

Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux : application à l'étude d'écoulements fluides

Martin DRUON

B. Tremblais - L. David - Ch. Fernandez-Maloigne

Laboratoire XLIM - département SIC

Laboratoire LEA

Futuroscope - Poitiers

11 février 2009

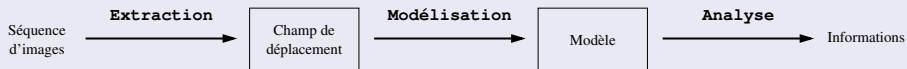
Contexte

- Traitement d'images : étude automatique du contenu d'une image à partir d'informations « bas-niveau » telles que les formes, les couleurs, les textures. . .
- Depuis quelques années, adaptation de ces traitements aux séquences d'images
- Intégration d'une nouvelle information : **le mouvement**

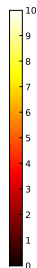
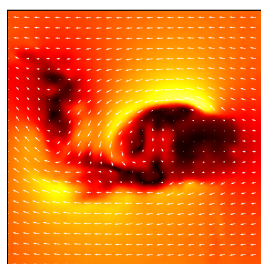
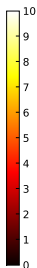
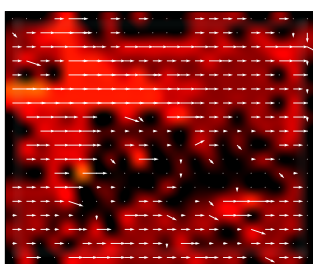
Traitement des séquences d'images

- Objectif : étude automatique du mouvement contenu dans des séquences d'images
- Domaines d'applications : audiovisuel, télésurveillance, étude du comportement, météorologie. . .

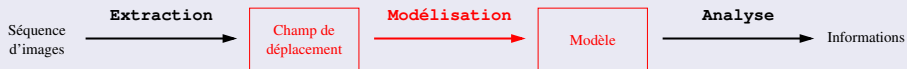
Processus d'analyse des séquences d'images



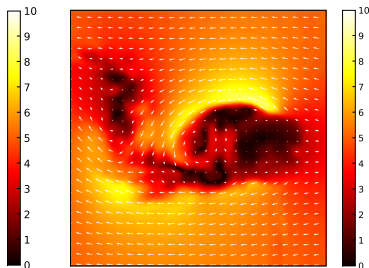
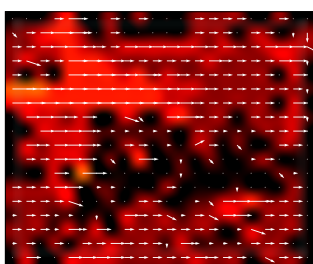
Exemples de champs de déplacement réguliers :



Processus d'analyse des séquences d'images



Exemples de champs de déplacement réguliers :



Modélisation des champs de déplacement

- Parmi les différentes approches rencontrées : modélisation par séries de fonctions
- Expression générale :

$$\vec{v} = \sum_{i=0}^N c_i \vec{\phi}_i$$

avec \vec{v} le champ à modéliser et $\vec{\phi}_i$ un ensemble de fonctions pondérées par les coefficients c_i

Modèle *a posteriori*

Les fonctions $\vec{\phi}_i$ sont déterminées en fonction du mouvement
(POD - ACP...)

- Base propre à chaque mouvement
- Optimalité de la méthode
- Interprétation délicate de la base
- Connaissance au préalable de tous les champs de la séquence

Modèle *a priori*

Les fonctions $\vec{\phi}_i$ sont fixées sans connaissance du mouvement

- Base commune à tous les mouvements
- Interprétation possible de la base
- Choix des fonctions ϕ_i ?
- Calcul des coefficients c_i ?

Modélisation des champs de déplacement

- Parmi les différentes approches rencontrées : modélisation par séries de fonctions
- Expression générale :

$$\vec{v} = \sum_{i=0}^N c_i \vec{\phi}_i$$

avec \vec{v} le champ à modéliser et $\vec{\phi}_i$ un ensemble de fonctions pondérées par les coefficients c_i

Modèle *a posteriori*

Les fonctions $\vec{\phi}_i$ sont déterminées en fonction du mouvement (POD - ACP...)

- Base propre à chaque mouvement
- Optimalité de la méthode
- Interprétation délicate de la base
- Connaissance au préalable de tous les champs de la séquence

Modèle *a priori*

Les fonctions $\vec{\phi}_i$ sont fixées sans connaissance du mouvement

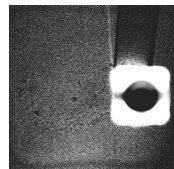
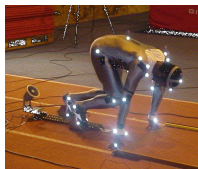
- Base commune à tous les mouvements
- Interprétation possible de la base
- Choix des fonctions ϕ_i ?
- Calcul des coefficients c_i ?

Objectifs

- Caractérisation du mouvement par combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux
- Modélisation globale du mouvement
- Méthode générale
- Destinée à faire de l'analyse et de l'interprétation
- Traitement de gros volumes de données

Applications

Mouvements sportifs, **mouvements de caméra**, **comportement humain**, **écoulements fluides**...



- 1 Modélisation du mouvement par bases de polynômes
 - Modélisation des champs de déplacement bidimensionnels à deux composantes
 - Généralisation multidimensionnelle multicomposante
- 2 Évaluation de la qualité du modèle
- 3 Application à l'étude d'écoulements fluides

Objectif

Modélisation des champs de déplacement par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux

Principe



Champ de déplacement original



Base orthogonale

Projection

$\{ \varphi_{0,0}^1, \varphi_{0,1}^1, \varphi_{1,0}^1, \dots \}$
 $\{ \varphi_{0,0}^2, \varphi_{0,1}^2, \varphi_{1,0}^2, \dots \}$

Coefficients de projection

Analyse

$\begin{cases} \hat{\varphi}^1 = a_{0,0} + a_{1,0} x_1 + \dots \\ \hat{\varphi}^2 = b_{0,0} + b_{1,0} x_1 + \dots \end{cases}$

Expression analytique

Reconstruction

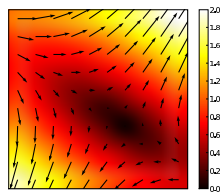


Champ de déplacement modélisé

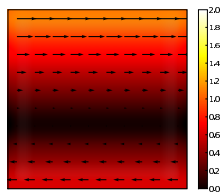
- Définition d'un champ de déplacement
- Génération de la base orthogonale
- Projection d'un champ sur la base
- Génération de l'expression analytique
- Reconstruction du champ de déplacement

Définition d'un champ de déplacement bidimensionnel à deux composantes

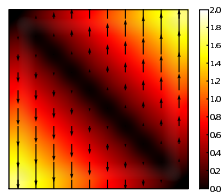
$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (\mathcal{V}^1(x_1, x_2), \mathcal{V}^2(x_1, x_2))\end{aligned}$$



\mathcal{F}
Champ
original



\mathcal{V}^1
Mouvements
horizontaux



\mathcal{V}^2
Mouvements
verticaux

Génération de la base orthogonale bidimensionnelle

- Définition des polynômes bivariés de degré $K + L$: $P_{K,L} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L c_{k,l} (x_1)^k (x_2)^l$
- Génération de la base par la formule de récurrence à trois termes :

$$\begin{cases} P_{-1,j} = 0 \\ P_{i,-1} = 0 \\ P_{0,0} = 1 \\ P_{i+1,j} = (a_i x_1 + b_i) P_{i,j} - c_i P_{i-1,j} \\ P_{i,j+1} = (a_j x_2 + b_j) P_{i,j} - c_j P_{i,j-1} \end{cases}$$

avec a_n , b_n et c_n des paramètres de la formule de récurrence

- Base orthogonale selon le produit scalaire :

$$\langle F_1(x_1, x_2) \mid F_2(x_1, x_2) \rangle = \iint_{\Omega} F_1(x_1, x_2) F_2(x_1, x_2) \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

avec Ω le domaine de définition et $\omega(x_1, x_2)$ la fonction de poids

- Normalisation des polynômes : $\langle P_{i,j} \mid P_{k,l} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Génération de la base orthogonale bidimensionnelle

- Base notée \mathcal{B}_D avec D le degré
- Degré D de la base : degré maximal des polynômes $P_{i,j}$ qui la compose

$$\forall P_{i,j} \in \mathcal{B}_D, \{i + j \leq D\}$$

- Nombre de polynômes : $n_D = \frac{(D+1)(D+2)}{2}$ avec D le degré

$\mathcal{B}_D =$

	$(x_2)^0$	$(x_2)^1$...	$(x_2)^{(D-1)}$	$(x_2)^D$
$(x_1)^0$	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$...	$P_{0,D-1}$	$P_{0,D}$
$(x_1)^1$	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$...	$P_{1,D-1}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
$(x_1)^{(D-1)}$	$P_{D-1,0}$	$P_{D-1,1}$			
$(x_1)^D$	$P_{D,0}$				

Génération de la base orthogonale bidimensionnelle

- Base notée \mathcal{B}_D avec D le degré
- Degré D de la base : degré maximal des polynômes $P_{i,j}$ qui la compose

$$\forall P_{i,j} \in \mathcal{B}_D, \{i + j \leq D\}$$

- Nombre de polynômes : $n_D = \frac{(D+1)(D+2)}{2}$ avec D le degré

$\mathcal{B}_D =$

	$(x_2)^0$	$(x_2)^1$...	$(x_2)^{(D-1)}$	$(x_2)^D$
$(x_1)^0$	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$...	$P_{0,D-1}$	$P_{0,D}$
$(x_1)^1$	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$...	$P_{1,D-1}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
$(x_1)^{(D-1)}$	$P_{D-1,0}$	$P_{D-1,1}$			
$(x_1)^D$	$P_{D,0}$				

Génération de la base orthogonale bidimensionnelle

- Base notée \mathcal{B}_D avec D le degré
- Degré D de la base : degré maximal des polynômes $P_{i,j}$ qui la compose

$$\forall P_{i,j} \in \mathcal{B}_D, \{i + j \leq D\}$$

- Nombre de polynômes : $n_D = \frac{(D+1)(D+2)}{2}$ avec D le degré

$\mathcal{B}_D =$

	$(x_2)^0$	$(x_2)^1$...	$(x_2)^{(D-1)}$	$(x_2)^D$
$(x_1)^0$	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$...	$P_{0,D-1}$	$P_{0,D}$
$(x_1)^1$	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$...	$P_{1,D-1}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
$(x_1)^{(D-1)}$	$P_{D-1,0}$	$P_{D-1,1}$			
$(x_1)^D$	$P_{D,0}$				

Génération de la base orthogonale bidimensionnelle

- Base notée \mathcal{B}_D avec D le degré
- Degré D de la base : degré maximal des polynômes $P_{i,j}$ qui la compose

$$\forall P_{i,j} \in \mathcal{B}_D, \{i + j \leq D\}$$

- Nombre de polynômes : $n_D = \frac{(D+1)(D+2)}{2}$ avec D le degré

$\mathcal{B}_D =$

	$(x_2)^0$	$(x_2)^1$...	$(x_2)^{(D-1)}$	$(x_2)^D$
$(x_1)^0$	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$...	$P_{0,D-1}$	$P_{0,D}$
$(x_1)^1$	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$...	$P_{1,D-1}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
$(x_1)^{(D-1)}$	$P_{D-1,0}$	$P_{D-1,1}$			
$(x_1)^D$	$P_{D,0}$				

Choix des polynômes de Legendre

- Paramètres de la formule de récurrence :

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad b_n = 0 \quad c_n = \frac{n}{n+1} \quad \Omega = [-1; 1]^2 \quad \omega(x_1, x_2) = 1$$

- Propriétés :

- Polynômes réels
- Intervalle Ω borné
- Fonction de poids $\omega(x_1, x_2)$ simple
- Même importance pour tous les vecteurs du champ

$B_2 =$

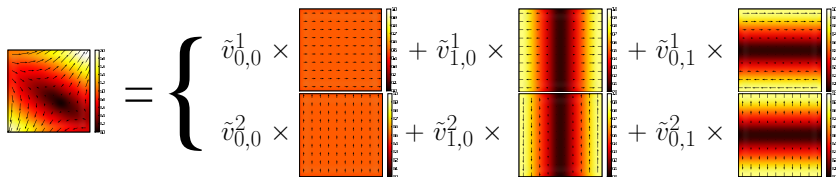
	$(x_2)^0$	$(x_2)^1$	$(x_2)^2$
$(x_1)^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}x_2}{2}$	$\frac{\sqrt{5}(3x_2^2-1)}{4}$
$(x_1)^1$	$\frac{\sqrt{3}x_1}{2}$	$\frac{3x_1x_2}{2}$	
$(x_1)^2$	$\frac{\sqrt{5}(3x_1^2-1)}{4}$		

Base de Legendre de degré 2

Projection d'un champ sur la base

- Combinaisons linéaires des polynômes de la base :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}^1(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^{D-i} \tilde{v}_{i,j}^1 P_{i,j} = \tilde{v}_{0,0}^1 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^1 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^1 P_{0,1} + \dots \\ \tilde{V}^2(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^{D-i} \tilde{v}_{i,j}^2 P_{i,j} = \tilde{v}_{0,0}^2 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^2 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^2 P_{0,1} + \dots \end{array} \right.$$



Projection d'un champ sur la base

- Combinaisons linéaires des polynômes de la base :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{V}}^1(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^{D-i} \tilde{v}_{i,j}^1 P_{i,j} = \tilde{v}_{0,0}^1 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^1 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^1 P_{0,1} + \dots \\ \tilde{\mathcal{V}}^2(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^{D-i} \tilde{v}_{i,j}^2 P_{i,j} = \tilde{v}_{0,0}^2 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^2 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^2 P_{0,1} + \dots \end{array} \right.$$

- Calcul des coefficients de projection $\tilde{v}_{i,j}^1$ et $\tilde{v}_{i,j}^2$:

$$\forall i + j \leq D, \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{i,j}^1 = \langle \mathcal{V}^1(x_1, x_2) \mid P_{i,j} \rangle = \iint_{\Omega} \mathcal{V}^1(x_1, x_2) P_{i,j} \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ \tilde{v}_{i,j}^2 = \langle \mathcal{V}^2(x_1, x_2) \mid P_{i,j} \rangle = \iint_{\Omega} \mathcal{V}^2(x_1, x_2) P_{i,j} \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{array} \right.$$

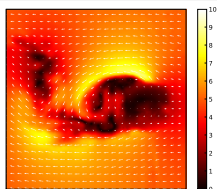
Calcul de l'expression analytique du mouvement

- Détermination de l'expression analytique du mouvement à partir des coefficients de projection $\tilde{v}_{i,j}^1$ et $\tilde{v}_{i,j}^2$ et des polynômes $P_{i,j}$ de la base :

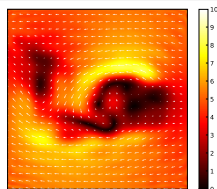
$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = a_{0,0}^1 + a_{1,0}^1 x_1 + a_{0,1}^1 x_2 + a_{2,0}^1 x_1^2 + a_{1,1}^1 x_1 x_2 + a_{0,2}^1 x_2^2 + \dots \\ \tilde{v}^2 = a_{0,0}^2 + a_{1,0}^2 x_1 + a_{0,1}^2 x_2 + a_{2,0}^2 x_1^2 + a_{1,1}^2 x_1 x_2 + a_{0,2}^2 x_2^2 + \dots \end{cases}$$

Reconstruction du champ original

- Évaluation de l'expression analytique en tout point du champ de déplacement
- Interpolation possible des données



Champ original
30 752 réels



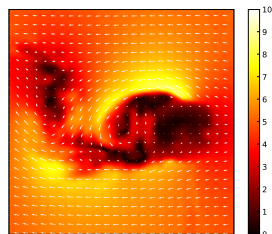
Champ reconstruit
 $D = 30$ 992 réels

Influence du degré D de la base

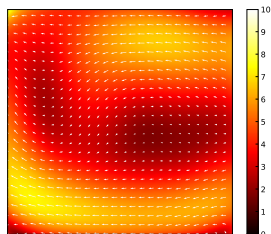
- $2 \times n_D$ réels pour représenter un champ bidimensionnel à deux composantes

- Taux de compression : $\tau[\%] = \left(1 - \frac{(D+1)(D+2)}{2 \times S_{x_1} \times S_{x_2}}\right) \times 100$

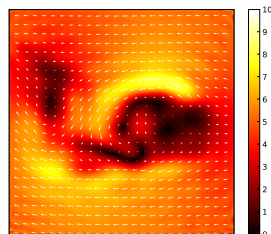
avec $S_{x_1} \times S_{x_2}$ la taille du champ de déplacement



Champ original
30 752 réels



Champ reconstruit
 $D = 05$ 42 réels
 $\tau = 99.93 \%$



Champ reconstruit
 $D = 30$ 992 réels
 $\tau = 98.39 \%$

- Le degré de la base détermine la complexité du modèle

Généralisation multidimensionnelle multicomposante

- Définition d'un champ de déplacement à N dimensions et C composantes :

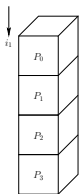
$$\mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^C$$

$$\vec{x} \mapsto (\nu^1(\vec{x}), \nu^2(\vec{x}), \dots, \nu^C(\vec{x}))$$

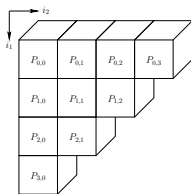
- Génération de la base multidimensionnelle : extension de la formule de récurrence

$$\prod_{n=1}^N (D + n)$$

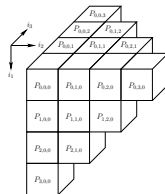
- Nombre de polynômes de la base : $n_D = \frac{n-1}{N!}$



Base 1D
(D = 3)



Base 2D
(D = 3)



Base 3D
(D = 3)

Bilan

- Expression polynomiale du mouvement
- Base commune à tous les mouvements
- Complexité et occupation mémoire réduites
- Implantation informatique aisée et efficace
- Projection d'un champ indépendante des autres champs
 - Traitement d'un champ sans connaissance de l'intégralité de la séquence
 - Temps de projection d'un champ indépendant du nombre de champ de la séquence
 - Parallélisation des calculs

① Modélisation du mouvement par bases de polynômes

② Évaluation de la qualité du modèle

- Étude du comportement des coefficients de projection
- Résistance au bruit
- Qualité du modèle
- Interprétation de mouvements simples

③ Application à l'étude d'écoulements fluides

Étude du comportement des coefficients de projection

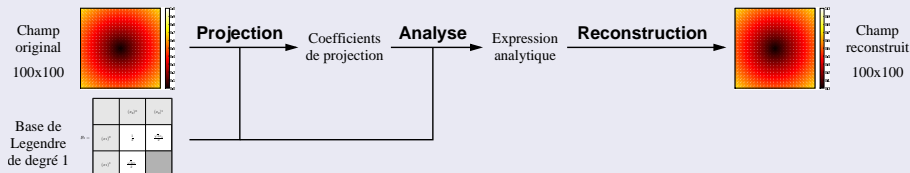
- Expression analytique d'un mouvement affine :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}^1 \\ \mathcal{V}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} div_{x_1} & -rot_{x_1} \\ rot_{x_2} & div_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tr_{x_1} \\ tr_{x_2} \end{pmatrix}$$

avec tr_{x_1} , tr_{x_2} , rot_{x_1} , rot_{x_2} , div_{x_1} et div_{x_2} les paramètres du mouvement affine

- Étude sur des mouvements affines « élémentaires »
- Étude sur des mouvements affines « composés »
- Étude sur des mouvements affines « aléatoires »

Processus d'évaluation



Résultats

- Erreur de norme inférieure à 1 %, pour tous les mouvements
- Si le degré de la base est supérieur à 1, alors les coefficients de projection associés aux polynômes de degrés supérieurs à 1 sont nuls
- Relation directe entre les coefficients de projection et les paramètres du modèle affine :

$\tilde{v}_{0,0}^1$	$\tilde{v}_{0,1}^1$
=	=
$2 \operatorname{tr}_{x_1}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{rot}_{x_1}$
$\tilde{v}_{1,0}^1$	
=	
$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{div}_{x_1}$	

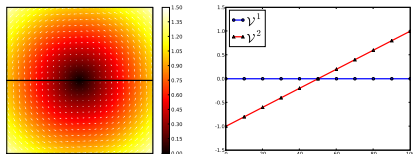
$\tilde{v}_{0,0}^2$	$\tilde{v}_{0,1}^2$
=	=
$2 \operatorname{tr}_{x_2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{div}_{x_1}$
$\tilde{v}_{1,0}^2$	
=	
$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{rot}_{x_1}$	

Résistance au bruit

- 2 types de bruit : bruit gaussien et bruit impulsionnel
- Étude de deux mouvements : « rotation » et « tourbillon »

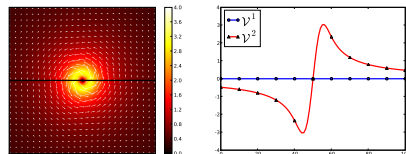
Séquence « rotation »

$$\begin{cases} \mathcal{V}^1 & = & -\text{rot}_{x_1} x_2 \\ \mathcal{V}^2 & = & \text{rot}_{x_2} x_1 \end{cases}$$



Séquence « tourbillon »

$$f(z) = \frac{i \Gamma(z-z_0) (1 - e^{-\frac{|z-z_0|^2}{s}})}{2 \pi |z-z_0|^2}$$

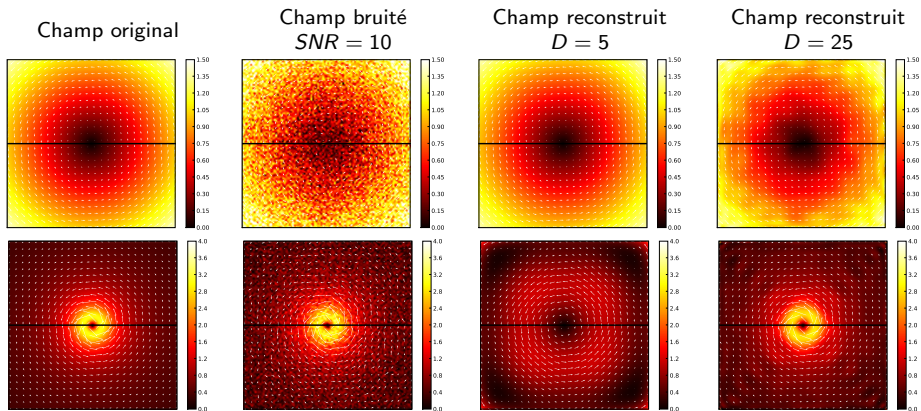


Processus

- Bruit gaussien : évaluation pour des *rapports signal-sur-bruit* (SNR) de 50, 10 et 5
- Bruit impulsionnel : évaluation pour 5 %, 10 % et 25 % de vecteurs à zéro
- Génération de 10 champs par paramètre (1080 champs par type de bruit)
- Projection sur des bases de degrés compris entre 0 et 35

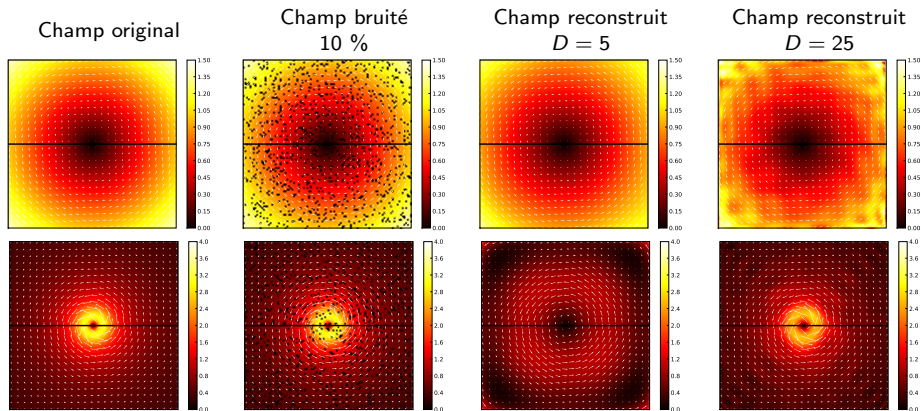
Résistance au bruit gaussien : résultats

- Lissage des champs de déplacement
- Pour des degrés faibles : forte résistance au bruit mais complexité du mouvement limitée
- Pour des degrés plus élevés : intégration progressive du bruit



Résistance au bruit impulsionnel : résultats

- Reconstruction des vecteurs manquants
- Mais sous-estimation de la dynamique du mouvement

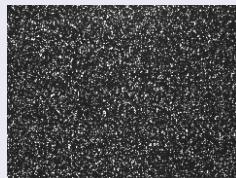
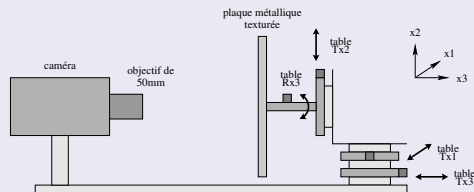


Objectif

Évaluer la précision du modèle sur des champs expérimentaux dont on connaît précisément les caractéristiques

Dispositif expérimental

- Appareil photographique numérique Nikon D1 avec télécommande infrarouge
- Objectif Nikkor à focale fixe de 50mm
- Plaque texturée par une image représentant des particules
- Déplacement de la plaque :
 - 3 tables de translation précision : $2/100\text{mm}$
 - 1 table de rotation selon l'axe optique précision : $1/10^\circ$



Plaque métallique texturée

Processus

- Évaluation de 15 mouvements
 - 3 translations pour des déplacements de 0.5 mm, 1 mm, 3 mm et 5 mm
 - 1 rotation selon l'axe optique pour des déplacement de 1°, 3° et 5°
- Séries de 3 acquisitions par mouvement
- Calcul des champs de déplacement par une méthode d'inter-corrélation
- Taille des champs : 60×42 vecteurs
- Projection des champs sur une base de degré 2
- Comparaison de la norme du champ original avec celle du champ reconstruit

Résultats

Translation	Translation selon x_1	Translation selon x_2	Translation selon x_3
0.5 mm	0.02 %	0.02 %	1.26 %
1.0 mm	0.01 %	0.01 %	0.41 %
3.0 mm	0.00 %	0.00 %	0.10 %
5.0 mm	0.00 %	0.00 %	0.11 %
Moyenne	0.01 %	0.01 %	0.47 %

Angle	Rotation selon x_3
1°	1.03 %
3°	0.75 %
5°	0.72 %
Moyenne	0.83 %

Interprétation du mouvement dominant d'une séquence d'images

Objectif

Étude du mouvement de la caméra contenu dans des séquences d'images

Étude des mouvements de caméra

- Recherche des mouvements de caméra pour des focales moyennes ou longues
- 4 mouvements possibles : travelling horizontal, travelling vertical, rotation, zoom
- Relation entre ces mouvements et les coefficients de projection :

$$\text{Travelling horizontal} = tr_{x_1} = \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^1$$

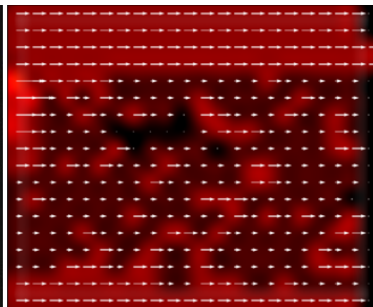
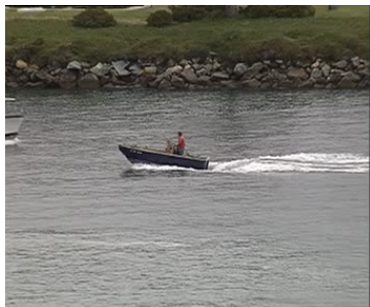
$$\text{Travelling vertical} = tr_{x_2} = \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^2$$

$$\text{Rotation} = \frac{rot_{x_1} - rot_{x_2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\tilde{v}_{0,1}^1 + \tilde{v}_{1,0}^2)$$

$$\text{Zoom} = \frac{div_{x_1} + div_{x_2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\tilde{v}_{1,0}^1 + \tilde{v}_{0,1}^2)$$

Étude de la séquence « coastgard »

- Séquence composée de 300 images de taille 352×288 représentant :
 - un mouvement de translation vers la gauche
 - un mouvement de translation vers le haut
 - un mouvement de translation vers la droite
- Extraction des champs de déplacement depuis le flux MPEG
- Taille des champs de déplacement : 22×18 vecteurs
- Champs bruités

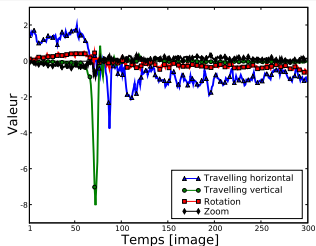


Étude du mouvement dominant

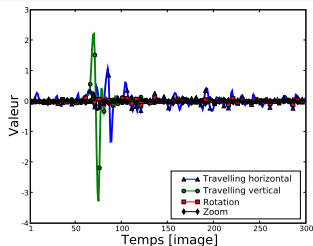
- Projection sur une base de degré 1
- Temps de calcul : 60 ms (5000 champs/s)
- Étude énergétique des quatres mouvements de caméra :

Mouvement	Travelling horizontal	Travelling vertical	Rotation	Zoom
Énergie	56.94 %	37.45 %	3.92 %	1.69 %

- Étude temporelle de l'énergie de chaque mouvement



Quantité de mouvement



Accélération

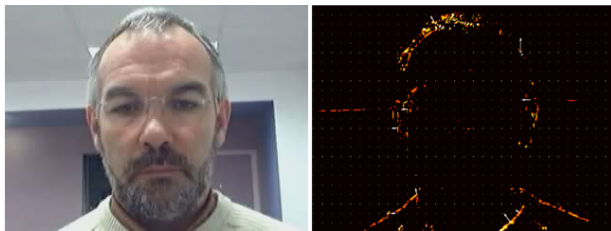
- Interprétation simple et rapide du mouvement dominant de la séquence

Interprétation du comportement d'un utilisateur (projet SERIBEL)

Objectif

Étude du comportement d'un utilisateur effectuant une recherche bibliographique sur ordinateur dans le but de faire de l'annotation automatique

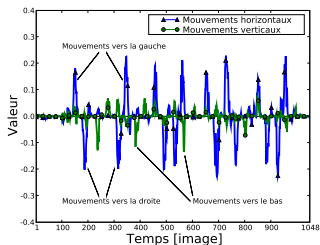
- Acquisition via une webcam
- Séquence composée de 1048 images de taille 320×240 pixels
- Extraction des champs de déplacement par une méthode de flot optique
- 320×240 vecteurs par champ
- Mouvements de tête vers la gauche, vers la droite et vers le bas, de façon aléatoire



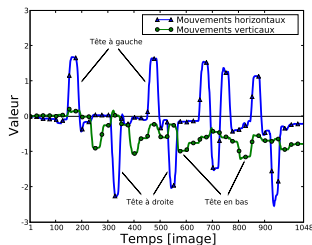
Étude des mouvements de tête

- Projection sur une base de degré 1
- Temps de calcul : 49 secondes (21 champs/s)
- Étude énergétique des mouvements de tête :

Mouvement	Mouvement horizontal	Mouvement vertical	Rotation	Zoom
Énergie	88.78 %	7.66 %	2.14 %	1.43 %



Quantité de mouvement



Position de la tête

- Annotation automatique des mouvements de tête de l'utilisateur

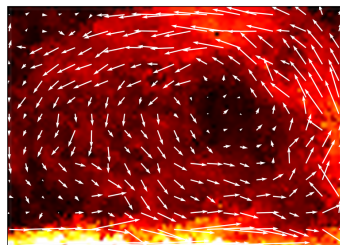
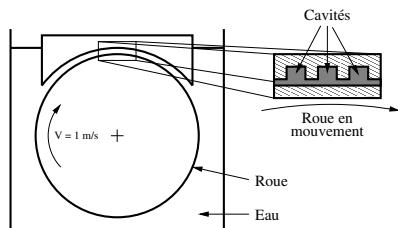
- 1 Modélisation du mouvement par bases de polynômes
- 2 Évaluation de la qualité du modèle
- 3 Application à l'étude d'écoulements fluides
 - Étude de la séquence « cavité »
 - Étude de la séquence « cylindre-carré »
 - Modélisation spatio-temporelle de la séquence « cylindre-carré »
 - Influence de l'échantillonnage temporel

Étude de la séquence « cavité »

Objectif

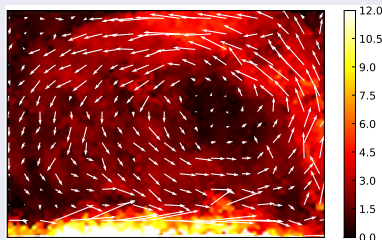
Étude d'un écoulement de Couette au sein d'une cavité rigide

- Écoulement de l'eau dans des rainures fixes par la rotation d'une roue
- Vitesse dans l'entrefer : $V = 1 \text{ m/s}$
- Écoulement dans un régime stable ($Re = 1000$)
- Calcul des champs de déplacement par une méthode d'inter-corrélation
- Séquence composée de 50 champs de taille 102×73 vecteurs

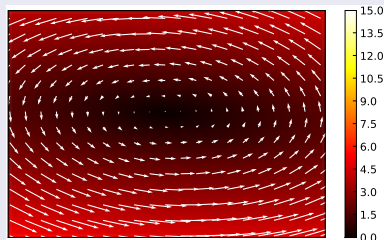


Modélisation simplifiée de l'écoulement

- Projection de la séquence sur une base de degré 1 :



Champ original n°24
14 892 réels



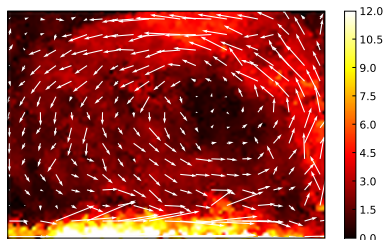
Champ reconstruit
 $D = 1$ 6 réels

- Expression analytique du champ n°24 :
$$\begin{cases} \tilde{v}^1 &= 0.41 - 0.25 x_1 - 4.28 x_2 \\ \tilde{v}^2 &= -0.01 + 1.74 x_1 + 0.20 x_2 \end{cases}$$
- Étude par portraits de phase : mouvement circulaire

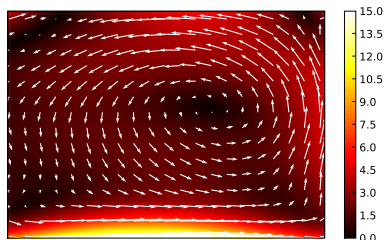
- Extraction simple et rapide du mouvement dominant d'un champ de déplacement

Modélisation simplifiée de l'écoulement

- Projection de la séquence sur une base de degré 5



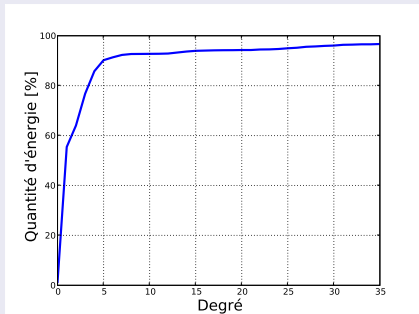
Champ original n°24
14 892 réels



Champ reconstruit
 $D = 5$ 42 réels $\tau = 99.72 \%$

- Bonne localisation du tourbillon principal
- Temps de traitement de la séquence : 110 ms (455 champs/s)

Qualité de la modélisation en fonction du degré de la base



Degré 5 : 92 % de l'énergie

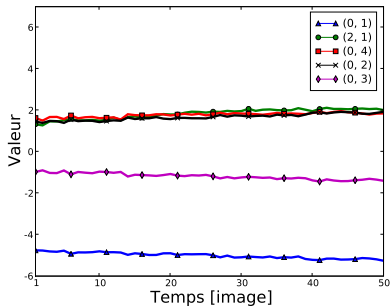
Composante \tilde{v}^1		
Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
$\tilde{v}_{0,1}^1$	58.57%	58.57%
$\tilde{v}_{2,1}^1$	07.95%	66.52%
$\tilde{v}_{0,4}^1$	07.42%	73.94%
$\tilde{v}_{0,2}^1$	06.58%	80.52%
$\tilde{v}_{0,3}^1$	03.33%	83.85%

Composante \tilde{v}^2		
Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
$\tilde{v}_{1,0}^2$	51.18%	51.18%
$\tilde{v}_{2,0}^2$	14.76%	65.94%
$\tilde{v}_{1,2}^2$	13.68%	79.63%
$\tilde{v}_{2,2}^2$	04.26%	83.89%
$\tilde{v}_{1,1}^2$	02.12%	86.01%

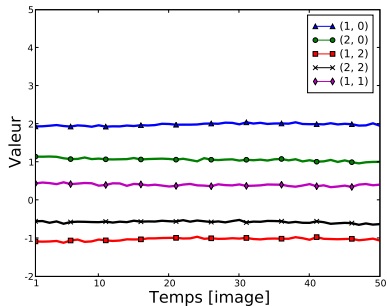
- Bonne modélisation de l'écoulement avec une base de degré 5
- Mouvement de rotation caractérisé par les coefficients $\tilde{v}_{0,1}^1$ et $\tilde{v}_{1,0}^2$

Évolution temporelle des coefficients les plus énergétiques

- Projection de tous les champs de la séquence sur une base de degré 7
- Étude de l'évolution temporelle des 5 coefficients de projection les plus énergétiques, pour chaque composante



Composante \tilde{v}^1



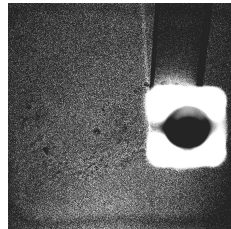
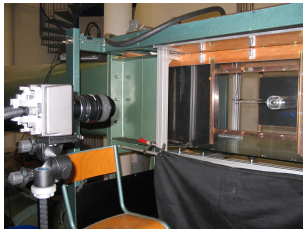
Composante \tilde{v}^2

- Pas de changement de la topologie de l'écoulement : écoulement stationnaire

Étude de la séquence « cylindre-carré »

Acquisition par imagerie de particules

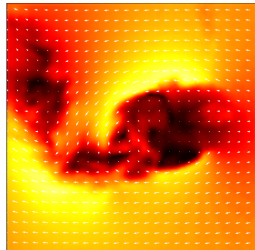
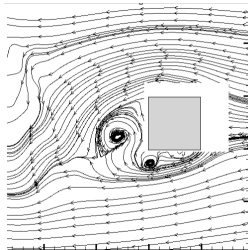
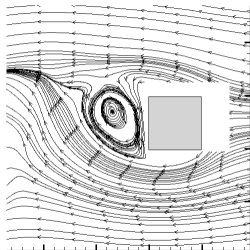
- Acquisition effectuée sur la soufflerie Sessiat du L.E.A.
- Mise en place d'un mobile dans la veine d'essai
- Injection de micro-particules (diamètre moyen : $1 \mu m$)
- Éclairement des particules grâce à un laser pulsé
- Acquisition via une caméra rapide haute résolution à 2000 images/s



Objectif

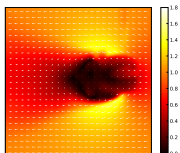
Étude de l'évolution de lâchers tourbillonnaires alternés dans le sillage d'un cylindre carré

- Vitesse de l'air : $V = 2.37 \text{ m/s}$
- Écoulement dans un régime turbulent fortement instationnaire ($Re = 4900$)
- Champs de déplacement calculés par une méthode d'inter-corrélation
- Séquence composée de 976 champs de taille 124×124 vecteurs
- Étude de 10 périodes d'échappements tourbillonnaires

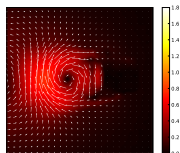


Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

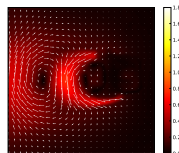
- Méthode optimale au sens de l'énergie :
 - 97 % de l'information contenue dans les 3 premiers modes
 - 99 % de l'information contenue dans les 19 premiers modes
- Périodicité du mouvement portée par les coefficients temporels
- Mais interprétation difficile des modes



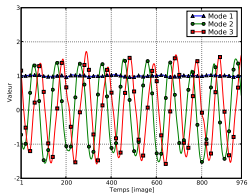
Mode 1



Mode 2



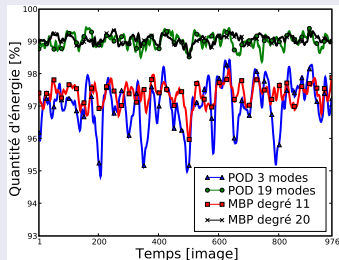
Mode 3



Coefficients temporels

Comparaison décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) - modélisation par bases de polynômes (MBP)

- Quantité d'énergie modélisée :



Modèle	Moyenne	Écart-type
POD 3 modes	97.04 %	0.73 %
MBP degré 11	97.37 %	0.32 %
POD 19 modes	99.02 %	0.20 %
MBP degré 20	99.06 %	0.13 %

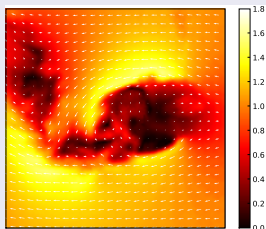
- Taux de compression :

Énergie	POD	MBP
97 % d'énergie	99.37 %	98.99 %
99 % d'énergie	95.98 %	97.00 %

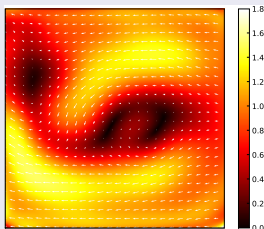
- Qualité de modélisation sensiblement identique
- Modélisation plus régulière qu'en utilisant une POD
- Taux de compression proches

Comparaison décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) - modélisation par bases de polynômes (MBP)

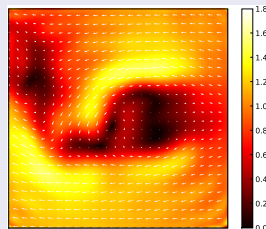
- Exemple de champs reconstruits avec une modélisation par bases de polynômes :



Champ original
30 752 réels



Champ reconstruit
 $D = 11$ 156 réels



Champ reconstruit
 $D = 20$ 462 réels

- Projection des 976 champs sur une base de degré 20 en 18.45 s (52 champs/s)

Énergie des coefficients de projection

- Énergie des 5 coefficients de projection les plus énergétiques, pour chaque composante, avec projection sur une base de degré 20 :

Composante \tilde{v}^1		
Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
$\tilde{v}_{0,0}^1$	80.95 %	80.95 %
$\tilde{v}_{0,2}^1$	05.59 %	86.54 %
$\tilde{v}_{0,4}^1$	02.95 %	89.49 %
$\tilde{v}_{0,6}^1$	00.91 %	90.41 %
$\tilde{v}_{2,4}^1$	00.73 %	91.13 %
⋮	⋮	⋮

Composante \tilde{v}^2		
Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
$\tilde{v}_{1,0}^2$	13.09 %	13.09 %
$\tilde{v}_{2,0}^2$	11.97 %	25.06 %
$\tilde{v}_{0,0}^2$	07.50 %	32.56 %
$\tilde{v}_{3,0}^2$	05.96 %	38.52 %
$\tilde{v}_{1,1}^2$	05.03 %	43.55 %
⋮	⋮	⋮

- Mouvement dominant : translation horizontale correspondant à l'écoulement en amont du cylindre-carré
- Mouvements verticaux : déplacements complexes et de faibles amplitudes

Énergie des coefficients de projection

- Énergie des 5 coefficients de projection les plus énergétiques, pour chaque composante, avec projection sur une base de degré 20 :

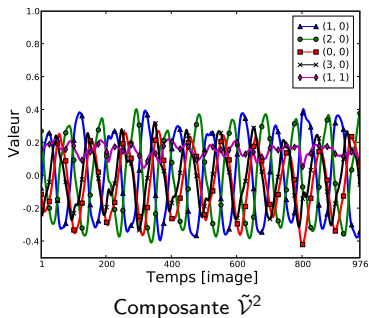
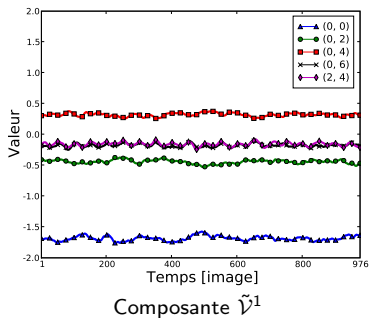
Composante \tilde{v}^1		
Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
$\tilde{v}_{0,0}^1$	80.95 %	80.95 %
$\tilde{v}_{0,2}^1$	05.59 %	86.54 %
$\tilde{v}_{0,4}^1$	02.95 %	89.49 %
$\tilde{v}_{0,6}^1$	00.91 %	90.41 %
$\tilde{v}_{2,4}^1$	00.73 %	91.13 %
⋮	⋮	⋮

Composante \tilde{v}^2		
Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
$\tilde{v}_{1,0}^2$	13.09 %	13.09 %
$\tilde{v}_{2,0}^2$	11.97 %	25.06 %
$\tilde{v}_{0,0}^2$	07.50 %	32.56 %
$\tilde{v}_{3,0}^2$	05.96 %	38.52 %
$\tilde{v}_{1,1}^2$	05.03 %	43.55 %
⋮	⋮	⋮

- Mouvement dominant : translation horizontale correspondant à l'écoulement en amont du cylindre-carré
- Mouvements verticaux : déplacements complexes et de faibles amplitudes

Évolution temporelle des coefficients les plus énergétiques

- Projection de tous les champs de la séquence sur une base de degré 20
- Étude de l'évolution temporelle des 5 coefficients de projection les plus énergétiques, pour chaque composante



- Présence d'un mouvement constant de translation horizontale
- Oscillations des coefficients de la composante \tilde{v}^2 représentant les lâchers tourbillonnaires

Bilan de la modélisation spatiale

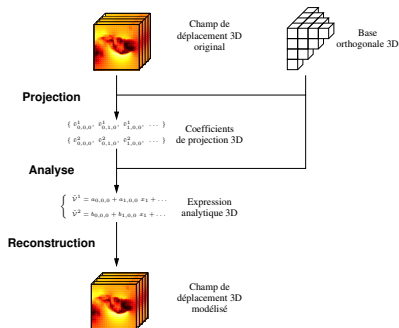
- Modélisation simplifiée des écoulements en utilisant une base de degré faible
- Grande quantité d'énergie modélisée en utilisant une base de degré plus important
- Temps de calcul réduits
- Taux de compression importants
- Extraction d'informations à partir des coefficients de projection
- Extraction d'informations en étudiant l'évolution des coefficients dans le temps

Modélisation spatio-temporelle de la séquence « cylindre-carré »

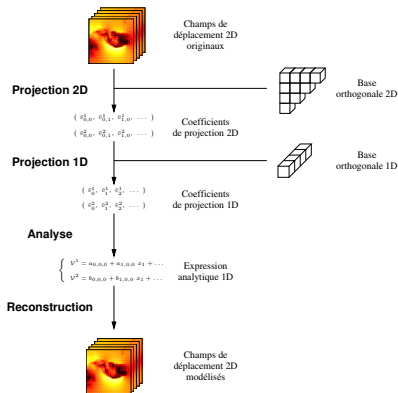
Objectif

Étendre la modélisation spatiale en une modélisation spatio-temporelle

Modèle 3D

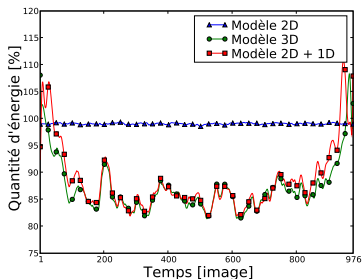


Modèle 2D+1D



Qualité des deux modèles

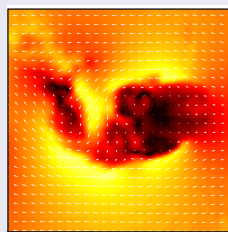
- Modèle 3D :
 - Projection de la séquence sur une base 3D de degré 20
- Modèle 2D+1D :
 - Projection de la séquence sur une base 2D de degré 20
 - Projection des coefficients sur une base 1D de degré 20
- Étude de la quantité d'énergie modélisée



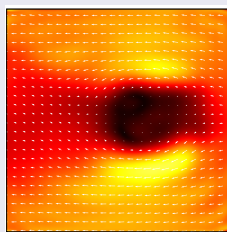
Modélisation	Modèle	Moyenne	Écart-type
spatiale	2D	99.06 %	0.13 %
spatio-temporelle	3D	87.10 %	4.73 %
	2D+1D	88.34 %	5.85 %

- Erreur de modélisation importante avec les deux nouveaux modèles

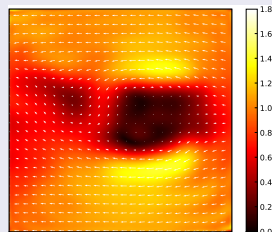
Qualité des modèles 3D et 2D+1D



Champ original



Modèle 3D
9 heures de calcul

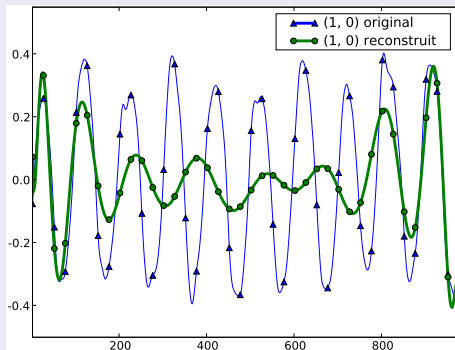


Modèle 2D+1D
22 secondes de calcul

- Lissage important des champs de déplacement : augmenter le degré de la base temporelle ?
- Temps de calcul trop important avec la méthode 3D

Modèle 2D+1D

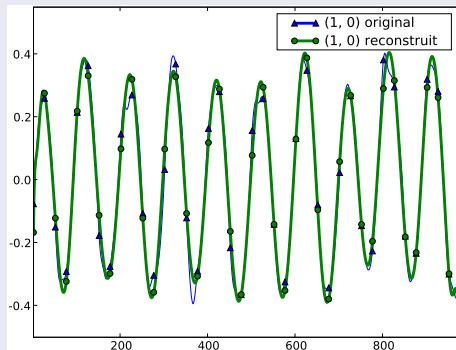
- Projection de la séquence sur une base 2D de degré 20
- Projection des coefficients projection sur une base de degré 20
- Évolution temporelle du coefficient le plus énergétique $\tilde{v}_{1,0}^2$:



- Mauvaise modélisation temporelle des coefficients de projection
- Temps de calcul faibles (22 secondes)

Modèle 2D+1D

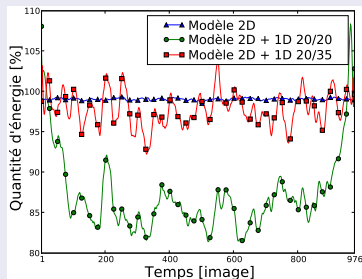
- Projection de la séquence sur une base 2D de degré 20
- Projection des coefficients projection sur une base de **degré 35**
- Évolution temporelle du coefficient le plus énergétique $\tilde{v}_{1,0}^2$:



- Bonne modélisation temporelle des coefficients de projection
- Temps de calcul toujours faibles (22 secondes)

Modèle 2D+1D : qualité du modèle

- Qualité des modèles 2D, 2D+1D 20/20 et 2D+1D 20/35 :

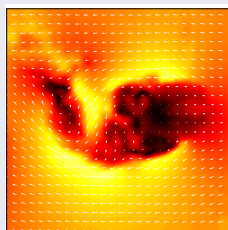


Modélisation	Modèle	Moyenne	Écart-type
spatiale	2D	99.06 %	0.13 %
spatio-temporelle	2D+1D 20/20	88.34 %	5.85 %
	2D+1D 20/35	97.83 %	2.07 %

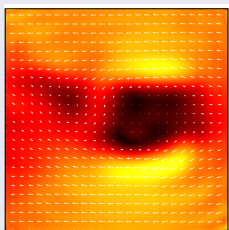
- Bonne qualité de modélisation du modèle 2D+1D en utilisant une base 1D de degré 35
- Temps de calcul quasi-identique au modèle 2D

Qualité du modèle 2D+1D

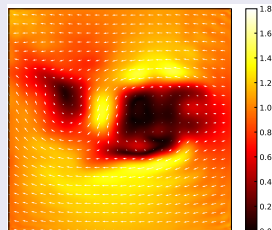
- Exemple de champs reconstruits :



Champ original



Modèle 2D+1D
20/20



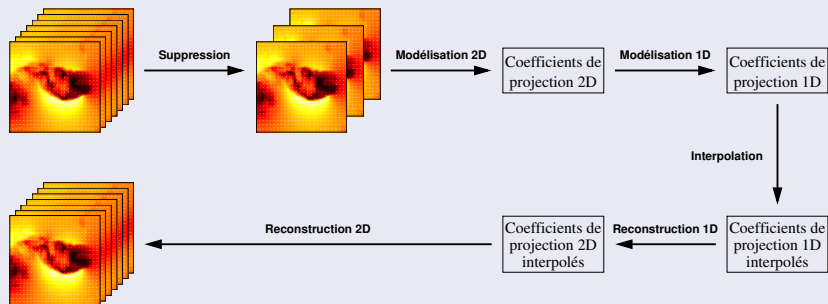
Modèle 2D+1D
20/35

Influence de l'échantillonnage temporel

Objectif

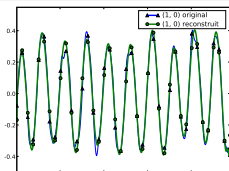
Étudier l'influence du nombre de champs de déplacement utilisés lors de la modélisation temporelle en utilisant l'approche 2D+1D

Principe

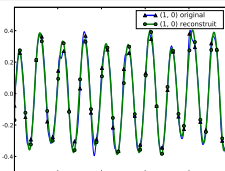


Résultats

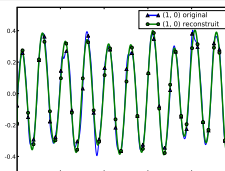
- Projection des champs sur une base 2D de degré 20
- Projection des coefficients de projection obtenus sur une base 1D de degré 35
- Comparaison de l'évolution du coefficient le plus énergétique obtenu avec un modèle 2D et un modèle 2D+1D



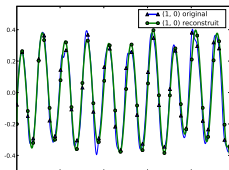
Tous les champs



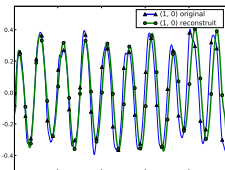
1 champ sur 2



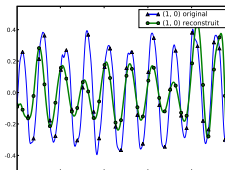
1 champ sur 5



1 champ sur 10



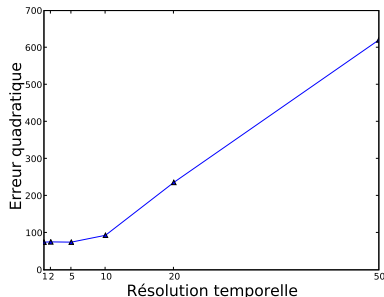
1 champ sur 20



1 champ sur 50

Résultats

- Calcul de l'erreur quadratique entre chaque coefficient issu d'un modèle 2D et son équivalent obtenu par un modèle 2D+1D, pour chaque composante
- Représentation de l'évolution de la somme des erreurs quadratiques, pour tous les coefficients de projection, en fonction du nombre de champs supprimés



- L'erreur de modélisation reste faible même si l'on ne conserve qu'un champ sur dix

Principe de la méthode

Modélisation du mouvement par projection de champs de déplacement sur des bases composées de polynômes orthogonaux

Conclusion

- Expression polynomiale du mouvement
- Interprétation directe des premiers coefficients de projection
- Quantité d'énergie modélisée importante
- Complexité et occupation mémoire réduites
- Taux de compression importants
- Modélisation multidimensionnelle multicomposante
- Robuste aux bruits gaussien et impulsionnel
- Validation sur des séquences synthétiques et expérimentales
- Application à l'étude d'écoulements fluides

Perspectives

- Calcul analytique de certaines grandeurs physiques (accélération, pression...)
- Intégration du modèle dans des systèmes dynamiques (identification, projection de Galerkin...)
- Modélisation d'écoulements 3D ou 4D
- Influence du sous-échantillonnage spatial des données sur la qualité de la modélisation
- Intégration du modèle dans un processus multirésolution
- Intégration du modèle dans des méthodes d'estimation du mouvement

