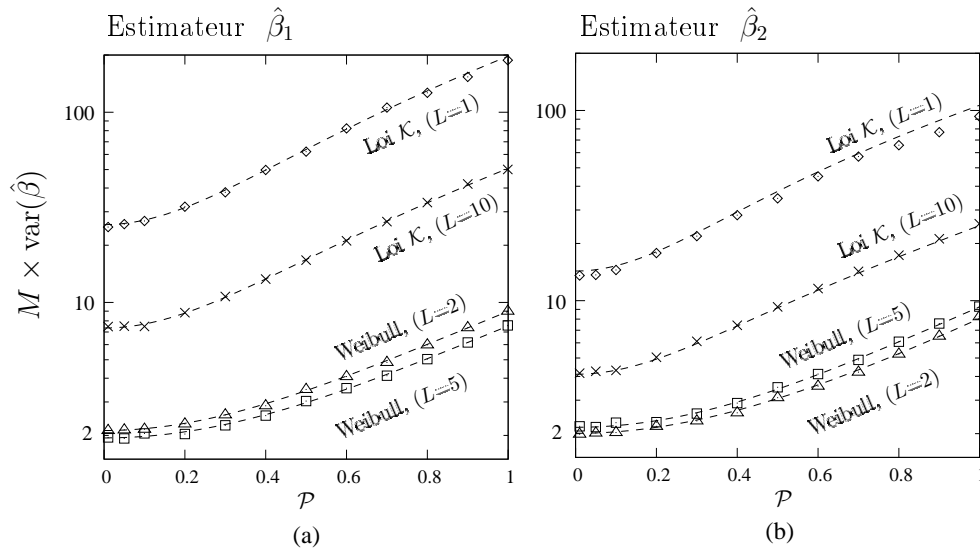


FIG. 2.6 – Évolution de la variance des estimateurs  $\hat{\beta}_1$  (a) et  $\hat{\beta}_2$  (b) en fonction de  $\mathcal{P}$  pour différents modèles de speckle non pleinement développé. Les symboles représentent les résultats obtenus par simulation Monte-Carlo tandis que les traits tiretés (---) désignent les variances théoriques.

Lorsque le modèle de fluctuations de speckle est décrit par une loi  $\mathcal{K}$  (voir équation (1.27)) de moyenne unitaire et de paramètres  $L = 1$  et  $\nu = 1$  (que l'on dénommera plus synthétiquement loi  $\mathcal{K}$  d'ordre 1), on peut voir sur la figure 2.6 que la performance d'estimation est significativement dégradée par rapport aux cas étudiés précédemment. Cette dégradation s'explique par le très fort *kurtosis* ( $\gamma_2 = 47,3$ ) qui caractérise cette loi. On remarque aussi que  $\hat{\beta}_2$  conduit à une meilleure précision d'estimation que l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  à moyenne connue, ce qui reste vrai si l'on considère une loi  $\mathcal{K}$  d'ordre 10 (c'est-à-dire  $L = 10$  et  $\nu = 1$  dans l'équation (1.27)). On retrouve par ailleurs, pour une loi  $\mathcal{K}$  d'ordre 10, des niveaux de variances plus faibles et comparables aux résultats précédents grâce à la présence d'un *kurtosis* moins important ( $\gamma_2 = 10,68$ ). Ainsi la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  varie approximativement entre  $4/M$  ( $\mathcal{P} \simeq 0$ ) et  $25/M$  ( $\mathcal{P} \simeq 1$ ) et il faut donc considérer un échantillon d'au moins  $50 \times 50$  pixels pour estimer n'importe quelle valeur de  $\beta$  avec une variance inférieure à  $10^{-2}$ .

Ces simulations montrent donc que la méthode d'estimation de  $\beta$  au sens des moments reste applicable lorsque le modèle de fluctuation de speckle est légèrement modifié, à condition de connaître (ou de mesurer précisément) le cumulants réduits  $\kappa_2$  caractéristique du modèle de speckle. Ce résultat est important pour le développement de systèmes d'imagerie réels utilisant cette méthode à une seule image car la nature du matériau ou la conception du système imageur peuvent induire des modifications dans la loi statistique de l'intensité lumineuse mesurée, qui risque en pratique de ne pas suivre rigoureusement le modèle sélectionné.

Dans une telle situation, il suffira alors de mesurer avec précision la valeur du cumulatif  $\kappa_2$  obtenu en conditions réelles et utiliser cette valeur dans les expressions des estimateurs du degré de polarisation.

### 2.3.1.3 Conclusion sur l'estimation au sens des moments :

Les estimateurs au sens des moments qui viennent d'être présentés permettent de valider le principe général de l'estimation du degré de polarisation (ou du moins de son carré) à partir d'une unique image de speckle. Ces estimateurs se distinguent par leur simplicité car ils nécessitent uniquement d'évaluer localement la moyenne et la variance sur l'image acquise. Cette méthode d'estimation de  $\beta$ , que nous avons caractérisée théoriquement afin de dimensionner de possibles applications pratiques, réduit fortement la complexité du système de mesure et de traitement par rapport aux systèmes pour lesquels on doit effectuer plusieurs mesures, et présente une grande souplesse d'utilisation.

En revanche, elle souffre de deux inconvénients principaux. Le premier, d'ordre pratique, provient de la nécessité de connaître<sup>26</sup> le coefficient  $\kappa_2$ , qui représente la variance réduite de la loi de probabilité normalisée  $f$  caractéristique du modèle de speckle. En effet, une erreur sur la valeur de ce coefficient biaisera inévitablement les valeurs estimées du degré de polarisation. Pour une mise en œuvre pratique de cette technique d'estimation, il sera donc nécessaire d'établir un protocole de calibration adapté, qui permette de mesurer avec précision la valeur de ce paramètre. Une seconde limite de cette technique est qu'elle n'est pas efficace pour des speckles d'ordres faibles et ne permet donc pas de tirer pleinement parti de l'information contenue dans les observations pour estimer  $\beta$  avec la meilleure précision. Pour cette raison, nous proposons d'étudier, dans la section suivante, deux méthodes d'estimation plus sophistiquées mais qui permettent d'obtenir une meilleure efficacité pour des statistiques de speckle d'ordre peu élevé.

## 2.3.2 Autres estimateurs $\beta$ en speckle pleinement développé d'ordre 1

Nous présentons dans cette section deux méthodes d'estimation alternatives aux estimateurs des moments étudiés précédemment lorsque l'ordre du speckle est minimal  $L = 1$ . Bien qu'il soit tout à fait envisageable de généraliser ces deux nouvelles méthodes d'estimation à d'autres statistiques de speckle, nous nous limiterons ici au cas standard du speckle pleinement développé d'ordre 1 qui correspond, comme nous l'avons vu précédemment, à la situation la plus favorable lorsqu'on cherche à estimer le degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité de speckle.

### 2.3.2.1 Estimation au sens du maximum de vraisemblance

**Principe de l'estimation :** La première solution envisagée consiste à implémenter l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance, noté  $\hat{\beta}_{MV}$ . En effet, cette méthode d'estimation possède des propriétés d'optimalité intéressantes lorsque les densités de probabilité décrivant les fluctuations des mesures

---

<sup>26</sup> – Ou de mesurer avec précision à travers une étape de calibration.

appartiennent à la famille exponentielle. Même si cela n'est pas le cas de la DDP  $P_I(I)$ , il peut être intéressant malgré tout de considérer cet estimateur, qui demeure néanmoins asymptotiquement efficace<sup>27</sup>, à condition qu'il soit non biaisé.

L'estimateur de  $\beta$  au sens du maximum de vraisemblance correspond à la valeur  $\hat{\beta}_{MV}$  qui maximise la logvraisemblance  $\ell(\chi; \mathcal{P}) = \ln L(\chi; \mathcal{P})$ , où la vraisemblance  $L(\chi; \mathcal{P})$  a été définie en équation (2.14). Cependant, même dans le cas le plus simple où le speckle est pleinement développé d'ordre 1, l'expression de la DDP de l'intensité  $P_I(I)$  rend nécessaire une implantation numérique de cet estimateur par une résolution itérative de l'équation de maximisation de la vraisemblance. Lorsque le critère à maximiser est monotone, on peut se contenter d'un simple algorithme de dichotomie, voire une méthode de type **Newton-Raphson** pour améliorer la rapidité de convergence [9]. Pour des critères plus complexes, par exemple si la logvraisemblance présente des maxima locaux, il est alors nécessaire de raffiner la méthode de résolution en faisant appel à des techniques d'optimisation numérique plus sophistiquées (descente de gradient stochastique, recuit simulé, etc.) que nous ne présenterons pas ici.

Nous avons vérifié numériquement que, pour un échantillon de mesure  $\chi$  donné, la fonction  $\partial\ell(\chi; \mathcal{P})/\partial\mathcal{P}$  ne s'annule qu'une seule fois pour une valeur de  $\mathcal{P} \in ]0; 1]$  notée  $\hat{\mathcal{P}}_{MV}$  qui fournit ainsi l'estimée de  $\mathcal{P}$  au sens du maximum de vraisemblance [119]. À partir de cette valeur, qui sera donc simplement évaluée par dichotomie ou grâce à la méthode de Newton-Raphson, nous proposons de déduire une estimation du carré du degré de polarisation en calculant  $\hat{\beta}_{MV} \triangleq \hat{\mathcal{P}}_{MV}^2$ , ceci afin de simplifier les comparaisons réalisées entre les différentes méthodes d'estimation dans la suite de ce chapitre.

On peut noter par ailleurs que la dérivée de la logvraisemblance est une fonction de  $\mu_I$ . Il est donc nécessaire de connaître la valeur de l'intensité moyenne  $\mu_I$  *a priori* pour implanter l'estimateur de  $\beta$  au sens du maximum de vraisemblance. En vue d'une implémentation pratique d'une telle méthode d'estimation, nous avons également considéré l'estimateur noté  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  pour lequel la valeur de  $\mu_I$  est estimée préalablement grâce à l'estimateur empirique<sup>28</sup>  $\hat{\mu}_I = \sum_{k=1}^M I_k/M$ .

**Biais à taille d'échantillon élevée :** Nous étudions dans un premier temps les performances de ces estimateurs pour une taille d'échantillon élevée  $M = 10^4$ , qui pourrait correspondre à une région statistiquement homogène de 100 pixels de côté. Dans ce cas, on peut remarquer sur la figure 2.7 que l'estimateur de  $\beta$  au sens du maximum de vraisemblance à moyenne connue (symboles  $\blacktriangle$ ) ou inconnue (symboles  $\circ$ ) est quasiment sans biais pour des valeurs de  $\mathcal{P}$  supérieures à 0,2 environ. En revanche, contrairement à l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  (symboles  $\square$ ) et malgré la taille d'échantillon importante, on remarque une remontée significative du biais de  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  et  $\hat{\beta}_{MV}$  pour les plus faibles valeurs de  $\mathcal{P}$  [119]. La présence de ce biais peut s'expliquer simplement en remarquant que pour estimer **sans biais** une valeur de  $\beta$  proche de 0, une (au moins) des deux conditions suivantes doit être

<sup>27</sup> – C'est-à-dire pour une taille d'échantillon  $M \rightarrow \infty$ .

<sup>28</sup> – Notons qu'en toute rigueur, lorsque plusieurs paramètres doivent être estimés conjointement, la théorie de l'estimation au sens du maximum de vraisemblance exige une optimisation itérative multidimensionnelle de l'équation de vraisemblance. Pour une implantation pratique, nous allons voir que notre approche simplifiée conduit à des résultats satisfaisants tout en garantissant une faible complexité algorithmique.



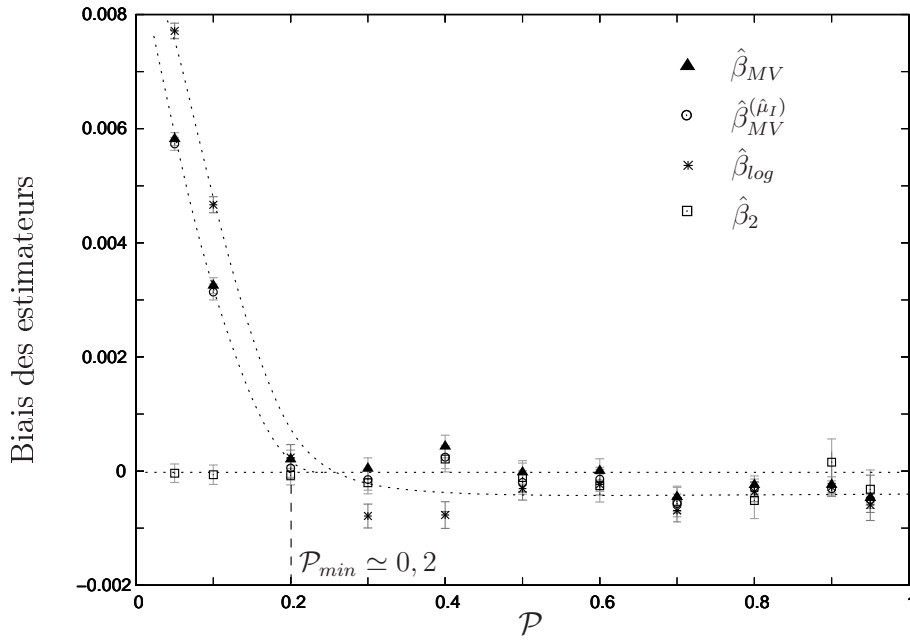


FIG. 2.7 – Biais des estimateurs  $\hat{\beta}_2$ ,  $\hat{\beta}_{MV}$ ,  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  et  $\hat{\beta}_{log}$  tracé en fonction de  $\mathcal{P}$  pour une taille d'échantillon élevée  $M = 10^4$  pixels. (Les courbes pointillées constituent une simple indication visuelle de l'évolution du biais.)

respectée :

- si l'estimateur possède une **variance non nulle**, alors les valeurs estimées doivent se répartir de façon symétrique autour de la valeur  $\beta = 0$  entre les valeurs positives et les valeurs négatives ;
- si les valeurs estimées sont toutes positives, la variance doit nécessairement s'annuler pour  $\beta = 0$  et par conséquent **la BCR doit tendre vers zéro** également.

La première condition est vérifiée par l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  au sens des moments : il est (asymptotiquement) non biaisé car sa mise en œuvre n'interdit pas l'apparition de valeurs estimées négatives et sa variance est non nulle pour  $\beta = 0$ . En revanche, puisque la BCR est **non nulle** pour  $\beta = 0$ , la variance de tout estimateur non biaisé de  $\beta \simeq 0$  sera également non nulle : **il n'existe donc pas d'estimateur non biaisé de  $\beta$  de variance nulle lorsque  $\beta = 0$** . Ainsi, puisque la méthode d'estimation au sens du maximum de vraisemblance présentée ici ne permet pas d'obtenir des valeurs estimées négatives, elle conduit nécessairement à des estimateurs biaisés en deçà d'une valeur seuil minimale qui dépend de la taille  $M$  de l'échantillon et de l'écart-type de l'estimation.

Nous proposons de fixer une valeur indicative de ce seuil en déterminant la valeur  $\beta_{min}$  au delà de laquelle l'influence des échantillons négatifs peut être négligée en pratique. Supposons pour cela que les valeurs estimées de  $\beta \simeq 0$  sont réparties selon une distribution gaussienne de moyenne  $\beta_{min}$  et d'écart-type indicatif  $\sigma_{ind} = \sqrt{BCR(\beta \simeq 0)} \simeq \sqrt{3/M}$  pour les faibles valeurs de  $\beta$  (voir figure 2.8). Dans ces conditions, la proportion d'échantillons négatifs obtenus en

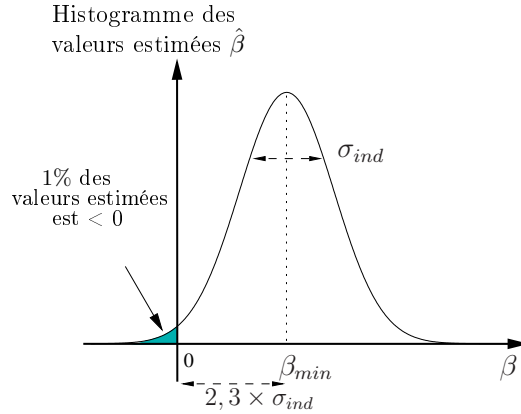


FIG. 2.8 – Le seuil indicatif  $\beta_{min}$  est fixé de sorte que 1% des échantillons estimés sont négatifs quand on suppose que ceux-ci sont distribués selon une loi gaussienne d'écart-type indicatif  $\sigma_{ind}$ .

moyenne sera limitée à 1% à condition que  $\beta_{min}$  soit au moins égal à<sup>29</sup>

$$\beta_{min} \simeq 2,3 \times \sigma_{ind} \simeq \frac{4}{M^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.42)$$

De manière équivalente, le seuil indicatif  $\mathcal{P}_{min}$  pour le degré de polarisation peut s'écrire  $\mathcal{P}_{min} = \sqrt{\beta_{min}} \simeq 2/M^{\frac{1}{4}}$ . Pour une taille d'échantillon élevée de  $M = 10^4$  pixels, l'équation précédente fournit une valeur du seuil  $\beta_{min} \simeq 0,04$ , ce qui correspond à un valeur de  $\mathcal{P}_{min} \simeq 0,2$ . On peut en effet vérifier sur la figure 2.7 que l'on passe d'un comportement quasiment non biaisé de l'estimateur  $\hat{\beta}_{MV}$  pour  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{min}$  à un comportement biaisé pour  $\mathcal{P} < \mathcal{P}_{min}$ .

**Variance à taille d'échantillon élevée :** En ce qui concerne la précision de l'estimation au sens du maximum de vraisemblance, on peut observer sur la figure 2.9 que les estimateurs  $\hat{\beta}_{MV}$  et  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  sont bien plus performants que la méthode d'estimation au sens des moments statistiques de l'intensité pour toute valeur de  $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{min}$ . On remarque également que pour un nombre d'échantillons  $M$  élevé comme ici, on obtient une variance quasiment identique, que l'intensité moyenne soit connue *a priori* (symboles  $\blacktriangle$ ) ou bien qu'elle soit estimée empiriquement sur la région de  $M$  pixels (symboles  $\circ$ , superposés aux symboles  $\blacktriangle$ ). Par ailleurs, on peut conclure en analysant cette figure que l'estimateur de  $\beta$  au sens du maximum de vraisemblance pour un speckle pleinement développé d'ordre 1 est quasiment efficace pour un nombre d'échantillon élevé  $M = 10^4$  (voir aussi [119]).

Pour des valeurs de  $\mathcal{P}$  inférieures à  $\mathcal{P}_{min} = 0,2$ , la variance de  $\hat{\beta}_{MV}$  (ou de  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$ ) atteint des valeurs inférieures à la BCR qui correspond à la variance minimale d'une technique d'estimation non biaisée. Comme nous l'avons analysé précédemment, ce comportement s'explique par la présence d'un biais systématique pour les estimateurs  $\hat{\beta}_{MV}$  et  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  pour  $\mathcal{P} < \mathcal{P}_{min}$  [119].

<sup>29</sup> – On peut montrer en effet que si  $P_\beta(\beta)$  est une loi gaussienne de moyenne  $\beta_{min}$  et écart-type  $\sigma_{ind}$ , alors on a  $\int_{-\infty}^y P_\beta(\beta) \simeq 0,01$  si  $y = \beta_{min} - 2,3\sigma_{ind}$ .

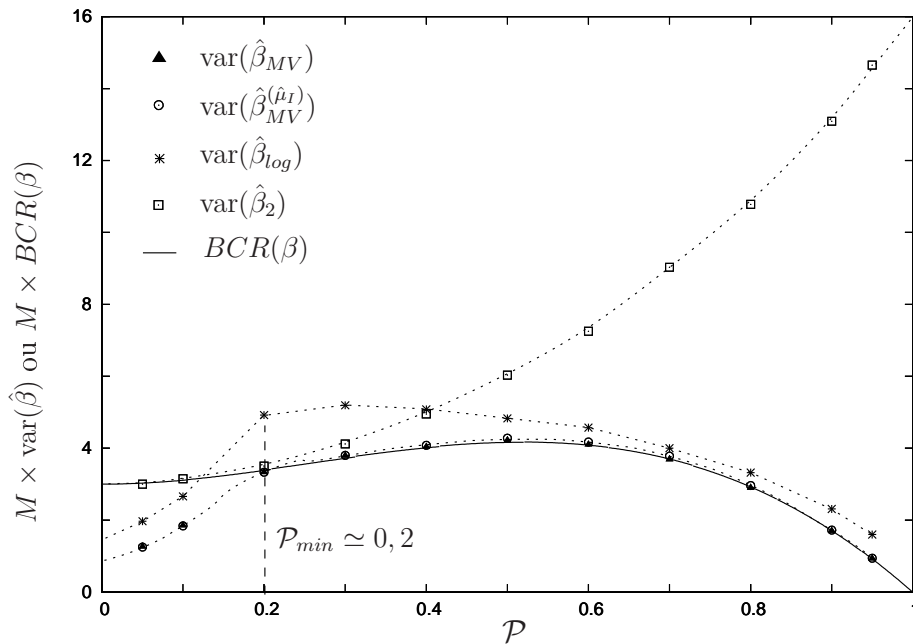


FIG. 2.9 – Comparaison entre la BCR évaluée pour un speckle pleinement développé d'ordre 1 et les variances des estimateurs  $\hat{\beta}_2$  (symboles  $\square$ ),  $\hat{\beta}_{MV}$  (symboles  $\blacktriangle$ ),  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  (symboles  $\circ$ ) et  $\hat{\beta}_{log}$  (symboles  $*$ ) en fonction de  $\mathcal{P}$  pour une taille d'échantillon élevée  $M = 10^4$  pixels. Les points obtenus pour les estimateurs  $\hat{\beta}_{MV}$  ( $\blacktriangle$ ) et  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  ( $\circ$ ) sont quasiment superposés. (Les lignes pointillées constituent une simple indication visuelle de l'évolution de la variance.)

**Étude à taille d'échantillon réduite :** Nous analysons maintenant les performances des estimateurs au sens du maximum de vraisemblance lorsque la taille de l'échantillon de mesure diminue. À partir des résultats de simulations numériques réalisées pour deux tailles d'échantillon plus petites ( $M=10 \times 10=100$  pixels et  $M=32 \times 32=1024$  pixels), nous avons représenté le biais (figures 2.10.a et 2.10.c) et la variance (figures 2.10.b et 2.10.d) des estimateurs  $\hat{\beta}_{MV}$  et  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  en fonction de  $\beta$ .

En ce qui concerne le biais de ces deux estimateurs, on peut remarquer que la valeur de  $\beta_{min}$  augmente à mesure que la taille de l'échantillon diminue, conformément à l'équation (2.42). Ainsi, pour un échantillon de 100 pixels, ces estimateurs ne permettent pas d'évaluer correctement des valeurs de  $\beta < \beta_{min} \simeq 0,4$ .

Sur les figures 2.10.b et 2.10.d, on peut à nouveau observer une brutale diminution de la variance pour des valeurs de  $\beta < \beta_{min}$ , due comme précédemment à la présence d'un biais systématique. Pour les valeurs de  $\beta > \beta_{min}$ , on remarque que l'efficacité de  $\hat{\beta}_{MV}$  et  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  a tendance à décroître pour des valeurs plus faibles du nombre d'échantillons  $M$  puisque la variance de ces estimateurs (symboles  $\blacktriangle$  et  $\circ$ ) devient supérieure à la BCR (tracée en trait continu (—)). On notera aussi qu'à taille d'échantillon réduite, l'estimation empirique de  $\mu_I$  nécessaire pour déterminer  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  provoque une légère augmentation de la variance par rapport à l'estimateur  $\hat{\beta}_{MV}$  pour lequel la moyenne est connue.

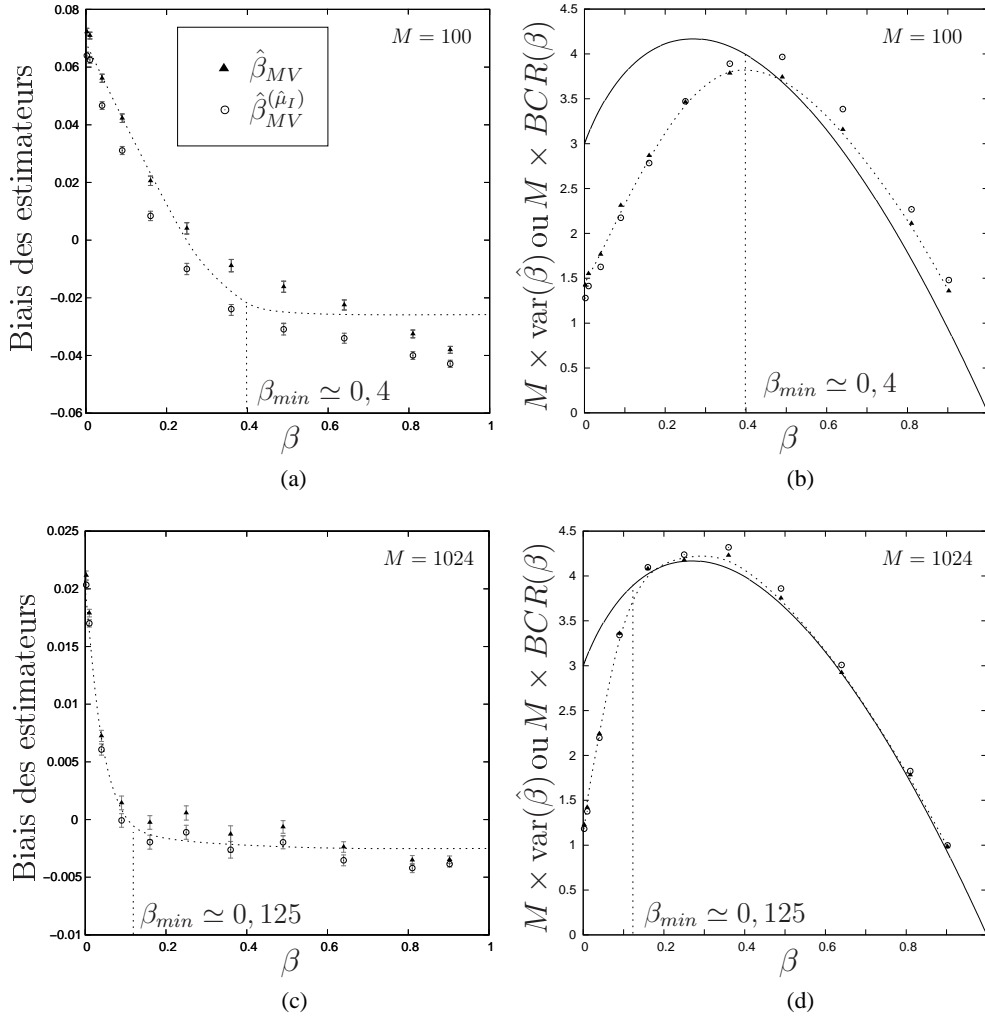


FIG. 2.10 – Figures (a) et (c) : Biais de  $\hat{\beta}_{MV}$  (symboles  $\blacktriangle$ ) et  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  (symboles  $\circ$ ) en fonction de  $\beta$  pour (a) :  $M=100$  et (c) :  $M=1024$ . Figures (b) et (d) : Variance de  $\hat{\beta}_{MV}$  et  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  et  $BCR^{(1)}(\beta)$  (trait plein (—)) en fonction de  $\beta$  pour  $M=100$  (b) et  $M=1024$  (d). (Les courbes pointillées sont une simple indication visuelle de l'évolution du biais et de la variance des estimateurs.)

**Conclusion :** Dans le cas particulier que nous avons considéré d'un speckle pleinement développé d'ordre 1, la mise en œuvre (numérique) d'un estimateur au sens du maximum de vraisemblance sur une taille d'échantillon homogène  $M$  importante ( $M \geq 10^3$  environ) constitue donc une méthode efficace pour réaliser l'estimation de  $\beta$  (ou de  $\mathcal{P}$ ) et permet ainsi de surpasser les performances de l'estimateur au sens des moments, en particulier pour les valeurs élevées du degré de polarisation. Cette méthode d'estimation parvient ainsi à tirer parti de la totalité de l'information disponible dans la statistique d'intensité lumineuse pour estimer  $\beta$ , tant que  $\beta > \beta_{min}$  pour éviter la présence d'un biais.

L'inconvénient majeur de cette technique d'estimation réside bien sûr dans la complexité de sa mise en œuvre, comparativement à la simplicité de l'estimateur au sens des moments. Pour améliorer l'efficacité de cette méthode à taille d'échantillon réduite, il est en outre préférable de connaître l'intensité moyenne

$\mu_I$  *a priori*. Enfin, par rapport aux estimateurs au sens des moments étudiés précédemment, cette technique est moins facilement généralisable à d'autres statistiques de speckle. En effet, s'il suffisait de caractériser correctement la valeur du coefficient  $\kappa_2$  pour pouvoir appliquer les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sur un modèle de speckle différent (dans les limites toutefois des hypothèses énoncées en section 2.1.1), le changement de la loi de probabilité  $P_I(I)$  associée à l'intensité nécessitera de recalculer complètement la forme de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance.

Pour un speckle d'ordre 1, nous disposons donc d'une méthode d'estimation simple mais peu efficace (estimateurs au sens des moments) d'une part, et d'autre part d'une méthode efficace mais de mise en œuvre complexe ( $\hat{\beta}_{MV}$  ou  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$ ). Nous présentons donc ici le résultat de nos investigations pour proposer une technique d'estimation alternative réalisant un compromis satisfaisant entre optimalité et simplicité de mise en œuvre.

### 2.3.2.2 Estimation au sens des log-moments

Parmi les diverses solutions envisagées, nous avons été amenés à tester des méthodes d'estimation fondées sur la mesure de moments fractionnaires de la loi de probabilité ( $\langle I^y \rangle, y \in \mathbb{R}^*$ ), ou encore basés sur les valeurs des premiers quantiles<sup>30</sup> (médiane, premier quartile ou encore premier décile), cette dernière solution étant justifiée par la forme de la loi de probabilité  $P_I(I)$  qui se concentre autour des plus faibles valeurs d'intensité lorsque  $\mathcal{P}$  est proche de 1. Ces solutions ne conduisant pas à des résultats satisfaisants en terme de précision, nous nous focaliserons ici sur une autre solution envisagée qui utilise quant à elle la mesure des **log-moments** de l'intensité lumineuse, dont nous rappelons la définition ci-dessous [104] :

**Définition 2.3** *Le log-moment d'ordre  $k$  de la loi  $P_X(x)$  associée à une variable aléatoire  $X$  à valeurs positives est noté  $\tilde{m}_k^X$  et est défini par*

$$\tilde{m}_k^X \triangleq \int_0^{+\infty} (\ln x)^k P_X(x) dx. \quad (2.43)$$

**Motivations :** En utilisant une grandeur statistique qui met en jeu le logarithme des données, on peut espérer faire « ressortir » plus finement le comportement statistique des valeurs les plus faibles de l'intensité et ainsi de mieux appréhender les modifications de la loi  $P_I(I)$ , qui se concentre fortement autour des valeurs d'intensité les plus faibles lorsque  $\mathcal{P}$  tend vers 1. À cet argument intuitif qui constituait notre motivation principale pour considérer les log-moments, on peut ajouter également le fait que l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de l'ordre  $L$  d'une loi gamma fait intervenir de façon explicite le **premier log-moment** de la loi statistique [104]. Cette remarque laisse par conséquent présager que le log-moment est une grandeur intéressante à considérer lorsque l'on souhaite estimer un paramètre de forme d'une loi de probabilité<sup>31</sup>.

<sup>30</sup> – Le premier  $q$ -quantile ( $q \in \mathbb{N}$ ) est défini comme la valeur d'intensité  $I_q$  telle qu'une proportion  $1/q$  des réalisations de la variable aléatoire  $I$  seront inférieures à  $I_q$ . Plus formellement, le premier  $q$ -quantile  $I_q$  est défini par la relation  $Pr(I < I_q) = 1/q$ .

<sup>31</sup> – Tel que l'ordre d'une loi gamma ou le contraste de la loi  $P_I(I)$ .

**Principe de l'estimation :** Pour calculer le premier log-moment associé à la statistique d'intensité  $P_I(I)$ , on peut utiliser le résultat suivant [104] qui fournit l'expression du premier log-moment associé à une variable aléatoire  $X$ , distribuée selon une loi exponentielle de moyenne  $\mu_X$  :

$$\tilde{m}_1^X = \int_0^{+\infty} \ln x P_X(x) dx = \Psi(1) + \ln(\mu_X), \quad (2.44)$$

où  $\Psi$  représente la fonction **digamma**, dont la valeur évaluée en 1 vaut approximativement  $\Psi(1) \simeq -0,5772$  (voir la référence [60], page 892). En effet, puisque la DDP  $P_I(I)$  donnée à l'équation (1.19) peut s'écrire comme la différence pondérée de deux lois exponentielles associées aux composantes d'intensité  $I_1$  et  $I_2$ , la valeur du log-moment de l'intensité  $\tilde{m}_1^I$  peut se déduire des log-moments  $\tilde{m}_1^{I_1}$  et  $\tilde{m}_1^{I_2}$  en écrivant

$$\tilde{m}_1^I = \int_0^{+\infty} \ln(I) P_I(I) dI = \frac{1}{2\mathcal{P}} \left\{ (1 + \mathcal{P}) \tilde{m}_1^{I_1} - (1 - \mathcal{P}) \tilde{m}_1^{I_2} \right\}, \quad (2.45)$$

soit, en remplaçant  $\tilde{m}_1^{I_1}$  et  $\tilde{m}_1^{I_2}$  par leur expression déduite de l'équation (2.44),

$$\tilde{m}_1^I = \Psi(1) + \frac{1}{2\mathcal{P}} \ln \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{1}{2} \ln \mu_1 \mu_2. \quad (2.46)$$

On obtient enfin l'expression de  $\tilde{m}_1^I$  en fonction de  $\mu_I$  et  $\mathcal{P}$  en remplaçant  $\mu_1$  et  $\mu_2$  par leurs expressions respectives données en équation (1.7),

$$\tilde{m}_1^I = \Psi(1) + \ln \frac{\mu_I}{2} + \frac{1 + \mathcal{P}}{2\mathcal{P}} \ln(1 + \mathcal{P}) - \frac{1 - \mathcal{P}}{2\mathcal{P}} \ln(1 - \mathcal{P}). \quad (2.47)$$

L'expression précédente montre qu'en connaissant le premier moment ( $\mu_I$ ) de l'intensité ainsi que son premier log-moment ( $\tilde{m}_1^I$ ), on peut déduire la valeur du degré de polarisation de la lumière rétrodiffusée. En effet, en estimant empiriquement ces deux grandeurs sur un échantillon homogène de taille  $M$  au moyen de l'estimateur empirique  $\hat{\mu}_I$  et de l'estimateur empirique suivant

$$\hat{\tilde{m}}_1^I = \sum_{k=1}^M \frac{\ln I_k}{M}, \quad (2.48)$$

il suffit alors de résoudre en  $\mathcal{P}$  l'équation suivante

$$H(\mathcal{P}) \triangleq \frac{1 + \mathcal{P}}{2\mathcal{P}} \ln(1 + \mathcal{P}) - \frac{1 - \mathcal{P}}{2\mathcal{P}} \ln(1 - \mathcal{P}) = \hat{\tilde{m}}_1^I - \ln \frac{\hat{\mu}_I}{2} - \Psi(1). \quad (2.49)$$

Il n'est malheureusement pas possible d'écrire la solution explicite de cette équation, et il est nécessaire à nouveau d'utiliser une résolution numérique pour déterminer l'estimateur au sens du log-moment, noté  $\hat{\mathcal{P}}_{log}$  (ou  $\hat{\beta}_{log}$  pour l'estimation de  $\mathcal{P}^2$ ). Cependant, cette résolution peut être facilitée comparativement à la détermination itérative des estimateurs au sens du maximum de vraisemblance en remarquant que la fonction  $H(\mathcal{P})$  introduite à l'équation précédente est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; 1]$  et est indépendante de  $\hat{\tilde{m}}_1^I$  et  $\hat{\mu}_I$ . Il est donc possible de tabuler les valeurs de  $H(\mathcal{P})$ , et d'utiliser cette tabulation pour

déterminer facilement et rapidement la valeur de l'estimateur  $\hat{\mathcal{P}}_{log}$ .

**Biais à taille d'échantillon élevée :** Sur la figure 2.7, nous avons reporté le biais de ce nouvel estimateur  $\hat{\beta}_{log}$  au sens du log-moment (symboles  $*$ ) pour une taille élevée  $M = 10^4$  de l'échantillon. De façon tout à fait similaire au cas de l'estimation au sens du maximum de vraisemblance, cet estimateur est quasiment non biaisé pour des valeurs du degré de polarisation supérieures à  $\mathcal{P}_{min} \simeq 0,2$ . À nouveau ici, dès que le degré de polarisation est inférieur à  $\mathcal{P}_{min}$ , l'estimation devient sensiblement biaisée ce qui s'explique en remarquant que cet estimateur ne permet pas non plus d'estimer des valeurs de  $\mathcal{P}$  négatives.

**Variance à taille d'échantillon élevée :** Nous pouvons analyser sur la figure 2.9 la précision d'estimation de  $\hat{\beta}_{log}$ . La variance de ce dernier estimateur est représentée par les symboles  $*$  et peut être comparée à la BCR (courbe en trait continu). Cette figure permet ainsi de se rendre compte que la solution proposée ici n'est que partiellement satisfaisante : l'estimateur au sens du log-moment permet d'obtenir une précision meilleure que l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  pour les plus grandes valeurs de  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{P} > 0,4$ ), et s'avère dans ces conditions assez efficace (efficacité de l'ordre de 70% pour  $\mathcal{P} \in [0,6; 0,95]$ ). En revanche, pour des valeurs faibles du degré de polarisation (typiquement  $\mathcal{P} < 0,4$ ), cet estimateur s'avère être moins précis que l'estimateur au sens des moments. On remarquera également que la variance de  $\hat{\beta}_{log}$  décroît brutalement dès que le biais devient significatif (pour  $\mathcal{P} < \mathcal{P}_{min} = 0,2$  approximativement).

**Conclusion :** La méthode d'estimation au sens des log-moments, introduite afin de concilier efficacité et simplicité de mise en œuvre, ne répond malheureusement que partiellement aux deux objectifs visés : si la quantité et la complexité des calculs mis en œuvre sont réduites par rapport à l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance, on ne dispose pas d'une formulation explicite simple de l'estimateur, comme cela était le cas pour les estimateurs au sens des moments. Par ailleurs, cette technique permet d'obtenir une estimation quasiment efficace pour les plus fortes valeurs du degré de polarisation, mais elle s'avère moins performante que l'estimateur plus simple  $\hat{\beta}_2$  pour les degrés de polarisation les plus faibles. Dans la perspective d'un développement pratique d'une méthode d'estimation assurant un compromis intéressant, on peut envisager un estimateur **hybride**, qui pourrait concilier les avantages de ces deux méthodes en sélectionnant la méthode la plus appropriée, en terme de précision, selon la valeur estimée du degré de polarisation.

### 2.3.3 Discussion sur le biais des méthodes proposées

Pour présenter les différents estimateurs étudiés, nous nous sommes focalisés sur l'analyse des performances d'estimateurs du carré du degré de polarisation  $\beta$ . Parmi les trois méthodes d'estimation distinctes de  $\beta$  que nous avons présentées, deux d'entre elles (estimateur au sens du maximum de vraisemblance et estimateur au sens du premier log-moment) conduisent à une estimation biaisée pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à un seuil  $\beta_{min}$  qui dépend directement de la taille  $M$  de l'échantillon et caractérisé à l'équation (2.42). Cependant, on ne doit pas

pour autant en conclure que l'estimation au sens des moments, apparemment non biaisée, est plus satisfaisante pour les faibles valeurs de  $\beta$ . En effet, nous avons vu que pour assurer une estimation non biaisée lorsque  $\beta$  tend vers 0, il est nécessaire que l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  conduise à des estimées de  $\beta$  négatives, puisque la BCR (et donc *a fortiori* la variance) de l'estimation de  $\beta$  est non nulle lorsque  $\beta \simeq 0$ . Le sens physique d'une valeur de  $\beta$  négative est bien sûr discutable, et lorsque nous voulons estimer une valeur de  $\mathcal{P}$  et non plus de son carré, il est par conséquent nécessaire de fixer à zéro toutes les occurrences de  $\hat{\beta}_2$  négatives avant d'en déduire une valeur estimée de  $\mathcal{P}$  en calculant  $\hat{\mathcal{P}}_2 = (\hat{\beta}_2)^{1/2}$  [40].

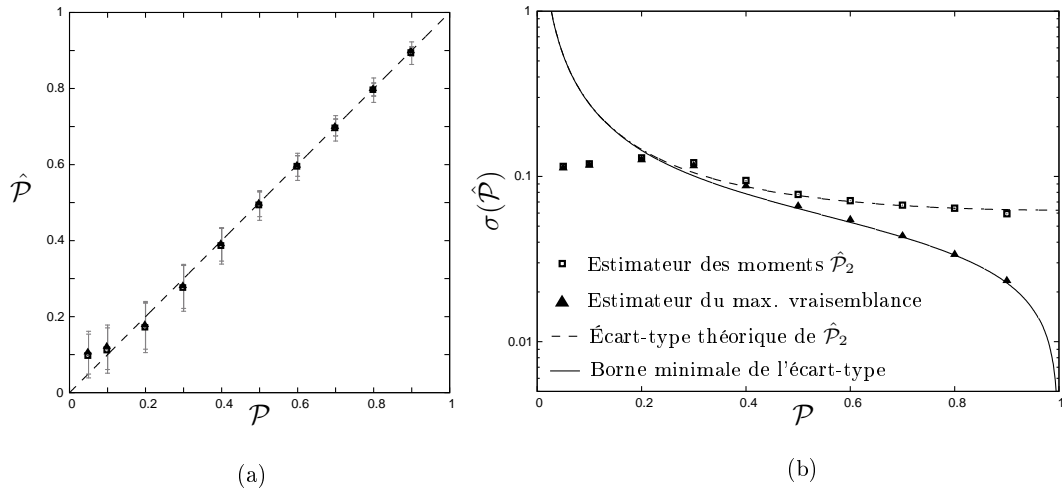


FIG. 2.11 – (a) Valeurs estimées de  $\mathcal{P}$  avec l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  au sens des moments (symboles  $\square$ ) ou au sens du maximum de vraisemblance (symboles  $\blacktriangle$ , superposés sur la figure aux symboles  $\square$ ) en fonction de la vraie valeur du degré de polarisation pour une taille d'échantillon  $M = 1024$  pixels. L'écart-type  $\sigma(\hat{\mathcal{P}})$  de ces estimations est aussi tracé sous forme de barres d'erreur. L'écart-type est également représenté en figure (b) en fonction de la valeur de  $\mathcal{P}$ . La courbe en trait tireté (---) sur la figure (b) représente l'écart-type théorique de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ . La borne minimale de l'écart-type d'un estimateur non biaisé, déduite de la BCR, est également tracé en trait continu (—) sur la figure (b).

Une fois cette précaution prise, il est intéressant de réitérer la comparaison entre l'estimation simple au sens des moments  $\hat{\mathcal{P}}_2$  et l'estimateur de  $\mathcal{P}$  au sens du maximum de vraisemblance, que nous illustrons grâce aux figures 2.11.a et 2.11.b. Sur la première figure, nous avons représenté les valeurs estimées du degré de polarisation, obtenues à partir de l'estimateur au sens des moments d'une part (symboles  $\square$ ), et l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance d'autre part (symboles  $\blacktriangle$ ) sur un échantillon de taille  $M = 32 \times 32 = 1024$ . Les barres d'erreurs fournissent une indication de l'écart-type d'estimation de chacune de ces méthodes. Cette figure montre ainsi que la technique d'estimation devient nécessairement biaisée dès que l'on fixe à zéro les valeurs estimées de  $\hat{\beta}_2$  négatives. En effet, la « quantité » de biais introduite alors sur l'estimateur  $\hat{\mathcal{P}}_2$  est tout à fait comparable au biais qui entache l'estimation de  $\mathcal{P}$  au sens du maximum de vraisemblance ou au sens du log-moment (voir également [40]).

En terme de précision, la figure 2.11.b représente l'évolution de l'écart-type



des deux techniques d'estimation de  $\mathcal{P}$ , comparées ici lorsque  $\mathcal{P}$  varie. En trait plein (—), nous avons également représenté la précision minimale pour un estimateur non biaisé, déduite de la BCR pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  calculée au début de ce chapitre. En trait tireté (---), on a tracé l'écart-type théorique de l'estimateur de  $\mathcal{P}$  au sens des moments, que l'on peut déduire à partir de la variance théorique de  $\hat{\beta}_2$  fournie à l'équation (2.34) en calculant [40] :

$$\sigma_{th}(\hat{\mathcal{P}}_2) \simeq \sqrt{\frac{\text{var}(\hat{\beta}_2)}{4\beta}}. \quad (2.50)$$

On peut ainsi remarquer que comme pour l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance, l'écart-type de l'estimateur de  $\mathcal{P}$  au sens des moments devient inférieur à la borne minimale lorsque  $\mathcal{P} < \mathcal{P}_{min} \simeq 0,35$  puisque nous considérons ici des échantillons homogènes de taille  $M = 1024$  pixels. En revanche, au delà de cette valeur, les estimateurs sont quasiment sans biais et la figure 2.11.b confirme bien l'efficacité de l'estimateur  $\hat{\mathcal{P}}_{MV}$ .

Ces remarques nous permettent de conclure que l'estimation du degré de polarisation  $\mathcal{P}$  sous contrainte de positivité et à partir d'une unique image d'intensité de speckle ne pourra être effectuée sans biais sur toute le domaine de variation de  $\mathcal{P} \in [0; 1]$ . Pour pallier ce défaut, il est donc nécessaire d'augmenter la taille des échantillons considérés, de sorte que la valeur de  $\mathcal{P}_{min}$  soit la plus petite possible, ce qui illustre à nouveau la nécessité d'utiliser des capteurs comportant un grand nombre de pixels. Par exemple, si l'on souhaite obtenir un biais quasi-nul sur la plage  $\mathcal{P} \in [0, 1; 1]$  (c'est-à-dire  $\mathcal{P}_{min} = 0, 1$ ), il est nécessaire de considérer  $M = 1,6 \times 10^5$  pixels, soit une zone homogène de  $400 \times 400$  pixels, ce qui peut sembler rédhibitoire pour une utilisation pratique de ce type de méthode. Il suffit en revanche de considérer  $M = 1600 = 40 \times 40$  pixels pour obtenir un biais quasi-nul sur l'ensemble des valeurs  $\beta \in [0, 1; 1]$  (c'est-à-dire pour assurer que  $\beta_{min} = 0, 1$ ). Cette remarque illustre donc qu'il est plus facile de s'affranchir du biais d'estimation lorsque l'on considère non pas l'estimation du degré de polarisation, mais plutôt l'estimation de son carré  $\beta$ .

### 2.3.4 Comparaison avec les techniques classiques utilisant plusieurs images

Les différentes techniques d'estimation du degré de polarisation (ou de son carré  $\beta$ ) que nous avons caractérisées dans ce chapitre se distinguent par leur grande simplicité de mise en œuvre expérimentale. En effet, comme nous l'avons souligné en introduction de ce chapitre, l'acquisition d'une unique image permet de s'affranchir de composant optique polarimétrique ajustable au niveau de l'acquisition d'image, garantissant ainsi un dispositif peu coûteux et rapide.

Cependant, cette simplicité va logiquement de pair avec une dégradation de la qualité d'estimation. D'une part, le support d'information est réduit puisque l'on acquiert une seule image quand les autres techniques plus classiques nécessitent d'en mesurer deux ou quatre, et d'autre part l'estimation est réalisée sans l'aide de composant optique polarimétrique ajustable, ce qui semble naturellement devoir limiter la précision de celle-ci. Il paraît donc nécessaire ici d'étudier la perte de précision lorsque l'on simplifie le dispositif de mesure polarimétrique en passant

du montage complet à quatre mesures d'intensité ou d'un appareillage simplifié ne nécessitant que deux images, aux dispositifs les plus simples à une unique image.

Nous proposons donc de comparer les cinq méthodes d'estimation de  $\beta$  suivantes, fondées sur la mesure d'une ou plusieurs images d'intensité :

- la méthode standard basée sur l'acquisition des quatre images de Stokes et dont le principe a été rappelé en section 1.3.2.1 ;
- l'estimation à deux images utilisant l'Image de Contraste d'États Orthogonaux (ICÉO) présentée à la section 1.3.2.2 ;
- une méthode paramétrique dont nous avons évoqué le principe en section 1.3.2.2, fondée sur la mesure des deux premières images de Stokes et utilisant l'intercorrélacion de celles-ci ;
- enfin, la technique d'estimation à une seule image proposée dans ce chapitre de thèse, pour laquelle nous distinguerons l'estimateur au sens des moments  $\hat{\beta}_2$ , et l'estimateur  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  au sens du maximum de vraisemblance.

Nous comparons ces 5 méthodes dans deux situations distinctes : dans le premier cas, on suppose que l'objet imagé est purement dépolarisant, rendant possible l'utilisation de la méthode à deux images basée sur l'ICÉO. Dans ce cas, le champ électrique rétrodiffusé par la scène et mesuré au niveau du capteur est caractérisé par la matrice de polarisation diagonale  $\Gamma_d$  suivante :

$$\Gamma_d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 1 - \mathcal{P} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Dans la seconde situation, nous nous intéressons au cas d'un objet non purement dépolarisant. Plus précisément, nous supposons que l'information polarimétrique est contenue uniquement dans le terme anti-diagonal de  $\Gamma$ , c'est-à-dire

$$\Gamma_{nd} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mathcal{P} \\ \mathcal{P} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

qui représente toujours la matrice de polarisation (non diagonale ici) d'une lumière de degré de polarisation  $\mathcal{P}$ . Ces deux situations ont été simulées numériquement en générant des réalisations aléatoires du champ électrique correspondant à un speckle pleinement développé d'ordre 1 et caractérisé par les matrices de polarisation précédentes. À partir de ces réalisations du champ, nous avons déduit les différentes images d'intensité nécessaires pour mettre en œuvre les méthodes d'estimation comparées dans cette section.

### 2.3.4.1 Résultats de simulation

En supposant que les échantillons de mesure sont statistiquement homogènes et de taille  $M = 10^3$  pixels, on peut alors estimer les valeurs de  $\beta$  grâce aux 5 méthodes comparées ici et vérifier qu'elles sont toutes quasiment non biaisées pour cette taille d'échantillon (voir également la référence [126]), à part bien entendu  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  qui est biaisé pour les faibles valeurs de  $\mathcal{P}$ . Lorsque l'on s'intéresse à la variance d'estimation, représentée sur la figure 2.12 en fonction de la valeur de  $\mathcal{P}$  pour des matrices  $\Gamma$  diagonales (figure 2.12.a) et non diagonales (figure 2.12.b), on remarque de manière générale une nette dégradation de la précision

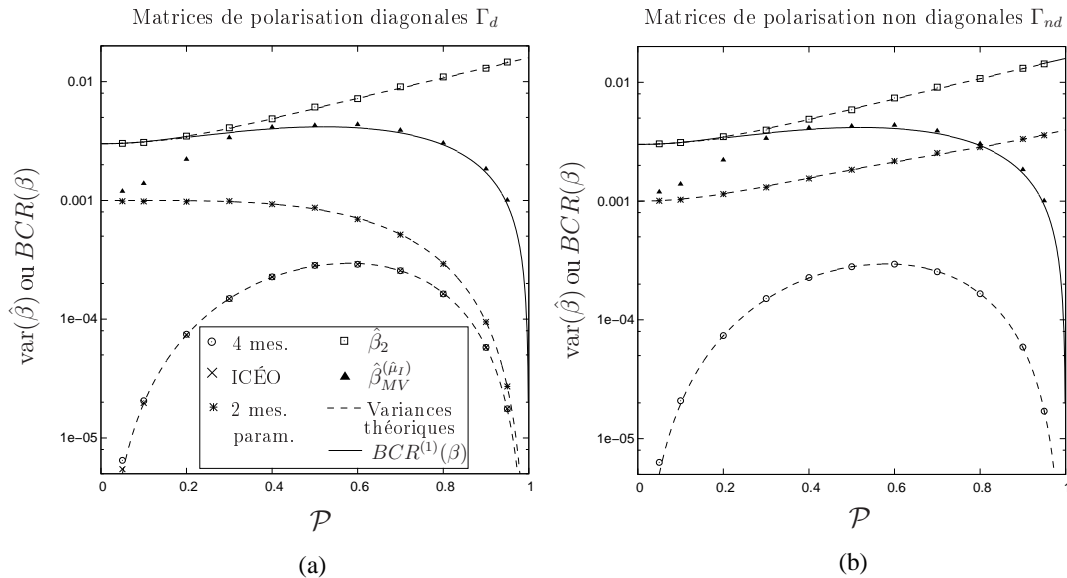


FIG. 2.12 – Comparaison des variances des estimateurs à 4, 2, ou 1 images dans le cas de matrices diagonales  $\Gamma_d$  (a) et non diagonales  $\Gamma_{nd}$  (b) pour  $M = 10^3$  pixels. (L'estimateur ICÉO étant inopérant sur des matrices  $\Gamma$  non diagonales, sa variance n'est pas représentée sur la figure (b)).

au fur et à mesure que l'on diminue le nombre d'images acquises [126] et la meilleure performance est bien entendu obtenue avec l'estimateur classique à 4 images (symboles  $\circ$ ). Poursuivons l'analyse de ces résultats en distinguant les deux cas suivants :

**Lorsque  $\Gamma$  est diagonale ( $\Gamma_d$ ),** on remarque tout d'abord sur la figure 2.12.a que l'ICÉO (symboles  $\times$ ) ne dégrade pas la précision par rapport à la méthode standard à 4 images. En revanche, l'utilisation de la méthode paramétrique à deux images (symboles  $*$ ) conduit à une variance d'estimation bien supérieure lorsque le degré de polarisation est faible. La dégradation de la précision devient encore plus importante si l'on utilise une estimation à une seule image (symboles  $\square$  et  $\blacktriangle$ ), en particulier pour les plus fortes valeurs de  $\mathcal{P}$ . Cette figure illustre par ailleurs l'intérêt d'utiliser préférentiellement l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$  si l'on souhaite limiter la perte en précision subie. En effet, pour  $\mathcal{P} = 0,8$  par exemple, on peut noter que l'écart-type de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  est 6,1 fois supérieur à celui obtenu avec la méthode paramétrique à deux images, mais ce rapport n'est que de 3,2 si l'on utilise l'estimateur  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_I)}$ . Lorsque la comparaison est effectuée avec la méthode standard à quatre images, ces rapports deviennent respectivement 8, 2 et 4, 3.

**Lorsque  $\Gamma$  n'est pas diagonale ( $\Gamma_{nd}$ ),** l'ICÉO ne permet pas d'estimer la valeur du degré de polarisation<sup>32</sup>. On remarque également une augmentation significative de la variance de la méthode paramétrique à deux images<sup>33</sup>. En

<sup>32</sup> – Avec le choix particulier de matrice  $\Gamma_{nd}$  effectué ici, cette méthode conduit en effet à estimer  $\beta = 0$  dans tous les cas.

<sup>33</sup> – Cette augmentation de la variance s'explique aisément par la présence d'un terme supplémentaire dans l'expression théorique de celle-ci (voir équation (1.36) dès que le terme anti-

ce qui concerne les estimateurs de  $\beta$  à une unique image, on ne décèle aucun changement dans leur comportement car leurs propriétés ne dépendent pas de la forme particulière de la matrice  $\Gamma$ . La perte subie en passant de deux à une seule image est dans ce cas bien plus faible : pour  $\mathcal{P} = 0,8$  l'écart-type de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  n'est plus que 1,9 fois supérieur à celui de l'estimateur à deux images. La perte en précision est encore plus faible si l'on utilise l'estimateur  $\hat{\beta}_{MV}^{(\hat{\mu}_1)}$  à une image, qui permet même de surpasser la méthode paramétrique à deux images en terme de précision lorsque  $\mathcal{P} > 0,8$ .

La dégradation des performances due à la réduction du nombre de mesures était bien sûr prévisible et peut sembler importante au vu des résultats précédents. Elle doit cependant être relativisée en remarquant que le support d'estimation n'est pas le même selon que l'on acquiert une seule image de  $M$  pixels ou 4 images de la même taille. Lorsqu'on « renormalise » les résultats précédents par le nombre de mesures réellement effectuées pour réaliser l'estimation (c'est-à-dire  $M$  pixels pour la méthode à une image,  $2M$  pixels pour les méthodes à deux images, etc.), le passage de la méthode standard d'estimation à 4 images au simple estimateur  $\hat{\beta}_2$  à une image n'augmente pas l'écart-type de plus d'un facteur 10 pour la plupart des valeurs du degré de polarisation  $\mathcal{P} \in [0, 1; 0, 9]$ . Pour  $\mathcal{P} \simeq 0,5$  où l'écart de performance entre la méthode complète à 4 images et l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  est la plus faible, la perte en terme d'écart-type ne dépasse pas un facteur 2,3 une fois opérée la renormalisation par le nombre de mesures réellement effectuées. Dans les mêmes conditions, lorsqu'on passe de la méthode paramétrique utilisant 2 images à l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ , l'augmentation de l'écart-type est inférieure à un facteur 2 si l'objet est purement dépolarisant ( $\Gamma_d$ ) et n'excède pas un facteur 1,3 lorsque la matrice de polarisation prend la forme de  $\Gamma_{nd}$  donnée à l'équation (2.52).

### 2.3.4.2 Conclusion

Cette étude comparative, réalisée grâce à des simulations numériques dans le cas d'un speckle pleinement développé d'ordre 1, peut servir à établir des critères qui permettent de sélectionner la méthode d'estimation du degré de polarisation la plus adaptée à une situation physique, ou à un cahier des charges donné. Si une précision importante est requise sur la mesure polarimétrique à effectuer, on devra préférer l'utilisation de la méthode standard fondée sur l'acquisition des 4 images de Stokes, même si cette méthode demeure de loin la plus coûteuse en terme de durée d'acquisition et de matériel (nécessité d'au moins deux composants optiques polarimétriques ajustables). Lorsqu'on souhaite mesurer le seul degré de polarisation avec une précision modérée, les méthodes alternatives évoquées précédemment pourront alors être envisagées avec intérêt puisqu'elles permettent une grande simplification du système d'imagerie. En particulier, les méthodes d'estimation à une image étudiées dans cette thèse permettent de réduire *a minima* les coûts matériels et la durée d'acquisition. Cette simplification des systèmes optiques d'imagerie polarimétrique s'accompagne bien sûr, on l'a vu, d'une perte en précision d'estimation, qui peut néanmoins être compensée (ou tout au moins partiellement compensée) grâce à l'utilisation de détecteurs

---

diagonal  $c$  de la matrice  $\Gamma$  est non nul (Voir également [127, 126]).

comportant un plus grand nombre de pixels. Enfin, ces méthodes d'estimation fondées sur l'acquisition d'une unique image d'intensité de speckle peuvent être utilisées sur un large spectre de longueurs d'onde<sup>34</sup>, ce qui n'est pas le cas des autres méthodes qui nécessitent l'emploi de composants optiques polarimétriques ajustables. En effet, les propriétés de ces composants restent toujours limitées à un certain domaine de longueur d'onde, plus ou moins étendu selon la qualité du composant.

### 2.3.5 Résultats expérimentaux sur des données réelles

Nous présentons dans cette section quelques résultats expérimentaux obtenus à partir d'images de plusieurs objets aux propriétés polarimétriques diverses dont l'acquisition a été réalisée au sein du centre de recherche de *Thales Research and Technology*<sup>35</sup>. Ces résultats préliminaires à une étude expérimentale plus détaillée pour le développement pratique de la méthode permettent de valider expérimentalement le procédé d'estimation de degré de polarisation à partir d'une unique image obtenue sous éclairement cohérent.

**Présentation de l'expérience :** Le dispositif d'imagerie utilisé pour cette validation expérimentale permet d'acquérir des images polarimétriques sous éclairement cohérent réalisé grâce à un laser Helium-Néon (He:Ne) émettant une puissance de 15 mW à une longueur d'onde de  $\lambda = 632$  nm. Ce faisceau d'émission est polarisé dans la direction verticale et mis en forme pour produire un spot d'illumination de 5 cm de diamètre sur la scène imagée, située à une distance de 3 mètres du dispositif d'éclairement/imagerie.

Objet B	1	2	3	4
Matériaux	papier noir	papier blanc	plastique couleur crème	peinture grise
$\beta = \mathcal{P}^2$	0,72	0,04	0,20	0,60
Objet B	5	6	7	8
Matériaux	peinture verte	plaque en aluminium	plaque en aluminium sablée	plastique noir
$\beta = \mathcal{P}^2$	0,98	0,98	0,70	0,91

TAB. 2.2 – Nature des 8 matériaux différents utilisés pour la validation expérimentale de la méthode d'estimation de  $\beta$  à une image. La valeur de  $\beta = \mathcal{P}^2$  indiquée correspond à la valeur estimée avec la méthode standard d'estimation fondée sur les 4 images de Stokes.

Le système d'acquisition se compose d'une caméra Basler A312f 12-bits comportant  $782 \times 582$  pixels. Ce type de caméra a été sélectionné pour son faible niveau de bruit car l'intensité reçue sur la surface sensible du capteur est limitée

<sup>34</sup> – Dans la limite bien entendu où la longueur d'onde doit demeurer inférieure à la hauteur caractéristique des rugosités de la surface imagée pour conserver le caractère circulaire du champ de speckle rétrodiffusé.

<sup>35</sup> – La réalisation du dispositif expérimental et l'acquisition des données ont été effectuées par Mehdi Alouini au sein de *Thales Research and Technology*.

par la faible ouverture utilisée. L'objectif de la camera de 50 mm de focale est en effet muni d'un diaphragme ajustable dont l'ouverture doit être réduite afin d'obtenir des grains de speckle de taille suffisante pour que le capteur échantillonne correctement le motif de speckle obtenu sur la scène polarimétrique, c'est-à-dire qu'un pixel du capteur contient en moyenne un grain de speckle. Dans chacune des configurations expérimentales testées, les trois premières images de Stokes ont été acquises en plaçant devant l'objectif de la caméra un polariseur linéaire orienté respectivement à  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $45^\circ$  par rapport à l'orientation de la polarisation d'émission. La quatrième image de Stokes (image en polarisation circulaire) a été obtenue en rajoutant une lame quart d'onde ( $\lambda/4$ ) dont l'axe rapide est orienté à  $45^\circ$ , devant le polariseur linéaire orienté à  $0^\circ$ . Ces 4 images permettront de déterminer le degré de polarisation (ou  $\beta$ ) avec une bonne précision, et cette mesure fera office de référence pour évaluer la précision de la méthode à une image. Enfin, une dernière image de la scène est acquise en l'absence de composant optique polarimétrique à la réception et sera utilisée pour estimer la valeur de  $\beta$  grâce à l'estimateur au sens des moments  $\hat{\beta}_2$ .

La scène polarimétrique étudiée est constituée de deux objets plans, placés perpendiculairement à la direction incidente du faisceau d'éclairage. Dans les expériences qui suivent, l'un des deux objets considérés sera dans tous les cas une plaque peinte de couleur beige. Celle-ci constituera par la suite l'objet de référence (objet A). La valeur du degré de polarisation au carré de la lumière rétro-diffusée par cette plaque vaut  $\beta = 0,61$  lorsqu'on l'estime avec la méthode standard à 4 images. Pour le second objet (objet B), 8 matériaux distincts ont été utilisés. La nature de ces matériaux et le degré de polarisation au carré de la lumière qu'ils rétrodiffusent sont détaillés dans le tableau 2.2.

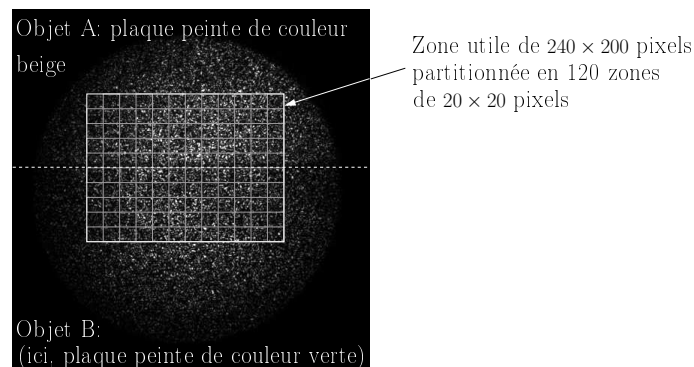


FIG. 2.13 – Exemple d'image d'intensité acquise en l'absence de composant polarimétrique à la réception. La zone utile centrale de l'image est partitionnée en 120 zones de taille  $20 \times 20$  pixels.

**Sélection des données admissibles :** À partir de l'observation des images acquises, nous avons sélectionné une zone « utile » d'éclairage sensiblement homogène de taille  $240 \times 200$  pixels, recouvrant à parts égales les objets A et B (voir figure 2.13). Nous avons pu remarquer que la mise en œuvre de la méthode d'estimation à une unique image est fortement perturbée lorsqu'elle est opérée sur des zones surexposées de l'image. En effet, cette méthode étant fondée sur

l'analyse de la répartition statistique (histogramme) des échantillons d'intensité, elle ne conduit pas à des résultats valides lorsque les valeurs d'intensité sont saturées par le capteur, ce qui est le cas dans les zones surexposées.

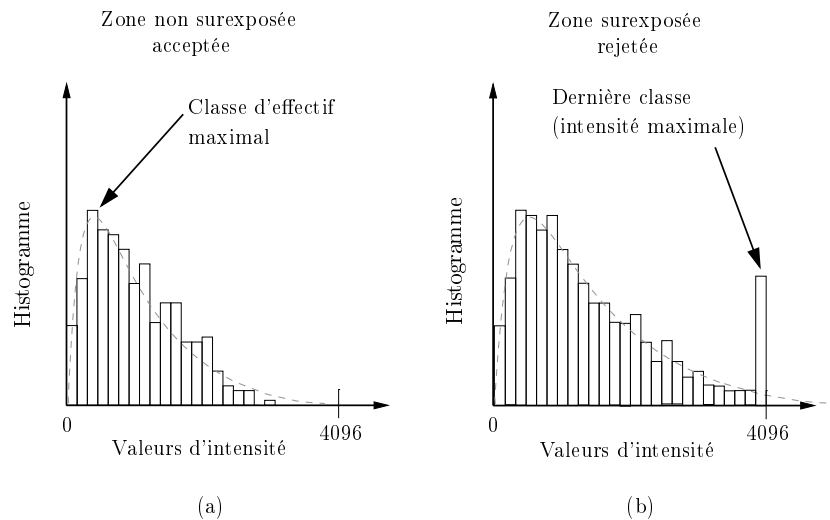


FIG. 2.14 – Les zones de taille  $20 \times 20$  pixels surexposées dont l'histogramme des échantillons d'intensité réalisé sur 100 classes entre 0 et 4096 présente un effectif dans la dernière classe supérieur à 10% de celui de la classe d'effectif maximal sont rejetées (b). Dans le cas contraire (a), les zones sont conservées et le degré de polarisation sera estimé uniquement sur ces zones conservées.

Pour pallier ce défaut, nous avons proposé de partitionner la zone « utile » en petites zones de  $20 \times 20$  pixels, 60 zones étant associées à l'objet A et 60 à l'objet B (voir figure 2.13). Ces zones de  $20 \times 20$  pixels sur lesquelles seront opérées les estimations correspondent à une taille d'échantillon raisonnable pour une utilisation pratique en imagerie ( $M = 400$  pixels). Pour chacune des 8 expériences et pour les objets A et B, nous avons alors appliqué un test pour rejeter les zones surexposées parmi les 60 zones initiales associées à l'objet A et les 60 zones associées à l'objet B. Ce test consiste à construire l'histogramme des  $M = 400$  mesures d'intensité, sur 100 classes réparties entre 0 et 4096 (ensemble des valeurs délivrées par la caméra), puis à rejeter les régions pour lesquelles la dernière classe comporte un effectif supérieur à 10% de celui de la classe d'effectif maximal (voir figure 2.14). Avec les données dont nous disposons, ce test conduit à sélectionner au minimum 32 zones parmi les 60 zones initiales. En outre, la partition des données en zones de  $20 \times 20$  pixels permet d'assurer une meilleure homogénéité statistique des échantillons traités que lorsque l'on considère une unique région de  $240 \times 200$  pixels. Enfin, nous verrons que le fait de disposer d'entre 32 et 60 zones admissibles pour chaque situation nous permettra d'évaluer l'ordre de grandeur de la variance expérimentale d'estimation.

**Détermination expérimentale du cumulatif  $\kappa_2$  :** Avant de pouvoir utiliser les estimateurs étudiés dans ce chapitre, il nous faut connaître les caractéristiques du speckle qui entache les images. Nous supposons ici en première approximation que le speckle est pleinement développé d'ordre  $L$ . On suppose ainsi que la DDP

de l'intensité pour une lumière totalement polarisée ( $\mathcal{P} = 1$ ) est une loi gamma d'ordre  $L = 1/\kappa_2$ , où  $\kappa_2$  représente la variance de la loi  $f$  de moyenne unitaire caractéristique du modèle de speckle<sup>36</sup>.

Puisque les quatre images de Stokes sont acquises à travers un polariseur linéaire, il est possible de les utiliser pour estimer empiriquement la valeur du coefficient  $\kappa_2$ . Pour chacune de ces images et pour un échantillon de taille  $M = 400$  pixels donné, il suffit d'estimer la variance empirique sur les  $M$  valeurs d'intensité normalisées par la moyenne empirique de l'intensité sur cet échantillon.

Les valeurs du coefficient  $\kappa_2$  ont été estimées sur les 4 images de Stokes et sur 60 échantillons indépendants de  $M = 400$  pixels correspondants à l'objet A ou à l'objet B. Les valeurs de  $\kappa_2$  évaluées dans les huit configurations expérimentales sont tracées sur la figure 2.15.a pour l'objet A de référence, et sur la figure 2.15.b pour les 8 objets B testés. On peut remarquer en analysant ces résultats expérimentaux que les valeurs de  $\kappa_2$  estimées présentent une assez bonne similarité d'un matériau à l'autre (excepté pour l'objet B 8), et quelle que soit l'image de Stokes utilisée pour réaliser l'estimation<sup>37</sup>. En situation d'imagerie réelle, il faut prendre garde néanmoins à ce que l'image de Stokes utilisée possède une intensité moyenne suffisante pour ne pas être trop sensible au bruit de fond ou au bruit propre de la caméra et ne pas perturber l'estimation de  $\kappa_2$ . On remarque en effet sur la figure 2.15.b que les valeurs de  $\kappa_2$  estimées sur l'image acquise en polarisation horizontale (symboles \*) sont fortement erronées pour les objets 1, 6 et 8, ce qui s'explique par le fait que ces objets sont très peu dépolarisants (voir tableau 2.2) et renvoient donc très peu de lumière dans l'état de polarisation linéaire orthogonal à l'orientation de la polarisation incidente. Nous avons pu en effet vérifier que la valeur moyenne de l'intensité de l'image acquise en polarisation horizontale était dans ces trois cas très faible.

Conformément à ce qui serait réalisé en pratique lors d'une étape de calibration, nous choisissons de fixer la valeur de  $\kappa_2$  à partir des résultats d'estimation obtenus sur l'objet A de référence uniquement. En moyennant les 32 valeurs de  $\kappa_2$  estimées sur l'objet A de référence à partir des 4 images de Stokes, et dans les 8 configurations expérimentales, nous obtenons la valeur<sup>38</sup>  $\kappa_2 = 0,808 \pm 0,003$ . Cette valeur de  $\kappa_2$  sera utilisée dans la suite pour estimer le degré de polarisation à partir de l'image d'intensité acquise en l'absence de composant polarimétrique, que ce soit sur l'objet de référence A ou sur les différents objets B. On peut noter que cette valeur de  $\kappa_2$  correspond à un speckle d'ordre  $L = 1/\kappa_2 \simeq 1,24$ .

**Résultats expérimentaux d'estimation de  $\beta$  :** Nous pouvons estimer la valeur du carré du degré de polarisation  $\beta$  de la lumière rétrodiffusée par les objets A et B dans les 8 situations expérimentales considérées, soit avec la technique standard utilisant les 4 images de Stokes, soit avec les méthodes simplifiées à deux

<sup>36</sup> – On notera que pour la simple mise en œuvre de l'estimateur de  $\beta$  au sens des moments, il aurait suffi d'estimer le coefficient  $\kappa_2$  sans qu'il soit nécessaire de faire une hypothèse sur la forme de la DDP. Cette hypothèse nous sera utile cependant dans la suite lorsque nous évaluerons la variance théorique de l'estimateur.

<sup>37</sup> – La bonne régularité du paramètre  $\kappa_2$  observée ici s'explique par le fait que le dispositif d'imagerie reste identique d'une acquisition à l'autre. Une perspective intéressante consistera à vérifier cette stabilité sur une gamme encore plus étendue de matériaux.

<sup>38</sup> – La précision indiquée correspond à l'écart-type de l'estimation de la moyenne de  $\kappa_2$  sur  $60 \times 32$  expériences supposées indépendantes.



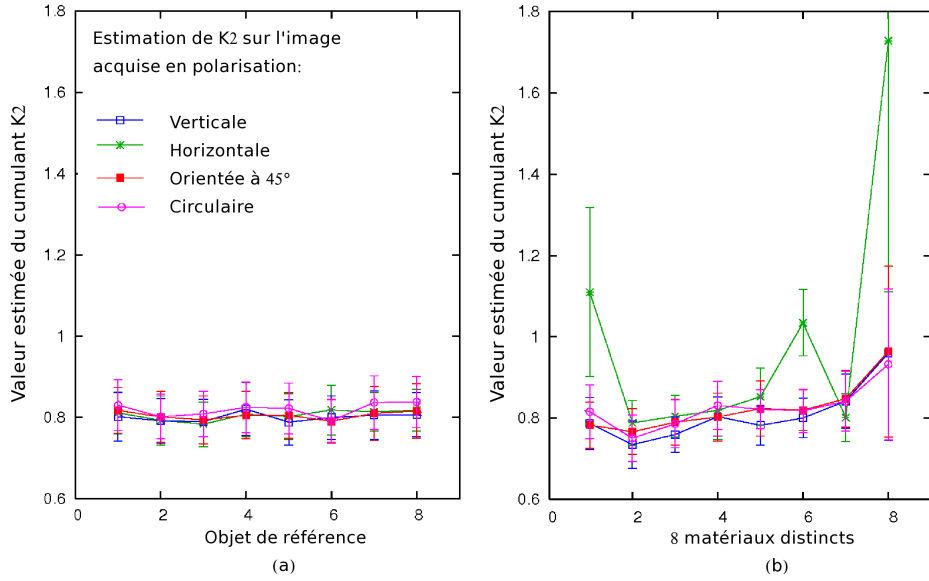


FIG. 2.15 – Valeurs estimées du coefficient  $\kappa_2$  à partir de chaque image de Stokes. Chaque valeur est estimée, dans les huit configurations expérimentales, à partir de 60 échantillons de  $M = 20 \times 20 = 400$  pixels appartenant à l'objet A de référence (a), ou à l'objet B (b).

images évoquées précédemment dans ce manuscrit, soit encore à partir de l'image unique acquise en l'absence de composant polarimétrique. Dans ce dernier cas, nous nous limitons ici à mettre en œuvre l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  au sens des moments, en ayant pris soin de fixer à 0,808 le paramètre  $\kappa_2$  qui intervient dans l'expression de  $\hat{\beta}_2$  (voir équation (2.29)). Pour assurer une estimation correcte à partir d'une unique image, nous avons pour chacune des 16 mesures<sup>39</sup> éliminé les zones de taille  $20 \times 20$  pixels surexposées, grâce à la méthode présentée précédemment. Pour que les résultats fournis par les 4 méthodes d'estimation mises en œuvre soient comparables, les 3 autres estimations (à 4 et 2 images) ont été réalisées uniquement à partir de ces zones jugées admissibles sur l'image d'intensité acquise en l'absence de composant polarimétrique au niveau de la caméra.

Les résultats obtenus sur l'objet de référence (A) sont présentés sur la figure 2.16, tandis que les valeurs de  $\beta$  estimées sur les 8 matériaux distincts (objet B) sont reportées sur la figure 2.17. Les points tracés correspondent aux résultats d'estimation de  $\beta$  moyennés sur l'ensemble des zones de  $20 \times 20$  pixels admissibles (entre 32 et 60 zones prises en compte, selon les cas) et les barres d'erreur indiquent l'écart-type empirique de l'estimation de  $\beta$  (évalué également uniquement sur les zones admissibles).

Ces deux courbes permettent avant tout de confirmer expérimentalement la validité de la méthode d'estimation étudiée dans ce chapitre qui permet d'évaluer quantitativement le degré de polarisation (ou son carré  $\beta$ ) à partir d'une unique image de speckle. En effet, on remarque que dans la quasi-totalité des cas, les valeurs estimées grâce à l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  sont assez proches des valeurs obtenues avec les méthodes plus standard. Notons également que bien que le coefficient  $\kappa_2$  ait

<sup>39</sup> – Deux objets distincts dans 8 conditions expérimentales différentes.

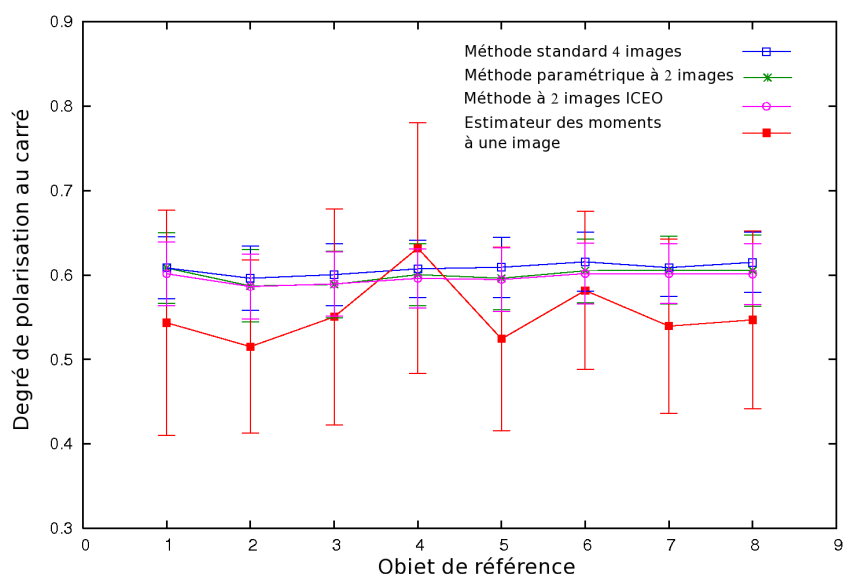


FIG. 2.16 – Comparaison des valeurs estimées de  $\beta$  sur l'objet de référence A (plaque peinte de couleur beige) dans les 8 conditions expérimentales considérées. L'estimation est réalisée sur des zones de  $20 \times 20$  pixels (après élimination des zones surexposées) au moyen de 4 méthodes distinctes : méthode standard à 4 images ( $\square$ ), méthode à deux images paramétrique (\*), méthode ICÉO ( $\circ$ ) et estimateur  $\hat{\beta}_2$  à une image ( $\blacksquare$ ).

été évalué uniquement sur les objets de référence, cette valeur  $\kappa_2 = 0,808$  permet d'estimer correctement les valeurs de  $\beta$  sur des objets de nature différente (voir figure 2.17). L'unique cas problématique apparaît pour l'objet 8 (plastique noir) pour lequel l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  conduit à une valeur surestimée  $\langle \hat{\beta}_2 \rangle = 1,1738 \geq 1$ . Cette surestimation peut s'expliquer en remarquant que la valeur  $\kappa_2 = 0,808$  n'est pas adaptée pour cet objet (voir figure 2.13). En effet, si l'on utilise une valeur mieux adaptée à l'objet 8, par exemple  $\kappa_2 = 0,95$  (voir figure 2.13.b), on obtient alors une valeur de  $\beta$  bien plus satisfaisante puisque  $\langle \hat{\beta}_2 \rangle \simeq 0,85$  alors que la valeur fournie par la méthode standard à 4 images est 0,91. On notera également que les objets considérés ici sont purement dépolarisants puisque l'ICÉO permet dans tous les cas de fournir une valeur correcte du degré de polarisation.

La décomposition de la zone « utile » en plusieurs zones de  $20 \times 20$  pixels permet de s'affranchir des zones surexposées de la scène polarimétrique mais également de donner un ordre de grandeur de la précision d'estimation des 4 méthodes comparées. Pour chaque expérience, on dispose en effet d'entre 32 et 60 zones homogènes de  $20 \times 20$  pixels, qui constituent autant de réalisations de l'expérience d'estimation de  $\beta$ . On peut alors évaluer empiriquement l'écart-type de l'estimation de  $\beta$ , que nous avons reporté sous forme de barres d'erreur sur les figures 2.16 et 2.17. Si la méthode à une seule image conduit à un écart-type supérieur comparativement aux techniques plus complexes (voir section 2.3.4), la barre d'erreur expérimentale obtenue ici avec l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  permet d'évaluer l'ordre de grandeur de  $\beta$  avec une précision assez satisfaisante (environ  $\pm 10\%$ ), alors que les échantillons considérés sont de taille relativement limitée

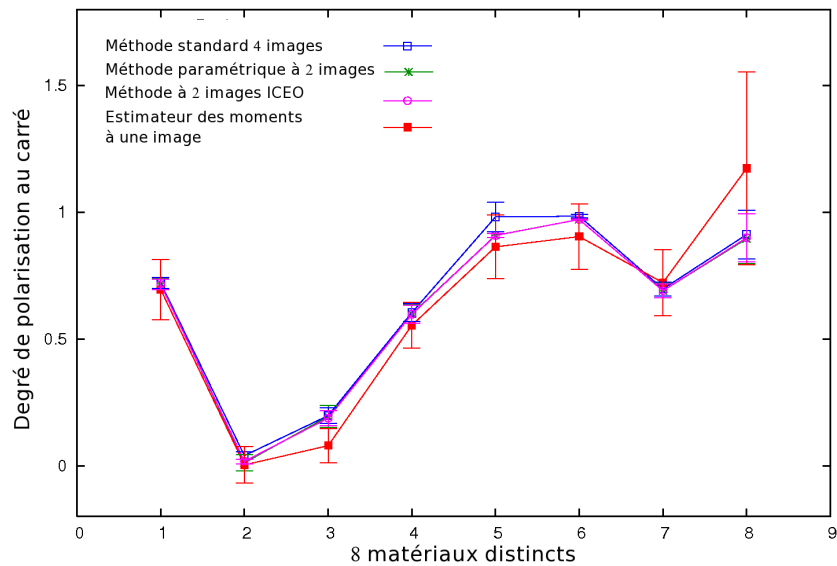


FIG. 2.17 – Comparaison des valeurs de  $\beta$  obtenues sur les 8 objets B testés. L'estimation est réalisée sur des zones de  $20 \times 20$  pixels (après élimination des zones surexposées) au moyen de 4 méthodes distinctes : méthode standard à 4 images ( $\square$ ), méthode à deux images paramétrique (\*), méthode ICÉO ( $\circ$ ) et estimateur  $\hat{\beta}_2$  à une image ( $\blacksquare$ ).

( $M = 20 \times 20$  pixels).

Sur les figures 2.18.a et 2.18.b, nous comparons enfin la variance expérimentale (symboles  $\circ$ ) de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  avec la variance théorique (symboles  $+$ ) de  $\hat{\beta}_2$ , en admettant que le speckle est distribué suivant une loi gamma d'ordre  $L = 1/\kappa_2 = 1,24$  pour chacune des composantes de polarisation<sup>40</sup>. Cette variance théorique est évaluée grâce à l'équation (2.38) pour  $M = 400$  pixels et pour la valeur de  $\beta$  estimée. Les figures 2.18.a et 2.18.b montrent qu'à l'exception du cas problématique de l'objet B numéroté 8 (plastique noir) qui conduit à estimer des valeurs erronées de  $\beta$  (voir figure 2.17), l'ordre de grandeur des variances obtenues expérimentalement est en accord avec les prévisions théoriques. L'écart obtenu entre la variance théorique et la variance expérimentale peut provenir d'une inadéquation du modèle gamma de speckle pleinement développé pour décrire les données expérimentales dont nous disposons, cette inadéquation pouvant conduire à une mauvaise évaluation de la variance théorique qui serait sous-estimée.

**Conclusion :** Ces premiers résultats expérimentaux permettent de valider le principe de l'estimation du degré de polarisation à partir de l'analyse statistique de l'intensité d'une unique image de speckle. Ces résultats permettent par ailleurs d'obtenir une première validation de l'ordre de grandeur de la variance théorique des estimateurs au sens des moments étudiés dans ce chapitre à la section 2.3.1. Nous avons vu cependant qu'il était nécessaire de prendre un certain

<sup>40</sup> – C'est-à-dire que nous supposons que la loi  $f$  caractéristique du modèle de speckle est une loi gamma d'ordre  $L$ .

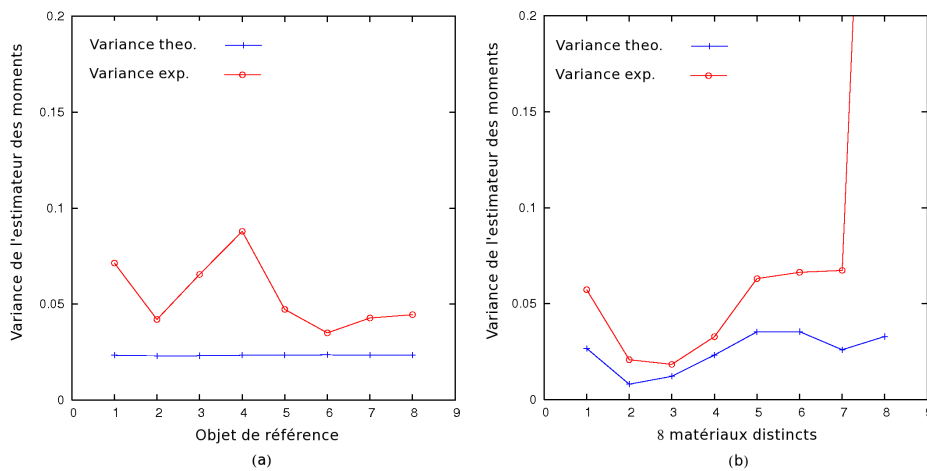


FIG. 2.18 – Comparaison des variances expérimentales (symboles  $\circ$ ) et théoriques (symboles  $+$ ) de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  opéré sur des zones homogènes de  $20 \times 20$  pixels (après élimination des zones surexposées) dans 8 conditions expérimentales distinctes. (a) L'estimation est réalisée sur l'objet A de référence. (b) L'estimation est réalisée sur les 8 objets B testés. La variance expérimentale obtenue sur l'objet 8 (plastique noir) est anormalement élevée ( $\text{var}(\hat{\beta}_2) \simeq 0,58$ ) et n'est pas représentée.

nombre de précautions pour la mise en œuvre pratique de cette technique : il est indispensable en particulier que les images acquises par le capteur ne soient pas surexposées. Il serait intéressant de compléter cette étude expérimentale en testant davantage de matériaux, aux propriétés polarimétriques diverses, et en présence de biréfringence (matériaux non purement dépolarisants) et de mieux caractériser les autres sources de bruit que le speckle qui peuvent exister.

### 2.3.6 Conclusion sur l'estimation de $\mathcal{P}$ à une image

Cette section nous a permis de caractériser les performances de plusieurs estimateurs du degré de polarisation de la lumière  $\mathcal{P}$  (ou son carré  $\beta$ ) à partir d'une unique image de speckle. Ainsi, la première méthode d'estimation que nous avons caractérisée, basée sur la mesure des deux premiers moments de l'intensité lumineuse, présente de nombreux avantages en raison de sa grande simplicité et de sa souplesse d'utilisation sur divers modèles de speckle. Cette méthode n'est cependant pas efficace lorsque l'ordre du speckle est faible. Nous avons alors proposé deux méthodes alternatives plus sophistiquées qui permettent de garantir une estimation quasiment efficace lorsque le speckle est pleinement développé d'ordre 1. En outre, grâce aux simulations numériques effectuées pour un speckle pleinement développé d'ordre 1, nous avons pu caractériser la perte en précision d'estimation du degré de polarisation que l'on subit en utilisant une telle méthode à une image au lieu d'une technique plus classique à 4 ou 2 images.

De manière générale, et conformément à ce que nous avons pu pressentir en analysant les valeurs de la BCR, ces méthodes à une seule image présenteront un intérêt pour des applications pratiques de mesure polarimétrique à condition que

l'on puisse réaliser l'estimation sur un nombre d'échantillons  $M$  suffisamment élevé, que ce soit pour réduire l'influence du biais aux faibles valeurs de  $\mathcal{P}$ , ou pour assurer une précision comparable à d'autres méthodes existantes et utilisées en milieu industriel. En effet, en utilisant un capteur de taille adaptée à la précision requise, les applications d'imagerie polarimétrique nécessitant une grande rapidité et simplicité de mise en œuvre pourraient tirer parti des méthodes étudiées dans ce chapitre. En outre, l'utilisation de capteurs comportant un très grand nombre de pixels paraît envisageable de nos jours en raison des progrès et de la démocratisation des capteurs CCD miniaturisés destinés en particulier aux applications de photographie numérique. Il paraît donc intéressant de pouvoir s'affranchir de composants optiques polarimétriques ajustables, coûteux en terme d'installation, d'automatisation et de maintenance, même si cela nécessite l'emploi de capteurs à très grand nombre de pixels.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons par conséquent analyser deux solutions qui permettent de maximiser la taille des échantillons de mesure. Pour des applications d'imagerie de degré de polarisation, nous verrons dans la section suivante qu'il peut être préférable d'utiliser des algorithmes de segmentation d'image en régions homogènes afin de maximiser la taille des échantillons. Nous verrons ensuite que la robustesse de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  en présence de bruit de photon permet d'optimiser la taille de l'échantillon de mesure, en utilisant un moyennage temporel sur plusieurs acquisitions à très faible intensité lumineuse.

## 2.4 Imagerie de degré de polarisation

Les résultats décrits précédemment, aussi bien théoriques que simulés, ont été obtenus en supposant que le support utilisé pour réaliser l'estimation était composé d'un échantillon statistiquement homogène de  $M$  mesures d'intensité. Dans une situation réelle cependant, une scène polarimétrique se compose en général de plusieurs objets aux caractéristiques différentes. Quelle que soit la méthode d'estimation envisagée, il faudra donc s'assurer que les échantillons pris en compte pour réaliser l'estimation proviennent d'une région homogène de l'image, ou en d'autres termes, d'un même objet de la scène. Sélectionner un ensemble de pixels statistiquement homogène devient donc un problème important dès que l'on s'intéresse à des applications d'imagerie de degré de polarisation, pour lesquelles il est nécessaire d'obtenir une cartographie du degré de polarisation en chaque point de la scène imagée. Nous analysons donc dans cette section différentes solutions envisageables pour utiliser la méthode d'estimation de  $\mathcal{P}$  à une unique image de speckle pour des applications d'imagerie.

### 2.4.1 Scène polarimétrique simulée

Dans un premier temps, nous présentons des résultats obtenus sur des données synthétiques simulées, qui permettent de comparer grâce à un résultat visuel les performances des diverses méthodes d'estimation du degré de polarisation évoquées dans la section précédente.

Les résultats d'imagerie de degré de polarisation présentés ci-après ont été obtenus à partir de la simulation d'une scène polarimétrique réaliste de taille

Région label	Matrice de polarisation $\Gamma$	$\mathcal{P}$	$\beta$	Intensité moyenne $\mu_I$
1	$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 14.4 & 0 \\ 0 & 0.88 \end{bmatrix}$	0,885	0,783	15,28
2	$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0.4 \\ 0.4 & 2.4 \end{bmatrix}$	0,669	0,447	14,4
3	$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 3.6 & 2.8 + 0.8i \\ 2.8 - 0.8i & 2.6 \end{bmatrix}$	0,953	0,908	6.2
4	$\Gamma_4 = \begin{bmatrix} 3.16 & 0 \\ 0 & 3.92 \end{bmatrix}$	0,107	0,0114	7.08

TAB. 2.3 – Propriétés polarimétriques et radiométriques des objets de la scène polarimétrique simulée.

512 × 512 pixels, constituée de trois « objets » distincts, représentés schématiquement sur la figure 2.19.a (identifiables par leur label variant entre 1 et 3), disposés sur un fond uniforme (qui constitue la région de l’image portant le label 4). Les caractéristiques polarimétriques et radiométriques de ces 4 objets sont différentes et sont résumées dans le tableau 2.3. En analysant les matrices de polarisation caractéristiques de ces objets, il est possible de déterminer la nature des 4 régions de l’image simulée proposée. En effet, en supposant que le faisceau cohérent qui éclaire la scène est linéairement polarisé et de degré de polarisation  $\mathcal{P} = 1$ , on peut alors identifier :

- Région 1 : une région triangulaire correspondant à un objet fortement réfléchissant et peu dépolarisant (typiquement une pièce de métal). La matrice  $\Gamma_1$  étant diagonale, le matériau imagé est en outre purement dépolarisant.
- Région 2 : une région connexe composée de rectangles, également réfléchissante mais plus dépolarisante que la région 1.
- Région 3 : une région triangulaire au bas de l’image, peu dépolarisante mais qui correspond à un objet non purement dépolarisant (présence de termes anti-diagonaux importants dans  $\Gamma_3$ ). Cet objet est de faible réflectivité et son intensité ne se distingue pratiquement pas de celle du fond.
- Région 4 : fond peu lumineux, correspondant à un matériau purement et très dépolarisant.

Une fois définies les propriétés de chacune des zones, nous pouvons alors générer, en chaque pixel de chaque zone, une réalisation aléatoire du champ électrique bidimensionnel  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , dont les propriétés statistiques au second ordre sont données par la valeur de la matrice de polarisation de la région considérée. À partir du champ électrique aléatoire simulé, il est alors possible de construire les 4 images de Stokes nécessaires pour l’estimation standard du degré de polarisation (voir section 1.3.2.1). Parmi ces 4 images, les deux premières correspondent à des acquisitions de la scène imagée à travers deux polariseurs orthogonaux et à partir desquelles on peut évaluer la valeur du degré de polarisation en utilisant des méthodes d’estimation simplifiées (voir section 1.3.2.2). Un exemple de réalisation de ces deux images en polarisation parallèle et orthogonale est donné

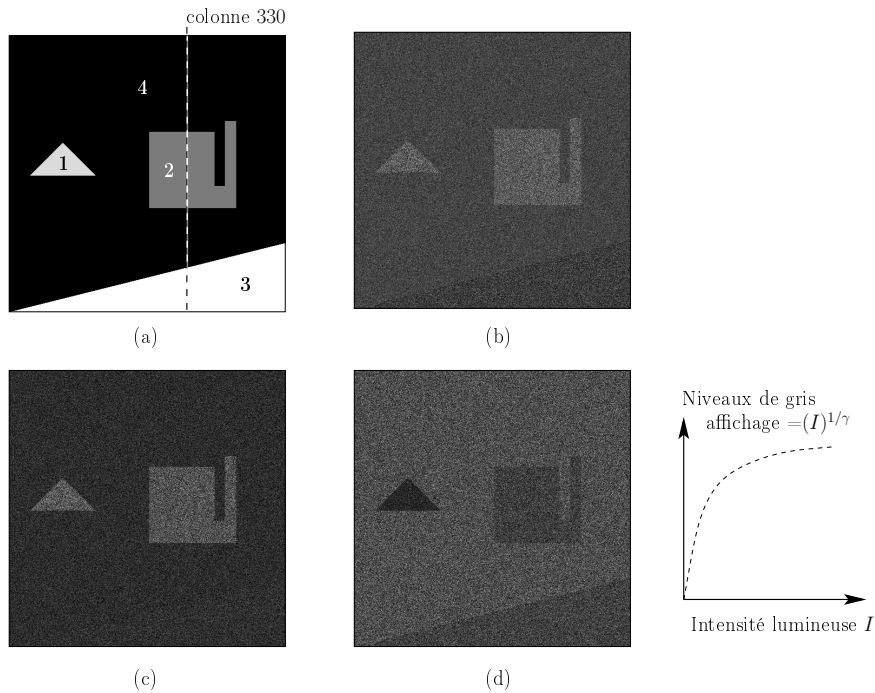


FIG. 2.19 – Scène polarimétrique simulée ( $512 \times 512$  pixels) : (a) Topologie de la scène. Les niveaux de gris permettent de coder la « vraie » valeur de  $\beta$  en chaque région ; (b) Image d’intensité ; (c) Première image de Stokes ( $I_{//}$ ) ; (d) Deuxième image de Stokes ( $I_{\perp}$ ). (Pour améliorer la lisibilité des vignettes (b), (c) et (d), les faibles valeurs de l’intensité lumineuse ont été réhaussées par application d’une correction « gamma » avec  $\gamma = 2$  pour l’affichage des niveaux de gris.)

en figure 2.19.c et figure 2.19.d respectivement. La méthode d’estimation à une seule image étudiée dans ce travail de thèse utilise quant à elle une seule image d’intensité acquise directement sans composant optique polarimétrique. La figure 2.19.b représente un exemple d’image d’intensité obtenue dans la situation où les fluctuations de speckle sont supposées pleinement développées d’ordre 1.

En observant la seule image d’intensité de la figure 2.19.b, il paraît difficile d’identifier l’objet 3 par rapport au fond puisque ces deux objets présentent une intensité comparable. Ces objets sont pourtant très contrastés en terme de degré de polarisation, comme on peut le voir sur la figure 2.19.a, où la valeur « vraie » du carré du degré de polarisation est représentée, en chaque pixel de l’image, par un codage en niveaux de gris. Par la suite, un degré de polarisation nul ( $\beta = 0$ ) sera codé en noir sur les images de degré de polarisation tandis qu’un pixel associé à un  $\beta$  unitaire apparaîtra en blanc.

Les résultats présentés sur la figure 2.20 démontrent néanmoins qu’à partir de cette seule image d’intensité totale, il est possible de retrouver une information quantitative sur la valeur du degré de polarisation. Nous comparons en effet sur cette figure les résultats d’estimation de  $\beta = \mathcal{P}^2$  obtenus sur des fenêtres glissantes de taille variable  $11 \times 11 = 121$  pixels (colonne 1),  $19 \times 19 = 361$  pixels (colonne 2) et  $31 \times 31 = 961$  pixels (colonne 3), et avec 4 techniques d’estimation différentes. La première ligne représente les résultats obtenus avec la méthode standard à 4 images ; la seconde ligne, ceux obtenus avec la méthode à 2 images

basée sur l'ICÉO. La méthode paramétrique fondée sur l'intercorrélacion de ces deux images a également été testée ici et ses résultats sont fournis sur la troisième ligne de la figure 2.20. Enfin, sur la dernière ligne, nous représentons les résultats obtenus avec la méthode fondée sur une unique image d'intensité qui a été caractérisée tout au long de ce chapitre. Plus précisément, nous nous intéresserons à l'estimateur au sens des moments  $\hat{\beta}_2$ . Cette présentation comparative des résultats d'estimation permet de tirer les conclusions suivantes :

- Il est possible d'obtenir une cartographie (image) du degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité, provenant de la rétrodiffusion d'un éclaircissement cohérent sur une scène. On peut en effet vérifier sur les vignettes (j), (k) et (l) que l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  permet de retrouver un contraste polarimétrique important, alors que ce contraste était quasiment absent sur l'image d'intensité initiale (figure 2.19.b).
- Par ailleurs, cette méthode reste valide dans les situations où la matrice de polarisation de la lumière n'est pas diagonale, par exemple pour l'objet 3 qui n'est pas purement dépolarisant. À l'inverse, on voit clairement sur les vignettes (d), (e) ou (f) que l'estimation basée sur l'ICÉO est incapable dans ce cas de fournir une évaluation correcte du contraste polarimétrique.
- La diminution du nombre de mesures prises en compte pour estimer la valeur de  $\beta$  entraîne, on l'a vu, une dégradation de la variance d'estimation qui est visuellement perceptible sur ces images : pour une taille de fenêtre glissante donnée, les fluctuations des valeurs estimées de  $\beta$  augmentent significativement lorsque l'on passe de quatre images à deux, puis de deux images à une seule.
- Enfin, l'augmentation de la taille de la fenêtre glissante permet de diminuer les fluctuations des valeurs estimées mais entraîne une perte progressive de résolution spatiale au niveau de l'image de degré de polarisation finale. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre précision d'estimation et résolution spatiale de l'image de degré de polarisation obtenue.

Ces résultats visuels peuvent être complétés par une analyse plus quantitative en traçant les valeurs de  $\beta$  estimées le long d'une coupe de l'image. Ainsi, pour construire la figure 2.21, on a considéré une coupe le long de la colonne 330 des images précédentes (voir figure 2.19), pour les cas  $M = 19 \times 19$  pixels (fig.2.21.a et 2.21.b) et  $M = 31 \times 31$  pixels (fig.2.21.c et 2.21.d). Les tracés en trait plein noir représentent les valeurs théoriques de  $\beta$  le long de cette coupe.

L'analyse de ces courbes permet de confirmer les différentes conclusions dressées précédemment à partir de l'observation des résultats sous forme d'images. On peut également vérifier grâce à ces coupes que malgré l'apparence très bruitée des estimations fournies par l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ , les valeurs estimées que l'on peut lire directement sur les coupes présentées sont néanmoins assez proches de la valeur théorique de  $\beta$ .



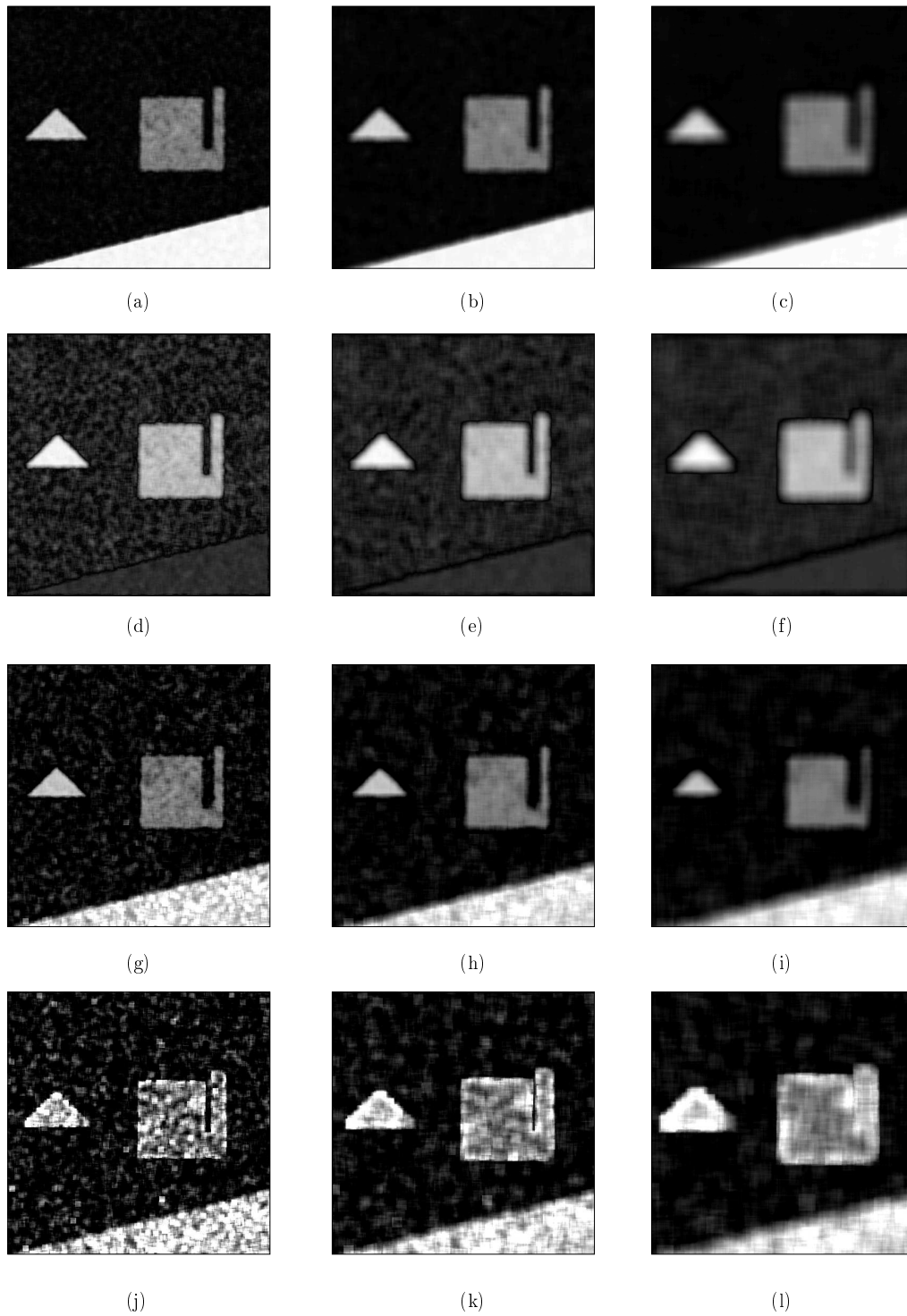


FIG. 2.20 – Résultats d'estimation avec l'estimateur standard à 4 images [(a), (b) et (c)], l'ICÉO [(d), (e) et (f)], la méthode paramétrique à 2 images [(g), (h) et (i)] et l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  à une seule image [(j), (k) et (l)] pour trois tailles de fenêtres :  $M = 11 \times 11$  (colonne 1),  $M = 19 \times 19$  (colonne 2) et  $M = 31 \times 31$  (colonne 3).

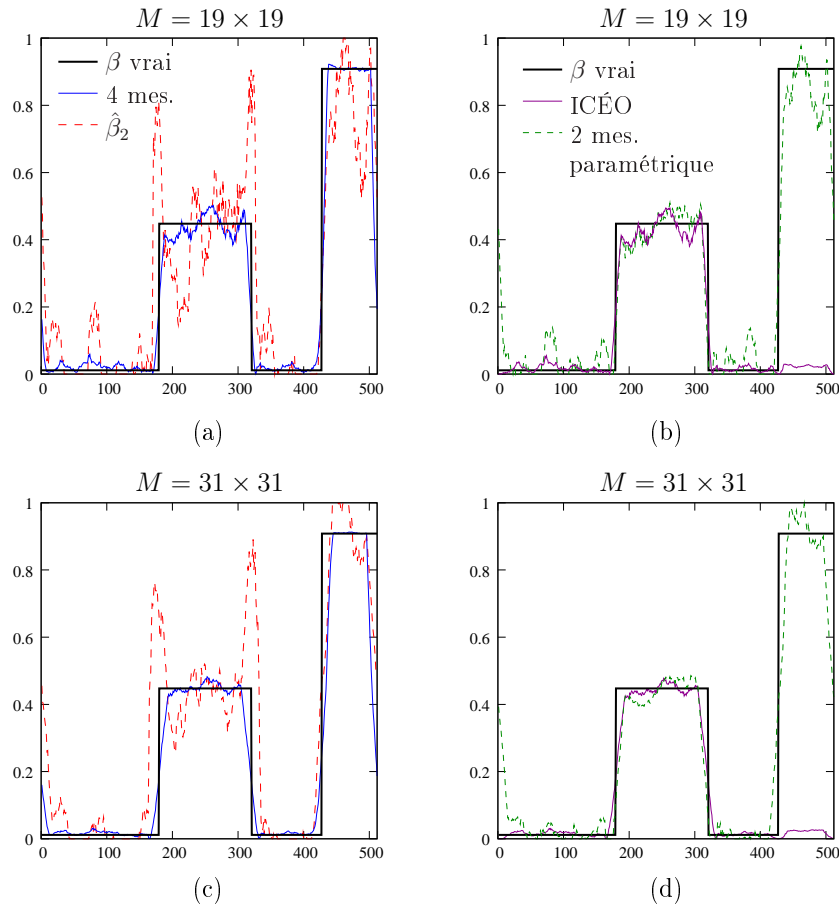


FIG. 2.21 – Comparaison des valeurs de  $\beta$  estimées avec quatre méthodes distinctes, le long de la colonne 330 de l’image polarimétrique simulée, avec deux tailles de fenêtre  $M = 19 \times 19$  [(a) et (b)] et  $M = 31 \times 31$  pixels [(c) et (d)].

On remarque également que l’augmentation de la taille de la fenêtre glissante utilisée pour l’estimation se traduit par des *effets de bord* de plus en plus marqués pour chacune de ces méthodes d’estimation. Pour les méthodes à quatre et deux images, ces effets se traduisent, à la transition entre deux régions, par un « lissage » continu des valeurs estimées de plus en plus important. Dans le cas de l’estimation à une seule image en revanche, ces zones frontalières entre objets distincts s’accompagnent de surestimations importantes, visibles également sur les images présentées précédemment. Cet effet peut s’interpréter aisément en remarquant que lorsque la fenêtre glissante chevauche deux zones d’intensité très différentes, les échantillons mesurés proviennent de deux zones distinctes de l’image aux propriétés statistiques différentes, violant ainsi l’hypothèse d’homogénéité de l’échantillon de mesure. Sur de tels échantillons inhomogènes, la variance estimée empiriquement atteint des valeurs élevées, ce qui provoque une surestimation importante de  $\beta$ .

Notons enfin que la méthode d’estimation à une unique image d’intensité reste applicable même lorsque le modèle de speckle n’est plus d’ordre 1. Sur la figure 2.22, nous présentons succinctement les résultats obtenus, sur la même scène polarimétrique, avec l’estimateur  $\hat{\beta}_2$  au sens des moments dans le cas où les échantillons d’intensité sont entachés d’un bruit de speckle pleinement développé

d'ordre  $L \in \{2; 5; 10\}$ . Ces résultats montrent clairement que la restitution d'un contraste polarimétrique à partir d'une unique image d'intensité reste possible lorsque le speckle est d'ordre supérieur à un. La seule différence notable entre ces divers résultats d'estimation réside dans l'augmentation de l'importance des *effets de bord* à mesure que l'ordre du speckle croît<sup>41</sup>.

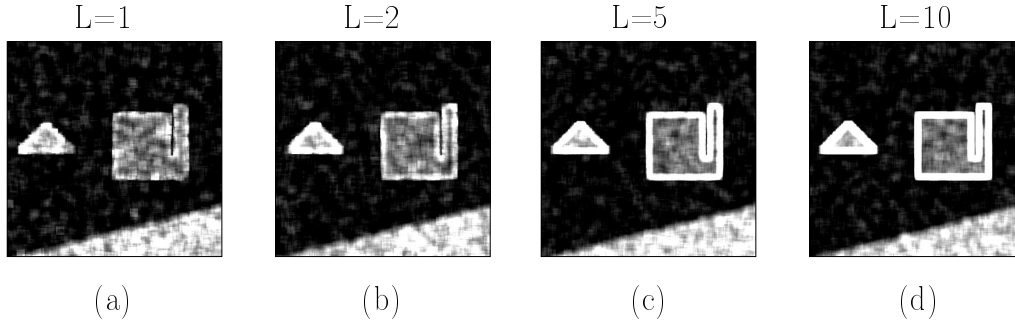


FIG. 2.22 – Résultat de l'estimation à une unique image (estimateur  $\hat{\beta}_2$ ) sur la scène polarimétrique simulée pour des ordres de speckle différents.

### 2.4.2 Scène polarimétrique d'intensité constante – « Dôme » de polarisation

La scène polarimétrique simulée précédemment nous a permis de comparer différentes méthodes d'estimation sur des régions de formes différentes, mais caractérisées par une valeur constante du degré de polarisation au sein de chacune de ces zones. Pour compléter ces résultats et mettre en évidence encore plus clairement les capacités de la technique d'estimation étudiée durant cette thèse, nous analysons ici le cas d'une image d'intensité uniforme mais dont le degré de polarisation évolue d'un pixel à l'autre selon une répartition gaussienne (voir figure 2.23.d). La valeur minimale du degré de polarisation est obtenue dans les coins de l'image où  $\mathcal{P} = 0,63$  ( $\beta = 0,40$ ) alors que la lumière est totalement polarisée au centre ( $\mathcal{P} = \beta = 1$ ). Enfin, cette scène polarimétrique simulée a été divisée en deux parties symétriques : dans la moitié gauche de l'image, la matrice de polarisation est diagonale et définie par l'équation (2.51), représentant ainsi un objet purement dépolarisant. La moitié droite de l'image en revanche simule l'imagerie d'un objet non purement dépolarisant, dont la matrice de polarisation non diagonale est fournie par l'équation (2.52).

Sur l'image 2.23.a de taille  $256 \times 256$  pixels, on peut visualiser l'intensité acquise sur une réalisation d'une statistique de speckle pleinement développé. Bien évidemment, on ne distingue aucun contraste sur cette image d'intensité uniforme. Les vignettes 2.23.b et 2.23.c représentent quant à elles la simulation des deux premières images de Stokes, qui seraient acquises selon deux directions de polarisation orthogonales. Les estimations de la valeur de  $\beta$  ont été

<sup>41</sup> – Ceci peut s'expliquer en remarquant que pour une valeur donnée de  $\beta$ , l'augmentation de l'ordre du speckle s'accompagne d'une diminution de la variance de l'intensité par rapport au cas  $L = 1$ . Par conséquent, plus l'ordre  $L$  est grand, plus l'estimation de  $\beta$  est perturbée par la forte augmentation de la variance qui apparaît lorsque la fenêtre chevauche deux régions distinctes.

réalisées sur une fenêtre glissante de taille  $31 \times 31$  pixels, celle-ci devant rester inférieure à la taille caractéristique des variations des valeurs de  $\mathcal{P}$  pour garantir des échantillons suffisamment homogènes. Les résultats obtenus sont représentés sur les vignettes 2.23.e à 2.23.h, et permettent de comparer la valeur théorique de  $\beta$  (figure 2.23.d) et les valeurs estimées avec différentes techniques. Comme précédemment, ces résultats sont complétés sur la figure 2.24 par l'analyse de deux coupes transversales, correspondant respectivement aux lignes 128 et 192 de l'image (voir figure 2.23.d).

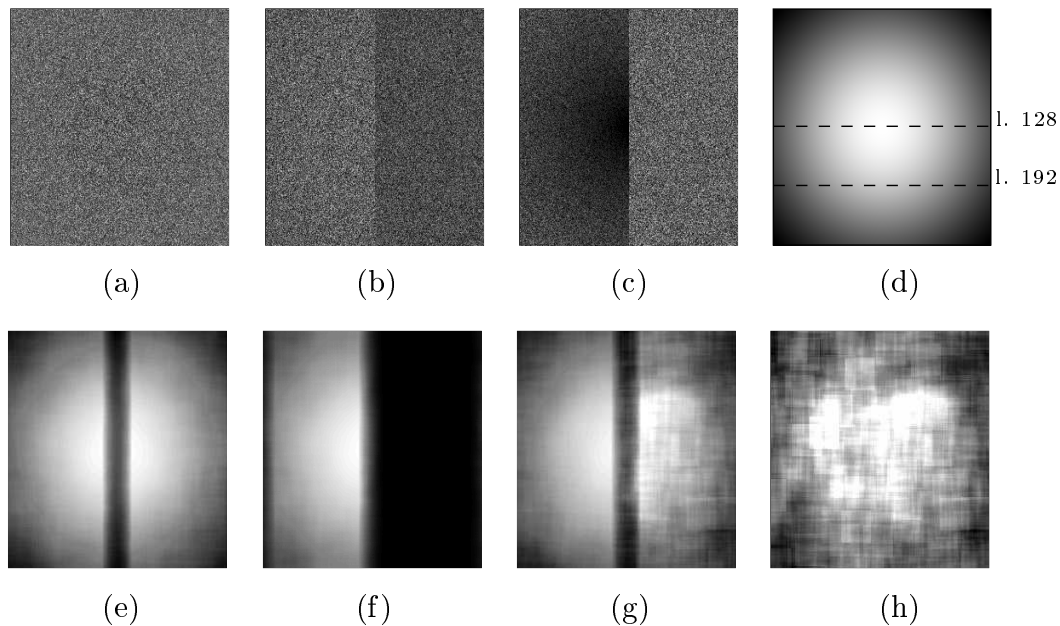


FIG. 2.23 – Scène polarimétrique simulée d'intensité constante : (a) image d'intensité ; (b) première image de Stokes ( $I_{//}$ ) ; (c) deuxième image de Stokes ( $I_{\perp}$ ) ; (d) Répartition théorique de  $\beta$ . Résultats de l'estimation sur une fenêtre de  $M = 31 \times 31$  pixels avec : (e) la méthode standard à 4 images ; (f) l'ICÉO ; (g) la méthode paramétrique à 2 images ; (h) l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  à une unique image. [Une correction gamma de 2 a été appliquée sur les vignettes (a), (b) et (c)]

L'analyse de ces résultats nous permet de conclure que même en l'absence de tout contraste décelable à l'œil dans une image d'intensité de speckle, la méthode d'estimation de  $\beta$  proposée dans cette thèse parvient à mettre en évidence un contraste polarimétrique (2.23.h). Cette seconde expérience d'imagerie simulée illustre, peut-être de façon plus démonstrative encore, les capacités de la méthode proposée dans cette thèse pour révéler un contraste polarimétrique à partir d'un support d'information réduit et simplifié par rapport aux méthodes standard, même dans un cas où le degré de polarisation évolue continûment sur la scène imagée.

En outre, la vignette 2.23.f confirme l'inadaptation de l'ICÉO lorsque les objets imagés ne sont pas purement dépolarisants. Par ailleurs, l'observation des coupes présentées en figure 2.24 confirme bien que les fluctuations des valeurs estimées ont tendance à diminuer lorsque la complexité du dispositif de mesure augmente. On notera aussi que les fluctuations des valeurs estimées par la méthode paramétrique à deux mesures sont significativement plus élevées lorsque

la matrice de polarisation est non diagonale, comme nous l'avons déjà évoqué auparavant.

Il est intéressant également de remarquer que toutes les méthodes d'estimation utilisant plusieurs images sont très perturbées à la frontière entre les deux zones de l'image (entre les abscisses 110 et 140 sur les coupes) en raison des inhomogénéités qui apparaissent dans les mesures lorsque la fenêtre glissante chevauche deux zones de propriétés polarimétriques distinctes. En revanche, la méthode à une seule image, fondée sur la seule analyse des statistiques de l'intensité totale n'est aucunement perturbée à l'interface de ces deux zones, car elle ne dépend que de la forme de la DDP de l'intensité qui varie continûment autour de cette frontière.

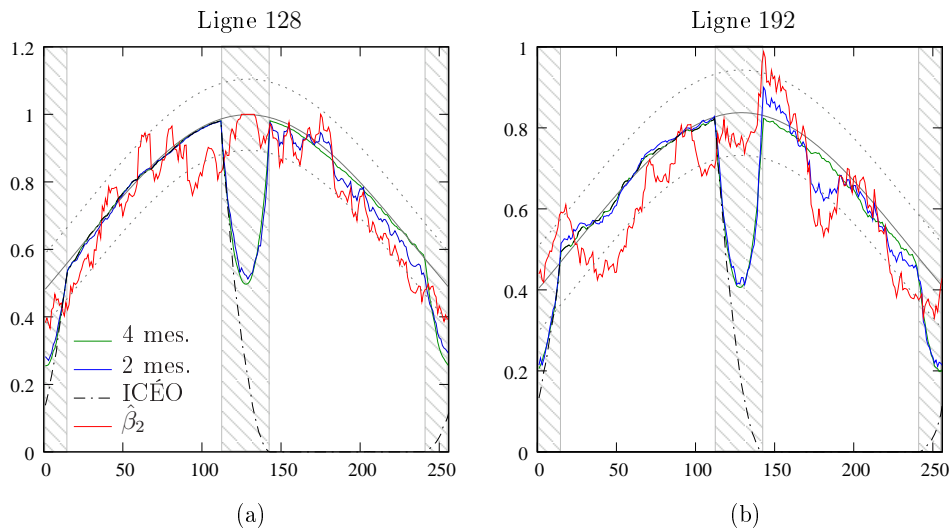


FIG. 2.24 – Valeurs estimées de  $\beta$  le long de la ligne 128 (a) et 192 (b) de l'image avec une fenêtre de  $M = 31 \times 31$  pixels. Les tracés pointillés fournissent une indication de l'écart-type théorique de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ .

Les deux études d'imagerie simulée que nous avons présentées sont donc toutes deux limitées par la difficulté de choisir une taille de fenêtre glissante adéquate. Le compromis entre une grande précision d'estimation et une résolution satisfaisante des détails de l'image de polarisation sera donc laissé à l'appréciation de l'utilisateur, qui devra adapter la taille de la fenêtre à chaque situation d'imagerie, et en fonction de son cahier des charges. Une autre solution, présentée dans le paragraphe suivant, serait de faire précéder l'estimation par une étape préliminaire de segmentation de l'image en régions statistiquement homogènes de taille maximale.

### 2.4.3 Imagerie de degré de polarisation avec segmentation préalable

Nous présentons brièvement ici les résultats obtenus avec l'aide d'un algorithme de segmentation d'image en régions homogènes [48, 47]. Cet algorithme dénommé **Grille Active Statistique**, réalise la partition de l'image en régions

homogènes par déformations successives d’une grille polygonale initiale régulière. Chacune des modifications apportées au modèle de partition d’image est déterminée par optimisation d’un critère basé sur la **minimisation de la complexité stochastique** [125]. L’intérêt fondamental de cet algorithme repose sur l’absence de paramètre à régler par l’utilisateur une fois le modèle de bruit de l’image sélectionné [48, 47]. Dans l’exemple qui suit, nous avons supposé, pour la mise en œuvre de la Grille Active Statistique, que les niveaux de gris de l’image fluctuaient selon une loi gamma dont l’ordre est estimé par l’algorithme de segmentation, dans chaque région de l’image partitionnée. En effet, bien que la DDP de l’intensité  $P_I(I)$  pour un speckle pleinement développé d’ordre 1 ne soit pas une loi gamma<sup>42</sup>, nous avons néanmoins vérifié que la forme de cette DDP peut être approchée avec une assez bonne précision par une loi gamma d’ordre  $L$  non entier compris entre 0 et 1, ce qui justifie le choix du modèle de bruit adopté dans l’algorithme de partition d’image en régions statistiquement homogènes. Il serait bien sûr envisageable à terme de modifier l’algorithme pour l’adapter aux lois de probabilité spécifiques mises en jeu ici.

Nous avons donc appliqué cet algorithme de partition sur l’image d’intensité présentée à la figure 2.19.b et le résultat de la segmentation peut être visualisé sur la figure 2.25.b. La qualité de la partition peut être appréciée en comparant ce résultat à l’image 2.25.a qui fournit la répartition théorique du degré de polarisation sur l’image. La bonne qualité de cette segmentation est confirmée quantitativement en calculant le nombre de pixels mal classés sur chacune des régions de l’image. La proportion de pixels mal classés est donnée dans le tableau 2.4, et reste inférieure à 2% pour toutes les régions de l’image segmentée.

Région/label	1	2	3	4-fond
Taille des régions segmentées (pixels)	3 677	21 206	32 060	204 178
Nombre de pixels mal classés (en %)	1,16 %	0,07 %	1,78 %	0,19%
« Vrai » degré de polarisation	0,885	0,669	0,953	0,107
Degré de polarisation estimé ( $\hat{\mathcal{P}}_2 = \sqrt{\hat{\beta}_2}$ )	0,92	0,66	0,94	0,08
Écart-type indicatif ( $\sigma(\hat{\mathcal{P}}_2)$ )	+/- 0,033	+/- 0,015	+/- 0,011	+/- 0,018

TAB. 2.4 – Résultats de segmentation et d’estimation sur chaque région de la scène polarimétrique simulée.

Une fois achevée l’étape préalable de segmentation, on dispose alors de régions statistiquement homogènes de taille maximale, sur lesquelles il est possible d’estimer le degré de polarisation. Dans l’exemple traité ici, bien que les régions soient de tailles très différentes, la plus petite d’entre elle comporte tout de même plus de 3 500 pixels, ce qui aurait été difficilement envisageable en utilisant une fenêtre glissante. Les résultats de l’estimation de  $\mathcal{P}$  sont présentés sur la figure 2.25.b et dans le tableau 2.4. La dernière ligne du tableau fournit également

<sup>42</sup> – Sauf pour  $\mathcal{P} = 0$  où  $P_I(I)$  est une loi gamma d’ordre 2 et pour  $\mathcal{P} = 1$  où  $P_I(I)$  est une loi gamma d’ordre 1 (loi exponentielle) (voir figure 1.2).

l'écart-type théorique indicatif correspondant à chaque valeur estimée<sup>43</sup>. Sur cet exemple, on peut estimer  $\mathcal{P}$  dans chaque région avec une précision d'au moins 3,3%, alors que celle-ci aurait été de l'ordre de 26% pour la région 4 (fond homogène) et de plus de 6% pour les autres régions si l'on considérait une fenêtre glissante de taille  $31 \times 31$ .

Cet exemple permet ainsi de conclure qu'une étape préliminaire de segmentation en régions homogènes semble être une piste très intéressante pour améliorer la précision de la méthode d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité de speckle présentée dans ce chapitre.

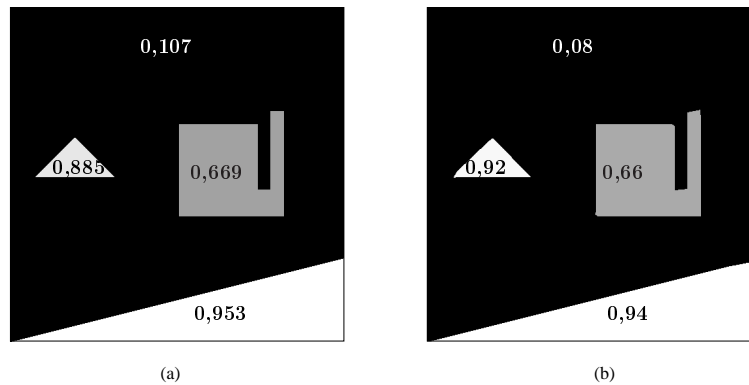


FIG. 2.25 – (a) Représentation des régions de l'image originale et des valeurs théoriques du degré de polarisation; (b) Régions obtenues après segmentation avec l'algorithme de grille active statistique et valeurs estimées avec l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  à l'intérieur de celles-ci.

## 2.5 Analyse de la méthode d'estimation pour des acquisitions à faible flux

Dans cette section, nous étudions la précision de la technique d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image lorsque l'acquisition est réalisée dans des conditions de faible intensité. Ces travaux ont été présentés de manière plus complète dans la référence [38], néanmoins nous proposons ici d'en rappeler les principales conclusions.

Pour un certain nombre d'applications d'imagerie, en particulier dans le domaine biomédical, il est nécessaire de limiter la puissance d'illumination des matériaux, substances ou organismes imagés afin de garantir qu'ils ne soient pas détériorés par un flux lumineux trop important. Dans d'autres situations, par exemple pour réaliser une imagerie en temps réel d'objets mobiles, il peut s'avérer nécessaire d'acquérir des images avec des temps de pose très courts, réduisant par conséquent la puissance lumineuse reçue au niveau du capteur. De telles images acquises à faible flux lumineux sont nécessairement entachées par un *bruit de photon* (ou *shot noise*), dont il n'a pas été tenu compte dans les

<sup>43</sup> – Cet écart-type indicatif est obtenu à partir de l'expression de la variance théorique de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  donnée à l'équation (2.34).

modèles statistiques des fluctuations d'intensité de speckle considérés jusqu'ici. Cette source fondamentale de fluctuations d'intensité provient de la nature quantique du champ électromagnétique et son influence reste tout à fait négligeable pour les niveaux d'éclairement lumineux habituellement mis en œuvre dans des applications d'imagerie standard. En revanche, pour un éclairage à faible flux de photons, il est nécessaire de prendre en considération cette source de fluctuations additionnelle, qui vient se superposer aux fluctuations de speckle.

Ainsi, on supposera dans cette section que le capteur enregistre non plus des niveaux d'intensité continûment répartis, mais un certain nombre entier de photodétections noté  $n$ , dont le résultat s'exprime sous la forme d'un photocomptage, qui donne le nombre de photons reçus sur le capteur pendant une durée de mesure  $T$ . Ce processus de photodétection sera étudié plus en détail dans la seconde partie de cette thèse et nous supposerons ici que le capteur est parfait, et n'est soumis à aucun autre bruit parasite que le phénomène de speckle et le phénomène de quantification de l'intensité lumineuse. Nous adoptons alors le modèle simplifié de photodétection suivant qui permet de prendre en compte l'influence du bruit de photon [72, 118] : en un point  $\mathbf{r}$  du détecteur, si la distribution statistique de l'intensité de speckle (caractérisée par la loi  $P_I(I)$  en l'absence de bruit de photon) produit une réalisation d'intensité  $I_\lambda$ , on considère que le nombre de photons mesurés est une variable aléatoire notée  $N$ , distribuée selon une loi de Poisson de la forme<sup>44</sup>  $P_{N|I_\lambda}(n|I_\lambda) = \exp(-I_\lambda)[I_\lambda]^n/(n!)$ .

Grâce au modèle de photodétection adopté, on peut déduire la loi de probabilité  $P_N(n)$  qui s'écrit

$$P_N(n) = \int_0^{+\infty} P_{N|I}(n|I) P_I(I) dI. \quad (2.53)$$

La forme explicite de cette DDP ne s'obtient pas aisément dans le cas général mais on peut la calculer dans le cas d'un speckle pleinement développé d'ordre 1, comme cela est démontré en annexe B.4, ce qui conduit à la loi de probabilité suivante

$$P_N(n) = \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I} \left\{ \left[ \frac{\mu_I(1+\mathcal{P})}{2+\mu_I(1+\mathcal{P})} \right]^{n+1} - \left[ \frac{\mu_I(1-\mathcal{P})}{2+\mu_I(1-\mathcal{P})} \right]^{n+1} \right\}. \quad (2.54)$$

Dans la suite de cette section, nous analysons les conséquences de la prise en compte du bruit de photon sur les performances d'estimation du degré de polarisation au sens des moments, à partir d'une unique image d'intensité pour un modèle de speckle général correspondant aux hypothèses énoncées en section 2.1.1. Nous étudierons également comment la borne de Cramer-Rao est modifiée dans le cas le plus simple d'un speckle pleinement développé d'ordre un.

### 2.5.1 Estimation au sens des moments à faible flux

Nous nous plaçons dans cette section dans un cas général où la statistique d'intensité de speckle  $P_I(I)$  en l'absence de bruit de photon peut être modélisée conformément aux hypothèses introduites en section 2.1.1. Bien qu'il soit difficile

<sup>44</sup> – Cette écriture suppose implicitement que l'efficacité quantique  $\eta$  du détecteur, qui caractérise sa qualité technologique, est égale à un (voir chapitre 3).



dans le cas général de déterminer la loi de probabilité discrète  $P_N(n)$  lorsque le bruit de photon est pris en compte à partir de la DDP  $P_I(I)$ , il est cependant possible de déduire les valeurs des cumulants  $C_j^N$ ,  $j \in [1; 4]$  de la loi discrète en fonction des cumulants  $C_j^I$ ,  $j \in [1; 4]$  de la loi continue ou en fonction des cumulants  $\kappa_j$ ,  $j \in [1; 4]$  (voir annexe B.2.3). Grâce à ces relations, nous pourrions ainsi aisément calculer le biais et la variance des estimateurs au sens des moments étudiés dans cette section.

### 2.5.1.1 Nécessité d'introduire un nouvel estimateur non biaisé

Pour estimer le carré du degré de polarisation  $\beta$  sur des images de speckle acquises à très faible flux, on peut envisager d'appliquer l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  introduit en section 2.3.1, en remplaçant les échantillons d'intensité  $\{I_1, \dots, I_M\}$  par les résultats de photocomptage  $\{n_1, \dots, n_M\}$  provenant d'une région homogène de  $M$  pixels [38]<sup>45</sup>.

On peut montrer cependant (cf. annexe B.3.3.1 ou référence [38]) que cette solution conduit à une estimation biaisée de la valeur de  $\beta$  puisque l'on a

$$\langle \hat{\beta}_2 \rangle - \beta = \frac{2}{\kappa_2 \mu_I} \left( \frac{M-1}{M} \right) - \frac{1+\beta}{M}. \quad (2.55)$$

Ainsi, lorsqu'on prend en compte le bruit de photon, le biais asymptotique pour une taille d'échantillon  $M \rightarrow \infty$  de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  est non nul, car on a  $\langle \hat{\beta}_2 \rangle - \beta \simeq 2/\kappa_2 \mu_I$ . Si cet estimateur peut être considéré asymptotiquement non biaisé quand l'intensité moyenne de l'éclairement est élevée  $\mu_I \gg 1$  (c'est-à-dire lorsque les effets du bruit de photon sont négligeables), les valeurs estimées par  $\hat{\beta}_2$  sont fortement erronées lorsque l'intensité lumineuse devient très faible. Par exemple pour un speckle d'ordre  $L = 1$ , le biais asymptotique relatif  $(\langle \hat{\beta}_2 \rangle - \beta)/\beta$  à grande taille d'échantillon ( $M \rightarrow \infty$ ) dépasse les 20% pour un éclairement moyen  $\mu_I = 10$  photons par pixel [38]. Plus quantitativement, la valeur minimale de l'intensité lumineuse nécessaire pour que le biais asymptotique relatif  $(\langle \hat{\beta}_2 \rangle - \beta)/\beta \simeq 2/(\kappa_2 \mu_I \beta)$  demeure inférieur à 1% a été évaluée pour différents modèles de speckle, et est reportée en troisième colonne du tableau 2.5. On remarque ainsi que pour les différents modèles de speckle testés, l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  ne permet pas d'assurer une estimation non biaisée en deçà de quelques centaines de photons par pixel (ou de quelques milliers pour une loi gamma d'ordre  $L \geq 5$ ).

Il paraît donc intéressant de proposer un nouvel estimateur qui parvienne à estimer  $\beta$  sans biais, y compris lorsque la puissance d'éclairement est faible. Dans la référence [38], nous avons montré que l'on pouvait réaliser une telle estimation non biaisée au moyen de l'estimateur suivant

$$\hat{\beta}_2^p = \frac{2\hat{S}_2}{\kappa_2(\hat{\mu}_N)^2} - \frac{2}{\kappa_2\hat{\mu}_N} - 1, \quad (2.56)$$

où  $\hat{S}_2$  et  $\hat{\mu}_N$  désignent respectivement les estimations empiriques, sur les  $M$  mesures  $\{n_1, \dots, n_M\}$ , de la variance et de la moyenne du photocomptage. Par rapport à l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ , le terme additionnel  $-2/(\kappa_2\hat{\mu}_N)$  qui apparaît dans

<sup>45</sup> – Par souci de concision, nous nous limiterons ici à étudier l'estimation de  $\beta$  au sens des moments lorsque l'intensité moyenne  $\mu_I$  est inconnue *a priori*.

Densité de probabilité	Ordre de la loi	Intensité minimale pour assurer un biais asymptotique $\leq 1\%$	$[\mu_I]_{min}^{10\%}$
Gamma	1	200	40
	$L$	$200 \times L$	$40 \times L$
Weibull	2	$\simeq 730$	$\simeq 150$
	5	$\simeq 380$	$\simeq 35$
Loi $\mathcal{K}$	1	$\simeq 70$	$\simeq 7$
	10	$\simeq 170$	$\simeq 30$

TAB. 2.5 – Comparaison de différentes valeurs caractéristiques de l'intensité moyenne (exprimée en nombre de photons par pixel) obtenues pour différents modèles de speckle (voir texte).

l'expression de  $\hat{\beta}_2^p$  permet d'assurer une estimation asymptotiquement non biaisée. En effet, le biais de  $\hat{\beta}_2^p$  vaut (voir annexe B.3.3.2 ou [38])

$$\langle \hat{\beta}_2^p \rangle - \beta = -\frac{2}{M\kappa_2\mu_I} - \frac{1+\beta}{M}, \quad (2.57)$$

et s'annule bien lorsque la taille d'échantillon  $M \rightarrow \infty$ .

### 2.5.1.2 Précision théorique de la méthode d'estimation à faible flux

En ce qui concerne la précision de l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$ , on a montré (voir annexe B.3.3.2 et [38]) que sa variance d'estimation asymptotique<sup>46</sup> pouvait s'écrire :

$$\text{var}_a(\hat{\beta}_2^p) = \frac{1}{M} \left[ \tau_0(\beta) + \frac{\tau_1(\beta)}{\mu_I} + \frac{\tau_2(\beta)}{\mu_I^2} \right], \quad (2.58)$$

où  $\tau_0(\beta)$  s'exprime en fonction de  $\text{var}_a(\hat{\beta}_2)$  donnée en équation (2.32),

$$\begin{aligned} \tau_0(\beta) &\triangleq M \times \text{var}_a(\hat{\beta}_2) \\ &= 2(1+\beta)^2 + \frac{\gamma^2}{2}(1+6\beta+\beta^2) + 2\kappa_2(1+\beta)^3 - 2\gamma_1\sqrt{\kappa_2}(1+\beta)(1+3\beta), \end{aligned} \quad (2.59)$$

et avec

$$\begin{aligned} \tau_1(\beta) &\triangleq \frac{8}{\kappa_2}(1+\beta) - 4(1+\beta)^2 + 4\frac{\kappa_3}{\kappa_2^2}(1+3\beta) \\ \tau_2(\beta) &\triangleq \frac{8}{\kappa_2^2} + \frac{4}{\kappa_2}(1+\beta), \end{aligned} \quad (2.60)$$

que l'on peut calculer à partir des valeurs des cumulants  $\kappa_i$ ,  $i \in [2; 4]$  de la loi normalisée  $f$ , caractéristique du modèle de speckle considéré.

On peut remarquer que lorsque le bruit de photon est négligeable ( $\mu_I \gg 1$ ),

<sup>46</sup> – Rappelons que la variance asymptotique ne prend en compte que les termes dominants en  $1/M$  de l'expression de la variance.

la variance asymptotique de  $\hat{\beta}_2^p$  est identique à celle de l'estimateur au sens de moments  $\hat{\beta}_2$  introduit auparavant, et reste dans ce cas indépendante de la valeur de  $\mu_I$ . En revanche, lorsque la puissance de l'éclairage moyen diminue, la contribution des termes additionnels  $\tau_1(\beta)/(M\mu_I)$  et  $\tau_2(\beta)/(M\mu_I^2)$  provoque une augmentation de la variance de  $\hat{\beta}_2^p$ . Ceci est clairement illustré sur la figure 2.26 où l'évolution de la variance d'estimation est représentée en fonction du niveau d'intensité moyen, pour des speckles d'ordres différents ( $L \in \{1; 5; 50\}$ ) et pour deux valeurs du degré de polarisation  $\mathcal{P} = 0, 2$  (figure 2.26.a) et  $\mathcal{P} = 0, 8$  (figure 2.26.b). Les courbes tiretées (—) représentent la variance théorique calculée ci-dessus, tandis que les symboles représentent la variance évaluée à partir de simulations numériques sur  $R = 10^4$  réalisations<sup>47</sup>. Cette figure illustre bien l'existence d'un seuil d'intensité, en dessous duquel l'influence du bruit de photon commence à dégrader significativement la précision de l'estimation de  $\beta$ .

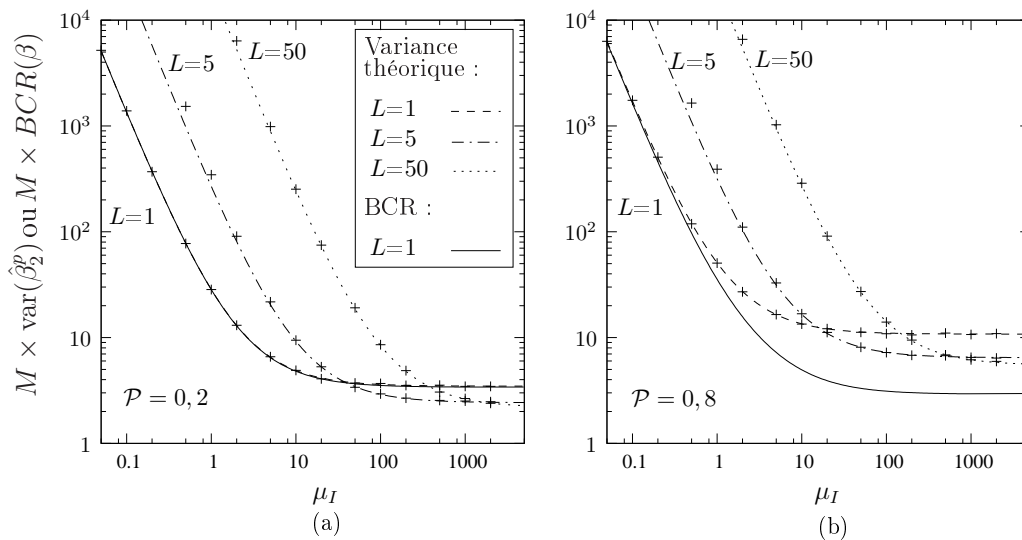


FIG. 2.26 – Évolution de la BCR (courbes en trait continu) et de la variance théorique (courbes en traits pointillés) et évaluée par simulation Monte-Carlo (symboles +) de l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  en fonction de l'intensité moyenne  $\mu_I$  pour deux valeurs du degré de polarisation  $\mathcal{P} = 0, 2$  (a) et  $\mathcal{P} = 0, 8$  (b).

Pour caractériser ce seuil, on propose d'évaluer la valeur critique de l'intensité moyenne, notée  $[\mu_I]_{min}^\alpha$ , en deçà de laquelle la variance asymptotique de  $\hat{\beta}_2^p$  devient supérieure à  $\text{var}_a(\beta_2)$  de plus de  $\alpha\%$ . En supposant que la contribution du bruit de photon à la variance additionnelle peut être correctement approchée par le seul terme  $\tau_1(\beta)/(M\mu_I)$ , on a [38]

$$[\mu_I]_{min}^\alpha \simeq \frac{1}{\alpha} \max_{\beta \in [0,1]} \left[ \frac{\tau_2(\beta)}{\tau_0(\beta)} \right]. \quad (2.61)$$

Ce seuil a été évalué pour une augmentation relative de la variance de  $\alpha = 10\%$ , pour différents modèles statistiques d'intensité de speckle. Les valeurs obtenues figurent dans la quatrième colonne du tableau 2.5, et ont été calculées grâce aux

<sup>47</sup> – Bien que nous ne le représentons pas ici, ces simulations permettent également de vérifier l'absence de biais qui caractérise l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  (voir [38]).

valeurs des cumulants  $\kappa_i$ ,  $i \in [2; 4]$  de la loi  $f$  fournies dans le tableau 2.1 en page 50. En analysant les valeurs de seuil obtenues pour les modèles de speckle testés ici, on remarque qu'il est possible de diminuer l'intensité lumineuse jusqu'à une centaine de photons par pixel, sans augmenter la variance de  $\hat{\beta}_2^p$  de plus de 10% par rapport à la variance qu'on obtiendrait à forte intensité. Un tel niveau d'intensité représente une puissance lumineuse d'éclairement très faible, ce qui montre ainsi que la technique d'estimation proposée peut être réalisée avec des temps d'acquisition de l'image très courts, permettant ainsi d'imager en temps réel des scènes très évolutives, ou des objets mobiles.

### 2.5.2 Efficacité de l'estimateur $\hat{\beta}_2^p$ à faible flux

En observant la dégradation importante de la précision d'estimation qui se produit lorsque le bruit de photon qui perturbe l'acquisition au niveau du détecteur n'est plus négligeable, la question suivante émerge naturellement : l'augmentation de la variance lorsque  $\mu_I$  décroît est-elle due à une perte d'efficacité de l'estimateur, ou bien est-ce l'information disponible pour estimer  $\beta$  dans des données de plus en plus bruitées qui diminue ?

Il paraît donc intéressant d'étudier l'évolution de la borne de Cramer-Rao lorsque l'intensité moyenne  $\mu_I$  diminue. Cependant, la complexité de la loi de probabilité  $P_N(n)$  obtenue lorsque l'on prend en compte le bruit de photon (équation (2.54)) ne nous a pas permis de calculer explicitement la BCR. La détermination numérique des valeurs de la BCR a cependant été réalisée dans le cas le plus simple d'un speckle pleinement développé d'ordre 1, grâce à l'implantation d'un schéma numérique simple, que nous détaillons dans l'annexe A [38].

Cette BCR pour l'estimation de  $\beta$  a donc été évaluée numériquement pour de nombreuses valeurs de l'intensité moyenne  $0,05 \leq \mu_I \leq 3.10^3$  et son évolution en fonction de  $\mu_I$  est reportée en trait plein (—) sur les figures 2.26.a et 2.26.b pour  $\mathcal{P} = 0,2$  et  $\mathcal{P} = 0,8$  respectivement. De même que la variance de  $\hat{\beta}_2^p$  subissait une brutale augmentation pour les faibles valeurs de  $\mu_I$ , l'évolution de la BCR se caractérise par un seuil d'intensité d'environ 40 photons par pixel. Au-delà de ce seuil, on retrouve les valeurs de la BCR obtenues précédemment en section 2.2 quand le bruit de photon était négligé, tandis que pour des valeurs de  $\mu_I$  inférieures, la borne de Cramer-Rao commence à augmenter significativement [38], montrant ainsi que la présence du bruit de photon limite la précision de l'estimation de  $\beta$  à faible flux. En ce qui concerne l'efficacité de l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$ , ces deux figures 2.26.a et 2.26.b permettent de retrouver un résultat établi dans la référence [38] :

- Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, lorsque le bruit de photon est négligeable, l'estimation de  $\beta$  au sens des moments n'est *efficace* que si  $\mathcal{P}$  est inférieur à 0,3.
- Pour les faibles valeurs de  $\mu_I$  en revanche ( $\mu_I \leq 1$ ), l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  s'avère efficace quelle que soit la valeur à estimer du degré de polarisation.

On peut par conséquent conclure que l'estimateur de  $\beta$  au sens des moments étudié ici semble adapté lorsque l'intensité d'éclairement est très faible. En effet, comme nous l'avons vu, cet estimateur permet non seulement d'assurer une estimation non biaisée de  $\beta$  en présence de bruit de photon mais il s'avère également quasiment efficace en terme de précision d'estimation pour de très faibles

Ordre du speckle	$L = 1$	$L = 10$	$L = 50$
$\mu_{I_{opt}}$	$\leq 2$	$\leq 20$	$\leq 100$
$Q_{opt}$ pour $\phi T_{tot} = 10^3$ photons	$\geq 500$	$\geq 50$	$\geq 10$
$T_{opt} = T_{tot}/Q_{opt}$	$\leq 1/500^e$ s	$\leq 1/50^e$ s	$\leq 1/10^e$ s
Gain en variance (estimateur $\hat{\beta}_2^p$ )	$\geq 125$	$\geq 13$	$\geq 3$

TAB. 2.6 – Comparaison de différentes valeurs caractéristiques de l’intensité moyenne, obtenues pour différents modèles de speckle.

intensités d’éclairement.

### 2.5.3 Imageur polarimétrique optimal à faible flux

Avant de conclure cette section, nous proposons d’illustrer comment les résultats précédents permettent d’optimiser les performances d’un dispositif d’imageirie polarimétrique à une image en utilisant plusieurs acquisitions réalisées à faible flux, permettant ainsi de maximiser le nombre d’échantillons pris en compte pour l’estimation de  $\beta$ . Considérons en effet une situation donnée, dans laquelle l’estimation est réalisée sur  $M$  pixels éclairés par un flux lumineux moyen uniforme  $\phi$  (exprimé en photons par pixel et par seconde) rétrodiffusé par un objet de la scène polarimétrique. Le nombre moyen de photons acquis en chaque pixel de l’image dépend du temps d’intégration  $T$  pendant lequel le capteur opère la mesure puisque  $\mu_I = \phi T$ . On peut alors se poser la question suivante : est-il plus judicieux de mesurer une unique image de  $M$  pixels et d’intensité moyenne  $\mu_I$  ou bien d’acquérir  $Q$  images de même taille  $M$ , d’intensité plus faible  $\mu_I/Q$  et contenant des réalisations différentes et indépendantes de la figure de speckle ? Cette seconde solution permettrait en effet de multiplier par  $Q$  le nombre de pixels disponibles pour estimer le degré de polarisation. Un tel dispositif est envisageable en pratique en plaçant un diffuseur mobile devant la source d’éclairement cohérent afin d’obtenir des réalisations indépendantes du speckle.

Pour répondre à cette interrogation, nous avons montré (cf. annexe B.3.3.3 ou référence [38]) que pour une durée d’intégration totale  $T_{tot}$  constante, et pour un éclairement de flux moyen  $\phi$ , la variance de l’estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  est minimale si l’estimation est réalisée sur  $Q_{opt}$  acquisitions indépendantes de la figure de speckle, de durée  $T_{opt} = T_{tot}/Q_{opt}$  et dont l’intensité vaut  $\mu_{I_{opt}} = \phi T_{opt}/Q_{opt}$ , avec

$$Q_{opt} = \phi T_{opt} \sqrt{\frac{\tau_0(\beta)}{\tau_2(\beta)}}, \quad \text{d'où on déduit} \quad \mu_{I_{opt}} = \sqrt{\frac{\tau_2(\beta)}{\tau_0(\beta)}}. \quad (2.62)$$

Les valeurs  $Q_{opt}$  et  $\mu_{I_{opt}}$  dépendent donc de  $\beta$  et du modèle de speckle considéré à travers les cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$  qui interviennent dans les expressions de  $\tau_0(\beta)$  et  $\tau_2(\beta)$  données respectivement aux équations (2.59) et (2.60).

Pour donner un ordre de grandeur du gain auquel on peut s’attendre en utilisant le résultat précédent, nous avons comparé les variances obtenues pour différents ordres de speckle  $L \in \{1; 10; 50\}$  quand on réalise une unique acquisition d’intensité élevée  $\mu_I = \phi T_{tot} = 10^3$  photons (avec  $T_{tot} = 1$  s et  $\phi = 10^3$  photons

par seconde) pour laquelle l'influence du bruit de photon est quasiment négligeable, ou bien lorsqu'on acquiert  $Q_{opt}$  images à faible intensité  $\mu_{I_{opt}}$ . Nous avons regroupé les résultats obtenus dans le tableau 2.6, dans lequel nous avons reporté la valeur maximale de  $\mu_{I_{opt}}$  lorsque  $\beta$  varie entre 0 et 1 (ligne 2 du tableau). Cette borne a été déterminée numériquement à partir de l'expression (2.62). On peut alors en déduire aisément une borne inférieure de  $Q_{opt}$  qui représente le nombre d'acquisitions optimal (ligne 3), de même que le temps d'intégration  $T_{opt}$  optimal à retenir pour chacune de ces acquisitions peut être borné supérieurement (ligne 4). On peut alors calculer le rapport des variances théoriques, évaluées grâce à l'équation (2.58), lorsqu'on considère une unique acquisition d'intensité  $\mu_I = 10^3$  ou qu'on optimise le nombre d'images acquises. La borne inférieure de ce rapport lorsque  $\mathcal{P}$  évolue entre 0 et 1 permet d'évaluer le gain minimal auquel on peut s'attendre en optimisant le nombre d'images acquises, et est reporté à la quatrième ligne du tableau 2.6.

Dans la situation étudiée ici, le gain est plus important lorsqu'on utilise un speckle pleinement développé d'ordre un<sup>48</sup> ( $L = 1$ ) et permet de diminuer l'écart-type de la mesure par un facteur au moins égal à  $\sqrt{125} \simeq 11,2$ . Cependant, cette diminution importante de l'écart-type disparaît rapidement dès que l'on considère un speckle d'ordre élevé et n'atteint que  $\sqrt{13} \simeq 3,6$  pour  $L = 10$ , voire  $\sqrt{3} \simeq 1,7$  pour  $L = 50$ . Cette remarque confirme une des conclusions précédentes : pour l'utilisation d'une méthode d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité de speckle, il est préférable dans la mesure du possible que le capteur échantillonne correctement le speckle, afin d'obtenir un speckle pleinement développé d'ordre 1.

La valeur élevée du gain que nous avons déterminée ci-dessus dans le cas d'un speckle pleinement développé d'ordre 1 doit toutefois être relativisée quelque peu car on peut craindre qu'à de tels niveaux d'éclairement moyen ( $\mu_{I_{opt}} \simeq 2$  photons par pixel), la mesure soit perturbée par un bruit de fond parasite additif, ou par un bruit dû à l'imperfection du capteur (efficacité quantique non unitaire ou bruit propre du capteur).

### 2.5.4 Conclusion sur l'estimation de $\beta$ à faible flux

Les résultats présentés dans cette section confirment qu'il est possible d'estimer le degré de polarisation (ou tout au moins son carré  $\beta$ ) à partir d'une unique image d'intensité de speckle, même lorsque celle-ci est acquise à très faible flux et par conséquent perturbée par un bruit de photon poissonien. Cette estimation peut par ailleurs être réalisée très simplement, à condition de modifier l'estimateur au sens des moments  $\hat{\beta}_2$  utilisé jusqu'ici, car celui-ci conduit à une estimation biaisée dès que le bruit de photon n'est plus négligeable. En étudiant la variance théorique du nouvel estimateur introduit, nous avons aussi pu caractériser le niveau d'intensité critique qu'il est nécessaire d'assurer pour ne pas trop dégrader la précision d'estimation. Ce seuil d'intensité d'environ une centaine de photons mesurés en moyenne par pixel du détecteur garantit ainsi une très grande rapidité de l'estimation due à sa simplicité et aux faibles temps d'acquisition qu'elle autorise. Cette étude permet donc d'ouvrir des perspectives intéressantes pour

<sup>48</sup> – Dans ce cas là, le faible niveau d'intensité  $\mu_{I_{opt}} \simeq 2$  photons par pixel permet de surcroît d'assurer une estimation efficace de  $\beta$ .

le développement de dispositifs d'imagerie polarimétrique à faible flux et/ou en temps réel.

## 2.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons caractérisé une technique d'estimation du degré de polarisation (ou de son carré  $\beta = \mathcal{P}^2$ ) fondée sur l'analyse de la répartition statistique de l'intensité rétrodiffusée par une surface (ou une scène polarimétrique) illuminée par un éclairage cohérent. Dans un premier temps, l'étude de la variance minimale d'estimation, évaluée en déterminant la borne de Cramer-Rao pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  ou de  $\beta = \mathcal{P}^2$ , a permis de montrer que cette technique d'estimation, qui permet de s'affranchir de l'utilisation de composants optiques polarimétriques ajustables, pouvait conduire à des précisions acceptables sur la mesure de  $\beta$  à condition de réaliser l'estimation sur un échantillon homogène de  $M$  pixels suffisamment grand (typiquement  $M \simeq 40 \times 40$  pixels pour obtenir un écart-type de 0,05 sur la mesure de  $\beta$ ). En analysant l'influence de l'ordre du speckle  $L$  sur les valeurs de la BCR, nous avons également pu conclure qu'il était préférable de maximiser le nombre d'échantillons  $M$  plutôt que de chercher à diminuer la taille des grains de speckle pour augmenter l'ordre de celui-ci.

La comparaison de différents estimateurs a ensuite permis de montrer qu'une méthode très simple basée sur la mesure des deux premiers moments statistiques de l'intensité présente un fort intérêt pratique en raison de sa grande souplesse d'utilisation (adaptabilité à de nombreux modèles de speckle). Il faut cependant lui préférer des solutions plus sophistiquées, du type estimateur au sens du maximum de vraisemblance, pour obtenir une estimation efficace dans le cas où le speckle est correctement échantillonné par le capteur (speckle pleinement développé d'ordre 1).

L'utilité de ces méthodes d'estimation à une image pour des applications d'imagerie de degré de polarisation a été également discutée par le biais d'expériences d'imagerie simulées et a permis d'illustrer l'importance de la sélection de régions statistiquement homogènes dans l'image analysée. Quelle que soit la méthode d'estimation du degré de polarisation sélectionnée<sup>49</sup>, la précision sera améliorée si l'on est capable de maximiser la taille des régions dont on souhaite évaluer les caractéristiques polarimétriques et nous avons évoqué à ce propos l'intérêt d'utiliser des algorithmes de partition automatique d'image en régions statistiquement homogènes. Par ailleurs, la robustesse de la technique d'estimation en présence de bruit de photon permet également d'envisager l'acquisition de plusieurs images à très faible flux pour tenter de maximiser la taille des échantillons de mesures.

Le tableau 2.7 permet de dresser un bilan conclusif sur la méthode d'estimation étudiée dans ce chapitre en récapitulant ses principaux avantages et inconvénients. Parmi les perspectives de recherche intéressantes pour le développement pratique de cette technique d'estimation à une unique image, il semble nécessaire d'étudier les deux contraintes qui limitent l'applicabilité de cette méthode. D'une part, il serait intéressant d'établir un protocole de calibration fiable et

---

<sup>49</sup> – Y compris dans le cas des méthodes plus classiques à 4 ou 2 images.

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rapidité</li> <li>• Coût minimal (pas de composant polarimétrique ajustable)</li> <li>• Large gamme spectrale</li> <li>• Robustesse au bruit de photon</li> <li>• Souplesse d'utilisation (estimateur <math>\hat{\beta}_2</math>)</li> <li>• Validité pour <math>\Gamma</math> non diagonale</li> <li>• Existence d'un estimateur optimal pour <math>\beta &gt; \beta_{min}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Performances dégradées par rapport aux techniques à plusieurs images</li> <li>• Calibration nécessaire (estimation de <math>\kappa_2</math>)</li> <li>• Validité de l'indépendance des composantes d'intensités <math>I_1</math> et <math>I_2</math></li> <li>• Estimation biaisée pour les faibles valeurs de <math>\mathcal{P}</math></li> </ul>

TAB. 2.7 – Comparatif des avantages et inconvénients de l'estimation de degré de polarisation à une unique image.

général pour déterminer expérimentalement le modèle de fluctuation de speckle (et plus particulièrement le cumulants  $\kappa_2$ ), lorsque celui-ci ne peut être spécifié théoriquement. D'autre part, une étude théorique sur la validité des hypothèses énoncées en section 2.1.1 et nécessaires à l'application de cette méthode constitue également une perspective intéressante, notamment dans le cas de surfaces texturées.





## Deuxième partie

# États sous-poissoniens de la lumière



# Chapitre 3

## Introduction aux lumières sous-poissoniennes

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Contexte physique</b>	<b>98</b>
3.1.1	Introduction à l'optique quantique	98
3.1.2	Photodétection	101
3.1.3	Des états plus ou moins « classiques » de la lumière	103
<b>3.2</b>	<b>Modèles de processus sous-poissoniens</b>	<b>108</b>
3.2.1	Caractérisation des fluctuations sous-poissoniennes	108
3.2.2	Modèle phénoménologique temporel	112
3.2.3	Modèle de photocomptage binomial	118
<b>3.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>

---

Dans cette seconde partie de thèse, nous allons nous intéresser à des situations physiques pour lesquelles le bruit qui perturbe les signaux optiques ou les images acquises possède une variance inférieure à sa valeur moyenne. Ces fluctuations sont qualifiées de **sous-poissoniennes** car elles conduisent, à valeur moyenne égale, à une statistique plus ordonnée qu'une distribution poissonnienne standard.

De telles fluctuations optiques peuvent être de nos jours produites en laboratoire grâce aux recherches expérimentales menées en **optique quantique** depuis trois décennies. Dans ce chapitre, nous rappelons ainsi brièvement le formalisme de l'optique quantique qui permet de décrire des états non standard du rayonnement électromagnétique, parmi lesquels figurent les lumières sous-poissoniennes. Nous détaillerons ensuite comment ces bruits non standard peuvent être modélisés d'un point de vue statistique, hors du formalisme de la mécanique quantique.

## 3.1 Contexte physique

### 3.1.1 Introduction à l'optique quantique

Nous allons rappeler ici les principaux résultats de la modélisation quantique des champs électromagnétiques, qui fonde le formalisme de l'optique quantique. Pour une description plus détaillée de l'opération de quantification du rayonnement électromagnétique, nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre cité en référence [61], auquel il sera fait maintes fois référence dans cette section.

Pour un champ scalaire, monochromatique de vecteur d'onde fixé  $\mathbf{k}$ , de fréquence  $\nu$  et stationnaire<sup>50</sup>, on peut tout d'abord introduire la **variable normale** du champ [61], notée  $\alpha(\mathbf{r})$ , et qui permet d'écrire l'enveloppe complexe du signal analytique associée au champ électrique sous la forme

$$\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \mathbf{e}_0 = i \mathcal{E}_0 \alpha(\mathbf{r}) \mathbf{e}_0, \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{e}_0$  est un vecteur unitaire orthogonal à la direction de propagation (orthogonal à  $\mathbf{k}$ ) et où la constante  $\mathcal{E}_0$  est conventionnellement choisie égale à [61]

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{h\nu}{2\epsilon_0 c T}}, \quad (3.2)$$

où  $c$  représente la célérité de la lumière,  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide et  $T$  la durée d'intégration du capteur. Le choix de cette constante permet d'assurer que la quantité  $|\alpha(\mathbf{r})|^2$  représente le nombre de photons reçus par mètre carré de

---

<sup>50</sup> – C'est-à-dire que l'on supposera que les variations temporelles de l'enveloppe complexe du champ sont lentes par rapport au temps d'intégration sur le capteur  $T$ .

surface, à la position  $\mathbf{r}$  du plan transverse [28].

Cette simple réécriture des champs électromagnétiques sous la forme de variables normales n'est bien sûr pas suffisante pour appréhender la quantification du rayonnement électromagnétique. En effet, les grandeurs  $\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r})$ ,  $A(\mathbf{r})$  et  $\alpha(\mathbf{r})$  qui permettent, comme à l'équation (3.1), de décrire le champ de manière classique doivent être considérées, du point de vue de la mécanique quantique, comme des **observables du champ**, c'est-à-dire comme des **opérateurs quantiques** [61, 28]. Pour décrire la lumière du point de vue de la mécanique quantique, il convient donc de réécrire l'équation (3.1) sous la forme suivante<sup>51</sup>

$$\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \hat{A}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_0 = i \mathcal{E}_0 \hat{a}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_0, \quad (3.3)$$

où  $\hat{a}(\mathbf{r})$  représente l'**opérateur local d'annihilation de photon** [61].

On peut remarquer ici que l'information sur la distribution spatiale du champ électromagnétique est entièrement décrite par cet opérateur  $\hat{a}(\mathbf{r})$ . Pour faciliter la description des phénomènes qui nous intéresseront dans la suite, nous proposons d'utiliser le formalisme adopté par V. Delaubert dans sa thèse de doctorat [28]. Cette approche consiste à introduire un opérateur **modal** d'annihilation de photon, noté simplement  $\hat{a}$  et qui vérifie [28]

$$\hat{a}(\mathbf{r}) = \hat{a} u_0(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Ce formalisme permet ainsi de « découpler » l'opérateur quantique  $\hat{a}$  (qui devient donc indépendant de la position) et la répartition spatiale du champ, représentée désormais par la fonction  $u_0(\mathbf{r})$  qui vérifie une condition de normalisation  $\iint |u_0(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r} = 1$ . Conformément à l'usage courant, l'adjoint de cet opérateur  $\hat{a}$  sera quant à lui qualifié d'**opérateur (modal) de création de photon**, et sera noté  $\hat{a}^\dagger$ . À partir de ces deux opérateurs, on introduit également l'**opérateur nombre de photons**, défini par

$$\hat{N} \triangleq \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.5)$$

Les principales conséquences liées à cette description du champ sous la forme d'opérateurs quantiques proviennent de la non-commutativité des opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ , dont le commutateur  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ , non nul, vérifie

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \triangleq \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1. \quad (3.6)$$

En particulier, on peut montrer [61] que le spectre (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres) de l'opérateur *nombre de photons*  $\hat{N}$  se compose des entiers positifs ou nuls [22, 61], illustrant ainsi que la mesure de cette observable est quantifiée<sup>52</sup>. Les vecteurs propres notés  $|n\rangle$  et associés à chaque valeur propre

<sup>51</sup> – Nous conservons dans cette section la notation d'usage des opérateurs quantiques sous la forme  $\hat{X}$ . À l'exception de cette section cependant, cette notation désignera l'estimateur de la valeur  $X$  dans tout le reste du manuscrit.

<sup>52</sup> – La mécanique quantique postule en effet que le résultat de la mesure d'une grandeur physique est nécessairement égal à une des valeurs propres de l'observable correspondante. Si le spectre de l'observable est discret, alors les résultats de mesure sont quantifiés [22].

$n \in \mathbb{N}$  sont appelés **états nombres** ou **états de Fock** et vérifient par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (3.7)$$

Ces vecteurs forment une base de l'espace de Hilbert des états du champ dans le mode unique considéré ici et permettent dans certains cas de représenter aisément d'autres états du champ. Par ailleurs, l'énergie  $E_{|n\rangle}$  d'un tel état nombre  $|n\rangle$  s'écrit [61],

$$E_{|n\rangle} = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (3.8)$$

montrant ainsi que même en l'absence de photon (état  $|0\rangle$ ), l'énergie du champ électromagnétique est non nulle.

### 3.1.1.1 Opérateurs de quadrature :

Nous introduisons également deux **opérateurs de quadrature**, notés  $\hat{\mathcal{E}}_P$  et  $\hat{\mathcal{E}}_Q$  qui nous seront utiles par la suite pour décrire les états quantiques de la lumière. Ces opérateurs s'expriment simplement en fonction des parties réelle et imaginaire de l'opérateur  $\hat{a}$  :

$$\hat{\mathcal{E}}_P = \mathcal{E}_0[\hat{a}^\dagger + \hat{a}], \quad \text{et}, \quad \hat{\mathcal{E}}_Q = i\mathcal{E}_0[\hat{a}^\dagger - \hat{a}]. \quad (3.9)$$

Dans une description classique du champ, ces grandeurs s'interprètent directement comme les parties réelle et imaginaire de l'enveloppe complexe du champ. En tant qu'opérateurs quantiques, ils ne commutent cependant pas entre eux, rendant par conséquent impossible la mesure simultanée des quadratures du champ avec une précision absolue [61]. Cette **relation d'incertitude** se traduit plus précisément par l'**inégalité de Heisenberg** suivante [61]

$$\sigma[\mathcal{E}_P] \cdot \sigma[\mathcal{E}_Q] \geq \mathcal{E}_0^2, \quad (3.10)$$

où  $\sigma(X)$  représente l'écart-type sur la mesure d'une observable  $\hat{X}$ .

### 3.1.1.2 Valeur moyenne des observables :

On peut simplement relier les opérateurs quantiques introduits précédemment aux grandeurs classiques correspondantes. En effet, pour un opérateur  $\hat{X}$ , la grandeur classique correspondante est égale à la valeur moyenne<sup>53</sup> de celui-ci  $\langle \hat{X} \rangle$ . Ainsi, le nombre moyen de photons dans le mode considéré sera noté

$$\mu_N = \langle \hat{N} \rangle. \quad (3.11)$$

### 3.1.1.3 Cas des champs multimodes :

Par souci de simplicité, nous avons supposé jusqu'à présent que le champ électromagnétique était **monomode**. Cela n'est pas toujours le cas dans les expériences d'optique quantique : en effet, on peut imaginer des états lumineux

---

<sup>53</sup> – En mécanique quantique, la valeur moyenne  $\langle \hat{X} \rangle$  d'une observable  $\hat{X}$  est définie comme la moyenne statistique de la mesure de cette observable sur un état quantique donné  $|\Psi\rangle$ . En d'autres termes, pour un état  $|\Psi\rangle$  donné, on a  $\langle \hat{X} \rangle = \langle \Psi | \hat{X} | \Psi \rangle$  (voir par exemple [22]).

composés de plusieurs modes de polarisation ou contenant différentes composantes, de vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_i$  distincts. En outre, même en restant dans les limites d'un champ scalaire monochromatique, le champ électrique peut être décomposé sur une base discrète quelconque<sup>54</sup> de modes transverses  $\{u_i(\mathbf{r})\}_{i \in \mathbb{N}}$ , orthonormés ( $\iint u_i^*(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})d^2\mathbf{r} = \delta_{i,j}$ ). Par exemple, les modes de Hermite-Gauss ou de Laguerre-Gauss sont bien adaptés pour décrire la distribution spatiale transverse d'un champ dans une cavité cylindrique [61, 28]. De même, lorsque la mesure du champ électromagnétique est réalisée sur un détecteur matriciel, la description du champ sous la forme de « modes pixels » peut s'avérer tout à fait indiquée [149].

Ainsi, lorsque plusieurs modes coexistent au sein du rayonnement lumineux, il est nécessaire de remplacer l'opérateur  $\hat{a}(\mathbf{r})$  introduit à l'équation (3.4) par un ensemble d'opérateurs vérifiant

$$\hat{a}(\mathbf{r}) = \sum_k \hat{a}_k u_k(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

où la sommation discrète peut, le cas échéant, porter sur une infinité dénombrable de termes [28]. Les opérateurs  $\hat{a}_k$  obéissent dans ce cas aux relations de commutation suivantes  $[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{n,m}$ . À chacun de ces modes, nous pouvons bien sûr associer des opérateurs de quadrature, ainsi que des opérateurs *nombre de photons*  $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ .

Un état multimodal  $|\Psi\rangle$  contenant  $n_k$  photons dans le mode  $k$  peut ainsi être représenté sur la base des états nombres en écrivant  $|\Psi\rangle = |n_1, \dots, n_k, \dots\rangle$ . Tout se passe donc comme si le champ électrique pouvait être décrit comme un ensemble de  $n_1$  particules indépendantes (**photons**) « peuplant » le mode 1,  $n_2$  particules indépendantes « peuplant » le mode 2, etc.

### 3.1.2 Photodétection

Après avoir introduit les bases du formalisme de l'optique quantique, nous abordons ici la modélisation des signaux de photodétection (ou photocomptage) sur lesquels sont basés les travaux présentés dans la suite de cette thèse<sup>55</sup>.

#### 3.1.2.1 Modèle de photodétecteur unique

Considérons dans un premier temps le cas d'un photodétecteur unique dont la surface sensible, notée  $\Sigma$ , est supposée suffisamment étendue pour capter la totalité du faisceau lumineux étudié (*bucket detector* en anglais). Nous ne rappellerons pas ici la théorie quantique rigoureuse de la photodétection, fondée en 1963 dans le célèbre article de R. J. Glauber [51]. Suivant une démarche similaire aux références [122, 28], nous nous limiterons plutôt à supposer qu'un tel détecteur permet de mesurer l'observable  $\hat{N}_r$  qui correspond au nombre total de

<sup>54</sup> – Ces modes doivent néanmoins vérifier l'équation de propagation du champ électromagnétique dans l'approximation paraxiale. (Voir la référence [28], p. 10 pour une discussion plus approfondie de ces conditions.)

<sup>55</sup> – Nous laisserons de côté ici la mesure des observables continues du champ (par exemple les quadratures du champ) pour laquelle on utilise couramment des techniques de détection **homodyne** auxquelles on ne s'intéressera pas ici (Voir par exemple [61]).



photoévénements<sup>56</sup> détectés par le capteur pendant une durée d'intégration  $T$ . Dans le cas d'un rayonnement monomode, on admettra que cette grandeur peut s'écrire [28]

$$\hat{N}_r = \frac{\eta}{\mathcal{E}_0^2} \iint_{\Sigma} \hat{A}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \eta \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (3.13)$$

où  $\hat{A}(\mathbf{r})$  représente l'opérateur introduit à l'équation (3.3), associé à l'enveloppe complexe du champ supposé scalaire et où  $\eta$  représente l'**efficacité quantique** du détecteur. Avec ce modèle simplifié de photodétection, on admettra que le photodétecteur permet de mesurer l'observable  $\hat{N}_r$ , et qu'en moyenne le capteur fournit la valeur suivante :

$$\langle \hat{N}_r \rangle = \eta \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \eta \langle \hat{N} \rangle = \eta \mu_N, \quad (3.14)$$

où  $\mu_N$  représente le nombre moyen de photons contenus dans l'unique mode de rayonnement. En raison de la nature quantique du champ électromagnétique, les résultats de mesure du nombre de photons sont entâchés de fluctuations, même en l'absence de toute source de bruit. Ces fluctuations peuvent être caractérisées par l'intermédiaire du modèle simplifié de photodétection adopté ici [28] et seront étudiées dans la section suivante pour différents états quantiques de la lumière.

Sauf indication du contraire, nous considérerons toujours dans la suite que l'efficacité quantique des détecteurs utilisés est unitaire ( $\eta = 1$ ), ce qui constitue un cas limite de photodétection idéale. On pourra alors identifier le résultat du processus du photocomptage  $\hat{N}_r$  avec l'observation de l'opérateur *nombre de photons*  $\hat{N}$  du faisceau monomode<sup>57</sup>. Cette hypothèse revient à supposer que chaque photon détecté à la surface du capteur est converti avec une probabilité de 1 en un porteur de charge élémentaire (électron). Cette hypothèse peut paraître forte au regard de la qualité des photodétecteurs actuels. Cependant, les progrès technologiques incessants pour réduire le bruit propre des photodétecteurs à comptage de photons (photomultiplicateurs, photodiodes à avalanche) tendent à rapprocher continuellement les expérimentateurs de cette situation idéale. Par ailleurs, nous étudierons dans la suite comment l'utilisation d'états quantiques non standards (états sous-poissoniens) permet d'améliorer les performances de traitements d'image. Par conséquent, supposer que l'étape de photodétection s'effectue de manière idéale nous permettra de borner ce gain en performance en caractérisant le cas idéal où les bruits « technologiques » peuvent être négligés.

### 3.1.2.2 Photocompteur matriciel pour l'imagerie

Le modèle de photodétecteur unique que nous venons d'évoquer est clairement inadapté à la description d'expériences d'imagerie. En effet, la formation d'images nécessite de juxtaposer un grand nombre de détecteurs élémentaires pour réaliser une mesure d'intensité lumineuse en chaque point du plan transverse.

Nous admettrons dans la suite que l'acquisition des images est réalisée par un capteur matriciel, constitué d'un grand nombre de photodétecteurs idéaux en régime de comptage de photons. Chaque pixel de l'image ainsi constituée permet-

<sup>56</sup> – Un photon incident sur la surface du détecteur donne lieu à un photoévénement lorsqu'il est converti en porteur de charge au niveau du capteur et est effectivement détecté par celui-ci.

<sup>57</sup> – Par conséquent, nous ne distinguerons plus par la suite les observables  $\hat{N}_r$  et  $\hat{N}$ .

tra de coder en niveau de gris le résultat de photocomptage réalisé par chaque photodétecteur élémentaire. Pour une efficacité quantique  $\eta = 1$ , le modèle de photodétection de l'équation (3.13) permet d'écrire, au niveau du détecteur « élémentaire » de surface  $\Sigma_j$  associé au pixel  $j$

$$\hat{N}_j = \frac{1}{\mathcal{E}_0^2} \iint_{\Sigma_j} \hat{A}_0^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_0(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \iint_{\Sigma_j} |u_0(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r}, \quad (3.15)$$

où  $u_0(\mathbf{r})$  représente le profil spatial du mode. Notons en outre que cette dernière équation peut se généraliser au cas d'un champ multimode (voir équation (3.12)) en écrivant,

$$\hat{N}_j = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \iint_{D_j} |u_k(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r}, \quad (3.16)$$

où  $u_k(\mathbf{r})$  représente le profil spatial du mode  $k$  du champ.

Si ce modèle parfait de photocompteur matriciel peut paraître assez irréaliste dans l'état actuel de la technologie des instruments de photocomptage, les progrès technologiques récents permettent néanmoins d'envisager que de tels dispositifs d'imagerie en comptage de photons voient le jour prochainement [141, 11, 53]. Nous reviendrons plus en détail au chapitre suivant sur cette modélisation simple de photodétecteurs matriciels. Elle nous sera en effet utile pour étudier l'amélioration de la précision optimale de positionnement de faisceau en présence d'états non classiques de la lumière.

### 3.1.3 Des états plus ou moins « classiques » de la lumière

Le formalisme de l'optique quantique rappelé brièvement au début de ce chapitre va nous permettre ici de passer rapidement en revue quelques exemples d'états particuliers communément utilisés en optique quantique. Nous présentons tout d'abord les états dits « quasi-classiques » (« vide » quantique et états cohérents de Glauber), puis nous aborderons d'autres états dits « non classiques » parmi lesquels figurent les états sous-poissoniens qui nous intéresseront plus particulièrement dans les chapitres suivants.

#### 3.1.3.1 « Vide » quantique

Nous avons vu au début de ce chapitre que l'état fondamental d'une lumière monomode possède une énergie minimale  $E_{|0\rangle} = h\nu/2$  et est caractérisé par un nombre moyen de photons nul,  $\langle \hat{N} \rangle = \mu_N = 0$ . La valeur moyenne de ses quadratures est nulle également, c'est-à-dire  $\langle \hat{\mathcal{E}}_P \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_Q \rangle = 0$ , justifiant ainsi son appellation de « vide » quantique [61]. Bien que la valeur moyenne de l'enveloppe complexe du champ soit nulle, le niveau d'énergie non nul associé au « vide » quantique provient des fluctuations statistiques du champ, qui découlent du principe d'incertitude de Heisenberg. En effet, on peut montrer [61, 28] que la variance des quadratures du champ électrique s'écrit

$$\sigma^2(\mathcal{E}_P) = \sigma^2(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_0^2. \quad (3.17)$$

L'incertitude qui entache ainsi toute mesure de quadrature du champ peut être appréhendée, hors du cadre formel de la mécanique quantique, par une inter-

prétation probabiliste similaire à celle que nous avons utilisée dans la première partie de cette thèse pour modéliser les fluctuations de champ en présence de speckle. En effet, les incertitudes qui caractérisent toute mesure d'une observable d'un champ électromagnétique peuvent être intuitivement représentées comme des fluctuations statistiques qui entachent la grandeur classique correspondante [61, 122]. Cette approche conduit ainsi naturellement à utiliser la représentation du champ électrique dans le plan de Fresnel, comme nous l'avons fait en section 1.2.2.1 pour représenter les fluctuations du champ électrique pour des modèles de speckle circulaires ou non-circulaires<sup>58</sup>. Ainsi la représentation de l'état « vide » sur le plan de Fresnel donnée en figure 3.1.a est tout à fait similaire à la figure 1.1.a tracée en page 15 : le champ est représenté par un vecteur nul, autour duquel on trace un cercle de rayon  $\mathcal{E}_0$  qui reflète les fluctuations d'origine quantique du champ autour de sa valeur moyenne.

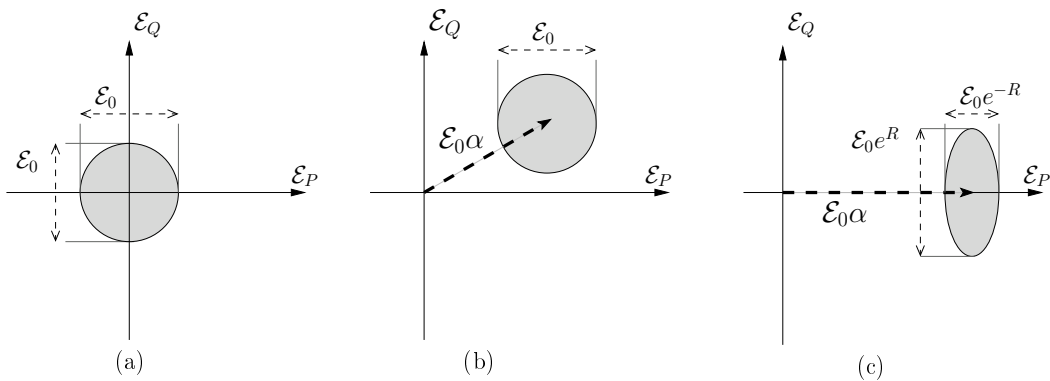


FIG. 3.1 – Représentation de Fresnel d'un état de « vide » quantique (a), d'un état quasi-classique (b) et d'un état comprimé en amplitude (c). Les axes du repère correspondent aux deux quadratures  $\hat{\mathcal{E}}_P$  et  $\hat{\mathcal{E}}_Q$  introduites à l'équation (3.9).

### 3.1.3.2 États cohérents de Glauber ou états quasi-classiques

À la différence de l'état « vide », les quadratures du champ dans l'état quasi-classique possèdent une valeur moyenne non nulle  $\langle \hat{\mathcal{E}}_P \rangle = \text{Re}[\alpha] \mathcal{E}_0$  et  $\langle \hat{\mathcal{E}}_Q \rangle = \text{Im}[\alpha] \mathcal{E}_0$ , où la variable normale du champ  $\alpha = \langle \hat{a} \rangle$  a été définie à l'équation

<sup>58</sup> – Cette approche probabiliste des incertitudes quantiques est partiellement incorrecte du point de vue de la mécanique quantique. En effet, définir la densité de probabilité conjointe  $P(X^+, X^-)$  de deux quadratures conjuguées du champ (notées  $X^+$  et  $X^-$ ) nécessite de donner un sens à la quantité  $P(X^+, X^-)dX^+dX^-$  qui représente la probabilité que le champ se situe dans un volume infinitésimal  $dX^+dX^-$  autour du point  $(X^+, X^-)$ . Cette représentation est donc problématique du point de vue de la mécanique quantique car deux quadratures ne peuvent être simultanément définies si ce volume est inférieur à la limite de Heisenberg. Pour pallier ce problème, l'optique quantique dispose d'un autre outil mathématique, la **fonction de Wigner**  $W(X^+, X^-)$ , appelée aussi « quasi-densité de probabilité », et définie de sorte que toute marginalisation de cette fonction dans une direction de quadrature donnée corresponde à la distribution de probabilité (classique) de la quadrature correspondante. Dans de nombreux cas correspondant aux états gaussiens du champ, la fonction de Wigner peut être assimilée à une densité de probabilité conjointe classique, aussi nous n'utiliserons pas dans la suite le formalisme de la fonction de Wigner [36].

(3.1) [61]. Les fluctuations de ces quadratures sont cependant identiques au cas du « vide », car elles vérifient

$$\sigma^2(\mathcal{E}_P) = \sigma^2(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_0^2. \quad (3.18)$$

Les états quasi-classiques sont donc des **états minimaux**, dans le sens où ils « saturent » l'inégalité de Heisenberg de l'équation (3.10) [61, 158]. La représentation d'un tel état dans le plan de Fresnel, schématisée sur la figure 3.1.b, se déduit donc simplement de la représentation de l'état « vide » grâce à une translation par le nombre complexe  $\mathcal{E}_0 \alpha$ .

Par ailleurs, on peut montrer que le nombre de photons contenus dans un tel mode obéit à une loi de Poisson [61, 122]

$$P_N(n) = e^{-\mu_N} \frac{(\mu_N)^n}{n!}, \quad (3.19)$$

de moyenne  $\langle N \rangle = \mu_N$  et de variance  $\text{var}(N) = \mu_N$ .

Ces états quasi-classiques sont très souvent utilisés dans les expériences d'optique quantique puisqu'ils permettent de modéliser le comportement des lumières cohérentes produites par un laser monomode au dessus de son seuil d'oscillation, en l'absence de toute source de bruit « technologique » classique [61]. Ainsi, ces états minimaux au sens de l'inégalité de Heisenberg permettent d'atteindre une limite ultime pour la précision de mesure d'une observable du champ avec une lumière laser cohérente. Cette précision limite a été largement étudiée [116, 37] et peut être expérimentalement atteinte dans certaines mesures de grande précision. Elle prend bien sûr diverses formes selon le type de mesure envisagé (mesure de quadrature, mesure de photocomptage, etc.) mais est généralement qualifiée de Limite Quantique Standard ou *Standard Quantum Limit* en anglais (SQL).

On sait néanmoins désormais que pour certaines applications de métrologie, cette précision limite peut être dépassée si l'on utilise des états quantiques de la lumière particuliers, aux propriétés non classiques et adaptés à la mesure considérée. Parmi ces états non classiques, les plus utilisés à ce jour sont les états comprimés du rayonnement que nous présentons dans le paragraphe qui suit.

### 3.1.3.3 États comprimés

Nous avons vu que les états quasi-classiques du champ (états cohérents) étaient des états minimaux au sens de l'inégalité de Heisenberg, et que les fluctuations de deux quadratures conjuguées ( $\hat{\mathcal{E}}_P$  et  $\hat{\mathcal{E}}_Q$  par exemple) étaient égales. Depuis une trentaine d'années cependant [137], on sait qu'il existe des états de la lumière qui, tout en restant minimaux au sens de l'inégalité de Heisenberg, possèdent des fluctuations **comprimées** sur une quadrature, au prix bien sûr d'un niveau de bruit plus important sur la quadrature conjuguée [61]. Cette augmentation du bruit sur la quadrature conjuguée n'est pas problématique pour la plupart des applications de métrologie optique qui se bornent à observer une seule grandeur relative au champ (l'intensité par exemple, ou une unique quadrature de champ). En effet, il suffit dans ce cas de comprimer les fluctuations dans la quadrature d'intérêt pour réduire le bruit de mesure.

Sans entrer dans les détails de la théorie quantique de ces états comprimés

(qui figurent dans les ouvrages d'optique quantique, voir [61] par exemple), nous présentons ici un état **comprimé en amplitude** qui se caractérise par des fluctuations réduites dans la quadrature *en phase* avec le champ moyen<sup>59</sup>. Supposons en outre sans perte de généralité que ce champ moyen est représenté par un nombre réel dans le diagramme de Fresnel. Sous ces hypothèses, on peut alors montrer que les fluctuations de la quadrature réelle  $\sigma^2(\mathcal{E}_P)$  sont réduites en proportion du **facteur de compression**, noté  $e^{-2R}$ , alors que les fluctuations de la quadrature conjuguée ( $\mathcal{E}_Q$ ) sont quant à elles augmentées en proportion du même facteur, c'est-à-dire<sup>60</sup>

$$\sigma^2(\mathcal{E}_P) = \mathcal{E}_0^2 e^{-2R} \quad \text{et,} \quad \sigma^2(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_0^2 e^{2R}. \quad (3.20)$$

D'un point de vue théorique, il n'existe pas de limite à la valeur du facteur de compression : il serait donc possible *a priori* de réduire à volonté le bruit d'origine quantique sur une quadrature donnée du champ. En pratique cependant, il est encore difficile d'obtenir des valeurs élevées de ce facteur de compression.

Si l'on représente un tel état sur un diagramme de Fresnel comme en figure 3.1.c, on voit alors qu'il existe un parallèle clair avec le modèle statistique d'un speckle non-circulaire présenté dans la première partie de cette thèse (Voir figure 1.1.b, page 15).

**États sous-poissoniens :** En ce qui concerne le nombre de photons contenus dans un tel état comprimé en amplitude, on peut montrer [61] que la compression des fluctuations sur la quadrature en phase avec le champ moyen se transfère au niveau des fluctuations de l'opérateur nombre de photons  $\hat{N}$ . On peut montrer en effet [61] que pour des valeurs élevées du champ moyen, on a

$$\text{var}(N) \simeq \mu_N e^{-2R}. \quad (3.21)$$

Il est donc possible de produire des états comprimés en terme de nombre de photons, qui se caractérisent par des statistiques de photocomptage plus ordonnées que le bruit quantique standard poissonien. De tels états sont pour cela communément appelés **états sous-poissoniens** du champ. Dans la section suivante de ce chapitre, les principales propriétés de ces états sous-poissoniens seront détaillées ainsi que les différents modèles qui seront utilisés dans la suite pour appréhender le comportement statistique de ces états.

**Applications des états comprimés :** Les possibilités applicatives de ces techniques de réduction du bruit quantique sont variées et ont rapidement fait l'objet de nombreuses recherches. La principale application envisagée a été l'amélioration de la précision des mesures interférométriques [165], motivée en particulier par les expériences de détection d'ondes gravitationnelles [101, 96], ou encore la spectroscopie de haute sensibilité [123].

Parmi les autres applications envisagées qui pourraient bénéficier de la réduction de bruit sur l'intensité lumineuse, on peut également citer les mesures de

---

<sup>59</sup> – Plus exactement, en phase avec la valeur moyenne de l'enveloppe complexe du champ.

<sup>60</sup> – On remarque ici que l'on a toujours  $\sigma^2(\mathcal{E}_P) \cdot \sigma^2(\mathcal{E}_Q) = \mathcal{E}_0^2$  ce qui correspond bien à un état *minimal*.

faibles absorptions [122, 73] ou encore les communications optiques [145, 132]. Nous verrons également que les progrès des générateurs d'états comprimés hautement multimodes [52, 102] laissent entrevoir de prochaines applications de ces états pour l'imagerie quantique.

**Production d'états comprimés :** Terminons cette présentation des états comprimés en évoquant les principaux moyens connus à ce jour pour produire en laboratoire de tels états comprimés, impossibles à obtenir avec des sources de lumière usuelles<sup>61</sup>. La production de ces états nécessite en effet de mettre en œuvre des effets optiques non linéaires à travers des montages expérimentaux de grande précision. Une méthode très répandue pour produire des états comprimés du rayonnement consiste à placer un milieu non-linéaire paramétrique au cœur d'une cavité optique résonnante, permettant par ce biais de réaliser la conversion paramétrique d'un photon de pompe en deux photons « jumeaux » identiques [164, 100, 122, 61]. Grâce à ces dispositifs, on peut actuellement obtenir jusqu'à  $-9$  dB de réduction de variance de bruit sur une quadrature [142].

Une autre solution envisageable consiste à utiliser des émetteurs lasers alimentés par un courant de pompe dont les fluctuations sont réduites [122, 94, 124, 166]. Il est en effet possible de produire des flux d'électrons sous-poissoniens, en particulier dans des matériaux à semi-conducteurs, ce qui a ainsi permis de concevoir des diodes laser à semi-conducteurs comprimées en intensité (sous-poissoniennes) [143]. Les performances de telles sources sont prometteuses, que ce soit en terme de facteur de compression (on a ainsi déjà pu atteindre un facteur de compression de 10 avec de telles sources [61]), ou en terme de bande passante [94]. Enfin, nous pouvons citer d'autres techniques de production d'états sous-poissoniens, fondées quant à elles sur un contrôle actif du flux de photons [99, 67], par exemple grâce à l'utilisation de paires de photons « jumeaux » [89] ou bien utilisant des sources à photon unique contrôlées [150].

### 3.1.3.4 Autres états non classiques de la lumière

Pour terminer cette présentation des états quantiques de la lumière, citons enfin quelques états non classiques, prédits depuis longtemps par la théorie quantique mais que l'on sait produire en laboratoire depuis peu de temps :

- Les **états de Fock**, ou états « nombre », notés  $|n\rangle$ , contiennent un nombre fixé de photons. Malgré leur simplicité apparente dans le formalisme de l'optique quantique, ils sont difficiles à produire expérimentalement.
- L'état « **chat de Schrödinger** » est une superposition linéaire d'états cohérents impossible à décrire hors du cadre de la mécanique quantique et peut être produit en laboratoire depuis quelques années [109].
- Les **états intriqués** sont des états multimodes qui présentent des corrélations importantes entre leurs quadratures [5] et peuvent être produits grâce à des états à deux photons, associés chacun à un mode de polarisation [5], ou encore par superposition de deux états comprimés [108].

Ces différents états possèdent un potentiel d'application important en ce qui concerne le calcul quantique ou les protocoles de communication et de crypto-

---

<sup>61</sup> – Voir la référence [23] pour une description exhaustive des techniques de production d'états comprimés.

graphie quantiques [5]. Pour ces différentes raisons, ils font aujourd’hui l’objet d’une recherche intense et sont à l’origine de nouvelles théories de l’information quantique (voir par exemple [68] ou plus récemment [112]).

## 3.2 Modèles de processus sous-poissoniens

Nous nous focaliserons uniquement dans la suite de cette thèse sur les états **sous-poissoniens** du champ électromagnétique, qui correspondent comme nous l’avons vu à des états *comprimés en amplitude*. Dans les chapitres suivants, nous nous limiterons à une description phénoménologique de ce type de fluctuations d’intensité sous-poissoniennes, sans utiliser le formalisme rigoureux de l’optique quantique. Ce choix nous permettra ainsi d’utiliser les résultats des théories de l’information et de l’estimation classiques.

Par ailleurs, bien que nous ayons positionné les travaux menés dans cette partie de thèse dans le cadre de l’optique quantique, on peut toujours imaginer que d’autres moyens existent pour produire des processus sous-poissoniens dans le contexte de l’optique. Plusieurs des modèles qui seront exposés par la suite ont en particulier été proposés initialement dans des domaines bien différents de l’optique quantique (théorie du renouvellement, théorie des files d’attente, etc.).

### 3.2.1 Caractérisation des fluctuations sous-poissoniennes

Comme nous l’avons vu précédemment, un état de la lumière dont les fluctuations sont comprimées en amplitude peut conduire à une réduction de la variance de l’opérateur nombre de photons. Nous avons également souligné comment la modélisation de ces champs comprimés pouvait être formellement rapprochée du modèle, présenté au chapitre 1 décrivant les statistiques de speckle non circulaire et de composante spéculaire non nulle.

Dans le cas où la valeur moyenne de l’enveloppe complexe du champ est importante devant l’amplitude des fluctuations, on peut négliger le caractère corpusculaire des détections de photons pour obtenir une modélisation en régime de fluctuations continues (*continuous wave regime*) plutôt qu’en régime de comptage de photons. Cela permet de pousser un peu plus loin l’analogie avec le modèle de speckle non circulaire en supposant que l’intensité lumineuse est distribuée selon la loi de probabilité de l’équation (1.30), obtenue dans le cas d’un champ gaussien non circulaire de composante spéculaire non nulle et réelle, où l’on fixe  $\sigma_r^2 = \mathcal{E}_0^2 e^{-2R}$  et  $\sigma_i^2 = \mathcal{E}_0^2 e^{2R}$ . On peut alors montrer [62] que la variance de l’intensité est inférieure à la moyenne et vérifie  $\text{var}(I) = \mu_I e^{-2R}$ .

En outre, en régime de très forte intensité, on peut être amené à utiliser, comme dans les références [29, 28] par exemple, un modèle plus simple de fluctuations d’intensité sous-poissoniennes qui consiste à simplifier la DDP de l’intensité  $P_I(I)$  de l’équation (1.30) en admettant que l’intensité lumineuse obéit à une loi gaussienne, de moyenne  $\mu_I$  et variance  $\text{var}(I) = \sigma_I^2$  inférieure à  $\mu_I$ , soit

$$P_I(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left(-\frac{(I - \mu_I)^2}{2\sigma_I^2}\right). \quad (3.22)$$

Ce modèle simple est bien sûr intéressant pour décrire les statistiques d’inten-

sité sous-poissoniennes à fort flux de photons (forte intensité). En particulier, l'utilisation d'un tel modèle a déjà fait l'objet de plusieurs travaux [29, 28] pour prédire, grâce aux outils de la théorie de l'information, les gains en précision optimale que l'on peut espérer obtenir avec de tels signaux optiques.

Nous serons amenés, dans la suite de cette partie de thèse, à compléter ces résultats en utilisant des modèles de fluctuations sous-poissoniennes différents, qui permettent une description plus « fine » de ces statistiques d'intensité non classiques et qui ne sont pas limitées à des situations de très fortes intensités, ni à de petites variations du paramètre estimé. Avant de décrire les deux modèles qui seront utilisés dans la suite de ce travail, nous présentons d'abord les principales propriétés et caractérisations statistiques des états sous-poissoniens.

### 3.2.1.1 Facteur de Fano

Nous qualifierons de **sous-poissonienne** toute statistique de photocomptage dont la variance  $\text{var}(N)$  est inférieure à la valeur moyenne  $\mu_N$ , et qui présente ainsi un ordre partiel de la statistique par rapport à la loi de Poisson. Pour quantifier l'ordre partiel introduit par de telles statistiques non-classiques au moyen d'un paramètre scalaire, nous choisissons pour la suite de ces travaux de thèse d'utiliser le **facteur de Fano**, introduit par U. Fano en 1947 [43]. Ce facteur est simplement défini comme le rapport de la variance de la statistique de photocomptage et de la moyenne de celui-ci [43] :

$$F = \frac{\text{var}(N)}{\mu_N}. \quad (3.23)$$

Il est facile de vérifier qu'une statistique de Poisson correspond à un facteur de Fano unitaire ( $F = 1$ ) tandis qu'une statistique sous-poissonienne sera caractérisée par un facteur de Fano inférieur à un [95, 144, 122].

Ce paramètre scalaire permet ainsi d'évaluer simplement le caractère sous-poissonien d'une statistique de photocomptage dans le cadre de l'approche simplifiée de la théorie de la photodétection que nous adoptons ici. De plus, nous verrons dans les chapitres suivants que la valeur de ce paramètre conditionne les gains en performance que l'on peut espérer en utilisant des états sous-poissoniens du champ à la place d'un état cohérent classique (lumière laser), que ce soit dans le cas de l'estimation d'un paramètre (chapitre 4), ou pour la discrimination entre deux niveaux d'intensité (chapitre 5).

### 3.2.1.2 Processus sous-poissoniens et phénomène d'*antibunching*

Une autre caractéristique remarquable et non classique des processus sous-poissoniens peut être mise en évidence lors d'une expérience de photodétection en coïncidence, qui consiste à mesurer expérimentalement, par un dispositif similaire à la célèbre expérience d'Hanbury-Brown et Twiss [64], la probabilité conjointe de détecter l'arrivée d'un premier photon à l'instant  $t$ , puis un second photon au temps  $t + \Delta t$ . En effet, lorsqu'on effectue une mesure de photocomptage en coïncidence sur un champ monomode sous-poissonien, on s'aperçoit que la probabilité de photodétections multiples pour des délais  $\Delta t$  extrêmement courts est plus faible que dans le cas d'une lumière poissonnienne classique. Ce résultat



expérimental découvert par Kimble, Dagenais et Mandel en 1977 [81] confirme le caractère non classique des processus sous-poissoniens : en effet, immédiatement après la production (ou la détection) d'un photon à l'instant  $t$ , la production (ou la détection) d'un second photon est pénalisée durant un certain délai, fixé par les caractéristiques de la source sous-poissonienne<sup>62</sup> [111, 131]. Ce phénomène de « **dégrouperment** » des événements enregistrés au niveau du détecteur est appelé *antibunching* selon la terminologie anglo-saxonne. Ce phénomène est facilement concevable de manière intuitive : dans un processus sous-poissonien, les arrivées des photons sur le détecteur sont plus ordonnées dans le temps que pour un processus de Poisson classique, et l'ordre des instants de détection des photons s'accroît à mesure que la nature sous-poissonienne du champ augmente<sup>63</sup>.

Bien que nous ayons ici encore traité principalement le cas d'états non classiques de la lumière, des comportements similaires peuvent être identifiés dans d'autres situations physiques, par exemple lors de la conversion d'un photon en quantum de charge électrique sur un détecteur imparfait [98].

### 3.2.1.3 Influence d'une absorption partielle

Comme tout état non classique du rayonnement électromagnétique, les états sous-poissoniens sont hautement sensibles et fragiles à toute interaction (couplage) avec l'environnement extérieur, ce qui explique en grande partie les difficultés expérimentales rencontrées pour produire et manipuler de tels états. En particulier, la propagation d'un faisceau lumineux sous-poissonien à travers un milieu partiellement absorbant, de même que la réflexion d'un tel faisceau sur une surface partiellement réfléchissante vont dégrader le caractère sous-poissonien de la lumière, rapprochant celle-ci d'un état cohérent aux statistiques d'intensité poissonniennes [144]. Pour quantifier cette dégradation de l'ordre partiel, il convient donc d'étudier comment l'absorption partielle d'un processus sous-poissonien provoque une augmentation du facteur de Fano de ce dernier.

Un tel phénomène d'absorption de l'intensité peut être aisément modélisé par un processus d'absorption aléatoire de Bernoulli (« *Bernoulli random deletion* » en anglais). Ce modèle d'absorption implique une vision corpusculaire du flux lumineux, que l'on suppose contenir  $n$  photons [144]. À chacun de ces photons, on associe alors une probabilité  $\tau$  d'être transmis et une probabilité  $(1 - \tau)$  d'être absorbé, où  $\tau$  représente le facteur de transmission du processus d'absorption ou de réflexion modélisé. À partir de ce modèle d'absorption, décrit plus en détail à l'annexe C.1, on peut montrer la propriété suivante [144], dont la démonstration est également rappelée dans la même annexe :

**Propriété 3.1** *Un processus sous-poissonien de moyenne  $\mu_N$  et caractérisé par un facteur de Fano  $F_N$ , subissant une absorption ou une réflexion modélisée par un processus d'absorption de Bernoulli de facteur de transmission  $\tau$ , reste sous-*

---

<sup>62</sup> – Encore une fois, ce résultat entre en contradiction avec les prédictions de la théorie classique du champ électromagnétique, et nécessite pour être démontré d'utiliser la théorie quantique rigoureuse de la photodétection en coïncidence.

<sup>63</sup> – Précisons ici que la réciproque n'est pas systématiquement vérifiée : on peut trouver des états présentant un phénomène d'*antibunching* mais dont les statistiques de comptage ne sont pas sous-poissoniennes (voir [83] pour une discussion approfondie de cette question).

poissonien de moyenne inférieure,  $\mu_{N'} = \tau\mu_N$ , et de facteur de Fano supérieur,

$$F_{N'} = 1 - \tau(1 - F_N) \geq F_N. \quad (3.24)$$

Le rapport des facteurs de Fano des états absorbé et non absorbé sera noté conventionnellement dans la suite

$$\alpha(F_N, \tau) \triangleq \frac{F_{N'}}{F_N} = \frac{1 - \tau(1 - F_N)}{F_N}. \quad (3.25)$$

Ce résultat permet d'illustrer combien les états non standard du champ électromagnétique sont fragiles : toute absorption d'un faisceau sous-poissonien entraîne irrémédiablement une augmentation du facteur de Fano vers la valeur limite  $F = 1$  (processus de Poisson). En d'autres termes, l'ordre partiel qui caractérise les statistiques sous-poissoniennes par rapport à la loi de Poisson se détériore sous l'effet d'une absorption, jusqu'à tendre pour des absorptions importantes, vers une statistique poissonnienne standard<sup>64</sup>.

### 3.2.1.4 Influence d'un bruit de fond Poissonien

L'ordre partiel caractéristique des fluctuations sous-poissoniennes peut également être dégradé par la présence d'un bruit de fond, perçu par le détecteur, et que nous modéliserons de façon standard par un processus de Poisson additif parasite, noté  $N_B$  et de moyenne  $\mu_B$ . Ce bruit de fond est indépendant du processus sous-poissonien  $N$  considéré et le photocomptage résultant  $N'$  peut donc s'écrire

$$N' = N + N_B, \quad (3.26)$$

et sa valeur moyenne vaut  $\mu_{N'} = \mu_N + \mu_B$ . En ce qui concerne la variance du processus  $N'$ , on a  $\text{var}(N') = \text{var}(N) + \text{var}(B) = F_N\mu_N + \mu_B$ . Le facteur de Fano du photocomptage bruité est noté  $F_{N'}$  et s'écrit [144]

$$F_{N'} = \frac{\text{var}(N')}{\mu_{N'}} = \frac{F_N\mu_N + \mu_B}{\mu_N + \mu_B} = 1 - \left[ \frac{RSB}{1 + RSB} \right] (1 - F_N) \geq F_N, \quad (3.27)$$

où l'on définit  $RSB = \mu_N/\mu_B$  comme un rapport signal sur bruit. Comme on pouvait s'y attendre, l'ajout d'un bruit parasite additif poissonien dégrade également la nature sous-poissonienne du processus. Par ailleurs, on remarquera en comparant cette dernière équation avec l'expression (3.24) qu'un bruit de Poisson parasite a le même effet sur le facteur de Fano<sup>65</sup> qu'une absorption partielle équivalente dont le facteur de transmission serait égal à  $\tau_{eq} = RSB/(1 + RSB)$ .

Nous terminons maintenant ce chapitre introductif en détaillant les deux

<sup>64</sup> – Notons qu'en optique quantique ce résultat est souvent obtenu avec une approche sensiblement différente du processus d'absorption, en modélisant les pertes en transmission grâce à l'action d'une lame partiellement réfléchissante qui « couplerait » les fluctuations de l'état comprimé en amplitude sous-poissonien entrant par la voie (1) de la lame, et les fluctuations du « vide » quantique intervenant par la voie (2) de cette lame. En sortie de celle-ci, le formalisme de l'optique quantique permet de modéliser ce couplage et de retrouver le résultat de l'équation (3.24) pour l'évolution du facteur de Fano [16, 61].

<sup>65</sup> – Cela n'est bien sûr pas le cas de l'intensité moyenne : elle diminue dans le cas d'une absorption partielle mais augmente en présence d'un bruit additif.

modèles statistiques qui seront utilisés dans la suite pour décrire des fluctuations d'intensité sous-poissoniennes. Le premier que nous présentons ci-dessous permet d'appréhender le phénomène d'*antibunching* en modélisant le comportement temporel de la détection d'un processus sous-poissonien. Le second modèle que nous évoquerons par la suite décrit simplement une statistique de photocomptage sous-poissonienne, sans rendre compte du comportement temporel de celle-ci. Nous verrons ensuite dans les chapitres suivants comment chacun de ces modèles peut être utilisé pour étudier les gains de performance apportés par les fluctuations sous-poissoniennes pour différents types de traitements (estimation de paramètre, discrimination).

### 3.2.2 Modèle phénoménologique temporel

Le modèle que nous présentons ici se fonde sur une description temporelle des processus sous-poissoniens, qui consiste à modéliser le comportement statistique des temps d'attente, notés  $\xi_i$ , entre deux arrivées successives de photons et qui seront considérés dans la suite comme des variables aléatoires indépendantes. Cette approche peut remplacer une description standard qui s'attacherait à décrire la statistique du photocomptage et l'équivalence entre ces deux descriptions est un résultat bien connu en ce qui concerne les processus poissoniens [110].

#### 3.2.2.1 Cas des processus poissoniens

Considérons un processus de photocomptage poissonien  $N$  décrit par la loi de probabilité  $P_N(n)$  donnée en équation (3.19) et de moyenne  $\mu_N = \phi T$  où  $\phi$  désigne le flux moyen de photons. Du point de vue de la théorie des **processus stochastiques** ou processus ponctuels, on peut montrer [110, 25] qu'une telle statistique de comptage peut être modélisée comme résultant de l'observation durant le temps  $T$  d'un processus stochastique dont les différents temps d'attente  $\xi_i$  entre deux détections successives de photons sont des variables aléatoires indépendantes, et identiquement distribuées selon une loi exponentielle [110, 25],

$$P_\xi(\xi) = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0}\right), \quad (3.28)$$

où  $\tau_0 \triangleq \langle \xi \rangle = 1/\phi$ . En notant  $t_i$  les instants d'arrivée des photons sur le détecteur, on a bien sûr  $t_i = t_{i-1} + \xi_i$  où  $\xi_i$  représente le temps d'attente entre les photons  $(i-1)$  et  $i$ . Pour une durée d'observation  $T$  donnée, on détectera  $n$  photons à condition que

$$t_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \leq T \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i > T. \quad (3.29)$$

Pour un flux  $\phi$  et un temps d'intégration  $T$  donnés, cette situation survient avec une probabilité  $P_N(n)$  que l'on peut déterminer à partir de l'expression de la loi de Poisson donnée en équation (3.19).

Grâce à cette modélisation temporelle bien connue dans le cas des processus de Poisson, on peut par ailleurs démontrer qu'un processus ponctuel caractérisé par des temps d'attente de distribution exponentielle décrit la seule situation

d'un processus « sans mémoire », ce qui signifie que le fait d'avoir détecté un photon à l'instant  $t$  n'affecte aucunement la probabilité de détecter un autre événement à un instant ultérieur [110].

### 3.2.2.2 Présentation d'un modèle phénoménologique sous-poissonien

On peut maintenant appliquer cette même vision « temporelle » du processus pour modéliser les statistiques de photocomptage sous-poissoniennes, caractérisées comme nous l'avons vu par le phénomène de « dégroupement » des arrivées de photons sur le détecteur (*antibunching*). Pour tenter de traduire cet ordre partiel des photodétections dans le temps, certains auteurs ont proposé de modifier un processus poissonien standard en introduisant un temps mort de durée  $\tau_d$  immédiatement après la détection d'un photon, interdisant ainsi toute nouvelle détection pendant cet intervalle de temps  $\tau_d$  [17, 146]. Cependant, s'il est bien adapté pour modéliser des situations physiques pour lesquelles il existe véritablement un temps mort empêchant deux événements rapprochés, ce modèle de dégroupement semble un peu trop « abrupt » pour décrire des fluctuations d'intensité sous-poissoniennes résultant d'une compression en amplitude des fluctuations du champ électromagnétique.

Plutôt que d'introduire un temps mort de durée fixe, on peut envisager à défaut de modifier la densité de probabilité des temps d'attente, supposée exponentielle dans le cas d'un processus poissonien [146]. En effet, pour rendre compte du phénomène d'*antibunching* et introduire un ordre partiel des arrivées de photons dans le temps, il est nécessaire de pénaliser les détections « groupées » de photons, diminuant ainsi la probabilité de détecter un second photon immédiatement après une première détection. Pour cette raison, nous adopterons, pour certains développements présentés dans la suite, un modèle phénoménologique qui généralise le cas de la loi exponentielle en supposant que le temps d'attente entre deux détections successives de photons est distribué selon une DDP gamma d'ordre entier  $L \geq 1$ ,

$$P_\xi(\xi) = \frac{L^L \xi^{L-1}}{\tau_0^L (L-1)!} e^{-\frac{L\xi}{\tau_0}}. \quad (3.30)$$

Si la valeur moyenne du temps d'attente demeure égale à  $\langle \xi \rangle = \tau_0$ , sa variance vaut en revanche  $\text{var}(\xi) = \tau_0^2/L$ , ce qui montre qu'en augmentant l'ordre  $L$  de la loi, le désordre du processus ponctuel diminue puisque les différentes valeurs des temps d'attente se resserrent autour de la valeur  $\tau_0$  puisque la variance de  $\xi$  diminue. Nous montrerons dans la suite que la nature sous-poissonienne du processus ainsi modélisé sera caractérisée par l'ordre  $L$  de la loi gamma utilisée :

- à l'extrême, pour un ordre  $L = 1$ , on retrouve la loi exponentielle et le processus décrit est poissonien ;
- à l'inverse, pour un ordre  $L$  grand, on tend alors vers une distribution de Dirac, centrée sur la valeur  $\tau_0$  et l'on modélise alors un processus dont les détections de photons sont parfaitement ordonnées dans le temps.

De tels processus ponctuels de temps d'attente gamma ont été étudiés de longue date en théorie des files d'attente et théorie du renouvellement [25], afin de modéliser les encombrements dans les réseaux de communication, ou le vieillissement de composants. L'utilisation de ces processus pour modéliser les statistiques de photocomptage sous-poissoniennes a également été déjà proposée, notamment

dans les références [146, 122].

Pour compléter cette description du modèle de temps d'attente gamma, nous proposons ici d'en donner une image physique simple dont nous tirerons parti au chapitre suivant. Cette image découle de la propriété usuelle suivante [110, 25] :

**Propriété 3.2** *Toute variable aléatoire  $\xi$  de moyenne  $\tau_0$  et distribuée selon une loi gamma d'ordre  $L$  entier, peut s'écrire comme la somme de  $L$  variables aléatoires indépendantes  $\zeta_k$  distribuées selon une loi exponentielle et de moyenne  $\tau_0/L$ ,*

$$\xi = \sum_{k=1}^L \zeta_k. \quad (3.31)$$

Grâce à cette propriété, on peut donc s'autoriser à considérer l'image physique suivante : entre deux détections successives de photons d'un processus sous-poissonien de flux  $\phi = 1/\tau_0$ , on peut imaginer que  $L - 1$  « *photons virtuels* » sont parvenus à la surface du détecteur. Dans ces conditions, la réunion des détections de photons *réels* et de photons *virtuels* constitue un processus poissonien « virtuel » sous-jacent de flux  $L/\tau_0$ . Bien entendu, ces arrivées de *photons virtuels* n'ont aucune réalité physique mais permettent une représentation imagée intéressante du modèle sous-poissonien présenté ici. Elle simplifie en particulier la simulation numérique de ces photocomptages sous-poissoniens, comme cela est exposé dans l'annexe C.2.2 où sont détaillées les méthodes utilisées pour simuler numériquement ce modèle temporel.

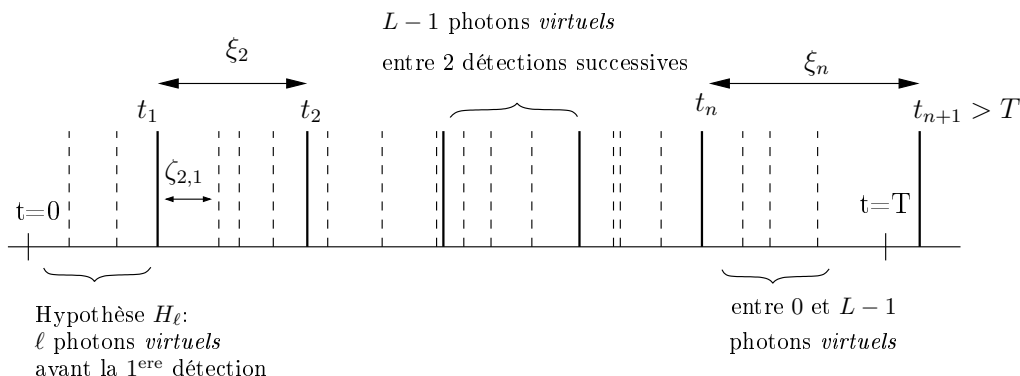


FIG. 3.2 – Représentation schématique du modèle temporel de processus sous-poissonien. L'intervalle de temps entre deux détections de photons successives peut être décomposé en  $L$  intervalles séparant l'arrivée de photons *virtuels*.

### 3.2.2.3 Propriétés probabilistes du modèle

À partir de ce modèle temporel, il nous faut maintenant établir le comportement statistique du photocomptage correspondant. Comme on peut le voir à la figure 3.2, une mesure de photocomptage consiste schématiquement à mesurer le nombre  $n$  de photons arrivés au niveau du détecteur, supposé parfait (efficacité quantique  $\eta = 1$ ), durant un temps d'intégration  $T$  fixé. On suppose, sans perte de généralité, que le photocomptage est déclenché au temps  $t = 0$ . Les instants d'arrivée des photons sur le détecteur sont toujours notés  $t_i$ .

L'étude de la loi de probabilité  $P_N(n)$  associée à la variable aléatoire  $N$  qui correspond à ce nombre de détections durant  $T$  a été décrite dans le cadre de la théorie du renouvellement [25] et peut être transposée aisément au cas des fluctuations d'intensité lumineuse sous-poissoniennes [146]. Cependant, l'image physique des *photons virtuels* introduite précédemment fournit également un moyen d'aboutir à l'expression de cette loi de probabilité, dont nous proposons de rappeler les grandes étapes.

Plutôt que de se fonder sur le comptage des photons *réels* du processus sous-poissonien, on peut s'intéresser au comptage des *photons virtuels* qui obéissent quant à eux à un processus poissonien *virtuel* sous-jacent dont la loi de probabilité est connue. Cette approche implique néanmoins de différencier plusieurs cas pour modéliser le déclenchement de la mesure de comptage. En effet, entre l'instant du déclenchement de la mesure ( $t = 0$ ) et la première détection d'un « vrai » photon à  $t = t_1$ , on peut supposer que  $\ell$  *photons virtuels* sont parvenus au détecteur, ce nombre  $\ell$  étant compris entre 0 et  $(L - 1)$  (voir figure 3.2). Pour une loi gamma d'ordre  $L$ , ces  $L$  hypothèses distinctes seront notées  $H_\ell$  avec  $\ell \in [0, L - 1]$ , et seront supposées équiprobables et indépendantes, c'est-à-dire  $P_H(H_\ell) = 1/L$ .

Comme précédemment, on aura détecté  $n$  photons réels à l'issue de la durée d'acquisition  $T$  si  $t_n \leq T$  et  $t_{n+1} > T$ , où  $t_n$  et  $t_{n+1}$  représentent respectivement les instants de détection du  $n^{\text{e}}$  photon et du  $(n + 1)^{\text{e}}$  photon. Or, pour une hypothèse  $H_\ell$  donnée, avoir reçu  $n$  photons sur le détecteur correspond à avoir observé  $L(n - 1) + \ell + 1$  événements du processus poissonien *virtuel* sous-jacent<sup>66</sup>, de même que la réception de  $n + 1$  photons sur le détecteur s'opère lorsque  $Ln + \ell + 1$  événements du processus poissonien *virtuel* sous-jacent sont survenus. Dès lors, si on détecte, pendant la durée  $T$ , entre  $L(n - 1) + \ell + 1$  et  $Ln + \ell$  événements de ce processus virtuel, on obtiendra dans tous les cas la détection de  $n$  photons « réels » (voir figure 3.2). Par conséquent, sous l'hypothèse  $H_\ell$ , la probabilité conditionnelle  $P_N(n|H_\ell)$  de mesurer  $n$  photons « réels » durant l'intervalle de temps  $T$  peut s'écrire comme la somme de  $L$  probabilités qui correspondent aux variables aléatoires de Poisson indépendantes associées à la détection d'entre  $L(n - 1) + \ell + 1$  et  $Ln + \ell$  événements du processus *virtuel*, soit

$$P_N(n|H_\ell) = \sum_{m=L(n-1)+\ell+1}^{Ln+\ell} e^{-L\phi T} \frac{(L\phi T)^m}{m!}, \quad (3.32)$$

où  $\phi = 1/\tau_0$  représente le flux de photons.

On obtient enfin la densité de probabilité  $P_N(n)$  en sommant sur les  $L$  hypothèses  $H_\ell$  équiprobables, ce qui permet finalement d'écrire, en notant  $\mu_N = \phi T$ ,

$$\begin{aligned} P_N(n) &= \sum_{\ell=0}^{L-1} P_N(n|H_\ell) P_H(H_\ell) \\ &= \frac{e^{-L\mu_N}}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{\substack{m=L(n-1)+\ell+1 \\ m \geq 0}}^{Ln+\ell} \frac{(L\mu_N)^m}{m!}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

<sup>66</sup> – Ce processus correspond, rappelons-le, à l'ensemble des instants d'arrivée des photons *réels* et des photons *virtuels* au niveau du capteur.

et de retrouver ainsi de façon originale le résultat de la référence [25].

Nous pouvons maintenant vérifier qu'un tel modèle traduit bien un comportement sous-poissonien en terme de statistique de photocomptage. Des calculs assez fastidieux détaillés en annexe C.2 permettent de montrer que la valeur moyenne de cette loi de probabilité est en accord avec la moyenne  $\tau_0 = 1/\phi$  des temps d'attente et vaut bien  $\langle N \rangle = \phi T = \mu_N$ . Par ailleurs, on montre également que pour des temps d'intégration élevés (et donc des valeurs moyennes  $\mu_N$  élevées), la variance du photocomptage est inférieure à  $\mu_N$  et vérifie  $\text{var}(N) = \mu_N/L$ , ce qui correspond à un facteur de Fano  $F = 1/L \leq 1$ . Ce résultat démontre donc que pour des flux de photons suffisants, cette approche temporelle modélise bien des statistiques de photocomptage sous-poissoniennes [146], dont le facteur de Fano ne dépend que de l'ordre  $L$  de la distribution gamma des temps d'attente.

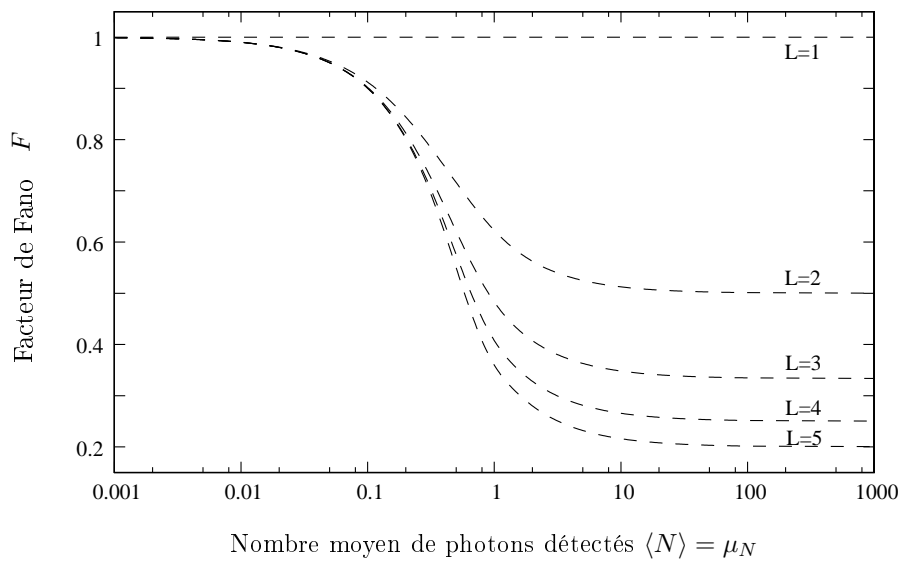


FIG. 3.3 – Évolution du facteur de Fano du modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes, évalué numériquement à partir de la loi de probabilité  $P_N(n)$  de l'équation (3.33) et tracé en fonction du nombre moyen de photons détectés pour plusieurs valeurs de l'ordre de la loi gamma  $L \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

**Évolution du facteur de Fano à faible flux** À la différence du modèle gaussien de fluctuations d'intensité évoqué précédemment et utilisé dans les références [29, 28], la modélisation présentée ici permet de s'intéresser au comportement des expériences de photocomptage pour des temps d'intégration  $T$  courts ou pour des faibles flux  $\phi$  de photons, conduisant dans les deux cas à un faible nombre  $\mu_N = \phi T$  de photons détectés en moyenne. Grâce à ce modèle, on peut en effet rendre compte de la dégradation progressive de la nature sous-poissonienne de la statistique de photocomptage à mesure que  $\mu_N$  diminue [146, 25]. Pour des très faibles valeurs de  $\mu_N \ll 1$ , le caractère sous-poissonien du processus tend même à disparaître totalement.

Pour le vérifier, nous avons déterminé numériquement les valeurs du facteur de Fano pour plusieurs valeurs de l'ordre  $L$  de la loi gamma décrivant les temps d'attente et lorsque le nombre moyen de photons détectés  $\mu_N$  évo-

lue. Pour cela, nous avons calculé numériquement la variance du photocomptage  $\text{var}(N) = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$  à partir de la loi de probabilité  $P_N(n)$  donnée en équation (3.33), en évaluant numériquement la somme partielle suivante

$$\text{var}(N) = \sum_{n=0}^{P_0} \left[ n^2 P_N(n) \right] - \mu_N^2 \quad (3.34)$$

où la somme a été tronquée pour les termes  $n > P_0$  dont la contribution n'est plus numériquement significative<sup>67</sup>. Il est alors aisé d'en déduire le facteur de Fano en calculant  $F = \text{var}(N)/\mu_N$ .

Les valeurs du facteur de Fano ainsi déterminées sont représentées sur la figure 3.3 en fonction de  $\mu_N$  et pour plusieurs valeurs de l'ordre  $L$ . On observe ainsi que pour un nombre moyen de photons détectés supérieur à une centaine, le facteur de Fano est de l'ordre de  $1/L$ , tandis qu'à très faible flux, il tend vers 1 quel que soit l'ordre de la loi d'attente. Cette figure permet également de situer la transition (*cross-over*) entre ces deux régimes aux alentours de 1 photon détecté en moyenne pendant l'intervalle de temps  $T$  [146, 42].

Ce comportement peut s'expliquer assez simplement en remarquant que pour de très faibles flux de photons (ou de manière équivalente pour des temps d'intégration très courts), le temps d'attente moyen  $\langle \xi \rangle = \tau_0$  entre deux détections sera supérieur à la durée d'intégration sur le capteur : dans ce cas, on détectera tout au plus 1 photon durant  $T$ . On conçoit alors qu'un tel résultat binaire (0 ou 1 photon détecté) ne dépende pas de la forme de la DDP du temps d'attente  $P_\xi(\xi)$ , mais de sa seule moyenne  $\tau_0 = \langle \xi \rangle$ . En effet, dans la limite des très faibles valeurs d'intensité  $\mu_N \ll 1$ , comme dans le cas de la loi de Poisson [110, 118], on montre en annexe C.2 que la loi de probabilité de l'équation (3.33) peut être approchée par une loi de Bernoulli de moyenne  $\mu_N$ ,

$$P_N(n) = \mu_N^n (1 - \mu_N)^{1-n}, \text{ avec } n \in \{0; 1\}. \quad (3.35)$$

Pour un tel processus de Bernoulli, la variance peut s'écrire  $\text{var}(N) = \mu_N(1 - \mu_N)$  et le facteur de Fano vaut donc  $F = 1 - \mu_N$  et tend vers 1 lorsque  $\mu_N$  diminue.

Ainsi, quel que soit l'effort fourni pour tenter d'ordonner les arrivées de photons dans le temps, ce phénomène de « **fenêtrage temporel** » par la durée d'observation viendra détériorer inévitablement le caractère sous-poissonien des statistiques de comptage.

### 3.2.2.4 Généralisations du modèle temporel

Pour la présentation et la caractérisation de ce modèle temporel, nous nous sommes volontairement limités aux cas de temps d'attente distribués selon une DDP gamma d'ordre  $L$  entier. Ce choix *a priori* arbitraire se justifie car il permet, par le biais de l'image physique des *photons virtuels*, de caractériser le comportement probabiliste du photocomptage.

Néanmoins, nous verrons dans le chapitre suivant qu'il peut être intéressant de généraliser ce modèle, par exemple pour décrire des facteurs de compression des

<sup>67</sup> – Nous avons pour cela vérifié que la troncature des termes  $n > P_0$  permettait d'assurer que  $\sum_{n=0}^{P_0} P_N(n)$  était égal à 1 avec une précision inférieure à  $10^{-6}$ .



fluctuations d'intensité non entiers en utilisant des lois d'attente gamma d'ordre quelconque (non nécessairement entier). De même, pour évaluer la robustesse des résultats établis grâce au modèle de temps d'attente gamma, on pourra remplacer les densités de probabilité gamma par d'autres formes de lois unimodales et positives permettant également de modéliser l'effet de dégroupement des arrivées de photons (lois  $\mathcal{K}$  ou lois lognormales par exemple). Pour ces deux cas, bien entendu, les modifications apportées au modèle rendront caduque l'interprétation en terme de *photons virtuels*.

### 3.2.3 Modèle de photocomptage binomial

Présentons maintenant un autre modèle de fluctuations sous-poissoniennes qui consiste à supposer que loi de probabilité du nombre de photons détectés au cours d'une expérience de photocomptage est une loi binomiale. Contrairement au modèle précédent, l'approche que nous adoptons ne consiste pas à s'intéresser au comportement temporel des temps d'attente entre les détections de photons.

#### 3.2.3.1 Construction du modèle de photocomptage binomial

Le modèle étudié à la section précédente consistait à généraliser la description temporelle d'un processus poissonien standard, qui correspond à la situation de désordre maximal pour la répartition temporelle des instants de détection de photons, en modifiant la loi d'attente entre détections de photons. À l'inverse, le modèle binomial peut se construire quant à lui à partir de la situation la plus ordonnée, pour laquelle les détections de photons surviennent de façon parfaitement régulière dans le temps (état nombre). Dans cette situation, une expérience de photodétection effectuée pendant une durée  $T$  mesure la valeur  $n_0$  avec une probabilité de 1, c'est-à-dire

$$P_N(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq N_0 \\ 1 & \text{si } n = N_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Le facteur de Fano dans une telle situation est bien sûr minimal et nul.

À partir de cet état, on peut construire un modèle de fluctuations sous-poissoniennes en analysant l'influence d'une absorption partielle sur cet état parfaitement ordonné [144, 145, 39]. En effet, lorsqu'il subit une absorption de facteur de transmission  $\tau$  modélisée par une absorption de Bernoulli, on affecte à chacun des  $N_0$  photons contenus dans cet état ordonné une probabilité  $\tau$  d'être conservé et  $(1 - \tau)$  d'être absorbé (voir annexe C.1). Dans ces conditions, il est bien connu (voir [35] p. 43, [133] p. 31 ou [110] p. 43) que le nombre  $m$  de photons conservés à l'issue du processus d'absorption de Bernoulli appliqué sur les  $N_0$  photons initiaux (nombre de « succès » à l'issue de  $N_0$  réalisations d'une épreuve de Bernoulli) obéit à une loi binomiale, de paramètres  $N_0$  et  $\tau$ , c'est-à-dire

$$P_M(m) = \binom{N_0}{m} \tau^m (1 - \tau)^{N_0 - m}, \quad (3.37)$$

où  $\binom{N_0}{m}$  représente le coefficient binomial  $\binom{N_0}{m} \triangleq \frac{N_0!}{m!(N_0 - m)!}$ . Cette loi de probabilité se caractérise par une valeur moyenne  $\mu_M = \tau N_0$  et une variance  $\text{var}(M) =$

$\mu_M(1 - \tau)$ . On remarque ainsi que le processus absorbé est bien sous-poissonien puisque  $\text{var}(M) \leq \mu_M$  et que son facteur de Fano est directement donné par  $F_M = 1 - \tau$ .

Dans la suite, nous modéliserons certains processus de photocomptage d'une lumière sous-poissonienne de moyenne  $\mu_N$  et facteur de Fano  $F$  par une loi binomiale de paramètres  $N_0$  et  $\tau$  vérifiant  $\tau = 1 - F$  et  $N_0 = \mu_N / (1 - F)$  [144, 145, 39]. Grâce à ce modèle binomial, on pourra ainsi rendre compte de multiples situations allant de l'état le plus ordonné (état nombre) en supposant  $\tau = 0$ , jusqu'à la situation de plus grand désordre correspondant à un processus de Poisson en fixant  $\tau \rightarrow 1$ .

Pour compléter cette rapide présentation du modèle binomial, on peut noter également que le cadre théorique de l'optique quantique permet d'appréhender des états binomiaux du rayonnement, notés  $|\eta, N_0\rangle$ . Les coefficients de la décomposition de ces états sur la base des états de Fock assurent que la probabilité de photocomptage est binomiale et régie par la loi de probabilité (3.37) [140]. Les études menées sur de tels états ont pu montrer en particulier qu'ils étaient bien affectés par le phénomène de « dégroupement » des arrivées de photons mais qu'ils ne correspondaient pas dans tous les cas à des états *minimaux* du champ au sens de l'inégalité de Heisenberg<sup>68</sup>.

### 3.2.3.2 Stabilité du modèle binomial par absorption

Nous aurons l'occasion de voir par la suite que l'utilisation du modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes est simple et pratique en raison de sa stabilité par absorption. Cette propriété importante du modèle binomial peut s'énoncer de la manière suivante :

**Propriété 3.3** *Un processus binomial  $N$  de paramètres  $N_0$  et  $\tau$  demeure binomial lorsqu'il subit une absorption partielle de facteur de transmission  $\tau'$  modélisée par une absorption de Bernoulli. La variable aléatoire  $M$  associée au processus absorbé est distribuée selon une loi binomiale de paramètres  $N_0$  et  $\tau\tau'$ .*

Ce résultat peut se démontrer aisément en remarquant que la composition de deux absorptions de Bernoulli de facteurs de transmission  $\tau$  et  $\tau'$  reste une absorption de Bernoulli de facteur  $\tau\tau'$ . Une conséquence directe de cette propriété est que le facteur de Fano  $F_M$  de l'état absorbé s'exprime en fonction du facteur de Fano  $F_N$  de l'état initial selon  $F_M = 1 - \tau\tau' = 1 - \tau'(1 - F_N)$ , ce qui est conforme au résultat général établi en équation (3.24).

## 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, la présentation succincte des bases du formalisme de l'optique quantique nous a permis de décrire les propriétés des états non standard comprimés du champ électromagnétique et de noter l'analogie qui peut exister avec les modélisations de statistiques d'intensité de speckle, notamment non circulaires. Sous certaines conditions, ces états comprimés se caractérisent par une réduction des fluctuations de l'intensité lumineuse par rapport à une lumière

<sup>68</sup> – On pourra consulter la référence [140] pour une étude détaillée de ces états binomiaux.

laser poissonienne standard, ce qui permet d'envisager l'utilisation de tels états sous-poissoniens pour améliorer la précision de mesure de certaines applications de métrologie optique.

Cette question sera plus précisément étudiée dans les chapitres suivants, où nous déterminerons les gains en terme de performance optimale que l'on peut espérer obtenir avec de tels processus sous-poissoniens, pour des applications d'estimation de paramètre ou de détection. Pour réaliser ces caractérisations théoriques, nous nous appuierons sur les deux modèles de processus sous-poissoniens qui ont été détaillés dans ce chapitre.

# Chapitre 4

## Analyse de la précision d'estimation d'un paramètre en lumière localement sous-poissonienne

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Modèle de formation d'image et hypothèses</b>	<b>123</b>
<b>4.2</b>	<b>BCR pour l'estimation de paramètre</b>	<b>125</b>
4.2.1	Information de Fisher dans le cas général	125
4.2.2	BCR pour l'estimation de déplacement en lumière poissonienne standard	127
4.2.3	BCR pour l'estimation de déplacement en lumière sous-poissonienne	129
<b>4.3</b>	<b>Estimation de déplacement</b>	<b>136</b>
4.3.1	Méthode « petits signaux »	136
4.3.2	Estimation par intercorrélacion logarithmique	137
<b>4.4</b>	<b>Résultats de simulation</b>	<b>139</b>
4.4.1	Optimalité de l'estimateur $\hat{d}_{MV}^{poi}$	139
4.4.2	Propriétés de l'estimateur $\hat{d}_{MV}^{poi}$	141
4.4.3	Robustesse des résultats établis	145
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>

---

---

Dès leur mise en évidence expérimentale, les propriétés de certains états non classiques du rayonnement électromagnétique ont très tôt laissé entrevoir différentes applications potentielles, pour la métrologie notamment, mais également pour les communications optiques. Près de trente années plus tard, certaines de ces applications ont été éprouvées en laboratoire et commencent à être utilisées en métrologie de très haute sensibilité (détection d’ondes gravitationnelles par exemple [101, 96]). Par ailleurs, ces dernières années ont également vu naître un nouveau champ d’investigation, qualifié génériquement d’**imagerie quantique** [82, 93], qui vise à intégrer la dimension spatiale du comportement des états quantiques non classiques de la lumière. Cette nouvelle approche permet par exemple d’appréhender les effets de corrélations et d’intrications spatiales non classiques qui surviennent lorsqu’on manipule certains états « exotiques » de la lumière [82]. Parmi les applications envisagées dans ce domaine de recherche, on peut citer entre autres l’amplification paramétrique sans bruit des images [86, 103], l’amélioration des limites de super-résolution [10, 82] ou encore les techniques de *ghost imaging* utilisant des états à deux photons « jumeaux » [82, 66]. Par ailleurs, parmi les défis actuels de l’imagerie quantique, on peut citer la production d’états non classiques de la lumière hautement multimodes qui permettraient en particulier de dépasser les limites quantiques de résolution standard pour la mesure simultanée de plusieurs paramètres [152, 84, 151].

Nous nous limiterons cependant dans ce chapitre au cas de l’estimation d’un unique paramètre, affectant un faisceau lumineux de manière spatialement distribuée de telle sorte qu’une modification de ce paramètre entraîne une variation de l’amplitude du champ en tout point du plan transverse. Dans ce cas, la limite quantique standard de la précision d’estimation<sup>69</sup> peut être dépassée en superposant au faisceau initial un second faisceau comprimé dans un mode spatial approprié, dénommé *mode de bruit* [151, 149, 28]. Il a été montré en effet qu’un tel état bimode du champ électromagnétique donne naissance à de fortes corrélations quantiques entre différents points de l’image [151, 149, 76], et que ces corrélations sont appropriées pour réduire les fluctuations qui entachent la mesure du paramètre à estimer [151, 149].

Dans ce chapitre, nous allons considérer un autre moyen de réduire le bruit quantique pour l’estimation d’un paramètre, en supposant que l’image est formée sur un photodétecteur matriciel et qu’elle est perturbée en chaque pixel par des fluctuations sous-poissoniennes indépendantes. L’objectif de ce chapitre de thèse est d’étudier l’apport des lumières sous-poissoniennes pour améliorer les performances d’estimation de paramètre dans une image par rapport au cas poissonien standard.

---

<sup>69</sup> – Rappelons que la limite quantique standard correspond à la précision que l’on obtiendrait avec un faisceau quasi-classique cohérent (c’est-à-dire avec un bruit de photon poissonien), en l’absence de toute autre source de bruit technologique.

En utilisant le modèle phénoménologique « temporel » de fluctuations sous-poissoniennes étudié au chapitre précédent, nous déterminerons une borne minimale sur la variance d'estimation du déplacement d'une image perturbée par des fluctuations sous-poissoniennes et acquise à fort flux, ce qui nous permettra de confirmer les résultats obtenus dans les références [29, 28] avec un modèle gaussien de fluctuations et qui montrent que la variance d'estimation peut être au mieux réduite en proportion du facteur de Fano par rapport à la variance qui serait obtenue avec un faisceau poissonien standard. En analysant l'autre cas limite d'une image acquise à très faible intensité et en étudiant le comportement d'estimateurs du déplacement sur des images acquises à faible flux, nous verrons toutefois que ce gain sur les performances optimales d'estimation tend à disparaître à faible flux. Pour décrire comment la borne minimale sur la variance d'estimation évolue en fonction du niveau d'intensité moyen de l'image, nous montrerons alors qu'il est possible de proposer l'expression d'une borne de Cramer-Rao *effective*, dont nous vérifierons numériquement la validité.

Enfin, les performances de la méthode d'estimation proposée dans les références [29, 28] pour assurer une estimation efficace pour de petits déplacements seront comparées à celles d'un autre estimateur simple d'un déplacement d'une image, dont nous illustrerons l'efficacité et la généralité au moyen de simulations numériques, notamment pour la mesure de grands déplacements.

## 4.1 Modèle de formation d'image et hypothèses

Nous supposerons dans ce chapitre que les images sont acquises au moyen d'un photodétecteur matriciel en régime de comptage de photons. Comme nous l'avons présenté à la section 3.1.2.2 du chapitre précédent, un tel capteur est constitué d'une juxtaposition de nombreux photodétecteurs élémentaires, que nous nous autoriserons par la suite à nommer *pixels* par abus de langage.

Le modèle d'image sous-poissonienne que nous allons considérer suppose que chaque pixel du détecteur est illuminé par un état sous-poissonien **monomode**, dont les fluctuations quantiques sont **indépendantes** des fluctuations présentes au niveau des autres pixels. D'un point de vue global, cette hypothèse implique que le champ détecté soit **hautement multimode** : sa description spatiale sur une base de *modes pixels* [149] doit en effet faire intervenir autant de modes indépendants que de pixels considérés. En d'autres termes, lorsque l'on effectue la décomposition modale d'un tel état comme à l'équation (3.12), chaque mode spatial  $u_j(\mathbf{r})$  correspond dans ce cas à la fonction indicatrice<sup>70</sup> du pixel  $j$ , dont la surface est notée  $D_j$ . L'opérateur quantique associé au nombre de photons mesurés au niveau du pixel  $j$  s'écrit donc, d'après l'équation (4.1) et pour une efficacité quantique  $\eta = 1$ ,

$$\hat{N}_j = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \iint_{D_j} |u_k(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r} = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \delta_{j,k} = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad (4.1)$$

ce qui signifie que le nombre de photons détectés au pixel  $j$  correspond à une mesure de l'observable *nombre de photons*  $\hat{N}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$  du seul mode  $j$ . On re-

<sup>70</sup> – C'est à dire  $u_j(\mathbf{r}) = 1$  en tout point  $\mathbf{r}$  situé à l'intérieur du pixel  $j$ , et  $u_j(\mathbf{r}) = 0$  partout ailleurs.

trouve ainsi localement en chaque pixel du détecteur les propriétés des états sous-poissoniens étudiés au chapitre précédent. Pour cette raison, ces images seront qualifiées dans la suite de **localement sous-poissoniennes**, ou de manière équivalente **localement comprimées en intensité**.

Ce type d'éclairement sous-poissonien non classique semble plus difficile à concevoir expérimentalement que la solution évoquée en introduction de ce chapitre et étudiée dans les références [151, 149, 28], pour laquelle il suffisait de superposer deux modes dont un seul était comprimé. En effet, il est nécessaire ici de générer simultanément un grand nombre d'états comprimés en amplitude. Une implémentation expérimentale d'un tel état localement comprimé en intensité pourrait néanmoins être envisagée en construisant un réseau compact de diodes laser sous-poissoniennes, ou d'amplificateurs optiques paramétriques miniaturisés et juxtaposés [102] qu'il suffirait ensuite d'imager sur le plan du détecteur. En s'assurant que le facteur de remplissage spatial (*filling factor*) de ces sources est suffisant et en garantissant une bonne focalisation sur le plan du détecteur, on obtiendrait des fluctuations localement sous-poissoniennes à la surface du capteur, dans des aires pouvant être limitées à la taille d'un détecteur élémentaire (pixel), garantissant ainsi l'absence de corrélation entre les mesures effectuées sur les différents pixels.

Nous supposerons dans toute la suite de ce chapitre que ces hypothèses sont satisfaites. Nous pourrions alors considérer qu'en chacun des  $M$  pixels du détecteur (et donc de l'image acquise), le nombre de photons reçus est une réalisation d'une variable aléatoire  $N_k$  de moyenne  $\mu_{N_k}$ , décrite par une statistique de photocomptage sous-poissonienne. Puisque nous considérerons, sauf mention du contraire, uniquement les fluctuations d'origine quantique intrinsèques au rayonnement électromagnétique, l'ensemble des valeurs moyennes du photocomptage en chaque pixel  $\mu_{N_k}$ ,  $k \in [1; M]$  permettra donc de décrire l'image qu'on observerait en l'absence de bruit quantique. Ces valeurs moyennes seront également notées plus simplement  $\mu(k) \triangleq \mu_{N_k}$ , où la fonction  $\mu(k)$ ,  $k \in [1; M]$  décrit le motif spatial d'éclairement utilisé.

Par ailleurs, pour obtenir des expressions simplifiées et synthétiques des BCRs, nous utiliserons par la suite une hypothèse commode consistant à supposer que le capteur est constitué d'une répartition continue de pixels infinitésimaux<sup>71</sup>. Cette reformulation « continue » du problème nécessite alors de décrire la répartition spatiale de l'intensité moyenne par une fonction continue, notée  $f_0(x, y)$ , qui représente le nombre moyen de photons détectés par unité de surface à la position  $(x, y)$  du plan du capteur. Dès lors, pour un pixel  $k$  de coordonnées  $(x_k, y_k)$  et de surface infinitésimale  $D_k = dx_k dy_k$ , la valeur moyenne de l'intensité de ce pixel pourra s'écrire

$$\mu(k) = f_0(x_k, y_k) dx_k dy_k. \quad (4.2)$$

En outre, nous conviendrons dans la suite d'écrire la fonction  $f_0(x, y)$  sous la forme

$$f_0(x, y) = N_t |v_0(x, y)|^2, \quad (4.3)$$

où  $N_t$  représente le nombre de photons reçus en moyenne sur la totalité du dé-

---

<sup>71</sup> – En particulier, cette approximation nous permettra de remplacer la sommation discrète sur les pixels du capteur par une intégration spatiale sur la surface de celui-ci.

tecteur, et où  $v_0(x, y)$  désigne la valeur moyenne du champ électromagnétique,<sup>72</sup> normalisé de sorte que  $\iint |v_0(x, y)|^2 dx dy = 1$ .

## 4.2 BCR pour l'estimation d'un paramètre dans une image localement sous-poissonienne

Nous allons ici déterminer la précision optimale d'estimation d'un paramètre  $d$  caractéristique d'une transformation affectant l'intensité d'une image dans sa globalité (par exemple une translation, une rotation ou encore une dilatation, etc.) lorsque celle-ci est perturbée par un bruit localement sous-poissonien. Cette étude nous permettra de quantifier le gain que pourraient offrir de tels états non classiques de la lumière pour améliorer les performances optimales d'estimation par rapport à une lumière cohérente standard. Cette caractérisation du gain optimal théorique revêt en effet une importance pratique pour justifier le coût matériel et expérimental qu'il faut investir pour produire de telles images aux fluctuations non classiques.

### 4.2.1 Information de Fisher pour l'estimation d'un paramètre dans le cas général

Nous nous intéressons dans cette section au cas d'une transformation quelconque, paramétrée par une grandeur scalaire  $d$ , et affectant la totalité de l'image considérée. L'objectif de la tâche d'estimation consiste alors à mesurer la valeur de ce paramètre  $d$ , à partir de l'acquisition de l'image modifiée. Dans ces conditions, nous pouvons représenter l'effet d'une telle transformation sur la valeur moyenne de chaque pixel de l'image grâce à la relation suivante :

$$\{\mu_{N_k}\} = \{\mu(k)\} \longrightarrow \{\mu(k, d)\}, \quad \forall k \in [1; M]. \quad (4.4)$$

Pour évaluer la borne de Cramer-Rao de l'estimation du paramètre  $d$ , nous devons préalablement évaluer l'information de Fisher  $I_F(d)$ , qui caractérise la quantité d'information contenue dans la totalité de l'image pour estimer le paramètre  $d$  et qui sera pour cette raison qualifiée d'**information de Fisher globale** dans la suite de ce chapitre. Si l'on note  $\mathbf{n} \triangleq \{n_1; \dots; n_M\}$  l'ensemble des mesures de photocomptage réalisées sur les  $M$  pixels de l'image, l'information de Fisher globale s'écrit, conformément à la définition 2.2 donnée au chapitre 2

$$I_F(d) \triangleq - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial d^2} [\ell(\mathbf{n})] \right\rangle, \quad (4.5)$$

---

<sup>72</sup> – Bien que la fonction  $v_0(x, y)$  représente la valeur moyenne du champ électromagnétique en tout point du plan transverse, elle ne doit toutefois pas être confondue avec un *mode* de rayonnement unique : comme on l'a vu, le modèle de champ considéré ici est en effet hautement multimode.



où la logvraisemblance  $\ell(\mathbf{n})$  est définie par

$$\ell(\mathbf{n}) \triangleq \ln P_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \ln \prod_{k=1}^M P_{N_k}(n_k) = \sum_{k=1}^M \ln P_{N_k}(n_k) = \sum_{k=1}^M \ell_k(n_k), \quad (4.6)$$

car les fluctuations en chacun des pixels du détecteur, décrites grâce aux lois de probabilité discrètes  $P_{N_k}(n_k)$ , ont été supposées indépendantes entre elles, ce qui permet d'écrire  $P_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) = \prod_{k=1}^M P_{N_k}(n_k)$ . Grâce à cette remarque, on peut réécrire  $I_F(d)$  sous la forme suivante

$$I_F(d) = \sum_{k=1}^M \mathcal{I}_F(k, d), \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}_F(k, d) \triangleq - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial d^2} \left[ \ell_k(n_k) \right] \right\rangle, \quad (4.7)$$

où le terme  $\mathcal{I}_F(k, d)$  sera dénommé dans la suite **information de Fisher locale** pour l'estimation du paramètre  $d$ . En effet, bien que la totalité de l'image soit utilisée pour estimer le paramètre  $d$ , savoir que  $n_k$  photons ont été détectés au pixel  $k$  va contribuer dans une certaine mesure à la détermination de  $d$ .

Pour établir l'expression de l'information de Fisher, nous allons supposer que les lois de photocomptage  $P_{N_k}(n_k)$  dépendent du paramètre  $d$  que l'on cherche à estimer par l'intermédiaire de leur valeur moyenne  $\mu_{N_k} = \mu(k, d)$ . Un tel modèle de formation d'image correspond à des situations expérimentales réelles dans lesquelles le faisceau non classique qui forme l'image subit une transformation paramétrée par la grandeur  $d$ .

Le calcul de l'information de Fisher locale  $\mathcal{I}_F(k, d)$  au pixel  $k$  nécessite d'évaluer la dérivée seconde de la logvraisemblance  $\ell_k(n_k)$  par rapport au paramètre  $d$ . Nous proposons d'introduire les notations suivantes

$$\mu'_k = \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \quad \text{et} \quad \mu''_k = \frac{\partial^2 \mu(k, d)}{\partial d^2}, \quad (4.8)$$

qui nous permettent d'écrire, grâce à l'hypothèse précédente,

$$\frac{\partial \ell_k(n_k)}{\partial d} = \frac{\partial \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)} \cdot \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} = \mu'_k \cdot \frac{\partial \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)}. \quad (4.9)$$

Par une nouvelle dérivation par rapport au paramètre  $d$ , on obtient

$$\frac{\partial^2 \ell_k(n_k)}{\partial d^2} = \left[ \mu''_k \cdot \frac{\partial \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)} + [\mu'_k]^2 \cdot \frac{\partial^2 \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)^2} \right]. \quad (4.10)$$

À partir de cette dernière équation, et d'après l'équation (4.7), l'information de Fisher locale se réécrit :

$$\mathcal{I}_F(k, d) = -\mu''_k \left\langle \frac{\partial \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)} \right\rangle - [\mu'_k]^2 \left\langle \frac{\partial^2 \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)^2} \right\rangle. \quad (4.11)$$

Cette expression se simplifie car le premier terme est nul<sup>73</sup>. Il suffit alors de remarquer que le second terme de l'équation (4.11) fait intervenir l'expression de

<sup>73</sup> – En effet, la loi de probabilité  $P_{N_k}(n_k)$  étant une série sommable normalisée, on peut écrire

l'information de Fisher pour l'estimation de la moyenne  $\mu(k, d)$ , définie par

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] \triangleq -\left\langle \frac{\partial^2 \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)^2} \right\rangle. \quad (4.12)$$

Avec ces notations, l'information de Fisher locale  $\mathcal{I}_F(k, d)$  se réécrit sous la forme

$$\mathcal{I}_F(k, d) = [\mu'_k(k, d)]^2 \times \mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)], \quad (4.13)$$

ce qui permet, en sommant enfin sur les  $M$  pixels de l'image, d'obtenir une nouvelle expression de l'information de Fisher globale

$$I_F(d) = \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2 \times \mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)]. \quad (4.14)$$

En examinant la relation (4.13), on remarque que  $\mathcal{I}_F(k, d)$  dépend de deux facteurs distincts, qui s'interprètent intuitivement de la façon suivante :

- La présence du terme  $\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)]$  signifie que la qualité de l'estimation du paramètre  $d$  dépend clairement de la qualité de l'estimation de l'intensité moyenne en chaque pixel.
- Par ailleurs, le terme  $\left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2$  traduit le fait que l'information de Fisher locale  $\mathcal{I}_F(k, d)$  est d'autant plus grande que la valeur moyenne  $\mu(k, d)$  est « sensible » à une variation du paramètre  $d$ . On peut noter en outre que ce second facteur ne dépend pas de la statistique de photocomptage, mais uniquement de la répartition spatiale de l'intensité moyenne.

## 4.2.2 BCR pour l'estimation de déplacement en lumière poissonienne standard

Le principe du calcul de l'information de Fisher présenté ci-dessus peut s'appliquer à l'estimation de tout paramètre physique  $d$  qui affecte l'intensité lumineuse d'une image dans sa globalité. À partir de maintenant, nous allons toutefois nous focaliser sur un cas particulier dans lequel la transformation subie par l'image se résume à un déplacement d'amplitude  $d$  dans une direction donnée, que nous supposons par commodité colinéaire à l'axe  $X$  du plan transverse. En pratique, l'étude de cette situation physique revêt un intérêt pour des applications de recalage d'images ou de nanositionnement de faisceau, entre autres exemples. De plus, ce problème classique de traitement d'image a fait l'objet de nombreuses études antérieures dans des situations de bruits plus standard (bruit gaussien, bruit de Poisson, etc. Voir par exemple [63, 136]). En particulier, nous rappelons ci-dessous le calcul de la borne sur la variance minimale d'estimation d'un déplacement, obtenue dans le cas d'un bruit de Poisson, à laquelle nous pourrons par la suite comparer les valeurs de BCR déterminées pour des fluctuations sous-poissoniennes.

Dans le cas standard où les fluctuations de l'intensité se situent au niveau

$$\left\langle \frac{\partial \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)} \right\rangle = \sum_{n_k=0}^{+\infty} P_{N_k}(n_k) \frac{\partial \ln P_{N_k}(n_k)}{\partial \mu(k, d)} = \sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{\partial P_{N_k}(n_k)}{\partial \mu(k, d)} = \frac{\partial \left[ \sum_{n_k=0}^{+\infty} P_{N_k}(n_k) \right]}{\partial \mu(k, d)} = \frac{\partial [1]}{\partial \mu(k, d)} = 0.$$

du *shot noise*, nous avons vu au chapitre précédent que la loi de probabilité de photocomptage est une loi de Poisson. Dans ces conditions, il est bien connu [118] que l'information de Fisher pour l'estimation de l'intensité moyenne vaut

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] = \frac{1}{\mu(k, d)}. \quad (4.15)$$

En utilisant cette expression dans l'équation (4.13), on peut alors calculer l'information de Fisher globale

$$I_F^{Poi}(d) = \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2 \times \frac{1}{\mu(k, d)}, \quad (4.16)$$

où la notation  $I_F^{Poi}(d)$  signifie que l'on considère des fluctuations poissonniennes.

On peut fournir une expression plus synthétique de  $I_F^{Poi}(d)$  en utilisant l'approximation d'une répartition continue de pixels évoquée précédemment. Pour un déplacement  $d$  selon la direction  $X$ , la valeur moyenne de l'intensité au pixel  $k$  de coordonnées  $(x_k, y_k)$  de l'image déplacée s'écrit dans ce cas  $\mu(k, d) = f_0(x_k - d, y_k) dx_k dy_k$  (voir équation 4.2). En utilisant cette relation et en remplaçant la sommation sur les  $M$  pixels du détecteur par une intégration spatiale sur toute la surface du détecteur notée  $\Sigma$ , l'équation (4.16) se réécrit sous la forme intégrale suivante

$$I_F^{Poi}(d) = \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial f_0(x - d, y)}{\partial d} \right]^2 \frac{1}{f_0(x - d, y)} dx dy. \quad (4.17)$$

Si l'on suppose enfin que l'extension spatiale du faisceau et que l'amplitude du déplacement sont faibles devant la taille du capteur, on peut étendre le domaine d'intégration de l'équation précédente à la totalité du plan transverse. En posant alors  $x' \triangleq x - d$ , on a  $\frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} = \frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial d} = -\frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'}$ , d'où l'on déduit

$$I_F^{Poi}(d) = \iint \left[ \frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'} \right]^2 \frac{1}{f_0(x', y)} dx' dy = I_F^{Poi}(0), \quad (4.18)$$

ce qui permet de montrer qu'avec les hypothèses que nous avons faites, l'information de Fisher  $I_F^{Poi}(d)$  est indépendante de la valeur du déplacement  $d$ .

À partir de l'expression précédente de  $I_F^{Poi}(d)$ , on peut alors retrouver l'expression de la BCR pour l'estimation du déplacement  $d$  en lumière poissonnienne (voir annexe C.3.1.1), qui s'écrit

$$BCR^{Poi}(d) = \frac{1}{I_F^{Poi}(d)} = \frac{1}{16\pi^2 N_t \Delta_X^2 [v_0(x, y)]}, \quad (4.19)$$

et qui est aussi indépendante du déplacement  $d$ . Dans cette équation,  $\Delta_X^2 [v_0(x, y)]$  désigne la **largeur spectrale spatiale selon la direction  $\mathbf{X}$**  de la répartition de champ moyen  $v_0(x, y)$  qui définit la forme du motif spatial d'intensité  $f_0(x, y)$  car on a supposé que  $f_0(x, y) = N_t |v_0(x, y)|^2$ . Nous rappelons ci-dessous la définition de la largeur spectrale spatiale  $\Delta_X^2 [v_0(x, y)]$  (voir référence [117]).

**Définition 4.1** Soit  $g(x, y)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs complexes

( $g(x, y) \in \mathbb{C}$ ). En supposant que le module, noté  $|g(x, y)|$ , de la fonction  $g(x, y)$  admet une transformée de Fourier (bidimensionnelle) notée  $TF\{|g|\}(\nu_X, \nu_Y)$ , la largeur spectrale spatiale  $\Delta_X^2[g(x, y)]$  de la fonction  $g(x, y)$  selon la direction  $X$  est définie par

$$\Delta_X^2[g(x, y)] \triangleq \iint \nu_X^2 |TF\{|g|\}(\nu_X, \nu_Y)|^2 d\nu_X d\nu_Y. \quad (4.20)$$

L'expression de la BCR fournie à l'équation (4.19) constitue un résultat classique lorsque l'on considère des bruits poissoniens [105, 136, 157]. Il est bien connu que cette BCR décroît lorsque le nombre moyen de photons  $N_t$  reçus sur la totalité du détecteur durant la durée  $T$  augmente : en d'autres termes, l'écart-type de la mesure diminue proportionnellement à la racine carrée de l'intensité lumineuse [105, 136]. On peut noter également que la BCR dépend du contenu fréquentiel du motif spatial d'éclairement. En effet, les variations d'intensité au niveau du détecteur seront d'autant plus sensibles à des déplacements faibles que la structure du motif d'éclairement présentera une densité d'énergie non négligeable pour des fréquences spatiales élevées, rendant ainsi la mesure de  $d$  plus aisée, et donc plus précise. Ces observations peuvent être illustrées très clairement dans le cas où le motif d'éclairement est gaussien. La répartition spatiale de champ moyen s'écrit dans ce cas

$$v_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4w^2}\right), \quad (4.21)$$

où  $w$  représente la largeur du faisceau (*waist* en anglais), et la répartition spatiale d'intensité correspondante vaut,

$$f_0(x, y) = \frac{N_t}{2\pi w^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right). \quad (4.22)$$

Dans ce cas, on peut montrer que  $\Delta_X^2[v_0(x, y)] = 1/(16 \pi^2 w^2)$ , et la BCR devient donc

$$BCR^{Poi}(d) = \frac{w^2}{N_t}. \quad (4.23)$$

Pour un tel faisceau gaussien, si l'on considère que le plus petit déplacement détectable  $\delta d_{min}$  correspond à l'écart-type minimal  $\delta d_{min} = w/\sqrt{N_t}$ , alors cette valeur s'identifie à l'expression de la *limite quantique standard* de résolution que l'on peut trouver par exemple dans les références [116, 37, 29].

### 4.2.3 BCR pour l'estimation de déplacement en lumière sous-poissonienne

Nous proposons maintenant de caractériser la précision optimale d'estimation d'un déplacement d'une image en lumière sous-poissonienne en se fondant sur le modèle phénoménologique temporel de fluctuations sous-poissoniennes présenté à la section 3.2.2. Nous verrons que si le calcul explicite de la BCR n'est pas réalisable dans ce cas, il est néanmoins possible de minorer celle-ci dans des situations où l'intensité de l'image est élevée. Nous tenterons ensuite d'analyser le comportement de la BCR pour des situations où l'intensité de l'image est faible

(acquisitions à faible flux de photon), ce qui nous conduira à proposer l'expression explicite d'une borne de Cramer-Rao *effective*. Comme nous le vérifierons par la suite, cette BCR *effective* nous permettra de borner la variance d'estimation d'un déplacement quels que soient les niveaux d'intensité que nous ayons considérés.

#### 4.2.3.1 Borne sur la variance minimale d'estimation pour un modèle de lois d'attente gamma

En raison de la complexité de la loi de probabilité de photocomptage donnée en équation (3.33) et associée au modèle phénoménologique temporel de fluctuations sous-poissoniennes, il ne nous a pas été possible de déterminer explicitement la BCR pour l'estimation d'un déplacement d'une image perturbée par un tel bruit sous-poissonien.

Cependant, lorsque l'on considère un tel modèle temporel pour lequel les temps d'attente entre détections successives de photons sont distribués selon une loi gamma d'ordre  $L \in \mathbb{N}$ , il est possible de tirer parti de l'image physique des *photons virtuels*<sup>74</sup> pour majorer l'information de Fisher et obtenir ainsi une limite inférieure à la BCR véritable. Lorsque la valeur moyenne du photocomptage  $\mu_{N_k}$  au pixel  $k$  est suffisamment élevée, on peut en effet supposer qu'au lieu de mesurer uniquement le résultat  $n_k$  du comptage des vrais photons, nous avons accès à la mesure  $m_k$  du nombre de *photons virtuels* qui y sont parvenus durant le temps  $T$ . Comme nous l'avons vu à la section (3.2.2), la loi de photocomptage  $P_{M_k}(m_k)$  suivie par ce processus *virtuel* sous-jacent est alors une loi de Poisson standard, d'intensité  $L \times \mu_{N_k}$ . Bien que l'hypothèse de pouvoir détecter ces *photons virtuels* ne soit clairement pas réaliste, elle n'en demeure pas moins intéressante pour borner la variance minimale d'estimation de  $d$ . En effet, nous démontrons dans la référence [42] (voir aussi l'annexe C.3.1.2) la propriété suivante :

**Propriété 4.1** *Pour un processus sous-poissonien modélisé par des temps d'attente gamma d'ordre  $L$ , l'information de Fisher  $I_F(d)$  pour l'estimation d'un déplacement  $d$  est inférieure ou égale à l'information de Fisher, notée  $I_{F_M}(d)$ , évaluée dans le cas du processus de Poisson virtuel sous-jacent,*

$$I_F(d) \leq I_{F_M}(d) = L \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2 \times \frac{1}{\mu(k, d)}. \quad (4.24)$$

En comparant l'équation précédente avec l'expression de l'information de Fisher  $I_F^{Poi}(d)$  dans le cas poissonien donnée en équation (4.17), on voit que l'information de Fisher pour l'estimation du paramètre  $d$  est au mieux augmentée en proportion de l'ordre  $L$  de la loi gamma caractéristique du processus sous-poissonien.

On peut alors aisément déduire une **limite inférieure à la BCR**, que nous noterons  $\widetilde{BCR}^L(d)$  dans la suite pour une loi d'attente gamma d'ordre  $L$  (voir annexe C.3.1.2). Cette valeur limite correspond à la BCR que l'on obtiendrait pour une image poissonienne standard d'intensité  $L$  fois plus élevée, c'est-à-dire

$$\widetilde{BCR}^L(d) = \frac{BCR^{Poi}(d)}{L} = \frac{1}{16LN_t\pi^2\Delta_X^2[v_0(x, y)]}. \quad (4.25)$$

---

<sup>74</sup> – Introduite à la section 3.2.2.

Par conséquent, on peut conclure que la BCR pour l'estimation d'un déplacement peut être **au mieux réduite en proportion du facteur de Fano**  $F = 1/L$  par rapport au cas poissonien standard, lorsqu'on utilise une lumière sous-poissonienne de temps d'attente gamma d'ordre  $L$  entier d'intensité suffisante. On a montré en effet en section 3.2.2 que  $F \rightarrow 1/L$  à forte intensité, pour une loi d'attente gamma d'ordre  $L$ . En supposant que cette borne inférieure puisse être atteinte par la variance d'un estimateur du déplacement, cela signifierait alors que la réduction des fluctuations du photocomptage est dans ce cas pleinement mise à profit pour réduire la variance d'estimation du paramètre. Nous vérifierons dans la suite de ce chapitre que cette limite inférieure  $\widetilde{BCR}^L(d)$  s'identifie bien à la vraie valeur de la BCR à fort flux, confirmant ainsi le résultat établi dans les références [29, 28] en utilisant un modèle gaussien de fluctuations sous-poissoniennes.

#### 4.2.3.2 Influence du comportement Bernoulli à faible flux :

À faible flux en revanche, la limite inférieure de la BCR que nous venons d'établir risque de sous-estimer fortement la valeur de la BCR véritable. En effet, nous avons vu à la section 3.2.2 que la nature sous-poissonienne de la statistique de photocomptage disparaît progressivement quand on reçoit moins de quelques photons en moyenne sur le détecteur pendant la durée d'intégration  $T$ . Dans un cas limite où l'intensité  $N_t$  serait très faible, en supposant que le photocomptage en chaque pixel peut être modélisé par une loi de Bernoulli (voir équation 3.35), on montre que l'information de Fisher pour l'estimation de  $d$  s'écrit<sup>75</sup> (voir [42] ou annexe C.3.1.4)

$$I_F(d) = I_F^{Poi}(d) + \iint \left[ \frac{\partial f_0(x, y)}{\partial x} \right]^2 dx dy, \quad (4.26)$$

et tend progressivement vers  $I_F^{Poi}(d)$  à mesure que l'intensité moyenne totale  $N_t$  diminue<sup>76</sup>. À très faible flux, l'utilisation d'un faisceau sous-poissonien ne permet donc pas d'augmenter l'information disponible sur l'estimation du paramètre  $d$  par rapport à une lumière standard poissonienne. De façon équivalente, ce résultat signifie que la BCR à très faible flux ne sera pas diminuée par rapport à la borne sur la variance d'estimation que l'on obtiendrait pour un faisceau standard poissonien ( $BCR^{Poi}(d)$ ).

#### 4.2.3.3 Borne de Cramer-Rao effective

Pour compléter les résultats précédents obtenus dans deux cas extrêmes (image de très forte, ou de très faible intensité), il serait intéressant de disposer d'une expression explicite de la BCR qui décrive comment la borne minimale sur la variance d'estimation de déplacement en lumière sous-poissonienne évolue en fonction de l'intensité de l'image. Si l'on n'a pas pu obtenir rigoureusement une telle expression avec le modèle phénoménologique temporel, nous allons voir que

<sup>75</sup> – On suppose ici encore que  $d$  et la largeur du faisceau sont faibles par rapport à la taille du capteur, constitué d'une répartition continue de pixels infinitésimaux.

<sup>76</sup> – En effet, le premier terme  $I_F^{Poi}(d)$  est proportionnel à  $N_t$  alors que le second terme varie comme  $N_t^2$  et devient négligeable pour  $N_t \ll 1$ .

le modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes introduit en section 3.2.3 permet quant à lui de conjecturer une forme explicite de la borne de Cramer-Rao, que nous qualifierons dans la suite de ce chapitre de **borne de Cramer-Rao effective** et dont nous vérifierons numériquement la validité pour décrire la borne minimale de la variance d'estimation à faible flux de photon.

**Information de Fisher locale pour un modèle binomial :** Nous considérons dans ce paragraphe que l'image acquise est perturbée par des fluctuations sous-poissoniennes binomiales. Plus précisément, nous supposons qu'en chaque pixel du détecteur, la statistique de photocomptage suit une loi binomiale similaire à l'équation (3.37) dont le paramètre  $N_0$  est supposé identique pour tous les pixels de l'image. Pour un pixel  $k$  du détecteur, le second paramètre de cette loi binomiale est noté  $\eta(k)$  et caractérise la valeur moyenne du photocomptage au pixel  $k$  car  $\mu(k) = N_0 \eta(k)$ . On a vu en étudiant le modèle binomial que le facteur de Fano au pixel  $k$  s'écrivait dans ces conditions  $F(k) = 1 - \eta(k)$ . Pour effectuer ces hypothèses et utiliser le modèle binomial, il est en réalité nécessaire de modifier le modèle de formation d'image utilisé précédemment, en supposant que l'image est désormais formée par absorption partielle d'un faisceau sous-poissonien d'intensité et de facteur de Fano initialement uniformes (voir le détail de ce modèle de formation d'image en annexe C.3.1.3).

Bien qu'il nécessite de considérer un dispositif de formation d'image différent, ce modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes permet néanmoins de calculer explicitement l'information de Fisher locale pour l'estimation de l'intensité moyenne  $\mu(k, d)$  au pixel  $k$  (voir annexe C.3.1.3), qui s'écrit dans ces conditions

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] = \frac{1}{F(k, d)\mu(k, d)}. \quad (4.27)$$

Si l'on compare cette expression avec l'information de Fisher locale obtenue dans le cas poissonien (équation (4.15)), on s'aperçoit que l'information de Fisher locale dans le cas de fluctuations sous-poissoniennes binomiales est augmentée, par rapport au cas poissonien, de manière inversement proportionnelle au facteur de Fano  $F(k, d)$  de la lumière au pixel  $k$ . Pour un tel modèle binomial, la nature sous-poissonienne de la lumière captée au niveau du pixel  $k$  est donc très simplement prise en compte dans l'expression de l'information de Fisher locale. Cette remarque présente un intérêt significatif car nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'elle nous permet de conjecturer l'expression d'une borne de Cramer-Rao *effective* pour la prise en compte des situations d'imagerie à faible flux de photon.

**Définition d'une borne de Cramer-Rao effective :** L'information de Fisher locale obtenue ci-dessus en considérant un modèle binomial de fluctuations suggère que l'expression de l'information de Fisher pour des fluctuations sous-poissoniennes peut être déduite de l'information de Fisher  $I_F^{poi}(d)$  obtenue dans le cas poissonien à l'équation (4.16), à condition de pondérer la contribution de chaque pixel de l'image par le facteur de Fano *effectif* de la lumière détectée au pixel  $k$ . En effectuant cette pondération et en sommant sur l'ensemble des  $M$

pixels du détecteur, on obtient l'expression suivante pour l'information de Fisher

$$I_F^{eff}(d) = \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2 \times \frac{1}{F(k, d)\mu(k, d)}, \quad (4.28)$$

où la notation  $I_F^{eff}(d)$  désigne l'**information de Fisher effective**. Il est alors aisé d'en déduire la **borne de Cramer-Rao effective** correspondante<sup>77</sup>

$$BCR^{eff}(d) = \frac{1}{I_F^{eff}(d)} = \left\{ \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2 \times \frac{1}{F(k, d)\mu(k, d)} \right\}^{-1}. \quad (4.30)$$

Cette expression de la BCR *effective* va permettre de rendre compte de la dégradation progressive de la nature sous-poissonienne de la statistique de photocomptage en chaque pixel lorsque l'intensité moyenne diminue. En effet, la caractérisation du modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes présentée dans la section 3.2.2.3 a montré<sup>78</sup> que lorsque le temps d'attente entre deux détections successives de photons est distribué selon une loi gamma d'ordre  $L$ , le facteur de Fano du photocomptage sous-poissonien évolue continuellement entre 1 (pas de réduction de bruit) à très faible flux et  $1/L$  (réduction maximale des fluctuations) quand  $\mu_N$  est important ( $\mu_N > 100$  photons environ).

En utilisant ces observations pour interpréter l'expression de la BCR *effective* donnée en équation (4.30), on peut alors retrouver les comportements limites de la BCR discutés précédemment :

- À très forte intensité, le facteur de Fano est quasiment égal à  $1/L$  en chacun des pixels, c'est-à-dire  $\forall k \in [1; M]$ ,  $F(k, d) \simeq 1/L$ . Dans ces conditions, la BCR *effective* est alors  $L$  fois inférieure à la BCR obtenue pour un faisceau poissonien standard de même intensité et correspond à l'expression de la borne limite  $\widetilde{BCR}^L(d)$  obtenue précédemment.
- À l'inverse, lorsque l'intensité moyenne de l'image est très faible, nous avons vu que la nature sous-poissonienne du faisceau est fortement dégradée, et on a alors  $\forall k \in [1; M]$ ,  $F(k, d) \simeq 1$ . L'expression de la BCR *effective* ne diffère alors quasiment pas de la BCR obtenue pour un faisceau poissonien ( $BCR^{poi}(d)$ ).

Pour évaluer la BCR *effective* dans les situations d'intensité intermédiaire, on peut voir en observant l'équation (4.30) qu'il est nécessaire, pour chaque pixel  $k$ , de connaître le facteur de Fano *effectif*, noté  $F(k, d)$  dans l'équation (4.30) et dont la valeur évoluera entre  $1/L$  et 1 en fonction du nombre moyen  $\mu(k, d)$  de photons reçus au pixel  $k$ . Pour un pixel  $k$  donné, d'intensité moyenne  $\mu(k, d)$ , nous proposons d'évaluer numériquement le facteur de Fano à partir de la loi de

<sup>77</sup> – En supposant comme dans les cas précédents que le capteur est constitué d'une répartition continue de pixels infinitésimaux et de taille importante devant  $d$  et devant l'extension spatiale du faisceau,  $BCR^{eff}(d)$  se réécrit sous une forme intégrale et indépendante de  $d$

$$BCR^{eff}(d) = \left\{ \iint \frac{1}{F(x-d, y)} \left[ \frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} \right]^2 \frac{dx dy}{f_0(x-d, y)} \right\}^{-1}, \quad (4.29)$$

où  $F(x, y)$  est le facteur de Fano de la lumière au point  $(x, y)$  et  $f_0(x, y)$  représente la répartition spatiale de l'intensité moyenne de l'image.

<sup>78</sup> – Voir en particulier la figure 3.3, p. 116.



probabilité  $P_{N_k}(n_k)$  dont la forme est donnée en équation (3.33), en supposant que la valeur moyenne de cette loi vaut  $\mu_N = \mu(k, d)$ . Cette méthode d'évaluation numérique du facteur de Fano à partir de la loi (3.33) a été détaillée en section 3.2.2.3, et nous proposons de l'appliquer en chaque pixel de l'image afin de déterminer numériquement les valeurs de  $BCR^{eff}(d)$  pour un motif d'éclairement donné.

**Validation numérique de la BCR effective :** Sur la figure 4.1, nous avons tracé l'évolution de la BCR *effective* évaluée numériquement dans le cas d'une image de  $256 \times 256$  pixels. Le motif d'éclairement considéré est de forme gaussienne (voir équation (4.22)), de largeur  $w = 5$  pixels et d'intensité totale  $N_t$  variable. Les valeurs de  $BCR^{eff}(d)$  normalisées par  $N_t$  sont tracées en trait tireté (—) en fonction de  $N_t$ .

On peut remarquer en observant cette figure que la BCR *effective* permet bien de décrire une évolution continue de la borne minimale sur la variance d'estimation entre  $BCR^{poi}(d)$  à faible flux (pas d'amélioration de la performance optimale d'estimation) et  $BCR^{poi}(d)/L$  lorsque l'intensité de l'image est importante (amélioration maximale de la performance optimale d'estimation en proportion du facteur de Fano  $F = 1/L$ ).

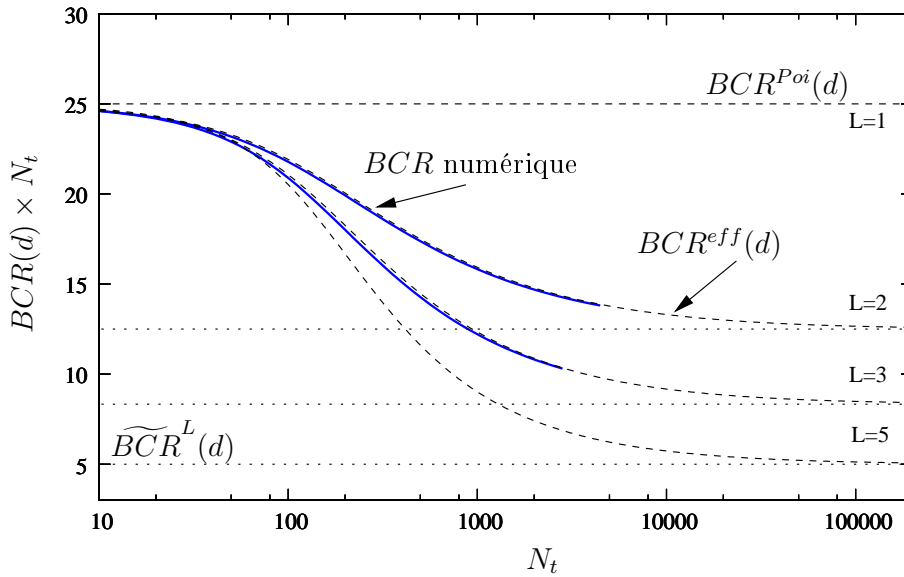


FIG. 4.1 – Comparaison de la borne de Cramer-Rao *effective* (traits tiretés (—)) avec les valeurs de la BCR évaluée numériquement (traits pleins épais (—)) pour l'estimation d'un déplacement d'un motif d'éclairement de forme gaussienne, de largeur  $w = 5$  pixels et d'intensité  $N_t$ . Les courbes en trait pointillés ( $\cdot \cdot \cdot$ ) correspondent aux valeurs de  $\widetilde{BCR}^L(d)$ . L'image comporte  $256 \times 256$  pixels et est perturbée par un bruit sous-poissonien (modèle de temps d'attente gamma d'ordre  $L$ ).

Nous ne pouvons cependant pas démontrer rigoureusement que l'expression de la BCR *effective* décrit la véritable BCR pour le modèle temporel considéré ici. Nous pouvons toutefois envisager de le vérifier numériquement. Pour cela,

nous proposons de calculer numériquement la borne de Cramer-Rao associée au modèle « temporel », défini par la loi de photocomptage donnée en équation (3.33). Cette BCR numérique est obtenue en évaluant l'information de Fisher locale en chaque pixel grâce à la méthode numérique détaillée en annexe A. Il suffit ensuite de sommer les valeurs obtenues sur la totalité des pixels formant l'image pour obtenir l'information de Fisher totale, puis d'en calculer l'inverse pour déterminer finalement la BCR numérique.

Nous avons tenté d'évaluer cette BCR numérique dans des conditions identiques à celles considérées pour le calcul de  $BCR^{eff}(d)$  sur la figure 4.1. En raison de la complexité de la loi de photocomptage  $P_N(n)$ , les valeurs de la BCR n'ont pu être calculées numériquement que pour  $L = 2$  et  $L = 3$ , et pour les faibles valeurs de  $N_t$  (jusqu'à  $N_t = 5 \times 10^3$  pour  $L=2$  et  $N_t = 3 \times 10^3$  pour  $L=3$ ). Ces valeurs normalisées par  $N_t$  sont reportées en trait plein épais (—) en fonction de  $N_t$  sur la figure 4.1. Bien qu'incomplet, ce tracé se superpose approximativement aux courbes représentant la BCR *effective* (courbes en traits tiretés --), ce qui tend à conforter la validité de la BCR *effective* pour évaluer une borne sur la variance minimale d'estimation d'un déplacement en lumière sous-poissonienne, pour des valeurs quelconques de l'intensité moyenne de l'image.

#### 4.2.3.4 Définition d'un gain sur la performance d'estimation optimale

Grâce aux résultats précédents, il est possible d'évaluer une borne minimale de la variance d'estimation de déplacement lorsque les fluctuations de l'image sont sous-poissoniennes. Celle-ci est en général inférieure à la BCR qu'on obtiendrait avec un faisceau poissonien standard de même intensité moyenne, et l'on a vu qu'elle pouvait au mieux être diminuée en proportion du facteur de Fano  $F$ , par rapport à cette situation de référence. De manière générale, pour des conditions expérimentales données utilisant une lumière poissonienne standard, il existe donc deux façons de diminuer la BCR d'estimation d'un paramètre : soit en augmentant simplement l'intensité du faisceau poissonien, soit en conservant la même intensité lumineuse, mais en remplaçant ce faisceau par un éclairage non classique sous-poissonien. Si la première méthode semble bien entendu beaucoup plus simple à mettre en pratique que la seconde, il existe cependant des situations pour lesquelles l'augmentation du flux lumineux n'est pas souhaitable, en particulier lorsque celle-ci risque de détériorer l'échantillon mesuré (tissus cellulaires par exemple), ou encore si les mesures effectuées nécessitent de réduire le niveau de bruit en valeur absolue<sup>79</sup>. Dans ces cas précis, l'utilisation d'états non classiques sous-poissoniens de la lumière revêt alors un intérêt indéniable.

Il paraît donc intéressant de proposer un critère de **gain sur la performance d'estimation optimale**  $\mathcal{G}$ , défini comme l'accroissement d'intensité nécessaire pour qu'un faisceau poissonien standard d'intensité totale  $\mathcal{G} \times N_t$  permette d'atteindre, dans des conditions identiques, la même variance minimale (la même BCR) qu'un faisceau sous-poissonien de facteur de Fano  $F$  d'intensité totale  $N_t$ . D'après les conclusions établies précédemment dans cette section, ce gain varie entre  $\mathcal{G} = 1$  (pas d'amélioration) lorsque l'intensité du faisceau est très faible et

<sup>79</sup> – Ce qui n'est pas le cas de l'estimation de paramètre étudiée dans ce chapitre.

une valeur maximale  $\mathcal{G}_{\max}$  égale à

$$\mathcal{G}_{\max} = \frac{1}{F}, \quad (4.31)$$

dans les situations où le facteur de Fano est égal à  $F$  en chacun des pixels de l'image, c'est-à-dire pour des niveaux d'intensité lumineuse suffisants. Nous verrons dans le chapitre suivant comment on peut définir un gain en performance pour évaluer l'apport des états sous-poissoniens de la lumière pour des tâches de détection.

### 4.3 Estimation de déplacement en lumière sous-poissonienne

Dans la section précédente, nous avons caractérisé une borne minimale sur la variance d'estimation d'un déplacement  $d$  dans une image et établi l'expression d'un gain en terme de performances optimales d'estimation de déplacement lorsqu'on utilise un faisceau sous-poissonien à la place d'un faisceau cohérent standard (poissonien). Il nous faut cependant encore vérifier qu'un tel gain peut être atteint en pratique, en exhibant un estimateur de déplacement qui soit efficace pour des fluctuations d'intensité sous-poissoniennes. Pour cela, nous présentons dans cette section deux méthodes d'estimation de déplacement, dont les performances seront caractérisées par la suite, grâce à des simulations numériques.

#### 4.3.1 Méthode « petits signaux » par pondération linéaire

La première méthode que nous rappelons brièvement ici a été étudiée dans les références [151, 29, 28]. Le principe de cette technique d'estimation repose sur la mesure de l'intensité totale du faisceau, réalisée dans deux configurations distinctes :

- On mesure tout d'abord l'intensité totale de l'image acquise au niveau du capteur. Le résultat de cette mesure d'intensité est noté

$$\mathcal{N}_t = \iint_{\Sigma} n(x, y) dx dy, \quad (4.32)$$

où  $n(x, y)$  désigne le nombre de photons reçus par unité de surface à la position  $(x, y)$  du détecteur et vérifie  $\langle n(x, y) \rangle = f_0(x - d, y)$  quand le faisceau est déplacé de  $d$ . Conformément aux notations introduites précédemment dans ce chapitre, la valeur moyenne de cette mesure d'intensité s'écrit  $\langle \mathcal{N}_t \rangle = N_t$ .

- On mesure ensuite l'intensité totale d'une version **pondérée** de l'image acquise. Puisque l'on se place toujours dans le cas d'un déplacement horizontal uniquement, la transformation à appliquer consiste ici à multiplier chaque pixel de l'image mesurée par une fonction de pondération notée  $g(x, y)$ . L'intensité totale mesurée s'écrit alors dans ce cas

$$\mathcal{S}_t = \iint_{\Sigma} g(x, y) n(x, y) dx dy. \quad (4.33)$$

À partir de ces deux mesures d'intensité, il est possible d'estimer la valeur du déplacement  $d$ , à condition de choisir convenablement la forme de la fonction de pondération  $g(x, y)$ . Ce problème a été étudié en détail dans les références [151, 29, 28]. En particulier, il a été établi que l'amplitude de variation du signal  $\mathcal{S}_t$  lorsque le faisceau subit un faible déplacement  $d$  dans la direction horizontale  $X$  pouvait être maximisée en choisissant une fonction de pondération proportionnelle à la dérivée par rapport à la variable  $x$  du logarithme de l'amplitude du champ moyen non déplacé  $|v_0(x, y)|$ , c'est-à-dire

$$g^{opt}(x, y) \propto \frac{1}{|v_0(x, y)|} \frac{\partial}{\partial x} [|v_0(x, y)|]. \quad (4.34)$$

Avec ce choix optimal de fonction de pondération, on maximise la précision de cette méthode d'estimation et l'estimateur du déplacement  $d$  peut alors s'écrire,

$$\hat{d}_{lin} \triangleq -\frac{1}{8\pi^2 \Delta_X^2 [v_0(x, y)]} \frac{\mathcal{S}_t}{\mathcal{N}_t} \quad (4.35)$$

où la notation  $\hat{d}_{lin}$  signifie que l'estimateur utilise une pondération **linéaire**. Dans ce cas, l'utilisation de cet estimateur à « petits signaux » (c'est-à-dire pour la mesure de très faibles valeurs du déplacement  $d$ ) sur un faisceau standard poissonien permet d'atteindre la limite quantique standard de précision [151, 29, 28], c'est-à-dire que la variance de  $\hat{d}_{lin}$  atteint la valeur  $BCR^{Poi}(d)$ .

Par ailleurs, il a également été démontré dans les références [29, 28] que cette méthode d'estimation, associée à une fonction de pondération  $g(x, y)$  optimisée conformément à l'équation (4.34), reste efficace à « petits signaux » lorsque l'on considère des lumières sous-poissoniennes de très forte intensité. En effet, il a été montré que la variance de cet estimateur atteint la borne de Cramer-Rao, évaluée dans les références [29, 28] pour un modèle gaussien de fluctuations sous-poissoniennes (hypothèse de flux intense) et qui s'identifie à la valeur  $\widetilde{BCR}^L(d)$  donnée ici en équation (4.25).

### 4.3.2 Méthode d'estimation par intercorrélation logarithmique

Si l'estimateur précédent constitue une méthode simple pour réaliser une estimation de déplacement efficace à très faibles déplacements, il pourrait être intéressant en pratique d'exhiber une méthode d'estimation plus générale, qui ne soit pas limitée aux faibles déplacements.

En raison de ses propriétés d'optimalité asymptotique, il est souvent intéressant d'utiliser un estimateur au sens du maximum de vraisemblance. Dans des situations de bruit standard, ce type d'estimateur peut en effet être calculé dans le cas où l'on cherche à estimer le déplacement d'une image bruitée [136, 63]. Cependant, lorsque l'on considère le modèle phénoménologique temporel de fluctuations sous-poissoniennes, cet estimateur n'a pas pu être déterminé explicitement en raison de la complexité de la loi de photocomptage  $P_N(n)$ . À défaut, nous proposons d'utiliser l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance adapté au cas de fluctuations poissoniennes que nous présentons ci-dessous.

L'estimation optimale du déplacement d'images bruitées par des statistiques

poissonniennes présente un intérêt important, pour des applications de recalage d'images astronomiques par exemple et peut être effectuée grâce à un estimateur au sens du maximum de vraisemblance [136, 63]. En particulier, lorsque l'extension spatiale du faisceau et le déplacement à estimer sont faibles devant les dimensions du capteur, on peut montrer (voir référence [63] ou le rappel proposé en annexe C.4.1) que cet estimateur peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante,

$$\hat{d}_{MV}^{poi} = \arg \max_{\delta} \left\{ \sum_{k=1}^M n_k \ln [\mu(k, \delta)] \right\}, \quad (4.36)$$

où  $\arg \max_{\theta} \{h(\theta)\}$  désigne la valeur du paramètre  $\theta$  qui maximise  $h(\theta)$  et où  $n_k$  représente la mesure de photocomptage réalisée au niveau du pixel  $k$ . Enfin,  $\mu(k, \delta)$  représente l'intensité du pixel  $k$  de l'image non bruitée (image de référence) si celle-ci était déplacée d'une quantité  $\delta$  dans la direction  $X$ <sup>80</sup>.

En analysant l'expression de cet estimateur, on conclut alors que le déplacement estimé  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  correspond à la valeur de  $\delta$  qui maximise l'**intercorrélacion**, dans la direction du déplacement  $X$ , entre l'image mesurée  $\mathbf{n} = \{n_k\}$ ,  $k \in [1; M]$  et le **logarithme** de l'image de référence non bruitée  $\{\mu(k)\}$ ,  $k \in [1; M]$ .

La mise en œuvre de cet estimateur nécessite donc de connaître *a priori* la forme de l'image dont on désire mesurer le déplacement. Il faut noter que cette contrainte existait déjà pour établir la fonction de pondération  $g(x)$  optimale dans le cas de l'estimateur  $\hat{d}_{lin}$ . L'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  permet de mesurer n'importe quelle amplitude de déplacement et son efficacité a été vérifiée numériquement sur des images perturbées par un bruit de Poisson pour toute amplitude du déplacement  $d$  [136].

Malheureusement, ces propriétés d'optimalité ne sont pas garanties lorsque nous allons considérer des photocomptages sous-poissoniens. L'analyse des simulations numériques présentées en section 4.4 nous permettra toutefois de conjecturer que l'optimalité de cet estimateur reste vérifiée pour des statistiques sous-poissoniennes.

**Correspondance entre les deux méthodes :** Il est intéressant de remarquer que ces deux estimateurs, bien que très dissemblables de par leur mise en œuvre, sont équivalents lorsque le motif d'éclairement est de forme gaussienne et que l'on considère de petits déplacements ( $d \ll 1$ ). On montre en effet en annexe C.5 que l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  peut s'écrire dans ces conditions sous la forme approchée suivante, pour de petits déplacements  $d \ll 1$ ,

$$\hat{d}_{MV}^{poi} = -2w^2 \frac{\mathcal{S}_t}{\mathcal{N}_t}, \quad (4.37)$$

qui s'identifie donc bien dans ce cas à l'estimateur linéaire  $\hat{d}_{lin}$  de l'équation (4.35), puisque  $\Delta_X^2[v_0(x, y)] = 1/(16\pi^2 w^2)$  pour un éclaircissement de forme gaussienne de largeur  $w$ . On peut ainsi s'attendre à ce que l'optimalité de l'estimateur

---

<sup>80</sup> – Pour l'implémentation numérique de cet estimateur, nous avons ajouté un coefficient de régularisation  $\varepsilon = 10^{-9}$  dans le calcul du logarithme afin d'éviter que des valeurs nulles de  $\mu(k, \delta)$  ne fassent diverger le résultat de l'estimation. L'estimateur utilisé pour les simulations numériques s'écrit donc  $\hat{d}_{MV}^{poi} = \arg \max_{\delta} \left\{ \sum_k n_k \ln [\mu(k, \delta) + \varepsilon] \right\}$ .

linéaire, démontrée à fort flux et pour de petits déplacements ( $d \ll 1$ ) [29, 28], soit également partagée dans cette situation par l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$ .

## 4.4 Résultats de simulation

Dans cette dernière section, les simulations numériques présentées vont permettre d'étudier les performances des estimateurs introduits précédemment sur des images localement sous-poissoniennes simulées. Ces simulations numériques permettront avant tout d'étudier comment la précision d'estimation de déplacement en lumière sous-poissonienne évolue lorsque le flux de photons diminue. En outre, l'analyse de ces résultats numériques confirmera l'intérêt de la BCR *effective* introduite à la section 4.2.3.3 pour borner la variance d'estimation à faible flux, et montrera que l'estimateur du maximum de vraisemblance adapté au bruit de poisson reste optimal lorsque les images sont entâchées de fluctuations sous-poissoniennes, dans les conditions que nous avons étudiées.

### 4.4.1 Optimalité de l'estimateur $\hat{d}_{MV}^{poi}$

#### 4.4.1.1 Description de l'expérience numérique :

Nous allons considérer tout d'abord le cas d'un champ moyen de forme gaussienne, dont la répartition spatiale correspond à celle d'un mode gaussien  $TEM_{00}$ , et de largeur (*waist*)  $w = 5$  pixels<sup>81</sup>. Le nombre total de photons détectés durant une durée d'intégration  $T$  fixée est toujours noté  $N_t$ .

L'acquisition d'images sous-poissoniennes peut être simulée numériquement au moyen du modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes présenté en section 3.2.2 qui suppose que le temps d'attente entre deux détections de photons est distribué selon une loi gamma d'ordre  $L$  entier. Il suffit pour cela de générer, en chaque pixel  $k$  de l'image simulée, une réalisation de la loi de photocomptage sous-poissonienne  $P_{N_k}(n_k)$  (voir équation (3.33)) de moyenne  $\mu(k, d)$  selon une méthode de génération détaillée en annexe C.2.2.2 et dont le principe repose sur l'image physique des *photons virtuels* introduite dans le chapitre précédent.

Dans les résultats qui suivent, nous analysons différentes situations physiques en faisant varier l'ordre  $L \in \{1; 2; 3; 5\}$  de la loi gamma décrivant les temps d'attente entre détections de photons, ainsi que la durée d'intégration  $T$ , de sorte que le nombre de photons total moyen  $N_t$  varie entre  $N_t = 20$  et  $N_t = 10^5$  photons. Enfin, pour autoriser la comparaison entre les deux estimateurs du déplacement étudiés ( $\hat{d}_{lin}$  et  $\hat{d}_{MV}^{poi}$ ), nous nous plaçons dans un cas où le motif d'éclaircissement ne subit aucun déplacement ( $d = 0$ )<sup>82</sup>.

Comme pour toutes les expériences numériques présentées dans la suite de ce chapitre, les performances d'estimation (biais et variance) des estimateurs  $\hat{d}_{lin}$  et  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  ont été évaluées sur des images de  $256 \times 256$  pixels en répétant l'expérience d'estimation sur un grand nombre ( $R = 10^4$ ) de réalisations indépendantes du bruitage poissonien ou sous-poissonien de l'image considérée.

<sup>81</sup> – Rappelons cependant pour éviter toute confusion que les images considérées dans ce chapitre de thèse sont supposées hautement multimodes.

<sup>82</sup> – Le but de l'estimation est donc ici d'estimer... une absence de déplacement !

## 4.4.1.2 Analyse des résultats de simulation :

Nous avons tout d'abord vérifié que les deux estimateurs étudiés  $\hat{d}_{lin}$  et  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  possédaient un biais négligeable par rapport à l'écart-type des valeurs estimées, pour toutes les situations physiques considérées.

Pour étudier la précision de ces estimateurs, nous avons représenté sur la figure 4.2 la variance de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  (symboles  $\triangle$ ,  $\square$ ,  $\diamond$ ,  $*$ ) ainsi que celle de l'estimateur linéaire  $\hat{d}_{lin}$  (symboles  $+$ ), obtenues toutes deux empiriquement à partir des simulations Monte-Carlo et normalisées par l'intensité moyenne totale  $N_t$  du faisceau. On peut noter que les variances obtenues dans chacun des cas sont comparables, ce qui s'interprète aisément puisqu'on a vu que ces deux méthodes étaient équivalentes pour de faibles déplacements d'un éclairage gaussien.

Par ailleurs, l'optimalité des estimateurs peut être évaluée en comparant les variances obtenues avec le tracé de la BCR *effective* (traits tiretés (—)) ou de la limite inférieure de la borne de Cramer-Rao à fort flux  $\widetilde{BCR}^L(d)$  (traits pointillés ( $\cdot\cdot\cdot$ )) pour différentes valeurs de  $L$ .

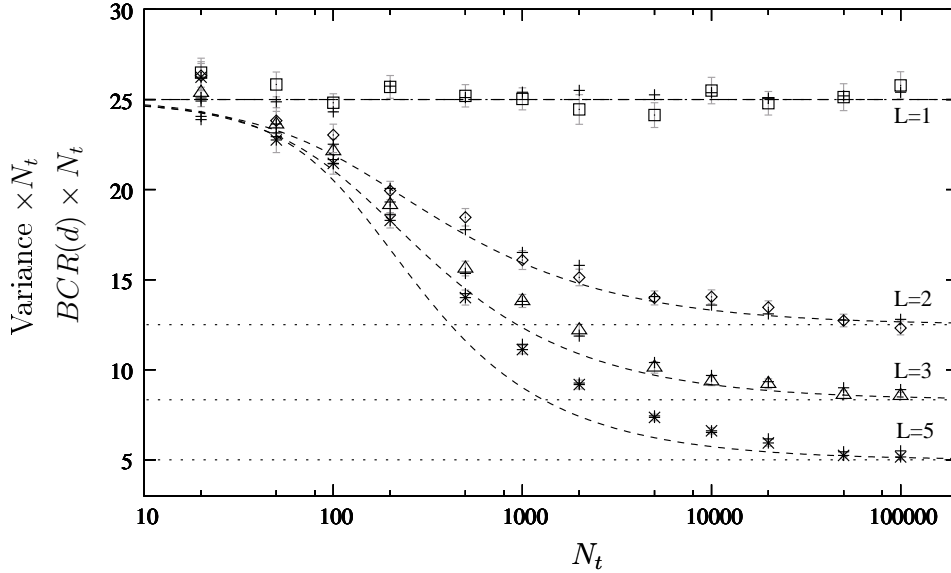


FIG. 4.2 – Comparaison de la variance normalisée par  $N_t$  des estimateurs  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  (symboles  $\square$  [ $L=1$ ],  $\diamond$  [ $L=2$ ],  $\triangle$  [ $L=3$ ],  $*$  [ $L=5$ ]) et  $\hat{d}_{lin}$  (symboles  $+$ ) avec les valeurs de la BCR *effective* (—). Les courbes en traits pointillés ( $\cdot\cdot\cdot$ ) correspondent aux valeurs de  $\widetilde{BCR}^L(d)$ .

La figure 4.2 permet tout d'abord de vérifier que l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  est efficace pour un bruit poissonien ( $L = 1$ ) [136] et que sa variance est inversement proportionnelle à l'intensité  $N_t$  du faisceau. De même, ces résultats numériques confirment que lorsque le modèle de bruit perturbant l'image est sous-poissonien et lorsque  $N_t > 100$  photons environ, la variance de cet estimateur devient inférieure à la BCR obtenue pour des fluctuations poissoniennes  $BCR^{Poi}(d)$  (courbe en trait mixte ( $\cdot - \cdot$ )), confirmant ainsi que l'utilisation de lumières sous-poissoniennes permet de surpasser la limite quantique standard de précision.

Plus précisément, lorsque l'intensité du faisceau devient importante ( $N_t \geq 10^5$  photons, soit plus de 600 photons par pixel en moyenne au centre du faisceau), le facteur de Fano de la lumière sous-poissonienne simulée devient égal à  $F = 1/L$  pour la quasi-totalité des pixels de l'image et la variance des deux estimateurs étudiés atteint la valeur limite  $\widetilde{BCR}^L(d)$ . Or, puisque les estimateurs  $\hat{d}_{lin}$  et  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  sont non biaisés, et qu'aucun estimateur non biaisé ne peut présenter une variance inférieure à la BCR, cette remarque permet de prouver que  $\widetilde{BCR}^L(d)$  est égale à la véritable BCR à fort flux, confirmant ainsi les résultats établis dans les références [28, 29]. Par ailleurs, cette observation montre également que les estimateurs  $\hat{d}_{lin}$  et  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  sont efficaces à fort flux et permettent de garantir un gain en terme de performance optimale (BCR) égal à  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F$  [42].

Lorsque l'intensité du faisceau est plus faible en revanche, on observe que la variance des estimateurs suit une évolution comparable au tracé de la BCR *effective*, qui prend en compte la dégradation progressive du caractère sous-poissonien du faisceau à faible intensité sous l'influence du phénomène de « fenêtrage temporel ». Cette remarque semble ainsi montrer que pour un faible déplacement d'un faisceau de forme gaussienne, les estimateurs  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  et  $\hat{d}_{lin}$  restent quasiment efficaces quel que soit le niveau de l'intensité moyenne  $N_t$ . Les simulations numériques présentées ici tendent donc à confirmer que le gain en précision obtenu à fort flux en utilisant une lumière sous-poissonienne plutôt qu'un faisceau cohérent standard de même intensité disparaît progressivement lorsque l'image est acquise à faible flux.

#### 4.4.2 Propriétés de l'estimateur $\hat{d}_{MV}^{poi}$

Les premiers résultats de simulation ont confirmé que l'apport des lumières sous-poissoniennes pour améliorer les performances d'estimation d'un déplacement était maximal à forte intensité mais qu'il tendait à disparaître pour des images de faible intensité. Ces résultats ont aussi permis d'établir que l'estimateur de déplacement au sens du maximum de vraisemblance adapté au bruit de Poisson  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  restait quasiment efficace pour des fluctuations sous-poissoniennes, quelle que soit l'intensité moyenne de l'image. Nous proposons maintenant de vérifier la validité et l'efficacité de cet estimateur pour mesurer des amplitudes de déplacement importantes et pour différentes formes du motif d'éclairement.

##### 4.4.2.1 Efficacité à grand déplacement

Une des motivations de cette étude consistait à obtenir une méthode d'estimation plus générale que l'estimateur  $\hat{d}_{lin}$  qui a été développé pour la mesure de très faibles amplitudes de déplacement dans les références [151, 29, 28] et que nous avons rappelé en section 4.3.1. Il nous faut donc vérifier que l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  permet d'assurer quant à lui une estimation efficace y compris pour des amplitudes de déplacement importantes.

Considérons pour cela le cas d'un faisceau gaussien de largeur  $w = 5$  et d'intensité élevée  $N_t = 10^5$ , perturbé par un bruit poissonien ( $L=1$ ) ou sous-poissonien, modélisé grâce au modèle phénoménologique temporel pour des ordres variables  $L \in \{2, 3, 5\}$ . Pour les différentes expériences numériques réalisées, le déplacement à estimer varie entre 0 (pas de déplacement) et un déplacement



maximal de 5 pixels, ce qui correspond à la largeur  $w$  du faisceau gaussien considéré. Nous avons tout d'abord vérifié par simulation numérique que l'estimateur par pondération linéaire ainsi que  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  permettaient d'estimer sans biais le déplacement pour les différentes valeurs testées<sup>83</sup>.

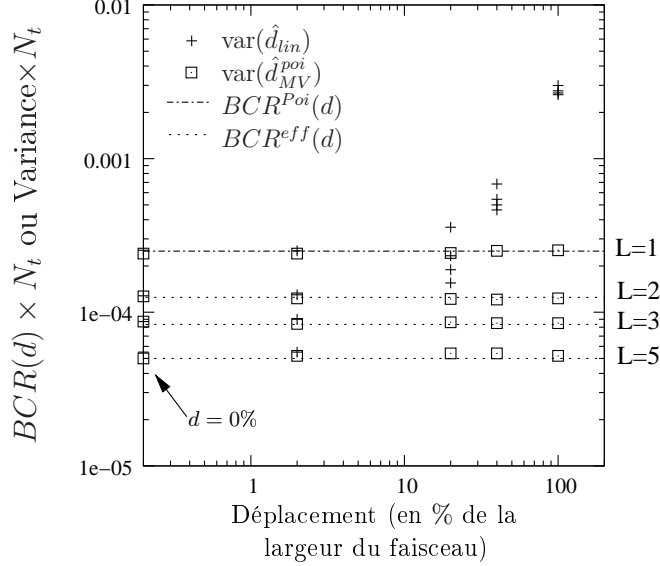


FIG. 4.3 – Évolution de la variance des estimateurs du déplacement  $\hat{d}_{lin}$  (symboles  $+$ ) et  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  (symboles  $\square$ ) en fonction de l'amplitude  $d$  du déplacement, pour différentes valeurs de l'ordre  $L$  de la loi d'attente gamma et pour  $N_t = 10^5$ .

En ce qui concerne la précision de l'estimation, les résultats présentés en figure 4.3 illustrent que l'optimalité de l'estimateur par pondération linéaire  $\hat{d}_{lin}$  (symboles  $+$ ) n'est plus assurée dès que le déplacement est supérieur à quelques pourcents de la largeur de faisceau  $w$ , ce qui pouvait être attendu étant donné que la forme de l'estimateur est optimisée pour la mesure de petits déplacements [151, 29, 28]. Par ailleurs, on notera également que la réduction de variance, dont on bénéficie à « petits signaux » en utilisant une lumière sous-poissonienne, disparaît à grands déplacements, ce qui confirme que cet estimateur n'est pas adapté pour mesurer de grands déplacements en lumière sous-poissonienne.

En revanche, l'analyse de cette figure permet d'observer l'efficacité de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  adapté au bruit de Poisson (symboles  $\square$ ) pour de grandes valeurs du déplacement d'une image perturbée par un bruit sous-poissonien de facteur de Fano compris entre  $F = 1$  et  $F = 1/5 = 0,2$ . Ainsi, pour une valeur importante de  $N_t$ , la limite quantique standard pour la variance d'estimation d'un déplacement peut être améliorée en proportion du gain maximal  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F$  et cette limite est atteinte par l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  quelle que soit l'amplitude du déplacement. Il serait intéressant de valider ce résultat pour des lumières sous-poissoniennes présentant des facteurs de Fano plus faibles.

<sup>83</sup> – Plus précisément les biais observés restent toujours négligeables devant l'écart-type des estimations.

## 4.4.2.2 Généralisation à différents motifs d'illumination

Nous avons jusqu'à maintenant considéré des motifs d'éclairage de forme gaussienne, dont la répartition d'intensité moyenne pouvait être assimilée à celle d'un mode  $TEM_{00}$  de champ. Afin de vérifier la généralité de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  sur des motifs d'éclairage différents, nous pouvons supposer par exemple que l'image possède désormais une répartition d'intensité moyenne similaire à un mode d'illumination  $TEM_{i0}$  d'ordre supérieur, avec  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , c'est-à-dire

$$f_0(x, y) = \frac{N_t}{2^{(i+1)}\pi w^2} \frac{[\mathcal{H}_i(\frac{x}{\sqrt{2}w})]^2}{i!} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2w^2}\right], \quad (4.38)$$

où  $\mathcal{H}_i(x)$  représente le polynôme d'Hermite d'ordre  $i$ <sup>84</sup>.

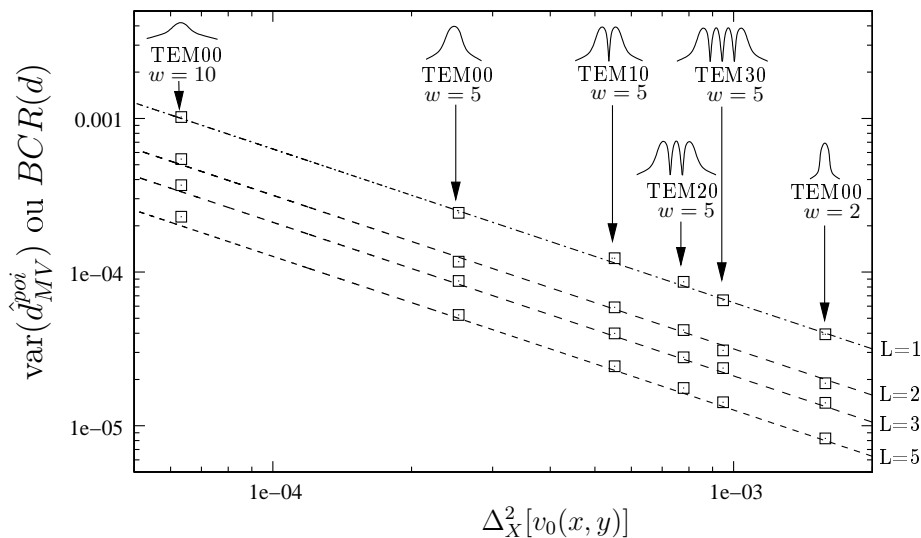


FIG. 4.4 – Variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  pour différents motifs d'éclairage et différents ordres  $L$  de la loi d'attente gamma (symboles  $\square$ ). La courbe en trait mixte ( $\cdot - \cdot$ ) représente la BCR dans le cas poissonien standard tandis que les valeurs de  $BCR^{eff}(d)$  sont tracées en traits tiretés ( $--$ ) pour différents ordres  $L$ . L'intensité totale est fixée à  $N_t = 10^5$  photons.

Sur la figure 4.4, la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  (symboles  $\square$ ) ainsi que la BCR à fort flux pour différentes valeurs du paramètre  $L$  sont représentées en fonction de la largeur spectrale spatiale  $\Delta_X^2[v_0(x, y)]$  selon la direction  $X$ , évaluée numériquement pour les différents motifs d'éclairage considérés. Cette figure permet de vérifier que l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  reste efficace à forte intensité ( $N_t = 10^5$  photons) pour une forme quelconque du motif d'éclairage, garantissant ainsi un gain maximal en proportion de  $F$  sur la variance minimale d'estimation lorsque l'image considérée est perturbée par un bruit sous-poissonien [42]. On vérifie également sur cette figure que la BCR pour l'estimation d'un déplacement à in-

<sup>84</sup> – Voir par exemple la référence [61], page 219 pour une description des modes d'illumination de Gauss-Hermite. Pour l'implémentation numérique des simulations, les motifs d'intensité  $f_0(x, y)$  ont été « lissés » par application d'un filtre moyenneur de taille  $3 \times 3$  pixels pour éviter que certains pixels de l'image ne possèdent une valeur moyenne nulle.

densité moyenne élevée est bien inversement proportionnelle à la largeur spectrale spatiale de l'image, comme cela est décrit par l'équation (4.25).

#### 4.4.2.3 Comparaison avec un estimateur par intercorrélation « linéaire »

Nous proposons enfin d'illustrer l'intérêt particulier de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  en comparant ses performances avec celles d'un **estimateur par intercorrélation linéaire**, noté  $\hat{d}_{MV}^{gauss}$  et qui prend la forme suivante

$$\hat{d}_{MV}^{gauss} = \arg \max_{\delta} \left\{ \sum_{k=1}^M n_k \mu(k, \delta) \right\}. \quad (4.39)$$

Cette méthode est fondée sur l'intercorrélation de l'image détectée  $\mathbf{n} = \{n_k\}$  pour  $k \in [1; M]$ , avec l'image de référence  $\mu(k)$  non bruitée, contrairement à l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  pour lequel  $\mathbf{n}$  est corrélée avec  $\ln \mu(k)$  (voir équation (4.36)). On peut montrer, comme cela est rappelé en annexe C.4.2, que cette méthode correspond à l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance dans le cas d'un bruit gaussien de variance fixée [157], ce qui justifie la notation  $\hat{d}_{MV}^{gauss}$ .

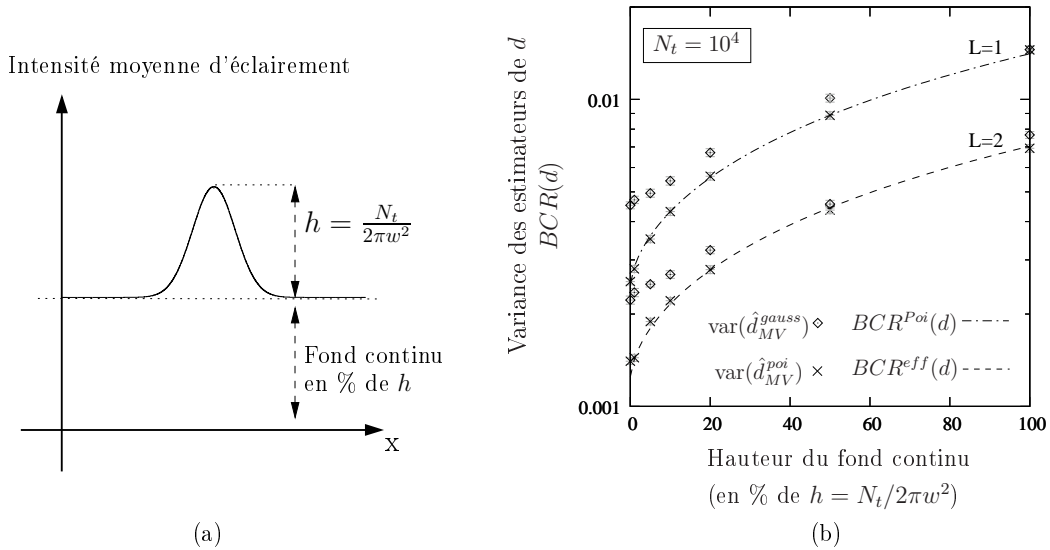


FIG. 4.5 – (a) Représentation schématique de la répartition d'intensité moyenne lorsque le motif est superposé à un fond continu. (b) Comparaison des variances des estimateurs  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  (symboles  $\times$ ) et  $\hat{d}_{MV}^{gauss}$  (symboles  $\diamond$ ) et des BCR dans le cas poissonien ( $L=1$ , courbe en trait mixte  $(-\cdot-)$ ) et sous-poissonien avec  $L=2$  (courbe en trait tireté  $(--)$ ) lorsque le niveau du fond continu évolue.

Pour comparer ces deux estimateurs, nous supposons ici que le motif d'éclairage est toujours de forme gaussienne, de largeur  $w$  et d'intensité totale élevée  $N_t = 10^4$  photons. À la différence des expériences numériques précédentes, nous supposons en outre que ce motif d'intensité de forme gaussienne est superposé à un fond d'intensité continu. La valeur de ce fond continu est exprimée en pourcentage de la hauteur  $h$  du motif gaussien  $h = N_t/(2\pi w^2)$  (voir figure 4.5.a). Sur la figure 4.5.b, nous avons tracé la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  (symboles  $\times$ )

et de l'estimateur par intercorrélation linéaire  $\hat{d}_{MV}^{gauss}$  (symboles  $\diamond$ ), en fonction du niveau du fond continu présent sur l'image, exprimé en pourcentage de la hauteur  $h$  du motif gaussien. Nous supposons que l'image est perturbée par un bruit poissonien ( $L = 1$ ) ou sous-poissonien ( $L = 2$ ), généré grâce au modèle temporel de lois d'attente gamma d'ordre  $L$ .

On remarque immédiatement en observant la figure 4.5 que la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  atteint la BCR dans le cas poissonien (tracée en trait mixte  $(\cdot - \cdot)$ ) et la valeur de  $BCR^{eff}(d)$  dans le cas sous-poissonien (tracée en trait tireté  $--$ ) dans toutes les situations physiques représentées sur cette figure, confirmant ainsi l'efficacité de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  pour des fluctuations d'intensité sous-poissoniennes. Cela n'est en revanche pas le cas de l'estimateur par intercorrélation linéaire  $\hat{d}_{MV}^{gauss}$  qui n'est efficace que pour de fortes valeurs du fond continu, c'est-à-dire dans les situations où l'intensité moyenne en chaque pixel de l'image est très élevée. Ce comportement peut s'interpréter simplement en notant que les fluctuations sous-poissoniennes peuvent être correctement modélisées par des densités de probabilité gaussiennes à très forte intensité moyenne, expliquant ainsi l'efficacité de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{gauss}$ .

Si l'estimateur par intercorrélation linéaire est efficace pour une intensité moyenne élevée, cette expérience numérique illustre néanmoins l'intérêt de considérer l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  lorsque l'intensité moyenne d'éclairément est plus faible. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, l'utilisation des lumières sous-poissoniennes pour des tâches d'estimation de paramètre revêt un intérêt spécifique lorsqu'il n'est pas possible d'augmenter le flux d'un faisceau poissonien standard : dans ces conditions, il est donc particulièrement intéressant de disposer d'une méthode d'estimation efficace lorsque l'intensité moyenne est faible, ce qui est le cas de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  pour l'estimation d'un déplacement.

### 4.4.3 Robustesse des résultats établis

Les dernières simulations numériques que nous exposons ici vont nous permettre de discuter la généralité des conclusions précédentes. Nous verrons en particulier que les résultats obtenus grâce au modèle phénoménologique temporel sont robustes à une modification de la DDP  $P_\xi(\xi)$  décrivant les temps d'attente entre détections de photons. Nous illustrerons également comment l'expression de la BCR *effective* proposée dans ce chapitre permet d'évaluer une borne de la variance minimale d'estimation, tout en prenant en compte d'éventuelles perturbations du faisceau (absorption partielle, bruit de fond parasite).

#### 4.4.3.1 Généralisation du modèle phénoménologique temporel

Le modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes présenté à la section 3.2.2 permet de décrire le phénomène de dégroupement des arrivées de photons sur un détecteur (*antibunching*) en supposant que la DDP  $P_\xi(\xi)$  du temps d'attente  $\xi$  entre deux détections successives de photons est une loi gamma d'ordre  $L$ . Par ailleurs, ce modèle nous a permis d'introduire l'image physique des *photons virtuels* qui a servi à établir une limite inférieure de la BCR à fort flux et qui fournit une méthode simple pour simuler des processus sous-poissoniens de temps d'attente gamma d'ordre entier (voir annexe C.2.2.2). Il nous paraît cependant important de vérifier si les conclusions précédentes sont toujours valables

lorsque les lois gamma décrivant les statistiques des temps d'attente entre deux détections successives de photons sont remplacées par d'autres formes de densités de probabilité, même si l'image physique des *photons virtuels* et la méthode de simulation associée ne seront plus applicables dans ce cas.

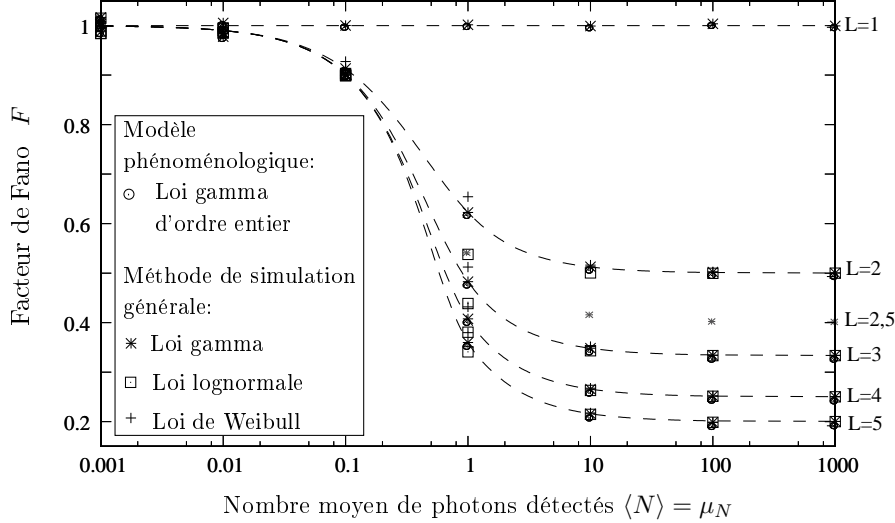


FIG. 4.6 – L'évolution du facteur de Fano des processus sous-poissoniens générés avec la méthode de simulation générale pour différentes formes de la loi d'attente  $P_\xi(\xi)$  (loi gamma (\*), loi lognormale ( $\square$ ), loi de Weibull (+)) ou avec le modèle phénoménologique de temps d'attente gamma d'ordre  $L$  (symboles  $\circ$ ) est tracée en fonction de  $\mu_N$  pour différentes valeurs de l'ordre  $L$ . Les courbes en trait tireté (---) représentent le facteur de Fano théorique déduit de la loi de probabilité  $P_N(n)$  (équation (3.33)) lorsque  $P_\xi(\xi)$  est une loi gamma d'ordre  $L$  entier.

**Méthode de simulation générale :** Dans les cas où la loi d'attente entre arrivées successives de photons n'est pas nécessairement gamma d'ordre entier, nous avons pu générer des réalisations de photocomptages sous-poissoniens grâce à un procédé de simulation général, dont le détail est reporté en annexe C.2.2.3.

Afin de vérifier numériquement la validité de cette méthode de simulation générale, nous l'avons mise en œuvre pour générer  $R = 6.10^6$  réalisations de différents processus sous-poissoniens avec des lois d'attente  $P_\xi(\xi)$  de différentes formes (loi gamma, loi de Weibull ou loi lognormale), de moyenne  $\tau_0 = 1/\phi = \langle \xi \rangle$ , où  $\phi$  représente le flux moyen de photons, et pour une durée d'intégration totale sur le capteur égale à  $T = 1$  seconde. Les trois lois de probabilité considérées sont des lois à deux paramètres. Pour générer un processus sous-poissonien de moyenne donnée  $\mu_N = \phi T = T/\tau_0$ , ces paramètres sont déterminés de sorte que la valeur moyenne du temps d'attente soit égale à  $\tau_0 = \langle \xi \rangle = T/\mu_N = 1/\mu_N$ . Pour modéliser le phénomène de dégroupement des arrivées de photons caractéristique des états sous-poissoniens, le second paramètre de la loi de probabilité est déterminé pour que la variance  $\text{var}(\xi)$  du temps d'attente soit inférieure à la variance qu'on obtiendrait avec un temps d'attente exponentiel caractéristique d'un processus de Poisson (voir section 3.2.2.1). Pour faciliter la comparaison avec les résultats obtenus grâce au modèle phénoménologique de temps d'attente

gamma d'ordre  $L$  entier, nous avons choisi de fixer le *paramètre de forme*<sup>85</sup> des lois  $P_\xi(\xi)$  à une valeur entière  $L \in \{2; 3; 4; 5\}$ , en assurant que

$$\frac{\text{var}(\xi)}{\langle \xi \rangle^2} = \frac{1}{L}. \quad (4.40)$$

En utilisant cette méthode de simulation de processus sous-poissoniens de temps d'attente non nécessairement gamma, on peut obtenir des statistiques de photocomptage sous-poissoniennes, comme nous pouvons le vérifier sur la figure 4.6. En effet, pour chacune des conditions physiques considérées, il est possible d'évaluer empiriquement la moyenne et la variance des  $R = 6.10^6$  réalisations du processus, permettant ainsi de déduire empiriquement la valeur du facteur de Fano du processus sous-poissonien simulé. Le facteur de Fano ainsi obtenu a été représenté sur la figure 4.6 en fonction de la valeur moyenne  $\mu_N$  du nombre de photons détectés et pour différentes formes de loi d'attente  $P_\xi(\xi)$  (loi gamma (symboles \*), loi lognormale (symboles  $\square$ ) et loi de Weibull (symboles +)). Nous avons également reporté sur cette même figure les valeurs du facteur de Fano obtenues lorsque l'on modélise les temps d'attente gamma d'ordre  $L$  entier avec le modèle phénoménologique étudié précédemment (symboles  $\circ$ ). Enfin, les courbes en trait tireté (--) représentent le facteur de Fano que l'on évalue à partir de la DDP donnée en équation (3.33) pour des temps d'attente gamma d'ordre  $L$  entier grâce à la méthode numérique présentée en section 3.2.2.3.

La superposition des symboles \* et  $\circ$  permet de valider la méthode « générale » de simulation, qui conduit, dans le cas d'une loi gamma, à des résultats identiques à la méthode de simulation utilisant le modèle phénoménologique fondé sur l'image physique des *photons virtuels*. Pour toutes les autres formes de lois d'attente considérées, on vérifie également sur cette figure que le facteur de Fano tend vers  $1/L$  quand l'intensité est importante tandis que la statistique redevient poissonnienne lorsque le flux diminue, la transition entre les deux régimes s'opérant toujours aux alentours de quelques photons reçus en moyenne [42].

On peut en outre noter que cette méthode générale de simulation permet de modéliser des temps d'attente dont le *paramètre de forme* ne serait pas nécessairement entier, ce qui n'était pas le cas de la méthode de simulation fondée sur l'image physique des *photons virtuels*. Nous avons illustré cette capacité dans le cas d'une loi gamma d'ordre non entier  $L = 2, 5$ , dont le facteur de Fano est représenté sur la figure 4.6 (symboles \*).

**Application à l'estimation de déplacement :** En utilisant ce modèle plus général de fluctuations sous-poissoniennes, nous avons alors simulé numériquement une expérience d'estimation de déplacement, dans des conditions similaires à la situation étudiée à la figure 4.2 (motif d'éclairement de forme gaussienne, de largeur  $w = 5$ , intensité moyenne totale  $N_t$  variant entre 20 et  $10^5$  photons). La variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  normalisée par  $N_t$  est obtenue empiriquement à partir des simulations Monte-Carlo et est tracée en figure 4.7 pour différentes formes de la loi d'attente entre arrivées de photons : loi gamma (symboles  $\diamond$ ), loi lognormale (symboles  $\times$ ), loi  $\mathcal{K}$  (symboles  $\square$ ). Les paramètres de ces lois sont

<sup>85</sup> – Ce paramètre était jusqu'ici appelé *ordre* de la loi gamma. Cependant, la notion d'*ordre* n'est plus rigoureusement utilisable si les lois n'appartiennent plus à la famille des lois gamma.

adaptés pour que leur *paramètre de forme*  $L$  soit égal à  $L = 2, 3$  ou  $5$ .

Cette figure permet d'illustrer que le comportement de la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  en fonction de  $L$  et de  $N_t$  est à peu près identique, quelle que soit la forme de la loi d'attente  $P_\xi(\xi)$  que nous avons utilisée dans le modèle de bruit sous-poissonien mis en œuvre pour générer l'image.

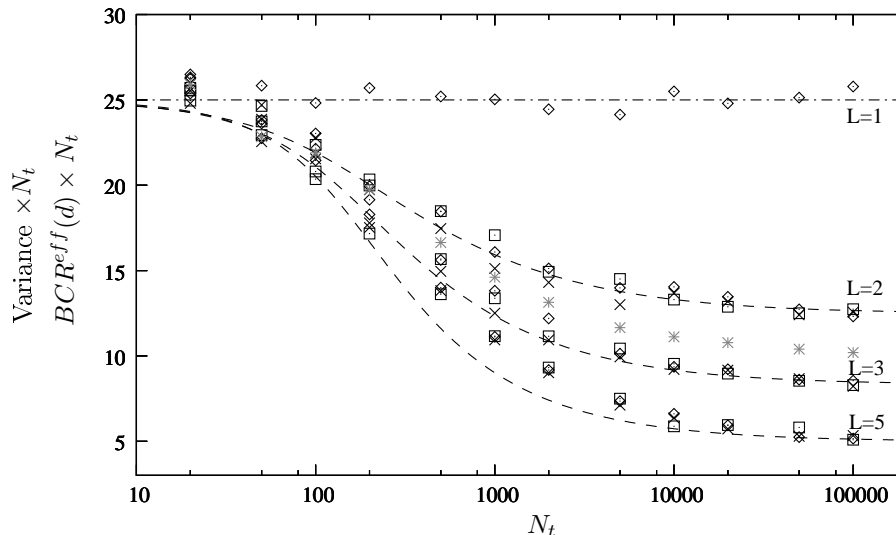


FIG. 4.7 – Variance normalisée par  $N_t$  de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  pour différentes formes de lois d'attente [loi gamma (symboles  $\diamond$ ), loi lognormale (symboles  $\times$ ), loi  $\mathcal{K}$  (symboles  $\square$ )]. Les symboles gris  $*$  représentent la variance obtenue pour une loi gamma d'ordre non entier  $L = 2, 5$ . La borne de Cramer-Rao *effective* est représentée en traits tiretés (—) et  $BCR^{poi}(d)$  est tracé en trait mixte ( $\cdot - \cdot$ ).

Dans le cas où l'ordre non entier de la loi d'attente gamma est égal à  $L = 2, 5$  (symboles  $*$  en gris), on notera que l'évolution de la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  se situe entre les points de mesure obtenus précédemment dans les cas  $L = 2$  et  $L = 3$  et entre les BCR *effectives* correspondantes. On remarque de plus que pour  $N_t = 10^5$  photons, on atteint bien une valeur asymptotique  $N_t \times \text{var}(\hat{d}_{MV}^{poi}) = 10$ , ce qui correspond bien à la valeur  $N_t \times \widetilde{BCR}^{2,5}(d) = N_t \times BCR^{poi}(d)/2, 5 = 10$ .

#### 4.4.3.2 Généralité de la BCR *effective*

Lorsque l'intensité moyenne du faisceau sous-poissonien devient plus faible, nous avons vu que l'expression de la BCR *effective* permet de prendre en compte l'influence du phénomène de « fenêtrage temporel » qui apparaît lorsque l'intensité moyenne de l'image est faible. Nous proposons ici de montrer que cette borne *effective* peut également rendre compte de l'augmentation de la variance d'estimation lorsque le faisceau subit des perturbations de natures différentes (absorption partielle ou bruit de photon parasite) mais qui tendent aussi à dégrader le caractère sous-poissonien des fluctuations.

Pour illustrer cette propriété, nous avons à nouveau considéré le problème de l'estimation du déplacement d'un éclaircissement de forme gaussienne de largeur  $w = 5$  pixels et de hauteur  $h = N_t/(2\pi w^2)$  où  $N_t$  désigne toujours le nombre moyen de photons contenus dans la totalité du faisceau. Le déplacement  $d$  a été

estimé grâce à l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  sur les images perturbées soit par un bruit poissonien standard, soit par des fluctuations sous-poissoniennes (modèle temporel de temps d'attente gamma d'ordre  $L = 5$ ). Pour étudier l'influence de diverses perturbations sur la précision d'estimation, nous nous sommes intéressés aux cinq situations physiques décrites ci-dessous :

- (a)- **Pas de perturbation** : L'image est de forte intensité ( $N_t = 10^5$  photons) et ne subit aucune perturbation.
- (b)- **Acquisition à faible flux** : L'image est de faible intensité ( $N_t = 500$  photons), mais ne subit aucune perturbation.
- (c)- **Absorption partielle de l'image** : On suppose que l'image d'intensité  $N_t = 10^5$  photons subit, avant ou lors de sa détection, une absorption partielle de facteur de transmission  $\eta = 0,5$ , pouvant modéliser par exemple l'influence d'un détecteur imparfait d'efficacité quantique  $\eta < 1$ . La simulation numérique de ce phénomène d'absorption est effectuée en affectant à chacun des photons constituant l'image simulée une probabilité  $\eta = 0,5$  d'être conservé (modèle d'absorption de Bernoulli (voir annexe C.1.1)). L'image obtenue après absorption comptera donc en moyenne  $\eta N_t = 2,5 \times 10^5$  photons et c'est sur cette image qu'est réalisée l'estimation du déplacement  $d$ .
- (d)- **Présence d'un fond continu** : Le motif gaussien de forte intensité ( $N_t = 10^5$  photons) et de hauteur  $h = N_t/2\pi w^2$  est superposé à un fond continu de hauteur  $h$  (voir figure 4.5.a). Le faisceau ne subit aucune perturbation.
- (e)- **Présence d'un fond continu et d'un bruit de Poisson parasite** : On étudie un cas similaire au cas (d), auquel on a superposé un bruit de fond parasite, modélisé en chaque pixel de l'image par un bruit de Poisson de valeur moyenne  $\mu_B = 0,1 \times h = 0,1 \times N_t/2\pi w^2$ .

Sur la figure 4.8, nous avons représenté la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  dans le cas où l'image est bruitée par des fluctuations poissoniennes (symboles  $\square$ ) ou sous-poissoniennes (modèle temporel avec  $L = 5$ , symboles  $\triangle$ ). Pour chaque situation, nous avons aussi tracé en trait continu (—) la BCR qui serait obtenue dans le cas où l'image est initialement perturbée par un bruit de Poisson standard. Ces valeurs ont été obtenues aisément en remarquant que pour toutes les perturbations de l'image considérées ici (« fenêtrage temporel », absorption partielle ou bruit de Poisson parasite), le bruit qui entache l'image modifiée reste poissonien et le calcul classique de  $BCR^{Poi}(d)$  (voir équation (4.19)) reste donc applicable. En prenant en compte les modifications introduites au niveau de l'intensité moyenne de l'image en présence d'une absorption partielle (diminution de la valeur moyenne de l'intensité en chaque pixel par un facteur  $\eta = 0,5$ ) ou encore d'un bruit de fond Poissonien (la valeur moyenne en chaque pixel devient dans ce cas  $\mu(k, d) + \mu_B$ ), nous avons alors évalué la borne de Cramer-Rao  $BCR^{Poi}(d)$  qui est représentée en trait continu (—) sur la figure 4.8 dans les 5 situations considérées. Sur cette même figure, les traits pointillés ( $\cdots$ ) représentent quant à eux la variance qui serait obtenue avec un gain maximal  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F = 5$ , c'est-à-dire  $BCR^{Poi}(d)/5$ .

Comme on pouvait s'y attendre, l'analyse de la figure 4.8 montre que le gain maximal  $\mathcal{G}_{\max}$  n'est atteint que dans les situations (a) et (d), qui correspondent



à des conditions expérimentales idéales. En revanche, on s'éloigne sensiblement de la situation de gain maximal dès que le faisceau est de trop faible intensité (situation (b)) et subit alors le phénomène de « fenêtrage temporel ». De même, le gain maximal n'est pas atteint lorsque le faisceau subit une absorption partielle (situation (c)) ou lorsqu'un bruit de fond poissonien est présent sur l'image (situation (e)). Ce résultat peut être interprété aisément grâce aux propriétés rappelées dans les sections 3.2.1.3 et 3.2.1.4 qui décrivent comment une absorption partielle ou la présence d'un bruit de Poisson parasite conduit à dégrader la nature sous-poissonienne du faisceau.

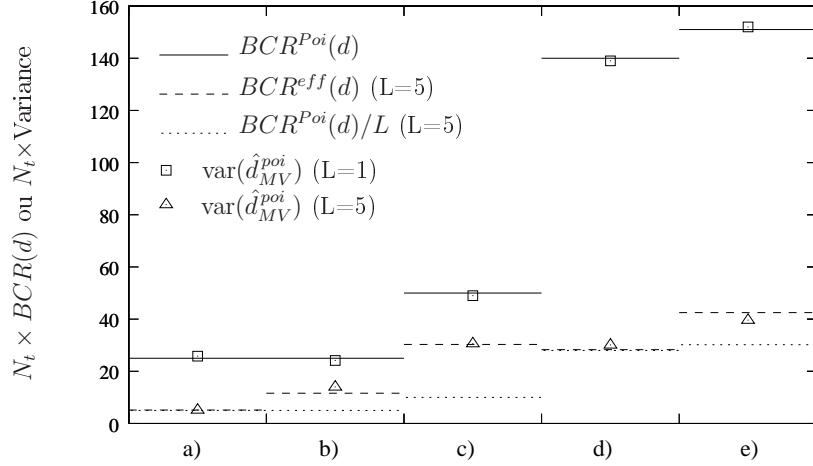


FIG. 4.8 – Comparaison entre la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  pour une image poissonienne (symboles □) ou sous-poissonienne avec  $L = 5$  (symboles △) et la BCR *effective* (---) pour les cinq situations physiques étudiées. Les pointillés (⋯) donnent une indication de la variance qui serait obtenue avec un gain maximal  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F = 5$ .

Plus précisément, nous allons illustrer comment ces propriétés nous permettent de calculer la BCR *effective* associée à ces expériences d'estimation dans des situations non idéales. Pour cela, nous allons supposer que le facteur de Fano est égal à  $F_0 = 1/L$  en chaque pixel de l'image lorsque l'intensité est importante ( $N_t = 10^5$ ) et lorsque l'image ne subit aucune perturbation. En utilisant l'équation (3.24) donnée en section 3.2.1.3, on montre que lorsque l'image subit une absorption partielle de facteur de transmission  $\eta$ , la valeur moyenne au pixel  $k$  devient  $\eta\mu(k, d)$  et le facteur de Fano  $F(k, d)$  au pixel  $k$  peut s'écrire

$$F(k, d) = 1 - \eta(1 - F_0). \quad (4.41)$$

De même, lorsque l'image est perturbée par un bruit de fond poissonien de valeur moyenne  $\mu_B$ , l'intensité moyenne de l'image au pixel  $k$  s'écrit alors  $\mu(k, d) + \mu_B$  et d'après l'équation (3.27), le facteur de Fano au pixel  $k$  s'écrit dans ce cas

$$F(k, d) = \frac{F_0 \mu(k, d) + \mu_B}{\mu(k, d) + \mu_B}. \quad (4.42)$$

Ces relations, qui fournissent la valeur moyenne de l'intensité et le facteur de Fano en chaque pixel  $k$  de l'image perturbée, peuvent alors être insérées dans

l'expression de la BCR *effective* donnée en équation (4.30) afin de calculer numériquement  $BCR^{eff}(d)$  dans les cas où le faisceau subit une absorption partielle ou bien lorsqu'il est perturbé par un bruit de fond parasite poissonien.

Pour chaque situation étudiée, les valeurs de  $BCR^{eff}(d)$  obtenues pour une lumière sous-poissonienne de facteur de Fano  $F = 1/L = 0, 2$  ont été reportées en trait tireté (—) sur la figure 4.8. On peut ainsi remarquer que la variance de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  est dans tous les cas très proche de la valeur de  $BCR^{eff}(d)$ . Ainsi, ces quelques résultats numériques présentés sur la figure 4.8 illustrent l'intérêt pratique de la BCR *effective* pour évaluer la précision d'estimation en lumière sous-poissonienne lorsque les conditions expérimentales ne sont pas idéales.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé un modèle phénoménologique de lumière sous-poissonienne afin d'étudier la précision d'estimation d'un paramètre (ici, un déplacement) dans une image perturbée par un bruit sous-poissonien. Conformément aux résultats établis dans les références [28, 29] pour des situations d'imagerie à très forte intensité, nous avons tout d'abord confirmé avec ce modèle phénoménologique que la variance minimale pour l'estimation d'un déplacement d'une image peut être au mieux réduite en proportion du facteur de Fano du faisceau sous-poissonien utilisé, lorsque celui-ci est suffisamment intense.

L'évolution de la précision d'estimation lorsque l'intensité moyenne de l'image diminue a été analysée également. Pour cela, nous avons proposé la définition d'une borne de Cramer-Rao *effective* qui permet d'évaluer la variance minimale d'estimation d'un déplacement, y compris pour des images acquises à faible intensité, en prenant en compte la dégradation partielle du caractère sous-poissonien de la lumière au niveau des pixels faiblement éclairés (augmentation du facteur de Fano de la lumière dès que moins de quelques dizaines de photons sont reçus en moyenne sur le pixel). L'évolution de cette borne de Cramer-Rao *effective* ainsi que le comportement des estimateurs de déplacement testés ont permis de montrer que l'apport des lumières sous-poissoniennes pour améliorer les performances d'estimation au-delà des performances obtenues avec un faisceau poissonien standard de même intensité tend à disparaître à mesure que l'intensité moyenne de l'image considérée diminue.

Les résultats numériques présentés ont aussi montré qu'un estimateur au sens du maximum de vraisemblance adapté au cas de fluctuations poissoniennes permet d'assurer une estimation quasiment efficace du déplacement lorsque le bruit perturbant l'image est de nature sous-poissonienne, et pour des motifs d'éclairage et des amplitudes de déplacement quelconques. Ces résultats illustrent ainsi que cette méthode d'estimation permet d'atteindre le gain maximal sur la performance d'estimation optimale (c'est-à-dire de réduire la variance minimale d'estimation (BCR) en proportion du facteur de Fano de la lumière), lorsque l'intensité de l'image est importante. Une perspective intéressante pourrait consister à généraliser ces résultats pour des facteurs de Fano inférieurs à  $F = 1/5 = 0, 2$ .

Par ailleurs, la prise en compte de modèles de formation d'images multimodes plus généraux et plus réalistes que le modèle idéal étudié dans ce manuscrit soulève de nombreuses questions concernant la compréhension et la description des corrélations spatiales qui caractérisent les mesures de photocomptage réalisées en

différents pixels sur ces images multimodes. L'analyse de l'influence de ces corrélations sur la précision d'estimation constitue donc une perspective de recherche intéressante.

Dans le chapitre suivant, nous proposons d'étudier l'apport de bruits sous-poissoniens dans le cas d'une tâche de détection, consistant à discriminer entre deux hypothèses avec un taux d'erreur minimal, à partir d'une unique mesure de photocomptage sous-poissonien.

# Chapitre 5

## Analyse des performances de détection en lumière sous-poissonienne

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction aux problèmes de détection</b>	<b>154</b>
5.1.1	Description du problème de détection	154
5.1.2	Test de détection et courbe COR	156
5.1.3	Probabilité d'erreur et mesure de Chernoff	157
<b>5.2</b>	<b>Évaluation des performances de détection avec la mesure de Chernoff</b>	<b>158</b>
5.2.1	Contraste entre lois binomiales et lois de Poisson	159
5.2.2	Définition d'un critère de gain	160
<b>5.3</b>	<b>Caractérisation de l'amélioration des performances de détection</b>	<b>165</b>
5.3.1	Faibles contrastes	165
5.3.2	Contrastes intermédiaires	167
5.3.3	Forts contrastes	168
<b>5.4</b>	<b>Généralisation aux modèles sous-poissoniens non binomiaux</b>	<b>171</b>
5.4.1	Prise en compte d'un modèle non binomial	171
5.4.2	Étude de la robustesse des résultats	171
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>174</b>

---

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'apport des lumières localement sous-poissoniennes pour améliorer la précision d'estimation d'un paramètre dans une image. Pour caractériser cet apport, nous avons vu qu'on pouvait introduire un gain *effectif* sur la performance optimale lorsque le gain maximal en proportion du facteur de Fano n'est pas atteint. En suivant une démarche similaire, nous proposons dans ce chapitre d'analyser comment ces lumières non-classiques peuvent améliorer les performances de détection, lorsque l'on cherche à discriminer entre deux hypothèses.

À la différence du chapitre précédent, nous considérerons ici un détecteur unique<sup>86</sup> pour des raisons de simplicité. Après une présentation du problème de détection, nous utiliserons le modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes pour illustrer comment la **mesure de Chernoff** permet de caractériser la difficulté de la tâche de détection. À partir de cette mesure de Chernoff, nous établirons un critère de gain qui nous permettra d'étudier l'apport des lumières sous-poissoniennes pour améliorer les tâches de détection. La généralité de ces résultats sera enfin discutée grâce à des simulations numériques utilisant le modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes étudié dans le chapitre 3.

## 5.1 Introduction aux problèmes de détection

### 5.1.1 Description du problème de détection

Nous allons considérer dans ce chapitre une tâche de détection simple, représentée schématiquement sur la figure 5.1. Il s'agit de discriminer, à partir d'une mesure de photocomptage, entre les deux hypothèses suivantes : soit le photocomptage a été effectué sur un faisceau sous-poissonien non perturbé, soit ce faisceau a subi une absorption partielle avant de parvenir sur le capteur. En d'autres termes, ce test d'hypothèses revient à décider quelle hypothèse explique le mieux l'observation effectuée par le capteur. Malgré sa simplicité apparente, ce problème de détection peut néanmoins s'appliquer à de nombreuses situations physiques, par exemple la propagation d'un faisceau dans un milieu absorbant ou encore la réflexion de ce faisceau sur des matériaux de réflectivités différentes<sup>87</sup>.

Nous supposerons pour l'instant que les états sous-poissoniens de la lumière peuvent être décrits au moyen d'un **modèle binomial** de fluctuations d'intensité, dont la description a été détaillée en section 3.2.3 du chapitre 3. Dans ce cas, les deux hypothèses à discriminer peuvent être détaillées de la manière suivante :

**Hypothèse  $H_1$**  : Soit le capteur est directement illuminé par un faisceau sous-poissonien de facteur de Fano  $F_1$ , et contenant en moyenne  $\langle N \rangle = \mu_{N_1}$

---

<sup>86</sup> – Et non plus un détecteur matriciel spatialement distribué.

<sup>87</sup> – Cette situation peut modéliser en pratique le procédé de lecture d'un disque optique par exemple.

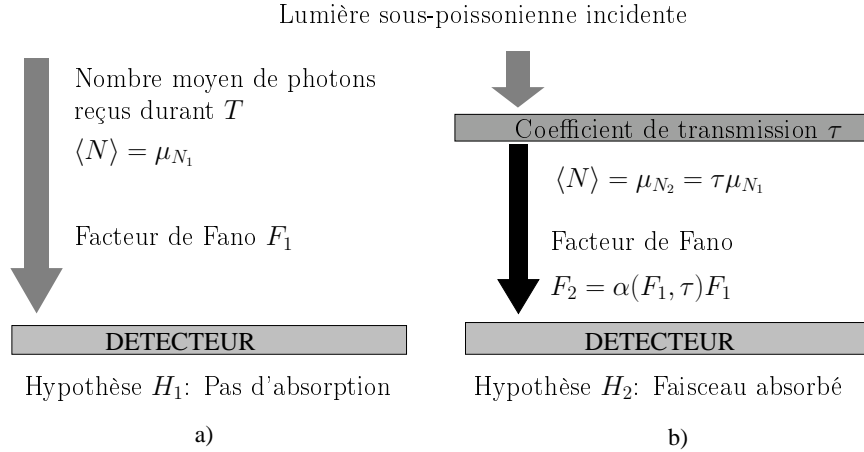


FIG. 5.1 – Représentation schématique du test d’hypothèses considéré dans ce chapitre : le capteur a effectué une mesure de photocomptage : (a) soit sur un faisceau sous-poissonien non perturbé ; (b) soit sur un faisceau ayant subi une absorption partielle .

photons lorsqu’il est observé sur une durée d’intégration fixée  $T$ . Dans ce cas, en notant  $\eta_1 = 1 - F_1$  et en supposant un modèle binomial de fluctuations de paramètre  $N_0$  fixé, le résultat de la mesure  $n$  obéit à la loi de photocomptage suivante

$$P_N(n|H_1) = \binom{N_0}{n} \eta_1^n (1 - \eta_1)^{N_0 - n}. \quad (5.1)$$

**Hypothèse  $H_2$**  : Soit ce même faisceau sous-poissonien subit une absorption partielle de facteur de transmission  $\tau \in [0; 1]$  et dans ce cas  $\langle N \rangle = \mu_{N_2} = \tau \mu_{N_1}$ . D’après les résultats de la section 3.2.3, on peut montrer que la statistique de photocomptage reste binomiale de paramètres  $N_0$  et  $\eta_2$  qui vérifie  $\eta_2 = \tau \eta_1$ , c’est-à-dire

$$P_N(n|H_2) = \binom{N_0}{n} \eta_2^n (1 - \eta_2)^{N_0 - n}. \quad (5.2)$$

Par ailleurs, le facteur de Fano de ce processus absorbé devient  $F_2 = \alpha(F_1, \tau) F_1$ , où le paramètre  $\alpha(F_1, \tau)$  défini à l’équation (3.25) s’écrit<sup>88</sup>

$$\alpha(F_1, \tau) = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1 - \tau(1 - F_1)}{F_1}. \quad (5.3)$$

L’intérêt du modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes apparaît clairement pour décrire la situation étudiée ici. En effet, la stabilité de ces statistiques binomiales sous l’effet d’une absorption (voir propriété 3.3) garantit que la forme de la loi de probabilité du photocomptage est la même dans les deux hypothèses (loi binomiale). Nous verrons que cette propriété prend toute son importance par

<sup>88</sup> – Rappelons que d’après la propriété 3.1, la validité de cette relation n’est pas particulière au choix d’un modèle binomial.

la suite pour calculer la mesure de Chernoff entre hypothèses sous-poissoniennes.

### 5.1.2 Test de détection et courbe COR

Une méthode de détection performante doit par définition être capable de discriminer entre les deux hypothèses avec un taux d'erreur minimal. Pour évaluer cette performance, la théorie usuelle de la détection de Neyman-Pearson [148, 115] propose de considérer les deux probabilités suivantes, qui présentent un intérêt pratique qui sera détaillé par la suite :

**La probabilité de détection**, notée  $P_d \triangleq \Pr[\text{choisir } H_2 | H_2]$ , qui représente la probabilité de choisir l'hypothèse  $H_2$  lorsque celle-ci est vraie. Dans le cas étudié, cela correspondra à détecter la présence d'une absorption partielle lorsque celle-ci a effectivement eu lieu.

**La probabilité de fausse alarme**, notée  $P_{fa} \triangleq \Pr[\text{choisir } H_2 | H_1]$ , qui représente la probabilité de choisir l'hypothèse  $H_2$  alors que l'hypothèse  $H_1$  était vraie. Dans notre cas, cela correspond à une détection erronée d'une absorption partielle alors que le faisceau n'a pas été perturbé<sup>89</sup>.

Naturellement, la performance de détection sera d'autant meilleure que la probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  sera minimisée et que la probabilité de détection  $P_d$  sera élevée. Pour une valeur fixée de la probabilité de fausse alarme, la théorie de la détection de Neyman-Pearson permet d'établir la règle de décision (ou **test de détection**) optimale qui maximise la probabilité de détection [148, 115]. Ce test optimal, appelé *likelihood ratio test* (LRT) en anglais, consiste à comparer le **rapport des vraisemblances** des deux hypothèses par rapport à un seuil, noté  $\lambda$ , dont la valeur est fixée par la  $P_{fa}$  désirée. Le résultat de cette comparaison détermine alors le choix de l'hypothèse selon la règle suivante

$$\frac{P_N(n|H_2)}{P_N(n|H_1)} \underset{H_1}{\overset{H_2}{\gtrless}} \lambda. \quad (5.4)$$

Si l'on parcourt toutes les valeurs possibles du seuil  $\lambda$ , on peut faire évoluer la  $P_{fa}$  entre 0 et 1. Au cours de cette évolution, on peut alors tracer la courbe paramétrique qui décrit l'évolution de la probabilité de détection  $P_d(\lambda)$  en fonction de la probabilité de fausse alarme  $P_{fa}(\lambda)$ . Cette courbe, communément appelée **courbe COR** (Caractéristique Opérationnelle de Réception)<sup>90</sup>, permet de fournir une vue d'ensemble de la performance de détection d'un test [115] et de caractériser le compromis qui existe pour maximiser la probabilité de détection tout en évitant que le taux de fausses alarmes ne soit trop important. En observant l'allure typique d'une telle courbe COR représentée sur la figure 5.2, on voit en effet que la performance de détection est d'autant plus grande que l'inflexion de cette courbe paramétrique est abrupte et que la courbe se situe plus près du point de coordonnées (0, 1), associant ainsi une  $P_{fa}$  faible et une  $P_d$  importante.

<sup>89</sup> – Notons que l'on aurait pu intervertir les deux hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  pour la définition de ces probabilités de détection et de fausse alarme sans modifier les analyses physiques qui seront présentées dans la suite. En pratique, la sémantique de ces appellations doit bien entendu être adaptée à l'application visée.

<sup>90</sup> – *Receiver operating characteristic* (ROC) en anglais.

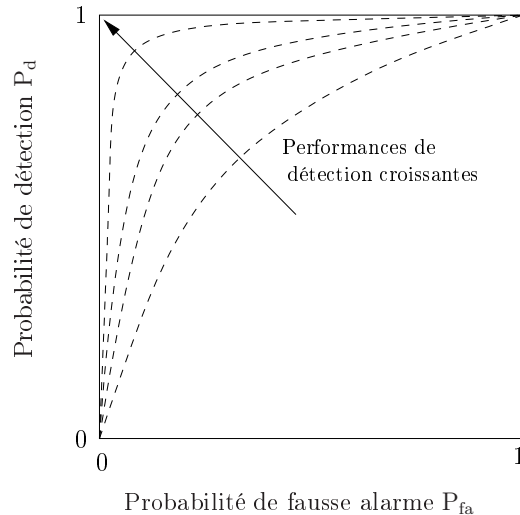


FIG. 5.2 – Représentation de quatre courbes COR correspondant à des performances de détection distinctes.

### 5.1.3 Probabilité d'erreur et mesure de Chernoff

Si l'on désigne par  $P_H(H_1)$  la probabilité d'occurrence de l'hypothèse  $H_1$ , on a pour la seconde hypothèse,  $P_H(H_2) = 1 - P_H(H_1)$ . On peut alors définir la **probabilité d'erreur bayésienne** [148],

$$P_B \triangleq P_H(H_1) \cdot \Pr[\text{choisir } H_2 | H_1] + P_H(H_2) \cdot \Pr[\text{choisir } H_1 | H_2], \quad (5.5)$$

qui représente la somme des probabilités de mauvaises classifications. Dans le cas où les hypothèses sont équiprobables, on peut réécrire cette probabilité d'erreur bayésienne en fonction des valeurs de la  $P_d$  et de la  $P_{fa}$ ,

$$P_B = \frac{1}{2} \{ P_{fa} + (1 - P_d) \}. \quad (5.6)$$

De façon intuitive, il apparaît assez clairement que la probabilité d'erreur d'un test d'hypothèses est intimement liée à la « ressemblance » entre les lois de probabilité caractérisant les deux hypothèses qu'il faut discriminer : pour des lois très dissemblables, la distinction entre les deux hypothèses se fera aisément, tandis que la probabilité d'erreur sera très grande si les statistiques de photocomptage  $P_N(n|H_1)$  et  $P_N(n|H_2)$  sont très peu contrastées.

Parmi les grandeurs issues de la théorie de l'information permettant de mesurer la « séparabilité » entre lois de probabilité, nous allons dans ce chapitre utiliser la **mesure de Chernoff**, qui sera notée  $\mathcal{C}^*$  dans la suite. Dans le cas où les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  sont équiprobables, cette grandeur est définie comme la valeur maximale de la fonction

$$\mathcal{C}(s) \triangleq -\ln \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} [P_N(n|H_1)]^s [P_N(n|H_2)]^{(1-s)} \right\}, \quad (5.7)$$

lorsque l'exposant  $s$  varie entre 0 et 1 [148, 24]. L'exposant  $s^*$  qui maximise  $\mathcal{C}(s)$



est communément appelé **exposant de Chernoff**, et la mesure de Chernoff vaut  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}(s^*)$  [148, 24]. Cette quantité est toujours positive et peut être considérée comme une mesure de séparabilité entre lois de probabilité puisqu'elle s'annule si et seulement si  $P_N(n|H_1) = P_N(n|H_2)$ .

Dans le cadre de la théorie de Neyman-Pearson dans laquelle nous nous situons pour cette étude, cette quantité revêt une importance particulière car elle est théoriquement reliée à la probabilité d'erreur asymptotique d'un test d'hypothèses. Dans le cadre de la théorie de la décision bayésienne, il a en effet été établi [148, 24] que la probabilité d'erreur bayésienne  $P_B$  introduite ci-dessus est bornée par la **borne de Chernoff**, qui est une fonction de la mesure de Chernoff  $\mathcal{C}^*$  entre les deux hypothèses. Plus précisément, lorsque la décision s'effectue en prenant en compte un grand nombre  $K$  de mesures, la probabilité d'erreur bayésienne, notée  $P_B^{(K)}$ , décroît exponentiellement avec  $K$  et vérifie [24]

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \ln P_B^{(K)} = -\mathcal{C}^*. \quad (5.8)$$

Par souci de concision, nous ne détaillons pas ici le calcul fastidieux de la mesure de Chernoff entre deux lois de photocomptage sous-poissoniennes binomiales. Ce calcul est présenté en annexe C.6.1.1 dans le cas où les lois binomiales  $P_N(n|H_1)$  et  $P_N(n|H_2)$  sont respectivement données par les équations (5.1) et (5.2) et permet d'établir l'expression suivante, pour un faisceau incident d'intensité moyenne  $\mu_{N_1}$  dans l'hypothèse  $H_1$  :

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C}(s^*) = -\frac{\mu_{N_1}}{1 - F_1} \ln \left[ (1 - F_1)\tau^{1-s^*} + F_1\alpha(F_1, \tau)^{1-s^*} \right], \quad (5.9)$$

où l'exposant de Chernoff  $s^*$  vaut

$$s^* = 1 - \frac{1}{\ln \left[ \frac{\alpha(F_1, \tau)}{\tau} \right]} \ln \left\{ \frac{F_1 - 1}{F_1} \cdot \frac{\ln[\tau]}{\ln[\alpha(F_1, \tau)]} \right\}, \quad (5.10)$$

et où l'expression de  $\alpha(F_1, \tau)$  est rappelée en équation (5.3).

De même, le calcul de la mesure de Chernoff  $\mathcal{C}_p^*$  entre deux lois de Poisson (l'une d'intensité moyenne  $\mu_{N_p}$  et l'autre d'intensité  $\tau \mu_{N_p}$ ) est rappelé en annexe C.6.2.1 et permet de montrer que

$$\mathcal{C}_p^* = \mathcal{C}_p(s_p^*) = \mu_{N_p} \left\{ 1 - \frac{\tau - 1}{\ln \tau} \left[ 1 - \ln \left( \frac{\tau - 1}{\ln \tau} \right) \right] \right\}. \quad (5.11)$$

## 5.2 Évaluation des performances de détection avec la mesure de Chernoff

Dans cette section, nous analyserons comment la mesure de Chernoff permet de caractériser la performance de détection entre deux hypothèses dont les fluctuations sont poissonniennes ou sous-poissoniennes binomiales. Nous montrerons que cette propriété permet de définir un critère de gain pour évaluer l'apport des lumières sous-poissoniennes pour l'amélioration des tâches de détection.

### 5.2.1 Contraste entre lois binomiales et lois de Poisson

Comme nous l'avons déjà évoqué, la performance de détection est intimement liée à la similarité entre les lois de probabilité associées aux deux hypothèses à discriminer. Il paraît intéressant d'exhiber un paramètre de contraste entre lois de probabilité dont la valeur serait reliée bijectivement à la performance de détection. En effet, si une telle relation existe, la performance de détection pourra être évaluée simplement grâce à cette mesure de contraste, et quels que soient les paramètres physiques du problème considéré. Par ailleurs, comme cela a été montré pour divers modèles de bruits dans la référence [58], l'existence d'une telle relation permet d'éviter une étude fastidieuse de l'influence de chacun de ces paramètres physiques sur la performance de détection.

#### 5.2.1.1 Hypothèses sous-poissoniennes binomiales

Grâce à des simulations numériques de la tâche de discrimination présentée au début de ce chapitre, nous avons analysé comment la mesure de Chernoff pouvait caractériser la performance de détection entre lois binomiales de paramètres différents [39]. Les résultats sont résumés sur la figure 5.3, où nous avons superposé les courbes COR obtenues, pour quatre valeurs distinctes du paramètre  $N_0 \in \{20; 2 \cdot 10^2; 2 \cdot 10^3; 2 \cdot 10^4\}$  de la loi binomiale, et pour quatre facteurs de Fano de la lumière incidente  $F_1 \in \{0,01; 0,1; 0,5; 0,9\}$ . Pour chacune de ces seize courbes COR, la valeur du coefficient de transmission  $\tau$  définissant l'absorption subie dans l'hypothèse  $H_2$  a été ajusté de sorte que la mesure de Chernoff entre les deux hypothèses soit égale à  $\mathcal{C}^* = 0,393$  (symboles  $\square$ , courbes inférieures) ou  $\mathcal{C}^* = 1,2$  (symboles  $\circ$ , courbes supérieures)<sup>91</sup>. Chacune de ces courbes COR est obtenue numériquement à partir de  $R = 10^6$  réalisations du test d'hypothèses en évaluant la probabilité de détection  $P_d$  et de fausse alarme  $P_{fa}$  pour toutes les valeurs du seuil de détection  $\lambda$ .

Dans la limite des plus faibles probabilités de fausse alarme testées, c'est-à-dire pour  $P_{fa} > 5 \cdot 10^{-4}$ , la superposition des différentes courbes COR tracées montre que des situations physiques différentes, mais caractérisées par une mesure de Chernoff identique, conduisent à des performances de détection similaires [39]. En outre, on a pu vérifier grâce à ces simulations numériques que la superposition se précise à mesure que le paramètre  $N_0$  de la loi binomiale et que le facteur de Fano augmentent [39]. Grâce à ces analyses, nous avons établi que pour des fluctuations sous-poissoniennes binomiales, la mesure de Chernoff peut être considérée comme un paramètre de contraste satisfaisant, pour des valeurs suffisantes de  $N_0$  ( $N_0 > 20$ ) et des facteurs de Fano supérieurs à 0,01 [39].

#### 5.2.1.2 Hypothèses poissoniennes

Sur cette même figure 5.3, nous avons également représenté les courbes COR obtenues dans le cas où la lumière incidente serait issue d'un laser standard (lumière poissonienne), pour plusieurs valeurs de l'intensité moyenne  $\mu_{N_1} \in \{10; 10^2; 10^3; 10^4\}$ . Ici encore, pour chacune de ces situations, nous avons considéré deux valeurs du coefficient de transmission  $\tau$  de sorte que la distance de

<sup>91</sup> – Ces valeurs de  $\mathcal{C}^*$  ont été fixées de façon à considérer une situation modérément contrastée ( $\mathcal{C}^* = 0,393$ ) et une autre situation pour laquelle le contraste est important ( $\mathcal{C}^* = 1,2$ ).

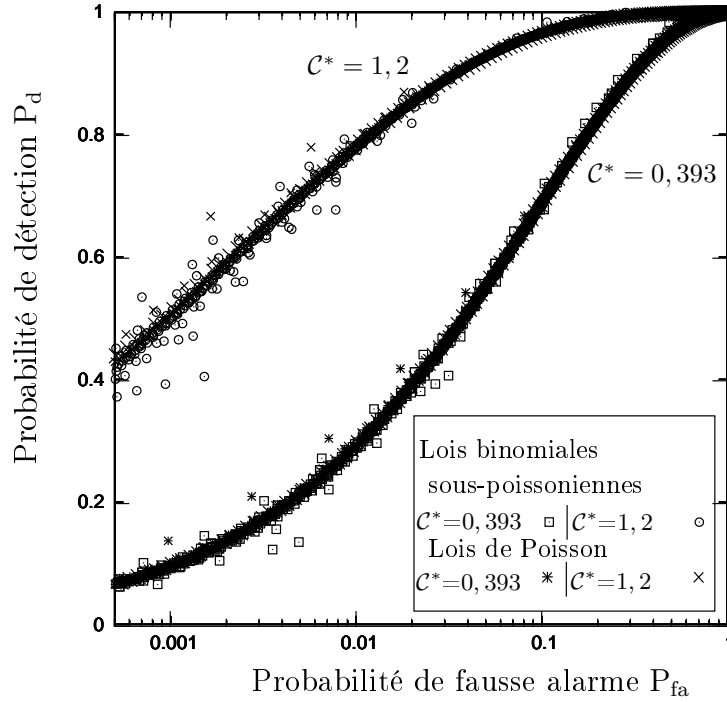


FIG. 5.3 – Courbes COR obtenues à partir de  $R = 10^6$  réalisations d’un test entre deux hypothèses sous-poissonniennes binomiales, ou deux hypothèses poissonniennes, pour un ensemble de valeurs des paramètres  $N_0$ ,  $F_1$  et  $\tau$  tels que la mesure de Chernoff entre les deux hypothèses soit égale à  $C^* = 0,393$  ou  $C^* = 1,2$ .

Chernoff entre lois de Poisson de moyenne  $\mu_{N_1}$  et  $\tau\mu_{N_1}$  soit égale à  $C^* = 1,2$  (symboles  $\times$ ) ou  $0,393$  (symboles  $*$ ).

Dans ce cas également, on peut vérifier que ces courbes COR sont assez bien superposées à celles obtenues précédemment, dans le cas de photocomptages sous-poissonniens binomiaux. Cette superposition nous permet de déduire le résultat suivant [39], valable au moins pour l’ensemble des configurations expérimentales testées pour construire la figure 5.3 :

**Propriété 5.1** *Pour une valeur donnée de la mesure de Chernoff entre les deux hypothèses à discriminer, les performances évaluées par le tracé d’une courbe COR sont comparables, que la détection soit réalisée entre deux hypothèses binomiales, ou entre deux hypothèses poissonniennes.*

Nous allons voir dans la section suivante comment cette propriété peut être mise à profit pour définir un critère de gain caractérisant l’apport des états sous-poissonniens pour l’amélioration des performances de détection.

### 5.2.2 Définition d’un critère de gain

Comme nous l’avons vu dans les chapitres 3 et 4, les états sous-poissonniens de la lumière se caractérisent par des fluctuations d’intensité (ou de photocomptage) réduites par rapport à un faisceau poissonien standard de même intensité. Par conséquent, lorsque l’on cherche à discriminer deux niveaux d’intensité, cette

réduction du bruit sur la mesure de photocomptage facilite la discrimination entre les deux hypothèses et conduit donc à des performances de détection améliorées par rapport à un faisceau poissonien standard de même intensité.

Cependant, comme dans le cas de l'estimation de paramètre étudié au chapitre précédent, il suffit simplement d'augmenter la puissance de l'éclairage lumineux en lumière poissonienne standard pour accroître la performance de détection. En effet, une telle augmentation d'intensité va permettre d'accentuer le contraste entre les deux hypothèses et ainsi faciliter la tâche de détection. Dès lors, il peut être intéressant pour comparer ces deux situations de définir un critère de **gain en performances de détection**  $\mathcal{G}$ . Conformément à la définition du gain en performance d'estimation proposée au chapitre précédent, celui-ci sera défini, pour une situation physique donnée<sup>92</sup>, comme l'accroissement d'intensité nécessaire pour qu'une lumière poissonienne standard d'intensité moyenne  $\mathcal{G} \times \mu_{N_1}$  atteigne la même performance de détection qu'une lumière sous-poissonienne binomiale de moyenne  $\mu_{N_1}$  et facteur de Fano  $F_1$ .

Dans le chapitre précédent, nous avons établi que le gain pour une tâche d'estimation de paramètre dans une image sous-poissonienne de facteur de Fano  $F$  était au maximum égal à  $1/F$ , mais qu'il diminuait sensiblement dès que le faisceau subissait une perturbation de nature à dégrader son caractère sous-poissonien (absorption, fenêtrage temporel, etc.). Pour la tâche de détection considérée, on peut s'attendre également à ce que les performances soient améliorées au mieux en proportion du facteur de Fano  $F_1$  de la lumière incidente non absorbée. Par ailleurs, même si l'absorption subie dans l'hypothèse  $H_2$  est importante et dégrade fortement la nature sous-poissonienne du faisceau, on peut supposer également que le gain restera dans tous les cas au minimum égal à  $1/F_2$ , où  $F_2$  représente le facteur de Fano de la lumière dans l'hypothèse  $H_2$ , c'est-à-dire lorsque celle-ci subit une absorption partielle.

Ces remarques sont illustrées sur la figure 5.4.a, où la courbe COR obtenue pour un faisceau sous-poissonien binomial (symboles  $\blacklozenge$ ) avec  $\mu_{N_1} = 60$  et  $F_1 = 0,5$ , subissant sous l'hypothèse  $H_2$  une absorption partielle avec  $\tau = 0,5$ , est comparée avec les courbes COR obtenues en remplaçant le faisceau sous-poissonien par des lumières poissoniennes d'intensité  $\mu_{N_1}/F_1$  (symboles  $\circ$ ) et  $\mu_{N_1}/F_2$  (symboles  $\square$ ). En observant ces courbes, on voit clairement qu'espérer un gain en proportion de  $1/F_1$  serait beaucoup trop optimiste, alors qu'un gain en proportion de  $1/F_2$  sous-estimerait grandement l'amélioration de performance effectivement observée avec un faisceau sous-poissonien [39].

### 5.2.2.1 Critère de gain fondé sur la mesure de Chernoff

Pour définir un critère de gain satisfaisant, il faut pouvoir comparer avec précision les performances de détection avec des lois sous-poissoniennes et des lois de Poisson. Or, nous avons vérifié à la section précédente que la mesure de Chernoff constituait dans ce cas un paramètre de contraste performant. En effet, pour une valeur donnée du coefficient de transmission  $\tau$ , les performances de détection (courbe COR) obtenues en lumière sous-poissonienne d'intensité  $\mu_{N_1}$  et facteur de Fano  $F_1$  sont atteintes avec un faisceau poissonien standard d'intensité

---

<sup>92</sup> – C'est-à-dire dans le cas étudié ici, pour une valeur du coefficient d'absorption  $\tau$  et de l'intensité  $\mu_{N_1}$ .

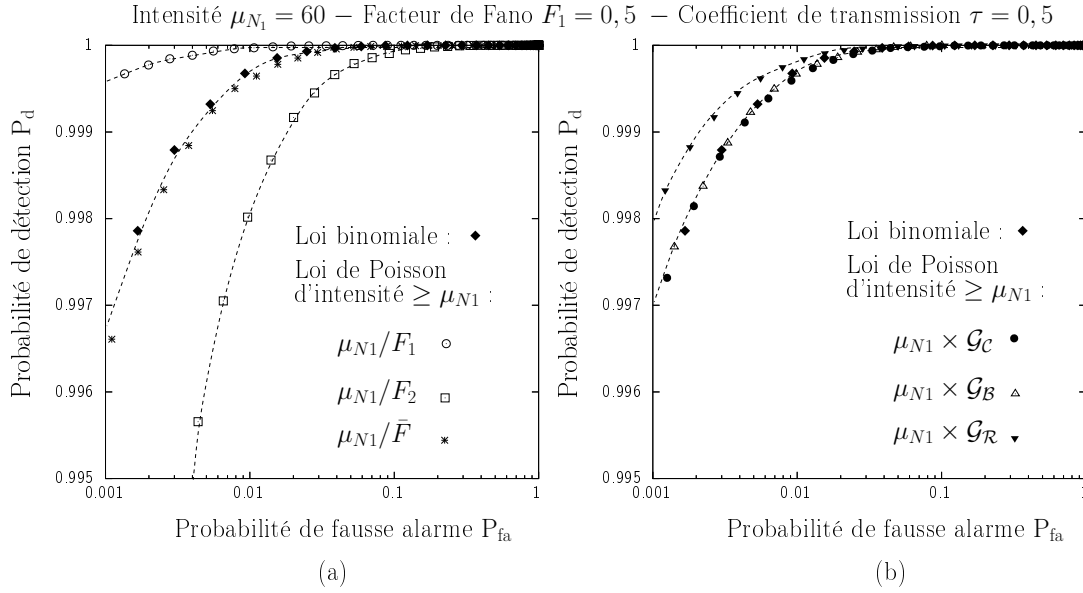


FIG. 5.4 – Comparaison entre la courbe COR obtenue pour des photocomptages sous-poissoniens binomiaux (symboles  $\blacklozenge$ ) et les courbes COR obtenues pour des photocomptages poissonniens d'intensité supérieure, évaluée à partir de différents critères de gain : (a) gain en proportion de  $1/F_1$  (symboles  $\circ$ ), de  $1/F_2$  (symboles  $\square$ ) ou du facteur de Fano moyen  $1/\bar{F}$  (symboles  $*$ ); (b) gain  $\mathcal{G}_C$  fondé sur la mesure de Chernoff (symboles  $\bullet$ ), gain  $\mathcal{G}_B$  fondé sur la distance de Bhattacharyya ((symboles  $\triangle$ ) ou gain  $\mathcal{G}_F$  fondé sur le contraste de Fisher (symboles  $\blacktriangledown$ ). Les courbes en trait tireté (—) sont une simple indication visuelle de l'évolution des courbes COR.

supérieure  $\mu_{N_p} \geq \mu_{N_1}$ , à condition que la mesure de Chernoff  $\mathcal{C}_p^*(\mu_{N_p})$  entre les deux lois de probabilité poissonniennes soit identique à la mesure de Chernoff  $\mathcal{C}^*(\mu_{N_1})$ , évaluée dans le cas où les deux lois de probabilité sont binomiales. Grâce à cette propriété, nous proposons d'introduire un critère de gain fondé sur la mesure de Chernoff, que nous noterons  $\mathcal{G}_C(F_1, \tau)$ , et que l'on définit de la façon suivante [39] :

$$\mathcal{G}_C(F_1, \tau) \triangleq \frac{\mu_{N_p}}{\mu_{N_1}} \geq 1, \text{ avec } \mu_{N_p} \geq \mu_{N_1} \text{ tel que } \mathcal{C}_p^*(\mu_{N_p}) = \mathcal{C}^*(\mu_{N_1}). \quad (5.12)$$

Une valeur élevée de ce gain signifie qu'il est nécessaire d'augmenter fortement la puissance d'illumination en lumière standard pour obtenir les mêmes performances qu'un faisceau sous-poissonien. À l'inverse, lorsque ce gain est proche de 1, utiliser un faisceau poissonien ou sous-poissonien ne changera pas significativement la performance de discrimination. Malheureusement, l'expression complexe de la mesure de Chernoff ne permet pas d'obtenir une forme explicite du gain  $\mathcal{G}_C(F_1, \tau)$  qui peut cependant être facilement évalué numériquement<sup>93</sup>. Par ailleurs, la réduction *effective* de bruit dont on peut bénéficier grâce au caractère sous-poissonien du faisceau pour une tâche de détection peut être évaluée

<sup>93</sup> – On a pu néanmoins vérifier théoriquement qu'il est indépendant de l'intensité moyenne  $\mu_{N_1}$ , ce qui justifie la notation  $\mathcal{G}_C(F_1, \tau)$  dans l'équation précédente.

grâce à un facteur de Fano *équivalent*

$$\mathcal{F}_C(F_1, \tau) \triangleq \frac{1}{\mathcal{G}_C(F_1, \tau)}, \quad (5.13)$$

qui présente une analogie formelle avec le facteur de Fano *effectif* introduit au chapitre précédent, bien que ces grandeurs soient définies de façons différentes et ne soient pas rigoureusement comparables.

### 5.2.2.2 Expression explicite approchée du critère de gain

Conformément à la définition rappelée en section 5.1.3, le calcul de la mesure de Chernoff  $\mathcal{C}^* \triangleq \mathcal{C}(s^*)$  nécessite de déterminer l'exposant de Chernoff  $s^* \in [0; 1]$  qui maximise la fonction  $\mathcal{C}(s)$  définie en équation (5.7). En particulier, c'est à cause de cette étape d'optimisation nécessaire qu'il n'est pas possible de donner une expression simple du critère de gain  $\mathcal{G}_C$  qui en découle. Néanmoins, il a été montré dans de nombreux cas que cet exposant de Chernoff était peu différent de  $1/2$  [71], et que la distance de Bhattacharyya [148]

$$\mathcal{B} \triangleq \mathcal{C}(1/2) = -\ln \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{P_N(n|H_1)P_N(n|H_2)} \right\} \quad (5.14)$$

représentait alors une approximation satisfaisante de la mesure de Chernoff. L'intérêt pratique de cette distance comme mesure de séparabilité ou de contraste a d'ailleurs été montré [79, 6, 71]. Pour la situation physique considérée dans ce chapitre, l'expression explicite de la distance de Bhattacharyya s'obtient aisément en fixant  $s = 1/2$  dans l'expression (5.7). Dans le cas où les lois de probabilité associées aux deux hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  sont binomiales et sont décrites par les équations (5.1) et (5.2), la distance de Bhattacharyya notée  $\mathcal{B}$  s'écrit (voir annexe C.6.1.2)

$$\mathcal{B} = -\frac{\mu_{N_1}}{1 - F_1} \ln \left[ (1 - F_1)\sqrt{\tau} + F_1\sqrt{\alpha(F_1, \tau)} \right], \quad (5.15)$$

tandis que si les lois de probabilité sont poissonniennes (l'une d'intensité moyenne  $\mu_{N_p}$  et l'autre d'intensité  $\tau \mu_{N_p}$ ), elle s'écrit

$$\mathcal{B}_p = \frac{\mu_{N_p}}{2} (1 - \sqrt{\tau})^2. \quad (5.16)$$

Dans ces deux cas, nous avons en outre établi (voir [39] et annexe C.6.3) que la distance de Bhattacharyya constitue une bonne approximation de la mesure de Chernoff tant que l'absorption n'est pas trop importante ( $\tau \geq 0, 1$ ) et que le facteur de Fano incident n'est pas trop faible ( $F_1 \geq 2 \cdot 10^{-2}$ ).

Lorsque ces conditions seront vérifiées, nous pourrons alors remplacer  $\mathcal{G}_C(F_1, \tau)$  par un critère de gain défini de manière similaire à partir des distances de Bhattacharyya

$$\mathcal{G}_B(F_1, \tau) \triangleq \frac{\mu_{N_p}}{\mu_{N_1}} \geq 1, \text{ avec } \mu_{N_p} \geq \mu_{N_1} \text{ tel que } \mathcal{B}_p(\mu_{N_p}) = \mathcal{B}(\mu_{N_1}), \quad (5.17)$$

dont une expression explicite peut être déduite des distances de Bhattacharyya

calculées ci-dessus. On obtient alors [39]

$$\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau) = \frac{2}{(F_1 - 1)} \cdot \frac{\ln \left[ (1 - F_1)\sqrt{\tau} + F_1\sqrt{\alpha(F_1, \tau)} \right]}{(1 - \sqrt{\tau})^2}, \quad (5.18)$$

avec  $\alpha(F_1, \tau) = F_2/F_1 = [1 - \tau(1 - F_1)]/F_1$ . Cette nouvelle formulation d'un gain en performance de détection permet aussi de définir un facteur de Fano équivalent  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau) = 1/\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau)$ .

### 5.2.2.3 Autre critère de gain fondé sur le contraste de Fisher

Comme nous venons de l'évoquer, il n'est pas possible d'obtenir une expression explicite simple du critère de gain défini à partir de la mesure de Chernoff. On peut en déterminer une expression explicite approchée si l'on considère la distance de Bhattacharyya, mais celle-ci reste malgré tout assez complexe. On peut dès lors chercher à obtenir un autre critère de gain dont l'expression serait plus simple, en se fondant sur un autre paramètre de contraste entre lois de probabilité. Considérons par exemple le **contraste de Fisher** [148], qui dépend uniquement des deux premiers moments statistiques des lois de probabilité. Cette grandeur que nous noterons  $\mathcal{R}$  est en effet définie par

$$\mathcal{R} \triangleq \frac{(\mu_{N_1} - \mu_{N_2})^2}{\text{var}(N_1) + \text{var}(N_2)}, \quad (5.19)$$

où  $N_1$  et  $N_2$  sont les variables aléatoires discrètes associées respectivement au photocomptage dans l'hypothèse  $H_1$  et  $H_2$ . Notons également que le contraste de Fisher peut être considéré comme une forme généralisée d'un rapport signal à bruit<sup>94</sup>. Les expressions de ce contraste de Fisher données en annexe C.6.1.3 pour des hypothèses binomiales (noté  $\mathcal{R}$ ), et annexe C.6.2.3 dans le cas poissonien (noté  $\mathcal{R}_p$ ), permettent de définir un nouveau critère de gain noté  $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(F_1, \tau) \triangleq \mu_{N_p}/\mu_{N_1}$  où  $\mu_{N_p} \geq \mu_{N_1}$  est fixé de sorte que  $\mathcal{R}_p(\mu_{N_p}) = \mathcal{R}(\mu_{N_1})$  [39]. L'expression explicite de ce critère prend cette fois-ci une forme très simple

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(F_1, \tau) = \frac{1}{F_1} \frac{1 + \tau}{1 + \alpha(F_1, \tau)\tau}. \quad (5.20)$$

### 5.2.2.4 Validation numérique des critères de gain considérés

À partir des trois paramètres de contraste différents considérés ici, nous avons obtenu trois expressions distinctes pour définir un critère de gain. Il est donc nécessaire maintenant de comparer ces critères, et de confirmer (ou infirmer) la pertinence de chacun d'entre eux.

Pour vérifier la validité du critère de gain  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(F_1, \tau)$ , défini à partir de la mesure de Chernoff, nous nous plaçons dans des conditions expérimentales similaires à celles de la figure 5.4.a ( $\mu_{N_1} = 60$ ,  $F_1 = 0,5$ ), qui conduisent à de bonnes

---

<sup>94</sup> – En toute rigueur, le contraste de Fisher ne peut être considéré comme un rapport signal à bruit que dans le cas où les deux hypothèses possèdent des statistiques gaussiennes et de variances identiques [58].

performances de détection en raison de l'absorption importante que subit le faisceau dans l'hypothèse  $H_2$  ( $\tau = 0, 5$ ). Sur la figure 5.4.b, nous avons reporté la courbe COR obtenue avec une loi sous-poissonienne binomiale (symboles  $\blacklozenge$ ). Par ailleurs, nous avons également tracé les courbes COR obtenues avec une lumière poissonnienne standard d'intensité supérieure  $\mu_{N_1} \times \mathcal{G}_C(F_1, \tau)$  (symboles  $\bullet$ ) ou  $\mu_{N_1} \times \mathcal{G}_B(F_1, \tau)$  (symboles  $\triangle$ ), qui se superposent avec une assez bonne précision à la courbe COR obtenue avec la loi sous-poissonienne binomiale. Cette superposition confirme ainsi la validité du critère de gain  $\mathcal{G}_C(F_1, \tau)$  pour quantifier le gain en performance. Elle n'est cependant guère étonnante puisque l'on a vu à la section précédente que la mesure de Chernoff (ou son approximation par la distance de Bhattacharyya) constituait un bon paramètre de contraste pour les statistiques considérées.

En revanche, cette même figure permet de montrer que le contraste de Fisher n'assure pas une évaluation correcte des performances de détection en lumière sous-poissonienne [39]. En effet, la courbe COR que l'on obtiendrait avec un faisceau poissonnien d'intensité  $\mu_{N_1} \times \mathcal{G}_R(F_1, \tau)$  (symboles  $\blacktriangledown$ ) se situe bien au-dessus de la courbe COR de référence, ce qui signifie que le gain  $\mathcal{G}_R(F_1, \tau)$  est nettement surévalué. Pour la tâche de détection en lumière sous-poissonienne considérée dans ce chapitre, utiliser un paramètre de contraste « élémentaire » fondé sur les deux premiers moments de la statistique de photocomptage ne permet pas de caractériser correctement les performances de détection.

Dans la section suivante, nous nous focaliserons donc sur le critère  $\mathcal{G}_C(F_1, \tau)$  fondé sur la mesure de Chernoff, dont nous étudierons l'évolution en fonction des paramètres physiques du problème de détection considéré (facteur de Fano  $F_1$  et coefficient de transmission  $\tau$ ). Cette étude nous permettra ainsi d'analyser comment l'utilisation de lumières sous-poissoniennes peut améliorer les performances de détection.

## 5.3 Caractérisation de l'amélioration des performances de détection

Au début de ce chapitre, nous avons vérifié que le gain en performance pour des tâches de détection était compris entre une valeur minimale  $1/F_2$  et une valeur maximale  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F_1$ . En étudiant le comportement du critère de gain<sup>95</sup>  $\mathcal{G}_C$  défini à la section précédente lorsque les paramètres  $\tau$  et  $F_1$  évoluent, nous pouvons maintenant affiner cette analyse et délimiter ainsi trois principaux domaines de fonctionnement.

### 5.3.1 Faibles contrastes ( $\tau \rightarrow 1$ )

Pour les plus faibles valeurs du contraste ( $\tau \simeq 1$ ), on peut vérifier numériquement que le critère de gain  $\mathcal{G}_C$  est quasiment égal à sa valeur maximale  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F_1$ . Ainsi, dans les situations où la discrimination entre les deux niveaux d'intensité est la plus difficile en raison du faible contraste d'intensité entre les deux hypothèses, l'utilisation d'une lumière sous-poissonienne de facteur de

---

<sup>95</sup> – Pour simplifier les notations nous omettrons à partir de maintenant d'indiquer la dépendance en  $\tau$  et  $F_1$  des critères de gain  $\mathcal{G}_C(F_1, \tau)$  ou  $\mathcal{G}_B(F_1, \tau)$ .



Fano  $F_1$  permet d'obtenir les mêmes performances qu'avec un faisceau standard poissonien dont l'intensité serait  $1/F_1$  fois supérieure. Ce résultat est clairement illustré sur la figure 5.5 où nous avons tracé les courbes COR (symboles  $\blacklozenge$ ) obtenues numériquement dans le cas où les deux hypothèses correspondent à des lois sous-poissoniennes binomiales d'intensité  $\mu_{N_1} = 10^3$  photons par pixel et de facteur de Fano  $F_1 \in \{0,05; 0,1; 0,25; 0,5\}$  dont l'une a subi une absorption partielle faible ( $\tau = 0,98$ ). Le niveau d'intensité élevé permet d'obtenir des performances de détection suffisantes pour pouvoir analyser confortablement les résultats obtenus. Sur cette même figure, nous avons superposé les courbes COR obtenues dans les mêmes conditions, mais pour des lois de Poisson standard dans le cas où l'intensité vaut  $\mu_{N_1}$  (courbe en trait tireté (---)) et dans le cas où l'intensité est multipliée par le gain maximal  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F_1$  (courbes en trait plein (—)), pour différentes valeurs de  $F_1 \in \{0,05; 0,1; 0,25; 0,5\}$ .

Dans un premier temps, on peut remarquer que les performances de détection augmentent à mesure que le facteur de Fano décroît, et que l'on surpasse bien sûr les performances obtenues dans un cas poissonien de même intensité (courbe en trait tireté (---)). En outre, on observe également que dans une telle situation de très faible contraste ( $\tau = 0,98 \simeq 1$ ), les courbes COR obtenues pour des statistiques poissoniennes standard d'intensité  $\mu_{N_1}/F_1 = \mu_{N_1} \times \mathcal{G}_{\max}$  se superposent quasiment aux courbes COR obtenues lorsque les fluctuations sont binomiales sous-poissoniennes de facteur de Fano  $F_1$  et d'intensité  $\mu_{N_1}$ . Ainsi, pour les plus faibles valeurs de contraste ( $\tau \rightarrow 1$ ), l'effort investi pour réduire la variance des photocomptages en utilisant des faisceaux sous-poissoniens est entièrement mise à profit pour améliorer les performances de détection.

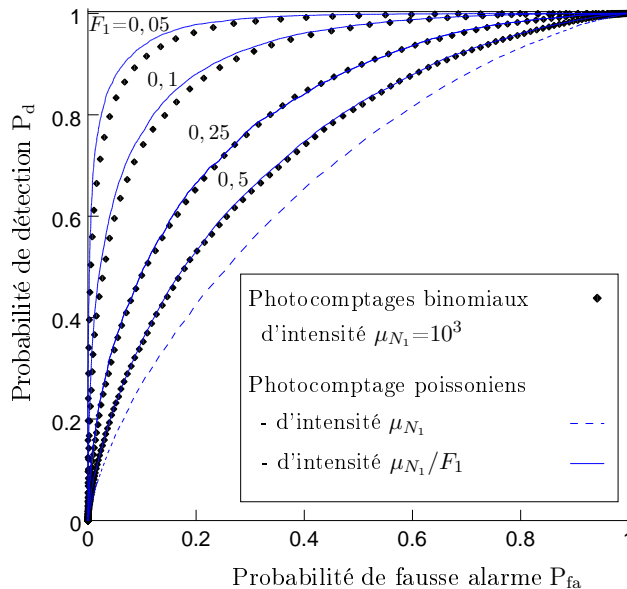


FIG. 5.5 – Comparaison des courbes COR obtenues à très faible contraste ( $\tau = 0,98$ ), pour des hypothèses sous-poissoniennes binomiales d'intensité  $\mu_{N_1} = 10^3$  et de facteurs de Fano  $F_1$  divers (symboles  $\blacklozenge$ ), avec les courbes COR obtenues pour une lumière poissonienne d'intensité  $\mu_{N_1}$  (courbe en trait tireté (---)) ou d'intensité supérieure  $\mu_{N_1}/F_1$  (courbes en trait plein (—)).

Malheureusement, ce gain maximal n'est plus observé dès que l'absorption

devient trop importante, comme on peut le voir sur la figure 5.6.a ou 5.6.b où nous avons tracé le rapport entre le gain  $\mathcal{G}_C$  et le gain maximal  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F_1$  en fonction de  $\tau$  et  $F_1$ . Il peut être intéressant en pratique de délimiter les valeurs du coefficient de transmission  $\tau_{K\%}^{lim}$  pour lesquelles le gain  $\mathcal{G}_C$  reste égal à sa valeur maximale à  $K\%$  près. Pour établir cette valeur limite, nous proposons d'utiliser la forme explicite de ce critère de gain, obtenue grâce à l'approximation de la mesure de Chernoff par la distance de Bhattacharyya. Cette approche se justifie ici à très faible contraste puisqu'il est démontré dans l'annexe C.6.4 que les exposants de Chernoff  $s^*$  et  $s_p^*$  tendent tous deux vers 0,5 lorsque  $\tau$  tend vers 1. Ainsi, par un développement limité à l'ordre 1 lorsque  $\tau \rightarrow 1$ , on montre (voir annexe C.6.6) que le facteur de Fano *équivalent* approché  $\mathcal{F}_B$  est approximativement égal à

$$\bar{F} \triangleq F_1 \left[ 1 + (1 - \tau) \frac{1 - F_1}{2F_1} \right]. \quad (5.21)$$

À partir de cette expression, on peut déduire la valeur limite du coefficient de transmission  $\tau_{K\%}^{lim}$  qui permet d'assurer que le facteur de Fano *équivalent* (approché ici par la valeur  $\bar{F}$ ) ne soit pas supérieur à la valeur minimale  $F_1$  de plus de  $K\%$  en résolvant

$$\bar{F} = F_1 \left[ 1 + (1 - \tau) \frac{1 - F_1}{2F_1} \right] \leq F_1(1 + K\%), \quad (5.22)$$

ce qui conduit, après simplification, à la valeur de  $\tau_{K\%}^{lim}$  suivante [39] :

$$\tau_{K\%}^{lim} = 1 - 2 \frac{F_1}{1 - F_1} K\%. \quad (5.23)$$

Pour donner un ordre de grandeur de ce coefficient limite, nous avons reporté en traits tiretés (—) sur la figure 5.6.b la courbe de niveau correspondant à  $\tau_{10\%}^{lim}$  qui permet de garantir ainsi un gain minimal de  $0,9 \times \mathcal{G}_{\max}$ . On note alors que ce coefficient limite vaut  $\tau_{10\%}^{lim} = 0,8$  lorsque le facteur de Fano vaut  $F_1 = 0,5$  mais n'est que de  $0,98$  lorsque  $F_1 = 0,1$ . Ce résultat illustre à nouveau clairement la fragilité bien connue des états sous-poissoniens lorsqu'ils sont perturbés par une interaction avec l'environnement (absorption, réflexion, etc.).

### 5.3.2 Contrastes intermédiaires

En dehors du domaine délimité par ce coefficient de transmission limite, l'absorption subie par le faisceau dans l'hypothèse  $H_2$  dégrade sensiblement la nature sous-poissonienne de ce dernier, occasionnant ainsi un surcroît de fluctuations et une diminution du gain  $\mathcal{G}_C$ . Comme précédemment dans le cas de la figure 5.4.a où  $\tau = 0,5$ , espérer un gain de  $1/F_1$  est une hypothèse trop optimiste par rapport à l'amélioration observée effectivement. On peut cependant remarquer sur cette même figure 5.4.a que la courbe COR tracée grâce aux symboles \* est assez similaire à celle obtenue pour des fluctuations sous-poissoniennes binomiales (symboles ♦). Cette nouvelle courbe, tracée grâce aux symboles \*, a été obtenue avec des lois de Poisson standard d'intensité  $\bar{\mathcal{G}} \times \mu_{N_1}$ , où l'on définit  $\bar{\mathcal{G}} \triangleq 1/\bar{F}$ . Puisque  $\bar{F}$  représente l'approximation au premier ordre de  $\mathcal{F}_B$  quand  $\tau \rightarrow 1$  donnée à l'équation (5.21), il n'est pas surprenant que cette quantité

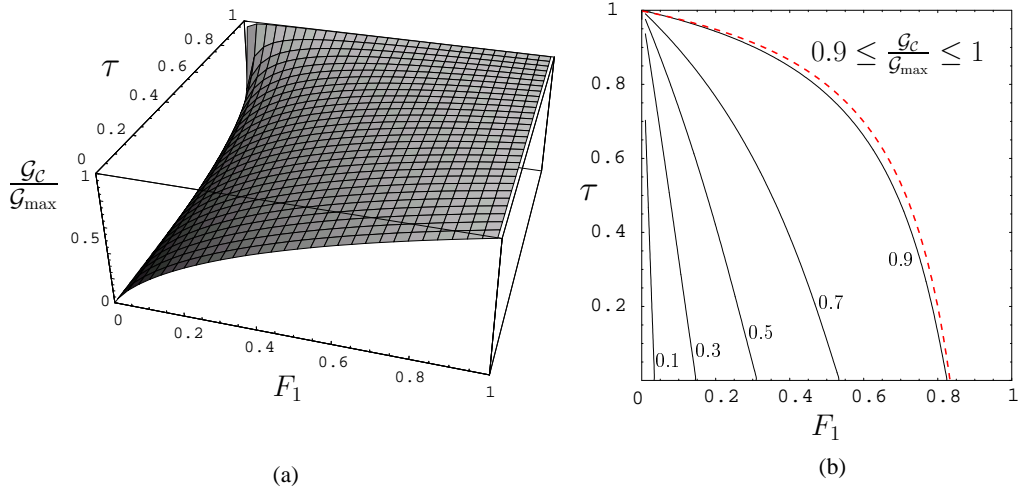


FIG. 5.6 – Le rapport entre le critère de gain  $\mathcal{G}_C$  et le gain maximal  $\mathcal{G}_{\max} = 1/F_1$  est représenté en fonction de  $\tau$  et de  $F_1$  : (a) en trois dimensions ; (b) en courbes de niveaux.

fournisse une approximation correcte du facteur de Fano équivalent  $\mathcal{F}_C$  [39].

Cette valeur approchée s'avère donc tout à fait intéressante pour caractériser le gain en performance de détection pour des contrastes faibles ou modérés. En effet, son expression est très simple, d'autant plus que l'on peut montrer, grâce à la propriété C.3 démontrée en annexe C.6.6, que  $\bar{F}$  est égal à la valeur moyenne des facteurs de Fano dans les deux hypothèses considérées :

$$\bar{F} = \frac{F_1 + F_2}{2}. \quad (5.24)$$

Le facteur de Fano moyen  $\bar{F}$  permet donc d'évaluer avec une précision satisfaisante le gain en performance de détection auquel on peut s'attendre pour des contrastes intermédiaires. Cette propriété peut être confirmée par l'observation de la figure 5.7, où le rapport  $\mathcal{G}_C/\bar{\mathcal{G}}$  (ou de manière équivalente  $\bar{F}/\mathcal{F}_C$ ) est représenté en fonction de  $\tau$  et de  $F_1$ . Cette figure montre ainsi que pour une large gamme d'états sous-poissoniens, à l'exception des très forts contrastes et des plus faibles valeurs de  $F_1$ , l'inverse du facteur de Fano moyen ne diffère guère de  $\mathcal{G}_C$ . Dans la plupart des situations, on pourra donc évaluer le gain en calculant simplement la valeur moyenne des facteurs de Fano dans chacune des hypothèses [39].

### 5.3.3 Forts contrastes ( $\tau \rightarrow 0$ )

Si ce résultat restait valable pour toutes les valeurs admissibles de  $F_1$  et de  $\tau$ , le gain maximal atteint dans le cas où la lumière serait parfaitement ordonnée ( $F_1 \rightarrow 0$ ) serait limité pour des contrastes extrêmes à  $\bar{\mathcal{G}} = 2$  puisque  $F_2 \rightarrow 1$  quand  $\tau \rightarrow 0$ . Cependant, le gain effectivement observé pour de très forts contrastes et évalué grâce à  $\mathcal{G}_C$  est supérieur à 2 ce qui signifie que  $\bar{\mathcal{G}}$  sous-évalue le gain dans ces conditions de forts contrastes. Les simulations numériques présentées en figure 5.8 permettent de le vérifier, dans une situation où  $\mu_{N_1} = 18$ ,

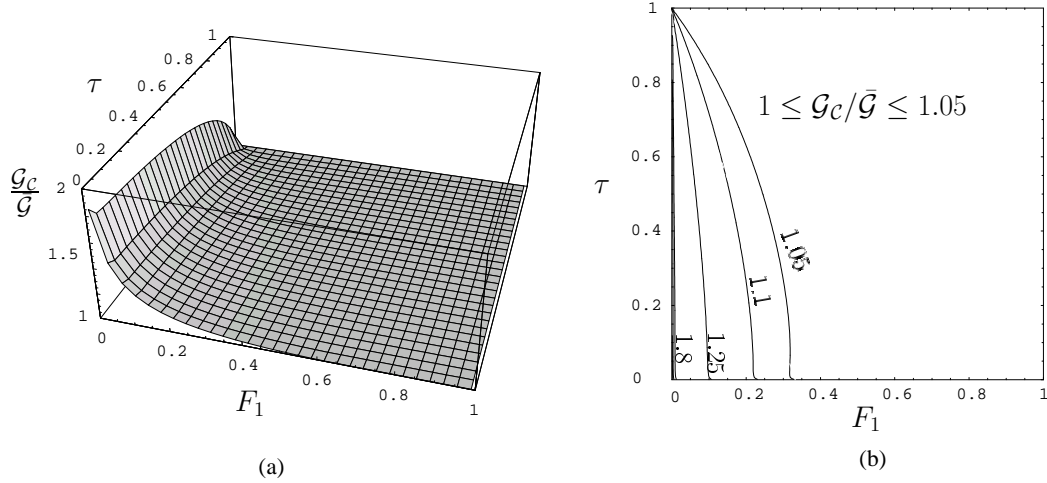


FIG. 5.7 – Le rapport entre le critère de gain  $\mathcal{G}_C$  et l'inverse du facteur de Fano moyen  $\bar{\mathcal{G}} = 1/\bar{F}$  est représenté en fonction de  $\tau$  et de  $F_1$  : (a) en trois dimensions ou (b) en courbe de niveaux.

$\tau = 0, 3$  et  $F_1 = 0, 1$  ou  $0, 5$ . Les courbes COR obtenues avec les photocomptages sous-poissoniens binomiaux sont toujours représentées grâce aux symboles  $\blacklozenge$ , tandis que les symboles  $\circ$  et  $*$  représentent respectivement les courbes COR dans un cas poissonien de valeur moyenne  $\mu_{N_1} \times \mathcal{G}_C$  ou  $\mu_{N_1} \times \bar{\mathcal{G}}$ . Cette figure illustre bien qu'à fort contraste, le critère de gain obtenu à partir du facteur de Fano moyen  $\bar{F}$  reste un indicateur de performance satisfaisant tant que le facteur de Fano n'est pas trop faible (ici pour  $F_1 = 0, 5$ ). Il sous-évalue en revanche le gain réel lorsque  $F_1$  est faible (ici  $F_1 = 0, 1$ ), et il est nécessaire dans ces conditions de préférer l'utilisation du critère de gain  $\mathcal{G}_C$  fondé sur la mesure de Chernoff [39].

Pour clore cette étude des situations de très forts contrastes, nous pouvons analyser le comportement limite du critère de gain  $\mathcal{G}_C$  lorsque le contraste devient maximal ( $\tau \rightarrow 0$ ). Il n'est pas possible dans ce cas d'utiliser une approximation de la mesure de Chernoff par la distance de Bhattacharyya car les exposants de Chernoff  $s^*$  et  $s_p^*$  tendent tous deux vers 1 à très fort contraste lorsque  $\tau \rightarrow 0$  (voir annexe C.6.5). On peut malgré tout démontrer, comme cela est détaillé dans l'annexe C.6.7 que la valeur limite du critère de gain est [39]

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{G}_C = \frac{\ln(F_1)}{F_1 - 1}. \quad (5.25)$$

En observant cette expression, on remarque que le gain diverge lorsque la lumière est totalement absorbée dans l'hypothèse  $H_2$  ( $\tau = 0$ ) et lorsque que le faisceau incident devient parfaitement ordonné ( $F_1 \rightarrow 0$ ). Cependant, pour ces contrastes extrêmes, la vitesse de croissance du gain est faible lorsque  $F_1$  décroît (en proportion de  $\ln(1/F_1)$ ), tandis que lorsque le contraste était très faible,  $\mathcal{G}_C$  augmentait en proportion de  $1/F_1$ . Ceci peut être illustré quantitativement en observant le tableau 5.1, où sont reportées les valeurs de gain obtenues pour  $\tau = 0, 1$  et  $\tau = 0, 9$ , et pour trois ordres de grandeurs du facteur de Fano  $F_1 = 1$ ,  $F_1 = 0, 1$  et  $F_1 = 0, 01$ . Pour  $\tau = 0, 9$  par exemple, on peut observer qu'une première diminution de  $F_1$  par un facteur 10 permet de multiplier le gain par 7,1 mais

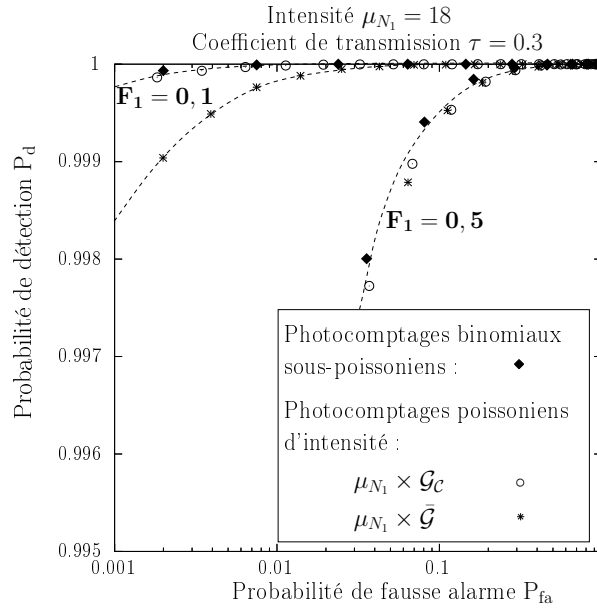


FIG. 5.8 – Comparaison des courbes COR obtenues à fort contraste ( $\tau = 0,3$ ) dans le cas d'hypothèses sous-poissonniennes binomiales ou d'hypothèses poissonniennes d'intensité supérieure, évaluée à partir du critère de gain  $\mathcal{G}_C$  ou de  $\bar{\mathcal{G}}$  (Les courbes en trait tireté (—) sont une simple indication visuelle de l'évolution des courbes COR discrètes).

qu'une nouvelle diminution de  $F_1$  par un facteur 10 ne multiplie le gain que par 3,16. Pour  $\tau = 0,1$ , ces augmentations successives du gain sont respectivement de 2,45 et de 1,57.

$\mathcal{G}_C$	$F_1 = 1$	$F_1 = 0,1$	$F_1 = 0,01$
$\tau = 0,9$	1	7,1	22,44
$\tau = 0,1$	1	2,45	3,85

TAB. 5.1 – Évolution du critère de gain  $\mathcal{G}_C$  en fonction du facteur de Fano  $F_1$ , pour deux valeurs distinctes du facteur de transmission  $\tau$ .

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que l'expression obtenue à l'équation (5.25) est identique à un résultat établi par M. Teich et B. Saleh dans la référence [145], dans laquelle ces auteurs examinent les performances d'un protocole de communication optique par modulation « tout ou rien », ou « *On-Off keying* » (OOK) en anglais<sup>96</sup>, qui utiliserait des états sous-poissoniens du champ lumineux. Le fait que l'on retrouve un tel résultat n'est pas surprenant au vu de l'équivalence formelle entre ce protocole de modulation étudié dans la référence [145] et la situation de détection considérée ici à très fort contraste lorsque la lumière est totalement absorbée dans l'hypothèse  $H_2$ .

<sup>96</sup> – Comme son nom l'indique, cette modulation permet de coder un bit d'information grâce à la présence ou l'absence d'un signal d'intensité constante durant une période  $T$  définie.

## 5.4 Généralisation aux modèles sous-poissoniens non binomiaux

Dans la section qui précède, nous avons analysé comment on peut tirer parti de la mesure de Chernoff entre lois binomiales pour caractériser les performances de détection, lorsqu'il s'agit de décider, à partir d'une mesure de photocomptage et avec un taux d'erreur minimal, si le faisceau détecté a subi ou non une absorption partielle. Pour établir les conclusions précédentes, le choix du modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes se justifie car il rend possible le calcul de la mesure de Chernoff grâce à la stabilité des lois binomiales sous l'effet d'une absorption de Bernoulli. Nous devons néanmoins à ce niveau nous interroger sur la généralité de ces résultats, fondés sur le choix commode mais particulier du modèle statistique binomial.

### 5.4.1 Prise en compte d'un modèle non binomial

Nous allons tenter d'analyser dans cette dernière section la robustesse des résultats établis précédemment, lorsque les fluctuations sous-poissoniennes des photocomptages ne sont plus modélisées par des statistiques binomiales. En particulier, nous allons considérer que la lumière incidente sous-poissonienne de facteur de Fano  $F_1$  est maintenant décrite par le modèle temporel présenté à la section 3.2.2, qui suppose que les temps d'attente entre les détections successives de photons sont distribués selon une loi gamma. Dans le cas où la loi gamma considérée est d'ordre  $L$ , la loi de probabilité qui décrit les photocomptages sous-poissoniens a été établie en équation (3.33), et le facteur de Fano dans une telle situation vaut simplement  $F_1 = 1/L$ .

Par ailleurs, il est aisé de simuler numériquement l'action d'une absorption partielle de facteur de transmission  $\tau$  : conformément au modèle d'absorption de Bernoulli présenté en annexe C.1.1, il suffit pour cela de conserver chaque photon contenu dans le processus sous-poissonien avec une probabilité  $\tau$  et de le supprimer avec une probabilité  $(1 - \tau)$ . Ainsi, on peut facilement générer numériquement des réalisations de la statistique de photocomptage correspondant à l'hypothèse  $H_2$ , lorsque le faisceau est absorbé. À la différence du modèle binomial cependant, il n'est pas facile d'explicitier directement la loi du photocomptage correspondant à l'hypothèse absorbée<sup>97</sup>. Pour cette raison d'une part, et au vu de la complexité de la loi de probabilité (3.33) d'autre part, il semble difficile de déterminer la mesure de Chernoff entre les deux hypothèses.

### 5.4.2 Étude de la robustesse des résultats

Puisque nous ne pouvons pas calculer la mesure de Chernoff entre les deux lois de photocomptage lorsqu'on utilise le modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes, il n'est pas possible dans ce cas de définir un critère de gain en détection comme nous l'avons fait précédemment dans le cas du modèle binomial.

Néanmoins, nous allons analyser numériquement comment l'expression du gain  $\mathcal{G}_C$  obtenu en utilisant le modèle binomial peut s'appliquer lorsque les fluc-

<sup>97</sup> – En particulier, la propriété de stabilité par absorption n'est plus vérifiée dans le cas du modèle temporel.

tuations d'intensité sont décrites grâce au modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes. Dans une situation physique donnée (intensité moyenne  $\mu_1$ , facteur de Fano  $F_1$  et facteur de transmission  $\tau$ ), nous proposons pour cela d'associer à la lumière dans l'hypothèse non absorbée  $H_1$  une loi binomiale de paramètres  $N_0 = \mu_{N_1}/(1 - F_1)$  et  $\eta_1 = 1 - F_1$  (voir équation (5.1)). Les paramètres de cette loi binomiale sont fixés de sorte qu'elle présente une intensité moyenne  $\mu_{N_1}$  et une variance  $\mu_{N_1} \times F_1$  identiques à celles de la loi de probabilité décrivant la lumière incidente. De même, dans l'hypothèse où la lumière incidente subit une absorption partielle de facteur de transmission  $\tau$  (hypothèse  $H_2$ ), on peut lui associer une loi binomiale de même paramètre  $N_0$  et de paramètre  $\eta_2 = 1 - F_2 = \tau(1 - F_1)$  (voir équation (5.2)). Ainsi, bien que les données soient générées au moyen du modèle temporel de temps d'attente gamma, il est possible d'évaluer la distance de Chernoff entre les lois binomiales associées à chacune des hypothèses.

Dans les paragraphes qui suivent, nous proposons d'analyser par simulation numérique si la distance de Chernoff calculée pour ces lois binomiales associées aux véritables lois de photocomptage constitue un paramètre de contraste satisfaisant entre les hypothèses sous-poissoniennes.

**Description de l'expérience :** Nous avons simulé une expérience de discrimination similaire à celles que nous avons analysées précédemment, mais en utilisant le modèle phénoménologique temporel de temps d'attente gamma pour générer le faisceau sous-poissonien incident et en modélisant l'absorption partielle subie dans l'hypothèse  $H_2$  par une absorption de Bernoulli. Différentes conditions physiques ont été considérées en faisant varier le facteur de Fano de la lumière incidente  $F_1 \in \{0,01; 0,1; 0,5; 0,9; 1\}$  ainsi que l'intensité moyenne de celle-ci  $\mu_{N_1} \in \{99; 495; 990; 4455\}$ .

Pour chacune des situations physiques considérées, nous avons ajusté la valeur du coefficient de transmission  $\tau$  de sorte que la mesure de Chernoff évaluée entre les lois binomiales associées aux véritables lois de photocomptage soit égale à  $\mathcal{C}^* = 1,2$  ou  $\mathcal{C}^* = 0,393$ . Dans chacun des cas, les  $R = 10^6$  réalisations de l'expérience de discrimination permettent enfin de construire une courbe COR caractéristique de la performance de détection, qui est tracée sur la figure 5.9.

Nous nous sommes placés à des niveaux d'intensité suffisants ( $\mu_{N_1} \geq 100$  photons par pixel environ) pour réaliser ces expériences. Cette précaution permet d'éviter que les processus sous-poissoniens simulés avec le modèle phénoménologique temporel ne soient trop perturbés par le phénomène de « fenêtrage temporel » identifié à la section 3.2.2.3, qui affecte la nature sous-poissonienne du modèle temporel pour de trop faibles valeurs de  $\mu_{N_1}$ . En effet, le modèle sous-poissonien binomial ne permet pas de rendre compte simplement de ce phénomène. À faible intensité moyenne, il sera donc plus difficile de déterminer les lois binomiales associées aux véritables lois de photocomptage qui décrivent les fluctuations d'intensité dans les deux hypothèses. L'évaluation du contraste entre ces deux lois de probabilité sera donc bien plus complexe à faible intensité moyenne.

**Analyse des résultats :** Nous pouvons maintenant analyser les résultats de simulation présentés en figure 5.9. De manière générale, on remarque que les différentes courbes COR obtenues se superposent de mieux en mieux à mesure que

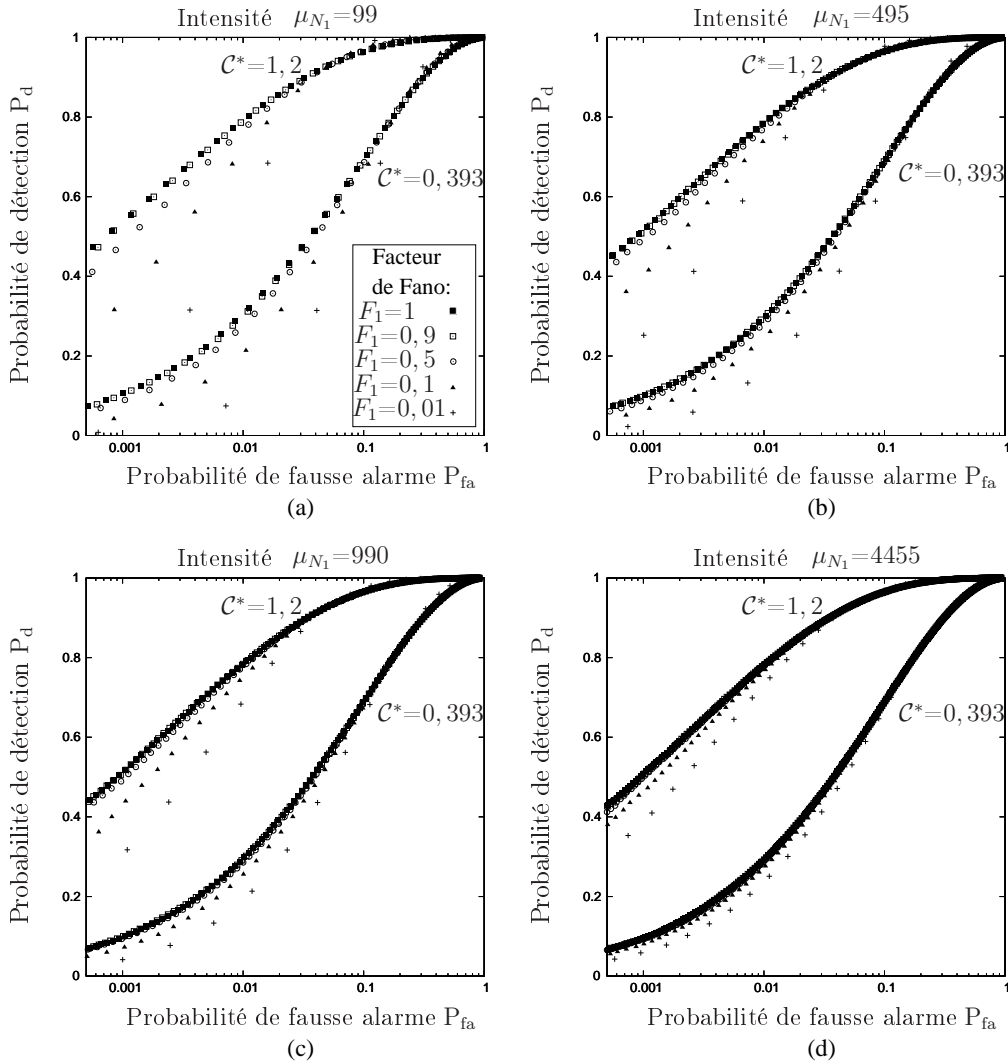


FIG. 5.9 – Étude de la pertinence de la mesure de Chernoff  $\mathcal{C}^*$  (évaluée entre deux lois binomiales) pour évaluer la performance de détection entre hypothèses sous-poissoniennes générées grâce au modèle temporel de temps d'attente gamma.

l'on augmente le nombre moyen de photons reçus  $\mu_{N_1}$ , jusqu'à être quasiment confondues lorsque  $\mu_{N_1} = 4455$  photons par pixel (excepté pour  $F_1 = 0,01$ ). Cela signifie donc que la mesure de Chernoff évaluée pour les lois binomiales associées aux véritables lois de photocomptage représente un paramètre de contraste satisfaisant pour des niveaux d'intensité suffisants ( $\mu_{N_1}$  de l'ordre d'un millier de photons par pixel), même lorsque le modèle de fluctuations considéré n'est pas strictement binomial.

Cette remarque assez générale peut néanmoins être affinée à l'aide des observations suivantes :

- Pour des lumières faiblement sous-poissoniennes (ici  $F_1 = 0,9$  ou  $F_1 = 0,5$ ), la superposition des courbes COR devient satisfaisante au-delà de quelques centaines de photons par pixel seulement.
- Cette superposition devient de moins en moins satisfaisante à mesure que le facteur de Fano diminue. Pour des facteurs de Fano très faibles ( $F_1 = 0,01$ ),



la superposition avec les autres courbes COR n'est toujours pas atteinte pour  $\mu_{N_1} = 4455$  photons par pixel.

- On peut remarquer également que la superposition est meilleure si la mesure de Chernoff entre les deux hypothèses est plus faible, c'est-à-dire pour des situations de moindre contraste.

Ces résultats numériques indiquent donc que pour le problème de détection considéré, la mesure de Chernoff évaluée entre les lois binomiales associées aux véritables lois de photocomptage permet de caractériser la performance de détection entre deux hypothèses sous-poissoniennes d'intensité suffisante (de l'ordre de  $10^3$  photons par pixels) et pour  $F_1 \geq 0, 1$ .

Par conséquent, dès que ces conditions seront vérifiées, il semble raisonnable d'utiliser le critère de gain  $\mathcal{G}_C$  déterminé dans ce chapitre. De façon similaire, on peut raisonnablement penser que les conclusions physiques et les grandeurs  $\tau_{K\%}^{lim}$  et  $\bar{F}$  qui ont été déduites de l'étude de ce critère resteront valables si les conditions énoncées ci-dessus sont respectées.

## 5.5 Conclusion

En utilisant un modèle binomial de fluctuations sous-poissoniennes, nous avons pu observer qu'entre différentes mesures de contraste issues de la théorie de l'information, seule la mesure de Chernoff permettait de caractériser correctement la performance de détection entre deux hypothèses, selon qu'un faisceau sous-poissonien a subi une absorption partielle ou non. À partir de cette mesure de contraste, nous avons proposé un critère de gain  $\mathcal{G}_C$  qui quantifie l'apport des états sous-poissoniens du champ électromagnétique pour surpasser les performances de détection obtenues en lumière poissonnienne standard.

L'analyse de ce gain nous a servi à délimiter l'ensemble des situations de très faibles contrastes ( $\tau \simeq 1$ ) pour lesquelles l'amélioration est maximale, c'est-à-dire en proportion du facteur de Fano de la lumière incidente. Pour les situations de contrastes intermédiaires, une forme approchée très simple du gain peut être exhibée, car il évolue en proportion du facteur de Fano moyen des deux hypothèses. On retiendra également que l'expression asymptotique de  $\mathcal{G}_C$  pour un contraste maximal ( $\tau \rightarrow 0$ ) permet de retrouver un résultat établi dans la référence [145]. Enfin, la robustesse de ces résultats a été discutée à travers quelques simulations numériques, en utilisant un modèle non binomial pour générer les processus sous-poissoniens.

Pour simplifier les analyses, nous nous sommes limités dans ce chapitre à une tâche de détection très simple. Parmi les perspectives de ces travaux, on peut bien sûr imaginer de les étendre au cas de détecteurs matriciels, où le test d'hypothèses serait alors effectué sur plusieurs pixels. On pourrait dans ce cas envisager d'estimer les paramètres de la loi de photocomptage, et d'utiliser une version généralisée du test de vraisemblance (*generalized likelihood ratio test* (GLRT)). Enfin, nous pouvons raisonnablement penser que d'autres tâches de traitement d'image, telles que des problèmes de classification ou de segmentation, pourraient également voir leurs performances améliorées grâce à l'utilisation de lumières sous-poissoniennes. Cette perspective peut donc également constituer une motivation pour des travaux de recherche ultérieurs.

# Conclusion

L'objectif de cette thèse consistait à analyser deux situations physiques distinctes pour lesquelles le bruit de mesure inhérent au problème d'optique considéré<sup>98</sup> possède une influence importante sur les performances de traitement, que l'on considère une tâche d'estimation de paramètre ou de détection.

Dans chacun de ces deux cas, nous avons appliqué une méthodologie similaire consistant dans un premier temps à modéliser les bruits optiques qui perturbent les signaux lumineux, puis à déterminer les bornes statistiques sur les performances de traitement. L'analyse de ces bornes issues de la théorie de l'information nous a permis d'évaluer la qualité des méthodes de traitement employées et a facilité la recherche de stratégies de traitement optimales.

Dans cette conclusion, nous proposons tout d'abord de dresser un bilan des principaux résultats obtenus durant cette thèse concernant les deux problèmes physiques que nous avons étudiés.

## Bilan des résultats obtenus

### Estimation du degré de polarisation

La première partie de cette thèse a permis de caractériser théoriquement une méthode d'estimation du degré de polarisation fondée sur l'analyse de la répartition statistique de l'intensité de la lumière rétrodiffusée par une scène imagée sous éclairage cohérent et linéairement polarisé. L'étude de la borne de Cramer-Rao (BCR) pour l'estimation du degré de polarisation au carré ( $\beta = \mathcal{P}^2$ ) à partir d'une unique image a permis de montrer qu'il était préférable de se situer dans les conditions expérimentales d'un speckle d'ordre 1 (c'est-à-dire qu'en moyenne un grain de speckle occupe un pixel du détecteur) et qu'une utilisation pratique de cette méthode d'estimation à une image nécessitait de disposer d'échantillons statistiquement homogènes de taille importante (de l'ordre de 400 pixels pour obtenir un écart-type inférieur à 0,1 sur l'estimation de  $\beta = \mathcal{P}^2$ ). Pour des applications d'imagerie, nous avons illustré comment cette augmentation de la taille des échantillons pouvait être favorisée par l'utilisation d'algorithmes de segmentation d'image en régions statistiquement homogènes. Nous avons également vu que la robustesse de la méthode d'estimation en présence de bruit de photon à faible flux lumineux pouvait permettre de concevoir un dispositif d'imagerie optimisé pour maximiser la quantité d'échantillons pris en compte pour l'estimation.

Pour la mise en œuvre pratique d'une telle méthode d'estimation, nous avons étudié théoriquement et numériquement les performances d'un estimateur de  $\beta$

---

<sup>98</sup> – Bruit de speckle dû à l'éclairage cohérent ou bruit de photon.

---

très simple, fondé sur l'évaluation de la moyenne et de la variance empiriques de l'intensité de l'image dans une région statistiquement homogène. Si cet estimateur présente l'avantage d'une grande souplesse d'utilisation pour des modèles de speckle variés, nous avons néanmoins montré qu'il ne permettait pas d'atteindre les performances optimales d'estimation en particulier pour un speckle d'ordre 1 et qu'il était nécessaire dans ce cas de se tourner vers des méthodes d'estimation plus sophistiquées (par exemple, l'estimation au sens du maximum de vraisemblance).

Plus généralement, la caractérisation de la méthode d'estimation du degré de polarisation à une image menée dans cette première partie de thèse a permis de quantifier la dégradation de la précision d'estimation que l'on subit lorsqu'on simplifie les systèmes expérimentaux pour l'estimation du degré de polarisation. Malgré la perte en précision subie, cette étude comparative semble montrer néanmoins l'intérêt d'une telle méthode d'estimation à une image pour des applications d'imagerie polarimétrique nécessitant une grande simplicité de mise en œuvre expérimentale.

## États sous-poissoniens de la lumière

Dans la seconde partie de cette thèse, nous avons étudié comment des états sous-poissoniens de la lumière (états comprimés en amplitude) pouvaient améliorer les performances de traitement au delà des limites de performance obtenues en lumière poissonnienne standard. L'apport de ces états lumineux présentant des fluctuations d'intensité sous-poissoniennes a été étudié pour deux problèmes distincts.

**Estimation de paramètre dans une image :** Dans le cas de l'estimation d'un déplacement d'une image, l'utilisation d'un modèle « temporel » de lumière sous-poissonienne associé à un modèle idéal de formation d'image nous a permis de confirmer et compléter des résultats antérieurs, établis dans les références [29, 28] et valables pour de petites amplitudes de déplacement et pour des niveaux d'intensité importants. En particulier, nous avons étudié comment la précision d'estimation d'un déplacement d'une image évolue en fonction du niveau d'intensité moyen de l'image considérée.

Lorsque l'intensité moyenne de l'image est importante, le modèle de bruit sous-poissonien utilisé nous a permis de déterminer une borne inférieure de la variance minimale d'estimation permettant ainsi de confirmer que la BCR à fort flux est diminuée au mieux en proportion du facteur de Fano de la lumière sous-poissonienne utilisée par rapport à la BCR que l'on obtiendrait si l'image était perturbée par un bruit standard poissonnien. Nous avons par ailleurs montré grâce à des simulations numériques qu'un estimateur simple du déplacement (qui s'identifie à l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance adapté à un bruit de Poisson standard) permet de réaliser une estimation de déplacement efficace en lumière sous-poissonienne. La variance de cet estimateur atteint en effet la limite inférieure de la BCR que nous avons déterminée et qui s'identifie par conséquent à la véritable borne de Cramer-Rao à fort flux.

En analysant le cas d'une image de très faible intensité, nous avons vu cependant que la diminution de la variance dont on bénéficie à fort flux en utilisant

---

une lumière sous-poissonienne tend à disparaître à faible flux. Nous avons interprété ce comportement par un effet de « fenêtrage temporel », occasionné par la faible durée d'observation du processus temporel sous-poissonien, et qui dégrade le caractère sous-poissonien de la lumière dès que l'on reçoit moins d'une centaine de photons par pixel en moyenne. Cette observation nous a conduit à proposer l'expression d'une borne de Cramer-Rao *effective* qui permet d'appréhender la dégradation locale du caractère sous-poissonien de la lumière due à certaines perturbations éventuelles telles que l'acquisition d'une image à faible flux (fenêtrage temporel), l'influence d'une absorption partielle du faisceau (pour modéliser une efficacité quantique du détecteur inférieure à 1 par exemple), ou encore en présence d'un bruit de photon parasite.

Grâce aux simulations numériques réalisées, nous avons en outre pu vérifier la validité et la bonne efficacité de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance adapté au bruit de Poisson pour estimer un déplacement d'une image perturbée par des fluctuations sous-poissoniennes, quel que soit le niveau d'intensité de l'image, quel que soit le motif d'éclairement utilisé, et pour des amplitudes de déplacement importantes.

**Détection en lumière sous-poissonienne :** Dans la seconde partie de cette thèse, nous avons également considéré un problème simple de discrimination entre deux niveaux d'intensité qui permet de rendre compte de diverses situations physiques (applications en télécommunication ou pour la lecture d'information optique) et de quantifier l'apport des états sous-poissoniens de la lumière pour améliorer les performances de détection par rapport aux performances atteignables en utilisant une lumière poissonnienne classique.

Pour évaluer cet apport, nous avons proposé un critère de gain en performances de détection, fondé sur une mesure de séparabilité entre lois de probabilité issue de la théorie de l'information (mesure de Chernoff). Des simulations numériques nous ont permis de vérifier que la mesure de Chernoff évaluée pour un modèle binomial de bruit sous-poissonien permet d'évaluer la difficulté d'une tâche de détection en présence de lumière poissonnienne ou sous-poissonienne, ce qui n'est pas le cas d'une mesure de séparabilité plus simple comme le contraste de Fisher.

L'analyse du critère de gain proposé nous a permis de décrire comment l'apport des lumières sous-poissoniennes sur les performances de détection évoluait en fonction du contraste existant entre les deux niveaux d'intensité à discriminer, et nous a conduit à délimiter trois principaux domaines de fonctionnement. Pour les situations de discrimination les plus difficiles, c'est-à-dire lorsque l'on cherche à distinguer deux niveaux d'intensité présentant de très faibles contrastes, les performances de détection sont améliorées en proportion du facteur de Fano de la lumière incidente. Quand le contraste augmente, nous avons pu montrer que le gain se dégrade d'autant plus rapidement que le facteur de Fano de la lumière est petit, illustrant à nouveau la fragilité des états sous-poissoniens sous l'effet d'une absorption partielle. Enfin, l'étude de la limite du critère de gain lorsque le contraste entre les deux hypothèses est maximal nous a permis de retrouver un résultat établi dans des travaux antérieurs [145].

---

## Perspectives

Au terme de ce manuscrit de thèse, nous pouvons évoquer quelques perspectives de recherche qui s'ouvrent dans la continuité de ces travaux, que ce soit d'un point de vue théorique ou expérimental.

### Estimation du degré de polarisation

Les perspectives applicatives que semble offrir la méthode d'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image de speckle mériteraient sans doute une étude expérimentale approfondie afin de compléter les premiers résultats expérimentaux présentés dans ce manuscrit. À l'occasion de cette étude, il serait également intéressant de proposer une méthodologie de calibration des données qui permettrait d'évaluer précisément le modèle de bruit de speckle qui entache les données acquises, afin d'adapter les estimateurs utilisés.

D'un point de vue plus théorique, il serait nécessaire d'étudier l'influence de bruits parasites (bruit de capteur par exemple) sur les performances de la méthode. De même, il serait utile d'étudier la validité des hypothèses nécessaires à l'application de cette méthode. Pour des situations d'imagerie de surfaces texturées notamment, on peut se demander s'il est toujours raisonnable de supposer que l'intensité lumineuse résulte de la somme de deux composantes d'intensité indépendantes. Dans le cas de surfaces texturées, on pourrait également étudier l'influence du choix de l'état de polarisation de l'éclairement cohérent incident sur la validité de la méthode et sur la qualité de l'estimation.

Enfin, il serait intéressant de caractériser les performances de cette méthode à une image pour des applications de détection dans les images polarimétriques et de mener une étude comparative des performances de détection selon que celle-ci est opérée à partir de 4 ou 2 images polarimétriques ou d'une seule image d'intensité de speckle.

### États comprimés de la lumière

En ce qui concerne l'estimation de paramètre dans des images perturbées par des fluctuations sous-poissoniennes, il serait intéressant de compléter l'étude présentée dans ce manuscrit en analysant l'influence d'éventuelles imperfections du dispositif expérimental (détecteur imparfait, corrélation partielle entre les mesures de photocomptage réalisées pour des pixels voisins, etc.) La réalisation expérimentale de tels dispositifs d'imagerie est encore prématurée au regard de la technologie actuelle mais constitue également une perspective intéressante.

D'autres pistes de recherche plus théoriques peuvent également être évoquées. En particulier, on pourrait généraliser l'étude menée pour des applications de discrimination d'hypothèses en l'étendant à des problèmes de détection plus complexes. On peut également envisager d'étudier l'apport des états sous-poissoniens de l'intensité lumineuse sur des tâches de traitement d'image de plus haut niveau telles que des problèmes de classification ou de segmentation d'image.

Enfin, il serait intéressant d'étudier les limites théoriques des performances de traitement associées à la mesure par détection homodyne de champs électromagnétiques non classiques multimodes, dont la production constitue un des enjeux actuels des expérimentations d'optique quantique.

# Annexe A

## Évaluation numérique de l'information de Fisher

Dans cette annexe, nous explicitons une méthode numérique qui permet d'évaluer numériquement l'information de Fisher lorsque la complexité des lois de probabilité rend difficile le calcul explicite de cette quantité. Cette méthode ayant été utilisée dans ce manuscrit uniquement dans le cas de lois de probabilité discrètes (photocomptages), nous nous plaçons donc dans ce cas pour détailler le principe de cette méthode numérique.

Lorsqu'on cherche à estimer un paramètre  $\theta$  à partir d'un échantillon de  $M$  mesures  $\chi = \{n_1; \dots; n_M\}$  décrites par les lois de probabilité discrètes  $P_N(n_k)$ , l'information de Fisher définie à l'équation (2.12) peut s'écrire

$$I_F(\theta) = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\ell(\chi; \theta)] \right\rangle = -\sum_{k=1}^M \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\ln P_N(n_k|\theta)] \right\rangle \quad (\text{A.1})$$

puisque la logvraisemblance  $\ell(\chi; \theta)$  est égale au logarithme de la vraisemblance  $L(\chi; \theta) = \prod_{k=1}^M P_N(n_k|\theta)$ , d'où l'on déduit  $\ell(\chi; \theta) = \sum_{k=1}^M \ln P_N(n_k|\theta)$ .

En supposant que les  $M$  mesures constituant l'échantillon sont indépendantes et identiquement distribuées selon la loi discrète  $P_N(n)$ , on peut écrire

$$I_F(\theta) = -M \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\ln P_N(n|\theta)] \right\rangle = -M \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\ln P_N(n|\theta)] \times P_N(n|\theta) \right\}. \quad (\text{A.2})$$

**Réécriture de l'information de Fisher :** Pour effectuer le calcul numérique de l'information de Fisher, nous proposons préalablement de réécrire celle-ci sous une forme différente. Pour cela, on peut tout d'abord remarquer que  $\frac{\partial}{\partial \theta} [\ln P_N(n|\theta)] = \frac{1}{P_N(n|\theta)} \frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta}$ , ce qui permet ensuite d'établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} [\ln P_N(n|\theta)] P_N(n|\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} P_N(n|\theta) \right]}{\partial \theta} = \frac{\partial [1]}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{A.3})$$

car  $P_N(n|\theta)$  est une loi de probabilité et vérifie par conséquent  $\sum_{n=0}^{+\infty} P_N(n|\theta) = 1$ . En dérivant la relation (A.3) par rapport au paramètre  $\theta$ , on obtient alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\ln P_N(n|\theta)] P_N(n|\theta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} [\ln P_N(n|\theta)] \frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{A.4})$$

d'où l'on déduit enfin, en réutilisant le fait que  $\frac{\partial}{\partial \theta} [\ln P_N(n|\theta)] = \frac{1}{P_N(n|\theta)} \frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\ln P_N(n|\theta)] \times P_N(n|\theta) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{P_N(n|\theta)} \left[ \frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta} \right]^2. \quad (\text{A.5})$$

En utilisant alors ce résultat dans l'expression de l'information de Fisher donnée en équation (A.2), on obtient donc la formulation suivante de l'information de Fisher [118]

$$I_F(\theta) = M \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{P_N(n|\theta)} \left[ \frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta} \right]^2. \quad (\text{A.6})$$

**Détermination numérique de l'information de Fisher :** Cette expression de l'information de Fisher se prête bien à une détermination numérique de sa valeur. En effet, la valeur de la dérivée première  $\frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta}$  peut être déterminée au moyen d'un schéma numérique simple, en sélectionnant un pas de calcul  $\delta\theta$  adapté à la précision requise :

$$\frac{\partial P_N(n|\theta)}{\partial \theta} \simeq \frac{P_N(n|\theta + \delta\theta) - P_N(n|\theta)}{\delta\theta}. \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, l'information de Fisher peut être évaluée numériquement grâce à l'expression suivante :

$$I_F(\theta) = M \frac{1}{(\delta\theta)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[P_N(n|\theta + \delta\theta) - P_N(n|\theta)]^2}{P_N(n|\theta)}. \quad (\text{A.8})$$

Comme on peut le voir en observant cette expression, cette formulation numérique de l'information de Fisher présente l'avantage de pouvoir être mise en œuvre dès que l'on est en mesure d'évaluer numériquement la valeur  $P_N(n|\theta)$  pour toute valeur de  $n$  et du paramètre  $\theta$ , ce qui est en général réalisable si l'on possède une expression explicite de  $P_N(n|\theta)$ .

Pour implémenter en pratique cette méthode numérique, nous avons dans tous les cas tronqué la sommation à partir des termes dont la contribution devenait négligeable, et nous avons sélectionné un pas de calcul  $\delta\theta$  adapté pour que l'effet de la discrétisation de la dérivée soit négligeable au regard de la précision souhaitée sur la valeur de la BCR.

Notons enfin qu'une telle méthode numérique pourrait être adaptée au cas de lois de probabilité continues. Il faudrait dans ce cas remplacer la sommation de l'équation (A.8) par une intégration numérique.

# Annexe B

## Calculs annexes à la partie I

Dans cette annexe, nous détaillons dans un premier temps (section B.1) les calculs permettant d'obtenir les bornes de Cramer-Rao pour l'estimation de  $\beta = \mathcal{P}^2$  vues dans le chapitre 2. Dans un second temps (section B.2), nous détaillons comment les cumulants  $\mathcal{C}_k^I$  et les moments centrés  $\mathcal{M}_k^I$  ( $k \in [1; 4]$ ) de l'intensité lumineuse, ainsi que les cumulants  $\mathcal{M}_k^N$  dans le cas de mesures de photocomptage à faible flux, peuvent s'exprimer en fonction des cumulants  $\kappa_k$  de la loi normalisée  $f$  caractéristique du modèle de speckle. Ces relations nous permettront, dans la section suivante de cette annexe (section B.3), d'établir les expressions théoriques du biais et de la variance des estimateurs de  $\beta$  au sens des moments étudiés dans le chapitre 2. Enfin, dans la dernière section de cette annexe, nous calculerons la forme de la loi de photocomptage  $P_N(n)$  que l'on obtient lorsqu'on prend en compte l'influence du bruit de photon lors de l'acquisition d'une image d'intensité de speckle pleinement développé d'ordre 1.

### B.1 BCR pour l'estimation de $\mathcal{P}$ à partir d'une unique image

#### B.1.1 BCR en speckle pleinement développé

Lorsque le speckle est pleinement développé, la densité de probabilité (DDP) de l'intensité est donnée en équation (1.19). Cette DDP peut se réécrire sous la forme suivante

$$P_I(I) = \frac{2}{\mathcal{P}\mu_I} \exp\left(-\frac{2I}{(1-\mathcal{P}^2)\mu_I}\right) \sinh\left(\frac{2\mathcal{P}I}{(1-\mathcal{P}^2)\mu_I}\right), \quad (\text{B.1})$$

qui permettra de simplifier les calculs de la BCR détaillés ci-dessous.

Nous supposons pour calculer la BCR que l'estimation est réalisée à partir d'un échantillon statistiquement homogène  $\chi = \{I_1, \dots, I_M\}$  composé de  $M$  mesures d'intensité. Nous distinguons dans cette annexe deux situations :

- Dans le premier cas étudié ici, nous supposerons que l'intensité moyenne  $\mu_I$  n'est pas connue *a priori*. Comme nous l'avons exposé à la section 2.2.1.2, il est nécessaire dans ce cas de calculer la matrice d'information de Fisher, préalablement au calcul de la BCR.
- Dans le second cas, nous nous placerons dans la situation où  $\mu_I$  est connue



*a priori*, auquel cas l'expression de la BCR donnée en equation (2.11) est applicable. Nous verrons cependant que cette dernière peut être directement déduite des calculs menés pour le cas précédent à  $\mu_I$  inconnu, ce qui explique l'ordre adopté ici pour la présentation des calculs.

### B.1.1.1 Cas où $\mu_I$ n'est pas connue *a priori*

Dans le cas où  $\mu_I$  n'est pas connue *a priori*, la vraisemblance de l'observation de l'échantillon  $\chi = \{I_1, \dots, I_M\}$  est notée  $L(\chi; \mathcal{P}, \mu_I) = \prod_{j=1}^M P_I(I_j)$ . La logvraisemblance  $\ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I) = \ln L(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)$  peut se déduire aisément en remplaçant  $P_I(I_j)$  par son expression donnée à l'équation (B.1), ce qui permet d'écrire

$$\ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I) = \sum_{j=1}^M \left[ \ln \frac{2}{\mu_I} - \ln \mathcal{P} - \frac{2I_j}{(1 - \mathcal{P}^2)\mu_I} + \ln \left\{ \sinh \left[ \frac{2I_j \mathcal{P}}{(1 - \mathcal{P}^2)\mu_I} \right] \right\} \right]. \quad (\text{B.2})$$

Considérons alors un estimateur non biaisé  $\hat{\mathcal{P}}$  du degré de polarisation et un estimateur  $\hat{\mu}_I$  de l'intensité moyenne sans biais. La matrice d'information de Fisher qu'il nous faut calculer sera notée

$$\mathbf{J}_F(\mathcal{P}, \mu_I) = - \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mathcal{P}^2} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mathcal{P} \partial \mu_I} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mu_I \partial \mathcal{P}} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mu_I^2} \right\rangle \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

où  $J_{i,j}$  représente le terme de la matrice de Fisher situé en ligne  $i$  et colonne  $j$ .

Le terme diagonal supérieur  $J_{1,1}$  de la matrice de Fisher peut être calculé à partir de l'équation (B.2). En effet, on a

$$\frac{\partial \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mathcal{P}} = \sum_{j=1}^M \left\{ -\frac{1}{\mathcal{P}} - \frac{4I_j \mathcal{P}}{\mu_I (1 - \mathcal{P}^2)^2} + \frac{2I_j}{\mu_I} \frac{1 + \mathcal{P}^2}{(1 - \mathcal{P}^2)^2} \coth \left( \frac{2\mathcal{P}I_j}{\mu_I (1 - \mathcal{P}^2)} \right) \right\}, \quad (\text{B.4})$$

d'où l'on déduit grâce à une nouvelle dérivation par rapport à  $\mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mathcal{P}^2} &= \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{1}{\mathcal{P}^2} - \frac{4I_j(1 + 3\mathcal{P}^2)}{\mu_I (1 - \mathcal{P}^2)^3} \right]}_{A_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{4I_j \mathcal{P}(3 + \mathcal{P}^2)}{\mu_I (1 - \mathcal{P}^2)^3} \coth \left( \frac{2\mathcal{P}I_j}{\mu_I (1 - \mathcal{P}^2)} \right) \right]}_{A_2} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{4I_j^2 (1 + \mathcal{P}^2)^2}{\mu_I^2 (1 - \mathcal{P}^2)^4} \frac{1}{\sinh^2 \left( \frac{2\mathcal{P}I_j}{\mu_I (1 - \mathcal{P}^2)} \right)} \right]}_{A_3}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Pour calculer  $J_{1,1}$ , il nous faut évaluer la valeur moyenne de l'équation précédente. Cette évaluation est facilitée car les  $I_j$ ,  $j \in [1; M]$  sont supposés indépendants, et les  $M$  termes de la sommation contribueront de façon additive au résultat final. Par ailleurs, le calcul de la valeur moyenne peut être effectué en notant que  $\forall j \in [1; M]$ ,  $\langle I_j \rangle = \mu_I$ , et grâce au calcul des deux intégrales

suivantes :

$$\alpha \triangleq \int_0^\infty x \exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right] \cosh\left(\frac{\mathcal{P}x}{1-\mathcal{P}^2}\right) dx = 1 + \mathcal{P}^2, \quad (\text{B.6})$$

$$\varphi \triangleq \int_0^\infty x^2 \exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right] \frac{1}{\sinh\left(\frac{\mathcal{P}x}{1-\mathcal{P}^2}\right)} dx = \frac{(1-\mathcal{P}^2)^3}{2\mathcal{P}^3} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right), \quad (\text{B.7})$$

où  $\zeta(s, x)$  est la fonction *Zeta* de Riemann généralisée d'ordre  $s$  (définie à l'équation (2.16) à la section 2.2.1 et dans la référence [60]).

Le calcul de la valeur moyenne du premier terme  $A_1$  de l'équation (B.5) ne pose pas de difficulté :

$$\langle A_1 \rangle = \frac{M}{\mathcal{P}^2} - \frac{4M(1+3\mathcal{P}^2)}{(1-\mathcal{P}^2)^3}. \quad (\text{B.8})$$

Pour calculer la valeur moyenne du terme  $A_2$ , il s'avère judicieux d'utiliser un changement de variables en posant  $x_j \triangleq 2I_j/\mu_I$ . La densité de probabilité de la variable  $x_j$  se calcule aisément en remarquant que  $P_X(x) = P_I(I)/(dx/dI)$ , ce qui conduit directement à l'expression

$$P_X(x) = \frac{1}{\mathcal{P}} \exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right] \sinh \frac{x\mathcal{P}}{1-\mathcal{P}^2}. \quad (\text{B.9})$$

On calcule alors la valeur moyenne de  $A_2$  en écrivant :

$$\langle A_2 \rangle = \int_0^\infty A_2 P_I(I) dI = \frac{4M\mathcal{P}(3+\mathcal{P}^2)}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)^3} \int_0^\infty I \coth\left(\frac{2\mathcal{P}I}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)}\right) P_I(I) dI, \quad (\text{B.10})$$

soit, en utilisant le changement de variable proposé,

$$\begin{aligned} \langle A_2 \rangle &= \frac{2M\mathcal{P}(3+\mathcal{P}^2)}{(1-\mathcal{P}^2)^3} \int_0^\infty x \coth\left(\frac{\mathcal{P}x}{1-\mathcal{P}^2}\right) \frac{\exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right]}{\mathcal{P}} \sinh\left(\frac{\mathcal{P}x}{1-\mathcal{P}^2}\right) dx \\ &= \frac{2M(3+\mathcal{P}^2)}{(1-\mathcal{P}^2)^3} \underbrace{\int_0^\infty x \cosh\left(\frac{\mathcal{P}x}{1-\mathcal{P}^2}\right) \exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right] dx}_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

On reconnaît l'intégrale  $\alpha$  définie plus haut à l'équation (B.6), ce qui permet d'aboutir au résultat final :

$$\langle A_2 \rangle = \frac{2M(3+\mathcal{P}^2)(1+\mathcal{P}^2)}{(1-\mathcal{P}^2)^3}. \quad (\text{B.12})$$

En ce qui concerne le terme  $A_3$ , on a

$$\langle A_3 \rangle = \int_0^\infty A_3 P_I(I) dI = -\frac{4M}{\mu_I^2} \frac{(1+\mathcal{P}^2)^2}{(1-\mathcal{P}^2)^4} \int_0^\infty \frac{I^2}{\sinh^2\left(\frac{2\mathcal{P}I}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)}\right)} P_I(I) dI, \quad (\text{B.13})$$

qui se réécrit en utilisant le même changement de variable que précédemment, et

l'expression de  $P_X(x)$  donnée à l'équation (B.9),

$$\begin{aligned}\langle A_3 \rangle &= -\frac{M(1+\mathcal{P}^2)^2}{(1-\mathcal{P}^2)^4} \int_0^\infty \frac{x^2}{\sinh^2\left(\frac{\mathcal{P}x}{1-\mathcal{P}^2}\right)} P_X(x) dx \\ &= -\frac{M(1+\mathcal{P}^2)^2}{\mathcal{P}(1-\mathcal{P}^2)^4} \underbrace{\int_0^\infty x^2 \frac{\exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right]}{\sinh\left(\frac{\mathcal{P}x}{1-\mathcal{P}^2}\right)} dx}_\varphi,\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

dont on tire finalement, en utilisant le calcul de l'intégrale  $\varphi$  fourni à l'équation (B.7),

$$\langle A_3 \rangle = -\frac{M(1+\mathcal{P}^2)^2}{2\mathcal{P}^4(1-\mathcal{P}^2)} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right). \quad (\text{B.15})$$

En ajoutant les trois résultats précédents, on obtient pour finir l'expression du terme diagonal supérieur  $J_{1,1}$  de la matrice de Fisher,

$$J_{1,1} = -\left[\langle A_1 \rangle + \langle A_2 \rangle + \langle A_3 \rangle\right] = -M \frac{1+\mathcal{P}^2}{\mathcal{P}^2(1-\mathcal{P}^2)} \left[1 - \frac{1+\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)\right]. \quad (\text{B.16})$$

Pour calculer le second terme diagonal  $J_{2,2}$  de la matrice  $\mathbf{J}_F(\mathcal{P}, \mu_I)$ , il faut déterminer la dérivée seconde de la logvraisemblance par rapport à  $\mu_I$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mu_I^2} &= \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{1}{\mu_I^2} - \frac{4I_j}{\mu_I^3(1-\mathcal{P}^2)} \right]}_{B_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{4\mathcal{P}I_j}{\mu_I^3(1-\mathcal{P}^2)} \coth\left(\frac{2\mathcal{P}I_j}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)}\right) \right]}_{B_2} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{4\mathcal{P}^2 I_j^2}{\mu_I^4(1-\mathcal{P}^2)^2} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{2\mathcal{P}I_j}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)}\right)} \right]}_{B_3}.\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

On évalue alors la valeur moyenne des trois termes  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  grâce au changement de variable proposé ci-dessus  $x_j \triangleq 2I_j/\mu_I$ . Tout d'abord, la moyenne du terme  $B_1$  est rapidement calculée :

$$\langle B_1 \rangle = \frac{M}{\mu_I^2} - \frac{4M}{\mu_I^2(1-\mathcal{P}^2)}, \quad (\text{B.18})$$

quant au terme  $B_2$ , on a avec le changement de variable proposé,

$$\begin{aligned}\langle B_2 \rangle &= \int_0^\infty B_2 P_I(I) dI = \frac{4M\mathcal{P}}{\mu_I^3(1-\mathcal{P}^2)} \frac{\mu_I}{2\mathcal{P}} \underbrace{\int_0^\infty x \exp\left[-\frac{x}{(1-\mathcal{P}^2)}\right] \cosh\left(\frac{x\mathcal{P}}{1-\mathcal{P}^2}\right) dx}_\alpha \\ &= \frac{2M}{\mu_I^2(1-\mathcal{P}^2)} (1+\mathcal{P}^2).\end{aligned}\quad (\text{B.19})$$

Enfin, pour le troisième terme  $B_3$ , une démarche similaire permet d'écrire,

$$\begin{aligned} \langle B_3 \rangle &= \int_0^\infty B_3 P_I(I) dI = - \frac{4M\mathcal{P}^2}{\mu_I^4(1-\mathcal{P}^2)^2} \frac{\mu_I^2}{4\mathcal{P}} \underbrace{\int_0^\infty x^2 \exp\left[-\frac{x}{(1-\mathcal{P}^2)}\right] \frac{1}{\sinh\left(\frac{x\mathcal{P}}{1-\mathcal{P}^2}\right)} dx}_{\varphi} \\ &= - \frac{M(1-\mathcal{P}^2)}{2\mu_I^2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Ainsi, en ajoutant les trois résultats précédents, on obtient l'expression de  $J_{2,2}$ ,

$$J_{2,2} = - \left[ \langle B_1 \rangle + \langle B_2 \rangle + \langle B_3 \rangle \right] = \frac{M}{\mu_I^2} \left[ 1 + \frac{1-\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right) \right]. \quad (\text{B.21})$$

Il reste encore à calculer les termes antidiagonaux ( $J_{1,2} = J_{2,1}$ ) de  $\mathbf{J}_F(\mathcal{P}, \mu_I)$ . Ces deux termes s'obtiennent en dérivant l'équation (B.4) par rapport à  $\mu_I$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P}, \mu_I)}{\partial \mu_I \partial \mathcal{P}} &= \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{4I_j \mathcal{P}}{\mu_I^2(1-\mathcal{P}^2)^2} \right]}_{C_1} - \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{2(1+\mathcal{P}^2)I_j}{\mu_I^2(1-\mathcal{P}^2)^2} \coth\left(\frac{2\mathcal{P}I_j}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)}\right) \right]}_{C_2} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{j=1}^M \left[ \frac{4\mathcal{P}(1+\mathcal{P}^2)I_j^2}{\mu_I^3(1-\mathcal{P}^2)^3} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{2\mathcal{P}I_j}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)}\right)} \right]}_{C_3}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

La valeur moyenne du terme  $C_1$  se calcule facilement,

$$\langle C_1 \rangle = \frac{4M\mathcal{P}}{\mu_I(1-\mathcal{P}^2)^2}. \quad (\text{B.23})$$

En utilisant toujours le même changement de variable, on parvient à calculer la valeur moyenne de  $C_2$ ,

$$\langle C_2 \rangle = \int_0^\infty C_2 P_I(I) dI = - \frac{2M(1+\mathcal{P}^2)}{\mu_I^2(1-\mathcal{P}^2)^2} \frac{\mu_I}{2\mathcal{P}} \underbrace{\int_0^\infty x \cosh\left(\frac{\mathcal{P}x}{(1-\mathcal{P}^2)}\right) \exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right] dx}_{\varphi}, \quad (\text{B.24})$$

et en remplaçant l'intégrale  $\varphi$  par son expression déterminée en équation (B.7), on obtient

$$\langle C_2 \rangle = - \frac{M(1+\mathcal{P}^2)^2}{\mu_I \mathcal{P} (1-\mathcal{P}^2)^2}. \quad (\text{B.25})$$

En ce qui concerne la valeur moyenne de  $C_3$ , on peut écrire

$$\langle C_3 \rangle = \int_0^\infty C_3 P_I(I) dI = \frac{4M\mathcal{P}(1+\mathcal{P}^2)}{\mu_I^3(1-\mathcal{P}^2)^3} \frac{\mu_I^2}{4\mathcal{P}} \underbrace{\int_0^\infty x^2 \frac{\exp\left[-\frac{x}{1-\mathcal{P}^2}\right]}{\sinh\left(\frac{x\mathcal{P}}{1-\mathcal{P}^2}\right)} dx}_{\alpha}, \quad (\text{B.26})$$

qui s'obtient finalement grâce à l'intégrale  $\alpha$  calculée en équation (B.6),

$$\langle C_3 \rangle = \frac{M(1 + \mathcal{P}^2)}{\mu_I} \frac{1}{2\mathcal{P}^3} \zeta\left(3, \frac{1 + \mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right). \quad (\text{B.27})$$

Enfin, en ajoutant les trois résultats précédents, on obtient l'expression de  $J_{1,2}$ ,

$$J_{1,2} = J_{2,1} = -\left[\langle C_1 \rangle + \langle C_2 \rangle + \langle C_3 \rangle\right] = \frac{M}{\mu_I \mathcal{P}} \left[1 - \frac{1 + \mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1 + \mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)\right]. \quad (\text{B.28})$$

À partir des équations (B.16), (B.21) et (B.28), on exprime enfin la matrice de Fisher  $\mathbf{J}_F(\mathcal{P}, \mu_I)$  :

$$\mathbf{J}_F(\mathcal{P}, \mu_I) = M \begin{bmatrix} -\frac{1+\mathcal{P}^2}{\mathcal{P}^2(1-\mathcal{P}^2)} \left[1 - \frac{1+\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)\right] & \frac{1}{\mu_I \mathcal{P}} \left[1 - \frac{1+\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)\right] \\ \frac{1}{\mu_I \mathcal{P}} \left[1 - \frac{1+\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)\right] & \frac{1}{\mu_I^2} \left[1 + \frac{1-\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)\right] \end{bmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Pour appliquer le théorème 2.1, il nous faut encore inverser cette matrice. Afin d'alléger les notations, on propose de poser

$$\mathbf{J}_F(\mathcal{P}, \mu_I) = M \begin{pmatrix} K_1(1 - D) & K_2(1 - D) \\ K_2(1 - D) & K_3(1 + E) \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

avec  $K_1 \triangleq -\frac{1+\mathcal{P}^2}{\mathcal{P}^2(1-\mathcal{P}^2)}$ ,  $K_2 \triangleq \frac{1}{\mu_I \mathcal{P}}$ ,  $K_3 \triangleq \frac{1}{\mu_I^2}$  et  $D \triangleq \frac{1+\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)$  et  $E \triangleq \frac{1-\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right)$ . Le déterminant de la matrice d'information de Fisher s'écrit alors

$$\det[\mathbf{J}_F(\mathcal{P}, \mu_I)] = M^2(1 - D) \underbrace{(K_1 K_3(1 + E) - K_2^2(1 - D))}_W, \quad (\text{B.31})$$

avec

$$W = K_1 K_3(1 + E) - K_2^2(1 - D) = \frac{-2}{\mu_I^2 \mathcal{P}^2(1 - \mathcal{P}^2)}, \quad (\text{B.32})$$

et la matrice inverse peut donc se calculer par

$$\mathbf{J}_F^{-1}(\mathcal{P}, \mu_I) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \frac{K_3(1+E)}{\det[\mathbf{J}_{F_M}(\mathcal{P}, \mu_I)]} & \frac{K_2(D-1)}{\det[\mathbf{J}_{F_M}(\mathcal{P}, \mu_I)]} \\ \frac{K_2(D-1)}{\det[\mathbf{J}_{F_M}(\mathcal{P}, \mu_I)]} & \frac{K_1(1-D)}{\det[\mathbf{J}_{F_M}(\mathcal{P}, \mu_I)]} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \frac{K_3(1+E)}{(1-D)W} & \frac{-K_2}{W} \\ \frac{-K_2}{W} & \frac{K_1}{W} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.33})$$

En remplaçant finalement les termes  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $D$  et  $E$  par leurs expressions fournies ci-dessus, on obtient la matrice inverse suivante :

$$\mathbf{J}_F^{-1} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{P}^2(1-\mathcal{P}^2)}{2} \frac{\left(\frac{1-\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right) + 1\right)}{\left(\frac{1+\mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right) - 1\right)} & \frac{\mu_I \mathcal{P}(1-\mathcal{P}^2)}{2} \\ \frac{\mu_I \mathcal{P}(1-\mathcal{P}^2)}{2} & \frac{\mu_I^2(1+\mathcal{P}^2)}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

On obtient alors la borne de Cramer-Rao pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  en appliquant l'inégalité (2.19) avec un vecteur  $\mathbf{u}_1 = [1 \ 0]$ , ce qui permet d'écrire

$$\text{var}(\hat{\mathcal{P}}) \geq \mathbf{BCR}^1(\mathcal{P}) = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{J}_F^{-1}(\mathcal{P}, \mu_I) \cdot \mathbf{u}_1^\dagger, \quad (\text{B.35})$$

et de donner finalement l'expression de la BCR pour l'estimation du degré de polarisation à partir d'une unique image d'intensité de speckle, lorsque la valeur moyenne de l'intensité n'est pas supposée connue *a priori*. Cette borne sera notée  $\mathbf{BCR}^1(\mathcal{P})$  et s'écrit

$$\boxed{\mathbf{BCR}^1(\mathcal{P}) = \frac{\mathcal{P}^2(1 - \mathcal{P}^2)}{2M} \frac{[(1 - \mathcal{P}^2)\zeta(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}) + 2\mathcal{P}^2]}{[(1 + \mathcal{P}^2)\zeta(3, \frac{1+\mathcal{P}}{2\mathcal{P}}) - 2\mathcal{P}^2]}.} \quad (\text{B.36})$$

De façon similaire, on peut obtenir la borne de Cramer-Rao pour l'estimation de l'intensité moyenne en appliquant simplement l'inégalité (2.19) avec le vecteur  $\mathbf{u}_2 = [0 \ 1]$ , qui ce fournit le résultat suivant :

$$\mathbf{BCR}^1(\mu_I) = \frac{\mu_I^2(1 + \mathcal{P}^2)}{2M}. \quad (\text{B.37})$$

### B.1.1.2 Cas où $\mu_I$ est connue *a priori*

Dans le cas où l'intensité moyenne  $\mu_I$  est considérée comme un paramètre connu préalablement à l'estimation du degré de polarisation, il n'y a plus lieu de calculer la matrice de Fisher précédente puisque la vraisemblance de l'observation  $\chi$  est une fonction de la seule variable  $\mathcal{P}$ . L'information de Fisher est alors une grandeur scalaire définie par,

$$I_F(\mathcal{P}) = -\left\langle \frac{\partial^2 \ell(\chi; \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}^2} \right\rangle, \quad (\text{B.38})$$

où l'on reconnaît le terme  $J_{1,1}$  de la matrice de Fisher calculée à l'équation (B.29). La BCR étant définie dans le cas scalaire comme l'inverse de l'information de Fisher, nous obtenons ainsi la BCR, notée  $BCR_{\mu_I}^1(\mathcal{P})$ , pour l'estimation de  $\mathcal{P}$  à partir d'une image dont l'intensité moyenne  $\mu_I$  est connue *a priori* :

$$\boxed{BCR_{\mu_I}^1(\mathcal{P}) = -\frac{\mathcal{P}^2(1 - \mathcal{P}^2)}{M(1 + \mathcal{P}^2)} \left[ 1 - \frac{1 + \mathcal{P}^2}{2\mathcal{P}^2} \zeta\left(3, \frac{1 + \mathcal{P}}{2\mathcal{P}}\right) \right]^{-1}.} \quad (\text{B.39})$$

## B.1.2 BCR approchée pour des speckles d'ordres élevés

Nous calculons ici la BCR lorsque la DDP de l'intensité peut être approchée, pour des ordres de speckle élevés, par une loi gaussienne de moyenne  $\mu_I$  et variance  $\sigma^2 = \mu_I^2 \frac{(1+\mathcal{P}^2)}{2L}$  dont la DDP est donnée en équation (2.24), que nous rappelons ici :

$$P_I(I) = \sqrt{\frac{L}{\pi(1 + \mathcal{P}^2)\mu_I}} \exp\left[-\frac{L(I - \mu_I)^2}{(1 + \mathcal{P}^2)\mu_I^2}\right]. \quad (\text{B.40})$$

En considérant un échantillon de mesure  $\chi = \{I_1, \dots, I_M\}$  de taille  $M$ , on peut calculer la logvraisemblance de l'observation de  $\chi$ , avec  $\beta = \mathcal{P}^2$ ,

$$\ell(\chi; \beta) = \sum_{j=1}^M \left[ -\frac{1}{2} \ln(1 + \beta) + \frac{1}{2} \ln \frac{L}{\pi \mu_I^2} - \frac{L(I_j - \mu_I)^2}{\mu_I^2(1 + \beta)} \right], \quad (\text{B.41})$$

dont on calcule aisément la dérivée seconde par rapport à  $\beta$  :

$$\frac{\partial^2 \ell(\chi; \beta)}{\partial \beta^2} = \sum_{j=1}^M \left[ \frac{1}{2(1 + \beta)^2} - \frac{2L}{(1 + \beta)^3 \mu_I^2} (I_j - \mu_I)^2 \right]. \quad (\text{B.42})$$

Pour calculer l'information de Fisher, il faut évaluer la valeur moyenne de l'équation précédente, ce qui est aisé en remarquant que  $\forall j$ ,  $\text{var}(I_j) = \langle (I_j - \mu_I)^2 \rangle = (1 + \beta) \mu_I^2 / 2L$ . On obtient alors l'information de Fisher

$$I_F^{gauss}(\beta) = -\frac{M}{2(1 + \beta)^2} + \frac{2ML}{(1 + \beta)^3 \mu_I^2} \text{var}(I) = \frac{M}{2(1 + \beta)^2}, \quad (\text{B.43})$$

et la BCR peut donc finalement s'écrire,

$$\boxed{BCR^{gauss}(\beta) = 2 \frac{(1 + \beta)^2}{M}}. \quad (\text{B.44})$$

## B.2 Expression des moments centrés $\mathcal{M}_k^I$ et $\mathcal{M}_k^N$ en fonction des cumulants $\kappa_k$ de la loi normalisée $f$

Nous établissons ici les relations qui permettent d'exprimer les quatre premiers moments centrés  $\mathcal{M}_k^I$  de l'intensité  $I$  en fonction des cumulants  $\kappa_k$  de la loi normalisée  $f$ , lorsque les hypothèses établies en section 2.1.1 sont vérifiées. Ces relations vont nous permettre d'exprimer les biais et variances théoriques des estimateurs de  $\beta = \mathcal{P}^2$  au sens des moments en fonction des  $\kappa_k$ , caractéristiques du modèle de speckle considéré.

Dans un second temps, nous établirons ces relations dans le cas où le bruit de photon est pris en compte : nous pourrons alors exprimer les moments centrés  $\mathcal{M}_k^N$  du photocomptage en fonction des  $\kappa_k$ .

### B.2.1 Relations entre les cumulants $\mathcal{C}_k^I$ et les $\kappa_k$

Établissons tout d'abord les relations entre les cumulants  $\mathcal{C}_k^I$  et les  $\kappa_k$  pour  $k \in [1; 4]$ . Celles-ci peuvent être déduites de la relation générale établie à l'équation (2.7). Pour  $k = 1$ , on a  $\kappa_1 = 1$  car la loi  $f$  est normalisée de moyenne unitaire, et d'après la relation (2.7),

$$\mathcal{C}_1^I = \kappa_1 [(1 + \mathcal{P}) + (1 - \mathcal{P})] \frac{\mu_I}{2} = \mu_I. \quad (\text{B.45})$$

Pour  $k = 2$ , on retrouve le résultat de l'équation (2.8) :

$$\mathcal{C}_2^I = \kappa_2 [(1 + \mathcal{P})^2 + (1 - \mathcal{P})^2] \frac{\mu_I^2}{2^2} = \kappa_2 \frac{1 + \mathcal{P}^2}{2} \mu_I^2 = \kappa_2 \frac{1 + \beta}{2} \mu_I^2. \quad (\text{B.46})$$

Lorsque  $k = 3$ , on obtient

$$\mathcal{C}_3^I = \kappa_3 [(1 + \mathcal{P})^3 + (1 - \mathcal{P})^3] \frac{\mu_I^3}{2^3} = \kappa_3 [2 + 6\mathcal{P}^2] \frac{\mu_I^3}{8} = \kappa_3 \frac{1 + 3\beta}{4} \mu_I^3. \quad (\text{B.47})$$

Enfin, pour  $k = 4$ ,

$$\mathcal{C}_4^I = \kappa_4 [(1 + \mathcal{P})^4 + (1 - \mathcal{P})^4] \frac{\mu_I^4}{2^4} = \kappa_4 [2 + 12\mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P}^4] \frac{\mu_I^4}{16} = \kappa_4 \frac{1 + 6\beta + \beta^2}{8} \mu_I^4. \quad (\text{B.48})$$

### B.2.2 Relations entre les $\mathcal{M}_j^I$ et les $\kappa_j$

Dans la section suivante de cette annexe, nous calculerons les expressions théoriques du biais et de la variance des estimateurs de  $\beta$  au sens des moments (en l'absence de bruit de photon) en fonction des moments centrés  $\mathcal{M}_j^I$ ,  $j \in [2; 4]$  de l'intensité  $I$ . Pour pouvoir réécrire ces résultats en fonction des  $\kappa_j$ ,  $j \in [2; 4]$ , nous pouvons exprimer les  $\mathcal{M}_j^I$  en fonction des  $\kappa_j$  en utilisant les relations suivantes entre les moments centrés et les cumulants [35] :

$$\mathcal{M}_1^I = \mathcal{C}_1^I ; \quad \mathcal{M}_2^I = \mathcal{C}_2^I ; \quad \mathcal{M}_3^I = \mathcal{C}_3^I ; \quad \mathcal{M}_4^I = \mathcal{C}_4^I + 3(\mathcal{C}_2^I)^2. \quad (\text{B.49})$$

On en déduit alors, en utilisant les relations (B.46) à (B.48)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^I &= \kappa_2 \frac{1 + \beta}{2} \mu_I^2 ; & \mathcal{M}_3^I &= \kappa_3 \frac{1 + 3\beta}{4} \mu_I^3 ; \\ \mathcal{M}_4^I &= \kappa_4 \frac{1 + 6\beta + \beta^2}{8} \mu_I^4 + 3(\mathcal{M}_2^I)^2 & & \\ &= \frac{\mu_I^4}{8} \left[ (\kappa_4 + 6\kappa_2^2) + 6(\kappa_4 + 2\kappa_2^2)\beta + (\kappa_4 + 6\kappa_2^2)\beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

### B.2.3 Relations entre les $\mathcal{M}_j^N$ et les $\kappa_j$

Dans la section suivante, nous établirons également les expressions du biais et de la variance des estimateurs au sens des moments lorsque le bruit de photon, dû à l'acquisition des signaux à très faible niveau d'intensité, est pris en compte. Ces grandeurs s'exprimeront dans ce cas en fonction des moments centrés des photocomptages  $N$  et non plus de l'intensité  $I$ . Comme précédemment, pour pouvoir réécrire le biais et la variance des estimateurs en fonction des cumulants  $\kappa_j$  de la loi normalisée  $f$ , il est donc nécessaire de calculer l'expression des moments centrés  $\mathcal{M}_j^N$ ,  $j \in [2; 4]$  en fonction des  $\kappa_j$ .

Nous allons dans un premier temps exprimer les moments centrés  $\mathcal{M}_j^N$ ,  $j \in [2; 4]$  du photocomptage ( $N$ ) en fonction des moments centrés  $\mathcal{M}_j^I$  de l'intensité ( $I$ ). Lorsque le modèle simplifié de photodétection présenté en section 2.5 est valide et que l'efficacité quantique est unitaire  $\eta = 1$ , il est possible pour cela d'utiliser la propriété suivante, établie dans la référence [72] :



**Propriété B.1** Le moment factoriel d'ordre  $k \geq 1$ , de la loi de photocomptage  $P_N(n)$ , noté  $\mathcal{F}_k^N$  et défini par

$$\mathcal{F}_k^N \triangleq \langle N(N-1) \times \dots \times (N-k+1) \rangle, \quad (\text{B.51})$$

est égal au moment d'ordre  $k$  de la loi continue  $P_I(I)$ , c'est-à-dire

$$\forall k \geq 1, \quad \mathcal{F}_k^N = \langle I^k \rangle. \quad (\text{B.52})$$

En utilisant cette propriété, on peut alors exprimer les moments factoriels  $\mathcal{F}_j^N$ ,  $j \in [2; 4]$  du photocomptage  $N$  en fonction des moments centrés  $\mathcal{M}_j^I$  de l'intensité  $I$  en écrivant [35] :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^N = \langle I^2 \rangle &= \mathcal{M}_2^I + \mu_I^2, \\ \mathcal{F}_3^N = \langle I^3 \rangle &= \mathcal{M}_3^I + 3\mathcal{M}_2^I \mu_I + \mu_I^3, \\ \mathcal{F}_4^N = \langle I^4 \rangle &= \mathcal{M}_4^I + 4\mathcal{M}_3^I \mu_I + 6\mathcal{M}_2^I \mu_I^2 + \mu_I^4. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Enfin, on peut calculer les moments centrés  $\mathcal{M}_k^N$  de la variable aléatoire discrète  $N$  en fonction de ses moments factoriels  $\mathcal{F}_k^N$ ,  $k \in [1; 4]$ , en utilisant les relations données dans la référence [35]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^N &= \mathcal{F}_2^N - \mu_N^2 + \mu_N, \\ \mathcal{M}_3^N &= \mathcal{F}_3^N + 3\mathcal{F}_3^N(1 - \mu_N) + 2\mu_N^3 - 3\mu_N^2 + \mu_N, \\ \mathcal{M}_4^N &= \mathcal{F}_4^N + 2\mathcal{F}_3^N(3 - 2\mu_N) + \mathcal{F}_2^N(7 - 12\mu_N + 6\mu_N^2) \\ &\quad - 3\mu_N^4 + 6\mu_N^3 - 4\mu_N^2 + \mu_N. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

En combinant finalement les relations précédentes (B.53) et (B.54) et après une simplification fastidieuse que nous avons vérifiée à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on peut exprimer les moments centrés  $\mathcal{M}_j^N$  du photocomptage  $N$  en fonction des moments centrés  $\mathcal{M}_j^I$ ,  $j \in [2; 4]$  de l'intensité  $I$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^N &= \mathcal{M}_2^I + \mu_I, \\ \mathcal{M}_3^N &= \mathcal{M}_3^I + 3\mathcal{M}_2^I + \mu_I, \\ \mathcal{M}_4^N &= \mathcal{M}_4^I + 6(\mathcal{M}_3^I + \mathcal{M}_2^I \mu_I) + (7\mathcal{M}_2^I + 3\mu_I^2) + \mu_I. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Il est désormais possible, en utilisant les relations (B.50) établies à la section précédente de cette annexe, d'exprimer les moments centrés  $\mathcal{M}_j^N$ ,  $j \in [2; 4]$  du photocomptage en fonction des cumulants  $\kappa_j$ ,  $j \in [2; 4]$  de la densité de probabilité normalisée  $f$ . Après un calcul fastidieux vérifié à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on peut enfin établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^N &= \frac{\mu_I}{2} \left\{ 2 + \kappa_2 \mu_I (1 + \beta) \right\}, \\ \mathcal{M}_3^N &= \frac{\mu_I}{4} \left\{ 4 + 6\kappa_2 \mu_I (1 + \beta) + \kappa_3 \mu_I^2 (1 + 3\beta) \right\}, \\ \mathcal{M}_4^N &= \frac{\mu_I}{8} \left\{ 8 + \mu_I [24 + 4\kappa_2 (7 + 6\mu_I) (1 + \beta) + 6\kappa_2^2 \mu_I^2 (1 + \beta)^2 \right. \\ &\quad \left. + 12\kappa_3 \mu_I (1 + 3\beta) + \kappa_4 \mu_I^2 (1 + 6\beta + \beta^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

## B.3 Biais et variance des estimateurs de $\beta$ au sens des moments

### B.3.1 Principe général du calcul

Nous présentons dans cette annexe la technique de calcul utilisée dans ces travaux de thèse pour évaluer le biais et la variance d'un estimateur d'un paramètre  $\theta$  au sens des moments. Nous supposons ainsi que l'estimation de  $\theta$  repose sur la mesure d'un échantillon  $\chi = \{x_1, \dots, x_M\}$ , composé de  $M$  mesures indépendantes d'une grandeur  $X$  (intensité, photocomptage, etc.) considérée comme une variable aléatoire et décrite par une densité de probabilité  $P_X(x)$ . Comme cela sera le cas des estimateurs étudiés dans cette annexe, nous supposons ici que la valeur  $\theta$  peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle, en fonction des deux premiers moments de la variable  $X$ , ou de façon équivalente, en fonction de la moyenne  $\mu = \langle X \rangle$  et de la variance  $\text{var}(X)$ . Notons que cette variance s'identifie au **second moment centré** noté  $\mathcal{M}_2^X \triangleq \langle (X - \mu)^2 \rangle = \text{var}(X)$ , ce qui nous permet d'exprimer la variable  $\theta$  sous la forme

$$\theta = F(\mu, \mathcal{M}_2^X), \quad (\text{B.57})$$

où  $F$  représente une fraction rationnelle. L'estimateur au sens des moments, noté génériquement  $\hat{\theta}$ , auquel on s'intéresse consiste donc à remplacer les valeurs de la moyenne ( $\mu$ ) et de la variance ( $\text{var}(X) = \mathcal{M}_2^X$ ) de  $X$ , par leurs valeurs estimées respectives, notées génériquement  $\hat{\mu}$  et  $\hat{S}$ , soit :

$$\hat{\theta} \triangleq F(\hat{\mu}, \hat{S}). \quad (\text{B.58})$$

En pratique, on s'intéressera par la suite à deux situations distinctes :

- soit la valeur moyenne  $\mu$  est supposée connue *a priori*, et la variance est estimée avec l'estimateur empirique de la variance à moyenne connue [133]

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^2 - \mu^2, \quad (\text{B.59})$$

- soit la valeur moyenne  $\mu$  est estimée avec l'estimateur empirique  $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^M x_i / M$  et on utilise alors l'estimateur empirique de la variance à moyenne inconnue [133]

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^2 - (\hat{\mu})^2. \quad (\text{B.60})$$

Dans les deux cas, le principe de calcul du biais et de la variance de  $\hat{\theta}$  repose sur le développement de la fonction  $F(\hat{\mu}, \hat{S})$  au premier ordre autour des valeurs moyennes  $\langle \hat{\mu} \rangle$  et  $\langle \hat{S} \rangle$ ,

$$\hat{\theta} = F(\hat{\mu}, \hat{S}) \simeq F(\langle \hat{\mu} \rangle, \langle \hat{S} \rangle) + \frac{\partial F}{\partial \hat{\mu}} \delta \hat{\mu} + \frac{\partial F}{\partial \hat{S}} \delta \hat{S}, \quad (\text{B.61})$$

avec

$$\delta \hat{\mu} \triangleq \hat{\mu} - \langle \hat{\mu} \rangle \quad \text{et} \quad \delta \hat{S} \triangleq \hat{S} - \langle \hat{S} \rangle, \quad (\text{B.62})$$

et où on l'on a noté pour simplifier l'écriture

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{\mu}} \triangleq \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} [F(\langle \hat{\mu} \rangle, \langle \hat{S} \rangle)] \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{S}} \triangleq \frac{\partial}{\partial \hat{S}} [F(\langle \hat{\mu} \rangle, \langle \hat{S} \rangle)]. \quad (\text{B.63})$$

Grâce à cette approximation, il devient aisé d'évaluer le biais de l'estimateur  $\hat{\theta}$  en calculant la valeur moyenne de l'équation (B.61). En effet, par définition  $\langle \delta \hat{\mu} \rangle = \langle \delta \hat{S} \rangle = 0$ , et on a donc

$$\langle \hat{\theta} - \theta \rangle \simeq F(\langle \hat{\mu} \rangle, \langle \hat{S} \rangle) - \theta. \quad (\text{B.64})$$

De même, on montre facilement que la variance de l'estimateur  $\hat{\theta}$  peut s'écrire, grâce à ce développement limité,

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \langle [\hat{\theta} - \langle \hat{\theta} \rangle]^2 \rangle \simeq \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{\mu}} \right)^2 \langle (\delta \hat{\mu})^2 \rangle + \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{S}} \right)^2 \langle (\delta \hat{S})^2 \rangle + 2 \frac{\partial F}{\partial \hat{\mu}} \frac{\partial F}{\partial \hat{S}} \langle \delta \hat{\mu} \delta \hat{S} \rangle. \quad (\text{B.65})$$

On voit ainsi que la méthode proposée pour caractériser le biais et la variance d'un estimateur des moments nécessite de connaître les valeurs moyennes  $\langle \hat{\mu} \rangle$  et  $\langle \hat{S} \rangle$ , les variances  $\langle (\delta \hat{\mu})^2 \rangle$  et  $\langle (\delta \hat{S})^2 \rangle$  et enfin la covariance  $\langle \delta \hat{\mu} \delta \hat{S} \rangle$  des estimateurs empiriques des deux premiers moments. Les expressions de ces différentes valeurs sont tout d'abord rappelées ci-dessous, puis la méthode présentée ici dans le cas général sera appliquée à l'estimation du degré de polarisation pour caractériser les estimateurs étudiés dans la première partie de ce manuscrit.

**Premier cas à moyenne connue :** Dans le cas où la moyenne est supposée connue ( $\hat{\mu} = \mu$ ), on a bien sûr  $\delta \hat{\mu} = 0$ . Les seules grandeurs à calculer sont donc ici la valeur moyenne et la variance de l'estimateur  $\hat{S}_1$ . On montre d'une part

$$\langle \hat{S}_1 \rangle = \left\langle \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \mu)^2 \right\rangle = \langle (X - \mu)^2 \rangle = \mathcal{M}_2^X, \quad (\text{B.66})$$

et d'autre part, la variance d'un tel estimateur peut s'écrire [133],

$$\langle (\delta \hat{S}_1)^2 \rangle = \text{var}(\hat{S}_1) = \text{var}\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \mu)^2\right). \quad (\text{B.67})$$

Grâce à l'hypothèse d'indépendance des  $X_i$ , l'équation précédente peut se réécrire

$$\langle (\delta \hat{S}_1)^2 \rangle = \frac{\text{var}[(X - \mu)^2]}{M} = \frac{\langle (X - \mu)^4 \rangle - \langle (X - \mu)^2 \rangle^2}{M}, \quad (\text{B.68})$$

où l'on reconnaît les moments centrés d'ordre deux  $\mathcal{M}_2^X = \langle (X - \mu)^2 \rangle$  et quatre  $\mathcal{M}_4^X = \langle (X - \mu)^4 \rangle$ . On obtient alors finalement

$$\langle (\delta \hat{S}_1)^2 \rangle = \frac{\mathcal{M}_4^X - (\mathcal{M}_2^X)^2}{M}. \quad (\text{B.69})$$

**Second cas à moyenne inconnue :** Lorsque la moyenne est inconnue, il nous faut alors calculer la moyenne et la variance de l'estimateur empirique de

la valeur moyenne  $\hat{\mu}$ . Il est bien connu [110] que cet estimateur est non biaisé ( $\langle \hat{\mu} \rangle = \mu$ ), et que sa variance vaut (voir [110] page 188),

$$\langle (\delta \hat{\mu})^2 \rangle = \text{var}(\hat{\mu}) = \frac{\mathcal{M}_2^X}{M}. \quad (\text{B.70})$$

En ce qui concerne l'estimateur de la variance empirique  $\hat{S}_2$ , nous choisissons de ne pas détailler ici les calculs longs et fastidieux qui conduisent aux résultats connus qui suivent. On peut montrer en effet (voir par exemple les références [133], p. 270 ou encore [110], p. 189) que l'estimateur  $\hat{S}_2$  est asymptotiquement non biaisé,

$$\langle \hat{S}_2 \rangle = \frac{M-1}{M} \mathcal{M}_2^X, \quad (\text{B.71})$$

et que sa variance peut s'écrire

$$\langle (\delta \hat{S}_2)^2 \rangle = \text{var}(\hat{S}_2) = \frac{\mathcal{M}_4^X - (\mathcal{M}_2^X)^2}{M} - \frac{2\mathcal{M}_4^X - 4(\mathcal{M}_2^X)^2}{M^2} + \frac{\mathcal{M}_4^X - 3(\mathcal{M}_2^X)^2}{M^3}. \quad (\text{B.72})$$

Le calcul de la covariance de ces deux estimateurs  $\langle \delta \hat{\mu} \delta \hat{S}_2 \rangle$  figure dans l'ouvrage de Saporta [133], page 271, qui démontre que

$$\langle \delta \hat{\mu} \delta \hat{S}_2 \rangle = \langle \hat{\mu} \hat{S}_2 \rangle - \langle \hat{\mu} \rangle \langle \hat{S}_2 \rangle = \frac{M-1}{M^2} \mathcal{M}_3^X. \quad (\text{B.73})$$

### B.3.2 Application aux estimateurs $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$

La méthode générale de calcul du biais et de la variance d'un estimateur au sens des moments présentée ci-dessus peut maintenant être appliquée au cas particulier de l'estimation du carré du degré de polarisation  $\beta = \mathcal{P}^2$ . En effet, les équations définissant les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  peuvent bien être mises sous la forme  $\hat{\beta}_1 = F(\mu_I, \hat{S}_1)$  (voir équation (2.28)), et  $\hat{\beta}_2 = F(\hat{\mu}_I, \hat{S}_2)$  (voir équation (2.29)) avec

$$F(x, y) = \frac{2y}{\kappa_2 x^2} - 1. \quad (\text{B.74})$$

Par la suite,  $\hat{\mu}_I$  désignera l'estimateur empirique de l'intensité moyenne  $\mu_I$  et  $\hat{S}_2$  l'estimateur empirique de sa variance  $\text{var}(I) = \mathcal{M}_2^I$ , dont la valeur dépend du carré du degré de polarisation  $\beta$ , par l'intermédiaire de l'équation (2.8) que nous rappelons ici :

$$\text{var}(I) = \mathcal{M}_2^I = \kappa_2 \left[ 1 + \beta \right] \frac{\mu_I^2}{2}. \quad (\text{B.75})$$

#### B.3.2.1 Cas de l'estimateur $\hat{\beta}_1$ à moyenne connue :

En appliquant le résultat de l'équation (B.64), nous pouvons écrire le biais de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  sous la forme

$$\langle \hat{\beta}_1 - \beta \rangle \simeq F(\mu_I, \langle \hat{S}_1 \rangle) - \beta. \quad (\text{B.76})$$

En remplaçant alors  $\langle \hat{S}_1 \rangle$  par sa valeur donnée à l'équation (B.66) et en utilisant l'expression de  $\mathcal{M}_2^I$  rappelée ci-dessus, on montre alors que le biais de l'estimateur

$\hat{\beta}_1$  est nul,

$$\langle \hat{\beta}_1 - \beta \rangle \simeq F(\mu_I, \mathcal{M}_2^I) - \beta = \frac{2\mathcal{M}_2^I}{\kappa_2 \mu_I^2} - 1 - \beta = 0, \quad (\text{B.77})$$

où la forme de la fraction rationnelle  $F$  est donnée en équation (B.74).

En ce qui concerne la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$ , on applique le résultat de l'équation (B.65) qui prend ici une forme particulièrement simple puisque  $\delta\mu_I = 0$  (intensité moyenne supposée connue). On obtient en effet dans ce cas

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \langle [\hat{\beta}_1 - \langle \hat{\beta}_1 \rangle]^2 \rangle \simeq \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{S}_1} \right)^2 \langle (\delta \hat{S}_1)^2 \rangle. \quad (\text{B.78})$$

À partir de l'expression de la fraction rationnelle  $F(x, y)$  donnée en équation (B.74), on peut calculer

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{S}_1} = \frac{\partial}{\partial \hat{S}_1} \left[ F(\mu_I, \langle \hat{S}_1 \rangle) \right] = \frac{2}{\kappa_2 \mu_I^2}. \quad (\text{B.79})$$

Finalement, en remplaçant  $\langle \hat{S}_1 \rangle$  et  $\langle (\delta \hat{S}_1)^2 \rangle$  dans l'équation (B.78) par leurs valeurs données respectivement aux équations (B.66) et (B.69), on obtient alors l'expression de la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  en fonction des moments centrés de l'intensité  $\mathcal{M}_k^I$ ,  $k \in [2; 4]$  :

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) \simeq \frac{4}{\kappa_2^2 \mu_I^4} \frac{\mathcal{M}_4^I - (\mathcal{M}_2^I)^2}{M}. \quad (\text{B.80})$$

Nous souhaitons exprimer cette variance en fonction des cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$  de la loi normalisée  $f$  caractéristique du modèle de speckle considéré. Pour cela, il est possible d'utiliser les relations que nous avons établies en équation (B.50) de l'annexe B.2.2 qui permettent d'exprimer les moments centrés  $\mathcal{M}_k^I$  en fonction des cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$ . En insérant ces relations dans l'expression (B.80), et après une étape de simplification, on obtient

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) \simeq \frac{2(1 + \beta)^2}{M} + \frac{\kappa_4}{2M\kappa_2^2} (1 + 6\beta + \beta^2). \quad (\text{B.81})$$

### B.3.2.2 Cas de l'estimateur $\hat{\beta}_2$ à moyenne inconnue :

Lorsque l'intensité moyenne n'est pas connue, l'estimateur est alors asymptotiquement non biaisé. En effet, en appliquant l'équation (B.64), nous pouvons écrire le biais de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  sous la forme

$$\langle \hat{\beta}_2 - \beta \rangle \simeq F(\langle \hat{\mu}_I \rangle, \langle \hat{S}_2 \rangle) - \beta. \quad (\text{B.82})$$

À partir de l'expression de la fraction rationnelle  $F$  donnée en équation (B.74) et en remplaçant  $\langle \hat{\mu}_I \rangle$  par  $\mu_I$  et  $\langle \hat{S}_2 \rangle$  par sa valeur  $\mathcal{M}_2^I(M - 1)/M$  donnée à l'équation (B.71), l'égalité précédente se réécrit

$$\langle \hat{\beta}_2 - \beta \rangle \simeq F\left(\mu_I, \frac{M - 1}{M} \mathcal{M}_2^I\right) - \beta = \frac{2(M - 1)\mathcal{M}_2^I}{M\kappa_2 \mu_I^2} - 1 - \beta. \quad (\text{B.83})$$

En remplaçant  $\mathcal{M}_2^I = \text{var}(I)$  par sa valeur rappelée ci-dessus à l'équation (B.75), on peut finalement écrire après simplification

$$\boxed{\langle \hat{\beta}_2 - \beta \rangle \simeq -\frac{1 + \beta}{M}.} \quad (\text{B.84})$$

Pour calculer la variance de cet estimateur, la méthode générale présentée en annexe B.3.1 consiste à utiliser l'équation (B.65), pour écrire

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_2) = \langle [\hat{\beta}_2 - \langle \hat{\beta}_2 \rangle]^2 \rangle &\simeq \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{\mu}_I} \right)^2 \langle (\delta \hat{\mu}_I)^2 \rangle + \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{S}_2} \right)^2 \langle (\delta \hat{S}_2)^2 \rangle \\ &+ 2 \frac{\partial F}{\partial \hat{\mu}_I} \frac{\partial F}{\partial \hat{S}_2} \langle \delta \hat{\mu}_I \delta \hat{S}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Il est nécessaire de calculer les dérivées partielles  $\partial F / \partial \hat{S}_2$  et  $\partial F / \partial \hat{\mu}_I$ . On obtient alors, d'après la forme de la fraction rationnelle  $F$  donnée en équation (B.74) :

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{S}_2} = \frac{\partial}{\partial \hat{S}_2} \left[ F(\langle \hat{\mu}_I \rangle, \langle \hat{S}_2 \rangle) \right] = \frac{2}{\kappa_2 \langle \hat{\mu}_I \rangle^2} = \frac{2}{\kappa_2 \mu_I^2}, \quad (\text{B.86})$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{\mu}_I} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}_I} \left[ F(\langle \hat{\mu}_I \rangle, \langle \hat{S}_2 \rangle) \right] = -\frac{4 \langle \hat{S}_2 \rangle}{\kappa_2 \langle \hat{\mu}_I \rangle^3} = -4 \frac{M-1}{M} \frac{\mathcal{M}_2^I}{\kappa_2 \mu_I^3}. \quad (\text{B.87})$$

On remarque que ces dérivées partielles s'expriment en fonction de  $\mu_I$ , de  $\kappa_2$  et des moments centrés de l'intensité  $\mathcal{M}_k^I$ ,  $k \in [2; 4]$ , tout comme la variance de  $\hat{\mu}_I$  (donnée en équation (B.70)), la variance de  $\hat{S}_2$  (donnée en équation (B.72)) et la covariance  $\langle \delta \hat{\mu}_I \delta \hat{S}_2 \rangle$  (donnée à l'équation (B.73)). En utilisant ces expressions dans l'équation précédente (B.87), et après une longue et fastidieuse étape de simplification, vérifiée à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on peut obtenir l'expression de la variance de  $\hat{\beta}_2$  en fonction des moments centrés  $\mathcal{M}_k^I$ ,  $k \in [2; 4]$  :

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_2) &\simeq \frac{4}{M \kappa_2^2 \mu_I^4} \left( \mathcal{M}_4^I - (\mathcal{M}_2^I)^2 + \frac{4}{\mu_I} \left[ \frac{(\mathcal{M}_2^I)^2}{\mu_I} - \mathcal{M}_2^I \mathcal{M}_3^I \right] \right. \\ &\quad - \frac{2}{M} \left\{ \mathcal{M}_4^I - 2(\mathcal{M}_2^I)^2 + \frac{4}{\mu_I} \left[ \frac{(\mathcal{M}_2^I)^2}{\mu_I} - \mathcal{M}_2^I \mathcal{M}_3^I \right] \right\} \\ &\quad \left. + \frac{1}{M^2} \left\{ \mathcal{M}_4^I - 3(\mathcal{M}_2^I)^2 + \frac{4}{\mu_I} \left[ \frac{(\mathcal{M}_2^I)^2}{\mu_I} - \mathcal{M}_2^I \mathcal{M}_3^I \right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

Pour exprimer enfin la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  en fonction des cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$ , il est à nouveau envisageable de remplacer les  $\mathcal{M}_k^I$  par leur expression en fonction des cumulants  $\kappa_k$  grâce aux relations établies en équation (B.50) de l'annexe B.2.2. Après une nouvelle étape laborieuse de simplification et de réorganisation des termes, vérifiée à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient enfin l'expression de la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  en fonction des

$\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$  et de  $\beta$ , que l'on propose d'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_2) \simeq & \frac{1}{M} \left\{ 2(1 + \beta)^2 + A + B + C \right\} - \frac{1}{M^2} \left\{ 2(1 + \beta)^2 + 2A + 2B + 2C \right\} \\ & + \frac{1}{M^3} \left\{ A + B + C \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

avec

$$A = 2\kappa_2(1 + \beta)^3; \quad B = \frac{\kappa_4}{2\kappa_2^2}(1 + 6\beta + \beta^2); \quad C = -\frac{2\kappa_3}{\kappa_2}(1 + \beta)(1 + 3\beta). \quad (\text{B.90})$$

On peut remarquer que la variance asymptotique de cet estimateur, qui s'obtient en ne conservant que les termes prépondérants en  $1/M$ , s'exprime en fonction de la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  donnée à l'équation (B.81) :

$$\boxed{\text{var}_a(\hat{\beta}_2) \simeq \text{var}(\hat{\beta}_1) + \frac{1}{M} \left[ 2\kappa_2(1 + \beta)^3 - 2\frac{\kappa_3}{\kappa_2}(1 + \beta)(1 + 3\beta) \right]}. \quad (\text{B.91})$$

### B.3.3 Estimateurs de $\beta$ en présence de bruit de photon

En utilisant le modèle présenté en section 2.5 pour modéliser l'influence d'un bruit de photon sur les statistiques de speckle qui seraient acquises sur un capteur à de très faibles niveaux d'intensité, on peut calculer le biais et la variance d'estimateurs de  $\beta$  au sens des moments en appliquant à nouveau la méthode générale rappelée en section B.3.1 de cette annexe. À la différence du cas précédent où les estimateurs  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  mettaient en jeu les deux premiers moments de l'intensité  $I$ , l'utilisation de ces estimateurs en situation de très faible éclaircissement sera basée sur la mesure des premiers moments de la statistique de comptage de photons  $N$ . Nous verrons néanmoins que les résultats obtenus peuvent toujours s'exprimer en fonction des cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$  caractéristiques du modèle de speckle choisi. Nous avons en effet détaillé dans l'annexe B.2.3 les relations permettant d'exprimer les moments centrés  $\mathcal{M}_k^N$  du photocomptage  $N$  en fonction des cumulants  $\kappa_k$  de la loi normalisée  $f$ , pour  $k \in [2; 4]$  dans le cas d'un détecteur idéal d'efficacité quantique  $\eta = 1$ .

#### B.3.3.1 Influence du bruit de photon sur le biais de $\hat{\beta}_2$

En présence de bruit de photon, on peut calculer le biais de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  d'une façon similaire à ce qui a été présenté en section B.3.2.2, à la seule différence que l'on considère des mesures de photocomptage discrètes à la place de mesures d'intensité continues. On écrit alors dans ce cas, en utilisant l'expression générale du biais d'un estimateur au sens des moments, donnée à l'équation (B.64),

$$\langle \hat{\beta}_2 \rangle - \beta \simeq F\left(\langle \hat{\mu}_N \rangle, \langle \hat{S}_2 \rangle\right) - \beta. \quad (\text{B.92})$$

En remarquant qu'avec une efficacité quantique unitaire on a  $\langle \hat{\mu}_N \rangle = \mu_N = \mu_I$ , et que conformément à l'équation (B.71),  $\langle \hat{S}_2 \rangle = \mathcal{M}_2^N (M-1)/M$ , on obtient

$$\langle \hat{\beta}_2 \rangle - \beta \simeq F\left(\mu_I, \frac{M-1}{M} \mathcal{M}_2^N\right) - \beta = \frac{2(M-1)\mathcal{M}_2^N}{M\kappa_2\mu_I^2} - 1 - \beta. \quad (\text{B.93})$$

En remplaçant alors le moment centré  $\mathcal{M}_2^N$  par son expression en fonction de  $\beta$ ,  $\mu_I$  et  $\kappa_2$  établie à l'équation (B.56) dans l'annexe B.2.3, c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_2^N = \frac{\mu_I}{2} \left\{ 2 + \kappa_2 \mu_I (1 + \beta) \right\}, \quad (\text{B.94})$$

on obtient après simplification

$$\boxed{\langle \hat{\beta}_2 \rangle - \beta = \frac{2}{\kappa_2 \mu_I} \left( \frac{M-1}{M} \right) - \frac{1+\beta}{M}}. \quad (\text{B.95})$$

Cet estimateur est ainsi clairement biaisé en présence de bruit de photon et ce biais augmente à mesure que l'intensité  $\mu_I$  diminue.

### B.3.3.2 Biais et variance de l'estimateur $\hat{\beta}_2^p$

La caractérisation théorique de l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$ , introduit en section 2.5 pour estimer le degré de polarisation à partir d'une image d'intensité acquise sous un faible flux lumineux, s'opère grâce à une démarche similaire au calcul mené dans le cas où le bruit de photon est négligé. En effet, l'équation définissant l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  peut également être mise sous la forme  $\hat{\beta}_2^p = F^p(\hat{\mu}_N, \hat{S}_2)$  avec

$$F^p(x, y) = \frac{2y}{\kappa_2 x^2} - \frac{2}{\kappa_2 x} - 1, \quad (\text{B.96})$$

puisque

$$\hat{\beta}_2^p \triangleq \frac{2\hat{S}_2}{\kappa_2 \langle \hat{\mu}_N \rangle^2} - \frac{2}{\kappa_2 \hat{\mu}_N} - 1. \quad (\text{B.97})$$

On peut d'ors et déjà en déduire les dérivées partielles suivantes, qui nous serviront par la suite pour le calcul de la variance de  $\hat{\beta}_2^p$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^p}{\partial \hat{S}_2} &= \frac{2}{\kappa_2 \langle \hat{\mu}_N \rangle^2} = \frac{2}{\kappa_2 \mu_I^2} \quad \text{et,} \\ \frac{\partial F^p}{\partial \hat{\mu}_N} &= -\frac{4\langle \hat{S}_2 \rangle}{\kappa_2 \langle \hat{\mu}_N \rangle^3} + \frac{2}{\kappa_2 \langle \hat{\mu}_N \rangle^2} = -4\frac{M-1}{M} \frac{\mathcal{M}_2^N}{\kappa_2 \mu_I^3} + \frac{2}{\kappa_2 \mu_I^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

**Biais de l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  :** Grâce aux expressions précédentes, il n'est pas difficile de montrer que cet estimateur permet de s'affranchir du biais qui entache l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  en présence de bruit de photon. En effet, l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  est



asymptotiquement non biaisé, même en présence de bruit de photon car on a

$$\begin{aligned}\langle \hat{\beta}_2^p - \beta \rangle &\simeq F^p(\langle \hat{\mu}_N \rangle, \langle \hat{S}_2 \rangle) - \beta \\ &= \frac{2(M-1)\mathcal{M}_2^N}{M\kappa_2\mu_I^2} - \frac{2}{M\kappa_2\mu_I} - 1 - \beta,\end{aligned}\quad (\text{B.99})$$

soit, après simplification,

$$\boxed{\langle \hat{\beta}_2^p - \beta \rangle = -\frac{1+\beta}{M} - \frac{2}{M\kappa_2\mu_I}}. \quad (\text{B.100})$$

**Variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  :** Pour la calculer, nous proposons d'utiliser à nouveau le résultat général de l'équation (B.65). En utilisant le calcul des dérivées partielles de l'équation (B.98) et les expressions des variances des estimateurs  $\hat{\mu}_N$  et  $\hat{S}_2$  données respectivement aux équations (B.70) et (B.72), et de leur covariance  $\langle \delta\hat{\mu}_N \delta\hat{S}_2 \rangle$  (équation (B.73)), on peut aboutir après une fastidieuse étape de simplification<sup>99</sup>, à l'expression de la variance de  $\hat{\beta}_2^p$  en fonction de  $\mu_I$ ,  $\kappa_2$ ,  $\beta$  et des moments centrés  $\mathcal{M}_k^N$ ,  $k \in [2; 4]$  du photocomptage  $N$  :

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\beta}_2^p) &\simeq \frac{4}{M\kappa_2^2\mu_I^4} \left( \mathcal{M}_4^N + 2\mathcal{M}_3^N - (\mathcal{M}_2^N)^2 + \mathcal{M}_2^N - \frac{4\mathcal{M}_2^N}{\mu_I} [\mathcal{M}_2^N + \mathcal{M}_3^N - \frac{(\mathcal{M}_2^N)^2}{\mu_I}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{M} \left\{ \mathcal{M}_4^N + \mathcal{M}_3^N - 2(\mathcal{M}_2^N)^2 - \frac{2\mathcal{M}_2^N}{\mu_I} [\mathcal{M}_2^N + 2\mathcal{M}_3^N - 2\frac{(\mathcal{M}_2^N)^2}{\mu_I}] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{M^2} \left\{ \mathcal{M}_4^N - 3(\mathcal{M}_2^N)^2 - \frac{4\mathcal{M}_2^N}{\mu_I} [\mathcal{M}_3^N - \frac{(\mathcal{M}_2^N)^2}{\mu_I}] \right\} \right).\end{aligned}\quad (\text{B.101})$$

On peut à nouveau souhaiter écrire cette variance en fonction des cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$  de la loi normalisée  $f$  définissant le modèle de speckle. Pour ce faire, on peut utiliser les relations (B.56) données en annexe B.2.3 qui relient les moments centrés  $\mathcal{M}_k^N$ ,  $k \in [2; 4]$  du photocomptage  $N$  et les cumulants  $\kappa_k$ . Après une très fastidieuse étape de substitution, simplification et réorganisation des termes, vérifiée numériquement avec un logiciel de calcul formel, on aboutit à l'expression de  $\text{var}(\hat{\beta}_2^p)$  en fonction des cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$ , que nous proposons de présenter de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\beta}_2^p) &\simeq \frac{1}{M} \left[ \tau_0(\beta) + \frac{\tau_1(\beta)}{\mu_I} + \frac{\tau_2(\beta)}{\mu_I^2} \right] + \frac{1}{M^2} \left[ \tau'_0(\beta) + \frac{\tau'_1(\beta)}{\mu_I} + \frac{\tau'_2(\beta)}{\mu_I^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{M^3} \left[ \tau''_0(\beta) + \frac{\tau''_1(\beta)}{\mu_I} + \frac{\tau''_2(\beta)}{\mu_I^2} + \frac{\tau''_3(\beta)}{\mu_I^3} \right],\end{aligned}\quad (\text{B.102})$$

où les  $\tau_i(\beta)$  représentent les termes en  $1/M$  de la variance, les  $\tau'_i(\beta)$  les termes en  $1/M^2$  et les  $\tau''_i(\beta)$  les termes en  $1/M^3$ .

Les termes portant l'indice 0 représentent la part de la variance de  $\hat{\beta}_2$  qui ne

<sup>99</sup> – Vérifiée à nouveau à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

dépend pas de l'intensité moyenne<sup>100</sup>  $\mu_I$  et s'écrivent

$$\begin{aligned}\tau_0(\beta) &= 2(1 + \beta)^2 + A + B + C; & \tau_0''(\beta) &= A + B + C; \\ \tau_0'(\beta) &= -2(1 + \beta)^2 - 2A - 2B - 2C;\end{aligned}\tag{B.103}$$

où  $A$ ,  $B$ , et  $C$  ont été donnés à l'équation (B.90) lors du calcul de  $\text{var}(\hat{\beta}_2)$ .

En ce qui concerne les termes qui décrivent la part de la variance de  $\hat{\beta}_2$  dépendant de l'intensité moyenne  $\mu_I$ , ceux-ci s'écrivent

$$\begin{aligned}\tau_1(\beta) &= \frac{8}{\kappa_2}(1 + \beta) - 4(1 + \beta)^2 + 4\frac{\kappa_3}{\kappa_2^2}(1 + 3\beta); & \tau_1''(\beta) &= 2\frac{\kappa_3}{\kappa_2^2}(1 + 3\beta); \\ \tau_1'(\beta) &= -\frac{8}{\kappa_2}(1 + \beta) + 4(1 + \beta)^2 - 6\frac{\kappa_3}{\kappa_2^2}(1 + 3\beta);\end{aligned}\tag{B.104}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\tau_2(\beta) &= \frac{8}{\kappa_2^2} + \frac{4}{\kappa_2}(1 + \beta); & \tau_2'(\beta) &= -\frac{8}{\kappa_2^2} - \frac{8}{\kappa_2}(1 + \beta); \\ \tau_2''(\beta) &= \frac{6}{\kappa_2}(1 + \beta); & \tau_3''(\beta) &= \frac{4}{\kappa_2^2}.\end{aligned}\tag{B.105}$$

### B.3.3.3 Optimisation du nombre d'images en présence de bruit de photon

On considère une région homogène de  $M$  pixels, illuminée par un éclairage cohérent dont le flux lumineux est noté  $\phi$ . Pour un même temps d'intégration total  $T$ , on peut choisir de diviser cette acquisition d'intensité  $\phi T$  en  $Q$  images, permettant d'obtenir  $Q$  fois plus d'échantillons de mesure supposés indépendants, mais acquis par conséquent sur des images d'intensité plus faible  $\phi T/Q$ . On suppose aussi que les  $Q$  images obtenues correspondent à des réalisations de figures de speckle statistiquement indépendantes. En utilisant ces  $Q$  acquisitions pour l'estimation, le nombre d'échantillons sur lequel est réalisée l'estimation vaut alors  $QM$  et la variance asymptotique de l'estimateur  $\hat{\beta}_2^p$  peut s'écrire, d'après l'équation (B.102),

$$\text{var}_a(\hat{\beta}_2^p) \simeq \frac{1}{QM} \left[ \tau_0(\beta) + \frac{\tau_1(\beta)}{\frac{\phi T}{Q}} + \frac{\tau_2(\beta)}{\left(\frac{\phi T}{Q}\right)^2} \right] = \frac{1}{M} \left[ \frac{\tau_0(\beta)}{Q} + \frac{\tau_1(\beta)}{(\phi T)} + \frac{Q\tau_2(\beta)}{(\phi T)^2} \right].\tag{B.106}$$

La valeur optimale  $Q_{opt}$  du nombre d'acquisitions  $Q$  qui permet de minimiser la variance doit donc vérifier

$$\frac{\partial \text{var}_a(\hat{\beta}_2^p)}{\partial Q} = 0 = -\frac{\tau_0(\beta)}{MQ^2} + \frac{\tau_2(\beta)}{M(\phi T)^2},\tag{B.107}$$

<sup>100</sup> – On peut montrer que l'ensemble de ces termes s'identifie à la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$  lorsque l'influence du bruit de photon est négligée (voir équation (B.89)).

et on en déduit que le nombre d'images optimal vaut donc

$$Q_{opt} = \phi T_{opt} \sqrt{\frac{\tau_0(\beta)}{\tau_2(\beta)}}, \quad (\text{B.108})$$

où  $T_{opt}$  désigne le temps d'intégration optimal sur le capteur dans le cas où le flux de photons  $\phi$  est fixé.

On vérifie aisément qu'il s'agit d'un minimum puisque

$$\frac{\partial^2 \text{var}(\hat{\beta}_2^p)}{\partial Q^2} = 2 \frac{\tau_0(\beta)}{MQ_{opt}^3} \geq 0, \quad (\text{B.109})$$

car  $\tau_0(\beta)$  est une grandeur positive puisqu'elle est proportionnelle à la variance de l'estimateur  $\hat{\beta}_2$ .

L'intensité moyenne optimale de chacune des  $Q_{opt}$  images acquises s'écrit quant à elle,

$$\mu_{I_{opt}} = \frac{\phi T_{opt}}{Q_{opt}} = \sqrt{\frac{\tau_2(\beta)}{\tau_0(\beta)}}, \quad (\text{B.110})$$

où l'expression de  $\tau_2(\beta)$  est donnée en équation (B.105) et où

$$\tau_0(\beta) = 2(1 + \beta)^2 + A + B + C \quad (\text{B.111})$$

avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  donnés en équation (B.90).

En observant les expressions de  $\tau_0(\beta)$  et de  $\tau_2(\beta)$ , on peut montrer que la valeur  $\mu_{I_{opt}}$  ne dépend que des cumulants  $\kappa_k$ ,  $k \in [2; 4]$  de la loi  $f$  normalisée caractéristique du modèle de speckle, et non pas de la valeur du flux  $\phi$  ni du temps d'intégration  $T$ .

## B.4 Loi de probabilité de l'intensité pour un speckle d'ordre 1 en présence de bruit de photon

Pour calculer la loi de photocomptage  $P_N(n)$  modélisant le comportement statistique de l'intensité d'une image de speckle pleinement développé d'ordre 1, acquise à faible flux en présence de bruit de photon, nous appliquons le résultat général de l'équation (2.53) qui relie la loi de photocomptage discrète  $P_N(n)$  à la loi continue de l'intensité  $P_I(I)$  modélisant les fluctuations de speckle lorsque le bruit de photon est négligé.

Dans le cas d'un speckle pleinement développé d'ordre 1, la loi  $P_I(I)$  a été établie à l'équation (1.19), et en appliquant le résultat de l'équation (2.53), on

obtient

$$\begin{aligned}
 P_N(n) &= \int_0^{+\infty} P_{N|I}(n|I) P_I(I) dI = \int_0^{+\infty} \exp(-I) \frac{I^n}{n!} P_I(I) dI \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp(-I) \frac{I^n}{n!} \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I} \left\{ \exp\left[-\frac{2I}{(1+\mathcal{P})\mu_I}\right] - \exp\left[-\frac{2I}{(1-\mathcal{P})\mu_I}\right] \right\} dI \\
 &= \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I(n!)} \left\{ \int_0^{+\infty} I^n \exp(-IG^+) dI - \int_0^{+\infty} I^n \exp(-IG^-) dI \right\},
 \end{aligned} \tag{B.112}$$

où l'on a posé  $G^+ \triangleq \frac{2}{(1+\mathcal{P})\mu_I} + 1 = \frac{2+(1+\mathcal{P})\mu_I}{(1+\mathcal{P})\mu_I}$  et  $G^- \triangleq \frac{2}{(1-\mathcal{P})\mu_I} + 1 = \frac{2+(1-\mathcal{P})\mu_I}{(1-\mathcal{P})\mu_I}$ .

En appliquant alors un changement de variable dans chaque intégrale en posant respectivement  $y^+ \triangleq IG^+$  et  $y^- \triangleq IG^-$ , on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$P_N(n) = \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I(n!)} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{(y^+)^n}{(G^+)^{n+1}} \exp(-y^+) dy^+ - \int_0^{+\infty} \frac{(y^-)^n}{(G^-)^{n+1}} \exp(-y^-) dy^- \right\}, \tag{B.113}$$

qui peut se réécrire également

$$\begin{aligned}
 P_N(n) &= \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I(n!)} \left\{ \frac{1}{(G^+)^{n+1}} \int_0^{+\infty} (y^+)^n \exp(-y^+) dy^+ \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(G^-)^{n+1}} \int_0^{+\infty} (y^-)^n \exp(-y^-) dy^- \right\} \tag{B.114} \\
 &= \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I(n!)} \left\{ \frac{1}{(G^+)^{n+1}} - \frac{1}{(G^-)^{n+1}} \right\} \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t) dt.
 \end{aligned}$$

En remarquant finalement que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t) dt$  correspond à la valeur  $\Gamma(n+1)$  de la fonction gamma<sup>101</sup> évaluée en  $(n+1)$ , et en notant que pour tout nombre entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ , l'expression de  $P_N(n)$  se simplifie finalement en

$$P_N(n) = \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I(n!)} \left\{ \frac{1}{(G^+)^{n+1}} - \frac{1}{(G^-)^{n+1}} \right\} (n!), \tag{B.115}$$

soit, en remplaçant  $G^+$  et  $G^-$  par leurs expressions respectives données ci-dessus,

$$\boxed{P_N(n) = \frac{1}{\mathcal{P}\mu_I} \left\{ \left[ \frac{\mu_I(1+\mathcal{P})}{2+\mu_I(1+\mathcal{P})} \right]^{n+1} - \left[ \frac{\mu_I(1-\mathcal{P})}{2+\mu_I(1-\mathcal{P})} \right]^{n+1} \right\}.} \tag{B.116}$$

<sup>101</sup> – La fonction  $\Gamma$  est définie grâce à l'intégrale suivante  $\Gamma(x) \triangleq \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$  (voir [60], p. xxxiv).



# Annexe C

## Calculs annexes à la partie II

### C.1 Effet d'une absorption sur les statistiques de photocomptage

Dans cette section, nous présentons une modélisation de l'absorption partielle de l'intensité lumineuse. L'influence d'une telle absorption sur la moyenne et la variance du nombre de photons détectés sera ensuite étudiée.

#### C.1.1 Modèle d'absorption de Bernoulli

Nous modélisons l'absorption d'un faisceau lumineux par un processus d'absorption de Bernoulli, qui consiste à affecter une probabilité de « survie » à chaque photon du faisceau incident. On modélisera ainsi une absorption de facteur de transmission  $\tau$  (donc de facteur d'absorption  $1 - \tau$ ), en supposant que chacun des  $n$  photons du processus initial non absorbé est multiplié, après l'étape d'absorption, par un facteur  $x_k = 0$  (absorption du photon) ou 1 (conservation du photon), avec  $k \in [0; n]$ . La variable aléatoire discrète correspondant au photocomptage après le processus d'absorption peut ainsi s'écrire

$$M = \sum_{k=1}^n x_k \quad (\text{C.1})$$

où les  $x_k$  sont indépendants et identiquement distribués selon une distribution de Bernoulli,

$$\Pr(x_k = 1) = \tau \quad \text{et}, \quad \Pr(x_k = 0) = 1 - \tau. \quad (\text{C.2})$$

À partir de ce modèle d'absorption, on peut alors déduire la loi de probabilité de la variable  $M$  en notant

$$P_M(m) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{M|N}(m|n)P_N(n). \quad (\text{C.3})$$

Dans le cas où le nombre de termes  $n$  intervenant dans la somme de l'équation précédente est connu et déterministe, on vérifie aisément que la variable aléatoire  $M$  correspond à une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\tau$ , car elle s'écrit comme la somme de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes [35]. On peut donc écrire la

probabilité conditionnelle suivante

$$P_{M|N}(m|n) = \binom{n}{m} \tau^m (1 - \tau)^{n-m}. \quad (\text{C.4})$$

La valeur moyenne d'une telle loi de probabilité est  $\langle M \rangle_N = \tau n$  et sa variance vaut  $\langle M^2 \rangle_N - \langle M \rangle_N^2 = \tau(1 - \tau)n$ , où  $\langle \cdot \rangle_N$  désigne une moyenne conditionnelle.

### C.1.2 Caractérisation du processus absorbé

**Valeur moyenne du processus absorbé :** À partir de ce modèle d'absorption, on détermine alors la valeur moyenne du processus absorbé en écrivant

$$\mu_M = \sum_{m=0}^{\infty} m P_M(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n m P_{M|N}(m|n) \right) P_N(n), \quad (\text{C.5})$$

où  $m$  est nécessairement inférieur ou égal à  $n$ . On identifie, dans le terme entre parenthèses, la valeur moyenne d'une variable binomiale de paramètres  $n$  et  $\tau$ , et ce terme vaut par conséquent  $\tau n$ . On obtient alors

$$\mu_M = \sum_{n=0}^{\infty} \tau n P_N(n) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} n P_N(n) = \tau \mu_N. \quad (\text{C.6})$$

**Variance du processus absorbé :** En ce qui concerne le second moment, on peut prouver un résultat similaire :

$$\langle M^2 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P_M(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n m^2 P_{M|N}(m|n) \right) P_N(n), \quad (\text{C.7})$$

où le terme entre parenthèses représente le moment d'ordre deux d'une variable binomiale qui vaut  $\tau^2 n^2 + n\tau(1 - \tau)$  [35]. On a alors

$$\langle M^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [\tau^2 n^2 + n\tau(1 - \tau)] P_N(n) = \tau^2 \langle N^2 \rangle + \tau(1 - \tau) \mu_N. \quad (\text{C.8})$$

À partir de l'équation précédente et de l'équation (C.6), la variance du processus absorbé s'exprime aisément en fonction de  $\tau$ , de la moyenne  $\mu_N$  et variance  $\text{var}(N)$  du processus initial :

$$\text{var}(M) = \tau^2 \text{var}(N) + \mu_N \tau(1 - \tau). \quad (\text{C.9})$$

**Facteur de Fano du processus absorbé :** On déduit alors directement des deux résultats précédents une relation entre le facteur de Fano du processus initial et celui du processus absorbé :

$$F_M = \frac{\text{var}(M)}{\mu_M} = \frac{\tau \text{var}(N)}{\mu_N} + 1 - \tau = 1 + \tau(F_N - 1). \quad (\text{C.10})$$

## C.2 Propriétés et simulation du modèle temporel de fluctuations sous-poissoniennes

Dans cette annexe, nous détaillons les calculs permettant de caractériser la moyenne et la variance à fort flux du modèle de photocomptages sous-poissoniens à partir de la loi de probabilité  $P_N(n)$  donnée en équation (3.33), page 115. Nous explicitons également les méthodes utilisées aux chapitres 4 et 5 pour simuler numériquement de tels processus sous-poissoniens.

### C.2.1 Propriétés statistiques du modèle temporel

**Réécriture de la loi de probabilité :** Pour permettre le calcul de la valeur moyenne, nous écrivons la loi de probabilité de l'équation (3.33) sous la forme suivante

$$P_N(n) = \frac{e^{-L\phi T}}{L} B(n), \quad (\text{C.11})$$

où  $\mu_N$  est remplacé par  $\phi T$  et où l'on a posé

$$B(n) \triangleq \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{\substack{m=L(n-1)+\ell+1 \\ m \geq 0}}^{Ln+\ell} A_m, \text{ avec } A_m \triangleq \frac{(q\phi T)^m}{m!}. \quad (\text{C.12})$$

On remplace alors l'indice de sommation  $m$  par  $i = Ln - m$ , et on obtient

$$B(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{\substack{i=\ell-L+1 \\ Ln+i \geq 0}}^{\ell} A_{Ln+i}. \quad (\text{C.13})$$

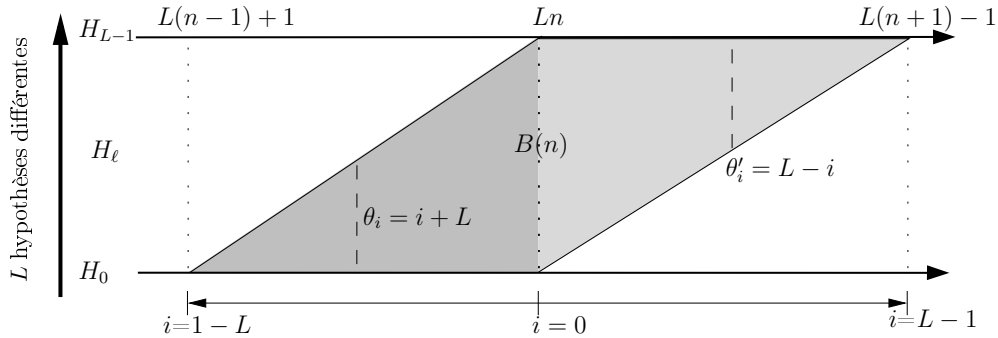


FIG. C.1 – Représentation schématique des termes de la double somme  $B(n)$  définie à l'équation (C.13).

Il s'agit maintenant de simplifier cette double sommation pour écrire  $B(n)$  sous une forme plus simple. Pour faciliter cette réécriture, les différents termes de la double somme  $B(n)$  sont représentés schématiquement sur la figure C.1 par le parallélogramme grisé. Pour une valeur donnée de  $n \geq 1$ , on peut remarquer que  $B(n)$  est une somme de différents termes  $A_{Ln+i}$  avec  $i$  variant entre  $1 - L$  et  $L - 1$ . De plus, pour une valeur de l'indice  $i$  fixée, le nombre de termes  $A_{Ln+i}$



contenus dans la somme  $B(n)$  varie. En dénombrant correctement ces termes à l'aide du schéma de la figure C.1, on peut réorganiser la sommation en séparant les indices  $i$  strictement négatifs des indices  $i$  positifs pour écrire  $B(n)$  sous la forme

$$B(n) = \sum_{i=-L+1}^{-1} \theta_i A_{Ln+i} + \sum_{i=0}^{L-1} \theta'_i A_{Ln+i}, \quad \forall n \geq 1, \quad (\text{C.14})$$

avec  $\theta_i = i + L$  pour les valeurs de  $i$  négatives, et  $\theta'_i = L - i$  pour les valeurs de  $i$  positives. Remplaçons maintenant l'indice  $i$  de la première sommation par  $z = L + i$ . On fixe enfin  $\theta''_z \triangleq \theta_i = L + i = z$  et on obtient, en remarquant que  $\theta''_{z=0} = 0$ ,

$$B(n) = \underbrace{\sum_{z=0}^{L-1} \theta''_z A_{L(n-1)+z}}_{C(n)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{L-1} \theta'_i A_{Ln+i}}_{D(n)}, \quad (\text{C.15})$$

d'où l'on déduit enfin

$$P_N(n) = \frac{e^{-L\phi T}}{L} \{C(n) + D(n)\}. \quad (\text{C.16})$$

En ce qui concerne le cas  $n = 0$ , on a simplement

$$P_N(0) = \frac{e^{-L\phi T}}{L} D(0). \quad (\text{C.17})$$

**Normalisation de la loi de probabilité :** On peut vérifier tout d'abord que cette loi de probabilité est normalisée : en utilisant la nouvelle écriture de la loi de probabilité, on a en effet

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_N(n) = \frac{e^{-L\phi T}}{L} \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} C(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} D(n) \right] = \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} [C(n+1) + D(n)]. \quad (\text{C.18})$$

En remarquant que  $\theta''_z + \theta'_z = L$ , et en remplaçant  $C(n)$  et  $D(n)$  par leur expression détaillée, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_N(n) = \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^{L-1} [(\theta''_z + \theta'_z) A_{Ln+z}] = e^{-L\phi T} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^{L-1} A_{Ln+z}. \quad (\text{C.19})$$

En posant finalement  $w = Ln + z$ , et puisque  $A_w = \frac{(L\phi T)^w}{w!}$ , on montre aisément que cette loi est bien normalisée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_N(n) = e^{-L\phi T} \sum_{w=0}^{+\infty} \frac{(L\phi T)^w}{w!} = 1, \quad \text{car} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x)^k}{k!} = e^x. \quad (\text{C.20})$$

**Valeur moyenne :** Pour calculer la valeur moyenne, on écrit de façon similaire

$$\mu_N = \sum_{n=0}^{+\infty} n P_N(n) = \frac{e^{-L\phi T}}{L} \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} n C(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} n D(n) \right], \quad (\text{C.21})$$

qui se simplifie sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}\mu_N &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)C(n+1) + nD(n)] \\ &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^{L-1} [(n+1)\theta''_z + n\theta'_z] A_{Ln+z}.\end{aligned}\tag{C.22}$$

En remarquant cette fois que  $(n+1)\theta''_z + n\theta'_z = Ln + z$ , et en posant à nouveau  $w = Ln + z$ , on obtient

$$\begin{aligned}\mu_N &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{w=0}^{+\infty} w A_w = \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{w=1}^{+\infty} w \frac{(L\phi T)^w}{w!} \\ &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{w=1}^{+\infty} \frac{L\phi T (L\phi T)^{w-1}}{(w-1)!} \quad \text{puis en posant } x = w - 1, \\ &= \phi T \left[ e^{-L\phi T} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{(L\phi T)^x}{x!} \right] = \phi T.\end{aligned}\tag{C.23}$$

**Encadrement de la variance du modèle de photocomptage :** En utilisant la même approche, on peut encadrer les valeurs de la variance de la loi de probabilité de l'équation (3.33). On écrit tout d'abord

$$\begin{aligned}\langle N^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P_N(n) = \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 C(n+1) + n^2 D(n)] \\ &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^{L-1} [(n+1)^2 \theta''_z + n^2 \theta'_z] A_{Ln+z} \\ &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{z=0}^{L-1} \frac{[\alpha + \beta + \gamma]}{L} A_{Ln+z},\end{aligned}\tag{C.24}$$

avec  $\alpha = (Ln + z)(Ln + z - 1)$ ,  $\beta = Ln + z$  and  $\gamma = (L - z)z$ .

En suivant une démarche similaire au calcul de la valeur moyenne, on peut montrer en développant des calculs assez fastidieux que le terme de la sommation contenant  $\alpha$  est égal à  $(\phi T)^2$ , tandis que le terme contenant  $\beta$  vaut quant à lui  $\langle N \rangle / L = \phi T / L$ . Enfin, puisque  $0 \leq \gamma < L^2$ , on peut montrer finalement que le dernier terme est compris entre 0 et 1. Ainsi, on obtient l'encadrement suivant

$$(\phi T)^2 + \frac{\phi T}{L} \leq \langle N^2 \rangle < (\phi T)^2 + \frac{\phi T}{L} + 1,\tag{C.25}$$

ce qui nous permet d'encadrer finalement la variance  $\text{var}(N)$ ,

$$\frac{\phi T}{L} \leq \text{var}(N) < \frac{\phi T}{L} + 1.\tag{C.26}$$

Ainsi, pour des valeurs élevées de la valeur moyenne du photocomptage  $\mu_N = \phi T \gg 1$ , le facteur de Fano d'un tel modèle sous-poissonien tend bien vers  $1/L$ .

**Approximation Bernoulli à faible flux :** Nous vérifions ici que la loi de probabilité de l'équation (3.33) peut être approximée par une loi de Bernoulli à faible intensité. Supposons ainsi que  $\mu_N = \phi T \ll 1$ , et calculons  $P_N(1)$  et  $P_N(0)$ . D'après l'expression (3.33), on a

$$\begin{aligned} P_N(1) &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{\substack{m=\ell+1 \\ m \geq 0}}^{L+\ell} \frac{(L\phi T)^m}{m!} \simeq \frac{[1 - L\phi T + o(\phi T)]}{L} [(L\phi T) + o(\phi T)] \\ &= [1 - L\phi T + o(\phi T)] [\phi T + o(\phi T)] = \phi T + o(\phi T). \end{aligned} \tag{C.27}$$

Quant à la probabilité  $P_N(0)$  de ne mesurer aucun photon, celle-ci vaut

$$\begin{aligned} P_N(0) &= \frac{e^{-L\phi T}}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{\substack{m=-L+\ell+1 \\ m \geq 0}}^{\ell} \frac{(L\phi T)^m}{m!} \\ &\simeq \frac{[1 - L\phi T + o(\phi T)]}{L} [L(L\phi T)^0 + (L-1)(L\phi T)^1 + o(\phi T)] \\ &= 1 - \phi T + o(\phi T). \end{aligned} \tag{C.28}$$

On se convaincra également aisément que la probabilité de détecter plus d'un photon pendant l'intervalle  $T$  est bien négligeable lorsque l'on suppose  $\mu_N \ll \phi T$ . Dans ces conditions, on conclut alors que l'on peut remplacer la densité de probabilité (3.33) par une loi de Bernoulli (voir équation (3.35)).

## C.2.2 Simulation numérique du modèle temporel

Dans la suite de cette annexe, nous décrivons les méthodes de simulation numériques utilisées pour générer des processus de photocomptage sous-poissoniens selon le modèle temporel décrit en section 3.2.2. La première méthode utilisée s'inspire du procédé de simulation usuellement utilisé pour générer les processus stochastiques poissoniens. Nous verrons comment proposer un protocole de simulation plus général qui pourra notamment être appliqué pour des lois d'attente quelconques (non nécessairement gamma).

### C.2.2.1 Simulation d'un processus de Poisson

Un processus de Poisson de flux  $\phi$  peut être simulé très simplement : en ajoutant  $j$  réalisations indépendantes de variables aléatoires exponentielles de valeur moyenne  $\tau_0 = 1/\phi$ , correspondant aux temps d'attente entre deux arrivées de photons successives, on obtient la date  $t_j$  de détection du  $j^{\text{e}}$  photon. Le résultat de photocomptage d'un tel processus pour une durée d'intégration  $T$  s'obtient en répétant cette sommation progressive des temps d'attente jusqu'à ce que l'on vérifie  $t_n \leq T$  et que  $t_{n+1} > T$  : on conclut alors que  $n$  photons ont été détectés durant  $T$ , et cette valeur  $n$  correspond à une réalisation de la loi de Poisson donnée en équation (3.19).

Cette méthode de simulation simple suppose que l'intervalle de temps  $\theta$ , compris entre le déclenchement de la mesure de comptage à  $t = 0$  et l'instant de dé-

tection du premier photon  $t_1$  est également distribué selon une loi exponentielle. Cela serait clairement le cas si une arrivée de photon coïncidait avec l'instant  $t = 0$ . Dans une expérience de photocomptage réelle cependant, le déclenchement s'opère indépendamment de l'état du processus ponctuel que l'on souhaite mesurer, et rien n'autorise à supposer qu'un photon arrive sur le détecteur à l'instant du déclenchement. Dans le cas général, l'intervalle de temps noté  $\theta$  entre l'instant de déclenchement de la mesure et la première détection d'un photon sur le capteur n'est donc pas nécessairement distribué selon la loi d'attente  $P_\xi(\xi)$ . On peut montrer en effet [110, 25] que la densité de probabilité de l'intervalle de temps  $\theta$  s'écrit

$$P_\theta(\theta) = \phi[1 - F_\xi(\theta)], \quad (\text{C.29})$$

où  $F_\xi(\xi)$  désigne la fonction de répartition des temps d'attente définie par  $F_\xi(\xi) = \int_0^\xi P_\xi(t)dt$ , et où  $\phi$  désigne le flux moyen de photons et vérifie  $\phi = 1/\tau_0 = 1/\langle\xi\rangle$ . Cette DDP est en général différente de  $P_\xi(\xi)$ , l'unique exception correspondant précisément au cas du processus de Poisson, qui constitue le seul cas de processus ponctuel « sans mémoire » [110]. Cette propriété particulière simplifie considérablement la simulation des processus puisqu'il n'est pas besoin d'assurer une désynchronisation entre la simulation des arrivées de photons et le déclenchement de la mesure.

### C.2.2.2 Simulation d'un processus sous-poissonien de temps d'attente gamma d'ordre entier

Cette désynchronisation devient en revanche nécessaire pour simuler correctement une expérience de photocomptage d'un processus non poissonien. Dans le cas du modèle temporel phénoménologique de processus sous-poissonien où l'on suppose que la loi du temps d'attente entre deux détections est gamma d'ordre entier  $L$ , on peut tirer parti de l'image physique qui consiste à imaginer  $L - 1$  photons virtuels entre deux arrivées de photons réels. Ce processus virtuel sous-jacent étant poissonien, on peut en effet bénéficier de la facilité de simulation des processus poissoniens, en simulant une réalisation d'un processus sous-poissonien de moyenne  $\mu_N = \phi T$  de la manière suivante :

- Un premier tirage aléatoire entre les  $L$  hypothèses  $H_\ell$  ( $\ell \in [0, L - 1]$ ) équiprobables permet de fixer le nombre  $\ell$  de photons virtuels qui seront reçus au niveau du détecteur entre le déclenchement de la mesure et la première détection de vrai photon (voir figure 3.2, page 114). La date de la première détection s'obtient alors en sommant  $\ell$  réalisations de variables exponentielles de moyenne  $\tau_0/L$  correspondant au processus poissonien virtuel sous-jacent.
- On procède ensuite comme pour un processus poissonien, en comptant une détection de photon au bout de  $L$  tirages aléatoires exponentiels. Le nombre de photons reçus durant  $T$  sera à nouveau donné par la valeur  $n$  qui vérifie  $t_n \leq T$  et  $t_{n+1} > T$ .

Cette méthode de simulation fondée sur l'image physique des photons virtuels présente l'avantage d'être simple à implémenter numériquement. Elle ne peut malheureusement pas se généraliser à des formes de lois d'attente différentes ou à des ordres de loi gamma non entiers. Nous présentons donc ci-dessous une méthode alternative qui demeure valable quelle que soit la loi d'attente choisie.

### C.2.2.3 Méthode de simulation générale

Pour assurer la désynchronisation rendue nécessaire quand le processus n'est pas poissonien, une solution rigoureuse consiste à calculer explicitement la loi  $P_\theta(\theta)$  donnée à l'équation (C.29) et à obtenir la date de la première détection à partir d'un tirage aléatoire de cette loi. Malheureusement, rien ne garantit que le calcul explicite de  $P_\theta(\theta)$ , ou la génération d'une telle variable aléatoire soient simples. Nous préférons donc utiliser la technique alternative plus générale suivante : pour une durée d'observation  $T$ , nous générons un grand nombre de réalisations du temps d'attente  $\xi$ , durant une fenêtre temporelle plus large  $W > 2T$ , suffisamment longue pour garantir la détection d'un grand nombre d'événements<sup>102</sup> (voir figure C.2). Les dates de détection des photons durant l'intervalle de temps  $W$  sont mémorisées. Puis, pour simuler l'ouverture du détecteur, on détermine l'instant  $\theta_0$  du déclenchement de la mesure grâce au tirage d'une variable aléatoire dont la densité de probabilité est supposée uniforme entre  $W/4$  et  $W-T$ . Ce choix permet de garantir que plusieurs arrivées de photons sont survenues entre le démarrage du processus de simulation à  $t = 0$  et le déclenchement de la mesure à  $t = \theta_0$ , ce qui assure ainsi la désynchronisation souhaitée. On obtient enfin le résultat de photocomptage en déterminant le nombre de photons dont la date de détection est comprise entre  $\theta_0$  et  $\theta_0 + T$  (voir figure C.2).

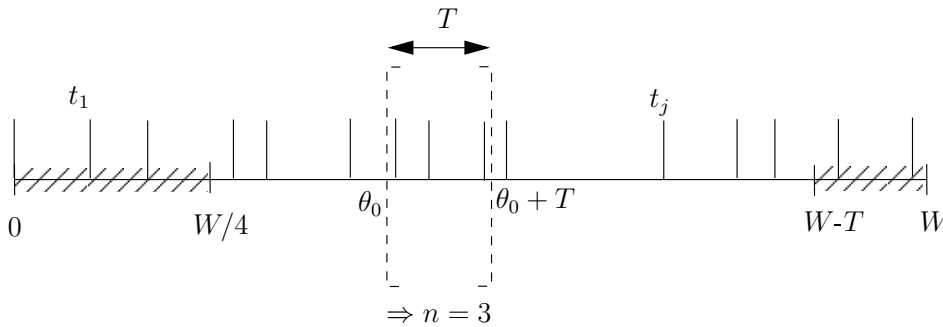


FIG. C.2 – Représentation schématique de la méthode de simulation de processus sous-poissoniens de temps d'attente non nécessairement gamma d'ordre entier.

## C.3 BCR pour l'estimation de paramètre dans une image

### C.3.1 BCR pour l'estimation d'un déplacement

Nous nous plaçons dans le cas particulier où le paramètre  $d$  qui affecte la distribution d'intensité de l'image est un déplacement selon la direction  $X$ . Nous détaillons dans cette annexe comment le résultat général obtenu à l'équation (4.14) peut être appliqué au cas de l'estimation de déplacement, pour différentes statistiques de photocomptage.

<sup>102</sup> – Pour des situations où la durée d'intégration  $T$  ou le flux  $\phi$  sont très faibles, on s'assure qu'au moins 5 événements surviennent durant  $W$ .

### C.3.1.1 Statistique de photocomptage poissonienne

Dans le cas standard poissonien, nous avons rappelé en section 4.2.2 que l'information de Fisher pour l'estimation de l'intensité moyenne [118] pouvait s'écrire

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] = \frac{1}{\mu(k, d)}, \quad (\text{C.30})$$

ce qui nous a permis d'exprimer l'information de Fisher globale pour l'estimation du déplacement  $d$  d'une image poissonienne sous la forme

$$I_F^{Poi}(d) = \sum_{k=1}^M \frac{[\mu'(k, d)]^2}{\mu(k, d)}. \quad (\text{C.31})$$

En utilisant l'approximation qui consiste à supposer que le détecteur matriciel est composé d'une répartition continue de pixels infinitésimaux, on a également réécrit  $I_F^{Poi}(d)$  sous la forme intégrale suivante

$$I_F^{Poi}(d) = \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} \right]^2 \frac{dx dy}{f_0(x-d, y)}, \quad (\text{C.32})$$

où l'on a remplacé la sommation sur les  $M$  pixels de l'image par une intégration spatiale portant sur toute la surface  $\Sigma$  du détecteur et où  $\mu(k, d)$  est remplacé par  $f_0(x-d, y) dx dy$ . En supposant enfin que l'étendue spatiale transverse du faisceau et le déplacement  $d$  à mesurer sont faibles devant la taille du capteur, on peut étendre le domaine d'intégration  $\Sigma$  à l'intégralité du plan transverse,

$$I_F^{Poi}(d) = \iint \left[ \frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} \right]^2 \frac{dx dy}{f_0(x-d, y)}. \quad (\text{C.33})$$

En utilisant le changement de variable suivant  $x' \triangleq x-d$ , on a

$$\frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} = \frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial d} = -\frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'}, \quad (\text{C.34})$$

et donc

$$\left[ \frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} \right]^2 = \left[ \frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'} \right]^2, \quad (\text{C.35})$$

ce qui permet de déduire l'expression suivante de l'information de Fisher,

$$\forall d, \quad I_F^{Poi}(d) = \iint \left[ \frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'} \right]^2 \frac{1}{f_0(x', y)} dx' dy = I_F^{Poi}(0), \quad (\text{C.36})$$

qui est indépendante de l'amplitude du déplacement  $d$ .

En utilisant l'expression de  $f_0(x, y)$  donnée à l'équation (4.3) page 124, on

peut remplacer  $f_0(x, y)$  par  $N_t|v_0(x, y)|^2$  et on obtient alors

$$\begin{aligned} \forall d, \quad I_F^{Poi}(d) &= \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [N_t|v_0(x, y)|^2] \right\}^2 \frac{dxdy}{N_t|v_0(x, y)|^2} \\ &= \iint \left\{ 2N_t|v_0(x, y)| \frac{\partial|v_0(x, y)|}{\partial x} \right\}^2 \frac{dxdy}{N_t|v_0(x, y)|^2} \\ &= 4N_t \iint \left[ \frac{\partial|v_0(x, y)|}{\partial x} \right]^2 dxdy. \end{aligned} \quad (C.37)$$

À partir de cette réécriture, si l'on note  $TF\{f\}(\nu_X, \nu_Y)$  la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction  $f(x, y)$  à valeurs réelles, et en appliquant l'égalité de Parseval, on peut montrer

$$\begin{aligned} \iint \left[ \frac{\partial|v_0(x, y)|}{\partial x} \right]^2 dxdy &= \iint \left| TF\left\{ \frac{\partial|v_0(x, y)|}{\partial x} \right\}(\nu_X, \nu_Y) \right|^2 d\nu_X d\nu_Y \\ &= \iint \left| 2\pi\nu_X TF\{|v_0|\}(\nu_X, \nu_Y) \right|^2 d\nu_X d\nu_Y \\ &= 4\pi^2 \iint \nu_X^2 \left| TF\{|v_0|\}(\nu_X, \nu_Y) \right|^2 d\nu_X d\nu_Y \\ &= 4\pi^2 \Delta_X^2[v_0(x, y)], \end{aligned} \quad (C.38)$$

où  $\Delta_X^2[v_0(x, y)]$  représente la largeur spectrale spatiale selon la direction  $X$  de la répartition spatiale du champ moyen  $v_0(x, y)$ , définie en page 128.

Enfin, en utilisant les relations (C.37) et (C.38), l'information de Fisher peut s'écrire  $I_F^{Poi}(d) = 16\pi^2 N_t \Delta_X^2[v_0(x, y)]$ , et on retrouve l'expression connue de la BCR pour l'estimation d'un déplacement de faisceau en lumière poissonnienne [105, 136, 157], en écrivant

$$BCR^{Poi}(d) = \frac{1}{I_F^{Poi}(d)} = \frac{1}{16\pi^2 N_t \Delta_X^2[v_0(x, y)]}. \quad (C.39)$$

### C.3.1.2 Modèle temporel de lois d'attente gamma

Nous supposons ici que les pixels du détecteur enregistrent le résultat de photocomptage de processus sous-poissoniens indépendants, décrits par la loi de probabilité  $P_{N_k}(n_k)$  de l'équation (3.33), correspondant au modèle de la section 3.2.2 de processus sous-poissoniens de temps d'attente gamma d'ordre  $L$  entier. Nous établissons ici la démonstration de la propriété 4.1 donnée en page 130, que nous rappelons ici :

**Propriété :** *Pour un processus sous-poissonien modélisé par des temps d'attente gamma d'ordre  $L$ , l'information de Fisher  $I_F(d)$  pour l'estimation du déplacement  $d$  est inférieure ou égale à l'information de Fisher, notée  $I_{F_M}(d)$ , évaluée dans le cas du processus de Poisson virtuel sous-jacent,*

$$I_F(d) \leq I_{F_M}(d) = L \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2 \times \mu(k, d). \quad (C.40)$$

Nous notons  $M_k$  la variable aléatoire associée au processus de Poisson *virtuel* sous-jacent associé au processus sous-poissonien au pixel  $k$  (Voir section 3.2.2.2). La moyenne de ce photocomptage *virtuel* au pixel  $k$  est  $\mu_{M_k} = L\mu_{N_k} = L\mu(k, d)$ . Le résultat  $m_k$  d'un hypothétique comptage de ce processus sous-jacent peut être décomposé entre  $n_k$  détections de photons réels et  $v_k = m_k - n_k$  détection de *photons virtuels*. La loi qui régit le comptage du processus  $M$  au pixel  $k$  peut donc s'écrire  $P_{M_k}(m_k) = P_{N_k, V_k}(n_k, v_k)$  et correspond à une loi de Poisson pour  $m_k$  puisque le temps d'attente entre chaque détection est distribué selon une loi exponentielle pour ce processus *virtuel*.

L'information de Fisher locale pour l'estimation du déplacement  $d$  associée à ce processus poissonien peut donc s'écrire

$$\mathcal{I}_{F_{M_k}}(k, d) \triangleq - \left\langle \frac{\partial^2 \ln[P_{M_k}(m_k)]}{\partial d^2} \right\rangle = - \sum_{m_k=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln[P_{M_k}(m_k)]}{\partial d^2} P_{M_k}(m_k), \quad (\text{C.41})$$

ou, de façon équivalente

$$\mathcal{I}_{F_{M_k}}(k, d) = \mathcal{I}_{F_{N_k, V_k}}(k, d) = - \sum_{v_k=0}^{+\infty} \sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln[P_{N_k, V_k}(n_k, v_k)]}{\partial d^2} P_{N_k, V_k}(n_k, v_k). \quad (\text{C.42})$$

Nous allons montrer que cette information de Fisher locale  $\mathcal{I}_{F_{M_k}}(k, d)$  est supérieure à l'information de Fisher locale du processus réel  $n_k$ , notée  $\mathcal{I}_{F_{N_k}}(k, d)$  dans cette annexe pour plus de clarté, et dont nous rappelons l'expression

$$\mathcal{I}_{F_{N_k}}(k, d) = - \left\langle \frac{\partial^2 [P_{N_k}(n_k)]}{\partial d^2} \right\rangle. \quad (\text{C.43})$$

Pour cela, nous posons

$$\Delta \mathcal{I}_F(k, d) \triangleq \mathcal{I}_{F_{N_k, V_k}}(k, d) - \mathcal{I}_{F_{N_k}}(k, d). \quad (\text{C.44})$$

En remarquant que  $P_{N_k}(n_k) = \sum_{v_k=0}^{+\infty} P_{N_k, V_k}(n_k, v_k)$ , on peut écrire

$$\Delta \mathcal{I}_F(k, d) = - \sum_{n_k=0}^{+\infty} \sum_{v_k=0}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial d^2} \left[ \ln[P_{N_k, V_k}(n_k, v_k)] - \ln[P_{N_k}(n_k)] \right] P_{N_k, V_k}(n_k, v_k), \quad (\text{C.45})$$

et par application de la règle de Bayes  $P_{N_k, V_k}(n_k, v_k) = P_{V_k|N_k}(v_k|n_k) \cdot P_{N_k}(n_k)$ , on obtient enfin

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{I}_F(k, d) &= - \sum_{n_k=0}^{+\infty} \sum_{v_k=0}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial d^2} \left[ \ln[P_{V_k|N_k}(v_k|n_k)] \right] P_{V_k|N_k}(v_k|n_k) P_{N_k}(n_k) \\ &= \sum_{n_k=0}^{+\infty} \mathcal{I}_{F_{V_k|N_k}}(d) P_{N_k}(n_k). \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Dans l'équation précédente, on reconnaît l'expression d'une information de Fisher



marginale

$$\mathcal{I}_{F_{V_k|N_k}}(d) \triangleq - \sum_{v_k=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln[P_{V_k|N_k}(v_k|n_k)]}{\partial d^2} P_{V_k|N_k}(v_k|n_k), \quad (\text{C.47})$$

qui est une quantité positive, montrant ainsi que  $\Delta \mathcal{I}_F(k, d)$  est positif et donc

$$\mathcal{I}_{F_{N_k}}(k, d) \leq \mathcal{I}_{F_{M_k}}(k, d). \quad (\text{C.48})$$

Cette inégalité permet finalement de majorer l'information de Fisher locale  $\mathcal{I}_{F_{N_k}}(k, d)$  par l'information de Fisher locale associée au processus poissonien *virtuel* sous-jacent, dont la valeur s'obtient aisément puisque  $P_{M_k}(m_k)$  est une loi de Poisson de moyenne  $L \times \mu(k, d)$ ,

$$\mathcal{I}_{F_{N_k}}(k, d) \leq \mathcal{I}_{F_{M_k}}(k, d) = L \frac{[\mu'(k, d)]^2}{\mu(k, d)}. \quad (\text{C.49})$$

Cette majoration étant valable pour tous les pixels  $k$  de l'image, on peut alors majorer l'information de Fisher globale en écrivant

$$I_F(d) \leq \sum_{k=1}^M \mathcal{I}_{F_{M_k}}(k, d) = I_{F_M}(d) = L \times I_F^{Poi}(d). \quad (\text{C.50})$$

On en déduit alors aisément la minoration de la BCR suivante :

$$BCR(d) \geq \widetilde{BCR}^L(d) = \frac{BCR^{Poi}(d)}{L} = \frac{1}{16LN_t\pi^2\Delta_X^2[v_0(x, y)]}, \quad (\text{C.51})$$

qui justifie donc la limite  $\widetilde{BCR}^L(d)$  de la BCR fournie à l'équation (4.25).

### C.3.1.3 Statistique binomiale de photocomptage

Supposons maintenant que l'image est perturbée en chaque pixel  $k$  par un processus sous-poissonien, modélisé par une loi de photocomptage binomiale de paramètre  $N_0$  fixé, et où l'intensité moyenne en chaque pixel s'écrit  $\mu(k, d) = N_0\eta(k, d)$ . Cette situation correspond à un modèle de formation d'image particulier qui suppose que le motif spatial d'éclairement est construit par absorption d'un faisceau sous-poissonien uniforme dont la loi de photocomptage serait binomiale, de paramètres  $N_0$  et  $\eta_0$ .

Plus précisément, ce masque d'absorption sera caractérisé pour le pixel  $k$  par un coefficient de transmission  $\tilde{\eta}(k)$ , compris entre 0 et 1, de sorte que  $\mu_{N_k} = N_0\eta_0\tilde{\eta}(k)$ . Il faut noter qu'avec ce modèle de formation d'image, le facteur de Fano est nécessairement différent d'un pixel à l'autre si l'intensité moyenne varie entre ces pixels puisque l'on a

$$F_{N_k} = 1 - \eta(k), \quad \text{avec} \quad \eta(k) \triangleq \eta_0\tilde{\eta}(k). \quad (\text{C.52})$$

Ainsi, lorsqu'on considère ce modèle, la réduction des fluctuations est plus importante pour les zones intenses de l'image, puisqu'une valeur élevée de  $\mu_{N_k}$

correspond à une valeur  $\eta(k)$  importante, et par conséquent à un facteur de Fano faible. Ce modèle de formation de l'image diffère donc sensiblement de celui que nous considérons au chapitre 4, mais nous allons voir que l'utilisation du modèle binomial rend possible le calcul explicite de l'information de Fisher locale pour des fluctuations sous-poissoniennes.

Lorsque l'on utilise le modèle binomial, la loi de probabilité de photocomptage s'écrit donc, pour le pixel  $k$ ,

$$P_{N_k}(n_k) = \binom{N_0}{n_k} [\eta(k, d)]^{n_k} [1 - \eta(k, d)]^{N_0 - n_k}, \quad (\text{C.53})$$

soit, en remplaçant  $\eta(k, d)$  par  $\mu(k, d)/N_0$ ,

$$P_{N_k}(n_k) = \binom{N_0}{n_k} \frac{1}{(N_0^{N_0})} [\mu(k, d)]^{n_k} [N_0 - \mu(k, d)]^{N_0 - n_k}. \quad (\text{C.54})$$

La logvraisemblance d'un tel photocomptage binomial s'écrit alors

$$\ell_k(n_k) = \ln P_{N_k}(n_k) = \ln \left[ \frac{1}{N_0^{N_0}} \binom{N_0}{n_k} \right] + n_k \ln \mu(k, d) + (N_0 - n_k) \ln [N_0 - \mu(k, d)], \quad (\text{C.55})$$

et sa dérivée première par rapport à  $\mu(k, d)$  vaut donc

$$\frac{\partial \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)} = \frac{n_k}{\mu(k, d)} - \frac{N_0 - n_k}{N_0 - \mu(k, d)}, \quad (\text{C.56})$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2 \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)^2} = -\frac{n_k}{\mu(k, d)^2} - \frac{N_0 - n_k}{[N_0 - \mu(k, d)]^2}. \quad (\text{C.57})$$

En remarquant alors que  $\langle n_k \rangle = \mu(k, d)$ , on montre que l'information de Fisher pour l'estimation du paramètre  $\mu(k, d)$ , définie à l'équation (4.12), s'écrit dans le cas binomial

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] = -\left\langle \frac{\partial^2 \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)^2} \right\rangle = \frac{1}{\mu(k, d)} + \frac{1}{[N_0 - \mu(k, d)]}, \quad (\text{C.58})$$

ou encore, en remarquant que  $\mu(k, d) = N_0 \eta(k, d)$  et que  $F(k, d) = 1 - \eta(k, d)$ ,

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] = \frac{N_0}{\mu(k, d)[N_0 - \mu(k, d)]} = \frac{1}{\mu(k, d)[1 - \eta(k, d)]} = \frac{1}{F(k, d)\mu(k, d)}. \quad (\text{C.59})$$

Par rapport au cas poissonien (équation (C.30)), l'information de Fisher locale est donc augmentée en proportion du facteur de Fano local  $F(k, d)$ .

L'information de Fisher globale  $I_F(d)$  s'obtient alors en sommant la relation précédente sur les  $M$  pixels de l'image,

$$I_F^{eff}(d) = \sum_{k=1}^M \left[ \frac{\partial \mu(k, d)}{\partial d} \right]^2 \times \frac{1}{F(k, d)\mu(k, d)}. \quad (\text{C.60})$$

Si l'on suppose enfin que le capteur est grand devant  $d$  et devant la taille du motif d'éclairement, l'hypothèse d'une répartition continue sur le capteur de pixels infinitésimaux permet d'écrire  $I_F(d)$  sous la forme suivante

$$I_F(d) = \iint \frac{1}{F(x-d, y)} \left[ \frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} \right]^2 \frac{dxdy}{f_0(x-d, y)} \quad (\text{C.61})$$

où l'on a remplacé la valeur du facteur de Fano  $F(k, d)$  au pixel  $k$  par la valeur du facteur de Fano  $F(x-d, y)$  au point de l'image de coordonnées  $(x-d, y)$ . Cette expression de l'information de Fisher permet ainsi de justifier dans un cas particulier l'expression de la BCR *effective* proposée à l'équation (4.29).

### C.3.1.4 Statistique de photocomptage de Bernoulli à faible flux

Évoquons maintenant le cas d'un photocomptage de Bernoulli qui peut s'écrire comme un cas limite d'un photocomptage binomial où l'on a fixé  $N_k = N_0 = 1$  pour tous les pixels  $k \in [1; M]$ , c'est-à-dire

$$P_{N_k}(n_k) = \mu(k, d)^{n_k} [1 - \mu(k, d)]^{(1-n_k)}. \quad (\text{C.62})$$

Dans ce cas, un calcul similaire au précédent permet de montrer que

$$\frac{\partial^2 \ell_k(n_k)}{\partial \mu(k, d)^2} = \frac{\partial^2 [\ln P_{N_k}(n_k)]}{\partial \mu(k, d)^2} = - \left[ \frac{n_k}{\mu(k, d)^2} + \frac{1 - n_k}{[1 - \mu(k, d)]^2} \right], \quad (\text{C.63})$$

et en remarquant que  $\langle n_k \rangle = \mu(k, d)$ , on obtient finalement

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] = - \left\langle \frac{\partial^2 \ell(n_k)}{\partial \mu(k, d)^2} \right\rangle = \frac{1}{\mu(k, d)[1 - \mu(k, d)]}, \quad (\text{C.64})$$

soit, puisqu'on suppose  $\forall k, \mu(k, d) \ll 1$ ,

$$\mathcal{I}_F^\mu[\mu(k, d)] \simeq \frac{1}{\mu(k, d)} [1 + \mu(k, d)]. \quad (\text{C.65})$$

En supposant une répartition continue de pixels infinitésimaux sur le capteur, et pour un faisceau d'extension spatiale faible devant celle du détecteur, on peut écrire une approximation de l'information de Fisher globale sous la forme intégrale suivante

$$I_F(d) \simeq \iint \left[ \frac{\partial f_0(x-d, y)}{\partial d} \right]^2 \left\{ \frac{1}{f_0(x-d, y)} + 1 \right\} dxdy, \quad (\text{C.66})$$

qui est également indépendante du déplacement  $d$ . En effet, en posant  $x' = x-d$ , on a

$$\forall d, \quad I_F(d) \simeq \iint \left[ \frac{\partial f_0(x', y)}{\partial x'} \right]^2 \left\{ \frac{1}{f_0(x', y)} + 1 \right\} dx'dy, \quad (\text{C.67})$$

où l'on reconnaît l'expression de l'information de Fisher pour une loi de Poisson

(voir équation (C.36)), et on a ainsi

$$\forall d, \quad I_F(d) \simeq I_F^{Poi}(d) + \iint \left[ \frac{\partial f_0(x, y)}{\partial x} \right]^2 dx dy. \quad (\text{C.68})$$

## C.4 Estimation de déplacement d'image au sens du maximum de vraisemblance

Pour des raisons didactiques, nous rappelons brièvement dans cette annexe comment sont établis les estimateurs d'un déplacement d'image au sens du maximum de vraisemblance étudiés au chapitre 4 dans le cas d'une image bruitée par un bruit de Poisson, ou par un bruit gaussien de variance fixée.

### C.4.1 Cas de fluctuations Poissonniennes

En un pixel  $k$  d'une image perturbée par un bruit de Poisson, la logvraisemblance correspondant au comptage de  $n_k$  photons s'écrit, d'après la loi de probabilité de Poisson donnée en équation (3.19),

$$\ell_k(n_k|d) = \ln P_{N_k}(n_k) = n_k \ln \mu(k, d) - \ln n_k! - \mu(k, d). \quad (\text{C.69})$$

Les fluctuations en chacun des  $M$  pixels étant supposées indépendantes, la logvraisemblance pour la totalité de l'image est simplement la somme de ces  $M$  contributions locales indépendantes. L'estimateur au sens du maximum de vraisemblance consiste à déterminer la valeur du paramètre  $\delta$  qui maximise la vraisemblance, ou la log-vraisemblance, i.e.,

$$\begin{aligned} \hat{d}_{MV}^{poi} &= \arg \max_{\delta} \left[ \sum_{k=1}^M n_k \ln \mu(k, \delta) - \ln n_k! - \mu(k, \delta) \right] \\ &= \arg \max_{\delta} \left[ \sum_{k=1}^M n_k \ln \mu(k, \delta) - \mu(k, \delta) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

En supposant alors que l'étendue spatiale du faisceau et que le déplacement à mesurer sont faibles devant la taille du capteur (ou de l'image dans son ensemble), on peut supposer que la quantité  $\sum_{k=1}^M \mu(k, \delta)$  est constante pour toute valeur du déplacement  $\delta$ . Dans ces conditions, il a été montré [63] que l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\hat{d}_{MV}^{poi} = \arg \max_{\delta} \left[ \sum_{k=1}^M n_k \ln \mu(k, \delta) \right]. \quad (\text{C.71})$$

La valeur du déplacement estimée  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  qui maximise la vraisemblance peut donc être obtenue en corrélant l'image mesurée  $\{n_k\}$ ,  $k \in [1; M]$  et le logarithme du motif d'éclairement moyen de référence. Le déplacement estimé  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  correspond à la valeur du paramètre  $\delta$  fournissant l'intercorrélacion maximale.

### C.4.2 Cas de fluctuations gaussiennes à variance fixée

Si l'on modélisait la loi de probabilité de photocomptage en chaque pixel de l'image par une densité de probabilité gaussienne à variance fixée  $\sigma^2$ , on aurait

$$P_{N_k}(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{[n_k - \mu(k, d)]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (C.72)$$

et la logvraisemblance pour le pixel  $k$  de l'image s'écrirait dans ce cas

$$\ell_k(n_k|d) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{[n_k - \mu(k, d)]^2}{2\sigma^2}, \quad (C.73)$$

où  $\mu(k, d)$  représente la valeur moyenne du motif d'intensité d'éclairement au pixel  $k$ , déplacé de  $d$  selon la direction  $X$ . Dans ces conditions, avec les mêmes hypothèses que pour le cas poissonien, il a été montré [157] que l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance du déplacement  $d$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \hat{d}_{MV}^{gauss} &= \arg \max_{\delta} \left[ \sum_{k=1}^M -n_k^2 - [\mu(k, \delta)]^2 + 2 n_k \mu(k, \delta) \right] \\ &= \arg \max_{\delta} \left[ \sum_{k=1}^M n_k \mu(k, \delta) \right]. \end{aligned} \quad (C.74)$$

À la différence du cas Poissonien où l'image mesurée était corrélée avec le logarithme de l'image de référence, on peut voir en analysant l'équation précédente que cet estimateur met en œuvre l'intercorrélation entre l'image mesurée  $\{n_k\}$ ,  $k \in [1; M]$  et l'image de référence  $\mu(k, \delta)$ .

## C.5 Équivalence des estimateurs $\hat{d}_{MV}^{poi}$ et $\hat{d}_{lin}$ pour de petits déplacements d'un faisceau gaussien

Considérons une situation où l'image dont on doit estimer le déplacement est de forme gaussienne<sup>103</sup>. On se limite également au cas de petits déplacements autour de la position d'origine de l'image, c'est-à-dire  $d \ll 1$ .

Dans ce cas, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance donné en équation (4.36) revient à déterminer la valeur du paramètre  $d$  qui vérifie

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial d} \left\{ \iint n(x, y) \ln f_0(x - d, y) dx dy \right\}_{d=\hat{d}_{MV}^{poi}} = 0 \\ \Leftrightarrow &\iint n(x, y) \left\{ \frac{\partial}{\partial d} [\ln f_0(x - d, y)] \right\}_{d=\hat{d}_{MV}^{poi}} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (C.75)$$

Or d'après l'équation (4.3), on peut écrire  $f_0(x - d, y) = N_t |v_0(x - d, y)|^2$ ,

<sup>103</sup> – L'expression du motif d'intensité  $f_0(x, y)$  est donné dans ce cas à l'équation (4.22).

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d} [\ln f_0(x-d, y)] &= \frac{\partial}{\partial d} [2 \ln |v_0(x-d, y)| + \ln N_t] \\ &= 2 \frac{\frac{\partial}{\partial d} [|v_0(x-d, y)|]}{|v_0(x-d, y)|} = 2g^{opt}(x-d, y), \end{aligned} \quad (C.76)$$

où l'on reconnaît la fonction de pondération optimale  $g^{opt}(x, y)$  introduite à l'équation (4.34) qui permet d'optimiser la sensibilité de l'estimateur « linéaire »  $\hat{d}_{lin}$  introduit à la section 4.3.1.

Lorsque l'on considère une répartition spatiale gaussienne du champ moyen  $v_0(x, y)$  de largeur  $w$ , on a d'après l'équation (4.21),

$$v_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4w^2}\right), \quad (C.77)$$

et la fonction de pondération optimale  $g^{opt}(x, y)$  vérifie dans ce cas,

$$g^{opt}(x, y) \propto \frac{1}{|v_0(x, y)|} \frac{\partial}{\partial x} [|v_0(x, y)|] = -\frac{x}{2w^2}. \quad (C.78)$$

En utilisant ces résultats, l'égalité (C.75) peut se réécrire alors sous la forme suivante, pour une répartition spatiale gaussienne du champ moyen :

$$\begin{aligned} &\iint n(x, y) \left\{ \frac{\partial}{\partial d} [\ln f_0(x-d, y)] \right\}_{d=\hat{d}_{MV}^{poi}} dx dy = 0. \\ \Leftrightarrow &\iint n(x, y) \left\{ 2g^{opt}(x-d, y) \right\}_{d=\hat{d}_{MV}^{poi}} dx dy = 0. \\ &\Leftrightarrow \iint n(x, y) \frac{x - \hat{d}_{MV}^{poi}}{2w^2} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (C.79)$$

Cette dernière égalité peut enfin se mettre sous la forme

$$\frac{\hat{d}_{MV}^{poi}}{2w^2} \iint n(x, y) dx dy = \iint g^{opt}(x, y) n(x, y) dx dy, \quad (C.80)$$

où l'on reconnaît dans le membre de gauche l'estimateur de l'intensité totale  $\mathcal{N}_t$  introduit en équation (4.32), tandis que le membre de droite n'est autre que la mesure  $\mathcal{S}_t$  de l'intensité totale pondérée par la fonction  $g^{opt}(x, y)$  introduite à l'équation (4.33). L'équation précédente se réécrit en effet

$$\frac{\hat{d}_{MV}^{poi}}{2w^2} \mathcal{N}_t = \mathcal{S}_t, \quad (C.81)$$

d'où l'on déduit finalement la forme approchée suivante de l'estimateur  $\hat{d}_{MV}^{poi}$  :

$$\hat{d}_{MV}^{poi} = -2w^2 \frac{\mathcal{S}_t}{\mathcal{N}_t}, \quad (C.82)$$

qui s'identifie bien à l'estimateur linéaire  $\hat{d}_{lin}$  de l'équation (4.35) dans ce cas.

## C.6 Mesures de séparabilité entre lois binomiales et lois de Poisson

Nous établissons dans cette annexe les expressions des différentes mesures de séparabilité (contraste de Fisher, mesure de Chernoff et distance de Bhattacharyya) utilisées au chapitre 5 pour évaluer la disparité entre deux lois binomiales de paramètres distincts ou entre deux lois de Poisson. Les notations utilisées dans cette annexe seront conformes au problème de détection étudié dans le chapitre 5 qui vise à discriminer entre deux hypothèses selon qu'un faisceau poissonien ou sous-poissonien binomial a subi ou non une absorption de coefficient de transmission  $\tau$ .

Les valeurs limites de l'exposant de Chernoff lorsqu'on fait tendre le coefficient de transmission  $\tau$  vers zéro ou vers un sont également déterminées. Les formulations explicites de ces mesures de séparabilité nous permettront enfin de déterminer l'expression approchée, lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , du facteur de Fano équivalent  $\mathcal{F}_B$  fondé sur la distance de Bhattacharyya ainsi que l'expression approchée de  $\mathcal{F}_C$  fondé sur la mesure de Chernoff, lorsque le contraste est maximal ( $\tau \rightarrow 1$ ).

### C.6.1 Cas des lois binomiales

#### C.6.1.1 Détermination de la mesure de Chernoff

Pour simplifier les notations dans les calculs qui vont suivre, on notera  $p_1 = \eta_1$  le paramètre de la loi binomiale correspondant à l'hypothèse de non absorption (hypothèse  $H_1$ ), et  $p_2 = \tau \eta_1$  celui de la loi binomiale qui décrit un faisceau ayant subi l'absorption (hypothèse  $H_2$ ). On notera aussi  $q_1 = 1 - p_1 = F_1$  et  $q_2 = 1 - p_2 = F_2$ .

Pour déterminer la mesure de Chernoff entre ces deux lois binomiales, nous devons déterminer l'**exposant de Chernoff** qui maximise l'expression suivante, (voir l'équation (5.7) en page 157)

$$\mathcal{C}(s) = -\ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [P_N(n|H_1)]^s [P_N(n|H_2)]^{1-s} \right\}, \quad (\text{C.83})$$

lorsque  $s$  varie entre 0 et 1.

Avec ces nouvelles notations,  $\mathcal{C}(s)$  se réécrit, en utilisant les expressions des lois binomiales  $P_N(n|H_1)$  et  $P_N(n|H_2)$  données aux équations (5.1) et (5.2),

$$\mathcal{C}(s) = -\ln \left\{ \sum_{n=0}^{N_0} \binom{N_0}{n} (p_1^n)^s (p_2^n)^{1-s} (q_1^{N_0-n})^s (q_2^{N_0-n})^{1-s} \right\}, \quad (\text{C.84})$$

et en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{N_0} \binom{N_0}{n} a^n b^{N_0-n} = (a + b)^{N_0}, \quad (\text{C.85})$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(s) &= -\ln \left\{ [p_1^s p_2^{1-s} + q_1^s q_2^{1-s}]^{N_0} \right\} \\ &= -N_0 \ln \left\{ p_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-s} + q_1 \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{1-s} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

La dérivée de cette quantité par rapport à l'exposant  $s$  peut être déterminée, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{C}(s)}{ds} &= -N_0 \frac{\frac{d}{ds} \left\{ p_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-s} + q_1 \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{1-s} \right\}}{p_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-s} + q_1 \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{1-s}} \\ &= N_0 \frac{p_1 \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-s} + q_1 \ln \left( \frac{q_2}{q_1} \right) \cdot \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{1-s}}{p_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-s} + q_1 \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{1-s}}. \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

La valeur  $s^*$  qui maximise  $\mathcal{C}(s)$  s'obtient finalement en résolvant

$$\begin{aligned} p_1 \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-s^*} + q_1 \ln \left( \frac{q_2}{q_1} \right) \cdot \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{1-s^*} &= 0 \\ \Leftrightarrow q_1 \ln \left( \frac{q_2}{q_1} \right) \cdot z^{1-s^*} &= -p_1 \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right), \quad \text{avec } z = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1} \end{aligned} \quad (\text{C.88})$$

ce qui se réécrit encore de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z^{1-s^*} &= -\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{\ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)}{\ln \left( \frac{q_2}{q_1} \right)} \\ \Leftrightarrow s^* &= 1 - \frac{1}{\ln z} \ln \left\{ -\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{\ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)}{\ln \left( \frac{q_2}{q_1} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

En remplaçant enfin avec les notations originales, on a  $p_2/p_1 = \tau$ , and  $q_2/q_1 = F_2/F_1 = \alpha(F_1, \tau)$ , et l'exposant de Chernoff s'écrit

$$\boxed{s^* = 1 - \frac{1}{\ln \left[ \frac{\alpha(F_1, \tau)}{\tau} \right]} \ln \left\{ \frac{F_1 - 1}{F_1} \cdot \frac{\ln[\tau]}{\ln[\alpha(F_1, \tau)]} \right\}}. \quad (\text{C.90})$$

Quant à la fonction  $\mathcal{C}(s)$ , celle-ci s'écrit,

$$\mathcal{C}(s) = -N_0 \ln \left[ (1 - F_1) \tau^{1-s} + F_1 \alpha(F_1, \tau)^{1-s} \right], \quad (\text{C.91})$$

et permet d'obtenir la mesure de Chernoff  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}(s^*)$  qui s'écrit donc en fonction de  $\mu_{N_1}$  en utilisant la relation  $\mu_{N_1} = N_0 \eta_1 = N_0(1 - F_1)$  :

$$\boxed{\mathcal{C}^* = \mathcal{C}(s^*) = -\frac{\mu_{N_1}}{1 - F_1} \ln \left[ (1 - F_1) \tau^{1-s^*} + F_1 \alpha(F_1, \tau)^{1-s^*} \right]}. \quad (\text{C.92})$$



### C.6.1.2 Distance de Bhattacharyya

La distance de Bhattacharyya peut être directement obtenue à partir de l'équation (C.91) en fixant  $s = 1/2$ , ce qui fournit

$$\boxed{\mathcal{B} = -\frac{\mu_{N_1}}{1 - F_1} \ln \left[ (1 - F_1) \sqrt{\tau} + F_1 \sqrt{\alpha(F_1, \tau)} \right].} \quad (\text{C.93})$$

### C.6.1.3 Expression du contraste de Fisher

À partir de la définition donnée en équation (5.19), on peut écrire le contraste de Fisher entre deux lois binomiales de même paramètre  $N_0$  et de paramètres respectifs  $\eta_1 = 1 - F_1$  et  $\tau\eta_1 = \tau(1 - F_1)$ , modélisant ainsi l'absorption partielle, par un facteur de transmission  $\tau$ , d'un faisceau sous-poissonien de facteur de Fano  $F_1$  et moyenne  $\mu_{N_1} = N_0\eta_1$ . On a alors  $\mu_{N_2} = \tau\mu_{N_1}$  tandis que pour les variances, on a  $\text{var}(N_1) = (1 - \eta_1)\mu_{N_1} = F_1\mu_{N_1}$  et  $\text{var}(N_2) = (1 - \tau\eta_1)\mu_{N_2} = F_2\mu_{N_2}$ . On en déduit le contraste de Fisher suivant

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\mu_{N_1}}{F_1} \cdot \frac{(1 - \tau)^2}{1 + \tau\alpha(F_1, \tau)},} \quad (\text{C.94})$$

où le rapport des facteurs de Fano  $\alpha(F_1, \tau) = F_2/F_1 = \tau + (1 - \tau)/F_1$  a été défini en équation (3.25).

## C.6.2 Cas des lois de Poisson

On suppose maintenant que les expériences de discrimination sont opérées entre un faisceau poissonien non perturbé et un faisceau poissonien partiellement absorbé. Ainsi, la loi de probabilité du processus non absorbé  $P_N(n|H_1)$  est une loi de Poisson de moyenne  $\mu_{N_1} = \mu_{N_p}$ , tandis que pour le processus absorbé,  $P_N(n|H_2)$  est également une loi de Poisson mais de moyenne  $\mu_{N_2} = \tau\mu_{N_p}$ .

### C.6.2.1 Détermination de la mesure de Chernoff

Ici encore, il est nécessaire de déterminer l'exposant  $s_p^*$  qui maximise la quantité  $\mathcal{C}_p(s)$  qui s'écrit dans le cas de statistiques de Poisson,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_p(s) &= -\ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [P_N(n|H_1)]^s [P_N(n|H_2)]^{1-s} \right\} \\ &= -\ln \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ e^{-\mu_{N_p}} \frac{\mu_{N_p}^n}{n!} \right]^s \left[ e^{-\tau\mu_{N_p}} \frac{(\tau\mu_{N_p})^n}{n!} \right]^{(1-s)} \right\} \\ &= -\ln \left\{ e^{-s\mu_{N_p} - \tau\mu_{N_p}(1-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\tau^{(1-s)}\mu_{N_p}]^n}{n!} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

soit en remarquant que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ , et donc que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\tau^{(1-s)}\mu_{N_p}]^n}{n!} = e^{\mu_{N_p}\tau^{(1-s)}}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_p(s) &= -\ln\left\{e^{-\mu_{N_p}[s+\tau(1-s)-\tau^{(1-s)})}\right\} \\ &= \mu_{N_p}\{s + \tau(1-s) - \tau^{(1-s)}\}. \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

La valeur  $s_p^*$  de l'exposant qui maximise cette dernière quantité s'obtient en résolvant

$$\frac{\partial \mathcal{C}_p(s)}{\partial s} = 0 = \mu_{N_p} - \tau\mu_{N_p} + \mu_{N_p} \ln[\tau]e^{(1-s)\ln\tau}, \quad (\text{C.97})$$

ce qui conduit à la solution suivante

$$\boxed{s_p^* = 1 - \frac{\ln\left[\frac{\tau-1}{\ln\tau}\right]}{\ln\tau}}, \quad (\text{C.98})$$

où l'exposant  $p$  indique toujours des fluctuations poissonniennes.

En remplaçant cette valeur de  $s_p^*$  dans l'équation (C.96), on obtient enfin

$$\boxed{\mathcal{C}_p(s_p^*) = \mu_{N_p}\{s_p^* + \tau(1-s_p^*) - \tau^{(1-s_p^*)}\}}, \quad (\text{C.99})$$

qui s'écrit également,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_p(s_p^*) &= \mu_{N_p}\left\{1 - \frac{\ln\left[\frac{\tau-1}{\ln\tau}\right]}{\ln\tau} + \tau\frac{\ln\left[\frac{\tau-1}{\ln\tau}\right]}{\ln\tau} - \tau\frac{\ln\left[\frac{\tau-1}{\ln\tau}\right]}{\ln\tau}\right\} \\ &= \mu_{N_p}\left\{1 + \frac{\tau-1}{\ln\tau}\ln\left[\frac{\tau-1}{\ln\tau}\right] - e^{\ln\left[\frac{\tau-1}{\ln\tau}\right]}\right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.100})$$

ou encore,

$$\mathcal{C}_p(s_p^*) = \mu_{N_p}\left\{1 - \frac{\tau-1}{\ln\tau}\left[1 - \ln\left(\frac{\tau-1}{\ln\tau}\right)\right]\right\}. \quad (\text{C.101})$$

### C.6.2.2 Distance de Bhattacharyya

Ici encore, on déduit immédiatement la distance de Bhattacharyya à partir de l'équation (C.96) en fixant  $s_p = 1/2$ ,

$$\boxed{\mathcal{B}_p = \frac{\mu_{N_p}}{2}(1 - \sqrt{\tau})^2}. \quad (\text{C.102})$$

### C.6.2.3 Expression du contraste de Fisher

En appliquant simplement la définition de l'équation (5.19), on obtient

$$\boxed{\mathcal{R}_p = \mu_{N_p}\frac{(1-\tau)^2}{1+\tau}}, \quad (\text{C.103})$$

où l'exposant  $p$  permet d'indiquer que les fluctuations sont supposées poissonniennes.

### C.6.3 Validité de l'approximation de la mesure de Chernoff par la distance de Bhattacharyya

À partir des expressions des exposants de Chernoff dans le cas de deux lois binomiales (équation (C.90)) ou de deux lois de Poisson (équation (C.98)), nous pouvons tenter de délimiter l'ensemble des situations physiques du problème de détection considéré pour lesquelles la distance de Bhattacharyya permettra d'approcher la mesure de Chernoff avec une précision raisonnable. Il suffit pour cela de déterminer l'ensemble des paramètres  $\tau$  et  $F_1$  garantissant que les exposants de Chernoff  $s^*$  et  $s_p^*$  ne soient pas trop éloignés de  $1/2$ .

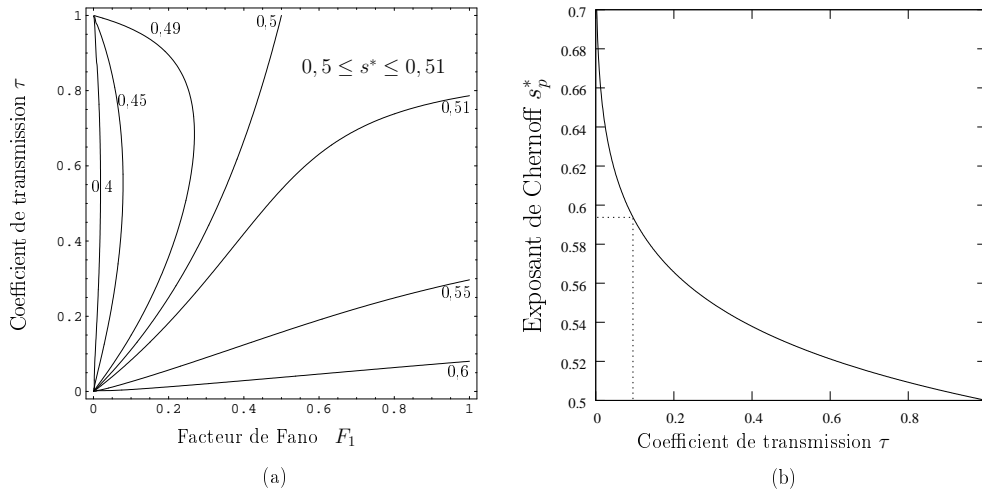


FIG. C.3 – (a) Évolution de l'exposant de Chernoff  $s^*$  (équation (C.90)) entre hypothèses binomiales représenté en courbes de niveau en fonction du facteur de transmission  $\tau$  et du facteur de Fano  $F_1$ . (b) Évolution de l'exposant de Chernoff  $s_p^*$  (équation (C.98)) entre hypothèses poissonniennes en fonction du facteur de transmission  $\tau$ . Ces deux exposants  $s^*$  et  $s_p^*$  ne dépendent pas de l'intensité moyenne  $\mu_{N_1}$ .

Dans ce but, nous pouvons observer la figure C.3 sur laquelle nous avons représenté en courbes de niveau la valeur de l'exposant de Chernoff  $s^*$  dans le cas binomial (figure C.3.a) en fonction des paramètres  $\tau$  et  $F_1$  et où l'exposant de Chernoff  $s_p^*$  dans le cas poissonien (figure C.3.b) est tracé en fonction de  $\tau$ . On peut alors vérifier que ces quantités restent comprises entre 0,4 et 0,6 tant que l'absorption n'est pas trop importante ( $\tau \geq 0,1$ ) et que le facteur de Fano incident n'est pas trop faible ( $F_1 \geq 2 \cdot 10^{-2}$ ) [39].

### C.6.4 Limite des exposants de Chernoff pour de très faibles contrastes

Définissons tout d'abord  $\varepsilon \triangleq 1 - \tau$ . Dans la limite des très faibles contrastes, le facteur de transmission  $\tau$  tend vers 1 et par conséquent  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dans ces conditions, on peut montrer le résultat suivant :

**Propriété C.1** *L'exposant de Chernoff  $s^*$  pour des lois binomiales, et l'exposant de Chernoff  $s_p^*$  pour des lois de Poisson tendent tous deux vers  $1/2$  dans la limite des faibles contrastes, c'est-à-dire lorsque  $\tau$  tend vers 1.*

**Démonstration C.1** On réécrit tout d'abord

$$\alpha = 1 - \varepsilon \frac{F_1 - 1}{F_1} = 1 - \varepsilon K, \text{ avec } K \triangleq \frac{F_1 - 1}{F_1}. \quad (\text{C.104})$$

D'après l'équation (C.90), on a

$$s^* = 1 - \frac{\ln \left[ K \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1-\varepsilon K)} \right]}{\ln \left[ \frac{1-\varepsilon K}{1-\varepsilon} \right]}. \quad (\text{C.105})$$

Pour évaluer la limite de l'exposant de Chernoff pour les très faibles contrastes, nous examinons le comportement au premier ordre en  $\varepsilon$  du numérateur et du dénominateur de la fraction qui apparaît dans l'équation précédente. En développant au premier ordre le dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} \ln \left[ \frac{1-\varepsilon K}{1-\varepsilon} \right] &= \ln[(1-\varepsilon K)(1+\varepsilon+o(\varepsilon))] \\ &= \ln[1-\varepsilon(K-1)+o(\varepsilon)] = \varepsilon(1-K)+o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.106})$$

D'autre part, en ce qui concerne le numérateur noté  $\ln[U]$  avec

$$\begin{aligned} U &= K \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1-\varepsilon K)} = \frac{K\varepsilon(1+\varepsilon/2+o(\varepsilon))}{\varepsilon K(1+\varepsilon K/2+o(\varepsilon))} \\ &= [1+\varepsilon/2(1-K)+o(\varepsilon)], \end{aligned} \quad (\text{C.107})$$

on a au premier ordre en  $\varepsilon$ ,

$$\ln[U] = \ln[1+\varepsilon/2(1-K)+o(\varepsilon)] = \varepsilon/2(1-K)+o(\varepsilon). \quad (\text{C.108})$$

La limite de l'exposant de Chernoff aux faibles contrastes s'obtient donc finalement en écrivant

$$s^* = 1 - \frac{\varepsilon \frac{1-K}{2} + o(\varepsilon)}{\varepsilon(1-K) + o(\varepsilon)} = 1/2 + o(\varepsilon). \quad (\text{C.109})$$

Le même développement limité au premier ordre peut être effectué dans le cas poissonien. En effet, d'après l'équation (C.98), on obtient le développement suivant lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} s_p^* &= 1 - \frac{\ln \left[ \frac{-\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)} \right]}{\ln(1-\varepsilon)} = 1 - \frac{\ln \left[ \frac{-\varepsilon}{-\varepsilon(1+\varepsilon/2+o(\varepsilon))} \right]}{-\varepsilon+o(\varepsilon)} \\ &= 1 - \frac{\ln[1-\varepsilon/2+o(\varepsilon)]}{-\varepsilon+o(\varepsilon)} = 1 - \frac{\varepsilon/2+o(\varepsilon)}{\varepsilon+o(\varepsilon)} = 1/2 + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.110})$$

### C.6.5 Limite des exposants de Chernoff à contraste maximal

Analysons maintenant le comportement limite de l'exposant de Chernoff ( $s^*$  ou  $s_p^*$ ) lorsque le contraste est maximal, c'est-à-dire quand  $\tau \rightarrow 0$ . Dans ce cas, on peut montrer le résultat suivant :

**Propriété C.2** *L'exposant de Chernoff  $s^*$  pour des lois binomiales, et l'exposant de Chernoff  $s_p^*$  pour des lois de Poisson tendent tous deux vers 1 lorsque le contraste est maximal, c'est-à-dire lorsque  $\tau$  tend vers 0.*

**Démonstration C.2** Avec  $K = (F_1 - 1)/F_1$ , la limite de l'exposant de Chernoff  $s^*$  donné en équation (C.90) peut s'écrire,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} s^* &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{1}{\ln(z)} \ln \left[ \frac{F_1 - 1}{F_1} \frac{\ln \tau}{\ln \alpha(F_1, \tau)} \right] \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{1}{\ln(\alpha(F_1, \tau)/\tau)} \ln \left[ K \frac{\ln \tau}{\ln \alpha(F_1, \tau)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.111})$$

Avec  $\alpha(F_1, \tau) = \tau + (1 - \tau)/F_1$ , on voit que  $\alpha(F_1, \tau) \sim 1/F_1$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$  et par conséquent,  $\ln(\alpha(F_1, \tau)/\tau) \sim \ln(1/\tau F_1)$ .

En fixant maintenant  $x \triangleq 1/\tau$ , on obtient pour  $\tau \rightarrow 0$  ou de manière équivalente, pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} s^* &\sim 1 - \frac{1}{\ln(x/F_1)} \ln \left[ K \frac{\ln 1/x}{\ln 1/F_1} \right] \\ &\sim 1 - \frac{\ln(K/\ln F_1) + \ln \ln x}{\ln x - \ln F_1} \\ &\sim 1 - \frac{\ln \ln x}{\ln x} = 1, \end{aligned} \quad (\text{C.112})$$

puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} = 0$ .

De la même façon dans le cas poissonien, la limite du coefficient de Chernoff  $s_p^*$  de l'équation (C.98) vaut, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} s_p^* = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{\ln \left[ \frac{\tau-1}{\ln \tau} \right]}{\ln(\tau)} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ 1 - \frac{\ln \ln x}{\ln x} \right\} = 1. \quad (\text{C.113})$$

### C.6.6 Expression approchée de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau)$ pour les faibles contrastes

Nous établissons ici l'expression approchée du facteur de Fano *équivalent*  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau)$  pour les contrastes les plus faibles, c'est-à-dire lorsque le facteur de transmission  $\tau$  tend vers 1. L'expression de  $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau)$  se déduit aisément à partir de  $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau)$  donné à l'équation (5.18),

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau) = \frac{1}{\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(F_1, \tau)} = \frac{F_1 - 1}{2} \cdot \frac{(1 - \sqrt{\tau})^2}{\ln \left[ (1 - F_1)\sqrt{\tau} + F_1\sqrt{\alpha(F_1, \tau)} \right]}. \quad (\text{C.114})$$

Comme précédemment, on supposera pour établir le développement limité au premier ordre de  $\mathcal{F}_B(F_1, \tau)$ , que  $\varepsilon = 1 - \tau$  et que  $\alpha(F_1, \tau) = 1 - K\varepsilon$ , où  $K$  a été introduit à l'équation (C.104).

Pour obtenir un développement limité à l'ordre un de  $\mathcal{F}_B(F_1, \tau)$ , il nous faut développer préalablement le numérateur et le dénominateur de cette expression à l'ordre 3 en  $\varepsilon$ , avec  $\varepsilon = 1 - \tau$ . En ce qui concerne le numérateur, on obtient le développement suivant en remarquant que  $\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8 - \varepsilon^3/16 + o(\varepsilon^3)$

$$(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^2 = \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^3}{16} + o(\varepsilon^3) \right]^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3}{8} + o(\varepsilon^3). \quad (\text{C.115})$$

Pour le dénominateur de l'équation (C.114), le développement limité est un peu plus complexe. En remarquant que le paramètre  $\alpha(F_1, \tau)$  peut s'écrire  $\alpha(F_1, \tau) = 1 - K\varepsilon$ , l'expression du dénominateur devient

$$\ln[(1 - F_1)\sqrt{\tau} + F_1\sqrt{\alpha(F_1, \tau)}] = \ln[(1 - F_1)\sqrt{1 - \varepsilon} + F_1\sqrt{1 - K\varepsilon}]. \quad (\text{C.116})$$

Cette expression peut ainsi être développée au troisième ordre en  $\varepsilon$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \ln[(1 - F_1)\sqrt{1 - \varepsilon} + F_1\sqrt{1 - K\varepsilon}] \\ &= \ln\left\{ (1 - F_1)\left[1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^3}{16}\right] + F_1\left[1 - K\frac{\varepsilon}{2} - K^2\frac{\varepsilon^2}{8} - K^3\frac{\varepsilon^3}{16}\right] + o(\varepsilon^3) \right\} \\ &= \ln\left\{ \underbrace{(1 - F_1 + F_1)}_1 - \underbrace{\left(\frac{1 - F_1 + KF_1}{2}\right)}_0 \varepsilon - \underbrace{\left(\frac{1 - F_1 + K^2F_1}{8}\right)}_{-K/8} \varepsilon^2 \right. \\ & \quad \left. - \underbrace{\left(\frac{1 - F_1 + K^3F_1}{16}\right)}_{K(1-2F_1)/16F_1} \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) \right\} \\ &= \ln\left\{ 1 + \frac{K\varepsilon^2}{8}\left[1 + \frac{2F_1 - 1}{2F_1}\varepsilon\right] + o(\varepsilon^3) \right\} \\ &= \frac{K\varepsilon^2}{8}\left[1 + \frac{2F_1 - 1}{2F_1}\varepsilon\right] + o(\varepsilon^3) = \frac{(F_1 - 1)\varepsilon^2}{8F_1}\left[1 + \frac{2F_1 - 1}{2F_1}\varepsilon\right] + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{C.117})$$

Finalement, en utilisant les deux développements limités des équations précédentes (C.115) et (C.117) dans l'expression du critère  $\mathcal{F}_B(F_1, \tau)$  donné à l'équation (C.114), on obtient la propriété suivante :

**Propriété C.3** *Dans la limite des contrastes faibles, lorsque le facteur de transmission  $\tau$  tend vers 1, l'expression approchée du facteur de Fano équivalent  $\mathcal{F}_B(F_1, \tau)$  au premier ordre en  $\varepsilon = 1 - \tau$  est*

$$\mathcal{F}_B(F_1, \tau) = \bar{F} = F_1 \left( 1 + \frac{1 - F_1}{2F_1} \varepsilon \right), \quad (\text{C.118})$$

qui s'identifie à la valeur moyenne des facteurs de Fano  $F_1$  et  $F_2$ ,

$$\bar{F} = \frac{F_1 + F_2}{2}. \quad (\text{C.119})$$

**Démonstration C.3** En insérant les développements limités obtenus aux équations (C.115) et (C.117) dans l'équation (C.114), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_B(F_1, \tau) &= \frac{(F_1 - 1)}{2} \frac{\frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon/2)}{4} + o(\varepsilon^3)}{\frac{(F_1-1)\varepsilon^2}{8F_1} [1 + (2F_1 - 1)\varepsilon/2F_1] + o(\varepsilon^3)} \\ &= F_1 \frac{1 + \varepsilon/2 + o(\varepsilon)}{1 + \varepsilon(2F_1 - 1)/2F_1 + o(\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{C.120}$$

Par ailleurs, en posant  $v = \varepsilon(2F_1 - 1)/2F_1 + o(\varepsilon)$ , et en notant que  $1/(1 + v) = 1 - v + o(v)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_B(F_1, \tau) &= F_1 [1 + \varepsilon/2 + o(\varepsilon)] [1 - \varepsilon(2F_1 - 1)/2F_1 + o(\varepsilon)] \\ &= F_1 [1 + \varepsilon \frac{1 - F_1}{2F_1} + o(\varepsilon)].\end{aligned}\tag{C.121}$$

Dans un second temps, on peut écrire, puisque  $F_2 = \alpha(F_1, \tau)F_1$

$$\frac{F_1 + F_2}{2} = F_1 \frac{1 + \alpha(F_1, \tau)}{2} = F_1 [1 + \frac{\alpha(F_1, \tau) - 1}{2}],\tag{C.122}$$

et l'on obtient en remarquant que  $\alpha(F_1, \tau) = 1 - \varepsilon[F_1 - 1]/F_1$ ,

$$\frac{F_1 + F_2}{2} = F_1 [1 + \varepsilon \frac{1 - F_1}{2F_1}],\tag{C.123}$$

qui s'identifie bien à la valeur de  $\bar{F}$  calculée à l'équation (C.118).

### C.6.7 Expression approchée de $\mathcal{F}_C(F_1, \tau)$ à fort contraste

Pour les situations de contraste maximal ( $\tau \rightarrow 0$ ), nous avons montré à la section C.6.5 de cette annexe que les exposants de Chernoff  $s^*$  et  $s_p^*$  se comportaient asymptotiquement comme la fonction  $(1 - [\ln(\ln x)]/\ln x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , où l'on avait posé  $x = 1/\tau$ . Ce comportement asymptotique des exposants va nous permettre de déterminer une forme asymptotique du facteur de Fano équivalent  $\mathcal{F}_C(F_1, \tau)$  à fort contraste.

Pour établir cette expression asymptotique, il convient de noter préalablement que les propriétés suivantes sont vérifiées

- $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{\tau \rightarrow 0} a \times s^* = \lim_{\tau \rightarrow 0} a \times s_p^* = a$  ;
- $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{\tau \rightarrow 0} a \times (1 - s^*) = \lim_{\tau \rightarrow 0} a \times (1 - s_p^*) = 0$  ;
- $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{\tau \rightarrow 0} a^{(1-s^*)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} a^{(1-s_p^*)} = 1$ .
- $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{\tau \rightarrow 0} (a + b\tau)^{(1-s^*)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} (a + b\tau)^{(1-s_p^*)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} a^{(1-s_p^*)} = 1$ .

Par ailleurs, on peut vérifier, en remplaçant indifféremment  $s^*$  ou  $s_p^*$  par leur comportement asymptotique, que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e^{(1-s^*) \ln \tau} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \ln x}{\ln x} \ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\ln \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0,$$

ce qui garantit que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{(1-s^*)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{(1-s_p^*)} = 0. \quad (\text{C.124})$$

À partir de ces propriétés, on peut enfin déterminer la limite de la mesure de Chernoff entre lois binomiales donnée à l'équation (C.92) lorsque  $\tau \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{C}(s^*) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mu_{N_1}}{F_1 - 1} \ln \left[ (1 - F_1)\tau^{1-s^*} + F_1\alpha(F_1, \tau)^{1-s^*} \right] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mu_{N_1}}{F_1 - 1} \ln \left[ (1 - F_1)\tau^{1-s^*} + F_1\left(\tau + \frac{1-\tau}{F_1}\right)^{1-s^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.125})$$

Or, d'après les propriétés précédentes, on a  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{1-s^*} = 0$  et  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\tau + \frac{1-\tau}{F_1}\right)^{1-s^*} = 1$ , d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{C}(s^*) &= \frac{\mu_{N_1}}{F_1 - 1} \ln \left[ 0 + F_1 \right] \\ &= \frac{\mu_{N_1}}{F_1 - 1} \ln F_1. \end{aligned} \quad (\text{C.126})$$

Par ailleurs, on montre aussi que la limite de la mesure de Chernoff dans le cas d'hypothèses poissonniennes (équation (C.99)) est

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{C}_p(s_p^*) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mu_{N_p} \left\{ s_p^* + \tau(1 - s_p^*) - \tau^{(1-s_p^*)} \right\} = \mu_{N_p}, \quad (\text{C.127})$$

car  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau(1 - s_p^*) = 0$ , tout comme  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{(1-s_p^*)} = 0$ , et  $\lim_{\tau \rightarrow 0} s_p^* = 1$ .

Conformément à la définition adoptée à la section 5.2.2.1, le facteur de Fano équivalent  $\mathcal{F}_C(F_1, \tau)$  peut finalement être déterminé en évaluant le rapport  $\mu_{N_1}/\mu_{N_p}$ , lorsque  $\mu_{N_p}$  permet d'égaliser les mesures de Chernoff entre hypothèses binomiales et poissonniennes. Dans la limite des forts contrastes, c'est-à-dire lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , on obtient de la sorte

$$\boxed{\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{F}_C(F_1, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mu_{N_1}}{\mu_{N_p}} = \frac{F_1 - 1}{\ln(F_1)}}. \quad (\text{C.128})$$





# Bibliographie

- [1] M. A. Al-Habash, L. C. Andrews, and R. L. Phillips. Mathematical model for the irradiance probability density function of a laser beam propagating through turbulent media. *Optical Engineering*, 40 :1554–1562, Aug 2001.
- [2] N. Andrés, M. P. Arroyo, H. Hinrichs, and M. Quintanilla. Digital speckle-pattern interferometry as a full-field fluid-velocimetry technique. *Optics Letters*, 24 :575–577, May 1999.
- [3] R. Barakat. Weak-scatterer generalization of the K-density function with application to laser scattering in atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 3(4) :401–409, 1986.
- [4] E. W. Barankin. Locally best unbiased estimates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 20(4) :477–501, 1949.
- [5] J.-L. Basdevant, J. Dalibard, and Joffre M. *Mécanique quantique*. Ed. École Polytechnique, 2006.
- [6] M. Basseville. Distance measures for signal processing and pattern recognition. *Signal Processing*, 18 :349–369, 1989.
- [7] A. Bénéière, F. Goudail, M. Alouini, and D. Dolfi. Degree of polarization estimation in the presence of nonuniform illumination and additive Gaussian noise. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25 :919–929, Mar 2008.
- [8] I. Bergoënd. *Étude numérique des transitions statistiques circulaire et gaussienne du speckle laser*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, jul 2008.
- [9] D. P. Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, 2nd edition, 1999.
- [10] V. N. Beskrovnyy and M. I. Kolobov. Quantum limits of super-resolution in reconstruction of optical objects. *Phys. Rev. A*, 71(4) :043802, Apr 2005.
- [11] M. G. Bisogni *et al.* Performance of a 4096-pixel photon counting chip. In O. H. Siegmund and M. A. Gummin, editors, pages 298–304 Proc. SPIE vol. 3445, Nov 1998.
- [12] S. Breugnot and Ph. Clémenceau. Modeling and performances of a polarization active imager at  $\lambda=806$  nm. In G. W. Kamerman; C. Werner, editor, *Laser Radar technology and applications IV*, volume 3707, pages 449–460. Proc. SPIE, 1999.
- [13] J. D. Briers and S. Webster. Quasi real-time digital version of single-exposure speckle photography for full-field monitoring of velocity or flow fields. *Optics Communications*, 116 :36–42, Feb 1995.
- [14] J. M. Bueno and P. Artal. Double-pass imaging polarimetry in the human eye. *Opt. Lett.*, 24(1) :64–66, 1999.

- 
- [15] J. M. Bueno and P. Artal. Polarization and retinal image quality estimates in the human eye. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(3) :489–496, 2000.
- [16] R. A. Campos, B. E. A. Saleh, and M. C. Teich. Quantum-mechanical lossless beam splitter : Su(2) symmetry and photon statistics. *Phys. Rev. A*, 40(3) :1371–1384, Aug 1989.
- [17] B. I. Cantor and M. C. Teich. Dead-time-corrected photocounting distributions for laser radiation. *Journal of the Optical Society of America*, 65 :786–791, Jul 1975.
- [18] D. G. Chapman and H. Robbins. Minimum variance estimation without regularity assumptions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(4) :581–586, 1951.
- [19] F. Chatelain, J.-Y. Tournier, M. Roche, and M. Alouini. Estimating the polarization degree of polarimetric images in coherent illumination using maximum likelihood methods. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(6) :1348–1359, Jun 2009.
- [20] R. A. Chipman. Polarization diversity active imaging. In T. J. Schulz, editor, *Image reconstruction and restoration II*, pages 68–73. Proc SPIE vol. 3170, 1997.
- [21] P. Clémenceau, S. Breugnot, and L. Collot. Polarization diversity imaging. In *Laser Radar technology and applications III*, volume 3380, pages 284–291. SPIE Proceedings, 1998.
- [22] C. Cohen-Tannoudji, D. Diu, and F. Laloë *Mécanique quantique (T.1)*. Hermann, 1977.
- [23] Ouvrage collectif. Special issue on squeezed-light generation. *Appl. Phys. B*, Sep 1992.
- [24] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-interscience, New York, 1991.
- [25] D.R. Cox. *Renewal theory*. Methuen, London, 1962.
- [26] J. F. de Boer, T. E. Milner, M. J. C. van Gemert, and J. S. Nelson. Two-dimensional birefringence imaging in biological tissue by polarization-sensitive optical coherence tomography. *Opt. Lett.*, 22(12) :934–936, 1997.
- [27] A. de Martino, Y.-K. Kim, E. Garcia-Caurel, B. Laude, and B. Drévillon. Optimized Mueller polarimeter with liquid crystals. *Optics Letters*, 28 :616–618, Apr 2003.
- [28] V. Delaubert. *Quantum imaging with a small number of transverse modes*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie curie, Paris VI - The Australian National University, Jan 2007.
- [29] V. Delaubert, N. Treps, C. Fabre, H. A. Bachor, and Ph. Réfrégier. Quantum limits in image processing. *Europhysics Letters*, 81 :44001, 2008.
- [30] S. G. Demos and R. R. Alfano. Optical polarization imaging. *Appl. Opt.*, 36(1) :150–155, Jan 1997.
- [31] B. Dingel and S. Kawata. Laser-diode microscope with fiber illumination. *Optics Communications*, 93 :27–32, Sep 1992.

- 
- [32] B. Dingel and S. Kawata. Speckle-free image in a laser-diode microscope by using the optical feedback effect. *Optics Letters*, 18 :549–551, Apr 1993.
- [33] W. G. Egan, W. R. Johnson, and V. S. Whitehead. Terrestrial polarization imagery obtained from the space shuttle : characterization and interpretation. *Appl. Opt.*, 30(4) :435–442, Feb 1991.
- [34] H. M. Escamilla. Speckle Contrast from Weak Diffusers with a Small Number of Correlation Areas. *Journal of Modern Optics*, 25 :777–785, Aug 1978.
- [35] M. Evans, N. Hastings, and B. Peacock. *Statistical Distributions*. Wiley Series in Probability and Statistics, New York, 3rd edition, 2000.
- [36] C. Fabre. Quantum optics, from one mode to many modes. École de Physique Les Houches, 2007.
- [37] C. Fabre, J. B. Fouet, and A. Maître. Quantum limits in the measurement of very small displacements in optical images. *Opt. Lett.*, 25(1) :76–78, 2000.
- [38] J. Fade, Ph. Réfrégier, and M. Roche. Estimation of the degree of polarization from a single speckle intensity image with photon noise. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 10(11) :115301, 2008.
- [39] J. Fade, Ph. Réfrégier, N. Treps, and C. Fabre. A gain criterion for the improvement of detection tasks with sub-Poissonian light. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(5) :1139–1146, 2009.
- [40] J. Fade, M. Roche, F. Galland, and Ph. Réfrégier. Estimation of the degree of polarization from a single image : characterization of the precision under various coherent imaging conditions. In *OPTO/IRS<sup>2</sup> Conference Proceedings, Nürnberg (Germany)*, pages 69–74, May 2008.
- [41] J. Fade, M. Roche, and Ph. Réfrégier. Precision of moment based estimation of the degree of polarization in coherent imagery without polarization device. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(2) :483–492, 2008.
- [42] J. Fade, N. Treps, C. Fabre, and Ph. Réfrégier. Optimal precision of parameter estimation in images with local sub-Poissonian quantum fluctuations. *European Physical Journal D*, 50(2) :215–227, 2008.
- [43] U. Fano. Ionization yield of radiations. ii. the fluctuations of the number of ions. *Phys. Rev.*, 72(1) :26–29, Jul 1947.
- [44] M Floc’h, G. le Brun, C. Kieleck, J. Cariou, and J. Lotrian. Polarimetric considerations to optimize lidar detection of immersed targets. *Pure and Applied Optics*, 7 :1327–1340, 1998.
- [45] B. R. Frieden. *Probability, Statistical Optics and Data Testing*. Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [46] H. Fujii. Contrast variation of non-gaussian speckle. *Journal of Modern Optics*, 27 :409–418, Mar 1980.
- [47] F. Galland. *Partition d’images par minimisation de la complexité stochastique et grille active : application à la segmentation d’images de radar à ouverture synthétique*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille III, Marseille, France, 2004.

- 
- [48] F. Galland, N. Bertaux, and Ph. Réfrégier. Minimum description length synthetic aperture radar image segmentation. *IEEE Trans. Image Process.*, 12(9) :995–1006, Sep 2003.
  - [49] P.H. Garthwaite, I.T. Jolliffe, and B. Jones. *Statistical Inference*. Prentice Hall Europe, London, 1995.
  - [50] G. Georges, C. Deumié, and C. Amra. Selective probing and imaging in random media based on the elimination of polarized scattering. *Opt. Express*, 15 :9804–9816, 2007.
  - [51] R. J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130(6) :2529–2539, 1963.
  - [52] T. Golubeva, D. Ivanov, and Y. Golubev. Broadband squeezed light from phase-locked single-mode sub-poissonian lasers. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 77(5) :052316, 2008.
  - [53] S. Gomi *et al.* Development and study of the multi pixel photon counter. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 581 :427–432, Oct 2007.
  - [54] J. W. Goodman. *Statistical Optics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1985.
  - [55] J. W. Goodman. *Speckle phenomena : Theory and Applications*. Roberts & Company Publishers, 2006.
  - [56] F. Goudail and Ph. Réfrégier. Statistical techniques for target detection in polarisation diversity images. *Opt. Lett.*, 26(9) :644–646, May 2001.
  - [57] F. Goudail and Ph. Réfrégier. *Statistical image processing techniques for noisy images : an application oriented approach*. Kluwer, New York, 2004.
  - [58] F. Goudail, Ph. Réfrégier, and G. Delyon. Bhattacharyya distance as a contrast parameter for statistical processing of noisy optical images. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(7) :1231–1240, 2004.
  - [59] F. Goudail, Ph. Réfrégier, and Nicolas Roux. Estimation of the degree of polarization of coherent light in the presence of uniform and nonuniform illumination. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23 (11) :2845–2854, 2006.
  - [60] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York, 1980.
  - [61] G. Grynberg, A. Aspect, and C. Fabre. *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*. Ellipses, 1997.
  - [62] V. S. Rao Gudimetla. Moments of the intensity of a non-circular gaussian laser speckle pattern in the diffraction field. *Optics Communications*, 130 :348–356, 1996.
  - [63] M. Guillaume, Th. Amouroux, Ph. Réfrégier, B. Milliard, and A. Llebaria. Optimal correlation at low photon levels : study for astronomical images. *Opt. Lett.*, 22 :322–324, 1997.
  - [64] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177 :27–29, Jan 1956.
  - [65] P. Hariharan. Speckle patterns : a historical retrospect. *Journal of Modern Optics*, 19 :791–793, Sep 1972.

- 
- [66] M. M. Hayat, M. S. Abdullah, A. Joobeur, and B. E. A. Saleh. Maximum-likelihood image estimation using photon-correlated beams. *IEEE Trans. on Image Processing*, 11(8) :838–846, 2002.
- [67] A. Heidmann and S. Reynaud. Photon noise reduction by reflection from a movable mirror. *Phys. Rev. A*, 50 :4237–4243, 1994.
- [68] A. S. Holevo. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.
- [69] S. Huard. *Polarization of light*. Wiley, Masson, Paris, 1997.
- [70] S. L. Jacques, J. C. Ramella-Roman, and K. Lee. Imaging skin pathology with polarized light. *J. Biomed. Opt.*, 7(3) :329–340, 2002.
- [71] A. Jain, P. Moulin, M. I. Miller, and K. Ramchandran. Information-theoretic bounds on target recognition performance based on degraded image data. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(9) :1153–1166, 2002.
- [72] A. K. Jaiswal and C. L. Mehta. Photon counting and intensity fluctuations of partially polarized gaussian light. *Phys. Rev.*, 186(5) :1355–1359, 1969.
- [73] E. Jakeman and J. G. Rarity. The use of pair production processes to reduce quantum noise in transmission measurements. *Optics Communications*, 59 :219–223, Sep 1986.
- [74] E. Jakeman and J. A. Tough. Generalized K-distribution : a statistical model for weak scattering. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(9) :1764–1772, 1987.
- [75] J. K. Jao. Amplitude distribution of composite terrain radar clutter and the K-distribution. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, AP-32(10) :1049–1062, 1984.
- [76] O. Jedrkiewicz, E. Brambilla, M. Bache, A. Gatti, L. A. Lugiato, and P. di Trapani. Quantum spatial correlations in high-gain parametric down-conversion measured by means of a ccd camera. *Journal of Modern Optics*, 53 :575–595, May 2006.
- [77] B. Johnson *et al.* Compact active hyperspectral imaging system for the detection of concealed targets. In *Proc. SPIE Vol. 3710*, pages 144–153, 1999.
- [78] B. F. Jones and P. T. Fairney. Recognition of shiny dielectric objects by analyzing the polarization of reflected light. *Image and Vision Computing Journal*, 7(4) :253–258, 1989.
- [79] T. Kailath. The divergence and Bhattacharyya distance measures in signal selection. *IEEE Trans. Communications*, 15(1) :52–60, 1967.
- [80] L. M. Kaplan. Analysis of multiplicative speckle models for template-based SAR ATR. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 37 :1424–1432, Oct 2001.
- [81] H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel. Photon Antibunching in Resonance Fluorescence. *Physical Review Letters*, 39 :691–695, Sep 1977.
- [82] M. I. Kolobov. *Quantum imaging*. Springer, New-York, 2006.
- [83] M. I. Kolobov. The spatial behavior of nonclassical light. *Rev. of Modern Phys.*, 71(5) :1539–1589, 1999.

- 
- [84] M. I. Kolobov and C. Fabre. Quantum limits on optical resolution. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18) :3789–3792, Oct 2000.
- [85] K. Koshikawa. A polarimetric approach to shape understanding of glossy objects. In *Proc. of the 6th IJCAI*, pages 493–495, Tokyo, Japan, 1979.
- [86] E. Lantz and F. Devaux. Parametric amplification of images. *Quantum and Semiclassical Optics*, 9 :279–286, Apr 1997.
- [87] B. Laude-Boulesteix. *Développements instrumentaux en imagerie tomographique et polarimétrique*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, Jun 2004.
- [88] B. Laude-Boulesteix, A. de Martino, B. Drévillon, and L. Schwartz. Mueller polarimetric imaging system with liquid crystals. *Appl. Opt.*, 43 :2824–2832, May 2004.
- [89] J. Laurat, T. Coudreau, N. Treps, A. Maître, and C. Fabre. Conditional preparation of a quantum state in the continuous variable regime : Generation of a sub-poissonian state from twin beams. *Physical Review Letters*, 91(21) :213601, 2003.
- [90] D. Léger, E. Mathieu, and J. C. Perrin. Optical surface roughness determination using speckle correlation technique. *Appl. Opt.*, 14 :872–877, Apr 1975.
- [91] M. Lehman, J. A. Pomarico, and R. D. Torroba. Digital speckle pattern interferometry applied to a surface roughness study. *Optical Engineering*, 34 :1148–1152, Apr 1995.
- [92] S. Lowenthal and D. Joyeux. Speckle removal by a slowly moving diffuser associated with a motionless diffuser. *J. Opt. Soc. Am.*, 61 :847–851, Jul 1971.
- [93] L. A. Lugiato, A. Gatti, and E. Brambilla. Quantum imaging. *J. Opt. B : Quantum and Semiclass. Optics*, 4 :176–183, Jun 2002.
- [94] S. Machida and Y. Yamamoto. Ultrabroadband amplitude squeezing in a semiconductor laser. *Phys. Rev. Lett.*, 60(9) :792–794, 1988.
- [95] L. Mandel. Sub-poissonian photon statistics in resonance fluorescence. *Opt. Lett.*, 4(7) :205, 1979.
- [96] K. McKenzie, D. A. Shaddock, D. E. McClelland, B. C. Buchler, and P. K. Lam. Experimental demonstration of a squeezing-enhanced power-recycled Michelson interferometer for gravitational wave detection. *Phys. Rev. Lett.*, 88(23) :231102, 2002.
- [97] J. D. McKinney, M. A. Webster, K. J. Webb, and A. M. Weiner. Characterization and imaging in optically scattering media by use of laser speckle and a variable-coherence source. *Optics Letters*, 25 :4–6, Jan 2000.
- [98] H.-F. Meng. Sub-poisson photoelectron statistics in saturated light absorption. *Phys. Rev. A*, 52 :3239–3243, 1995.
- [99] J. Mertz and A. Heidmann. Photon noise reduction by controlled deletion techniques. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10 :745–752, 1993.
- [100] J. Mertz, A. Heidmann, C. Fabre, E. Giacobino, and S. Reynaud. Observation of high-intensity sub-poissonian light using an optical parametric oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 64(24) :2897–2900, 1990.

- 
- [101] P. Meystre, M. O. Scully, and R. Krotkov. Quantum optics, experimental gravitation, and measurement theory. *American Journal of Physics*, 53(8) :795–796, 1985.
- [102] S. Minardi, A. Varanavičius, A. Piskarskas, and P. di Trapani. A compact multi-pixel parametric light source. *Optics Communications*, 224 :301–307, 2003.
- [103] A. Mosset, F. Devaux, and E. Lantz. Spatially noiseless optical amplification of images. *Physical Review Letters*, 94(22) :223603, Jun 2005.
- [104] J. M. Nicolas. Introduction aux statistiques de deuxième espèce : Applications aux lois d’images RSO. Rapport interne, Telecom Paris, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Feb 2002.
- [105] J. Nowakowski and M. Elbaum. Fundamental limits in estimating light pattern position. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12 :1744–1758, 1983.
- [106] J. Ohtsubo and T. Asakura. Statistical properties of laser speckle produced in the diffraction field. *Appl. Opt.*, 16 :1742–1753, Jun 1977.
- [107] C. Oliver and S. Quegan. *Understanding SAR images*, chapter Fundamental properties of SAR images, pages 84–99. Artech House, London, 1998.
- [108] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables. *Physical Review Letters*, 68 :3663–3666, 1992.
- [109] A. Ourjoumtsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier. Generation of optical ‘Schrödinger cats’ from photon number states. *Nature*, 448 :784–786, 2007.
- [110] A. Papoulis. *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, Boston, 1991.
- [111] H. Paul. Photon antibunching. *Rev. Mod. Phys.*, 54(4) :1061–1102, Oct 1982.
- [112] D. Petz. *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*. Springer, 2008.
- [113] J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman. Mueller matrix imaging polarimetry. *Optical Engineering*, 34(6) :1558–1568, Jun 1995.
- [114] J. A. Pomarico, N. A. Russo, E. E. Sicre, and D. Patrignani. Optical velocimetry based on the spatial correlation of off-axis image speckle patterns. *Optics Communications*, 133 :27–32, Feb 1997.
- [115] H.V. Poor. *An Introduction to Signal Detection and Estimation - Second Edition*. Springer, Department of Electrical Engineering, Princeton University, Princeton, USA, 1998.
- [116] C. A. J. Putman, B. G. de Grooth, N. F. van Hulst, and J. Greve. A detailed analysis of the optical beam deflection technique for use in atomic force microscopy. *Journal of Applied Physics*, 72(1) :6–12, 1992.
- [117] Ph. Réfrégier. *Théorie du signal, signal information fluctuations*. Masson, Paris, 1993.
- [118] Ph. Réfrégier. *Noise Theory and Application to Physics : From Fluctuations to Information*. Springer, New-York, 2004.



- 
- [119] Ph. Réfrégier, J. Fade, and M. Roche. Estimation precision of the degree of polarization from a single speckle intensity image. *Opt. Lett.*, 32(7) :739–741, 2007.
  - [120] Ph. Réfrégier, F. Goudail, and N. Roux. Estimation of the degree of polarization in active coherent imagery using the natural representation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(12) :2292–2300, 2004.
  - [121] Ph. Réfrégier, M. Roche, and F. Goudail. Cramer-Rao lower bound for the estimation of the degree of polarization in active coherent imagery at low photon level. *Opt. Lett.*, 31 (24) :3565–3567, 2006.
  - [122] S. Reynaud. Introduction à la réduction du bruit quantique. *Annales de Physique*, 15(2) :63–162, 1990.
  - [123] P. H. Souto Ribeiro, C. Schwob, A. Maître, and C. Fabre. Sub-shot-noise high-sensitivity spectroscopy with optical parametric oscillator twin beams. *Opt. Lett.*, 22(24) :1893–1895, 1997.
  - [124] W. H. Richardson, S. Machida, and Y. Yamamoto. Squeezed photon-number noise and sub-poissonian electrical partition noise in a semiconductor laser. *Phys. Rev. Lett.*, 66(22) :2867–2870, 1991.
  - [125] J. Rissanen. *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry*, volume 15 of *Series in Computer Science*. World Scientific, Singapore, 1989.
  - [126] M. Roche, J. Fade, and Ph. Réfrégier. Comparaison de l'estimation de degré de polarisation à partir de 4, 2 et 1 images d'intensité entachées d'un speckle pleinement développé. In *Actes du XXIe colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Troyes*, pages 1073–1079, Sep 2007.
  - [127] M. Roche, J. Fade, and Ph. Réfrégier. Parametric estimation of the square degree of polarization from two intensity images degraded by fully developed speckle noise. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24 :2719–2727, 2007.
  - [128] N. Roux, F. Goudail, and Ph. Réfrégier. Cramer-Rao lower bounds on the estimation of the degree of polarization in coherent imaging systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(11) :2532–2541, 2005.
  - [129] M. P. Rowe, E. N. Pugh, J. S. Tyo, and N. Engheta. Polarization-difference imaging : a biologically inspired technique for observation through scattering media. *Opt. Lett.*, 20 :608–610, 1995.
  - [130] A. F. Sadjadi and C. S. L. Chun. Automatic detection of small objects from their infrared state-of-polarization vectors. *Opt. Lett.*, 28(7) :531–533, 2003.
  - [131] B. E. A. Saleh, D. Stoler, and M. C. Teich. Coherence and photon statistics for optical fields generated by poisson random emissions. *Phys. Rev. A*, 27(1) :360–374, 1983.
  - [132] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. Can the channel capacity of a light-wave communication system be increased by the use of photon-number-squeezed light? *Phys. Rev. Lett.*, 58(25) :2656–2659, Jun 1987.
  - [133] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*, page 169. Editions Technip, Paris, 1990.
  - [134] D. C. Schleher. Radar detection in Weibull clutter. *IEEE Trans. on Aeros. and Elect. Syst.*, 12(6) :736–743, Nov 1976.

- 
- [135] N. Shashar and T. W. Cronin. Polarization contrast vision in *octopus*. *Journal of Experimental Biology*, 199 :999–1004, 1996.
- [136] B.J. Slocumb and D.L. Snyder. Maximum likelihood estimation applied to quantum limited optical position sensing. In S. Gowrinathan, editor, *Acquisition, Tracking, and Pointing IV*, volume 1304, pages 165–176. SPIE, Apr 1990.
- [137] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley. Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 55(22) :2409–2412, 1985.
- [138] J. E. Solomon. Polarization imaging. *Appl. Opt.*, 20(9) :1537–1544, May 1981.
- [139] R. A. Sprague. Surface roughness measurement using white light speckle. *Appl. Opt.*, 11 :2811–2817, Dec 1972.
- [140] D. Stoler, B. E. A. Saleh, and M. C Teich. Binomial states of the quantized radiation field. *J. Mod. Opt.*, 32(3) :345–355, 1985.
- [141] M. Suyama *et al.* Development of a multi-pixel photon sensor with single-photon sensitivity. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 523(1-2) :147 – 157, 2004.
- [142] Y. Takeno, M. Yukawa, H. Yonezawa, and A. Furusawa. Observation of -9 dB quadrature squeezing with improvement of phase stability in homodyne measurement. *Opt. Express*, 15(7) :4321–4327, 2007.
- [143] P. R. Tapster, J. G. Rarity, and J. S. Satchell. Generation of sub-poissonian light by high-efficiency light-emitting diodes. *Europhysics Letters*, 4(3) :293–299, 1987.
- [144] M. C. Teich and B. E. A. Saleh. Effects of random deletion and additive noise on bunched and antibunched photon-counting statistics. *Opt. Lett.*, 7(8) :365, 1982.
- [145] M. C. Teich and B. E. A. Saleh. *Progress in Optics*, volume XXVI, chapter Photon Bunching and Antibunching, pages 1–104. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1988.
- [146] M. C. Teich, B. E. A. Saleh, and J. Perina. Role of primary excitation statistics in the generation of antibunched and sub-poisson light. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1(3) :366, 1984.
- [147] P. Terrier and Devlaminck V. Système polarimétrique pour l’analyse d’images. *Traitement du signal*, 17(5/6) :479–490, 2000.
- [148] C. W. Therrien. *Decision, Estimation, and Classification*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1989.
- [149] N. Treps. *Effets quantiques dans les images optiques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie curie, Paris VI, Jul 2001.
- [150] N. Treps, U. Andersen, B. Buchler, P. K. Lam, H.-A. Bachor, A. Maître, and C. Fabre. Crossing the standard quantum limit for high sensitivity measurements in optical images using non classical light. *Physical Review Letters*, 88 :203601, 2002.

- 
- [151] N. Treps, V. Delaubert, A. Maitre, J. M. Courty, and C. Fabre. Quantum noise in multipixel image processing. *Physical Review A*, 71(1) :013820, 2005.
- [152] N. Treps, N. Grosse, W. P. Bowen, C. Fabre, H.-A. Bachor, and P. K. Lam. A quantum laser pointer. *Science*, 301 :940–943, 2003.
- [153] J. S. Tyo, M. P. Rowe, E. N. Pugh, and N. Engheta. Target detection in optical scattering media by polarization-difference imaging. *Appl. Opt.*, 35(11) :1855–1870, Apr 1996.
- [154] J. Uozumi and T. Asakura. Probability density functions of speckle intensity produced by weak diffusers. *Journal of Modern Optics*, 27 :1345–1360, Sep 1980.
- [155] J. Uozumi and T. Asakura. First-order intensity and phase statistics of gaussian speckle produced in the diffraction region. *Appl. Opt.*, 20 :1454–1466, Apr 1981.
- [156] H. L. van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory - Part I. Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*. Wiley-Interscience, George Mason University, 2001.
- [157] B. V. K. Vijaya Kumar, F. M. Dickey, and J. M. Delaurentis. Correlation filters minimizing peak location errors. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(5) :678–682, 1992.
- [158] J. Wenger. *Dispositifs impulsionsnels pour la communication quantique à variables continues*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, Sep 2004.
- [159] J. W. Williams, J. S. Tee, and M. A. Poulter. Image processing and classification for the UK remote minefield detection system polarimetric camera. In A. C. Dubey, editor, *Detection and remediation technologies for mines and minelike targets VI*. Proc SPIE vol. 4394, 2001.
- [160] L. B. Wolff. Polarization-based material classification from specular reflection. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(11) :1059–1071, Nov 1990.
- [161] L. B. Wolff. Polarization camera for computer vision with a beam splitter. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(11) :2935–2945, Nov 1994.
- [162] L. B. Wolff. Polarization vision : a new sensory approach to image understanding. *Image and Vision Computing*, 15 :81–93, 1997.
- [163] L. B. Wolff and T. A. Mancini. Liquid-crystal polarization camera. In *SPIE Conference Series*, volume 1823, pages 102–113, Nov 1992.
- [164] L.-A. Wu, M. Xiao, and H. J. Kimble. Squeezed states of light from an optical parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am. B*, 4(10) :1465–1475, 1987.
- [165] M. Xiao, L.-A. Wu, and H. J. Kimble. Precision measurement beyond the shot-noise limit. *Phys. Rev. Lett.*, 59(3) :278–281, Jul 1987.
- [166] Y. Yamamoto, S. Machida, and W. H. Richardson. Photon Number Squeezed States in Semiconductor Lasers. *Science*, 255(5049) :1219–1224, 1992.
- [167] J. Ziv and M. Zakai. Some lower bounds for signal parameter estimation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 15(2) :477–501, 1969.

---

## Liste des publications

### Articles dans des revues internationales avec comité de lecture

“A gain criterion for the improvement of detection tasks with sub-poissonian light,” Julien Fade, Philippe Réfrégier, Nicolas Treps and Claude Fabre, in *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **26**, Issue 5, pp. 1139-1146, May 2009.

“Optimal precision of parameter estimation in images with local sub-Poissonian quantum fluctuations,” Julien Fade, Nicolas Treps, Claude Fabre and Philippe Réfrégier, in *European Physical Journal D*, Vol. **50**, Issue 2, pp. 215-227, November 2008.

“Estimation of the degree of polarization from a single speckle intensity image with photon noise,” Julien Fade, Philippe Réfrégier and Muriel Roche, in *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, Vol. **10**, pp. 115301, September 2008.

“Precision of moment based estimation of the degree of polarization in coherent imagery without polarization device,” Julien Fade, Muriel Roche and Philippe Réfrégier, in *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **25**, Issue 2, pp. 483-492, February 2008.

“Parametric estimation of the square degree of polarization from two intensity images degraded by fully developed speckle noise,” Muriel Roche, Julien Fade, Ph. Réfrégier, in *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **24**, Issue 9, pp. 739-741, September 2007.

“Estimation precision of the degree of polarization from a single intensity image,” Ph. Réfrégier, Julien Fade and Muriel Roche, in *Optics Letters*, Vol. **32**, Issue 7, pp. 739-741, 2007.

### Conférences internationales avec comité de lecture

“Estimation of the degree of polarization from a single image : characterization of the precision under various coherent imaging conditions,” J. Fade, M. Roche, F. Galland, Ph. Réfrégier, *OPTO/IRS<sup>2</sup> Conference Proceedings*, Nürnberg (Germany), 6-7 May 2008.

---

“Polarization coherent imagery without polarization analyzing device,” J. Fade, M. Roche, Ph. Réfrégier, 3rd EOS Topical Meeting on Advanced Imaging Techniques, Lille (France), 2007.

“Estimation of the degree of polarization from two intensity images degraded by speckle noise,” M. Roche, J. Fade and Ph. Réfrégier, Speckle06, 13-15 September 2006, Nîmes (France).

### **Conférences nationales avec comité de lecture**

“Comparaison de l’estimation de degré de polarisation à partir de 4, 2 et 1 images d’intensité entachées d’un speckle pleinement développé,” M. Roche, J. Fade, Ph. Réfrégier, GRETSI 2007, Troyes, 11-14 Septembre 2007.

**Titre :** Caractérisation et extraction de l'information dans des signaux optiques polarimétriques ou issus d'états sous-poissoniens de la lumière

Nous nous intéressons dans cette thèse à deux phénomènes optiques pour lesquels l'influence du bruit de mesure est importante. Dans le premier cas, nous analysons comment une caractérisation précise du bruit permet d'estimer le degré de polarisation de la lumière rétrodiffusée par un objet, à partir d'une unique image d'intensité acquise sous éclairage cohérent. En déterminant une borne sur la variance minimale d'estimation (borne de Cramer-Rao), et en comparant les performances de différents estimateurs, nous caractérisons la précision d'une telle méthode d'estimation. En comparant les performances de cette technique aux performances de méthodes plus standard d'estimation du degré de polarisation qui nécessitent plusieurs images polarimétriques, nous discutons le compromis entre la simplification des systèmes d'imagerie polarimétrique et la diminution de la précision d'estimation.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous étudions comment les performances d'une tâche d'estimation de paramètre (estimation de déplacement d'une image) ou de discrimination entre deux hypothèses peuvent être améliorées en utilisant des lumières sous-poissoniennes qui présentent un niveau de bruit quantique inférieur à celui d'un bruit poissonien standard. Dans ces deux cas, l'étude des bornes statistiques sur les performances de traitement et les résultats des simulations numériques effectuées nous permettent d'analyser le gain en performance que l'on peut espérer obtenir en remplaçant un faisceau poissonien par une lumière de même intensité présentant des fluctuations sous-poissoniennes.

**Mots clés :** Optique statistique, Estimation statistique, Bruit de speckle, Imagerie polarimétrique, Imagerie quantique, États sous-poissoniens de la lumière.

---

**Title :** Characterization and extraction of information in polarimetric optical signals or in signals obtained from sub-Poissonian states of light

In this thesis, we focus on two optical phenomena for which noise has a strong influence. In the first case, we analyze how a precise characterization of the noise allows the degree of polarization of the light backscattered by an object to be estimated from a single intensity image under coherent illumination. By determining a bound on the minimum estimation variance (Cramer-Rao bound) and by comparing the performance of different estimators, we characterize the precision of such an estimation method. We also study the loss in precision undergone when this method based on the acquisition of a single intensity image is used to estimate the degree of polarization instead of standard estimation techniques which require several polarimetric images. We discuss the compromise between the simplification of polarimetric imaging systems and the deterioration of estimation precision.

In the second part of this thesis, we study how using sub-Poissonian light, which is characterized by a quantum noise level smaller than a standard Poissonian noise, can improve the performance of an estimation task (estimation of an image displacement) or a discrimination task. In both cases, studying the statistical bounds on the signal processing performance and analyzing the simulation results make it possible to characterize the gain in performance that can be expected when a standard Poissonian beam is replaced by a sub-Poissonian light with same intensity.

**Keywords :** Statistical optics, Statistical estimation, Speckle noise, Polarimetric imaging, Quantum imaging, Sub-Poissonian states of light.