



HAL
open science

Modélisation des tolérances géométriques des mécanismes pour leur intégration en conception assistée par ordinateur

Bassam Kataya

► **To cite this version:**

Bassam Kataya. Modélisation des tolérances géométriques des mécanismes pour leur intégration en conception assistée par ordinateur. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Savoie, 2002. Français. NNT: . tel-00419316

HAL Id: tel-00419316

<https://theses.hal.science/tel-00419316>

Submitted on 23 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE SAVOIE
ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGENIEUR

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE SAVOIE

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par

Bassam KATAYA

Date de soutenance : 19 décembre 2002

**Modélisation des tolérances géométriques pour
leur intégration en conception assistée par ordinateur**

Composition du Jury :	Pierre BOURDET	Rapporteur
	Alain RIVIERE	Rapporteur
	François VILLENEUVE	Examineur
	Serge SAMPER	Examineur
	Max GIORDANO	Directeur de thèse

INTRODUCTION

Le tolérancement de systèmes mécaniques est une des étapes tout aussi délicate qu'essentielle dans la démarche de conception. Le choix des tolérances a une influence sur la qualité du produit fini. La maîtrise des défauts géométriques au cours de la fabrication des pièces mécaniques permet de garantir la qualité finale du produit. Le but n'est pas d'éviter à tout prix les défauts géométriques mais seulement de les prévoir, de les prendre en compte et vérifier que le produit respectera des besoins fonctionnels donnés, malgré ces défauts.

A l'heure de la conception et de la fabrication assistées par ordinateur (CFAO), on ne peut que s'étonner de l'absence quasi totale de système d'aide au tolérancement permettant de gérer entièrement le tolérancement d'un système mécanique. Cette carence n'est pas due au fait d'un manque de recherche sur le domaine de tolérancement, bien au contraire, elle serait plutôt due, à la complexité du problème et en grande partie, au passé des normes de tolérancement. Leurs limites ont amené nombre de chercheurs à les remettre en cause. De récents efforts pour une mathématisation des définitions des tolérances visent à réduire les risques d'ambiguïté et d'interprétations incorrectes.

En effet, ces normes, de part leur évolution historique, sont plus orientées vers le contrôle des spécifications que vers l'analyse. En outre il subsiste également des difficultés au niveau fondamental pour tenir compte des effets des défauts géométriques sur le comportement du système mécanique. Des modèles doivent être adaptés pour résoudre ce problème.

Nous ne souhaitons pas ici remettre en cause les normes de tolérancement, mais plutôt, proposer une modélisation et des outils d'aide au tolérancement.

Nous proposerons un modèle permettant l'analyse et la synthèse du tolérancement de mécanismes. Ce modèle est compatible avec les normes au prix d'hypothèses simplificatrices, il sera appliqué sur des exemples pour en montrer la validité.

Nous avons décomposé notre étude en deux objectifs :

Le premier consiste à définir ce que nous appelons les équations de tolérancement. Cette approche n'est pas suffisante parce qu'elle ne permet de traiter que l'aspect qualitatif du tolérancement et elle ne tient pas compte des limites que peuvent prendre les tolérances géométriques.

Le deuxième aspect que nous mettons en évidence est l'analyse du tolérancement à l'aide de la méthode des domaines jeux et des domaines écarts. Cette méthode permet de prendre en compte, à la fois l'aspect qualitatif et quantitatif du tolérancement. En particulier on pourra vérifier les assemblages de systèmes mécaniques afin d'éviter dans les cas les plus défavorables des interférences entre les pièces.

Le troisième objectif de ce travail est de proposer, en utilisant aussi la notion des domaines jeux et écarts, une méthode de synthèse de tolérances, c'est-à-dire la détermination des formes et des valeurs des zones de tolérances. Donc le choix de tolérances.

Dans le premier chapitre, nous présenterons les différentes utilisations et implications du tolérancement intervenant dans la phase d'élaboration d'un produit depuis la conception jusqu'au contrôle. Nous présenterons le concept GPS ainsi qu'un rappel des spécifications normalisées, principes et exigences des normes. Puis nous effectuerons une brève description de la modélisation géométrique d'une pièce ainsi que des outils informatiques permettant la création et la modification d'une géométrie. Nous terminerons ce chapitre par un compte rendu précis mais non exhaustif de l'état de l'art dans le domaine du tolérancement. On remarquera en particulier la multiplicité des modèles existants.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les différentes hypothèses nécessaires pour la mise en œuvre du modèle. Puis nous exposerons deux approches, la méthode cinématique et l'approche statique qui conduisent aux équations de tolérancement en mettant l'accent sur les limites conceptuelles de ces approches.

Le troisième chapitre définit les notions de domaine jeu et de domaine écart pour caractériser les comportements réels des liaisons et pour modéliser les tolérances. Des exemples de constructions de domaines jeux pour quelques liaisons les plus courantes seront présentés. Quelques cas classiques de tolérances géométriques et dimensionnelles seront représentés par des domaines écarts.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons d'abord quelques propriétés générales des domaines jeux et écarts. nous abordons ensuite la méthode d'analyse dans le cas d'une boucle simple. Nous montrons comment l'utilisation simultanée des équations de boucle et des domaines permet de vérifier simplement la condition d'assemblage et permet aussi de définir une méthode de choix rationnel des tolérances. Le cas des boucles en parallèles est plus complexe. Nous présentons une solution possible pour la synthèse des tolérances dans ce cas.

En conclusion, des perspectives de développement sont présentées pour l'intégration de cette approche dans des systèmes de CAO.

CHAPITRE 1

LE TOLERANCEMENT, PRESENTATION GENERALE

1.1. BESOIN EN TOLERANCEMENT

1.1.1. Introduction

Le lien entre les différents métiers qui interviennent dans le cycle de conception et de fabrication d'un ensemble mécanique est le tolérancement. Différents auteurs ont souligné l'importance de ce lien [JAY 89], [SRI 89], [ZHA 92b]. Il participe à toutes les étapes de la conception, de la fabrication et du contrôle d'une pièce. Les effets des choix de tolérances ont des incidences sur la qualité de la pièce et donc sur la qualité de l'assemblage final. Ces choix peuvent aussi avoir une grande influence sur le prix du revient du produit fini. Alors qu'aujourd'hui, une grande concurrence règne sur les différents marchés, la baisse du coût des produits et la réduction des délais de production permettent de donner le bon produit, de bonne qualité, au bon moment. Ce sont des facteurs déterminants pour permettre de conquérir un marché. La maîtrise des tolérances au plus juste et au plus tôt permet de diminuer les délais et les coûts de production et donc, en partie, de diminuer le coût final d'un produit.

La notion de pièces interchangeables et fonctionnellement équivalentes, permet de garantir les assemblages des pièces mécaniques et de diminuer les coûts en évitant des opérations du type "appairage" des pièces entre elles. L'interchangeabilité facilite en outre les opérations de maintenance.

Nous allons donc voir quelles sont les utilisations et les implications du tolérancement aux différentes étapes d'élaboration d'un produit (la conception, la fabrication et le contrôle), en détaillant ces trois étapes.

1.1.2. La conception

Lors de la conception d'un système mécanique, le concepteur définit les différents types de tolérances ainsi que leurs valeurs pour permettre de satisfaire des besoins fonctionnels. Il doit tolérancer l'ensemble des entités composant une pièce, aussi bien les fonctionnelles que celles qui ne le sont pas explicitement. C'est donc de lui que part le tolérancement. Il devra s'appuyer sur son expérience, ainsi que sur des hypothèses sur les "capabilités" des moyens de production. Les choix qu'il est amené à prendre vont influencer sur l'ensemble des étapes suivantes d'élaboration du produit et donc sur le coût de production. Il va essayer de définir au plus juste les tolérances permettant de réaliser les besoins fonctionnels.

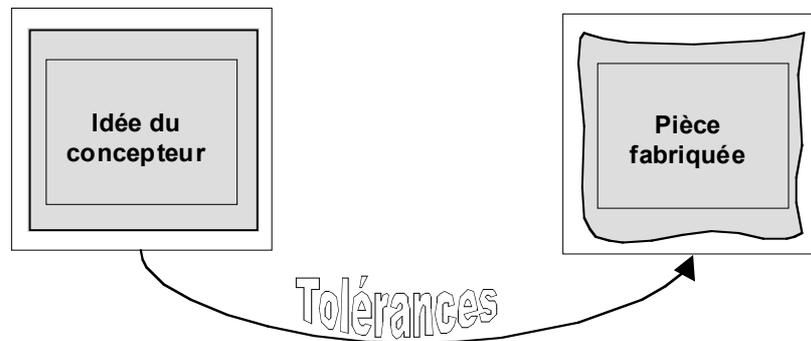


Figure 1.1 Définition des tolérances

Il doit donc calculer le comportement du système mécanique et des pièces le composant. Il doit prendre en compte les variations physiques des pièces pendant le fonctionnement. Variations dues à la température, aux contraintes mécaniques ou à n'importe quel phénomène physique que la pièce devra supporter. Le concepteur va exprimer tous ces besoins à l'aide de tolérances. Dans ces conditions, il est facile de comprendre pourquoi le tolérancement est une opération complexe qui requiert une grande expérience de la part du concepteur et pourquoi une aide au tolérancement est loin d'être superflue.

On peut alors imaginer l'aboutissement de l'aide au tolérancement qui consisterait à la détermination automatique du type et des valeurs des tolérances des pièces remplissant les conditions fonctionnelles, tout en réalisant un compromis acceptable sur les différents objectifs d'interchangeabilité et de coût.

Cette opération que l'on appelle synthèse des tolérances n'est pas envisagée directement dans ce document. Cependant certains des outils présentés pourront être utilisés dans sa réalisation. En particulier, nous verrons que des résultats d'analyse dans des cas particuliers induisent des solutions pour la synthèse.

1.1.3. La fabrication

Si le tolérancement est rendu nécessaire par les imperfections de la fabrication, il se veut néanmoins indépendant des moyens et des processus de fabrication.

Cela peut sembler paradoxal, si l'on se rappelle qu'un des objectifs essentiels du tolérancement est de réduire les coûts de fabrication. Mais, on s'aperçoit que des tolérances trop faibles ou mal évaluées, entraîneront la mise en œuvre de moyens de production très précis et entraîneront souvent un surcoût de fabrication. Par ailleurs, le coût de fabrication dépend dans une large mesure du processus de production. Le nombre de phases d'usinage, le nombre de montages d'usinage et le nombre d'interventions humaines sont autant de facteurs de coût dont il faut tenir compte. La prise en compte de ces facteurs conduit dans de nombreux cas à spécifier des tolérances différentes de celles imposées par un point de vue strictement fonctionnel.

Il est donc nécessaire de remplacer une ou plusieurs des tolérances purement fonctionnelles par une ou plusieurs tolérances déduites de ces tolérances initiales et mieux adaptées aux procédés de fabrication. Ces opérations, appelées transferts de tolérances peuvent se révéler très délicates.

Enfin, il ne faut pas oublier la condition nécessaire à toute fabrication à savoir que toutes les surfaces devant être fabriquées doivent être spécifiées. Le tolérancement doit être complet.

1.1.4. Le contrôle

C'est l'avant dernière étape de la réalisation. Elle vise à vérifier que les pièces fabriquées sont conformes aux spécifications exprimées sur les plans de définition par le bureau d'étude. Elle permet aussi de vérifier les variations du procédé et du processus de fabrication pour éventuellement les corriger. L'évolution numérique des moyens de contrôle actuels entraîne une demande pour de nouvelles méthodes permettant la mise en œuvre de ces nouveaux moyens (machines à mesurer tridimensionnelle).

Le dernier stade de la fabrication est l'assemblage des différentes pièces ainsi que l'essai de la mise en fonctionnement du produit. C'est souvent à ce stade que l'on se rend compte des erreurs commises durant les opérations précédentes. C'est pourquoi il faut des outils pour étudier l'assemblage et les effets des tolérances sur le fonctionnement de l'assemblage et ce dès la conception. Le coût des prototypes physiques et le temps de réalisation de ceux-ci, devient maintenant un préjudice dans leur création. La maquette numérique doit remplacer les prototypes physiques, mais elle nécessite de maîtriser les effets des tolérances de conception et de fabrication sur le comportement de l'assemblage. L'analyse des différents états de l'assemblage permet aussi de vérifier les jeux fonctionnels que l'on désire réaliser.

Le procédé de fabrication d'un système nécessite l'instauration d'une gamme de méthodes et d'outils permettant l'aide et la vérification du tolérancement.

1.2. LA NORMALISATION DU TOLERANCEMENT

Les normes de tolérancement actuelles résultent de la généralisation des procédés appliqués dans les différentes industries au cours des années passées. Chaque industrie et chaque métier avait ses propres méthodes de création et de notation pour définir aussi bien la géométrie d'une pièce, que les tolérances qui lui sont associées. Pour simplifier les échanges entre toutes ces industries et métiers, les organismes de normalisation ont créé des normes de dessin et de tolérancement dimensionnel. Les tolérances dimensionnelles recommandées sont définies à l'aide de tableaux donnant la valeur de l'ajustement entre un arbre et un alésage en fonction, du type de liaison que l'on souhaite réaliser, de la précision que l'on veut donner à cet ajustement (indice de qualité) et enfin du diamètre nominal des deux éléments. Les ajustements seront donc glissants, « justes » ou serrés suivant le besoin que l'on veut réaliser. Ceci permet de créer toute une gamme d'outillages standardisés permettant de répondre aux valeurs définies par la norme. Il en résulte ainsi une réduction des coûts de l'outillage de fabrication (forêts et alésoirs) et de contrôle (calibre de contrôle entre / n'entre pas) grâce à la standardisation de ces valeurs. Cela permet aussi de faciliter l'interchangeabilité des pièces ainsi définies et fabriquées.

Néanmoins, cette norme ne permet d'assurer que les dimensions des éléments ajustables. Elle ne permet pas de définir et de garantir la géométrie de ces éléments.

C'est pour cela que l'on a normalisé les tolérances géométriques. Cependant il existe encore des décalages entre les spécifications fonctionnelles du concepteur et leurs expressions en tolérances normalisées. Des travaux sont en cours pour essayer de faire évoluer les normalisations pour pouvoir exprimer les différents besoins fonctionnels et ceci sans équivoque possible.

Le tolérancement géométrique normalisé n'est qu'une représentation graphique. Il soulève donc diverses interprétations mathématiques possibles. Il existe des travaux pour améliorer le tolérancement et pour enlever les ambiguïtés d'interprétation [MAT 95] ainsi que pour normaliser de manière mathématique les tolérances géométriques. Ces travaux ont abouti à la création de la première norme mathématique de tolérancement : la norme ASME Y14.5-1M1994 [ASME 94b].

1.2.1. Spécification Géométrique des Produits (GPS)

1.2.1.1. Objectifs

Le concept GPS est une réponse à un besoin d'amélioration de la qualité des produits et à une volonté de réduction des coûts d'étude et de réalisation.

Au niveau de la norme ISO, la réponse actuellement en cours de développement, consiste à définir et à proposer un langage de spécification des produits caractérisé par :

- l'expression sans ambiguïté des exigences fonctionnelles des mécanismes,
- une base théorique robuste, permettant la caractérisation précise des conditions fonctionnelles, de leur contrôle ainsi que la prise en compte des évolutions futures des systèmes informatiques,
- un code univoque et international,
- une cohérence globale de l'ensemble des normes, évitant les oublis, les redondances ou les interprétations multiples.

L'ensemble des ces objectifs s'inscrit dans l'adoption du concept GPS (acronyme de *Geometrical Product Specifications*) base de développement de séries de normes particulières, cohérentes entre elles, visant à traiter de tous les aspects du cycle de vie d'un produit de sa conception à sa qualification.

Historiquement, les norme ISO traitant de la cotation considéraient parallèlement trois grands domaines : ajustement et métrologie, états de surfaces et tolérancement

géométrique. Pour unifier les normes actuelles et futures et garantir la cohérence du système en cours de construction, l' ISO propose une démarche de classification des normes selon deux axes concernant :

- les caractéristiques géométriques d'un élément géométrique, permettant de le caractériser en taille, forme, orientation, position, etc,
- les étapes de la cotation géométrique, l'évaluation des écarts dimensionnels, la définition et le contrôle des instruments de mesure.

Le tout s'inscrit dans un tableau à double entrée, dit "matrice GPS" qui permet de dresser un bilan des normes actuelles, de repérer les redondances et les manques et de programmer le développement des normes à venir.

Cette matrice et la démarche qui y est associée, est décrite précisément dans le document ISO suivant : Spécification géométrique des produits (GPS) –Schéma directeur FD CR ISO/TR 14638.

1.2.1.2. Les éléments géométriques

Le concept GPS est transversal et traite aussi bien de la spécification que de la vérification des pièces mécaniques. Pour cela, le concepteur donne une représentation idéale de ce qu'il souhaite dans le "*nominal model*" alors que la pièce réalisée est représentée dans le "*skin model*". En conséquence, deux types principaux d'éléments géométriques sont définis dans le modèle de spécification GPS :

- Les éléments idéaux, issus de modèles mathématiquement définissables. Ces éléments peuvent être nominaux ou associés. Il peuvent être infinis ou limités.
- Les éléments non idéaux, issus de pièces réelles, ne peuvent pas être définis de façon mathématique, comme les idéaux, il sont infinis ou limités.

1.2.1.3. Les opérations de création des éléments géométriques

Une opération est une contrainte imposée à un ou plusieurs éléments géométriques qui permet de définir des éléments géométriques particuliers, selon des procédures normalisées, dotés de propriétés pouvant intéresser les techniciens [BAL 93a], [BAL 93b].

Ces opérations sont regroupées dans les classes suivantes :

- Les extraction, qui permettent de définir des points à partir d'une surface.

- Les découpages, qui permettent de définir des éléments de surface limitée.
- Les filtrages, qui permettent de définir des éléments significatifs d'un élément
- Les associations, qui amènent à associer des éléments géométriques entre eux selon des critères définis.
- Les unions, qui permettent de définir des groupes d'éléments, en les considérant comme un élément unique.
- Les constructions, qui amènent à définir un nouvel élément construit géométriquement à partir d'autres.

1.2.1.4. Les caractéristiques des éléments géométriques idéaux

Les éléments géométriques idéaux sont définis par :

- Leur type : qui permet de définir le caractère idéal ou non, limité ou non, associé ou non d'un élément.
- Leurs caractéristiques intrinsèques : qui permettent de définir un élément idéal simple (le diamètre et l'axe d'un cylindre par exemple).
- Leurs éléments de situation : qui servent à placer un élément dans l'espace. Quatre éléments géométriques particuliers suffisent pour situer un éléments dans l'espace. Ce sont les point, droite, plan, hélice. Ces éléments peuvent être utilisés seuls ou en commun.
- Leurs caractéristiques de situation : qui définissent la position et l'orientation des éléments de situation. Dans le document [ISO/TR 17450-1], les contraintes géométriques qui permettent de définir le modèle nominal de la pièce sont exprimées à partir des caractéristiques entre éléments géométriques idéaux. Ces caractéristiques sont définies entre éléments de situation et sont des distances lorsqu'elles définissent une position ou des angles lorsqu'elles définissent une orientation.
- Leurs classe d'invariance : qui permet de classer les surfaces en fonction des degrés de liberté qui ne modifient ni leur forme, ni leur position.

L'ensemble de ces caractéristiques permet de créer un modèle géométrique juste, manipulable et que l'on pourra décrire de façon symbolique, à l'aide d'un code et d'un langage capable de transcrire les conditions fonctionnelles recherchées et d'élaborer des modèles de vérification correspondant aux spécifications visées.

1.2.1.5. Démarche de spécification selon le concept GPS

Pour spécifier fonctionnellement chaque pièce, quatre points sont fondamentaux :

- L'expression du besoin fonctionnel qui se traduit par la formalisation de conditions géométriques que doivent respecter des éléments d'une pièce (dimension ou surfaces).
- La définition de l'élément géométrique spécifié.
- La définition de la zone de tolérance, créée pour exprimer les écarts admissibles de l'élément spécifié.
- L'expression de la condition fonctionnelle définie avec trois langages :
 - son expression symbolique, proposée dans le langage ISO,
 - son expression littérale, employée dans les communications orales entre techniciens,
 - son expression mathématique, fondée sur des relations précises, univoques, permettant sa définition et sa vérification.

1.2.2. Le tolérancement normalisé, principaux éléments

Le tolérancement normalisé est très riche en possibilités d'expressions des exigences. Il est construit sur deux concepts, la spécification par dimension et la spécification par zone de tolérance.

Le tolérancement normalisé définit un langage graphique dont les spécifications normalisées s'appuient sur :

- un principe,
- des exigences,
- des tolérances dimensionnelles,
- des tolérances géométriques.

Les éléments géométriques utilisés par les normes sont de trois types :

- Les éléments de définition : ce sont des éléments géométriques parfaits appelés éléments nominaux. Ils sont représentatifs de la pièce théorique et parfaite et sont utilisés pour représenter les zones de tolérances des spécifications géométriques.

- Les éléments réels : ce sont des ensembles de points appartenant à une pièce réelle et sont obtenus soit par palpage pendant les phases de mesure, soit par construction à partir d'autres points réels construits.
- Les éléments associés : ce sont des éléments géométriques parfaits (ou idéaux) qui sont obtenus à partir d'un ou de plusieurs éléments géométriques réels par application d'un critère d'association.

1.2.2.1 Principe de l'indépendance

Le principe de tolérancement appelé principe de l'indépendance [ISO 8015] et [NF E 04-561] s'énonce de la manière suivante :

"Chaque exigence dimensionnelle ou géométrique spécifiée sur un dessin doit être respectée en elle-même (indépendamment) sauf si une indication particulière est spécifiée."

Cela signifie que toutes les spécifications de dimension, de forme, d'orientation et de position qui portent sur un élément ou un ensemble d'éléments de la pièce sont indépendantes. Autrement dit, il y a indépendance entre les dimensions des éléments et leur géométrie (forme, orientation et position).

Ainsi, les notions d'ordre et de procédure n'interviennent pas dans le tolérancement normalisé, qui de fait constitue un langage de représentation déclaratif.

1.2.2.2. Exigence de l'enveloppe

L'exigence de l'enveloppe est présentée dans les normes [ISO 8015] et [NF E 04-561]. Elle se traduit par la mise en place d'une relation entre la dimension d'un élément et sa forme. Cette exigence est un moyen de limiter les défauts de forme par une tolérance dimensionnelle et n'est applicable qu'aux dimensions linéaires et spécifiées par le symbole E, placé dans un cercle et situé à droite de la cote dimensionnelle. Elle n'est donc applicable que pour le diamètre d'un cylindre, d'une sphère ou la distance entre deux plans parallèles en vis-à-vis.

Pour une surface extérieure ou intérieure, la surface ne doit pas dépasser l'enveloppe de forme parfaite qui correspond à la dimension au maximum de matière. La dimension au minimum de matière doit être respectée localement (pour chaque distance entre deux points en vis à vis).

1.2.2.3. Exigence du maximum de matière

L'exigence du maximum de matière est présentée dans la norme [ISO 2692]et [NF E 05-555]. Elle est spécifiée par le symbole M, encadré et situé à droite de la valeur de la tolérance géométrique. Cette exigence se traduit par la mise en place d'une relation entre la dimension d'un élément géométrique et son orientation et (ou) sa position. Elle permet de confondre les trois types de défauts (la forme, la dimension et la position) en définissant une géométrie enveloppe à ne pas dépasser (état virtuel)

Elle permet d'indiquer que seul le cumul des défauts provenant soit de la dimension soit de la position soit de l'orientation de l'élément est contrariante. Elle est destinée au tolérancement des surfaces participant à une liaison ou à un assemblage de la pièce dans un mécanisme et ne peut s'appliquer qu'aux surfaces élémentaires caractérisées par une seule dimension linéaire.

Cette exigence est un moyen d'augmenter la tolérance d'orientation ou de position d'un élément ou d'un groupe d'éléments en fonction de la dimension des éléments concernés par la tolérance géométrique.

Cette augmentation est limitée par le fait que les dimensions de l'élément fabriqué doivent être comprises entre ses dimensions au maximum de matière et ses dimensions au minimum de matière. Le fait que l'on puisse faire varier la tolérance de l'élément en fonction des dimension de l'élément fabriqué permet entre autre d'assurer deux principes utiles en assemblage :

- faciliter l'assemblage par la garantie de l'interchangeabilité,
- assouplir les conditions de fabrication.

La norme prévoit la possibilité d'appliquer également l'exigence du maximum de matière à une ou plusieurs surfaces de référence contrôlant une tolérance. L'application de cette exigence à une référence implique que cette dernière peut flotter par rapport à l'élément tolérancé si l'élément de référence s'écarte de son état au maximum de matière. Ceci permet de définir non pas un référentiel unique mais un ensemble de référentiels candidats. Chaque référentiel candidat représente une situation possible de l'ensemble des références.

Avant de rejeter une pièce fabriquée, il faudra au préalable s'assurer qu'aucun référentiel candidat ne permet de vérifier la conformité de la pièce.

Les avantages de l'application de l'exigence du maximum de matière à une référence reste identique à ce que l'on décrit pour l'application à une surface tolérancée.

Généralement, on utilise l'exigence du maximum de matière de référence car elle permet de simuler l'état de calibre physique. Sa vérification est assez facile à l'aide de d'un calibre fonctionnel. Elle devient un peu plus complexe avec les techniques modernes de contrôle à l'aide d'une machine à mesurer tridimensionnelle.

1.2.2.4. Exigence du minimum de matière

L'exigence du minimum de matière encore peu utilisé est spécifié par le symbole L, encadré et situé à droite de la valeur de la tolérance dimensionnelle ou de la surface de référence intéressée. Cette exigence est présentée dans la norme [ISO 2692]. L'esprit est le même que pour l'exigence du maximum de matière. Son utilisation est différente et opposée dans la mesure où le cas le plus défavorable envisagé correspond cette fois au minimum de matière. On utilisera donc l'exigence du maximum de matière pour exprimer un besoin fonctionnel d'assemblage, tandis que l'utilisation du minimum de matière sera réserver pour exprimer un besoin fonctionnel telle que la précision ou la conservation d'un minimum de matière.

1.2.2.5. Tolérances dimensionnelles

Ces tolérances font l'objet des normes [ISO 8015] et [NF E 04-561]. Elles permettent de limiter les défauts locaux et portent sur des grandeurs de type longueur ou angle. Les limites minimales et maximales des dimensions sont indiquées. Ce type de tolérancement ne s'applique qu'à une surface réelle unique ou à un couple d'éléments réels.

Tolérances linéaires

"Une tolérance linéaire limite uniquement les dimensions locales réelles (distance entre deux points) d'un élément simple" [NF E 04-561].

Les tolérances dimensionnelles linéaires ne peuvent être exprimées que sur des surfaces ou entre des surfaces possédant des dimensions locales. (La tolérance linéaire est partiellement définie dans les normes pour deux figures géométrique appelées entités

dimensionnelles, une surface nominale cylindrique et deux surfaces planes et parallèles). La direction des bipoints n'est pas explicitée.

Une tolérance dimensionnelle linéaire ne limite aucunement le défaut de forme. Ceci permet de respecter le principe de l'indépendance.

Tolérances angulaires

"Une tolérance angulaire limite uniquement les orientations des lignes ou des éléments linéaires des surfaces" [NF E 04-561].

Les tolérances dimensionnelles angulaires ne peuvent être exprimées que pour limiter l'orientation générale de deux lignes. (La tolérance angulaire est partiellement définie dans la norme pour deux droites d'un dièdre.)

L'orientation générale de la ligne dérivée de la surface réelle est l'orientation de la ligne en contact de forme géométrique parfaite. La distance entre cette ligne en contact et la ligne réelle doit être la plus faible possible.

1.2.2.6. Tolérances géométriques

Définition

"Les tolérances géométriques limitent l'écart de l'élément réel par rapport à sa forme, son orientation, sa position théoriquement exacte sans tenir compte de la dimension de l'élément" [ISO 8015].

Les tolérances géométriques ont pour objectif de délimiter des espaces dans lesquels doivent se situer les éléments tolérancés par rapport aux références spécifiées.

Une tolérance géométrique comporte :

- des éléments tolérancés,
- dans certains cas, une référence spécifiée ou un système de références spécifiées obtenu à partir d'éléments de référence,
- une valeur pour la dimension de la zone de tolérance.

La forme de la zone de tolérance dépend de la géométrie des éléments tolérancés et des éléments de référence. Le symbole ϕ devant la valeur de la tolérance précise que la zone de tolérance est cylindrique.

Une tolérance géométrique s'exprime par un cadre de tolérance à deux, trois, quatre ou cinq cases.

Type	Elément tolérancé	Paramètres de la zone de tolérance		
		Situation	Intrinsèque (écart tolérancé)	
Tolérance de forme				
Rectitude	t	Ligne	Sans	Ø d'un cercle ou d'un cylindre distance entre 2 droites ou 2 plans
Planéité	r	Plan	Sans	Distance entre 2 plans parallèles
Circularité	e	Ligne	Sans	Distance entre 2 cercles concentriques
Cylindricité	j	Cylindre	Sans	Distance entre 2 cylindres coaxiaux
Forme d'une ligne quelconque	m	Ligne	Sans ou orientation et (ou) position	Distance euclidienne entre 2 lignes
Forme d'une surface quelconque	h	Surface	Sans ou orientation et (ou) position	Distance euclidienne entre 2 surfaces
Tolérance d'orientation				
Parallélisme	i	Ligne surface	Orientation	Ø d'un cylindre distance entre 2 droites ou 2 plans
Perpendicularité	n	Ligne surface	Orientation	Ø d'un cylindre distance entre 2 droites ou 2 plans
Inclinaison	g	Ligne surface	Orientation	Ø d'un cylindre distance entre 2 droites ou 2 plans
Tolérance de Position				
Localisation	l	Point ligne surface	Orientation et position	Ø d'un cercle ou d'un cylindre distance entre 2 droites ou 2 plans
Concentricité	a	Point	position	Ø d'un cercle
Coaxialité	a	Ligne	Orientation et position	Ø d'un cylindre
Symétrie	d	Ligne Surface	Orientation et position	Distance entre 2 droites ou 2 plans
Tolérance de battement				
Battement simple	^	Ligne	Orientation et position	Distance entre 2 lignes
Battement total	—	Surface	Orientation et position	Distance entre 2 surfaces

Tableau 1.1 Récapitulatif des tolérances géométriques

Dans le première case se trouve le symbole de tolérance. Dans la deuxième case se trouve la dimension de la zone de tolérance. Dans la troisième case se trouve la référence spécifiée ou dans la troisième case, la quatrième et la cinquième case se trouve le système de référence. Le tableau 1.1 regroupe les différents tolérances avec leur symbole, la nature de l'élément tolérancé et les paramètres de position, d'orientation et intrinsèques de la zone de tolérance.

Eléments tolérancés

Les éléments tolérancés sont des éléments réels, ponctuels, linéiques et surfaciques à l'exception de l'application "tolérance projetée"[NF E 04-558].

Les éléments tolérancés sont désignés par la flèche qui relie le cadre de tolérance à l'élément. Le type de l'élément tolérancé dépend non seulement de la position de la flèche mais également du type de tolérance.

Référence spécifiée

La référence spécifiée est un élément idéal de type POINT, DROITE ou PLAN. Ces points, droites et plans considérés sont les éléments de situation de lignes et de surfaces idéales associées aux éléments de référence (centre d'un cercle, centre d'une sphère, axe d'un cylindre, un plan...) ou des éléments qui résultent d'une construction géométrique. Cette construction géométrique est soit une intersection ou une union des éléments de situation de surfaces idéales associées aux éléments de référence [NF E 04 554], [NF E 04 556], [NF E 04 557], [NF E 04 559], [ISO 1101].

Un élément de référence est un élément réel extrait de la surface réelle de la pièce. L'opération d'association d'un élément réel extrait se définit par un critère. Elle s'exprime comme un problème d'optimisation.

Parmi les références spécifiées, on distingue les références simples et les références communes :

- Référence simple : "*Elément géométrique unique spécifié à partir d'un seul élément de la pièce*" [NF E 04 554]. Elle résulte d'une association d'un seul élément idéal à un seul élément de référence.

- Référence commune : "Élément géométrique unique spécifié à partir de plusieurs éléments de la pièce" [NF E 04 554]. Elle résulte d'une association de plusieurs éléments idéaux simultanément à plusieurs éléments de référence.

Système de références spécifiées

"Ensemble de plusieurs éléments géométriques en position théoriquement exacte, auquel se rapporte un élément tolérancé (par exemple dièdre ou trièdre de référence" [NF E 04 554].

Le système de référence est un suite ordonnée de deux ou trois éléments idéaux de type POINT, DROITE, PLAN. Il existe une hiérarchie entre les éléments qui composent le système de référence, le premier élément idéal est qualifié de référence primaire, le second de référence secondaire et le troisième de référence tertiaire. La référence secondaire est contrainte par la référence primaire. La référence tertiaire est contrainte en orientation par la référence secondaire et tertiaire. La contrainte est définie par une dimension de référence angulaire généralement implicite.

Les éléments de référence sont désignés par une lettre majuscule dans un cadre de trois à cinq cases. Les références se lisent de la gauche vers la droite.

Zone de tolérance

Les normes [ISO 1101], [ISO 1660], [ISO 2692], [ISO 3040], [ISO 5458] définissent une zone de tolérance comme étant un espace de nature volumique ou surfacique, limité un ou plusieurs éléments nominaux, de nature linéique ou surfacique.

La forme de la zone de tolérance dépend du type de tolérance, du type d'élément tolérancé et du modificateur. Une zone relative à un élément tolérancé est caractérisée par une dimension linéaire dont la valeur appelée tolérance et par des éléments de situation. Lorsque la tolérance géométrique porte sur un groupe d'éléments, à chaque élément du groupe correspond une zone de tolérance. La position relative de chacune de ces zone est définie par des contraintes qui sont des dimensions de référence implicite et/ou explicite établies entre les éléments de situation de chaque zone.

1.3. TOLERANCEMENT ET SYSTEMES DE CFAO

Les systèmes de CFAO (Conception et Fabrication Assistées par ordinateur) constituent par définition des outils privilégiés pour intégrer des fonctionnalités d'aide au tolérancement.

Force est de constater cependant que les systèmes industriels existants offrent très peu voire aucune aide dans ce domaine.

L'apparition des modeleurs volumiques n'a pas beaucoup fait évaluer les normes de tolérancement du fait de la diversité des modeleurs. Le problème vient du fait qu'un modeleur est conçu pour définir interactivement la géométrie nominale du solide et non pas les variations de cette dernière. L'ajout de tolérances dans le modeleur volumique entraîne des possibilités de variation de la géométrie et donne des potentialités de perte de validité du modèle du solide.

1.3.1. Modeleurs volumiques

Il existe actuellement différents logiciels de CAO et CFAO. Chacun d'eux est capable de définir une géométrie nominale. Le cœur d'un logiciel de CAO est un modeleur volumique. Il existe différents types de modeleurs volumiques que l'on peut classer en différentes catégories suivant la manière dont sont définis les solides.

La première famille de modeleurs est celle qui est basée sur un partitionnement de l'espace proposé par la théorie des r-sets. Le modèle le plus couramment utilisé est le modèle CSG (Constructive Solid Geometry) [REQ 77]. Il représente les solides 3D par des opérations booléennes régularisées (union, intersection et différence) entre différentes primitives simples (parallélépipède, pyramide, cylindre, sphère, etc.). Un solide est donc un arbre dont les feuilles sont des primitives élémentaires et les nœuds sont des opérations booléennes. La tête de l'arbre représentera le solide final. Ce modèle est très simple, il permet toujours de représenter un solide physiquement réalisable. En effet, la régularisation des opérations booléennes permet d'éliminer les entités qui ne sont pas 2D-manifold [SHA 95]. Ces entités ne respectent pas les équations d'Euler et ne sont pas des solides physiquement réalisables. Le principal défaut des modeleurs CSG est qu'il est très difficile de trouver les informations sur les frontières du solide (faces, arêtes...). Ceci est très gênant pour pouvoir appliquer des tolérances sur ces entités.

Il existe une autre représentation très peu utilisée en mécanique mais utilisée pour les représentations en réalité virtuelle et dans les jeux vidéo. C'est la représentation par partition de l'espace par des hyperplans (*Boundary Space Partitioning*) [THE 87]. Dans ce modèle BSP, un solide est représenté à l'aide d'un arbre en tant que la réunion d'un ensemble d'hyperplans, cette représentation a les mêmes inconvénients pour retrouver les faces du solide que le modèle CSG. Un cas particulier de cette représentation est le modèle octree [MEA 89]. Dans ce modèle, l'espace est représenté par un cube découpé récursivement en huit cubes plus petits. Le solide est donc représenté par arbre coloré dont chaque nœud comporte huit descendants dans le cas 3 D (quatre dans le cas d'un quadtree 2 D). Chaque nœud a une couleur qui est, soit blanche, si le nœud n'a pas de descendant, c'est à dire si le cube est vide de la matière, soit noire si le cube est rempli de matière, soit la couleur grise si un des descendant du cube peut comporter de la matière. Les feuilles de l'arbre sont donc noires ou blanches, les nœuds de l'arbre étant gris.

Il existe aussi des modeleurs permettant de représenter des objets non 2 D-manifold. C'est-à-dire des objets contenant des faces ou des arêtes ou des points libres [SHA 95]. C'est une alternative à la théorie des r-set. Cela permet de représenter des entités qui ne seraient pas représentables par les r-set. Mais cela peut aussi représenter des solides que l'on ne peut construire physiquement.

Le modèle par représentation des frontières ou B-Rep (*Boundary Representation*) ne représente le solide que par l'ensemble des ses frontières (point, arêtes et surfaces). Le solide est donc représenté par un graphe liant les différentes frontières le composant. L'inconvénient de ce modèle est qu'il peut très vite dégénérer, c'est-à-dire qu'il est très facile de ne plus représenter un solide valide. Il existe des modeleurs hybrides qui comportent un modeleur CSG et un modeleur B-Rep qui représentent simultanément le même solide.

Une autre particularité des modeleurs volumiques est la manière dont sont stockées les dimensions des différentes entités. Les dimensions peuvent être figées dès leur création ou alors elle peuvent être variables au cours de l'utilisation. Cette possibilité de variation permet de définir des affectations entre les différentes variables, on parle alors de modeleur paramétrique.

On peut poser les relations plus complexes entre les variables, on parle alors de modeleur variationnel.

Pour les modeleurs paramétriques, la résolution de l'ensemble de contraintes imposées au solide doit aboutir à un solide unique. Or le modèle de solide peut devenir invalide suivant les valeurs que l'on donne aux différents paramètres contrôlant les entités. Il se peut, par exemple, que certaines des contraintes entre les différents paramètres tels que la distance entre deux axes de cylindres, la longueur d'un élément, etc, ne permettent pas de trouver un solide qui respecte l'ensemble de ces contraintes. Il faut donc constamment vérifier que les relations entre les différents paramètres permettent d'obtenir un solide.

Pour palier à la profusion des modèles volumiques possibles, le comité international de normalisation est en train de mettre au point un protocole d'échange de données. Ce protocole STEP (*Standard Exchange of Product Data Model*) permet de spécifier comment sont représentées et échangées, entre deux logiciels, les données définissant un produit [ISO 10303]. Ces données peuvent être, entre autre, sa géométrie ou les tolérances ajoutées aux solides le composant (part 47 de la norme ISO 10303). Le but de la formulation STEP est de donner un modèle unique et cohérent pour la représentation et l'échange de données entre les différents métiers. Les spécification de l'échange de tolérance reprennent en partie le formalisme de la norme ASME Y14.5 [BAL 94].

1.3.2. Intégration du tolérancement dans les modeleurs CAO

Depuis que les ordinateurs ont permis de définir la géométrie d'une pièce, on a essayé d'inclure dans les modèles de solides un modèle de représentation des tolérances. L'un des premiers modèles de tolérancement ajouté à un modèle de solides est celui proposé par Requicha sur le modeleur CSG PADL-2 de l'université de Rochester [REQ 83].

Turner a proposé un modèle paramétrique CSG (GEOTOL) permettant de spécifier les tolérances comme des paramètres de variations de la géométrie nominale [TUR 87].

Tous ces modèles ne sont pas adaptés à une utilisation courante dans les milieux de la fabrication. Les modèles CSG et B-Rep ne sont pas adaptés à représenter des objets tolérancés comme le préconise la norme. Seuls les modeleurs non-manifolds le pourraient peut être [BAL 95a]. Certains modeleurs ne pourront même jamais permettre

de spécifier des tolérances. C'est le cas par exemple du modèle octree, car il ne permet même pas de spécifier la géométrie nominale. Toutefois, ce modèle est utile pour avoir une idée grossière de cette géométrie et il peut même être utilisé pour aider les calculs de balayage ou de modélisation des solides.

Il existe néanmoins de grands efforts industriels pour permettre d'intégrer le tolérancement dans un logiciel de CFAO. Notons par exemple l'intégration des SATT dans le logiciel CATIA © de Dassault Système [SAL 97]. Du module TI/TOL © de Pro-Engineer. Module développé à l'université de Young sur les travaux de Chase [GAO 95]. Une comparaison des différents outils d'aide au tolérancement dans des modélisateurs CFAO a été faite par Salomons [SAL 97]. De nombreux travaux devront encore avoir lieu afin de disposer d'outils complets permettant le traitement, à l'aide d'ordinateur, de tous les aspects du tolérancement de la conception jusqu'au contrôle du produit.

1.4. LES MODELES D'AIDE AU TOLERANCEMENT

1.4.1. Introduction

Il existe actuellement une grande demande de la part de l'industrie, d'outils permettant d'analyser et de maîtriser le tolérancement des systèmes mécaniques.

Les différentes publications qui analysent le tolérancement normalisé s'accordent pour souligner l'intérêt de celui-ci, mais aussi pour les manques et les lacunes de la normalisation du tolérancement dans sa forme actuelle et la nécessité de le faire évoluer. En effet, le tolérancement normalisé qui est construit progressivement depuis plusieurs dizaines d'années, se présente sous la forme d'une collection d'exemples de tolérancement particuliers. Cette construction conduit inévitablement à des défauts comme l'incohérence, l'ambiguïté, la contradiction, la redondance etc. La norme s'applique à des pièces isolées, elle ne fait pas référence aux conditions fonctionnelles de l'assemblage par exemple (sauf pour le maxi matière). Ainsi les normes ne proposent aucune méthode permettant de réaliser un bon tolérancement fonctionnel d'un mécanisme. Seule la méthode des chaînes de cotes permet d'effectuer des calculs de tolérances dans des cas très simples et avec un modèle très approché. Ceci montre que la détermination des tolérances est une tâche dans laquelle le concepteur est livré à lui-même, sans autre méthode que la compétence personnelle, c'est-à-dire l'expérience et

l'empirisme. A l'heure de la sous traitance et du partage des tâches, cette pratique ne peut que nuire à la qualité de la conception, donc du produit final.

L'ensemble des éléments exposés ci-dessus montre l'impérieuse nécessité de l'évolution du tolérancement normalisé.

Néanmoins, les normes de tolérancement commencent à prendre en compte les aspects d'analyse mathématique du tolérancement.

Ainsi des travaux de recherche sur le tolérancement sont menés dans beaucoup de pays industrialisés, notamment en France et aux Etats Unis. L'axe principal d'une grande partie de ces travaux est d'apporter une contribution à l'élaboration d'un système de tolérancement assisté par ordinateur. Cependant nous avons remarqué que si beaucoup de travaux sont consacrés à l'analyse du tolérancement d'une pièce, très peu de publication envisagent l'aspect fonctionnel du tolérancement et notamment l'élaboration de méthode de tolérancement basées sur les conditions fonctionnelles de mécanismes.

Nous présentons dans ce chapitre des modèles de tolérancement existants proposés par différents auteurs

1.4.2. Le tolérancement par les classes variationnelles

C'est sûrement le plus connu, étant donné qu'il est repris par les normes ANSI. Le modèle proposé par Requicha pour présenter un solide, repose sur les notions mathématiques de r -set. Ce sont des ensembles bornés, fermés, réguliers et semi-analytiques. Ces notions de r -set sont les bases des modeleurs CSG proposés par Requicha dont les opérations booléennes sont régularisées [REQ 77].

Requicha propose également la notion de classes variationnelles. Ces classe permettent de définir l'ensemble des pièces que l'on peut associer à un solide nominal et qui répondent à un même besoin fonctionnel. Généralement, une classe est obtenue par un décalage par une sphère des surfaces nominales de chaque entité composant la pièce. par une sphère. Ceci permet de définir une zone de tolérance [REQ 83].

Une spécification de tolérance est définie comme un ensemble de contraintes géométriques sur les entités de la surface d'une pièce, celles-ci s'appliquent à la géométrie nominale de la pièce.

Une pièce réelle respectera les tolérances si les entités de ses surfaces restent à l'intérieur des zones de tolérances, qui sont des régions de l'espace construites avec

décalages extérieurs et intérieurs des frontières de la pièce nominale. Ces décalages sont appelés opérations "offsets". La construction des zones de tolérances se fait de façon assez rigoureuse et uniquement à partir des faces et jamais à partir des éléments construits (des axes par exemple). Ces zones demeurent parallèles aux surfaces théoriques. De plus les zones ainsi construites permettent de remplacer toute tolérance, qu'elle soit de forme, de dimension, ou de position (orientation) par une zone "offset". Une opération "offset" sur les limites nominales d'une pièce détermine une classe variationnelle : des pièces appartenant à une même classe garantissant l'interchangeabilité des pièces sans remettre en cause les fonctions du mécanisme [TEI 95]. La figure 1.2 présente la définition de la classe variationnelle ainsi que la définition des zones de tolérances correspondant à chaque entité de la pièce.

La construction des classes variationnelles permet de définir la sémantique d'une tolérance géométrique par une règle mathématique dénommée procédure d'inspection théorique:

- T est une tolérance et P est un ensemble de E^3 qui modélise la pièce réelle,
- P est-il dans la classe variationnelle définie par T ?

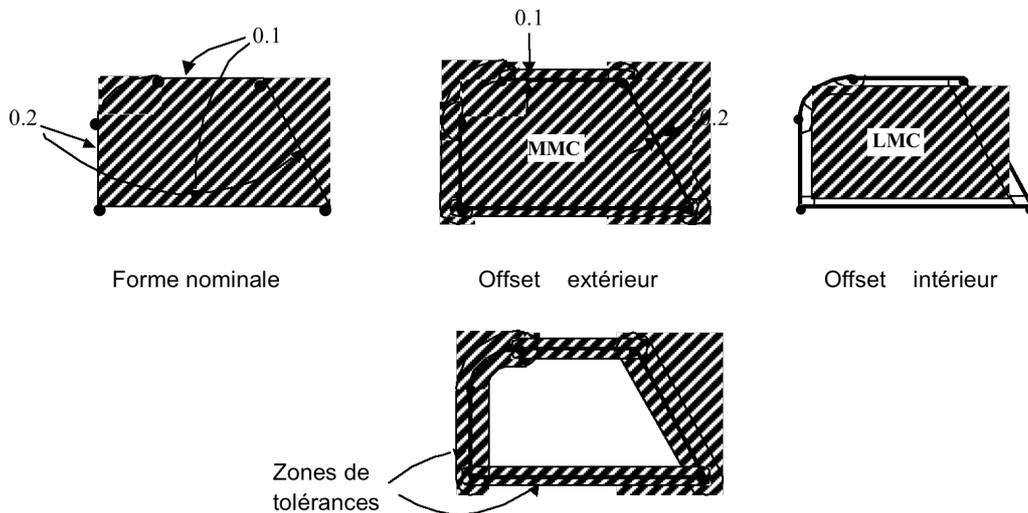


Figure 1.2. Exemple de classes variationnelles

La définition mathématique de la procédure d'inspection théorique apportée par A. Requicha a constitué un cadre pour un regard nouveau sur le tolérancement et inspiré de nombreux travaux. Parmi ceux-ci, on cite ceux de F. Etesami pour modéliser les pièces fabriqués [ETE 88] et décrire un langage formel d'expression du concept de la Norme ANSI Y14.M publié en 1982 appelé TSL (*Tolerance Specification Language*). Comme l'on souligné Farmer et Gladman, cette définition des zones de tolérances de Requicha n'était pas conforme aux spécifications de l'époque. Elle ne permettait pas, de représenter l'ensemble des spécification normalisées [FAR 86]. Notons cependant que le but de Requicha était de trouver un modèle qui permette d'exprimer une alternative aux normes de l'époque.

Srinivasan et Jayaraman reprennent la définition des classes variationnelles [JAY 89], [SRI 89]. Une partie de ces travaux a abouti à la définition mathématique de la notion de maximum et minimum de matière à l'aide d'un balayage de deux sphères sur une surface quelconque [ASME 94b].

Bien que les travaux de Requicha définissent des spécifications qui sont loin des normalisations de l'époque, ils permettent de lancer les bases d'un modèle qui s'éloigne des dépendances technologiques et propose des notions mathématiques et théoriques à l'aide d'un formalisme rigoureux pour définir les zones de tolérances.

1.4.3. Modèle des exigences fonctionnelles sur les frontières virtuelles

Cette approche, *Virtual Boundary Requirements* (VBR), qui a été proposée par Jayaraman et Srinivasan, est une continuation des travaux de Requicha. Elle traduit les besoins fonctionnelles de l'assemblage en introduisant la notion d'exigences fonctionnelles sur les frontières virtuelles [SRI 85] [JAY 89].

Ils associent à chaque surface définissant un solide, un demi-espace ainsi que des opérateurs de décalage. Cette association permet de généraliser les exigences de cotation au maximum et au minimum de matière. Ceci permet de créer des demi-espaces où la matière de la pièce doit se trouver. Une application directe est réalisée en assemblage. A l'aide de cette notion d'exigence sur les frontières virtuelles, l'analyse de l'assemblage du mécanisme se fait en étudiant la non interférence des demi-espaces générés. Ces travaux se prolongent aujourd'hui par ceux de V.Srinivasan à l'ISO.

1.4.4. Pièce virtuelle et pièce résultante

L'un des modèles de tolérancement qui utilise le plus la notion de maximum et minimum de matière est celui proposé par Robinson [ROB 98]. Il propose un ensemble de contraintes sur les tolérances définissant la pièce. Ceci permet de définir la notion de pièces au maximum et minimum de matière. Ces deux pièces sont les deux représentants de l'ensemble des pièces que l'on peut fabriquer tout en respectant les spécifications. Elle permettent de contrôler l'ensemble des pièces de la classe variationnelle car chaque pièce de la classe variationnelle doit être contenue par la pièce au minimum de matière et doit contenir la pièce au maximum de matière.

En éliminant certaines contraintes des pièces au maximum de matière, Robinson propose de définir deux pièces : la pièce résultante et la pièce virtuelle [ROB 97], [ROB 98]. Ces deux pièces n'appartiennent plus à la classe variationnelle mais elles englobent ou sont englobées par l'ensemble des solides de la classe. Les travaux de Robinson étendent donc les notions définies par Requicha et par Srinivasan et trouvent une application directe dans l'analyse et le contrôle des pièces, car la pièce au maximum de matière peut agir comme gabarit de contrôle pour l'ensemble des pièces de la classe variationnelle.

A l'instar de Srinivasan, le but de Robinson était de proposer de nouvelles règles ou de trouver une approche nouvelle utilisant les spécifications existantes. Ces règles permettent d'aider le concepteur à exprimer les besoin fonctionnels liés notamment à l'assemblage.

1.4.5. Modèles cinématiques

De nombreux modèles utilisent le fait que les variations des tolérances peuvent être modélisées à l'aide d'outils permettant de décrire la cinématique des solides. L'étude de la variation de cette cinématique permet d'analyser les variations des tolérances.

Au Canada, le professeur Clément Fortin et son équipe ont proposé un modèle cinématique de tolérancement [RIV 93a], [RIV 94a], [RIV 94b]. Il permet de répondre à une question posée par le transfert de tolérance en fabrication. Cette question est la suivante :

Etant donnée une zone de tolérance définie dans une référence A, comment calculer la valeur de cette zone de tolérance dans une nouvelle référence B, connaissant les zones de tolérances associées aux surfaces composant cette référence.

Ce modèle s'appuie sur l'analogie entre la zone de tolérance et l'espace de travail d'un robot manipulateur. Le modèle cinématique vise à modéliser l'espace dans lequel doit être confiné un élément tolérancé par une tolérance donnée. Pour modéliser une zone de tolérance, C. Fortin et L. Rivest proposent une structure cinématique similaire à celle utilisée en robotique pour caractériser un manipulateur [RIV 93a], [RIV 94b]. Les limites d'une zone de tolérance correspondent à l'enveloppe de l'espace de travail du manipulateur. En robotique, on est souvent amené à calculer l'espace de travail d'un mécanisme donné. Le problème posé par Rivest est un problème inverse qui consiste à trouver le modèle du mécanisme qui doit décrire une zone de tolérance (ou espace de travail prédéfini). Ce modèle permet de modéliser tous les types de tolérances de la norme ANSI. De plus, il permet de prendre en compte la priorité des éléments de référence pour construire la référence rattachée à la zone de tolérance.

Ce modèle est utilisé en analyse descendante ou en analyse ascendante [RIV 94a]. La première transforme les tolérances du dessin de définition du produit fini en tolérance de fabrication et vérifie si elles sont conformes aux dispersions de fabrication. La seconde fait le travail inverse, elle transforme les dispersions de fabrication en dispersion relatives reliant les mêmes éléments que les tolérances de définition, et vérifie si les dispersion sont conformes aux tolérances spécifiées.

Dans le cas de l'analyse descendante, la tolérance de fabrication est obtenue de deux façons : soit directement à partir de la tolérance du dessin de définition, si la tolérance de fabrication est reliée à la même surface que la tolérance du dessin de définition, soit par transfert de tolérance, si la tolérance du dessin de définition n'est pas reliée directement mais résulte de la combinaison de plusieurs tolérances de fabrication.

La démarche de transfert de tolérances à l'aide du modèle peut être effectuée en modélisant la chaîne de tolérances reliant le référentiel d'accueil au référentiel de la zone de tolérance en une chaîne cinématique. Cette modélisation s'effectue en modélisant chaque zone de tolérance de la chaîne de tolérances par une structure cinématique puis en reliant les différentes structures comme dans la chaîne de tolérance.

Une fois cette chaîne cinématique modélisée, on applique cinq étapes de calcul successives pour trouver la forme de la zone de tolérance après transfert.

On peut observer que l'application du transfert des tolérances abordée par Rivest était limitée à un domaine particulier. c'est l'application du transfert des tolérances au procédé d'usinage. D'autre part, la limitation du modèle cinématique est liée non pas au modèle lui-même mais à la méthode de calcul employée pour calculer la forme de zone de tolérance après transfert. De plus la méthode de calcul utilisée ne permet pas l'intégration de ce modèle dans un logiciel d'aide au tolérancement.

C'est pourquoi F. Bennis et L. Pino ont introduit une généralisation du modèle cinématique et présenter deux nouvelles méthodes pour calculer la forme de la zone de tolérance après transfert de manière analytique.

La première méthode utilise directement les matrices de transformation homogène entre la référence de définition de la zone de tolérance et la référence d'accueil. F. Bennis propose une formulation analytique permettant de vérifier si le transfert entre les deux références est possible. Autrement dit, elle permet de trouver algébriquement s'il existe ou non une zone de tolérance. Il propose en outre une deuxième équation donnant la frontière de la zone de tolérance après transfert [BEN 97], [BEN 98].

Dans sa thèse L. Pino propose une généralisation de cette méthode en utilisant des outils issus de la robotique et notamment les propriétés de la matrice jacobienne de l'organe terminal du mécanisme pour calculer l'espace de travail de ce dernier. A partir de l'étude de cet espace, on peut déduire d'une part si le transfert est possible, et d'autre part la forme de la zone de tolérance après transfert [PIN 99a], [PINO 00].

On en déduit que les deux méthodes proposées par Bennis et Pino aboutissent aux mêmes résultats que Rivest.

En conclusion, malgré la nouveauté du modèle cinématique, on peut constater une complexité importante au regard des méthodes employées pour calculer la forme de la zone de tolérance. D'autre part, les approches basées sur ce modèle n'ont abordés que la modélisation des types de tolérances de localisation et orientation de la norme ANSI. Il faudrait examiner si le modèle cinématique permet une modélisation de n'importe quelle tolérancement, en particulier des types de tolérances géométriques proposées par la norme ISO.

1.4.6. Les espaces de faisabilité

Un modèle de description des chaînes de côtes sous forme d'espace de paramètres est proposé par J.U. Turner [TUR 87]. Le support de ce modèle est un modèleur variationnel où sont paramétrés les défauts. La variation de la géométrie est un ensemble de contraintes définissant une région de faisabilité de l'espace des paramètres. Cette région qui vérifie les conditions fonctionnelles est appelée "l'espace de faisabilité". De plus les espaces de faisabilité sont des moyens pour une présentation mathématique des tolérances de localisation, d'orientation et de forme [TUR 93]. Prenons l'exemple suivant pour mieux comprendre cette approche. Il s'agit d'une tolérance de dimension et de parallélisme entre deux plan fig. 1.3.

On peut distinguer deux types de données : les paramètres du modèle et les variables de tolérances. Pour cet exemple M_1, M_2 sont des paramètres de contrôle pour la localisation et l'orientation de la surface tolérancée, tandis que les variables de tolérances T_1, T_2, T_3 permettent de construire les espaces de faisabilité fig1.4

L'affectation d'une tolérance de parallélisme entre les deux plans implique que la combinaison des deux tolérance (localisation et orientation) ne doit pas dépasser la tolérance admissible, sinon la pièce sera rebutée. Celle-ci se traduit par l'écriture des équations illustrées dans la figure 1.3.

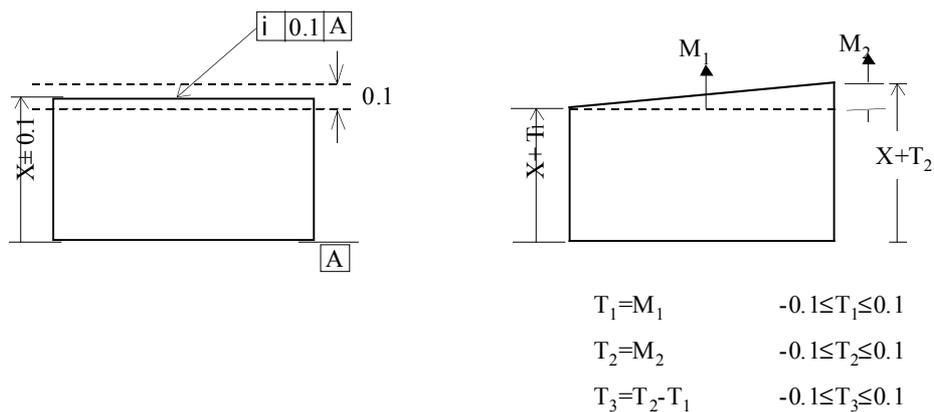


Figure 1.3 Tolérances de dimension et de parallélisme, paramétrage et contraintes associés

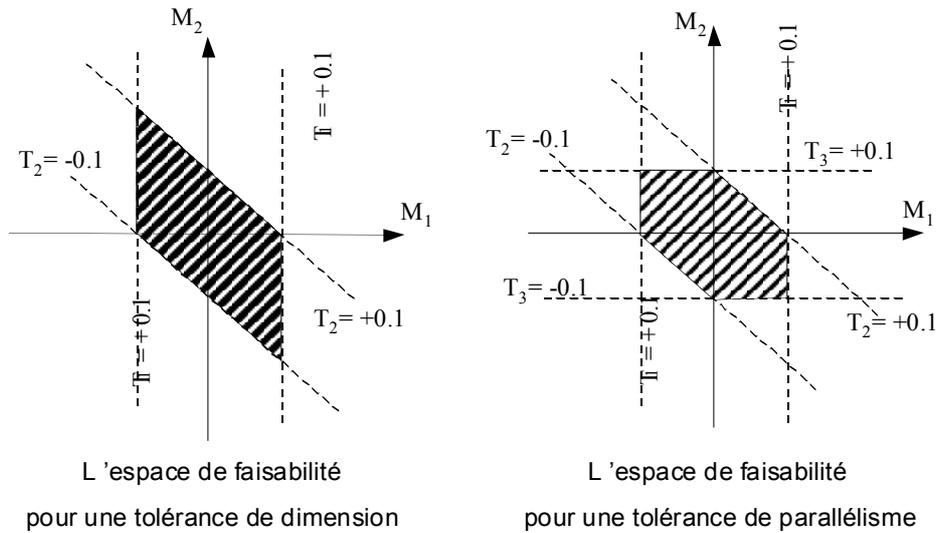


Figure 1.4 L'approche par les "feasibility space"

Une tolérance de forme peut être représentée suivant le même principe, mais cela suppose la "discretisation" d'une ligne ou d'une surface au point M_i pour définir la variable T_i [TUR 93]. Des techniques de maillage sont utilisées [GUP 93]. Cette méthode est très lourde à mettre en œuvre et nécessite un calcul de chaque point. De plus, la méthode de modélisation des défauts de forme proposée ne permet que d'effectuer une très grossière approche d'une spécification de forme normalisée.

1.4.7. Le tolérancement vectoriel

Cette approche a été proposée par A. Wirtz en 1989 [WIR 89]. Dans son modèle, Wirtz définit deux types de zones de tolérances (position et orientation) liées à la description de la géométrie réelle d'une pièce usinée. Ces zones comportent les zones de tolérances standardisés pour les tolérances de dimension, de position, d'orientation et de forme. Dans ce modèle, toute surface est positionnée par un point et un vecteur dans un repère de référence non-ambigu lié à la pièce fig. 1.5. Quatre vecteurs indépendants sont donc utilisés pour modéliser l'état et la situation d'une entité. Un vecteur pour la position, un pour l'orientation, un pour la forme et un pour la dimension. A chacun de ces vecteurs sont associés deux paramètres, l'un pour l'état nominal et l'autre pour sa déviation. La surface réelle est donc décrit par addition de ces vecteurs caractérisant la surface nominale et ses écarts.

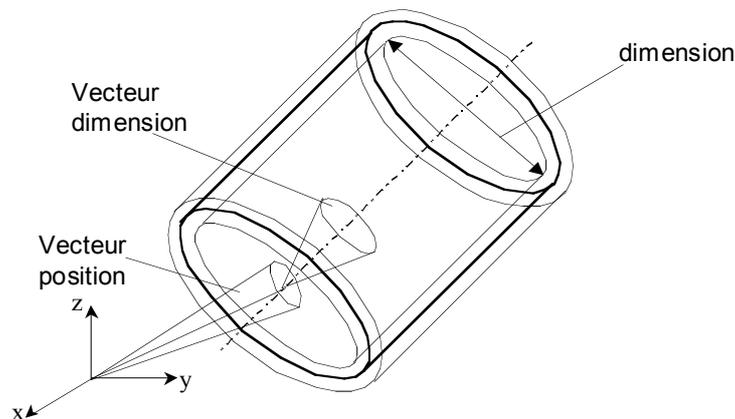


Figure 1.5 Modèle vectoriel de Wirtz

Le contrôle des différentes tolérances sur la pièce s'appuie sur l'association d'une surface théorique à la surface réelle tolérancée.

L'avantage de ce type de description est d'avoir la possibilité de lier les défauts des surfaces à leur défauts de fabrication [WIR 91]. Ceci permet une détermination aisée des correction à apporter en fabrication.

Cette approche ne respecte pas les spécifications normalisées mais elle est d'un grand intérêt pour la fabrication car très proche des défauts de machines.

1.4.8. Les Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement

1.4.8.1. Introduction

Le concept de surfaces associées technologiquement et topologiquement (SATT) a été introduit en 1986 par A. Clément. Ce modèle a donné lieu à de nombreux travaux sur la cotation dont les thèses de A. Desrochers [DES 91], A. Rivier [RIV93] et D. Gaunet [GAU 94], qui ont contribué au développement de SATT, ainsi qu'un ouvrage entièrement dédié au SATT [CLE 94].

Le modèle est basé sur des concepts mathématiques issus de la théorie des mécanismes et du torseur des petits déplacements développé par P. Bourdet et A. Clément [BOU 87], [CLE 88]. La méthode utilise le modèle de spécification par surface associée de même nature que la surface nominale. Les défauts de forme sont inclus dans les défauts

de position ou dans les défauts de taille (principe de l'enveloppe). Les éléments tolérancés peuvent être représentés par des éléments parfaits (plan, droite, point).

1.4.8.2. Modèle de base de déplacements

Le tolérancement de position de pièces mécaniques peut être décrit par les incertitudes portant sur les paramètres définissant la position relative d'éléments géométriques parfaits [GAU 94].

La cotation de position ne se limite pas à la définition de la position d'une surface par rapport à un repère orthonormé. Dans la majorité des cas, il s'agit de définir la position relative de deux surfaces [CLE 94]. Ce problème revient à gérer le positionnement et le déplacement entre surfaces. Le déplacement relatif d'une surface de forme parfaite associée à une surface fabriquée par rapport à une surface nominale peut être décrit à l'aide d'un torseur, appelé torseur de petits déplacements.

On est donc amené à s'intéresser à la notion de groupe de déplacements et plus particulièrement de sous groupe de déplacements. Tout déplacement laissant une surface globalement invariante est associée à un sous-groupe de déplacements.

On recense 11 types de sous groupes et 7 classes de surfaces globalement invariantes associées aux sous groupes. Sachant que plusieurs sous groupes peuvent être associés à la même classe de surface.

Chaque classe de surface est caractérisée par un ensemble minimum d'éléments géométriques tels que le point, la droite, le plan ou l'hélice, permettent de définir la position de toutes les surfaces de la classe [CLE94]. Cet ensemble d'éléments est appelé EGRM (pour Élément Géométrique de Référence Minimum). Par exemple pour la classe des surfaces cylindriques invariantes pour un déplacement coaxial de rotation et translation, l'EGRM sera l'axe de rotation, seul paramètre géométrique invariant.

Les sept classes de surface et leurs EGRM sont représentées dans le tableau 1.2.

1.4.8.3. Définition du concept :

A. Clément définit un SATT comme une paire de surfaces ou une paire composée d'une surface et d'un SATT ou encore une paire de SATT appartenant au même solide et associés pour des raisons fonctionnelles [CLE 94].

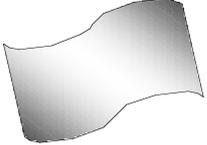
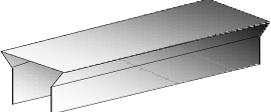
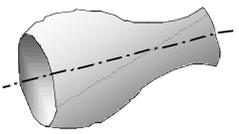
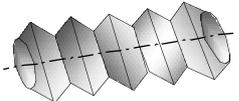
Classe de surfaces	Dimension	Sous-groupe laissant la surface invariante
Surface quelconque 	0	Déplacement nul
Surface prismatique 	1	Translation unidirectionnelle
Surface de révolution 	1	Rotation autour d'un axe
Surface hélicoïdale 	1	Mouvement hélicoïdal
Surface cylindrique 	2	Mouvement de pivot glissant
Surface plane 	3	Mouvement plan sur plan
Surface sphérique 	3	Rotation sphérique

Tableau 1.2 Les 7 classes de surfaces et le groupe de déplacement associé

Un SATT est créé en cherchant les déplacements laissant invariant l'ensemble constitué de l'union de deux surfaces (ou SATT), autrement dit, le SATT correspond à l'intersection de deux sous-groupes associés aux surfaces.

A partir des sept classes de surfaces, les auteurs ont dénombré 28 cas de positionnement relatif de deux surfaces. Pour chacun de ces cas, un certain nombre de paramètres scalaires sont nécessaires et suffisants.

Si l'on considère l'association de deux surfaces élémentaires, le SATT obtenu est en quelque sorte une surface "composée" qui appartient obligatoirement à l'une des sept classes de surfaces. Les auteurs appellent reclassement, l'opération qui consiste à rechercher la classe du SATT construit.

La classe du SATT dépend des classes des surfaces qui le composent mais aussi de leur positionnement relatif, c'est à dire de la valeur donnée aux paramètres de positionnement.

Prenons comme exemple le SATT composé de deux cylindres (qui est un des 28 cas d'association possible). En fonction de la valeur donnée aux deux paramètres de positionnement (l'angle et la distance entre axes), il peut se reclasser dans trois classes différentes :

- Surface prismatique lorsque les axes des deux cylindres sont parallèles
- Surface cylindrique lorsque les axes des deux cylindres sont coaxiaux
- Surface complexe lorsque les axes des deux cylindres sont quelconques.

Les axes sont les EGRM des surfaces cylindriques.

Ainsi selon les relations entre les EGRM des surfaces combinées, le reclassement du SATT produit sera différent.

La classe du SATT détermine le type d'EGRM à lui associer, muni de son EGRM le SATT peut à son tour être positionné par rapport à une surface ou un autre SATT et peut donc à son tour devenir composante d'un SATT.

Les paramètres de positionnement des surfaces qui composent le SATT sont considérés comme les paramètres dimensionnels internes de SATT.

En étudiant la classe obtenue pour chacun des 28 cas d'association de deux surfaces (ou de deux SATT ou encore d'une surface et d'un SATT), 44 cas de reclassement ont été dénombrés. A chacune des 7 classes de SATT, un EGRM est associé pour définir la mise en position.

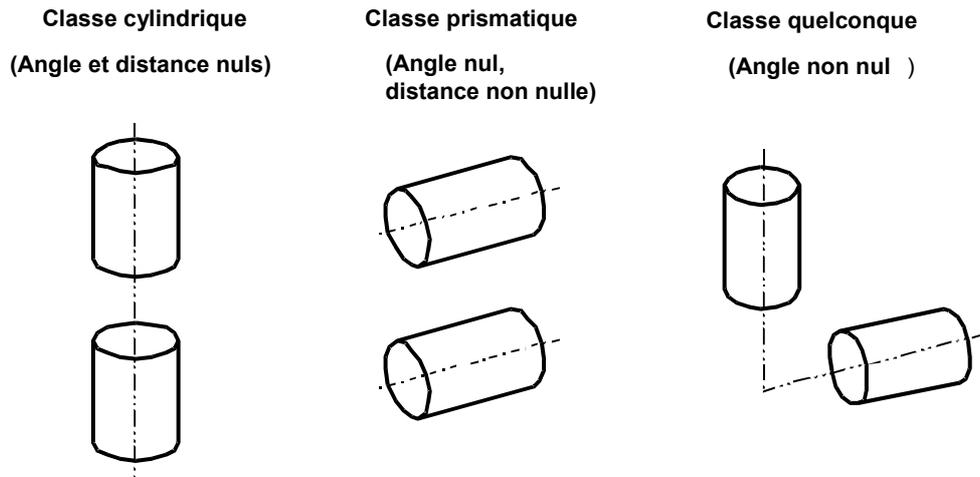


Figure 1.6 Reclassement de l'association de deux cylindres

Un torseur de petits déplacements laissant la position d'un SATT invariante par rapport au repère orthonormé direct de référence est appelé "torseur de liberté". Un torseur de liberté relatif de deux SATT est défini d'une manière analogue. En ajoutant de l'incertitude sur les valeurs des composantes d'un torseur de liberté, on définit un torseur de tolérancement. Une chaîne de mise en position est déterminée à l'aide de la loi d'addition des torseurs fig.1.7

Par ajouts successifs de toutes les surfaces fonctionnelles d'une pièce, on obtient un SATT final de la pièce auquel est associé un EGRM pièce noté EGRM_P. Le SATT final définit la classe d'une pièce [GUN 94] (voir figure 1.8).

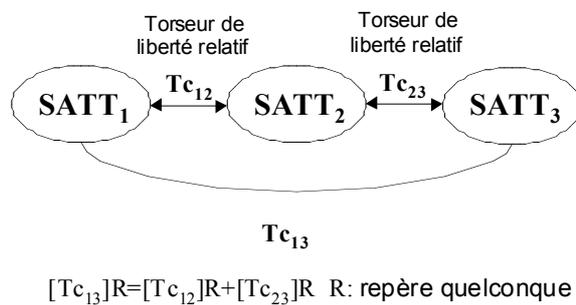


Figure 1.7 Chaîne de mise en position (d'après [GAU 94])

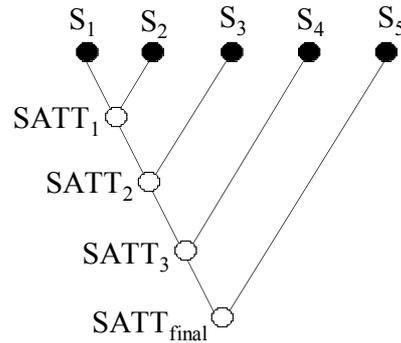
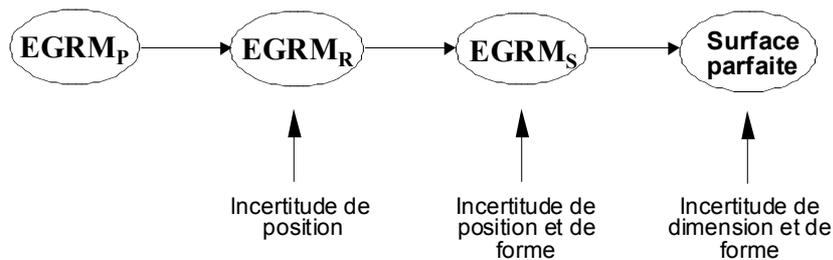


Figure 1.8 SATT final d'une pièce composée de cinq surfaces fonctionnelles (d'après [GAU 94])

En ajoutant un maillon correspondant à l'EGRM d'un mécanisme (EGRM_M), toute surface fabriquée est positionnée dans le mécanisme. Ce maillon est ajouté à l'extrême gauche de la chaîne de la figure (1.9).

Une contribution à la modélisation de l'assemblage de mécanismes est réalisée, ceci conduit à introduire la notion de contact, deux types de contact sont alors distingués : le contact fixe et le contact flottant. Le contact est fixe lorsqu'il n'y a aucun mouvement relatif possible entre les deux pièces. Le contact est flottant dans tout les autres cas [GAU 94].



EGRM_S: EGRM associé à la surface parfaite modélisant la surface fabriquée.

EGRM_R: EGRM associé au SATT représentant la référence spécifiée par rapport à laquelle la surface réelle est mise en position.

EGRM_P: EGRM associé à la surface parfaite modélisant la surface fabriquée

Figure 1.9 Chaîne de positionnement d'une surface au sein d'une pièce (d'après [GAU 94])

La présentation de la méthode sous forme d'écart ponctuel présente l'inconvénient d'avoir à discrétiser les surfaces. Cette discrétisation conduit aussi à générer des ensembles de contraintes importantes, 2000 pour 4 pièces, qui donnent lieu à des problèmes d'optimisation [BAL 95]. On retombe sur des difficultés analogues à celles rencontrés par Turner.

On peut noter dans cette méthode des limites liées au fait que les surfaces sont associées par paires. Si plusieurs surfaces élémentaires constituent un ensemble unique entité géométrique fonctionnelle (cas des groupes de trous présenté par la norme), il est impossible avec le modèle de SATT de toutes les associer en même temps. L'association par paires crée alors des hiérarchies arbitraires qui ne sont pas fonctionnelles en général. Cependant, cette approche présente une avancée vers l'objectif de la synthèse des tolérances.

1.4.9. Lois de comportement géométrique d'un mécanisme

C'est l'approche issue des travaux de recherche du P. Bourdet et E. Ballot [BAL 95a] [BAL 95b] [BAL 98]. Dans sa thèse E. Ballot propose au concepteur un outil basé sur la connaissance de comportement du mécanisme d'une part et celle des conditions fonctionnelles d'autre part. Ces dernières étant données pour un ensemble de configurations du mécanisme.

La détermination des spécifications des pièces d'un mécanisme doit être effectuée à partir des conditions fonctionnelles. Cette spécification est réalisée dans l'espace à trois dimensions des mécanismes. Les spécifications dimensionnelles ou géométriques sont des contraintes sur un ensemble des pièces de mécanisme. La réalisation d'une spécification comporte donc la détermination de ce système de contraintes. Les conditions fonctionnelles exprimées sur des pièces ou entre les pièces d'un mécanisme sont la source de ces spécifications. Pour les calculer il faut par conséquent chercher les lois qui gèrent le comportement du mécanisme avec défauts, c'est à dire, qui relient les défauts et les conditions fonctionnelles. Le modèle développé a précisé cet objectif [BAL 95a].

Chaque pièce est considérée de forme parfaite (défaut de forme négligé). Le modèle utilise le principe de surface associée qui est de même nature que la surface nominale et tangente extérieurement à la matière par rapport à la surface réelle pour garantir

l'assemblabilité. Une pièce est décomposée en surfaces élémentaires (plans, cylindres, cônes, sphères et tores). Un repère local est associé à chacune des surfaces composant la pièce. La construction d'un tel repère est comparable à la définition d'un EGRM des sous groupes de déplacements des SATT. Un torseur de petits déplacements d'écarts est associé à chacune des surfaces considérées. Les composantes d'un torseur laissant une surface globalement invariante sont considérées comme indéterminées. Cette modélisation permet d'exprimer la position relative entre deux surfaces quelconques : si elles appartiennent à la même pièce, on parle alors de torseur défaut et si elles appartiennent à deux pièces distinctes on parle de torseur jeu.

Un mécanisme est modélisé par un graphe de liaisons, ceci afin d'écrire les chaînes de défauts et de jeux pour chaque boucle.

La composition des torseurs de chaque chaîne de positionnement permet de relier le déplacement de la pièce réelle par rapport à son modèle nominal et ceci pour chaque surface.

Un opérateur d'intersection est défini par l'écriture de l'unicité du torseur de petits déplacements de la pièce réelle par rapport à son modèle nominal. Cet opérateur permet de spécifier des caractéristiques communes qui sont le domaine des écarts entre deux surfaces ou entre un ensemble de surfaces considérées de la pièce. A partir de ce principe, on peut formuler un système d'équations linéaires. L'application du pivot partiel de Gauss fait apparaître un ensemble de contraintes. Ces contraintes sont des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un torseur de petits déplacements global de la pièce. Ces conditions sont en fait l'expression de la cotation tridimensionnelle de la pièce.

Le tolérancement d'une pièce équivaut alors à la détermination des conditions qui contraignent l'assemblage du modèle de la pièce réelle sur le modèle nominal. Ce principe, traduit par l'opérateur d'intersection des écarts, donne toutes les possibilités de cotation entre n surfaces d'une même pièce. L'application de cet opérateur au jeu entre deux pièces calcule le paramétrage du torseur jeu.

Un opérateur est également défini pour calculer l'ensemble des petits déplacements issus de chaque liaison. Cet opérateur utilise la propriété d'unicité du déplacement de la pièce. En appliquant ce principe, après avoir exprimé tous les torseurs des petits

déplacements au même point, on obtient un système de $6(n-1)$ équations à résoudre par rapport aux indéterminées des liaisons.

La résolution de ce système d'équations linéaires de petits déplacements est obtenue par l'application de la méthode du pivot partiel de Gauss.

De la même manière que pour l'opérateur d'intersection, on a une combinatoire de positionnement possible pour chaque pièce. Cette combinatoire est directement liée à l'isostatisme ou l'hyperstatique de mise en position de la pièce d'un mécanisme.

Il en résulte une complexité du développement qui est proportionnelle au nombre de pièces et de liaisons. Ainsi le système d'équations obtenu accentue considérablement le niveau de complexité.

1.4.10. L'union pondéré d'espace de liberté (UPEL)

C'est un des derniers des modèles pour la cotation fonctionnelle tridimensionnelle. Le concept de l'union pondérée d'espaces de liberté est issu des travaux de l'équipe du laboratoire de mécanique physique de l'université de Bordeaux.

De nombreux travaux ont été réalisés [TEI 92], [COU 93] dont le dernier paru en 1995 dans le cadre de la soutenance de la thèse de D. Teissandier [TEI 95].

Une UPEL est un ensemble de six intervalles centrés sur "zéro" caractérisant les bornes de déplacement admissibles entre deux surfaces idéales de forme parfaite à l'intérieur desquels peuvent varier les composantes du torseur de petits déplacements, modélisant l'orientation et la position relative entre les deux surfaces idéales, dans un repère donné et un point donné [TEI 95].

Afin de pouvoir générer les chaînes de côtes tridimensionnelles, un mécanisme est décomposé en pièces puis les pièces sont décomposées en surfaces fonctionnelles élémentaires (plan, cylindre, cône ...). Ceci est justifié par le fait que le tolérancement géométrique implique la description d'une pièce en surfaces. De plus il convient de modéliser les liaisons entre les pièces d'un mécanisme par le biais de contacts entre les surfaces de pièces, un graphe est alors construit dont les arcs correspondent aux U.P.E.L et les sommets aux surfaces du mécanismes. Deux types d'U.P.E.L se distinguent, les U.P.E.L internes et les U.P.E.L externes. Les U.P.E.L internes permettent de modéliser la position relative entre une surface fabriquée et la surface nominale (en négligeant les défauts de formes). Elles contribuent à définir la géométrie d'une pièce. Les UPEL

externes permettent de modéliser la position relative entre deux surfaces de deux pièces différentes. Elles contribuent à définir la cohésion d'un mécanisme en modélisant les contacts entre les surfaces fonctionnelles des pièces.

A l'aide des lois de composition d'U.P.E.L, l'union et l'intersection, il est possible de déterminer la position relative entre deux surfaces quelconques [TEI 95].

Pour la mise en oeuvre de cet outil, un exemple d'un mécanisme sous forme d'une étude théorique et expérimentale a été réalisé.

1.4.11. Conclusion

Les travaux qui viennent d'être brièvement présentés ne sont pas exhaustifs. Leur diversité est telle qu'il est difficile d'en faire la synthèse. Il faudrait tout d'abord les classer pour les comparer. Or suivant le critère retenu ce classement peut être différent. Pour notre part, nous pouvons nous baser sur le niveau de simplification suivant les hypothèses du modèle. Voici par exemple différents choix possibles pouvant bien sûr être combinés :

- prise en compte ou non du défaut de forme. En général on suppose qu'il y a un défaut de forme mais tous les calculs concernent les surfaces associées.
- les écarts de géométrie correspondent à des grands déplacements (formalisme des matrices de passage) ou à des petits déplacements (formalisme des torseurs),
- on s'intéresse à la représentation ou à la vérification des tolérances (on étudie une pièce) ou à leur analyse ou encore à leur détermination (on étudie un mécanisme)
- on étudie le cas le plus défavorable ou bien les aspects statistiques sont pris en compte.

Ces travaux montrent également que les différents aspects liés au tolérancement sont très liés. Par exemple on ne peut faire la synthèse de tolérances sur un mécanisme que si on est capable d'en faire l'analyse. Dans les deux cas, un modèle de définition et de représentation des tolérances doit être défini. Or la norme ISO ne correspond pas exactement à un modèle au sens où elle n'est pas définie de façon axiomatique et donc générale, mais à partir d'exemples. Il faut donc soit construire un modèle qui risque d'être difficilement applicable pratiquement s'il est trop éloigné de la norme, soit

donner une interprétation aux spécifications normalisées différentes de leur sens initial normalisé mais correspondant à un modèle strict et exploitable.

En ce qui concerne les aspects quantitatifs, l'approximation des petits déplacements est en général assez bien justifiée pratiquement et nous semble une bonne approche simplificatrice au moins dans un premier temps. De la même façon le cas le plus défavorable doit, de notre point de vue, pouvoir être traité avant le tolérancement statistique qui sera à priori plus complexe.

CHAPITRE 2

MODELE DE TOLERANCEMENT DES MECANISMES

Introduction

Le fondement théorique de notre modèle de tolérancement est basé sur des concepts et développements mathématiques issus de la théorie des mécanismes. Pour cela, il nous paraît utile de rappeler le modèle de base pour l'étude des mécanismes. Ce modèle servira de support à un modèle plus complexe et que nous avons défini pour la représentation des écarts de la géométrie des pièces et pour l'analyse des assemblages des pièces qui constituent un mécanisme.

2.1. MODELE DE BASE

2.1.1. Définition

Un mécanisme est constitué de solides et de liaisons. Nous classons les liaisons en deux types : celles en contact surfacique et celles en contact linéaire ou ponctuel. La géométrie des pièces est supposée parfaite (sans écart entre réel et nominal). Les liaisons sont sans jeu. Elles sont aussi sans frottement (liaisons parfaites). Cela interviendra dans l'aspect dynamique. Les solides sont également indéformables.

Pour un mécanisme formé de n solides (y compris le bâti) et p liaisons, nous considérons une approche cinématique, puis statique.

L'étude cinématique définit les notions de chaîne cinématique. Elle s'intéresse aux relations entre vitesses relatives des solides du mécanisme. Elle permet de définir la notion de mobilité.

L'étude statique permet de déterminer les inter-efforts de liaisons et utilise la notion de liaison et d'équilibre d'un système isolé.

Dans l'étude dynamique, nous tenons compte en outre des effets inertiels par la prise en compte des masses, position des centres de masses, moments et produits d'inertie et des accélérations.

Nous nous référons dans ce chapitre aux résultats de l'étude cinématique et statique du modèle de base qui servent pour l'étude de notre modèle de tolérancement "domaine jeu et domaine écart".

2.1.2. Etude cinématique

Pour un mécanisme donné, à chaque liaison, un torseur cinématique est associé, c'est le torseur des vitesses du mouvement relatif compatible avec la liaison.

Soit k_i le nombre de degrés de liberté de la liaison i . Le nombre total des inconnues cinématiques des liaisons (les vitesses angulaires et linéaires) est égal au nombre total de degrés de liberté des liaisons.

$$I_c = \sum_1^p k_i$$

A partir du graphe du mécanisme, nous pouvons extraire les boucles indépendantes. Le nombre de celles ci noté μ est le nombre minimal de boucles tel que toutes les pièces et toutes les liaisons soient prises en compte. On montre que :

$$\mu = p - n + 1$$

Par exemple, pour $p = n$ nous obtenons une boucle simple, il y a un seul cycle indépendant.

Les équations cinématiques sont obtenues en utilisant les théorèmes de compositions de vitesses. Pour chaque boucle indépendante extraite du mécanisme, on peut écrire une relation entre torseurs cinématiques de la forme :

$$\sum C_{ij} = 0$$

Où C_{ij} représente le torseur des vitesses du solide j par rapport au solide i à un instant donné du mouvement donc pour une configuration donnée du mécanisme. La somme est étendue aux liaisons successives dans la boucle. Les boucles sont indépendantes dans la mesure où elles conduisent à des relations indépendantes entre les torseurs.

En projetant dans un repère donné, on obtient les équations scalaires cinématiques. Le nombre de ces équations est égal à :

$$E_c = 6(p - n + 1)$$

Soit r_c le rang du système cinématique, ce système linéaire d'équations peut être écrit sous une forme matricielle, nous aurons:

$$E_c \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{c} \text{Matrice} \\ \text{principale} \end{array} \right]}^{r_c} \quad \overbrace{\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]}^{m_c} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{I_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système comporte r_c inconnues principales et r_c équations principales. Ce système comporte donc $E_c - r_c$ équations supplémentaires et $I_c - r_c$ inconnues supplémentaires (non principales). La somme des torseurs cinématiques pour chaque boucle est nulle. Cela signifie qu'il n'y a pas de conditions de comptabilité puisque le système est homogène (le second membre est nul). La mobilité du mécanisme est alors donnée par la relation suivante :

$$m_c = I_c - r_c$$

La mobilité m_c est définie de façon générale comme le nombre des variables cinématiques indépendantes ou le nombre de degrés de liberté du mécanisme assemblé.

2.1.3. Etude statique

A chaque liaison on associe un torseur d'inter efforts dont le nombre d'inconnues scalaires est $6-k_i$ pour une liaison à k_i degrés de liberté, puisque les liaisons sont parfaites. Nous pouvons appliquer le principe fondamental de la statique à chaque solide en considérant que les efforts, autres que ceux de liaisons, sont connus (efforts extérieurs au mécanisme). Nous obtenons un système linéaire non homogène comportant E_s équations et I_s inconnues qui sont données par les relations suivantes :

$$E_s = 6(n - 1) \text{ (On n'isole pas le bâti)}$$

$$I_s = \sum_1^p (6 - k_i).$$

L'analyse de ce système permet de définir le caractère du mécanisme quant à son degré de mobilité et son ordre d'hyperstaticité. Ce système n'est pas homogène, car dans le second membre il faut placer les efforts extérieurs.

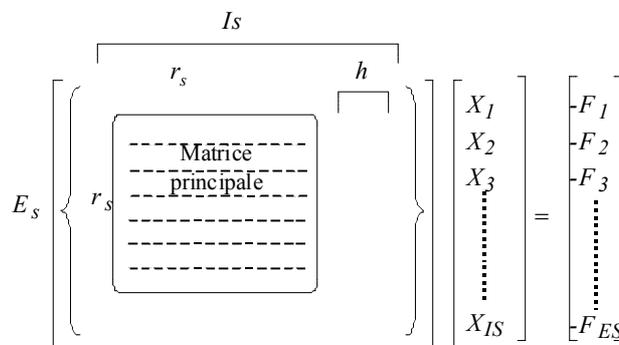
Soit r_s le rang du système statique. Ce dernier peut être donné également sous une forme de matrice.

Dans ce système, le nombre d'inconnues supplémentaires (inconnues hyperstatiques) h est donné par :

$$h = I_s - r_s$$

et le nombre d'équations supplémentaires ou nombre de conditions de compatibilité est égal à :

$$E_s - r_s$$



On remarque que dans le cas de la dynamique, les résultats restent valables. Mais dans les seconds membres sont regroupés les efforts extérieurs et les composantes des torseurs dynamiques.

Théorème : Le nombre de conditions de compatibilité du système d'équations de la statique est égal à la mobilité du mécanisme.

La démonstration est ici abordée dans le cas dynamique. Le théorème reste valable dans le cas particulier de la statique.

Les m_c inconnues de mouvement que la cinématique n'a pas permis de déterminer seront données par la solution du système d'équations différentielles du mouvement qui sont des relations dans lesquelles les inconnues de liaisons n'interviennent pas. Ce sont donc les relations linéaires entre les seconds membres du système d'équations de la dynamique, donc les conditions de compatibilité.

Nous pouvons également démontrer ce théorème en appliquant la méthode des équations de Lagrange pour un champ de vitesses virtuelles compatibles avec les relations cinématiques, donc compatibles avec toutes les liaisons. Il y a m_c variables cinématiques indépendantes. Nous obtenons donc m_c équations de Lagrange, donc m_c équations de mouvement.

Nous en déduisons des relations simples qui permettent de relier les résultats globaux de l'approche cinématique et de l'approche dynamique. En particulier la formule de mobilité qui s'écrit :

$$m_c - h = E_s - I_s = I_c - E_c$$

La formule de mobilité permet le calcul assez rapide du degré d'hyperstaticité ou la validation du degré de mobilité calculé souvent à partir d'une simple étude topologique du mécanisme. On trouvera dans [LEB 74] et [AUB 92] des études plus détaillées sur le sujet.

2.2. MODELE DE MECANISMES AVEC ECARTS DE GEOMETRIE

Comme pour le modèle de base, il est possible de proposer pour le modèle de mécanismes avec la prise en compte des défauts géométriques, deux approches, une cinématique et une autre statique.

Dans un premier temps, nous allons exposer les hypothèses nécessaires pour la mise en œuvre des deux approches.

Hypothèses générales du modèle

Le modèle est défini par les hypothèses suivantes :

- Nous considérons des mécanismes constitués de solides supposés rigides. Autrement dit, nous supposons que les déformations sous charges sont négligeables par rapport aux écarts de géométrie.
- Nous supposons que la géométrie n'est pas parfaite, par contre les surfaces de liaisons sont supposées sans défaut de forme. Par exemple, une surface nominale cylindrique sera modélisée par un cylindre parfait. Cette hypothèse permet de simplifier l'étude en conservant la topologie des surfaces nominales, donc d'utiliser toutes les propriétés qui y sont attachées.

Pratiquement pour prendre en compte cette hypothèse, nous associons à chaque surface réelle une surface théorique que nous appelons la surface associée, qui est de même type que la surface nominale correspondante fig.2.1.

En fait, l'association de la surface associée est obtenue suivant un critère préalablement défini. Différents critères d'association pourraient être utilisés, nous pouvons citer :

- le critère du défaut de forme minimal,
- le critère du volume minimal entre le réel et le théorique,
- le critère des moindres carrés.

D'autre part, nous pouvons imposer à la surface associée d'être située du côté libre de la matière. Ceci est particulièrement justifié pour assurer l'assemblage des pièces. Par contre cette association implique que des spécifications normalisées différentes définies par des tolérances géométriques se confondent au cours de l'analyse du fait de la modélisation. Ainsi une tolérance de coaxialité et une tolérance de battement peuvent être modélisées et analysées de la même manière.

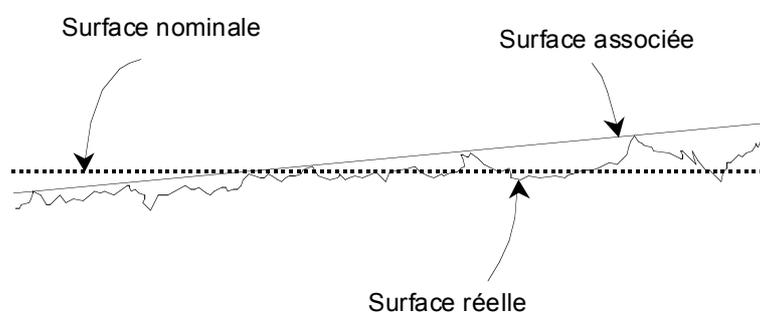


Figure 2.1 Surface réelle, surface associée, surface nominale

Les entités de surface d'un solide sont donc caractérisées dans ce modèle par leurs dimensions propres (si elles existent) et par leurs positions relatives.

Chaque pièce est donc décomposée en plusieurs surfaces élémentaires. Celles ci peuvent présenter deux types de défauts qui sont :

- Des défauts de dimensions. Ce sont des écarts de paramètres intrinsèques qui sont limités par les tolérances de taille (variation de rayon d'un cylindre par exemple).
 - Des défauts de position et d'orientation exprimés par des petits déplacements entre la position nominale et la position réelle. Ainsi ils sont limités par les tolérances dites géométriques, sachant que ce type d'écart n'a de sens que pour deux surfaces tolérancées (écart relatif), ainsi que pour un groupe de surfaces, ou encore pour une surface par rapport à un système de référence construit à partir d'autres surfaces.
- Enfin, nous supposons que les écarts de position et d'orientation entre les surfaces associées et les surfaces nominales d'une même pièce ou les défauts dus aux jeux dans une liaison sont suffisamment petits. Ceci pour admettre que la linéarisation au premier ordre soit valable. Ainsi, la faible amplitude des défauts par rapport aux dimensions nominales des pièces permet en particulier d'utiliser les torseurs de petits déplacements.

2.3. APPROCHE PAR LES EQUATIONS DE TOLERANCEMENT

2.3.1. Introduction

Les équations de tolérancement ont été introduites par E. Ballot dans [BAL 95a]. La construction systématique des équations de tolérancement est présentée ici sous une forme originale par construction d'un modèle issu du modèle élémentaire de la théorie des mécanismes. En effet, elles sont une généralisation au cas tridimensionnel des chaînes de cotes classiques. Dans ce paragraphe, nous présentons cette approche en détaillant la démarche de la construction des équations de tolérancement. D'autre part, nous montrons quel est l'intérêt attendu de ces équations du point de vue de la détermination des tolérances géométriques des mécanismes.

2.3.2. Outils de modélisation

Compte tenu de l'hypothèse qui vient d'être énoncée, les petits déplacements dus aux écarts de géométrie d'une pièce par rapport sa géométrie nominale, ainsi que ceux dus aux jeux inter pièces seront exprimés par des torseurs de petits déplacements résultant des travaux de P.Bourdet [BOU 88], A.Clement [CLE 91].

La modélisation des défauts par des torseurs de petits déplacements nécessite de définir des repères liés aux surfaces associées et des repères liés aux surfaces nominales. Deux types de torseurs sont alors définis : un torseur jeu entre deux solides distincts et un torseur d'écart. entre deux surfaces d'un même solide. Ces deux torseurs sont les outils essentiels de l'approche d'équations de tolérancement. La figure 2.2. montre les différents repères et torseurs que nous ferons apparaître pour un mécanisme.

2.3.3. Quelques définitions et notations

Nous allons définir le vocabulaire et les conventions de notations afin de simplifier la démarche de l'approche ainsi que les études de cas qui vont suivre.

Les mécanismes sont composés de solides liés les uns aux autres par une ou plusieurs liaisons.

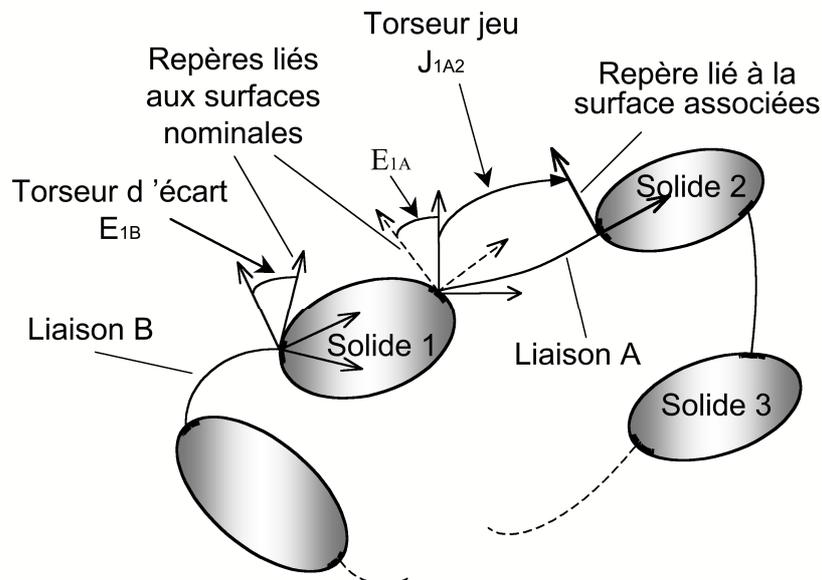


Figure 2.2 Solides et liaisons, repères, torseurs jeu et d'écart

Nous différencions les liaisons uniques entre deux solides et les liaisons multiples, dites liaisons en parallèle. Nous utiliserons souvent un graphe qui permet de représenter les différentes pièces du mécanisme, les liaisons ainsi que leurs caractéristiques fig.2.3

Ce graphe permet aussi d'identifier rapidement les surfaces à prendre en compte selon les conditions fonctionnelles étudiées.

Nous utiliserons en indice les lettres de l'alphabet A, B, \dots pour désigner les liaisons et les chiffres 0, 1, .. pour désigner les solides du mécanisme.

Les torseurs et leurs composantes seront désignés de la façon suivante :

La première lettre en majuscule indique la nature du torseur, la deuxième lettre indique la nature de la composante et les termes en indice indiquent les liaisons et les solides concernés.

Nous utiliserons les symboles α, β, γ pour indiquer un petit angle de rotation autour des axes $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ respectivement, et u, v, w pour indiquer un petit déplacement de translation suivant les axes $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ respectivement.

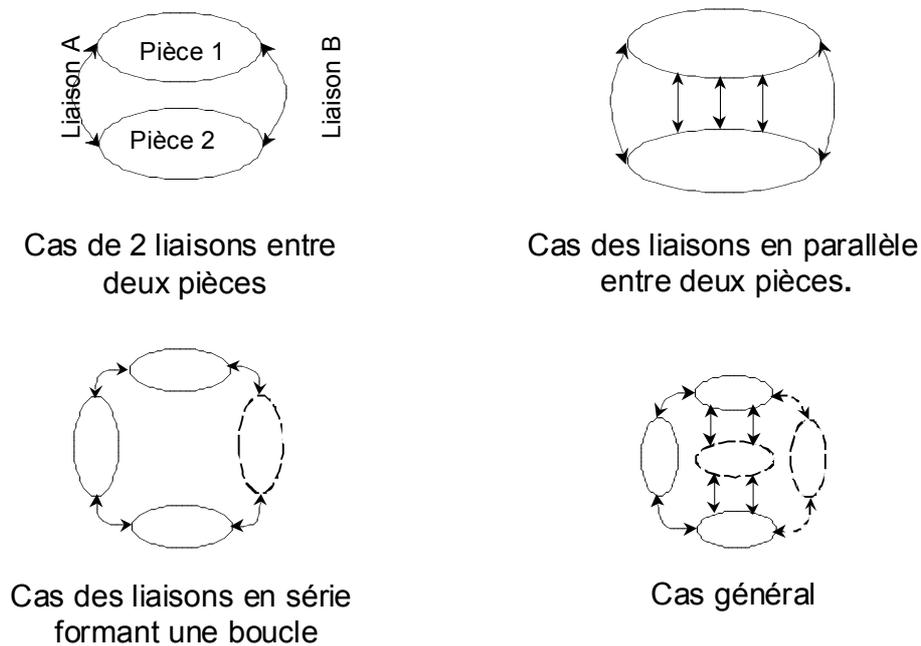


Figure 2.3 Liaisons en série ou en parallèle et graphe de liaisons

Un torseur jeu de la liaison A entre les solides 1, 2 sera noté :

$$J_{1A2} = \begin{bmatrix} J_{\hat{a}1A2} & J_{u1A2} \\ J_{\hat{v}1A2} & J_{v1A2} \\ J_{\hat{w}1A2} & J_{w1A2} \end{bmatrix}$$

Un torseur d'écart relatif résultant des écarts entre les repères nominaux et les repères réels des deux surfaces A, B du solide 1 sera noté :

$$E_{A1B} = \begin{bmatrix} E_{\hat{a}A1B} & E_{uA1B} \\ E_{\hat{v}A1B} & E_{vA1B} \\ E_{\hat{w}A1B} & E_{wA1B} \end{bmatrix}$$

Ces torseurs vont être définis précisément dans les prochains paragraphes.

2.3.4. Torseur jeu

2.3.4.1. Définition

Considérons un mécanisme constitué de deux solides dont les surfaces réelles ne coïncident pas. Donc les liaisons sont avec jeu.

Nous appelons torseur jeu pour une liaison donnée entre deux pièces distinctes le torseur de petits déplacements entre les repères liés à chacune des surfaces associées formant la liaison en question.

Nous supposons que ce jeu existe ou est nul à la limite, puisqu'un serrage serait en contradiction avec l'hypothèse d'indéformabilité des pièces.

Nous notons J_{1A2} le torseur jeu entre les pièces 1 et 2 de la liaison A . Ce torseur peut être décomposé en deux torseurs :

$$J_{1A2} = J_{A2} - J_{A1}$$

où J_{A2} est le torseur de petits déplacements d'une surface commune de référence A par rapport à la surface associée appartenant au solide 2. De même pour J_{A1} au solide 1 fig.2.4.

La surface commune A est la surface théorique qui correspond au modèle sans écarts de géométrie.

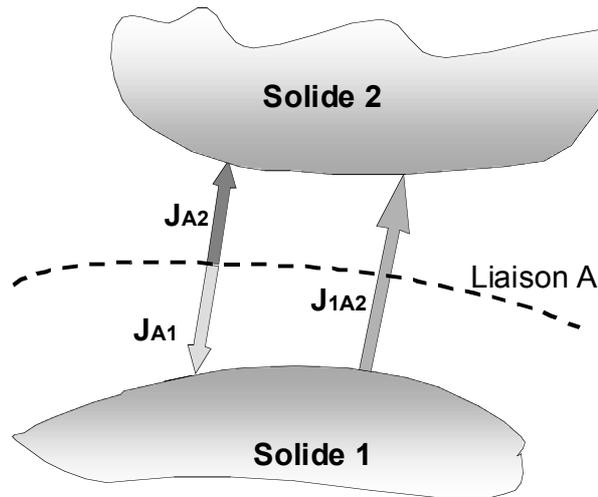


Figure 2.4 Définition du torseur jeu

2.3.4.2. Composantes du torseur jeu

Pour une liaison avec jeu, le torseur jeu possède en général 6 variables. Dans ce torseur nous pouvons distinguer deux types de variables, celles qui correspondent aux degrés de liberté de la liaison parfaite (variables cinématiques), et celles qui correspondent à des jeux. Les valeurs des variables relatives aux degrés de liberté ne sont pas limitées, nous les supposons inconnues (I_c le nombre total d'inconnues). Tandis que les valeurs des variables relatives aux jeux sont limitées par les conditions de contact dans la liaison, nous les supposons connues (même si en pratique, elles le sont rarement).

Pour définir un torseur jeu, nous devons choisir une configuration de référence entre les deux solides et un repère lié à chacun des solides.

Précisons que la configuration de référence pour la liaison est obtenue lorsque les repères liés aux surfaces associées sont en coïncidence. Ceci correspond donc à un torseur jeu nul.

Le torseur jeu peut donc être écrit comme étant la somme de deux torseurs, nous posons donc :

$$J = J' + J''$$

où le premier torseur noté J' est un torseur compatible avec la liaison sans jeu dont les composantes de petits déplacements sont relatives aux degrés de liberté. Le deuxième

est noté J'' , ses composantes correspondent véritablement au jeu. Ce dernier torseur est nul pour une liaison parfaite. A titre d'exemple, pour une liaison pivot glissant d'axe \vec{x} , le torseur jeu s'écrit sous la forme suivante:

$$J = \overbrace{\begin{bmatrix} C_a & C_u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{J'} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_a & J_v \\ J_w & J_w \end{bmatrix}}^{J''}$$

où C_a représente un petit angle de rotation autour de l'axe \vec{ox} , C_u est une petite translation le long de cet axe. Ces petits déplacements sont compatibles avec la liaison parfaite. J_b, J_γ représentent respectivement des petits angles de rotation autour des axes \vec{y} et \vec{z} . Les termes J_v, J_w sont respectivement des petites translations pour un point O de l'axe du cylindre. Le torseur est écrit au point O. Ces petits déplacements sont permis par le jeu entre l'arbre et l'alésage. Leur valeur précise dépend de la géométrie des surfaces en contact et de la configuration de référence entre les deux solides.

Il est utile de préciser que par la suite les composantes cinématiques correspondantes aux degrés de liberté seront toujours intégrées dans le torseur jeu. Par contre, nous ferons apparaître explicitement ces composantes lorsque nous cherchons les équations de tolérancement qui seront détaillées plus loin.

2.3.5. Torseur d'écart

2.3.5.1. Définition

Nous appelons torseur d'écart d'une surface d'un solide le torseur des petits déplacements entre un repère lié à la surface en position nominale arbitraire et le repère lié à la surface réelle. Le tableau 2.1 indique les torseurs d'écarts associés aux surfaces les plus courantes et qui possèdent des caractéristiques d'invariances par déplacement.

Comme pour le torseur jeu, le torseur d'écart d'une surface avec défauts possède 6 composantes quelconques. Ainsi nous distinguons deux types de composantes, celles qui correspondent aux variables des écarts de géométrie réelle par rapport à la nominale, et celles qui correspondent à des variables indéterminées. Ces dernières sont des variables non mesurables mais leurs valeurs peuvent être fixées arbitrairement.

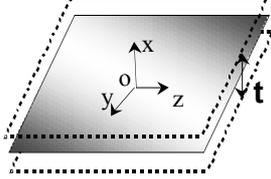
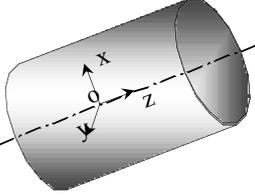
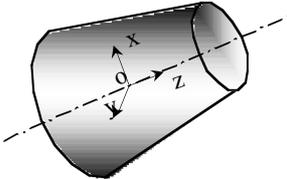
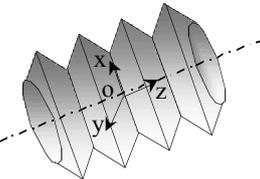
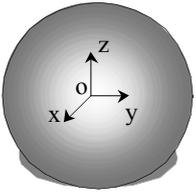
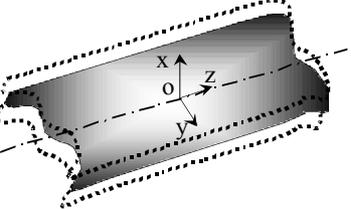
Nom	Illustration	Torseur d'écart associé
Surface plan		$E = \begin{matrix} I_\alpha & E_u \\ E_{\hat{a}} & I_v \\ E_{\hat{a}} & I_w \end{matrix}$
Cylindre de révolution		$E = \begin{matrix} E_\alpha & E_u \\ E_\beta & E_v \\ I_\gamma & I_w \end{matrix}$
Surface de révolution cône		$E = \begin{matrix} E_\alpha & E_u \\ E_\beta & E_v \\ I_\alpha & E_w \end{matrix}$
Surface hélicoïdale		$E = \begin{matrix} E_\alpha & E_u \\ E_\beta & E_v \\ E_\gamma + I_\gamma & E_w + pI_\gamma \end{matrix}$
Surface sphériques		$E = \begin{matrix} I_\alpha & E_u \\ I_\beta & E_v \\ I_\gamma & E_w \end{matrix}$
Surface quelconque		$E = \begin{matrix} E_\alpha & E_u \\ E_\beta & E_v \\ E_\gamma & E_w \end{matrix}$

Tableau 2.1 Les torseurs d'écarts associés aux surfaces les plus courantes

En effet, les variables indéterminées ressemblent en quelque sorte aux composantes relatives aux degrés de liberté intégrées dans le torseur jeu.

Par exemple, pour une surface cylindrique de révolution d'axe \vec{z} (voir tableau 2.1), le torseur d'écart exprimé au point O de l'axe \vec{z} s'écrit sous la forme suivante :

$$E = \underset{O}{\begin{bmatrix} E_{\dot{\alpha}} & E_u \\ E_{\dot{\beta}} & E_v \\ I_{\dot{\alpha}} & I_w \end{bmatrix}}$$

où E_{α} et E_{β} sont des petites rotations autour des axes \vec{x} et \vec{y} respectivement, E_v et E_w sont des petites translations suivant les axes \vec{x} et \vec{y} respectivement. I_{γ} et I_w sont des variables indéterminées.

Le choix des repères des surfaces et du repère de référence pour un solide permettra de fixer les valeurs de certaines ou même de toutes les variables indéterminées.

En pratique, dans le cas où le solide comporte plus de deux surfaces, il est difficile de fixer toutes ces variables pour pouvoir annuler des composantes d'écarts relatifs. Néanmoins, pour des cas simples, on s'arrange pour construire un repère de référence en fixant certaines ou toutes ces variables indéterminées, de façon que l'on puisse annuler des composantes d'écarts.

Nous verrons plus loin des exemples qui peuvent montrer comment certaines de ces variables peuvent être annulées par le choix de repère.

2.3.5.2. Torseurs d'écarts associés aux surfaces simples

On peut remarquer que pour la liaison hélicoïdale, la composante indéterminée I_{γ} intervient à la fois pour l'écart de rotation autour de l'axe \vec{z} et pour l'écart de déplacement suivant cet axe. On peut annuler un de ces deux écarts mais pas les deux à la fois.

2.3.5.3. Torseur d'écart relatif

Un solide étant défini à un déplacement près, la position nominale est à priori indéterminée. La notion de torseur d'écart n'a donc de sens que s'il existe pour le solide au moins deux surfaces tolérancées. On définira donc un torseur d'écart d'une surface

par rapport à une autre, d'une surface par rapport à un système de référence construit à partir d'autres surfaces ou encore pour une surface d'un groupe par rapport à une référence commune à ce groupe.

Pour cela, il s'avère utile de définir un autre torseur d'écart appelé torseur d'écart relatif et que nous allons définir à travers l'exemple démonstratif suivant :

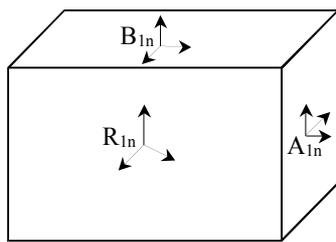
Soit un solide (1_n) dénommé nominal de géométrie parfaite comportant des surfaces A , B ,... etc. R_{In} un repère lié au solide. Ce repère est construit sur la géométrie, à partir d'un axe de révolution ou d'un plan de symétrie par exemple. Il peut être le repère principal d'inertie pour un solide homogène.

Prenons aussi un solide (1_r) dénommé réel qui ne diffère pas trop du solide nominal, R_{Ir} un repère qui lui est lié.

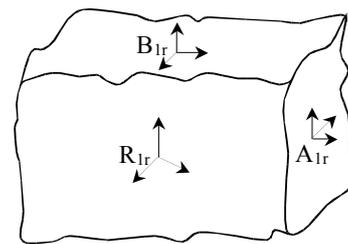
Nous construisons également un repère sur chacune des surfaces associées du solide réel, ainsi que sur chacune des surfaces du solide nominal. Notons que les repères liés au solide réel et au solide nominal sont construits de la même façon fig.2.5. Ils ne diffèrent que par un petit déplacement.

Nous déplaçons le solide nominal ou le solide réel en faisant coïncider les repères R_{In} et R_{Ir} . Les écarts des surfaces A et B peuvent alors être définis par deux torseurs des petits déplacements E_{IA} et E_{IB} fig.2.6.

Nous appelons torseur écart relatif noté E_{AIB} , le torseur des petits déplacements résultant des écarts entre la position nominale et réelle des deux surfaces A et B .



Solide nominal et 3 repères qui lui sont associés



Solide réel et 3 repères associés construits de la même façon que pour la pièce nominale

Figure 2.5 Repères, solide réel et solide nominal

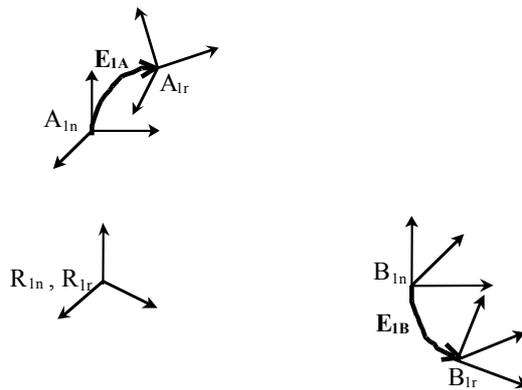


Figure 2.6 Repère nominal et repère réel du solide sont en coïncidence.

Ce torseur permet alors de caractériser les défauts de géométrie entre deux surfaces appartenant au même solide. Il peut être écrit sous la forme suivante :

$$E_{AIB} = E_{AI} + E_{IB}$$

Supposons que nous déplaçons le solide nominal de telle sorte qu'il y ait un petit déplacement entre les repère des solides nominal et réel, nous aurons alors deux autres torseurs d'écarts E'_{1A} , E'_{1B} qui seront différents des E_{1A} et E_{1B} fig.2.7.

Par contre, si nous déplaçons le solide nominal de manière à faire coïncider le repère nominal avec celui du réel d'une des surfaces A ou B , dans ce cas le torseur d'écart d'une des deux surfaces sera nul. fig.2.8.

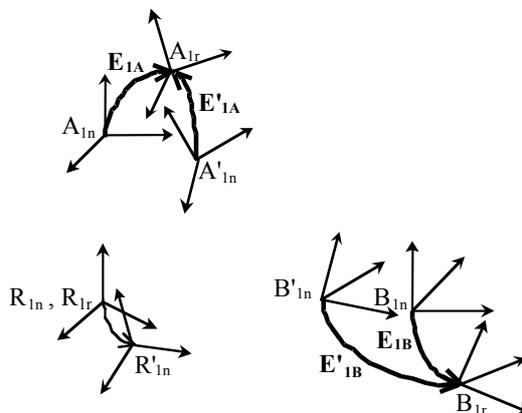


Figure 2.7 Repère nominal et réel du solide ne sont pas en coïncidence

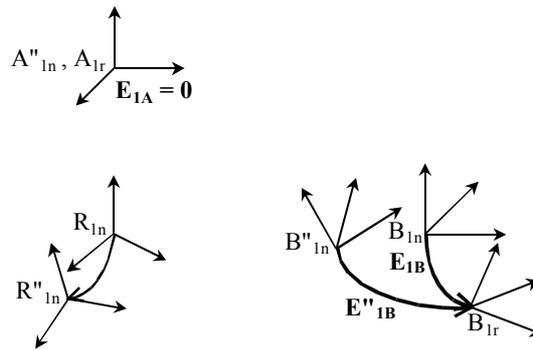


Figure 2.8 Repère nominal et réel de la surfaces A sont en coïncidence

Nous en déduisons qu'il y a plusieurs façons de construire le repère lié au solide. Autrement dit, le repère de référence peut être indéterminé, il peut être lié à une des surfaces du solide ou enfin construit à partir de plusieurs surfaces (référence commune). Or pour un solide donné et quel que soit le repère de référence, les torseurs d'écarts entre deux surfaces sont identiques. Ainsi un seul torseur d'écart permet donc d'exprimer les écarts par rapport à la position relative des deux surfaces. Ceci est admis à condition que les torseurs correspondent à des petits déplacements.

$$E_{A1B} = E_{1B} - E_{1A} = E'_{1B} - E'_{1A} \quad ;$$

$$\forall E'_{1B} = \text{ou} \neq E_{1B}, E'_{1A} = \text{ou} \neq E_{1A} \text{ et } \forall R$$

Ainsi dans le cas particulier où le repère de référence est lié à la surface elle-même, le torseur d'écart de la surface en question est nul.

2.3.5.4. Forme du torseur d'écart

La forme d'un torseur d'écart géométrique dépend des types de surfaces. Autrement dit, pour un torseur d'écart des deux surfaces fonctionnelles, ses composantes sont déterminées en fonction de la position nominale relative de ces deux surfaces. D'autre part, selon la position nominale relative des surfaces, nous pourrons choisir les repères liés aux surfaces ainsi qu'un repère de référence de manière à annuler les variables indéterminées du torseur d'écart. Cela permettra de simplifier la forme du torseur d'écart, donc l'étude du problème.

Nous trouvons dans [CLE 94] une étude systématique des positions relatives de deux surfaces fonctionnelles.

Prenons l'exemple d'un solide comportant deux surfaces cylindriques de révolution, nous pouvons distinguer deux cas :

Cas 1 : Cylindres en position nominale quelconque

Afin de définir les torseurs d'écarts, nous devons associer un repère à chacune des surfaces selon la figure 2.9.

a) Ecriture des torseurs d'écarts :

Les torseurs d'écarts des surfaces aux points A et B appartenant aux axes des cylindres s'écrivent:

$$E_{1A} = \begin{bmatrix} E_{\alpha A} & E_{uA} \\ E_{\beta A} & E_{vA} \\ I_{\gamma A} & I_{wA} \end{bmatrix}_A$$

$$E_{1B} = \begin{bmatrix} E_{\alpha 1B} & E_{u1B} \\ I_{\gamma 1B} S_{\alpha} + E_{\beta 1B} C_{\alpha} & I_{w1B} S_{\alpha} + E_{v1B} C_{\alpha} \\ I_{\gamma 1B} C_{\alpha} - E_{\beta 1B} S_{\alpha} & I_{w1B} C_{\alpha} - E_{v1B} S_{\alpha} \end{bmatrix}_B$$

où $C_{\alpha} = \cos\alpha$ et $S_{\alpha} = \sin\alpha$.

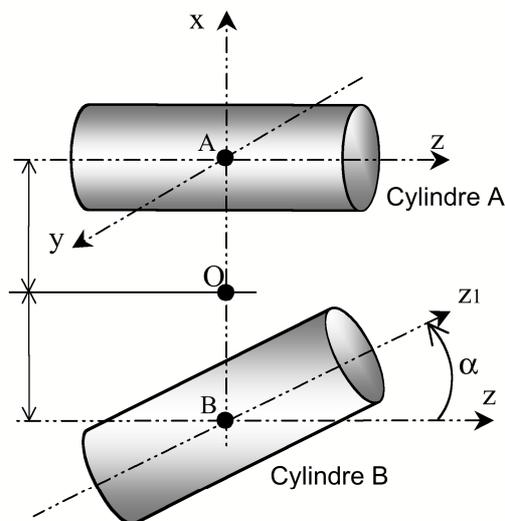


Figure 2.9 Deux cylindres en position nominale quelconque

En reportant ces torseurs au point O, qui se trouve sur l'axe perpendiculaire aux deux axes des cylindres, et au milieu du segment AB, nous obtenons :

$$E_{1A} = \begin{bmatrix} E_{\alpha 1A} & E_{u1A} \\ E_{\beta 1A} & E_{v1A} - eI_{\gamma 1A} \\ I_{\gamma 1A} & eE_{\beta 1A} + I_{w1A} \end{bmatrix}$$

$$E_{1B} = \begin{bmatrix} E_{\alpha 1B} & E_{u1B} \\ I_{\gamma 1B} S_{\alpha} + E_{\beta 1B} C_{\dot{a}} & I_{w1B} S_{\alpha} + E_{v1B} C_{\alpha} + e(E_{\beta 1B} S_{\alpha} - I_{\gamma 1B} C_{\alpha}) \\ I_{\gamma 1B} C_{\alpha} - E_{\beta 1B} S_{\alpha} & I_{w1B} C_{\alpha} - E_{v1B} S_{\alpha} - e(E_{\beta 1B} C_{\dot{a}} + I_{\gamma 1B} S_{\alpha}) \end{bmatrix}$$

On en déduit le torseur d'écart relatif E_{A1B} :

$$E_{A1B} = \begin{bmatrix} E_{\alpha 1B} - E_{\alpha 1A} & E_{u1B} - E_{u1A} \\ I_{\gamma 1B} S_{\alpha} + E_{\beta 1B} C_{\dot{a}} - E_{\beta 1A} & I_{w1B} S_{\alpha} + e(I_{\gamma 1A} - I_{\gamma 1B} C_{\alpha}) + eE_{\beta 1B} S_{\alpha} + E_{v1B} C_{\alpha} - E_{v1A} \\ I_{\gamma 1B} C_{\alpha} - E_{\beta 1B} S_{\alpha} - I_{\gamma 1A} & I_{w1B} C_{\alpha} - e(I_{w1A} + I_{\gamma 1B} S_{\alpha}) - e(E_{\beta 1B} C_{\dot{a}} + E_{\beta 1A}) - E_{v1B} S_{\alpha} \end{bmatrix}$$

b) Choix du repère de référence

Nous nous apercevons que le torseur d'écart E_{1AB} comporte 4 variables indéterminées qui sont $I_{\gamma 1A}$, $I_{\gamma 1B}$ et I_{w1A} , I_{w1B} . Nous sommes donc amené à choisir le repère de référence de façon que nous puissions annuler des composantes du torseur E_{A1B} par le choix judicieux de ces variables. Pour cela, nous pourrions construire un repère de référence à partir de la perpendiculaire commune et d'un des axes des cylindres. Dans le cas présent le choix du repère conduira à fixer les 4 variables indéterminées. De ce fait les composantes de rotations et translations suivant les axes \vec{y} et \vec{z} pourront être choisies nulles.

En effet, nous pourrions considérer que ces composantes représenteront 4 équations qui nous permettront de déterminer les 4 variables inconnues $I_{\gamma 1A}$, $I_{\gamma 1B}$ et I_{w1A} , I_{w1B} . Ceci peut être traduit par les relations suivantes :

$$I_{\gamma 1B} S_{\alpha} + E_{\beta 1B} C_{\dot{a}} - E_{\beta 1A} = 0 \quad \text{d'où } I_{\gamma 1B}$$

$$I_{\alpha 1B} C_{\dot{a}} - E_{\alpha 1B} S_{\alpha} - I_{\alpha 1A} = 0 \quad \text{d'où } I_{\alpha 1A}$$

$$I_{w1B} S_{\alpha} + e(I_{\gamma 1A} - I_{\gamma 1B} C_{\alpha}) + eE_{\beta 1B} S_{\alpha} + E_{v1B} C_{\alpha} - E_{v1A} = 0 \quad \text{d'où } I_{w1B}$$

$$I_{w1B} C_{\alpha} - e(I_{w1A} + I_{\gamma 1B} S_{\alpha}) - e(E_{\beta 1B} C_{\dot{a}} + E_{\beta 1A}) - E_{v1B} S_{\alpha} = 0 \quad \text{d'où } I_{w1A}$$

En reportant ces torseurs au point O, qui se trouve sur l'axe perpendiculaire aux axes des deux cylindres, au milieu de AB, nous obtenons :

$$E_{1A} = \begin{matrix} \text{O} \\ \left[\begin{array}{cc} E_{\alpha 1A} & E_{u1A} \\ E_{\beta 1A} & E_{v1A} - eI_{\gamma 1A} \\ I_{\gamma 1A} & eE_{\beta 1A} + I_{w1A} \end{array} \right] \end{matrix} \qquad E_{1B} = \begin{matrix} \text{O} \\ \left[\begin{array}{cc} E_{\alpha 1B} & E_{u1B} \\ E_{\beta 1B} & eI_{\gamma 1B} + E_{v1B} \\ I_{\gamma 1B} & I_{w1B} - eE_{\beta 1B} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Le torseur d'écart relatif E_{A1B} dans le repère $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ s'écrit alors :

$$E_{A1B} = \begin{matrix} \text{O} \\ \left[\begin{array}{cc} E_{\alpha 1B} - E_{\alpha 1A} & E_{u1B} - E_{u1A} \\ E_{\beta 1B} - E_{\beta 1A} & E_{v1B} - E_{v1A} + e(I_{\gamma 1B} + I_{\gamma 1A}) \\ I_{\gamma 1B} - I_{\gamma 1A} & I_{w1B} - I_{w1A} - e(E_{\beta 1B} + E_{\beta 1A}) \end{array} \right] \end{matrix}$$

b) Choix du repère de référence

Le raisonnement du choix de repère dans ce cas est identique à celui du cas précédent. Puisque les cylindres sont nominalement parallèles nous choisirons un repère de référence à partir de la perpendiculaire à un des deux axes arbitraires. Nous aurons alors deux composantes pour caractériser l'écart angulaire et une pour l'écart de distance entre les axes.

D'autre part, étant donné que nous avons 3 équations, nous ne pourrions donc fixer que 3 variables indéterminées parmi les 4 du torseur d'écart E_{A1B} . Ainsi la variable que nous ne pourrions pas annuler est I_{wA1B} qui correspond à la translation suivant \vec{z} . Cela paraît évident puisque les cylindres sont parallèles, nous avons donc une mobilité de degré 1 suivant la direction \vec{z} et nous ne pourrions pas annuler la composante indéterminée correspondante. D'où le torseur d'écart :

$$E_{A1B} = \begin{matrix} \text{O} \\ \left[\begin{array}{cc} E_{\alpha A1B} & E_{uA1B} \\ E_{\beta A1B0} & 0 \\ 0 & I_{w1B} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Nous venons de montrer que la forme du torseur d'écart dépend bien des types des surfaces. Ainsi un choix adéquat du repère de référence lié à la pièce réelle, permet de simplifier la forme du torseur d'écart, et d'avoir le moins possible de composantes caractérisant les écarts entre deux surfaces, tout en annulant les variables indéterminées.

D'autre part, nous verrons que pour obtenir les équations de tolérancement, il n'est pas nécessaire de chercher à annuler les variables indéterminées car celles-ci seront regroupées avec les composantes cinématiques relatives aux degrés de liberté du torseur jeu. Par contre, lorsque nous nous intéresserons dans le chapitre suivant à la construction du domaine écart d'une surface, il sera utile, du point de vue pratique, d'annuler ces variables indéterminées et de considérer seulement les composantes caractérisant les écarts géométriques.

2.3.6. Conditions de compatibilité

Nous avons vu que pour le modèle de base, les équations cinématiques sont obtenues en s'appuyant sur les lois de compositions de vitesses. Or ces lois restent valables en terme de petits déplacements. Ainsi la composition de deux petits déplacements s'obtient en faisant la somme des torseurs de petits déplacements. C'est la linéarisation qui le permet.

De la même façon qu'il était possible d'écrire E_c relations cinématiques pour le modèle de base, il sera donc possible d'écrire $E_c = 6(p-n+1)$ relations entre les composantes des torseurs jeux et torseurs d'écarts. Nous considérerons toujours que les variables correspondant aux degrés de liberté de la liaison parfaite sont les inconnues du problème. Il y a donc toujours $I_c = \sum k_i$ inconnues. Ainsi, le rang du système est le même. Mais cette fois les seconds membres ne sont plus nuls. Ils sont formés des composantes des torseurs d'écarts et des torseurs jeux, après avoir éliminé les composantes correspondant aux degrés de liberté. Il y a donc $E_c - r_c$ conditions de compatibilité à vérifier.

Nous appellerons équations de tolérancement les conditions de compatibilité obtenues. Ce sont des relations linéaires entre les composantes de torseurs jeux et des torseurs d'écarts de positions relatives des surfaces de liaisons. Les variables de déplacements associées aux degrés de liberté et qui sont compatibles avec les liaisons parfaites ont donc été éliminées.

D'autre part, nous avons vu que $m_c - h = I_c - E_c$ et comme $m_c = I_c - r_c$, nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème : *Le nombre de conditions de compatibilité ou équations de tolérancement est égal au degré d'hyperstatisme du mécanisme.*

$$h = m_c - I_c + E_c = E_c - r_c$$

Nous verrons par la suite, comment les équations de tolérancement d'un mécanisme pourront permettre de déterminer quelles sont les composantes de déplacements qui doivent être tolérancées. Nous pourrons ainsi, spécifier qualitativement les tolérances géométriques qui garantissent l'assemblage.

Nous concluons que si le système mécanique est isostatique, il y a pas d'équations de tolérancement. De plus, nous savons en conception que pour assurer l'assemblage et le fonctionnement d'un système hyperstatique, nous devons d'une part respecter un certain nombre de contraintes géométriques entre les surfaces de liaisons et d'autre part prévoir des jeux suffisants si nous voulons que le système fonctionne sans précontrainte. Cela explique que les jeux doivent en quelque sorte "compenser" les écarts. Nous obtenons ici une démonstration rigoureuse et quantitative de cette propriété pressentie qualitativement.

Par ailleurs, si nous considérons un modèle de liaisons sans jeu mais où les solides sont déformables, nous déterminons h équations de déformations pour calculer les h inconnues hyperstatiques. Les torseurs qui caractérisent les déformations entre deux surfaces de liaison d'un même solide joueront le même rôle que les torseurs d'écarts. A ce sujet, nous pouvons nous référer par exemple aux travaux de recherches présentés par S. Samper dans [SAM 01].

2.3.6.1. Cas de mécanisme formant une boucle simple

Le mécanisme considéré ici est constitué de solides liés les uns aux autres par des liaisons uniques, dites liaisons série, et formant une boucle fermée fig. 2.11.

Après avoir construit des repères associés à chacune des surfaces de liaisons de la boucle, nous pouvons écrire une relation sous la forme d'un produit de matrices de passage que nous appelons équations de fermeture de boucle. Avec l'hypothèse des petits déplacements, nous obtenons une équation linéaire entre torseurs jeux et torseurs d'écarts.

Par exemple, pour une structure telle que celle schématisée dans la figure 2.11, l'équation entre torseurs peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2C} + J_{2C3} + E_{C3D} + J_{3D0} + E_{D0A} = 0$$

soit :

$$J_{0A1} + J_{1B2} + J_{2C3} + J_{3D0} = E_{A0D} + E_{D3C} + E_{C2B} + E_{B1A}$$

d'où de manière générale :

$$\Sigma J_i = \Sigma E_j$$

Les sommes ΣJ_i et ΣE_j sont étendues à la succession de solides et de liaisons qui composent la boucle.

L'équation de fermeture de boucle peut être utilisée pour déterminer quelles sont les composantes des torseurs d'écarts qu'il est nécessaire de limiter, de façon à définir un tolérancement sous l'aspect qualitatif. Ceci peut être réalisé selon le raisonnement suivant.

Comme nous l'avons déjà souligné, dans les torseurs jeux apparaissent deux types de variables, celles qui correspondent aux degrés de liberté de la liaison parfaite, dont les valeurs ne sont pas limitées et que nous supposeront inconnues (I_c nombre total d'inconnues) et celles qui correspondent à des jeux et dont les valeurs sont limitées par les conditions de contact dans la liaison.

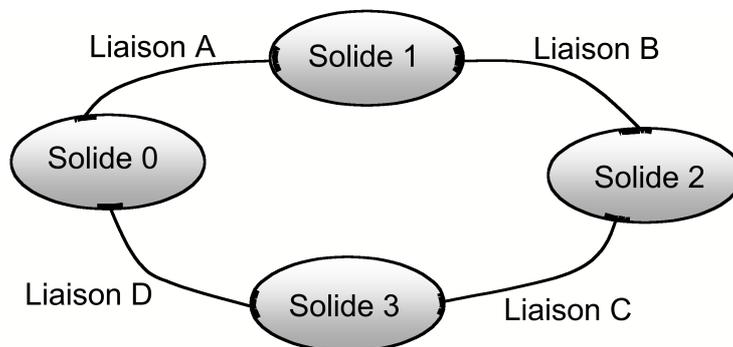


Figure 2.11 Boucle formée de 4 solides et 4 liaisons en série

Si nous exprimons les torseurs jeux et d'écarts au même point et dans la même base, nous obtenons un système linéaire de 6 équations scalaires à I_c inconnues.

Soit r_c le rang de ce système, en éliminant les composantes dues aux degrés de liberté, nous sommes conduit à $(6-r_c)$ conditions de compatibilité ou équations de tolérancement. Ces dernières sont des relations entre les composantes des torseurs jeux et celle des torseurs d'écarts. Elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sum J'_c + \sum E'_c = 0$$

où J'_c représente des composantes de petits déplacements dues aux jeux, E'_c sont des composantes des torseurs d'écarts de positions et d'orientations.

2.3.6.2. Exemple de boucle simple

Considérons l'exemple schématisé dans la figure 2.12. Il s'agit d'un mécanisme constitué de 3 pièces 0, 1, 2 et de 3 liaisons suivant les surfaces A, B, C formant une boucle simple.

Les types de liaisons prises en compte sont successivement :

- A une liaison appui plan entre les pièces 0 et 1,
- B une liaison appui plan entre les pièces 1 et 2,
- C une liaison pivot glissant entre la pièce 0 et 2.

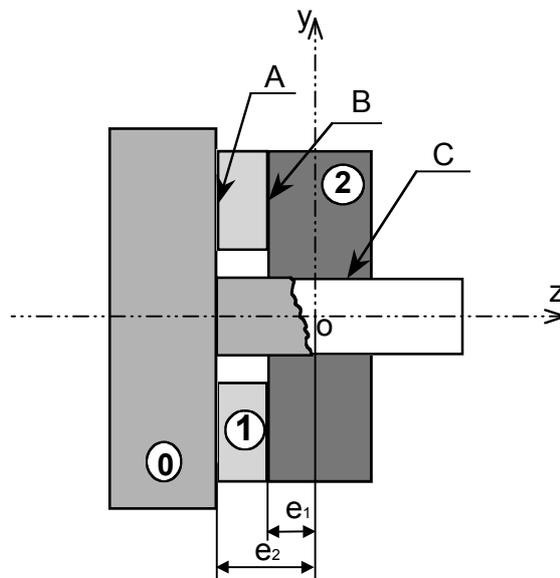


Figure 2.12 Mécanisme formant une boucle simple

L'objectif de cet exemple est d'illustrer la démarche de l'obtention des équations de tolérancement de ce mécanisme afin de déterminer quelles sont les composantes des torseurs d'écarts géométriques qu'il est nécessaire de limiter. En conséquence, nous pourrions choisir qualitativement les différentes tolérances géométriques qui devront apparaître sur le dessin de définition.

Etude de la boucle

Le graphe de boucles schématisé dans la figure 2.13 nous montre qu'il y a une seule boucle dont l'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2C} + J_{2C0} + E_{C0A} = 0$$

Etude des torseurs

Nous allons maintenant étudier les torseurs jeux et d'écarts qui composent la boucle. D'autre part nous indiquons que les composantes compatibles avec la liaison parfaite ainsi que celles dues aux jeux seront regroupées dans même torseur noté J .

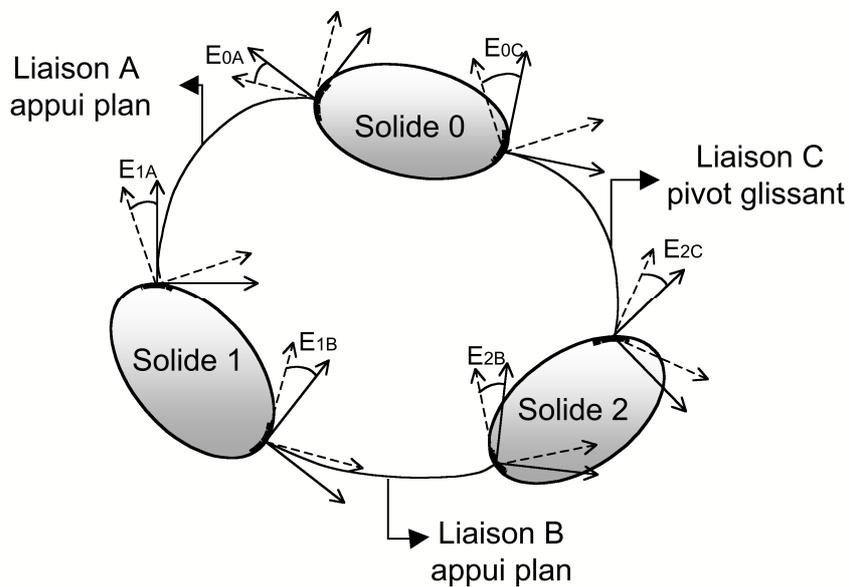


Figure 2.13 Graphe de boucle

Torseur jeu des liaisons A, B et C exprimés dans les repères locaux

Liaison (A) appui plan

$$J_{0A1} = \underset{A}{\begin{bmatrix} J_{\alpha 0A1} & C_{u0A1} \\ J_{\beta 0A1} & C_{v0A1} \\ C_{\gamma 0A1} & J_{w0A1} \end{bmatrix}}$$

Liaison (B) appui plan

$$J_{1B2} = \underset{B}{\begin{bmatrix} J_{\alpha 1B2} & C_{u1B2} \\ J_{\beta 1B2} & C_{v1B2} \\ C_{\gamma 1B2} & J_{w1B2} \end{bmatrix}}$$

Liaison (C) pivot glissant

$$J_{2C0} = \underset{C}{\begin{bmatrix} J_{\alpha 2C0} & J_{u2C0} \\ J_{\beta 2C0} & J_{v2C0} \\ C_{\gamma 2C0} & C_{w2C0} \end{bmatrix}}$$

Torseur jeu des liaisons A, B et C exprimés dans le repère du mécanisme (O)

$$\vec{a}(O) = \vec{a}(A) + \vec{OA} \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} C_{u0A1} & 0 \\ C_{v0A1} & 0 \\ J_{w0A1} & -e_2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J_{\alpha 0A1} \\ J_{\beta 0A1} \\ J_{\gamma 0A1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{u0A1} + e_2 J_{\beta 0A1} \\ C_{v0A1} - e_2 J_{\alpha 0A1} \\ J_{w0A1} \end{bmatrix}$$

Le calcul pour le torseur J_{1B2} au point O est le même en remplaçant e_2 par e_1 .

$$J_{0A1} = \underset{O}{\begin{bmatrix} J_{\alpha 0A1} & C_{u0A1} + e_2 J_{\beta 0A1} \\ J_{\beta 0A1} & C_{v0A1} - e_2 J_{\alpha 0A1} \\ C_{\gamma 0A1} & J_{w0A1} \end{bmatrix}} \quad J_{1B2} = \underset{O}{\begin{bmatrix} J_{\alpha 1B2} & C_{u1B2} + e_1 J_{\beta 1B2} \\ J_{\beta 1B2} & C_{v1B2} - e_1 J_{\alpha 1B2} \\ C_{\gamma 1B2} & J_{w1B2} \end{bmatrix}}$$

$$J_{2C0} = \underset{O}{\begin{bmatrix} J_{\alpha 2C0} & J_{u2C0} \\ J_{\beta 2C0} & J_{v2C0} \\ C_{\gamma 2C0} & C_{w2C0} \end{bmatrix}}$$

Torseurs d'écart des surfaces fonctionnelles des pièces 0, 1 et 2

Pièce (0) :

$$E_{0A} = \underset{A}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 0A} & I_{u0A} \\ E_{\beta 0A} & I_{v0A} \\ I_{\gamma 0A} & E_{w0A} \end{bmatrix}} \quad E_{0A} = \underset{O}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 0A} & I_{u0A} + e_2 E_{\beta 0A} \\ E_{\beta 0A} & I_{v0A} - e_2 E_{\alpha 0A} \\ I_{\gamma 0A} & E_{w0A} \end{bmatrix}}$$

$$E_{0C} = \underset{C}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 0C} & E_{u0C} \\ E_{\beta 0C} & E_{v0C} \\ I_{\gamma 0C} & I_{w0C} \end{bmatrix}} = \text{idem en O}$$

Pièce (1) :

$$E_{1A} = \underset{A}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 1A} & I_{u1A} \\ E_{\beta 1A} & I_{v1A} \\ I_{\gamma 1A} & E_{w1A} \end{bmatrix}} \quad E_{1A} = \underset{O}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 1A} & I_{u1A} + e_2 E_{\beta 1A} \\ E_{\beta 1A} & I_{v1A} - e_2 E_{\alpha 1A} \\ I_{\gamma 1A} & E_{w1A} \end{bmatrix}}$$

$$E_{1B} = \underset{B}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 1B} & I_{u1B} \\ E_{\beta 1B} & I_{v1B} \\ I_{\gamma 1B} & E_{w1B} \end{bmatrix}} \quad E_{1B} = \underset{O}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 1B} & I_{u1B} + e_1 E_{\beta 1B} \\ E_{\beta 1B} & I_{v1B} - e_1 E_{\alpha 1B} \\ I_{\gamma 1B} & E_{w1B} \end{bmatrix}}$$

Pièce (2) :

$$E_{2B} = \underset{B}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 2B} & I_{u2B} \\ E_{\beta 2B} & I_{v2B} \\ I_{\gamma 2B} & E_{w2B} \end{bmatrix}} \quad E_{2B} = \underset{O}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 2B} & I_{u2B} + e_1 E_{\beta 2B} \\ E_{\beta 2B} & I_{v2B} - e_1 E_{\alpha 2B} \\ I_{\gamma 2B} & E_{w2B} \end{bmatrix}}$$

$$E_{2C} = \underset{C}{\begin{bmatrix} E_{\alpha 2C} & E_{u2C} \\ E_{\beta 2C} & E_{v2C} \\ I_{\gamma 2C} & I_{w2C} \end{bmatrix}} = \text{idem en O}$$

Torseurs d'écarts relatifs

$$E_{A1B} = \underset{O}{\begin{bmatrix} E_{\alpha A1B} & I_{uA1B} + e_1 E_{\beta 1B} - e_2 E_{\beta 1A} \\ E_{\beta A1B} & I_{vA1B} - e_1 E_{\alpha 1B} + e_2 E_{\alpha 1A} \\ I_{\gamma A1B} & E_{wA1B} \end{bmatrix}}$$

$$E_{B2C} = \underset{O}{\begin{bmatrix} E_{\alpha B2C} & E_{u2C} - I_{u2B} - e_1 E_{\beta 2B} \\ E_{\beta B2C} & E_{v2C} - I_{v2B} + e_1 E_{\alpha 2B} \\ I_{\gamma B2C} & I_{w2C} - E_{w2B} \end{bmatrix}}$$

$$E_{C0A} = \begin{bmatrix} E_{\alpha C0A} & I_{u0A} + e_2 E_{\beta 0A} - E_{u0C} \\ E_{\beta C0A} & I_{v0A} - e_2 E_{\alpha 0A} - E_{v0C} \\ I_{\gamma C0A} & E_{w0A} - I_{w0C} \end{bmatrix}$$

Mise en équation du système global

Dans le présent exemple nous avons :

Le nombre de liaisons $p = 3$

Le nombre de pièces $n = 3$

Le nombre de degrés de liberté des liaisons A, B et C :

$$k_A = k_B = 3 \text{ (liaison appui plan)}$$

$$k_C = 2 \text{ (liaison pivot glissant)}$$

La mobilité cinématique $m_c = 4$

Le nombre d'équations du système $E_c = 6(p - n + 1) = 6$

Les inconnues du système cinématique $I_c = \sum k_i = 3 + 3 + 2 = 8$

Après avoir réduit tous les torseurs au point O origine du repère du mécanisme, nous obtenons les 6 équations linéaires suivantes :

$$J_{\alpha 0A1} + E_{\alpha A1B} + J_{\alpha 1B2} + E_{\alpha B2C} + J_{\alpha 2C0} + E_{\alpha C0A} = 0$$

$$J_{\beta 0A1} + E_{\beta A1B} + J_{\beta 1B2} + E_{\beta B2C} + J_{\beta 2C0} + E_{\beta C0A} = 0$$

$$C_{\gamma 0A1} + I_{\gamma A1B} + C_{\gamma 1B2} + I_{\gamma B2C} + C_{\gamma 2C0} + I_{\gamma C0A} = 0$$

$$C_{u0A1} + e_2 J_{\beta 0A1} + I_{uA1B} + e_1 E_{\beta 1B} - e_2 E_{\beta 1A} + C_{u1B2} + e_1 J_{\beta 1B2} + E_{u2C} - I_{u2B} - e_1 E_{\beta 2B} \\ + J_{u2C0} + I_{u0A} + e_2 E_{\beta 0A} - E_{u0C} = 0$$

$$C_{v0A1} - e_2 J_{\alpha 0A1} + I_{vA1B} - e_1 E_{\alpha 1B} + e_2 E_{\alpha 1A} + C_{v1B2} - e_1 J_{\alpha 1B2} + E_{v2C} - I_{v2B} + e_1 E_{\alpha 2B} \\ + J_{v2C0} + I_{v0A} - e_2 E_{\alpha 0A} - E_{v0C} = 0$$

$$J_{w0A1} + E_{wA1B} + J_{w1B2} + I_{w2C} - E_{w2B} + C_{w2C0} + E_{w0A} - I_{w0C} = 0$$

Résolutions du système

Nous calculons le degré d'hyperstatisme a partir de la formule de mobilité :

$$mc - h = Ic - Ec$$

d'où :

$$h = 6 - 8 + 4 = 2$$

Le système est hyperstatique de degré 2. Nous aurons donc 2 équations de tolérancement, cela nous ramène à résoudre 2 conditions de compatibilité. Pour l'exemple présent, elle sont immédiates :

$$J_{\alpha 0A1} + E_{\alpha A1B} + J_{\alpha 1B2} + E_{\alpha B2C} + J_{\alpha 2C0} + E_{\alpha C0A} = 0$$

$$J_{\beta 0A1} + E_{\beta A1B} + J_{\beta 1B2} + E_{\beta B2C} + J_{\beta 2C0} + E_{\beta C0A} = 0$$

Nous en déduisons qu'il est nécessaire de choisir un tolérancement qui permet de limiter les écarts angulaires suivants les axes \bar{x} , \bar{y} entre les surfaces A , B de la pièce 1, ainsi qu'entre B et C de la pièce 2 et enfin entre C et A de la pièce 0.

Passage au tolérancement normalisé

En se rapportant à la norme ISO, nous pouvons proposer un tolérancement traduisant les deux équations de tolérancement obtenues ci-dessus. Ce tolérancement permet de limiter les défauts géométriques que nous avons pu connaître à l'aide de ces deux équations. Il est illustré dans la figure 2.14.

Nous pouvons remarquer que pour chaque pièce une des 2 surfaces est prise en référence et l'autre est tolérancée par rapport à cette référence. A ce niveau de l'étude le choix de la surface de référence est arbitraire, nous pourrions permuter référence et surface tolérancée.

On peut remarquer que pour cet exemple, la condition d'assemblage est toujours assurée puisque les contacts plans sont unilatéraux. Par contre si on veut garantir un contact plan parfait, il sera nécessaire de tolérer les composantes d'écarts qui viennent d'être déterminées.

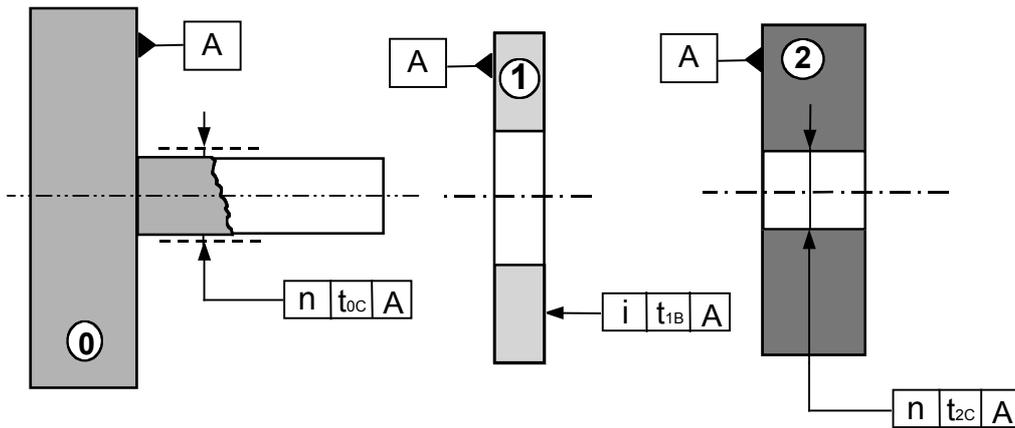


Figure 2.14 Tolérancement du mécanisme suivant la norme ISO

2.3.6.3. Cas de liaisons en parallèle

C'est le cas le plus fréquent puisque, dans la pratique, il est difficile de trouver des mécanismes constitués uniquement de chaînes simples. Ainsi dans la plupart des cas, même les liaisons simples telles que glissières, pivots et liaisons complètes sont constituées de liaisons élémentaires suivant des surfaces telles que plans, cylindres, et assemblées en parallèle.

Par extension au cas d'une boucle simple, l'obtention des équations de tolérancement pour des mécanismes comportant plusieurs boucles consiste à étudier chacune des boucles indépendantes. Il s'agit des boucles indépendantes au sens des graphes. Leur nombre est égal à $\mu = p - n + 1$ où p , n sont respectivement le nombre de liaisons et le nombre de pièces constituant le mécanisme. Pour chaque boucle indépendante nous parvenons alors à un système d'équations linéaires de torseurs jeux et d'écarts. La résolution de ce système global du mécanisme permettra d'éliminer les composantes cinématiques dues aux degrés de liberté, afin d'avoir des relations entre des composantes des torseurs jeux et celles des torseurs d'écarts géométriques qui représentent les équations de tolérancement. Toutefois, il est plus difficile de trouver une interprétation aussi simple que dans le cas d'une boucle unique. Un autre raisonnement sera présenté dans le chapitre 4, il permettra une généralisation à des mécanismes quelconques, il sera autant fructueux pour l'analyse que pour la synthèse des tolérances.

2.3.6.4. Exemple de liaisons en parallèle

Il s'agit d'un mécanisme composé de deux pièces 1 et 2 fig. 2.15 ayant un mouvement de translation de l'une par rapport à l'autre. Le guidage est réalisé par deux liaisons de type pivot glissant, *B* et *C*. Nous prendrons également en compte la liaison appui plan *A*.

Calcul du nombre de boucles indépendantes

Selon le graphe de boucles illustré fig. 2.15, nous pouvons distinguer 3 boucles. Mais le nombre de boucles indépendantes est égale à 2 :

$$\mu = p - n + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

De ce fait nous allons étudier seulement deux boucles choisies arbitrairement

Etude de la boucle n°1

A partir du graphe de boucle n°1 fig.2.16, l'équation de la boucle s'écrit :

$$J_{1A2} + E_{A2C} + J_{2C1} + E_{C1A} = 0$$

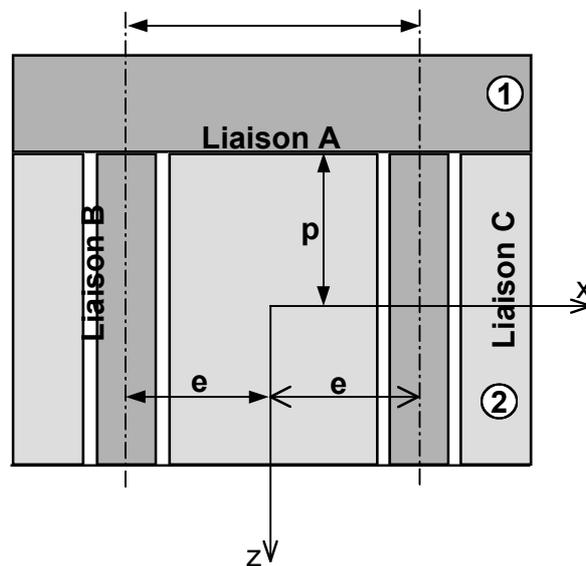


Figure 2.15 Mécanisme formant des boucles en parallèle

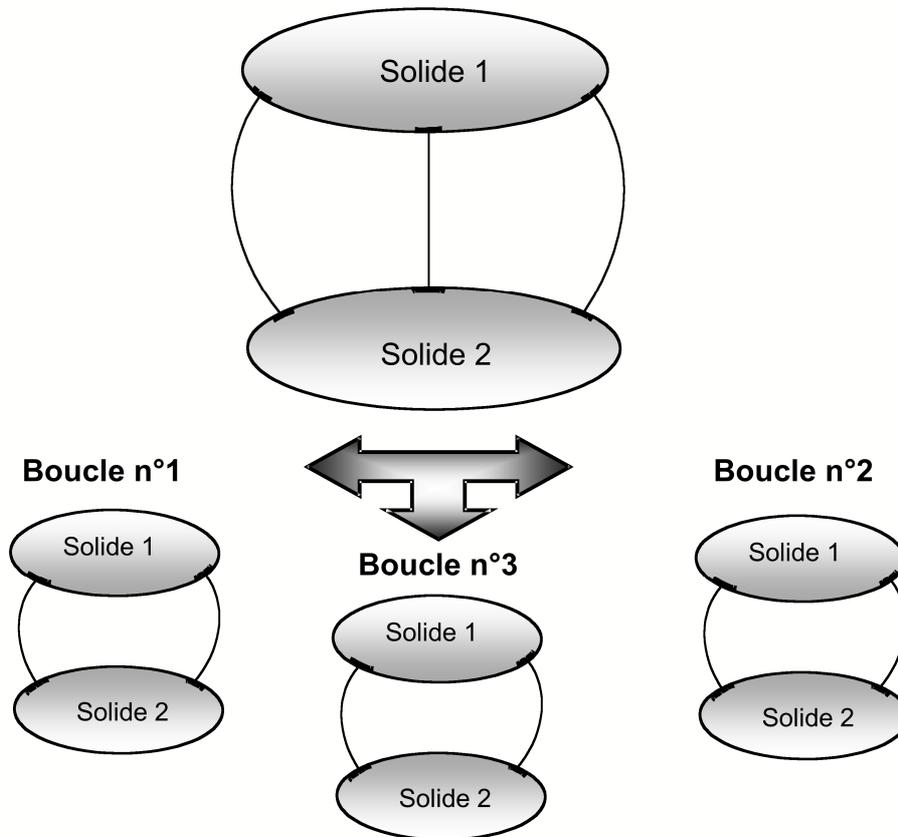


Figure 2.16 Graphe du mécanisme formant des boucles en parallèle

Pour cet exemple, nous allons écrire l'équation de la boucle sous une forme différente de celle écrite pour l'exemple précédent de la chaîne simple. Pour la boucle n°1 l'équation peut s'écrire :

$$(E_{1A} + J_{1A2} + E_{A2}) + (E_{2C} + J_{2C1} + E_{C1}) = 0$$

Nous pouvons constater que les torseurs jeux et d'écarts ayant la même forme sont regroupés dans un seul torseur que nous appelons le torseur des défauts de la surface noté D . Pour la boucle n°1 nous pouvons définir deux torseurs des défauts des surfaces D_A et D_C .

Soit

$$D_A + D_C = 0$$

Mise en équation du système de la boucle 1

Suivant l'équation de la boucle 1, nous obtenons les 6 équations suivantes :

$$D_{\alpha A} + D_{\alpha C} = 0$$

$$D_{\beta A} + D_{\beta C} = 0$$

$$C_{\gamma A} + I_{\gamma A} + C_{\gamma C} + I_{\gamma C} = 0$$

$$C_{uA} + I_{uA} + pD_{\beta A} + D_{uC} = 0$$

$$C_{vA} + I_{vA} - pD_{\alpha A} + D_{vC} + e(C_{\gamma C} + I_{\gamma C}) = 0$$

$$D_{wA} + C_{wC} + I_{wC} - e D_{\beta C} = 0$$

Etude de la boucle n°2

L'équation de la boucle n°2 s'écrit :

$$J_{1A2} + E_{A2B} + J_{2B1} + E_{B1A} = 0$$

Soit

$$D_A + D_B = 0$$

Etude des torseurs

L'écriture des torseurs pour la boucle 2 est la même que pour la boucle 1, en remplaçant C par B et e par $-e$. nous obtenons alors le torseur D_B

$$D_B = \begin{matrix} \text{O} \left[\begin{array}{cc} D_{\alpha B} & D_{uB} \\ D_{\beta B} & D_{vB} - e(C_{\gamma B} + I_{\gamma B}) \\ C_{\gamma B} & C_{wB} + I_{wC} + eD_{\beta B} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Mise en équation du système de la boucle n° 2

Après avoir réduit tous les torseur au point O, nous obtenons les 6 équations suivantes :

$$D_{\alpha A} + D_{\alpha B} = 0$$

$$D_{\beta A} + D_{\beta B} = 0$$

$$C_{\gamma A} + I_{\gamma A} + C_{\gamma B} + I_{\gamma B} = 0$$

$$C_{uA} + I_{uA} + pD_{\beta A} + D_{uB} = 0$$

$$C_{vA} + I_{vA} - pD_{\alpha A} + D_{vB} + e(C_{\gamma B} + I_{\gamma B}) = 0$$

$$D_{wA} + C_{wB} + I_{wB} - eD_{\beta B} = 0$$

Résolution du système global

Nous avons dans cet exemple :

$$\begin{aligned} \text{*Nombre de liaisons } p &= 3 & \Rightarrow E_C = 12 \\ \text{*Nombre de solides } n &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{*}k_A &= 3 \text{ (liaison appui)} \\ \text{*}k_B &= 2 \text{ (liaison pivot)} & \Rightarrow I_C = 7 \end{aligned}$$

$$\text{*}k_C = 2 \text{ (liaison pivot glissant)}$$

$$\text{*}m_c = 0 \text{ (glissant)}$$

$$m_c - h = I_C - E_C = -5$$

$$D'où h = 5$$

La résolution du système global nous donne bien les 5 équations de tolérancement suivantes :

$$D_{\alpha A} + D_{\alpha C} = 0$$

$$D_{\beta A} + D_{\beta C} = 0$$

$$D_{\alpha A} + D_{\alpha B} = 0$$

$$D_{\beta A} + D_{\beta B} = 0$$

$$D_{uB} - D_{uC} = 0$$

Nous constatons qu'il est nécessaire de choisir un tolérancement qui limite:

- d'une part les défauts angulaires suivant les directions \vec{y} , \vec{z} entre les surfaces A et B et les surfaces A et C.
- d'autre part les déplacements linéaires suivant \vec{x} entre les surfaces B et C.

Par ailleurs, si nous avons pris la boucle n°3 au lieu de la boucle n°1 ou n°2, nous serions parvenus aux mêmes équations de tolérancement obtenues en étudiant les boucles 1 et 2. Cela peut tout simplement être démontré en écrivant l'équation de la boucle n°3 :

$$J_{1B2} + E_{B2C} + J_{2C1} + E_{C1B} = 0$$

Soit
$$D_B - D_C = 0$$

Il apparaît que cette équation est une combinaison linéaire des autres équations de boucles. Ceci confirme une fois de plus que nous avons bien 2 boucles indépendantes. En conséquence nous montrons qu'il est inutile d'étudier toutes les boucles, que le choix arbitraire de boucles indépendantes n'a donc aucun effet sur l'obtention des équations de tolérancement.

Passage au tolérancement normalisé

Pour cet exemple, il existe plusieurs choix de tolérancement empruntés à la Norme. La Figure 15.2. schématise un de ces choix permettant de limiter les défauts révélés à l'aide des équations de tolérancement obtenues.

2.3.7. Conclusions

Nous avons proposé une démarche de détermination qualitative des tolérances à l'aide des équations de tolérancement. Cette démarche peut être automatisée. Les données sont les différentes liaisons disposées dans une configuration du mécanisme. Le résultat nous permet de connaître quelles sont les tolérances relatives entre surfaces d'une même pièce du point de vue qualitatif.

En effet les équations de tolérancement sont une généralisation des équations cinématiques bien connues en théorie des mécanismes. Ici, il s'agit de fermeture de boucles de petits déplacements. Les jeux des liaisons et les écarts de géométries des pièces sont pris en compte. Toutefois ces équations de tolérancement sont insuffisantes pour déterminer les formes des zones de tolérances et les valeurs qui caractérisent ces zones. Il faudra tenir compte en particulier des limites des composantes des torseurs jeux qui sont imposées par les conditions de contact. Pour les conditions d'assemblage, ces limites conduisent à déterminer les limites correspondantes pour les torseurs d'écart puisque jeux et écarts sont liés par les équations de tolérancement. C'est l'objet du chapitre 4. Mais auparavant, nous allons aborder le problème sous l'aspect statique comme cela a été fait dans le modèle de base.

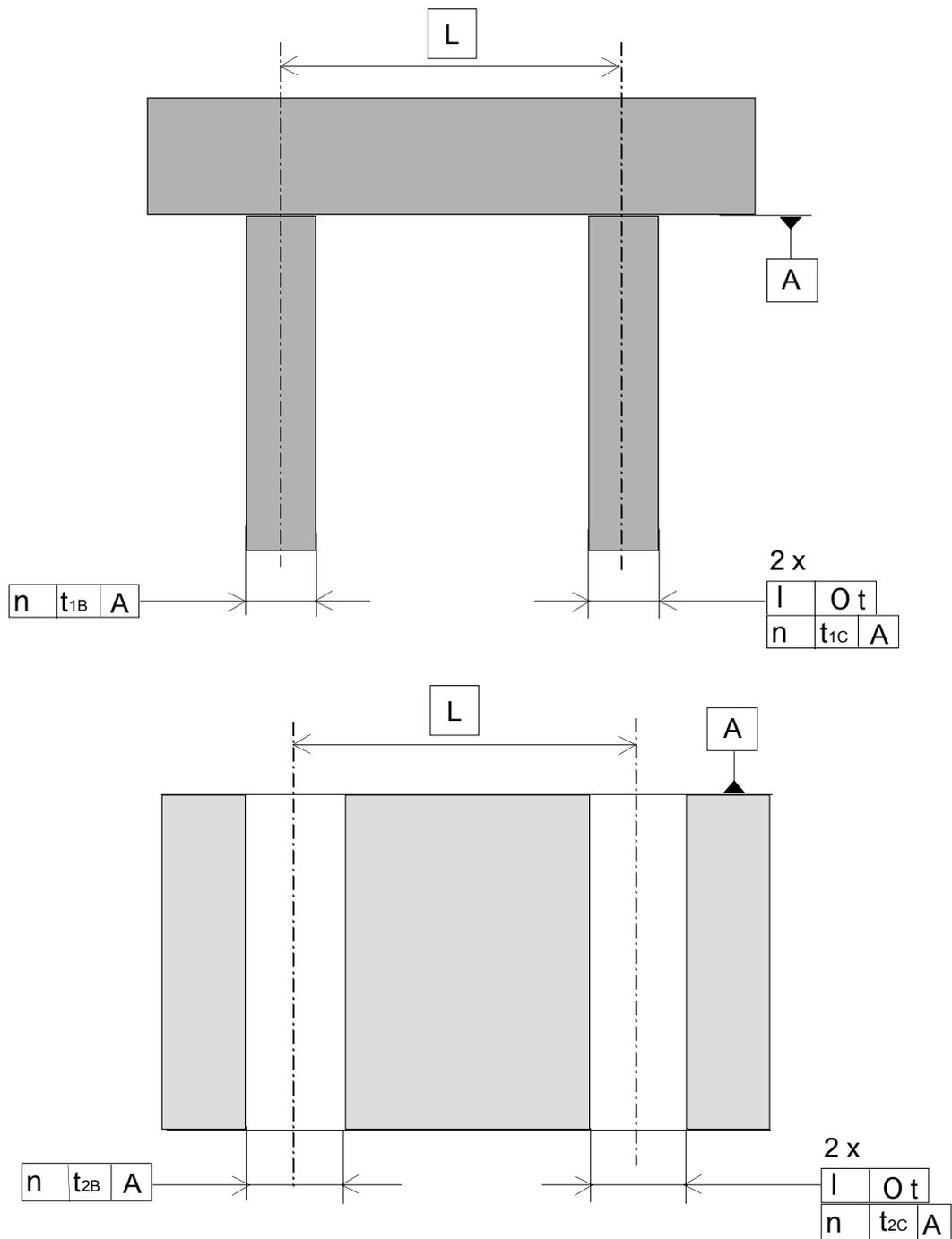


Figure 2.17 Tolérancement suivant la norme ISO

2.4. APPROCHE STATIQUE DU TOLERANCEMENT

2.4.1. Introduction

Nous avons présenté au travers de l'approche cinématique une démarche permettant la détermination qualitative des tolérances géométriques. Or, il est possible de proposer une démarche similaire en menant une étude de type statique.

Dans ce paragraphe, nous montrerons comment l'approche statique pourra fournir une telle démarche en exposant les liens de la statique avec le tolérancement.

Nous commencerons par mettre en place les différents outils de modélisation qui seront recensés et impliqués dans cette approche.

2.4.2. Modélisation

2.4.2.1 Hypothèses

Les hypothèses qui ont été définies pour l'approche d'équations de tolérancement restent valables pour l'approche statique.

2.4.2.2. Notation et outils

Comme pour l'approche cinématique, nous pouvons utiliser les notions usuelles de théorie des mécanismes. Une surface peut être caractérisée par le type d'efforts qu'elle permet de transmettre. Nous parlerons de torseur d'efforts transmissibles par la surface. Une autre vision possible consiste à associer à une surface le torseur cinématique qu'elle autorise, c'est à dire le torseur définissant les mouvements qui la laissent globalement invariante. Le comoment entre les deux torseurs sera toujours nul car les liaisons sont supposées parfaites.

Dans notre cas, le tolérancement impliquera les composantes de déplacements qui correspondent aux mouvements qui ne laissent pas la surface invariante. Les écarts correspondants pourront être contrôlés par les moyens conventionnels de mesure. Sur le plan fonctionnel, ce sont bien ces composantes d'écarts qui sont susceptibles de poser problème et de compromettre un assemblage par exemple.

Si l'on s'intéresse aux mouvements de faible amplitude, on peut admettre qu'ils sont correctement décrits par des torseurs de petits déplacements, qui seront donc

systématiquement complémentaires des torseurs cinématiques admissibles par la surface. Il s'agira donc du torseur d'écart qui a déjà été employé pour l'approche cinématique. Les composantes de ce torseur sont alors les variables impliquées dans les méthodes d'analyse et de synthèse de tolérancement comme la méthode basé sur les domaines jeux et domaines écarts, qui fera l'objet du chapitre 4.

2.4.2.3. Torseur des efforts transmissibles

Prenons l'exemple de la Figure 2.18, il s'agit d'un mécanisme comportant deux solides 1 et 2, qui sont en contact par l'intermédiaires de trois liaisons planes en parallèles. Les contacts sont supposés sans frottement.

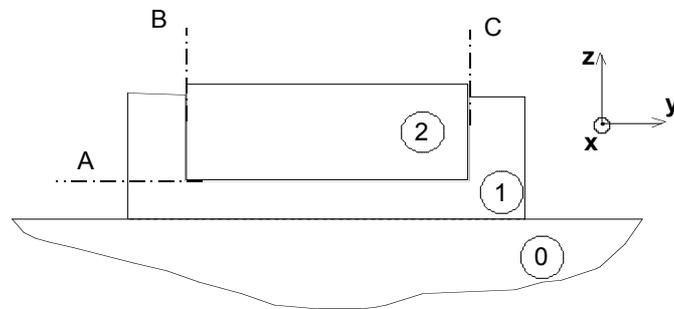


Figure 2.18 Deux solides en contact

Chaque liaison est composée de deux surfaces sur lesquelles nous plaçons un repère orthonormé.

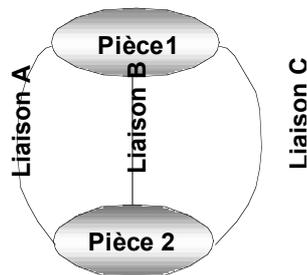


Figure 2.19 Graphe des liaisons

Les surfaces sont notées A1, A2, B1, B2, C1, C2. A chaque surface d'une liaison, nous pouvons associer un torseur $\{\tau\}$ des efforts transmissibles par cette surface. Il peut en général s'écrire sous la forme :

$${}_o\{\mathcal{O}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix} = X \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + Y \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \dots + N \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Selon la nature géométrique de la surface, certaines des composantes X, Y, Z, L, M, N peuvent être nulles. Elle correspondent à des directions dans lesquelles la surface ne peut pas transmettre d'efforts. En terme du torseur d'écart, les déplacements suivant ces directions ne peuvent pas être contrôlés et n'ont pas d'influence sur les fonctionnalités courantes que nous pouvons attendre. Il s'agit des variables indéterminées que nous avons déjà vues au travers de l'approche d'équations de tolérancement. Nous donnons quelques exemples parmi les plus significatifs dans le Tableau 2.2.

2.4.3. Mise en œuvre de l'approche

2.4.3.1. Méthode

Dans le cadre de cette étude, nous cherchons à définir une démarche qui permet de déterminer qualitativement des tolérances géométriques des solides constituant un mécanisme.

Nous réaliserons donc systématiquement une étude s'appuyant sur les outils de modélisation que sont les torseurs évoqués. Le choix se porte sur les torseurs d'efforts, qui seront recensés et impliqués dans une étude de type statique. Nous procéderons donc en isolant chaque pièce et en recensant les surfaces et les efforts qu'elles sont susceptibles de reprendre. L'étude ayant été faite, nous pourrons interpréter les résultats en raisonnant non plus sur les efforts mais plutôt sur les déplacements pouvant être tolérancés. Il s'agira alors des torseurs d'écarts correspondant qui sont intimement liés aux efforts comme nous avons pu l'expliquer. Nous déduirons alors des informations qualitatives concernant le tolérancement de chacune des pièces du mécanisme.

Efforts transmissibles	${}_o \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Mouvements admissibles	${}_o \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & v \\ 0 & w \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$
Déplacements Tolérancables (contrôlables)	${}_o \begin{Bmatrix} 0 & u \\ \beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & v \\ 0 & w \end{Bmatrix}$	${}_o \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ 0 & w \end{Bmatrix}$

Tableau 2.2 Torseurs caractérisant les surfaces

2.4.3.2. Analyse et interprétation

Pour chaque surface intervenant dans le tolérancement, nous pouvons caractériser les efforts transmissibles en prenant en compte sa nature géométrique. Nous avons cité en particulier le plan, la sphère, le cylindre et le cône. Nous pouvons remarquer que les composantes de déplacements tolérancés sont, au plus, celles apparaissant dans le comoment entre le torseur d'efforts transmissibles et un torseur générique de déplacement. Par exemple, pour le plan de normale x , nous obtenons :

$${}_o \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ 0 & w \end{Bmatrix} \cdot {}_o \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix} = X \cdot u + M \cdot \beta + N \cdot \gamma \quad (1)$$

Nous déduisons de l'équation (1) que seules les composantes u , β et γ sont affectées par le tolérancement complet du plan en localisation. En fait certaines de ces composantes

n'interviendront pas quand nous considèrerons la référence. Après avoir mené l'étude statique s'appuyant sur les efforts, nous pourrons déduire de manière systématique la nature des déplacements tolérancés à partir des efforts obtenus.

Cette approche est reprise par P.Hernandez dans [HER 02]. Il propose dans le cadre de la norme ISO un outil analytique permettant au concepteur de vérifier la cohérence d'un tolérancement déjà fait. Il explique que lorsque le concepteur voudrait traduire le résultat fourni par l'étude statique en tolérancement normalisé des pièces d'un mécanisme, des difficultés peuvent être rencontrées. Ainsi les difficultés les plus sérieuses sont liées aux erreurs que le concepteur peut commettre notamment dans le cas complexes comme ceux nécessitant l'utilisation de systèmes de références, de références communes, voire de systèmes de référence incluant des références communes Fig.18.3.

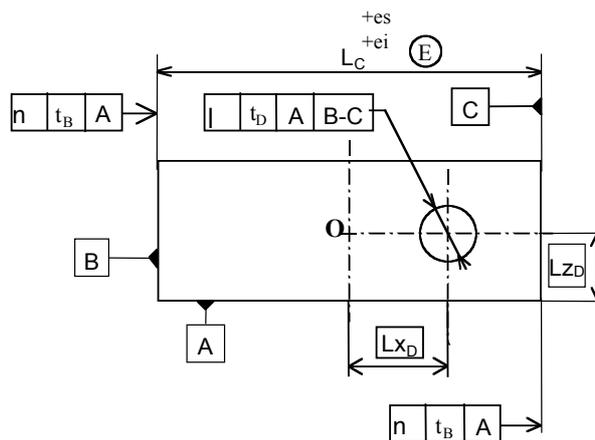


Figure 2.20 Exemple de syntaxe normalisée

Ces difficultés sont liées en particulier à l'ambiguïté de la norme, car celle-ci, en tant que support, est composée d'un ensemble d'exemples illustrant les grands principes. Ce manque de formalisation entraîne des interprétations ou extrapolations lorsqu'elle ne présente pas l'exemple adapté au cas étudié.

Fort de ce constat, P. Hernandez développe une méthode, en faisant référence au contrôle, permettant d'assister le concepteur, en vérifiant la cohérence géométrique des tolérances de localisation et d'orientation qu'il est en train d'apposer sur une pièce. Cette méthode s'inspire notamment de l'étude des torseurs d'efforts transmissibles par

la surface pour la détermination qualitative du tolérancement d'une surface vis à vis d'une référence choisie par le concepteur.

Cette préoccupation peut paraître limitée dans ses objectifs, ce qui amène à s'interroger sur sa légitimité. Mais l'auteur justifie cette démarche en la définissant comme une composante d'un projet plus ambitieux dont l'objectif serait l'aide au tolérancement fonctionnel d'un mécanisme complet.

2.4.3.3. Application de la méthode

Reprenons le système mécanique présenté précédemment. Nous allons appliquer l'étude statique sur ce mécanisme en prenant en compte la conditions d'assemblage comme condition fonctionnelle.

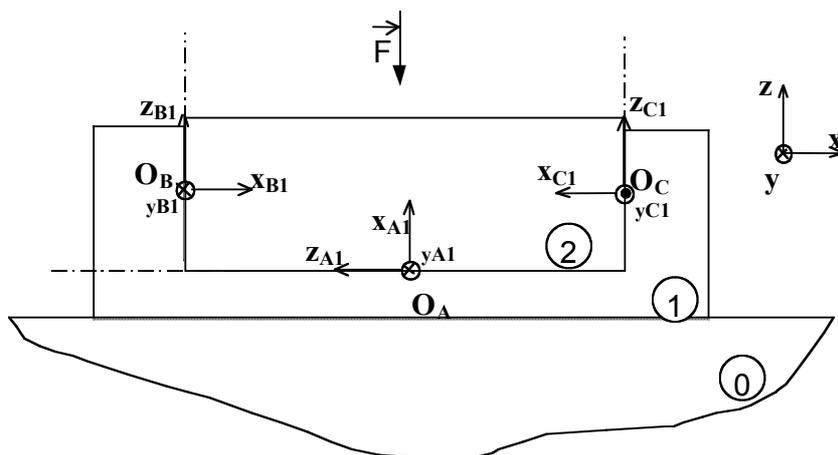


Figure 2.21 Etude statique

Dans un premier temps, nous supposons que le jeu entre les pièces n'est pas spécifié. Celui ci peut donc être inférieur à 0 (précontrainte) ou supérieur ou égal à 0.

Pour obtenir les relations entre les efforts, nous isolons le système matériel $1 \cup 2 = \Sigma_{12}$ et dressons le bilan des actions extérieures exprimées dans la base x, y, z . Nous obtenons $\overline{\Sigma_{12}}$ (extérieur du système):

$${}_{OA} \left\{ \hat{\mathbf{O}}_{\Sigma_{12} \rightarrow 1} \right\} = {}_{OA} \begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z & N_1 \end{Bmatrix} = {}_{OA} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{OA} \left\{ \hat{\mathbf{O}}_{\Sigma_{12} \rightarrow 2} \right\} = {}_{OA} \begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix} = {}_{OA} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}$$

Nous isolons le solide 1 = Σ_1 , le bilan des actions extérieures exprimées dans la base x, y, z nous donne :

$${}_{OA} \left\{ \hat{\mathbf{O}}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1} \right\} = {}_{OA} \left\{ \hat{\mathbf{O}}_{\Sigma_{12} \rightarrow 1} \right\} + {}_{OA} \left\{ \hat{\mathbf{O}}_{2 \rightarrow 1} \right\} \quad (2)$$

	Forces extérieures		Forces de liaisons		
	Sur 1 Base x, y, z	Sur 2 Base x, y, z	B Base x _B , y _B , z _B	C Base x _C , y _C , z _C	A Base x _A , y _A , z _A
Isoler le système	${}_{OA} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{Bmatrix}$	${}_{OA} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}$	{0}	{0}	{0}
Isoler le solide (1)	${}_{OA} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{Bmatrix}$		${}_{OB} \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & M_B \\ 0 & N_B \end{Bmatrix}$	${}_{OC} \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & M_C \\ 0 & N_C \end{Bmatrix}$	${}_{OA} \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ 0 & M_A \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}$
Isoler le solide (2)		${}_{OA} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix}$	$- {}_{OB} \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & M_B \\ 0 & N_B \end{Bmatrix}$	$- {}_{OC} \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & M_C \\ 0 & N_C \end{Bmatrix}$	$- {}_{OA} \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ 0 & M_A \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}$

Tableau 2.3 Etude des torseurs des forces extérieures et des liaisons

Nous isolons ensuite le solide $2 = \Sigma_2$, le bilan des actions extérieures dans la base x, y, z nous donne :

$${}_{oA} \left\{ \hat{\mathbf{O}}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2} \right\} = {}_{oA} \left\{ \hat{\mathbf{O}}_{\Sigma_{12} \rightarrow 2} \right\} + {}_{oA} \left[\mathbf{O}_{1 \rightarrow 2} \right] \quad (3)$$

Le montage des pièces l'une avec l'autre est indépendant des conditions de fonctionnement, ainsi il doit être réalisé sans effort autre que ceux nécessaires au mouvements des pièces et qui sont négligés. Ceci implique que pour l'assemblage, la somme des torseurs des forces extérieures et des torseurs d'efforts des liaisons doit être nulle.

La condition d'assemblage pour notre exemple, est donc obtenue en isolant le solide 1 ou 2 et en exprimant les torseurs des forces extérieures et des efforts des liaisons dans la même base et au même point. En isolant le solide 2, après avoir exprimé tous les torseurs dans la base x, y, z et au point O_A nous obtenons :

$${}_{oA} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F & 0 \end{Bmatrix} + {}_{oA} \begin{Bmatrix} 0 & N_A \\ 0 & -M_A \\ -X_A & 0 \end{Bmatrix} + {}_{oA} \begin{Bmatrix} -X_B & 0 \\ 0 & -M_B - dX_B \\ 0 & -N_B \end{Bmatrix} + {}_{oA} \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & M_C + dX_C \\ 0 & -N_C \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Le nombre d'équations de la statique est égal à $E_S = 6$

Le nombre d'inconnus des liaisons $I_S = 9$

La mobilité du système $m_C = 1$

$E_S - I_S = m_C - h$ d'où le degré d'hyperstatisme $h = 4$

Les 6 équations statiques s'obtiennent alors :

$$X_C - X_B = 0$$

$$0 = 0$$

$$F - X_A = 0$$

$$N_A = 0$$

$$M_C - M_A - M_B + dX_C - dX_B = 0$$

$$-N_C - N_B = 0$$

Nous trouvons dans ce système d'équations, d'une part des composantes que nous pouvons calculées, d'autre part des composantes que ne nous ne pouvons pas déterminer par une étude statique simple. Ces dernières correspondent à des composantes hyperstatiques. Dans notre cas, les composantes X_A , N_A sont des composantes isostatiques car elles sont nulles. Ainsi les composantes indéterminées hyperstatiques sont X_B , X_C , M_B , M_C , N_B , N_C dont 4 composantes sont indépendantes.

Nous en déduisons en raisonnant en terme du torseur d'écart qu'il est nécessaire de choisir un tolérancement qui permette de limiter l'écart linéaire entre les surface B et C suivant l'axe \vec{x} , ainsi que les écarts angulaires entre ces mêmes surfaces suivant l'axe \vec{z} . Il devrait limiter aussi les écarts angulaires suivant l'axe \vec{y} entre la surface B et A d'une part et la surface C et A d'autre part.

Nous proposons dans la Figure 2.22 un exemple de tolérancement normalisés ISO qui nous paraît cohérent avec le résultat fourni par l'étude statique.

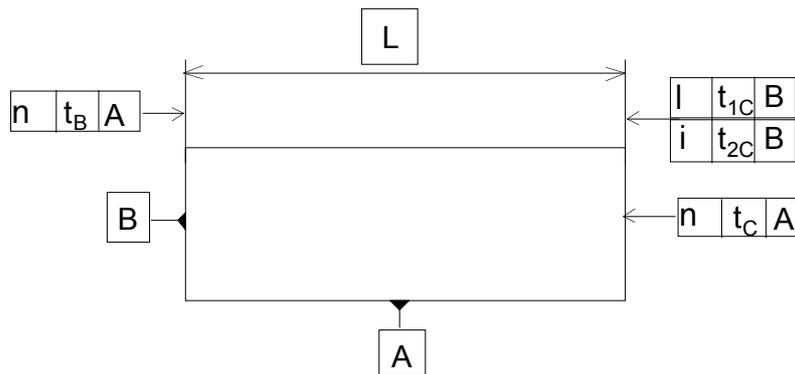


Figure 2.22 Tolérancement normalisé

Après le montage et en l'absence d'efforts extérieurs, les composantes des torseurs d'efforts des liaisons internes doivent être toutes nulles. Il n'existe donc pas de contraintes sur les surfaces des solides. Dans notre exemple, ceci est garanti par la présence des jeux dans les liaison B et C. Ceci a pour objectif de contraindre la géométrie des pièces à rester dans des limites maîtrisées qui annulent la possibilité d'un hyperstatisme en garantissant la présence d'un jeu malgré les dispersions de réalisation.

2.4.4 Conclusions

Nous avons, grâce à l'exemple simple proposé une démarche de détermination qualitative des tolérances à l'aide des équations d'équilibres de la statique. Cette démarche permet notamment d'assister le concepteur, dans le cadre de la condition d'assemblage, en indiquant quelle est la nature des écarts entre surfaces qui doivent être tolérancées. Les informations obtenues par cette approche concernent donc l'aspect qualitatif du tolérancement. Elles sont donc identiques aux informations données par les équations de tolérancement obtenues par l'approche cinématique. En conséquence, l'approche statique comme cinématique ne fournit aucun outil pour déterminer les formes des zones de tolérances et les limites qui caractérisent ces zones.

On peut remarquer que l'approche cinématique est plus simple à exprimer dans le cas d'une boucle simple (une seule équation de torseurs). Par contre dans le cas de liaisons en parallèle entre deux solides, l'approche statique est plus simple (un seul solide à isoler).

CHAPITRE 3

APPROCHE PAR LES DOMAINES JEUX ET DOMAINES ECARTS

Introduction

Il s'agit de prendre en compte les formes des zones de tolérances qui sont associées à un tolérancement donné. L'objectif étant d'aborder les aspects quantitatifs du tolérancement et pas seulement qualitatif. Les conditions de contacts dans les liaisons seront modélisées par les "domaines jeux" alors que les limites des écarts de géométries définies par les tolérances seront modélisées par les "domaines écarts". Cette modélisation permettra l'analyse d'un mécanisme dont les tolérances sont fixées mais aussi permettra de choisir les tolérances les mieux adaptées dans une démarche de synthèse.

Ce chapitre a pour but de définir ces notions de domaines jeux et écarts, de les représenter et de les appliquer à travers plusieurs exemples.

Les aspects analyse et synthèse seront traités dans le chapitre 4.

3.1. DOMAINE JEU

3.1.1. Définition

Nous appelons domaine jeu pour une liaison donnée l'ensemble des valeurs possibles des petits déplacements permis par la liaison. C'est aussi l'ensemble des valeurs possibles des composantes du torseur jeu compatible avec la liaison. Le torseur étant défini dans un repère donné (un point et une base vectorielle).

Le domaine jeu dépend de la forme des surfaces en contact, y compris leurs limites et leur taille. Il dépend ainsi de la configuration de référence qui correspond à un torseur jeu nul et du choix du repère associé à la surface.

Pour une liaison complète de géométrie parfaite, le domaine jeu est limité à un point représentant le déplacement nul. Dans le cas d'une liaison non complète, le domaine jeu est considéré illimité suivant les directions qui correspondent aux degrés de liberté de la liaison de géométrie nominale parfaite. On notera $\{ J \}$ le domaine du torseur J.

3.1.2. Représentation analytique du domaine jeu

Les limites du domaine jeu pour une liaison peuvent être traduites par un système d'inéquations qui portent sur 6 composantes des petits déplacements permis par le jeu (3 rotations et 3 translations). On notera $J_\alpha, J_\beta, J_\gamma, J_u, J_v, J_w$ les 6 composantes du torseur jeu, les trois premières pour les rotations, les trois autres pour les petites translations de l'origine du repère.

Par exemple, pour une liaison pivot glissant d'axe \bar{x} , le torseur jeu possède 4 composantes limitées, 2 pour les translations et 2 pour les rotations suivant les axes \bar{y} et \bar{z} . Le domaine jeu réel est ainsi défini par deux inéquations quadratiques entre ces 4 composantes, elles peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\left(J_v + \frac{h \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 + \left(J_w - \frac{h \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 < \left(\frac{t}{2} \right)^2$$

$$\left(J_v - \frac{h \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 + \left(J_w + \frac{h \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 < \left(\frac{t}{2} \right)^2$$

Nous verrons plus loin la démarche générale permettant d'obtenir ce système d'inéquations.

3.1.3. Représentation graphique du domaine jeu

Un domaine jeu peut également être traduit graphiquement dans un espace à six dimensions sous forme d'un hyper-volume. Cela peut être effectué à l'aide du système d'inéquations définissant ce domaine.

Pour l'exemple de la liaison pivot glissant, les 2 inéquations présentées ci dessus correspondent graphiquement à deux cylindres obliques de diamètre $t/2$. L'intersection de ces deux cylindres définit alors le domaine jeu réel de la liaison pivot glissant.

Ce domaine, illustré dans la figure 3.1, est borné pour les rotations autour de \bar{y} et \bar{z} ainsi que pour les translations suivant ces mêmes axes. Par contre, il est considéré infini pour la rotation et la translation suivant \bar{x} (degré de liberté).

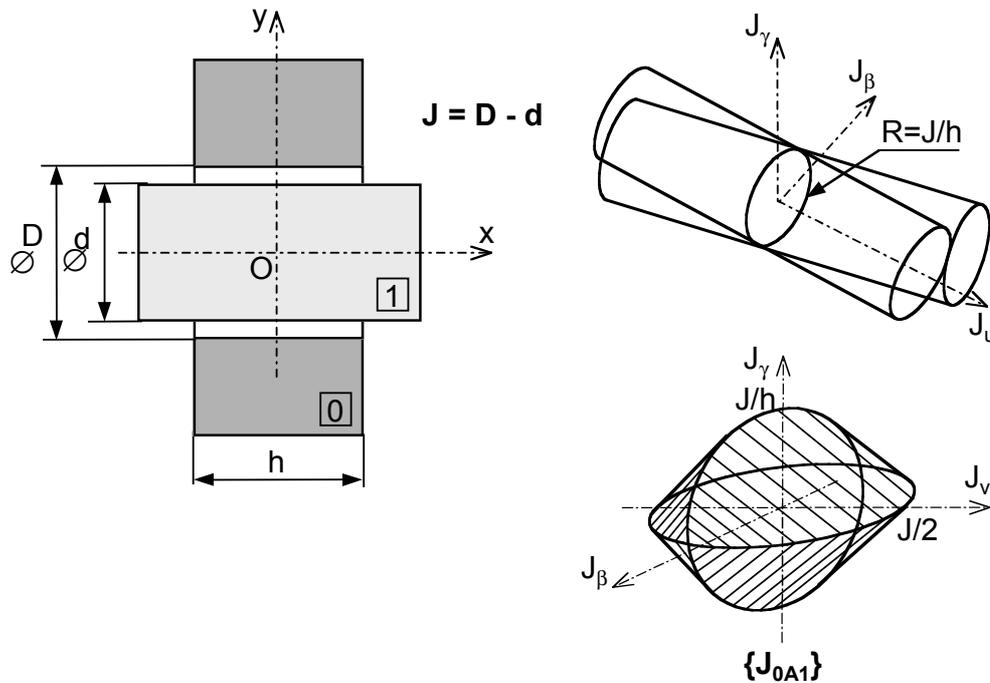


Figure 3.1 Domaine jeu de la liaison pivot glissant

Un domaine jeu est toujours défini dans l'espace R^6 . Mais, le plus souvent, nous supposons que les valeurs de 3 ou 4 composantes du torseur jeu sont fixes, ce qui permettra de représenter des coupes du domaine jeu dans un espace à 3 ou 2 dimensions respectivement. La figure 3.2 montre des coupes du domaine jeu pour la liaison pivot glissant par différents plans. La coupe du domaine jeu par un plan passant par le plan J_y J_z correspond à un losange qui est le même dans le plan J_z J_w . Mais elle correspond à un cercle dans le plan J_y J_z et une ellipse dans le plan J_v J_z .

3.1.4. Domaine jeu maxi et domaine jeu mini

Dans le cas où les dimensions intrinsèques des surfaces seraient affectées de tolérances (tolérances de taille), le domaine jeu dépendra des dimensions réelles des surfaces. Nous considérerons les dimensions réelles comme un paramétrage du domaine jeu. Par contre

le domaine jeu pour une liaison ne dépend pas des écarts de positions relatives des surfaces appartenant à chacun des solides. Une étude expérimentale relative aux domaines jeux est présentée dans [BAL 95].

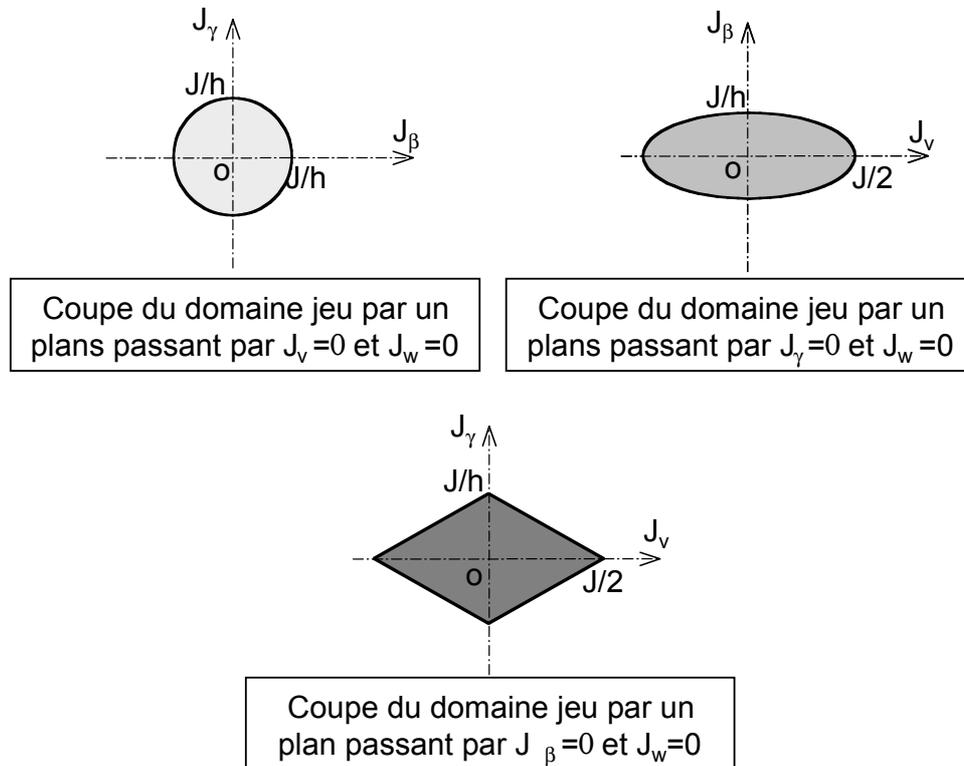


Figure 3.2 Coupes du domaine jeu de la liaison pivot glissant

Un domaine jeu pour une liaison possédant des paramètres intrinsèques peut donc être maxi ou mini. Cela dépend de l'état de matière des solides en contact s'ils sont dans leur état de maximum de matière ou de minimum de matière.

Pour la liaison pivot glissant par exemple, les dimensions intrinsèques sont les diamètres de l'arbre et l'alésage. Nous aurons donc un jeu diamétral déduit des variations de ces diamètres.

$$J = D_{\text{alésage}} - D_{\text{arbre}}$$

Un domaine jeu étant défini (voir construction plus loin) lorsque l'alésage est au diamètre maximal et l'arbre au diamètre minimal (mini matière) le domaine jeu sera

maximal et inversement dans l'état au maximum de matière. Les diamètres de l'arbre et de l'alésage sont donc des paramètres dont dépend le domaine jeu.

Par ailleurs, il existe des cas où la liaison ne possède aucun paramètre intrinsèque, c'est le cas de la liaison appui plan. Le domaine jeu pour cette liaison, comme nous allons voir plus loin, est semi-infini et la notion de domaine jeu mini ou maxi n'a plus de sens.

3.1.5. Construction du domaine jeu

3.1.5.1. Méthode générale

Soient deux solides en contact suivant une surface théorique commune. Les surfaces réelles sont supposées rigides et telles qu'il existe un jeu entre les deux solides.

Nous associons deux repères (0), (1) respectivement aux deux solides. Nous choisissons aussi une configuration de référence pour laquelle les deux repères coïncident fig.3.3

Soit P un point de la surface du solide 1, (x, y, z) sont ses coordonnées exprimés dans le repère (1). Soit M un point de la surface appartenant au solide (0), \vec{n} est le vecteur normal à la surface passant par P et orienté vers la matière tel qu'en configuration de référence la relation $\overrightarrow{PM} = J_0 \cdot \vec{n}$ est vérifiée.

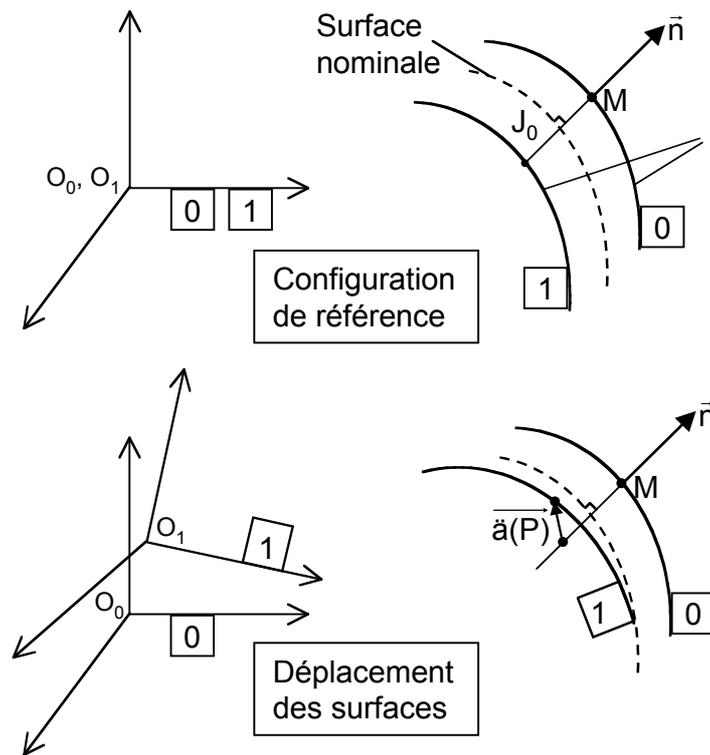


Figure 3.3 Constuction du domaine jeu

Si nous supposons que a, b, c sont les composantes de \vec{n} dans le repère (0), le vecteur normal \vec{n} s'écrit :

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Le déplacement du repère (1) peut être défini par un torseur de petits déplacements que nous allons exprimer dans le repère (0)

$${}_{O_0} \begin{bmatrix} \vec{a}\vec{e} \\ \vec{a}\vec{O}_0 \end{bmatrix} = {}_{O_0} \begin{bmatrix} J_a & J_u \\ J_b & J_v \\ J_c & J_w \end{bmatrix}$$

Le déplacement du point P lié à ce repère (1) est alors : $\vec{a}\vec{P} = \vec{a}\vec{O} + \vec{O}\vec{P} \wedge \vec{\delta}\theta$

$$\vec{\ddot{a}}P = \begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J_{\bar{a}} \\ J_{\bar{a}} \\ J_{\bar{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_u + z \cdot J_{\bar{a}} - y \cdot J_{\bar{a}} \\ J_v + x \cdot J_{\bar{a}} + z \cdot J_{\bar{a}} \\ J_w + y \cdot J_{\bar{a}} - x \cdot J_{\bar{a}} \end{bmatrix}$$

La condition de non-interférence ou l'indéformabilité des surfaces impose que la projection du déplacement du point P suivant la normale doit être inférieure ou égale au jeu J_0 .

Cela implique :

$$\vec{\ddot{a}}P \cdot \vec{n} \leq J_0$$

soit :

$$J_u \cdot a + J_v \cdot b + J_w \cdot c + J_{\bar{a}} \cdot (y \cdot c - z \cdot b) + J_{\bar{a}} \cdot (z \cdot a - x \cdot c) + J_{\bar{a}} \cdot (x \cdot b - y \cdot a) \leq J_0 \quad (1.3)$$

Nous nous apercevons dans cette inéquation que l'égalité correspond à l'équation d'un hyperplan dans l'espace des petits déplacements et J_0, a, b, c, x, y, z sont des paramètres qui caractérisent cet hyperplan. Elles sont des variables réelles représentant la contrainte du point de contact. Ainsi les points solutions de l'inéquation forment le demi-espace d'un côté de l'hyperplan.

Nous en déduisons que :

- L'ensemble des petits déplacements du point P permis par le jeu dans l'espace R^6 est représenté par l'inéquation (1.3).
- A chaque condition de contact d'un sommet du solide 0 sur une face du solide 1, correspond un hyperplan dans l'espace des petits déplacements.
- Un domaine jeu est la zone commune à un ensemble de contraintes, chacune étant de type de l'inéquation (1.3).

3.1.5.2. Domaine jeu approximé

Dans la méthode qui vient d'être développée, nous avons supposé que la surface de la liaison est formée de polygones plans. La construction du domaine jeu se réduit alors à étudier les déplacements permis par le jeu pour chacun des sommets des polygones munis de leur normale respective. Ainsi, les inéquations traduisant les limites du domaine jeu sont donc linéaires. Toutefois, dans le cas où la surface de la liaison n'est

pas formée de polygones plans, les inéquations ne sont pas linéaires (quadratiques pour une surface cylindrique), il est possible de faire une approximation linéaire. Cette approximation consiste à discrétiser la surface de la liaison en un polyèdre comportant n_p sommets. De ce fait, la surface est transformée en polygone, nous pourrions donc appliquer la méthode générale et étudier les déplacements de chacun des sommets du polygone. Les inéquations quadratiques représentant le domaine jeu sont alors remplacées par des inéquations linéaires. Par conséquent, le domaine jeu traduit par ces inéquations linéaires est transformé dans l'espace R^6 en polytope convexe. En effet, le polytope jeu est convexe car il est l'intersection des demi-espaces définis par chacune des contraintes linéaires.

Un exemple sera présenté plus loin pour la construction du domaine jeu approximé de la liaison pivot glissant.

L'intérêt de cette approximation linéaire est d'avoir des domaines jeux de forme simple, de simplifier les structures de données qui représentent ces domaines et de faciliter les calculs d'opérations topologiques dont nous nous servirons pour l'analyse des tolérances de mécanisme qui fera l'objet du prochain chapitre.

3.1.6. Construction des domaines jeux de quelques liaisons

Nous allons construire les domaines jeux de quelques liaisons qui nous semblent les plus courantes. Nous précisons que les constructions et représentations de domaines jeux sont réalisées à l'aide du logiciel Mathematica.

3.1.6.1. Liaison appui plan

Soit deux surfaces planes appartenant à deux solides distincts sont nominalement en contact.

Nous allons appliquer la méthode générale pour construire le domaine jeu de la liaison appui plan formée par deux surfaces planes. Pour cela, nous étudions les déplacements des points de sommets du rectangle, aussi nous choisissons un repère et une configuration de référence. La figure (3.4) illustre le paramétrage des points représentatifs de la liaison appui plan en configuration de référence.

Les déplacements des points de sommets M_i s'écrivent sous la forme :

$$\vec{\ddot{a}}Mi = \vec{\ddot{a}}O + \vec{MiO} \wedge \vec{\ddot{a}}\theta$$

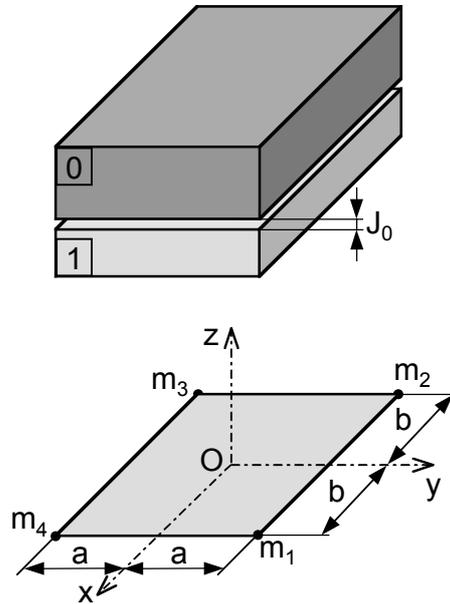


Figure 3.4 Liaison plane avec jeu

Nous exprimons les déplacements des quatre points sommets du rectangle ainsi que les vecteurs normaux par rapport au repère de référence O

$$\vec{\ddot{a}}m_1 = \begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J_{\dot{a}} \\ J_{\dot{a}} \\ J_{\dot{a}} \end{bmatrix} \quad \vec{n}_{m_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\ddot{a}}m_2 = \begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J_{\dot{a}} \\ J_{\dot{a}} \\ J_{\dot{a}} \end{bmatrix} \quad \vec{n}_{m_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\delta m}_3 = \begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J_{\hat{a}} \\ J_{\hat{a}} \\ J_{\hat{a}} \end{bmatrix} \quad \vec{n}_{m_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\delta m}_4 = \begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J_{\hat{a}} \\ J_{\hat{a}} \\ J_{\hat{a}} \end{bmatrix} \quad \vec{n}_{m_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La condition de non-interférence s'écrit :

$$\vec{\delta m}_i \cdot \vec{n}_i \leq J_0$$

Cette condition nous donne donc quatre contraintes ou inéquations :

Pour le point m_1 $J_w - \frac{a}{2}J_{\hat{a}} + \frac{b}{2}J_{\hat{a}} \leq J_0$

Pour le point m_2 $J_w + \frac{a}{2}J_{\hat{a}} + \frac{b}{2}J_{\hat{a}} \leq J_0$

Pour le point m_3 $J_w + \frac{a}{2}J_{\hat{a}} - \frac{b}{2}J_{\hat{a}} \leq J_0$

Pour le point m_4 $J_w - \frac{a}{2}J_{\hat{a}} - \frac{b}{2}J_{\hat{a}} \leq J_0$

Ces quatre inéquations correspondent à quatre hyperplans. L'intersection de ceux ci définit les limites du domaine jeu de la liaison appui plan. La figure 3.5 représente le domaine jeu d'une liaison appui plan avec un jeu J_w non nul.

Nous pouvons remarquer que le domaine jeu de la liaison appui plan est semi-infini car le plan ne possède pas un paramètre intrinsèque. Il n'est donc pas possible de définir des domaines jeux maxi et mini.

D'autre part, la figure 3.5 montre que la coupe du domaine jeu, par un plan parallèle au plan défini par les axes J_α , J_β , a une forme rectangulaire. Dans le cas général d'un contact plan délimité par un contour polygonal convexe à n sommets, la coupe du

domaine jeu dans le plan $J_w = \text{constante}$, sera un polygone convexe de n cotés. Dans le cas d'un contact suivant un contour non convexe, il faudra considérer le polygone convexe qui englobe ce contour.

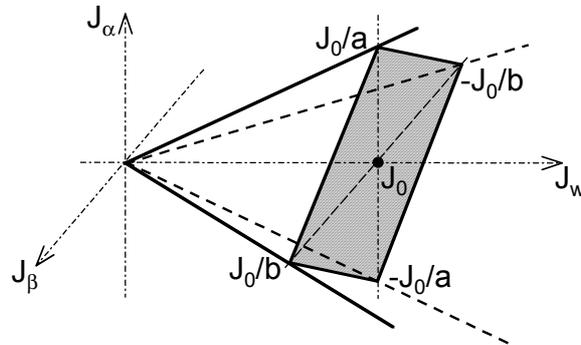


Figure 3.5 *Domaine jeu de la liaison appui plan (plan sur plan)*

Pour construire le domaine jeu d'une liaison plane dont la surface de contact est limitée par un cercle, le cercle peut être discrétisé en n points qui donneront n inéquations d'hyperplans. Lorsque n tend vers l'infini, l'enveloppe de ces hyperplans tend vers un volume conique représenté fig. 3.6. Dans ce cas, la coupe du domaine jeu dans un plan parallèle au plan J_α, J_β sera un cercle.

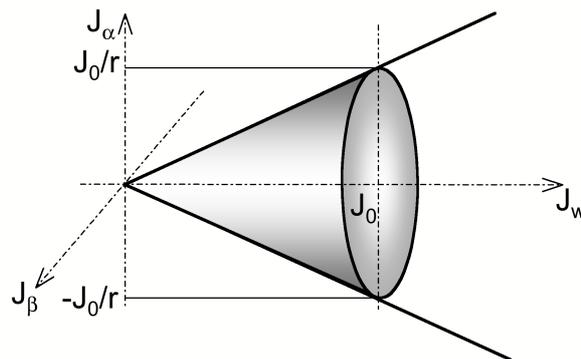


Figure 3.6 *Domaine jeu de liaison appui plan (cylindre sur plan)*

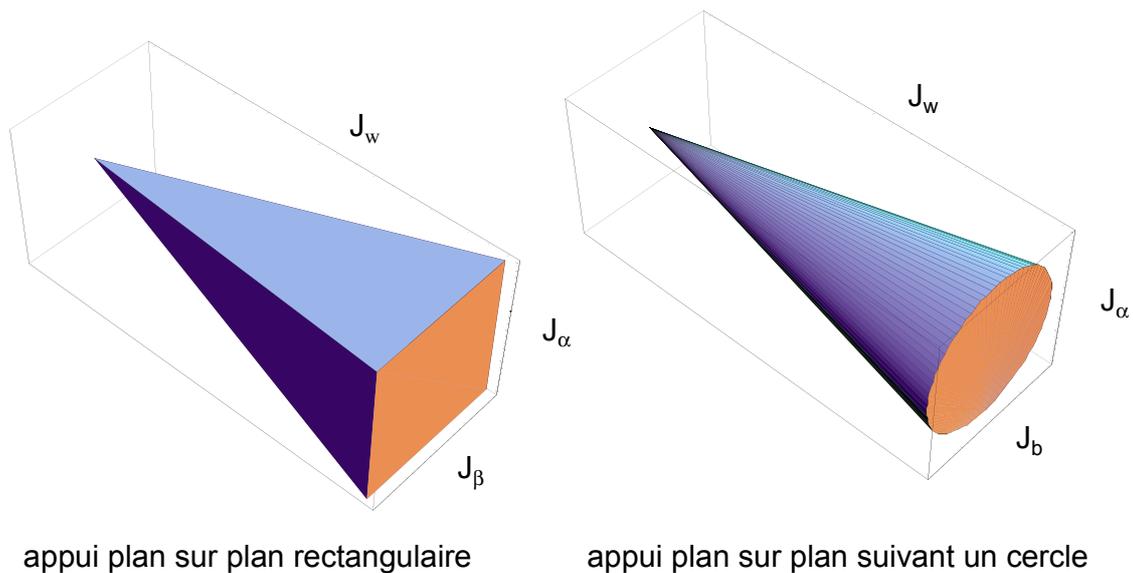


Figure 3.7 Domaines jeux réels de la liaison appui plan construits à l'aide du logiciel Mathematica V4.1

Dans le cas le plus fréquent, le jeu nominal entre deux surfaces planes est considéré nul, c'est à dire que la configuration de référence correspond au cas où les deux plans sont effectivement en contact.

Dans le cas où le torseur jeu est toujours nul, il n'y pas de domaine jeu. Nous dirons que le contact est maintenu. C'est le cas par exemple lorsque les solides sont maintenus en contact par des vis.

3.1.6.2. Liaison pivot glissant

Nous allons commencer par la construction du domaine jeu réel de la liaison pivot glissant. Nous verrons ensuite la construction avec une approximation linéaire.

Domaine jeu réel

Soient deux solides nommés arbre et alésage limités par des surfaces cylindriques formant une liaison pivot glissant fig. (3.8). Nous supposons que les diamètres des deux cylindres sont différents. Un jeu diamétral est ainsi constitué correspondant à la variation de deux diamètres :

$$J = D - d$$

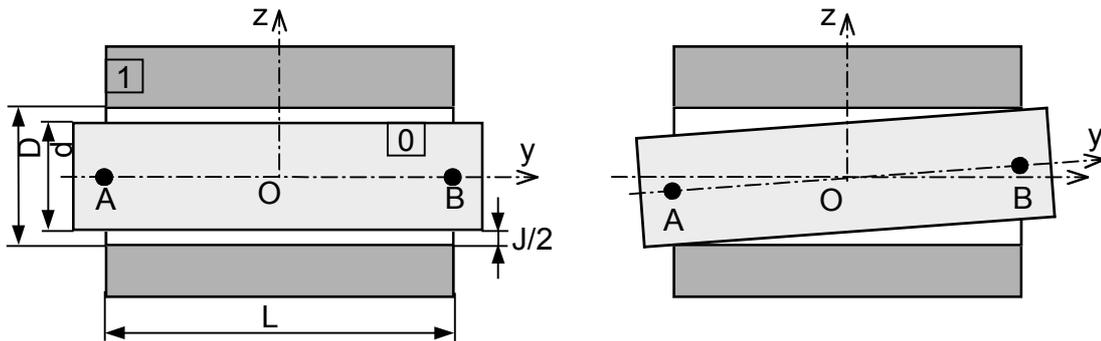


Figure 3.8 Liaison pivot glissant

Nous choisissons tout d'abord une configuration de référence telle que les repères associés à deux solides coïncident. Un repère de référence est également défini au centre de la liaison pivot glissant.

L'étude de contact des deux cylindres l'un par rapport à l'autre reviendra à étudier deux liaisons linéaires annulaires à chaque extrémité des cylindres

Par contre, notre problème peut aussi être ramené à étudier les déplacements de l'axe de l'arbre (cylindre 0) dans un cylindre de diamètre $J = D - d$. Ainsi, il suffira d'étudier les déplacements d'un point de chacun d'extrémités de l'axe du cylindre.

Les déplacements des points A, B peuvent donc être exprimés par rapport au repère O de la manière suivante :

$$\vec{a}A = \vec{a}O + \vec{AO} \wedge \vec{a}\theta$$

$$\vec{a}B = \vec{a}O + \vec{BO} \wedge \vec{a}\theta$$

$$\vec{a}A = \begin{bmatrix} 0 \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ J_{\dot{a}} \\ J_{\ddot{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_v - \frac{L}{2} J_{\dot{a}} \\ J_w + \frac{L}{2} J_{\ddot{a}} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\delta B} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ J_{\bar{a}} \\ J_{\bar{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_v + \frac{L}{2} J_{\bar{a}} \\ J_w - \frac{L}{2} J_{\bar{a}} \end{bmatrix}$$

La condition de non-interférence implique :

$$\|\vec{\delta A}\| \leq \frac{J}{2} \text{ et } \|\vec{\delta B}\| \leq \frac{J}{2}$$

d'où :

$$\left(J_v - \frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 + \left(J_w + \frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 < \left(\frac{J}{2} \right)^2$$

$$\left(J_v + \frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 + \left(J_w - \frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 < \left(\frac{J}{2} \right)^2$$

Nous posons $J_v = 0$. Ceci nous permettra de représenter le domaine jeu dans un espace à 3 dimensions $(\vec{J}_w, \vec{J}_{\bar{a}}, \vec{J}_{\bar{a}})$. Les deux inéquations se réduisent donc :

$$\left(\frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 + \left(J_w + \frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 < \left(\frac{J}{2} \right)^2$$

$$\left(\frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 + \left(J_w - \frac{L \cdot J_{\bar{a}}}{2} \right)^2 < \left(\frac{J}{2} \right)^2$$

Nous nous apercevons que l'égalité dans ces 2 inéquations correspond à deux cylindres obliques. L'intersection de ces derniers constitue le domaine jeu réel de la liaison pivot glissant. La figure 9.3 présente le domaine jeu réel de la liaison pivot glissant à l'aide du logiciel Mathematica 4.1.

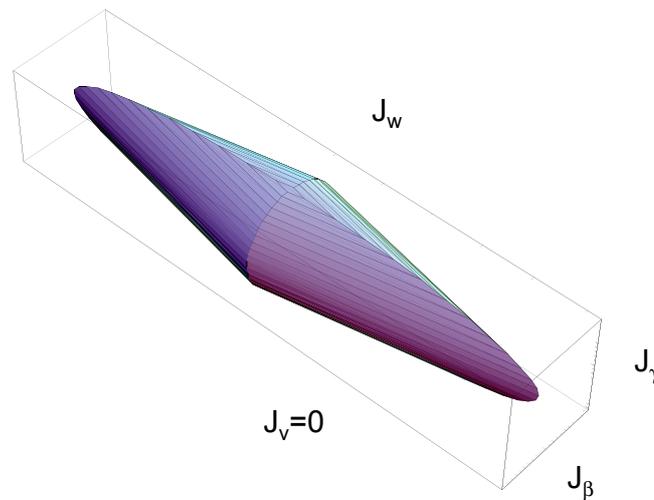


Figure 3.9 Domaine jeu réel de la liaison pivot glissant

Domaine jeu approximé

Nous allons utiliser la méthode générale pour construire le domaine jeu approximé de la liaison pivot glissant. Pour cela nous allons transformer l'enveloppe cylindrique de nos solides par une enveloppe polyèdre de n_p plans égaux.

A chaque arête de l'enveloppe polyédrique de notre solide intérieur, nous posons une face de l'enveloppe de notre solide extérieur. Les vecteurs $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \dots \vec{n}_{n_p}$ sont des vecteurs normaux.

Du fait de la symétrie de notre problème, nous obtiendrons $2 * n_p$ inéquations de plans identiques, exprimées respectivement au centre de la liaison.

Nous allons déterminer les coordonnées de nos points et leur vecteur respectif en posant :

$$\theta = \frac{2\pi}{n_p} \quad \vec{n}_i = \begin{bmatrix} ai \\ bi \\ ci \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(i\theta) \\ \cos(i\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le point O est le centre de la liaison pivot glissant. Les coordonnées des point P sont donc :

$$\vec{OP}_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin(i\theta) \\ r \cos(i\theta) \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

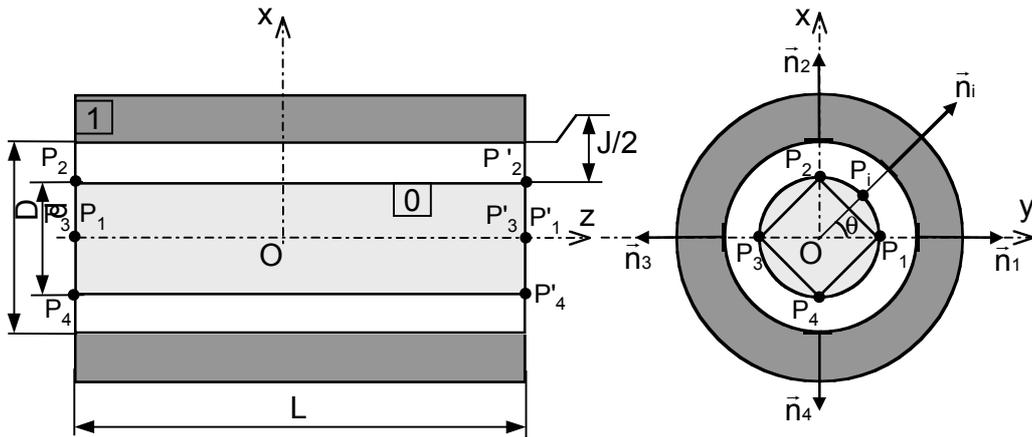


Figure 3.10 Liaison pivot glissant, méthode d'approximation

Le déplacement du point P_i est donné par la relation suivante :

$$\vec{\delta}(P_i) = \vec{\delta}(O) + \vec{OP}_i \wedge \vec{\delta}(\theta)$$

$$\vec{\delta}(O) = \begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} \quad \vec{\delta}(\theta) = \begin{bmatrix} J_\alpha \\ J_\beta \\ J_\gamma \end{bmatrix}$$

La condition de non interférence implique :

$$\vec{\delta}(O) \cdot \vec{n}_i \leq \frac{J}{2}$$

$$\begin{bmatrix} J_u \\ J_v \\ J_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(i\theta) \\ \cos(i\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} r \sin(i\theta) \\ r \cos(i\theta) \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J_\alpha \\ J_\beta \\ J_\gamma \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \sin(i\theta) \\ \cos(i\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \leq \frac{J}{2}$$

Soit :

$$J_u \sin(i\theta) + J_v \cos(i\theta) - \frac{L}{2} J_\beta \sin(i\theta) + J_\alpha \cos(i\theta) \leq \frac{J}{2} \quad \text{pour } i \in \{1 ; n_p\}$$

Celle-ci est l'équation contrainte d'un hyperplan. De même nous obtenons pour l'autre extrémité

$$J_u \sin(i\theta) + J_v \cos(i\theta) + \frac{L}{2} J_\beta \sin(i\theta) - \frac{L}{2} J_\alpha \cos(i\theta) \leq \frac{J}{2}$$

Si on se résume à l'espace défini par les axes des composantes J_u, J_α, J_β l'inéquation du plan devient :

$$J_u \sin(i\theta) - \frac{L}{2} J_\beta \sin(i\theta) + \frac{L}{2} J_\alpha \cos(i\theta) \leq \frac{J}{2}$$

En prenant par exemple $n_p = 4$ et $\theta = \pi/2$, on obtient 4 inéquations d'un hyperplan pour chaque extrémité. Elles s'écrivent :

Pour le point P_1 :	$\frac{L}{2} J_\alpha \leq \frac{J}{2}$	Pour le point P'_1 :	$-\frac{L}{2} J_\alpha \leq \frac{J}{2}$
Pour le point P_2 :	$J_u - \frac{L}{2} J_\beta \leq \frac{J}{2}$	Pour le point P'_2 :	$J_u + \frac{L}{2} J_\beta \leq \frac{J}{2}$
Pour le point P_3 :	$-\frac{L}{2} J_\alpha \leq \frac{J}{2}$	Pour le point P'_3 :	$\frac{L}{2} J_\alpha \leq \frac{J}{2}$
Pour le point P_4 :	$-J_u + \frac{L}{2} J_\beta \leq \frac{J}{2}$	Pour le point P'_4 :	$-J_u - \frac{L}{2} J_\beta \leq \frac{J}{2}$

La figure 10.3 représente le domaine jeu approximé de la liaison pivot glissant pour $n_p = 4$ et $n_p = 8$.

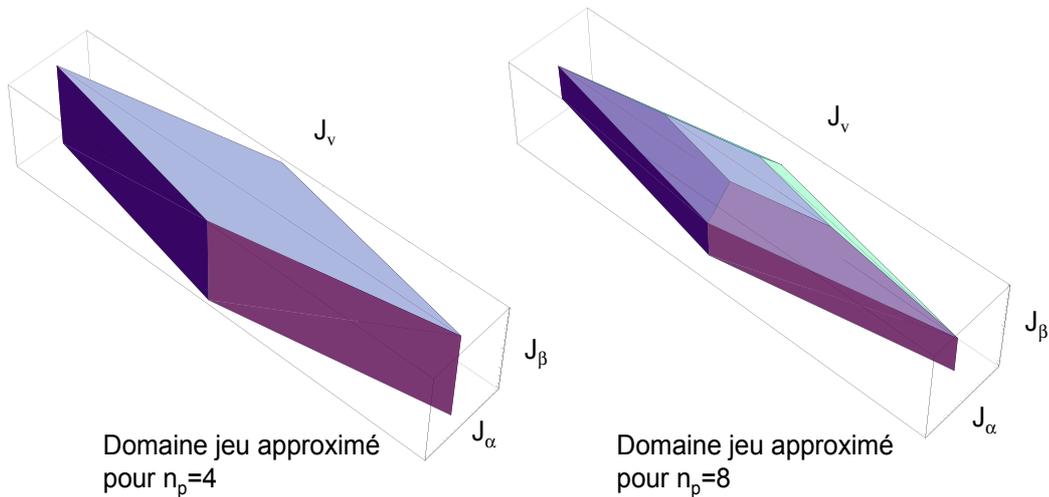


Figure 3.11 Domaine jeu approximé de la liaison pivot glissant

3.2. DOMAINE ECART

3.2.1. Définition

Afin de respecter les conditions fonctionnelles comme les condition d'assemblage par exemple, nous devons définir des limites pour chaque surface à tolérer. En effet, le tolérancement normalisé permet d'exprimer chaque spécification géométrique par une zone de tolérance. Cette zone limite les petits déplacements de la surface tolérancée par rapport à une ou plusieurs références. Ceci revient à imposer des limites pour les valeurs des composantes du torseurs d'écart propre à la nature géométrique de la surface en question. On rappelle que dans notre modélisation le défaut de forme est supposé négligeable par rapport aux dimensions des zones de tolérances.

Nous appelons domaine écart l'ensemble des petits déplacements du repère lié à l'élément tolérancé par rapport au repère lié à la référence, lorsque l'élément tolérancé occupe toutes les positions permises par la zone de tolérance. Le domaine écart

représente donc l'ensemble des valeurs possibles qui peut prendre le torseur écart pour une zone de tolérance donnée [GIO 99].

3.2.2. Représentation Analytique du domaine écart

Comme pour le domaine jeu, le domaine écart peut également être représenté mathématiquement par un système d'inéquations [GIO 99]. Celles ci portent en général sur 6 composantes (3 rotations et 3 translations). Elles traduisent les limites de la zone de tolérance qui limite les déplacements de la surface tolérancée, donc les limites imposées au torseur d'écart.

Pour connaître quelles sont les variables qui apparaîtront dans les inéquations, nous pouvons mener une étude statique vu précédemment (Cf chapitre 2, partie 3)

Il est toujours possible de traduire une zone de tolérance par un ensemble d'inéquations ou par un domaine écart. Par contre un domaine écart quelconque ne correspond pas forcément à une zone de tolérance.

D'autre part, dans le cas où il y a plusieurs zones de tolérance qui sont imposées pour la même surface, chacune de ces zones correspond à un ensemble d'inéquations. Le système total d'inéquations obtenu finalement correspondra au domaine écart de la surface tolérancée.

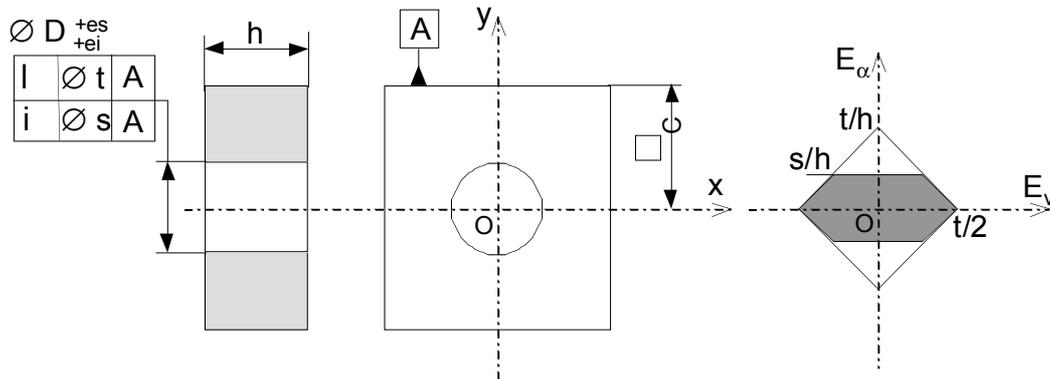


Figure 3.12 Représentation analytique et graphique du domaine écart

Par exemple, pour une tolérance de parallélisme et de localisation entre un cylindre et un plan nominalement parallèles, nous supposons que l'axe du cylindre B doit être compris entre deux plans parallèles distants de la valeur de tolérance « t » donnée et de part et d'autre d'une position de référence (voir fig.3.12). Ainsi le défaut d'orientation suivant l'axe \bar{x} et le petit déplacement suivant l'axe \bar{y} doivent être limités suivant le système d'inéquations présenté dans la figure 12.3

3.2.3. Représentation graphique du domaine écart

3.2.3.1. Présentation

Nous venons de voir que les limites d'un domaine écart peuvent être traduites par un système d'inéquations. Ces dernières peuvent aussi être traduites dans un espace à 6 dimensions sous forme d'un hypervolume qui représente le domaine écart.

Un domaine écart est donc toujours défini dans un espace à 6 dimensions. Mais, nous représenterons fréquemment des sous-ensembles du domaine dans un espace à 2 ou 3 dimensions, comme cela est fait pour le domaine jeu. Comme cela a été expliqué dans le deuxième chapitre, les composantes indéterminées ou comportant des termes indéterminés indépendants sont choisies égales à zéro. Pratiquement cela signifie par exemple qu'il n'y a aucun sens à définir des tolérances suivant les degrés de liberté d'une surface puisqu'il est impossible de mesurer un écart de position (ou d'orientation) suivant ce degré de liberté de translation (ou de rotation respectivement).

3.2.3.2. Méthode de construction du domaine écart

La méthode utilisée pour la construction du domaine écart est similaire à celle qui est présentée pour le domaine jeu. Pour construire le domaine écart pour une surface tolérancée, nous devons définir le système d'inéquations qui dépend ici des tolérances géométriques affectées à la surface. Ce système est obtenu en étudiant le déplacement de l'élément géométrique (axe ou point) ou de la surface tolérancée dans la zone de tolérance définie par le tolérancement. Avec l'hypothèse de petits déplacements et dans le cas où la zone de tolérance n'est pas un cylindre, l'étude du déplacement conduit à un système d'inéquations qui sera linéaire.

Par contre, dans le cas où les inéquations sont quadratiques, en particulier quand la zone de tolérance est un cylindre, il est possible de les remplacer par des inéquations linéaires

en faisant une approximation linéaire. Ces inéquations sont traduites dans un espace à six dimensions par un hypervolume convexe appelé polytope. Cette approximation permettra d'avoir un domaine écart plus simple en terme de forme, qui facilitera donc les opérations topologiques qui nous serviront pour l'analyse des tolérances des mécanismes qui fera l'objet du chapitre 4.

Comme certaines composantes du domaine écart sont nulles, l'hypervolume qui représente ce domaine est en fait une entité de dimension inférieure à 6 suivant le nombre de composantes nulles. Par exemple pour une tolérance de localisation d'un plan par rapport à un repère de référence, seules 3 composantes sont non nulles (une translation et deux rotations) le domaine écart est un volume de dimension 3 placé dans un espace de dimension 6. (De la même façon que l'on peut définir des entités surfaces de dimension 2 dans l'espace de dimension 3).

Nous allons, au travers des quelques exemples du tolérancement, montrer la construction du domaine écart pour les surfaces les plus courantes.

Nous utiliserons pour ces exemples les spécifications de la Norme ISO mais sans perdre de vue que ces spécifications devront être interprétées selon notre modèle du tolérancement défini dans le chapitre 2, en particulier sans défaut de forme.

3.2.4. Exemples de tolérancement avec une référence simple

3.2.4.1. Tolérancement de deux plans parallèles

Considérons un solide comportant 2 surfaces planes qui sont en position nominale parallèles. Une de ces 2 surfaces est affectée de la tolérance de la localisation par rapport à l'autre surface qui est prise en référence fig.3.13. Selon notre modèle l'interprétation d'une telle tolérance sera la suivante : la surface associée au plan tolérancé doit être dans le volume compris entre deux plans parallèles distants de la valeur de tolérance « t » donnée et de part et d'autre d'une position de référence.

Ainsi, le torseur d'écart pour ce cas du tolérancement comporte 3 composantes non nulles. Le domaine écart sera donc représenté par un volume dans un espace à 3 dimensions. Ce domaine est obtenu en étudiant le déplacement du plan tolérancé dans la zone de tolérance. On suppose ici que le plan est limité par un polygone à 4 sommets, la

démarche se réduit à étudier le déplacement de chacun de ces sommets dans la zone de tolérance.

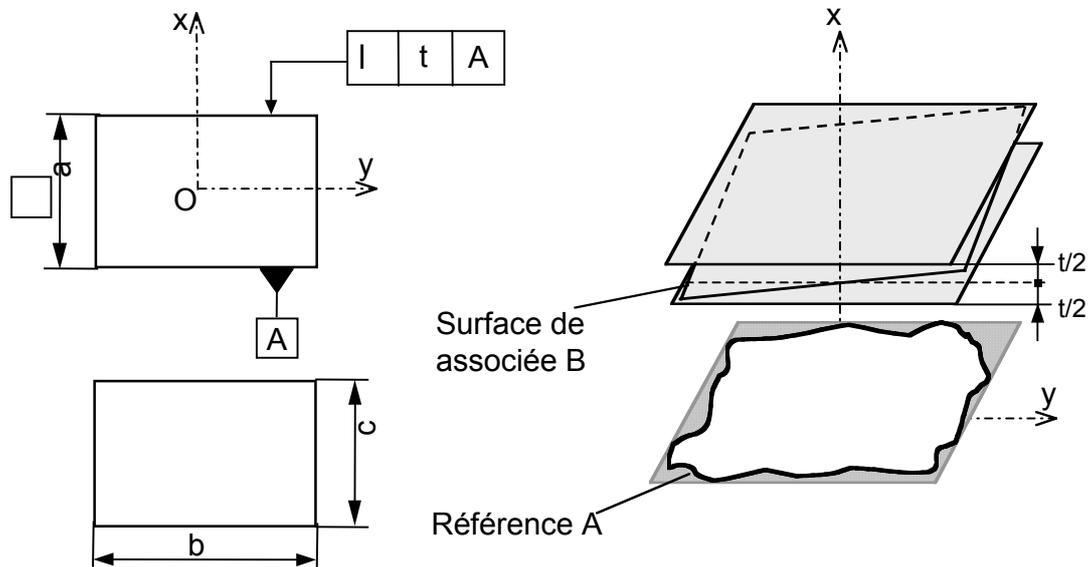


Figure 3.13 Localisation d'un plan , zone de tolérance

Nous obtenons donc 4 relations linéaires entre les 3 composantes du torseur d'écart sous la forme :

$$\begin{cases} -t < b \cdot E_{\bar{a}AB} + c \cdot E_{\beta A1B} + 2 \cdot E_{uA1B} < t \\ -t < b \cdot E_{\bar{a}AB} + c \cdot E_{\beta A1B} - 2 \cdot E_{uA1B} < t \\ -t < b \cdot E_{\bar{a}AB} - c \cdot E_{\beta A1B} + 2 \cdot E_{uA1B} < t \\ -t < b \cdot E_{\bar{a}AB} - c \cdot E_{\beta A1B} - 2 \cdot E_{uA1B} < t \end{cases}$$

Le cas limite de l'égalité dans chacune de ces 8 inéquations correspond à l'équation d'un plan dans l'espace des variables E_{β} , E_{γ} , E_{u} . Ces huit plans délimitent un polyèdre convexe qui représente le domaine écart correspondant à la tolérance de la localisation du plan. Chaque point intérieur à ce domaine correspond à un torseur de petit déplacement permis pour le plan tolérancé par rapport au repère de référence (torseur

d'écarts). La figure.3.14 illustre le domaine écart obtenu à l'aide du logiciel Mathematica 4.1.

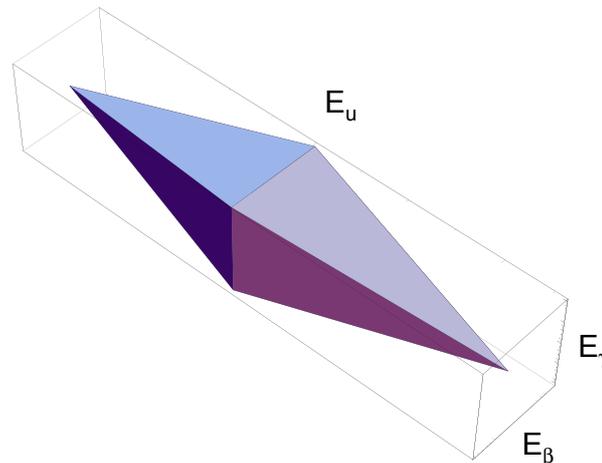


Figure 3.14 Domaine écart pour la localisation d'un plan

3.2.4.2. Tolérancement de deux cylindres parallèles

Considérons un solide comportant deux surfaces cylindriques qui sont nominalemeent parallèles. Un de ces deux cylindres est affecté de la tolérance de la localisation par rapport à l'autre cylindre pris en référence. Le torseur d'écarts a la forme générale suivante :

$$E = \begin{bmatrix} E_a & E_u \\ E_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous pourrions distinguer deux cas de tolérancement pour lesquels les interprétations seront différentes.

Pour le premier cas fig. 3.15, l'axe du cylindre devra être compris entre deux plans parallèles distants de la valeur de tolérance « t ». La composante E_α n'est pas limitée. Le domaine écart est infini dans cette direction. La coupe de ce domaine dans un plan $E_\alpha=0$ est un losange (fig. 3.16).

Le deuxième cas de tolérancement se distingue du premier par l'utilisation du symbole \emptyset devant la valeur de la tolérance « t », deuxième cas de la figure 3.15. L'interprétation d'une tel tolérancement est différent du premier. Ici l'axe du cylindre devra être compris

à l'intérieur d'un cylindre de diamètre « t ». Le torseur d'écart comporte dans ce cas trois composantes limitées et non identiquement nulles.

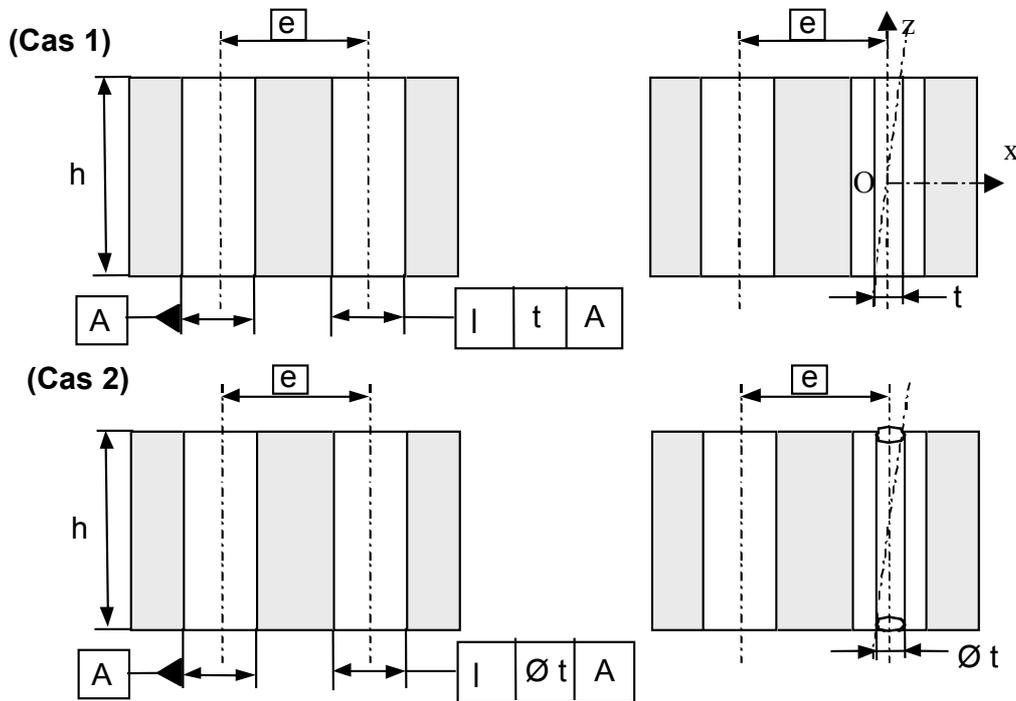


Figure 3.15 Représentation et interprétation du tolérancement relatif de deux cylindres parallèles

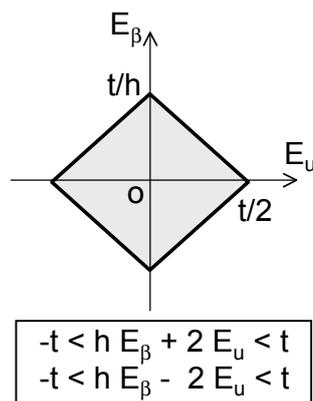


Figure 3.16 Coupe du domaine écart dans le plan $E_\alpha=0$

En se limitant à une représentation dans un espace à trois dimensions, on obtient la figure 3.17. Il s'agit d'une coupe du domaine défini dans l'espace à 6 dimensions.

Le système d'inéquations découlant de ce tolérancement est quadratique. Par contre, il est possible de faire une approximation en ramenant ce système quadratique à un système d'inéquations linéaires comme cela a été fait pour le domaine jeu.

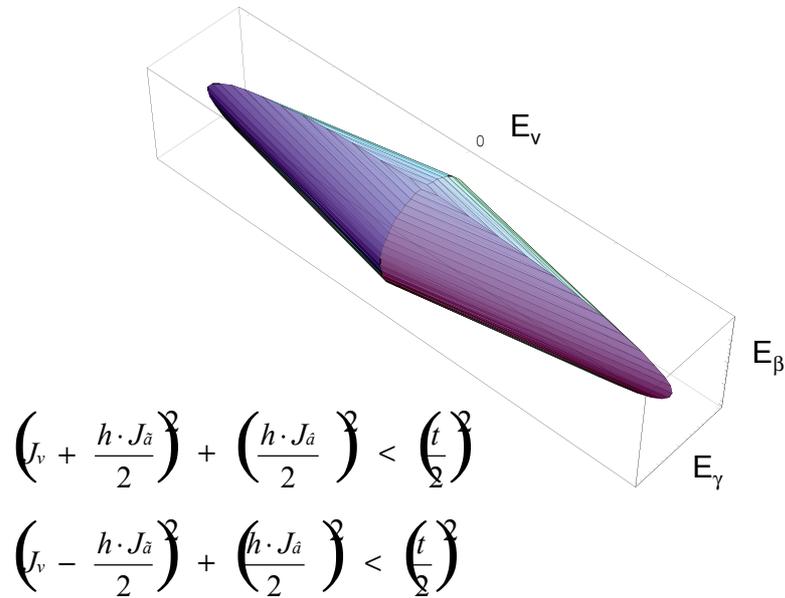


Figure 3.17 Domaine écart réel et inéquations associées pour une tolérance de localisation d'un cylindre

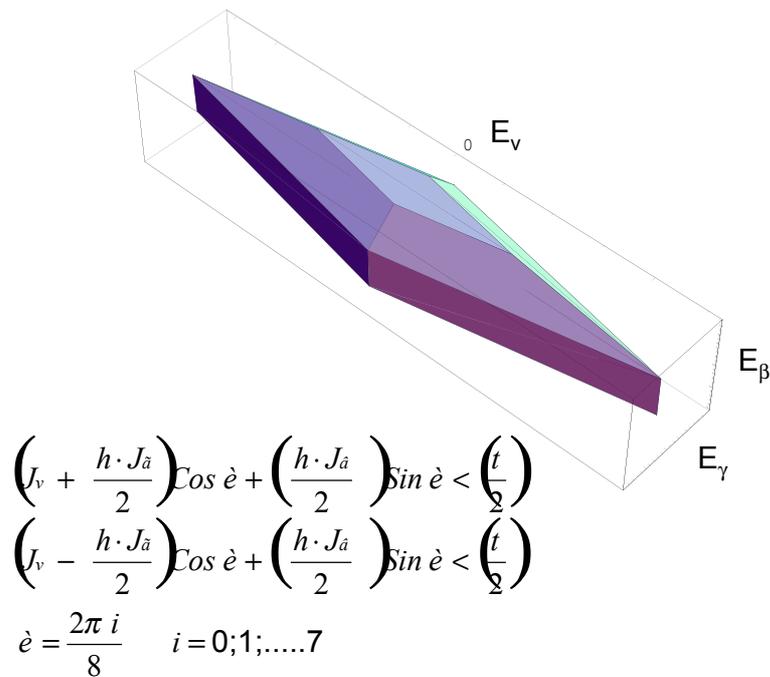


Figure 3.18 *Domaine écart approximé et inéquations associée pour une tolérance de localisation d'un cylindre*

Cette approximation peut être réalisée en étudiant quelques configurations possibles (4 ou 8) du déplacement de l'axe du cylindre dans la zone de tolérance du diamètre « t ». Ceci permet d'avoir un domaine de forme plus simple, afin de faciliter les opérations topologiques qui feront l'objet du prochain chapitre. La figure 3.18 illustre le domaine écart approximé et le système d'inéquations associées.

3.3. CONCLUSION

Dans le cadre d'un modèle basé sur la notion de surfaces associées aux surfaces réelles supposant que les défauts de forme sont négligeables par rapport aux autres défauts géométriques et dimensionnels, et en utilisant l'hypothèse des petits déplacements, il est possible de représenter d'une part les jeux des liaisons et d'autre part les tolérances géométriques par un domaine dans l'espace des configurations à 6 dimensions.

Le domaine jeu associé à une liaison entre deux pièces rigides traduit les conditions réelles de contact en prenant en compte le jeu de la liaison ou le fait que cette liaison peut être unilatérale comme la liaison plane ou le contact ponctuel.

Le domaine écart est lui associé à une tolérance géométrique. Seuls quelques exemples significatifs ont été présentés, mais on pressent aisément la possibilité de représenter toute tolérance géométrique normalisée d'une surface par un domaine écart.

Ces domaines sont équivalents à un systèmes d'inéquations. Ils sont toujours supposés être représentés dans un espace à 6 dimensions. Ils peuvent être illimités suivant certaines directions. C'est le cas des domaines jeux suivant les degrés de liberté. Ils peuvent être nuls suivant certaines directions. C'est le cas des domaines écarts suivant des directions où l'écart n'est pas mesurable.

Lorsque les inéquations sont linéaires, les domaines sont des polytopes. Lorsqu'elles ne sont pas linéaires, il est toujours possible de faire une approximation pour les transformer en un système d'inéquations linéaires.

La richesse des informations contenue dans ces domaines nous permettra de les utiliser dans les chaînes de tolérances tridimensionnelles, aussi bien pour l'analyse que pour leur synthèse. C'est ce qui va être abordé dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

ANALYSE ET SYNTHÈSE DES TOLERANCES A L'AIDE DES DOMAINES JEUX ET DOMAINES ECARTS

Introduction

Nous avons vu que, pour chaque liaison dans un mécanisme, il est possible de traduire les conditions de contact par un ensemble d'inéquations portant sur les composantes de petits déplacements. Ces conditions sont modélisées par le domaine jeu. D'autre part les tolérances géométriques peuvent elles aussi être modélisées sous forme d'inéquations portant sur les composantes de petits déplacements de surfaces des pièces et sont représentées par des domaines écarts. Il s'agit maintenant dans une approche d'analyse, de considérer des mécanismes, assemblages de pièces et de liaisons et de tenir compte des relations entre les petits déplacements au voisinage d'une configuration donnée pour vérifier si les conditions imposées par les tolérances et les contacts aux liaisons sont compatibles avec l'assemblage du mécanisme. Certains résultats de cette analyse, permettront de proposer une approche de synthèse de tolérances.

4.1 OPERATIONS SUR LES DOMAINES JEUX ET ECARTS

Lors de l'analyse de tolérance d'un mécanisme à l'aides des domaine jeux et domaines écarts, des opérations de types topologiques devons être réalisées sur ces domaines.

Ainsi selon la structure du mécanisme, nous pouvons distinguer deux types d'opérations : les opérations sommes sont effectuées pour un mécanisme formant une

boucle simple (liaisons en série), les opérations intersection sont effectuées pour un mécanisme dont les liaisons sont en parallèles.

4.1.1. Somme de deux domaines

4.1.1.1 Définition

Soient deux torseurs J_1, J_2 , appartenant chacun à un domaine connu $\{J_1\}$ et $\{J_2\}$ respectivement. Lorsque ces deux torseurs, qui doivent être exprimés dans même repère, prennent toutes les valeurs possibles à l'intérieur des domaines qui leur appartiennent, alors l'ensemble des valeurs possibles de leur somme forme un nouveau domaine noté $\{J_1\} \oplus \{J_2\}$ que nous nous appelons somme des domaines ou domaine résultant. Nous pouvons donc écrire :

$$\text{Soient } J_1 \in \{J_1\} \text{ et } J_2 \in \{J_2\}$$

$$\text{Alors } J_1 + J_2 \in \{J_1\} \oplus \{J_2\} \quad \forall J_1 \text{ et } \forall J_2$$

Du point de vue de la représentation géométrique, le domaine somme (résultant) est obtenu en effectuant la somme de Minkowski des domaines donnés. Nous utiliserons le symbole \oplus pour présenter cette opération sur l'ensemble des domaines jeux ou écarts.

D'autre part, la somme de Minkowski de deux domaines sera le domaine balayé obtenu en déplaçant le centre d'un des deux domaines (qui correspond au torseur nul) sur la frontière de l'autre. La figure (4.1.) illustre un exemple de la somme de Minkowski de deux domaines définis dans un espace de dimension 2..

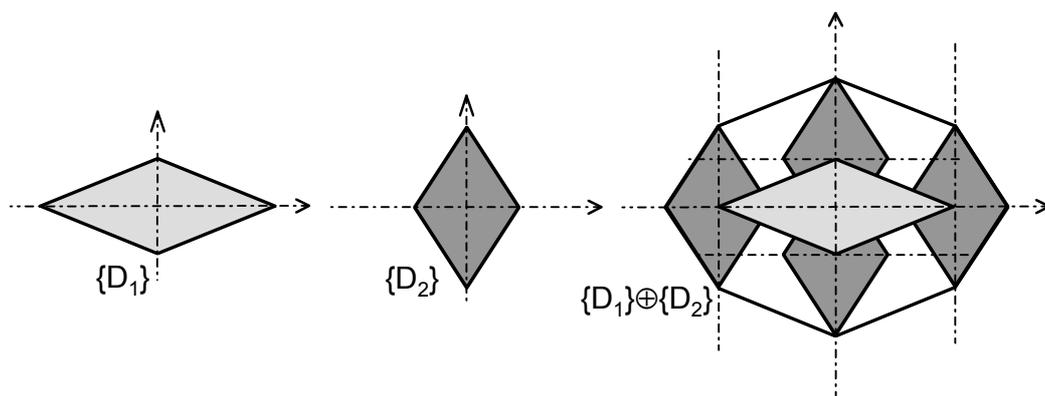


Figure 4.1 Somme de Minkowski de deux domaines

Cette somme s'applique de la même façon aux domaines jeux et aux domaines écarts.

4.1.1.2. Application aux domaines jeux

Si on considère 3 pièces (0), (1) et (2) telles que (0) est lié à (1) par la liaison A et (1) est liée à (2) par la liaison B. Les deux liaisons A et B seront dites en série. En supposant que les repères liés aux surfaces A et B de la pièce intermédiaire (1) coïncident parfaitement (torseur écart E_{A1B} nul) alors, le domaine jeu de la pièce (2) par rapport à la pièce (0) sera obtenu en effectuant la somme des domaines jeux des liaisons A et B.

4.1.1.3. Application aux domaines écarts

En particulier, si on définit sur une même pièce l'écart de position relative entre deux surfaces A et B par le torseur E_{AB} et entre B et C par le torseur E_{BC} . Le domaine écart $\{E_{AC}\} = \{E_{AB}\} \oplus \{E_{BC}\}$ représente l'ensemble des écarts de positions relatives possibles entre les surfaces A et C sachant que les écarts entre A et B d'une part et entre B et C d'autre part sont limités par des tolérances qui permettent de construire leur domaine écart $\{E_{AB}\}$ et $\{E_{BC}\}$. Il s'agit ici d'une généralisation au cas tridimensionnel de la notion de transfert de côtes.

Lorsque les domaines sont polyédriques, les sommets correspondent à des configurations particulières des positions relatives des surfaces réelles entre elles, qui peuvent être qualifiées des configurations les plus défavorables. Les sommets des domaines composés correspondent alors à des combinaisons de positions les plus défavorables des surfaces, qui sont générés par la mise en œuvre de l'opération de somme de Minkowski. On remarque que cette opération élimine automatiquement les combinaisons de cas les plus défavorables mais qui ne constituent pas, une fois combinés, des cas les plus défavorables. Seules subsistent les combinaisons les plus défavorables. Ce sont les sommets du polytope obtenu par cette opération somme.

4.1.1.4. Propriétés de l'opération somme de domaines

La somme de Minkowski est une opération associative et commutative. Cela découle directement de l'associativité et de la commutativité de la somme de deux torseurs. Nous noterons $\{0\}$ l'élément neutre, domaine composé du seul torseur nul.

La somme de deux domaines convexes est un domaine convexe. En effet, dans le cas où chaque domaine est un polytope convexe, il est limité par des hyperplans. Si on construit la somme de Minkowski en ajoutant à chaque torseur sommet du premier

polytope, les torseurs de chacun des hyperplans du second polytope, on obtient un ensemble d'hyperplans délimitant le polytope somme qui sera donc convexe. On peut généraliser à des domaines convexes mais dont la forme n'est pas un polytope (cas où les inéquations ne sont pas linéaires) en considérant l'enveloppe des hyperplans formant le domaine somme.

4.1.1.5. Domaines homothétiques

Deux domaines $\{D_1\}$ et $\{D_2\}$ sont considérés homothétiques lorsqu'ils ne diffèrent que d'un facteur d'échelle. A tout torseur $T_1 \in \{D_1\}$ correspond le torseur $T_2 = kT_1 \in \{D_2\}$ avec k réel quelconque, rapport d'homothétie. Le produit du scalaire k par le torseur T_1 étant le produit classique d'un scalaire par un torseur.

Par exemple pour un domaine écart correspondant à une zone de tolérance de dimension t , si on modifié la valeur de t , on obtient un domaine homothétique.

Si on fait la somme de Minkowski de deux domaines homothétiques dans le rapport k , on obtient un domaine homothétique au premier dans le rapport $k+1$. (Figure 4.2)

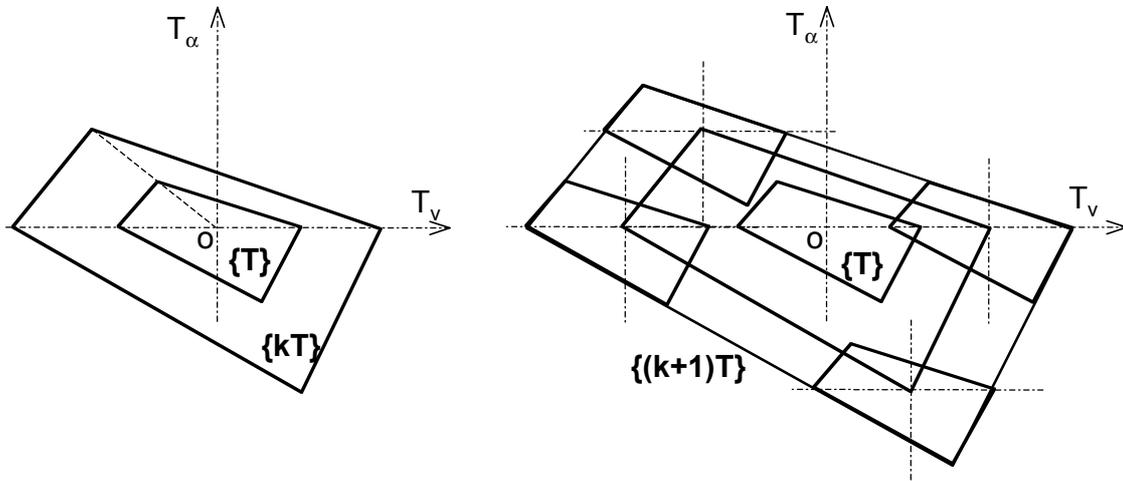


Figure 4.2 Domaines homothétiques

Dans le cas d'un domaine en forme de polytope, on peut faire la démonstration de ces propriétés en considérant chaque sommet du polytope.

Réciproquement, on peut décomposer un domaine en plusieurs domaines homothétiques. Par exemple un domaine écart traduisant une zone de tolérance de

dimension t , peut être considéré comme la somme de Minkowski de deux domaines homothétiques correspondant à deux zones de tolérances de valeurs t_1 et t_2 telles que :

$$t = t_1 + t_2$$

Cette propriété sera utilisée dans la partie synthèse de tolérances.

4.1.2. Opération intersection

Lorsque le domaine jeu est défini par un ensemble de contraintes linéaires portant sur les composantes du torseur jeu, nous avons vu que le domaine jeu pouvait être considéré comme l'intersection des demi espaces définis par chacun des hyperplans qui correspondent à chaque contrainte.

D'une façon générale le domaine jeu de la liaison résultant de deux liaisons en parallèle sera obtenu en faisant l'intersection des domaines jeu de chacune des liaisons. Par exemple pour deux liaisons linéaires annulaires, nous avons vu que les domaines jeux avaient la forme de cylindres obliques ou droits suivant le choix du repère. Le domaine jeu de la liaison pivot glissant a été obtenu par l'intersection de deux cylindres obliques. En effet, une liaison pivot glissant est équivalente à une deux liaisons linéaires annulaires en parallèle.

Lors d'analyse des tolérances des mécanismes formant des liaisons en parallèle, nous serons amené à effectuer des opérations d'intersections sur des domaines jeux. Cette opération sera désignée par le symbole \cap . Il s'agit de l'intersection classique au sens des ensembles.

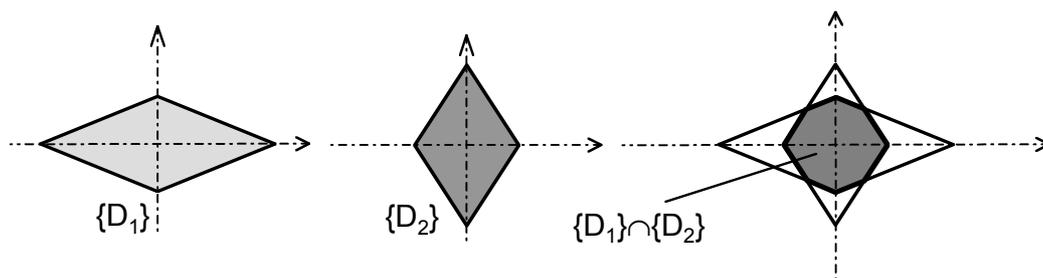


Figure 4.3 Opération intersection sur les domaines jeux ou écarts

La figure 4.3 illustre un exemple démonstratif de l'opération d'intersection de deux domaines dans un espace de dimension 2. Nous verrons plus loin, que cette opération sera utilisée pour déduire le jeu minimum permettant de garantir l'assemblage.

4.1.3. Changement de repère

Nous venons de voir que la mise en œuvre des opérations topologiques nécessitent de déterminer les domaine jeux et écarts dans un même repère, car selon le point de détermination des composantes du torseur, le domaine est différent.

En pratique, pour un mécanisme, les centres des liaisons sont choisis, dans un premier temps, comme des repères locaux pour exprimer les domaines jeux. Mais pour exprimer les domaines écarts, les repères locaux choisis sont les centres des surfaces ou les centres des zones de tolérances des surfaces tolérancées. Nous définissons ensuite convenablement un repère global appelé repère du mécanisme. Puis nous procédons au changement des repères afin d'exprimer dans un repère commun qui sera en général le repère global, tous les domaines jeux et écarts qui ont été définis préalablement dans les repères locaux.

Pour comprendre au mieux l'effet du changement du repère sur le domaine, nous prenons l'exemple du cas de la tolérance projetée illustré dans la figure (4.4.).

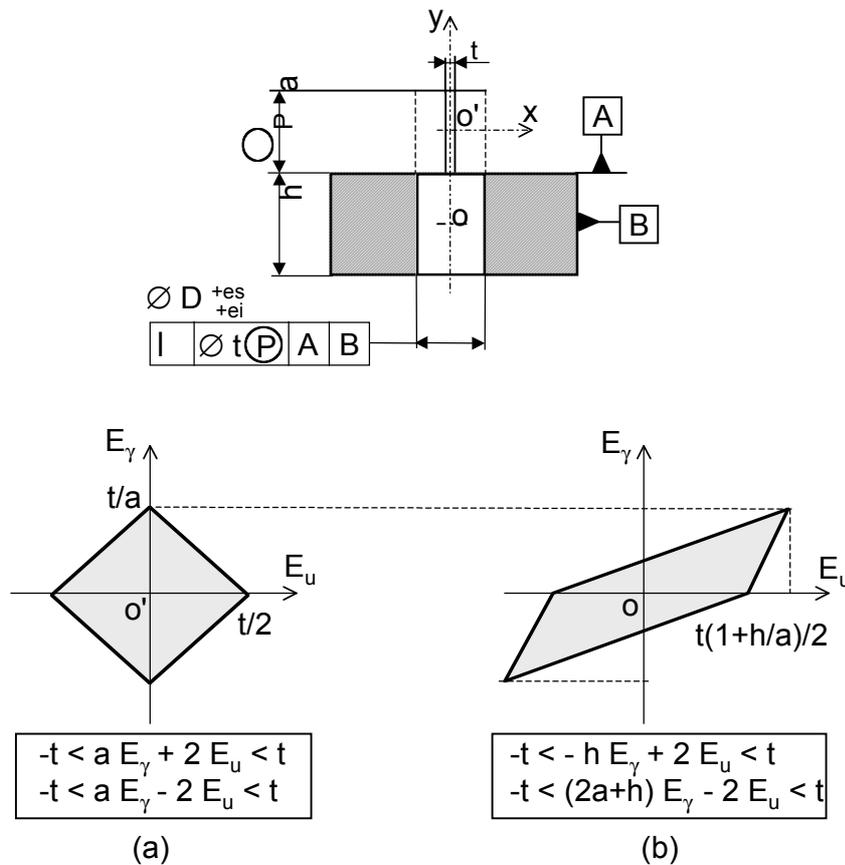


Figure 4.4 Changement du repère, zone de tolérance projetée

Un repère particulier doit être défini pour exprimer les composantes du torseur d'écart. Si le repère est au centre de la zone de tolérance, le domaine écart est traduit par les inéquations (a). Mais il est possible de changer de point pour exprimer le domaine écart dans un repère situé au centre de la surface tolérancée. Dans ce cas, le domaine écart sera différent (déformé) et donné par les inéquations (b).

4.1.4. Changement de signe : domaine opposé

Soit un domaine $\{T\}$ d'un ensemble de torseurs T . On utilisera souvent le domaine $\{-T\}$ formé par l'ensemble des torseurs opposés. On l'appellera domaine opposé.

Dans le cas particulier où le domaine $\{T\}$ est symétrique par rapport au point O représentant le torseur nul, alors le domaine $\{-T\}$ est identique au domaine $\{T\}$. (figure 4.5)

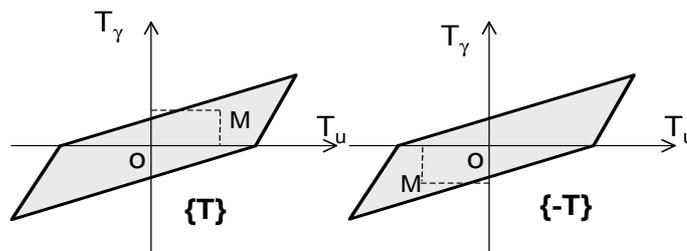


Figure 4.5 Changement de signe d'un domaine symétrique par rapport à O

4.2. APPLICATION AU TOLERANCEMENT D'UN MECANISME FORMANT UNE BOUCLE SIMPLE

4.2.1. introduction

Il s'agit ici de prendre en compte l'équation de boucle traduisant l'assemblage du mécanisme, mais aussi les inéquations qui traduisent d'une part les conditions de contact entre les solides pour chaque liaison et les inéquations qui traduisent les tolérances. On se focalise ici sur la condition d'assemblage. Nous aborderons d'autres types de conditions fonctionnelles lors de l'étude des systèmes avec des liaisons en parallèle.

4.2.2. Condition d'assemblage

Nous avons vu que la condition d'assemblage, pour un mécanisme formant une boucle simple fig.4.6, peut se traduire par l'équation de fermeture de la boucle qui correspond à la somme nulle des torseurs jeux et des torseurs d'écarts Cf. § 2. Elle peut être écrite sous la forme :

$$\Sigma J_i + \Sigma E_j = 0$$

avec :

$$J_1 = J_{0A1}; J_2 = J_{1B2}; \dots \text{et } E_1 = E_{A1B}; E_2 = E_{B2C}; \dots$$

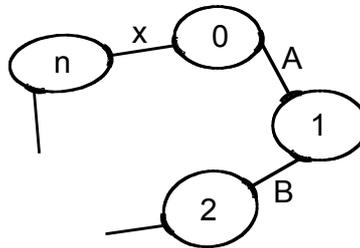


Figure 4.6 Graphe de boucle d'un mécanisme formant une boucle simple

Pour un mécanisme de géométrie parfaite, sans jeu ni écart, ces torseurs sont nuls car les déplacements sont définis à partir de la configuration nominale parfaite.

Par contre, la condition d'assemblage peut aussi être écrite sous une forme d'égalité entre les torseurs jeux et les torseurs d'écarts soit :

$$\Sigma J_i = \Sigma E_k \tag{1}$$

Par exemple, pour un mécanisme constitué de 3 solides et 3 liaisons en série, formant une boucle, la condition d'assemblage s'écrit :

$$J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2C} + J_{2C3} + E_{C3D} + J_{3D0} + E_{DOA} = 0$$

soit :

$$J_{0A1} + J_{1B2} + J_{2C3} + J_{3D0} = E_{A0D} + E_{D3C} + E_{C2B} + E_{B1A}$$

Cette façon d'écrire l'équation de boucle permettra de mieux comprendre le raisonnement que nous allons utiliser pour l'analyse des tolérances.

Pour exprimer la condition d'assemblage à l'aide des domaines jeux et domaines écarts, le raisonnement est le suivant :

Dans l'équation de boucle (I), nous avons $J_i \in \{J_{ij}\}$, chacun des torseurs jeux appartient à un domaine jeu qui lui est propre. De même $E_k \in \{E_k\}$, chaque torseur d'écart dans l'équation appartient à son domaine écart défini par le tolérancement. La somme des torseurs jeux de la boucle va constituer un domaine jeu résultant, qui est la somme de Minkowski des domaines jeux relatifs à chaque liaison. De la même façon nous obtiendrons le domaine écart résultant en effectuant la somme des domaines écarts relatifs à chaque pièce.

Nous poserons donc :

$$\{J_r\} = \{\sum J_{ij}\} \text{ et } \{E_r\} = \{\sum E_k\}$$

Le signe somme correspond ici à la somme de Minkowski des domaines.

Dans le cadre de l'interchangeabilité, la condition d'assemblage sans précontrainte peut alors se formuler de la façon suivante : pour toute valeur des torseurs d'écarts compatibles avec des tolérances données, il existe au moins une configuration des pièces entre elles qui permette d'assurer l'assemblage. C'est à dire pour chaque valeur des torseurs écarts dans leur domaine respectif, il existe pour chaque torseur jeu au moins une valeur dans le domaine jeu, telle que l'équation (I) soit satisfaite. Nous pourrions donc écrire :

$$\forall E_k \in \{E_k\} \exists J_i \in \{J_{ij}\} \text{ tel que } \sum J_i = \sum E_k$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'assemblage soit réalisé est donc que le domaine écart résultant $\{E_r\}$ soit entièrement inclus dans le domaine jeu résultant $\{J_r\}$ soit :

$$\{E_r\} \subseteq \{J_r\}$$

La démarche d'analyse des tolérances pour la condition d'assemblage peut alors se résumer par les étapes suivantes :

- construire les domaines jeux pour toutes les liaisons possédant un jeu,
- construire le domaine jeu résultant $\{J_r\}$ en effectuant la somme de Minkowski de tous ces domaines jeux,
- construire les domaines écarts selon les tolérances données,
- construire le domaine écart résultant $\{E_r\}$
- vérifier que le domaine écart résultant est inclus dans le domaine jeu résultant.

Cette construction peut être graphique mais aussi s'effectuer numériquement grâce à une structure de données appropriée qui représente les différents domaines eux mêmes définis par des inéquations.

Du point de vu mathématique, vérifier les conditions d'assemblage consiste à vérifier la compatibilité d'un système d'équations et d'inéquations qui sont :

- des inéquations entre des variables représentant des écarts de géométrie angulaires et linéaires pour des tolérances données,
- des inéquations portant sur des variables de déplacements permis par les jeux dans certaines liaisons, qui traduisent l'indéformabilité des contacts,
- des équations entre ces deux variables qui traduisent l'assemblage pour former un mécanisme.

4.2.3. Exemples d'application

Nous allons appliquer la démarche d'analyse présentée ci-dessus sur deux exemples de mécanismes formant des boucles simples. Afin de garder un caractère général à ces exemples, les valeurs numériques des spécification ne seront pas affectées.

4.2.3.1. Exemple 1

Considérons un mécanisme, composé de deux solides (0) et (1) qui sont liés par deux liaisons A et B de type pivot glissant (arbre sur deux paliers) fig.4.7.

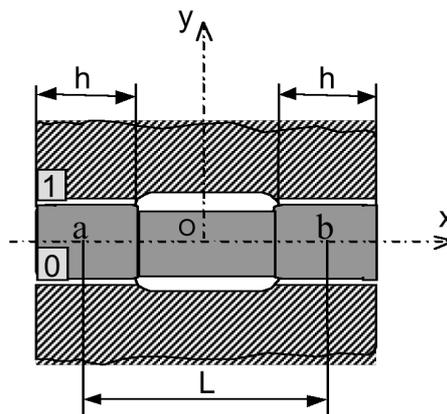


Figure 4.7 Mécanisme formant une boucle simple

On s'intéresse dans cet exemple à vérifier la condition d'assemblage du mécanisme qui se traduit par l'équation de la boucle :

$$J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B0} + E_{B0A} = 0$$

soit :

$$J_{0A1} + J_{1B0} = E_{B1A} + E_{A0B}$$

La condition d'assemblage du mécanisme est donc vérifiée si :

$$\{E_{B1A}\} \oplus \{E_{A0B}\} \subseteq \{J_{0A1}\} \oplus \{J_{1B0}\}$$

I. Construction du domaine jeu

La première étape de notre démarche consiste à construire le domaine jeu résultant. Pour cela, nous choisissons le point (O) repère du mécanisme au centre du système, ainsi qu'une configuration de référence telle que les deux cylindres sont coaxiaux. Nous construisons d'abord les domaines jeux des liaisons pivot glissant A et B dans leur repère local de centre a et b respectivement.

Puis, nous exprimons ces domaines au point (O) en effectuant l'opération de changement de repère vu précédemment. Nous obtenons alors le domaine jeu résultant en effectuant la somme de Minkowski des deux domaines jeux des liaisons A et B .

Nous supposons que les diamètres des cylindres, qui sont utilisées pour le paramétrage du domaine jeu, sont égaux pour tous les cas de tolérancement qui vont être proposés.

Ainsi, ces dimensions sont prises dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire au maximum de matières (domaine jeu mini). Nous verrons par la suite l'influence des tolérances dimensionnelles.

La figure 4.8 illustre la construction du domaine jeu et le domaine jeu résultant obtenu.

Il s'agit en fait de la coupe du domaine dans le plan O, J_v, J_γ . Comme nous l'avons détaillé dans le chapitre 3, les domaines, dans ce cas, sont bornés suivant les composantes $J_\beta, J_\gamma, J_v, J_w$. Les composantes suivant les deux autres direction sont non bornées.

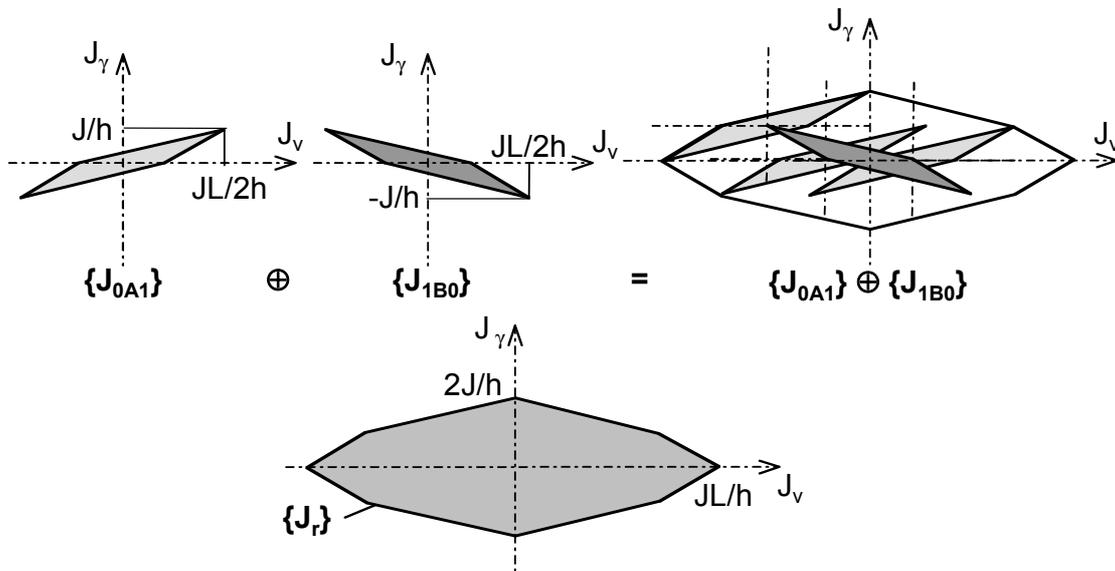


Figure 4.8 Construction du domaine jeu résultant

Tolérancement n°1

Dans ce cas de tolérancement la référence est construite à partir de la surface A , le domaine écart pour cette surface est donc nul ($E_{0A}=0$).

Ainsi, on définit une zone de tolérance de diamètre t pour l'axe du cylindre B tolérancé par rapport à A .

Le domaine écart au point b correspond dans le plan à un losange. En rapportant ce dernier au point O , on obtient le domaine écart de la pièce (0) $\{E_{B0A}\}$.

Si l'on suppose que les tolérances affectées au solide (1) (alésages) sont identiques à celles de l'arbre, on retrouve donc le même domaine écart pour l'alésage. Le domaine écart résultant pour l'ensemble de la boucle est obtenu en effectuant la somme de Minkowski $\{E_{B0A}\} \oplus \{E_{A1B}\}$ fig.4.9.

Tolérancement n°2

Pour le deuxième cas fig.4.10, on construit le repère de référence à partir des point a et b centres des axes des surfaces A et B respectivement. Ainsi on définit des zones de tolérances à partir de l'axe ab qui est une référence commune.

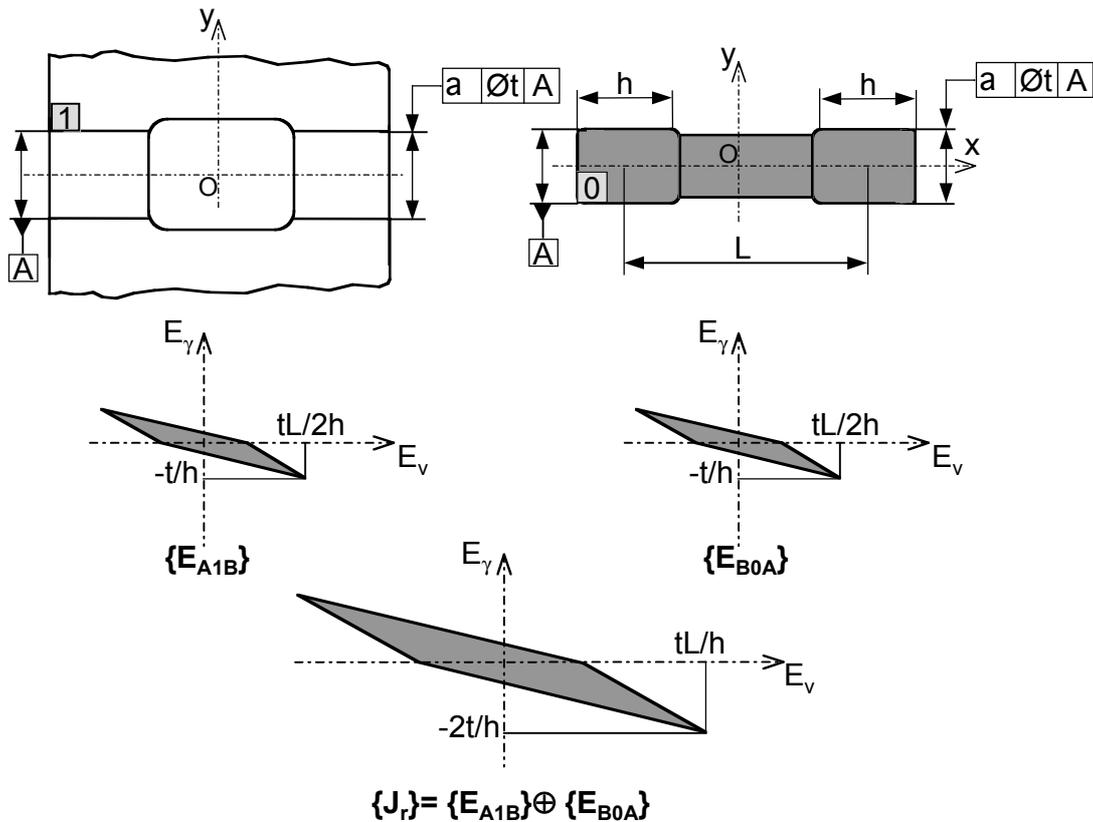


Figure 4.9 Domaine écart défini par le tolérancement n°1

Le domaine écart de la pièce 0 est donc obtenu en effectuant la somme des deux domaines écarts des surfaces A et B par rapport à la référence commune.

Le point a étant un point de l'axe du cylindre, il ne peut y avoir qu'un défaut angulaire du cylindre A par rapport à l'axe ab. Le domaine écart défini au point a est un segment de l'axe $E\gamma$ (segment en trait fort), en le ramenant au point O, on obtient un segment incliné qui représente le domaine écart de la surface A au point O.

De même pour le domaine écart de la surface B, on obtient un segment incliné symétrique. En balayant le centre d'un des deux segments le long de l'autre, on génère un losange représentant le domaine écart relatif des surfaces A et B, pour la pièce (0). En effectuant la même démarche pour la pièces (1), on obtient le domaine écart pour l'ensemble de la boucle. Le domaine écart résultant est donc la somme de Minkowski des deux domaines fig.4.10.

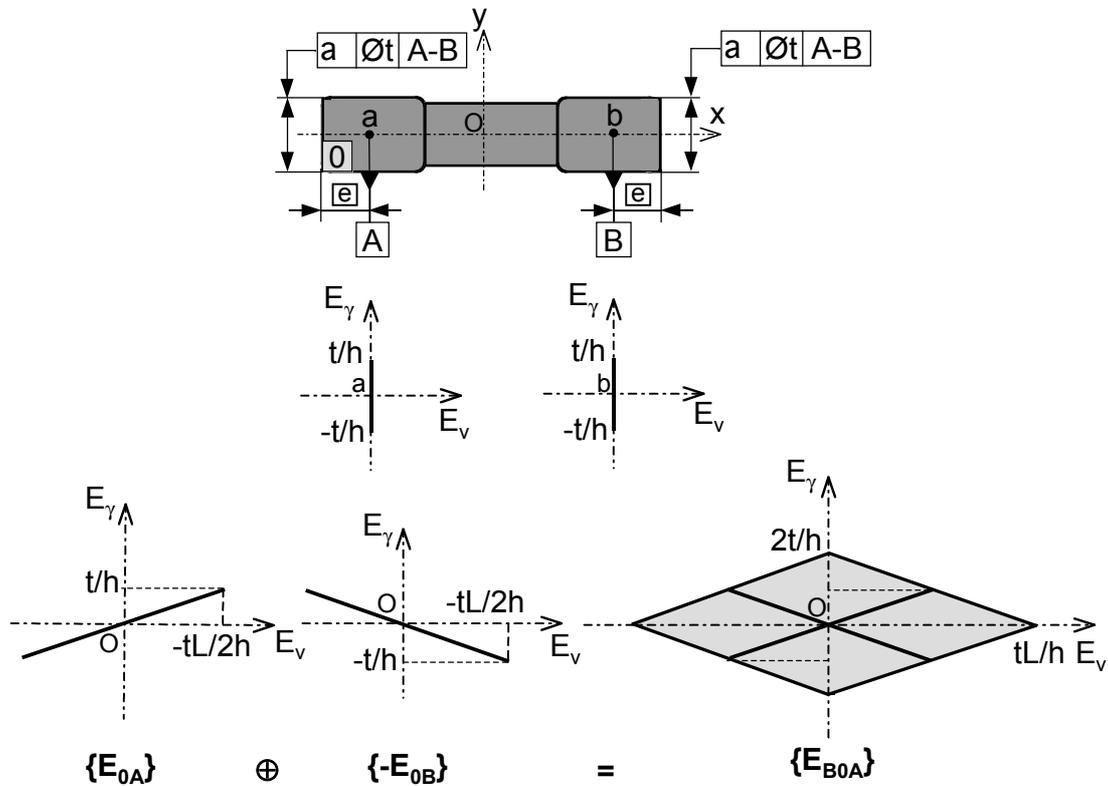


Figure 4.10 Domaine écart défini par le tolérancement n°2

Tolérancement n°3

Pour ce dernier cas de tolérancement, les surfaces A et B sont tolérancées en référence commune. Ce cas diffère du cas précédent. On définit cette fois ci, pour chacune des deux surfaces, une zone de tolérance de diamètre t qui lui est propre. La construction du domaine écart est alors identique à celle qui a permis de définir le domaine jeu fig.4.11.

III. Vérification de la condition d'assemblage

La condition d'assemblage sans précontrainte implique que le domaine écart soit complètement à l'intérieur du domaine jeu. Pour atteindre cet objectif, on a donc intérêt à choisir des tolérances de telle sorte que le domaine écart résultant soit de forme aussi proche que possible du domaine jeu résultant, en restant bien sûr à l'intérieur. De cette façon, on pénalise le moins possible la fabrication en étendant le plus possible les zone de tolérance, donc le domaine écart (figure 4.12).

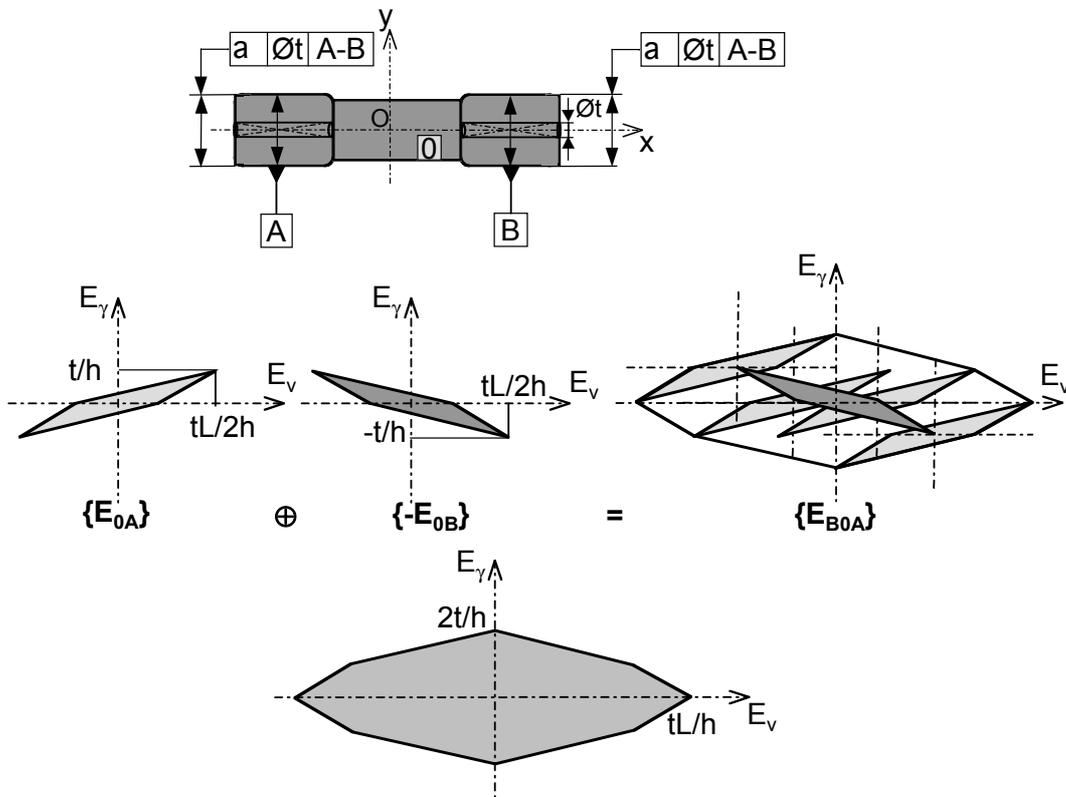


Figure 4.11 Domaine écart défini par le tolérancement n°3

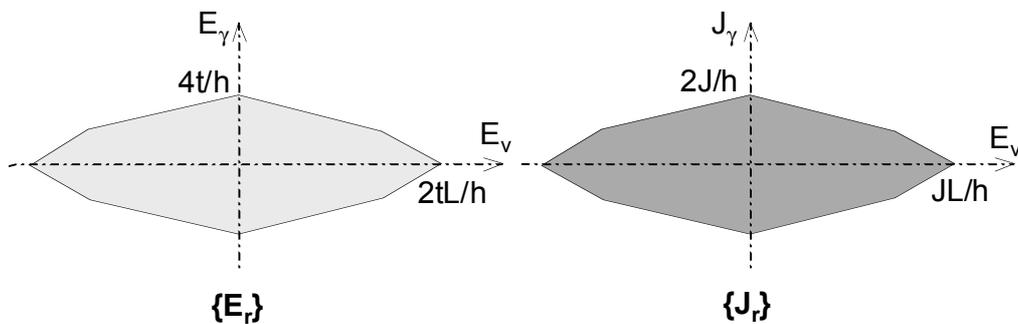


Figure 4.12 Domaine écart résultant et domaine jeu résultant

Si on compare le premier et le deuxième cas de tolérancement on choisira plutôt le deuxième.

Néanmoins, on peut facilement constater que le tolérancement présenté en dernier est le tolérancement optimal, puisque il donne un domaine écart de forme identique au domaine jeu.

En supposant que le solide 2 est tolérancé de la même façon que le solide 0, on obtient le domaine écart résultant en faisant la somme des deux domaines des solides 0 et 1.

En comparant le domaine écart résultant avec le domaine jeu résultant (voir figure 4.11), la condition d'assemblage est vérifiée si le domaine écart résultant est inclus dans le domaine jeu résultant, soit pour:

$$t = \frac{J}{2}$$

Où J est le jeu diamétral minimal de chaque ajustement.

Enfin, on peut remarquer que l'utilisation du modificateur au maximum de matière présenté dans la norme, peut s'appliquer avantageusement pour cet exemple et s'interpréter de manière simple du point de vue de notre modèle de tolérancement. En effet, si les deux surfaces cylindriques de l'arbre et les deux alésages ne sont pas dans leur état du maximum de matière, le domaine jeu sera plus grand, on pourra alors admettre un domaine écart plus grand dans la mesure où il ne dépasse pas le domaine jeu.

Soient :

- t_r la valeur admissible réelle de la tolérance de coaxialité, pour l'arbre et pour l'alésage,
- t la valeur indiquée dans le cadre de tolérance, pour l'arbre et pour l'alésage,
- J_r la valeur du jeu réel pour une des deux liaisons,
- J la valeur du jeu minimal (au maxi matière),
- D_r et d_r le diamètre réel de l'alésage et de l'arbre respectivement,
- D_m et d_M le diamètre au maximum de matière de l'alésage et de l'arbre respectivement.

D'après l'interprétation de l'utilisation du tolérancement au maximum de matière, et compte tenu du modèle, on a alors :

$$t_r = t + D_r - D_m \text{ (alésage)} \quad \text{et} \quad t_r = t + d_M - d_r \text{ (arbre)}$$

On a choisit $J = 2 t$

On en déduit $J_r = 2 t_r$

La condition qui était satisfaite dans le cas le plus défavorable pour les dimensions des diamètres des arbres et des alésages reste satisfaite quelles que soient ces dimensions. La tolérance étant toujours maximale.

4.2.3.2. Exemple 2

Le mécanisme présenté dans la figure 4.13 est composé de 4 solides liés par 4 liaisons pivot glissant en série formant une boucle simple. Le coulisseau (solide 2) est assemblé avec jeu pour les liaisons B et C. Les liaisons A et D sont sans jeu (ajustement serré).

L'équation de la boucle traduisant la condition d'assemblage s'écrit :

$$J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2C} + J_{2C3} + E_{C3D} + J_{3D0} + E_{DOA} = 0$$

soit :

$$J_{0A1} + J_{1B2} + J_{2C3} + J_{3D0} = E_{A0D} + E_{D3C} + E_{C2B} + E_{B1A}$$

Nous avons $J_{0A1} = J_{3D0} = 0$ (liaisons sans jeu)

La condition d'assemblage est donc vérifiée si :

$$\{E_{A0D}\} \oplus \{E_{D3C}\} \oplus \{E_{C2B}\} \oplus \{E_{B1A}\} \subseteq \{J_{1B2}\} \oplus \{J_{2C3}\}$$

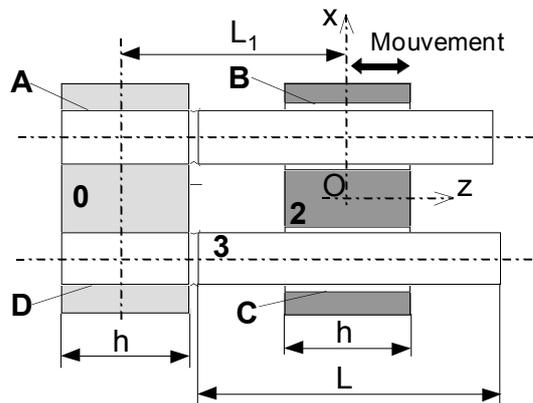


Figure 4.13 Mécanisme constitué de 4 solides et 4 liaisons en série

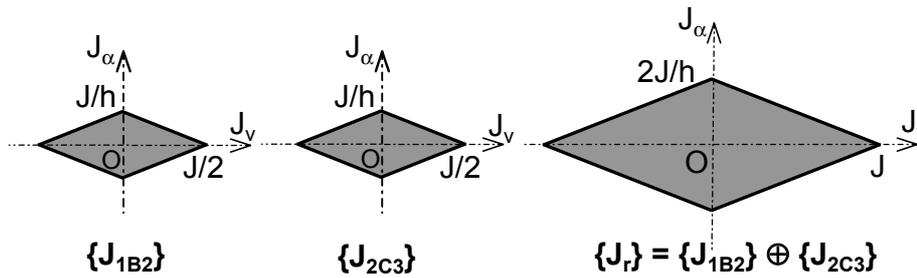


Figure 4.14 Construction du domaine jeu résultant

I. Construction du domaine jeu

Comme pour l'exemple précédent, on choisit une configuration de référence telle que celle schématisée dans la figure 4.13, ainsi que le repère de mécanisme $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ où seront exprimés tous les domaines jeux et écarts.

Comme les liaisons A et D sont sans jeu, leur domaine jeu est réduit au point O dans l'espace des configuration à 6 dimensions. Le domaine jeu résultant est donc obtenu en effectuant la somme de Minkowski des domaines jeux des liaisons B et C fig. 4.14

II. Construction du domaine écart

Afin de construire le domaine écart résultant du mécanisme, nous devons choisir un tolérancement pour toutes les pièces composant le mécanisme. Le système étant hyperstatique de degré 3, il y a donc trois composantes au plus à prendre en compte dans le torseur d'écart. Ceci paraît logique puisque les cylindres 1 et 3 sont nominalelement parallèles. Il faut donc choisir un tolérancement qui permet de limiter les défauts angulaires entre les cylindres 1 et 3 suivant les axes \vec{x} et \vec{y} , ainsi que le déplacement linéaire suivant l'axe \vec{x}

D'autre part, l'étude de la condition d'assemblage comme nous l'avons déjà précisé est réalisée pour une configuration donnée du mécanisme. Or, lorsqu'il s'agit effectivement d'un mécanisme avec des mouvements relatifs (le cas du présent exemple), il y a lieu d'en tenir compte lors du tolérancement. Dans ce cas, les zones de tolérance associées aux surfaces sont étendues sur toute la surface fonctionnelle.

Pour cet exemple le tolérancement choisi devra alors tenir compte du mouvement du coulisseau (solide 2) sur toute la longueur des cylindres 1 et 3, car ces derniers sont relativement longs par rapport aux longueurs de guidage des cylindres du solide 2.

Nous avons donc choisi un tolérancement permettant de répondre aux contraintes évoquées ci-dessus et qui nous semble le plus proche du tolérancement optimal.

II.1 Construction du domaine écart du solide (0)

Le tolérancement proposé pour le solide 0 est le tolérancement projeté sans référence.

On utilise une tolérance de localisation en définissant une zone de tolérance de diamètre t_0 pour chacune des surfaces A et D . Ces zones sont placées aux endroits définis par la distance L (longueur des cylindres 1 et 3).

En effet, l'utilisation de la zone de tolérance projetée permet ici d'assurer le déplacement du coulisseau (solide 2) sur toute la longueur des cylindres 1 et 3.

Un domaine écart est alors défini pour chacun des cylindres du solide 0. Ces domaines sont d'abord exprimés aux centres des zones de tolérances, on obtient donc des losanges dans le plan O, E_α, E_ν . Ces derniers restent inchangés en les exprimant au point O . Le domaine écart de la pièce (0) est la somme de Minkowski des domaines écarts des deux surfaces A et D . La figure 4.15 illustre le tolérancement de la pièce 0 ainsi que le domaine écart associé.

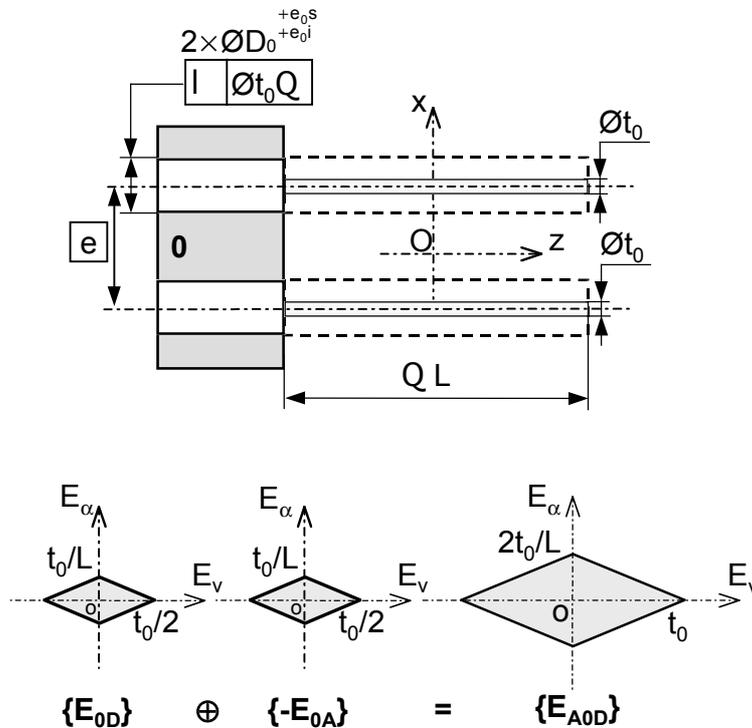


Figure 4.15 Tolérancement du solide 0 et domaine écart associé

II.2 Construction du domaine écart du solide (2)

Le tolérancement choisi pour le solide 2 est aussi le tolérancement de localisation sans référence. Par contre, lorsque les diamètres ne sont pas au maximum de matière, le jeu sera plus grand que sa valeur minimale et les diamètres des zones de tolérances pourront donc être augmentés.

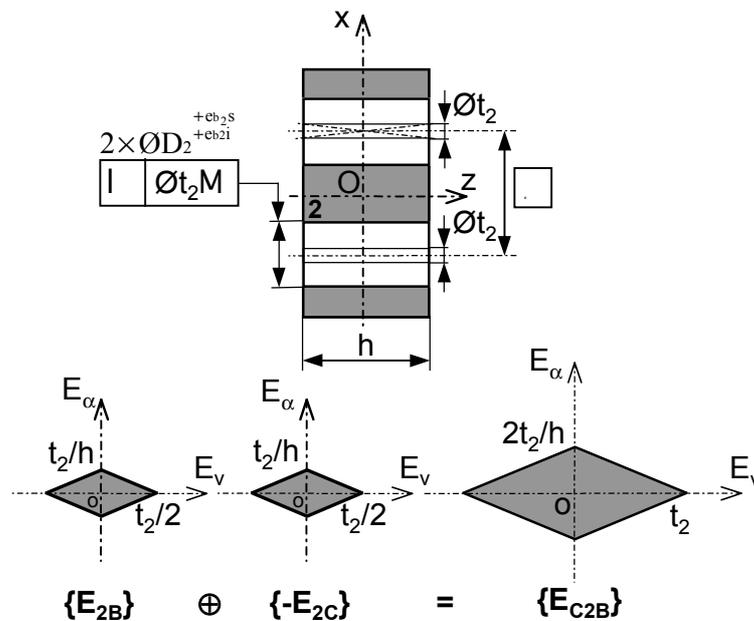


Figure 4.16 Tolérancement du solide 0 et domaine écart associé

Il est donc utile d'utiliser le modificateur au maximum de matière prévu dans la norme ISO. Le tolérancement du solide (2) et le domaine écart qui lui est associé sont présentés dans la figure (4.16).

II Construction du domaine écart du solide (1) et (3)

Pour tolérer ces solides, on utilise le tolérancement de coaxialité avec une référence simple. Les surfaces A et D étant sans jeu (ajustement serré), les zones de tolérance qui leurs sont associées sont choisies nulles. Cela signifie que ces surfaces devront être choisies comme référence. La justification de ce choix sera développé dans la partie synthèse.

On définit donc pour chacune des surfaces B et C des zones de tolérance de diamètres t_1 et t_3 respectivement, par rapport aux surfaces A et D qui sont prises comme références

simples. On obtient des domaines écarts qui sont identiques (à un facteur d'échelle près) à ceux des solides 0 et 3 fig. 4.17

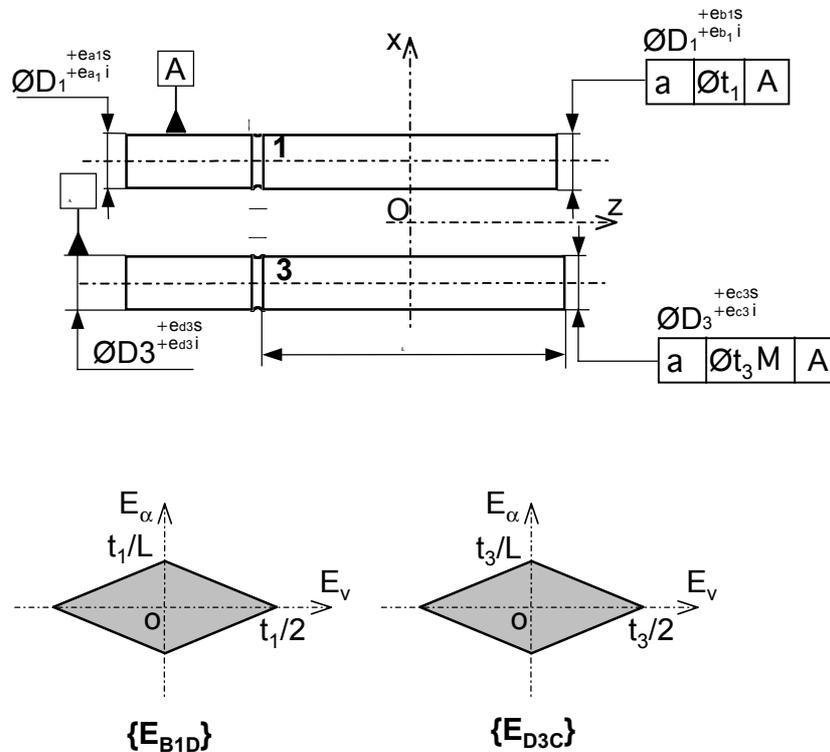


Figure 4.17 Tolérancement du solide 1 et 3 et domaines écarts associés

III Vérification de la condition d'assemblage

En effectuant la somme de Minkowski des domaine écarts de tous les solides, on obtient le domaine écart résultant soit :

$$\{E_r\} = \{E_{A0D}\} \oplus \{E_{D3C}\} \oplus \{E_{C2B}\} \oplus \{E_{B1A}\}$$

Sur la figure 4.17, on a construit les domaines jeux et écarts résultants. Pour assurer la condition d'assemblage, on doit avoir :

$$J \geq T$$

$$\text{Avec } T = t_0 + t_2 + \frac{t_1 + t_3}{2}$$

On remarque que dans ce cas, il n'est pas possible d'avoir un domaine jeu résultant identique au domaine écart résultant car :

$$S = \frac{t_1 + t_3 + 2t_0}{L} + \frac{2t_2}{h}$$

En effet, l'analyse est faite pour une configuration donnée. La prise en compte du mouvement de translation sur la longueur L nécessite de prolonger la zone de tolérance sur cette longueur.

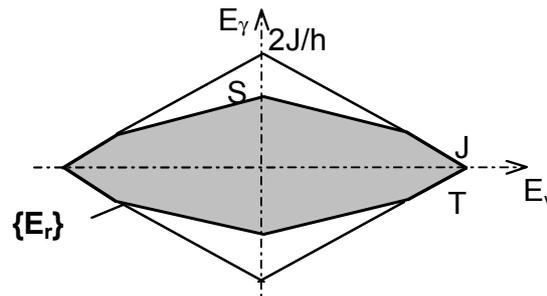


Figure 4.18 Domaines jeux et écarts résultants, condition d'assemblage

4.3. APPLICATION A LA SYNTHÈSE DE TOLERANCES DANS LE CAS DE BOUCLES SIMPLES

La méthode d'analyse illustrée précédemment permet de parvenir à une application importante qui concerne le choix optimal des zones de tolérance.

En pratique, on souhaite souvent que les tolérances soient les plus grandes possibles tout en garantissant l'assemblage. Un tel objectif est donc abouti pour un domaine écart "minimal". En conséquence, la condition stricte d'assemblage est obtenue lorsque le domaine écart résultant coïncide parfaitement avec le domaine jeu résultant soit :

$$\{E_r\} = \{J_r\}$$

A partir de ce résultat, nous allons proposer une méthode permettant la détermination de tolérances, donc la synthèse des tolérances. Cette méthode sera détaillée à l'aide de quelques exemples démonstratifs.

4.3.1. Cas où toutes les liaisons possèdent des jeux

La méthode est expliquée ici sur un exemple simple pour permettre de mieux comprendre la démarche et la notation utilisée. La méthode peut aisément se généraliser

sans qu'il soit nécessaire d'utiliser d'une notation générale lourde à manipuler. Reprenons le mécanisme traité dans l'exemple précédent 1 (voir figure 4.7). Pour cet exemple où les deux liaisons A et B possèdent des jeux, la démarche de synthèse de tolérances consiste à définir un domaine écart pour chacune des surfaces de la liaison A ainsi qu'un domaine écart pour chacune des surfaces de la liaison B . On obtient une condition suffisante d'assemblage lorsque la composition des domaines écarts des surfaces de chacune des liaisons coïncide avec le domaine jeu correspondant.

En écrivant l'équation de la boucle du mécanisme en question, cette démarche peut être exprimée de la manière suivante :

$$J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B0} + E_{B0A} = 0$$

On décompose les torseurs d'écart de chacune des pièces, puis on regroupe les termes des torseurs d'écarts des surfaces appartenant à la même liaison soit :

$$E_{A1B} = E_{1B} - E_{1A} \quad \text{et} \quad E_{B0A} = E_{0A} - E_{0B}$$

On obtient :

$$(J_{0A1} + E_{0A} - E_{1A}) + (J_{1B0} + E_{1B} - E_{0B}) = 0$$

Une condition suffisante d'assemblage est alors :

$$\{E_{0A} - E_{1A}\} \subseteq \{J_{0A1}\} \quad \text{et} \quad \{E_{1B} - E_{0B}\} \subseteq \{J_{1B0}\}$$

La solution optimale est alors obtenue lorsque les domaines écarts seront tels que :

$$\{E_{0A}\} \oplus \{-E_{1A}\} = \{J_{0A1}\} \quad \text{et} \quad \{E_{1B}\} \oplus \{-E_{0B}\} = \{J_{1B0}\}$$

De façon générale, pour une boucle quelconque, pour chaque liaison, il s'agit de déterminer deux domaines écarts dont la somme donne le domaine jeu de la liaison. D'où la nécessité que ce domaine jeu existe.

Une fois que ces domaines écarts sont définis, le domaine écart relatif entre les deux surfaces de chaque pièce est donné par :

$$\{E_{0A}\} \oplus \{-E_{0B}\} = \{E_{B0A}\} \quad \text{et} \quad \{E_{0A}\} \oplus \{-E_{0B}\} = \{E_{B0A}\}$$

La condition est suffisante mais non nécessaire. Ce qui signifie qu'il est possible de trouver d'autres façons de tolérer en assurant l'assemblage.

Dans le cas général, on aura un domaine écart associé à chaque pièce et construit à partir de deux domaines jeux des liaisons adjacentes à ce solide.

Si on reprend l'exemple de la figure 4.7, la décomposition du domaine jeu en deux domaines écarts homothétiques formulée par la relation $\{E_{0A}\} \oplus \{-E_{1A}\} = \{J_{0A1}\}$ est assurée avec le tolérancement du cas (3) pour $t_0 + t_1 = J$ où t_0 et t_1 sont les diamètres des zones de tolérances de l'arbre et du palier (0) et J le jeu diamétral de l'ajustement et pour chacune des surfaces A et B. Dans le cas particulier choisi fig.4.11, on a choisi :

$$t_0 = t_1 = t = J/2.$$

On peut remarquer que cette méthode de synthèse conduit à choisir des zones de tolérances en référence commune. Cette référence commune est construite à l'aide des deux surfaces à tolérer.

4.3.2. Cas de liaisons avec ou sans jeu

On envisage le cas où certaines liaisons du mécanisme n'ont pas de jeu. Toutefois, pour chacun des solides, une des liaisons au moins doit posséder un jeu.

Le mécanisme de la figure 4.19 représente un tel cas. Les liaisons A, B et C sont planes, de contour rectangulaire de dimensions a et b et avec jeu.

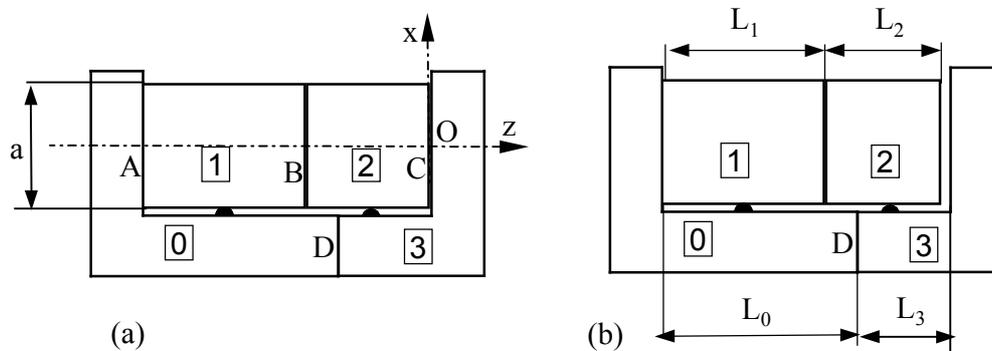


Figure 4.19 Exemple de liaisons planes formant une boucle
 (a) configuration théorique sans jeu ni écart, (b) configuration nominale

La liaison D est plane mais sans jeu. Le contact est maintenu par exemple par des vis de blocage. Le graphe est représenté figure 4.20. Sur ce graphe, on a représenté sous forme de segments en traits forts les liaisons avec jeu et en trait fin la liaison sans jeu. La méthode de synthèse précédente s'applique ici. On obtient des zones de tolérances non

nulles pour les surfaces A , B et C (courbes en traits forts) et deux zones de tolérances nulles pour les surfaces D des solides (0) et (3).

Les zones de tolérances nulles correspondent aux surfaces prises en référence (fig. 4.20a).

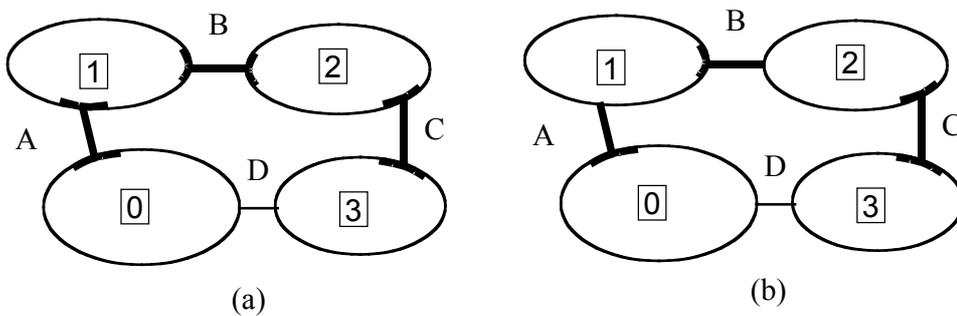


Figure 4.20 Graphe de liaisons

Une solution possible permet d'éviter d'avoir deux zones de tolérances sur la même pièce sans référence explicite, comme dans l'exemple précédent. Pour cela, on choisit des zones nulles par exemple pour la surface A du solide (1) et pour la surface B du solide (2) qui deviendront des références (figure 4.20 b).

D'autres solutions suivant la même méthode sont possibles, la décomposition d'un domaine jeu en plusieurs domaines écarts n'étant pas unique.

On rappelle que le domaine jeu d'une liaison plane est donné fig.4.21. Par la suite, on représentera les domaines dans le plan $O, \vec{J}_\beta, \vec{J}_w$

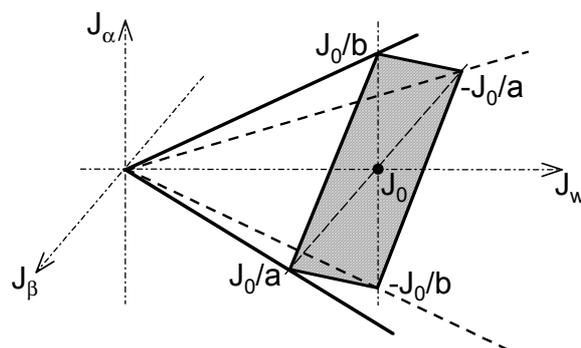


Figure 4.21 Domaine jeu d'une liaison plane

On choisit une zone de tolérance classique pour un plan. Suivant notre modèle, le plan doit être compris entre deux plans parallèles distants de $t/2$ de la position nominale. La

figure 4.22 donne le domaine écart correspondant. On remarque ici que le domaine écart est borné suivant J_w alors que le domaine jeu ne l'a que d'un seul coté. En effet si on considérait seulement la condition d'assemblage, la zone de tolérance serait infini dans une direction. Volontairement on impose une condition de précision qui sera examinée par la suite.

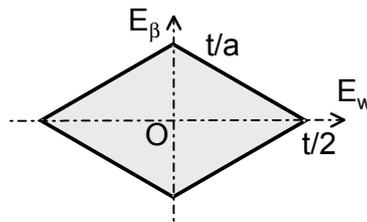


Figure 4.21 Domaine écart pour un plan en tolérance de localisation

On obtient le tolérancement proposé figure 4.22.

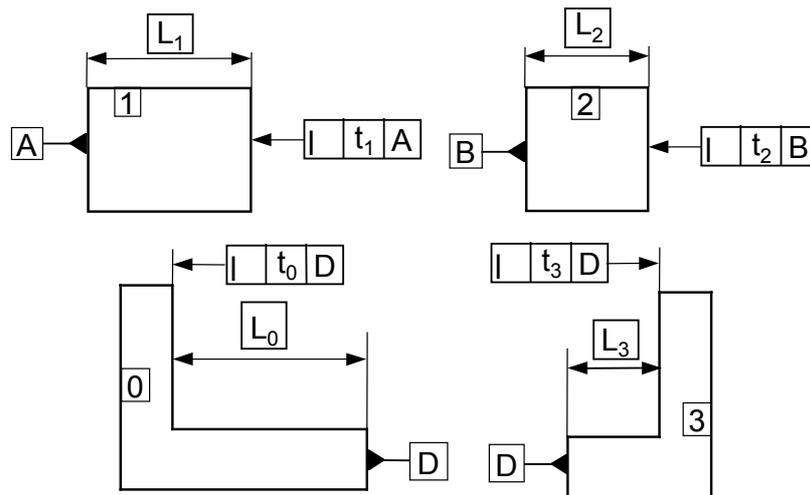


Figure 4.22 Tolérancement proposé

La méthode d'analyse va permettre de déterminer la relation que doivent respecter les tolérances t_0, t_1, t_2, t_3 , mais aussi les paramètres de longueurs L_0, L_1, L_2, L_3 , pour assurer l'assemblage. On peut supposer que les longueurs L_0, L_1, L_2 correspondent aux longueurs théoriques de la figure 4.19.a. Les longueurs théoriques correspondent au modèle sans jeu ni écart, tandis que les longueurs nominales correspondent aux valeurs encadrés conformément à la norme. On a donc $L_{3th} = L_1 + L_2 - L_0$.

En posant $\Delta = L_0 + L_3 - L_1 - L_2$ on obtient : $L_3 = L_{3th} + \Delta$

Ce qui signifie que le domaine écart est décalé de Δ suivant l'axe E_w .

L'équation de boucle : $J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2C} + J_{2C3} + E_{C3D} + E_{D0A} = 0$ conduit à rechercher le domaine jeu résultant et le domaine écart résultant représentés figure 4.23.

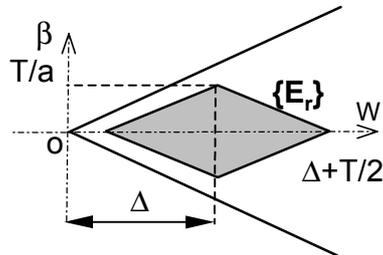


Figure 4.23 Domaine jeu et domaine écart résultant

Avec $T = t_0 + t_1 + t_2 + t_3$, la condition d'assemblage est donc : $\Delta \geq T/2$

On retrouve bien sûr le même résultat que par la méthode classique des chaînes de cotes.

4.3.3 Cas général avec au moins une liaison avec jeu

Si on tente d'appliquer la méthode précédente au cas où un solide est lié aux autres pièces par des liaisons sans jeu, cette pièce ne possèdera aucune zone de tolérance. On propose alors la méthode suivante.

Chaque domaine jeu est décomposé non plus en deux mais en plusieurs domaines écarts affectés aux différentes surfaces des solides de la boucle. Par soucis de simplicité, certains écarts sont choisis nuls à condition qu'une même pièce ne puisse pas avoir deux surfaces sans écart.

On reprend l'exemple du mécanisme représenté figure 4.13, et correspondant au graphe figure 4.24.

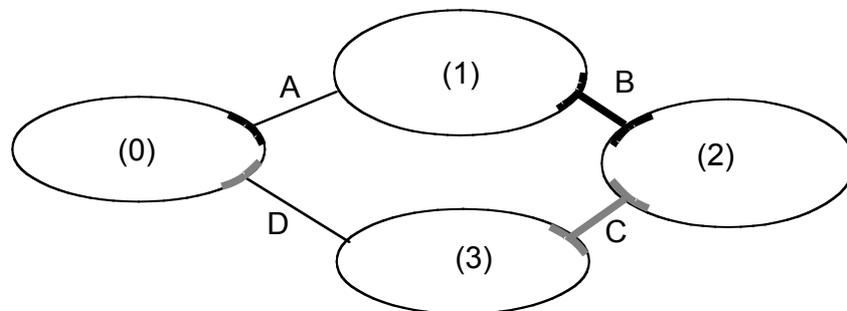


Figure 4.24 graphe correspondant au mécanisme de la figure 4.13

Les liaisons A et D étant sans jeu, la relation de boucle peut s'écrire :

$$E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2C} + J_{2C3} + E_{C3D} + E_{D0A} = 0$$

On choisit la répartition suivante :

$$\{J_{1B2}\} = \{E_{1B}\} \oplus \{-E_{2B}\} \oplus \{E_{A0}\}$$

Le jeu et les zones de tolérances correspondantes sont schématisés en noir figure 4.24.

et $\{J_{2C3}\} = \{E_{2C}\} \oplus \{-E_{3C}\} \oplus \{-E_{0D}\}$ le jeu et les zones de tolérances sont schématisés en gris figure 4.24. La condition d'assemblage sera alors strictement satisfaite pour tous les écarts admissibles.

Ici les domaines écarts $\{E_{1B}\}$ et $\{E_{2B}\}$ sont relatifs à la surface B où est défini le domaine jeu $\{J_{1B2}\}$. Mais la surface A du solide (0) doit aussi avoir un domaine écart $\{E_{A0}\}$ issu de ce domaine jeu. Pour faciliter cette décomposition, nous choisissons des domaines homothétiques. Cela ne pose aucun problème pour trouver les zones de tolérances qui correspondent aux deux premiers domaines écarts. Par contre pour le domaine $\{E_{A0}\}$ on est amené à utiliser les tolérances en zone projetée pour obtenir un domaine écart convenable. La zone de tolérance se situe là où se trouve le jeu correspondant.

Dans un deuxième temps, la prise en compte du mouvement du coulisseau sur la longueur L et non h, conduit au tolérancement qui a été proposé dans la démarche d'analyse (voir figures 4.15, 4.16 et 4.17).

Cette méthode peut se généraliser. Chaque domaine jeu de la boucle peut être décomposé en autant de domaines écarts qu'il y a de surfaces de liaison dans la boucle. Le domaine écart relatif pour chacun des solides est obtenu en faisant la somme des domaines écarts ainsi obtenus.

On peut remarquer que ce sont les propriétés de commutativité et d'associativité de la somme de torseurs qui permettent d'effectuer cette décomposition puis recombinaison des torseurs puis de leur domaine respectifs.

Les cas précédents apparaissent alors comme des cas particuliers de ce cas général.

La solution n'étant pas unique le choix d'une solution peut se faire par exemple, d'après les critères suivants:

- domaine écart qui correspond à un tolérancement normalisé,

- facilité de contrôle métrologique,
- simplicité de la représentation,
- simplicité de la décomposition des domaines,
- méthodes de fabrication qui permettraient de comparer plusieurs tolérancements possibles.

On peut remarquer que ce problème de choix de décomposition se pose de manière similaire lorsqu'on utilise le modèle des chaînes de cotes unidirectionnelles. Seulement ici on raisonne dans l'espace à trois dimensions et en tenant compte aussi des défauts angulaires.

4.3.4. Cas où aucune liaison ne possède de jeu

Le système ne peut alors être assemblé que s'il est isostatique ou bien s'il n'a aucun défaut géométrique. Seuls des solides déformables peuvent s'assembler malgré des écarts de géométrie. Ce seront alors les déplacements dus aux déformations qui permettront d'assurer les équations de boucle. Les déformations se comportent alors comme des jeux qui compensent les écarts. L'hypothèse de solides déformables sort du cadre de ce travail. Serge Samper dans [SAM 01] a étudié ce type de modèle.

4.4. Application au tolérancement de mécanismes formant des boucles en parallèle

Considérons un mécanisme comportant plusieurs liaisons assemblées en parallèle tel que celui schématisé dans la figure 4.25.

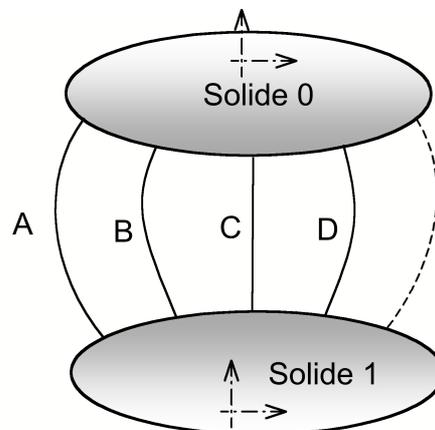


Figure 4.25 Graphe de liaisons en parallèle

La première méthode d'analyse qui vient à l'esprit consisterait à étendre la même méthode présentée pour le mécanisme d'une seule boucle fermée. La démarche consisterait alors à étudier chacune des boucles indépendantes du mécanisme. On obtient une équation de torseurs de jeu et écart pour chaque boucle. Toutefois, si les équations sont indépendantes par contre certains torseurs interviennent dans différentes équations simultanément. On ne peut plus traiter chaque boucle indépendamment par la méthode des domaines jeux et écarts. Une autre approche est proposée ici.

Si on part d'un système formant une boucle simple et que l'on rajoute des liaisons, mais qui ne changent pas le degré d'hyperstatisme du mécanisme, l'étude de la boucle seule est suffisante pour cette condition d'assemblage. C'est le cas par exemple pour la figure 4.19, où les contacts ponctuels entre (1) et (0) et entre (2) et (3) n'ont pas été pris en compte. Si ces liaisons n'introduisent pas d'inconnues hyperstatique ou d'équations de tolérancement supplémentaires l'analyse présentée reste valable. Par contre dans le cas général, nous n'avons pas de méthode d'analyse ni de synthèse à proposer et le problème reste ouvert. Toutefois, nous allons présenter ici quelques résultats dus essentiellement aux travaux de Max Giordano [GIO 01] et nous allons les appliquer à deux exemples simples mais assez significatifs.

Soient deux solides (0) et (1) liés par des liaisons A, B, C ... disposées en parallèles. Soient deux repère (0) et (1) attachés à leur solide respectifs. Les équations de boucle peuvent s'écrire :

$$E_{0A} + J_{0A1} + E_{A1} = E_{0B} + J_{0B1} + E_{B1} = \dots$$

Si N est le nombre de liaisons, on a N-1 boucles indépendantes et N-1 équations de torseurs.

Lorsque tous les torseurs jeux et écarts sont nuls, le repère (1) occupe une position de référence par rapport au repère (0). On va s'intéresser par la suite aux variations du repère (1) par rapport à sa position de référence.

Lorsque tous les torseurs d'écarts sont nuls et que les torseurs jeux appartiennent à leur domaine jeu respectif défini pour chaque liaison, on a : $J_{0A1} = J_{0B1} = \dots$

avec $J_{0A1} \in \{J_{0A1}\}$, $J_{0B1} \in \{J_{0B1}\} \dots$

On en déduit alors que les seules valeurs possibles du torseur jeu commun compatibles avec l'assemblage forment un domaine inclus dans chacun des domaines précédents

donc intersection de ces domaines. Nous avons déjà mentionné ce résultat dans le chapitre 3 lors de la construction des domaines jeux de quelques liaisons.

A présent, tenons compte des écarts de géométrie entre les différentes surfaces de liaison. Pour deux pièces données (0) et (1), l'ensemble des valeurs possibles du torseur $E_{0A} + J_{0A1} + E_{A1}$ lorsque le torseur jeu J_{0A1} varie dans son domaine jeu $\{J_{0A1}\}$, constitue un domaine "translaté" par rapport au domaine jeu initial $\{J_{0A1}\}$. On le notera $E_{0A} + E_{A1} + \{J_{0A1}\}$. Le vecteur de translation est le torseur $E_{0A} + E_{A1}$.

Maintenant, si on considère l'ensemble des valeurs possibles de ce torseur de translation du domaine jeu, on peut définir deux nouveaux domaines :

- le domaine "jeu résiduel" ou jeu minimal,
- le domaine d'incertitude.

4.4.1. Domaine jeu résiduel

Le domaine jeu résiduel pour chacune des liaisons est l'intersection de l'ensemble des domaines jeux décalés lorsque le torseur de décalage prend toutes les valeurs dans son domaine. On le notera :

$$\{R_A\} = \cap (E_{0A} + E_{A1} + \{J_{0A1}\}), (E_{0A} + E_{A1}) \in \{E_{0A} + E_{A1}\}$$

La figure 4.26 illustre cette loi de composition de deux domaines.

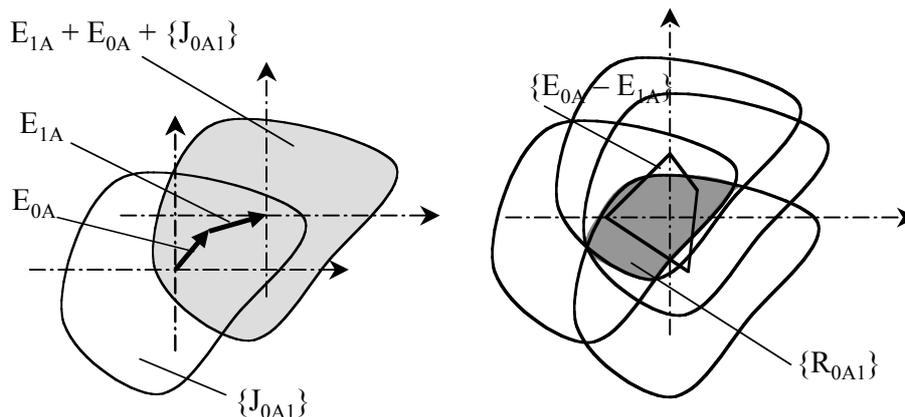


Figure 4.26 Construction du domaine jeu résiduel, représentation en 2D

Cette opération sera notée plus simplement :

$$\{R_A\} = \{J_{0A1}\} \ominus \{E_{0A} + E_{A1}\}$$

C'est aussi l'ensemble des positions toujours atteignables du repère (1) par rapport à sa position de référence liée à (0) et quels que soient les écarts de géométrie de la surface A liée à (0) et de la surface A liée à (1) compatibles avec un tolérancement donné de ces surfaces.

Le domaine jeu résiduel pour le mécanisme complet est l'intersection des domaines jeux résiduels de chacune des liaisons. Si ce domaine existe alors l'assemblage est garanti. A la limite ce domaine peut être réduit au torseur nul.

4.4.2. Domaine d'incertitude

Le domaine d'incertitude pour chacune des liaisons est simplement la somme du domaine jeu et des domaines écarts pour la liaison donnée entre le repère (0) et le repère (1).

$$\{M_A\} = \{J_{0A1}\} \oplus \{E_{0A} + E_{A1}\}$$

Ce domaine représente l'ensemble des positions possibles du repère (1) par rapport à sa position de référence liée à (0). Elles sont possibles pour l'ensemble des couples de pièces qui respectent les tolérances mais pas pour un couple de pièces donné.

Le domaine d'incertitude du mécanisme est l'intersection des domaines d'incertitude de chacune des liaisons en parallèle. Il caractérise la précision de positionnement du solide (1) par rapport au solide (0). Il n'intervient pas pour la condition d'assemblage mais pour une condition de précision.

Lorsque tous les torseurs d'écarts sont nuls, le domaine d'incertitude est le même que le domaine jeu résiduel.

La méthode reste valable lorsqu'il existe des pièces intermédiaires entre les différentes liaisons. On devra considérer cette fois chacun des chemins qui va d'un repère à l'autre. Chacun de ces chemins comporte une succession de jeux et d'écarts en faisant la somme des domaines jeux d'une part, la somme des domaines écarts d'autre part, on obtiendra

un domaine jeu résiduel et un domaine d'incertitude toujours pour chacun de ces chemins.

Nous appellerons mécanismes parallèle, un mécanisme ayant ce type de structure.

La méthode sera explicité par deux exemples, mais auparavant, nous allons proposer une méthode simple pour choisir un tolérancement permettant de satisfaire la condition d'assemblage du mécanisme.

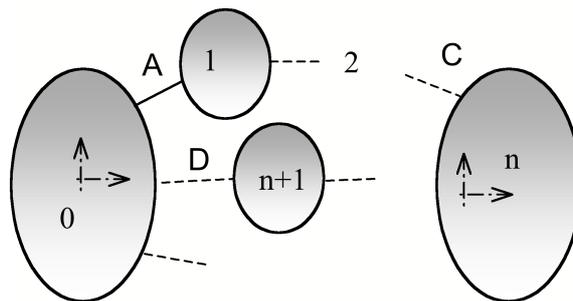


Figure 4.27 Graphe général d'un mécanisme parallèle

4.4.3. Application à une méthode de synthèse de tolérances pour des mécanismes parallèles

On se place dans l'hypothèse où pour chaque chemin, il existe au moins une liaison avec jeu. Une condition suffisante d'assemblage est que pour chaque chemin, le domaine jeu résiduel soit réduit au torseur nul. Cette condition est réalisée lorsque le domaine écart résultant de chaque chemin est égal au domaine jeu opposé.

En effet :

$$\{J_r\} \ominus \{E_r\} = \{0\} \text{ pour } \{E_r\} = \{-J_r\}$$

4.4.4. Exemple 1

Le mécanisme représenté figure (4.28a) est constitué de 4 pièces liées suivant le graphe figure (4.28b).

Les équations de torseurs sont les suivantes :

$$E_{0A} + J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2} = E_{0D} + J_{0D3} + E_{D3C} + J_{3C2} + E_{C2} = E_{0E} + J_{0E2} + E_{E2}$$

Le contact plan E est supposé maintenu (blocage par des vis) donc sans jeu le domaine $\{J_{0E2}\}$ est donc nul. Il faut donc que les domaines $\{E_{0E}\}$ et $\{E_{E2}\}$ soient nuls également. On choisit donc le plan E comme référence pour chacune des pièces (0) et (2).

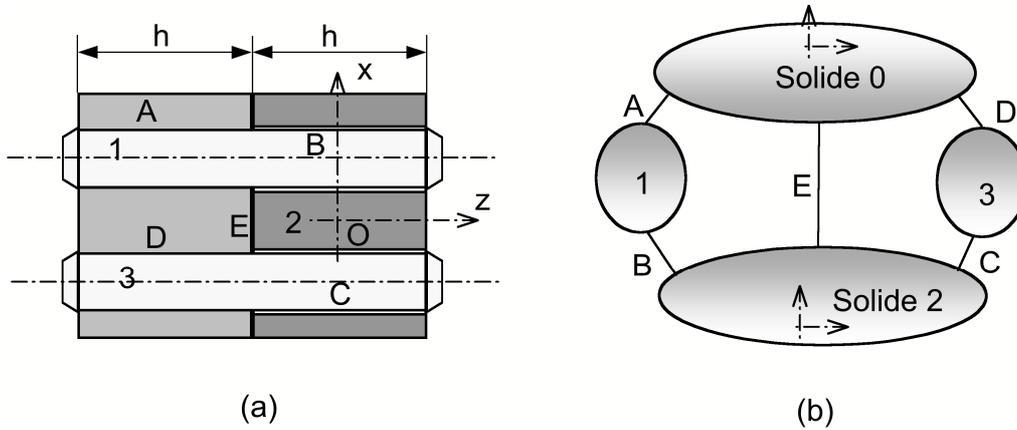


Figure 4.28 Mécanisme avec liaisons en série et en parallèle (Exemple 1)

Pour les deux autres chemins, la synthèse conduit au même résultat dans le cas du mécanisme de la figure 4.13, mais les zones de tolérances des trous pour les pièces (0) et (2) ont cette fois une référence qui est le plan E. La figure 4.29 donne une représentation normalisée du tolérancement correspondant.

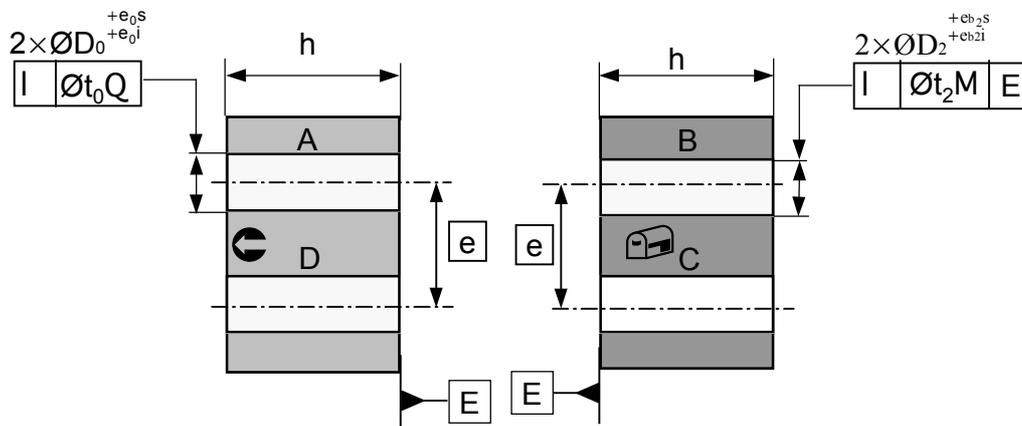


Figure 4.29 Tolérancement pour les pièces (0) et (2)

4.4.4 Exemple 2

On reprend le mécanisme de la figure 4.19, mais cette fois en considérant le système comme un mécanisme parallèle avec deux chemins pour aller du repère (0) au repère (2). Le graphe est représenté figure 4.30.

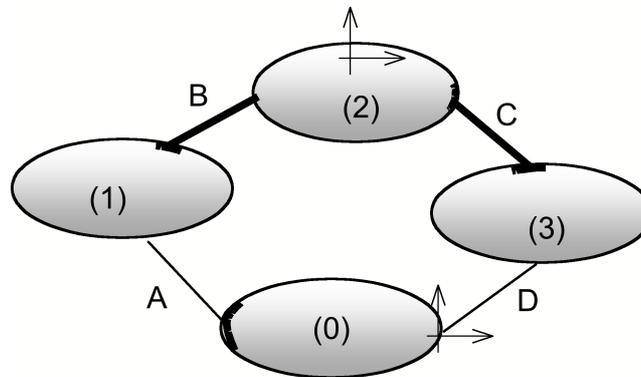


Figure 4.30 Graphe du mécanisme formé de liaisons planes et considéré comme structure parallèle

Les équations de torseurs écarts et jeux s'écrivent alors :

$$E_{0D} + J_{0D3} + E_{D3C} + J_{3C2} + E_{C2} = E_{0A} + J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2} + E_{B2}$$

La liaison D est sans jeu et la surface D a été prise en référence pour les tolérances des surfaces A de (0) et C de (3). D'autre part, on suppose que le repère (2) est attaché à la surface (C) du solide (2). D'où :

$$E_{3C} + J_{3C2} + E_{C2} = E_{0A} + J_{0A1} + E_{A1B} + J_{1B2}$$

Les différents domaines jeux et écarts sont construits dans le plan (O, w, β) . On obtient les domaines résiduels (figure 4.29):

$$\{R_C\} = \{J_{3C2}\} \ominus \{E_{3C} + E_{C2}\} \quad \text{et} \quad \{R_1\} = \{J_{0A1} + J_{1B2}\} \ominus \{E_{0A} + E_{A1B}\}$$

Puis le domaine jeu résiduel de l'assemblage en faisant l'intersection des domaines précédents.

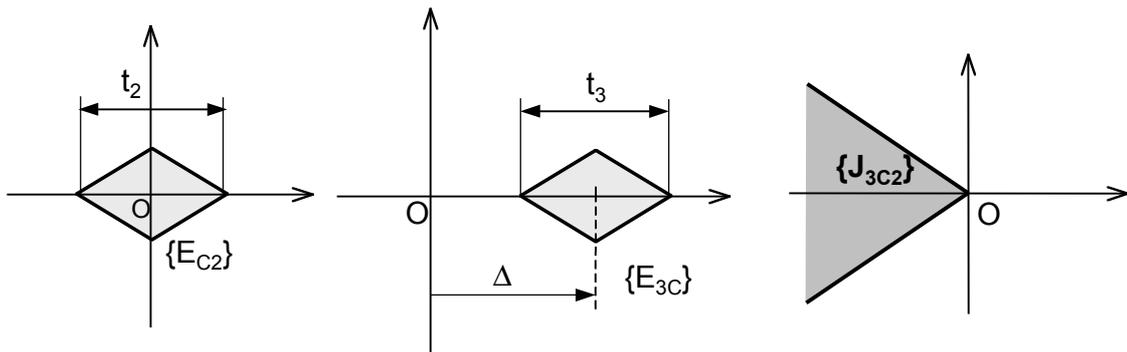


Figure 4.31 Domaines jeux et écarts chemin (C)

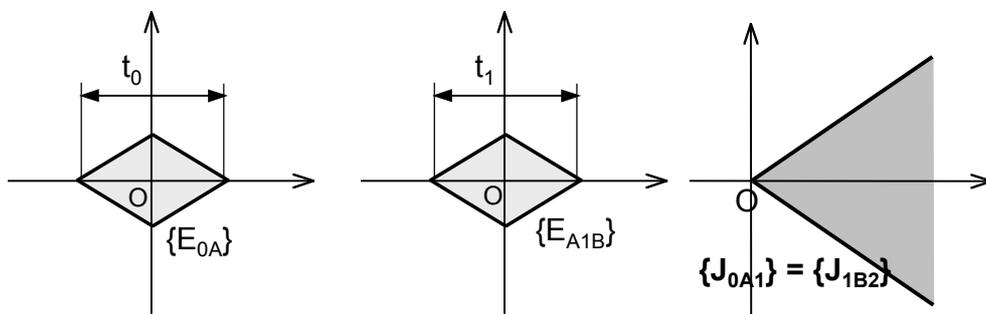


Figure 4.32 Domaines jeux et écarts chemin (I)

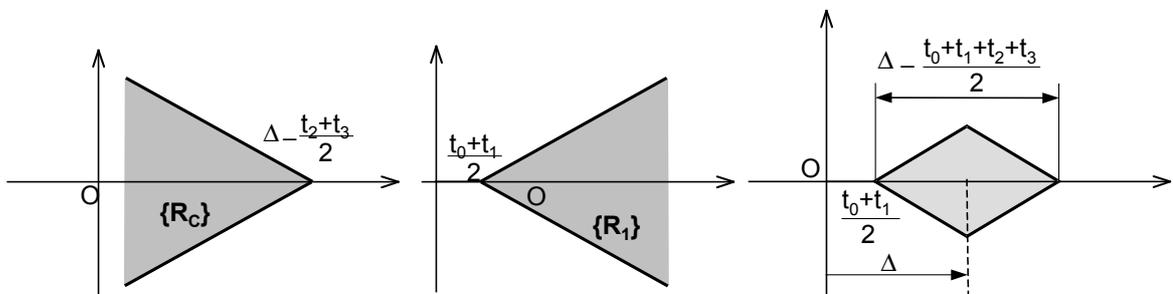


Figure 4.33 Domaines résiduels pour chacun des chemins et pour le mécanisme

De la même façon on obtient le domaine d'incertitude de l'assemblage, intersection des domaines d'incertitude de chaque chemin.

$$\{M_C\} = \{J_{3C2}\} \oplus \{E_{3C} + E_{C2}\} \quad \text{et} \quad \{M_I\} = \{J_{0A1} + J_{1B2}\} \oplus \{E_{0A} + E_{A1B}\}$$

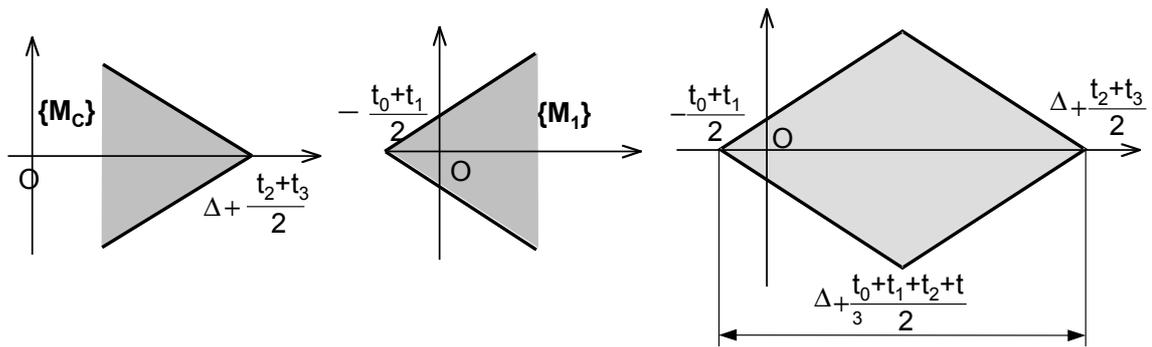


Figure 4.34 domaine d'incertitude de chaque chemin et du mécanisme

Ce cas particulièrement simple a été choisi afin de comparer cette méthode avec les résultats obtenus par la méthode classique des chaînes de cotes uniaxiales. L'intersection de chacun des domaines écarts avec l'axe Ow donne les écarts inférieurs et supérieurs des cotes unidirectionnelles par rapport à la cote théorique (et non nominale moyenne). Si on ne s'intéresse qu'à cette intersection pour les différents domaines on voit que le domaine jeu résiduel correspond au jeu minimal et le domaine d'incertitude au jeu maximal. En effet, il s'agit des déplacements du solide (2) par rapport à (0) suivant l'axe Oz lorsque les défauts angulaires sont nuls.

Notre méthode tient compte des défauts angulaires et constitue donc l'équivalent au cas tridimensionnel de la méthode des chaînes de cotes.

CONCLUSION 4.5

Les domaines jeux et écarts ont permis l'analyse de mécanismes en boucle simple puis en parallèle. Les conditions d'assemblage mais aussi des conditions de précision (position relatives de surfaces liées à des pièces différentes) peuvent être analysés par la construction graphique de ces domaines et par des opérations topologiques sur ces domaines.

Dans les exemples simples présentés on a pu construire graphiquement les différents domaines et les résultats des différentes opérations topologiques.

La méthode se révèle également très intéressante pour une approche de synthèse. Elle permet de déterminer les zones de tolérances assurant les conditions d'assemblage au plus juste donc quasi optimale.

CONCLUSION

L'analyse et surtout la synthèse de tolérances est un problème encore non résolu et donc ouvert à la communauté scientifique. Certes de nombreuses études ont été faites et de nombreux modèles proposés. Toutefois aucune méthode systématique ne permet de déterminer les tolérances géométriques que l'on doit spécifier sur les dessins des pièces afin de garantir les fonctions du mécanisme assemblé au moindre coût de fabrication.

Ce travail avait pour objectif d'apporter une contribution à la résolution de ce problème. Une première question s'impose. Ce problème a-t-il un sens? Est-il possible de trouver une telle démarche systématique? Le problème peut-il être posé de telle sorte que la solution optimale existe et soit unique dans tous les cas? Pour répondre à ces questions, deux points de vues opposés peuvent être avancés.

Le premier consiste à affirmer qu'il s'agit d'un problème de spécialiste, et qu'il n'y a pas de solution unique ni de méthode systématique possible. C'est l'expérience, le métier qui permettront de trouver une "bonne" solution. Chaque cas est particulier. Certains cas se ressemblent et à différents cas semblables, on peut proposer des réponses semblables. On peut alors imaginer de mettre au point un système expert, construit à partir de règles à appliquer suivant les cas. L'ensemble des règles d'expertise étant défini en commun accord entre les meilleurs experts possibles.

Le deuxième point de vue consiste à affirmer qu'il s'agit d'un problème de mécanique. Comme tout problème de mécanique, il faut d'abord définir un modèle dont le rôle est de représenter la réalité avec une bonne approximation. A ce modèle sont associées des lois de la physique : géométrie euclidienne, cinématique, dynamique newtonienne, lois du contact, lois de comportement des matériaux, etc. Il faut aussi que le problème soit bien posé de façon que les données conduisent à une solution unique. Certes le modèle peut être discutable si on considère qu'il constitue une approximation trop éloignée de la réalité. Le choix des données également peut être discutable car plus ou moins

réaliste. Mais une fois le problème bien posé, sa solution ne doit souffrir d'aucune discussion, même si éventuellement il existe plusieurs façons d'aboutir à cette solution. C'est ce point de vue que nous avons adopté. Ce n'est pas le chemin le plus facile. Car malgré la simplicité du modèle proposé, nous n'avons pas de solution générale à proposer à ce jour pour résoudre le problème de la synthèse des tolérances. Seul le cas des mécanismes en boucle simple a été étudié en détail. Et le cas des liaisons en parallèle a été abordé, faisant apparaître un niveau de complexité supplémentaire. Pourtant le modèle présenté et les outils mathématiques utilisés nous semblent offrir de grandes possibilités pour étendre ce travail à d'autres types de mécanismes.

Les systèmes en parallèle pourraient être étudiés en détail au travers de nombreux exemples différents. La notion de domaine jeu résiduel et de domaine de précision doit permettre de généraliser cette étude au cas de conditions fonctionnelles autres que l'assemblage, comme les conditions de type précision. Une méthode d'analyse de mécanismes quelconques doit donc également faire l'objet de recherches et les domaines jeux et écarts nous semblent un bon outil pour y parvenir.

Pour réaliser ces études, il est difficile de continuer à construire ces domaines jeux et écarts manuellement. Outre que cette tâche est fastidieuse, la moindre erreur est difficilement détectable dès que l'on travaille sur des exemples complexes pour lesquels des résultats partiels ne peuvent pas être comparés à ceux obtenus par d'autres méthodes, comme par exemple la méthode des chaînes de cotes. Les moyens informatiques sont alors nécessaires. Pour cela, une structure de données doit être définie afin de construire automatiquement les domaines et afin d'effectuer les opérations topologiques.

D'autre part, en supposant que l'on arrive à déterminer les surfaces de référence et les zones de tolérances optimales, il faudra qu'elles puissent se traduire par des spécifications conformes aux normes en vigueur.

Cette étude est réalisée en considérant les cas les plus défavorables. Il faudrait prendre en compte les aspects statistiques. La valeur possible d'un torseur d'écart dans son domaine n'a pas la même probabilité partout. Ici les aspects liés aux méthodes de fabrication vont intervenir.

L'interface avec le modèle géométrique défini en CAO constitue aussi un travail important. Le modèle CAO de type B-Rep permet de récupérer les principales

informations géométriques des éléments de surfaces à tolérer, mais des informations de type technologiques sont nécessaires. Par exemple concernant les liaisons, avec ou sans jeu, la précision de positionnement ou de guidage, devront être définis.

La mise au point de véritables outils d'aide au tolérancement assistés par ordinateur ne sera possible que lorsque les différents problèmes évoqués auront été résolus.

Nous souhaitons que ce travail contribuera à atteindre cet objectif.

Références

- [ANS 95] Anselmetti B., « *Application des exigences au minimum et au maximum de matière au tolérancement fonctionnel d'un mécanisme* » Séminaire PRIMECA Tolérancement et chaînes de cotes, Cachan 1995.
- [AUB 92] Aublin M. et al., « *Système mécanique. Théorie et dimensionnement* ». Dunod 1992.
- [BAL 95a] Ballot E., « *Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement* » Thèse de l'École Normale Supérieure de Cachan. Avril 1995.
- [BAL 95b] Ballot E. et Bourdet P., « *Equations formelles et tridimensionnelles des chaînes de dimensions dans les mécanismes* » Séminaire tolérancement et chaîne de cotes, ENS de Cachan. 135-146, 1995.
- [BAL 97] Ballot E. et Bourdet P., « *Détermination mathématique des spécifications à partir d'un modèle formel de chaînes 3D de défauts*. PRIMECA. 5^{ème} Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée, 163-170, 1997.
- [BAL 94] Ballu A. et Mathieu L., « *Un modèle pour la géométrie fonctionnelle des produits*. TEC 94, Modélisation géométrique et technologique en conception de produits, 1994.
- [BEN 97] Bennis F., Pino L. et Fortin C., « *Transfert de tolérances géométriques pour la fabrication par une méthode algébrique* » Journal Européen des Systèmes Automatisés, 31(8):1339-1357, 1997.
- [BEN 98] Bennis F., Pino L. et Fortin C., « *Geometric tolerance transfer for manufacturing by an algebraic method* » Proceedings of the 2nd International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Compiègne, France. 713-720, 1998.
- [BOU 73] Bourdet P., « *Chaînes de cotes de fabrication : le modèle. L'ingénieur et le technicien de l'enseignement* », 1973.
- [BOU 95a] Bourdet P. et Ballot E., « *Geometrical Behavior Laws For Computer Aided Tolerancing* » Proceeding of the 4th CIRP Seminar on computer-Aided tolerancing, University of Tokyo, Japan. April 1995.
-

- [BOU 95b] Bourdet P., Mathieu L., Lartigue C. et Ballu A., « *The concept of the small displacement torsor in metrology*. Proceedings of the International EuroConférence, Advanced mathematical tools in metrology, Oxford UK. Septembre 1995.
- [BÜL 98] Büler B., Enge K. et Fukuda K., « *Exact volume computation for polytopes :A Pratical study* ». G.Kalai and G. Ziegler, polytopes-Combinatorics and Computation, DMV-Seminars. Birkhäuser Verlag, 1998.
- [CHA 91] Chase K. W. et Parkinson A. R., « *A Survey of Research in the Application of Tolerance Analysis to the Design of Mechanical Assemblies* ». Research In Engineering Design, 3:23-37, 1991.
- [CLE 94] Clément A., Rivière A. et Temmerman M., « *Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques* ». Théorie et pratique. PYC Edition 1994.
- [CLO 95] Clozel P., « *Tolérances 3D : simulation des jeux et les chaînes de cotes 3D* ». Actes du colloques sur le tolérancement et les chaînes de cotes. Ecole Normale Supérieure de Cachan, Février 1995.
- [DES 99] Desrochers A. et Verheul S., « *A three dimensional tolerance transfer methodology* ». Proceeding of the 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, University of Twente, The Netherlands. 83-92. 1999.
- [FOR 95] Fortin C. et Chatelain J. F., « *A geometrical tolerance verification approach for complex cases including datum shift analysis* » Proceeding of the 4th CIRP Seminar on computer Aided Tolerancing, 337-355, 1995.
- [GAO 95] Gao J., Chase K. W. et Magleby S. P., « *Generalized 3D tolerances analysis of mechanical assemblies with small kinematic adjustments* » TI/TOL 3D+ white paper via Texa Instruments, 1995.
- [GAU 94] Gaunet D., « *Modèle formel de tolérancement de position. Contributions à l'aide eu tolérancement des mécanisme en CFAO* » Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan. Février 1994.
- [GIO 92] Giordano M., Duret D., Tichadou S. et Arrieux R., « *Clearance Space In Volumic Dimensioning* ». Annals of the CIRP, vol 41, pp 565-568, 1992.
-

- [GIO 93] Giordano M. et Duret D., « *Clearance space and deviation space. Application to three dimensional chain of dimensions and positions* ». 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing ENS Cachan, pp.179-196, Avril 1993
- [GIO 95] Giordano M., « *Vers une approche méthodique du tolérancement* ». Acte du séminaire Tolérancement et chaîne de cotes, ENS Cachan, pp. 125-134, février 1995.
- [GIO 97] Giordano M., « *Modèle de détermination des tolérances géométriques* ». PRIMECA. 5^{ème} Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée, 1997.
- [GIO 98] Giordano M., « *Modèle de détermination des tolérances géométriques. Chapitre 13 du catalogue : Conception de produits mécaniques - méthode, modèles et outils.* ». Hermes 1998.
- [GIO 99] Giordano M., Pairel E. et Samper S., « *Mathematical Representation of Tolerance Zones* ». Proceeding of the 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, University of Twente, Enschede, the Netherlands, 177-186, Mars 1999.
- [GIO 01] Giordano M., Kataya B. et Pairel E., « *Tolerance Analysis and Synthesis by means of clearance and deviation spaces* ». Proceeding of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, ENS Cachan, Avril 2001
- [GUP 91] Gupta S., « *Variational solid modeling for tolerance Analysis (Master's thesis)* », Rapport, Tech No.91018, Renssler Design Research Center 1991.
- [GUP 93] Gupta S. et Turner J.U., « *Variational solid modeling for tolerance Analysis* », IEEE Computer Graphics & Applications, Vol.17, No.5, pp.64-74, 1993.
- [HER 02] Hernandez P. et Giordano M. « *Outils analytique d'aide au tolérancement géométrique en vue d'intégration en CAO* », I.D.M.M.E. Clermont-Ferrand, 2002.
- [JAY 89] Jayaraman R. et Srinivasan V., « *Geometric tolerancing : I. Virtual boundary requirement* ». IBM Journal of Research and Development, 33(2):90-104.1989.
- [KAT 01] Kataya B. et Giordano M., « *Analyse des tolérances géométriques des mécanismes* ». PRIMECA. 7^{ème} Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée, 364-371, 2001.
- [LEB 74] Le Borzec et Lotterie., « *Théorie des mécanisme* ». Dunod 1974.
-

- [LEH 91] Lehtihet E. A., Gunasena N. U. et Clément A., « *On the composite position tolerance for pattern of holes* ». Annals of the CIRP, vol 40, pp 495-498, 1991.
- [MAT 95] Mathieu L., « *Le tolérancement normalisé : langage du mécanicien* ». Séminaire PRIMECA Tolérancement et chaînes de cotes, ENS Cachan. 109-123 1995.
- [MAT 97b] Mathieu L., Clément A. et Bourdet P., « *Modeling, representation and processing of tolerances, tolerances inspection: a survey of current hypothesis* ». Proceeding of the 5th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Toronto, Canada. 1997.
- [PAI 95] Pairel E., « *Méetrologie fonctionnelle par calibre virtuel sur machine à mesurer tridimensionnelle* ». Thèse de l'Université de Savoie. Décembre, 1995.
- [PAI 97] Pairel E., « *Méetrologie par calibre virtuel sur machine à mesurer tridimensionnelle* ». PRIMECA. 5^{ème} Colloque sur la Conception Mécanique Intégrée, 155-161, 1997.
- [PIN 99] Pino L., Bennis F. et Fortin C. « *The use of a kinematic model to analyze positional tolerances in assemblies* ». Proceeding of the 1999 IEEE Conference on Robotics and Automation, Detroit, Michigan 1418-1423,1999.
- [PIN 00] Pino L., « *Modélisation et analyse cinématique des tolérances géométriques pour l'assemblage de système mécaniques* ». Thèse de l'Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingenieur de Nantes, Janvier 2000
- [REQ 77] Requicha A. A. G., « *Mathematical models of rigid solid objects* ». Rapport de l'Université de Rochester. N°28, Novembre 1977.
- [REQ 83] Requicha A. A. G., « *Toward a theory of Geometric Tolerancing* ». The International Journal of Robotics Research, 2(4):45-60, 1983.
- [REQ 92] Requicha A. A. G. et Whalen T. W., « *Representation for assemblies* ». Institute for robotics and intelligent systems. Report n°267, 1992.
- [REQ 93] Requicha A. A. G., « *Mathematical meaning an computational representation of tolerance specifications* ». Proceedings of the International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology, ASME. 61-68, 1993.
-

- [RIV 94a] Rivest L., « *Modélisation et analyse tridimensionnelles des tolérances dimensionnelles et géométrique* ». Thèse de l'Université de Montréal, Ecole Polytechnique, 1994.
- [RIV 94b] Rivest L., Fortin C. et Morel C., « *Tolerancing a solid model with a kinematic formulation* ». *Computer Aided Design* 26(6), 465-476, 1994.
- [RIV 94c] Rivest L., Dupinet E., Fortin C. et Morel C., « *Analysis of product tolerances for process plan validation* ». *Manufacturing review*, 7(4): 312-331, 1994.
- [RIV 93] Rivière A., « *La géométrie du groupe des déplacements appliquée à la modélisation du tolérancement* ». Thèse de l'Ecole Centrale de Paris, Novembre 1993.
- [ROB 97] Robinson D. M., « *Geometric tolerancing for assembly with Maximum Material Parts*. Proceeding of the 5th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Toronto, Canada, 1997.
- [ROB 98] Robinson D. M., *Geometric tolerancing for assembly*. Thesis of Cornell University. May 1998.
- [SAL 97] Salomons O. W., van Houten F. J. A. M. et Kals H. J. J., « *Current status of CAT systems* ». Proceedings of the 5th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Toronto, Canada, 1997.
- [SAM 01] Samper S. et Giordano M., « *Simultaneous analysis method for tolerancing flexible mechanisms* ». Proceeding of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, ENS Cachan, Avril 2001
- [SRI 85] Srinivasan V. et Jayaraman R., « *Issues in Conditional Tolerances for CAD systems* ». IEEE. , Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, St Louis. 373-375, 1985.
- [SRI 89] Srinivasan V. et Jayaraman R., « *Geometric tolerancing : II. Conditional tolerance* ». *IBM Journal of Research and Development*, 33(2):105-124, 1989.
- [SRI 93] Srinivasan V., « *The Role of Sweeps in Tolerancing Semantics* ». *Manufacturing Review*, 6(4):275-281, 1993.
- [SRI 96] Srinivasan V., O'Connor M. A. et Scholz F. W., « *Techniques for composing a Class of Statistical Tolerances Zones* ». IBM Research Division. Report n°20254, 1996.
-

- [TEI 95] Teissandier D., « L'Union Pondérée d'espaces de Liberté : un nouvel outil pour la coaction fonctionnelle tridimensionnelle » Thèse, Laboratoire de Mécanique Physique – université Bordeaux I, 1995.
- [TEI 99] Teissandier D., Delos v. et Couetard Y., « *Opérations on polytopes : application to tolerance analysis* » Proceeding of the 6th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Fred van Housten/Hubert Kals, 1999, pp.425-434.
- [TEM 98] Temmerman M., « *Lois de comportement autorisant la synthèse du tolérancement* ». Proceedings of the 2nd International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Compiègne, France. 729-738, 1998.
- [THI 87] Thibault W.C . et Naylor B. F., « *Set operation on polyhedra using binary space partitioning trees* ». SIGGRAPH 21(4):153-136. 1987.
- [TUR 87] Turner J. U., « *Tolerances in Computer-Aided Geometric Design* ». Thesis of the Faculty of Rensselaer Polytechnique Institute. 1987.
- [TUR 92] Turner J. U., Subramaniam S. et Gupta S., « *Constraint Representation and Reduction in Assembly Modeling and Analysis* ». IEEE Transactions on Robotics and Automation, 8(6):741-750, 1992.
- [Wirtz 93] Wirtz A., Gächter C. et Wipf D., « *From Unambiguously Defined Geometry to the Perfect Quality Control Loop* ». Annals of the CIRP, 42(1):615-619, 1993.
- [ZHA 92a] Zhang G. et Porchet M., « *Automatic calculation of dimensions and tolerances in manufacturing* ». Proceeding of the International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing. IMACS/SICE.1131-1136, 1992.
- [ZHA 92b] Zhang G. et Porchet M., « *Tolerance design in CIM : the state of the art* ». Proceeding of the International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing. IMACS, SICE.1137-1142, 1992.
- [ZHA 94] Zhang G. et Porchet M., « *Geometric tolerancing in CAD/CAM : a Review* ». Advances in Manufacturing Systems, 359-364, 1994.
- [ZHA 96] Zhang G., *Simultaneous tolerancing for design and manufacturing*. International Journal of Production Research, 34(12):3361-3382, 1996.
-

Normes

- [AFNOR 93] AFNOR, « *Tolérances et vérifications dimensionnelles* ». AFNOR-UNM. 8^{ème} édition. Vol. 1, 1993.
- [ASME 94a] ASME, *ASME Y14.5M-1994*, « *Dimensioning and tolerancing* ». American society of mechanical engineers. 1994.
- [ASME 94b] ASME, *ASME Y14.5.1M-1994*, « *Mathematical definition of dimensioning and tolerancing principle* ». American society of mechanical engineers. 1994.
- [ISO 10303] ISO 10303, « *Standard for the exchange of product model data* ». ISO TC 184SC4.
- [NF E 04-552] NF E 04-552, « *Dessins techniques - Tolérancement Géométrique* ». *Généralités, définitions, symboles, indications sur les dessins*. AFNOR, Novembre 1993.
- [NF E 04-554] NF E 04-554, « *Dessins techniques – Cotation et tolérancement* ». *Références et systèmes de référence pour le tolérancement géométrique*. AFNOR, Décembre 1988.
- [NF E 04-555] NF E 04-555, « *Dessins techniques - Tolérancement Géométrique* ». *Exigence du maximum de matière* ». AFNOR, Février 1992.
- [NF E 04-559] NF E 04-559, « *Dessins techniques – Cotation et tolérancement* ». *Tolérancement de localisation*. AFNOR, Février 1991.
-