



HAL
open science

Théorie dynamique des satellites galiléens

V. Lainey

► **To cite this version:**

V. Lainey. Théorie dynamique des satellites galiléens. Planète et Univers [physics]. Observatoire de Paris, 2002. Français. NNT: . tel-00418650

HAL Id: tel-00418650

<https://theses.hal.science/tel-00418650>

Submitted on 21 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'OBSERVATOIRE DE PARIS

spécialité: Dynamique des systèmes gravitationnels

VALÉRY LAINEY

THÉORIE DYNAMIQUE DES SATELLITES GALILÉENS

Directeurs de thèse: A. Vienne, L. Duriez
Rapporteurs: S. Ferraz-Mello, D. Pascu

Soutenue publiquement le 2 décembre 2002 devant le Jury composé de:

Monsieur Bruno Sicardy *Président*
Monsieur Jean-Eudes Arlot
Monsieur Dan Pascu
Monsieur Jean Souchay
Monsieur Alain Vienne

*A tous ceux,
vivants ou disparus
qui ont contribué à faire
d'un rêve de petit garçon,
une réalité.*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Alain Vienne pour m'avoir proposé ce sujet et accepté de diriger ma thèse. Je remercie également Luc Duriez pour ses conseils scientifiques avisés.

Je remercie vivement Jean-Eudes Arlot pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je le remercie doublement pour m'avoir communiqué sa recette du bonheur: des noix, du pain, du beurre, du miel et J13 (mais ne dites pas que je vous l'ai dit!).

Je remercie Messieurs Bruno Sicardy, Dan Pascu, Sylvio Ferraz-Mello et Jean Souchay pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, et participé à l'amélioration de ce mémoire.

Je n'oublierai pas de remercier Anna Gomez pour son soutien chaleureux.

Je remercie également tous les membres du "club café" pour leur bonne humeur et plus particulièrement Nicole Baron, ainsi que Patrick Rocher dont j'ai partagé le bureau avec un très grand plaisir. Je ne saurais oublier de remercier Madame Ballenghien pour sa gentillesse et la convivialité qu'elle a su instaurer à l'observatoire de Lille.

Je remercie enfin tous mes proches qui m'ont entouré durant ses trois années, et m'ont permis de mener ce travail à son terme.



FIG. 1 – *Les quatre satellites Galiléens Io, Europe, Ganymède et Callisto (de gauche à droite), et la grande tache rouge de Jupiter.*

Résumé

Nous avons élaboré une nouvelle théorie dynamique des satellites galiléens ajustée aux observations. Un programme numérique a été développé afin de pouvoir simuler le mouvement des satellites. Nous avons ainsi évalué une grande quantité de perturbations généralement négligées, et ainsi grandement amélioré la modélisation du système.

La solution numérique a ensuite été ajustée à plusieurs types d'observations (photographiques, CCD et phénomènes mutuels) entre les années 1891 et 2002. Un total de plus de 2000 observations a été utilisé, dont les observations des campagnes PHEMU de 1985 et 1991.

Une analyse en fréquence a finalement été effectuée dans la perspective d'obtenir une représentation sous forme analytique du mouvement des satellites. Une méthode de filtrage pour séparer les courtes périodes des longues périodes a été développée pour résoudre des difficultés techniques (longueur d'échantillonnage, longues périodes solaires).

Notre théorie a aujourd'hui une fidélité de représentation de quelques dizaines de kilomètres sur un siècle, et reste définie sur plus de 1500 ans.

Abstract

We have developed a new dynamical theory of the Galilean system based on historical observations. A numerical code has been made for simulating the motion of the satellites where many of the usually neglected perturbations have been quantified, thus considerably improving the modeling of the system.

The numerical solution has been fitted to several kind of observations (photographic, CCD and mutual phenomena) taken between 1891 and 2002. More than 2000 observations have been used, including the PHEMU campaign of 1985 and 1991.

A frequency analysis was finally used as a way of obtaining a theory with an analytical form of the motion of the satellites. A digital filtering treatment for removing the short periods from the long ones has been developed, hence solving some technical problems such as the length of the sample and the long solar periods.

Our theory has an accuracy of a few tens of kilometres over one century and remains valid for more than 1500 years.

Table des matières

Table des constantes	15
Introduction	18
I Description du Modèle Dynamique	19
1 Modélisation	21
1.1 Préambule	21
1.1.1 Choix du repère	21
1.1.2 Choix des notations	22
1.2 Équations du problème des \mathcal{N} -corps ponctuels dans un repère planéto-	
centrique d'axes fixes	22
1.2.1 Expression des forces d'aplatissement supplémentaires	22
1.2.2 Écriture du potentiel perturbateur $U_{\vec{k}0}$ dans un repère d'axes fixes .	24
1.3 Équations du problème des \mathcal{N} -corps non ponctuels dans un repère planéto-	
centrique d'axes fixes	28
1.3.1 Equations du mouvement des centres de masse	29
1.3.2 Rotation des corps autour de leur centre de masse	32
1.3.3 Précession et rotation du corps central	36
1.4 Potentiel gravitationnel induit par les anneaux du corps central	37
1.5 Prise en compte de la relativité générale	39
1.6 Intégrale de l'énergie	40
2 Estimation des Perturbations Généralement Négligées	43
2.1 Influence principale	43
2.1.1 Calcul des termes séculaires à l'ordre 1	45
2.1.2 Effet de la résonance laplacienne	48
2.2 Un cas intéressant: les résonances spin-orbite	49
2.2.1 Forçage exact	49
2.2.2 Libration en rotation	50
2.3 Absorption des termes séculaires	52
2.4 Intérêt d'une étude numérique	53

3	Intégration Numérique	55
3.1	Méthode et présentation du programme utilisé	55
3.1.1	Analyse des perturbations	55
3.1.2	Le code numérique	57
3.1.3	Contrôle de l'intégration	58
3.1.4	Les perturbations solaires et planétaires	59
3.2	Analyse des termes d'aplatissement supplémentaires	59
3.3	Étude de la précession	60
3.4	Analyse des coefficients d'aplatissement joviens	60
3.4.1	Étude du J_3	62
3.4.2	Étude des termes sectoriels c_{22} et s_{22}	62
3.5	Effet de l'aplatissement des satellites	63
3.5.1	Étude des coefficients $J_2^{(k)}$	63
3.5.2	Étude des coefficients $c_{22}^{(k)}$	64
3.5.3	Variations sur l'amplitude et la fréquence de libration laplacienne	65
3.6	Les autres perturbations	65
3.6.1	Libration en rotation des satellites	65
3.6.2	Influence des satellites non galiléens	67
3.6.3	Influence de Saturne	67
3.7	Bilan des perturbations	67
3.7.1	Classification des perturbations	68
3.7.2	Les perturbations retenues	68
3.7.3	Indépendance relative des perturbations	70
II	Observations et Ajustements	71
1	Méthode d'Ajustement	73
1.1	Principe d'ajustement	73
1.1.1	Equations aux variations	73
1.1.2	Méthode des moindres carrés	75
1.1.3	Écriture des équations aux variations	76
1.2	Intégration des équations aux variations	82
1.2.1	Le programme <code>EQVARSOL++.f</code>	82
1.2.2	Contrôle de l'intégrateur	83
1.3	Variables d'observations	85
1.3.1	Les coordonnées absolues	85
1.3.2	Les coordonnées différentielles	85
1.3.3	Les coordonnées tangentielles	85
1.4	Ajustement aux observations	86
1.4.1	Le cas des coordonnées absolues	86
1.4.2	Le cas des coordonnées relatives	87

2	Comparaison au Modèle de Sampson-Lieske	89
2.1	Quelques rappels sur la théorie de Sampson-Lieske	89
2.1.1	Les perturbations introduites	89
2.1.2	Variables utilisées et forme de la solution	90
2.1.3	Les améliorations de Lieske	90
2.2	Ajustement à la solution G5	91
2.2.1	Solution G5	91
2.2.2	Résultats	92
2.2.3	Le problème des coordonnées cylindriques	92
2.3	Apport des petites perturbations	95
2.3.1	Ajustement	95
2.3.2	Résultats	96
3	Ajustement aux Observations	101
3.1	Présentation des observations	101
3.1.1	Les observations anciennes (1891-1936)	101
3.1.2	Les observations de D.Pascu	102
3.1.3	Les phénomènes mutuels	102
3.1.4	Les observations de Flagstaff	102
3.2	Ajustement à toutes les observations	103
3.2.1	Les conditions d'ajustement	103
3.2.2	Les (O-C)	105
3.2.3	Les valeurs des corrélations linéaires	110
3.3	Pourquoi ne pas s'arrêter là?	114
III	Représentation Fréquentielle	115
1	Analyse en Fréquence et Filtrage	117
1.1	Quelques rappels sur l'analyse de Fourier	117
1.1.1	Signaux continus	117
1.1.2	Signaux discrets	118
1.1.3	La transformée de Fourier	120
1.2	Analyse fine	121
1.2.1	Présentation théorique	121
1.2.2	Méthode utilisée	122
1.2.3	Détermination de l'erreur numérique	123
1.3	Le filtrage	123
1.3.1	Conception d'un filtre passe-bas	124
1.3.2	Méthode numérique	124
1.3.3	Filtres à deux étages	126

2	Etude des Spectres en Fréquences	129
2.1	Motivation	129
2.2	Etude analytique des courtes périodes	131
2.2.1	Détermination des courtes périodes à l'ordre 1	131
2.2.2	Recherche des courtes et longues courtes périodes	135
2.3	Spectre fréquence-amplitude	136
2.3.1	Détermination des longues périodes	136
2.3.2	La plage de coupure	137
3	Analyse Synthétique	139
3.1	Analyse des longues périodes	139
3.1.1	Filtrage des courtes périodes	139
3.1.2	Recomposition des longues périodes	141
3.1.3	Le traitement des longues périodes solaires	141
3.2	Analyse des courtes périodes	145
3.2.1	Recomposition des courtes périodes	145
3.2.2	La version 1.0	147
	Conclusion	149
	Annexes	151
A	Caractéristiques de la Version 1.0	153
A.1	Valeurs des constantes du modèle	153
A.2	Valeur des amplitudes, fréquences et phases	154
B	Introduction des Effets de Marées	175
B.1	Motivation	175
B.1.1	La structure interne des satellites	175
B.1.2	Les dérives séculaires observées	176
B.2	Méthode utilisée	176
B.2.1	Les équations de Kaula	176
B.2.2	Les équations de Gauss	177
B.2.3	Test numérique	178
B.3	Résultats	179
	Bibliographie	183

Table des constantes

Valeur de la constante de Gauss

$$K = 0,01720209895$$

Constantes relatives à Jupiter (issues de [8] et [31])

m_0	$9,54588464 \cdot 10^{-4}$ en masse solaire
E_r	71398 km (rayon équatorial)
J_2	$1,4736 \cdot 10^{-2}$
J_3	$1,4 \cdot 10^{-6}$
J_4	$-5,87 \cdot 10^{-4}$
J_6	$3,1 \cdot 10^{-5}$
c_{22}	$-3 \cdot 10^{-8}$
s_{22}	$-7 \cdot 10^{-9}$

N	870.536642 degrés/jour
I	$25^\circ, 51$ (à l'époque J2000.0)
ψ	$358^\circ, 05$ (à l'époque J2000.0)

Constantes relatives aux satellites galiléens¹ (issues de [2] et [30])

m_1	$2,12766 \cdot 10^4$	E_r^1	1815 km	J_2^1	$1,863 \cdot 10^{-3}$	c_{22}^1	$5,59 \cdot 10^{-4}$
m_2	$3,90625 \cdot 10^4$	E_r^2	1569 km	J_2^2	$4,38 \cdot 10^{-4}$	c_{22}^2	$1,32 \cdot 10^{-4}$
m_3	$1,27551 \cdot 10^4$	E_r^3	$2631,2 \text{ km}$	J_2^3	$1,41 \cdot 10^{-4}$	c_{22}^3	$1,2 \cdot 10^{-5}$
m_4	$1,78571 \cdot 10^4$	E_r^4	$2410,3 \text{ km}$	J_2^4	$3,27 \cdot 10^{-5}$	c_{22}^4	$1,02 \cdot 10^{-5}$

1. Les masses sont données sous la forme $\frac{m_0}{m_k}$.

Introduction

Découvert le 7 janvier 1610 par Galilée, les quatre plus gros satellites de Jupiter (appelés satellites galiléens) portèrent tout d'abord le nom "d'astres de médicis", avant d'être appelées respectivement par ordre croissant de distance à Jupiter, Io, Europe, Ganymède et Callisto. La découverte de ces satellites fut un argument décisif en faveur de la théorie copernicienne, contredisant l'un des fondements de la physique ancienne selon laquelle le monde ne possède qu'un seul centre physique de révolution.

Plus tard, l'observation des satellites galiléens permis d'élaborer des prédictions d'éclipse de satellites par Jupiter. Ce n'est toutefois qu'en 1788 que la première théorie dynamique complète des satellites galiléens fut effectuée par Laplace. Il fut le premier à introduire la relation de résonance entre les trois premiers satellites, résonance qui porte aujourd'hui le nom de résonance laplacienne. Celle-ci lie les longitudes moyennes des trois satellites par l'égalité $l_1 - 3l_2 + 2l_3 = \pi$.

Le problème mécanique du mouvement des satellites galiléens devient alors également un problème mathématique complexe, les arguments résonants n'apparaissant qu'à l'ordre deux des puissances des masses dans les développements analytiques, et dont on pourra citer les travaux de De Sitter (1918), Ferraz-Mello (1966), Sagnier (1981), Duriez (1982) et Vu (1986).

Le système galiléen est aujourd'hui le thème de nombreuses recherches suite à l'arrivée de la sonde Galileo dans le système jovien fin 1995. L'essentiel de ces recherches porte sur les modèles de structure interne de ces satellites. En revanche les théories du mouvement de révolution de ces satellites capables de fournir des éphémérides précises n'ont guère évoluées. La théorie de Sampson-Lieske dont le dernier réajustement date de 1998 (E5), prend ses fondements théoriques sur l'étude de Sampson (1921) et son amélioration par Lieske (1977). Cette théorie est devenue d'une précision insuffisante en regard des observations récentes (telles que les observations de phénomènes mutuels PHEMU), mais également par la comparaison à des observations anciennes (telles que les observations d'éclipses de satellites par Jupiter).

Nous allons chercher à élaborer une nouvelle théorie dynamique des satellites galiléens, indépendante des théories antérieures et ajustée aux observations. L'obtention d'éphémérides précises est devenu indispensable à la détermination d'accélération séculaires dans

les longitudes des satellites, propres à la quantification des effets de marées. Nous chercherons également une méthode capable de fournir un modèle reproduisant la dynamique du système galiléen sur plusieurs milliers d'années. Enfin, nous nous attacherons à délivrer à la fin de notre travail une routine numérique fonctionnelle, fournissant des éphémérides issues de notre modèle après ajustement aux observations.

Le point de départ de notre travail concerne la prise en compte de perturbations généralement négligées dans les modèles et susceptibles de ne pas l'être. Ce travail fait l'objet de la première partie intitulée: Description du Modèle Dynamique. L'écriture analytique de ces perturbations ainsi que le développement d'un code numérique prenant en compte les dites perturbations seront présentés.

La deuxième partie de notre travail a comme objectif principal l'ajustement de notre modèle (jusque-là complètement numérique) aux observations dont nous disposons depuis plus d'un siècle (depuis 1891 à nos jours). Dans une première étape, nous commencerons toutefois par ajuster notre modèle à la théorie G5 (réalisée par J.E.Arlot sur la base de la théorie de Sampson-Lieske).

La dernière partie de notre travail concerne la représentation de notre solution sous une forme plus analytique, par le biais d'une représentation fréquentielle des éléments d'orbites. L'analyse de Fourier et le filtrage numérique seront deux points clés pour atteindre cet objectif.

Enfin, une annexe sera consacrée à l'estimation des effets de marées susceptibles d'apparaître dans les différences entre les observations et notre modèle, comme fonction de certains paramètres physiques de Jupiter et des satellites.

Première partie

Description du Modèle Dynamique

Chapitre 1

Modélisation

Dans ce premier chapitre, nous cherchons à modéliser au mieux le système des quatre satellites galiléens. Pour cela, il est nécessaire de mettre en évidence toutes les perturbations, en plus des perturbations usuelles, susceptibles d'influencer la dynamique des satellites à une précision recherchée d'environ dix kilomètres. Nous allons nous intéresser à des perturbations diverses, toutes d'origine gravitationnelle. Les équations seront présentées dans leur formulation cartésienne (essentiellement pour les besoins de l'intégration numérique). Consacré principalement au développement mathématique des équations du mouvement dans le cadre général d'un problème des $N + 1$ -corps, ce chapitre sera suivi d'une étude analytique et numérique permettant de déterminer le caractère influant ou non des perturbations testées. Nous pourrons alors prendre en compte dans la théorie que nous construirons, uniquement les termes utiles.

1.1 Préambule

Avant d'entrer dans le vif du sujet, commençons par présenter le repère dans lequel les équations ont été développées. Nous introduirons de plus les conventions adoptées dans toute la suite.

1.1.1 Choix du repère

Nous développons les équations du mouvement dans un repère planétocentrique d'axes fixes (donc non équatorial a priori). Ce choix est loin d'être arbitraire. Tout d'abord, les observations déterminent les positions de chacun des satellites par rapport à la position de Jupiter, ce qui justifie l'emploi d'un repère planétocentrique. En second lieu, l'utilisation d'un repère dont les axes restent de direction fixe se justifie pour les simplifications qu'il apporte. Certes dans un tel repère l'expression du potentiel perturbateur induit par l'aplatissement du corps central devient assez complexe, mais un repère équatorial engendrerait des forces d'inertie supplémentaires dans le système (précession équatoriale et rotation de Jupiter). De plus, la complication principale interviendrait dans la formulation des équations liées à l'aplatissement des satellites eux-mêmes. En effet, il conviendrait alors

d'écrire le potentiel perturbateur de l'aplatissement des satellites dans un repère fixe en premier temps (J2000), puis dans un repère équatorial du corps central, donnant lieu à des équations bien plus compliquées.

1.1.2 Choix des notations

La volonté d'introduire une formulation générale au problème des $\mathcal{N} + 1$ -corps, et la complexité d'écriture des équations que nous allons présenter, nous a amené à définir un choix de notations formelles. Bien que la plupart des notations seront introduites avant la première utilisation, nous nous proposons d'en présenter les plus importantes ici.

Les masses ponctuelles seront notées par le couple (P_i, m_i) . En particulier, l'indice i sera zéro dans le cas du corps central. La distance entre deux corps P_i et P_j sera notée r_{ij} , lorsque r possèdera un seul indice au lieu de deux, il s'agira de la distance du corps correspondant au corps central P_0 . Nous surnoterons les indices $0, i, j, k, \dots$ d'une barre ou d'un accent circonflexe lorsque les corps $P_0, P_i, P_j, P_k, \dots$ correspondant à chacun de ces indices seront respectivement appréhendés comme ponctuels ou aplatis.

Enfin, la symétrie des équations relativement aux coordonnées cartésiennes $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, nécessite fréquemment de désigner par la variable γ_i , l'une quelconque des trois coordonnées cartésiennes. Lors de la partie II, nous aurons même besoin d'introduire deux fois cette notation dans la même équation, et nous noterons cette deuxième variable par Γ_i .

Les démonstrations présentent de façon condensée les calculs que nous avons effectués au cours de notre travail. Celles-ci sont écrites dans une police plus petite et terminée par le symbole \square afin de faciliter la lecture.

Le choix d'une écriture explicite des équations a été fait pour faciliter la programmation numérique, cet exposé ayant également servi d'outil de travail.

1.2 Équations du problème des \mathcal{N} -corps ponctuels dans un repère planétocentrique d'axes fixes

Commençons par modéliser le système galiléen par un problème des $\mathcal{N} + 1$ -corps dont seul le corps central (Jupiter) est supposé aplati. Le nombre \mathcal{N} pourra se voir attribuer différentes valeurs suivant le nombre de corps introduits dans le modèle, en plus des quatre satellites galiléens (Soleil, planètes, satellites intérieurs, ...).

1.2.1 Expression des forces d'aplatissement supplémentaires

Soient \mathcal{N} corps P_k de masse m_k supposés ponctuels et un corps central aplati P_0 de masse m_0 s'attirant suivant les lois de la gravitation newtonnienne. On considère un repère orthonormé noté (P_0, x, y, z) centré sur P_0 dont les axes sont supposés de directions fixes.

On note $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{P_0 P_i}$, $r_i = |\mathbf{r}_i|$, $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$.

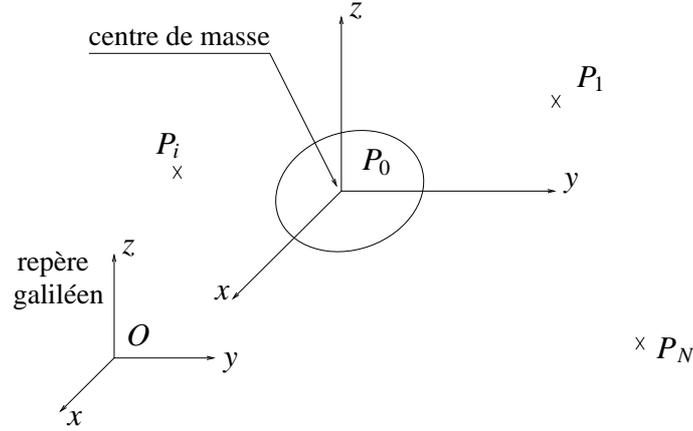


FIG. 1.1 – Problème des \mathcal{N} -corps ponctuels et d'un corps principal non ponctuel.

En vertu de l'égalité vectorielle $\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\overrightarrow{OP_i}} - \ddot{\overrightarrow{OP_0}}$ où O est l'origine d'un repère galiléen arbitraire, on passe aisément des équations du mouvement exprimées dans un tel repère, à celles exprimées dans le repère planétocentrique (P_0, x, y, z) . Il vient le système différentiel classique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_0}{m_0} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \frac{\mathbf{F}_0}{m_0} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{r}}_{\mathcal{N}} = \frac{\mathbf{F}_{\mathcal{N}}}{m_{\mathcal{N}}} - \frac{\mathbf{F}_0}{m_0} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où \mathbf{F}_k désigne l'ensemble des forces extérieures s'exerçant sur le k -ième corps P_k . On note plus précisément \mathbf{F}_{ki} la force exercée sur P_k par P_i . Introduisant les potentiels¹ de gravitation, on a $\mathbf{F}_{ki} = Gm_k m_i \nabla_k U_{ki}$ où $U_{ki} = U_{\bar{k}\bar{i}} = \frac{1}{r_{\bar{k}\bar{i}}}$.

Pour les forces émanant du corps central on a l'égalité $\mathbf{F}_{k0} = \mathbf{F}_{\bar{k}\bar{0}} + \mathbf{F}_{\bar{k}\hat{0}}$ avec $\mathbf{F}_{\bar{k}\bar{0}} = Gm_k m_0 \nabla_k U_{\bar{k}\bar{0}}$ et $\mathbf{F}_{\bar{k}\hat{0}} = Gm_k m_0 \nabla_k U_{\bar{k}\hat{0}}$. Ce dernier potentiel représente l'action de l'aplatissement de P_0 sur P_k et s'écrit, en fonction des coordonnées sphériques équatoriales (r_k, ϕ_k, λ_k) de P_k dans le repère (P_0, x', y', z') lié à la planète (voir la figure (1.2)), sous la forme suivante

$$U_{\bar{k}\hat{0}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} \left\{ -J_n P_n(\sin \phi_k) + \sum_{p=1}^n P_n^{(p)}(\sin \phi_k) [c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k] \right\} \quad (1.2)$$

1. En toute rigueur, les fonctions U sont appelées fonctions de force, les potentiels associés étant $-U$. Par abus de langage, nous continuerons à utiliser la terminologie de potentiel.

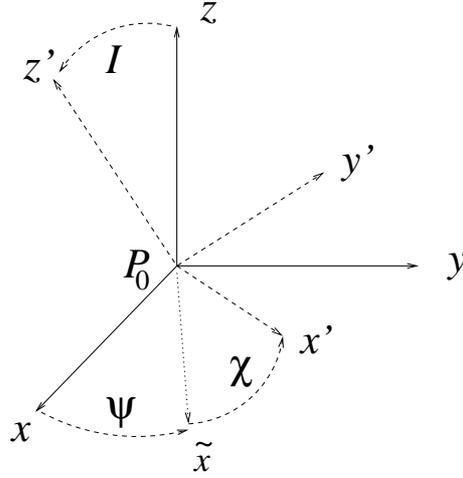


FIG. 1.2 – Repère équatorial du corps central P_0 précessant et tournant noté (P_0, x', y', z') .

L'équation différentielle qui régit le mouvement du *ième* corps P_i est alors après réécriture

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i = & -\frac{G(m_0 + m_i)\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) + G(m_0 + m_i)\nabla_i U_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \\ & + \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \nabla_j U_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Remarquons que le dernier terme de l'équation (1.3) ainsi que la masse m_i en facteur dans l'avant dernier terme sont généralement oubliés dans les équations du mouvement, car ils représentent des termes d'ordre 2, de l'ordre du produit $m_k J_2$ au plus. Physiquement, ces termes correspondent à des forces indirectes résultant de l'aplatissement du corps central. Nous conserverons ces termes dans la suite sous la dénomination de forces d'aplatissement supplémentaires.

1.2.2 Écriture du potentiel perturbateur $U_{\tilde{\mathbf{r}}_0}$ dans un repère d'axes fixes

Pour une écriture explicite de l'équation (1.3), nous devons exprimer le gradient de l'expression (1.2) en coordonnées cartésiennes (x_k, y_k, z_k) dans le repère planétocentrique d'axes fixes (P_0, x, y, z) .

On remarque que l'expression (1.2) est la somme de deux quantités dont la première est fonction uniquement de la latitude ϕ_k . Afin de simplifier les développements qui vont suivre, séparons chacune d'elles en les notant $U_{\tilde{\mathbf{r}}_0}^{(1)}$ et $U_{\tilde{\mathbf{r}}_0}^{(2)}$. Nous avons alors pour $\nabla_k U_{\tilde{\mathbf{r}}_0}^{(1)}$ la proposition qui suit.

Proposition 1 Soit γ_k l'une quelconque des coordonnées cartésiennes (x_k, y_k, z_k) de P_k dans (P_0, x, y, z) , et soit (x'_k, y'_k, z'_k) le jeu de coordonnées cartésiennes de P_k dans (P_0, x', y', z') ; l'écriture en coordonnées initiales de l'expression $\nabla_k U_{k0}^{(1)}$ est

$$\frac{\partial U_{k0}^{(1)}}{\partial \gamma_k} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n J_n}{r_k^{n+2}} \left[\left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} - \frac{\gamma_k \sin \phi_k}{r_k} \right) \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} - \frac{(n+1)\gamma_k P_n(\sin \phi_k)}{r_k} \right] \quad (1.4)$$

DÉMONSTRATION: - Désignons par M la matrice de passage transformant les coordonnées du repère fixe (x_k, y_k, z_k) dans le repère équatorial tournant de coordonnées (x'_k, y'_k, z'_k) . Celle-ci s'obtient en effectuant trois rotations successives d'angles ψ , I et χ suivant les axes (P_0, z) , (P_0, \hat{x}) et (P_0, z') .

Il vient ainsi

$$M = \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \psi - \sin \chi \sin \psi \cos I & \cos \chi \sin \psi + \sin \chi \cos I \cos \psi & \sin \chi \sin I \\ -\sin \chi \cos \psi - \cos \chi \sin \psi \cos I & -\sin \chi \sin \psi + \cos \chi \cos \psi \cos I & \cos \chi \sin I \\ \sin I \sin \psi & -\cos \psi \sin I & \cos I \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Nous pouvons alors exprimer $\sin \phi_k$ en coordonnées cartésiennes dans le repère d'axes fixes par les égalités suivantes

$$\sin \phi_k = \frac{z'_k}{r_k} = \frac{x_k \sin I \sin \psi - y_k \cos \psi \sin I + z_k \cos I}{r_k} \quad (1.6)$$

En notant γ_k l'une quelconque des coordonnées cartésiennes (x_k, y_k, z_k) , il vient encore

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[\frac{P_n(\sin \phi_k)}{r_k^{n+1}} \right] = \frac{1}{r_k^{n+1}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_k} \sin \phi_k \right) \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} - \frac{P_n(\sin \phi_k)(n+1)\gamma_k}{r_k^2} \right]$$

De plus en utilisant la relation (1.6), on a

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_k} (\sin \phi_k) = \frac{1}{r_k} \left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} - \frac{\gamma_k \sin \phi_k}{r_k} \right)$$

D'où finalement

$$\frac{\partial U_{k0}^{(1)}}{\partial \gamma_k} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n J_n}{r_k^{n+2}} \left[\left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} - \frac{\gamma_k \sin \phi_k}{r_k} \right) \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} - \frac{(n+1)\gamma_k P_n(\sin \phi_k)}{r_k} \right] \quad (1.7)$$

□

Exemple: L'application de la proposition précédente au cas de Jupiter (pour lequel interviennent essentiellement les coefficients J_2, J_3, J_4, J_6) nous donne après réarrangement des

termes, les trois expressions suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{\hat{k}\hat{0}}^{(1)}}{\partial x_k} &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left[\frac{x_k}{r_k} \left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right) - 3 \sin \phi_k \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \frac{(E_r)^3 J_3}{r_k^5} \left[\frac{x_k}{r_k} \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) - \left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left[\frac{x_k}{r_k} \left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right) - \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left[\frac{x_k}{r_k} \left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right) \right] \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left[- \left(\frac{693}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin \phi_k \sin I \sin \psi \right] \\
\frac{\partial U_{\hat{k}\hat{0}}^{(1)}}{\partial y_k} &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left[\frac{y_k}{r_k} \left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right) + 3 \sin \phi_k \sin I \cos \psi \right] \\
&+ \frac{(E_r)^3 J_3}{r_k^5} \left[\frac{y_k}{r_k} \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) + \left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right) \sin I \cos \psi \right] \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left[\frac{y_k}{r_k} \left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right) + \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \sin I \cos \psi \right] \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left[\frac{y_k}{r_k} \left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right) \right] \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left[\left(\frac{693}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin \phi_k \sin I \cos \psi \right] \\
\frac{\partial U_{\hat{k}\hat{0}}^{(1)}}{\partial z_k} &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left[\frac{z_k}{r_k} \left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right) - 3 \sin \phi_k \cos I \right] \\
&+ \frac{(E_r)^3 J_3}{r_k^5} \left[\frac{z_k}{r_k} \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) - \left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right) \cos I \right] \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left[\frac{z_k}{r_k} \left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right) - \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \cos I \right] \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left[\frac{z_k}{r_k} \left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right) \right] \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left[- \left(\frac{693}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin \phi_k \cos I \right]
\end{aligned}$$

Dans ces expressions, $\sin \phi_k$ est à remplacer par son expression (1.6).

Il reste encore à écrire le gradient de l'expression $U_{\hat{k}\hat{0}}^{(2)}$. Celle-ci en plus de faire intervenir la latitude ϕ_k fait également intervenir la longitude λ_k .

Rappelons que nous avons posé

$$U_{\hat{k}\hat{0}}^{(2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} \sum_{p=1}^n P_n^{(p)}(\sin \phi_k) [c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k] \quad (1.8)$$

Il vient la proposition suivante

Proposition 2 Soit γ_k l'une quelconque des coordonnées cartésiennes (x_k, y_k, z_k) dans (P_0, x, y, z) , et soit (x'_k, y'_k, z'_k) le jeu de coordonnées cartésiennes dans (P_0, x', y', z') , l'écriture en coordonnées initiales de l'expression $\nabla_k U_{\bar{k}\hat{0}}^{(2)}$ est

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}^{(2)}}{\partial \gamma_k} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=1}^n \frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} \left\{ \frac{1}{r_k} \left[\left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} - \frac{\gamma_k \sin \phi_k}{r_k} \right) \frac{dP_n^{(p)}(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} - \frac{(n+1)\gamma_k P_n^{(p)}(\sin \phi_k)}{r_k} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k \right] \\ &\quad \left. + P_n^{(p)}(\sin \phi_k) p \frac{\frac{\partial y'_k}{\partial \gamma_k} x'_k - y'_k \frac{\partial x'_k}{\partial \gamma_k}}{x_k'^2 + y_k'^2} [-c_{np} \sin p\lambda_k + s_{np} \cos p\lambda_k] \right\} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: -Partant de l'égalité

$$\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}^{(2)}}{\partial \gamma_k} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=1}^n \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left\{ \frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} P_n^{(p)}(\sin \phi_k) [c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k] \right\} \quad (1.9)$$

pour tout couple d'indices (n, p) , on est amené à calculer les expressions

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left[\frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} P_n^{(p)}(\sin \phi_k) \right] \cdot [c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k] \quad \text{et} \quad \frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} P_n^{(p)}(\sin \phi_k) \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma_k} [c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k]$$

En se référant à ce qui a été fait lors de la démonstration de la proposition 1, on obtient pour le premier terme

$$\frac{(E_r)^n}{r_k^{n+2}} \left[\left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} - \frac{\gamma_k \sin \phi_k}{r_k} \right) \frac{dP_n^{(p)}(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} - \frac{(n+1)\gamma_k P_n^{(p)}(\sin \phi_k)}{r_k} \right] \cdot [c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k]$$

Regardons maintenant le deuxième terme, il s'agit de calculer la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_k} [c_{np} \cos p\lambda_k + s_{np} \sin p\lambda_k] \quad (1.10)$$

qui se ramène en notation complexe au calcul de l'expression $\frac{\partial}{\partial \gamma_k} e^{ip\lambda_k}$. De plus nous avons l'égalité $\lambda_k = \text{atan}\left(\frac{y'_k}{x'_k}\right)$, il vient donc

$$\frac{\partial e^{ip\lambda_k}}{\partial \gamma_k} = ip \frac{\partial \lambda_k}{\partial \gamma_k} e^{ip\lambda_k} = ip \frac{\frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left(\frac{y'_k}{x'_k}\right)}{1 + \left(\frac{y'_k}{x'_k}\right)^2} e^{ip\lambda_k} = ip \frac{\frac{\partial y'_k}{\partial \gamma_k} x'_k - y'_k \frac{\partial x'_k}{\partial \gamma_k}}{x_k'^2 + y_k'^2} e^{ip\lambda_k} \quad (1.11)$$

Cela nous permet de retrouver l'égalité annoncée. Par ailleurs, les expressions de x'_k et y'_k comme fonctions des coordonnées (x_k, y_k, z_k) sont données par la matrice M (voir égalité (1.5)). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k (\cos \chi \cos \psi - \sin \chi \sin \psi \cos I) + y_k (\cos \chi \sin \psi + \sin \chi \cos I \cos \psi) + z_k (\sin \chi \sin I) \\ y'_k &= x_k (-\sin \chi \cos \psi - \cos \chi \sin \psi \cos I) + y_k (-\sin \chi \sin \psi + \cos \chi \cos \psi \cos I) + z_k (\cos \chi \sin I) \end{aligned} \quad (1.12)$$

et également

$$\cos \lambda_k = \frac{x'_k}{\sqrt{x_k'^2 + y_k'^2}} \quad \text{et} \quad \sin \lambda_k = \frac{y'_k}{\sqrt{x_k'^2 + y_k'^2}} \quad (1.13)$$

□

Exemple: Dans le cas de Jupiter (où seuls les coefficients c_{22} et s_{22} sont connus), la proposition précédente s'utilise en posant $n = p = 2$. Nous avons alors l'expression

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}^{(2)}}{\partial \gamma_k} &= \frac{(E_r)^2}{r_k^4} \left[\frac{\gamma_k}{r_k} (15 \sin^2 \phi_k - 9) - 6 \sin \phi_k \frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} \right] \cdot [c_{22} \cos 2\lambda_k + s_{22} \sin 2\lambda_k] \\ &+ \frac{(E_r)^2}{r_k^3} 3(1 - \sin^2 \phi_k) 2 \frac{\frac{\partial y'_k}{\partial \gamma_k} x'_k - y'_k \frac{\partial x'_k}{\partial \gamma_k}}{x_k'^2 + y_k'^2} [-c_{22} \sin 2\lambda_k + s_{22} \cos 2\lambda_k] \end{aligned}$$

Nous avons donc pour chaque coordonnée les expressions explicites suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}^{(2)}}{\partial x_k} &= \frac{(E_r)^2}{r_k^4} \left[\frac{x_k}{r_k} (15 \sin^2 \phi_k - 9) - 6 \sin \phi_k \sin I \sin \psi \right] \cdot [c_{22} \cos 2\lambda_k + s_{22} \sin 2\lambda_k] \\ &+ \frac{(E_r)^2}{r_k^3} 6(1 - \sin^2 \phi_k) \frac{V}{x_k'^2 + y_k'^2} [-c_{22} \sin 2\lambda_k + s_{22} \cos 2\lambda_k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}^{(2)}}{\partial y_k} &= \frac{(E_r)^2}{r_k^4} \left[\frac{y_k}{r_k} (15 \sin^2 \phi_k - 9) + 6 \sin \phi_k \cos \psi \sin I \right] \cdot [c_{22} \cos 2\lambda_k + s_{22} \sin 2\lambda_k] \\ &+ \frac{(E_r)^2}{r_k^3} 6(1 - \sin^2 \phi_k) \frac{W}{x_k'^2 + y_k'^2} [-c_{22} \sin 2\lambda_k + s_{22} \cos 2\lambda_k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}^{(2)}}{\partial z_k} &= \frac{(E_r)^2}{r_k^4} \left[\frac{z_k}{r_k} (15 \sin^2 \phi_k - 9) - 6 \sin \phi_k \cos I \right] \cdot [c_{22} \cos 2\lambda_k + s_{22} \sin 2\lambda_k] \\ &+ \frac{(E_r)^2}{r_k^3} 6(1 - \sin^2 \phi_k) \frac{Z}{x_k'^2 + y_k'^2} [-c_{22} \sin 2\lambda_k + s_{22} \cos 2\lambda_k] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} V &= x'_k (-\sin \chi \cos \psi - \cos \chi \sin \psi \cos I) - y'_k (\cos \chi \cos \psi - \sin \chi \sin \psi \cos I) \\ W &= x'_k (-\sin \chi \sin \psi + \cos \chi \cos \psi \cos I) - y'_k (\cos \chi \sin \psi + \sin \chi \cos I \cos \psi) \\ Z &= x'_k (\cos \chi \sin I) - y'_k (\sin \chi \sin I) \end{aligned}$$

Dans ces expressions, il reste encore à réécrire x'_k , y'_k , $\sin \phi_k$, $\sin 2\lambda_k$ et $\cos 2\lambda_k$ en utilisant respectivement les expressions (1.6), (1.12) et (1.13).

Voilà qui conclut le développement des équations relatives à un système de \mathcal{N} satellites (ou de \mathcal{N} planètes) supposés ponctuels et d'un corps central non ponctuel. Intéressons-nous à présent au cas où tous les corps sont aplatis (aplatissement des satellites).

1.3 Équations du problème des \mathcal{N} -corps non ponctuels dans un repère planétocentrique d'axes fixes

A travers cette section, nous allons commencer par présenter les termes à introduire pour prendre en compte l'aplatissement de tous les corps, et pas uniquement celui du corps central. Nous présenterons ensuite les équations relatives à la rotation des corps, étape nécessaire pour prendre en compte les termes sectoriels et tesséraux des potentiels de gravitation.

1.3.1 Equations du mouvement des centres de masse

Par commodité de notation, nous reprenons ici le même repère centré sur le corps P_0 d'axes fixes (P_0, x, y, z) , quoique les résultats à suivre restent valides pour un repère centré sur tout autre corps. Nous avons de même toujours le système différentiel (1.1) mais la force exercée par P_l sur P_k devient

$$\mathbf{F}_{kl} = \mathbf{F}_{\bar{k}\bar{l}} + \mathbf{F}_{\hat{k}\bar{l}} + \mathbf{F}_{\bar{k}\hat{l}} + \mathbf{F}_{\hat{k}\hat{l}} \quad (1.14)$$

Une étude plus poussée du terme $\mathbf{F}_{\hat{k}\hat{l}}$ montrerait² qu'il s'agit là d'un terme très petit, de l'ordre du³ produit $J_2^{(k)} J_2^{(l)}$ que nous négligerons dans toute la suite. Signalons que les termes de la forme $\mathbf{F}_{\hat{0}i}$ seront également négligés, pour la même raison.

En tenant compte de l'égalité (1.14) et après calculs, trois termes doivent finalement être ajoutés à l'équation (1.3) de la page 24 pour tenir compte des aplatissements, à savoir

$$(m_0 + m_i) \frac{\mathbf{F}_{i\bar{0}}}{m_i m_0} + \sum_{j \neq i, j \neq 0}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{F}_{i\bar{j}} + \mathbf{F}_{\bar{i}j}}{m_i} - \sum_{j \neq i, j \neq 0}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{F}_{\bar{0}j}}{m_0} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (1.15)$$

Le premier terme (noté **A**) est issu de la perturbation directe *planète ponctuelle-satellite aplati* ainsi que d'une partie de cette même perturbation mais cette fois-ci indirecte (pour la masse m_i). Le deuxième terme (noté **B**) correspond aux perturbations mutuelles directes *satellite aplati-satellite ponctuel*. Enfin, le troisième terme (noté **C**) provient du reste des perturbations indirectes *satellites aplatis-planète ponctuelle*.

L'expression explicite des accélérations de l'équation (1.15) se ramène en fait à ce qui a été fait précédemment.

En effet on peut réécrire ces trois termes sous la forme

$$\mathbf{A} = -(m_0 + m_i) \frac{\mathbf{F}_{\bar{0}i}}{m_i m_0} = -G(m_0 + m_i) \nabla_0 U_{\bar{0}i} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{j \neq i, j \neq 0}^{\mathcal{N}} G (m_j \nabla_i U_{\bar{i}j} - m_j \nabla_j U_{\bar{j}i}) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{C} = - \sum_{j \neq i, j \neq 0}^{\mathcal{N}} G m_j \nabla_0 U_{\bar{0}j} \quad (1.18)$$

où la notation $U_{\bar{k}\hat{l}}$ désigne le potentiel perturbateur induit sur le corps ponctuel P_k par l'aplatissement du corps P_l . Or, les équations de la section 1.2 fournissent, plus généralement, l'expression de $\nabla_k U_{\bar{k}\hat{l}}$ en coordonnées cartésiennes centrées sur un quelconque corps

2. On pourra se reporter par exemple à [22] ou encore à [7].

3. **Notation:** Nous surnoterons d'un indice entre parenthèses les coefficients se rapportant à un satellite. Par exemple $J_2^{(k)}$ désigne le coefficient J_2 du satellite P_k .

P_l , dont les angles d'Euler (ψ_l, I_l, χ_l) sont rapportés au repère d'axes de directions fixes (P_l, x, y, z) (voir la figure 1.3).

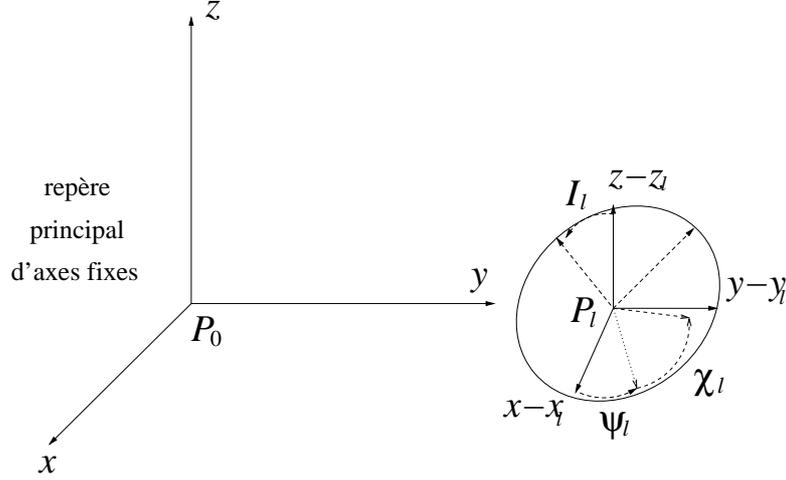


FIG. 1.3 – Repère équatorial d'un satellite P_l rapporté au repère d'axes de directions fixes (P_0, x, y, z) .

Pour obtenir l'expression de $\nabla_k U_{\bar{k}i}$ dans le repère initial centré sur le corps P_0 , il suffit de substituer formellement dans les expressions de $\frac{\partial U_{\bar{k}i}^{(1)}}{\partial \gamma_k}$ et $\frac{\partial U_{\bar{k}i}^{(2)}}{\partial \gamma_k}$ les coordonnées (x_k, y_k, z_k) par $(x_k - x_l, y_k - y_l, z_k - z_l)$ et les angles (ψ, I, χ) par (ψ_l, I_l, χ_l) . Dans le cas de \mathbf{A} et \mathbf{C} le changement de coordonnées revient simplement à remplacer (x_k, y_k, z_k) par $(-x_k, -y_k, -z_k)$. Il va de soi que doivent être également remplacées les valeurs du rayon équatorial et des coefficients d'aplatissement par celles relatives à chaque satellite.

Au final, nous obtenons pour équation différentielle associée au i ème corps P_i l'expression

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= -G(m_0 + m_i) \left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - \nabla_i U_{\bar{i}0} + \nabla_0 U_{\bar{0}i} \right) \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \nabla_j U_{\bar{j}i} + \nabla_i U_{\bar{i}j} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + \nabla_j U_{\bar{j}0} - \nabla_0 U_{\bar{0}j} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

L'écriture explicite de l'équation (1.19) est très lourde; en pratique on pourra se restreindre aux premières valeurs de n et p pour les coefficients $J_n^{(k)}$ et $c_{np}^{(k)}$ représentant l'aplatissement des satellites, cela d'autant plus que très peu d'entre eux sont encore connus. En effet, à l'exception de la Lune, seules les valeurs des coefficients (les plus importants) $J_2^{(k)}$ et $c_{22}^{(k)}$ des satellites (voir la remarque 2 à suivre) ont été estimées par l'observation des trajectoires des sondes spatiales.

D'autres simplifications sont sans doute possibles telle celle de ne pas considérer les perturbations indirectes (satellites-planète) faisant intervenir les termes en $J_3^{(k)}$, $J_4^{(k)}$, $J_6^{(k)}$, voire même en $J_2^{(k)}$. Certes ces perturbations sont des forces d'aplatissement supplémentaires, mais sont aussi en facteur des rayons équatoriaux des satellites élevés au carré ou plus exactement du rapport $\frac{(E_r^{(k)})^n}{r_{kl}^{n+1}}$ avec $n \geq 2$. Ces termes sont donc encore plus petits que les forces d'aplatissement supplémentaires liées à l'aplatissement du corps central. Toutefois, nous conserverons tous ces termes étant donné qu'ils sont nécessaires à la conservation des intégrales premières du système (voir la section 1.6 page 40).

Remarque 1: Dans l'hypothèse où les satellites gardent un axe de rotation parallèle à celui du corps central (ce qui est vérifié pour la plupart des satellites proches de leur planète), il existe une méthode très simple pour prendre en compte l'aplatissement polaire des satellites (coefficients $J_n^{(k)}$), sans à avoir recours aux équations précédentes. En effet, rappelons que la fonction perturbatrice associée à l'aplatissement polaire du corps central et de l'un de ses satellites P_i a pour expression la somme qui suit

$$U_{\bar{k}\hat{0}} + U_{\bar{0}\hat{k}} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} J_n P_n(\sin \phi_k) - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(E_r^k)^m}{r_k^{m+1}} J_m^{(k)} P_m(\sin \phi_0^k) \quad (1.20)$$

En remarquant que dans le cas où les pôles nord de rotation demeurent parallèles, il vient l'égalité $\phi_k = -\phi_0^k$, nous avons alors par imparité de la fonction sinus et propriété des polynômes de Legendre

$$U_{\bar{k}\hat{0}} + U_{\bar{0}\hat{k}} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n}{r_k^{n+1}} P_n(\sin \phi_k) \left(J_n + (-1)^n \left(\frac{E_r^k}{E_r} \right)^n J_n^{(k)} \right) \quad (1.21)$$

Si les perturbations mutuelles *satellite aplati-satellite aplati* restent négligeables, il suffit de modifier les valeurs des coefficients J_n du corps central en conséquence.

Par ailleurs, nous pouvons en déduire que lors de l'ajustement aux observations, les coefficients J_n seront corrélés aux valeurs des coefficients $J_n^{(k)}$, si l'aplatissement polaire des satellites n'est pas pris en compte. Ainsi, si l'on désire utiliser les valeurs d'aplatissement $J_n^{(k)}$ issues des sondes spatiales, il est nécessaire d'effectuer les corrections conséquentes.

Exemple: Dans l'hypothèse d'axes de rotation parallèles, pour tenir compte dans une intégration numérique de l'effet *satellite aplati-planète ponctuelle* induit par un coefficient $J_2^{(k)}$, il n'y a qu'à remplacer la valeur du coefficient J_2 du corps central par la nouvelle valeur $(J_2 + (\frac{E_r^k}{E_r})^2 J_2^{(k)})$, lors de l'intégration du satellite considéré comme aplati. De même pour une théorie analytique, il suffira de modifier les valeurs du coefficient J_2 dans l'expression des séries analytiques.

Remarque 2: Les coefficients $c_{22}^{(k)}$ et $s_{22}^{(k)}$ caractérisent l'ellipticité équatoriale des satellites. Généralement le repère de référence pour définir ces derniers a pour direction les axes principaux d'inertie du satellite. La déformation équatoriale, possédant une symétrie (jusqu'à une certaine précision) par rapport à l'un des axes d'inertie, se traduit alors par la nullité des coefficients $s_{22}^{(k)}$. Ainsi, pour les satellites galiléens, seuls les coefficients $c_{22}^{(k)}$ seront à considérer.

1.3.2 Rotation des corps autour de leur centre de masse

Le système (1.1) est incomplet dès lors que les angles d'Euler (ψ, I, χ) et $(\psi_k, I_k, \chi_k)_{1 \leq k \leq N}$, ne sont pas contraints à rester fixes (précession et rotation diurne des corps).

Afin d'appréhender l'évolution des corps autour de leur centre de masse, il convient de faire intervenir les différents moments présent dans le système.

Soit (O, x, y, z) un repère inertiel noté \mathcal{R} , et soit G_i le centre de masse d'un corps P_i fixé, nous avons l'égalité

$$\left. \frac{d\mathcal{M}_{G_i}(P_i)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathbf{K}_{G_i}(P_i) \quad (1.22)$$

où $\mathcal{M}_{G_i}(P_i)$ et $\mathbf{K}_{G_i}(P_i)$ sont respectivement le moment cinétique en G_i du corps P_i et le moment en G_i des forces extérieures à P_i .

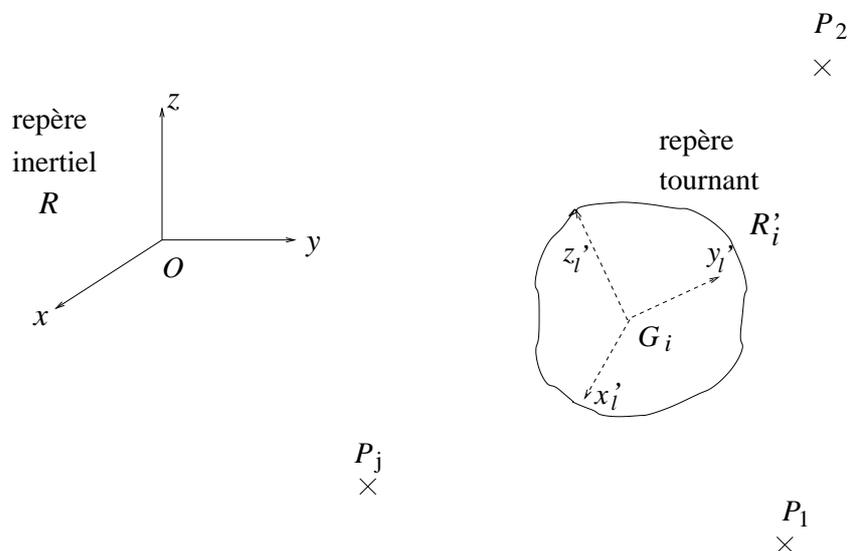


FIG. 1.4 – Repère inertiel \mathcal{R} et repère tournant \mathcal{R}'_i .

Notons \mathcal{R}'_i le repère d'axes tournant dirigés selon les axes principaux du corps P_i , et centré

sur G_i (voir figure (1.4)), le premier membre de l'équation (1.22) devient alors

$$\left. \frac{d\mathcal{M}_{G_i}(P_i)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\mathcal{M}_{G_i}(P_i)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'_i} + \Omega \times \mathcal{M}_{G_i}(P_i) \quad (1.23)$$

où Ω est le vecteur rotation instantanée du corps P_i . De part le choix du repère \mathcal{R}'_i (axes confondus avec les axes principaux), le moment $\mathcal{M}_{G_i}(P_i)$ peut s'écrire de façon condensée sous la forme $\mathcal{M}_{G_i}(P_i) = \mathbf{I} \Omega$, où $\mathbf{I} = (A, B, C)$ désigne la matrice principale d'inertie du corps P_i . En combinant les équations précédentes, on obtient alors l'équation suivante appelée équation d'Euler

$$\mathbf{I} \dot{\Omega} + \Omega \times \mathbf{I} \Omega = \mathbf{K}_{G_i}(P_i) \quad (1.24)$$

Celle-ci peut encore être réécrite en coordonnées cartésiennes sous la forme

$$\begin{cases} A\dot{\Omega}_1 + (C - B)\Omega_2\Omega_3 = (K_{G_i})_1 \\ B\dot{\Omega}_2 + (A - C)\Omega_3\Omega_1 = (K_{G_i})_2 \\ C\dot{\Omega}_3 + (B - A)\Omega_1\Omega_2 = (K_{G_i})_3 \end{cases} \quad (1.25)$$

Par définition de $\mathbf{K}_{G_i}(P_i)$, nous avons en notant R un point quelconque de P_i l'égalité

$$\mathbf{K}_{G_i}(P_i) = \int_{P_i} \overrightarrow{G_i R} \times d\mathbf{F}(R) \quad (1.26)$$

Le second membre est assez délicat à calculer dans la mesure où les forces extérieures proviennent de corps non ponctuels. En effet, il s'agit là d'une intégrale de volume double. Afin de contourner ce problème nous allons nous contenter de traiter cette équation dans le cas où tous les autres corps (à l'exception du satellite considéré) sont modélisés comme ponctuels.

La somme des moments des forces extérieures dans tout système fermé étant nulle, nous avons alors l'égalité

$$\mathbf{K}_{G_i}(P_i) = - \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} \overrightarrow{G_i P_j} \times \mathbf{F}_j \quad (1.27)$$

Le calcul explicite du second membre dans le cas des termes $(J_2^{(i)}, c_{22}^{(i)})$ est donné dans la proposition suivante⁴.

Proposition 3 *Soient \mathcal{N} -corps ponctuels P_j et un corps non ponctuel P_i , le moment dynamique $\mathbf{K}_{G_i}(P_i)$ du corps P_i pris au centre de masse G_i de ce dernier a pour expression*

$$\mathbf{K}_{G_i}(P_i) = \mathcal{A} + \sum_{j=0, j \neq i}^{\mathcal{N}} \sum_{k=0, k \neq i, k \neq j}^{\mathcal{N}} \overrightarrow{G_i P_j} \times \frac{G m_j m_k \overrightarrow{P_k P_j}}{r_{jk}^3} \quad (1.28)$$

4. Nous noterons par $\gamma_i^{j'}$ la coordonnée γ du corps P_i rapportée au repère équatorial du corps P_j et centré sur celui-ci.

avec pour coordonnées du vecteur \mathcal{A} les expressions

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} \frac{Gm_i m_j 3(E_r^i)^2}{r_{ij}^3} \cos \phi_j^i \sin \phi_j^i \sin \lambda_j^i \left[J_2^{(i)} - 2c_{22}^{(i)} \right] \\ \mathcal{A}_2 = \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} -\frac{Gm_i m_j 3(E_r^i)^2}{r_{ij}^3} \cos \phi_j^i \sin \phi_j^i \cos \lambda_j^i \left[J_2^{(i)} + 2c_{22}^{(i)} \right] \\ \mathcal{A}_3 = \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} \frac{Gm_i m_j 6(E_r^i)^2}{r_{ij}^3} c_{22}^{(i)} \cos^2 \phi_j^i \sin 2\lambda_j^i \end{cases} \quad (1.29)$$

DÉMONSTRATION: -En partant de l'expression vectorielle (1.27) du moment dynamique $\mathbf{K}_{G_i}(P_i)$, nous avons encore

$$\mathbf{K}_{G_i}(P_i) = - \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} \overrightarrow{G_i P_j} \times \left(\mathbf{F}_{\overline{j_i}} + \mathbf{F}_{\overline{j_i}} + \sum_{k=0, k \neq i, k \neq j}^{\mathcal{N}} \mathbf{F}_{\overline{j_k}} \right) \quad (1.30)$$

que l'on peut simplifier en remarquant que le premier produit vectoriel est nul, et réécrire sous la forme

$$\mathbf{K}_{G_i}(P_i) = \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} \left(-\overrightarrow{G_i P_j} \times Gm_j m_i \nabla_j U_{\overline{j_i}} + \sum_{k=0, k \neq i, k \neq j}^{\mathcal{N}} \overrightarrow{G_i P_j} \times \frac{Gm_j m_k \overrightarrow{P_k P_j}}{r_{jk}^3} \right) \quad (1.31)$$

avec

$$U_{\overline{j_i}} = \frac{(E_r^i)^2}{r_{ij}^3} \left[-J_2^{(i)} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi_j^i - \frac{1}{2} \right) + 3(1 - \sin^2 \phi_j^i) c_{22}^{(i)} \cos 2\lambda_j^i \right] \quad (1.32)$$

où $(r_{ij}, \phi_j^i, \lambda_j^i)$ sont les coordonnées sphériques du corps P_j rapportées dans le repère tournant \mathcal{R}'_j . Afin d'obtenir une expression complètement explicite, nous devons développer le premier terme de l'équation (1.31). Pour cela, séparons comme dans la sous-section 1.2.2 le potentiel $U_{\overline{j_i}}$ en deux parties distinctes $U_{\overline{j_i}}^{(1)}$ et $U_{\overline{j_i}}^{(2)}$.

Il vient alors après calculs pour les trois composantes du gradient de $U_{\overline{j_i}}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\overline{j_i}}^{(1)}}{\partial x_j^{i'}} &= \frac{(E_r)^2 J_2^{(i)} 3x_j^{i'}}{r_{ij}^5} \left(\frac{5}{2} \sin^2 \phi_j^i - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{\partial U_{\overline{j_i}}^{(1)}}{\partial y_j^{i'}} &= \frac{(E_r)^2 J_2^{(i)} 3y_j^{i'}}{r_{ij}^5} \left(\frac{5}{2} \sin^2 \phi_j^i - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{\partial U_{\overline{j_i}}^{(1)}}{\partial z_j^{i'}} &= \frac{(E_r)^2 J_2^{(i)} 3z_j^{i'}}{r_{ij}^5} \left(\frac{5}{2} \sin^2 \phi_j^i - \frac{3}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Calculons maintenant les trois composantes du gradient de $U_{\overline{j_i}}^{(2)}$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\overline{j_i}}^{(2)}}{\partial x_j^{i'}} &= 3(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)} \left[\frac{x_j^{i'}}{r_{ij}^5} (5 \sin^2 \phi_j^i - 3) \cos 2\lambda_j^i + \frac{2 \cos^2 \phi_j^i \sin 2\lambda_j^i \sin^2 \lambda_j^i}{r_{ij}^3 y_j^{i'}} \right] \\ \frac{\partial U_{\overline{j_i}}^{(2)}}{\partial y_j^{i'}} &= 3(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)} \left[\frac{y_j^{i'}}{r_{ij}^5} (5 \sin^2 \phi_j^i - 3) \cos 2\lambda_j^i - \frac{2 \cos^2 \phi_j^i \sin 2\lambda_j^i \cos^2 \lambda_j^i}{r_{ij}^3 x_j^{i'}} \right] \\ \frac{\partial U_{\overline{j_i}}^{(2)}}{\partial z_j^{i'}} &= -\frac{(E_r^i)^2 15 c_{22}^{(i)} \cos 2\lambda_j^i}{r_{ij}^4} \sin \phi_j^i \cos^2 \phi_j^i \end{aligned} \quad (1.34)$$

En remarquant que nous avons

$$x_j^{i'} \frac{\partial U_{\bar{j}^i}^{(1)}}{\partial y_j^{i'}} - y_j^{i'} \frac{\partial U_{\bar{j}^i}^{(1)}}{\partial x_j^{i'}} = 0 \quad (1.35)$$

la première partie de la troisième composante du moment dynamique est simplement

$$\mathcal{A}_3 = \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} \frac{Gm_i m_j 6(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)} \cos^2 \phi_j^i \sin 2\lambda_j^i}{r_{ij}^3} \quad (1.36)$$

L'expression de la première partie des deux autres composantes est un peu plus longue à obtenir, et vaut

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} \frac{Gm_i m_j 3(E_r^i)^2}{r_{ij}^4} \left[\frac{y_j^{i'} z_j^{i'} J_2^{(i)}}{r_{ij}} - 2c_{22}^{(i)} \cos \phi_j^i z_j^{i'} \sin \lambda_j^i \right] \quad (1.37)$$

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{j \neq i, j=0}^{\mathcal{N}} -\frac{Gm_i m_j 3(E_r^i)^2}{r_{ij}^4} \left[\frac{x_j^{i'} z_j^{i'} J_2^{(i)}}{r_{ij}} + 2c_{22}^{(i)} \cos \phi_j^i z_j^{i'} \cos \lambda_j^i \right] \quad (1.38)$$

D'où après quelques simplifications supplémentaires les équations (1.28) et (1.29). □

Nous allons à présent retrouver l'orientation du corps P_i dans l'espace, à partir de l'évolution du vecteur Ω . Pour cela utilisons les angles d'Euler (ψ_i, I_i, χ_i) qui permettent de définir l'orientation de P_i par rapport au repère (G_i, x, y, z) d'axes de directions fixes (voir figure (1.5)).

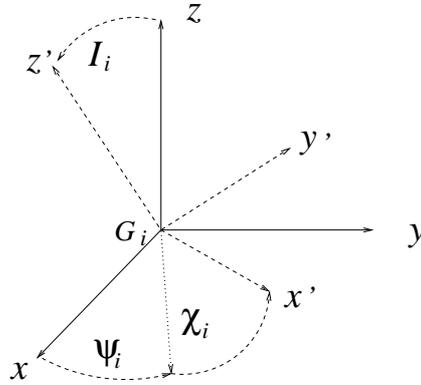


FIG. 1.5 – Les trois angles d'Euler notés (ψ_i, I_i, χ_i) .

Cherchons donc les équations d'évolution des angles d'Euler. On montre aisément (par projection) que ces angles sont reliés à Ω par le système

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\psi}_i \sin I_i \sin \chi_i + \dot{I}_i \cos \chi_i \\ \Omega_2 = \dot{\psi}_i \sin I_i \cos \chi_i - \dot{I}_i \sin \chi_i \\ \Omega_3 = \dot{\psi}_i \cos I_i + \dot{\chi}_i \end{cases} \quad (1.39)$$

Par combinaisons linéaires on peut inverser le système précédent, nous obtenons alors

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i = \frac{\Omega_1 \sin \chi_i + \Omega_2 \cos \chi_i}{\sin I_i} \\ \dot{I}_i = \Omega_1 \cos \chi_i - \Omega_2 \sin \chi_i \\ \dot{\chi}_i = \Omega_3 - \dot{\psi}_i \cos I_i \end{cases} \quad (1.40)$$

Après différentiation du système (1.40), il vient finalement

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_i = \frac{\dot{\Omega}_1 \sin \chi_i + \dot{\Omega}_2 \cos \chi_i + \dot{I}_i(\dot{\chi}_i - \dot{\psi}_i \cos I_i)}{\sin I_i} \\ \ddot{I}_i = \dot{\Omega}_1 \cos \chi_i - \dot{\Omega}_2 \sin \chi_i - \dot{\chi}_i \dot{\psi}_i \sin I_i \\ \ddot{\chi}_i = \dot{\Omega}_3 - \ddot{\psi}_i \cos I_i + \dot{\psi}_i \dot{I}_i \sin I_i \end{cases} \quad (1.41)$$

Pour avoir une écriture en fonction uniquement des angles d'Euler, il reste à exprimer $\dot{\Omega}$ comme fonction de Ω et \mathbf{K} par l'égalité (1.24) et enfin à remplacer les composantes de Ω par les égalités du système (1.39).

1.3.3 Précession et rotation du corps central

Pour les satellites naturels des grosses planètes, le corps central est à composante essentiellement gazeuse. Il est donc exclu d'utiliser les équations précédentes (valables pour un corps solide non déformable), afin d'intégrer la rotation et la précession de celui-ci. Nous allons plutôt reprendre les résultats présentés dans [11] ou plus récemment dans [31], et qui donnent explicitement comme fonction du temps l'expression des angles d'Euler jovien.

Ainsi, l'évolution du pôle de rotation jovien et du méridien origine pour l'équinoxe J2000 à l'époque J2000.0 est donnée par les égalités (exprimées en degrés)

$$\begin{cases} \alpha_0 = 268.05 - 0.009T \\ \delta_0 = 64.49 + 0.003T \\ W = 284.95 + 870.536642d \end{cases} \quad (1.42)$$

où T désigne la date en siècle julien de 36525 jours et d la date en jours juliens à partir de l'époque standard du 1.5 janvier 2000.

Le système (1.42) est ainsi directement exploitable et reste relié aux variables de notre système par les relations $I = 90^\circ - \delta_0$ et $\psi = \alpha_0 + 90^\circ$.

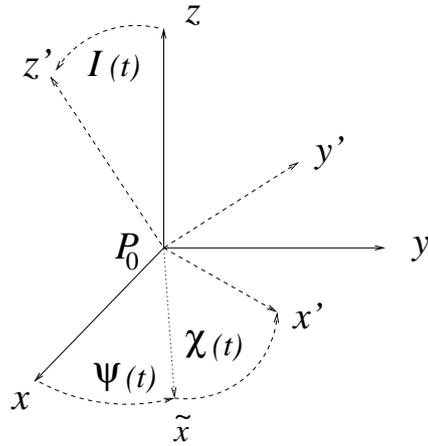


FIG. 1.6 – Repère équatorial du corps central P_0 précessant et tournant, noté (P_0, x', y', z') .

1.4 Potentiel gravitationnel induit par les anneaux du corps central

Les planètes gazeuses du système solaire sont entourées d'anneaux. Nous allons dans cette section développer le potentiel gravitationnel associé à ces derniers. Quoique le corps de référence soit le corps central, ce qui va suivre est bien évidemment généralisable pour un corps quelconque. Nous développons ici le potentiel gravitationnel d'un anneau s'exerçant sur un satellite. Cet anneau sera considéré de densité surfacique σ constante.

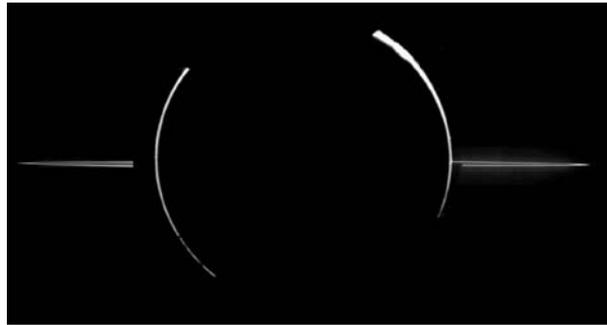


FIG. 1.7 – Les anneaux de Jupiter observés par la sonde Galileo lors d'une éclipse de Soleil.

On considère une couronne \mathcal{C} centrée sur le corps P_0 , d'épaisseur négligeable, de densité surfacique supposée constante σ et de masse totale m_A . Le centre de masse de la couronne sera donc confondu avec la position du corps P_0 . Nous noterons par l_1 et l_2 les rayons internes et externes de cette couronne.

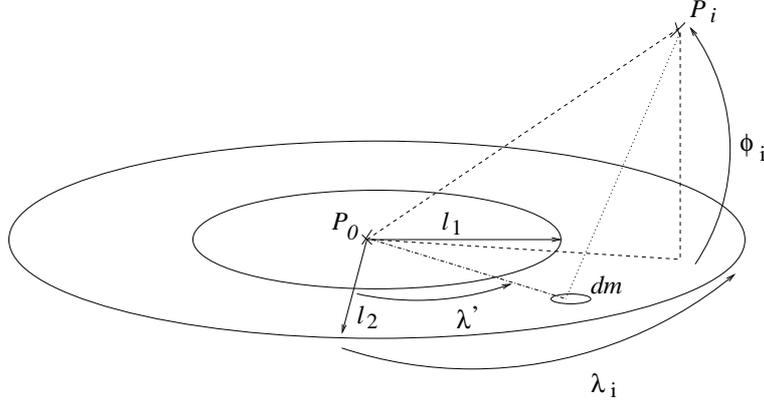


FIG. 1.8 – Attraction exercée sur un corps P_i par un élément infinitésimal de l'anneau.

Nous savons alors que le potentiel gravitationnel de \mathcal{C} (comme de tout solide dont le centre de masse est P_0) qui s'exerce sur un quelconque corps P_i est donné par

$$U_A = \frac{Gm_i m_A}{r_i} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n^{(A)} l_2^n}{r_i^n} P_n(\sin \phi_i) \right] \quad (1.43)$$

où (r_i, ϕ_i, λ_i) sont les coordonnées sphériques de P_i (la longitude λ_i n'apparaissant pas pour des raisons de symétrie). Rappelons que les coefficients $J_n^{(A)}$ sont définis par

$$J_n^{(A)} = -\frac{1}{m_A l_2^n} \int \int_{\mathcal{C}} r'^n P_n(\cos \phi') dm \quad (1.44)$$

où cette fois (r', ϕ', λ') sont les coordonnées sphériques d'un élément infinitésimal quelconque de masse dm de la couronne. \mathcal{C} étant supposée infiniment mince, il est clair que $\phi' = 0$, et donc si n est impair nous avons $J_n^{(A)} = 0$.

Si n est pair, on a alors par définition des polynômes de Legendre

$$P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{(2n - n)!}{2^n (\frac{n}{2})! (n - \frac{n}{2})!} \quad (1.45)$$

et donc en posant $n = 2p$

$$J_{2p}^{(A)} = \frac{(-1)^{p+1} 1.3.5 \dots (2p - 1)}{m_A l_2^{2p} 2.4.6 \dots (2p)} 2\pi \sigma \int_{l_1}^{l_2} r'^{2p+1} dr' \quad (1.46)$$

soit encore après intégration

$$J_{2p}^{(A)} = (-1)^{p+1} \frac{1.3.5 \dots (2p - 1) (l_2^{2p+2} - l_1^{2p+2})}{l_2^{2p} 2.4.6 \dots 2p(p + 1) (l_2^2 - l_1^2)} \quad (1.47)$$

D'où finalement pour expression du potentiel gravitationnel d'un anneau

$$U_A = \frac{Gm_i m_A}{r_i} \left[1 - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{r_i^{2p} 2.4.6 \dots (2p)} \cdot \frac{l_2^{2p+2} - l_1^{2p+2}}{(p+1)(l_2^2 - l_1^2)} P_{2p}(\sin \phi_i) \right] \quad (1.48)$$

Regardons l'ordre de grandeur du premier coefficient $J_{2p}^{(A)}$. Celui-ci est égal à

$$J_2^{(A)} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{l_1^2}{l_2^2} \right) \quad (1.49)$$

et donc de l'ordre de l'unité. S'il est clair que l'on ne peut se contenter d'ajouter la masse des anneaux dans celle de P_0 (cela revient à négliger tous les coefficients $J_{2p}^{(A)}$), on peut en revanche si l'inclinaison des anneaux sur le plan équatorial de P_0 est nulle (ce qui est généralement le cas), prendre en compte complètement le potentiel U_A en rentrant en plus de la masse des anneaux les coefficients $J_{2p}^{(A)}$ dans les coefficients du potentiel d'aplatissement de P_0 . Cela vient à remplacer l'ancienne valeur du J_2 jovien par la nouvelle valeur $\frac{m_0 - m_A}{m_0} J_2 + \frac{m_A}{m_0} \left(\frac{l_2}{E_r} \right)^2 J_2^{(A)}$.

Remarque 3: Comme dans le cas de l'aplatissement des satellites, il est utile de considérer la masse des anneaux, dans la mesure où les sondes spatiales peuvent éventuellement fournir la masse des planètes sans ceux-ci.

Remarque 4: Cette modélisation reste très partielle étant donné que les anneaux sont ici considérés comme une couronne (parfaitement circulaire) et de densité surfacique constante. En particulier, on néglige la présence de zones dans le disque plus denses que d'autres.

1.5 Prise en compte de la relativité générale

Pour finir, nous présentons les corrections à apporter pour introduire les effets relativistes. Cette section est fortement inspirée de [18]. On part de l'équation du problème des \mathcal{N} -corps, développée dans un repère galiléen en formulation relativiste, donnée par W. De Sitter

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= - \sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} + \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{G^2}{c^2} m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^4} + 4 \sum_{k \neq i} \frac{G^2}{c^2} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3 r_{ik}} + \sum_{k \neq j, k \neq i} \frac{G^2}{c^2} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3 r_{jk}} \right. \\ &+ \frac{4G}{c^2} m_j [\dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}^3} + \frac{7G}{2c^2} m_j \frac{\ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} - \frac{3G}{c^2} m_j [\dot{\mathbf{r}}_j \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}^3} \\ &\left. + \frac{G}{2c^2} m_j [2\dot{\mathbf{r}}_i + 3(\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})^2 - 4(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) - \ddot{\mathbf{r}}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \right\} \end{aligned} \quad (1.50)$$

où c est la vitesse de la lumière et \mathbf{n}_{ij} est le rayon vecteur unitaire de direction $\overrightarrow{P_j P_i}$, soit $\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}}$.

Dans le cas du système satellitaire jovien, nous pouvons nous limiter aux termes relativistes faisant intervenir exclusivement la masse de Jupiter. En particulier nous négligeons les effets relativistes solaires ou d'un satellite sur un autre. Nous obtenons ainsi pour un satellite P_i , l'équation

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= -\sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} + 4\frac{G^2}{c^2} m_0^2 \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0}{r_{i0}^4} + \frac{4G}{c^2} m_0 [\dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)] \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0}{r_{i0}^3} + \frac{7G}{2c^2} m_0 \frac{\ddot{\mathbf{r}}_0}{r_{i0}} \\ &- \frac{3G}{c^2} m_0 [\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)] \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0}{r_{i0}^3} + \frac{G}{2c^2} m_0 [2\dot{\mathbf{r}}_i + 3(\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{n}_{i0})^2 - 4(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0) - \dot{\mathbf{r}}_0 \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)] \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0}{r_{i0}^3} \end{aligned} \quad (1.51)$$

et pour le corps central

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j \neq 0} Gm_j \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j}{r_{0j}^3} = 0 \quad (1.52)$$

ce qui revient à dire que Jupiter ne ressent pas son propre effet relativiste. Le résultat de l'équation (1.52) permet de simplifier l'équation (1.51). Il vient

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= -\sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} + 4\frac{G^2}{c^2} m_0^2 \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0}{r_{i0}^4} + \frac{Gm_0}{c^2 r_{i0}^2} \left\{ [4\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n}_{i0} - 3\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{n}_{i0}] \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{3}{2} (\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{n}_{i0})^2 \mathbf{n}_{i0} \right\} \\ &- \frac{Gm_0}{c^2 r_{i0}^2} [\dot{\mathbf{r}}_i^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_0^2 - 4\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_0] \mathbf{n}_{i0} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Nous avons donc en tenant compte des effets de la relativité générale, dans un repère jovicentrique, l'expression finale

$$\ddot{\overrightarrow{OP}}_i - \ddot{\overrightarrow{OP}}_0 - \ddot{\overrightarrow{OP}}_{i(Newt)} = 4\frac{G^2 m_0^2}{c^2 r_i^3} \mathbf{n}_i + \frac{Gm_0}{c^2 r_i^2} [4(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{n}_i) \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_i^2 \mathbf{n}_i] \quad (1.54)$$

1.6 Intégrale de l'énergie

Nous aurons à nous servir d'une intégrale première du système, afin de pouvoir contrôler la fiabilité de notre intégrateur numérique. Cela n'a de sens que sur un système dynamiquement complet. En particulier, l'intégrale première ne sera pas conservée sur un système auquel des forces seront prises en compte de manière incomplète. Nous avons choisi d'étudier la conservation de l'énergie mécanique du système.

En conservant les notations des sections précédentes et en notant M la somme des masses du système, nous avons la proposition qui suit

Proposition 4 *L'intégrale de l'énergie E d'un système constitué de $\mathcal{N} + 1$ -corps non ponctuels, dans un repère d'axes fixes centré sur l'un des corps s'écrit*

$$E = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + A^{(i)} \Omega_1^{(i)2} + B^{(i)} \Omega_2^{(i)2} + C^{(i)} \Omega_3^{(i)2} \right) - \frac{1}{2M} \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right)^2 - U = h \quad (1.55)$$

où U est le potentiel gravitationnel du système et h une constante.

DÉMONSTRATION: -En vertu du théorème de l'énergie cinétique (dans le cas des systèmes conservatifs), nous avons dans un repère galiléen l'égalité $E_c = U + \text{cste}$ avec par définition de l'énergie cinétique

$$E_c = \sum_{i=0}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} \left(m_i \overrightarrow{OP_i}^2 + A^{(i)} \Omega_1^{(i)2} + B^{(i)} \Omega_2^{(i)2} + C^{(i)} \Omega_3^{(i)2} \right) \quad (1.56)$$

On a en décomposant l'égalité précédente

$$\sum_{i=0}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{OP_i}^2 = \frac{1}{2} m_0 \overrightarrow{OP_0}^2 + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{OP_i}^2 \quad (1.57)$$

Considérons à présent que l'origine O est le barycentre du système. Cela n'affecte en rien le caractère général de la formulation, dans la mesure où nous allons nous ramener uniquement à des coordonnées relatives au corps P_0 . En utilisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P_k}$, et en posant pour somme des masses $M = \sum_{i=0}^{\mathcal{N}} m_i$, nous pouvons écrire

$$M \overrightarrow{OP_0} = - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \mathbf{r}_i \quad \text{et} \quad M \overrightarrow{OP_0} = - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.58)$$

Nous avons alors en reprenant l'équation (1.57)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{OP_i}^2 &= \frac{1}{2} M \overrightarrow{OP_0}^2 + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \overrightarrow{OP_0} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{2} M \overrightarrow{OP_0}^2 \end{aligned}$$

Et finalement

$$\sum_{i=0}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{OP_i}^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right)^2 \quad (1.59)$$

D'où le résultat annoncé. □

Pour obtenir une expression complètement explicite, il reste à exprimer le potentiel gravitationnel du système qui changera suivant les perturbations incluses dans la modélisation. Soit le modèle général constitué de $\mathcal{N} + 1$ -corps non ponctuels auxquels on associera l'équation différentielle (1.19), nous avons par exemple comme potentiel en négligeant les termes **B** et **C** de la page 29 (équations 1.17 et 1.18) l'égalité

$$U = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} G m_i m_0 \left(\frac{1}{r_i} + U_{\hat{i}0} + U_{\bar{0}i} \right) + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}-1} \sum_{k=i+1}^{\mathcal{N}} \frac{G m_k m_i}{r_{ik}} \quad (1.60)$$

Dans cette dernière expression il reste à exprimer $U_{\hat{i}0}$, que nous obtenons facilement en exprimant les polynômes de Legendre

$$\begin{aligned}
U_{\hat{i}0}^{(1)} &= -\frac{(E_r)^2 J_2}{r_i^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi_i - \frac{1}{2} \right) - \frac{(E_r)^3 J_3}{r_i^4} \left(\frac{5}{2} \sin^3 \phi_i - \frac{3}{2} \sin \phi_i \right) \\
&- \frac{(E_r)^4 J_4}{r_i^5} \left(\frac{35}{8} \sin^4 \phi_i - \frac{15}{4} \sin^2 \phi_i + \frac{3}{8} \right) \\
&- \frac{(E_r)^6 J_6}{r_i^7} \left(\frac{231}{16} \sin^6 \phi_i - \frac{315}{16} \sin^4 \phi_i + \frac{105}{16} \sin^2 \phi_i - \frac{5}{16} \right) \\
U_{\hat{i}0}^{(2)} &= \frac{(E_r)^2}{r_i^3} (3 - 3 \sin^2 \phi_i) [c_{22} \cos 2(\lambda_i - \chi) + s_{22} \sin 2(\lambda_i - \chi)]
\end{aligned}$$

avec $U_{\hat{i}0} = U_{\hat{i}0}^{(1)} + U_{\hat{i}0}^{(2)}$ et où on aura remplacé les expressions $\sin \phi_i$ et λ_i par les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \phi_i = \frac{z'_i}{r_i} \\ \tan \lambda_i = \frac{y'_i}{x'_i} \end{array} \right. \quad (1.61)$$

De même pourra-t'on écrire le potentiel $U_{\hat{0}i}$, en réutilisant ce qui a été dit à la page 30.

Chapitre 2

Estimation des Perturbations Généralement Négligées

Dans ce chapitre, nous supposerons connues du lecteur les bases de la théorie des perturbations et du développement de la fonction perturbatrice. A ce sujet on pourra consulter [15]. Nous allons présenter ici une estimation analytique de l'effet principal à attendre des perturbations généralement négligées, et considérées dans le chapitre précédent, en développant quelques exemples. Celles-ci seront développées en fonction des éléments d'orbite osculateurs, dans un repère équatorial planétocentrique. Nous ramènerons l'étude de ces perturbations au calcul des termes séculaires de la fonction perturbatrice moyennée. Toutefois la considération de la libration laplacienne ne peut être mise à l'écart, dans la mesure où elle fait intervenir des modifications importantes sur les termes séculaires. Enfin, nous nous attarderons quelque peu sur le cas des résonances spin-orbite qui réclament une attention particulière.

2.1 Influence principale

Les perturbations étudiées dans ce chapitre sont bien plus faibles que les perturbations classiques, telles que les perturbations entre satellites ponctuels et l'influence directe de l'aplatissement du corps central. En effet, ces premières comportent en facteur un ou plusieurs coefficients de valeur faible, de l'ordre du produit de la masse de deux satellites (perturbation d'ordre 2). Nous pouvons donc pour ces raisons nous limiter à l'étude de l'effet principal de ces perturbations.

Par ailleurs, nous avons dans le chapitre précédent sorti des potentiels les masses des corps, et ce afin de mettre en évidence les ordres de grandeur des perturbations. Désormais, nous appellerons fonction perturbatrice (que nous noterons R) l'expression du potentiel en y incluant les dites masses.

Soit $R(a_i, e_i, I_i, \omega_i, \Omega_i, L_i)$ une fonction perturbatrice induite par l'aplatissement d'un corps, nous noterons¹ $\bar{R} = R(\bar{a}_i, \bar{e}_i, \bar{I}_i, -, -, -)$ le potentiel perturbateur moyenné sur le temps, c'est à dire où chacune des variables est ramenée à son expression moyenne au cours du temps. Ainsi \bar{R} ne contient plus de termes périodiques et est exclusivement fonction des variables métriques.

En reprenant les équations de Lagrange que l'on pourra trouver par exemple dans [15], il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{a}_i}{dt} = 0 \\ \frac{d\bar{e}_i}{dt} = 0 \\ \frac{d\bar{I}_i}{dt} = 0 \\ \frac{d\bar{\omega}_i}{dt} = \frac{1}{\bar{n}_i \bar{a}_i^2} \left(\frac{\bar{\phi}_i}{\bar{e}_i} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{e}_i} - \frac{\cos \bar{I}_i}{\bar{\phi}_i \sin \bar{I}_i} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}_i} \right) \\ \frac{d\bar{\Omega}_i}{dt} = \frac{1}{\bar{n}_i \bar{a}_i^2 \bar{\phi}_i \sin \bar{I}_i} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}_i} \\ \frac{d\bar{L}_i}{dt} = \bar{n}_i - \frac{2}{\bar{n}_i \bar{a}_i} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{a}_i} + \frac{\bar{\phi}_i (1 - \bar{\phi}_i)}{\bar{n}_i \bar{a}_i^2 \bar{e}_i} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{e}_i} + \frac{1 - \cos \bar{I}_i}{\bar{n}_i \bar{a}_i^2 \bar{\phi}_i \sin \bar{I}_i} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}_i} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $\bar{\phi}_i = \sqrt{1 - \bar{e}_i^2}$.

Ces équations étant linéaires par rapport à \bar{R} , nous pouvons donc nous restreindre à l'étude d'un seul potentiel.

L'intégration du système (2.1) a pour solution immédiate

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_i = \bar{a}_{i0} \\ \bar{e}_i = \bar{e}_{i0} \\ \bar{I}_i = \bar{I}_{i0} \\ \bar{\omega}_i = \frac{1}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^2} \left(\frac{\bar{\phi}_{i0}}{\bar{e}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{e}_i} - \frac{\cos \bar{I}_{i0}}{\bar{\phi}_{i0} \sin \bar{I}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}_i} \right) \cdot t + \bar{\omega}_{i0} \\ \bar{\Omega}_i = \left(\frac{1}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^2 \bar{\phi}_{i0} \sin \bar{I}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}_i} \right) \cdot t + \bar{\Omega}_{i0} \\ \bar{L}_i = \left(\bar{n}_{i0} - \frac{2}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{a}_i} + \frac{\bar{\phi}_{i0} (1 - \bar{\phi}_{i0})}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^2 \bar{e}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{e}_i} + \frac{1 - \cos \bar{I}_{i0}}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^2 \bar{\phi}_{i0} \sin \bar{I}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}_i} \right) \cdot t + \bar{L}_{i0} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

où l'indice 0 dénote les constantes d'intégration.

On constate que seules les variables angulaires varient, les variables métriques restant constantes (et égales à leur valeur moyennée dans le temps). Les variables angulaires, elles, contiennent une composante séculaire supplémentaire. Celle-ci a pour effet de modifier très

1. **Notation:** Attention, dans ce nouveau chapitre nous surnoterons par une barre une variable pour désigner sa valeur moyennée. En particulier, cette notation est à écarter de toute notion d'aplatissement et représentée par une barre sur un indice.

légèrement les vitesses de rotation de ces mêmes variables.
On écrira dans la suite la solution (2.2) également sous la forme

$$\begin{cases} \bar{a}_i &= \bar{a}_{i0} \\ \bar{e}_i &= \bar{e}_{i0} \\ \bar{I}_i &= \bar{I}_{i0} \\ \bar{\omega}_i &= \Delta\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i0} \\ \bar{\Omega}_i &= \Delta\bar{\Omega}_i + \bar{\Omega}_{i0} \\ \bar{L}_i &= \Delta\bar{L}_i + \bar{L}_{i0} \end{cases} \quad (2.3)$$

L'influence moyenne des perturbations généralement négligées (en fait d'une perturbation en générale), se ramène donc essentiellement aux différences angulaires $\Delta\bar{\omega}_i$, $\Delta\bar{\Omega}_i$ et $\Delta\bar{L}_i$ linéaires en temps. Par ailleurs, le signe de ces quantités sera important étant donné qu'il déterminera si les perturbations étudiées s'ajoutent les unes aux autres ou ont, au contraire, tendance à s'annuler.

2.1.1 Calcul des termes séculaires à l'ordre 1

Comme premier exemple nous allons développer les termes séculaires² issus du coefficient $J_2^{(i)}$ des satellites. Posons γ_i l'une quelconque des coordonnées de P_i et γ_0^i l'une quelconque des coordonnées de P_0 ramenée au repère centré sur P_i . En particulier nous avons $\gamma_0^i = -\gamma_i$. Nous pouvons alors écrire la suite d'égalités suivante

$$\nabla_0 R(\gamma_0^i) = (\partial_{\gamma_0^i} R(\gamma_0^i)) = (\partial_{\gamma_i} R(\gamma_i(\gamma_0^i))) = \left(\partial_{\gamma_i} R(\gamma_i) \cdot \frac{\partial \gamma_i}{\partial \gamma_0^i} \right) = -\nabla_i R(\gamma_i)$$

Soit le potentiel perturbateur $R_{i\bar{0}}$, nous avons alors en utilisant l'égalité générale précédemment démontrée $\nabla_0 R = -\nabla_i R$ l'expression suivante³

$$\nabla_i R_{i\bar{0}} = Gm_0 \nabla_i U_{\bar{0}i} \quad (2.4)$$

et donc

$$R_{i\bar{0}} = -\frac{Gm_0 (E_r^i)^2 J_2^{(i)} P_2(\sin \phi_0^i)}{r_i^3} \quad (2.5)$$

où $P_2(\sin \phi_0^i) = \frac{3}{2} \sin^2 \phi_0^i - \frac{1}{2}$. Le potentiel $R_{i\bar{0}}$ se réécrit encore sous la forme

$$R_{i\bar{0}} = -\frac{Gm_0 (E_r^i)^2 J_2^{(i)} (3 \sin^2 \phi_0^i - 1)}{2a_i^3} \left(\frac{a_i}{r_i} \right)^3 \quad (2.6)$$

2. Il s'agit là des termes séculaires calculés à l'ordre un des petits paramètres représentatifs des perturbations (coefficients J_2 , $J_2^{(k)}$, etc...). Nous continuerons toutefois à les appeler simplement termes séculaires.

3. Nous avons volontairement omis la masse m_i dans cette expression étant donné qu'elle provient d'une perturbation d'un ordre plus élevé comme force d'aplatissement supplémentaire (du satellite lui-même).

Considérons le terme $\sin^2 \phi_0^i$, nous avons en supposant que l'orientation du pôle nord de rotation du satellite soit identique à celui de la planète (voir la figure 2.1) l'égalité $\sin \phi_0^i = \sin(-\phi_i)$, et donc en utilisant les relations de trigonométrie sphérique

$$\sin^2 \phi_0^i = \sin^2 I_i \cdot \frac{1 - \cos(2\omega_i + 2v_i)}{2} \quad (2.7)$$

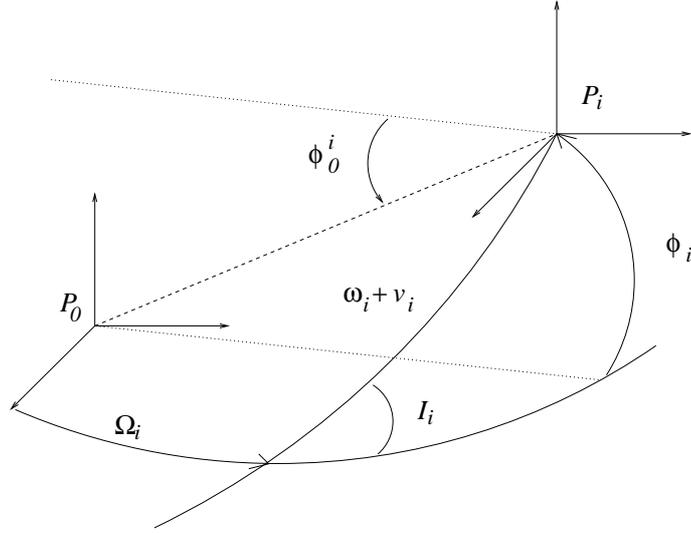


FIG. 2.1 – Relation entre la latitude du corps central ϕ_0^i et les angles ω_i, v_i, I_i .

Par ailleurs, rappelons que les expressions de $\left(\frac{a_i}{r_i}\right)^3 \cos 2v_i$ et $\left(\frac{a_i}{r_i}\right)^3 \sin 2v_i$ sont 2π -périodiques par rapport à l'anomalie moyenne M_i , et donc développables en série de Fourier. Il vient finalement après calculs pour l'expression du potentiel moyenné

$$\overline{R_{i0}} = \frac{Gm_0(E_r^i)^2 J_2^{(i)}}{\overline{a}_i^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 \overline{I}_i \right) (1 - \overline{e}_i^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (2.8)$$

Calculons donc les termes séculaires associés, il vient pour les dérivées partielles par rapport aux variables métriques

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{R_{i0}}}{\partial \overline{a}_i} &= -\frac{3Gm_0(E_r^i)^2 J_2^{(i)}}{\overline{a}_i^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 \overline{I}_i \right) (1 - \overline{e}_i^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial \overline{R_{i0}}}{\partial \overline{e}_i} &= \frac{3Gm_0(E_r^i)^2 J_2^{(i)}}{\overline{a}_i^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 \overline{I}_i \right) (1 - \overline{e}_i^2)^{-\frac{5}{2}} \overline{e}_i \\ \frac{\partial \overline{R_{i0}}}{\partial \overline{I}_i} &= -\frac{3Gm_0(E_r^i)^2 J_2^{(i)}}{2\overline{a}_i^3} \cos \overline{I}_i \sin \overline{I}_i (1 - \overline{e}_i^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Il vient alors, en utilisant l'approximation $\bar{n}_{i0}^2 \bar{a}_{i0}^3 \approx Gm_0$ et les équations du système (2.2)

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\omega}_i &= \frac{3\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 J_2^{(i)} (4 - 5 \sin^2 \bar{I}_{i0})}{4\bar{a}_{i0}^2 (1 - \bar{e}_{i0}^2)^2} \cdot t \\
\Delta \bar{\Omega}_i &= -\frac{3\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 J_2^{(i)} \cos \bar{I}_{i0}}{2\bar{a}_{i0}^2 (1 - \bar{e}_{i0}^2)^2} \cdot t \\
\Delta \bar{L}_i &= \frac{3\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 J_2^{(i)}}{\bar{a}_{i0}^2 \bar{\phi}_{i0}^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\bar{\phi}_{i0}} - \frac{\cos \bar{I}_{i0}}{2\bar{\phi}_{i0}} - \frac{\sin^2 \bar{I}_{i0}}{4} \left(3 + \frac{5}{\bar{\phi}_{i0}} \right) \right] \cdot t
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous remarquons que ΔL_i est positif, le même résultat étant vérifié pour la perturbation (ordre 1) induite par le J_2 du corps central, cela est bien en accord avec le fait (voir la remarque 1 de la page 31) que l'aplatissement d'un satellite représenté par un $J_2^{(i)}$ revient en première approximation à augmenter le J_2 du corps central.

Regardons à présent en deuxième exemple, les termes séculaires issus des forces d'aplatissement supplémentaires. Rappelons que celles-ci ont pour expression (voir l'équation (1.3))

$$Gm_i \nabla_i U_{\hat{i}0} + \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \nabla_j U_{\hat{j}0} \tag{2.11}$$

Calculons le potentiel associé, en nous limitant au coefficient J_2 du corps central. Pour cela nous devons transformer le ∇_j en ∇_i dans la sommation sur l'indice j (partie indirecte des forces d'aplatissement supplémentaires). Il vient

$$Gm_j \nabla_j U_{\hat{j}0} = \nabla_j \left(-\frac{Gm_j (E_r)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi_j - \frac{1}{2} \right)}{r_j^3} \right) \tag{2.12}$$

Le gradient a pour expression

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\hat{j}0}}{\partial x_j} &= -Gm_j (E_r)^2 J_2 \left(\frac{3x_j}{2r_j^5} - \frac{15z_j^2 x_j}{2r_j^7} \right) \\
\frac{\partial R_{\hat{j}0}}{\partial y_j} &= -Gm_j (E_r)^2 J_2 \left(\frac{3y_j}{2r_j^5} - \frac{15z_j^2 y_j}{2r_j^7} \right) \\
\frac{\partial R_{\hat{j}0}}{\partial z_j} &= -Gm_j (E_r)^2 J_2 \left(\frac{9z_j}{2r_j^5} - \frac{15z_j^3}{2r_j^7} \right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

On en déduit le potentiel

$$R = -Gm_j (E_r)^2 J_2 \left[\left(\frac{3}{2r_j^5} - \frac{15z_j^2}{2r_j^7} \right) \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j + \frac{3z_i z_j}{r_j^5} \right] \tag{2.14}$$

Le potentiel total R_{FAS} associé aux forces d'aplatissement supplémentaires est donc

$$R_{FAS} = -\frac{Gm_i(E_r)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi_i - \frac{1}{2}\right)}{r_i^3} + \sum_{j=1, \neq i}^N -\frac{Gm_j(E_r)^2 J_2 \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \sin^2 \phi_j\right) r_i r_j \cos \beta_{ij} + 3z_j z_i\right]}{r_j^5} \quad (2.15)$$

où β_{ij} est l'angle entre les directions P_0/P_i et P_0/P_j . En nous limitant au premier terme, nous avons

$$\bar{R}_{FAS} = -\frac{Gm_i(E_r)^2 J_2}{\bar{a}_i^3} (1 - \bar{e}_i^2)^{-3/2} \left(\frac{3}{4} \sin^2 \bar{I}_i - \frac{1}{2}\right) \quad (2.16)$$

On en déduit aisément les termes séculaires induit par ce potentiel, à partir de ceux déjà développés pour le $J_2^{(i)}$ des satellites. Il vient

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\omega}_i &= \frac{3Gm_i(E_r)^2 J_2 (4 - 5 \sin^2 \bar{I}_i)}{4\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^5 (1 - \bar{e}_{i0}^2)^2} \cdot t \\ \Delta \bar{\Omega}_i &= -\frac{3Gm_i(E_r)^2 J_2 \cos \bar{I}_i}{2\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^5 (1 - \bar{e}_{i0}^2)^2} \cdot t \\ \Delta \bar{L}_i &= \frac{3Gm_0(E_r^i)^2 J_2}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^5 \bar{\phi}_{i0}^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\bar{\phi}_{i0}} - \frac{\cos \bar{I}_{i0}}{2\bar{\phi}_{i0}} - \frac{\sin^2 \bar{I}_{i0}}{4} \left(3 + \frac{5}{\bar{\phi}_{i0}}\right) \right] \cdot t \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bien évidemment les signes des termes séculaires ainsi trouvés sont identiques à ceux trouvés pour la perturbation du $J_2^{(i)}$ des satellites. Les deux effets vont donc s'ajouter.

2.1.2 Effet de la résonance laplacienne

Rappelons que dans le système galiléen, les longitudes des satellites sont reliées par l'égalité (résonance laplacienne)

$$L_1 - 3L_2 + 2L_3 = \pi + \alpha(t) \quad (2.18)$$

avec $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \alpha(t) dt = 0$, égalité que l'on peut encore écrire sous la forme

$$N_1 - 3N_2 + 2N_3 = 0 \quad (2.19)$$

où N_i désigne le moyen mouvement moyen du satellite i .

Cette résonance doit être prise en considération pour pouvoir appréhender convenablement l'introduction de toute nouvelle perturbation dans le système. En effet, nous avons vu que l'effet principal d'une perturbation consiste en l'ajout de nouveaux termes séculaires dans les variables angulaires. En particulier les longitudes de chacun des satellites se voient alors évoluer à des fréquences légèrement différentes. Prenons pour exemple l'introduction

de l'aplatissement des satellites. Faisons comme première approximation que seul l'aplatissement de Io (coefficient $J_2^{(1)}$) est influent. Comme nous l'avons vu précédemment, la longitude de Io évolue désormais à une fréquence légèrement plus élevée $N_1' = N_1(1 + \epsilon)$ tandis que les autres valeurs N_2 et N_3 restent inchangées. L'égalité (2.19) n'est donc formellement plus vérifiée. En réalité, la stabilité de la résonance va modifier l'ensemble des moyens mouvements des satellites résonants, de sorte que la relation (2.19) soit maintenues, plus exactement nous aurons l'égalité $N_1' - 3N_2' + 2N_3' = 0$. Le nouveau moyen mouvement moyen N_1' sera donc bien augmenté par rapport à N_1 mais en proportion moindre que prévu. De plus, N_2' sera augmenté tandis que N_3' sera diminué. L'amplitude et la fréquence de la libration laplacienne (le terme principal dans $\alpha(t)$) vont être également modifiés. La quantification précise de ces changements va être réalisée numériquement dans le chapitre 3.

2.2 Un cas intéressant: les résonances spin-orbite

Comme troisième exemple de calcul des termes séculaires, nous allons regarder le potentiel $R_{i\bar{0}}$ induit par le bourrelet équatorial des satellites. Soit le potentiel perturbateur $R_{i\bar{0}}$ suivant

$$R_{i\bar{0}} = \frac{Gm_0(E_r^i)^2 3 \cos^2 \phi_0^i c_{22}^{(i)}}{r_i^3} \cos(2\lambda_0^i) \quad (2.20)$$

Nous supposons de plus que le satellite est en résonance spin-orbite. Ce cas est particulièrement intéressant dans la mesure où le terme séculaire de cette perturbation a en plus de son effet linéaire (comme fonction du temps) une composante sinusoïdale via la libration en rotation du satellite considéré. Ceci se répercute alors sur la longitude par un terme $\Delta\bar{n}_i$ qui n'est plus constant. En particulier cet effet ne pourra pas être absorbé dans la valeur initiale des demi-grands axes, via la méthode présentée dans la section suivante. Mais commençons tout d'abord par calculer le terme séculaire issu de cette perturbation dans le cas d'une résonance spin-orbite *exacte*, c'est à dire où $\lambda_0^i = 0$ pour toutes les valeurs du temps.

2.2.1 Forçage exact

On considère un satellite non ponctuel, caractérisé par le terme tesséral $c_{22}^{(i)}$, dont la longitude du premier axe principal est nulle pour toute valeur du temps. Ainsi, on a l'égalité $\lambda_0^i = 0$ et le potentiel perturbateur $R_{i\bar{0}}$ est réduit à

$$R_{i\bar{0}} = \frac{Gm_0(E_r^i)^2 3 \cos^2 \phi_0^i c_{22}^{(i)}}{r_i^3} \quad (2.21)$$

Le potentiel moyenné associé $\bar{R}_{i\bar{0}}$ vaut alors

$$\bar{R}_{i\bar{0}} = \frac{Gm_0(E_r^i)^2 3 c_{22}^{(i)}}{\bar{a}_i^3} (1 - \bar{e}_i^2)^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \bar{I}_i \right) \quad (2.22)$$

Calculons les dérivées partielles par rapport aux variables $(\bar{a}_i, \bar{e}_i, \bar{I}_i)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{R}_{i\bar{0}}}{\partial \bar{a}_i} &= -\frac{9Gm_0(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}(1 - \bar{e}_i^2)^{-3/2}}{\bar{a}_i^4} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \bar{I}_i\right) \\ \frac{\partial \bar{R}_{i\bar{0}}}{\partial \bar{e}_i} &= \frac{9Gm_0(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)} \bar{e}_i}{\bar{a}_i^3 (1 - \bar{e}_i^2)^{5/2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \bar{I}_i\right) \\ \frac{\partial \bar{R}_{i\bar{0}}}{\partial \bar{I}_i} &= -\frac{3Gm_0(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}(1 - \bar{e}_i^2)^{-3/2}}{\bar{a}_i^3} \sin \bar{I}_i \cos \bar{I}_i\end{aligned}\quad (2.23)$$

La variation séculaire sur la longitude moyenne induite par le potentiel $\bar{R}_{i\bar{0}}$ vaut donc (en reprenant les équations de Lagrange)

$$\Delta \bar{L}_i = \left(-\frac{2}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}_{i\bar{0}}}{\partial \bar{a}_i} + \frac{\bar{\phi}_{i0}(1 - \bar{\phi}_{i0})}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^2 \bar{e}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}_{i\bar{0}}}{\partial \bar{e}_i} + \frac{1 - \cos \bar{I}_{i0}}{\bar{n}_{i0} \bar{a}_{i0}^2 \bar{\phi}_{i0} \sin \bar{I}_{i0}} \frac{\partial \bar{R}_{i\bar{0}}}{\partial \bar{I}_i} \right) \cdot t \quad (2.24)$$

soit encore de façon plus explicite, en utilisant l'approximation $\bar{n}_i^2 \bar{a}_i^3 \approx Gm_0$

$$\Delta \bar{L}_i = \frac{3\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}}{\bar{a}_{i0}^2 \bar{\phi}_{i0}^3} \left[3 + \frac{4}{\bar{\phi}_{i0}} - \frac{\cos \bar{I}_{i0}}{\bar{\phi}_{i0}} - \frac{1}{2} \sin^2 \bar{I}_{i0} \left(3 + \frac{5}{\bar{\phi}_{i0}} \right) \right] \cdot t \quad (2.25)$$

Les termes séculaires des deux autres variables angulaires $\bar{\omega}_i$ et $\bar{\Omega}_i$ ont pour expression

$$\Delta \bar{\omega}_i = \frac{3\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}}{\bar{a}_{i0}^2 (1 - \bar{e}_{i0}^2)^2} \left(4 - \frac{5}{2} \sin^2 \bar{I}_{i0} \right) \cdot t \quad (2.26)$$

$$\Delta \bar{\Omega}_i = -\frac{3\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)} \cos \bar{I}_{i0}}{\bar{a}_{i0}^2 (1 - \bar{e}_{i0}^2)^2} \cdot t \quad (2.27)$$

Les signes des termes séculaires trouvés sont identiques à ceux des deux perturbations précédentes. Ainsi tous ces effets s'additionnent.

2.2.2 Libration en rotation

Nous supposons dorénavant que la rotation du satellite comporte à la place du forçage exact, un terme sinusoïdal (libration en rotation). Nous considérons donc le nouveau potentiel

$$R_{i\bar{0}} = \frac{Gm_0(E_r^i)^2 3c_{22}^{(i)} \cos^2 \phi_0^i}{r_i^3} \cos(2\lambda_0^i) \quad (2.28)$$

avec $\lambda_0^i = A \sin wt$ (on supposera avoir l'origine du temps telle que $\lambda_0^i(0) = 0$). La variable λ_0^i peut être considérée comme une variable supplémentaire du système dans la mesure où elle est elle-même fonction de la variable indépendante χ_i .

On a donc en négligeant l'excentricité \bar{e}_{i0} (ce qui revient à faire l'approximation $\bar{\phi}_{i0} \simeq 1$), et l'inclinaison \bar{I}_{i0} dans l'expression (2.25)

$$\frac{d\bar{L}_i}{dt} = \bar{n}_{i0} + \frac{18\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}}{\bar{a}_{i0}^2} \cos(2\lambda_0^i) \quad (2.29)$$

En intégrant par rapport au temps sur l'intervalle $[0, T]$, il vient

$$\Delta\bar{L}_i = \frac{18\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}}{\bar{a}_{i0}^2} \int_0^T \cos(2A \sin wt) dt \quad (2.30)$$

Cherchons la valeur maximale $(\Delta\bar{L}_i)_{Max}$ de $\Delta\bar{L}_i$. Celle-ci sera atteinte pour la valeur du temps $T = \frac{\pi}{w}$. En posant $u = wt$, on a encore en utilisant la formule de Bessel

$$\frac{1}{w} \int_0^\pi \cos(2A \sin u) du = \frac{\pi}{w} J_0(-2A) \quad (2.31)$$

D'où finalement l'expression de $(\Delta\bar{L}_i)_{Max}$ sous la forme de la série suivante

$$(\Delta\bar{L}_i)_{Max} = \frac{18\pi\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}}{\bar{a}_{i0}^2 w} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(n!)^2} \right) \quad (2.32)$$

que l'on peut encore simplifier sous la forme

$$(\Delta\bar{L}_i)_{Max} = \frac{18\bar{n}_{i0}(E_r^i)^2 c_{22}^{(i)}}{\bar{a}_{i0}^2} \left(T + \frac{\pi}{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(n!)^2} \right) \quad (2.33)$$

On retrouve en premier terme, le terme séculaire issu du développement dans le cas du forçage exact. Le deuxième terme (sous forme de série) est l'amplitude maximale issue de l'effet de la libration en rotation. On constate que les variations en longitude résultantes seront d'autant plus importantes que w sera petit (et A grand). Ce résultat est typique de l'introduction de longues périodes. Ce qui peut rendre ces variations importantes, c'est qu'il n'y a pas l'excentricité ou l'inclinaison qui interviennent en facteur pour modérer l'effet de la longue période. En effet, il s'agit ici d'une variation du terme séculaire lui-même (spin-orbite exacte).

Pour pouvoir appréhender l'amplitude de cette perturbation, il convient de connaître A et w . De plus, il peut d'ailleurs y avoir plusieurs fréquences. Ainsi, en plus de la fréquence de révolution (fréquence du moyen mouvement) et donc très élevée, peut-on s'attendre à voir apparaître des fréquences résonantes ou des longues périodes provenant d'interaction entre différents satellites. Enfin, il est à noter que le terme $\Delta\bar{L}_i$ déplace le satellite sur son orbite, et donc influence la valeur de la longitude λ_0^i . A ce stade, c'est l'intégration numérique qui nous guidera.

2.3 Absorption des termes séculaires

A première vue, on pourrait s'attendre à ce que les modifications sur les variables angulaires apportées par des termes séculaires apparaissent lors de l'ajustement aux observations d'une théorie dynamique, qui ne tient pas compte de ces effets. Cela n'est pourtant pas complètement le cas pour la raison à suivre.

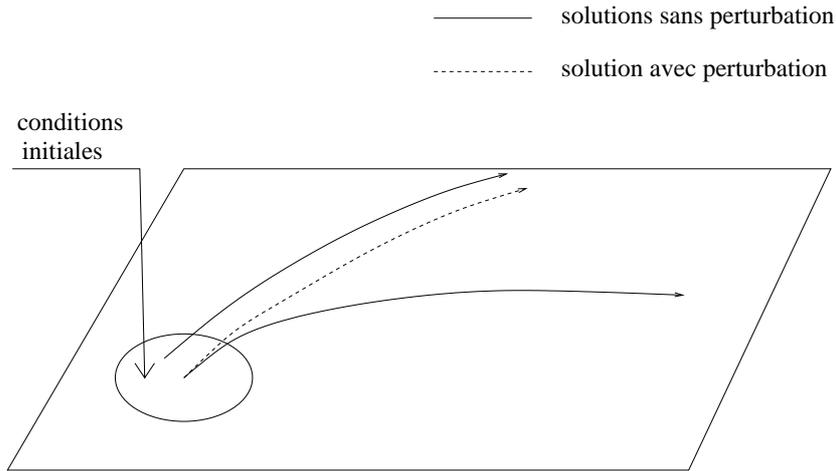


FIG. 2.2 – *En changeant légèrement les conditions initiales d'un système on peut masquer en partie les effets d'une perturbation.*

Par exemple, on peut aisément rentrer le terme $\Delta\bar{n}_i$ dans la valeur de \bar{n}_{i0} en modifiant légèrement la condition initiale \bar{a}_{i0} ou bien la masse m_0 du corps central. Dans le cas du demi-grand axe, cela ne pose guère de problèmes car les valeurs des demi-grands axes ne sont pas déterminées par les observations avec une précision suffisante (il faudrait avoir une précision de l'ordre d'une dizaine de mètres). Ainsi les perturbations en longitude moyenne peuvent être dans un premier temps complètement absorbées. Certes, on ne peut absorber de la sorte les variations sur les deux autres variables angulaires $\bar{\omega}_i$ et $\bar{\Omega}_i$, mais il faut se rappeler que pour ramener leur variation à des différences en positions, ces variables doivent être multipliées respectivement par e_i et $\sin I_i$, ce qui implique des variations beaucoup plus faibles que dans le cas de la longitude moyenne.

Il faut noter toutefois que l'absorption des termes séculaires en longitude étant faite, les moyens mouvements \bar{n}_{i0} sont changés et donc la libration induite pour une résonance éventuelle se trouve décalée en fréquence et en amplitude.

De plus, l'effet de la libration en résonance spin-orbite présenté précédemment n'est pas absorbable de la sorte car non linéaire.

Enfin, rappelons que la réduction d'une théorie aux observations est généralement faite en utilisant la méthode des moindres carrés. L'absorption des termes séculaires en longitude

peut donc se faire de façon moins transparente en altérant par exemple certains paramètres physiques du système.

2.4 Intérêt d'une étude numérique

Les développements analytiques que nous venons d'effectuer nous ont permis d'anticiper l'influence à attendre pour certaines des perturbations envisagées dans le premier chapitre. Toutefois, notre étude analytique ne saurait suffire pour sélectionner les perturbations qu'il est utile de prendre en compte dans le modèle. Tout d'abord, les variations séculaires que nous avons mises en évidence vont être altérées par la résonance laplacienne. Plutôt que de développer un modèle analytique de cette résonance et d'en déduire ses effets, il paraît plus immédiat d'utiliser l'intégration numérique, qui se révélera de toute manière indispensable dans la suite de notre étude. De plus, la considération des résonances spin-orbites exige d'inclure la rotation des satellites dans le modèle, ce qui rend le traitement analytique extrêmement complexe. Enfin, l'intégration numérique nous permet de ne pas avoir recours à diverses hypothèses simplificatrices, telles que négliger les inclinaisons ou les excentricités des orbites.

Chapitre 3

Intégration Numérique

Nous allons dans ce troisième chapitre intégrer numériquement les équations présentées dans le chapitre 1. Ce pas est décisif pour sélectionner les perturbations dont nous tiendrons compte dans toute la suite. Comme attendu par les développements du chapitre 2, l'influence majeure de beaucoup de perturbations se résume à l'apparition de termes séculaires dans les longitudes. Nous ne nous attarderons pas sur l'amplitude des différences kilométriques mises en évidence pour chaque perturbation (à ce titre on pourra se reporter au chapitre 2 de la partie 2), mais nous chercherons à trier par ordre d'importance ces perturbations. Comme nous le verrons, la prise en compte de ces perturbations ouvre la voie à une interaction avec d'autres sections de la physique (comme l'étude de la structure interne des satellites et de l'atmosphère de Jupiter).

3.1 Méthode et présentation du programme utilisé

Commençons par présenter la méthode que nous avons retenue pour tester l'influence de chaque perturbation, ainsi que les outils numériques que nous avons dû développer.

3.1.1 Analyse des perturbations

La méthode que nous avons utilisée est la suivante. Nous prenons comme trajectoire de référence sur un siècle, celle obtenue par intégration numérique d'un "système principal" formé des quatre satellites galiléens et de Jupiter muni des coefficients d'aplatissement J_2, J_4, J_6 .

Partant de conditions initiales identiques, nous intégrons alors le système principal en y ajoutant l'une des perturbations à tester. La différence entre les deux intégrations nous fournit ainsi l'influence, en terme de différences sur les positions ou de variation des éléments elliptiques au bout d'un temps donné, de la perturbation étudiée. En pratique nous avons utilisé une période de comparaison égale à un siècle, intervalle de temps comparable à celui sur lequel s'étendent les observations que nous utiliserons par la suite. Ainsi, les graphes qui vont suivre auront en abscisses des années et en ordonnées des kilomètres. Les différences en positions seront calculées par la distance euclidienne $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$, tan-

dis que les variations en longitudes seront multipliées par les demi-grands axes de référence afin d’obtenir des différences également en kilomètres.

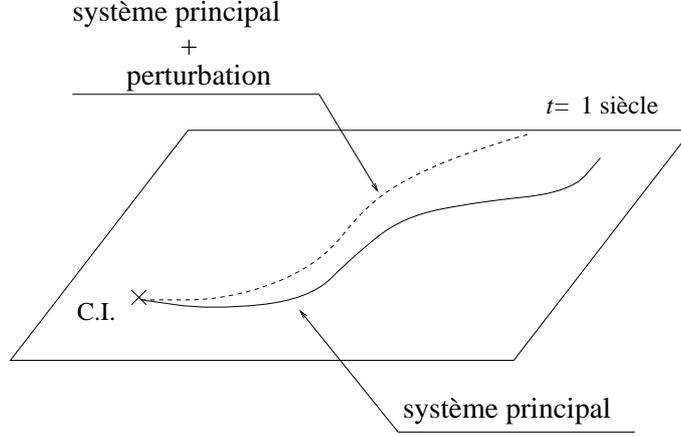


FIG. 3.1 – Variations au bout d’un siècle entre l’intégration d’un système dynamique de départ et de ce même système enrichi d’une perturbation.

Le système différentiel de départ (“système principal”) ne comprend que les équations simplifiées et que nous retrouvons fréquemment, à savoir

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{G(m_0 + m_i)\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_{0j}^3} \right) + Gm_0 \nabla_i U_{\hat{v}_0} \quad (3.1)$$

Nous l’enrichissons assez rapidement des termes $\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{F}_{\hat{0}k}}{m_0}$ représentant des forces d’aplatissement supplémentaires, pour retrouver l’équation complète (1.3) et que nous rappelons ci-dessous

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i &= -\frac{G(m_0 + m_i)\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) + G(m_0 + m_i) \nabla_i U_{\hat{v}_0} \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \nabla_j U_{\hat{v}_0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Cette modification du système de départ est en fait nécessaire pour conserver l’intégrale première de l’énergie du système. D’une manière générale, rappelons que les systèmes non complets (par exemple auxquels certaines forces d’inertie sont négligées) ne conservent pas l’intégrale première de l’énergie.

3.1.2 Le code numérique

Afin de tester chacune des perturbations, nous avons programmé les équations du mouvement correspondantes. Pour cela, nous sommes parti d'un programme numérique développé par L.Duriez, intégrant les équations du mouvement du problème des $\mathcal{N} + 1$ -corps, selon l'équation (1.3). L'ensemble des autres perturbations a donc du être intégré au code. La formulation générale des équations du chapitre 1 nous a permis de rendre applicable notre programme à un système dynamique quelconque. Dans cette optique de généralité, l'ensemble des conditions initiales et paramètres est lu dans un fichier initial indépendant du programme principal. Le choix des perturbations à inclure avant une simulation se fait alors dans ce même fichier initial par détermination des valeurs booléennes indépendantes suivantes:

J3 inclut le coefficient J_3 jovien;
CS22 inclut les termes sectoriels joviens c_{22} et s_{22} ;
FAS inclut les forces d'aplatissement supplémentaires;
RELAT inclut les corrections relativistes;
AJ2 inclut les coefficients $J_2^{(k)}$ des satellites;
PMSAT inclut dans l'expression des perturbations mutuelles l'aplatissement des satellites par les coefficients $J_2^{(k)}$;
ACS22 inclut les coefficients $c_{22}^{(k)}$ des satellites;
ROTAT intègre la rotation des satellites en même temps que les mouvements de révolution;
PREC intègre précession des satellites en même temps que les mouvements de révolution;
SPO force une résonance spin-orbite exacte dans le système.

La routine d'intégration implémentée au code est la routine **RA15** (intégrateur de Everhart, voir [17]) basée sur la méthode des polynômes de Gauss-Radau et d'ordre quinze. Cette routine a pour atout sa rapidité d'exécution et sa convivialité d'utilisation. Par exemple, il suffit de modifier un seul paramètre pour passer de l'intégration d'un système différentiel d'ordre 1 à un système différentiel d'ordre 2; de même, pour passer d'une intégration à pas constant à une intégration à pas variable.

Pour finir, les conditions initiales ont été reprises de la théorie¹ G5 (via le serveur internet² de l'IMCCE) à la date du 25 décembre 1982, à 0H00 le choix de l'année faisant référence à l'article [5]. Celles-ci sont exprimées dans un repère J2000 en temps terrestre. Les valeurs des masses et coefficients d'aplatissement ont été tirés de [2] et [30], et sont données dans la table des constantes.

1. Voir l'article [5].

2. à l'adresse <http://www.bdl.fr/ephemeride.html>.

3.1.3 Contrôle de l'intégration

Avant d'appliquer directement notre méthode de comparaison des perturbations, il convient d'estimer l'erreur numérique propre à toute intégration. Pour cela nous avons utilisé deux méthodes complémentaires:

La première méthode réside dans l'analyse des différences de positions et de vitesses données par l'intégrateur après un aller-retour sur un siècle. Cette méthode nous a permis d'obtenir un pas d'intégration optimal égal à 0.08 jour, donnant des erreurs d'intégration de l'ordre de quelques dizaines de mètres.

La deuxième méthode consiste à étudier la variation de l'intégrale de l'énergie. Comme nous l'avons déjà dit, cette méthode n'est pas applicable pour tout les cas de figure. La variation relative de cette intégrale première a été de l'ordre de 10^{-14} dans tout les cas où nous l'avons testée (voir la figure 3.2 à titre d'exemple pour le cas le plus complexe). La variation de l'énergie sur un aller-retour nous permet alors de revenir à des différences métriques (du moins d'en obtenir un ordre de grandeur). Le résultat obtenu est apparu en accord avec les résultats de la première méthode, soit de quelques dizaines de mètres pour un siècle d'intégration.

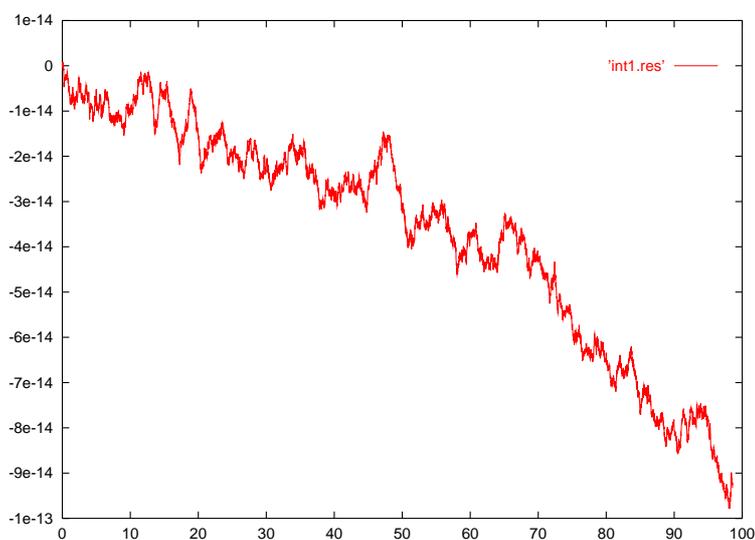


FIG. 3.2 – Variations de l'intégrale première de l'énergie sous la forme $\Delta E/E$ sur une période d'un siècle, lors de l'intégration du système principal enrichi des forces d'aplatissement supplémentaires et de l'aplatissement des satellites (coefficients $J_2^{(k)}$ et $c_{22}^{(k)}$).

3.1.4 Les perturbations solaires et planétaires

Les intégrations numériques utilisées dans ce chapitre ne prennent pas en compte le Soleil, ni les autres planètes en particulier Saturne. En effet, étant hors de question d'intégrer le mouvement de toutes les planètes du système solaire, la position du Soleil doit nécessairement provenir d'un calcul extérieur au programme. Ce faisant le contrôle par l'intégrale première ne devient plus réalisable.

Toutefois la suite de notre travail nécessitait d'inclure bien évidemment la perturbation solaire dans notre programme numérique. Ainsi, la perturbation solaire et celle de Saturne (voir la section 3.6.3), ont été reprises des éphémérides numériques DE406 du JPL. Lors de cette implémentation dans notre programme, nous nous sommes notamment interrogé sur la nécessité éventuelle de prendre pour masse de Jupiter la valeur issue de DE406 et non celle des sondes spatiales. Toutefois, il faut se rappeler que les théories planétaires représentent le barycentre des systèmes planétaires (à l'exception du cas Terre-Lune). Certes il serait possible de retrancher de la valeur de la masse de Jupiter dans DE406, la valeur des masses des satellites galiléens issues des sondes mais cet effet resterait artificiel (il manquerait encore la masse des satellites non galiléens). Nous n'avons donc pas utilisé la masse de DE406.

3.2 Analyse des termes d'aplatissement supplémentaires

Souvent négligés dans les équations nous nous proposons ici de quantifier l'importance des termes d'aplatissement supplémentaires. Ces termes apparaissent après simplification sous la forme d'un coefficient $G(m_0 + m_i)$ en facteur de l'expression $\nabla_i U_{\hat{r}_0}$ (au lieu de $Gm_0 \nabla_i U_{\hat{r}_0}$), et par l'ajout des termes $\sum_j Gm_j \nabla_j U_{\hat{r}_0}$ (voir les équations (3.1) et (1.3)).

En toute rigueur tout ces termes contiennent des coefficients c_{22}, s_{22} et J_3 , toutefois nous restreindrons cette étude à la partie ne contenant que les termes en J_2, J_4, J_6 . Nous intégrerons les coefficients c_{22}, s_{22} et J_3 à cette perturbation, au moment de leur étude respective dans la section 3.4.

Par différence entre deux intégrations, il vient pour écarts sur les positions et les longitudes moyennes les graphes qui suivent (voir figure (3.3))

Comme présenté dans le chapitre précédent, l'influence de cette perturbation se ramène essentiellement à l'apparition de dérives séculaires dans les longitudes. Par ailleurs, nous pouvons apercevoir des fluctuations sur les trois premiers satellites, provenant d'une légère variation des amplitude et fréquence de la libration laplacienne. Nous détaillerons ce point un peu plus loin lors de la section 3.5.

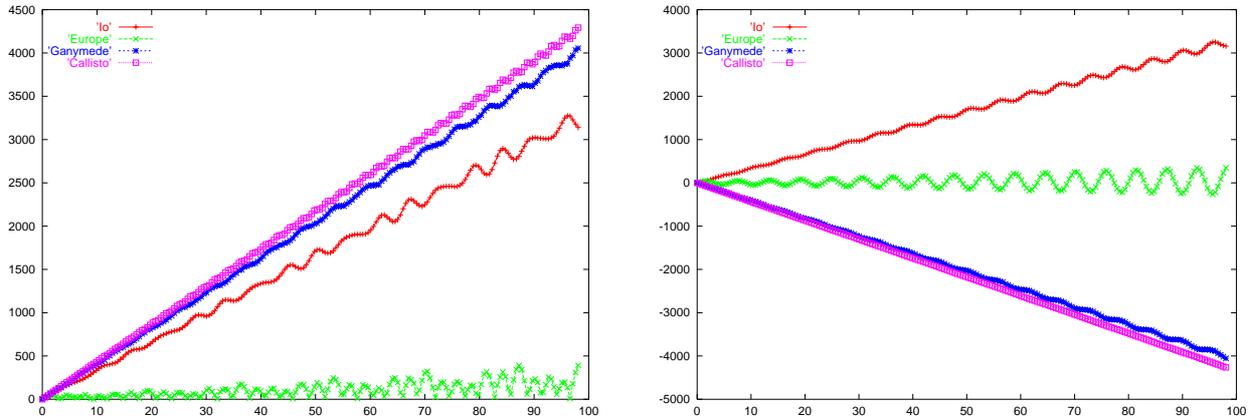


FIG. 3.3 – Variations (en kilomètres) des positions (à gauche) et des longitudes moyennes multipliées par les demi-grands axes (à droite), sous l'effet des forces d'aplatissement supplémentaires.

3.3 Étude de la précession

Le repère équatorial jovien n'est pas fixe dans l'espace. En particulier, les angles ψ et I auxquels sont rattachés les coefficients J_n sont fonctions du temps. Dans la mesure où cet effet est géométrique et n'introduit que des rotations, nous pouvons nous attendre à ce que ce soit les variables angulaires des satellites qui soient les plus perturbées.

Une intégration sur un siècle nous donne le graphe de la figure 3.4. Nous constatons que Ganymède et Callisto sont les satellites les plus touchés par cette perturbation, ce qui n'est guère surprenant dans la mesure où la précession jovienne est un effet cinématique. Les satellites les plus touchés sont donc les plus éloignés.

Les variations en longitudes moyennes et inclinaisons sont données dans la figure 3.5. Cette fois la longitude moyenne n'absorbe pas l'essentiel de la perturbation au profit des autres variables angulaires (la variation des inclinaisons multipliées par les demi-grands axes allant jusqu'à presque 80 kilomètres pour Callisto). Une analyse des autres éléments révèle en effet que les variations en demi-grand axe et excentricité sont presque nulles.

3.4 Analyse des coefficients d'aplatissement joviens

En plus des coefficients d'aplatissement J_2, J_4, J_6 usuels, nous avons également une estimation du coefficient J_3 et des coefficients sectoriels joviens c_{22} et s_{22} par l'intermédiaire des sondes spatiales (voir l'article [8]). Dans ce qui suit nous avons pris les valeurs moyennes présentées dans cet article (voir la table des constantes).

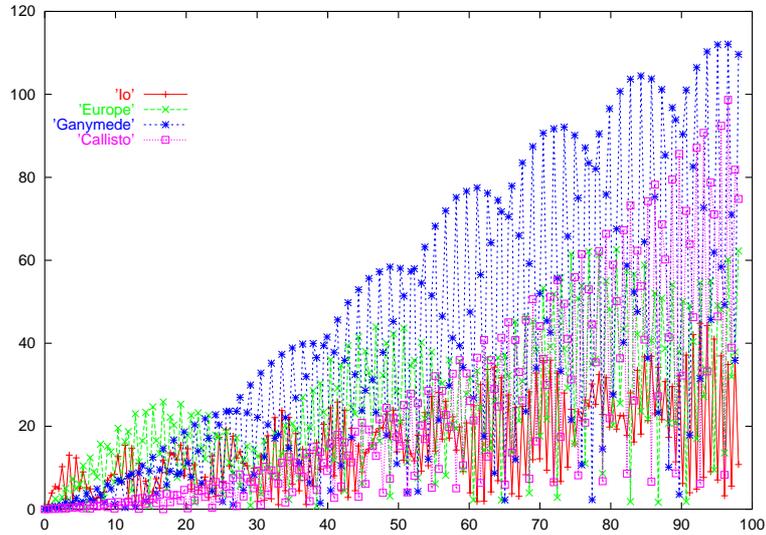


FIG. 3.4 – Variations sur les positions (en kilomètres) de Io, Europe, Ganymede et Callisto, sous l'effet de la précession de Jupiter.

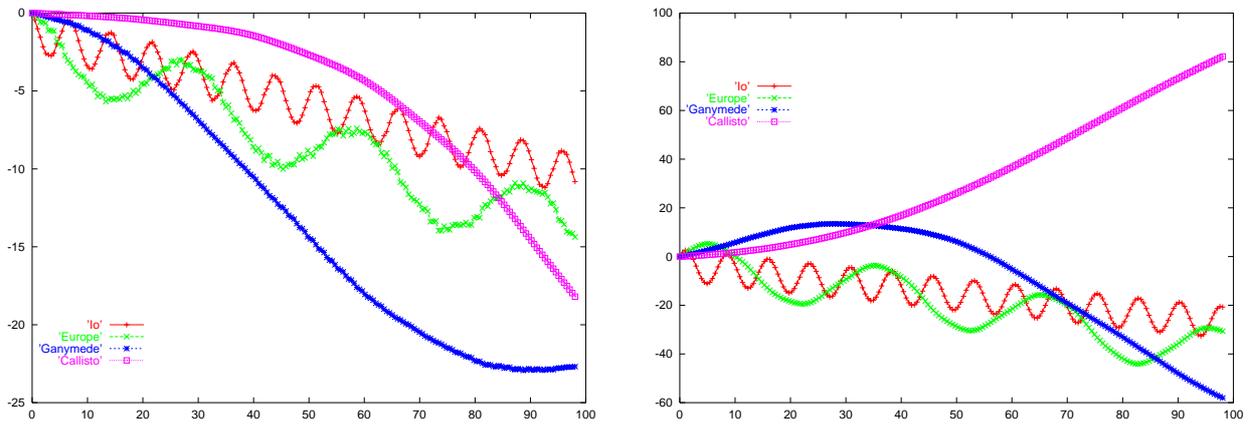


FIG. 3.5 – Variations des longitudes moyennes multipliées par les demi-grands axes (en kilomètres à gauche) et des inclinaisons multipliées par les demi-grands axes (en kilomètres à droite) pour Io, Europe, Ganymede et Callisto sous l'effet de la précession jovienne.

3.4.1 Étude du J_3

Les coefficients J_{2n+1} modélisent l'asymétrie entre les hémisphères Nord et Sud de Jupiter, le J_3 étant le coefficient le plus important.

Regardons la variation des positions entre les deux intégrations sur un siècle (voir figure 3.6)

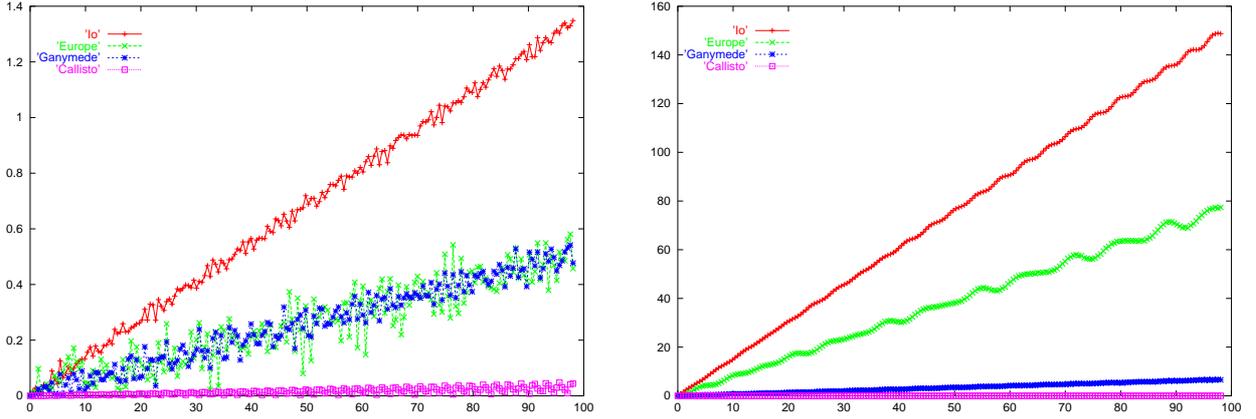


FIG. 3.6 – Variations des positions (en kilomètres) sous l'effet du coefficient J_3 (à gauche) et à titre de comparaison sous l'effet du coefficient J_6 (à droite).

Il est intéressant de constater que malgré la différence de distance au corps central entre Europe et Ganymède, la perturbation portée par le J_3 semble presque identique sur ces deux satellites. Par ailleurs, bien que les coefficients J_3 et J_6 soient du même ordre de grandeur, les variations induites par le J_3 sont très faibles, en comparaison de celles induites par l'influence du J_6 (graphe de droite). Cela illustre en particulier le fait que l'influence d'une perturbation n'est pas toujours proportionnelle à l'ordre de grandeur des coefficients présent dans l'écriture des forces.

3.4.2 Étude des termes sectoriels c_{22} et s_{22}

Les termes sectoriels c_{22} et s_{22} apparaissent au travers de l'expression $\frac{\partial U_{k0}^{(2)}}{\partial \gamma_k}$, où rappelons-le γ_k désigne l'une des coordonnées cartésiennes quelconque (x_k, y_k, z_k) (voir la page 28)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{k0}^{(2)}}{\partial \gamma_k} &= \frac{(E_r)^2}{r_k^4} \left[\frac{\gamma_k}{r_k} (15 \sin^2 \phi_k - 9) - 6 \sin \phi_k \frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} \right] \cdot [c_{22} \cos 2\lambda_k + s_{22} \sin 2\lambda_k] \\ &+ \frac{(E_r)^2}{r_k^3} 3(1 - \sin^2 \phi_k) 2 \frac{\frac{\partial y'_k}{\partial \gamma_k} x'_k - y'_k \frac{\partial x'_k}{\partial \gamma_k}}{x_k'^2 + y_k'^2} [-c_{22} \sin 2\lambda_k + s_{22} \cos 2\lambda_k] \end{aligned}$$

La considération de la longitude λ_k des satellites nécessite d'introduire la vitesse de rotation jovienne. Celle qui a été choisie (tirées de [31]) correspond à la période de rotation des

couches visibles, et donc extérieures, de Jupiter. On peut penser que ce sont celles qui doivent être le plus déformées influençant le plus les coefficients c_{22} et s_{22} . Nous avons comme différences les graphes qui suivent (voir figure 3.7)

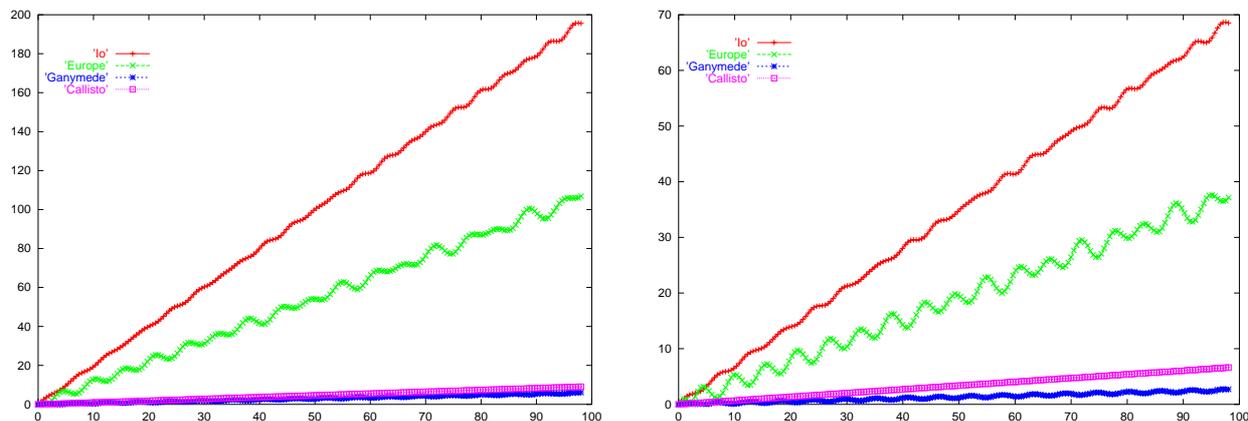


FIG. 3.7 – Variations sur les positions (en kilomètres) sous l'effet des coefficients c_{22} et s_{22} , avec Jupiter non-tournant (à gauche) et Jupiter tournant (à droite).

On constate que la rotation jovienne atténue de beaucoup la perturbation, moyennant ainsi l'effet des termes sectoriels. Une étude (graphes non présentés ici) des deux termes pris indépendamment dans l'expression composant $\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \gamma_k}$ montre que seul le deuxième terme est influent, le premier donnant des variations de l'ordre du kilomètre tout au plus.

Il est à noter que suite aux forts mouvements atmosphériques joviens, les coefficients c_{22} et s_{22} sont susceptibles de varier significativement avec le temps. Cette variation étant inconnue a priori, il est assez délicat de quantifier l'influence réelle des termes sectoriels.

3.5 Effet de l'aplatissement des satellites

Rappelons que l'introduction de l'aplatissement des satellites nécessite d'ajouter les trois termes **A**, **B** et **C** dans les équations du mouvement (voir la page 29).

3.5.1 Etude des coefficients $J_2^{(k)}$

Prenons pour départ l'équation (1.19), en nous limitant aux coefficients $J_2^{(k)}$ des satellites. Les valeurs que nous avons utilisées proviennent des valeurs moyennes des $J_2^{(k)}$ présentées dans les articles [2] (pour Io) et [30] (pour les autres), qui sont d'ailleurs rappelées dans la table des constantes.

En négligeant les perturbations mutuelles directes liées à l’aplatissement des satellites (terme **B** de la page 29), l’intégration sur un siècle nous donne comme écart en positions le graphe de gauche de la figure 3.8.

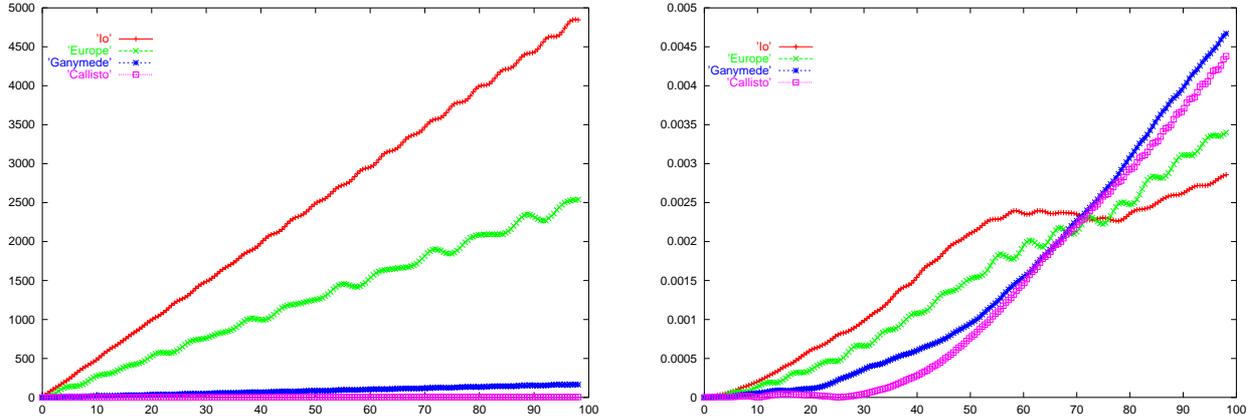


FIG. 3.8 – Variations des positions (en kilomètres) en ne tenant compte que des termes “planète ponctuelle-satellite aplati” (à gauche), puis en ne tenant compte que des perturbations mutuelles directes liées à l’aplatissement des satellites (à droite).

L’importance du terme **B** a été tracée dans le graphe de droite, et paraît tout à fait négligeable. Par ailleurs, nous avons pu remarquer (dans un graphe non présenté ici), que les forces d’aplatissement **C** sont également très faibles et complètement négligeables. Tout cela est assez normal étant donné que seules les forces issues du terme **A** ont en facteur le coefficient Gm_0 (et non un coefficient Gm_j comme c’est le cas des termes **B** et **C**). Toutefois, il y a également une autre raison expliquant l’importance du terme **A**, à savoir la grandeur des rayons équatoriaux des satellites galiléens. En effet, les rayons équatoriaux de ces satellites sont de l’ordre du centième du rayon équatorial jovien soit de quelques milliers de kilomètres.

3.5.2 Etude des coefficients $c_{22}^{(k)}$

Une bonne estimation des coefficients $c_{22}^{(k)}$ des satellites galiléens est aujourd’hui connue (voir l’article [30]), ces derniers étant estimés à environ trois dixièmes de la valeur des coefficients $J_2^{(k)}$ respectifs. Pour étudier leur influence, il est nécessaire comme dans le cas des termes sectoriels joviens d’introduire la rotation des satellites. Nous n’introduisons ici que des rotations en spin-orbite exactes, les libérations en rotation seront étudiées un plus loin (voir la sous-section 3.6.1).

Cette perturbation est la plus importante que nous ayons testée (environ 9000 kilomètres pour Io). Profitons de cela pour revenir sur les variations en amplitude et en fréquence de la libration laplacienne.

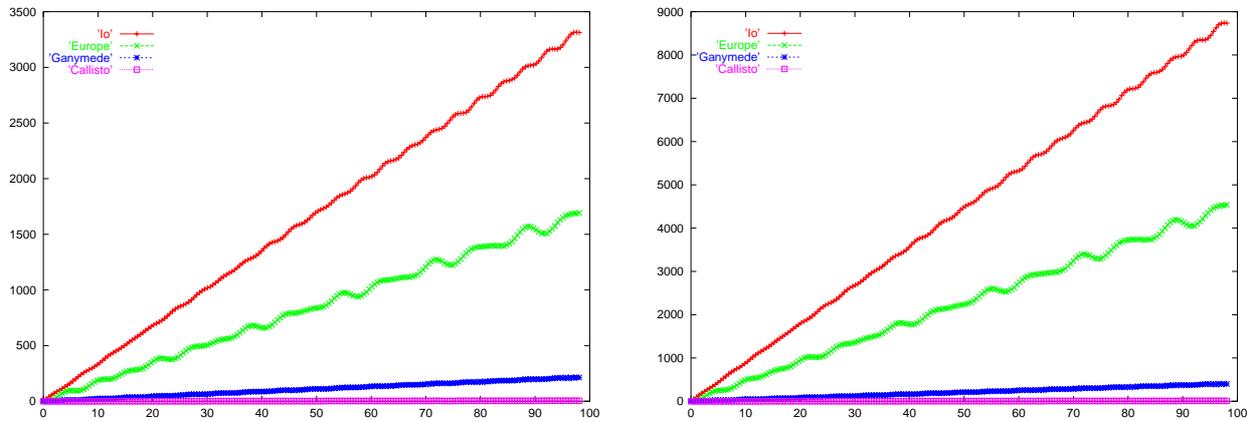


FIG. 3.9 – Variations des positions (en kilomètres) sous l’effet des coefficients $c_{22}^{(k)}$ en figeant la rotation des satellites (à gauche), puis avec la rotation des satellites en forçage exact (à droite).

3.5.3 Variations sur l’amplitude et la fréquence de libration laplacienne

Les variations en amplitude et en fréquence de la libration laplacienne sont directement visibles comme oscillations sur les pentes des trois satellites résonants. Le graphe de la figure 3.10 montre ces variations après soustraction des dérives séculaires.

Pour déterminer les modifications en amplitude et fréquence, nous avons effectué une analyse de Fourier sur les deux intégrations concernées. Les différences obtenues sur l’amplitude et la période de libration laplacienne s’avèrent être simplement de 0.01 degré et 0.003 jour.

3.6 Les autres perturbations

D’autres perturbations ont également été testées, en voici quelques exemples.

3.6.1 Libration en rotation des satellites

Afin d’introduire le mouvement de libration en rotation des satellites galiléens, nous avons inclus l’intégration des rotations des satellites (comme rotation d’un corps solide non déformable), avec leur mouvement de révolution. En guise d’exemple, la libration en rotation du satellite Io est présentée dans la figure 3.11.

Une analyse de Fourier nous a permis de retrouver plusieurs fréquences en plus de la fréquence de révolution. Toutefois la prise en compte de la rotation des satellites par un modèle de solide indéformable et non dissipatif est insuffisante. De plus, nous n’avons pas de véritable conditions initiales pour les rotations. Aussi sommes-nous parti de l’hypothèse

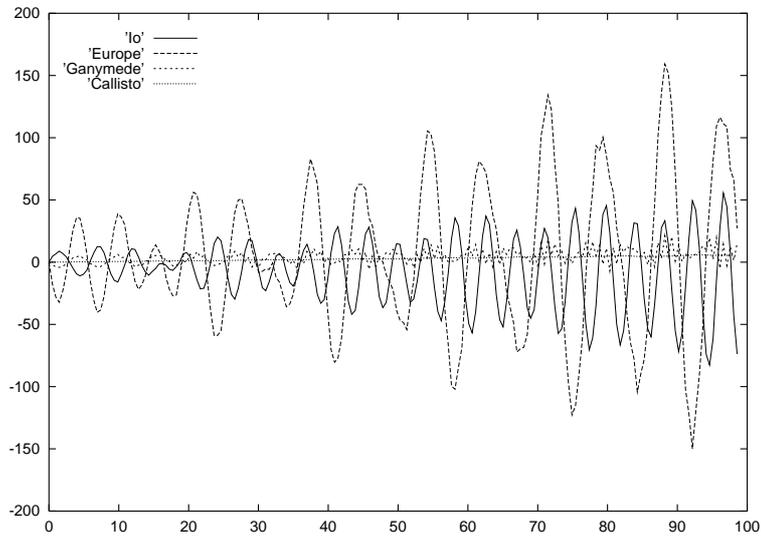


FIG. 3.10 – Variations des positions (en kilomètres) après soustraction d'une pente, sous l'effet des coefficients $c_{22}^{(k)}$.

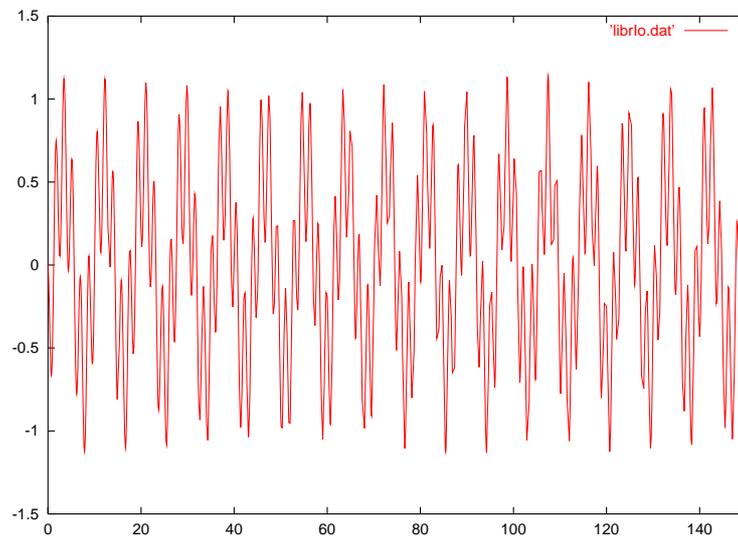


FIG. 3.11 – Variations de la longitude λ_0^1 en degrés sur une période de 150 jours.

simplificatrice $\lambda_0^i = 0$ et $\dot{\lambda}_0^i = 0$. Ces difficultés nous ont amené à rester dans le cadre d'une résonance exacte des satellites, le traitement de la rotation des satellites étant reporté à un travail futur.

3.6.2 Influence des satellites non galiléens

Les satellites non galiléens dont l'influence peut être intéressante à étudier sont essentiellement Amalthée et Thébé, ces satellites étant les plus proches du système galiléen. Afin d'obtenir des conditions initiales sur ces deux satellites, nous sommes partis des valeurs connues des inclinaisons, excentricités et demi-grands axes, et avons considéré qu'à la date du 25 décembre 1982 à 0h00, les longitudes moyennes, longitude du noeud et argument du péricentre étaient nuls. Il a bien-sûr été nécessaire de diminuer le pas d'intégration, ramené à 0.04 jours pour tenir compte des révolutions rapides d'Amalthée et Thébé. Par ailleurs, deux intégrations avec les satellites galiléens ont été effectuées, l'une avec Amalthée l'autre avec Thébé (afin de palier à notre choix arbitraire sur les conditions initiales de ces deux satellites).

Enfin, rappelons que les satellites proches (i.e. les satellites non galiléens se positionnant entre Jupiter et Io), même s'ils ne sont pas mentionnés explicitement dans une théorie (analytique ou numérique) peuvent être aisément pris en compte dans celle-ci par une valeur légèrement plus élevée de la masse jovienne. Nous avons choisi de tester l'influence d'Amalthée et Thébé en tenant compte de cela. Ainsi, lorsque nous avons intégré le mouvement de ces satellites, leur masse respective a été soustraite de la masse de Jupiter.

3.6.3 Influence de Saturne

Comme nous l'avons déjà dit, la perturbation solaire dans notre modèle sera reprise des éphémérides DE406. Ainsi, l'influence des autres planètes et en particulier Saturne sera prise en compte. Toutefois, cette modélisation reste partielle, l'influence de Saturne sur le mouvement des satellites eux-mêmes n'étant pas intégrée. Nous avons donc cherché à évaluer l'erreur commise en faisant cette approximation. Nous avons donc inclus dans une simulation numérique l'action directe et indirecte (au sens des équations (1.3)) de Saturne. Le résultat est encore une dérive séculaire en longitude, allant jusqu'à 200 kilomètres sur Callisto.

3.7 Bilan des perturbations

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, la plupart des perturbations agissent essentiellement à la manière d'un terme linéaire en temps qui s'ajoute aux longitudes moyennes. Il est important de noter que la prise en compte de cette dernière n'est susceptible que d'améliorer sensiblement l'élaboration des éphémérides, dans la mesure où elle peut être absorbée dans la détermination des conditions initiales, et en particulier celle

du moyen mouvement moyen observé. Toutefois cela ne reste pas complètement sans conséquences puisque la cohérence interne de la théorie s'en trouve affectée (nous reviendrons plus en détails sur ce point dans le chapitre 2 de la partie 2).

Par ailleurs, si les éphémérides ne sont que sensiblement améliorées, le modèle physique est lui considérablement enrichi. Entre autres, la rotation de Jupiter et les résonances spin-orbite peuvent être introduites en vue de travaux ultérieurs.

3.7.1 Classification des perturbations

Voici un tableau récapitulatif de la différence maximale obtenue sur les positions pour chacune des perturbations testées

Rappelons qu'afin de tester la conservation de l'énergie mécanique du système, les intégrations dont les valeurs du tableau 3.1 sont issues n'ont pas prises en compte le Soleil. Par ailleurs, l'influence des anneaux de Jupiter a été négligée, la masse de ceux-ci étant probablement très faible, et d'autre part déjà associée à celle de Jupiter pour la valeur que nous avons prise (voir la table des constantes).

3.7.2 Les perturbations retenues

A priori les équations correspondant à chacune des perturbations ayant été programmées, nous pourrions imaginer de toutes les conserver. Toutefois, lors de l'ajustement aux observations (partie 2) nous aurons à introduire les équations aux variations, encore bien plus complexes que les équations du mouvement. Ce faisant nous avons donc essayé de nous limiter aux perturbations les plus importantes.

A la vue du tableau précédent, nous avons décidé de conserver dans notre modèle dynamique les forces d'aplatissement supplémentaires et l'aplatissement des satellites par les coefficients $J_2^{(k)}$ et $c_{22}^{(k)}$, ces perturbations semblant les plus importantes d'un ordre de grandeur. Notons toutefois que les diverses perturbations ont été classées en regard de différences en position. Or, nombre d'entre elles correspondent à des dérivées linéaires aisément réductibles en changeant légèrement les valeurs des demi-grands axes des satellites (voir la section 2.3), pouvant rendre cette méthode de comparaison insuffisante. En réalité, toutes les perturbations testées d'influence supérieure à quelques kilomètres se composent pour l'essentiel d'une dérive linéaire en longitude (à l'exception de la précession de Jupiter³). En ce sens la comparaison reste donc valide. Par ailleurs, nous reviendrons plus en détails sur l'apport réel de ces perturbations à la fin du chapitre 2 de la partie II.

Signalons enfin que la perturbation par Amalthée n'a pas été retenue, car nous ne possédions pas de solution valide de ce satellite sur un siècle (période recouverte par les

3. Nous avons choisi de ne pas intégrer la précession de Jupiter dans le modèle final, dans la mesure où la paramétrisation de celle-ci délivrée par l'UAI 2000 (voir [31]) a été calée sur les données des sondes spatiales Voyager et Pioneer, et n'est probablement pas valide sur une période aussi longue qu'un siècle.

Perturbation	Description	Différences en position
Aplatissement des satellites	Termes $c_{22}^{(k)}$ termes $J_2^{(k)}$	9 000 km (Io) 5 000 km (Io)
FAS		4 500 km (Ca)
Amalthée	Satellite interieur le plus massif	680 km (Io)
Saturne	Influence directe et indirecte de Saturne sur les satellites	226 km (Ca)
Coefficient J_6	Aplatissement de Jupiter	150 km (Io)
Precession	Repère équatorial jovien non fixe	80 km (Ca)
Termes c_{22}, s_{22}	Asymétrie par rapport à l'axe de rotation de Jupiter	70 km (Io)
Thebé	Satellite intérieur le plus proche du système galiléen	70 km (Io)
Effets relativistes	Influence de la masse de Jupiter	2 km (Io)
Terme J_3	Asymétrie entre les deux pôles	1.4 km (Io)
Précession des satellites	Repère équatorial des satellites non fixe	< 1 km

TAB. 3.1 – *Tableau récapitulatif des perturbations par ordre décroissant d'importance.*

observations des satellites galiléens).

3.7.3 Indépendance relative des perturbations

Comme vu dans le chapitre 2, les trois perturbations les plus importantes en terme d'amplitude (et que nous avons choisi de conserver), s'additionnent. C'est ce que nous avons cherché à mettre en évidence numériquement dans les trois graphes qui suivent.

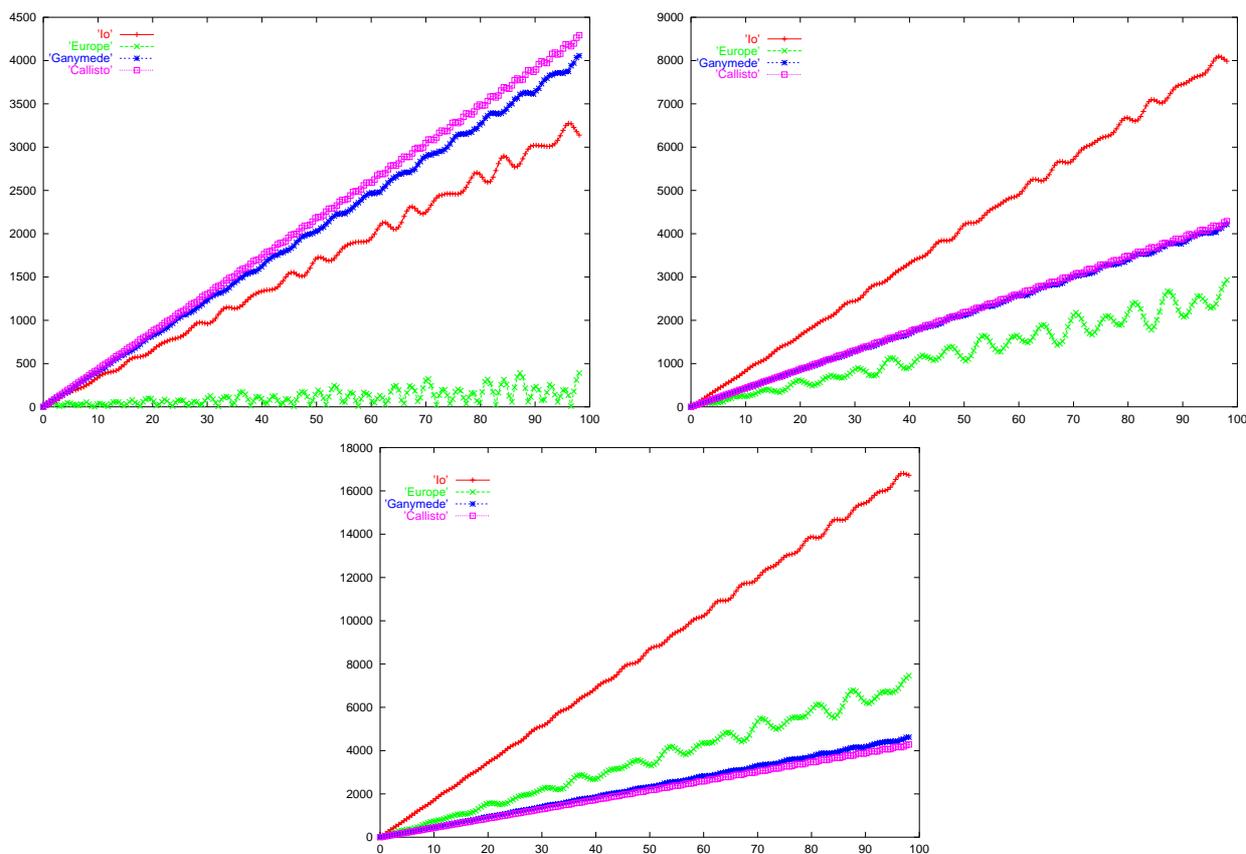


FIG. 3.12 – Variations en positions (en kilomètres) en tenant compte des forces d'aplatissement supplémentaires (en haut à gauche), puis en y ajoutant l'aplatissement des satellites par les coefficients $J_2^{(k)}$ (en haut à droite), et en y ajoutant les coefficients $c_{22}^{(k)}$ (en bas).

Plutôt que d'intégrer les perturbations indépendamment, nous les avons cette fois ajoutées successivement. Le résultat est donné par les trois graphes de la figure 3.12, et est en parfait accord avec les résultats du chapitre 2.

Deuxième partie

Observations et Ajustements

Chapitre 1

Méthode d'Ajustement

Dans ce premier chapitre traitant des observations, nous allons présenter la méthode que nous avons utilisée pour ajuster notre théorie à celles-ci. Cette méthode s'appuie sur l'intégration des équations aux variations. La difficulté réside dans la grande complexité d'écriture de ces équations dans le cas d'un système comprenant les nombreuses perturbations que nous avons pris en compte (voir le chapitre précédent). Comme dans la partie I, nous avons cherché à conserver une formulation très générale en vue de rendre ce travail utilisable pour d'autres systèmes. Nous présenterons également les différentes données issues des observations.

1.1 Principe d'ajustement

Dans toute cette section nous distinguerons les paramètres physiques d'une théorie (telles que les masses des corps, les coefficients d'aplatissement, etc...) que nous noterons par le vecteur $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)$, et les constantes d'une théorie, ces dernières regroupant en plus des paramètres physiques les $6\mathcal{N}$ conditions initiales du système (positions-vitesses des \mathcal{N} corps à un instant de référence t_0), et que nous noterons $\mathbf{c} = (\mathbf{r}_1(t_0), \dots, \mathbf{r}_{\mathcal{N}}(t_0); \dot{\mathbf{r}}_1(t_0), \dots, \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{N}}(t_0); \mathbf{p})$, ou encore pour avoir des notations plus concises $\mathbf{c} = (\mathbf{r}^{(0)}, \dot{\mathbf{r}}^{(0)}, \mathbf{p})$. Nous allons être amenés à résoudre la problématique qui suit.

Problématique: Comment déterminer des valeurs optimales des paramètres et conditions initiales, pour que les différences entre les positions des satellites délivrées par notre modèle et celles issues des observations (O-C) soient minimales¹.

1.1.1 Equations aux variations

Soit un jeu d'observations $(t_k, \mathbf{r}_i^{(k)})_{1 \leq k \leq K}$ fournissant pour certaines valeurs discrètes du temps t_k des positions observées d'un *ième* corps $\mathbf{r}_i^{(k)} = \mathbf{r}_i'(t_k)$. La théorie, c'est à dire ici l'intégration numérique, nous donne pour ces mêmes valeurs du temps des positions calculées $(t_k, \mathbf{r}_i^{(k)})$, comme solution d'un certain système différentiel. En notant $\varphi_t(\mathbf{r}^{(0)}, \dot{\mathbf{r}}^{(0)}, \mathbf{p})$

1. au sens des moindres carrés.

le flot dynamique de ce système et $\tilde{\varphi}_t^i$ la projection dans \mathbb{R}^3 de φ telle que $\tilde{\varphi}_t^i = \mathbf{r}_i$, on a l'égalité

$$\Delta \mathbf{r}_i^{(k)} = \left(\mathbf{r}_i'^{(k)} - \mathbf{r}_i^{(k)} \right) = \left(\tilde{\varphi}_{t_k}^i(\mathbf{r}'^{(0)}, \dot{\mathbf{r}}^{(0)}, \mathbf{p}') - \tilde{\varphi}_{t_k}^i(\mathbf{r}^{(0)}, \dot{\mathbf{r}}^{(0)}, \mathbf{p}) \right) \quad (1.1)$$

où $\mathbf{r}'^{(0)}, \dot{\mathbf{r}}^{(0)}, \mathbf{p}'$ correspondent aux constantes du système réel aux erreurs de modélisation et d'observation près.

Par la formule de Taylor, il vient

$$\left(\mathbf{r}_i'^{(k)} - \mathbf{r}_i^{(k)} \right) = \sum_{l=1}^{6\mathcal{N}+M} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_k}^i}{\partial c_l}(\mathbf{c}) \cdot \Delta c_l + O((\Delta c_l)^2) \quad (1.2)$$

où l'on a noté $\Delta c_l = c_l' - c_l$. En supposant les Δc_l suffisamment petits pour pouvoir nous limiter à l'ordre un, nous avons donc

$$\Delta \mathbf{r}_i^{(k)} \approx \sum_{l=1}^{6\mathcal{N}+M} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_k}^i}{\partial c_l}(\mathbf{c}) \cdot \Delta c_l \quad (1.3)$$

qui est un système de trois équations à $6\mathcal{N} + M$ inconnues pour chacune des observations. Ce système sera résolu par la méthode des moindres carrés. Toutefois commençons par remarquer que l'expression précédente nécessite de connaître pour les temps t_k les valeurs de $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_k}^i}{\partial c_l}(\mathbf{c})$ autrement dit de $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_k}^i}{\partial \mathbf{r}^{(0)}}$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_k}^i}{\partial \dot{\mathbf{r}}^{(0)}}$ et $\frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_k}^i}{\partial \mathbf{p}}$. Le calcul de ces quantités peut se ramener à la résolution d'un système différentiel par la méthode de Moulton, que nous allons présenter ici.

Rappelons que nous avons

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) \quad (1.4)$$

D'où en notant c_l une constante quelconque de la théorie (du type $\mathbf{r}^{(0)}, \dot{\mathbf{r}}^{(0)}$, ou \mathbf{p}), il vient encore

$$\frac{\partial}{\partial c_l} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right) = \frac{\partial}{\partial c_l} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}) = \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c_l} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial c_l} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial c_l} \right) \quad (1.5)$$

\mathbf{F}_i n'étant généralement pas fonction de $\dot{\mathbf{r}}$, on a encore en notant γ_j l'une quelconque des coordonnées d'un corps P_j

$$\frac{\partial}{\partial c_l} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right) = \frac{1}{m_i} \left(\sum_{j=1}^{3\mathcal{N}} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial c_l} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial c_l} \right) \quad (1.6)$$

Comme c_l est indépendant du temps, on a bien l'égalité

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial c_l} \right) = \frac{\partial}{\partial c_l} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right) = \frac{1}{m_i} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial c_l} \quad (1.7)$$

Cela aboutit au système différentiel suivant

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_t^i}{\partial c_l} \right) = \frac{1}{m_i} \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial \tilde{\varphi}_t^j}{\partial c_l} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial c_l} \right) \quad (1.8)$$

du type $\frac{d^2 \mathbf{X}^i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{g}_i^j(t) \mathbf{X}^j + \mathbf{h}_i(t)$ avec pour conditions initiales $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 étant situé au rang l) pour chacune des composantes de \mathbf{X}^i . Nous sommes finalement amenés à résoudre $6\mathcal{N} + M$ systèmes différentiels (un pour chaque constante de la théorie), de $3\mathcal{N}$ équations chacun.

1.1.2 Méthode des moindres carrés

De l'équation (1.3) nous sommes amenés à la considération d'un système de K lignes à $6\mathcal{N} + M$ inconnues.

En introduisant l'écriture matricielle, on peut encore écrire

$$Y = \begin{pmatrix} \Delta r_i^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta r_i^{(K)} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_1}^i}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_1}^i}{\partial c_{6\mathcal{N}+M}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_K}^i}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_K}^i}{\partial c_{6\mathcal{N}+M}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_{6\mathcal{N}+M} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Cela revient à considérer l'équation $Y = XA$. Nous cherchons maintenant les valeurs optimales de Δc_l composant la matrice A , qui minimisent (au sens des moindres carrés) les composantes de la matrice Y .

C'est donc ici que nous allons pouvoir améliorer les (O-C) en corrigeant les constantes \mathbf{c} des petites quantités $\Delta \mathbf{c}$. En pratique trois à quatre itérations successives seront nécessaires pour obtenir des valeurs optimales des paramètres et conditions initiales.

Considérons l'application

$$\mathcal{F} : A \mapsto \|Y - XA\|^2 = \sum_{k=1}^K \left(\Delta r_i^{(k)} - \sum_{l=1}^{6\mathcal{N}+M} \frac{\partial \tilde{\varphi}_{t_k}^i}{\partial c_l} \cdot \Delta c_l \right)^2 = \sum_{k=1}^K \left(y_k - \sum_{l=1}^{6\mathcal{N}+M} x_{kl} A_l \right)^2 \quad (1.10)$$

On recherche donc un minimum pour la fonction \mathcal{F} ce qui implique la condition $d\mathcal{F} = 0$. Cette condition s'écrit encore pour tout indice l sous la forme d'un système de K lignes appelé système normal et de la forme

$$\sum_{k=1}^K \left(x_{kl} y_k - \sum_{l=1}^{6\mathcal{N}+M} x_{kl} A_l x_{lk} \right) = 0 \quad (1.11)$$

soit encore ${}^t X Y = {}^t X X A$, et donc la solution recherchée est $A = ({}^t X X)^{-1} {}^t X Y$. Celle-ci se ramène finalement à l'inversion d'une matrice.

1.1.3 Ecriture des équations aux variations

La considération du système différentiel (1.8) nécessite d'écrire les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{r}}$ et $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{p}}$ en fonction des variables $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p})$. Pour commencer, prenons pour expression de \mathbf{F}_i celle donnée dans la première partie en supposant les satellites ponctuels (équation (1.3) de la partie I), à savoir

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} &= -\frac{G(m_0 + m_i)\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) + G(m_0 + m_i)\nabla_i U_{\bar{i}0} \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_j \nabla_j U_{j\bar{0}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ecrivons $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{r}}$, il vient après calculs en notant γ_n l'une quelconque des coordonnées d'un corps P_n

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_i} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \gamma_n} &= \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \left[\frac{3\gamma_n \mathbf{r}_i}{r_i^2} - \zeta \right] \delta_{in} + \frac{Gm_n}{r_n^3} \left(\frac{3\gamma_n \mathbf{r}_n}{r_n^2} - \zeta \right) (1 - \delta_{ni}) \\ &+ \frac{Gm_n}{r_{in}^3} \left(\zeta - \frac{3(\gamma_n - \gamma_i)(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_i)}{r_{in}^2} \right) (1 - \delta_{ni}) \\ &- \sum_{j=1, j \neq i}^{\mathcal{N}} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} \left(\zeta + \frac{3(\gamma_i - \gamma_j)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^2} \right) \delta_{in} \\ &+ \left(G(m_0 + m_i) \frac{\partial}{\partial \gamma_n} \nabla_i U_{\bar{i}0} \right) \delta_{in} + \left(Gm_n \frac{\partial}{\partial \gamma_n} \nabla_n U_{\bar{n}0} \right) (1 - \delta_{in}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

où δ_{in} est le symbole de Kronecker et $\zeta = 1$ si γ_n est du type² de la composante de \mathbf{F}_i , $\zeta = 0$ sinon.

L'équation (1.8) se réécrit donc, en posant $\mathbf{f}_{il} = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial c_l}$, sous la forme

$$\frac{d^2 \mathbf{f}_{il}}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_n} f_{nl}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial y_n} f_{nl}^{(2)} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial z_n} f_{nl}^{(3)} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial c_l} \right) \quad (1.13)$$

2. On dira que deux coordonnées sont du même type si elles se rapportent à un même axe du repère (ex: x_i et x_j sont du même type, x_i et y_j ne le sont pas).

En exprimant de façon explicite le second membre, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathbf{f}_{il}}{dt^2} &= \frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \left[\frac{3(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{f}_{il}) \mathbf{r}_i}{r_i^2} - \mathbf{f}_{il} \right] + G(m_0 + m_i) \mathbf{J}_{il} + \sum_{n=1, n \neq i}^{\mathcal{N}} Gm_n \mathbf{J}_{nl} \\
&+ \sum_{n=1, n \neq i}^{\mathcal{N}} \left\{ \frac{Gm_n}{r_n^3} \left(\frac{3(\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{f}_{nl}) \mathbf{r}_n}{r_n^2} - \mathbf{f}_{nl} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{Gm_n}{r_{in}^3} \left[(\mathbf{f}_{nl} - \mathbf{f}_{il}) + \frac{3(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{f}_{il} - \mathbf{f}_{nl})}{r_{in}^2} (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_i) \right] \right\} \\
&+ \frac{1}{m_i} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial c_l}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

avec

$$\mathbf{J}_{kl} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \nabla_k U_{\bar{k}\hat{0}} \right) f_{kl}^{(1)} + \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \nabla_k U_{\bar{k}\hat{0}} \right) f_{kl}^{(2)} + \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \nabla_k U_{\bar{k}\hat{0}} \right) f_{kl}^{(3)} \tag{1.15}$$

Il est clair que le terme $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial c_l}$ est nul quand la constante à ajuster est une condition initiale. Dans le cas contraire, son expression se déduit aisément des développements exprimés dans le chapitre 1 de la partie I. Par ailleurs, le calcul explicite des termes fonction de \mathbf{J}_{kl} dans l'expression précédente fait l'objet de la proposition à suivre

Proposition 5 Soient γ_k et Γ_k deux coordonnées quelconques d'un corps P_k , nous avons pour expression générale des dérivées secondes du potentiel $U_{\bar{k}\hat{0}}$ limité aux harmoniques zonaux (coefficients J_n)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Gamma_k} \left(\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}}{\partial \gamma_k} \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n J_n}{r_k^{n+2}} \left\{ \left(\frac{(n+1)P_n(\sin \phi_k) + \sin \phi_k \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k}}{r_k} \right) \left(\zeta - \frac{(n+3)\Gamma_k \gamma_k}{r_k^2} \right) \right. \\ &+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial \Gamma_k} \left(\frac{(n+2)\gamma_k \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} + \gamma_k \sin \phi_k \frac{d^2 P_n(\sin \phi_k)}{d \sin^2 \phi_k}}{r_k} - \frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} \frac{d^2 P_n(\sin \phi_k)}{d \sin^2 \phi_k} \right) \\ &\left. + \frac{(n+2)\Gamma_k \left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} \right)}{r_k^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

DÉMONSTRATION: -Reprenons la formule (1.4) donnée dans la première proposition de la partie I et réécrivons-la sous la forme

$$\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}^{(1)}}{\partial \gamma_k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(E_r)^n J_n}{r_k^{n+2}} \left[\frac{\gamma_k}{r_k} \left((n+1)P_n(\sin \phi_k) + \sin \phi_k \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} \right) - \frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} \right] \quad (1.17)$$

Comme nous nous contentons ici des coefficients J_n , l'indice ⁽¹⁾ au dessus du potentiel n'est plus nécessaire. En rentrant le facteur $\frac{1}{r_k^{n+2}}$ à l'intérieur des crochets, il vient alors pour expression de la dérivation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Gamma_k} \left(\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}}{\partial \gamma_k} \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} (E_r)^n J_n \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial \Gamma_k} \left[\gamma_k \left((n+1)P_n(\sin \phi_k) + \sin \phi_k \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} \right) \right]}{r_k^{n+3}} \right. \\ &- \frac{(n+3)\Gamma_k \gamma_k \left((n+1)P_n(\sin \phi_k) + \sin \phi_k \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} \right)}{r_k^{n+5}} - \frac{\frac{\partial}{\partial \Gamma_k} \left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} \right)}{r_k^{n+2}} \\ &\left. + \frac{(n+2)\Gamma_k \left(\frac{\partial z'_k}{\partial \gamma_k} \frac{dP_n(\sin \phi_k)}{d \sin \phi_k} \right)}{r_k^{n+4}} \right\} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nous remarquons que nous devons effectuer la dérivation par rapport à la quantité Γ_k d'une quantité elle-même dérivée d'une coordonnée γ_k . Nous allons devoir différencier le cas où Γ_k et γ_k désignent la même variable. En utilisant la notation ζ (i.e. $\zeta = 1$ si Γ_k et γ_k désignent la même coordonnée, $\zeta = 0$ sinon), et en regroupant les différents termes on arrive finalement à la formule recherchée.

□

Exemple: En nous limitant aux coefficients J_2 , J_4 et J_6 du corps central, il vient pour chacune des composantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_{\hat{k}\hat{0}}}{\partial x_k} \right) &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left\{ \frac{\left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{5x_k^2}{r_k^2} \right) + \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial x_k} \left(\frac{15x_k \sin \phi_k}{r_k} - 3 \sin I \sin \psi \right) \right. \\
&+ \left. \frac{12x_k \sin \phi_k \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left\{ \frac{\left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{7x_k^2}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial x_k} \left[\frac{x_k \left(\frac{315}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{105}{2} \sin \phi_k \right)}{r_k} - \left(\frac{105}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{15}{2} \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \left. \frac{6x_k \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left\{ \frac{\left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{9x_k^2}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial x_k} \left[\frac{x_k \left(\frac{9009}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{3465}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{945}{8} \sin \phi_k \right)}{r_k} \right. \\
&- \left. \left(\frac{3465}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{945}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \left. \frac{8x_k \left(\frac{693}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{105}{8} \sin \phi_k \right) \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\partial U_{\hat{k}\hat{0}}}{\partial y_k} \right) &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left\{ \frac{\left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{5y_k^2}{r_k^2} \right) + \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial y_k} \left(\frac{15y_k \sin \phi_k}{r_k} + 3 \sin I \cos \psi \right) \right. \\
&- \left. \frac{12y_k \sin \phi_k \sin I \cos \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left\{ \frac{\left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{7y_k^2}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial y_k} \left[\frac{y_k \left(\frac{315}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{105}{2} \sin \phi_k \right)}{r_k} + \left(\frac{105}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{15}{2} \right) \sin I \cos \psi \right] \\
&- \left. \frac{6y_k \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \sin I \cos \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left\{ \frac{\left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{9y_k^2}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial y_k} \left[\frac{y_k \left(\frac{9009}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{3465}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{945}{8} \sin \phi_k \right)}{r_k} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{3465}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{945}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin I \cos \psi \right] \\
&- \left. \frac{8y_k \left(\frac{693}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{105}{8} \sin \phi_k \right) \sin I \cos \psi}{r_k^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}}{\partial z_k} \right) &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left\{ \frac{\left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{5z_k^2}{r_k^2} \right) + \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left(\frac{15z_k \sin \phi_k}{r_k} - 3 \cos I \right) \right. \\
&+ \left. \frac{12z_k \sin \phi_k \cos I}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left\{ \frac{\left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{7z_k^2}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left[\frac{z_k \left(\frac{315}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{105}{2} \sin \phi_k \right)}{r_k} - \left(\frac{105}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{15}{2} \right) \cos I \right] \\
&+ \left. \frac{6z_k \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \cos I}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left\{ \frac{\left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right)}{r_k} \left(1 - \frac{9z_k^2}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left[\frac{z_k \left(\frac{9009}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{3465}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{945}{8} \sin \phi_k \right)}{r_k} \right. \\
&- \left. \left(\frac{3465}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{945}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \cos I \right] \\
&+ \left. \frac{8z_k \left(\frac{693}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{105}{8} \sin \phi_k \right) \cos I}{r_k^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}}{\partial x_k} \right) &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left\{ \frac{\left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right)}{r_k} \left(-\frac{5x_k y_k}{r_k^2} \right) + \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial y_k} \left(\frac{15x_k \sin \phi_k}{r_k} - 3 \sin I \sin \psi \right) \right. \\
&+ \left. \frac{12y_k \sin \phi_k \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left\{ \frac{\left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right)}{r_k} \left(-\frac{7x_k y_k}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial y_k} \left[\frac{x_k \left(\frac{315}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{105}{2} \sin \phi_k \right)}{r_k} - \left(\frac{105}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{15}{2} \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \left. \frac{6y_k \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left\{ \frac{\left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right)}{r_k} \left(-\frac{9x_k y_k}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial y_k} \left[\frac{x_k \left(\frac{9009}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{3465}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{945}{8} \sin \phi_k \right)}{r_k} \right. \\
&- \left. \left(\frac{3465}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{945}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \left. \frac{8y_k \left(\frac{693}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{105}{8} \sin \phi_k \right) \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}}{\partial x_k} \right) &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left\{ \frac{\left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right)}{r_k} \left(-\frac{5x_k z_k}{r_k^2} \right) + \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left(\frac{15x_k \sin \phi_k}{r_k} - 3 \sin I \sin \psi \right) \right. \\
&+ \left. \frac{12z_k \sin \phi_k \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left\{ \frac{\left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right)}{r_k} \left(-\frac{7x_k z_k}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left[\frac{x_k \left(\frac{315}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{105}{2} \sin \phi_k \right)}{r_k} - \left(\frac{105}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{15}{2} \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \left. \frac{6z_k \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left\{ \frac{\left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right)}{r_k} \left(-\frac{9x_k z_k}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left[\frac{x_k \left(\frac{9009}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{3465}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{945}{8} \sin \phi_k \right)}{r_k} \right. \\
&- \left. \left(\frac{3465}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{945}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin I \sin \psi \right] \\
&+ \left. \frac{8z_k \left(\frac{693}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{105}{8} \sin \phi_k \right) \sin I \sin \psi}{r_k^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_k} \left(\frac{\partial U_{\bar{k}\hat{0}}}{\partial y_k} \right) &= \frac{(E_r)^2 J_2}{r_k^4} \left\{ \frac{\left(\frac{15}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{3}{2} \right)}{r_k} \left(-\frac{5y_k z_k}{r_k^2} \right) + \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left(\frac{15y_k \sin \phi_k}{r_k} + 3 \sin I \cos \psi \right) \right. \\
&- \left. \frac{12z_k \sin \phi_k \sin I \cos \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^4 J_4}{r_k^6} \left\{ \frac{\left(\frac{315}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{105}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{15}{8} \right)}{r_k} \left(-\frac{7y_k z_k}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left[\frac{y_k \left(\frac{315}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{105}{2} \sin \phi_k \right)}{r_k} + \left(\frac{105}{2} \sin^2 \phi_k - \frac{15}{2} \right) \sin I \cos \psi \right] \\
&- \left. \frac{6z_k \left(\frac{35}{2} \sin^3 \phi_k - \frac{15}{2} \sin \phi_k \right) \sin I \cos \psi}{r_k^2} \right\} \\
&+ \frac{(E_r)^6 J_6}{r_k^8} \left\{ \frac{\left(\frac{3003}{16} \sin^6 \phi_k - \frac{3465}{16} \sin^4 \phi_k + \frac{945}{16} \sin^2 \phi_k - \frac{35}{16} \right)}{r_k} \left(-\frac{9y_k z_k}{r_k^2} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial \sin \phi_k}{\partial z_k} \left[\frac{y_k \left(\frac{9009}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{3465}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{945}{8} \sin \phi_k \right)}{r_k} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{3465}{8} \sin^4 \phi_k - \frac{945}{4} \sin^2 \phi_k + \frac{105}{8} \right) \sin I \cos \psi \right] \\
&- \left. \frac{8z_k \left(\frac{693}{8} \sin^5 \phi_k - \frac{315}{4} \sin^3 \phi_k + \frac{105}{8} \sin \phi_k \right) \sin I \cos \psi}{r_k^2} \right\}
\end{aligned}$$

Introduisons à présent l'aplatissement des satellites dans les équations aux variations, en négligeant les termes du type $U_{\hat{j}}$ (autrement dit le terme **B** de la page 29). Il suffit pour cela de remplacer dans l'équation (1.14) l'expression de \mathbf{J}_{kl} par la suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{kl} = & \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \nabla_k U_{\hat{k}\hat{0}} + \frac{\partial}{\partial x_0^k} \nabla_0 U_{\hat{0}\hat{k}} \right) f_{kl}^{(1)} + \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \nabla_k U_{\hat{k}\hat{0}} + \frac{\partial}{\partial y_0^k} \nabla_0 U_{\hat{0}\hat{k}} \right) f_{kl}^{(2)} \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \nabla_k U_{\hat{k}\hat{0}} + \frac{\partial}{\partial z_0^k} \nabla_0 U_{\hat{0}\hat{k}} \right) f_{kl}^{(3)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

où (x_0^k, y_0^k, z_0^k) sont les coordonnées du corps P_0 dans le repère centré sur le corps P_k . On peut alors se ramener à la proposition 5 pour une écriture explicite.

1.2 Intégration des équations aux variations

Nous venons de voir que la minimisation des (O-C) passe par l'intégration d'un nouveau système différentiel, celui des équations aux variations. Nous allons maintenant présenter comment ce système a été inclus dans notre programme numérique.

1.2.1 Le programme EQVARSOL++.f

Lors de la partie I, nous avons développé un code numérique capable d'intégrer les équations du mouvement relatives aux diverses perturbations incluses (ou seulement testées) dans le système. Ce programme a donc été repris et enrichi des équations aux variations afin d'obtenir à la fois les positions-vitesses des satellites, mais également les dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{\varphi}_k^i}{\partial c_l}$ pour chaque instant des observations.

En pratique les équations du mouvement et les équations aux variations, relatives aux coefficients J_2, J_4 à toutes les masses du système et aux angles ψ, I , sont intégrées en même temps; soit un total de 408 équations différentielles dans le cas du système galiléen. Nous avons choisit cette fois une intégration à pas variable (le pas initial restant à 0.08 jours), de façon à garder une précision optimale lors de l'intégration du système global (équations du mouvement et aux variations). A titre indicatif, signalons que le temps de calcul d'une simulation pour un siècle d'intégration est d'environ une heure et demi (sur un PC équipé d'un processeur PIII cadencé à 650 Mhz).

Le contrôle de l'erreur durant l'intégration, et surtout de la validité des équations programmées via la conservation de l'intégrale première n'était plus possible. Nous avons donc recherché une méthode capable de nous assurer de la validité des simulations réalisées. Cette étape est indispensable dans la mesure où une erreur peut aisément survenir lors de la programmation des équations aux variations (voir les pages 79 à 81).

1.2.2 Contrôle de l'intégrateur

Comme nous allons le voir, le contrôle de la conservation de l'énergie a été remplacé par celui d'une relation de linéarité. Soit ε une petite variation sur une des constantes de la théorie c_l , nous pouvons écrire par un développement de Taylor à l'ordre 1 et pour un $6\mathcal{N} + M$ -uplet $(t, c_1, \dots, \hat{c}_l, \dots, c_{6\mathcal{N}+M})$ fixé

$$\tilde{\varphi}_t^i(c_1, \dots, c_l + \varepsilon, \dots, c_{6\mathcal{N}+M}) - \tilde{\varphi}_t^i(c_1, \dots, c_l, \dots, c_{6\mathcal{N}+M}) \simeq \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_t^i}{\partial c_l}(c_1, \dots, c_l, \dots, c_{6\mathcal{N}+M}) \quad (1.20)$$

C'est cette relation de linéarité que nous avons dans un premier temps testée. Pour cela, nous avons effectué deux intégrations numériques différant juste de la quantité ε relative à la constante c_l . Puis nous avons comparé la différence sur les positions avec le second membre de l'équation précédente. Le graphe de la figure 1.1 représente l'écart relatif (en pourcentage) entre ses deux quantités pour une variation de 10^{-6} sur le J_2 de Jupiter.

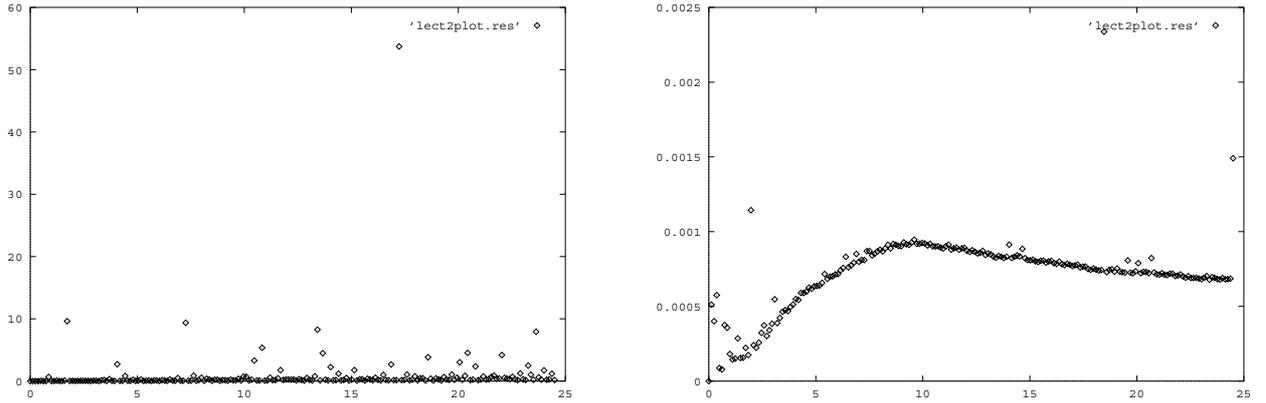


FIG. 1.1 – *Ecart relatif sous forme de pourcentage entre le membre de gauche et le membre de droite des égalités (1.20) (graphe de gauche) et (1.22) (graphe de droite), avec $\varepsilon = \Delta J_2 = 10^{-6}$, sur une période de 25 ans.*

Quoique les écarts soient relativement faibles dans la plupart des cas, certains points paraissent donner des différences assez importantes (jusqu'à soixante pourcents d'erreur). De plus, leur nombre semble augmenter avec la durée de l'intégration.

En remarquant que nous avons pour une fonction f quelconque de classe \mathcal{C}^2

$$f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) = 2\varepsilon f'(x) + O(\varepsilon^3) \quad (1.21)$$

on peut encore écrire pour un M -uplet fixé $(t, c_1, \dots, \hat{c}_l, \dots, c_{6\mathcal{N}+M})$

$$\frac{\tilde{\varphi}_t^i(c_1, \dots, c_l + \varepsilon, \dots, c_{6\mathcal{N}+M}) - \tilde{\varphi}_t^i(c_1, \dots, c_l - \varepsilon, \dots, c_{6\mathcal{N}+M})}{2} \simeq \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}_t^i}{\partial c_l}(c_1, \dots, c_l, \dots, c_{6\mathcal{N}+M}) \quad (1.22)$$

Cette égalité³ ressemble à l'égalité (1.20), mais est une approximation linéaire jusqu'à l'ordre 3 en ε . Nous avons donc cherché à tester cette nouvelle égalité, et avons obtenu pour la même variation du paramètre J_2 le graphe de droite de la figure 1.1.

Comme nous pouvons le constater ce sont bien les termes d'ordre 2 en ε qui apparaissent en grande partie dans le graphe de gauche précédent. En effet, une petite variation dans une constante de la théorie apporte une dérive séculaire en longitude. Lorsque une observation a lieu au voisinage de l'élongation du satellite rapport aux axes (X, Y, Z) , seule petite variation de la quantité observée (ici ΔX) peut être observé tandis que les deux satellites sont très éloignés (voir la figure 1.2). On peut même imaginer le cas critique $\Delta X = 0$ lorsque les deux positions se situent à égales distance mais pour des Y opposés de part le point de rebroussement. Mathématiquement cela se traduit par un terme $O((\Delta c_l)^2)$ très grand en comparaison du terme linéaire.

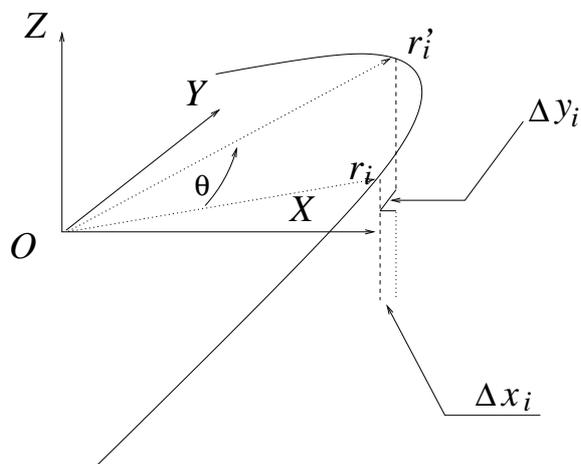


FIG. 1.2 – Différence entre la position observée \mathbf{r}'_i d'un satellite et la position calculée \mathbf{r}_i de ce même satellite, rapportée sur des coordonnées cartésiennes (x_i, y_i, z_i) .

La méthode précédemment décrite pour tester la validité de l'intégration des équations aux variations a été utilisée sur chacune des constantes du modèle⁴ de manière indépendante, et avec les diverses perturbations que nous avons choisi de conserver.

3. En pratique, c'est cette égalité qui est généralement utilisée pour calculer des dérivées numériques.

4. A l'exception des coefficients d'aplatissement des satellites, qui resteront constants tout au long de notre travail.

1.3 Variables d'observations

Les observations des satellites ne fournissent pas des coordonnées cartésiennes, mais des quantités liées à la configuration géométrique des satellites vus de la Terre. Ces variables d'observation ont également changées au cours du temps en fonction des instruments utilisés. Au long de notre travail, nous avons été face à trois types de quantités appelées coordonnées absolues, différentielles et tangentielles.

1.3.1 Les coordonnées absolues

Les coordonnées absolues notées (α, δ) d'un satellite appelées ascension droite et déclinaison correspondent aux angles sphériques de l'observation rapporté à un repère équatorial terrestre de directions fixes (J2000). Celles-ci se calculent en rapportant la position d'un satellite par rapport à certaines étoiles dont les coordonnées absolues sont connues (catalogue d'étoiles).

1.3.2 Les coordonnées différentielles

Les coordonnées différentielles notées $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta)$ ou parfois $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$ rapportent les coordonnées absolues d'un satellite par rapport à un autre. Ce jeu de coordonnées est très utilisé dans le cas d'observations de phénomènes mutuels. En effet, un phénomène mutuel consiste en l'occultation ou l'éclipse d'un satellite par un autre.

1.3.3 Les coordonnées tangentielles

Les coordonnées tangentielles notées (X, Y) d'un satellite sont des coordonnées cartésiennes rapportées sur un plan perpendiculaire à la direction observateur/observation. Celles-ci sont généralement fournies par des observations issues de plaques photographiques. L'origine en est généralement le photocentre de Jupiter que l'on assimile à son centre de masse de coordonnées (α_p, δ_p) . Les axes de références sont l'équateur terrestre B1950 ou J2000 pour l'axe des X et donc le méridien local pour l'axe des Y . Si l'on connaît (α_p, δ_p) , les coordonnées (X, Y) sont alors liées aux coordonnées absolues par la relation (ordre 2)

$$\begin{aligned} X &= \Delta\alpha \cos \delta_p - \Delta\alpha \Delta\delta \sin \delta_p \\ Y &= \Delta\delta + \frac{1}{2}(\Delta\alpha)^2 \sin \delta_p \cos \delta_p \end{aligned} \tag{1.23}$$

à condition de supposé que le photocentre de Jupiter est exactement placé au centre du champ. Il s'agit là bien-sûr d'une approximation que nous sommes contraint de faire, la position de celui-ci relativement au centre de la plaque n'étant pas présente dans les données observationnelles.

1.4 Ajustement aux observations

Dans la mesure où l'on peut passer sans trop de difficultés d'un type de coordonnées à l'autre, nous ramènerons toutes les observations à un seul type de coordonnées. Remarquons tout d'abord que les coordonnées (α, δ) font intervenir inévitablement la position de Jupiter. En effet, la position des satellites galiléens dans le ciel est en partie fonction des éphémérides de Jupiter (dont la précision est d'environ 50 kilomètres). Afin de ne pas introduire d'erreur extérieur à la théorie, il convient donc de se ramener plutôt à des positions différentielles (ou inter-satellite).

Dans le cas des coordonnées tangentielles, c'est la différence inconnue entre le photo-centre et le centre de masse de Jupiter (inconnu a priori) qui nous amène de nouveau à utiliser des coordonnées inter-satellites. Il reste à faire le choix entre des coordonnées inter-satellites absolues ou tangentielles. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin (chapitre 3 partie II), nous avons fait le choix des coordonnées inter-satellites absolues. L'utilisation de coordonnées intersatellite nécessite de prendre un satellite comme référence. Pour ne pas privilégier un satellite particulier nous avons ramené la position de tout les satellites au barycentre des satellites observés⁵. Ce barycentre a donc été calculé pour chaque observation.

La prise en compte de ces nouvelles variables du problème nécessite de compléter l'étude faite en début de chapitre. Commençons par regarder l'ajustement en variables absolues.

1.4.1 Le cas des coordonnées absolues

Notons par $(\alpha_i^{(k)}, \delta_i^{(k)})$ les ascensions droites et déclinaisons du *ième* satellite à des dates d'observations t_k . Il est donc nécessaire de ramener ces variables à des coordonnées cartésiennes dans le repère du corps central (voir la figure 1.3).

En écrivant (X, Y, Z) les coordonnées du corps central P_0 et (x_i, y_i, z_i) les coordonnées cartésiennes recherchées du corps P_i par rapport à P_0 , nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} X + x_i &= r_{Ti} \cos \delta_i \cos \alpha_i \\ Y + y_i &= r_{Ti} \cos \delta_i \sin \alpha_i \\ Z + z_i &= r_{Ti} \sin \delta_i \end{aligned} \tag{1.24}$$

où r_{Ti} désigne la distance Terre-satellite. L'équation (1.3) prend alors la forme suivante

$$(O - C)_i := \begin{cases} \Delta \alpha_i^{(k)} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_j} \left(\sum_{l=1}^{6N+M} \frac{\partial \gamma_j}{\partial c_l}(\mathbf{c}) \cdot \Delta c_l \right) \\ \Delta \delta_i^{(k)} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \delta_i}{\partial \gamma_j} \left(\sum_{l=1}^{6N+M} \frac{\partial \gamma_j}{\partial c_l}(\mathbf{c}) \cdot \Delta c_l \right) \end{cases} \tag{1.25}$$

5. Tous les satellites galiléens n'étant pas toujours observables dans une nuit.

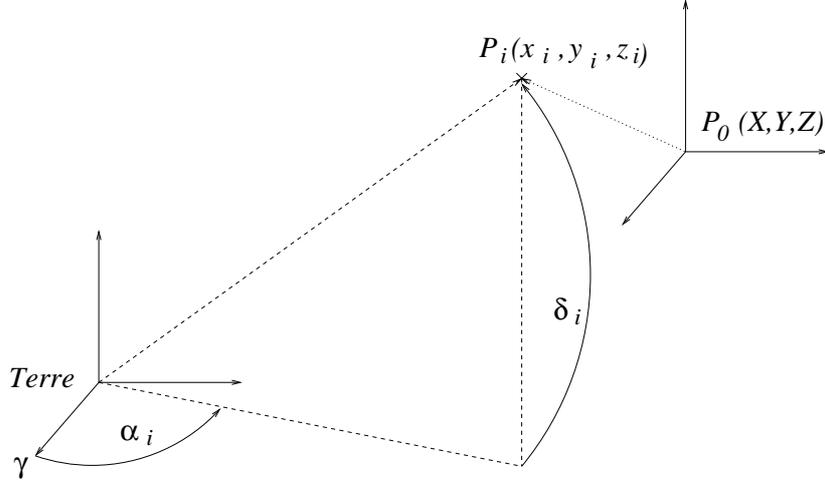


FIG. 1.3 – *Passage des coordonnées cartésiennes jovicentriques aux coordonnées absolues.*

soit encore en notation matricielle $Z = HXA$, avec

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha_i^{(k)} \\ \Delta\delta_i^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial z_i} \\ \frac{\partial\delta_i}{\partial x_i} & \frac{\partial\delta_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\delta_i}{\partial z_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial x_i}{\partial c_{6N+M}} \\ \frac{\partial y_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial c_{6N+M}} \\ \frac{\partial z_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial z_i}{\partial c_{6N+M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_{6N+M} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Le calcul de la matrice H amène à l'égalité

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial z_i} \\ \frac{\partial\delta_i}{\partial x_i} & \frac{\partial\delta_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\delta_i}{\partial z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin\alpha_i}{r_{Ti} \cos\delta_i} & \frac{\cos\alpha_i}{r_{Ti} \cos\delta_i} & 0 \\ \frac{\sin\delta_i \cos\alpha_i}{r_{Ti}} & -\frac{\sin\delta_i \sin\alpha_i}{r_{Ti}} & \frac{\cos\delta_i}{r_{Ti}} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

1.4.2 Le cas des coordonnées relatives

Comme nous l'avons déjà dit, nous allons utiliser des coordonnées inter-satellites absolues relatives au barycentre des satellites observés. Soit \mathcal{N}_o le nombre de satellites observés, nous sommes donc amenés à considérer les différences

$$\left(\alpha_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_o} \alpha_j^{(k)} \right) - \left(\alpha_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_o} \alpha_j^{(k)} \right) \text{ et } \left(\delta_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_o} \delta_j^{(k)} \right) - \left(\delta_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_o} \delta_j^{(k)} \right) \quad (1.28)$$

Ces termes peuvent encore se réécrire pour l'ascension droite sous la forme

$$\left(\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)} \right) - \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_o} \alpha_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_o} \alpha_j^{(k)} \right) = \Delta\alpha_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_o} \Delta\alpha_j^{(k)} \quad (1.29)$$

De même pour les déclinaisons, nous sommes donc finalement ramenés à la section précédente par le calcul des quantités $\Delta\alpha_j^{(k)}$ et $\Delta\delta_j^{(k)}$ pour un j quelconque.

Chapitre 2

Comparaison au Modèle de Sampson-Lieske

Dans ce chapitre, nous allons comparer notre modèle à la solution de Sampson-Lieske. Outre l'intérêt de comparer notre travail à une théorie antérieure, cette étape nous permettra lors de l'ajustement aux observations d'être déjà très proche du système réel. Après une brève description de la théorie de Sampson-Lieske, nous présenterons les résultats issus de notre ajustement. Nous en profiterons également pour revenir en fin de chapitre sur les petites perturbations introduites dans le chapitre 1 de la partie I.

2.1 Quelques rappels sur la théorie de Sampson-Lieske

Avant de présenter le résultat de notre ajustement, il convient en premier lieu de présenter brièvement la théorie de Sampson-Lieske. La théorie initiale développée par Sampson date du début du siècle dernier, et a été publiée en 1921 (référence [29]). Cette théorie à produit les éphémérides des satellites galiléens jusque dans les années soixante dix. Avec le temps, celles-ci se sont détériorées en regard des observations, par absence de réajustement des constantes de la théorie. Un décalage temporel a alors été effectuée pour absorber la dérive en longitude.

2.1.1 Les perturbations introduites

Sampson modélise le système galiléen par quatre satellites ponctuels, et Jupiter munit d'un aplatissement via les coefficients J_2 et J_4 . Pour tenir compte des perturbations solaires, Sampson reprend les séries de Brown. La précession jovienne est également prise en compte, après quelques simplifications. Le repère de référence est le plan équatorial jovien, ayant comme origine pour le premier axe le point vernal jovien. Ainsi, en plus des perturbations précédemment citées, des forces d'inertie issues du mouvement du pôle jovien sont présentes.

2.1.2 Variables utilisées et forme de la solution

Les variables utilisées par Sampson ne sont pas les variables en éléments elliptiques usuels, mais issues des coordonnées cylindriques et notées (ρ_i, ν_i, z_i) où i désigne l'indice d'un satellite. A partir de ces variables, on peut définir les variables (ξ_i, μ_i, ζ_i) définies par les relations

$$\begin{cases} \rho_i = A_i(1 + \xi_i) \\ \mu_i = \nu_i - l_i \\ \zeta_i = \frac{z_i}{A_i} \end{cases} \quad (2.1)$$

l_i étant la longitude moyenne et A_i la partie constante présente dans la variable ρ_i .

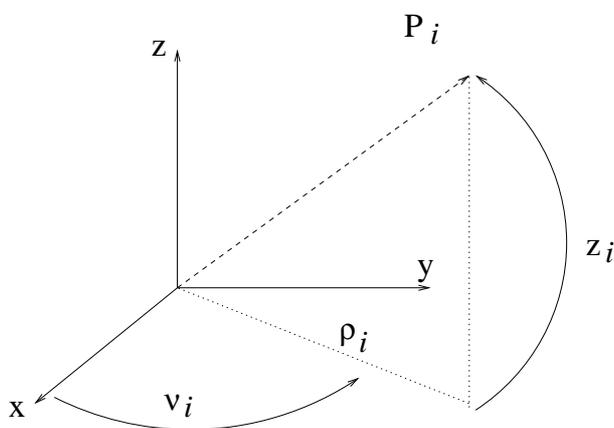


FIG. 2.1 – Les variables utilisées dans la théorie de Sampson.

Sampson intègre alors analytiquement un système différentiel d'ordre deux par rapport au temps des variables (ξ_i, μ_i, ζ_i) .

La solution du mouvement des satellites est donnée sous la forme de séries analytiques à amplitude numérique. En effet, Sampson ne délivre dans ses séries finales que des valeurs calculées des amplitudes. Le calcul des dérivées partielles des solutions par rapport aux constantes du système devient impossible, et la solution de Sampson ne peut donc pas être réajustée.

2.1.3 Les améliorations de Lieske

Lorsque Lieske reprend la théorie de Sampson dans les années soixante-dix (pour les besoins des sondes Voyager), il doit trouver entre autre une méthode pour pouvoir remettre à jour les valeurs des paramètres.

Ainsi, Lieske effectue les modifications suivantes:

- il corrige un certain nombre d'erreurs de calculs présentes dans le travail de Sampson;

- il introduit la longue période de De Haerdtl $7n_4 - 3n_3$ et améliore la représentation de la perturbation solaire;
- il introduit une libration libre (résonance laplacienne) dans les développements analytiques;
- il introduit des quantités ϵ et β comme variation des conditions initiales imposées par Sampson, afin de réajuster la solution de 1921;
- il fournit les dérivées partielles relatives aux 49 constantes de la théorie.

Lieske donne sa solution sous la forme de corrections aux coefficients calculés par Sampson, en introduisant les paramètres de corrections (ϵ_k, β_k) . Quoique la méthode de Lieske soit efficace et permette de mieux s'ajuster aux observations, cette méthode conserve certaines incohérences résidant dans le corps même de la méthode, mais également dans le traitement de la libration laplacienne. Ainsi, la libration libre laplacienne est introduite en ajoutant 2 paramètres (artificiels) à la théorie. Toutefois, comme nous allons le voir une autre source d'erreur très importante provient du choix même des variables utilisées.

2.2 Ajustement à la solution G5

Nous avons ajusté notre modèle à celui de Sampson-Lieske en utilisant la méthode présentée dans le chapitre précédent.

2.2.1 Solution G5

La théorie de Lieske utilisée pour faire notre ajustement est la théorie G5 (disponible sur le serveur de l'IMCCE), dont l'ajustement aux observations a été effectué par J.E.Arlot (voir la référence [5]). Notons que l'utilisation d'une version de la théorie de Lieske plutôt qu'une autre ne change pas les résultats, dans la mesure où le modèle théorique reste le même (voir [25]) et où uniquement les paramètres (ϵ_k, β_k) changent. Seules les différences internes aux deux modèles apparaîtront.

L'ajustement a été réalisé en coordonnées cartésiennes équatoriales J2000 en utilisant un échantillon de 3654 points par coordonnée et avec un pas d'échantillonnage de 10 jours. La période recouverte par l'ajustement est donc d'environ un siècle. Cet intervalle de temps est comparable à celui sur lequel s'étendent les observations que nous utiliserons dans le chapitre suivant.

Les constantes ajustées dans notre modèle ont été les suivantes:

- Les conditions initiales (positions et vitesses) des quatre satellites;
- Les masses des quatre satellites;
- La masse de Jupiter;
- Les coefficients J_2 et J_4 de l'aplatissement jovien;
- Les angles (ψ, I) relatifs à l'orientation du pôle jovien dans l'espace.

Quatre passages par la méthode des moindres carrés ont été effectués pour optimiser notre ajustement. Afin de pouvoir interpréter les différences obtenues, nous avons choisi de les représenter dans un jeu de coordonnées cylindriques équatoriales joviennes et donc très proches des variables de Sampson.

2.2.2 Résultats

Les résultats sont présentés dans les figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5 pour les variables (ρ_i, ν_i, z_i) .

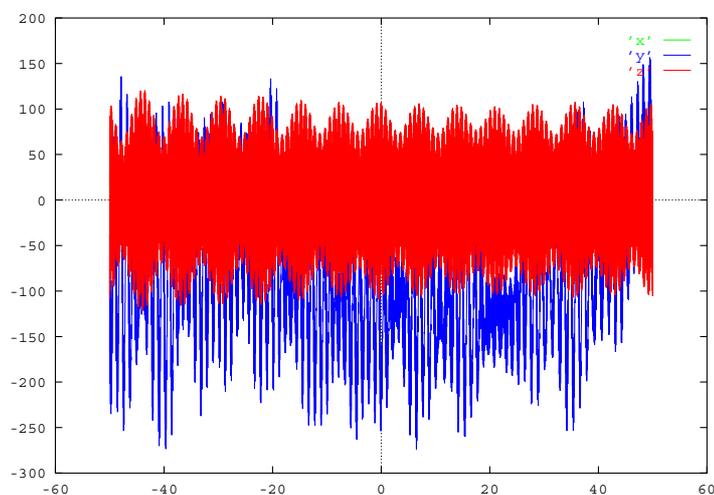


FIG. 2.2 – Résultat d'un ajustement sur 100 ans entre notre modèle et celui de Lieske (théorie G5), pour le satellite Io. La période de temps est d'un siècle (abscisses en années) et les différences sont données en kilomètres. Les légendes x, y, z correspondent respectivement aux variables (ρ_i, ν_i, z_i)

Nous constatons que les différences sont de l'ordre de plusieurs centaines de kilomètres pour chacun des satellites. Ces différences se manifestent surtout par la présence de longues périodes dans la variable ν_i et de façon moins importante sur la variable z_i . Cela nous a conduit à réexaminer les variables utilisées par Sampson.

2.2.3 Le problème des coordonnées cylindriques

Généralement, les solutions d'une théorie en mécanique céleste, sont données sous la forme de séries de Fourier à amplitudes polynômiales (séries de Poisson), dans lesquelles se distinguent des termes à courtes périodes et des termes à longues périodes. Les termes à longues périodes sont généralement ceux ayant les plus fortes amplitudes (suite durant

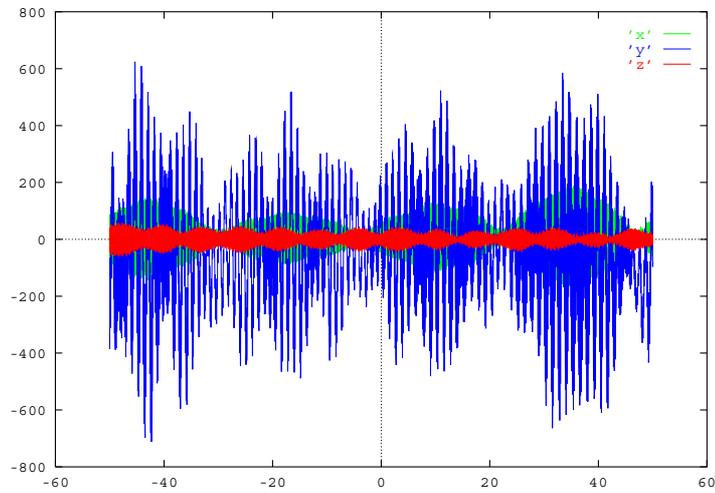


FIG. 2.3 – Résultat d'un ajustement sur 100 ans entre notre modèle et celui de Lieske (théorie G5), pour le satellite Europe. La période de temps est d'un siècle (abscisses en années) et les différences sont données en kilomètres. Les légendes x, y, z correspondent respectivement aux variables (ρ_i, ν_i, z_i)

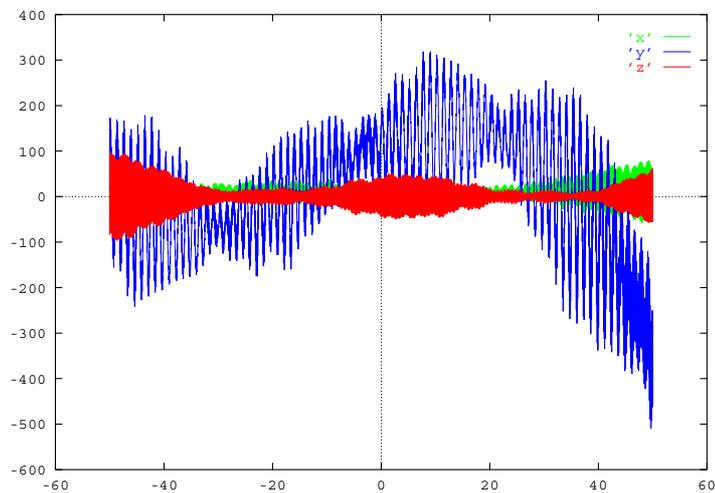


FIG. 2.4 – Résultat d'un ajustement sur 100 ans entre notre modèle et celui de Lieske (théorie G5), pour le satellite Ganymède. La période de temps est d'un siècle (abscisses en années) et les différences sont données en kilomètres. Les légendes x, y, z correspondent respectivement aux variables (ρ_i, ν_i, z_i)

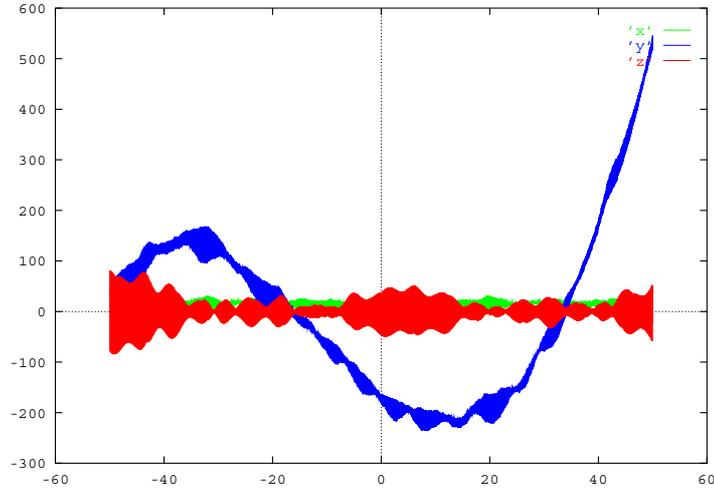


FIG. 2.5 – Résultat d’un ajustement sur 100 ans entre notre modèle et celui de Lieske (théorie G5), pour le satellite Callisto. La période de temps est d’un siècle (abscisses en années) et les différences sont données en kilomètres. Les légendes x, y, z correspondent respectivement aux variables (ρ_i, ν_i, z_i)

leur intégration à la division par de petits diviseurs), tandis que les termes à courtes périodes ont des amplitudes légèrement variables, comme fonction des longues périodes. Cette caractéristique générale aux théories exprimées en éléments elliptiques n’est plus valide dans les variables de Sampson, essentiellement suite à l’utilisation de la coordonnée ζ_i , ou ce qui revient au même à la coordonnées z_i .

En effet, la nature même de cette coordonnée (très inappropriée pour décrire un mouvement képlérien perturbé) force les termes de période supérieure à la période de révolution du satellite à apparaître dans les amplitudes même des séries décrivant z_i (voir la figure 2.6).

On pourra vérifier ainsi dans [25], qu’aucune longue période n’intervient dans le développement final des variables z_i .

On peut alors se demander pourquoi les variations sont plus importantes sur la variable ν_i que sur la variable z_i . En fait, lors de notre ajustement nous avons précédemment gardé constantes les valeurs des angles (ψ, I) . Les résultats correspondants donnaient alors une forte variation sur z_i plutôt que sur ν_i (graphes non présentés ici). Toutefois, nous avons fini par ajuster également les angles (ψ, I) . Les variations en z_i se sont alors répercutées sur ν_i par un effet géométrique, donnant ainsi les graphes précédent.

Signalons également qu’une autre cause pouvant contribuer à donner ces larges variations est l’utilisation de théories solaires différentes, et dans une moindre mesure l’influence de la précession jovienne (non prise en compte dans notre modèle).

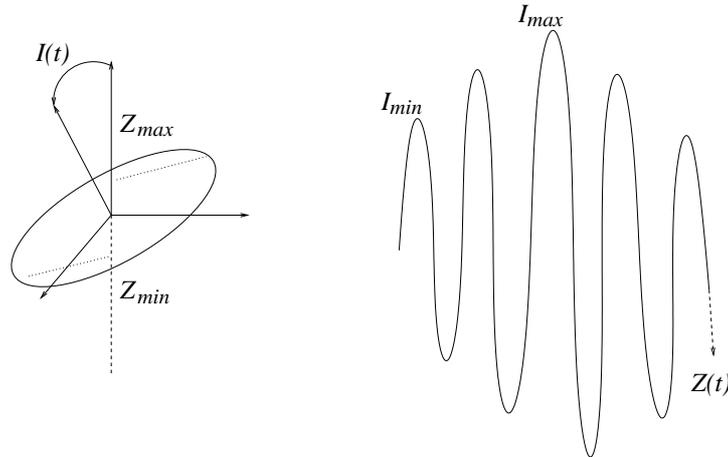


FIG. 2.6 – Influence des variations en inclinaison des satellites sur l'amplitude de la variable z_i .

2.3 Apport des petites perturbations

Lors de la partie I, nous avons décidé de conserver un certain nombre de petites perturbations dans notre modèle sans pouvoir précisément définir l'influence réelle de ces dernières. En effet, bien que la différence d'un point de vue quantitatif entre prendre ou ne pas prendre en compte ces perturbations ait été estimée (voir par exemple le chapitre 3 de la partie I), nous avons noté qu'il suffirait peut-être d'un léger changement dans les constantes de la théorie pour voir ces différences disparaître (en grande partie du moins). Cette section s'attache à déterminer quelles sont les constantes qui seront modifiées et en quelle proportion pour pouvoir minimiser l'absence de ces perturbations dans un modèle.

2.3.1 Ajustement

Afin de réaliser ce travail, nous avons repris la méthode d'ajustement déjà utilisée dans la section précédente. Cette fois, nous avons ajusté notre modèle (prenant en compte les forces d'aplatissement supplémentaires, et l'aplatissement des satellites), à une intégration numérique ne prenant pas en compte ces perturbations (voir l'équation (3.1) de la partie I).

Comme dans la section précédente les constantes ajustées ont été les suivantes:

- Les conditions initiales (positions et vitesses) des quatre satellites;
- Les masses des quatre satellites;
- La masse de Jupiter;
- Les coefficients J_2 et J_4 de l'aplatissement jovien;
- Les angles (ψ, I) relatifs à l'orientation du pôle jovien dans l'espace.

De même, quatre passages par la méthode des moindres carrés ont été effectués pour

optimiser notre ajustement. Les différences obtenues ont été étudiées sur les mêmes variables (ρ_i, ν_i, z_i) , afin d'interpréter l'influence éventuelle des perturbations que nous avons prises en compte et qui sont négligées dans le modèle de Sampson-Lieske.

Nous avons également choisi un échantillon de 3654 points par coordonnée avec un pas d'échantillonnage de 10 jours.

2.3.2 Résultats

Les graphes des figures 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10 représentent les différences en kilomètres entre les deux modèles et que l'on ne peut pas absorber.

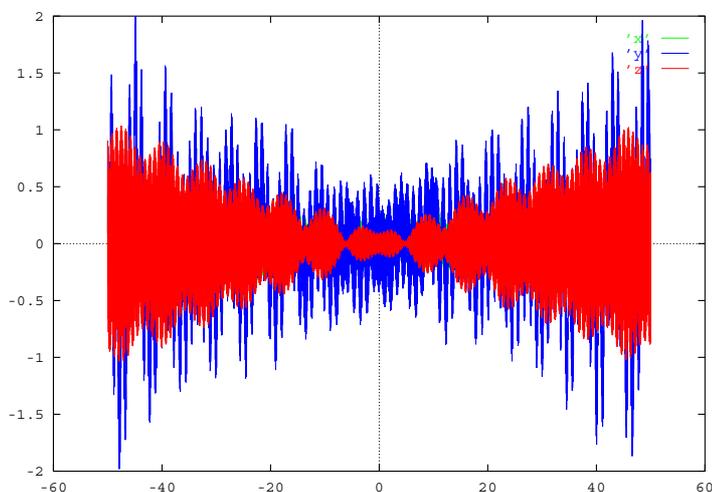


FIG. 2.7 – Résultat pour I_0 d'un ajustement sur 100 ans entre deux modèles, l'un prenant en compte les forces d'aplatissement supplémentaires et l'aplatissement des satellites, et l'autre non. Les abscisses sont des années et les ordonnées des kilomètres.

Les différences sont donc de l'ordre de quelques kilomètres. Toutefois, comme nous l'avons déjà dit, l'absorption d'une perturbation se réalise au prix d'un décalage entre les quantités physiques réelles du système et celles du modèle. Les tableaux suivants présentent donc les modifications aux constantes du modèle qu'il a fallu apporter pour obtenir notre ajustement. Le tableau 2.1 donne les variations apportées aux conditions initiales du modèle.

Le tableau 2.2 donne les variations apportées aux conditions initiales du modèle.

Il apparaît que si les variations sur les conditions initiales restent très faibles, celles sur les paramètres et surtout les coefficients d'aplatissement J_2 et J_4 sont nettement en dehors des barres d'erreur. A titre indicatif, les barres d'erreur pour ces deux coefficients issues de [8] sont respectivement de seulement 10^{-6} et 5.10^{-6} alors que nous obtenons des variations de $6,14 \cdot 10^{-6}$ et $3,58 \cdot 10^{-5}$. Ce résultat est cohérent avec ce qui a été énoncé

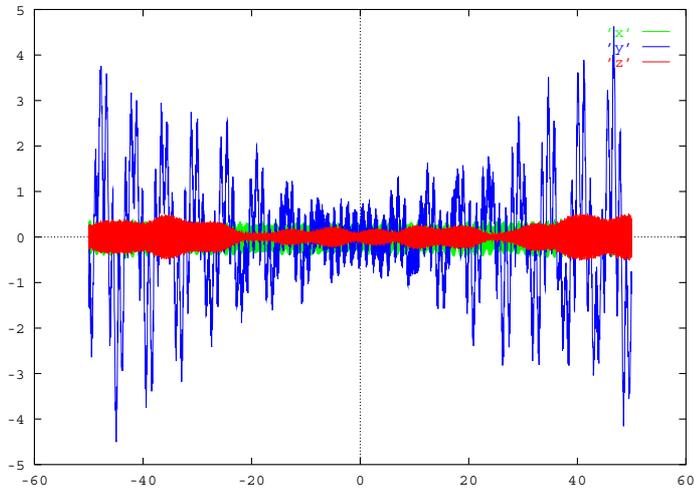


FIG. 2.8 – Résultat pour Europe d'un ajustement sur 100 ans entre deux modèles, l'un prenant en compte les forces d'aplatissement supplémentaires et l'aplatissement des satellites, et l'autre non. Les abscisses sont des années et les ordonnées des kilomètres.

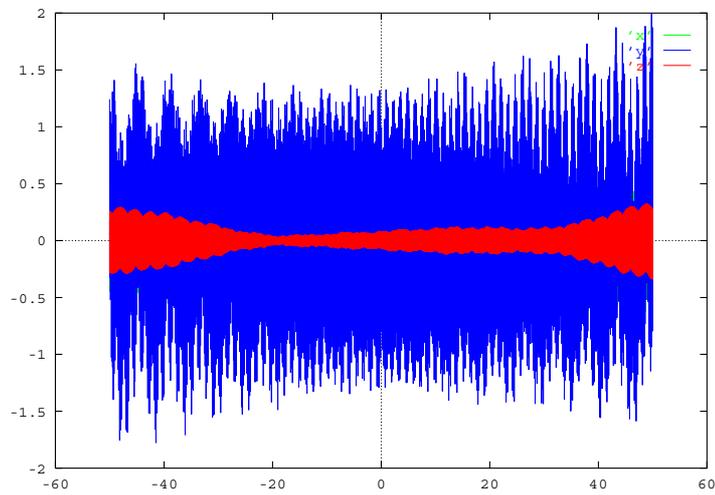


FIG. 2.9 – Résultat pour Ganymède d'un ajustement sur 100 ans entre deux modèles, l'un prenant en compte les forces d'aplatissement supplémentaires et l'aplatissement des satellites, et l'autre non. Les abscisses sont des années et les ordonnées des kilomètres.

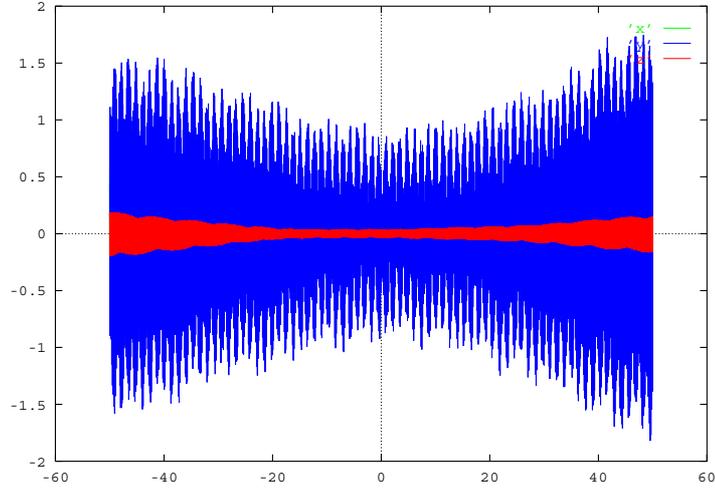


FIG. 2.10 – Résultat pour Callisto d'un ajustement sur 100 ans entre deux modèles, l'un prenant en compte les forces d'aplatissement supplémentaires et l'aplatissement des satellites, et l'autre non. Les abscisses sont des années et les ordonnées des kilomètres.

condition initiale	en x	en y	en z
position du satellite 1	0.1864	0.2372	$0.9461 \cdot 10^{-1}$
vitesse du satellite 1	$0.4590 \cdot 10^{-1}$	0.6076	$-0.7496 \cdot 10^{-1}$
position du satellite 2	-0.2534	-0.2250	$-0.7398 \cdot 10^{-1}$
vitesse du satellite 2	$0.9756 \cdot 10^{-1}$	0.1181	0.2271
position du satellite 3	-0.1542	-0.6376	-0.2347
vitesse du satellite 3	$-0.5535 \cdot 10^{-1}$	0.2873	0.1830
position du satellite 4	0.4086	-0.3074	$-0.9948 \cdot 10^{-1}$
vitesse du satellite 4	-0.1202	$-0.9965 \cdot 10^{-2}$	$-0.1083 \cdot 10^{-1}$

TAB. 2.1 – Tableau présentant les variations apportées aux conditions initiales des satellites pour pallier l'influence des forces d'aplatissement supplémentaires et de l'aplatissement des satellites. Les valeurs sont données en kilomètres pour les positions et kilomètres par jour pour les vitesses.

Paramètre	correction Δc_l	en %
masse du corps central	$-0.1058 \cdot 10^{-9}$	$-0.1108 \cdot 10^{-4}$
J2 du corps central	$-0.6145 \cdot 10^{-5}$	-0.04159
J4 du corps central	$-0.3582 \cdot 10^{-4}$	5.7732
masse du satellite 1	$0.1055 \cdot 10^{-9}$	0.2415
masse du satellite 2	$0.3047 \cdot 10^{-11}$	$0.1276 \cdot 10^{-1}$
masse du satellite 3	$0.2231 \cdot 10^{-11}$	$0.2971 \cdot 10^{-2}$
masse du satellite 4	$0.6587 \cdot 10^{-11}$	$0.1246 \cdot 10^{-1}$
angle ψ	$-0.2020 \cdot 10^{-4}$	$-0.5643 \cdot 10^{-5}$
angle I	$0.9060 \cdot 10^{-5}$	$0.3552 \cdot 10^{-4}$

TAB. 2.2 – Tableau présentant les variations apportées aux paramètres pour pallier l'influence des forces d'aplatissement supplémentaires et de l'aplatissement des satellites.

dans la partie I. Tout d'abord les forces d'aplatissement supplémentaires font intervenir directement l'aplatissement de Jupiter. De plus, nous avons mentionné la possibilité d'absorber les coefficients $J_2^{(k)}$ des satellites dans l'aplatissement du corps central.

Enfin, il peut paraître étonnant que les variations soient plus importantes pour le J_4 que pour le J_2 . Cet effet provient directement de la corrélation entre ces deux coefficients. En réalité, afin de minimiser les variations en J_4 , nous avons contraint ce coefficient à rester constant durant les deux premiers ajustements par moindre carrés, et l'avons laissé libre dans les deux derniers.

Nous reviendrons plus en détails sur cet effet et sur les valeurs de corrélation dans le chapitre qui va suivre.

Chapitre 3

Ajustement aux Observations

Dans ce chapitre, nous allons ajuster notre modèle aux observations. Celles-ci sont généralement données dans des formats et des repères variables. Nous commencerons par présenter les diverses observations que nous avons utilisées. Nous présenterons également la méthode appliquée pour nous ramener dans le repère des observations. Nous concluons enfin par les valeurs des (O-C).

3.1 Présentation des observations

Commençons par présenter brièvement les observations que nous avons utilisées. Celles-ci s'étendent de 1891 à 2001. Leur précision est inégale de par les instruments utilisés et le type d'observation effectué. Dans toute la suite le nombre d'observations se référera au nombre total de satellites observés.

3.1.1 Les observations anciennes (1891-1936)

Ces observations ont des origines diverses. Les observations entre 1891 et 1910 ont été faites à Helsingfors (Finlande) et à l'observatoire de Pulkovo ($f=3,4m$). Celles entre 1917 et 1918 ont été faites par Chevalier en Chine ($f=7,1m$). Les observations dites "de De Sitter" ont été effectuées en 1918-1919 à Greenwich et en 1924 au Cap ($f=6,9m$). Enfin, les observations 1934 et 1936 ont été réalisées respectivement à Bucarest ($f=6,1m$) et Paris ($f=3,4m$).

L'ensemble de ces observations a été utilisé pour ajuster aux observations le modèle de Sampson-Lieske initial (voir [25]), et donnant la théorie G5 dont on trouvera des références plus précises dans [5] et [6].

nombre d'observations: 1635 repère: équateur B1950
type d'observation: photographiques source: [6]
coordonnées: tangentielles

3.1.2 Les observations de D.Pascu

Ces observations ont été faites entre 1967-1968 à l'observatoire de Mc Cormick (Virginie, USA) et à l'observatoire naval de Washington D.C. (f=9,9m) par D.Pascu.

la série de 1967-1978

Cette série d'observations a également été utilisée dans l'ajustement de G5. En revanche, la série de 1986-1990 nous a été communiquée gracieusement par D.Pascu.

nombre d'observations: 1771 repère: équateur B1950
type d'observation: photographiques source: [6]
coordonnées: tangentiellles

la série de 1986-1990

nombre d'observations: 1390 repère: équateur vrai de la date
type d'observation: photographiques source: (communication privée)
coordonnées: tangentiellles

3.1.3 Les phénomènes mutuels

L'observation des phénomènes mutuels des satellites galiléens a commencée en 1973, donnant lieu aux campagnes PHEMU tous les six ans. L'observation de ces phénomènes est réalisée dans de nombreux observatoires à travers le monde. La méthode de réduction de ces observations est très différente de celle utilisée pour des observations classiques. Les valeurs réduites que nous avons utilisées proviennent de la méthode de réduction de K.Aksnes.

la campagne de 1985

nombre d'observations: 392 repère: équateur J2000
type d'observation: phénomènes mutuels source: [3]
coordonnées: différentielles

la campagne de 1991

nombre d'observations: 410 repère: équateur J2000
type d'observation: phénomènes mutuels source: [20]
coordonnées: différentielles

3.1.4 Les observations de Flagstaff

Ces observations méridiennes récentes ont été réalisées à Flagstaff (USA).

nombre d'observations: 684 repère: équateur J2000
type d'observation: astrométriques source: [33], [34]
coordonnées: absolues

Pour conclure cette présentation signalons qu'un certain nombre d'observations, bien que disponibles ont volontairement été inutilisées. Ainsi, nous n'avons pas retenu certaines observations de De Sitter, car notre connaissance imparfaite du repère équatorial dans lequel sont données ces observations aurait entraîné des erreurs importantes. Les observations de C.H. Veiga et R. Vieira Martins n'ont, elles, pas été utilisées car les satellites galiléens y étaient surexposés (saturation du récepteur CCD). En réalité, ces observations ont été faites essentiellement dans le but d'obtenir des positions des satellites Amalthée et Thébé également présents sur les images.

3.2 Ajustement à toutes les observations

Nous avons effectué un ajustement de notre modèle à toutes les observations présentées dans la section précédente. Cela a nécessité de prendre en compte un certain nombre de corrections pour passer du repère (en temps et espace) de l'intégrateur numérique au repère des observations.

3.2.1 Les conditions d'ajustement

L'ajustement aux observations nécessite de prendre en compte les cinq étapes suivantes:

- le passage dans les variables d'observations;
- la conversion du temps universel en temps des éphémérides;
- le calcul du temps de lumière;
- la correction de l'aberration;
- la correction de la réfraction.

Une bonne partie des observations que nous avons utilisées sont données dans un repère équatorial terrestre B1950. La prise en compte de ce repère étant la plus complexe, nous allons donc détailler la méthode utilisée pour comparer les positions calculées dans l'intégrateur aux observations en repère B1950. Le cas du repère J2000 et du repère équatorial vrai de la date ont été traités de façon similaire.

Les positions observées étant des coordonnées tangentielles, il peut sembler naturel de ramener les positions calculées (intégrateur numérique) dans ces coordonnées pour effectuer l'ajustement. Toutefois, cela nécessite de ramener également les dérivées partielles (équations aux variations) dans ce repère. Le problème vient alors du fait que le repère B1950 n'est pas fixe, le passage du repère J2000 à B1950 pouvant se faire par exemple suivant la méthode de S.Aoki (voir [4]). Le traitement des dérivées partielles devient alors particulièrement complexe. Pour cette raison, nous avons donc choisi d'effectuer tous nos

ajustements dans le repère équatorial J2000.

L'intégrateur numérique nous donne des positions en coordonnées cartésiennes dans un repère équatorial terrestre J2000 jovicentrique. Les mouvements de la Terre et de Jupiter donnés par la représentation DE406 nous permettent alors de nous ramener dans un repère géocentrique J2000 (ou héliocentrique J2000 dans le cas des éclipses mutuelles de satellites). Dans la mesure où cette étape ne fait intervenir qu'une translation du repère, les dérivées partielles restent inchangées. Nous pouvons alors transformer les positions et dérivées partielles en utilisant les formules de la section 1.4.1 page 86, et donc obtenir des quantités relatives au barycentre des satellites observés.

Les observations sont datées en temps universel (UT ou UTC selon la période). Il est donc nécessaire de ramener cette échelle de temps non uniforme (la rotation de la Terre n'étant pas constante), à une date en temps des éphémérides (TE ou TT). Les formules de changement d'échelle qui ont été utilisées sont celles publiées dans [12].

La vitesse de la lumière étant finie, le calcul du temps de lumière τ_i est nécessaire pour ramener la date des observations au moment où les satellites ont été réellement observés. Ce calcul s'effectue par itérations en utilisant la formule qui suit

$$\tau = \frac{|\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_J(t - \tau)|}{c} \quad (3.1)$$

où \mathbf{r}_T et \mathbf{r}_J sont respectivement les vecteurs position de la Terre et de Jupiter et τ le temps de lumière Terre-Jupiter. Nous avons effectué deux itérations en calculant la distance Terre-Jupiter en amont de l'intégration numérique. Une troisième estimation du temps de lumière τ_i a alors été effectuée dans l'intégrateur en utilisant les distances Terre-satellite P_i . Notons toutefois le cas particulier des éclipses mutuelles. Dans une telle configuration, le temps de lumière de l'éclipsant doit être remplacé par le temps de lumière de l'éclipsé moins le temps de lumière nécessaire pour parcourir la distance éclipsant-éclipsé. Cela vient du fait que le phénomène observé ne fait intervenir que le satellite éclipsé, le satellite éclipsant n'étant pas présent. Au moment où le satellite éclipsé entre dans le cône d'ombre, le satellite éclipsant s'est déjà déplacé du temps de lumière satellite éclipsant-satellite éclipsé.

La vitesse de l'observateur (mouvement de la Terre) et la vitesse finie de la lumière amènent à tenir compte d'un phénomène d'aberration. Celui-ci peut être corrigé en modifiant le calcul du temps de lumière par la nouvelle expression à suivre

$$\tau = \frac{|\mathbf{r}_T(t - \tau) - \mathbf{r}_J(t - \tau)|}{c} \quad (3.2)$$

Enfin, les corrections astrométriques sont généralement effectuées par les observateurs. Signalons toutefois, que nous avons corrigé de la réfraction la série d'observations de Pasco 1986-1990, qui nous a été communiquée dans un repère apparent.

Pour finir, le schéma 3.1 résume la démarche que nous avons suivie pour l'ajustement. Notons que la correction des temps de lumière Terre-satellites est effectuée dans l'intégration numérique. Ainsi, les positions de chaque satellite sont calculées dans l'intégration à des dates légèrement différentes (de quelques secondes). Afin de limiter les erreurs numériques (l'intégration du système galiléen sur ces quelques secondes impliquant des erreurs énormes), nous avons choisi de forcer l'intégrateur à revenir en arrière dans le temps d'un jour systématiquement après calcul de la position d'un satellite.

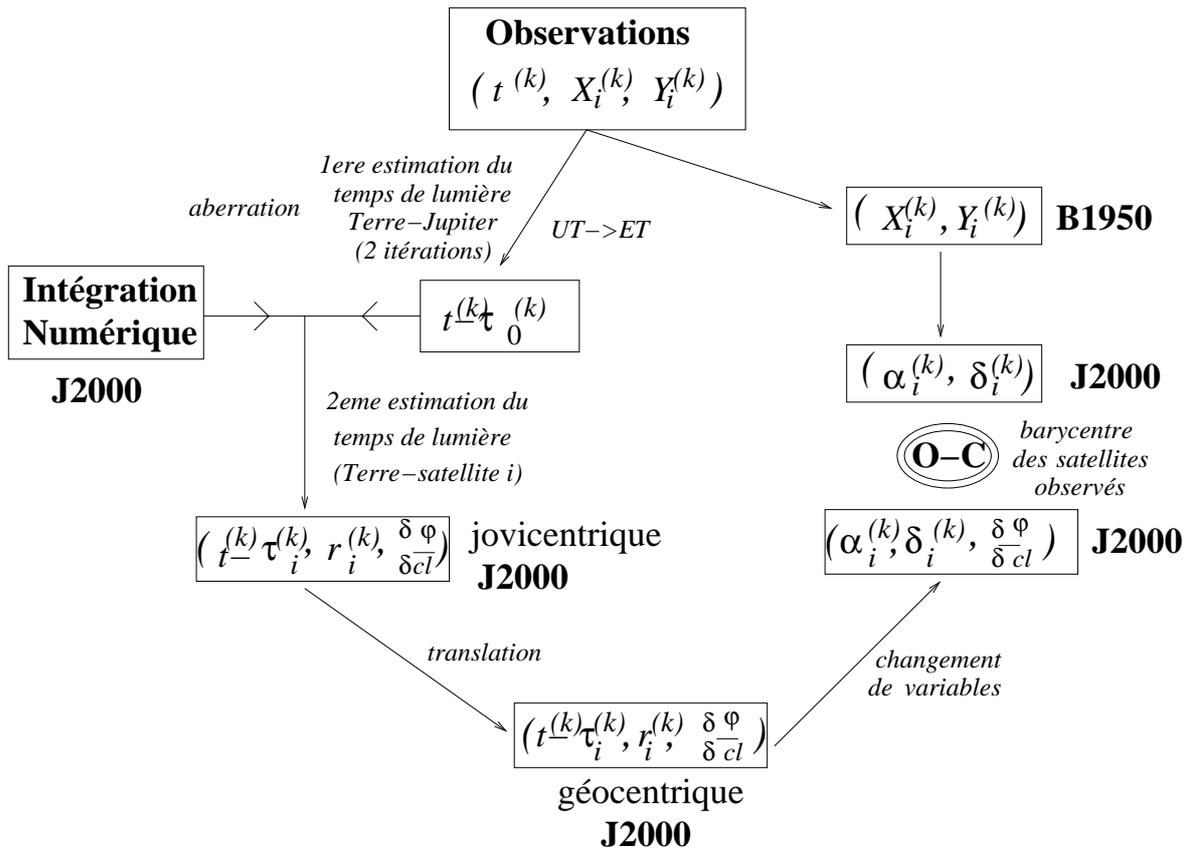


FIG. 3.1 – Algorithme utilisé pour comparer les coordonnées calculées dans l'intégrateur aux coordonnées tangentielles B1950.

3.2.2 Les (O-C)

Nous avons donc effectué notre ajustement en coordonnées différentielles J2000. A l'exception des observations de phénomènes mutuels, une pondération uniforme a été utilisée. Toutes ces observations ont donc un poids de 1. Les observations de phénomènes mutuels publiées dans [3] et [20] sont fournies avec des poids relatifs allant de 1 à 2 et ont été

conservés tels quels dans notre ajustement.

Une difficulté fréquente dans les ajustements concerne le problème des corrélations des conditions initiales et paramètres. Par exemple, il est bien connu que les coefficients J_2 et J_4 sont fortement corrélés. Cela peut ainsi conduire dans un ajustement à obtenir une valeur très grande du J_4 , celui-ci compensant une partie du J_2 dans le modèle. Afin d'éviter ce genre de corrélation dans notre modèle, nous avons utilisé les valeurs issues des sondes spatiales et donc très précises pour tous les paramètres à l'exception des angles (ψ, I) . En cela, nous tirons tout le bénéfice de notre étude faite dans la partie I. En effet, comme nous l'avions expliqué, on peut aisément absorber un certain nombre de perturbations a priori non négligeables, en changeant légèrement les valeurs des constantes d'une théorie. Toutefois, notre modélisation du système galiléen étant particulièrement fine, nous pouvons fixer d'emblée à une valeur constante de nombreux paramètres sans pour autant nuire à la qualité de l'ajustement.

Les graphes de la figure 3.2 donnent les (O-C) pour chacun des satellites après ajustement. Le graphe de la figure 3.3 donne les (O-C) des campagnes PHEMU uniquement. Rappelons qu'une seconde de degré géocentrique fait environ 3000 kilomètres à la distance de Jupiter.

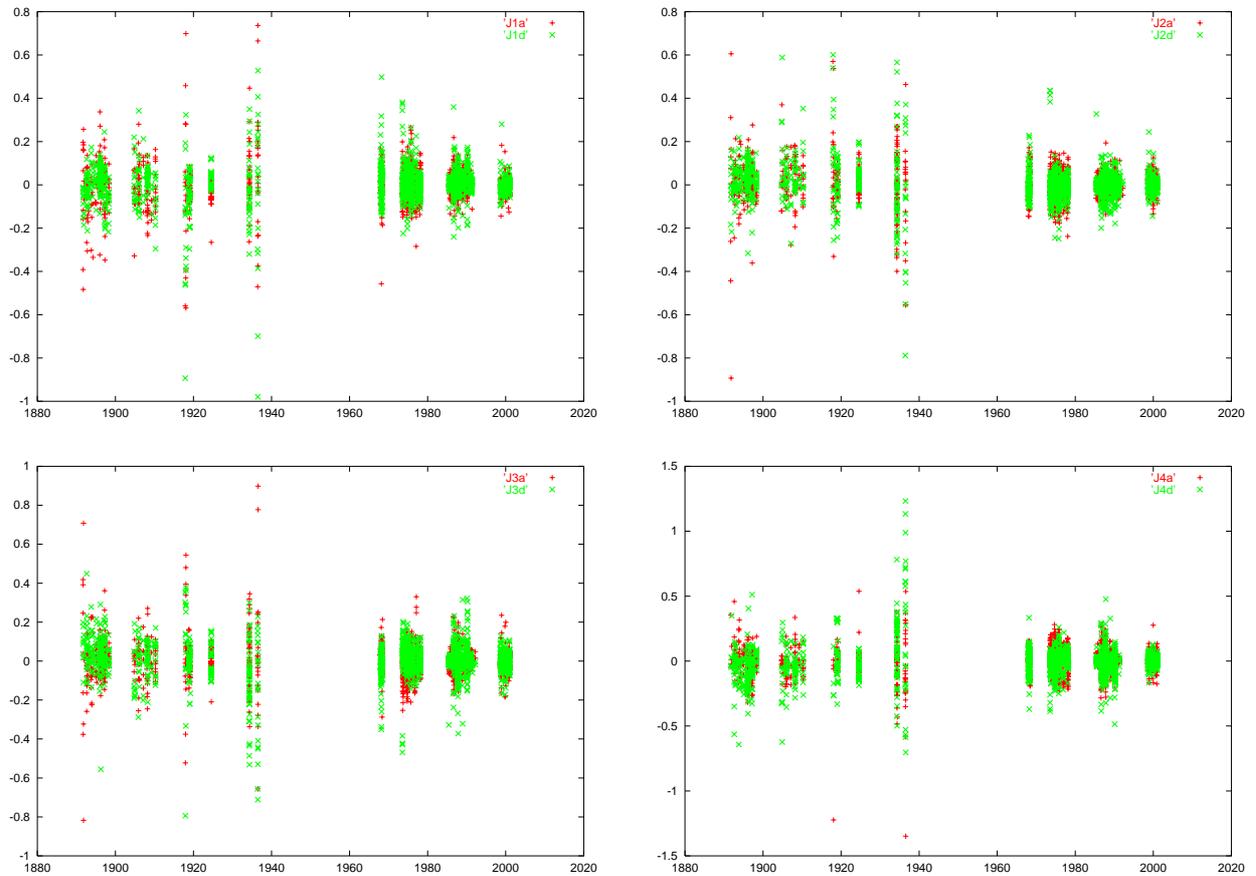


FIG. 3.2 – $(O-C)$ en ascension droite et déclinaison sur les toutes les observations après ajustement pour Io ($J1$), Europe ($J2$), Ganymède ($J3$) et Callisto ($J4$) (de haut en bas et droite à gauche). En abscisses se trouvent les dates d'observations et en ordonnées des secondes de degrés.

On pourra comparer avec intérêt les $(O-C)$ de la figure 3.3 avec ceux présentés dans les articles [27] et [20]. On constate que les $(O-C)$ issus de notre modèle sont bien meilleurs, surtout pour la campagne de 1991. En outre, la dérive significative dans les $(O-C)$ issus de la théorie E5 sur l'ascension droite de Io n'est plus présente dans les $(O-C)$ issus de notre modèle. La justification des auteurs, soupçonnant principalement des effets systématiques lors des observations de Io pour expliquer cette dérive, ne semble donc pas licite.

Le tableau 3.1 donne les valeurs des moyennes des $(O-C)$ et des écarts type en ascension droite et déclinaison pour chacun des satellites.

Nous constatons en premier lieu que les valeurs obtenues pour les phénomènes mutuels sont très bonnes. Cela n'est pas surprenant, de telles observations étant fondées sur l'observation d'un phénomène (éclipse ou occultation), plutôt qu'une mesure astrométrique entachée des problèmes de turbulence de l'atmosphère et de repère. Les valeurs pour l'as-

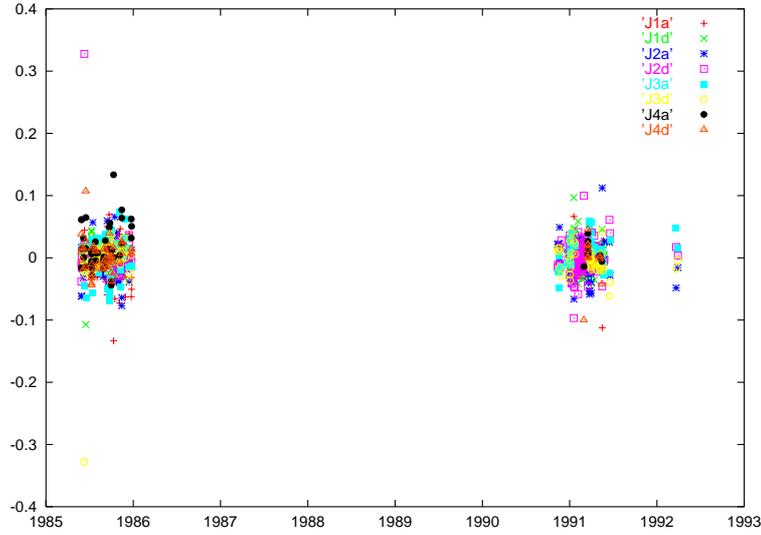


FIG. 3.3 – $(O-C)$ sur les campagnes PHEMU 85 et 91.

observation	ν_α	σ_α	ν_δ	σ_δ	N
toutes les obs.:	-0.00072	0.08567	0.00388	0.08723	1587
	0.00392	0.07814	0.00350	0.08362	1658
	0.00230	0.09407	0.00421	0.09850	1545
	-0.00598	0.11345	-0.01239	0.13615	1492
les obs. anciennes:	-0.00342	0.14262	-0.01269	0.14109	388
	0.01317	0.13245	0.02310	0.14434	411
	0.01018	0.14690	0.00281	0.14615	423
	-0.02032	0.16237	-0.01394	0.22053	413
les obs. de Pascu:	0.00297	0.06641	0.01448	0.07498	766
	0.00004	0.05936	-0.00647	0.06363	775
	-0.00093	0.07129	0.00885	0.08287	788
	-0.00188	0.09907	-0.01568	0.09567	832
les phemu (85 et 91):	-0.00358	0.02339	-0.00113	0.01815	280
	-0.00179	0.02102	0.00249	0.02677	305
	0.00464	0.02901	-0.00294	0.03158	158
	0.01386	0.08354	0.00041	0.02770	59
les obs. de Stone et Harrys:	-0.00713	0.04731	0.00207	0.04001	153
	0.00967	0.04958	0.00346	0.04361	167
	-0.00421	0.05774	-0.00677	0.05478	176
	0.00115	0.05518	0.00157	0.04340	188

TAB. 3.1 – Tableau donnant les valeurs des moyennes et écarts types en ascension droite et déclinaison en secondes de degrés pour Io (première ligne de chaque section) à Callisto (dernière ligne de chaque section), N étant le nombre d'observations utilisées pour chaque satellite.

cension droite de Callisto sont toutefois nettement moins bonnes. Cette différence semble pouvoir s'expliquer peut-être par la présence d'effets de surface sur Callisto importants, et dont la réduction ne tient pas compte. La grande qualité des (O-C) pour ces observations dont le poids est rappelons-le très faible prouve l'efficacité de notre ajustement.

Les résultats des observations anciennes sont les plus mauvais. Certes on peut penser que la précision des mesures effectuées à l'époque était moins bonne, mais cela peut s'expliquer également par le repère utilisé. En effet, la réduction des observations anciennes dans le repère B1950 a nécessité d'utiliser des formules de précession terrestre. Mais ces formules ont évolué avec le temps, et il est aujourd'hui délicat de savoir lesquelles ont été utilisées au moment de l'observation. Aux erreurs d'observations doivent donc être ajoutées les différences entre les formules de précession de l'époque et celles que nous avons utilisées. Cela vaut également pour les observations de D.Pascu entre 1967 et 1978.

Le tableau 3.2 donne les modifications sur les conditions initiales qui ont été effectuées pour obtenir les (O-C) précédents. Les angles ψ , et I ont été modifiés de respectivement

constantes ajustées	en x	en y	en z
position du satellite 1	347.34575185	-36.153543772	-88.691913008
vitesse du satellite 1	139.06723156	1115.1021316	473.31802077
position du satellite 2	-211.77935926	-161.91705326	-14.859088916
vitesse du satellite 2	423.45001359	40.779713754	68.239412282
position du satellite 3	-71.675052009	131.69713168	249.93254373
vitesse du satellite 3	-222.77632692	-26.448912147	-60.377920620
position du satellite 4	-86.634037536	-323.75033634	-6.5810646181
vitesse du satellite 4	96.733828661	-66.162037604	15.316145338

TAB. 3.2 – *Tableau présentant les variations apportées aux conditions initiales des satellites par l'ajustement aux observations. Les valeurs sont données en kilomètres pour les positions et en kilomètres par jour pour les vitesses.*

$-2.074 \cdot 10^{-2}$ et $4.753 \cdot 10^{-3}$ degrés. Les valeurs finales des conditions initiales et des angles ψ et I peuvent être trouvées dans l'annexe A.

3.2.3 Les valeurs des corrélations linéaires

Nous allons présenter pour finir les valeurs des corrélations linéaires. Celles-ci sont données dans les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5. Les valeurs supérieures à 0.8 sont écrites en caractères gras.

Comme nous pouvions nous y attendre, les coefficients J_2 et J_4 sont fortement corrélés à 88%. D'autres constantes de notre modèle semblent également subir de fortes corrélations. Rappelons toutefois que ces valeurs sont dépendantes en partie des erreurs d'observation. De plus, les observations ne donnant des mesures que sur un plan du ciel, nous n'avons jamais accès à la position exacte des satellites mais simplement à leur projection. Dès lors, il faut s'attendre à obtenir des corrélations importantes entre les conditions initiales.

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
x_1	1.00	0.09	0.02	0.29	0.39	0.31	0.19	-0.01	0.10	-0.06	-0.31	-0.20
y_1	0.09	1.00	-0.28	0.17	0.04	0.04	0.36	-0.07	0.01	0.04	-0.35	-0.27
z_1	0.02	-0.28	1.00	0.05	0.01	0.01	0.16	-0.10	0.16	0.02	-0.15	-0.01
x_2	0.29	0.17	0.05	1.00	0.90	0.67	0.31	-0.26	-0.06	0.04	-0.35	-0.22
y_2	0.39	0.04	0.01	0.90	1.00	0.60	0.13	-0.13	-0.02	-0.08	-0.29	-0.18
z_2	0.31	0.04	0.01	0.67	0.60	1.00	0.05	-0.11	0.09	-0.07	-0.22	-0.15
x_3	0.19	0.36	0.16	0.31	0.13	0.05	1.00	-0.49	-0.19	0.25	-0.28	-0.16
y_3	-0.01	-0.07	-0.10	-0.26	-0.13	-0.11	-0.49	1.00	0.24	0.04	0.19	0.09
z_3	0.10	0.01	0.16	-0.06	-0.02	0.09	-0.19	0.24	1.00	0.00	-0.03	0.01
x_4	-0.06	0.04	0.02	0.04	-0.08	-0.07	0.25	0.04	0.00	1.00	0.34	0.23
y_4	-0.31	-0.35	-0.15	-0.35	-0.29	-0.22	-0.28	0.19	-0.03	0.34	1.00	0.45
z_4	-0.20	-0.27	-0.01	-0.22	-0.18	-0.15	-0.16	0.09	0.01	0.23	0.45	1.00
vx_1	0.61	0.64	0.22	0.23	0.25	0.20	0.30	-0.14	0.12	-0.21	-0.46	-0.29
vy_1	0.84	-0.23	-0.09	0.14	0.26	0.24	-0.01	0.07	0.11	-0.02	-0.10	-0.07
vz_1	0.49	-0.10	0.00	0.12	0.20	0.07	0.08	0.03	-0.07	0.00	-0.09	-0.05
vx_2	-0.32	0.04	0.02	-0.89	-0.94	-0.71	-0.08	0.15	0.04	0.07	0.21	0.13
vy_2	0.32	-0.08	-0.10	0.50	0.63	0.51	-0.02	0.15	-0.01	0.13	-0.07	-0.08
vz_2	0.11	-0.13	0.07	0.17	0.24	0.15	0.00	0.00	0.17	0.05	-0.04	0.03
vx_3	-0.04	0.15	0.06	0.28	0.14	0.08	0.55	-0.87	-0.46	-0.06	-0.16	-0.09
vy_3	-0.14	-0.01	-0.12	0.06	-0.07	0.11	-0.25	-0.15	-0.13	0.22	0.02	-0.08
vz_3	-0.16	-0.27	0.07	-0.04	-0.02	-0.23	-0.10	-0.05	-0.13	0.13	0.09	0.18
vx_4	0.18	0.21	0.07	0.23	0.18	0.15	0.15	-0.06	0.03	-0.51	-0.81	-0.56
vy_4	-0.21	-0.15	-0.07	-0.16	-0.25	-0.15	-0.02	0.22	0.08	0.31	0.50	0.29
vz_4	-0.12	-0.12	-0.02	-0.11	-0.14	-0.16	-0.02	0.17	-0.08	0.16	0.27	0.26
J_2	0.20	0.16	0.05	0.38	0.34	0.26	0.16	-0.17	0.01	0.04	-0.16	-0.09
J_4	0.15	0.09	0.05	0.24	0.22	0.19	0.13	-0.13	0.02	0.03	-0.10	-0.06
m_0	0.00	0.13	0.05	0.15	-0.04	-0.03	0.36	0.10	0.04	0.62	-0.09	-0.07
m_1	-0.03	0.02	0.04	-0.19	-0.19	-0.12	0.12	-0.06	0.01	-0.09	-0.09	-0.04
m_2	0.48	0.73	0.24	0.31	0.26	0.20	0.43	-0.19	0.10	-0.10	-0.50	-0.32
m_3	-0.28	-0.36	-0.13	-0.38	-0.33	-0.27	-0.41	0.30	0.01	0.16	0.50	0.30
m_4	-0.28	-0.27	-0.15	-0.34	-0.29	-0.13	-0.64	0.39	0.08	0.02	0.37	0.22
ψ	0.06	0.08	-0.01	0.08	0.15	-0.25	0.16	0.04	-0.37	0.02	-0.04	-0.10
I	-0.08	-0.30	0.29	-0.05	-0.01	-0.19	0.02	-0.13	0.29	0.02	0.03	0.16

TABLE 3.3 – Tableau des corrélations linéaires pour les positions.

	vx_1	vy_1	vz_1	vx_2	vy_2	vz_2	vx_3	vy_3	vz_3	vx_4	vy_4	vz_4
x_1	0.61	0.84	0.49	-0.32	0.32	0.11	-0.04	-0.14	-0.16	0.18	-0.21	-0.12
y_1	0.64	-0.23	-0.10	0.04	-0.08	-0.13	0.15	-0.01	-0.27	0.21	-0.15	-0.12
z_1	0.22	-0.09	0.00	0.02	-0.10	0.07	0.06	-0.12	0.07	0.07	-0.07	-0.02
x_2	0.23	0.14	0.12	-0.89	0.50	0.17	0.28	0.06	-0.04	0.23	-0.16	-0.11
y_2	0.25	0.26	0.20	-0.94	0.63	0.24	0.14	-0.07	-0.02	0.18	-0.25	-0.14
z_2	0.20	0.24	0.07	-0.71	0.51	0.15	0.08	0.11	-0.23	0.15	-0.15	-0.16
x_3	0.30	-0.01	0.08	-0.08	-0.02	0.00	0.55	-0.25	-0.10	0.15	-0.02	-0.02
y_3	-0.14	0.07	0.03	0.15	0.15	0.00	-0.87	-0.15	-0.05	-0.06	0.22	0.17
z_3	0.12	0.11	-0.07	0.04	-0.01	0.17	-0.46	-0.13	-0.13	0.03	0.08	-0.08
x_4	-0.21	-0.02	0.00	0.07	0.13	0.05	-0.06	0.22	0.13	-0.51	0.31	0.16
y_4	-0.46	-0.10	-0.09	0.21	-0.07	-0.04	-0.16	0.02	0.09	-0.81	0.50	0.27
z_4	-0.29	-0.07	-0.05	0.13	-0.08	0.03	-0.09	-0.08	0.18	-0.56	0.29	0.26
vx_1	1.00	0.23	0.17	-0.13	-0.03	-0.05	0.16	-0.29	-0.32	0.21	-0.47	-0.28
vy_1	0.23	1.00	0.16	-0.23	0.32	0.13	-0.15	-0.03	-0.08	0.07	-0.04	-0.03
vz_1	0.17	0.16	1.00	-0.15	0.19	0.05	-0.04	-0.12	0.05	0.04	-0.07	-0.02
vx_2	-0.13	-0.23	-0.15	1.00	-0.66	-0.25	-0.18	-0.02	0.02	-0.13	0.18	0.11
vy_2	-0.03	0.32	0.19	-0.66	1.00	-0.20	-0.14	0.18	-0.05	0.10	0.11	0.05
vz_2	-0.05	0.13	0.05	-0.25	-0.20	1.00	-0.06	-0.06	0.19	0.04	0.05	0.03
vx_3	0.16	-0.15	-0.04	-0.18	-0.14	-0.06	1.00	0.10	0.03	0.05	-0.23	-0.13
vy_3	-0.29	-0.03	-0.12	-0.02	0.18	-0.06	0.10	1.00	-0.25	0.10	0.32	0.12
vz_3	-0.32	-0.08	0.05	0.02	-0.05	0.19	0.03	-0.25	1.00	-0.05	0.16	0.17
vx_4	0.21	0.07	0.04	-0.13	0.10	0.04	0.05	0.10	-0.05	1.00	-0.20	-0.14
vy_4	-0.47	-0.04	-0.07	0.18	0.11	0.05	-0.23	0.32	0.16	-0.20	1.00	0.14
vz_4	-0.28	-0.03	-0.02	0.11	0.05	0.03	-0.13	0.12	0.17	-0.14	0.14	1.00
J_2	0.24	0.00	0.27	-0.27	0.19	-0.10	0.14	-0.03	-0.08	0.07	-0.17	-0.08
J_4	0.17	-0.06	0.36	-0.18	0.12	-0.06	0.10	-0.01	-0.07	0.04	-0.12	-0.07
m_0	-0.25	0.03	0.01	0.05	0.24	0.10	-0.12	0.42	0.17	0.19	0.59	0.30
m_1	0.03	-0.05	0.03	0.19	-0.11	-0.05	0.02	-0.05	-0.08	0.02	-0.01	-0.08
m_2	0.94	0.08	0.09	-0.15	-0.01	-0.04	0.24	-0.20	-0.29	0.26	-0.38	-0.23
m_3	-0.50	-0.05	-0.12	0.19	-0.01	0.03	-0.25	0.13	0.22	-0.26	0.34	0.28
m_4	-0.43	-0.05	-0.16	0.20	0.01	0.00	-0.36	0.39	0.10	-0.14	0.37	0.18
ψ	0.07	-0.10	0.28	-0.05	0.03	-0.05	0.08	-0.31	0.36	0.01	-0.10	0.06
I	-0.15	-0.01	-0.03	0.03	-0.25	0.44	-0.01	-0.29	0.45	-0.05	0.01	0.0

TABLE 3.4 – Tableau des corrélations linéaires pour les vitesses.

	J_2	J_4	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	ψ	I
x_1	0.20	0.15	0.00	-0.03	0.48	-0.28	-0.28	0.06	-0.08
y_1	0.16	0.09	0.13	0.02	0.73	-0.36	-0.27	0.08	-0.30
z_1	0.05	0.05	0.05	0.04	0.24	-0.13	-0.15	-0.01	0.29
x_2	0.38	0.24	0.15	-0.19	0.31	-0.38	-0.34	0.08	-0.05
y_2	0.34	0.22	-0.04	-0.19	0.26	-0.33	-0.29	0.15	-0.01
z_2	0.26	0.19	-0.03	-0.12	0.20	-0.27	-0.13	-0.25	-0.19
x_3	0.16	0.13	0.36	0.12	0.43	-0.41	-0.64	0.16	0.02
y_3	-0.17	-0.13	0.10	-0.06	-0.19	0.30	0.39	0.04	-0.13
z_3	0.01	0.02	0.04	0.01	0.10	0.01	0.08	-0.37	0.29
x_4	0.04	0.03	0.62	-0.09	-0.10	0.16	0.02	0.02	0.02
y_4	-0.16	-0.10	-0.09	-0.09	-0.50	0.50	0.37	-0.04	0.03
z_4	-0.09	-0.06	-0.07	-0.04	-0.32	0.30	0.22	-0.10	0.16
vx_1	0.24	0.17	-0.25	0.03	0.94	-0.50	-0.43	0.07	-0.15
vy_1	0.00	-0.06	0.03	-0.05	0.08	-0.05	-0.05	-0.10	-0.01
vz_1	0.27	0.36	0.01	0.03	0.09	-0.12	-0.16	0.28	-0.03
vx_2	-0.27	-0.18	0.05	0.19	-0.15	0.19	0.20	-0.05	0.03
vy_2	0.19	0.12	0.24	-0.11	-0.01	-0.01	0.01	0.03	-0.25
vz_2	-0.10	-0.06	0.10	-0.05	-0.04	0.03	0.00	-0.05	0.44
vx_3	0.14	0.10	-0.12	0.02	0.24	-0.25	-0.36	0.08	-0.01
vy_3	-0.03	-0.01	0.42	-0.05	-0.20	0.13	0.39	-0.31	-0.29
vz_3	-0.08	-0.07	0.17	-0.08	-0.29	0.22	0.10	0.36	0.45
vx_4	0.07	0.04	0.19	0.02	0.26	-0.26	-0.14	0.01	-0.05
vy_4	-0.17	-0.12	0.59	-0.01	-0.38	0.34	0.37	-0.10	0.01
vz_4	-0.08	-0.07	0.30	-0.08	-0.23	0.28	0.18	0.06	0.08
J_2	1.00	0.88	0.00	-0.48	0.23	-0.07	-0.38	0.10	-0.13
J_4	0.88	1.00	-0.01	-0.16	0.15	-0.15	-0.29	0.07	-0.13
m_0	0.00	-0.01	1.00	-0.02	-0.06	0.06	0.04	0.00	0.00
m_1	-0.48	-0.16	-0.02	1.00	0.02	-0.58	0.01	-0.08	0.02
m_2	0.23	0.15	-0.06	0.02	1.00	-0.52	-0.45	0.09	-0.15
m_3	-0.07	-0.15	0.06	-0.58	-0.52	1.00	0.41	-0.02	0.08
m_4	-0.38	-0.29	0.04	0.01	-0.45	0.41	1.00	-0.26	-0.08
ψ	0.10	0.07	0.00	-0.08	0.09	-0.02	-0.26	1.00	0.02
I	-0.13	-0.13	0.00	0.02	-0.15	0.08	-0.08	0.02	1.00

TABLE 3.5 – *Tableau des corrélations linéaires pour les paramètres.*

3.3 Pourquoi ne pas s'arrêter là?

A ce stade de notre travail, nous disposons enfin d'un modèle capable de délivrer des éphémérides très précises des satellites galiléens. La précision interne de ce modèle (qui est ici la précision de notre intégrateur numérique) a préalablement été estimée à quelques dizaines de mètres (voir la partie I). La précision externe est, elle, un peu plus délicate à évaluer dans la mesure où nous restons tributaire des erreurs d'observations. L'examen des (O-C) des phénomènes mutuels nous laisse supposer que la précision externe est de l'ordre de quelques dizaines de kilomètres au plus.

Toutefois l'intégrateur numérique ne peut fournir que des valeurs tabulées des positions et vitesses des satellites. Afin de pallier ce problème, une méthode classique consiste à utiliser une représentation par des polynômes de Tchebychev pour décrire le mouvement des satellites. Cette méthode consiste à effectuer un échantillonnage suffisamment fin des positions et vitesses des satellites issues de l'intégrateur. On peut alors utiliser des algorithmes simples pour calculer les coefficients des polynômes de Tchebychev adéquats.

Cette méthode comprend pourtant au moins deux lacunes importantes que nous allons énoncer:

- aucune connaissance des fréquences du système n'est disponible

Ainsi, les simples fréquences de révolution des satellites des noeuds ou de la libration laplacienne sont inconnues. Ces fréquences avec leur amplitude sont pourtant essentielles à la compréhension de l'état dynamique dans lequel se trouve le système, ainsi que son évolution au cours du temps. Cela est également nécessaire pour étudier l'action des effets de marées à l'intérieur des satellites et sur leur rotation.

- pas de modèle du système sur un long terme

Les polynômes de Tchebychev ne sont utilisables que sur l'intervalle de temps où a été effectuée l'intégration numérique. Une telle représentation ne peut donc pas décrire le système sur un temps très long, limitant toute étude ultérieure au temps d'intégration précédemment utilisé.

Pour ces raisons, nous allons donc poursuivre notre travail dans une troisième partie, afin d'obtenir une représentation bien plus satisfaisante des mouvements des satellites galiléens. Celle-ci sera basée sur une analyse en fréquence complète du système galiléen.

Troisième partie

Représentation Fréquentielle

Chapitre 1

Analyse en Fréquence et Filtrage

Comme nous l'avons dit à la fin du chapitre précédent, la représentation du mouvement des satellites par des polynômes de Tchebychev n'est pas pleinement satisfaisante. Nous avons donc recherché un moyen d'obtenir une représentation plus analytique de notre modèle. Pour cela, nous nous sommes tourné vers l'analyse en fréquence. Ce premier chapitre présente les méthodes de traitement du signal qui ont été utilisées au cours de notre travail. Après un ensemble de rappels sur l'analyse de Fourier, nous présenterons les méthodes d'analyse fine et de filtrage, qui ont été deux points clés dans notre démarche.

1.1 Quelques rappels sur l'analyse de Fourier

L'analyse de Fourier à comme point de départ la théorie des séries de Fourier. Nous allons donc commencer par en présenter les principaux aspects.

1.1.1 Signaux continus

On appelle signal continu toute fonction f de la variable réelle à valeur dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . La théorie des séries de Fourier se propose de décomposer tout signal périodique de période T en série de signaux sinusoïdaux fondamentaux du type $c_n e^{2i\pi n \frac{t}{T}}$, chacun ayant une fréquence multiple de la fréquence dite fondamentale égale à $\frac{2\pi}{T}$.

Soit f un signal continu périodique de période T , on peut montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que l'égalité

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \quad (1.1)$$

soit vérifiée en tout point de continuité de f (théorème de Dirichlet).

Ces deux suites sont définies par

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt \quad (1.3)$$

La série (1.1) est appelée série de Fourier de la fonction f . Par ailleurs, l'application \mathcal{F} qui à toute fonction f associe les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée transformation de Fourier.

A la place des expressions précédentes, il est souvent plus commode d'utiliser la formulation complexe équivalente

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n \frac{t}{T}} \quad (1.4)$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{T}} dt = |c_n| e^{i\phi_n} \quad (1.5)$$

En particulier on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= i(c_n - c_{-n}) \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} & c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ |c_n| &= |c_{-n}| & \phi_{-n} &= -\phi_n \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les valeurs $|c_n|$ et ϕ_n sont le module et la phase de l'amplitude c_n associée à la fréquence $\lambda_n = \frac{2\pi n}{T}$. On appelle spectre de f l'ensemble des couples fréquence-amplitude $(\frac{n}{T}, c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. L'une des préoccupations majeures dans l'utilisation des séries de Fourier concerne la rapidité de leur convergence. Il est possible de démontrer que la rapidité de ces dernières est directement liée à la régularité de la fonction f étudiée. Ainsi, plus la fonction f est régulière, plus sa série de Fourier converge rapidement.

D'un point de vue pratique, on ne connaît généralement qu'une quantité finie de valeurs prises par la fonction f , ce qui demande d'adapter la transformation de Fourier aux signaux discrets.

1.1.2 Signaux discrets

Les données relatives aux signaux étudiés sont en réalité toujours en nombre fini, que celles-ci soient observationnelles ou issues d'un code numérique. Ainsi, il est impossible de connaître le comportement d'un signal tout au long de son évolution, mais uniquement à intervalles discrets dans le temps, donnant lieu à ce que l'on appelle fréquemment un

échantillonnage de ce signal. De plus, ces données ne sont accessibles que sur un certain intervalle de temps $[0, T]$, T n'étant plus la période du signal a priori. Cela nous amène alors à formuler un certain nombre de contraintes en regard du cas idéal des signaux continus.

Soit N le nombre de données accessibles dans $[0, T]$, nous possédons en fait une suite $(f(n))_{0 < n \leq N}$ d'états à analyser. Généralement ces états seront espacés dans le temps de façon homogène donnant lieu à la représentation mathématique suivante

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \tilde{N} = \{1, \dots, N\} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ k &\longmapsto f(k\Delta T) = y_k \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $\Delta T = \frac{T}{N}$ est le pas d'échantillonnage.

La représentation en série de Fourier du signal considéré (non périodique a priori), suppose implicitement que l'on prolonge le signal sur \mathbb{R} par périodicité, de période T . Cela ne pose pas de problème réel étant donné que le signal n'est pas connu en dehors de l'intervalle $[0, T]$.

En revanche, le caractère discret des échantillons étudiés est source de difficultés. En premier lieu, le calcul des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être qu'approché, par exemple par les sommes de Césaro suivantes

$$c_n^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(k\Delta T) e^{-2i\frac{\pi}{N}nk} \quad (1.8)$$

où nous aurons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_n^N = c_n$$

De ces formules se déduit l'application

$$(y_k)_{1 \leq k \leq N} \longmapsto (c_n^N)_{1 \leq n \leq N} \quad (1.9)$$

appelée transformation de Fourier discrète d'ordre N .

f étant de périodicité égale à T , la plus petite fréquence de ce signal correspondra donc à la période de valeur T . Cette plus petite fréquence est appelée fréquence fondamentale et sera notée λ_f

$$\lambda_f = \frac{2\pi}{T}$$

Les autres fréquences que l'on déterminera seront les multiples de cette fréquence fondamentale et seront appelées les harmoniques du signal.

Notons que la limitation du nombre de points introduite empêche également de déterminer l'amplitude des fréquences supérieures à une certaine valeur, celles-ci apparaissant alors à des fréquences bien plus basses qu'elles ne le sont réellement (cet effet est connu sous le nom d'effet miroir ou aliasing). Ainsi, pour N données nous ne pourrions déterminer que les N premiers termes de la série de Fourier de f . On ne peut donc pas déterminer plus de fréquences que l'on a de points.

D'où il ressort qu'un nombre N très élevé de données est généralement indispensable à une bonne analyse des signaux que l'on étudie.

Le calcul numérique effectif des amplitudes (1.8) se fait en utilisant l'algorithme de Cooley et Tuckey (dont il existe des programmes dans de nombreux langages), permettant une très grande optimisation du temps de calcul. Cette procédure est également connue sous le nom de transformée de Fourier rapide ou TFR (FFT en anglais).

Au final, nous obtenons donc une décomposition du signal étudié en signaux fondamentaux dont l'amplitude et la phase sont calculées numériquement, pour chacune des fréquences $\frac{2\pi n}{T}$.

Les signaux physiques que l'on étudie comportent généralement des fréquences propres à la dynamique du système que l'on regarde. Par exemple, l'évolution au cours du temps de la coordonnée cartésienne x d'un satellite comporte comme fréquences évidentes la fréquence de révolution du satellite, puis la fréquence de la longitude du noeuds, etc... C'est l'amplitude relative à chacune de ces fréquences qui est recherchée dans une analyse de Fourier. Pourtant rien n'indique que ces fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale $\frac{2\pi}{T}$ (cette dernière étant fonction uniquement de la longueur de l'intervalle d'observation $[0, T]$), cela n'est d'ailleurs généralement pas le cas. Nous sommes ainsi amené à une étude plus générale dont relève l'analyse de Fourier.

1.1.3 La transformée de Fourier

Rappelons que la théorie des séries de Fourier donne uniquement les amplitudes des fréquences multiples de la fréquence fondamentale $\frac{2\pi}{T}$. Si les fréquences propres du système n'entrent pas dans ce cadre, les séries de Fourier semblent perdre de leur intérêt. Nous verrons pourtant qu'il n'en est rien.

La théorie des séries de Fourier se propose de développer tout signal périodique dans la base des exponentielles complexes, autrement dit dans un espace de fréquences. Il s'agit donc d'un changement de base (au sens des espaces vectoriels) permettant de passer d'une base temporelle à une base fréquentielle. On peut alors chercher à appliquer cette démarche à des fonctions non périodiques. Nous avons alors une application qui à toute fonction $f(t)$ suffisamment régulière (mais non périodique a priori) associe une fonction $\mathcal{F}(f)(\nu)$ appelée transformée de Fourier. Celle-ci décrit l'évolution dans l'espace des fréquences $\{e^{i\nu t}\}_{\nu \in \mathbb{R}}$ de la fonction f . La propriété de non périodicité en temps de f se retrouve alors dans l'espace des fréquences par le fait que son expression ne peut être restreinte simplement à la base

des fréquences $\{e^{2i\pi n \frac{t}{T}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

La transformée de Fourier est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \mathcal{F}(f)(\nu) &\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\nu t} dt \end{aligned} \quad (1.10)$$

et son graphe est appelé le spectre de la fonction f .

Nous avons désormais une relation théorique reliant l'évolution temporelle d'un signal (ce que l'on observe) avec ses fréquences intrinsèques (ce que l'on recherche). Il suffit pour cela de balayer l'espace réel des fréquences et de rechercher la présence de pics (amplitudes élevées) signes révélateurs de la présence de fréquences significatives. En pratique, une telle étude est peu applicable dans la mesure où le nombre de points présent dans les échantillons est généralement très élevé. Le calcul numérique de l'intégrale (1.10) n'entre pas dans le cadre de l'algorithme de la FFT, et devient donc bien trop long lorsque l'on regarde de nombreuses valeurs de ν .

On remarquera toutefois que l'expression de (1.10) dans le cas d'une fréquence du type $e^{2i\pi n \frac{t}{T}}$ et pour une fenêtre d'observation $[0, T]$ se ramène à l'expression (1.5). Nous pouvons donc utiliser la FFT pour obtenir un échantillonnage du spectre de f le long des fréquences $\{e^{2i\pi n \frac{t}{T}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Si le nombre de points N présent dans l'échantillon est très grand, on peut alors espérer obtenir une bonne représentation (discrète) du spectre (continu) de f . Cette méthode est très utilisée en pratique. Elle conserve pourtant l'inconvénient de ne fournir que des valeurs approchées (en fait à une précision de la fréquence fondamentale) des vraies fréquences du système physique étudié. Nous allons maintenant présenter une méthode permettant de corriger cette imperfection dans le cas des signaux quasi-périodiques.

1.2 Analyse fine

En mécanique céleste, en l'absence de chaos et en négligeant les effets de marées, les mouvements que l'on étudie sont quasi-périodiques, c'est à dire qu'ils sont composés d'une quantité au plus dénombrable de fréquences, non commensurables a priori. La méthode d'analyse fine développée par J.Laskar (voir [24]) se propose de retrouver les fréquences réelles à partir des fréquences trouvées par une FFT.

1.2.1 Présentation théorique

L'analyse fine consiste à décomposer le signal non sur la base orthonormée classique $(e^{2i\pi n \frac{t}{T}})_{n \in \mathbb{Z}}$ (représentation de Fourier), mais sur la base normée $(e^{i\nu_j t})_{j \in J}$ où J est un ensemble au plus dénombrable.

Soit f un signal quasi-périodique

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} A(\nu_j) e^{i\nu_j t} \quad (1.11)$$

une FFT sur ce signal nous fournit une suite finie de couples fréquence-amplitude $(\frac{2\pi n}{T}, c_n)$. Pour un échantillonnage convenable, les fréquences $\frac{2\pi n}{T}$ seront assez proches des véritables fréquences du système ν_j . La méthode consiste donc à obtenir les valeurs explicites des fréquences ν_i et de leur amplitude $A(\nu_j)$, en calculant la projection du signal f sur la base des fréquences $(e^{i\nu t})_{\nu \in \mathbb{R}}$.

Celle-ci a pour expression

$$F(\nu) = \langle f, e^{i\nu t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\nu t} dt \quad (1.12)$$

en se plaçant au voisinage des valeurs données pour les fréquences données par la FFT, les véritables valeurs des fréquences sont celles pour lesquelles $F(\nu)$ atteint un maximum local. Nous déduisons donc les véritables fréquences du système $(\nu_j)_{j \in J}$. Toutefois la base $(e^{i\nu_j t})_{j \in J}$ n'étant pas orthonormée mais seulement normée, les valeurs $F(\nu)$ correspondantes ne sont pas tout à fait les valeurs des amplitudes associées $A(\nu_j)$. En effet dans une base non orthogonale, les coordonnées d'un vecteur ne coïncident pas avec les produits scalaires de ce vecteur sur la base. L'une des alternatives consiste à orthogonaliser la base des fréquences, puis à en déduire les coordonnées dans cette base (égales cette fois aux produits scalaires) et enfin à retrouver les valeurs précises des amplitudes en revenant dans la base initiale. Une autre méthode, celle que nous utiliserons, consiste à utiliser, connaissant les valeurs des fréquences, la méthode des moindres carrés pour améliorer la valeur des amplitudes. Ces deux méthodes donnent des résultats similaires (voir [10]), lorsque une fenêtre rectangulaire est utilisée.

1.2.2 Méthode utilisée

Le programme d'analyse en fréquence que nous avons utilisé a été développé par A.Vienne (voir [35]) sur la base des programmes de J.Laskar et reprend certaines améliorations apportées à l'analyse fine par S.Champenois (voir [10]). Nous présentons ici l'algorithme utilisé par ce code numérique.

- On commence par une FFT sur le signal initial, et on détermine la fréquence de plus grande amplitude.
- On effectue une analyse fine (J.Laskar) pour obtenir la valeur exacte de la fréquence précédemment obtenue.
- On regarde la proximité de la fréquence trouvée à celles déjà obtenues. Si la nouvelle fréquence est éloignée de plus de deux fois la fréquence fondamentale de toutes les autres, on l'enlève du signal et on recommence en début de chaîne (cas 1 dans la

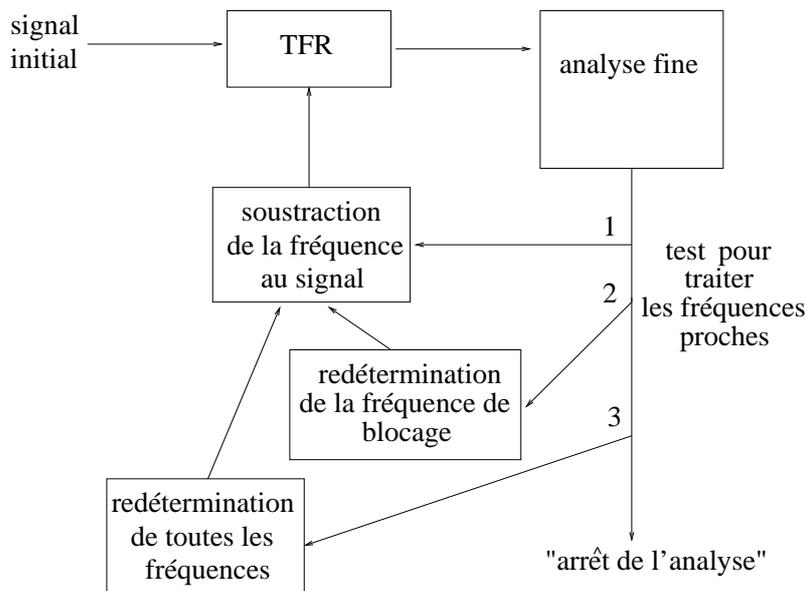


FIG. 1.1 – Diagramme de l'algorithme utilisé par le programme d'analyse en fréquence.

figure 1.1).

Dans le cas contraire, on réintroduit dans le signal la fréquence trouvée comme étant la plus proche et on la détermine de nouveau (cas 2). Si le résultat reste toujours inchangé on redétermine tous les termes anciennement trouvés, un par un (cas 3).

- On arrête l'analyse lorsque l'on a atteint le degré de précision souhaité, ou bien lorsque deux fréquences sont proches de moins de deux fois la fréquence fondamentale. On réajuste pour finir toutes les amplitudes par la méthodes des moindres carrés.

1.2.3 Détermination de l'erreur numérique

Là encore un contrôle de l'erreur numérique est nécessaire. La méthode la plus efficace est de reconstruire le signal à partir de sa décomposition fréquentielle. Nous verrons en 3.1.3 que cette étape se révèle très utile pour comprendre ce qui fait bloquer, parfois très rapidement, l'analyse numérique du signal.

1.3 Le filtrage

Comme nous le verrons dans les chapitres qui vont suivre, l'analyse du mouvement des satellites galiléens a nécessité une étude en deux temps des spectres. Ainsi, pour des difficultés liées à l'ampleur de l'échantillonnage nécessaire, nous avons du séparer les courtes périodes des longues périodes en appliquant un filtre passe-bas. Cette méthode a d'ailleurs été déjà utilisée en mécanique céleste (voir [9] et [16]).

1.3.1 Conception d'un filtre passe-bas

Un filtre passe-bas est un filtre qui ne conserve que les basses fréquences d'un signal. La conception théorique d'un tel opérateur se fait directement dans l'espace des fréquences. Ainsi, on peut concevoir assez simplement un filtre pass-bas comme une fonction qui multipliée par le spectre d'un signal f quelconque ne retiendra que la partie du spectre à basse fréquence. Un exemple simple d'une telle fonction peut être une fonction indicatrice égale à l'unité sur les basse fréquences et nulle sur les hautes fréquences. Il reste alors a pouvoir concevoir cette opération en temps.

Rappelons que nous avons pour deux fonctions f et g quelconques (suffisamment régulières) les égalités

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \star g) &= \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \\ \mathcal{F}^{-1}(f \cdot g) &= \mathcal{F}^{-1}(f) \star \mathcal{F}^{-1}(g)\end{aligned}\tag{1.13}$$

où \star désigne l'opération de convolution. Le filtrage d'un signal en temps revient donc à appliquer un produit de convolution sur le signal d'entrée. En effet, on élabore le filtre passe-bas dans l'espace des fréquences, puis on effectue une transformation de Fourier inverse de celui-ci. Cette nouvelle fonction est alors à convoler avec le signal d'entrée.

1.3.2 Méthode numérique

En pratique, la discrétisation du signal ne nécessite de connaître la valeur du filtre qu'à un nombre fini d'instants. Le calcul des coefficients numériques en nombre fini, a été réalisé en utilisant les routines de filtrage présentées dans [28]. Le nombre de points nécessaire à la conception du filtre est appelé la longueur du filtre. La discrétisation du signal introduit également les notions de ripple, noté ρ , et d'atténuation, notée α . En effet, un filtre passe-bas laisse toujours passer une petite partie des hautes fréquences et modifie légèrement l'amplitudes des basses fréquences. La modifications de ces amplitudes est caractérisée directement par les coefficients α et ρ . Ainsi, un ripple de 10^{-5} indique que l'amplitude des basses fréquences sera changée au plus d'un facteur 10^{-5} , et une atténuation de 10^{-5} signifie que l'amplitude des courtes périodes résiduelles ne dépasse pas 10^{-5} fois l'amplitude initiale. Enfin, la discrétisation introduit l'existence d'une plage de coupure où les fréquences ne sont ni totalement détruites, ni complètement inchangées (au ripple près). Il faut donc bien choisir cet intervalle fréquentiel de sorte qu'aucune fréquence importante n'y soit présente (voir la figure 1.2).

Dans la suite nous présenterons en 3.1.1 les caractéristiques des filtres que nous avons utilisés. Celles-ci seront récapitulées dans un tableau comme ci-dessous.

Δt est le pas d'échantillonnage en jours du signal d'entrée, tandis que δt est le pas du signal en sortie. L'intervalle $[T_0, T_1]$ représente la plage de coupure ramenée en jours. Enfin, $2M + 1$ est la longueur du filtre.

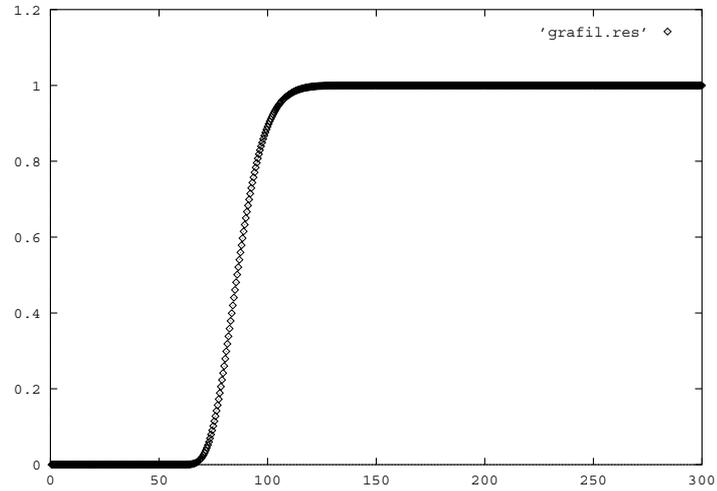


FIG. 1.2 – Spectre numérique d'un filtre passe-bas avec pour plage de coupure l'intervalle $[60, 140]$, les abscisses sont des jours et les ordonnées sans unités.

caractéristiques du filtre	
Δt	fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée (en jours)
T_0	période minimale de coupure (en jours ou années)
T_1	période maximale de coupure (en jours ou années)
δt	fréquence d'échantillonnage du signal de sortie (en jours)
$2M + 1$	longueur du filtre
ρ	ripple
α	atténuation
Δf	plage de coupure (en fréquence d'échantillonnage d'entrée)

TAB. 1.1 – Tableau résumant les caractéristiques d'un filtre passe-bas.

1.3.3 Filtres à deux étages

Le programme que nous avons utilisé ne permettait pas de concevoir des filtres ayant une longueur de points suffisamment importantes en regard de la précision que nous recherchions. En effet, la plage de coupure devait être très étroite et nous recherchions un ripple et une atténuation suffisamment faibles, pour que le bruit ne dépasse pas la dizaine de mètres (soit ρ et α de l'ordre de 10^{-5} pour des amplitudes maximum de l'ordre de 1000 kilomètres). De plus, la méthode de filtrage à deux étages offre pour avantage d'obtenir une coupure très propre des courtes périodes, dans la mesure où elles vont être pour certaines filtrées deux fois. Cette méthode consiste à filtrer dans un premier temps le signal initial sur une plage de hautes fréquences plus limitée que désiré initialement. Cela permet de concevoir un filtre de longueur bien moins longue. On effectue ensuite un deuxième filtrage et écrase toutes les hautes fréquences désirées. L'avantage se retrouve sur la longueur de ce deuxième filtre toujours bien moins long. En effet, le premier filtrage a permis d'écraser un grand nombre de très hautes fréquences. Ainsi, lors du deuxième filtrage on peut se contenter d'un pas d'échantillonnage bien plus grand que dans le cas du signal initial (voir la figure 1.3). La longueur du deuxième filtre est donc en conséquence bien plus courte.

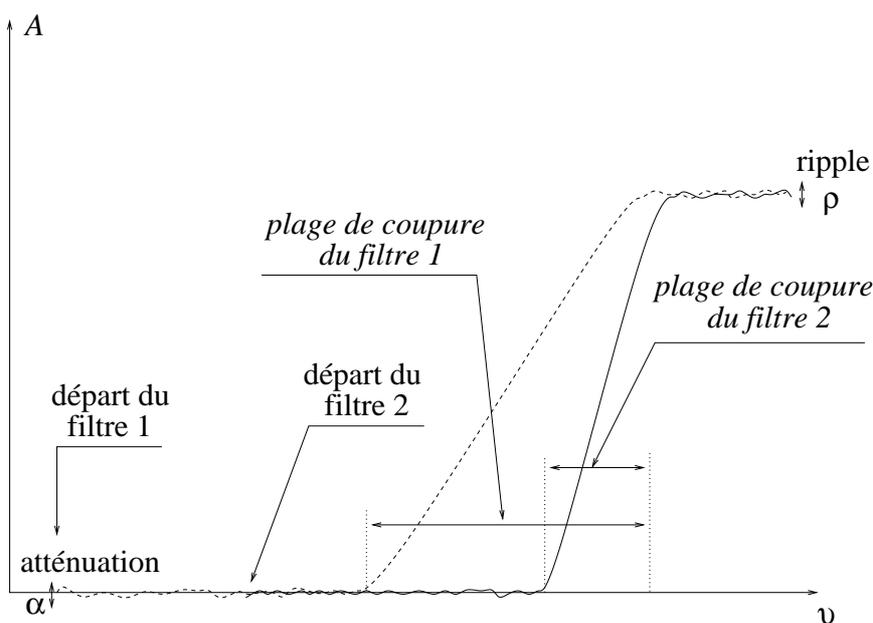


FIG. 1.3 – Principe d'un filtre à deux étages.

Filtrer un signal consiste à regarder son évolution sur un intervalle de temps $[t_i, t_f]$ (fonction de la longueur du filtre) pour en déduire sa valeur filtrée à un instant donné τ . Dans le cas d'un filtrage simple, la valeur de τ est simplement la valeur moyenne de l'intervalle sur lequel le filtre est appliqué. Le cas d'un filtre à deux étages est toutefois un peu plus compliqué. En effet, celles-ci font intervenir les longueurs respectives L_1 et L_2 des

deux filtres, mais également leur période d'échantillonnage δt_1 et δt_2 (voir la figure 1.4).

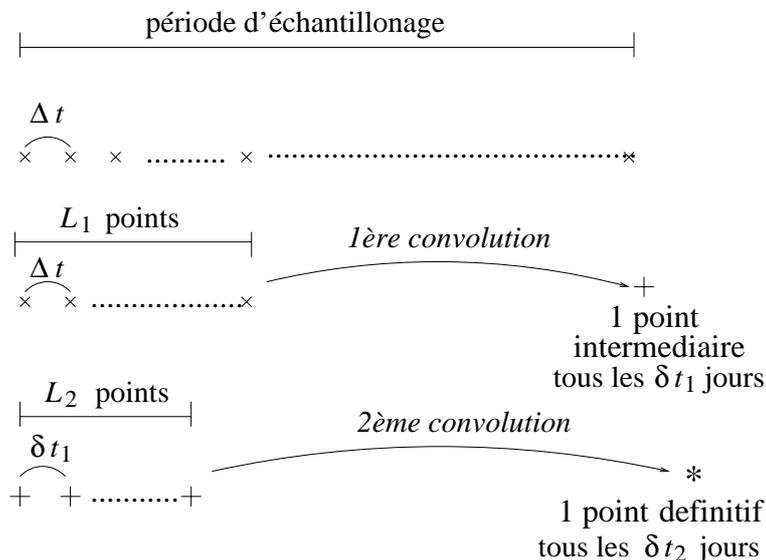


FIG. 1.4 – *Algorithme d'un filtrage sur deux étages.*

Après calculs nous avons obtenu les deux égalités qui suivent

$$\begin{aligned}
 \tau &= t_i + \frac{(L1 - 1)}{2} \delta t_1 + \frac{(L2 - 1)}{2} \delta t_2 \\
 \tau &= t_f - \frac{(L1 - 1)}{2} \delta t_1 - \frac{(L2 - 1)}{2} \delta t_2
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Nous avons eu à utiliser ces deux formulations, dans la mesure où l'intégration numérique a été effectuée en avant et en arrière dans le temps. Nous verrons dans le chapitre 3 de cette dernière partie plusieurs application directes de ces méthodes.

Chapitre 2

Etude des Spectres en Fréquences

Nous nous proposons d'opérer une analyse en fréquence complète du système Galiléen. Malheureusement, celle-ci ne peut être immédiate et nécessite un travail préalable. En effet, le spectre de fréquence étant très large, il n'est pas approprié d'effectuer une analyse en fréquence directe. Le nombre de points nécessaire à l'échantillonnage serait trop important pour garder une bonne précision numérique, ainsi qu'un espace disque acceptable. Nous allons donc dans un premier temps filtrer les courtes périodes présentes dans le signal, de manière à n'avoir qu'à analyser les longues périodes. La mise en place du filtrage nécessite une connaissance préalable du spectre en fréquence, afin de déterminer une plage de fréquences propre à la coupure du signal. C'est la motivation principale de ce chapitre.

2.1 Motivation

Nous allons représenter le mouvement des satellites galiléens par des séries quasi-périodiques sur les éléments elliptiques. Cette méthode offre l'avantage de pallier tous les inconvénients des polynômes de Tchebychev énoncés à la page 114 sans pour autant altérer la précision de la représentation. A la lecture du chapitre précédent, il pourrait sembler suffisant d'appliquer notre programme d'analyse en fréquence sur les échantillons issus du modèle numérique pour obtenir les séries voulues. Mais comme nous allons le voir, l'analyse en fréquence d'un signal présente toute sorte de difficultés techniques qu'il faut pouvoir résoudre avant d'obtenir une représentation satisfaisante.

Le programme `EQVARSOL++.f` délivre des positions et vitesses en coordonnées cartésiennes, dans un repère jovicentrique J2000. Nous allons donc transformer ces coordonnées en variables elliptiques à la sortie du code numérique, puis effectuer une analyse en fréquence sur chacune des six variables nécessaires à la représentation complète de chaque satellite.

Le spectre du système galiléen est très large, c'est à dire que l'écart temporel entre les plus courtes et les plus longues périodes influentes est très important (plusieurs siècles). Ainsi, les courtes périodes sont en majorité de l'ordre des périodes de révolution (quelques jours),

tandis que les longues périodes sont de l'ordre des périodes des noeuds (jusqu'à plusieurs centaines d'années). Cette largeur du spectre nécessite donc d'avoir un échantillonnage suffisamment long pour pouvoir déterminer toutes les longues périodes, et un pas d'échantillonnage suffisamment petit pour déterminer correctement les courtes périodes (et éviter ainsi des problèmes d'aliasing). Mais la taille d'un tel fichier ferait plusieurs centaines de megaoctets et contiendrait des millions de points. La place conséquente, le temps numérique très long liés à la manipulation de tels fichiers, et l'erreur numérique dans le calcul des spectres nous conduisent à renoncer à cette méthode.

Pour résoudre ce problème, nous avons donc choisit de séparer l'analyse des longues périodes de celle des courtes périodes. On pourrait imaginer analyser les courtes périodes sur un échantillonnage de temps très court, puis les soustraire sur un échantillon bien plus long afin d'étudier les longues périodes. Mais l'existence de très courtes longues périodes (quelques centaines de jours), bloque rapidement l'analyse des courtes périodes (voir par exemple le graphe 2.1).

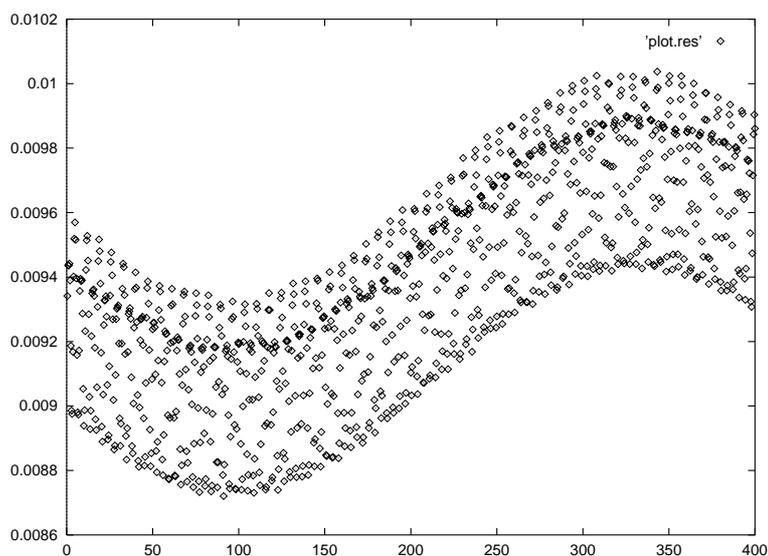


FIG. 2.1 – *Variation de l'excentricité d'Europe sur 400 jours.*

On le constate aisément, les longues périodes d'environ 400 jours “polluent” le signal sur un temps très court.

Nous allons donc devoir analyser en premier lieu les longues périodes du système galiléen. Cela implique le filtrage des signaux initiaux pour ne conserver que les longues périodes. Pour ce faire, il devient indispensable d'étudier l'amplitude des courtes périodes afin de déterminer une plage de coupure de filtrage adéquate, c'est à dire où aucune fréquence n'a d'amplitude supérieure à quelques dizaines de mètres.

2.2 Etude analytique des courtes périodes

Commençons donc par analyser la répartition des courtes périodes. Pour cela nous avons utilisé le programme `analytcp.for` écrit par L.Duriez, qui détermine pour une inégalité $k_i\lambda_i + k_j\lambda_j$ donnée l'amplitude de la courte période associée. A ce titre, on pourra consulter l'article [13]. Le calcul est effectué à l'ordre 1 des masses par développement de la fonction perturbatrice en prenant les valeurs moyennes des excentricités et inclinaisons. Ces dernières ont été reprises de [19] avec pour estimation maximale de leur valeur: $e_1 = 0.005$, $e_2 = 0.01$, $e_3 = 0.0015$, $e_4 = 0.0075$.

2.2.1 Détermination des courtes périodes à l'ordre 1

Afin de déterminer les courtes périodes à l'ordre 1, nous avons donc utilisé le programme `Analytcp.for`, avec pour moyens mouvements moyens les valeurs tirées de [14] qui suivent

$$\begin{aligned} N_1 &= 3.551552280 \\ N_2 &= 1.769322721 \\ N_3 &= 0.878207942 \\ N_4 &= 0.376486223 \end{aligned}$$

L'analyse est effectuée sur les variables proches des variables elliptiques $(p, q, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta})$. Rappelons que ces variables sont définies au voisinage d'un mouvement circulaire uniforme par

$$\begin{aligned} n &= N(1+p) \iff a = A(1+p)^{-2/3} \\ \lambda &= Nt - iq \\ z &= e \exp i\varpi \\ \zeta &= \sin I/2 \exp i\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

A se déduit de la troisième loi de Kepler par $N^2 A^3 = n^2 a^3 = Cte$.

Les équations de Lagrange dans ces variables ont été développées jusqu'au degré huit en excentricités et inclinaisons en utilisant la règle de D'Alembert. Chaque inégalité $k_i\lambda_i + k_j\lambda_j$ à courte période se présente comme un polynôme des variables z, ζ et de leurs conjuguées en facteur de $\exp(I(k_i\lambda_i + k_j\lambda_j))$. On y remplace les variables z et ζ par leur valeur numérique à un instant donné et la solution des équations concernant cette inégalité est simplement obtenue en divisant le terme par $k_i N_i + k_j N_j$. Une inégalité $k_i\lambda_i + k_j\lambda_j$ sera étudiée si elle vérifie $C_I = k_i + k_j \leq 8$, C_I étant appelée la caractéristique de l'inégalité.

Afin de n'étudier qu'un nombre fini de courtes périodes dans le cas où $k_i \cdot k_j < 0$, nous avons fait évoluer les valeurs k_i et k_j jusqu'à la valeur maximale 50.

Enfin, la troncature des résultats a été fixée à un kilomètre, ce qui est suffisant pour la précision que nous recherchons.

Voici dans les tableaux 2.1 à 2.4 l'ensemble des solutions à courte période obtenues à l'ordre 1 dont l'amplitude dépasse 10 kilomètres. Rappelons que ces amplitudes sont données à titre indicatif, celles-ci correspondant aux valeurs instantanées que nous avons prises.

Variable	Argument	Amplitude km	Période j	Facteur
λ_1	$\lambda_1 - \lambda_2$	22.922	3.52546352710312	m_2
	$2\lambda_1 - 2\lambda_2$	27.022	1.76273176355156	m_2
	$3\lambda_1 - 3\lambda_2$	11.333	1.17515450903437	m_2
\bar{z}_1	$2\lambda_1 - 3\lambda_2$	12.333	3.50011582277532	m_2
	$-\lambda_1$	266.672	1.76913777746208	J_2

TAB. 2.1 – *Tableau des courtes périodes ayant une amplitude supérieure à dix kilomètres pour Io.*

Variable	Argument	Amplitude km	Période j	Facteur
a_2	$\lambda_1 - \lambda_2$	110.41	3.52546352710312	m_1
	$2\lambda_1 - 2\lambda_2$	22.612	1.76273176355156	m_1
	$3\lambda_1 - 3\lambda_2$	11.979	1.17515450903437	m_1
	$\lambda_2 - \lambda_3$	16.316	7.05092705816249	m_3
	$2\lambda_2 - 2\lambda_3$	47.258	3.52546352908124	m_3
	$3\lambda_2 - 3\lambda_3$	24.962	2.35030901938750	m_3
	$4\lambda_2 - 4\lambda_3$	13.787	1.76273176454062	m_3
λ_2	$\lambda_1 - \lambda_2$	108.459	3.52546352710312	m_1
	$2\lambda_1 - 2\lambda_2$	56.559	1.76273176355156	m_1
	$3\lambda_1 - 3\lambda_2$	24.089	1.17515450903437	m_1
	$4\lambda_1 - 4\lambda_2$	11.698	0.881365881775781	m_1
	$\lambda_2 - \lambda_3$	109.614	7.05092705816249	m_3
	$2\lambda_2 - 2\lambda_3$	129.633	3.52546352908124	m_3
	$2\lambda_2 - 3\lambda_3$	11.437	6.95026003358263	m_3
	$3\lambda_2 - 3\lambda_3$	54.218	2.35030901938750	m_3
	$4\lambda_2 - 4\lambda_3$	25.97	1.76273176454062	m_3
	$5\lambda_2 - 5\lambda_3$	13.361	1.41018541163250	m_3
\bar{z}_2	$-\lambda_2$	46.227	3.55118104379986	m_1
	$-\lambda_1$	61.923	1.76913777746208	m_1
	$2\lambda_1 - 3\lambda_2$	42.173	3.50011582277532	m_1
	$3\lambda_1 - 4\lambda_2$	15.732	1.75637197436884	m_1
	$-\lambda_3$	23.765	7.15455304682224	m_3
	$-\lambda_2$	11.299	3.55118104379986	m_3
	$2\lambda_2 - 3\lambda_3$	58.683	6.95026003358263	m_3
	$3\lambda_2 - 4\lambda_3$	21.487	3.50011582667488	m_3
	$4\lambda_2 - 5\lambda_3$	10.092	2.33901630941812	m_3
		$-\lambda_2$	167.781	3.55118104379986

TAB. 2.2 – Tableau des courtes périodes ayant une amplitude supérieure à dix kilomètres pour Europe.

Dans le tableau 2.2 se trouve la plus courte période égale à 0.88 jour d'amplitude supérieure à dix kilomètres, et dont l'argument est $4\lambda_1 - 4\lambda_2$.

Variable	Argument	Amplitude km	Période j	Facteur
a_3	$\lambda_1 - \lambda_3$	197.538	2.35030901850833	m_1
	$\lambda_2 - \lambda_3$	96.794	7.05092705816249	m_2
	$2\lambda_2 - 2\lambda_3$	19.488	3.52546352908124	m_2
	$3\lambda_2 - 3\lambda_3$	10.294	2.35030901938750	m_2
	$\lambda_3 - \lambda_4$	10.409	12.5232475877322	m_4
	$2\lambda_3 - 2\lambda_4$	33.909	6.26162379386608	m_4
	$3\lambda_3 - 3\lambda_4$	16.203	4.17441586257739	m_4
λ_3	$\lambda_1 - \lambda_3$	143.446	2.35030901850833	m_1
	$\lambda_2 - \lambda_3$	93.968	7.05092705816249	m_2
	$2\lambda_2 - 2\lambda_3$	48.598	3.52546352908124	m_2
	$3\lambda_2 - 3\lambda_3$	20.647	2.35030901938750	m_2
	$4\lambda_2 - 4\lambda_3$	10.001	1.76273176454062	m_2
	$\lambda_3 - \lambda_4$	64.348	12.5232475877322	m_4
	$\lambda_3 - 2\lambda_4$	18.818	50.1709619705550	m_4
	$2\lambda_3 - 2\lambda_4$	84.861	6.26162379386608	m_4
	$3\lambda_3 - 3\lambda_4$	32.550	4.17441586257739	m_4
$4\lambda_3 - 4\lambda_4$	14.261	3.13081189693304	m_4	
\bar{z}_3	$-\lambda_3$	56.797	7.15455304682224	m_1
	$-\lambda_1$	119.648	1.76913777746208	m_1
	$\lambda_1 - 2\lambda_3$	57.462	3.50011582472510	m_1
	$-\lambda_3$	40.304	7.15455304682224	m_2
	$-\lambda_2$	54.214	3.55118104379986	m_2
	$2\lambda_2 - 3\lambda_3$	36.066	6.95026003358263	m_2
	$3\lambda_2 - 4\lambda_3$	13.464	3.50011582667488	m_2
	$-\lambda_4$	19.274	16.6890178798909	m_4
	$\lambda_3 - 2\lambda_4$	216.709	50.1709619705550	m_4
	$2\lambda_3 - 3\lambda_4$	30.479	10.0217130560968	m_4
	$3\lambda_3 - 4\lambda_4$	11.18	5.56684909933792	m_4
	$-\lambda_3$	105.203	7.15455304682224	J_2

TAB. 2.3 – Tableau des courtes périodes ayant une amplitude supérieure à dix kilomètres pour Ganymède.

Dans le tableau 2.3 se trouve la plus longue courte période égale à 50.17 jours d'amplitude supérieure à dix kilomètres, et dont l'argument est $\lambda_3 - 2\lambda_4$.

Variable	Argument	Amplitude km	Période j	Facteur
a_4	$\lambda_1 - \lambda_4$	410.277	1.97891483023705	m_1
	$\lambda_2 - \lambda_4$	195.253	4.51107169879719	m_2
	$\lambda_3 - \lambda_4$	539.869	12.5232475877322	m_3
	$2\lambda_3 - 2\lambda_4$	62.959	6.26162379386608	m_3
	$3\lambda_3 - 3\lambda_4$	30.084	4.17441586257739	m_3
	$4\lambda_3 - 4\lambda_4$	15.044	3.13081189693304	m_3
λ_4	$\lambda_1 - \lambda_4$	351.817	1.97891483023705	m_1
	$\lambda_2 - \lambda_4$	146.474	4.51107169879719	m_2
	$\lambda_3 - \lambda_4$	417.665	12.5232475877322	m_3
	$\lambda_3 - 2\lambda_4$	34.463	50.1709619705550	m_3
	$2\lambda_3 - 2\lambda_4$	141.848	6.26162379386608	m_3
	$3\lambda_3 - 3\lambda_4$	55.431	4.17441586257739	m_3
	$4\lambda_3 - 4\lambda_4$	24.602	3.13081189693304	m_3
	$5\lambda_3 - 5\lambda_4$	11.666	2.50464951754643	m_3
\bar{z}_4	$-\lambda_4$	91.372	16.6890178798909	m_1
	$-\lambda_1$	278.324	1.76913777746208	m_1
	$\lambda_1 - 2\lambda_4$	112.262	2.24513348908080	m_1
	$-\lambda_4$	53.399	16.6890178798909	m_2
	$-\lambda_2$	121.252	3.55118104379986	m_2
	$\lambda_2 - 2\lambda_4$	56.499	6.18210617120125	m_2
	$-\lambda_4$	199.180	16.6890178798909	m_3
	$-\lambda_3$	300.612	7.15455304682224	m_3
	$\lambda_3 - 2\lambda_4$	54.811	50.1709619705550	m_3
	$2\lambda_3 - 3\lambda_4$	92.970	10.0217130560968	m_3
	$3\lambda_3 - 4\lambda_4$	34.778	5.56684909933792	m_3
	$4\lambda_3 - 5\lambda_4$	15.528	3.85376765865389	m_3
		$-\lambda_4$	59.812	16.6890178798909

TAB. 2.4 – Tableau des courtes périodes ayant une amplitude supérieure à dix kilomètres pour Callisto.

Dans le tableau 2.4 se trouve la courte période égale à 12.52 jours d'amplitude la plus élevée égale à 417.6 kilomètres, et dont l'argument est $\lambda_3 - \lambda_4$.

2.2.2 Recherche des courtes et longues courtes périodes

Comme nous l'avons déjà dit, il est nécessaire en vue d'appliquer un filtrage, de déterminer quelles sont les plus courtes et les plus longues courtes périodes du système, ayant une amplitude non négligeable.

Nous avons vu que la plus longue courte période d'amplitude supérieure à 10 kilomètres a pour argument $\lambda_3 - 2\lambda_4$. Nous allons maintenant rechercher la plus longue courte période ayant une amplitude supérieure à dix mètres. Afin de restreindre notre recherche, nous ne

considérerons que les courtes périodes de degré inférieur à 9 et dont les coefficients k_i , k_j n'excèdent pas la valeur limite 20.

Nous trouvons deux courtes périodes d'argument $4\lambda_3 - 9\lambda_4$ et $\lambda_2 - 5\lambda_4$ de période respective 50.485 jours et 55.55 jours.

L'amplitude pour chacune de ces deux courtes périodes a été déterminée toujours par le programme `Analytcp.for`, avec cette fois une troncature abaissée à un mètre. Il apparaît alors que l'amplitude de ces courtes périodes est inférieure à deux mètres.

Les plus courtes courtes périodes peuvent être trouvées de la même manière, où plus simplement en recherchant les plus petites périodes de toutes les courtes périodes de caractéristique inférieure à 9. Nous trouvons alors que les plus petites courtes périodes du système sont supérieures à 0.6 jour.

Nous retenons donc que la plage fréquentielle des courtes périodes d'amplitude supérieure à quelques mètres est l'intervalle en jours $[0.6, 55.55]$.

2.3 Spectre fréquence-amplitude

Nous pouvons à présent regarder la transition entre les courtes périodes et les longues périodes en vue d'effectuer une coupure par un filtre passe-bas.

2.3.1 Détermination des longues périodes

On considère comme termes à longues périodes ceux qui ont des périodes comparables à celles des noeuds et péricentres (ou les termes solaires). Ils correspondent à des situations de quasi résonance ou de grande inégalité. Ce sont les suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\lambda_2, & \quad 486.81 \text{ jours} \\ \lambda_2 - 2\lambda_3, & \quad 486.81 \text{ jours} \\ 3\lambda_3 - 7\lambda_4, & \quad 8058.10 \text{ jours} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Des deux longues périodes fondamentales $\lambda_1 - 2\lambda_2$ et $\lambda_2 - 2\lambda_3$, de période égale à 486.8 jours, nous pouvons entre autre déduire les plus courtes longues-périodes suivantes

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - 4\lambda_2 & \quad \text{degré 2} \longrightarrow 243.405 \text{ jours} \\ 3\lambda_1 - 6\lambda_2 & \quad \text{degré 3} \longrightarrow 162.270 \text{ jours} \\ 4\lambda_1 - 8\lambda_2 & \quad \text{degré 4} \longrightarrow 121.702 \text{ jours} \\ 5\lambda_1 - 10\lambda_2 & \quad \text{degré 5} \longrightarrow 97.362 \text{ jours} \\ 6\lambda_1 - 12\lambda_2 & \quad \text{degré 6} \longrightarrow 81.135 \text{ jours} \\ 7\lambda_1 - 14\lambda_2 & \quad \text{degré 7} \longrightarrow 69.544 \text{ jours} \\ 8\lambda_1 - 16\lambda_2 & \quad \text{degré 8} \longrightarrow 60.851 \text{ jours} \end{aligned}$$

On obtient évidemment les mêmes résultats avec les harmoniques de la longue période $\lambda_2 - 2\lambda_3$.

N.B. Les valeurs des périodes sont données pour celles des moyen mouvements moyens observés de [14]. Il faut s'attendre à des valeurs légèrement différentes dans notre intégrateur.

2.3.2 La plage de coupure

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le filtrage des courtes périodes est indispensable à une analyse minutieuse du signal. La plage d'influence des courtes périodes a été déterminée à l'intervalle en jours $[0.6, 55.55]$ que nous ramenons par mesure de précaution (les fréquences présentes dans l'intégrateur numériques pouvant être légèrement différentes) à l'intervalle $[0.5, 60]$.

Une étude, cette fois numérique, du spectre des longues périodes a permis préalablement de déterminer l'amplitude des courtes longues périodes. Il est apparu que les longues périodes à considérer sont celles supérieures ou égales à 160 jours. Toujours par mesure de précaution, nous allons ramener cette valeur à 140 jours. Par ailleurs, les plus longues longues périodes du système d'amplitude supérieures ou égales au kilomètre correspondent aux fréquences des noeuds et périapses, qui peuvent aller jusqu'à environ 550 ans pour Callisto.

Au final, nous avons donc une plage de courtes périodes s'étendant de 0.5 jours à 60 jours et une plage de longues périodes de 140 jours à plus de 550 ans. Les caractéristiques des filtres utilisés seront présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Analyse Synthétique

Fort de notre étude des spectres réalisée dans le chapitre précédent, nous allons appliquer dans ce dernier chapitre les méthodes de traitement du signal présentées en début de partie. Le système à longue période est analysé, de sorte que l'étude des courtes périodes devient possible. Enfin, nous présenterons l'état dynamique dans lequel sont les satellites galiléens dans notre modèle. L'ensemble des résultats est présenté ici dans un cadre de traitement général. Notons toutefois qu'en dernier lieu une étude plus fine relève toujours plus ou moins du cas par cas.

3.1 Analyse des longues périodes

Comme dit précédemment, l'étude du spectre du système galiléen nécessite d'analyser en premier lieu les longues périodes.

3.1.1 Filtrage des courtes périodes

Les plus longues périodes du système galiléen ont précédemment été évaluées à un peu plus de 550 ans (fréquences des noeud et longitude du périjove de Callisto). Cet intervalle de temps doit être au moins doublé dans l'analyse du signal, afin de pouvoir séparer d'autres fréquences proches de moins de deux fois la fréquence fondamentale, des plus longues périodes.

Après plusieurs essais, nous avons conservé comme intervalle de temps pour chaque signal une durée de 1700 ans. En effet, une longueur si importante s'est avérée être nécessaire pour obtenir une bonne reconnaissance des longues périodes. Le pas d'échantillonnage a été fixé à 0.24 jour afin d'éviter tout problème d'aliasing avec les très courtes périodes.

Nous avons élaboré un filtre ayant pour plage de coupure l'intervalle en jours [60, 140]. Un filtre à un étage nécessiterait plusieurs milliers de coefficients. Nous avons donc utilisé une méthode de filtrage à deux étages. Cela nous a permis d'utiliser des filtres de longueur égale à seulement quelques centaines de coefficients.

Nous avons choisi d'opérer notre analyse sur les variables elliptiques $(a_i, \lambda_i, z_i, \zeta_i)$ plus adéquates pour comprendre la dynamique du système que des coordonnées cartésiennes. Ce qui donne 16 séries échantillonnées au total. Les caractéristiques précises du filtre que nous avons utilisé pour supprimer les courtes périodes dans ces signaux sont résumées dans le tableau 3.1.

	étage 1	étage 2
Δt (jours)	0.24	3.36
T_0 (jours)	6.72	60
T_1 (jours)	140	140
δt (jours)	3.36	26.88
$2M + 1$	231	247
ρ	10^{-7}	10^{-7}
α	10^{-6}	10^{-6}
Δf	0.034	0.032

TAB. 3.1 – Tableau des caractéristiques du filtre à deux étages utilisé pour supprimer les courtes périodes du système galiléen.

Nous avons testé l'efficacité de notre filtrage sur un signal sinusoïdal de fréquence variable. Cela nous a permis de déduire des valeurs quantitatives du traitement qui sont données par le tableau ci-dessous, le graphe représentatif étant celui de la figure 1.2 de la page 125.

T (en jours)	étage 1	étage 2
∞	7.10^{-8}	2.10^{-6}
200 000	7.10^{-8}	2.10^{-6}
300	2.10^{-7}	6.10^{-7}
150	4.10^{-7}	2.10^{-6}
140	4.10^{-6}	2.10^{-4}
60	4.10^{-4}	10^{-7}
6.72	10^{-7}	10^{-7}
0.6	10^{-7}	

TAB. 3.2 – Tableau de précision du filtre à deux étages. Celui-ci donne pour un signal périodique de période T le ripple et l'atténuation après passage dans le filtre 1 puis 2.

L'intégration numérique du modèle a été effectuée avec un pas constant (optimal) de 0.08 jour. En effet, la nécessité de sortir des positions et vitesses à intervalles réguliers très courts (0.24 jour) rendrait une intégration à pas variable peu efficace. Dans le but de limiter l'erreur numérique (estimée ici à quelques centaines de mètres au plus), nous avons intégré le système de part et d'autre dans le temps, soit sur +/-850 ans, à partir des conditions initiales de notre modèle au 1er janvier 1950 à 0H00. En pratique, le filtre à deux étages a été directement intégré dans le corps même du

programme `EQVARSOL++`. f. Ainsi, lors de la sortie régulière des positions et vitesses, celles-ci sont reportées dans le repère équatorial de l'intégration via les angles ψ, I , transformées dans les variables $(a_i, \lambda_i, z_i, \zeta_i)$, puis filtrées suivant la méthode à deux étages précédemment expliquée dans le chapitre 1.

Le traitement de la longitude nécessite toutefois une opération particulière. En effet, le filtrage de cette variable nécessite d'ôter des pentes (relatives à la fréquence de révolution des satellites) à celles-ci avant d'entrer dans le filtre. En pratique, nous avons retrouvé des valeurs très approchées après quelques essais. Nous verrons que ce traitement nécessitera d'être affiné lors de l'analyse précise des longitudes.

3.1.2 Recomposition des longues périodes

Nous avons effectué une analyse en fréquence sur chacun des 16 séries échantillonnées issues du double filtrage. Le nombre de points dans l'échantillon a été de 23 041 points. Une droite de régression a été retirée des longitudes afin de supprimer complètement la fréquence de révolution des satellites, la méthode itérative précédente ne fournissant que des valeurs approchées des pentes. Enfin, après avoir comparé un fenêtrage rectangulaire et une fenêtre de Hann, nous avons conservé cette dernière pour l'analyse de tous les signaux.

Afin de tester la fidélité de la représentation fréquentielle, nous avons reconstruit les signaux à partir des spectres numériques trouvés et les avons retranchés aux signaux initiaux. Les résultats les moins satisfaisants concernent les longitudes moyennes et sont représentés dans la figure 3.1.

Comme on peut le voir sur ces graphes des longitudes, la présence de très longues périodes d'origine solaire bloque l'analyse des fréquences, surtout pour les satellites les plus éloignés.

Nous avons recherché un traitement systématique capable de répondre à ce problème. Cela fait l'objet de la section qui va suivre.

3.1.3 Le traitement des longues périodes solaires

Les longues périodes solaires ne peuvent être analysées sur l'intervalle de temps que nous avons choisi. Certes on pourrait imaginer poursuivre notre intégration numérique sur un temps plus long, mais l'erreur numérique deviendrait très importante. D'autre part de nouvelles périodes plus longues encore feraient probablement leur apparition. Nous devons donc trouver une méthode capable de traiter ce problème, tout en restant dans l'intervalle de temps que nous nous sommes fixé.

On pourrait penser utiliser immédiatement une représentation en polynômes de Tchebychev pour représenter les longues périodes solaires, toutefois les longues périodes non encore reconnues du système galiléen resteraient non analysées. De plus, celles-ci parasiteraient la détermination des coefficients de ces polynômes. Une méthode plus minutieuse serait alors de filtrer préalablement les longitudes de sorte à ne conserver que les longues périodes solaires. Ainsi, celles-ci seraient représentées correctement par des polynômes de Tchebychev

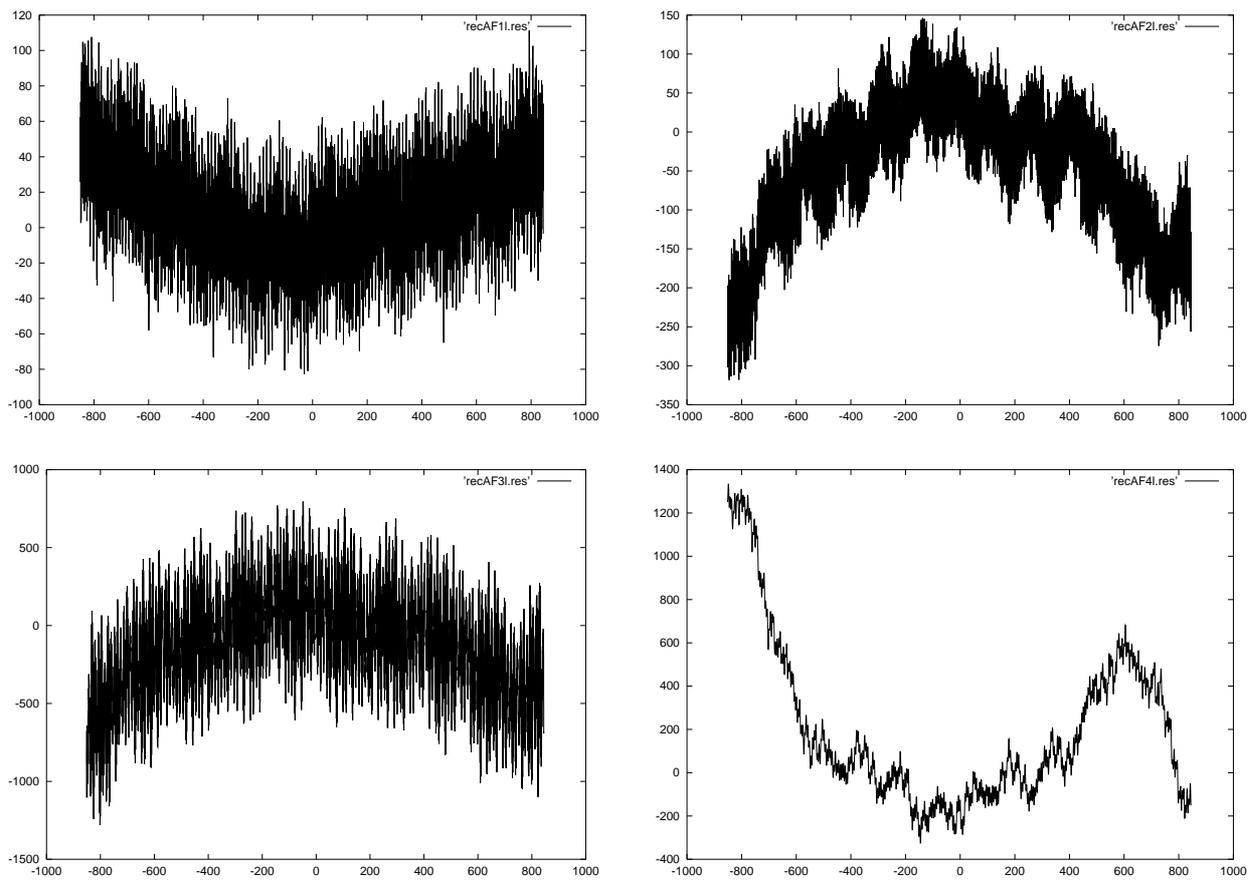


FIG. 3.1 – Résidus entre l'intégration et sa représentation par l'analyse en fréquence, pour les longues périodes des longitudes pour Io, Europe, Ganymède et Callisto (de gauche à droite et de haut en bas). Les abscisses sont des années et les amplitudes en kilomètres.

et pourraient dans un deuxième temps être enlevées pour pouvoir continuer l'analyse des longues périodes du système. Hélas une telle méthode nécessiterait un nombre de coefficients de filtrage bien trop grand car la plage de coupure serait cette fois dans l'intervalle [140 jours, 550 ans], soit plus de 30 000 coefficients. En dehors de l'erreur numérique même, notre échantillon n'aurait pas la longueur suffisante pour ne serait-ce qu'évaluer un seul point. En effet, filtrer un signal consistant à déduire un point moyen d'une série de points initiaux, une partie de l'intervalle d'échantillonnage (aux extrémités) est systématiquement perdue.

Nous avons finalement mis au point un traitement en quatre étapes, certes plus fastidieux mais très efficace. Il est de plus généralisable à de très nombreux signaux, autres que ceux relatifs au système galiléen.

La méthode est la suivante:

- On commence par filtrer le signal résiduel de manière à ne conserver que les très longues périodes du système, à savoir celles supérieures à 120 ans. Les caractéristiques du filtre utilisé sont données dans le tableau 3.3. Notons que la présence éventuelle de longues périodes dans la plage de coupure en années [20, 120] n'est pas importante, cette opération ayant pour simple but de lisser le signal résiduel, et donc de rendre une approximation polynômiale des trop longues périodes possible (graphe de la figure 3.2 en haut à gauche).
- La deuxième étape consiste alors à utiliser une approximation du signal précédemment filtré par des polynômes de Tchebychev. Celle-ci est faite avec des polynômes de faible degré, en pratique celui-ci ne dépassera pas le degré 9 (graphe de la figure 3.2 en haut à droite). En effet, nous ne recherchons que les trop longues périodes du signal, nous ne voulons en particulier pas introduire les longues périodes théoriquement déterminables dans une quelconque représentation polynômiale.
- La représentation des trop longues périodes par les polynômes de Tchebychev peut alors être soustraite du signal précédent et donne le graphe en bas à gauche de la figure 3.2. Celui-ci est à nouveau analysable par l'analyseur en fréquence. On note toutefois, que les extrémités du graphe décrochent assez rapidement. En effet, le filtrage précédent a diminué l'intervalle sur lequel l'approximation polynômiale a été effectuée. Ces décrochages font alors bloquer l'analyse en fréquence un peu plus loin.
- La dernière étape du traitement consiste donc à refaire toute l'opération sur le nouveau signal résiduel. En pratique trois à quatre itérations par ce procédé sont suffisantes pour atteindre la précision de quelques dizaines de kilomètres. En particulier le graphe en bas à droite de la figure 3.2 donne le résidu limite pour la longitude de Callisto.

Cette méthode est applicable aux variables complexes par usage respectif sur les parties réelles et imaginaires. Nous l'avons appliquée à toutes les variables (l, z, ζ) des quatre satellites.

L'exemple de la longitude de Callisto est l'exemple le plus défavorable que nous avons traité par cette méthode. Notons, que nous obtenons au final une précision de représentation

	étage 1
Δt (jours)	26.88
T_0 (ans)	20
T_1 (ans)	120
δt (jours)	26.88
$2M + 1$	853
ρ	10^{-3}
α	10^{-2}
Δf	0.003066393

TAB. 3.3 – Tableau des caractéristiques du filtre utilisé pour lisser les signaux résiduels en supprimant les courtes longues périodes.

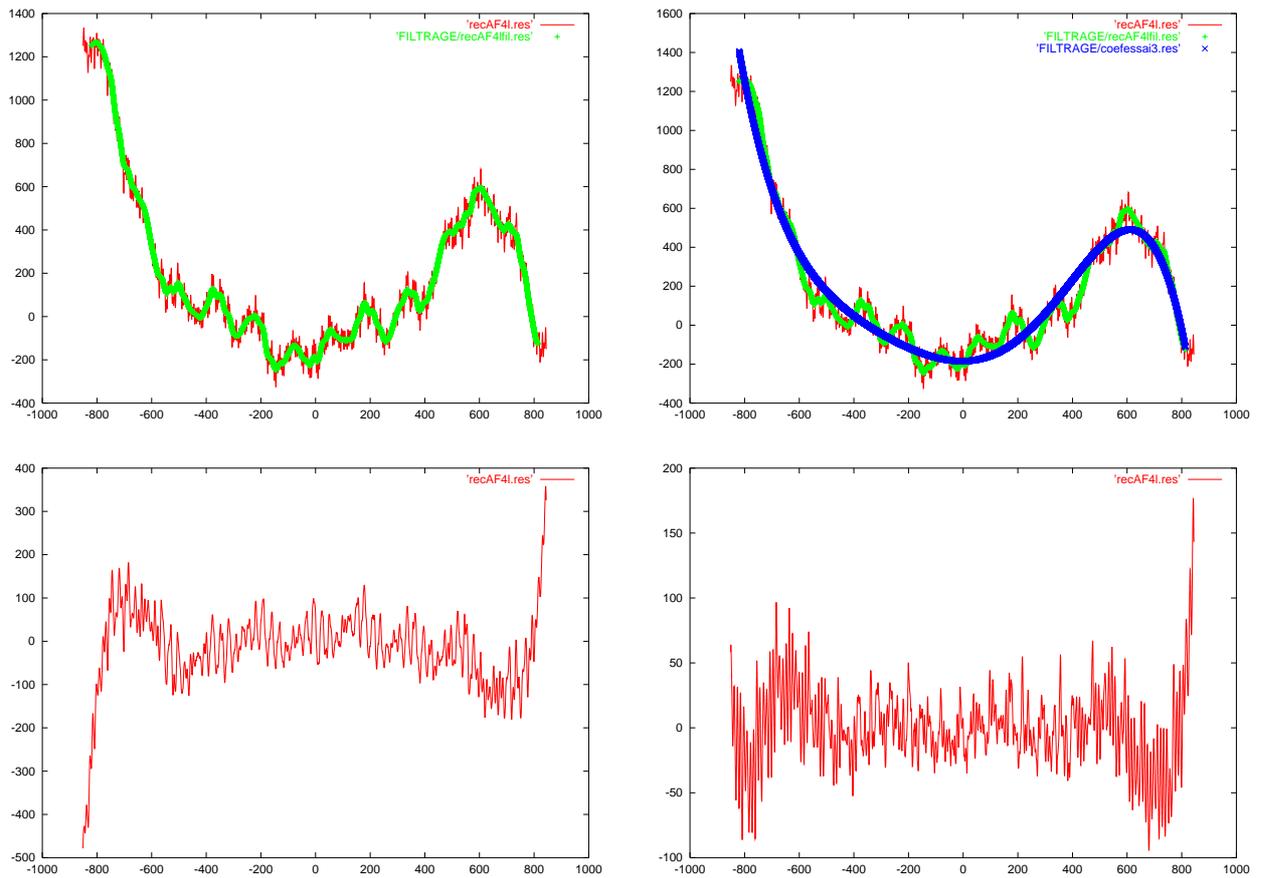


FIG. 3.2 – Recomposition en quatre étapes des longues périodes pour la longitude de Callisto. Les abscisses sont en années et les amplitudes en kilomètres.

de 150 kilomètres sur une période de 1700 ans, au lieu de 1300 kilomètres initialement. Les variables des autres satellites, et en particulier les longitudes ont toutes été reconstruites avec une erreur maximale de 20 kilomètres sur 200 ans et moins de 80 kilomètres sur 1700 ans.

3.2 Analyse des courtes périodes

Maintenant que nous avons une représentation fréquentielle des longues périodes, nous allons pouvoir retrancher celles-ci des échantillons issus de notre modèle numérique non filtré. L'analyse des courtes périodes devient donc réalisable.

3.2.1 Recomposition des courtes périodes

Nous avons repris le programme `EQVARSOL++.f` dans les mêmes conditions d'intégration, cette fois sans le filtrage, et avons utilisé des échantillons sur une période de 80 ans, avec un pas de 0.24 jour. Là encore, il ne suffit pas de faire une analyse en fréquence directement. En effet les résidus dans l'analyse des longues périodes réapparaissent. Ils bloquent généralement l'analyse à une amplitude de 80 kilomètres (surtout pour la longitude de Callisto). En effet, l'amplitude des courtes périodes non encore analysées s'ajoute au bruit des longues périodes et détériore ainsi la représentation finale.

Nous avons donc utilisé de nouveau notre méthode en quatre étapes (les caractéristiques du filtre sont données dans le tableau 3.4), cette fois sur les signaux à courte période, les résidus des longues périodes prenant le rôle des trop longues périodes solaires. Cette méthode a prouvé une fois de plus son efficacité, et donne finalement pour résidus sur les longitudes les graphes de la figure 3.3.

	étage 1
Δt (<i>jours</i>)	0.24
\mathbf{T}_0 (<i>jours</i>)	60
\mathbf{T}_1 (<i>jours</i>)	220
δt (<i>jours</i>)	0.24
$2\mathbf{M} + 1$	801
ρ	5.10^{-3}
α	5.10^{-3}
Δf	0.0010909

TAB. 3.4 – Tableau des caractéristiques du filtre utilisé pour supprimer les longues périodes résiduelles dans les séries échantillonnées des courtes périodes.

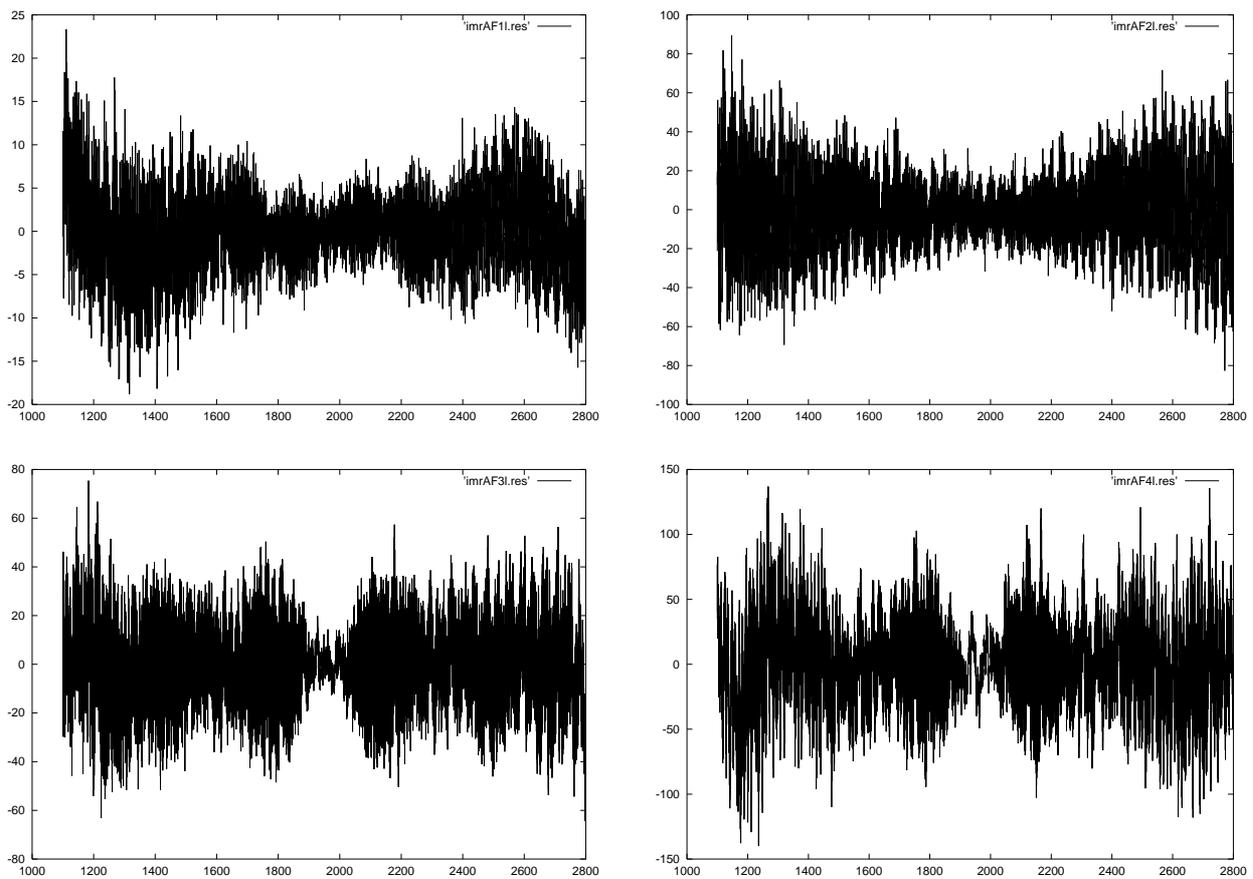


FIG. 3.3 – Résidus sur 1700 ans pour les longitudes entre la représentation synthétique et le modèle numérique.

3.2.2 La version 1.0

Une routine en langage FORTRAN fournissant les positions des satellites galiléens issues de notre modèle a été mise au point. Celle-ci contient trois sous programmes appelées **V1-0**, **BNLP** et **BNCP**. Les deux dernières routines ne concernent pas l'utilisateur et sont appelées par la routine principale **V1-0(ET,nsat,is,iv,ELEM)**. Celles-ci recomposent respectivement les longues et courtes périodes du satellite demandé. Un ensemble de neuf fichiers de données contenant toutes les séries relatives à chaque satellite et variable doivent être installés pour que les routines fonctionnent. La taille totale des fichiers et routines est au final de seulement 93.4 ko.

Voici la définition des arguments présents dans la routine **V1-0**:

En Entrée:

ET date désiré en jours juliens en temps des éphémérides à partir de l'époque du 1er janvier 1950 à 0h00, soit le jour julien 2433282.5;

nsat il s'agit du numéro du satellite désiré de 1 à 4 pour respectivement Io à Callisto;

is cette option permet dans le cas **is=0** de ne pas introduire les polynômes de Tchebychev, fournissant à l'utilisateur un modèle dynamique correct sur un très long terme (bien supérieur à la période d'intégration numérique). En revanche un utilisateur désirant une grande exactitude dans la représentation utilisera l'option **is=1**;

iv cette option laisse le choix à l'utilisateur entre des variables de sortie elliptiques (a, λ, z, ζ) dans le repère équatorial¹ jovien de l'intégration numérique dans le cas **iv=0**, ou des coordonnées cartésiennes $(x, y, z; vx, vy, vz)$ dans le repère jovicentrique équatorial J2000, dans le cas **iv=1**.

En Sortie:

ELEM ce sont les six variables elliptiques ou cartésiennes suivant la valeur entière de l'option **iv**.

1. Il s'agit du repère équatorial jovien dans l'intégration numérique. Ce repère est d'axes fixes, dans la mesure où nous avons choisi de ne pas introduire la précession de Jupiter.

Conclusion

Nous avons élaboré un modèle physique très détaillé du système galiléen, tirant partie des valeurs fournies par les sondes spatiales Voyager et Galileo. L'importance d'une grande quantité de perturbations généralement négligées dans les modèles a été estimée. Nous avons pu mettre en évidence, entre autres, l'influence de l'aplatissement des satellites. Notre modèle a été ajusté sur un total de 6282 observations incluant les campagnes PHEMU de 1985 et 1991, le rendant apte à fournir des éphémérides très précises, estimées à quelques dizaines de kilomètres sur la position des satellites. L'utilisation de méthodes issues du traitement du signal telles que l'analyse en fréquence et le filtrage nous a permis d'obtenir une représentation fréquentielle du système, rendant notre modèle utilisable sur un temps très long (plusieurs milliers d'années). Une première version des éphémérides du système galiléen par notre méthode est d'ores et déjà disponible. Celle-ci est appelée à évoluer encore de par le nombre d'observations utilisées ainsi que la qualité de la représentation fréquentielle. De plus, la reconnaissance des fréquences comme combinaison linéaire de fréquences fondamentales du système est en cours d'aboutir, rendant notre solution sous une forme analytique.

Enfin, comme annoncé dès le début de notre travail, les formulations analytiques et outils numériques développés dans notre étude ont été conçus de façon très générale, les rendant ainsi applicables à d'autres systèmes.

Annexes

Annexe A

Caractéristiques de la Version 1.0

Dans cette annexe, nous donnons les valeurs des constantes du modèle utilisées dans l'intégration numérique, après ajustement aux observations (voir le chapitre 3 de la partie II). Nous donnons également les valeurs finales des amplitudes, fréquences et phases retenues après l'analyse en fréquence des séries échantillonnées, et qui caractérisent la version 1.0.

A.1 Valeurs des constantes du modèle

Nous ne donnons ici que les valeurs qui ont été ajustées aux observations. On trouvera les autres valeurs (restées constantes), dans la table des constantes page 15.

Les valeurs des angles ψ et I orientant le pôle jovien dans l'espace sont de

$$\begin{aligned}\psi &= 358.071521513603\text{d}0 \\ I &= 25.5020350505248\text{d}0\end{aligned}$$

conditions initiales	en x	en y	en z
position Io	4.47363986609809d-04	2.51992261541284d-03	1.20666577657481d-03
position Europe	4.08493993036867d-03	-1.66452150395293d-03	-7.66912877249173d-04
position Ganymède	6.92325161769953d-03	1.60157809530108d-03	8.66031375274386d-04
position Callisto	1.15719077286146d-02	-4.31243499298343d-03	-1.91375554870414d-03
vitesse Io	-9.85335726033762d-03	1.46650741122820d-03	5.44438656632810d-04
vitesse Europe	3.18687915136413d-03	6.55402514600143d-03	3.18108608853749d-03
vitesse Ganymède	-1.59588129566993d-03	5.50383104387081d-03	2.57262800829925d-03
vitesse Callisto	1.81164574483487d-03	3.97863637727101d-03	1.91423965239883d-03

TAB. A.1 – Valeur des conditions initiales en ua et ua/j , pour respectivement les composantes des positions et des vitesses.

N_1	3.55155228371226d0
N_2	1.76932271096441d0
N_3	0.87820792458909d0
N_4	0.37648623356099d0

TAB. A.2 – Valeur des moyen mouvement moyens en radians par jour.

A.2 Valeur des amplitudes, fréquences et phases

Voici à présent les valeurs numériques des séries déterminées par l'analyse en fréquence et présentes dans les fichiers `AFCPx-1-0.dat` et `AFx-1-0.dat`. Ces séries calculées dans les routines `BNCP` et `BNLP` pour respectivement les courtes périodes et les longues périodes.

On remarquera qu'apparaissent parfois des longues périodes dans les tableaux des courtes périodes. Il s'agit là de fréquences restées non analysées lors de l'étude des longues périodes, et qui ont pu être déterminées lors de l'analyse des courtes périodes.

Par ailleurs, afin de ne pas alourdir les tableaux qui suivent, nous nous sommes limités aux termes d'amplitude supérieure à 500 mètres.

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
<i>a</i>			
422030.686336	.000000	.00000000	.000000
<i>l</i>			
40.653261	462.514783	.01358483	-1.157266
40.653261	-462.514783	-.01358483	1.157266
20.298838	482.056137	.01303414	-.176852
20.298838	-482.056137	-.01303414	.176852
22.244006	-2059.601662	-.00305068	2.572831
22.244006	2059.601662	.00305068	-2.572831
11.667269	-485.603284	-.01293893	-1.458768
11.667269	485.603284	.01293893	1.458768
7.857317	-4332.939148	-.00145010	-2.108667
7.857317	4332.939148	.00145010	2.108667
7.996617	403.515434	.01557112	-2.581243
7.996617	-403.515434	-.01557112	2.581243
4.940835	254.634490	.02467531	1.733977
4.940835	-254.634490	-.02467531	-1.733976
3.349243	66002.498861	.00009520	-.065510
3.349243	-66002.498843	-.00009520	.065510
1.710732	11429.088438	.00054975	-2.034399
1.710732	-11429.088438	-.00054975	2.034399
1.841462	-14133.229940	-.00044457	-.741631
1.841462	14133.229940	.00044457	.741631
1.597885	-9692.252471	-.00064827	-.991804
1.597885	9692.252471	.00064827	.991804
1.100350	274.022844	.02292942	2.833984
1.100350	-274.022844	-.02292942	-2.833984
1.122726	-2166.518892	-.00290013	.118487
1.122726	2166.518892	.00290013	-.118487

TAB. A.3 – Longues périodes pour *Io*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
z			
1751.885294	-486.809676	-.01290686	2.009025
14.751440	49367.390480	.00012727	.261407
8.361994	195949.115865	.00003207	1.896785
5.600437	2358.328472	.00266425	.998421
2.205249	9267.813960	.00067796	2.428502
.930982	-237.175682	-.02649169	-1.546347
.644463	2265.743261	.00277312	-1.831004
.603635	-637.458735	-.00985661	-2.000303
ζ			
151.918208	-2714.006378	-.00231510	.049039
38.134708	-11038.502126	-.00056921	2.090611
6.948333	-50300.482352	-.00012491	-1.804666
-5.539773	.000000	.00000000	-3.141579
2.363674	-205594.470554	-.00003056	2.901561
1.512293	-248.893062	-.02524452	1.927435
1.020139	2166.340625	.00290037	2.301643

TAB. A.4 – Longues périodes pour *Io*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
a			
5.699862	1.762732	3.56445915	-2.643910
5.699862	-1.762732	-3.56445915	2.643910
1.289067	-3.525463	-1.78222958	-1.819641
1.289067	3.525463	1.78222958	1.819641
1.353115	.881366	7.12891830	.995518
1.353115	-.881366	-7.12891830	-.995518
-.728413	.000000	.00000000	-3.141593
.709050	-.783436	-8.02003309	2.807196
.709050	.783436	8.02003309	-2.807196
.689618	-.587577	-10.69337746	1.648529
.689618	.587577	10.69337746	-1.648529
.760900	.705093	8.91114788	2.815019
.760900	-.705093	-8.91114788	-2.815019

TAB. A.5 – Courtes périodes de *Io*

amplitude <i>km</i>	période <i>j</i>	fréquence j^{-1}	phase <i>rd</i>
<i>l</i>			
610315.840767	.000000	.00000000	.000000
10.626401	1.762732	3.56445909	-1.071383
10.626401	-1.762732	-3.56445909	1.071383
9.377788	3.525463	1.78222958	-2.892748
9.377788	-3.525463	-1.78222958	2.892749
2.300368	2.350309	2.67334436	2.729459
2.300368	-2.350309	-2.67334436	-2.729459
2.512132	.881366	7.12891831	2.565982
2.512132	-.881366	-7.12891831	-2.565982
1.214938	-.783436	-8.02003309	1.236399
1.214938	.783436	8.02003309	-1.236399
1.296748	-.705093	-8.91114788	1.897376
1.296748	.705093	8.91114788	-1.897376
1.080002	-.587577	-10.69337746	.077726
1.080002	.587577	10.69337746	-.077726
.795192	1.175154	5.34668873	.746548
.795192	-1.175154	-5.34668873	-.746548
.661661	249.775779	.02515530	-2.488773
.661661	-249.775779	-.02515530	2.488773
<i>z</i>			
264.213167	1.769138	3.55155228	1.446138
4.086068	3.551181	1.76932271	2.768090
4.167531	-1.756372	-3.57736602	.450740
3.505519	7.154553	.87820792	-2.854118
1.939287	-1.406112	-4.46848081	-2.029851
2.516992	.882964	7.11601144	-1.197783
1.964088	-1.172325	-5.35959560	-1.368879
1.578611	-.879773	-7.14182517	3.094667
1.591521	-3.500116	-1.79513644	2.270387
.789126	-2.245134	-2.79857979	-2.170814
.557697	-.704073	-8.92405475	1.275019
.536298	16.686534	.37654228	1.972452
.501630	1.177998	5.33378186	.124184
<i>ζ</i>			

TAB. A.6 – Courtes périodes de *Io*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
<i>a</i>			
671262.329152	.000000	.00000000	.000000
1.343835	482.056142	.01303414	1.393970
1.343835	-482.056142	-.01303414	-1.393970
.713094	485.603287	.01293893	3.029632
.713094	-485.603287	-.01293893	-3.029632
.538454	-462.514907	-.01358483	2.726229
.538454	462.514907	.01358483	-2.726229

Tab. A.7 – Longues périodes pour Europe

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
l			
285.230426	-482.056142	-.01303414	-2.964767
285.230426	482.056142	.01303414	2.964767
152.646328	485.603287	.01293893	-1.682757
152.646328	-485.603287	-.01293893	1.682757
103.249450	-462.514912	-.01358483	1.155356
103.249450	462.514912	.01358483	-1.155356
78.068972	2059.391483	.00305099	.471937
78.068972	-2059.391483	-.00305099	-.471937
61.557044	-4332.938719	-.00145010	-2.108663
61.557044	4332.938719	.00145010	2.108663
19.235850	403.515440	.01557111	.560422
19.235850	-403.515440	-.01557111	-.560422
12.024453	-211891.879189	-.00002965	1.654892
12.024453	211891.879189	.00002965	-1.654892
10.940523	50284.999738	.00012495	-.493680
10.940523	-50284.999736	-.00012495	.493680
6.909598	-2166.517127	-.00290013	-3.052993
6.909598	2166.517127	.00290013	3.052993
5.642460	250.130732	.02511961	.980052
5.642460	-250.130732	-.02511961	-.980052
4.774502	-9676.800001	-.00064930	2.613663
4.774502	9676.800001	.00064930	-2.613663
4.716826	254.634490	.02467531	-1.407614
4.716826	-254.634490	-.02467531	1.407614
3.297999	11363.928747	.00055291	.566739
3.297999	-11363.928747	-.00055291	-.566739
3.614236	2078.238926	.00302332	-.033178
3.614236	-2078.238926	-.00302332	.033178
3.290950	67185.215623	.00009352	.107711
3.290950	-67185.215622	-.00009352	-.107711
2.607585	241.911585	.02597306	-.289125
2.607585	-241.911585	-.02597306	.289125
3.054869	248.893870	.02524444	-1.047053
3.054869	-248.893870	-.02524444	1.047053
2.557749	274.022854	.02292942	-.307604
2.557749	-274.022854	-.02292942	.307604

TABLE A.8 – Longues périodes pour Europe

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
z			
6282.284609	-486.809676	-.01290686	-1.132568
133.064763	9267.640426	.00067797	-.719546
142.277628	49367.383804	.00012727	.261402
81.194873	195989.623405	.00003206	1.899204
9.249061	-242.210624	-.02594100	-2.526552
4.960686	-243.102867	-.02584579	2.120973
3.490722	-237.175714	-.02649169	1.593405
ζ			
2710.525705	-11038.501664	-.00056921	2.090618
147.875006	-50300.481880	-.00012491	-1.804666
-83.261182	.000000	.00000000	-3.141504
40.040460	-205591.789555	-.00003056	2.901658
8.076884	-2714.005874	-.00231510	-3.092354
6.905848	-248.893062	-.02524452	-1.214157
4.871630	2166.340984	.00290037	2.301789
1.234100	-4333.058192	-.00145006	-1.266585
1.000023	-244.588406	-.02568881	-.460492
.592231	1810.916096	.00346962	-.522952
.584847	4332.827030	.00145014	-2.991459
.572799	1444.256322	.00435046	2.837882

TAB. A.9 – Longues périodes pour Europe

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
<i>a</i>			
32.345806	3.525463	1.78222958	1.819638
32.345806	-3.525463	-1.78222958	-1.819638
11.994869	-2.350309	-2.67334436	1.982924
11.994869	2.350309	2.67334436	-1.982924
7.623109	-1.175154	-5.34668873	-2.317333
7.623109	1.175154	5.34668873	2.317333
6.916919	-7.050927	-.89111479	.660975
6.916919	7.050927	.89111479	-.660975
3.826034	-1.410185	-4.45557394	-2.978312
3.826034	1.410185	4.45557394	2.978312
3.916962	-1.762732	-3.56445915	-.497678
3.916962	1.762732	3.56445915	.497678
2.040962	-.705093	-8.91114791	.327181
2.040962	.705093	8.91114791	-.327181
2.333036	-.881366	-7.12891833	2.146957
2.333036	.881366	7.12891833	-2.146957
1.308687	1.007275	6.23780352	1.656368
1.308687	-1.007275	-6.23780352	-1.656368
1.737025	2.255536	2.78567292	-.022345
1.737025	-2.255536	-2.78567292	.022345
-1.157955	.000000	.00000000	3.141593
.919084	.587577	10.69337721	1.500497
.919084	-.587577	-10.69337721	-1.500497
.634772	-.503638	-12.47560702	2.970176
.634772	.503638	12.47560702	-2.970176
.517028	1.503691	4.17850942	-.034311
.517028	-1.503691	-4.17850942	.034311

TAB. A.10 – *Courtes périodes de Europe*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
l			
-250729.046829	.000000	.00000000	3.141593
109.044546	3.525463	1.78222958	.248846
109.044546	-3.525463	-1.78222958	-.248846
48.142386	7.050927	.89111479	.909821
48.142386	-7.050927	-.89111479	-.909821
25.908689	2.350309	2.67334436	-.412128
25.908689	-2.350309	-2.67334436	.412128
14.652802	1.762732	3.56445915	2.068480
14.652802	-1.762732	-3.56445915	-2.068480
14.994874	1.175154	5.34668873	-2.395059
14.994874	-1.175154	-5.34668873	2.395059
6.467819	1.410185	4.45557394	-1.734077
6.467819	-1.410185	-4.45557394	1.734077
4.428548	.881366	7.12891829	-.574978
4.428548	-.881366	-7.12891829	.574978
3.269542	-.705092	-8.91115104	-1.160366
3.269542	.705092	8.91115104	1.160366
3.490959	-2.255536	-2.78567292	-1.548437
3.490959	2.255536	2.78567292	1.548437
2.558528	-274.033155	-.02292856	2.720987
2.558517	274.033160	.02292856	-2.721120
1.951063	1.007275	6.23780352	-3.056026
1.951063	-1.007275	-6.23780352	3.056026
2.162053	240.803640	.02609257	-2.830456
2.162264	-240.789350	-.02609412	2.851242
1.617693	-4.511072	-1.39283646	-1.559632
1.617693	4.511072	1.39283646	1.559632
1.434100	-.587577	-10.69337789	-3.051243
1.434100	.587577	10.69337789	3.051243
1.574178	2465.504504	.00254844	1.947308
1.574178	-2465.504593	-.00254844	-1.947309
.917554	.503638	12.47560710	-1.401730
.917554	-.503638	-12.47560710	1.401730
1.003942	-398.542157	-.01576542	-.104243
1.003943	398.542164	.01576542	.104251
1.282015	-249.149829	-.02521850	2.742617

TAB. A.11 – *Courtes périodes de Europe*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
z			
200.639955	3.551181	1.76932271	-.373502
55.280140	1.769138	3.55155228	1.446138
56.187492	-6.950260	-.90402166	1.609421
18.724629	-3.500116	-1.79513644	-.871184
21.205625	7.154553	.87820792	-2.854120
19.768921	-1.756372	-3.57736602	-2.690834
9.730534	-2.339016	-2.68625123	2.931371
7.274770	-6.182107	-1.01635022	-.351150
5.516152	-1.172325	-5.35959560	1.772866
4.203330	-.879773	-7.14182481	-.057905
2.772198	-1.406112	-4.46848081	-2.029866
2.920461	16.686536	.37654221	1.973372
2.824893	1.414264	4.44272306	3.120569
1.836408	-.704073	-8.92405469	-1.868112
2.483083	2.361711	2.66043750	2.107116
1.474409	9233.839177	.00068045	-.460108
1.364748	-2.608011	-2.40918706	-.327523
1.802844	397.494372	.01580698	-2.385952
1.201164	-.586869	-10.70628432	2.596969
1.548903	.882964	7.11601144	1.943834
1.218955	1.009364	6.22489665	2.604807
1.108849	1.177998	5.33378186	-3.017395
.885861	-1.005195	-6.25071038	-.707893
.968430	-3.556902	-1.76647691	-.281828
.785394	-437.839780	-.01435042	1.870547
1.052893	-548.591895	-.01145330	3.032627
.628505	-.503117	-12.48851381	.774698
.647127	4294.572999	.00146305	-.906923
.601401	.588285	10.68051215	-1.300516
ζ			

TAB. A.12 – *Courtes périodes de Europe*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
<i>a</i>			
1070622.862474	.000000	.00000000	.000000
.819858	462.514840	.01358483	.414369
.819858	-462.514840	-.01358483	-.414369
.830619	-482.056142	-.01303414	1.747618
.830619	482.056142	.01303414	-1.747618
<i>l</i>			
123.699942	4332.938867	.00145010	2.108692
123.699942	-4332.938867	-.00145010	-2.108692
96.997570	-482.056142	-.01303414	.176820
96.997570	482.056142	.01303414	-.176820
81.013351	462.514844	.01358483	1.985233
81.013351	-462.514844	-.01358483	-1.985233
51.130511	485.603288	.01293893	1.458850
51.130511	-485.603288	-.01293893	-1.458850
29.748135	211841.966812	.00002966	-1.682049
29.748135	-211841.966812	-.00002966	1.682049
26.212024	-50284.923030	-.00012495	.494709
26.212024	50284.923030	.00012495	-.494709
10.659683	2059.533067	.00305078	-2.604545
10.659683	-2059.533067	-.00305078	2.604545
8.271725	9642.134896	.00065164	2.583422
8.271725	-9642.134896	-.00065164	-2.583422
7.188029	-11287.602808	-.00055664	-.936910
7.188029	11287.602808	.00055664	.936910
4.390510	-67842.298688	-.00009261	-.100957
4.390510	67842.298690	.00009261	.100957
3.435028	2166.517752	.00290013	3.080020
3.435028	-2166.517752	-.00290013	-3.080020
2.810611	-254.634490	-.02467531	1.407618
2.810611	254.634490	.02467531	-1.407618
3.026620	14015.831549	.00044829	2.903814
3.026620	-14015.831549	-.00044829	-2.903814

TAB. A.13 – Longues périodes pour Ganymède

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
z			
1515.966733	49367.403698	.00012727	.261418
825.256974	195955.054510	.00003206	1.897161
634.441589	-486.809676	-.01290686	2.009025
7.511902	-242.210624	-.02594100	.615041
7.576828	9270.901899	.00067773	2.549498
5.123921	2265.735162	.00277313	1.307398
4.082266	-243.102867	-.02584579	-1.020602
-2.758831	.000000	.00000000	-3.133678
2.425163	4332.665589	.00145019	.788317
2.476995	2190.534778	.00286833	-.326073
.778649	-237.175795	-.02649168	-1.552825
ζ			
1707.745448	-50300.482900	-.00012491	-1.804666
-681.623975	.000000	.00000000	-3.141589
380.095510	-205595.254850	-.00003056	2.901574
154.279217	-11038.503299	-.00056921	-1.051001
16.835268	2166.341856	.00290037	2.302182
2.692877	-4333.065708	-.00145006	-1.267395
2.187821	4332.817404	.00145014	-2.991141
1.919976	1444.256991	.00435046	2.838556
1.456660	-248.893062	-.02524452	1.927436
1.067283	-2714.005862	-.00231510	-3.091751
.964247	2076.865387	.00302532	-2.910144

TAB. A.14 – Longues périodes pour Ganymède

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
<i>a</i>			
104.197153	-2.350309	-2.67334436	-1.158663
104.197153	2.350309	2.67334436	1.158663
48.244038	-7.050927	-.89111479	.660974
48.244038	7.050927	.89111479	-.660974
17.189241	-6.261624	-1.00344335	-1.299597
17.189241	6.261624	1.00344335	1.299597
9.136200	-3.525463	-1.78222958	-1.819644
9.136200	3.525463	1.78222958	1.819644
8.196464	4.174416	1.50516505	1.948677
8.196464	-4.174416	-1.50516505	-1.948677
5.246657	-12.523249	-.50172167	-.649786
5.246657	12.523249	.50172167	.649786
4.098009	-3.130812	-2.00688670	-2.599215
4.098009	3.130812	2.00688670	2.599215
2.716858	-1.762732	-3.56445915	-.497693
2.716858	1.762732	3.56445915	.497693
2.951834	1.175154	5.34668873	-.824261
2.951834	-1.175154	-5.34668873	.824261
-1.847213	.000000	.00000000	-3.141593
2.103692	-2.504650	-2.50860838	3.034172
2.103692	2.504650	2.50860838	-3.034172
1.555255	1.410185	4.45557394	-.163280
1.555255	-1.410185	-4.45557394	.163280
2.176272	-3.583193	-1.75351574	-2.012358
2.176272	3.583193	1.75351574	2.012358
1.098780	2.087208	3.01033005	-2.384345
1.098780	-2.087208	-3.01033005	2.384345
.897064	-1.007275	-6.23780352	1.485222
.897064	1.007275	6.23780352	-1.485222
.745673	10.021090	.62699620	.968146
.745673	-10.021090	-.62699620	-.968146
.580956	1.789036	3.51205173	-1.734529
.580956	-1.789036	-3.51205173	1.734529
.550770	50.139809	.12531331	.166444
.550770	-50.139809	-.12531331	-.166444

TAB. A.15 – *Courtes périodes de Ganymède*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
l			
307749.090094	.000000	.00000000	.000000
62.295309	-2.350309	-2.67334436	.412134
62.295309	2.350309	2.67334436	-.412134
43.641103	7.050927	.89111479	-2.231772
43.641103	-7.050927	-.89111479	2.231772
42.890201	-6.261624	-1.00344335	-2.870393
42.890201	6.261624	1.00344335	2.870393
32.494280	-12.523249	-.50172167	-2.220585
32.494280	12.523249	.50172167	2.220586
22.888582	-3.525463	-1.78222958	2.892745
22.888582	3.525463	1.78222958	-2.892745
16.453368	4.174416	1.50516501	-2.762545
16.453368	-4.174416	-1.50516501	2.762545
7.207910	-3.130812	-2.00688670	2.113183
7.207910	3.130812	2.00688670	-2.113183
7.727017	-50.141956	-.12530794	-1.764326
7.727017	50.141956	.12530794	1.764326
4.708340	-1.762732	-3.56445915	-2.068491
4.708340	1.762732	3.56445915	2.068491
5.113510	1.175154	5.34668873	.746533
5.113510	-1.175154	-5.34668873	-.746533
3.384339	-2.504650	-2.50860837	1.463365
3.384339	2.504650	2.50860837	-1.463365
3.808542	-3.583193	-1.75351577	2.700314
3.808542	3.583193	1.75351577	-2.700314
2.511361	-10.021077	-.62699698	-2.538263
2.511361	10.021077	.62699698	2.538263
2.517076	1.410185	4.45557394	1.407517
2.517076	-1.410185	-4.45557394	-1.407517
2.266996	55.935784	.11232855	-2.751910
2.266996	-55.935784	-.11232855	2.751910
2.071963	249.862861	.02514654	-2.445689
2.071963	-249.862861	-.02514654	2.445689
1.657207	2.087208	3.01033005	-.813562
1.657207	-2.087208	-3.01033005	.813562

TAB. A.16 – Courtes périodes de Ganymède

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
z			
219.015815	-50.170999	-.12523540	-1.012291
191.116935	7.154553	.87820791	.287553
121.194407	1.769138	3.55155229	1.446110
70.531074	-3.500116	-1.79513647	-.870994
53.216570	3.551181	1.76932271	-.373477
33.873700	-6.950260	-.90402168	-1.531980
30.808267	-10.021716	-.62695702	-1.662574
19.462127	16.689016	.37648626	2.779215
11.299907	-5.566850	-1.12867872	-2.312119
6.538283	-7.178259	-.87530765	-1.725683
6.168104	-1.406112	-4.46848085	1.112062
6.136018	-2.339016	-2.68625127	-.209921
4.988781	-3.853768	-1.63040039	-2.962035
3.169698	-25.081125	-.25051449	-1.286704
3.231271	25.012003	.25120681	2.505940
3.221823	-1.756372	-3.57736606	.451106
3.745126	3.339187	1.88165122	1.587404
2.226888	2.636260	2.38337060	2.257839
2.380750	-2.946916	-2.13212205	2.671251
1.277118	2.177809	2.88509456	2.887170
1.503986	4.553265	1.37992957	-2.204110
1.197066	-1.172325	-5.35959565	1.773145
1.107345	-7.190161	-.87385881	-2.714722
1.185001	-2.385557	-2.63384372	2.021358
.962827	-.879773	-7.14182522	-.046553
.893881	-8.352679	-.75223597	-1.937186
.712584	1.855189	3.38681619	-2.745833
.768433	2.361711	2.66043750	2.107082
.678735	1.414282	4.44266709	.785039
.673038	.882964	7.11601147	-1.198030
.605438	-2.003844	-3.13556538	1.371465
.656607	1.009364	6.22489667	-.536963
.724350	2.387480	2.63172299	2.304274
.557478	-1.005195	-6.25071045	2.434199
ζ			

TAB. A.17 – *Courtes périodes de Ganymède*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
<i>a</i>			
1883136.786260	.000000	.00000000	.000000
<i>l</i>			
525.964634	4332.938603	.00145010	2.108787
525.964634	-4332.938603	-.00145010	-2.108787
362.055986	-211707.555652	-.00002968	-1.375514
362.055986	211707.555652	.00002968	1.375514
31.570300	50291.159284	.00012494	2.651756
31.570300	-50291.159280	-.00012494	-2.651756
17.511243	2166.515490	.00290013	2.989626
17.511243	-2166.515490	-.00290013	-2.989626
16.026028	-9641.987347	-.00065165	.563175
16.026028	9641.987347	.00065165	-.563175
14.109841	11291.361938	.00055646	-2.064697
14.109841	-11291.361938	-.00055646	2.064697
11.394971	67405.451668	.00009321	-2.964883
11.394971	-67405.451660	-.00009321	2.964883

TAB. A.18 – Longues périodes pour *Callisto*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
z			
13884.428305	195950.745193	.00003207	1.896926
291.301333	49367.288207	.00012727	-2.880144
101.779614	2190.529511	.00286834	-.327758
-36.720445	.000000	.00000000	3.141185
17.025709	4332.682191	.00145018	.789919
11.371539	1454.716007	.00431918	-.020534
5.312033	-198438.440396	-.00003166	-.304617
5.005251	4430.386216	.00141820	2.291032
3.071799	4238.971433	.00148224	2.406576
3.041957	-4430.930255	-.00141803	-1.784023
2.244744	2265.731598	.00277314	-1.835619
1.669579	9192.217306	.00068353	-.156668
.851019	2164.875213	.00290233	.627441
.883709	10677.467217	.00058845	-1.727249
1.001740	1089.216989	.00576853	.750063
ζ			
-5398.622271	.000000	.00000000	-3.141588
4272.729345	-205593.264145	-.00003056	2.901737
491.019213	-50300.471257	-.00012491	1.336923
62.519045	2166.334076	.00290038	2.298955
9.361003	-4333.060342	-.00145006	-1.266728
9.299999	-11038.567920	-.00056920	-1.052052
8.274165	4332.829384	.00145013	-2.986728
7.083844	1444.256168	.00435046	2.837653
5.866723	2143.479703	.00293130	-1.435825
.882553	-4242.900512	-.00148087	2.425351
.898185	4426.190904	.00141955	.271404
.660009	1433.991267	.00438161	-.958324
.659325	2076.871142	.00302531	.234379
.625815	1083.207406	.00580054	-2.900460

Tab. A.19 – Longues périodes pour Callisto

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
<i>a</i>			
268.917670	12.523249	.50172167	.649801
268.917670	-12.523249	-.50172167	-.649801
206.297458	1.978915	3.17506604	1.808468
206.297458	-1.978915	-3.17506604	-1.808468
96.303048	-4.511072	-1.39283646	.011177
96.303048	4.511072	1.39283646	-.011177
31.222455	-6.261624	-1.00344334	1.842016
31.222455	6.261624	1.00344334	-1.842016
20.872674	-8.376772	-.75007237	-.712910
20.872674	8.376772	.75007237	.712910
14.945924	4.174416	1.50516502	-1.192188
14.945924	-4.174416	-1.50516502	1.192188
7.487471	3.130812	2.00688670	-.542379
7.487471	-3.130812	-2.00688670	.542379
-3.252044	.000000	.00000000	-3.141593
3.843449	2.504650	2.50860838	.107432
3.843449	-2.504650	-2.50860838	-.107432
3.555678	8.392992	.74862286	1.715001
3.555678	-8.392992	-.74862286	-1.715001
2.043664	-10.021089	-.62699628	2.173477
2.043664	10.021089	.62699628	-2.173477
2.869262	-16.690664	-.37644908	-.331142
2.869262	16.690664	.37644908	.331142
2.007291	-2.087208	-3.01033005	-.757247
2.007291	2.087208	3.01033005	.757247
1.676618	-2.245107	-2.79861287	-1.471703
1.676618	2.245107	2.79861287	1.471703
1.289530	50.149875	.12528815	-.763174
1.289530	-50.149875	-.12528815	.763174
1.061208	-1.789036	-3.51205173	-1.407065
1.061208	1.789036	3.51205173	1.407065
1.280338	-2.255536	-2.78567286	-3.120750
1.280338	2.255536	2.78567286	3.120750
1.016041	-5.566557	-1.12873811	1.811535
1.016041	5.566557	1.12873811	-1.811535
.827366	6.181905	1.01638339	-.346631
.827366	-6.181905	-1.01638339	.346632
.806772	-.932289	-6.73952282	.737454
.806772	.932289	6.73952282	-.737454

TAB. A.20 – *Courtes périodes de Callisto*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
l			
-681996.174976	.000000	.00000000	3.141593
207.630132	12.523249	.50172167	-.920998
207.630132	-12.523249	-.50172167	.920998
176.816673	-1.978915	-3.17506604	-.237673
176.816673	1.978915	3.17506604	.237673
72.210481	-4.511072	-1.39283646	1.581972
72.210481	4.511072	1.39283646	-1.581972
70.340510	6.261624	1.00344335	-.271201
70.340510	-6.261624	-1.00344335	.271201
36.563247	8.376772	.75007237	2.283704
36.563247	-8.376772	-.75007237	-2.283704
27.591056	4.174416	1.50516502	.378604
27.591056	-4.174416	-1.50516502	-.378604
12.233628	3.130812	2.00688670	1.028410
12.233628	-3.130812	-2.00688670	-1.028410
13.924498	-50.142105	-.12530757	1.375405
13.924498	50.142105	.12530757	-1.375405
6.234275	-8.392991	-.74862286	2.997470
6.234275	8.392991	.74862286	-2.997470
5.798277	-2.504650	-2.50860837	-1.678219
5.798277	2.504650	2.50860837	1.678219
4.397784	-10.021077	-.62699702	.603371
4.397784	10.021077	.62699702	-.603371
3.688795	55.935785	.11232854	.389673
3.688795	-55.935785	-.11232854	-.389673

TAB. A.21 – *Courtes périodes de Callisto*

amplitude km	période j	fréquence j^{-1}	phase rd
z			
389.055003	16.689016	.37648625	-.362388
299.398818	7.154553	.87820791	.287546
279.843614	1.769138	3.55155229	1.446102
119.593164	3.551181	1.76932270	-.373461
112.865755	-2.245134	-2.79857978	-2.170855
92.202433	-10.021716	-.62695706	1.479362
62.831895	-16.818579	-.37358599	-1.075807
55.029503	-50.170987	-.12523543	-1.012214
55.708925	-6.182107	-1.01635020	-.351283
34.561408	-5.566850	-1.12867872	.829463
15.435599	-3.853768	-1.63040038	.179555
10.689865	-16.884048	-.37213738	-2.062886
9.261723	-25.081107	-.25051467	1.855434
6.949783	5.577327	1.12655846	.351278
7.416955	-2.946916	-2.13212205	-.470349
5.176287	25.012818	.25119862	-.609666
3.709371	-2.385557	-2.63384371	-1.120247
3.632889	8.344957	.75293199	.003655
2.679386	-8.352678	-.75223601	1.204439
3.516596	4.553265	1.37992955	-2.204063
3.143583	3.339187	1.88165123	-1.554218
2.643639	-2.608010	-2.40918721	2.806473
1.901801	-2.003844	-3.13556538	-1.770140
2.033103	2.636258	2.38337289	-.904305
1.831436	-12.524186	-.50168411	1.773660
1.376724	-2.594077	-2.42212757	-1.825305
1.268333	-5.010684	-1.25395756	.554251
1.193606	2.177809	2.88509456	-.254403
1.114071	16.625067	.37793443	1.794643
1.553249	-16.753063	-.37504695	3.141041
1.513411	.882954	7.11609482	-1.942262
.991624	-1.727437	-3.63728705	-2.420033
1.160638	-1.978936	-3.17503211	.625361
1.257790	-16.950075	-.37068777	-3.050508
1.182202	5.584509	1.12510967	1.339545
.780659	12.522495	.50175188	-.045278
.678741	1.855189	3.38681622	.395497
.865465	10967.734078	.00057288	-.582522
.904673	16.753507	.37503702	-2.511677
ζ			
.982765	73389.634443	.00008561	-.266841

TAB. A.22 – *Courtes périodes de Callisto*

Annexe B

Introduction des Effets de Marées

Le travail présenté dans cette annexe, effectué avec la collaboration de G. Tobie (laboratoire de planétologie, université de Nantes), constitue une première étape dans l'introduction et l'étude des effets de marées au sein de notre modèle. Nous présenterons essentiellement comment ces effets peuvent être introduit dans notre code numérique, et quelles différences sur les positions des satellites sont à en attendre. Pour cela, la dissipation d'énergie à l'intérieur des satellites et l'échange d'énergie et de moment angulaire entre Jupiter et ses satellites doivent être considérés. Ces effets sont directement liés à des constantes physiques encore mal connues. En particulier, nous verrons que les mouvements orbitaux des satellites peuvent être affectés de différentes manières, suivant les valeurs fixées pour ces constantes.

B.1 Motivation

L'étude des effets de marées n'intéresse pas seulement les astronomes, mais également les planétologues. En effet, les effets de marées sont invoqués pour expliquer certaines structures observées à la surface des satellites glace, notamment Europe. De plus, la dissipation de marée constitue une source d'énergie importante qui serait en mesure d'expliquer le volcanisme intense de Io et l'existence d'un océan sous la surface d'Europe.

B.1.1 La structure interne des satellites

Les satellites étant des solides déformables, l'excentricité et l'inclinaison de leur orbite induisent une déformation périodique du satellite. En raison des propriétés visco-élastiques des intérieurs satellitaires, une partie de l'énergie de déformation est dissipée par friction visqueuse. La déformation globale du satellite dépend principalement de sa structure interne et sa dissipation de son état thermique. Deux paramètres k_2 et Q permettent de décrire, au premier ordre, respectivement la déformation du satellite et la fraction d'énergie de marée dissipée. Le paramètre k_2 est le nombre de Love qui relie le potentiel induit par la déformation du satellite au potentiel de marée généré par Jupiter. Le paramètre Q est le facteur de dissipation global d'expression $Q = 2\pi E/\Delta E$, où E est la quantité

d'énergie dissipée pendant un cycle.

Nous avons cherché dans ce travail une borne supérieure des effets dissipatifs, afin d'anticiper les variations maximales en position que l'on peut attendre. Les valeurs des nombre de Love et fonction de dissipation que nous avons utilisées sont données en caractères gras dans le tableau B.1.

	Io	Europe	Ganymède	Callisto	Jupiter
k_2	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5
Q	10 (100)	15 (200)	50 (200)	50 (200)	10⁵/10⁴

TAB. B.1 – Valeurs des nombres de Love et fonction de dissipation utilisées dans notre étude (en caractères gras), pour les quatre satellites Galiléen et Jupiter. Les valeurs entre paranthèses correspondent à une dissipation minimale.

Ces valeurs, dans le cas des satellites galiléens sont des valeurs correspondant à une dissipation maximale que l'on peut attendre en l'état de notre connaissance de la composition des satellites.

B.1.2 Les dérives séculaires observées

Différentes valeurs des effets de marées issues de la comparaison d'un modèle du mouvement des satellites aux observations ont pu être estimées. Parmi elles, une évaluation faite par J.H.Lieske (voir [26]), par la comparaison à des éclipses anciennes donne des valeurs négatives des accélérations en longitudes, dont $\dot{n}_1/n_1 = -0.074 \pm 0.087$ (en $10^{-10} an^{-1}$) pour Io. Cela tend à privilégier l'action de marées des satellites sur Jupiter à la dissipation à l'intérieur des satellites. Une évaluation plus récente effectuée par K.Aksnes et F.A.Franklin (voir [1]) en comparant le modèle de Sampson à des observations de phénomènes mutuels donne au contraire une accélération séculaire pour Io de $\dot{n}_1/n_1 = 3.6 \pm 1.0$ (en $10^{-10} an^{-1}$). Comme nous l'avons mis en évidence dans la partie II, la théorie de Sampson-Lieske n'a une précision interne pour une période d'un siècle, que de quelques centaines de kilomètres et semble donc maladaptée pour être utilisée dans la détermination des accélérations séculaires en longitudes des satellites.

B.2 Méthode utilisée

Nous présentons maintenant la méthode que nous avons utilisée pour introduire les effets de marées dans notre modèle.

B.2.1 Les équations de Kaula

Nous avons choisi pour introduire les effets de marées entre Jupiter et ses satellites de reprendre la formulation de Kaula (voir [21]), et utilisée par K.Aksnes et F.A.Franklin

dans [1]. Pour de plus amples détails, on pourra également se reporter à [10]. Dans cette formulation, l'échange d'énergie et de moment angulaire induit par l'action des satellites sur Jupiter se ramène à des variations séculaires sur les variables métriques des éléments elliptiques, et a pour expression (en négligeant les variations en inclinaison)

$$\begin{aligned}\frac{da_i}{dt} &= \frac{3k_2^J n_i m_i (E_r)^5}{Q_J a_i^4 m_0} \left[1 + \frac{51e_i^2}{4} \right] \\ \frac{de_i}{dt} &= \frac{57k_2^J n_i m_i}{8Q_J m_0} \left(\frac{E_r}{a_i} \right)^5 e_i\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

où k_2^J et Q_J sont respectivement le nombre de Love et la fonction de dissipation de Jupiter. Ainsi donc les effets de marées engendrés par les satellites sur Jupiter éloignent les satellites de leur planète, en même temps qu'augmente leur excentricité.

La dissipation d'énergie dans un satellite peut également être introduite par les deux égalités

$$\begin{aligned}\frac{da_i}{dt} &= -\frac{21k_2^{(i)} n_i m_0 (E_r^{(i)})^5}{Q_i m_i a_i^4} e_i^2 \\ \frac{de_i}{dt} &= -\frac{21k_2^{(i)} n_i m_0}{2Q_i m_i} \left(\frac{E_r^{(i)}}{a_i} \right)^5 e_i\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

où $k_2^{(i)}$ et Q_i sont respectivement le nombre de Love et la fonction de dissipation du satellite P_i . Ainsi, la dissipation à l'intérieur des satellites engendre un effet contraire et tend à rapprocher les satellites de Jupiter en même temps que diminue leur excentricité.

La formulation de Kaula utilisant les éléments elliptiques, il serait peu approprié de l'introduire dans le programme `EQVARSOL++.f`, comme pour le cas des perturbations étudiées dans la première partie. Nous allons donc avoir recours aux équations de Gauss.

B.2.2 Les équations de Gauss

Notre démarche va reposer principalement sur une réécriture partielle du programme `EQVARSOL++.f` dans le cadre des équations de Gauss (que l'on peut trouver dans [15]). Ces équations sont identiques aux équations de Lagrange mais dans le cas plus général d'un système non nécessairement conservatif. Ainsi, le système différentiel considéré ne fait pas intervenir un potentiel perturbateur du système U , mais les différentes composantes (R_i, S_i, W_i) dans la base locale (u_i, v_i, k_i) des forces \mathbf{F} agissant sur chacun des satellites P_i . L'intérêt principal de cette méthode est que nous disposons alors d'un modèle numérique prenant en compte toutes les perturbations déjà introduites dans le programme `EQVARSOL++.f`, et précédemment ajusté aux observations.

Rappelons que les équations de Gauss ont pour forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_i}{dt} = 2a_i^2[R_i e_i \sin v_i + S_i(1 + e_i \cos v_i)] \\ \frac{de_i}{dt} = p_i[R_i \sin v_i + S_i(\cos v_i + \cos E_i)] \\ \frac{dI_i}{dt} = r_i W_i \cos(\omega_i + v_i) \\ \frac{d\Omega_i}{dt} = r_i W_i \sin(\omega_i + v_i) \\ \frac{d\omega_i}{dt} = -p_i R_i \cos v_i + (r_i + p_i) S_i \sin v_i - G e_i \cos I_i \frac{d\Omega_i}{dt} \\ \frac{da_i}{dt} = n_i - \frac{1}{\sqrt{\mu_i a_i}} \left[2r_i R_i + G \left(\frac{dv_i}{dt} + \cos I_i \frac{d\Omega_i}{dt} \right) \right] \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

où $p_i = a_i(1 - e_i^2)$.

Ce système différentiel a été programmé pour remplacer celui existant en coordonnées cartésiennes dans le programme `EQVARSOL++ .f`. Le programme résultant, baptisé `gauss .f`, permet donc de reprendre de manière exacte notre modèle numérique initial ajusté aux observations. On peut constater que les équations (B.3) sont singulières en $e = 0$ et $I = 0$. En réalité le cas où l'inclinaison est nulle n'est pas un problème étant donné que nous nous plaçons dans un repère J2000 dont le plan principal est bien différent du plan équatorial jovien. En revanche le cas d'excentricité nulle, semble moins évident. Toutefois, les valeurs des excentricités restent suffisamment élevées pour ne pas occasionner de dérive numérique particulière, comme nous allons le voir dans la sous-section qui suit.

B.2.3 Test numérique

Afin de tester la fiabilité de notre programme réécrit dans les variables elliptiques, nous avons comparé les résultats d'une simulation entre le programme `EQVARSOL++ .f` et le programme `gauss .f` dans lequel les effets de marées (formules B.1 et B.2) ont été retirées. Les différences entre les deux intégrations sont présentées pour les quatre satellites dans le graphe de la figure B.1.

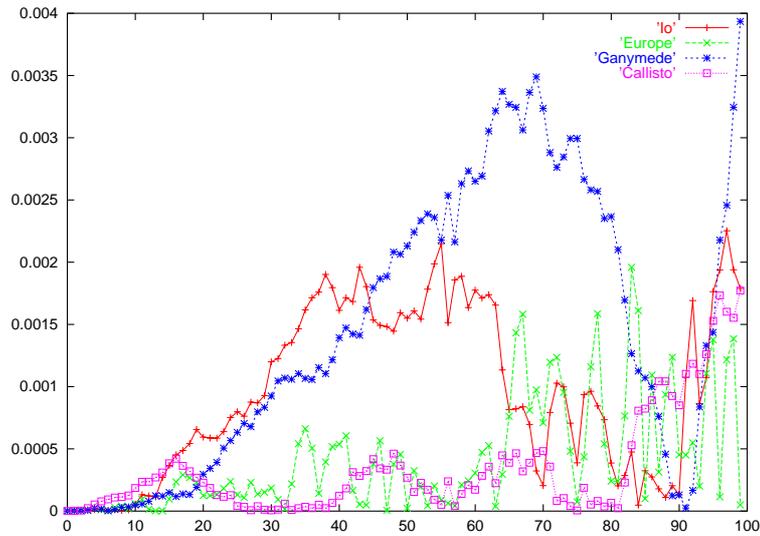


FIG. B.1 – Différences en kilomètres sur le calcul des positions des quatre satellites galiléens entre le programme `EQVARSOL++.f` et le programme `gauss.f`, sur une période d'un siècle.

Comme nous pouvons le constater, les différences entre les deux codes numériques sont de l'ordre de l'erreur numérique de ceux-ci. Nous disposons donc d'un outil performant pour étudier l'influence des effets de marées.

B.3 Résultats

Nous avons effectué trois simulations avec des modèles de marées différents. La première simulation dans laquelle les équations B.1 ne sont pas présentes, et dont la comparaison avec un modèle sans effets de marées est donnée dans le graphe en haut de la figure B.2, montre une accélération de l'ordre de deux milles kilomètres sur Io pour une période d'un siècle. Notons que Ganymède, lui, décelère sous l'effet de la résonance laplacienne (retrouvant en cela ce que nous avons anticipé dans la section 2.1.2 de la page 48).

Les deux autres simulations introduisent en plus de la dissipation des satellites, l'échange d'énergie et de moment angulaire induit par l'action des satellites sur Jupiter. Le graphe en bas à gauche (figure B.2), présente les différences pour une fonction de dissipation de valeur $Q_J = 10^5$, tandis que le graphe en bas à droite introduit une valeur plus faible (et moins réaliste) de $Q_J = 10^4$.

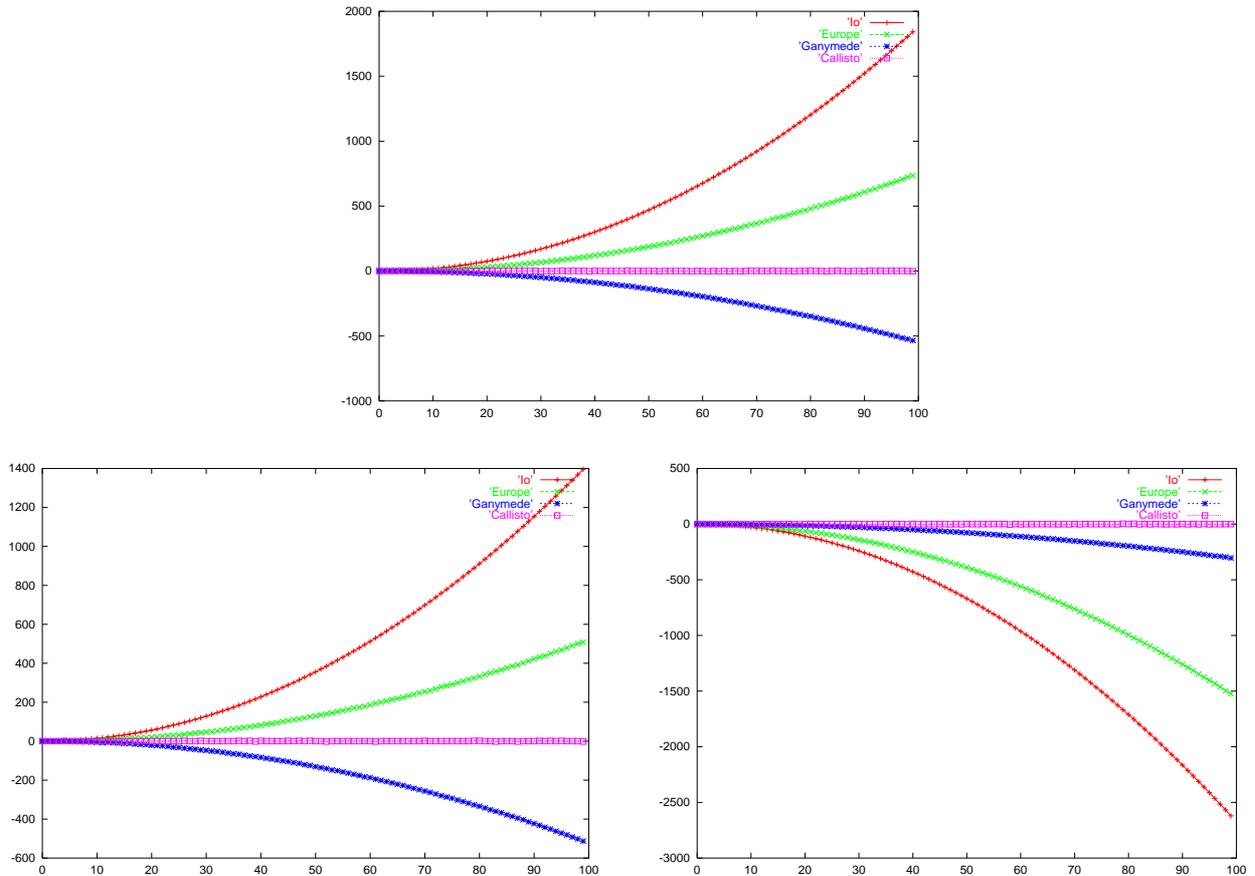


FIG. B.2 – Différences en longitude (ramenées en kilomètres) entre une simulation tenant compte des effets de marées et l'autre non. Les trois graphes ont été obtenus pour des modèles de marées différents (voir le texte).

Nous pouvons voir nettement que suivant les valeurs (encore incertaines) des nombre de Love et des fonctions de dissipation (surtout pour Jupiter), le résultat sur le mouvement orbital des satellites passe d'une accélération séculaire à une décélération. Il apparaît ainsi que dans la limite d'incertitude des constantes physiques introduites, une étude purement théorique des effets de marées ne saurait suffire à appréhender l'évolution des mouvements orbitaux des satellites à court terme. En revanche, une détermination observationnelle des accélérations (ou décélération) contraindra plus fortement les valeurs des constantes physiques introduites.

Enfin, on peut se demander si la modélisation des effets de marées induit sur Jupiter par les satellites galiléens et généralement reprise du problème Terre-Lune ne devrait pas être révisée pour tenir compte de la composition essentiellement gazeuse de Jupiter. En effet, la rotation de Jupiter étant différentielle, certaines couches gazeuses sont susceptibles d'entrer en résonance avec les satellites galiléens, donnant lieu à des phénomènes dynamiques bien

plus complexes.

Bibliographie

- [1] K. **Aksnes**, F.A. **Franklin** *Secular Acceleration of Io Derived from Mutual Satellite Events*, The Astronomical Journal, **122**, 2734-2739 (2001).
- [2] J.D. **Anderson**, W.L. **Sjogren**, and G. **Schubert** *Galileo gravity results and the internal structure of Io*, Science, **272**, 709-712 (1996).
- [3] The Galilean satellites observers (F. **Franklin**, corresponding author) *An analysis of the 1985 observations of mutual phenomena of the Galilean satellites*, Astronomical Journal, **102**, 806-815 (1991).
- [4] S. **Aoki**, M. **Soma**, H. **Kinoshita**, K. **Inoue** *Conversion matrix of epoch B 1950.0 FK 4-based positions of stars to epoch J 2000.0 positions in accordance with the new IAU resolutions*, Astron. Astrophys., **128**, 263-267 (1983).
- [5] J.E. **Arlot** *New constants for Sampson-Lieske theory of the Galilean satellites of Jupiter*, Astron. Astrophys., **107**, 305-310 (1982).
- [6] J.E. **Arlot** *Amélioration des éphémérides des satellites galiléens de Jupiter par l'analyse des observations* Thèse de doctorat d'état, (1982).
- [7] N. **Borderies** *Mutual gravitational potential of N solid bodies*, Celes. Mech., **18**, 295-307 (1978).
- [8] J.K. **Campbell** and S.P. **Synnott** *Gravity field of the Jovian system from Pioneer and Voyager tracking data*, The Astron. J, **90**, 364-372 (1985).
- [9] M. **Carpino**, A. **Milani**, A.M. **Nobili** *Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets*, Astron. Astrophys., **181**, 182-194 (1987).
- [10] S. **Champenois** *Dynamique de la résonance entre Mimas et Thetys, premier et troisième satellites de Saturne* thèse, Lille, (1998).
- [11] M. **Chapront-Touzé**, G. **Francou** et B. **Morando** *Les systèmes de référence utilisés en astronomie* Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes, **S046** (1994).
- [12] *Connaissance des temps*, Bureau des longitudes (1991).
- [13] L. **Duriez** *Théorie générale planétaire en variables elliptiques*, Astron. Astrophys., **54**, 93-112 (1977).
- [14] L. **Duriez** *General planetary theory extended to the case of resonance and application to the Galilean satellite system of Jupiter*, Celes. Mech., **26**, 231-255 (1982).
- [15] L. **Duriez** *Cours de Mécanique Céleste*, Licence et Maîtrise de Mathématiques, (1993).
- [16] L. **Duriez**, A. **Vienne** *Theory of motion and ephemerides of Hyperion*, Astron. Astrophys., **324**, 366-380 (1997).
- [17] E. **Everhart** *An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings*, Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, (1985).

- [18] S. **Ferraz-Mello** *Recherches sur le mouvement des satellites galiléens de Jupiter*, Thèse, (1967).
- [19] S. **Ferraz-Mello** *Dynamics of the galilean satellites*, Universidade de Sao Paulo, (1979).
- [20] A.A. **Kaas**, K. **Aksnes**, F. **Franklin** and J. **Lieske** *Astrometry from phenomena of the galilean satellites in 1990-1992*, The Astronomical Journal, **117**, Issue 4, 1933-1941 (1999).
- [21] W.M. **Kaula** *Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution*, Rev. Geophys. Space Phys., **2**, 467-539 (1964).
- [22] A.V. **Krivov** *Indirect influence of the external bodies on the motion of artificial earth satellites*, 353-358 Dynamics and astrometry of natural and artificial celestial bodies, Poznań, Poland (1993).
- [23] V. **Lainey**, A. **Vienne** and L. **Duriez**, *New Estimation of Usually Neglected Forces Acting on Galilean Satellites*, Celes. Mech., **v.81**, p. 115-122 (2001).
- [24] J. **Laskar** *The Chaotic Motion of the Solar System; A numerical estimate of the size of the Chaotic zones*, Icarus, **88**, 266-291 (1990).
- [25] J.H. **Lieske** *Theory of motion of Jupiter's galilean satellites*, Astron. Astrophys., **56**, 333-352 (1977).
- [26] J.H. **Lieske** *Galilean satellite evolution: Observational evidence for secular changes in mean motions*, Astron. Astrophys., **176**, 146-158 (1987).
- [27] J.H. **Lieske** *Galilean satellite ephemerides E5*, Astron. Astrophys. supp., **129**, 205-217 (1998).
- [28] L.R. **Rabiner**, B. **Gold** *Theory and application of digital processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, (1975).
- [29] R.A. **Sampson** *Theory of the four great satellites of jupiter*, Mem. Roy. Astron. Soc., **63**, (1921).
- [30] G. **Schubert** and D. **Limonadi** and J.D. **Anderson**, J.K. **Campbell**, and G. **Giamperri** *Gravitational coefficients and internal structures of the icy Galilean satellites: An assessment of the galileo orbiter mission*, Icarus, **111**, 433-440 (1994).
- [31] P.K. **Seidelmann**, V.K. **Abalakin**, M. **Bursa**, M.E. **Davies**, C. **De Bergh**, J.H. **Lieske**, J. **Oberst**, J.L. **Simon**, E.M. **Standish**, P. **Stooke** and P.C. **Thomas** *Report of the IAU/IAG working group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites: 2000*, Celes. Mech., **82**, 83-110 (2002).
- [32] A.T. **Sinclair** *The orbital resonance amongst the Galilean satellites of Jupiter*, Celes. Mech., **12**, 89-96 (1975).
- [33] R.C. **Stone** and F.H. **Harris**, *CCD Positions Determined in the International Celestial Reference Frame for the Outer Planets and Many of Their Satellites in 1995-1999*, The Astronomical Journal, **v. 119**, p. 1985 (2000).
- [34] R.C. **Stone** *Positions for the Outer Planets and Many of Their Satellites. V. FASTT Observations Taken in 2000-2001*, The Astronomical Journal. **v. 122**. N. 5. P. 2723-2733 (2001)
- [35] A. **Vienne**, L. **Duriez** *A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn III: Long-period perturbations*, Astron. Astrophys. **257** 331-352 (1992).