



HAL
open science

Optimisation de forme d'antennes lentilles intégrées aux ondes millimétriques

Frédérique Le Louër

► **To cite this version:**

Frédérique Le Louër. Optimisation de forme d'antennes lentilles intégrées aux ondes millimétriques. Mathématiques [math]. Université Européenne de Bretagne, 2009. Français. NNT : . tel-00421863

HAL Id: tel-00421863

<https://theses.hal.science/tel-00421863>

Submitted on 4 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ORDRE: 3930
de la thèse

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

Frédérique LE LOUËR

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MENTION MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Institut de Recherche Mathématiques de Rennes

École Doctorale MATISSE

UFR Mathématiques

Titre de la thèse:

Optimisation de Forme d'Antennes Lentilles Intégrées aux Ondes Millimétriques

SOUTENUE LE 25 SEPTEMBRE 2009 devant la commission d'examen:

X. Antoine	Professeur à l'Université de Nancy 1	Rapporteur
M. Costabel	Professeur à l'Université de Rennes 1	Directeur
J.-C. Nédélec	Professeur émérite à l'Université de Rennes 1	Examinateur
M. Pierre	Professeur à l'Antenne de Bretagne de l'ÉNS Cachan	Examinateur
R. Sauleau	Maître de Conférence à l'IETR	Examinateur
O. Steinbach	Professeur à l'Université Technique de Graz	Rapporteur
E. Stephan	Professeur à l'Université Leibniz de Hanovre	Examinateur

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Martin Costabel pour m'avoir fait confiance et m'avoir donné la chance de travailler sous sa direction sur des sujets passionnants. Je le remercie pour tout ce qu'il m'a appris durant ces trois dernières années, sa disponibilité, ses encouragements et ses nombreux conseils, en toutes circonstances.

Je remercie Roland Potthast pour toutes les discussions que nous avons eues lors de ses nombreuses visites à Rennes.

Je remercie chaleureusement Xavier Antoine et Olaf Steinbach d'avoir accepté de rapporter mon travail. Je remercie également Michel Pierre, Jean-Claude Nédélec et Ronan Sauleau de me faire l'honneur d'être membres de mon jury.

Ces trois dernières années j'ai profité des conditions de travail excellentes et de l'ambiance très sympathique de l'IRMAR et plus précisément de l'équipe d'analyse numérique. Je remercie Monique et Eric pour leurs intérêts envers mon travail et leurs encouragements incessants.

Quelques pensées pour tous ceux dont j'ai croisé la route durant ces années et en particulier pour les quelques doctorants avec qui j'ai sympathisé : Maher, Victor, Thomas, Adrien, Ludovic, Dorian...

Je remercie affectueusement ma famille. En particulier ma mère, ma soeur, qui m'ont constamment soutenue.

Enfin, mes derniers remerciements, sans doute les plus profonds, sont pour Christian.

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	1
Notations	9
I Équations intégrales de frontière	11
1 Diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique	13
1.1 Introduction	13
1.2 Traces et espaces de Sobolev	15
1.2.1 Notations et définitions	16
1.2.2 Un peu de géométrie différentielle	18
1.2.3 Les espaces $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$	20
1.2.4 Décomposition de Helmholtz	22
1.3 Conditions de transmission	23
1.4 Condition de rayonnement et théorème de Rellich	23
1.5 Formule de Stratton-Chu et champ lointain	24
1.6 Existence et unicité de la solution	26
2 Théorie du potentiel	29
2.1 Introduction	29
2.2 Opérateurs intégraux de noyaux pseudo-homogènes	29
2.3 Opérateurs de potentiels électromagnétiques	31
2.3.1 Définitions et premières propriétés	31
2.3.2 Relations de sauts	33
2.3.3 Les opérateurs intégraux de frontière	35
3 Représentation intégrale de la solution	41
3.1 Introduction	41
3.2 Équations intégrales de frontière : méthodes de Kleinman-Martin	42
3.2.1 Ansatz sur le champ extérieur	42
3.2.2 Ansatz sur le champ intérieur	50

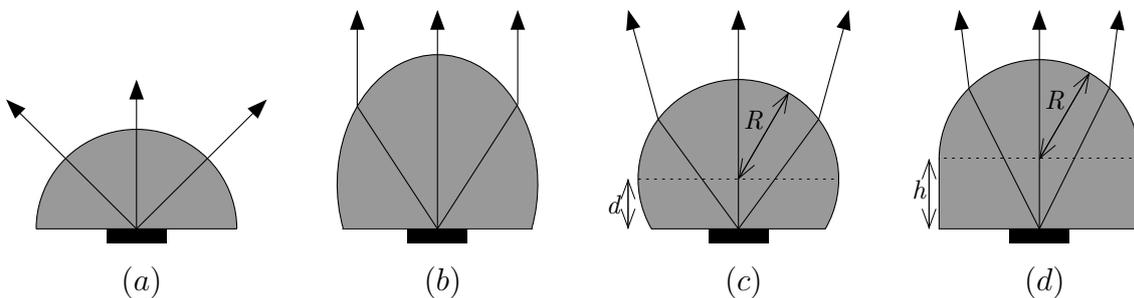
3.3	Équations intégrales sans fréquences irrégulières	53
4	Simulations numériques	57
4.1	Introduction	57
4.2	Schéma numérique	58
4.2.1	Quelques formules	60
4.3	Cas de la sphère diélectrique	61
4.3.1	Solution exacte du problème de diffraction diélectrique	61
4.3.2	Convergence de la méthode	64
4.3.3	À propos des fréquences irrégulières	66
4.4	Cas du cube diélectrique	68
4.4.1	Convergence de la méthode	68
4.4.2	À propos des fréquences irrégulières	70
II	Optimisation de forme	75
5	Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction	77
5.1	Introduction	77
5.1.1	Difficultés	80
5.1.2	Alternative : utilisation de la décomposition de Helmholtz	82
5.2	Différentiabilité dans les espaces de Fréchet	86
5.2.1	Définitions et propriétés	86
5.2.2	Quelques dérivées de forme classiques	88
5.3	Dérivées de forme d'un opérateur intégral de noyau pseudo-homogène	90
5.4	Dérivées de forme des opérateurs différentiels surfaciques	97
5.5	Dérivabilité par rapport au domaine de la solution	101
5.5.1	Caractérisation de la dérivée première	105
5.6	Dérivées de forme du champ lointain	109
6	Le problème d'optimisation de forme	113
6.1	Introduction	113
6.2	Algorithmes d'optimisation de forme	115
6.2.1	Une méthode de gradient	115
6.2.2	Autre méthode de descente	118
7	Simulations numériques	121
7.1	Introduction	121
7.2	Schéma numérique	121
7.2.1	Dérivées de forme des opérateurs intégraux surfaciques	122
7.2.2	Composante tangentielle des dérivées normales des opérateurs de potentiels	123
7.3	Résultats numériques	124
7.3.1	Sur le calcul des dérivées de forme du champ lointain	124

7.3.2	Sur la méthode de gradient	125
7.3.3	Sur l'autre méthode de descente	135
Conclusion et perspectives		141
A	Théorie de Mie pour les équations de Maxwell	143
A.1	Solutions harmoniques des équations de Helmholtz	144
A.2	Solutions harmoniques des équations de Maxwell	145
A.3	Développement en série Mie des opérateurs intégraux surfaciques . . .	147
Bibliographie		149

Introduction

Les antennes lentilles intégrées

Les antennes lentilles sont des dispositifs ayant pour support les ondes électromagnétiques et dont le fonctionnement peut être assimilé à celui des systèmes de focalisation en optique, c'est pourquoi le nom de « lentille » a été choisi. La structure de ces antennes est toujours composée d'une source primaire et d'au moins une lentille diélectrique. Le rôle de la lentille est d'augmenter la directivité de la source ou de modifier la forme de son rayonnement pour obtenir un profil de rayonnement souhaité. La dénomination « antenne lentille » est utilisée généralement dans le cas où la lentille est séparée de la source primaire. Le terme « lentille intégrée » désigne les antennes dont la lentille est en contact direct avec la source. On distingue deux types de lentilles : les lentilles homogènes et les lentilles inhomogènes. Les lentilles homogènes sont constituées de matériaux non conducteurs qui ne sont pas magnétiquement actifs, leur caractère diélectrique étant donc décrit par une permittivité électrique différente de celle de l'espace ambiant. Les lentilles inhomogènes s'appuient sur une loi de variation de l'indice de réfraction (par des inclusions diélectriques ou métalliques dans une lentille homogène) pour focaliser le rayonnement.



*Configurations usuelles d'antennes lentilles d'indice n_r [18].
(a) hémisphère ; (b) ellipse ; (c) hyperhémisphère ; (d) hémisphère étendu.*

Parmi les configurations usuelles des lentilles on distingue :

(a) la lentille hémisphérique : les rayons arrivent en incidence normale à la surface sphérique de la lentille ;

(b) la lentille elliptique : la source primaire est située au second foyer de l'ellipse. Pour que les rayons incidents forment un faisceau de rayons parallèles en sortie il est préférable d'utiliser ce type de lentille.

(c) la lentille hyperhémisphérique : il s'agit d'une sphère de rayon R coupée selon un plan situé à une distance $d = \frac{R}{n_r}$ de son centre ;

(d) la lentille hémisphérique étendue : elle est constituée d'une demi-boule diélectrique de rayon R et d'indice n_r associée à une partie cylindrique de même indice et de hauteur h . Lorsque $h = \frac{R}{n_r}$ elle se comporte comme la lentille hyperhémisphérique.

Avec ce type de lentille la forme du diagramme en rayonnement se rapproche d'une gaussienne. La gaussicité des diagrammes obtenus peut atteindre les 90%.

Synthèse de forme d'antennes lentilles

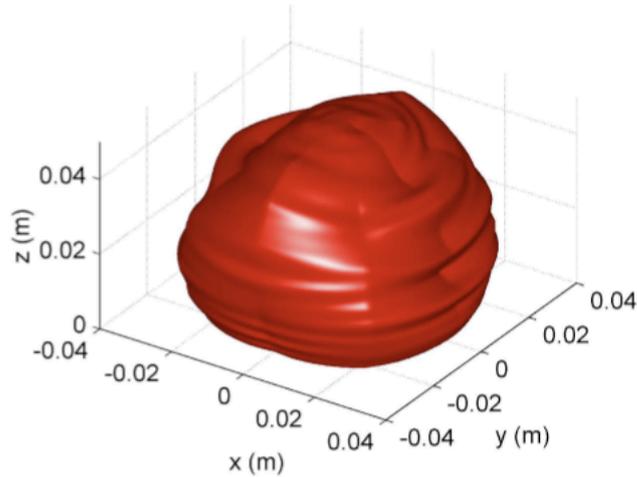
La montée en importance récente d'applications en ondes millimétriques telles que les systèmes de communication de proximité, les communications multimedia par satellites ou la sécurité automobile (radars d'assistance ou d'aide à la conduite) nécessite la construction d'antennes lentilles de quelques centimètres seulement (de une à dix longueurs d'ondes). Celles-ci doivent répondre à des cahiers des charges spécifiques qui dépendent des applications visées. L'une des problématiques à résoudre consiste à déterminer la forme optimale de la lentille 3D étant données :

- (i) les caractéristiques de la source primaire,
- (ii) les caractéristiques en rayonnement fixées.

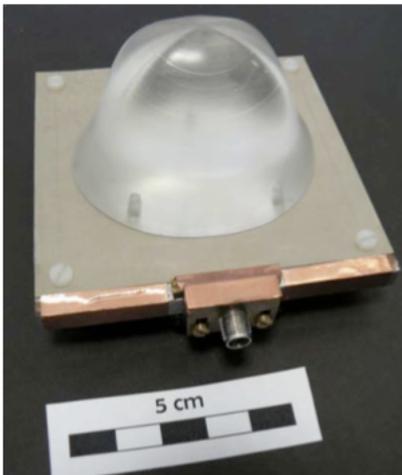
Les lentilles présentées ci-dessus ont des formes simples mais certaines applications nécessitent des diagrammes de rayonnement que ces lentilles ne peuvent pas satisfaire. Des exemples typiques de diagrammes de rayonnement désirés sont des diagrammes *gaussiens asymétriques* ou des diagrammes *sectoriels*.

Depuis quelques années des travaux de recherche sont menés au sein de l'équipe Antennes et Hyperfréquences de l'Institut d'Électronique et des Télécommunications de Rennes (IETR) afin de mettre au point des méthodes de synthèse de forme efficaces appliquées à la conception d'antennes lentilles. Les méthodes actuelles d'optimisation reposent sur une formulation asymptotique du problème (passage à la limite zéro pour la longueur d'onde) couplée à des algorithmes d'optimisation de forme locale ou globale :

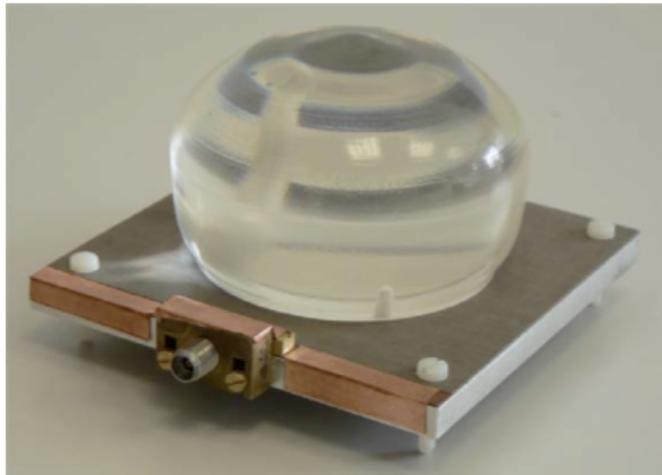
- (i) formulation par optique géométrique et optimisation par gradient conjugué, thèse de B. Barès [10], à l'IETR.
- (ii) formulation par optique géométrique et optique physique et optimisation par algorithme génétique, thèse de G. Godi [18] à l'IETR.



Exemple de lentille synthétisée par gradient conjugué en vue de l'obtention d'un diagramme gaussien [10].



(a)



(b)

Exemples de lentilles synthétisées par algorithme génétique [18].

(a) diagramme gaussien, (b) diagramme sectoriel.

Cependant, dans les situations réalistes, on est loin des fréquences infinies. Quelques travaux récents mentionnent aussi l'utilisation d'une formulation intégrale du problè-

me mais uniquement pour des antennes lentilles 2-D.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet de collaboration entre l'équipe d'Analyse Numérique de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR) et l'équipe Antennes et Hyperfréquence de l'IETR et vise, d'une part, à construire des modèles mathématiques et numériques plus précis et efficaces en utilisant une formulation intégrale du problème 3-D et, d'autre part, à développer de nouveaux outils d'optimisation de forme. Une première thèse sur la première partie de ce projet a été effectuée par E. H. Kone en utilisant des méthodes d'équations intégrales volumiques [27]. Ici nous utilisons une approche par équations intégrales surfaciques. Cette thèse se compose de deux parties. Dans la première partie nous construisons plusieurs formulations intégrales pour le problème de rayonnement de l'antenne lentille. La seconde partie est dédiée au problème d'optimisation de forme.

Modèle mathématique du problème physique

Dans cette thèse nous considérons uniquement des lentilles homogènes formées d'une seule couche diélectrique. Dans ce cas le problème de rayonnement de l'antenne lentille est décrit par les équations de Maxwell harmoniques en temps dans l'espace entier, la lentille diélectrique étant représentée par un domaine Ω de permittivité électrique différente de celle de l'espace ambiant. Il s'agit du problème de diffraction d'ondes électromagnétiques par une interface avec des conditions de transmissions naturelles sur la surface de la lentille. En pratique on ne considère pas de matériaux magnétiquement actifs (c'est-à-dire que la perméabilité magnétique est supposée constante égale à la perméabilité du vide dans l'espace entier) et on ne considère pas non plus de matériaux conducteurs. Pour se placer dans un cadre plus général nous considérons ici des constantes diélectriques quelconques. Le système de Maxwell en régime harmonique s'écrit

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega\epsilon\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}, \end{cases}$$

où les constantes positives ω , μ , ϵ et σ représentent respectivement la fréquence, la perméabilité magnétique, la permittivité électrique et la conductivité et où \mathbf{J} représente la partie rayonnante de l'antenne. À ces équations s'ajoutent des conditions sur la surface de discontinuité de ϵ et μ : les composantes tangentielles des champs électriques \mathbf{E} et magnétiques \mathbf{H} sont continues. On complète les hypothèses par la condition de rayonnement de Silver-Müller à l'infini et par la condition que la densité de courant \mathbf{J} est de divergence nulle et s'annule en dehors d'un compact disjoint de Ω . Étant donnée la densité de courant \mathbf{J} , on sait que ce problème de diffraction admet une unique solution pour toute fréquence réelle (voir [8],[31], ou le chapitre 1).

Partie I : Équations intégrales de frontière

Dans la première partie de cette thèse nous voulons déterminer la solution de ce problème de diffraction en utilisant les méthodes d'équations intégrales de frontières. Plus précisément nous voulons résoudre le problème de diffraction diélectrique en utilisant une seule équation intégrale de frontière à une inconnue. La littérature mathématique est abondante en articles sur la résolution de problèmes aux limites intérieurs ou extérieurs liés aux équations de Maxwell en utilisant une simple équation intégrale à une inconnue [7, 12, 41]; dans le cas du diélectrique un système de deux équations est généralement utilisé [8, 15, 31]. Cependant R. E. Kleinman et P. A. Martin présentent dans [26] deux méthodes pour résoudre le problème correspondant en acoustique. Ici nous appliquons et analysons ces méthodes au cas électromagnétique.

Dans le cas scalaire, l'idée consiste à considérer différentes représentations intégrales de la solution en utilisant diverses combinaisons du potentiel de simple couche et du potentiel de double couche. La première méthode consiste à représenter la solution à l'extérieur du domaine par une combinaison linéaire des opérateurs de potentiels appliqués à une même densité et en faisant intervenir des paramètres qui permettent de déplacer le spectre des fréquences parasites. En électromagnétisme, cela ne suffit pas à éviter les fréquences irrégulières. Plusieurs méthodes existent pour contourner cette difficulté. Notre approche consiste à modifier la représentation intégrale de la solution en multipliant l'un des opérateurs de potentiels électromagnétiques par un opérateur intégral surfacique elliptique et inversible introduit par O. Steinbach et M. Windish dans un autre contexte [41]. De cette façon, nous construisons deux équations intégrales de frontière alternatives. L'unicité de la solution de ces équations dépend de l'existence de valeurs propres d'un nouveau problème aux limites intérieur qui agit comme un problème d'impédance. Contrairement au cas acoustique, les deux équations intégrales ne sont pas des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce, mais les opérateurs correspondants sont de Fredholm d'indice zéro sur l'espace $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. Finalement on montre que les opérateurs définissent des isomorphismes pour toute la plage des fréquences réelles selon un choix adéquat des paramètres introduits. La seconde méthode, dans le cas scalaire, repose sur l'hypothèse que la solution peut être représentée à l'intérieur du domaine soit par un potentiel de simple couche, soit par un potentiel de double couche. Là encore on construit deux équations intégrales de frontière. Cette méthode s'applique directement au cas électromagnétique. Les équations intégrales ainsi construites sont les formes adjointes des équations intégrales obtenues avec la première méthode.

Cette analyse est présentée au chapitre 3 et utilise de nombreux résultats rassemblés aux chapitre 1 et 2 sur les équations de Maxwell harmoniques et la théorie du potentiel en électromagnétisme dans les espaces de Sobolev qui sont également énoncés et prouvés dans la liste non exhaustive d'ouvrages et d'articles [3, 4, 8, 9, 13, 16, 30, 31]. Au chapitre 4 nous présentons plusieurs expériences numériques illustrant les différentes propriétés de ces équations intégrales. Les calculs numériques ont été ef-

fectués avec la bibliothèque Inversion Studio développée par R. Potthast, Professeur à l'Université de Reading, et ses collaborateurs ; c'est une bibliothèque utilisant le langage de programmation MATLAB et dédiée à la résolution d'équations intégrales surfaciques et de problèmes inverses acoustiques et électromagnétiques.

Partie II : Optimisation de forme

Une quantité importante est le comportement asymptotique à l'infini du champ électromagnétique diffracté par la lentille,

$$\mathbf{E}^\infty(\hat{x}) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(x)}{G(\kappa, |x|)}, \quad \text{avec } G(\kappa, |x|) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{et } \hat{x} = \frac{x}{|x|}.$$

La fonction \mathbf{E}^∞ , définie sur la sphère unité S^2 , est appelée profil de rayonnement, ou aussi champ lointain. Elle décrit une modulation angulaire de l'onde sphérique uniforme $G(\kappa, |\cdot|)$ rayonnée par une source fictive située à l'origine. Ce profil de rayonnement est le seul vestige laissé à l'infini par la géométrie de l'antenne et la structure du diffracteur diélectrique. Il sert comme point de départ à toute méthode de diffraction inverse (par exemple la détection de radar) où on veut déterminer la forme du diffracteur à partir d'observations lointaines. Pour nous, le profil de rayonnement est la quantité que nous voulons optimiser en modifiant la forme de la lentille. On se donne un profil idéal \mathbf{I}^∞ et on cherche à minimiser la fonction coût quadratique

$$J(\Omega) = \int_{S^2} \omega(\hat{x}) |\mathbf{E}^\infty(\hat{x}) - \mathbf{I}^\infty(\hat{x})|^2 d\sigma(\hat{x}),$$

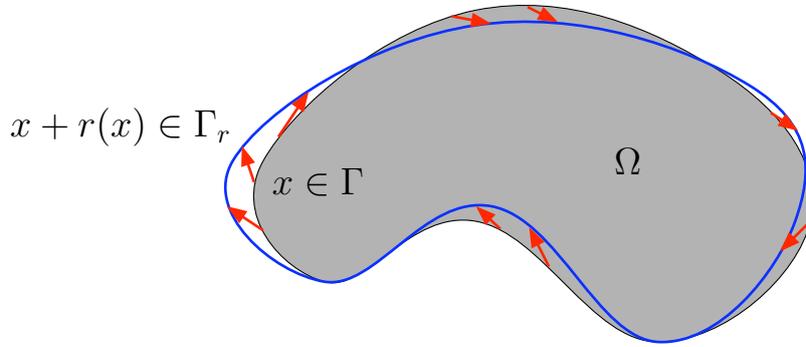
où ω est un poids. Des exemples pratiques de tels profils idéaux \mathbf{I}^∞ sont des fonctions d'amplitude constante sur un ensemble de directions qui correspond à une zone qu'on souhaite illuminer par le rayonnement de l'antenne, et zéro en dehors de cet ensemble. Les cas extrêmes qui peuvent être intéressants sont le rayonnement uniforme correspondant à une fonction \mathbf{I}^∞ d'amplitude uniforme sur toute la sphère lointaine, ou au contraire la focalisation étroite correspondant à des fonctions \mathbf{I}^∞ concentrées autour d'une seule direction.

En dimension finie, les méthodes classiques utilisées pour déterminer numériquement le minimum d'une fonction coût $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ sont la méthode de Newton qui fait intervenir la Hessienne de F et les méthodes de descentes de type gradient qui nécessitent le calcul des dérivées premières de F à chaque itération. Ces méthodes se prolongent aux fonctionnelles de forme. Par conséquent nous devons disposer d'une forme explicite des dérivées de forme de la fonctionnelle J . Cette fonction coût dépend du domaine Ω par l'intermédiaire de la solution \mathbf{E} du problème de diffraction. La seconde partie de cette thèse débute avec l'étude de la dérivabilité de la solution du problème de diffraction par rapport à l'obstacle diélectrique Ω . C'est une question assez difficile à traiter. Tout d'abord les outils standards de calcul

différentiel nécessitent au moins un cadre d'espaces vectoriels topologiques localement convexes [42], cadre dont on ne dispose pas dans le cas des fonctionnelles de forme. Une approche satisfaisante consiste à représenter les variations du domaine Ω par un espace de fonctions. On considère des variations générées par des transformations des points x de l'espace de type

$$x \mapsto x + r(x),$$

où r est une fonction vectorielle définie (au moins) au voisinage du bord Γ de Ω . Cette transformation déforme la surface Γ en la surface $\Gamma_r = (I+r)\Gamma$ d'un domaine Ω_r . Ce point de vue nous permet de définir des dérivées directionnelles. On se ramène alors à l'étude de la différentiabilité au sens de Gâteaux de l'application $r \mapsto \mathbf{E}^\infty(\Omega_r)$.



Même si aujourd'hui de nombreux travaux ont été effectués sur le calcul de variations de forme [19, 32, 33, 39, 40], dans le cadre des équations intégrales surfaciques, la littérature mathématique n'est pas très étendue. Nous nous sommes principalement inspirée des travaux que R. Potthast a réalisés pendant sa thèse [37] il y a une dizaine d'années où il a étudié les dérivées de forme des solutions de problèmes aux limites liés aux équations de Helmholtz et de Maxwell mais dans les espaces de fonctions continues [34, 36, 35]. Il s'agit d'utiliser la représentation intégrale de la solution pour se ramener à l'étude des dérivées de forme des opérateurs intégraux de frontières standard en électromagnétisme tridimensionnel. Nous sommes alors confrontés à deux autres difficultés : d'une part, pour pouvoir construire des dérivées de forme de la solution, il est nécessaire de montrer que les dérivées sont définies sur les mêmes espaces que les opérateurs intégraux surfaciques eux-mêmes, à savoir l'espace de Hilbert $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$; d'autre part, la définition de dérivabilité pour des opérateurs définis sur $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ soulève des questions non triviales : en effet, *comment dériver des applications $r \mapsto f(r)$ où $f(r)$ est défini sur l'espace variable $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$?* Pour contourner cette difficulté R. Potthast propose dans [35] une alternative pour les espaces de fonctions continues, qui ne se généralise toutefois pas à l'espace $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. Notre approche consiste à utiliser la décomposition de

Helmholtz de cet espace [16] :

$$\mathbf{H}_x^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \nabla_\Gamma H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \oplus \text{rot}_\Gamma H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

On se ramène alors à l'étude des dérivées de forme d'une classe d'opérateurs intégraux pseudo-différentiels classiques et d'un bon nombre des opérateurs différentiels surfaciques sur les espaces de Sobolev standards. Pour cette étude nous avons utilisé également quelques résultats sur la dérivabilité d'une intégrale sur le bord qui sont énoncés dans le livre de M. Pierre et A. Henrot [32]. Nous montrons alors que les dérivées de forme des opérateurs intégraux de frontières et celles des opérateurs différentiels surfaciques ne perdent pas de régularité. Nous donnons également une forme explicite de leurs dérivées de forme. Grâce aux propriétés de dérivation standard nous en déduisons une forme explicite des dérivées de forme de la solution. Nous donnons aussi une caractérisation de la première dérivée : c'est la solution d'un nouveau problème aux limites. Nous avons donc deux possibilités pour calculer les dérivées de forme de la solution et du champ lointain. Cette analyse est présentée au chapitre 5.

Une fois qu'on dispose des dérivées de forme du champ lointain, on peut construire un algorithme d'optimisation de la forme du diffracteur diélectrique en vue de l'obtention d'un profil de rayonnement souhaité. Ici nous avons mis en œuvre deux méthodes de descente pour la fonction coût J (dans les limites de la capacité de calcul du logiciel utilisé). Elles sont décrites au chapitre 6. Les résultats numériques sont présentés au chapitre 7.

Notations

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 15

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 15

$\mathbf{H}^s(\Omega)$, 16

$\mathbf{H}_{loc}^s(\Omega^c)$, 16

$\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, 17

$\mathbf{H}^s(\Gamma)$, 17

$\mathbf{H}_\times^s(\Gamma)$, 18

$\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)$, 21

$\mathbf{H}^s(\mathbf{div}, \Omega)$, 21

$\mathbf{H}_\times^s(\Gamma, \mathbf{div}_\Gamma)$, 20

$\mathbf{H}_\times^s(\Gamma, \mathbf{rot}_\Gamma)$, 20

γ_d , 17

γ_n , 17

γ_D , 17

γ_N , 17

∇_Γ , 18

\mathbf{rot}_Γ , 19

\mathbf{div}_Γ , 18

\mathbf{rot}_Γ , 19

Δ_Γ , 19

\mathbb{H}_Γ , 19

\mathcal{R}_Γ , 19

M_κ , 35

C_κ , 35

C_0 , 36

S_κ , 36

V_κ , 31

T_κ , 36

B_κ , 36

D_κ , 36

Ψ_κ , 31

Ψ_{E_κ} , 32

Ψ_{E_κ} , 32

Y_n^m , 61, 121

Première partie
Équations intégrales de frontière

Chapitre 1

Diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique

1.1 Introduction

Considérons la diffraction d'ondes électromagnétiques par un obstacle borné Ω de \mathbb{R}^3 soumis à une onde incidente connue. Les ondes électromagnétiques sont définies par le champ électrique \mathcal{E} et le champ magnétique \mathcal{H} en tout point x de l'espace \mathbb{R}^3 . En milieu diélectrique, isotrope et linéaire caractérisé par la perméabilité magnétique μ , la permittivité électrique ϵ , la conductivité σ et la densité de courant \mathcal{J} , les lois de propagations des ondes électromagnétiques sont décrites par le système de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{H} - \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathcal{E} = 0. \end{cases}$$

On suppose que les ondes électromagnétiques oscillent avec une seule fréquence ω , on peut écrire :

$$\mathcal{E}(x, t) = \Re(\mathbf{E}(x)e^{-i\omega t}), \quad \mathcal{H}(x, t) = \Re(\mathbf{H}(x)e^{-i\omega t}) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(x, t) = \Re(\mathbf{J}(x)e^{-i\omega t}).$$

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont alors solutions des équations de Maxwell harmoniques :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega\epsilon\mathbf{E} &= \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

En général, pour résoudre les équations de Maxwell harmoniques on se ramène à une équation du second ordre en éliminant l'inconnue \mathbf{H} . On a

$$(1.2) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = \mathbf{F}$$

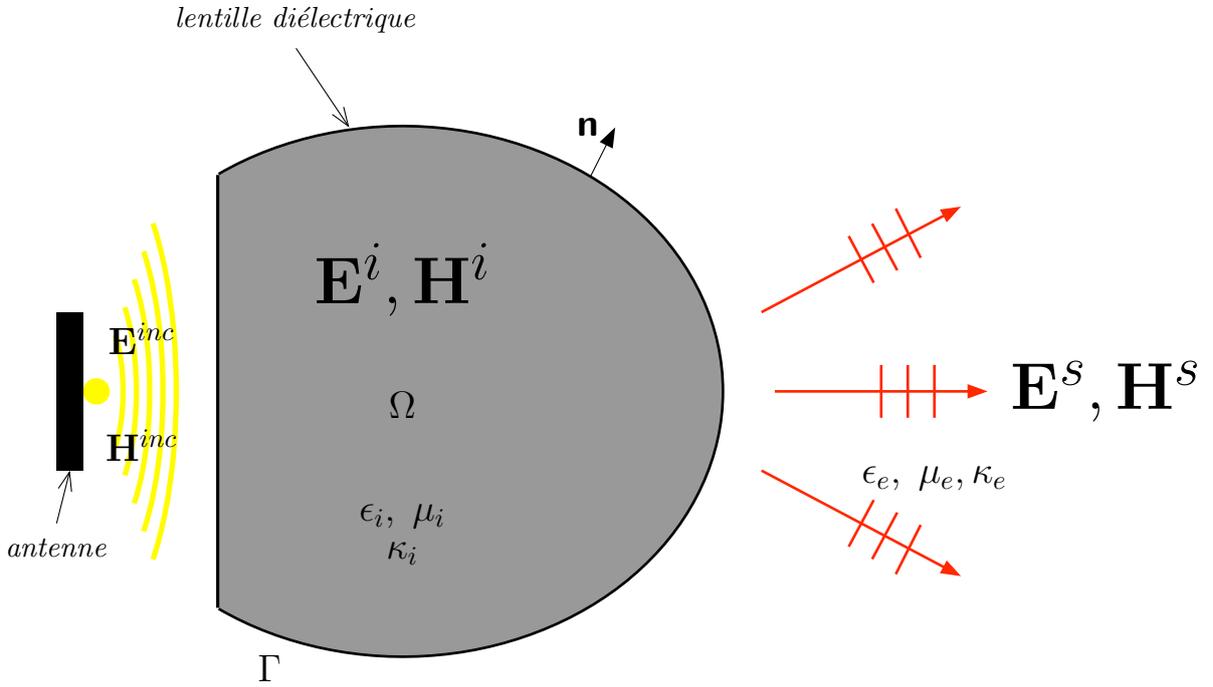
1. Diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique

où $\mathbf{F} = i\omega\mu\mathbf{J}$ et κ est le nombre d'onde défini par

$$\begin{cases} \kappa^2 = \left(\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mu\omega^2, \\ \Im(\kappa) \geq 0. \end{cases}$$

On retrouve \mathbf{H} en utilisant l'égalité $\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot } \mathbf{E}$.

Dans la suite nous utiliserons l'équation (1.2) au lieu des équations de Maxwell du premier ordre.



On note Ω^c le complémentaire $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. La permittivité électrique ϵ et la perméabilité magnétique μ sont strictement positives et constantes à l'intérieur et à l'extérieur de Ω . La conductivité σ est positive ou nulle. On pose $\epsilon_i = \epsilon|_{\Omega}$, $\mu_i = \mu|_{\Omega}$ et $\kappa_i = \kappa|_{\Omega}$, $\epsilon_e = \epsilon|_{\Omega^c}$, $\mu_e = \mu|_{\Omega^c}$ et $\kappa_e = \kappa|_{\Omega^c}$. Le champ électrique incident \mathbf{E}^{inc} et le champ magnétique incident \mathbf{H}^{inc} sont supposés satisfaire les équations de Maxwell (1.1) en l'absence du diffracteur diélectrique. Par conséquent, le champ \mathbf{E}^{inc} satisfait

$$\text{rot rot } \mathbf{E}^{inc} - \kappa_e^2 \mathbf{E}^{inc} = \mathbf{F} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

On suppose que la fonction \mathbf{F} s'annule en dehors d'un compact disjoint de Ω . Par conséquent \mathbf{E}^{inc} satisfait l'équation de Maxwell homogène

$$\text{rot rot } \mathbf{E}^{inc} - \kappa_e^2 \mathbf{E}^{inc} = 0.$$

1.2 Traces et espaces de Sobolev

dans un domaine borné de \mathbb{R}^3 incluant $\bar{\Omega}$.

On pose $\mathbf{E}^i = \mathbf{E}|_{\Omega}$ et $\mathbf{E}^{tot} = \mathbf{E}|_{\Omega^c}$. Le champ total à l'extérieur \mathbf{E}^{tot} se décompose en la somme du champ incident \mathbf{E}^{inc} et du champ diffracté \mathbf{E}^s . Finalement, on a :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^i - \kappa_i^2 \mathbf{E}^i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^s - \kappa_e^2 \mathbf{E}^s = 0 & \text{dans } \Omega^c. \end{cases}$$

On note également \mathbf{H}^i le champ magnétique induit à l'intérieur de Ω et \mathbf{H}^{tot} le champ magnétique total à l'extérieur.

Dans la section 1.2 nous introduisons les espaces de solutions appropriés et rappelons les propriétés des traces correspondantes. Afin d'obtenir une unique solution de ce problème de diffraction nous devons compléter les équations de Maxwell par des conditions de transmissions sur l'interface qui sépare les milieux diélectriques et par la condition de rayonnement de Silver-Müller à l'infini. Les conditions de transmissions garantissent la continuité de la solution à travers la surface Γ du diffracteur diélectrique. Nous les rappelons en section 1.3. La condition de Silver-Müller assure que la solution se disperse à l'infini. Elle permet notamment d'établir des critères d'unicité des solutions de problèmes aux limites extérieur. Nous en discutons en section 1.4. En section 1.5, nous rappelons la formule de Stratton Shu qui permet de donner une représentation intégrale de la solution connaissant ses traces sur la surface du diélectrique Γ . Nous introduisons également la quantité qui nous intéresse dans cette thèse à savoir le profil de rayonnement de la solution. Enfin en section 1.6 nous établissons l'existence et l'unicité de la solution.

Pour les preuves des résultats énoncés dans ce chapitre nous renvoyons le lecteur aux livres [3, 4, 8, 9, 13, 16, 30, 31].

1.2 Traces et espaces de Sobolev

Pour un entier $d \geq 1$, on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions infiniment différentiables et à décroissance rapide à l'infini et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions tempérées. Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev sur \mathbb{R}^d d'ordre s par

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}$$

où \hat{u} désigne la transformée de Fourier de u . C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Soit K un compact de \mathbb{R}^d . Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{C}^k(K)$ des fonctions k -fois continûment différentiables sur K est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(K)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)|.$$

1. Diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique

L'espace des fonctions infiniment différentiables sur K noté $\mathcal{C}^\infty(K)$ est un espace de Fréchet pour les semi-normes $p_k(u) = \|u\|_{\mathcal{C}^k(K)}$ pour $k = 0, 1, \dots$. Soit G un domaine non borné de \mathbb{R}^d qui est une réunion croissante pour l'inclusion de compact K_i où $i = 0, 1, \dots$. Alors $\mathcal{C}^\infty(G)$ est un espace de Fréchet pour les semi-normes $p_i(u) = \|u\|_{\mathcal{C}^i(K_i)}$. La topologie naturelle sur ces espaces est celle de la convergence uniforme des dérivées de tout ordre. On note enfin $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(G)$ et à support compact.

1.2.1 Notations et définitions

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , simplement connexe et de frontière Γ infiniment différentiable. Pour $s > 0$, on définit l'espace de Sobolev sur Ω d'ordre s par

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), u = v|_\Omega \text{ avec } v \in H^s(\mathbb{R}^3)\}.$$

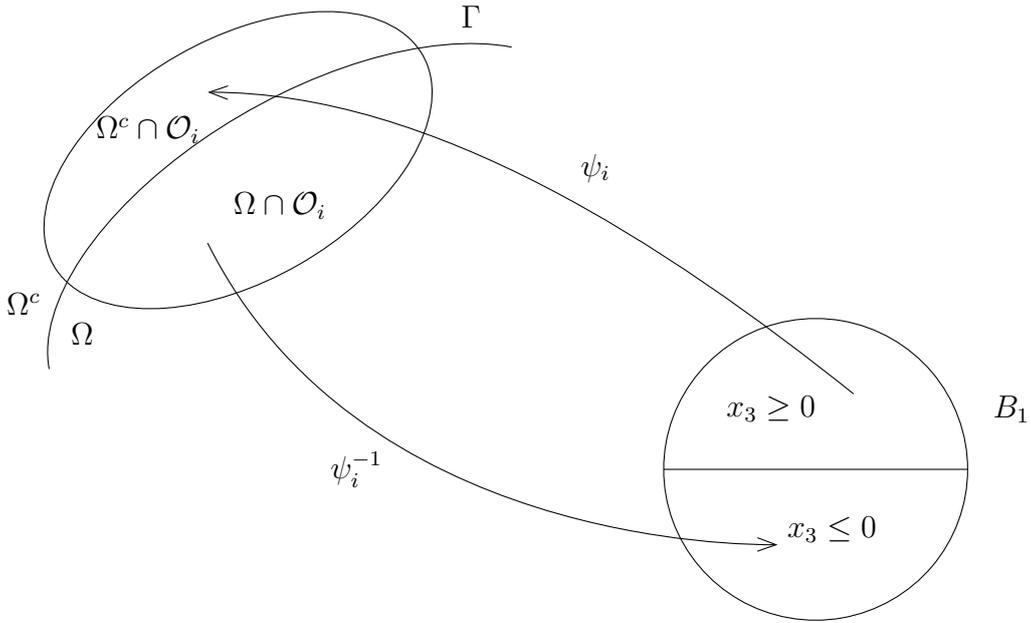
C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{v \in H^s(\mathbb{R}^d)} \{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, u = v|_\Omega\}.$$

On définit les espaces localement de Sobolev d'ordre s sur l'ensemble non borné Ω^c par

$$u \in H_{loc}^s(\Omega^c) \Leftrightarrow u \in H^s(K) \text{ pour tout compact } K \subset \overline{\Omega^c}.$$

On définit de la même façon $H_{loc}^s(\mathbb{R}^3)$. Un domaine de \mathbb{R}^3 étant une réunion dénombrable de compact $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$, les espaces localement de Sobolev sont des espaces de Fréchet pour les semi-normes $p_i(u) = \|u\|_{H^s(K_i)}$ sur chaque compacts K_i , où $i = 1, \dots$



Carte locale.

1.2 Traces et espaces de Sobolev

La surface Γ étant compacte elle admet un recouvrement ouvert fini $(\mathcal{O}_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$. Puisque la surface Γ est régulière il existe un difféomorphisme ψ_i de classe \mathcal{C}^∞ qui envoie \mathcal{O}_i sur la boule unité B_1 de \mathbb{R}^3 et tel que

$$\begin{cases} \psi_i^{-1}(\Gamma \cap \mathcal{O}_i) &= B_1 \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \\ \psi_i^{-1}(\Omega \cap \mathcal{O}_i) &= B_1 \cap \mathbb{R}^2 \times]-\infty; 0[, \\ \psi_i^{-1}(\Omega^c \cap \mathcal{O}_i) &= B_1 \cap \mathbb{R}^2 \times]0; +\infty[. \end{cases}$$

Au recouvrement ouvert de Γ on associe une partition de l'unité $(\lambda_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ telle que $\lambda_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}_i)$, $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ sur un voisinage de Γ .

Pour $k \in \mathbb{N}$ on dit qu'une fonction u définie sur Γ est dans $\mathcal{C}^k(\Gamma)$ si pour $i = 1, \dots, p$ on a $(\lambda_i u) \circ \psi_i \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^2)$ (on prolonge par zéro en dehors du plan équatorial de B_1). On définit une norme sur $\mathcal{C}^k(\Gamma)$ par :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^p \|(\lambda_i u) \circ \psi_i\|_{\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Muni de cette norme l'espace $\mathcal{C}^k(\Gamma)$ est un espace de Banach. Maintenant on pose $\mathcal{C}^\infty(\Gamma) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\Gamma)$. Muni des semi-normes $p_k(u) = \|u\|_{\mathcal{C}^k(\Gamma)}$ pour $k \geq 0$, l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ est un espace de Fréchet.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction u définie sur Γ est dans $H^s(\Gamma)$ si pour tout $i = 1, \dots, p$ on a $(\lambda_i u) \circ \psi_i \in H^s(\mathbb{R}^2)$ et on définit une norme sur $H^s(\Gamma)$ par :

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^p \|(\lambda_i u) \circ \psi_i\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2.$$

L'espace dual de $H^s(\Gamma)$ pour le produit scalaire usuel de $L^2(\Gamma)$ est $H^{-s}(\Gamma)$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{s, \Gamma}$ le produit de dualité sur ces espaces. On pose $\mathbf{H}^s(\Gamma) = (H^s(\Gamma))^3$, $\mathbf{H}^s(\Omega) = (H^s(\Omega))^3$, $\mathbf{H}_{loc}^s(\Omega^c) = (H_{loc}^s(\Omega^c))^3$ et $\mathbf{H}_{loc}^s(\mathbb{R}^3) = (H_{loc}^s(\mathbb{R}^3))^3$. On note \mathbf{n} le vecteur normal unitaire de Ω dirigé vers l'extérieur et $d\sigma$ l'élément d'aire sur la surface Γ .

Définition 1.2.1 Soient $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et soit $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^3$ on définit les traces :

$$\begin{aligned} \gamma_d v &:= v|_\Gamma && \text{(trace de Dirichlet scalaire),} \\ \gamma_n v &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} v = \mathbf{n} \cdot (\nabla v)|_\Gamma && \text{(trace de Neumann scalaire),} \\ \gamma_D \mathbf{u} &:= \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_\Gamma && \text{(trace de Dirichlet vectorielle),} \\ \gamma_{N_\kappa} \mathbf{u} &:= \kappa^{-1} \mathbf{n} \times (\mathbf{rot} \mathbf{u})|_\Gamma && \text{(trace de Neumann vectorielle).} \end{aligned}$$

Pour $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega^c})$ et $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega^c}))^3$, on définit les traces extérieures γ_d^c , γ_n^c , γ_D^c et $\gamma_{N_\kappa}^c$ de la même façon.

1. Diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique

Lemme 1.2.2 Soit $s \in \mathbb{R}_+$. Les traces γ_d et γ_n se prolongent en des applications linéaires et continues de $\mathbf{H}^s(\Omega) \cup \mathbf{H}^s(\Omega^c)$ et $\mathbf{H}^{s+1}(\Omega) \cup \mathbf{H}_{loc}^{s+1}(\Omega^c)$ respectivement dans $\mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Définition 1.2.3 On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathbf{H}_\times^s(\Gamma) := \gamma_D(\mathbf{H}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega))$$

muni de la norme graphe

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_\times^s(\Gamma)} = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \{ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \text{ tel que } \gamma_D \mathbf{v} = \mathbf{u} \}$$

qui rend l'application $\gamma_D : \mathbf{H}^{s+\frac{1}{2}}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\times^s(\Gamma)$ continue et surjective. Son espace dual pour le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ est noté $\mathbf{H}_\times^{-s}(\Gamma)$.

1.2.2 Un peu de géométrie différentielle

Toute fonction $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ peut être étendue à \mathbb{R}^3 tout entier en une fonction \tilde{f} définie pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ par

$$(1.4) \quad \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i(x) f(\psi_i \circ \Pi \circ \psi_i^{-1}(x))$$

où Π est la projection orthogonale sur le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Si f est dans $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ alors $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ (par prolongement par zéro en dehors des ouverts \mathcal{O}_i).

Définition 1.2.4 (Gradient tangentiel) Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, on définit le gradient tangentiel par :

$$\nabla_\Gamma v = \nabla \tilde{v} - (\mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{v}) \mathbf{n}.$$

Pour $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$ on note $\nabla_\Gamma \mathbf{u}$ la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le gradient tangentiel de la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{u} .

Définition 1.2.5 (Divergence surfacique) Soit $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$, on définit la divergence surfacique par :

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} - [\operatorname{Jac}(\tilde{\mathbf{u}})] \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{trace}(\nabla_\Gamma \mathbf{u})$$

où $[\operatorname{Jac}(\tilde{\mathbf{u}})]$ désigne la matrice Jacobienne de $\tilde{\mathbf{u}}$.

Définition 1.2.6 (Rotationnel tangentiel) Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$, on définit le rotationnel tangentiel par :

$$\operatorname{rot}_\Gamma v = \nabla \tilde{v} \times \mathbf{n} = \nabla_\Gamma v \times \mathbf{n}.$$

1.2 Traces et espaces de Sobolev

Pour $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$ on note $\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u}$ la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le rotationnel tangentiel de la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{u} .

Définition 1.2.7 (Rotationnel surfacique) Pour $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$, on définit le rotationnel surfacique par :

$$\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}} = -\text{trace}(\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u}).$$

Définition 1.2.8 (Laplace-Beltrami) Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$; l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Γ est défini par :

$$(1.5) \quad \Delta_\Gamma v = \text{div}_\Gamma \nabla_\Gamma v = -\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma v.$$

Remarque 1.2.9 Les définitions ci-dessus ne dépendent pas du prolongement.

Théorème 1.2.10 (Formule de Stokes) Soient $\mathbf{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\Gamma))^3$ un champ de vecteur et $v \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ une fonction scalaire. Nous avons les égalités suivantes :

$$(1.6) \quad \int_\Gamma (\nabla_\Gamma v \cdot \mathbf{u}) d\sigma + \int_\Gamma v \text{div}_\Gamma \mathbf{u} d\sigma = 0,$$

$$(1.7) \quad \int_\Gamma (\mathbf{rot}_\Gamma v \cdot \mathbf{u}) d\sigma - \int_\Gamma v \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u} d\sigma = 0,$$

$$(1.8) \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0,$$

$$(1.9) \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \text{div}_\Gamma \mathbf{u}.$$

Par des arguments de densité et de dualité on montre que les opérateurs différentiels tangentiels ∇_Γ et \mathbf{rot}_Γ s'étendent en des opérateurs linéaires et continus de $H^{s+1}(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}_\times^s(\Gamma)$, que les opérateurs différentiels surfaciques div_Γ et \mathbf{rot}_Γ s'étendent en des opérateurs linéaires et continus de $\mathbf{H}^{s+1}(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$ et que l'opérateur différentiel Δ_Γ s'étend en un opérateur linéaire et continu de $H^{s+2}(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$.

Définition 1.2.11 On définit l'opérateur de courbure et la courbure moyenne par :

$$\mathcal{R}_\Gamma = \nabla_\Gamma \mathbf{n} \quad \text{et} \quad H_\Gamma = \text{div}_\Gamma \mathbf{n} = \text{trace}(\mathcal{R}_\Gamma)$$

respectivement.

Théorème 1.2.12 Soit \mathbf{u} une fonction vectorielle et soit v une fonction scalaire. Les opérateurs de divergence, de gradient, de rotationnel et le laplacien se décomposent des façons suivantes :

$$\nabla v = \nabla_\Gamma + \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n},$$

1. Diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}_\Gamma + \mathbf{H}_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = (\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u}) \mathbf{n} + \operatorname{rot}_\Gamma (\mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n}) - (\mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u}) \times \mathbf{n} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) \times \mathbf{n},$$

$$\Delta v = \Delta_\Gamma v + \mathbf{H}_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{n}^2}.$$

PREUVE. Nous renvoyons le lecteur au livre [31] page 75. ■

Les relations de commutation entre la dérivée normale et les opérateurs différentiels surfaciques suivantes nous seront très utiles pour étudier les dérivées normales des opérateurs de potentiels en électromagnétisme.

Lemme 1.2.13 *Soit \mathbf{u} une fonction vectorielle et soit v une fonction scalaire définies sur Γ . Nous avons les égalités suivantes :*

$$(1.10) \quad \operatorname{div}_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} = \operatorname{div}_\Gamma (\mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma \mathbf{H}_\Gamma,$$

$$(1.11) \quad \nabla_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} v - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nabla_\Gamma v = \nabla \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} v - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nabla v = \mathcal{R}_\Gamma \nabla_\Gamma v,$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathcal{R}_\Gamma \mathbf{u}) - \mathcal{R}_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathcal{R}_\Gamma \right) \mathbf{u} = -\mathcal{R}_\Gamma^2 \mathbf{u}.$$

PREUVE. Nous renvoyons le lecteur au livre [31] page 78. ■

1.2.3 Les espaces $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$

Définition 1.2.14 *Soit $s \in \mathbb{R}$. On introduit les espaces*

$$\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) := \{ \mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^s(\Gamma), \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j} \in H^s(\Gamma) \},$$

$$\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) := \{ \mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^s(\Gamma), \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{j} \in H^s(\Gamma) \}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert pour les normes

$$\| \mathbf{j} \|_{\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)} = \| \mathbf{j} \|_{\mathbf{H}_\times^s(\Gamma)} + \| \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j} \|_{H^s(\Gamma)},$$

$$\| \mathbf{j} \|_{\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma)} = \| \mathbf{j} \|_{\mathbf{H}_\times^s(\Gamma)} + \| \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{j} \|_{H^s(\Gamma)}.$$

1.2 Traces et espaces de Sobolev

Théorème 1.2.15 *L'opérateur*

$$\times \mathbf{n} : \begin{array}{ccc} \mathbf{L}_\times^2(\Gamma) & \rightarrow & \mathbf{L}_\times^2(\Gamma) \\ \mathbf{j} & \mapsto & \mathbf{j} \times \mathbf{n} \end{array}$$

s'étend en un isomorphisme continu de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ sur son dual $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$.
L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\mathbf{j}, \mathbf{m}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{j}, \mathbf{m}) = \int_\Gamma (\mathbf{n} \times \mathbf{j}) \cdot \overline{\mathbf{m}} \, d\sigma \end{aligned}$$

défini un produit de dualité sur $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$.

Soit D un opérateur différentiel de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^3). Pour $s \in \mathbb{R}_+$, on introduit les espaces :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s(D, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega), D\mathbf{u} \in H^s(\Omega) \text{ (ou } \mathbf{H}^s(\Omega))\}, \\ \mathbf{H}_{loc}^s(D, \Omega^c) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{loc}^s(\overline{\Omega^c}), D\mathbf{u} \in H_{loc}^s(\overline{\Omega^c}) \text{ (ou } \mathbf{H}_{loc}^s(\overline{\Omega^c}))\}, \\ \mathbf{H}_{loc}^s(D, \mathbb{R}^3) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{loc}^s(\mathbb{R}^3), D\mathbf{u} \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^3) \text{ (ou } \mathbf{H}_{loc}^s(\mathbb{R}^3))\}. \end{aligned}$$

On munit l'espace $\mathbf{H}^s(D, \Omega)$ de sa norme graphe

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^s(D, \Omega)} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)} + \|D\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)}.$$

On notera $\mathbf{H}(D, \Omega)$ au lieu de $\mathbf{H}^0(D, \Omega)$.

Théorème 1.2.16 *La trace qui à $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ associe sa composante normale sur Γ , notée $\mathbf{n} \cdot \gamma_d \mathbf{u}$, est continue et surjective de $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ sur $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

De plus, pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, on a

$$(1.13) \quad \int_\Omega [(\nabla v \cdot \mathbf{u}) - v \text{div} \mathbf{u}] \, dx = \langle \mathbf{n} \cdot \gamma_d \mathbf{u}, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \Gamma}.$$

Théorème 1.2.17 (théorème de Green) *Les opérateurs de trace γ_D et γ_{N_κ} sont linéaires et continus de $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{H}(\text{rot rot}, \Omega)$, respectivement, vers $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. De plus, pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, nous avons la formule de Stokes :*

$$(1.14) \quad \int_\Omega [(\text{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \text{rot} \mathbf{v})] \, dx = \mathcal{B}(\gamma_D \mathbf{u}, \gamma_D \mathbf{v}).$$

Nous avons les mêmes propriétés pour les opérateurs de traces extérieurs $\mathbf{n} \cdot \gamma_d^c$, γ_D^c et $\gamma_{N_\kappa}^c$ sur les espaces $\mathbf{H}_{loc}(\text{div}, \Omega^c)$, $\mathbf{H}_{loc}(\text{rot}, \Omega^c)$ et $\mathbf{H}_{loc}(\text{rot rot}, \Omega^c)$ respectivement.

Théorème 1.2.18 (dérivées normales) *Les opérateurs de traces γ_n et $\mathbf{n} \times \gamma_n$ sont linéaires et continus de $\mathbf{H}^1(\text{rot}, \Omega)$ vers $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ respectivement.*

PREUVE. On utilise le théorème précédent 1.2.17 et la relation de commutation entre la dérivée normale et l'opérateur de divergence surfacique (1.10). \blacksquare

1.2.4 Décomposition de Helmholtz

Théorème 1.2.19 (Théorème de la divergence) Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma)$. On a

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \, d\sigma = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} H_{\Gamma} \, d\sigma.$$

En particulier si \mathbf{u} est tangente à la surface Γ alors $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}$ est de moyenne nulle.

On pose

$$H_*^s(\Gamma) = \{f \in H^s(\Gamma), \langle f, 1 \rangle_{s,\Gamma} = 0\}.$$

Remarque 1.2.20 Puisque $\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{n} = 0$, on en déduit que pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma)$ on a $\operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} \in H_*^s(\Gamma)$. De plus, les opérateurs $\operatorname{div}_{\Gamma}$ et $\operatorname{rot}_{\Gamma}$ sont continus et surjectifs de $\mathbf{H}_{\times}^{s+1}(\Gamma)$ sur $H_*^s(\Gamma)$.

Puisque la surface Γ est régulière et simplement connexe nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2.21 Soit $s \in \mathbb{R}$. Étant donné $f \in H_*^s(\Gamma)$, il existe une unique solution $u \in H^{s+2}(\Gamma)/\mathbb{R}$ de l'équation :

$$\Delta_{\Gamma} u = f \text{ sur } \Gamma.$$

Le théorème suivant est démontré dans [16] pour le cas $s = -\frac{1}{2}$ mais il est valable pour tout $s \in \mathbb{R}$:

Théorème 1.2.22 L'espace $\mathbf{H}_{\times}^s(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ admet la décomposition de Helmholtz suivante :

$$(1.15) \quad \mathbf{H}_{\times}^s(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma) = \nabla_{\Gamma} (H^{s+2}(\Gamma)/\mathbb{R}) \oplus \operatorname{rot}_{\Gamma} (H^{s+1}(\Gamma)/\mathbb{R}).$$

C'est-à-dire que pour tout $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\times}^s(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ il existe un unique $p \in H^{s+2}(\Gamma)/\mathbb{R}$ et un unique $q \in H^{s+1}(\Gamma)/\mathbb{R}$ tels que :

$$\mathbf{j} = \nabla_{\Gamma} p + \operatorname{rot}_{\Gamma} q.$$

Remarque 1.2.23 Soit $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\times}^s(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ et soit $\nabla_{\Gamma} p + \operatorname{rot}_{\Gamma} q$ sa décomposition de Helmholtz. Grâce aux égalités (1.5), (1.8) et au théorème 1.2.21 les densités p et q sont données par

$$p = \Delta_{\Gamma}^{-1} \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{j} \text{ et } q = -\Delta_{\Gamma}^{-1} \operatorname{rot}_{\Gamma} \mathbf{j}.$$

Puisque $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)$ et $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{j} \in H^s(\Gamma)$ on a bien $p \in H^{s+2}(\Gamma)/\mathbb{R}$ et $q \in H^{s+1}(\Gamma)/\mathbb{R}$.

1.3 Conditions de transmission

Désormais on va s'intéresser aux solutions de (1.1) qui sont dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$. On suppose que $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ et satisfait $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ et que $\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$. Pour s'assurer que la solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) des équations de Maxwell (1.1) est dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ nous devons compléter les équations de Maxwell par les conditions de transmissions suivantes :

Lemme 1.3.1 *Soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) une solution des équations de Maxwell (1.1). Alors \mathbf{E} et \mathbf{H} sont dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ si et seulement si les champs intérieurs \mathbf{E}^i et \mathbf{H}^i sont dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, les champs diffractés \mathbf{E}^s et \mathbf{H}^s sont dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$ et que les conditions de transmissions suivantes sont satisfaites sur Γ :*

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^i - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^{tot} &= 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}^i - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}^{tot} &= 0. \end{aligned}$$

PREUVE. On utilise la formule d'intégration par partie (1.14). ■

Lemme 1.3.2 *Soit $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ une solution des équations de Maxwell harmoniques (1.1). Alors $(\epsilon \mathbf{E}), (\mu \mathbf{H}) \in \mathbf{H}_{loc}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ et sur Γ on a :*

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\epsilon_i \mathbf{E}^i)_{|\Gamma} - \mathbf{n} \cdot (\epsilon_e \mathbf{E}^{tot})_{|\Gamma} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (\mu_i \mathbf{H}^i)_{|\Gamma} - \mathbf{n} \cdot (\mu_e \mathbf{H}^{tot})_{|\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

PREUVE. On applique l'opérateur de divergence aux équations de Maxwell ■

Si \mathbf{E} et \mathbf{H} sont dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ et satisfont les équations de Maxwell (1.1) alors \mathbf{E} est dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$, ce qui justifie qu'on utilise les équations du second ordre (1.2). Dans ce cas, les conditions de transmission (1.16) deviennent :

$$(1.17a) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^i - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^{tot} = 0,$$

$$(1.17b) \quad \frac{1}{\mu_i} \mathbf{n} \times (\mathbf{rot} \mathbf{E}^i)_{|\Gamma} - \frac{1}{\mu_e} \mathbf{n} \times (\mathbf{rot} \mathbf{E}^{tot})_{|\Gamma} = 0.$$

1.4 Condition de rayonnement et théorème de Rellich

Considérons l'équation de Maxwell homogène :

$$(1.18) \quad \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = 0.$$

1. Diffraction d'ondes électromagnétiques par un diélectrique

Définition 1.4.1 Une solution \mathbf{E} de (1.18) dans Ω^c est dite rayonnante si elle vérifie la condition de rayonnement de Silver-Müller :

$$(1.19) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \hat{x} - i\kappa \mathbf{E}) = 0$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \hat{x} - i\kappa \mathbf{E} = o(1) \text{ lorsque } |x| \rightarrow +\infty$$

uniformément dans toutes les directions $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Puisque les solutions de (1.18) satisfont l'équation de Helmholtz vectorielle

$$\Delta \mathbf{E} + \kappa^2 \mathbf{E} = 0,$$

nous pouvons étendre le théorème de Rellich établi pour les solutions des équations d'Helmholtz au cas des équations de Maxwell.

Lemme 1.4.2 (Lemme de Rellich) Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$, une solution de l'équation de Maxwell (1.18) dans Ω^c satisfaisant la condition de Silver-Müller et telle que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{E}|^2 = 0.$$

Alors $\mathbf{E} = 0$ dans $\overline{\Omega^c}$.

Corollaire 1.4.3 Soit $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$ une solution de l'équation de Maxwell (1.18) dans Ω^c satisfaisant la condition de Silver-Müller et la condition de Dirichlet homogène $\gamma_D^c \mathbf{E} = 0$ sur Γ . Alors $\mathbf{E} = 0$ dans $\overline{\Omega^c}$.

PREUVE. On utilise la formule (1.14) et le lemme de Rellich. ■

On a le même résultat avec la condition de Neumann homogène $\gamma_{N_\kappa}^c \mathbf{E} = 0$.

1.5 Formule de Stratton-Chu et champ lointain

Soit $G(\kappa, |x-y|) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0.$$

Théorème 1.5.1 Soit \mathbf{E} une solution de (1.18) dans Ω . On suppose que \mathbf{E} est dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. Alors \mathbf{E} admet la représentation intégrale suivante pour tout $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & -\mathbf{rot} \int_{\Gamma} G(\kappa, |x-y|) (\gamma_D \mathbf{E})(y) d\sigma(y) \\ & - \frac{1}{\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \int_{\Gamma} G(\kappa, |x-y|) (\gamma_{N_\kappa} \mathbf{E})(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

1.5 Formule de Stratton-Chu et champ lointain

Remarque 1.5.2 *On en déduit que si les traces de \mathbf{E} sur Γ sont nulles alors \mathbf{E} est identiquement nul sur Ω .*

Théorème 1.5.3 *Soit \mathbf{E} une solution de (1.18) dans Ω^c . On suppose que \mathbf{E} est dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$ et satisfait la condition de rayonnement de Silver-Müller. Alors \mathbf{E} admet la représentation intégrale suivante pour tout $x \in \Omega^c$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{rot} \int_{\Gamma} G(\kappa, |x-y|) (\gamma_D^c \mathbf{E})(y) d\sigma(y) \\ & + \frac{1}{\kappa} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \int_{\Gamma} G(\kappa, |x-y|) (\gamma_{N_\kappa}^c \mathbf{E})(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Corollaire 1.5.4 *Toute solution rayonnante de (1.18) dans Ω^c admet le comportement asymptotique suivant :*

$$\mathbf{E}(x) = G(\kappa, |x|) \left\{ \mathbf{E}^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \quad \text{quand } |x| \rightarrow +\infty,$$

uniformément dans toutes les directions $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$. De plus

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\infty(\hat{x}) = & i\kappa \hat{x} \times \left(\int_{\Gamma} e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} (\gamma_D^c \mathbf{E})(y) d\sigma(y) \right) \\ & + \kappa \hat{x} \times \left(\int_{\Gamma} e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} (\gamma_{N_\kappa}^c \mathbf{E})(y) d\sigma(y) \right) \times \hat{x}. \end{aligned}$$

Remarque 1.5.5 *La fonction \mathbf{E}^∞ est appelée champ lointain ou profil de rayonnement. On peut définir de la même façon le champ lointain associé au champ magnétique \mathbf{H} . Les champs \mathbf{H}^∞ et \mathbf{E}^∞ sont tangents à la sphère unité et orthogonaux.*

1.6 Existence et unicité de la solution

Considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donné } \mathbf{E}^{inc} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) \text{ tel que } \mathbf{rot rot } \mathbf{E}^{inc} - \kappa_e^2 \mathbf{E}^{inc} = 0 \\ \text{dans un domaine borné contenant } \Omega, \text{ trouver} \\ (\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^s) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \times \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c) \text{ satisfaisant les} \\ \text{équations de Maxwell,} \\ \\ \mathbf{rot rot } \mathbf{E}^i - \kappa_i^2 \mathbf{E}^i = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{rot rot } \mathbf{E}^s - \kappa_e^2 \mathbf{E}^s = 0 \text{ dans } \Omega^c, \\ \\ \text{les conditions de transmissions sur } \Gamma \\ \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^i - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^{tot} = 0, \\ \frac{1}{\mu_i} \mathbf{n} \times (\mathbf{rot } \mathbf{E}^i)_{|\Gamma} - \frac{1}{\mu_e} \mathbf{n} \times (\mathbf{rot } \mathbf{E}^{tot})_{|\Gamma} = 0, \\ \text{et la condition de Silver-Müller} \\ \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\mathbf{rot } \mathbf{E} \times \hat{x} - i\kappa \mathbf{E}) = 0. \end{array} \right.$$

Le théorème ci-dessous est une adaptation du théorème d'unicité établi dans [26] dans le cas acoustique. Il donne des conditions suffisantes sur les caractéristiques du milieu pour obtenir une unique solution du problème \mathcal{P} .

Théorème 1.6.1 *On suppose que les constantes μ_i , μ_e , κ_i et κ_e vérifient les conditions suivantes :*

(i) κ_e est un réel strictement positif ou de partie imaginaire strictement positive,

(ii) $\Im \left(\frac{\mu_i}{\kappa_e} \right) \leq 0$ et $\Im \left(\frac{\mu_i}{\kappa_e} \frac{\mu_i}{\mu_e} \kappa_i^2 \right) \geq 0$.

Alors le problème \mathcal{P} admet une unique solution.

PREUVE. Ici nous montrons seulement l'unicité et déterminerons une solution de ce problème au chapitre 3. Supposons que $\mathbf{E}^{inc} = 0$. Soit $\mathbf{E} = (\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^s)$ une solution non nulle du problème de transmission. Soit B_R une boule de rayon suffisamment grand pour que $\Omega \subseteq B_R$ et \mathbf{n}_R le vecteur normal unitaire extérieur à B_R . Deux applications du théorème de Green et (3.3) et (3.4) donnent :

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R} (\mathbf{rot } \mathbf{E}^s \times \mathbf{n}_R) \cdot \overline{\mathbf{E}^s} &= \int_{B_R \setminus \Omega} \{ |\mathbf{rot } \mathbf{E}^s|^2 - \kappa_e^2 |\mathbf{E}^s|^2 \} \\ &\quad + \frac{\mu_i}{\mu_e} \int_{\Omega} \{ |\mathbf{rot } \mathbf{E}^i|^2 - \kappa_i^2 |\mathbf{E}^i|^2 \}. \end{aligned}$$

On multiplie par $\overline{\kappa_e}$ l'égalité ci-dessus et on prend la partie imaginaire, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Im \left(\overline{\kappa_e} \int_{\partial B_R} (\mathbf{rot } \mathbf{E}^s \times \mathbf{n}_R) \cdot \overline{\mathbf{E}^s} \right) &= \Im(\overline{\kappa_e}) \left(\int_{B_R \setminus \Omega} \{ |\mathbf{rot } \mathbf{E}^s|^2 + |\kappa_e \mathbf{E}^s|^2 \} \right) \\ &\quad + \Im \left(\frac{\mu_i}{\kappa_e} \frac{\mu_i}{\mu_e} \right) \int_{\Omega} |\mathbf{rot } \mathbf{E}^i|^2 - \Im \left(\frac{\mu_i}{\kappa_e} \frac{\mu_i}{\mu_e} \kappa_i^2 \right) \int_{\Omega} |\mathbf{E}^i|^2. \end{aligned}$$

1.6 Existence et unicité de la solution

D'après la condition de Silver-Müller on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \mathbf{n}_R - i\kappa_e \mathbf{E}^s|^2 = 0.$$

En développant on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \mathbf{n}_R|^2 + |\kappa_e \mathbf{E}^s|^2 - 2\Re \left(\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \mathbf{n}_R \cdot \overline{i\kappa_e \mathbf{E}^s} \right) = 0.$$

Sous les hypothèses du théorème on a

$$\int_{\partial B_R} \Re \left(\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \mathbf{n}_R \cdot \overline{i\kappa_e \mathbf{E}} \right) = \Im \int_{\partial B_R} \left(\overline{\kappa_e} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \mathbf{n}_R \cdot \overline{\mathbf{E}} \right) \leq 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_R} |\mathbf{E}^s|^2 = 0.$$

Donc $\mathbf{E}^s \equiv 0$ dans Ω^c d'après le théorème de Rellich. D'après les conditions de transmissions, on a $\gamma_D \mathbf{E}^i = 0$ et $\gamma_{N, \kappa_i} \mathbf{E}^i = 0$. Il vient ensuite que $\mathbf{E}^i \equiv 0$ dans Ω d'après la formule de Stratton-Shu. \blacksquare

Ce théorème couvre les cas qui nous intéressent à savoir lorsque le domaine Ω est plongé dans le vide, c'est-à-dire lorsque la conductivité est nulle à l'extérieure et κ_e est strictement positif et κ_i est un complexe satisfaisant la condition (i).

Chapitre 2

Théorie du potentiel

2.1 Introduction

La théorie du potentiel associée aux équations de Maxwell harmoniques découle de la formulation intégrale de Stratton-Chu évoquée au chapitre 1 qui met en relation les solutions des problèmes aux limites avec leurs traces sur le bord. Elle a contribué au développement de la théorie des équations intégrales de frontière en électromagnétisme : au lieu de résoudre les équations de Maxwell dans l'espace \mathbb{R}^3 on se ramène à un système de deux équations intégrales sur le bord à deux inconnues. Pour déterminer l'existence et l'unicité des solutions de telles équations on fait appel à la théorie de Fredholm, ce qui nécessite au préalable une étude précise des opérateurs de potentiels et des opérateurs intégraux de frontières. Nous allons rappeler dans ce chapitre les résultats fondamentaux sur cette étude. Nous utilisons les notations de [8], la majorité des résultats énoncés ici sont prouvés dans [9, 31]. Les opérateurs intégraux de frontière qui nous intéressent appartiennent à la classe des opérateurs intégraux pseudo-différentiels de noyaux pseudo-homogènes (voir [17, 23, 24, 29, 44, 43]). Nous commençons ce chapitre par présenter les propriétés de régularité des opérateurs faiblement singuliers ([31] p. 176) de cette classe d'opérateur qui sera très utile dans la seconde partie de cette thèse pour étudier les dérivées de forme de la solution du problème de diffraction.

2.2 Opérateurs intégraux de noyaux pseudo-homogènes

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d de bord Γ régulier. Dans cette section nous nous intéressons aux opérateurs intégraux surfaciques de la forme :

$$(2.1) \quad \mathcal{K}_{|\Gamma}(u)(x) = \text{vp.} \int_{\Gamma} k(y, x - y)u(y)d\sigma(y), \quad x \in \Gamma$$

où l'intégrale est considérée au sens de la partie principale de Cauchy et le noyau k est faiblement singulier, régulier par rapport à la variable $y \in \Gamma$ et quasi-homogène par rapport à la variable $z = x - y \in \mathbb{R}^d$. Nous rappelons ici les propriétés de régularités de ces opérateurs sur les espaces de Sobolev $H^s(\Gamma)$ valables aussi pour leurs adjoints

$$(2.2) \quad \mathcal{K}_{|\Gamma}^*(u)(x) = \text{vp.} \int_{\Gamma} k(x, y - x)u(y)d\sigma(y), \quad x \in \Gamma.$$

Théorème 2.2.1 *On dit que $k(y, z)$ défini sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ est homogène de degré $-n$ si*

$$k(y, z) = \frac{1}{|z|^n}k(y, \left(\frac{z}{|z|}\right)).$$

Définition 2.2.2 *Un noyau homogène $k(y, z)$ défini sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ est dit de classe $-m$ pour $m \geq 0$ si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sup_{|z|=1} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta} k(y, z) \right| \leq C_{\alpha, \beta}, \text{ pour tout multi-indices } \alpha \text{ et } \beta, \\ \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta} k(x, z) \text{ est homogène de degré } -d + 1 \text{ par rapport à la variable } z \\ \text{pour tout } |\beta| = m \text{ et } D_z^m k(x, z) \text{ est impaire par rapport à la variable } z. \end{array} \right.$$

Maintenant on va introduire une classe d'opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 2.2.3 *Soit $s \in \mathbb{R}$. Un noyau $k \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}))$ est pseudo-homogène de classe $-m$ pour un entier m tel que $m \geq 0$, si pour tout entier r le noyau k admet le développement asymptotique suivant lorsque z tend vers 0 :*

$$(2.3) \quad k(y, z) = k_m(y, z) + \sum_{j=1}^{l-1} k_{m+j}(y, z) + k_{m+l}(y, z),$$

où pour $j = 0, 1, \dots, l-1$ k_{m+j} est homogène de classe $-(m+j)$ et l est choisi tel que k_{m+l} est r fois différentiables.

Le théorème ci-dessous est énoncé et prouvé dans [31].

Théorème 2.2.4 *Soit k un noyau pseudo-homogène de classe $-m$. L'opérateur associé $\mathcal{K}_{|\Gamma}$ donné par (2.1) est linéaire et continu de $H^{s-m}(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$ pour tout réel s .*

Nous avons le même résultat pour son adjoint $\mathcal{K}_{|\Gamma}^*$.

Le théorème ci-dessous est établi dans le livre de G. I. Eskin [17].

2.3 Opérateurs de potentiels électromagnétiques

Théorème 2.2.5 Soit s un réel et k un noyau pseudo-homogène de classe $-m$. L'opérateur de potentiel \mathcal{P} défini par

$$(2.4) \quad \mathcal{P}(u)(x) = \int_{\Gamma} k(y, x-y)u(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

est continu de $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{s+m}(\Omega) \cup H_{loc}^{s+m}(\Omega^c)$ pour tout réel s .

2.3 Opérateurs de potentiels électromagnétiques

Soit $k \in \mathbb{C}$ avec $\Im(k) \geq 0$. Nous rappelons que $G(k, |z|) = \frac{e^{i\kappa|z|}}{4\pi|z|}$ est la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz.

2.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.3.1 On définit l'opérateur de potentiel de simple couche ψ_{κ} pour une fonction scalaire ou vectorielle u par :

$$(\Psi_{\kappa}u)(x) = \int_{\Gamma} G(\kappa, |x-y|)u(y)d\sigma(y) \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma,$$

et l'opérateur intégral V_{κ} par

$$V_{\kappa}u(x) = \text{vp.} \int_{\Gamma} G(\kappa, |x-y|)u(y)d\sigma(y) \quad x \in \Gamma.$$

Théorème 2.3.2 Soit $s \in \mathbb{R}$. L'opérateur intégral V_{κ} est linéaire et continu de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+1}(\Gamma)$ et l'opérateur de potentiel Ψ_{κ} est linéaire et continu de $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{s+1}(\Omega) \cup H_{loc}^{s+1}(\Omega^c)$.

PREUVE. On pose $z = x - y$.

$$\frac{e^{i\kappa|z|}}{|z|} = \sum_{j=0}^{\infty} (i\kappa)^j |z|^{j-1}$$

Pour $j \neq 1$,

$$\nabla^z (|z|^{j-1}) = -(j-1) \frac{z}{|z|^{2-j}}$$

qui est clairement impaire et homogène de degré $j-1$ dans \mathbb{R}^3 . Le noyau associé à l'opérateur de simple couche Ψ_{κ} est pseudo-homogène de classe -1. ■

Définition 2.3.3 (Potentiel électrique) On définit l'opérateur de potentiel électrique $\Psi_{E_{\kappa}}$ pour une densité \mathbf{j} par :

$$\Psi_{E_{\kappa}} \mathbf{j} := \kappa^{-1} \text{rot rot } \Psi_{\kappa} \mathbf{j}.$$

Ceci peut s'écrire aussi

$$(2.5) \quad \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} := \kappa \Psi_\kappa \mathbf{j} + \kappa^{-1} \nabla \Psi_\kappa \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j}$$

d'après l'équation d'Helmholtz et l'égalité $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = -\Delta + \nabla \operatorname{div}$ (cf [3]).

Définition 2.3.4 (Potentiel magnétique) *On définit l'opérateur de potentiel magnétique Ψ_{M_κ} pour une densité \mathbf{m} par :*

$$(2.6) \quad \Psi_{M_\kappa} \mathbf{j} := \operatorname{rot} \Psi_\kappa \mathbf{j}.$$

Théorème 2.3.5 *Les potentiels Ψ_{E_κ} et Ψ_{M_κ} sont continus de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \cup \mathbf{H}_{loc}(\operatorname{rot}, \Omega^c)$. Pour $\mathbf{j}, \mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ on a :*

$$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} - \kappa^2 \operatorname{I}) \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} = 0 \text{ et } (\operatorname{rot} \operatorname{rot} - \kappa^2 \operatorname{I}) \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

et $\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j}$ et $\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m}$ satisfont la condition de Silver-Müller. On a de plus :

$$(2.7) \quad \kappa^{-1} \operatorname{rot} \Psi_{E_\kappa} = \Psi_{M_\kappa} \text{ et } \kappa^{-1} \operatorname{rot} \Psi_{M_\kappa} = \Psi_{E_\kappa}.$$

PREUVE. L'opérateur Ψ_κ est pseudo-homogène de classe -1, $\nabla \Psi_\kappa$ et $\operatorname{rot} \Psi_\kappa$ sont alors pseudo-homogènes de classe 0. Donc Ψ_{E_κ} et Ψ_{M_κ} sont continus de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \cup \mathbf{L}_{loc}^2(\Omega^c)$. On conclut grâce aux égalités (2.7). ■

On pose $[\gamma_D] = \gamma_D - \gamma_D^c$ et $[\gamma_{N_\kappa}] = \gamma_{N_\kappa} - \gamma_{N_\kappa}^c$.

Théorème 2.3.6 (Formule de Stratton-Chu) *Soit \mathbf{E} une solution de l'équation de Maxwell harmonique*

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = 0$$

telle que $\mathbf{E}|_\Omega \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{E}|_{\Omega^c} \in \mathbf{H}_{loc}(\operatorname{rot}, \Omega^c)$ et satisfaisant la condition de Silver-Müller. Alors si on pose :

$$\mathbf{j} = [\gamma_{N_\kappa}] \mathbf{E} \text{ et } \mathbf{m} = [\gamma_D] \mathbf{E},$$

le champ \mathbf{E} admet la représentation intégrale sur $\Omega \cup \Omega^c$:

$$(2.8) \quad \mathbf{E}(x) = -(\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j})(x) - (\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m})(x).$$

De plus, on a

$$\mathbf{E}^\infty = -(\Psi_{E_\kappa}^\infty \mathbf{j}) - (\Psi_{M_\kappa}^\infty \mathbf{m}),$$

où les opérateurs $\Psi_{E_\kappa}^\infty$ et $\Psi_{M_\kappa}^\infty$ sont linéaires et continus de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans l'espace $(\mathcal{C}_\times^\infty(S^2))^3$ des fonctions tangentes à la sphère unité S^2 et infiniment différentiables et sont définis pour $\mathbf{j}, \mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ et pour $\hat{x} \in S^2$ par :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Psi_{E_\kappa}^\infty \mathbf{j}(\hat{x}) &= \kappa \hat{x} \times \left(\int_\Gamma e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \right) \times \hat{x}, \\ \Psi_{M_\kappa}^\infty \mathbf{m}(\hat{x}) &= i\kappa \hat{x} \times \left(\int_\Gamma e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} \mathbf{m}(y) d\sigma(y) \right). \end{aligned}$$

2.3 Opérateurs de potentiels électromagnétiques

2.3.2 Relations de sauts

On pose $[\gamma_d] = \gamma_d - \gamma_d^c$ et $[\gamma_n] = \gamma_n - \gamma_n^c$.

Soit $u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on sait que le potentiel de simple couche $\Psi_\kappa u$ est continu à travers la surface Γ et que sa dérivée normale est discontinue. On a :

$$(2.10) \quad [\gamma_d] \Psi_\kappa = 0 \quad \text{et} \quad [\gamma_n] \Psi_\kappa = \text{I}.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.3.7 *Soit $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. La composante tangentielle du potentiel électrique $\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j}$ est continue à travers la surface Γ alors que sa composante normale est discontinue. On a*

$$(2.11) \quad [\gamma_D] \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot [\gamma_d] \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} = \frac{1}{\kappa} \text{div}_\Gamma \mathbf{j}.$$

Soit $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. La composante normale du potentiel magnétique $\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m}$ est continue à travers la surface Γ alors que sa composante tangentielle est discontinue. On a :

$$(2.12) \quad [\gamma_D] \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} = -\mathbf{m} \quad \text{et} \quad [\mathbf{n} \cdot \gamma_d] \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} = 0$$

PREUVE. Soit $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, on a sur Γ :

$$\mathbf{n} \times (\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j})|_\Gamma = \kappa \mathbf{n} \times (\Psi_\kappa \mathbf{j})|_\Gamma + \kappa^{-1} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma (\Psi_\kappa \text{div}_\Gamma \mathbf{j})|_\Gamma$$

et

$$\mathbf{n} \cdot (\Psi_{E_\kappa} \mathbf{j})|_\Gamma = \kappa \mathbf{n} \cdot (\Psi_\kappa \mathbf{j})|_\Gamma + \kappa^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\Psi_\kappa \text{div}_\Gamma \mathbf{j}).$$

En utilisant les relations de sauts du potentiel de simple couche, on obtient :

$$\gamma_D \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} = \kappa \mathbf{n} \times [\gamma_d] \Psi_\kappa \mathbf{j} + \kappa^{-1} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma [\gamma_d] \Psi_\kappa \text{div}_\Gamma \mathbf{j} = 0$$

et

$$\mathbf{n} \cdot [\gamma_d] \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} = \kappa \mathbf{n} \cdot [\gamma_d] \Psi_\kappa \mathbf{j} + \kappa^{-1} [\gamma_n] \Psi_\kappa \text{div}_\Gamma \mathbf{j} = \kappa^{-1} \text{div}_\Gamma \mathbf{j}.$$

Soit $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, en utilisant la décomposition (1.2.12) du rotationnel sur la surface Γ , on a :

$$\mathbf{n} \times (\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m})|_\Gamma = \mathbf{n} \times (\text{rot } \Psi_\kappa \mathbf{m})|_\Gamma = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\Psi_\kappa \mathbf{m}) - \mathcal{R}_\Gamma (\Psi_\kappa \mathbf{m})|_\Gamma + \nabla_\Gamma \left((\mathbf{n} \cdot (\Psi_\kappa \mathbf{m}))|_\Gamma \right)$$

et

$$\mathbf{n} \cdot (\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m})|_\Gamma = \mathbf{n} \cdot (\text{rot } \Psi_\kappa \mathbf{m})|_\Gamma \mathbf{m} = \text{rot}_\Gamma (\Psi_\kappa \mathbf{m})|_\Gamma.$$

En utilisant les relations de sauts du potentiel de simple couche, on obtient :

$$[\gamma_D]\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} = -[\gamma_n]\Psi_{E_\kappa} \mathbf{m} - \mathcal{R}_\Gamma[\gamma_d]\Psi_{E_\kappa} \mathbf{m} + \nabla_\Gamma(\mathbf{n} \cdot [\gamma_d]\Psi_{E_\kappa}) \mathbf{m} = -\mathbf{m}$$

et

$$\mathbf{n} \cdot \gamma_d \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} = \text{rot}_\Gamma[\gamma_d]\Psi_{E_\kappa} \mathbf{m} = 0.$$

■

Puisque nous avons les égalités :

$$\gamma_{N_\kappa} \Psi_{E_\kappa} = \gamma_D \Psi_{M_\kappa} \text{ et } \gamma_{N_\kappa} \Psi_{M_\kappa} = \gamma_D \Psi_{E_\kappa},$$

on en déduit

$$(2.13) \quad [\gamma_{N_\kappa}] \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} = -\mathbf{j} \text{ et } [\gamma_{N_\kappa}] \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} = 0.$$

Dans la seconde partie de cette thèse nous aurons besoins des résultats suivants concernant la dérivée normale des potentiels électriques et magnétiques.

Théorème 2.3.8 *Les opérateurs de potentiels électriques Ψ_{E_κ} et magnétiques Ψ_{M_κ} ont une dérivée normale discontinue à travers la surface et on a :*

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times [\gamma_n] \Psi_{E_\kappa} &= \kappa \mathbf{n} \times \mathbf{I} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma, \\ \mathbf{n} \times [\gamma_n] \Psi_{M_\kappa} &= \mathbf{H}_\Gamma \cdot \mathbf{I} - \mathcal{R}_\Gamma. \end{aligned}$$

PREUVE. Soit $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$; en utilisant les relations de commutation du lemme 1.2.13 on a sur Γ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} &= \kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} + \kappa^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nabla \Psi_{E_\kappa} \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \\ &= \kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} + \kappa^{-1} \nabla \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_{E_\kappa} \text{div}_\Gamma \mathbf{j} - \mathcal{R}_\Gamma \nabla_\Gamma (\Psi_{E_\kappa} \text{div}_\Gamma \mathbf{j})|_\Gamma. \end{aligned}$$

En utilisant les relations de saut du potentiel de simple couche, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times [\gamma_n] \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} &= \kappa \mathbf{n} \times [\gamma_n] \Psi_{E_\kappa} \mathbf{j} + \kappa^{-1} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma [\gamma_n] \Psi_{E_\kappa} \text{div}_\Gamma \mathbf{j} - \mathbf{n} \times \mathcal{R}_\Gamma \nabla_\Gamma [\gamma_d] \Psi_{E_\kappa} \text{div}_\Gamma \mathbf{j} \\ &= \kappa \mathbf{n} \times \mathbf{j} + \kappa^{-1} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$; en utilisant la décomposition (1.2.12) du rotationnel sur la surface Γ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n} \times \text{rot} \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m}) \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}^2} \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathcal{R}_\Gamma(\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m})) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nabla_\Gamma (\mathbf{n} \cdot (\Psi_{M_\kappa} \mathbf{m})). \end{aligned}$$

2.3 Opérateurs de potentiels électromagnétiques

On utilise les relations de commutations du lemme 1.2.13 et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{n} \times \text{rot } \Psi_\kappa \mathbf{m}) &= \nabla_\Gamma \left(\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_\kappa \mathbf{m} \right) \right) - \mathcal{R}_\Gamma \nabla_\Gamma (\mathbf{n} \cdot (\Psi_\kappa \mathbf{m})) - \mathcal{R}_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_\kappa \mathbf{m} \right) \\ &\quad + \mathcal{R}_\Gamma^2 (\Psi_\kappa \mathbf{m}) + \kappa^2 \Psi_\kappa \mathbf{m} + \Delta_\Gamma \Psi_\kappa \mathbf{m} + \text{H}_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi_\kappa \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Puisque \mathbf{m} est une fonction tangente à la surface Γ , on a

$$\nabla_\Gamma (\mathbf{n} \cdot [\gamma_n] \Psi_\kappa \mathbf{m}) = 0.$$

Par conséquent on a

$$\mathbf{n} \times [\gamma_n] \Psi_{M_\kappa} \mathbf{m} = -\mathcal{R}_\Gamma [\gamma_n] \Psi_\kappa \mathbf{m} + \text{H}_\Gamma [\gamma_n] \Psi_\kappa \mathbf{m} = \text{H}_\Gamma \mathbf{m} - \mathcal{R}_\Gamma \mathbf{m}.$$

■

2.3.3 Les opérateurs intégraux de frontière

Définition 2.3.9 Soit \mathbf{j} une densité de vecteurs tangents à la surface Γ . On définit les opérateurs intégraux de frontière M_κ et C_κ par :

$$\begin{aligned} M_\kappa \mathbf{j}(x) &= - \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \text{rot}^x \{G(\kappa, |x-y|) \mathbf{j}(y)\} d\sigma(y) \\ &= D_\kappa \mathbf{j}(x) - B_\kappa \mathbf{j}(x), \\ C_\kappa \mathbf{j}(x) &= -\frac{1}{\kappa} \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \text{rot rot}^x \{G(\kappa, |x-y|) \mathbf{j}(y)\} d\sigma(y) \\ &= -\kappa S_\kappa \mathbf{j}(x) - \frac{1}{\kappa} T_\kappa \mathbf{j}(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_\kappa \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times (G(\kappa, |x-y|) \mathbf{j}(y)) d\sigma(y), \\ B_\kappa \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \nabla^x G(\kappa, |x-y|) (\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{j}(y)) d\sigma(y), \\ D_\kappa \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma (\mathbf{n}(x) \cdot \nabla^x G(\kappa, |x-y|)) \mathbf{j}(y) d\sigma(y), \\ T_\kappa \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \nabla^x \{G(\kappa, |x-y|) \text{div}_\Gamma \mathbf{j}(y)\} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Théorème 2.3.10 On montre que :

$$(2.14) \quad C_\kappa = -\frac{1}{2} (\gamma_D + \gamma_D^c) \Psi_{E_\kappa} = -\frac{1}{2} (\gamma_{N_\kappa} + \gamma_{N_\kappa}^c) \Psi_{M_\kappa},$$

$$(2.15) \quad M_\kappa = -\frac{1}{2} (\gamma_D + \gamma_D^c) \Psi_{M_\kappa} = -\frac{1}{2} (\gamma_{N_\kappa} + \gamma_{N_\kappa}^c) \Psi_{E_\kappa}.$$

Nous introduisons deux nouveaux opérateurs intégraux. Le premier est tout simplement la partie principale de l'opérateur C_κ et le second est un opérateur intégral aux propriétés intéressantes introduit en premier par O. Steinbach et M. Windisch dans [41].

Définition 2.3.11 On définit les opérateurs C_0 et $C_{\kappa,0}$ pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par :

$$(2.16) \quad C_{\kappa,0}\mathbf{j} = -\kappa S_0\mathbf{j} - \frac{1}{\kappa}T_0\mathbf{j},$$

$$(2.17) \quad C_0\mathbf{j} = S_0\mathbf{j} - T_0\mathbf{j}.$$

Théorème 2.3.12 Les opérateurs $C_\kappa - C_{\kappa,0}$ et M_κ sont des opérateurs compacts de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$.

PREUVE.

$$\frac{e^{i\kappa|z|}}{|z|} - \frac{1}{|z|} = i\kappa + \frac{(i\kappa)^2}{2}|z| + o(|z|^2)$$

$\psi_\kappa - \psi_0$ est un opérateur pseudo-homogène de classe -3 (son noyau se comporte comme $|x - y|$) et $\nabla(\psi_\kappa - \psi_0)$ est un opérateur pseudo-homogène de classe -2. En utilisant :

$$\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \text{div}_\Gamma) \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\psi_\kappa - \psi_0} H_\times^{\frac{5}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\text{compact}} \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \text{div}_\Gamma),$$

on obtient la compacité de $\psi_\kappa - \psi_0$, et en utilisant

$$\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \text{div}_\Gamma) \xrightarrow{\text{div}_\Gamma} \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\nabla(\psi_\kappa - \psi_0)} H_\times^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\text{compact}} \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \text{div}_\Gamma),$$

on obtient la compacité de l'opérateur $C_\kappa - C_{\kappa,0}$.

Lemme 2.3.13 L'opérateur D_κ est un opérateur continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

PREUVE. Soient $x, y \in \Gamma$ fixé. On a :

$$\mathbf{n}(x) \cdot \nabla G(\kappa, |x - y|) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|^2} \left(i\kappa - \frac{1}{|x-y|} \right) \mathbf{n}(x) \cdot (x - y).$$

En utilisant les notations du chapitre 1, on définit sur \mathbb{R}^3 un opérateur P défini sur \mathbb{R}^3 par :

$$P(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i(x) \psi_i \circ \Pi \circ \psi_i^{-1}(x).$$

Pour tout $x \in \Gamma$ on a $x = P(x)$ et l'opérateur P peut être considéré comme un opérateur de projection sur la surface Γ et défini au voisinage Γ . Pour tout $x \in \Gamma$

2.3 Opérateurs de potentiels électromagnétiques

la différentielle $DP(x)$ agit dans le plan tangent à la surface Γ au point x . Pour $x, y \in \Gamma$ on écrit

$$\mathbf{n}(x) \cdot (x - y) = \mathbf{n}(x) \cdot (P(x) - P(y)) = \underbrace{\mathbf{n}(x) \cdot DP(x)[z]}_{=0} + \mathbf{n}(x) \cdot D^2P(x)[z, z] + \dots$$

Finalement on en déduit que D_κ est un opérateur de noyau pseudo-homogène de classe -1 ■

Pour \mathbf{j} tangent à la surface Γ , le noyau de B_κ s'écrit

$$\nabla^x G(\kappa, |x - y|) (\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{j}(y)) = \nabla^x G(\kappa, |x - y|) ((\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)) \cdot \mathbf{j}(y))$$

et on a le lemme suivant.

Lemme 2.3.14 *L'opérateur intégral de noyau $\frac{\partial}{\partial x_i} G(\kappa, |x - y|) (\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y))$ est pseudo-homogène de classe -1.*

PREUVE. La fonction $\frac{\partial}{\partial x_i} G(\kappa, |x - y|)$ est pseudo-homogène de classe 0 et $\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y) = 0$ lorsque $y = x$ ce qui prouve le lemme. ■

Finalement M_κ est continu de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}_\times^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Regardons $\operatorname{div}_\Gamma M_\kappa$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Gamma M_\kappa \mathbf{j}(x) &= \mathbf{n}(x) \cdot \int_\Gamma \operatorname{rot} \operatorname{rot}^x (G(\kappa, |x - y|) \mathbf{j}(y)) d\sigma(y) \\ &= \kappa^2 \mathbf{n}(x) \cdot \int_\Gamma (G(\kappa, |x - y|) \mathbf{j}(y)) d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \operatorname{div}^x \int_\Gamma (G(\kappa, |x - y|) \mathbf{j}(y)) d\sigma(y) \\ &= \kappa^2 \mathbf{n}(x) \cdot V_\kappa \mathbf{j}(x) + D_\kappa \operatorname{div}_\Gamma j(x). \end{aligned}$$

L'opérateur $\operatorname{div}_\Gamma M_\kappa$ est continu de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \operatorname{div}_\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

L'inclusion $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ étant compacte, $\operatorname{div}_\Gamma M_\kappa$ est compact de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \operatorname{div}_\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Par conséquent M_κ est compact de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \operatorname{div}_\Gamma)$ dans $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \operatorname{div}_\Gamma)$. ■

Lemme 2.3.15 *L'opérateur $C_0 \times \mathbf{n}$ est auto-adjoint et elliptique sur $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ et inversible de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ sur $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma)$.*

PREUVE. L'opérateur V_0 est auto adjoint et elliptique de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et on a

$$\begin{aligned} \langle (C_0 \mathbf{j}) \times \mathbf{n}, \mathbf{j} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Gamma} &= \langle V_0 \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Gamma} + \langle V_0 \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j}, \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j} \rangle_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \\ &\geq c_0 \left(\|\mathbf{j}\|_{\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right) \\ &= c_0 \|\mathbf{j}\|_{\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}. \end{aligned}$$

où c_0 est une constante positive. ■

Considérons les projecteurs de Caldérón $P_\kappa = \frac{1}{2}I + A_\kappa$ et $P_\kappa^c = \frac{1}{2}I - A_\kappa$ où

$$A_\kappa = \begin{pmatrix} M_\kappa & C_\kappa \\ C_\kappa & M_\kappa \end{pmatrix}.$$

On a $P_\kappa \circ P_\kappa^c \equiv 0$ donc $C_\kappa^2 = \frac{1}{4}I - M_\kappa^2$ et $C_\kappa M_\kappa + M_\kappa C_\kappa = 0$. L'opérateur C_κ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. La première égalité s'écrit :

$$(2.18) \quad \kappa^2 S_\kappa^2 + S_\kappa T_\kappa + T_\kappa S_\kappa = \frac{1}{4}I - M_\kappa^2$$

On prenant les parties principales on obtient le lemme suivant.

Lemme 2.3.16 *Soit M_0 la partie principale des opérateurs M_κ :*

$$M_0 \mathbf{j}(x) = - \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \mathbf{rot}^x \{G(0, |x - y|) \mathbf{j}(y)\} d\sigma(y).$$

On a :

$$S_0 T_0 + T_0 S_0 = \frac{1}{4}I - M_0^2$$

et

$$C_0^2 = -\frac{1}{4}I + M_0^2 + S_0^2.$$

De plus, l'opérateur $T_0 S_0$ est compact sur l'espace $Ker(\mathbf{rot}_\Gamma) \cap \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma)$ et l'opérateur $S_0 T_0$ est compact sur l'espace $Ker(\mathbf{div}_\Gamma) \cap \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma)$.

PREUVE. On regarde les parties principales des opérateurs S_κ , T_κ et M_κ et on utilise l'égalité (2.18). Soit $\mathbf{j} \in Ker(\mathbf{div}_\Gamma) \cap \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma)$, on a :

$$S_0 T_0 \mathbf{j} = (\mathbf{n} \times V_0) (\mathbf{n} \times \nabla V_0 \mathbf{div}_\Gamma \mathbf{j}) = 0.$$

Soit $\mathbf{j} \in Ker(\mathbf{rot}_\Gamma) \cap \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma)$, on a :

$$T_0 S_0 \mathbf{j} = -(\mathbf{n} \times \nabla V_0) (\mathbf{rot}_\Gamma V_0 \mathbf{j}), \text{ et } \mathbf{div}_\Gamma T_0 S_0 \mathbf{j} = 0.$$

L'opérateur $\mathbf{rot}_\Gamma V_0$ est compact sur $Ker(\mathbf{rot}_\Gamma) \cap \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma)$ puisqu'on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}_\Gamma V_0 \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma ((\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(y)) \times \nabla_\Gamma^x G(\kappa, |x - y|)) \cdot \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \\ &\quad - \int_\Gamma G(\kappa, |x - y|) \mathbf{rot}_\Gamma^y \mathbf{j}(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

■

2.3 Opérateurs de potentiels électromagnétiques

Maintenant nous allons introduire de nouveaux opérateurs intégraux de frontières moins classiques liés aux dérivées normales des opérateurs de potentiels.

Définition 2.3.17 Soit \mathbf{j} une densité de vecteurs tangents sur la surface Γ . On définit les opérateurs intégraux de frontière M_κ^\dagger et C_κ^\dagger par :

$$\begin{aligned} M_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= - \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} \mathbf{rot}^x \{G(\kappa, |x-y|) \mathbf{j}(y)\} d\sigma(y) \\ &= D_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) - B_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x), \\ C_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= -\frac{1}{\kappa} \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} \mathbf{rot} \mathbf{rot}^x \{G(\kappa, |x-y|) \mathbf{j}(y)\} d\sigma(y) \\ &= -\kappa S_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) - \frac{1}{\kappa} T_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} (G(\kappa, |x-y|) \mathbf{j}(y)) d\sigma(y), \\ B_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} \nabla^x G(\kappa, |x-y|) (\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{j}(y)) d\sigma(y), \\ D_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}(x)^2} G(\kappa, |x-y|) \mathbf{j}(y) d\sigma(y), \\ T_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} \nabla^x \{G(\kappa, |x-y|) \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{j}(y)\} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Théorème 2.3.18 Les opérateurs M_κ^\dagger et C_κ^\dagger sont des opérateurs de noyaux hyper-singuliers. L'opérateur M_κ^\dagger est linéaire et continu de $\mathbf{H}_\times^{\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ et l'opérateur C_κ^\dagger est linéaire et continu de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans lui-même.

PREUVE. L'opérateur S_κ^\dagger a la même régularité que D_κ qui est un opérateur de noyau pseudo-homogène de classe -1. En utilisant la relation de commutation entre la dérivée normale et le gradient sur la surface Γ on a

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} \nabla^x G(\kappa, |x-y|) = \nabla^x \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} G(\kappa, |x-y|) - \mathcal{R}_\Gamma \nabla_\Gamma G(\kappa, |x-y|)$$

qui est pseudo-homogène de classe 0. Par conséquent les opérateurs B_κ^\dagger et T_κ^\dagger sont continus de $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donc C_κ^\dagger aussi.

En utilisant le développement du laplacien sur la surface Γ (voir lemme 1.2.12), on obtient

$$D_\kappa^\dagger \mathbf{j} = -\kappa^2 V_\kappa \mathbf{j} - \Delta_\Gamma V_\kappa \mathbf{j} - \mathbf{H}_\Gamma D_\kappa \mathbf{j}.$$

Les opérateurs V_κ et D_κ sont de classe -1 et l'opérateur de Laplace-Beltrami est un opérateur d'ordre 2. Par conséquent l'opérateur D_κ^\dagger est continu de $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donc M_κ^\dagger aussi. On montre que les opérateurs M_κ^\dagger et C_κ^\dagger sont continus de

$\mathbf{H}_{\times}^{\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ et $\mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ respectivement dans $\mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ en utilisant la relation de commutation entre la dérivée normale et l'opérateur de divergence surfacique.

■

Tous les résultats de ce paragraphe s'étendent aux espaces $\mathbf{H}_{\times}^s(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

Chapitre 3

Représentation intégrale de la solution

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de déterminer la solution du problème du diffraction d'ondes électromagnétiques par une interface diélectrique décrit au chapitre 1. Pour ce faire nous allons utiliser les méthodes d'équations intégrales de frontières. Plus précisément nous voulons réduire le problème de diffraction à une seule équation intégrale à une inconnue sur la surface du diélectrique. La littérature scientifique est abondante en articles sur la résolution de problème aux limites extérieurs ou intérieurs liés aux équations de Maxwell par de simples équations intégrales de frontière à une inconnue ; dans le cas du diélectrique un système de deux équations est généralement utilisé [8, 31]. Cependant Kleinman et Martin présentent dans [26] deux méthodes pour résoudre le problème de transmission d'ondes acoustiques à l'aide d'une seule équation intégrale. Nous allons appliquer ces méthodes au cas électromagnétique.

La première méthode est assez classique. Dans le cas scalaire, elle consiste à représenter la solution à l'extérieur du domaine par une combinaison linéaire des opérateurs de potentiels de simple couche et de double couche appliqués à une même densité. De cette façon, on construit deux équations intégrales de frontière alternatives. En électromagnétisme, il s'agit dans un premier temps de représenter la solution à l'extérieur par une combinaison linéaire des potentiels électriques et magnétiques introduit au chapitre 2 appliqués à une même densité. Mais on sait qu'ici cela ne suffit pas à éviter les fréquences irrégulières. Plusieurs méthodes existent pour contourner cette difficulté. Notre approche consiste à modifier la représentation intégrale de la solution en multipliant l'un des opérateurs de potentiels par un opérateur intégral surfacique elliptique et inversible [41]. Contrairement au cas acoustique, les deux équations intégrales que nous obtenons ne sont pas des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce, mais les opérateurs correspondants sont de Fredholm d'indice zéro. Comme dans le cas acoustique nous introduisons un nouveau problème

aux limites intérieur et montrons que l'unicité de la solution des équations intégrales de frontières dépend de l'existence de valeurs propres de ce problème. Contrairement au cas scalaire ce n'est pas un problème d'impédance mais nous obtenons les mêmes résultats. Cette analyse est détaillée au paragraphe 3.2.1.

La seconde méthode, dans le cas scalaire, repose sur l'hypothèse que la solution à l'intérieur du domaine peut être représentée soit par le potentiel de simple couche soit par le potentiel de double couche. On construit alors deux nouvelles équations intégrales de frontières. Cette méthode s'applique directement au cas électromagnétique. On montre que les équations intégrales ainsi construites sont toujours injectives et que les opérateurs intégraux correspondants sont les formes adjointes (pour la forme bilinéaire \mathcal{B}) des opérateurs intégraux associés aux deux équations intégrales de frontières construites en utilisant la première méthode. Cette analyse est détaillée au paragraphe 3.2.2.

Nous terminons ce chapitre en donnant des conditions sur certains paramètres pour que ces équations intégrales soient inversibles pour toutes fréquences réelles.

3.2 Équations intégrales de frontière : méthodes de Kleinman-Martin

3.2.1 Ansatz sur le champ extérieur

On suppose ici que \mathbf{E}^s peut être représenté intégralement de la façon suivante :

$$(3.1) \quad \mathbf{E}^s(x) = -a(\Psi_{E_{\kappa_e}} \mathbf{j})(x) - b(\Psi_{M_{\kappa_e}} C_0 \mathbf{j})(x) \text{ dans } \Omega^c,$$

où a et b sont des constantes complexes arbitraires que nous introduisons, l'opérateur C_0 un opérateur intégrale elliptique et inversible sur $\mathbf{H}_x^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ (voir le lemme 2.3.15) et où la densité $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_x^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ est une l'inconnue que nous devons déterminer. Nous verrons plus tard comment choisir les constantes a et b pour que les équations intégrales admettent une unique solution pour toute valeur réelle et positive de κ_e^2 .

NB : Vue la symétrie qui existe entre les traces des opérateurs de potentiels $\Psi_{E_{\kappa_e}}$ et $\Psi_{M_{\kappa_e}}$, on obtiendrait les mêmes résultats en composant $\Psi_{E_{\kappa_e}}$ par C_0 . Aussi la méthode que nous allons exposer ci-dessous pour construire les équations est valable sans l'opérateur C_0 mais les équations intégrales qu'on obtiendrait seraient perturbées par une infinité de fréquences réelles quelles que soient les valeurs de a et b . La méthode qui suit pour construire les deux équations intégrales de frontières est la même que celle décrite dans l'article de Kleinman et Martin [26].

3.2 Équations intégrales de frontière : méthodes de Kleinman-Martin

On pose $\rho = \frac{\mu_e \kappa_i}{\mu_i \kappa_e}$. En utilisant les conditions de transmission et la formule de représentation de Stratton-Chu pour le champ intérieur \mathbf{E}^i on obtient :

$$(3.2) \quad \mathbf{E}^i(x) = -\frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} \gamma_{N_{\kappa_e}}^c (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^{inc})(x) - \Psi_{M_{\kappa_i}} \gamma_D^c (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^{inc})(x) \text{ dans } \Omega.$$

On applique les traces extérieures γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa_e}}^c$ à la représentation intégrale (3.1) de \mathbf{E}^s ce qui donne sur Γ :

$$(3.3) \quad \gamma_D^c \mathbf{E}^s(x) = \left\{ a C_{\kappa_e} + b \left(-\frac{1}{2} + M_{\kappa_e} \right) C_0 \right\} \mathbf{j} = L_e \mathbf{j},$$

$$(3.4) \quad \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^s(x) = \left\{ a \left(-\frac{1}{2} I + M_{\kappa_e} \right) + b C_{\kappa_e} C_0 \right\} \mathbf{j} = N_e \mathbf{j}.$$

Puisque les traces extérieures γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa_i}}$ appliquées au second membre de (3.2) doivent être nulles, on a sur Γ :

$$(3.5) \quad \rho \left(-\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) (\gamma_D^c \mathbf{E}^s + \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc}) + C_{\kappa_i} (\gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^s + \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc}) = 0,$$

$$(3.6) \quad \rho C_{\kappa_i} (\gamma_D^c \mathbf{E}^s + \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc}) + \left(-\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) (\gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^s + \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc}) = 0.$$

En substituant (3.3) et (3.4) à (3.5) on obtient une première équation sur la frontière Γ :

$$(3.7) \quad \mathbf{Sj} = \rho \left(-\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) L_e \mathbf{j} + C_{\kappa_i} N_e \mathbf{j} = f,$$

$$(3.8) \quad \text{où } f = -\rho \left(-\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc} - C_{\kappa_i} \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc}.$$

En substituant (3.3) et (3.4) à (3.6), on obtient la seconde équation intégrale :

$$(3.9) \quad \mathbf{Tj} = \rho C_{\kappa_i} L_e \mathbf{j} + \left(-\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) N_e \mathbf{j} = g,$$

$$(3.10) \quad \text{où } g = -\rho C_{\kappa_i} \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc} + \left(-\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc}.$$

Ce sont deux équations intégrales de frontières d'inconnue \mathbf{j} . Ayant résolu l'une d'entre elles on retrouve \mathbf{E}^s grâce à (3.1) et \mathbf{E}^i grâce à :

$$(3.11) \quad \mathbf{E}^i(x) = -\frac{1}{\rho} (\Psi_{E_i} \{ \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc} + N_e \mathbf{j} \}) (x) - (\Psi_{M_{\kappa_i}} \{ \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc} + L_e \mathbf{j} \}) (x).$$

Tout d'abord on va montrer que ces deux équations intégrales sont équivalentes et qu'on obtient le lemme ci-dessous. La preuve est similaire au cas acoustique.

3. Représentation intégrale de la solution

Lemme 3.2.1 *Si $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ est solution de l'une des deux équations (3.7) ou (3.9) alors \mathbf{E}^s et \mathbf{E}^i donnés par (3.1) et (3.2) sont solutions du problème de diffraction \mathcal{P} .*

PREUVE. Vues les propriétés des opérateurs de potentiels, les représentations intégrales de \mathbf{E}^s et \mathbf{E}^i satisfont les équations de Maxwell (1.2). Il nous reste à vérifier que \mathbf{E}^s et \mathbf{E}^i vérifient les conditions de transmission (1.17).

Un simple calcul nous donne :

$$(3.12) \quad \rho(\gamma_D^c \mathbf{E}^s + \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc} - \gamma_D \mathbf{E}^i) = \mathbf{Sj} - f,$$

$$(3.13) \quad \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^s + \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc} - \rho \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i = \mathbf{Tj} - g.$$

On en déduit que :

- si \mathbf{j} est solution de (3.7), l'égalité (3.12) prouve que la condition de transmission (1.17a) est satisfaite.
- si \mathbf{j} est solution de (3.9), l'égalité (3.13) prouve que la condition de transmission (1.17b) est satisfaite.

Maintenant on définit la fonction \mathbf{u} dans Ω^c par :

$$w = -\Psi_{E_{\kappa_i}} \left(\gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc} + N_{\kappa_e} \mathbf{j} \right) - \rho \Psi_{M_{\kappa_i}} \left(\gamma_D^c \mathbf{E}^{inc} + L_e \mathbf{j} \right).$$

Le champ \mathbf{u} est dans $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$ et satisfait l'équation de Maxwell

$$(3.14) \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - \kappa_i^2 \mathbf{u} = 0$$

dans Ω^c et on a sur le bord Γ :

$$\gamma_D^c \mathbf{u} = \mathbf{Sj} - f \quad \text{et} \quad \gamma_{N_{\kappa_i}}^c \mathbf{u} = \mathbf{Tj} - g.$$

Puisque \mathbf{u} est solution de (3.14) dans Ω^c et vérifie la condition de Silver-Müller on a :

$$\mathbf{j} \text{ satisfait (3.7)} \Rightarrow \gamma_D^c \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \equiv 0 \text{ sur } \Omega^c \Rightarrow \gamma_{N_{\kappa_i}}^c \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{j} \text{ satisfait (3.9)}$$

$$\mathbf{j} \text{ satisfait (3.9)} \Rightarrow \gamma_{N_{\kappa_i}}^c \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \equiv 0 \text{ sur } \Omega^c \Rightarrow \gamma_D^c \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{j} \text{ satisfait (3.7)}$$

Par conséquent si \mathbf{j} est solution de l'une ou l'autre des deux équations intégrales alors les deux conditions de transmission sont satisfaites. ■

3.2 Équations intégrales de frontière : méthodes de Kleinman-Martin

Ensuite, on va s'intéresser à l'unicité des solutions des deux équations intégrales (3.7) et (3.9), c'est-à-dire à l'existence de solutions non triviales des équations homogènes suivantes :

$$(3.15) \quad \mathbf{S}\mathbf{j}_0 = \rho \left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) L_e \mathbf{j}_0 + C_{\kappa_i} N_e \mathbf{j}_0 = 0,$$

$$(3.16) \quad \mathbf{T}\mathbf{j}_0 = \rho C_{\kappa_i} L_e \mathbf{j}_0 + \left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) N_e \mathbf{j}_0 = 0.$$

Toujours sur le modèle de [26] nous introduisons un nouveau problème aux limites intérieur mais avec une condition non naturelle sur la frontière.

Problème intérieur associé :

$$(3.17) \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad \begin{array}{l} \mathbf{rot rot} \mathbf{u} - \kappa_e^2 \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ a\gamma_D \mathbf{u} - bC_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array}$$

Ce problème n'est pas un problème d'impédance comme dans le cas scalaire mais nous obtenons les mêmes résultats à savoir le lemme suivant sur l'unité des solutions. Ici encore la preuve est similaire à celle du cas scalaire.

Lemme 3.2.2 *Les opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{T} sont injectifs si et seulement si κ_e^2 n'est pas une valeur propre du problème intérieur ci-dessus.*

PREUVE. Supposons que $\mathbf{j}_0 \neq 0$ est une solution de l'une des équations homogènes (3.15), (3.16). On construit \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_1 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(x) &= -a\Psi_{E_{\kappa_e}} \mathbf{j}_0(x) - b\Psi_{M_{\kappa_e}} C_0 \mathbf{j}_0(x) & x \in \Omega^c \\ \mathbf{u}_1(x) &= -\frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} (N_e \mathbf{j}_0)(x) - \Psi_{M_{\kappa_i}} (L_e \mathbf{j}_0)(x) & x \in \Omega \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.2.1, \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont solutions du problème de diffraction \mathcal{P} avec $\mathbf{E}^{inc} = 0$. Comme ce problème admet au plus une solution on a $\mathbf{u}_2 \equiv 0$ dans Ω^c et $\mathbf{u}_1 \equiv 0$ dans Ω . Maintenant pour $x \in \Omega$ on pose

$$\mathbf{u}(x) = -a\Psi_{E_{\kappa_e}} \mathbf{j}_0(x) - b\Psi_{M_{\kappa_e}} C_0 \mathbf{j}_0(x).$$

Sur Γ on a :

$$(3.18) \quad \gamma_D^c \mathbf{u} - \gamma_D \mathbf{u} = bC_0 \mathbf{j}_0,$$

$$(3.19) \quad \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{u} - \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u} = a\mathbf{j}_0.$$

Or $\gamma_D^c \mathbf{u} = \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{u} = 0$ sur Γ . On multiplie (3.18) par a et on compose (3.19) par bC_0 et par soustraction on obtient

$$a\gamma_D \mathbf{u} - bC_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

3. Représentation intégrale de la solution

On en déduit que soit \mathbf{u} est une fonction propre associée à la valeur propre κ_e^2 du problème intérieur, soit $\mathbf{u} \equiv 0$. Mais cette dernière possibilité peut être éliminée puisqu'on aurait $\gamma_D \mathbf{u} = \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u} = 0$ puis $\mathbf{j}_0 = 0$ d'après (3.18) et (3.19) ce qui contredirait l'hypothèse de départ.

Réciproquement, supposons que κ_e^2 est une valeur propre du problème intérieur. Soit $v_0 \neq 0$ une fonction propre associée. Alors d'après la formulation intégrale de Stratton-Chu on a :

$$\begin{aligned} -C_{\kappa_e} \gamma_{N_{\kappa_e}} v_0 + \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} - M_{\kappa_e} \right) \gamma_D v_0 &= 0, \\ \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} - M_{\kappa_e} \right) \gamma_{N_{\kappa_e}} v_0 - C_{\kappa_e} \gamma_D v_0 &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $a\gamma_D v_0 - b C_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} v_0 = 0$, on obtient $L_e \gamma_{N_{\kappa_e}} v_0 = N_e \gamma_{N_{\kappa_e}} v_0 = 0$ si $a \neq 0$ et $L_e \gamma_D v_0 = N_e \gamma_D v_0 = 0$ si $b \neq 0$.

Par conséquent si $b \neq 0$ alors $\gamma_D v_0$ est une solution non triviale des équations homogènes (3.15) et (3.16) et si $a \neq 0$ alors $\gamma_{N_{\kappa_e}} v_0$ est une solution non triviale de (3.15) et (3.16). ■

Maintenant que nous avons établi des critères d'unicité de la solution des équations intégrales nous allons montrer que les opérateurs correspondants sont de Fredholm d'indice zéro. Dans les théorèmes suivants nous donnons des conditions sur les constantes a , b , μ_e , μ_i , κ_e et κ_i pour que les opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{T} soient de Fredholm d'indice zéro.

Théorème 3.2.3 *Supposons que les constantes a , b , μ_e , μ_i , κ_e et κ_i satisfont :*

$$(b\kappa_e + 2a) \neq 0, \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_i} \right) \neq 0, (b - 2a\kappa_e) \neq 0 \text{ et } \left(1 + \frac{\mu_e \kappa_i^2}{\mu_i \kappa_e^2} \right) \neq 0.$$

Alors \mathbf{S} est opérateur intégral de noyau hypersingulier et de Fredholm d'indice zéro sur $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$.

PREUVE. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{4} b \rho C_0 - \frac{1}{2} b \rho \underbrace{(M_{\kappa_i} + M_{\kappa_e}) C_0}_{\text{compact}} + b \rho \underbrace{M_{\kappa_i} M_{\kappa_e} C_0}_{\text{compact}} - \frac{1}{2} a \rho \underbrace{(C_{\kappa_e} - C_{\kappa_e,0})}_{\text{compact}} \\ &\quad - \frac{1}{2} a \underbrace{(C_{\kappa_i} - C_{\kappa_i,0})}_{\text{compact}} - \frac{1}{2} a (\rho C_{\kappa_e,0} + C_{\kappa_i,0}) + a \rho \underbrace{M_{\kappa_i} C_{\kappa_e}}_{\text{compact}} + a \underbrace{C_{\kappa_i} M_{\kappa_e}}_{\text{compact}} \\ &\quad + b \underbrace{(C_{\kappa_i} - C_{\kappa_i,0})}_{\text{compact}} C_{\kappa_e} C_0 + b C_{\kappa_i,0} \underbrace{(C_{\kappa_e} - C_{\kappa_e,0})}_{\text{compact}} C_0 + b C_{\kappa_i,0} C_{\kappa_e,0} C_0 \end{aligned}$$

L'opérateur \mathbf{S} est donc une perturbation compacte de l'opérateur

$$\mathbf{S}_1 = b \left(\frac{1}{4} \rho I + C_{\kappa_i,0} C_{\kappa_e,0} \right) C_0 - \frac{1}{2} a (\rho C_{\kappa_e,0} + C_{\kappa_i,0}).$$

3.2 Équations intégrales de frontière : méthodes de Kleinman-Martin

Nous allons montrer que \mathbf{S}_1 est de Fredholm d'indice zéro. Pour ce faire nous allons utiliser la décomposition de Helmholtz de l'espace $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ et réécrire l'opérateur \mathbf{S}_1 en un opérateur défini sur $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R} \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}$.

Tout élément $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ admet la décomposition unique suivante

$$\mathbf{j} = \nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q,$$

où $p \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}$ et $q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}$. On considère alors l'opérateur :

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R} \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R} \\ \mathbf{j} = \nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q &\mapsto \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est un isomorphisme bicontinu. Pour montrer que \mathbf{S}_1 est de Fredholm d'indice zéro il suffit de montrer que $\mathcal{H}\mathbf{S}_1\mathcal{H}^{-1}$ l'est. Commençons par réécrire les opérateurs $\mathcal{H}C_0\mathcal{H}^{-1}$ et $\mathcal{H}C_{\kappa,0}\mathcal{H}^{-1}$ sur $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R} \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}$. Nous devons alors déterminer $P_0 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}$ et $Q_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}$ tels que $C_0(\nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q) = \nabla_\Gamma P_0 + \mathbf{rot}_\Gamma Q_0$ et on aura :

$$\mathcal{H}C_0\mathcal{H}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}.$$

D'après la remarque 1.2.23 on a

$$P_0 = \Delta_\Gamma^{-1} \text{div}_\Gamma C_0(\nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q)$$

et

$$Q_0 = -\Delta_\Gamma^{-1} \mathbf{rot}_\Gamma C_0(\nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q).$$

Nous rappelons que l'opérateur C_0 est défini pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par

$$C_0\mathbf{j} = S_0\mathbf{j} - T_0\mathbf{j},$$

avec

$$\begin{aligned} S_0\mathbf{j}(x) &= \int_\Gamma \mathbf{n}(x) \times \frac{\mathbf{j}(y)}{4\pi|x-y|} d\sigma(y) = \mathbf{n}(x) \times V_0\mathbf{j}(x), \\ T_0\mathbf{j}(x) &= -\int_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma^x \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} \text{div}_\Gamma \mathbf{j}(y) \right) d\sigma(y) = -\mathbf{rot}_\Gamma V_0 \text{div}_\Gamma \mathbf{j}(x). \end{aligned}$$

En appliquant div_Γ et \mathbf{rot}_Γ à C_0 on obtient :

$$\begin{aligned} \text{div}_\Gamma C_0(\nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q) &= -\mathbf{rot}_\Gamma V_0 (\nabla_\Gamma p(y) + \mathbf{rot}_\Gamma q(y)), \\ \mathbf{rot}_\Gamma C_0(\nabla_\Gamma p + \mathbf{rot}_\Gamma q) &= \text{div}_\Gamma V_0 (\nabla_\Gamma p(y) + \mathbf{rot}_\Gamma q(y)) - \Delta_\Gamma V_0 \Delta_\Gamma p(y). \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\mathcal{H}C_0\mathcal{H}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21,1} + C_{21,2} & C_{22} \end{pmatrix},$$

3. Représentation intégrale de la solution

où

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\Delta_\Gamma^{-1} \operatorname{rot}_\Gamma V_0 \nabla_\Gamma \text{ qui est un opérateur d'ordre } -2, \\ C_{12} &= -\Delta_\Gamma^{-1} \operatorname{rot}_\Gamma V_0 \mathbf{rot}_\Gamma \text{ qui est un opérateur d'ordre } -1, \\ C_{21,1} &= -\Delta_\Gamma^{-1} \operatorname{div}_\Gamma V_0 \nabla_\Gamma \text{ qui est un opérateur d'ordre } -1, \\ C_{21,2} &= V_0 \Delta_\Gamma \text{ qui est un opérateur d'ordre } 1, \\ C_{22} &= -\Delta_\Gamma^{-1} \operatorname{div}_\Gamma V_0 \mathbf{rot}_\Gamma \text{ qui est un opérateur d'ordre } -2. \end{aligned}$$

Puisque $C_{\kappa,0}$ est défini pour pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ par

$$C_{\kappa,0} \mathbf{j} = -\kappa S_0 \mathbf{j} - \kappa^{-1} T_0 \mathbf{j}$$

on en déduit immédiatement l'écriture de $\mathcal{H} C_{\kappa,0} \mathcal{H}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} C_{\kappa,0} \mathcal{H}^{-1} &= \begin{pmatrix} -\kappa C_{11} & -\kappa C_{12} \\ -\kappa C_{21,1} + \kappa^{-1} C_{21,2} & -\kappa C_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & \kappa^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{C}_0^* - (\kappa + \kappa^{-1}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{21,1} & C_{22} \end{pmatrix}}_{\text{compact}}. \end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite est compact sur $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R} \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/\mathbb{R}$.

Puisque $\mathcal{H} C_{\kappa,0} \mathcal{H}^{-1}$ est une perturbation compacte de

$$\begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & \kappa^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{H} C_0 \mathcal{H}^{-1},$$

la somme $\mathcal{H} C_{\kappa_i,0} \mathcal{H}^{-1} + \rho \mathcal{H} C_{\kappa_e,0} \mathcal{H}^{-1}$ est une perturbation compacte de

$$\begin{pmatrix} -(\kappa_i + \rho \kappa_e) & 0 \\ 0 & (\kappa_i^{-1} + \rho \kappa_e^{-1}) \end{pmatrix} \mathcal{H} C_0 \mathcal{H}^{-1}.$$

Quant au produit $C_{\kappa_i,0} C_{\kappa_e,0}$ nous avons :

$$C_{\kappa_i,0} C_{\kappa_e,0} = \kappa_i \kappa_e S_0^2 + \kappa_i \kappa_e^{-1} S_0 T_0 + \kappa_e \kappa_i^{-1} T_0 S_0.$$

D'après le lemme 2.3.16 on en déduit que $(\mathcal{H} C_{\kappa_i,0} \mathcal{H}^{-1}) (\mathcal{H} C_{\kappa_e,0} \mathcal{H}^{-1})$ est une perturbation compacte de

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \kappa_i \kappa_e^{-1} & 0 \\ 0 & \kappa_i^{-1} \kappa_e \end{pmatrix}.$$

En rassemblant tous les résultats ci-dessus, on trouve que $\mathcal{H} \mathbf{S}_1 \mathcal{H}^{-1}$ est une perturbation compacte de

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} b(\rho + \kappa_i \kappa_e^{-1}) - \frac{1}{2} a(\kappa_i + \rho \kappa_e) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} b(\rho + \kappa_i^{-1} \kappa_e) + \frac{1}{2} a(\kappa_i^{-1} + \rho \kappa_e^{-1}) \end{pmatrix} \mathcal{H} C_0 \mathcal{H}^{-1}.$$

3.2 Équations intégrales de frontière : méthodes de Kleinman-Martin

Nous rappelons que $\rho = \frac{\mu_e \kappa_i}{\mu_i \kappa_e}$. La matrice ci-dessus est inversible si :

$$\frac{1}{4}b(\rho + \kappa_i \kappa_e^{-1}) - \frac{1}{2}a(\kappa_i + \rho \kappa_e) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(b - 2a\kappa_e) \left(1 + \frac{\mu_i \kappa_e^2}{\mu_e \kappa_i^2}\right) \neq 0$$

et

$$\frac{1}{4}b(\rho + \kappa_i^{-1} \kappa_e) + \frac{1}{2}a(\kappa_i^{-1} + \rho \kappa_e^{-1}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(b\kappa_e + 2a) \left(1 + \frac{\mu_i}{\mu_e}\right) \neq 0.$$

Puisque l'opérateur C_0 est inversible et sous les conditions du théorème on conclut que l'opérateur $\mathcal{H}\mathbf{S}_1\mathcal{H}^{-1}$ est de Fredholm d'indice zéro et donc \mathbf{S} aussi. ■

Nous avons un théorème similaire pour l'opérateur \mathbf{T} .

Théorème 3.2.4 *Supposons que les constantes $a, b, \mu_e, \mu_i, \kappa_e$ et κ_i satisfont :*

$$\left(a \left(1 + \frac{\mu_e \kappa_i^2}{\mu_i \kappa_e^2}\right) + \frac{b}{2\kappa_e} \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_i}\right)\right) \cdot \left(a \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_i}\right) - \frac{b\kappa_e}{2} \left(1 + \frac{\mu_e \kappa_i^2}{\mu_i \kappa_e^2}\right)\right) \neq 0$$

Alors \mathbf{T} est un opérateur intégral de noyau hypersingulier et Fredholm d'indice zéro sur $\mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$.

PREUVE. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & \frac{a}{4} \mathbf{I} - \frac{a}{2} \underbrace{(M_{\kappa_i} + M_{\kappa_e})}_{\text{compact}} + a \underbrace{M_{\kappa_i} M_{\kappa_e}}_{\text{compact}} - \frac{b}{2} \underbrace{(C_{\kappa_e} - C_{\kappa_e,0})}_{\text{compact}} C_0 \\ & - \frac{b\rho}{2} \underbrace{(C_{\kappa_i} - C_{\kappa_i,0})}_{\text{compact}} C_0 - \frac{1}{2} b (C_{\kappa_e,0} + \rho C_{\kappa_i,0}) C_0 + b \underbrace{M_{\kappa_i} C_{\kappa_e} C_0}_{\text{compact}} + b\rho \underbrace{C_{\kappa_i} M_{\kappa_e} C_0}_{\text{compact}} \\ & + a\rho \underbrace{(C_{\kappa_i} - C_{\kappa_i,0})}_{\text{compact}} C_{\kappa_e} + a\rho C_{\kappa_i,0} \underbrace{(C_{\kappa_e} - C_{\kappa_e,0})}_{\text{compact}} + a\rho C_{\kappa_i,0} C_{\kappa_e,0} \end{aligned}$$

L'opérateur \mathbf{T} est une perturbation compacte de l'opérateur

$$\mathbf{T}_1 = a \left(\frac{1}{4} \mathbf{I} + \rho C_{\kappa_i,0} C_{\kappa_e,0} \right) - \frac{b}{2} (C_{\kappa_e,0} + \rho C_{\kappa_i,0}) C_0.$$

Nous devons montrer que l'opérateur \mathbf{T}_1 est de Fredholm d'indice zéro. Pour ce faire nous allons procéder comme précédemment, nous allons considérer l'opérateur $\mathcal{H}\mathbf{T}_1\mathcal{H}^{-1}$. Sachant que C_0^2 est une perturbation compacte de $-\frac{1}{4} \mathbf{I}$ (lemme 2.3.16) on montre que l'opérateur $(\mathcal{H}C_{\kappa_e,0}\mathcal{H}^{-1} + \rho\mathcal{H}C_{\kappa_i,0}\mathcal{H}^{-1})\mathcal{H}C_0\mathcal{H}^{-1}$ est une perturbation compacte de

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \kappa_i + \rho\kappa_e & 0 \\ 0 & -(\kappa_i^{-1} + \rho\kappa_e^{-1}) \end{pmatrix}.$$

3. Représentation intégrale de la solution

Finalement on obtient que $\mathcal{H}\mathbf{T}_1\mathcal{H}^{-1}$ est une perturbation compacte de

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}a \left(1 + \rho \frac{\kappa_i}{\kappa_e}\right) - \frac{1}{2}b(\kappa_i + \rho\kappa_e) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}a \left(1 + \rho \frac{\kappa_e}{\kappa_i}\right) + \frac{1}{2}b(\kappa_i^{-1} + \rho\kappa_e^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Sous les conditions du théorème cette matrice est bien inversible, par conséquent $\mathcal{H}\mathbf{T}_1\mathcal{H}^{-1}$ est de Fredholm d'indice zéro donc \mathbf{T} aussi. \blacksquare

Dans la dernière section nous rassemblons tous ces lemmes et donnons les valeurs de a et b pour que ces équations intégrales admettent exactement une solution pour toute valeur réelle du nombre d'onde à l'extérieur κ_e (indépendamment de κ_i).

3.2.2 Ansatz sur le champ intérieur

Dans ce paragraphe on suppose que \mathbf{E}^i peut être représenté soit par le potentiel $\Psi_{E_{\kappa_i}}\mathbf{j}$ soit par le potentiel $\Psi_{M_{\kappa_i}}\mathbf{j}$ où $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ est l'inconnue qu'on doit déterminer. D'après la représentation intégrale de Stratton-Chu on a :

$$(3.21) \quad \mathbf{E}^s(x) = \Psi_{E^s}(\gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{tot})(x) + \Psi_{M_{\kappa_e}}(\gamma_D^c \mathbf{E}^{tot})(x) \quad x \in \Omega^c$$

La méthode qui suit pour construire deux nouvelles équations intégrales est similaire à celle décrite dans l'article de Kleinman et Martin [26] pour le cas scalaire.

On applique les traces extérieures γ_D^c et $\gamma_{N_{\kappa_e}}^c$ à l'expression (3.21), puis en utilisant les conditions de transmission (1.17a) et (1.17b), on obtient sur Γ :

$$(3.22) \quad \gamma_D^c \mathbf{E}^s = \gamma_D \mathbf{E}^i - \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc} = -\rho C_{\kappa_e} \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i + \left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_e}\right) \gamma_D \mathbf{E}^i,$$

$$(3.23) \quad \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^s = \rho \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i - \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc} = -C_{\kappa_e} \gamma_D \mathbf{E}^i + \rho \left(-\frac{1}{2}I + M_{\kappa_e}\right) \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i.$$

Dans le cas scalaire, pour construire les équations intégrales, on prend une combinaison linéaire de (3.22) et de (3.23). Ici on multiplie (3.22) par a et on applique bC_0 à (3.23) puis on les soustrait pour obtenir :

$$(3.24) \quad \rho L'_e \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i - N'_e \gamma_D \mathbf{E}^i = h \quad \text{sur } \Gamma$$

où les opérateurs L'_e et N'_e sont définis pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ par :

$$L'_e \mathbf{j} = \left\{ a C_{\kappa_e} - b C_0 \left(\frac{1}{2} + M_{\kappa_e} \right) \right\} \mathbf{j},$$

3.2 Équations intégrales de frontière : méthodes de Kleinman-Martin

$$N'_e \mathbf{j} = \left\{ -a \left(\frac{1}{2} I + M_{\kappa_e} \right) + b C_0 C_{\kappa_e} \right\} \mathbf{j},$$

et

$$(3.25) \quad h = a \gamma_D \mathbf{E}^{inc} - b C_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc} \quad \text{sur } \Gamma, h \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma).$$

Si \mathbf{E}^i est représenté par le potentiel $\Psi_{E_{\kappa_i}}$ appliqué à une densité $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$:

$$(3.26) \quad \mathbf{E}^i(x) = -(\Psi_{E_{\kappa_i}} \mathbf{j})(x), \quad x \in \Omega.$$

On obtient :

$$(3.27) \quad \gamma_D \mathbf{E}^i = C_{\kappa_i} \mathbf{j} \quad \text{et} \quad \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i = \left(\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{j} \quad \text{sur } \Gamma$$

En substituant (3.27) à (3.24), on obtient :

$$(3.28) \quad \mathbf{S}' \mathbf{j} = \left\{ \rho L'_e \left(\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) - N'_e C_{\kappa_i} \right\} \mathbf{j} = h \quad \text{sur } \Gamma$$

C'est une équation intégrale d'inconnue $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. Ayant résolu cette équation, on construit \mathbf{E}^s et \mathbf{E}^i par les représentations (3.26) et :

$$(3.29) \quad \mathbf{E}^s = \rho \left(\Psi_{E_{\kappa_e}} \left\{ \frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right\} \mathbf{j} \right) (x) + (\Psi_{M_{\kappa_e}} C_{\kappa_i} \mathbf{j})(x) \quad x \in \Omega^c.$$

Si \mathbf{E}^i est représenté par le potentiel $\Psi_{M_{\kappa_i}}$ appliqué à une densité $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$:

$$(3.30) \quad \mathbf{E}^i(x) = -(\Psi_{M_{\kappa_i}} \mathbf{m})(x), \quad x \in \Omega.$$

On obtient :

$$(3.31) \quad \gamma_D \mathbf{E}^i = \left(\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{m} \quad \text{et} \quad \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i = C_{\kappa_i} \mathbf{m} \quad \text{sur } \Gamma.$$

En substituant (3.31) à (3.24), on obtient :

$$(3.32) \quad \mathbf{T}' \mathbf{m} = \left\{ \rho L'_e C_{\kappa_i} - N'_e \left(\frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right) \right\} \mathbf{m} = h \quad \text{sur } \Gamma.$$

C'est une équation intégrale d'inconnue $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. Ayant résolu cette équation, on retrouve \mathbf{E}^i et \mathbf{E}^s par les représentations (3.30) et :

$$(3.33) \quad \mathbf{E}^s(x) = \rho \left(\Psi_{E_{\kappa_e}} C_{\kappa_i} \mathbf{m} \right) (x) + \left(\Psi_{M_{\kappa_e}} \left\{ \frac{1}{2} I + M_{\kappa_i} \right\} \mathbf{m} \right) (x), \quad x \in \Omega^c.$$

Contrairement à la méthode précédente les deux équations intégrales que nous avons construites ne sont pas équivalentes. Le théorème suivant est la version correspondante au théorème 3.2.1. La preuve est similaire à celle du cas scalaire.

3. Représentation intégrale de la solution

Théorème 3.2.5 *On suppose que κ_e^2 n'est pas une valeur propre du problème intérieur (3.17).*

Si $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ est solution de (3.28), \mathbf{E}^i et \mathbf{E}^s , donnés par (3.26) et (3.29) respectivement, sont solution du problème de transmission.

Si $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ est solution de (3.32), \mathbf{E}^i et \mathbf{E}^s , donnés par (3.30) et (3.33) respectivement, sont solution du problème de transmission.

PREUVE. Dans chaque cas les représentations intégrales de \mathbf{E}^i et \mathbf{E}^s satisfont les équations de Maxwell (1.2) et la condition de Silver Müller (1.19). Il reste donc à prouver que les conditions de transmission (1.17a) et (1.17b) sont satisfaites. Nous allons faire la preuve dans le cas de l'équation (3.32), les arguments étant similaires pour (3.28).

Supposons que \mathbf{m} est solution de (3.32) que l'on réécrit ainsi :

$$(3.34) \quad \begin{aligned} & a \left\{ \rho C_{\kappa_e} C_{\kappa_i} \mathbf{m} + \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_e} \right) \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{m} - \gamma_D \mathbf{E}^{inc} \right\} \\ & - b C_0 \left\{ \rho \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_e} \right) C_{\kappa_i} \mathbf{m} + C_{\kappa_e} \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{m} - \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la représentation intégrale (3.33) de \mathbf{E}^s , on obtient :

$$\begin{aligned} (\gamma_D^c \mathbf{E}^s + \gamma_D^c \mathbf{E}^{inc} - \gamma_D \mathbf{E}^i) &= -\rho C_{\kappa_e} C_{\kappa_i} \mathbf{m} - \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_e} \right) \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{m} + \gamma_D \mathbf{E}^{inc}, \\ (\gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^s + \gamma_{N_{\kappa_e}}^c - \rho \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i) &= -\rho \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_e} \right) C_{\kappa_i} \mathbf{m} - C_{\kappa_e} \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{m} + \gamma_{N_{\kappa_e}}^c \mathbf{E}^{inc}. \end{aligned}$$

On doit montrer que les membres de droites des égalités ci-dessus sont nuls.

On introduit la fonction \mathbf{v} définie sur Ω par :

$$\mathbf{v}(x) = -\rho \Psi_{E_{\kappa_e}} C_{\kappa_i} \mathbf{m} - \Psi_{M_{\kappa_e}} \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{m} - \mathbf{E}^{inc}.$$

D'après (3.34) on a $a\gamma_D v - b\gamma_{N_{\kappa_e}} v = 0$. Puisque \mathbf{E}^{inc} satisfait l'équation de Maxwell $\text{rot rot } \mathbf{v} - \kappa_e^2 \mathbf{v} = 0$ dans Ω alors \mathbf{v} aussi. Par hypothèse κ_e^2 n'est pas une valeur propre du problème intérieur donc $v \equiv 0$ dans Ω . En particulier, $\gamma_D v$ et $\gamma_{N_{\kappa_e}} v$ sont nuls et, par conséquent, les égalités (3.2.2) et (3.2.2) montrent que les conditions de transmission sont satisfaites. ■

Théorème 3.2.6 *Les opérateurs \mathbf{S}' et \mathbf{T}' sont injectifs.*

PREUVE. Nous allons faire la preuve juste pour l'opérateur \mathbf{T}' , les mêmes arguments étant valables pour \mathbf{S}' .

Supposons que $\mathbf{m}_0 \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ est solution de l'équation homogène :

3.3 Équations intégrales sans fréquences irrégulières

$$(3.35) \quad \mathbf{T}'\mathbf{m}_0 = \rho L'_e C_{\kappa_i} \mathbf{m}_0 - N'_e \left(\frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right) \mathbf{m}_0 = 0.$$

On veut montrer que $\mathbf{m}_0 = 0$.

On construit \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 comme ci-dessous :

$$\mathbf{v}_2(x) = \rho(\Psi_{E_{\kappa_e}} C_{\kappa_i} \mathbf{m}_0)(x) + \left(\Psi_{M_{\kappa_e}} \left\{ \frac{1}{2}I + M_{\kappa_i} \right\} \mathbf{m}_0 \right)(x), \quad x \in \Omega^c,$$

et

$$\mathbf{v}_1(x) = -(\Psi_{M_{\kappa_i}} \mathbf{m}_0)(x), \quad x \in \Omega.$$

D'après le th 3.2.5, ces fonctions sont solutions du problème de diffraction homogène (i.e. quand $\mathbf{E}^{inc} \equiv 0$), et par conséquent $\mathbf{v}_1 \equiv 0$ dans Ω et $\mathbf{v}_2 \equiv 0$ dans Ω^c . Maintenant on définit

$$\mathbf{v}(x) = -(\Psi_{M_{\kappa_i}} \mathbf{m}_0)(x) \quad x \in \Omega^c$$

On a $\gamma_{N_{\kappa_i}}^c \mathbf{v} = \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{v} = C_{\kappa_i} \mathbf{m}_0 = 0$. Puisque \mathbf{v} satisfait la condition de Silver-Müller on a $\mathbf{v} \equiv 0$ dans Ω^c . Par conséquent $\mathbf{v} \equiv 0$ dans \mathbb{R}^3 et $[\gamma_D] \mathbf{v} = \mathbf{m}_0 = 0$. ■

Remarque 3.2.7 *Les opérateurs \mathbf{S}' et \mathbf{T}' sont les adjoints respectifs des opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{T} pour la forme bilinéaire \mathcal{B} , par conséquent ils sont également de Fredholm d'indice zéro sous les mêmes hypothèses que les théorèmes 3.2.3 et 3.2.4.*

3.3 Équations intégrales sans fréquences irrégulières

Pour que les quatres équations intégrales que nous avons construites admettent une unique solution pour toutes valeurs réelles et positives de κ_e , nous allons choisir les constantes a et b telles que le problème intérieur :

$$(a, b) \neq (0, 0) \quad \begin{array}{ll} \mathbf{rot rot u} - \kappa_e^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ a\gamma_D \mathbf{u} - b C_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array}$$

n'admette pas de valeur propre réelles et positives.

Lemme 3.3.1 *Si $\Im \left(\frac{b}{a} \right) \neq 0$ alors le problème aux limites intérieur ci-dessus n'admet pas de valeurs propres réelles.*

3. Représentation intégrale de la solution

PREUVE. Soit κ_e^2 une valeur propre du problème ci-dessus tel que $\kappa_e \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{u} \neq 0$ une fonction propre. En utilisant la formule d'intégration par partie (1.14), on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{rot} \mathbf{u}|^2 - \kappa_e^2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 &= \kappa_e \mathcal{B}(\gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u}, \gamma_D \mathbf{u}) = \frac{a\kappa_e}{b} \mathcal{B}((C_0)^{-1}(\gamma_D \mathbf{u}), \gamma_D \mathbf{u}) \text{ si } b \neq 0 \\ &= \kappa_e \overline{\left(\frac{b}{a}\right)} \mathcal{B}(\gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u}, C_0(\gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u})) \text{ si } a \neq 0 \end{aligned}$$

En prenant la partie imaginaire des égalités ci-dessus et sous l'hypothèse du lemme, on en déduit que

$$\mathcal{B}((C_0)^{-1}(\gamma_D \mathbf{u}), \gamma_D \mathbf{u}) = 0 \text{ et } \mathcal{B}(\gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u}, C_0(\gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u})) = 0.$$

Comme C_0 est elliptique pour la forme bilinéaire \mathcal{B} , les traces $\gamma_D \mathbf{u}$ et $\gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u}$ sont nécessairement nulles. On en déduit que $\mathbf{u} = 0$ d'après la formule de Stratton-Chu, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 3.3.2 *Supposons que :*

- (i) κ_e est un réel strictement positif,
- (ii) $a = 1$ et $b = i\eta$ avec $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- (iii) $\frac{\mu_i}{\mu_e} \neq -1$, $\frac{\mu_e \kappa_i^2}{\mu_i \kappa_e^2} \neq -1$.

Alors les opérateurs \mathbf{S} , \mathbf{T} , \mathbf{S}' et \mathbf{T}' sont des opérateurs inversibles. De plus, étant donné $\mathbf{E}^{inc} \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$, les représentations intégrales $\{(3.1), (3.11)\}$, $\{(3.26), (3.29)\}$ et $\{(3.30), (3.33)\}$ de \mathbf{E}^i et \mathbf{E}^s donnent la solution du problème de diffraction diélectrique pour toutes valeurs réelles de κ_e .

PREUVE. D'après le théorème 1.6.1, l'hypothèse (i) implique que le problème de diffraction diélectrique admet une unique solution. D'après le lemme 3.3.1, l'hypothèse (ii) nous donne l'unicité des équations intégrales. Enfin les conditions énoncées aux théorèmes 3.2.3 et 3.2.4 pour que les quatres opérateurs intégraux soient de Fredholm d'indice zéro se résument aux conditions (iii). ■

Remarque 3.3.3 *Les résultats de ce chapitre se généralisent aux espaces $\mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ pour $s \in \mathbb{R}$. Étant donné $\mathbf{E}^{inc} \in \mathbf{H}_{loc}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$, les équations intégrales admettent une unique solution dans $\mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ et les représentations intégrales $\{(3.1), (3.11)\}$, $\{(3.26), (3.29)\}$ et $\{(3.30), (3.33)\}$ de \mathbf{E}^i et \mathbf{E}^s donnent la solution du problème dans $\mathbf{H}_{loc}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$.*

3.3 Équations intégrales sans fréquences irrégulières

▷ Récapitulatif

La quantité qui nous intéresse est le champ lointain associé à la solution du problème de diffraction diélectrique. On obtient sa représentation intégrale en remplaçant les opérateurs de potentiels Ψ_{E_κ} et Ψ_{M_κ} par $\Psi_{E_\kappa}^\infty$ et $\Psi_{M_\kappa}^\infty$ (voir (2.9)). Dans le tableau ci-dessous sont répertoriées les quatres équations intégrales de frontières ainsi que la représentation intégrale du champ lointain correspondante. On rappelle que $\rho = \frac{\mu_e \kappa_i}{\mu_i \kappa_e}$ et que η est un réel.

Équation intégrale	Représentation intégrale du champ lointain
$\mathbf{S}\mathbf{j} = -\rho \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i}\right) \gamma_D \mathbf{E}^{inc} - C_{\kappa_i} \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc}$	$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty \mathbf{j} - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty C_0 \mathbf{j}$
$\mathbf{T}\mathbf{j} = -\rho C_{\kappa_i} \gamma_D \mathbf{E}^{inc} - \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i}\right) \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc}$	$\mathbf{E}^\infty = -\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty \mathbf{j} - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty C_0 \mathbf{j}$
$\mathbf{S}'\mathbf{j} = \gamma_D \mathbf{E}^{inc} - i\eta C_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc}$	$\mathbf{E}^\infty = \rho \Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i}\right) \mathbf{j} + \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty C_{\kappa_i} \mathbf{j}$
$\mathbf{T}'\mathbf{j} = \gamma_D \mathbf{E}^{inc} - i\eta C_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc}$	$\mathbf{E}^\infty = \rho \Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty C_{\kappa_i} \mathbf{j} + \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i}\right) \mathbf{j}$

Et les opérateurs \mathbf{S} , \mathbf{T} , \mathbf{S}' et \mathbf{T}' s'écrivent :

$$\mathbf{S} = C_{\kappa_i} \left(\left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) + i\eta C_{\kappa_e} C_0 \right) + \rho \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i} \right) \left(C_{\kappa_e} + i\eta \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) C_0 \right),$$

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i} \right) \left(\left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) + i\eta C_{\kappa_e} C_0 \right) + \rho C_{\kappa_i} \left(C_{\kappa_e} + i\eta \left(-\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) C_0 \right),$$

$$\mathbf{S}' = \left(\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) - i\eta C_0 C_{\kappa_e} \right) C_{\kappa_i} + \rho \left(C_{\kappa_e} - i\eta C_0 \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) \right) \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i} \right),$$

$$\mathbf{T}' = \left(\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) - i\eta C_0 C_{\kappa_e} \right) \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_i} \right) + \rho \left(C_{\kappa_e} - i\eta C_0 \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) \right) C_{\kappa_i}.$$

Chapitre 4

Simulations numériques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques expériences numériques pour illustrer les principales propriétés des quatre équations intégrales construites au chapitre précédent.

Les équations intégrales ont été implémentées avec *Inversion Studio* développé par R. Potthast et son équipe à Reading et qui est une bibliothèque de résolution d'équations intégrales surfaciques et de problèmes inverses acoustiques et électromagnétiques avec interface graphique et utilisant le langage de programmation MATLAB. Cette bibliothèque permet de réaliser des discrétisations de bas degré des opérateurs intégraux surfaciques. Nous avons contribué à quelques modules de cette bibliothèque permettant la discrétisation des opérateurs intégraux surfaciques intervenant dans le problème de diffraction diélectrique.

Dans la limite de la capacité de calcul de ce logiciel, nous avons testé la convergence de la solution des équations intégrales discrétisées puis nous avons vérifié que sous les conditions du lemme 3.3.1, les équations intégrales sont bien inversibles pour toute la plage des fréquences réelles. Les résultats sont présentés en section 4.3 pour une sphère diélectrique et en section 4.4 pour un cube diélectrique.

La méthode de discrétisation des opérateurs intégraux surfaciques généralement utilisée avec ce logiciel est la méthode de Nyström. Mais les équations intégrales que nous avons construites sont composées d'opérateurs hypersinguliers donc la méthode de Nyström seule ne convient pas tout à fait. Nous avons utilisé une approximation par éléments finis pour discrétiser la partie hypersingulière de l'opérateur C_κ . Nous débutons ce chapitre par une brève description de la méthode de discrétisation des opérateurs utilisée. Nous précisons que nous n'avons pas encore entrepris l'étude de la convergence de la méthode de discrétisation.

4.2 Schéma numérique

Les opérateurs \mathbf{S} , \mathbf{T} , \mathbf{S}' et \mathbf{T}' sont des isomorphismes de $\mathbf{H}_x^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ dans lui-même. Pour discrétiser ces opérateurs nous devons tout d'abord construire un espace de dimension finie qui approche $\mathbf{H}_x^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$.

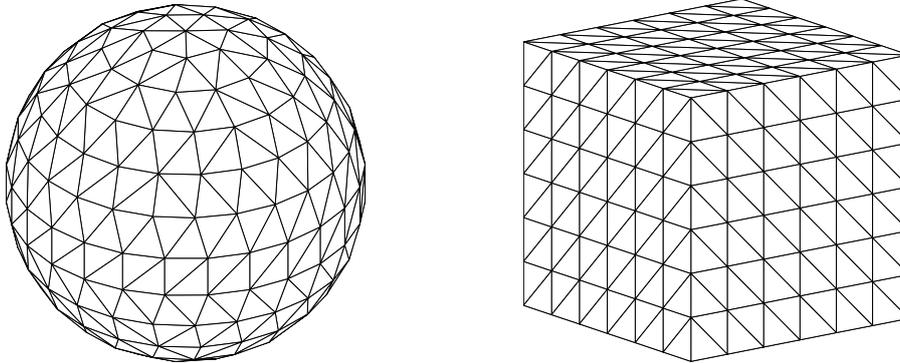
▷ Pour la discrétisation de la surface Γ on choisit la triangulation.

On choisit un pas h et on approche la surface Γ par un ensemble fini \mathcal{T}_h de triangles tels que :

- Les sommets des triangles sont sur la surface Γ ,
- Soient T et T' deux triangles distincts de \mathcal{T}_h . On a :

$$T \cap T' = \begin{cases} \text{vide} \\ \text{ou un sommet} \\ \text{ou une arête.} \end{cases}$$

- Le diamètre d'un triangle appartenant à \mathcal{T}_h est inférieure ou égale à h .
- On pose $\Gamma_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ et on a $\Gamma_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Gamma$.



Triangulations de la sphère unité et du cube unité.

On pose $N_t = \text{card}(\mathcal{T}_h)$ et N_s le nombre de sommets. Numérotons T_1, T_2, \dots, T_{N_t} l'ensemble des triangles appartenant à \mathcal{T}_h et p_1, \dots, p_{N_s} les sommets. On note c_1, \dots, c_{N_t} l'ensemble des barycentres des triangles T_1, \dots, T_{N_t} .

▷ On construit un espace de fonctions définies sur Γ_h .

On note $\mathcal{P}^k(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur Γ_h et polynomiales de degré k sur chaque triangle de \mathcal{T}_h . Pour approcher l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ nous choisissons les fonctions de plus bas degré à savoir les constantes par morceaux $\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$. C'est un espace de dimension finie N_t engendré par la base de fonctions

4.2 Schéma numérique

$(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_t})$ définies pour $j = 1, \dots, N_t$ par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in T_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Toute fonction dans $\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ est uniquement déterminée par ses valeurs aux centres c_1, \dots, c_{N_t} . Pour approcher l'espace $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ nous considérons les fonctions vectorielles de $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$ et tangentes à la surfaces Γ_h que nous noterons $\mathcal{P}_\times^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$. C'est un espace de dimension $2N_t$.

▷ On discrétise les opérateurs intégraux M_κ, C_κ et C_0 intervenant dans les équations intégrales (3.7) et (3.9) ainsi que les opérateur de champ lointain $\Psi_{E_\kappa}^\infty$ et $\Psi_{M_\kappa}^\infty$ en utilisant différentes approximations des noyaux.

(i) Pour les opérateurs faiblement singuliers on utilise la méthode de Nyström. On rappelle brièvement la méthode : considérons l'opérateur intégral

$$A : u \mapsto \left\{ x \mapsto \int_\Gamma K(x, y)u(y)d\sigma(y) \right\}$$

où K est infiniment différentiable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x \neq y\}$ et se comporte comme $|x - y|^{\alpha-2}$ lorsque $|x - y| \rightarrow 0$ avec $\alpha > 0$. On approche le noyau K par la fonction K_h définie par

$$K_h(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{si } |x - y| \geq \epsilon(h) \\ \left(\frac{|x - y|}{\epsilon(h)}\right)^{2-\alpha} K(x, y) & \text{si } |x - y| < \epsilon(h), \end{cases}$$

où $\epsilon(h)$ tend vers zéro lorsque h tend vers zéro. L'opérateur intégrale de noyau K_h , noté A_h , converge uniformément vers l'opérateur A . L'opérateur A_h est discrétisé dans la base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_t}\}$ en la matrice de coefficients $(a_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq N_t}$ définie par :

$$a_{ij}^h = \mathcal{A}_j * K_h(c_i, c_j),$$

où \mathcal{A}_j représente l'aire du triangle T_j .

(ii) Pour la partie hypersingulière T_κ de l'opérateur C_κ on choisit une autre approximation. Nous rappelons que T_κ est défini pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ par :

$$T_\kappa \mathbf{j}(x) = -\mathbf{n}(x) \times \int_\Gamma \nabla_\Gamma^x (\nabla_\Gamma^y (G(\kappa, |x - y|)) \cdot \mathbf{j}(y)) d\sigma(y).$$

On approche la solution fondamentale, comme ci-dessus, par la fonction G_h définie par

$$G_h(\kappa, |x - y|) = \begin{cases} G(\kappa, |x - y|) & \text{si } |x - y| \geq \epsilon(h), \\ \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi\epsilon(h)} & \text{si } |x - y| < \epsilon(h). \end{cases}$$

Ensuite on approche G_h par une fonction linéaire par morceaux en chacune des variables x et y . L'espace $\mathcal{P}^1(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ est un espace de dimension finie N_s engendré par la base de fonctions $(\psi_1, \dots, \psi_{N_s})$ définies pour $j, k = 1, \dots, N_s$ par $\psi_j(p_k) = \delta_k^j$, où δ_k^j est le symbole de Kronecker. On a

$$G_h(\kappa, |x - y|) \simeq \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_s} G_h(\kappa, |p_k - p_l|) \psi_k(x) \psi_l(y).$$

L'opérateur T_k est alors discrétisé en la matrice $T_\kappa^h = (T_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq N_t}$ où T_{ij}^h est une matrice bloc 3×3 telle que

$$T_{ij}^h \mathbf{j}_h(c_i) = -\mathcal{A}_j * \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_s} G_h(\kappa, |p_k - p_l|) \mathbf{n}_h(c_i) \times \nabla_\Gamma^x \psi_k(c_i) \langle \nabla_\Gamma^y \psi_l(c_j), \mathbf{j}_h(c_j) \rangle.$$

où \mathbf{n}_h désigne la normale à Γ_h .

Pour $\epsilon(h)$ nous avons choisi

$$\epsilon(h) = \frac{1}{2} \inf \{ |c_i - c_j|, i, j = 1 \dots, N_t \text{ et } i \neq j \},$$

où c_1, \dots, c_{N_t} sont les centres donnés par la triangulation \mathcal{T}_h .

▷ On résoud les équations intégrales avec MATLAB.

Les opérateurs \mathbf{S} , \mathbf{T} , \mathbf{S}' et \mathbf{T}' sont discrétisés en des matrices de taille $(3N_t)^2$. D'après la théorie, les opérateurs discrétisés sont inversibles sur l'espace des fonctions tangentes $\mathcal{P}_\times^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ de dimension $2N_t$. Pour résoudre les équations intégrales nous devons prolonger les opérateurs discrétisés en des opérateurs inversibles sur $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$ et qui envoient $\mathcal{P}_\times^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ dans lui-même. Soit A un opérateur inversible sur $\mathcal{P}_\times^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$ alors l'opérateur défini par $\mathbf{j}_h \mapsto A(\mathbf{n}_h \times \mathbf{j}_h \times \mathbf{n}_h) + N$, où N est la projection orthogonale sur les fonctions normales à Γ_h , est inversible sur $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$ et laisse bien stable l'espace $\mathcal{P}_\times^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$. On utilise cette méthode seulement pour résoudre les équations intégrales associées aux opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{S}' ; les opérateurs \mathbf{T} et \mathbf{T}' étant des perturbations de l'identité, une fois discrétisés on obtient déjà des matrices inversibles à la fois sur $(\mathcal{P}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h))^3$ et sur $\mathcal{P}_\times^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)$.

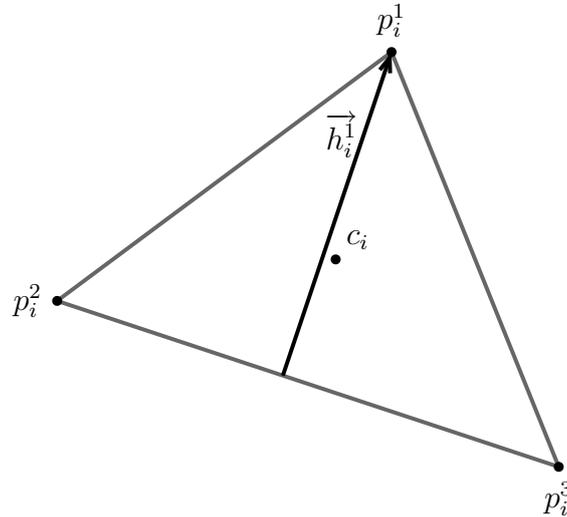
Les matrices des opérateurs discrétisés sont donc des matrices pleines. La résolution des équations intégrales nécessite de stocker cinq matrices de dimension $9N_t^2$ ce qui demande beaucoup de mémoire vive. Tout en disposant de 16 Go de mémoire vive nous ne pouvons pas utiliser de triangulation contenant plus de 4000 éléments, nous nous sommes donc limités à de petites fréquences.

4.2.1 Quelques formules

Dans ce paragraphe nous rappelons les formules pour calculer le vecteur normal unitaire extérieur à la surface discrétisée, le gradient des fonctions linéaires par mor-

4.3 Cas de la sphère diélectrique

ceaux $\psi_1, \dots, \psi_{N_s}$ et de l'élément d'aire.



Soit T_i un élément de la triangulation \mathcal{T}_h de la sphère unité, on note c_i son centre et p_i^1, p_i^2 et p_i^3 ses sommets. Le vecteur normal est donné par :

$$\mathbf{n}(c_i) = -\frac{(\overrightarrow{p_i^3 p_i^1}) \times (\overrightarrow{p_i^1 p_i^2})}{\left| (\overrightarrow{p_i^3 p_i^1}) \times (\overrightarrow{p_i^1 p_i^2}) \right|}.$$

On note $\overrightarrow{h_i^j}$ la hauteur issue du sommet p_i^j , l'aire du triangle T_i est donnée par :

$$\mathcal{A}_i = \frac{\left| (\overrightarrow{p_i^3 p_i^2}) \right| \cdot \left| \overrightarrow{h_i^1} \right|}{2}.$$

On note ψ_i^j , pour $j = 1, 2, 3$, la fonction définie pour $l = 1, 2, 3$ par $\psi_i^j(p_i^l) = \delta_j^l$ sur T_i . Son gradient est un champ de vecteur constants et tangents au triangle T_i et est donné par

$$(\nabla \psi_i^j)(c_i) = (\nabla_{\Gamma_h} \psi_i^j)(c_i) = \frac{\overrightarrow{h_i^j}}{\left| \overrightarrow{h_i^j} \right|^2}.$$

4.3 Cas de la sphère diélectrique

4.3.1 Solution exacte du problème de diffraction diélectrique

Dans le cas de la sphère de \mathbb{R}^3 , il est possible de calculer la solution exacte des problèmes de diffraction en électromagnétisme grâce à la théorie de Mie pour les

équations de Maxwell harmoniques [30, 31]. Nous donnons ici les résultats concernant le problème du diélectrique.

On note P_n^m le $m^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre d'ordre n , j_n la fonction de Bessel sphérique d'ordre n et $h_n^{(1)}$ la fonction de Hankel sphérique d'ordre n et de première espèce. On note B_R la boule de rayon R de \mathbb{R}^3 . On note ρ , θ et ϕ les coordonnées sphériques de $x \in \mathbb{R}^3$ et on pose $\hat{x} = \frac{x}{\rho}$.

Théorème 4.3.1 *Les fonctions harmoniques sphériques*

$$Y_n^m(\hat{x}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|!)}{(n+|m|!)}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

pour $m = -n, \dots, n$ and $n = 0, 1, 2, \dots$ forment une base orthonormale de $L^2(\partial B_1)$.

On pose $M_{n,m}^{(1)}(x) = \mathbf{rot}(x j_n(\kappa\rho) Y_n^m(\hat{x}))$ et $N_{n,m}^{(1)} = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} M_{n,m}^{(1)}$ pour $n = 1, 2, \dots$ et $m = -n, \dots, n$.

Théorème 4.3.2 *Les fonctions $M_{n,m}^{(1)}$ et $N_{n,m}^{(1)}$ sont solutions de l'équation de Maxwell $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - \kappa^2 \mathbf{u} = 0$ dans \mathbb{R}^3 .*

On pose $M_{n,m}^{(3)}(x) = \mathbf{rot}(x h_n^{(1)}(\kappa\rho) Y_n^m(\hat{x}))$ et $N_{n,m}^{(3)} = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} M_{n,m}^{(3)}$ pour $n = 1, 2, \dots$ and $m = -n, \dots, n$.

Théorème 4.3.3 *Les fonctions $M_{n,m}^{(3)}$ et $N_{n,m}^{(3)}$ sont solutions de l'équation de Maxwell $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - \kappa^2 \mathbf{u} = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et satisfont la condition de radiation de Silver-Müller.*

Maintenant considérons le problème de diffraction par la boule B_R de rayon R soumise à une onde incidente arbitraire \mathbf{E}^{inc} :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s - \kappa_e \mathbf{E}^s &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \partial B_R \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}^i - \kappa_i^2 \mathbf{E}^i &= 0 && \text{dans } B_R \\ \mathbf{E}^i \times \hat{x} - \mathbf{E}^s \times \hat{x} &= \mathbf{E}^{inc} \times \hat{x} && \text{sur } \partial B_R \\ \frac{1}{\mu_i} \mathbf{rot} \mathbf{E}^i \times \hat{x} - \frac{1}{\mu_e} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \hat{x} &= \frac{1}{\mu_e} \mathbf{rot} \mathbf{E}^{inc} \times \hat{x} && \text{sur } \partial B_R \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho (\mathbf{rot} \mathbf{E}^s \times \hat{x} - i\kappa \mathbf{E}^s) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_{n,m} M_{n,m}^{(1)} + \beta_{n,m} N_{n,m}^{(1)}.$$

4.3 Cas de la sphère diélectrique

Lemme 4.3.4 *L'unique solution $(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^s) \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ du problème ci-dessus est donnée par*

$$\mathbf{E}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{-n} \zeta_{n,m} M_{n,m}^{(3)} + \xi_{n,m} N_{n,m}^{(3)},$$

$$\mathbf{E}^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{-n} \gamma_{n,m} M_{n,m}^{(1)} + \delta_{n,m} N_{n,m}^{(1)}$$

où

$$\zeta_{n,m} = \alpha_{n,m} a_n, \quad \xi_{n,m} = \beta_{n,m} b_n, \quad \gamma_{n,m} = \alpha_{nm} c_n \quad \text{et} \quad \delta_{n,m} = \beta_{n,m} d_n$$

avec

$$a_n = -\frac{\frac{\mu_e}{\mu_i} j_n(\kappa_e R) (j_n(\kappa_i R) + \kappa_i R j_n'(\kappa_i R)) - j_n(\kappa_i R) (j_n(\kappa_e R) + \kappa_e R j_n'(\kappa_e R))}{\frac{\mu_e}{\mu_i} h_n^{(1)}(\kappa_e R) (j_n(\kappa_i R) + \kappa_i R j_n'(\kappa_i R)) - j_n(\kappa_i R) (h_n^{(1)}(\kappa_e R) + \kappa_e R h_n^{(1)' }(\kappa_e R))}$$

$$b_n = -\frac{\frac{\mu_i \kappa_e^2}{\mu_e \kappa_i^2} j_n(\kappa_e R) (j_n(\kappa_i R) + \kappa_i R j_n'(\kappa_i R)) - j_n(\kappa_i R) (j_n(\kappa_e R) + \kappa_e R j_n'(\kappa_e R))}{\frac{\mu_i \kappa_e^2}{\mu_e \kappa_i^2} h_n^{(1)}(\kappa_e R) (j_n(\kappa_i R) + \kappa_i R j_n'(\kappa_i R)) - j_n(\kappa_i R) (h_n^{(1)}(\kappa_e R) + \kappa_e R h_n^{(1)' }(\kappa_e R))}$$

$$c_n = -\frac{\kappa_e R (j_n(\kappa_e R) h_n^{(1)' }(\kappa_e R) - j_n'(\kappa_e R) h_n^{(1)}(\kappa_e R))}{\frac{\mu_e}{\mu_i} h_n^{(1)}(\kappa_e R) (j_n(\kappa_i R) + \kappa_i R j_n'(\kappa_i R)) - j_n(\kappa_i R) (h_n^{(1)}(\kappa_e R) + \kappa_e R h_n^{(1)' }(\kappa_e R))}$$

$$d_n = -\frac{\kappa_i R (j_n(\kappa_e R) h_n^{(1)' }(\kappa_e R) - j_n'(\kappa_e R) h_n^{(1)}(\kappa_e R))}{\frac{\mu_i \kappa_e^2}{\mu_e \kappa_i^2} h_n^{(1)}(\kappa_e R) (j_n(\kappa_i R) + \kappa_i R j_n'(\kappa_i R)) - j_n(\kappa_i R) (h_n^{(1)}(\kappa_e R) + \kappa_e R h_n^{(1)' }(\kappa_e R))}.$$

PREUVE. On utilise le théorème A.3.1 et on résout le système composé des conditions de transmission. On peut aussi retrouver ces formules en utilisant les développements en série de Mie des opérateurs Ψ_{E_κ} , Ψ_{M_κ} , M_κ , C_κ et C_0 donné dans l'appendice . Ce calcul se trouve également dans le livre [1]. ■

Le champ lointain associé est alors donné par (voir appendice) :

$$\mathbf{E}^\infty(\hat{x}) = \frac{4\pi(-i)^{n+1}}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (\alpha_{n,m} \nabla_{\partial B_1} Y_{n,m}(\hat{x}) \times \hat{x} + \beta_{n,m} \nabla_{\partial B_1} Y_{n,m}(\hat{x})).$$

Exemple 4.3.5 *Si le champ incident est une onde plane dirigée dans l'axe des $z > 0$ et polarisée selon l'axe des x :*

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{i\kappa_{ext} \cdot x_3} \quad \text{où} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors le développement en série de Mie est donné par [30] :

$$\mathbf{E}^{inc} = - \sum_{n=1}^{\infty} i^n \sqrt{4\pi \frac{2n+1}{n(n+1)}} \left(\frac{M_{n,1}^{(1)} - M_{n,-1}^{(1)}}{2i} + \frac{N_{n,1}^{(1)} + N_{n,-1}^{(1)}}{2} \right)$$

Exemple 4.3.6 Si le champ incident est une source point située au point d et polarisée selon le vecteur \vec{p} :

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \mathbf{rot}^x \left(\vec{p} \frac{e^{i\kappa_e|x-d|}}{4\pi|x-d|} \right) \text{ avec } |d| > |x|,$$

alors

$$(4.1) \quad \mathbf{E}^{inc}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\kappa_e}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n \left(\overline{\mathbf{rot} M_{n,m}^{(1)}(x)} \left(M_{n,m}^{(3)}(\vec{d}) \cdot \vec{p} \right) + \overline{\mathbf{rot} N_{n,m}^{(1)}(x)} \left(N_{n,m}^{(3)}(\vec{d}) \cdot \vec{p} \right) \right)$$

et

$$\overline{\mathbf{rot} M_{n,m}^{(1)}(x)} = -i\kappa_e N_{n,-m}^{(1)}(x), \quad \overline{\mathbf{rot} N_{n,m}^{(1)}(x)} = i\kappa_e M_{n,-m}^{(1)}(x),$$

Pour plus d'informations sur le calcul des harmoniques sphériques en vue de leur implémentation, nous renvoyons le lecteur à l'appendice page 147.

4.3.2 Convergence de la méthode

Dans ce paragraphe nous présentons les résultats obtenus sur la convergence de la solution des quatres équations intégrales discrétisées. Nous avons utiliser les caractéristiques suivantes.

▷ paramètres : $R = 1$, $\mu_e = \mu_i = \mu_0$, $\kappa_e R = 1$, $\kappa_i = 2\kappa_e$, $\eta = 1$.

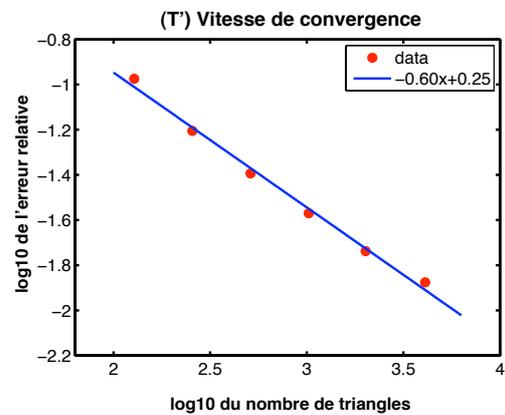
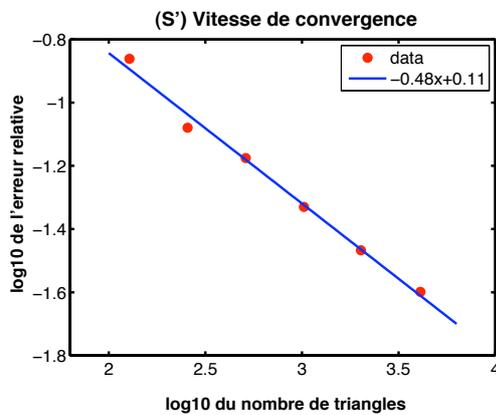
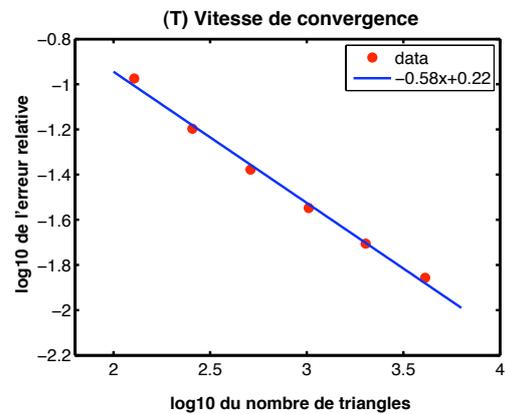
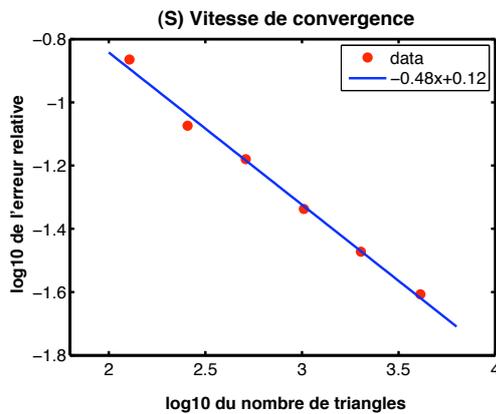
▷ onde incidente : une onde plane,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{i\kappa_e x \cdot d}, \text{ avec } d = (0, 0, 1) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le tableau ci-dessous affiche l'erreur relative en norme L^2 sur la sphère unité entre le champ lointain \mathbf{E}_h^∞ calculé en utilisant les représentations intégrales du tableau page 55 et le champ lointain exacte $\mathbf{E}_{exacte}^\infty$ calculé à l'aide des séries de Mie. La solution de référence $\mathbf{E}_{exacte}^\infty$ est calculée en tronquant la série de Mie à $n = 10$.

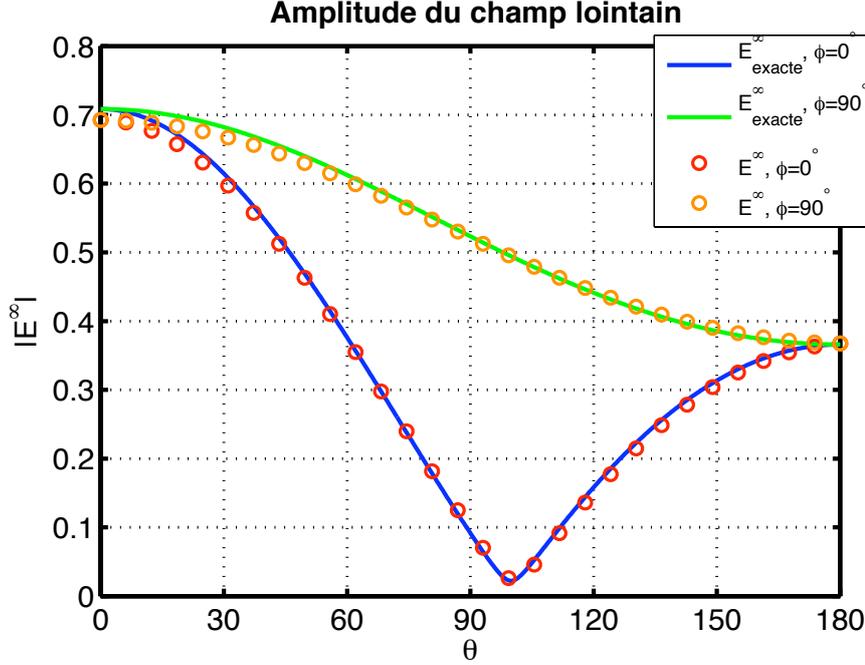
4.3 Cas de la sphère diélectrique

N_t	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}_h^\infty - \mathbf{E}_{exacte}^\infty\ _{L^2}}{\ \mathbf{E}_{exacte}^\infty\ _{L^2}}$			
	S	T	S'	T'
128	0.1366	0.1060	0.1376	0.1060
256	0.0843	0.0636	0.0833	0.0623
512	0.0661	0.0419	0.0668	0.0404
1024	0.0460	0.0283	0.0468	0.0269
2016	0.0337	0.0197	0.0341	0.0183
4096	0.0247	0.0139	0.0252	0.0133



Tout d'abord les champs lointains calculés après résolution des équations discrétisées convergent tous vers le champ lointain exacte. On remarque notamment que la convergence de la méthode est plus rapide pour les champs lointains calculés en résolvant les équations intégrales associées aux opérateurs **T** et **T'** que celles associées aux opérateurs **S** et **S'**. Aussi les graphiques ci-dessous montrent que les vitesses de convergence de la méthode pour les opérateurs **T** et **T'** sont très proches. Ceci était prévisible vu que les opérateurs **T** et **T'** sont adjoints l'un de l'autre pour la forme bilinéaire \mathcal{B} . On a le même résultat pour les opérateurs **S** et **S'**.

Le graphique ci-dessous représente les coupes dans les plans $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 90^\circ$ de l'amplitude du champ lointain calculé avec les séries de Mie (courbe bleue et verte) et du champ lointain calculé en résolvant l'équation intégrale associée à l'opérateur \mathbf{T} avec le maximum de triangles possibles.



4.3.3 À propos des fréquences irrégulières

Nous avons montré au chapitre précédent que l'unicité des solutions des quatre équations intégrales dépend de l'existence de valeurs propres du problème aux limites intérieur :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot rot} \mathbf{u} - \kappa_e^2 \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans} \quad B_R \\ \gamma_D \mathbf{u} - i\eta C_0 \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial B_R. \end{aligned}$$

Pour le problème physique, nous voulons éviter les fréquences parasites réelles. Cependant on sait que si $\eta=0$ le problème ci-dessus admet une infinité de valeurs propres réelles κ_e^2 où le nombre d'onde κ_e appartient aux ensembles de racines

$$\begin{aligned} \text{Mode TE : } & \{ \kappa_{n,l}, j_n(\kappa_{n,l}R) = 0, l \geq 1 \} \\ \text{Mode TM : } & \{ \tilde{\kappa}_{n,l}, j_n(\tilde{\kappa}_{n,l}R) + \tilde{\kappa}_{n,l}R j_n'(\tilde{\kappa}_{n,l}R) = 0, l \geq 1 \}, \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$. Les fonctions propres associées sont

$$\begin{aligned} \text{Mode TE : } & M_{n,m}^{(1)}(\kappa_{n,l}, \cdot), \quad m = -n, \dots, n, \quad l = 1, \dots \\ \text{Mode TM : } & N_{n,m}^{(1)}(\tilde{\kappa}_{n,l}, \cdot), \quad m = -n, \dots, n, \quad l = 1, \dots \end{aligned}$$

4.3 Cas de la sphère diélectrique

Dans le cas de la sphère unité ($R = 1$) les premières racines sont :

$\tilde{\kappa}_{11}$	2.74370727	TM
$\tilde{\kappa}_{21}$	3.87023858	TM
κ_{11}	4.49340945	TE
$\tilde{\kappa}_{31}$	4.97342035	TM

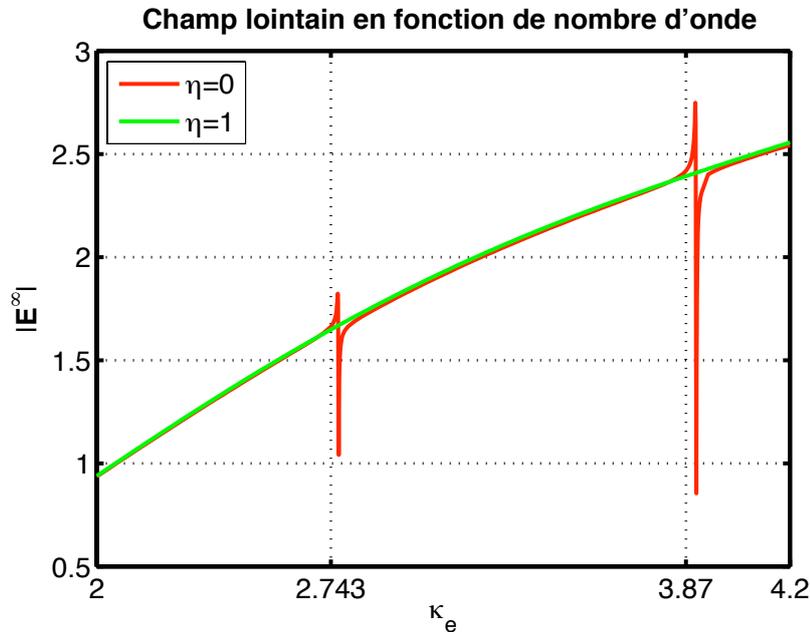
L'expérience numérique qui suit consiste à vérifier qu'en choisissant un η non nul, le spectre des opérateurs \mathbf{S} , \mathbf{T} , \mathbf{S}' et \mathbf{T}' est bien déplacé dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Nous avons calculé le champ lointain en fonction du nombre d'onde κ_e , en prenant les valeurs 0 et 1 pour le paramètre η et en résolvant l'équation intégrale associée à l'opérateur \mathbf{T}' . Les données sont les suivantes :

▷ paramètres : $R = 1$, $\mu_e = \mu_i = \mu_0$, $\kappa_i = 1$ et $\kappa_e \in [2, 4.2]$.

▷ onde incidente : une onde plane,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{i\kappa_e x \cdot d}, \text{ avec } d = (0, 0, 1) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ résultat :



Dans le graphique ci-dessus on a représenté le module de \mathbf{E}^∞ au point $\hat{x} = (1, 0, 0)$ de la sphère unité. On constate clairement que l'opérateur \mathbf{T}' dégénère au voisi-

nage des valeurs propres du problème intérieur associé et que choisir un η non nul permet d'éviter les fréquences irrégulières. Les deux courbes se superposent parfaitement lorsqu'on est loin des fréquences parasites. Pour ces calculs nous avons utilisé exactement 972 triangles pour discrétiser la surface. Au voisinage des valeurs propres nous avons affiné la subdivision pour κ_e à 10^{-3} près. Pour cet exemple les valeurs propres discrètes sont légèrement décalées par rapport au valeurs propres théoriques, la première est comprise entre 7.765 et 7.769 et la seconde est comprise entre 3.9 et 3.904.

Ceci peut encore se vérifier théoriquement. En effet, dans le cas de la sphère unité on peut calculer explicitement le spectre des opérateurs en utilisant le développement en série de Mie des images par l'opérateur C_0 des harmoniques sphériques (voir appendice). Pour un réel η quelconque, l'ensemble des valeurs κ_e^2 du problème intérieur associé sont les carrés des nombre d'ondes κ qui sont racines des fonctions :

$$\begin{aligned}\kappa &\mapsto j_n(\kappa R) + i\eta \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\kappa R} (j_n(\kappa R) + \kappa_e R j'_n(\kappa R)), \\ \kappa &\mapsto \frac{1}{\kappa R} j_n(\kappa R) + \kappa R j'_n(\kappa R) - i\eta \left(\frac{2}{2n+1} + \frac{n(n+1)}{2n+1} \right) j_n(\kappa R).\end{aligned}$$

Vu que les fonctions de Bessel sphériques sont réelles, il est clair que les racines de ces fonctions ne sont pas réelles puisque les parties réelles et imaginaires ne s'annulent pas simultanément.

4.4 Cas du cube diélectrique

Même si les résultats théoriques ont été prouvés dans le cas de surfaces régulières nous avons testé numériquement les mêmes propriétés dans le cas du cube diélectrique.

4.4.1 Convergence de la méthode

En ce qui concerne le cube diélectrique il n'existe pas de théorie pour calculer la solution exacte pour le problème de diffraction. Comme champ lointain de référence noté \mathbf{E}_{ref}^∞ nous prenons le champ lointain calculé avec le maximum d'éléments possibles dans la triangulation à savoir 3888 triangles pour le cube. On utilise les caractéristiques suivantes pour le cube unité $C_1 = [0, 1]^3$:

▷ paramètres : $\mu_e = \mu_i = \mu_0$, $\kappa_e = \pi$ et $\kappa_i = 2\kappa_e$.

▷ onde incidente : une source point,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \mathbf{rot} (G(\kappa_e, |x-d|) \vec{p}) \text{ avec } d = (.5, .5, -0.25) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

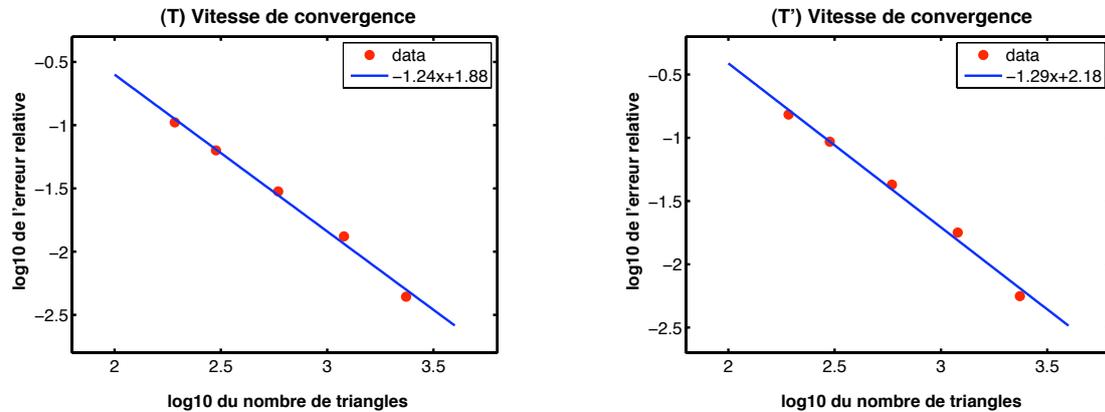
4.4 Cas du cube diélectrique

Le tableau ci-dessous affiche l'erreur relative en norme L^2 sur la sphère unité entre le champ lointain \mathbf{E}_h^∞ calculé avec les équations intégrales discrétisées associées aux opérateurs \mathbf{T} et \mathbf{T}' et $\mathbf{E}_{ref}^\infty(\mathbf{T})$ et $\mathbf{E}_{ref}^\infty(\mathbf{T}')$ respectivement.

N_t	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}_h^\infty - \mathbf{E}_{ref}^\infty\ _{L^2}}{\ \mathbf{E}_{ref}^\infty\ _{L^2}}$	
	\mathbf{T}	\mathbf{T}'
192	0.1050	0.1527
300	0.0632	0.0931
588	0.0299	0.0426
1200	0.0132	0.0178
2352	0.0044	0.0056

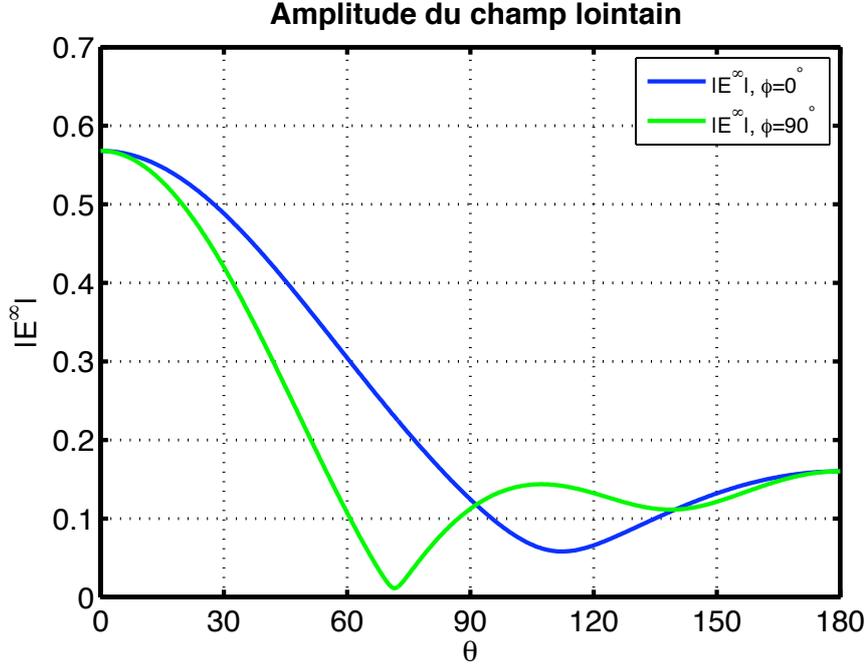
Les solutions des équations intégrales associées aux opérateurs \mathbf{T} et \mathbf{T}' convergent bien vers la même solution puisque nous avons

$$\frac{\|\mathbf{E}_{ref}^\infty(\mathbf{T}) - \mathbf{E}_{ref}^\infty(\mathbf{T}')\|_{L^2}}{\|\mathbf{E}_{ref}^\infty(\mathbf{T})\|_{L^2}} = 0.0025.$$



Pour cet exemple, les vitesses de convergence de la méthode pour les opérateurs \mathbf{T} (d'ordre 1.24) et \mathbf{T}' (d'ordre 1.29) sont encore très proches. Elles sont nettement supérieures à celles de l'exemple précédent, ce qui peut s'expliquer par le fait que l'erreur entre le champ lointain de référence et le champ lointain exacte est non négligeable.

Dans le graphique ci-dessous sont représentées les coupes dans les plans $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 90^\circ$ de l'amplitude du champ lointain calculé en résolvant l'équation intégrale associée à l'opérateur \mathbf{T} avec le maximum de triangle possibles à savoir 3888 triangles.



Dans le cas du cube, la convergence est très mauvaise en ce qui concerne les équations associées aux opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{S}' , ce qui est sans doute dû à des problèmes de singularités au niveau des arêtes et des coins. Dans la seconde partie de cette thèse nous utiliserons donc plutôt l'équation intégrale associée à l'opérateur \mathbf{T} .

4.4.2 À propos des fréquences irrégulières

Nous avons montré au chapitre précédent que l'unicité des solutions des quatre équations intégrales dépend de l'existence de valeurs propres du problème aux limites intérieur suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot rot } \mathbf{u} - \kappa_e^2 \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } C_1 \\ \gamma_D \mathbf{u} - i\eta C_0 \gamma_{N\kappa_e} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur } \partial C_1. \end{aligned}$$

Si $\eta=0$ le problème ci-dessus admet une infinité de valeurs propres réelles κ_e^2 de la forme (voir [1, 14]) :

$$\kappa_e^2 = \pi\kappa_1^2 + \pi\kappa_2^2 + \pi\kappa_3^2,$$

avec

$$\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3 > 0.$$

Les premières valeurs propres sont : les réels κ_e^2 où

$$\kappa_e = \sqrt{2}\pi, \sqrt{3}\pi, \sqrt{5}\pi, \sqrt{6}\pi, \sqrt{8}\pi \dots$$

4.4 Cas du cube diélectrique

Pour vérifier que lorsque qu'on choisit un réel η non nul le spectre des opérateurs intégraux est déplacé dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, nous avons calculé le champ lointain associé à la solution du problème de diffraction par le cube unité diélectrique soumis à une onde incidente générée par une source point en fonction du nombre d'onde extérieur κ_e . Les données sont les suivantes :

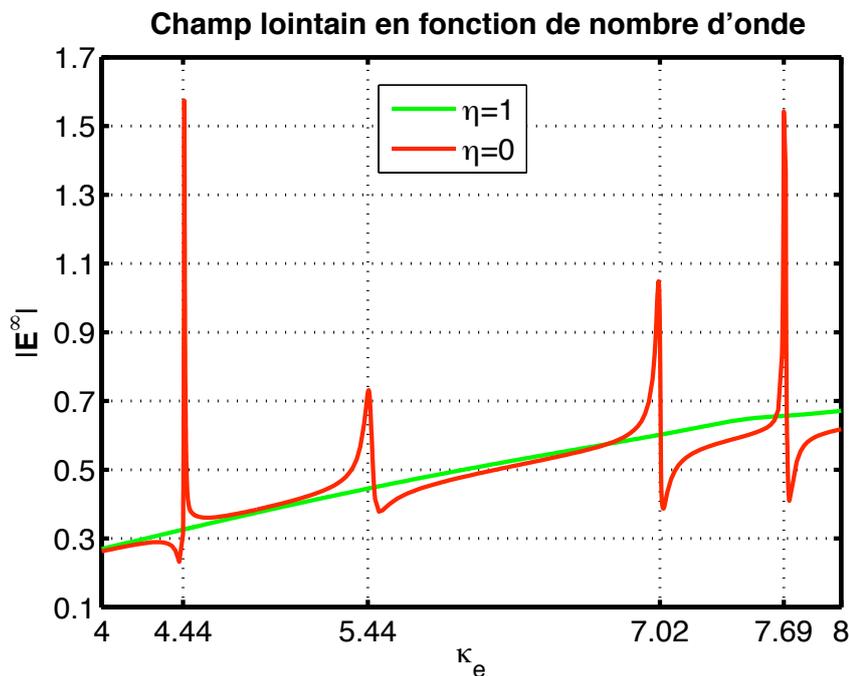
▷ paramètres : $\mu_e = \mu_i$, $\kappa_i = 1$ et $\kappa_e \in [4, 8]$.

▷ onde incidente : une source point,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \mathbf{rot} (G(\kappa_e, |x - d|) \vec{p}) \text{ avec } d = (0.25, 0.25, -0.25) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ résultat :

Dans le graphique ci-dessous on a représenté le module de \mathbf{E}^∞ au point $\hat{x} = (1, 0, 0)$ de la sphère unité. Le champ lointain a été calculé après résolution de l'équation intégrale associée à l'opérateur \mathbf{T} en prenant les valeurs 0 et 1 pour le paramètres η . Notez que $\sqrt{2}\pi \approx 4.44$, $\sqrt{3}\pi \approx 5.44$, $\sqrt{5}\pi \approx 7.02$ et $\sqrt{6}\pi \approx 7.69$.



Le graphique ci-dessus montre clairement que l'opérateur \mathbf{T} dégénère au voisinage des valeurs propres du problème intérieur et que choisir un η non nul permet d'éviter les fréquences irrégulières. Pour ces calculs nous avons utilisé exactement 972 triangles pour discrétiser la surface. Au voisinage des valeurs propres nous avons affiné

la subdivision pour κ_e à 10^{-3} près. Pour cet exemple les valeurs propres discrètes sont assez proches des valeurs théoriques. La première valeur propre discrète se situe dans l'intervalle $[4.43, 4.447]$, la seconde se situe dans l'intervalle $[5.442, 5.5]$, la troisième se situe dans l'intervalle $[7.013, 7.039]$ et la quatrième dans l'intervalle $[7.696, 7.720]$. Les extrémités des intervalles sont les valeurs des deux pics inférieurs et supérieurs que nous apercevons sur le graphique.

Deuxième partie
Optimisation de forme

Chapitre 5

Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

5.1 Introduction

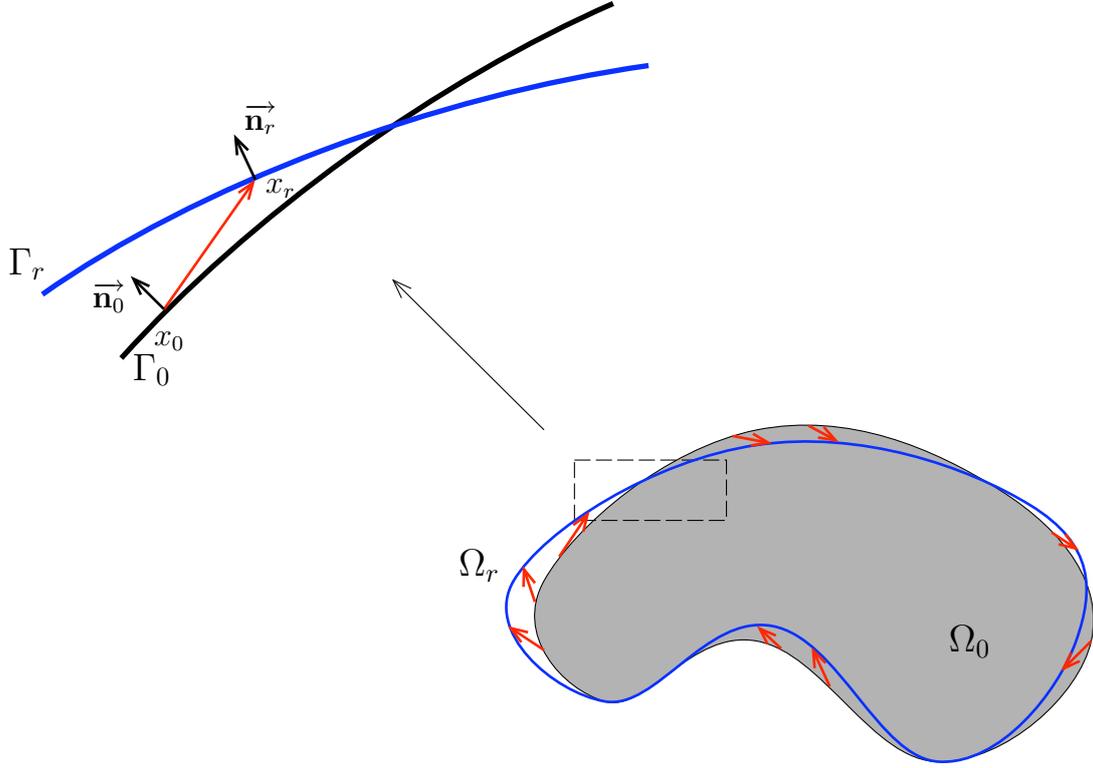
Soit \mathbf{E}^{inc} un champ électrique incident généré par une densité de courant \mathbf{J} qui est une donnée fixe et de régularité arbitraire. On fixe les constantes $\kappa_i, \kappa_e, \mu_i$ et μ_e et on suppose qu'elles satisfont les conditions du théorème 3.3.2. Considérons l'ensemble \mathcal{O} des domaines bornés, simplement connexes et réguliers de \mathbb{R}^3 , caractérisés par la permittivité ϵ_i et la perméabilité μ_i et disjoint du support de \mathbf{J} . Le but de ce chapitre est d'étudier les propriétés de dérivabilité de l'application \mathbf{E} qui à un domaine $\Omega \in \mathcal{O}$ associe la solution $\mathbf{E}(\Omega) = (\mathbf{E}^i(\Omega), \mathbf{E}^s(\Omega)) \in \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ du problème de diffraction par l'obstacle diélectrique $\Omega \in \mathcal{O}$ soumis à l'onde incidente \mathbf{E}^{inc} . La dépendance en Ω est hautement non-linéaire. Les outils basiques de calculs différentiels nécessitent (au moins) un cadre d'espaces vectoriels topologiques et localement convexes [42], cadre dont on ne dispose pas dans le cas des fonctionnelles de formes. Une approche satisfaisante pour avoir des informations sur le comportement de \mathbf{E} au voisinage d'un domaine $\Omega_0 \in \mathcal{O}$ est de représenter des variations du domaine par des éléments d'un espace de fonctions. On considère des variations générées par des transformations des points x de l'espace \mathbb{R}^3 du type

$$x \mapsto x + r(x),$$

où r est une fonction vectorielle définie au moins au voisinage du bord Γ_0 de Ω_0 . Cette transformation déforme la surface Γ_0 en la surface

$$\Gamma_r = (\mathbf{I} + r)\Gamma_0 = \{x_r = x + r(x); x \in \Gamma_0\}$$

d'un domaine Ω_r . On note x_r la variable de Γ_r et \mathbf{n}_r le vecteur normal unitaire à Γ_r . Pour $r = 0$ on note $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}$. On note également $d\sigma$ l'élément d'aire sur Γ_r et on utilisera les notations $d\sigma(y)$ et $d\sigma(y_r)$ pour différentier l'intégration sur Γ_0 et sur Γ_r .



Comme nous considérons uniquement des surfaces régulières et simplement connexes nous choisissons des fonctions r infiniment différentiables sur Γ_0 . Dans ce cas il faut être prudent dans la définition de dérivée de forme car l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ des fonctions infiniment différentiables sur Γ_0 n'est pas un espace de Banach et n'est pas normé non plus mais c'est un espace de Fréchet. On note d_∞ la distance sur $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$. On choisit un réel δ strictement positif et suffisamment petit tel que pour tout $r \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ avec $d_\infty(0, r) < \delta$ la transformation $I+r$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de Γ_0 sur Γ_r et tel que le domaine Ω_r est disjoint du support de \mathbf{J} . On pose

$$B_\delta = \{r \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0), d_\infty(0, r) < \delta\}.$$

On introduit l'application

$$r \in B_\delta \mapsto \mathcal{E}(r) = \mathbf{E}(\Omega_r).$$

L'ensemble B_δ est un sous ensemble ouvert de $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$. Nous allons donc étudier la différentiabilité au sens de Gâteaux de l'application $r \mapsto \mathcal{E}(r)$. La dérivée de forme de la fonctionnelle \mathbf{E} en Ω_0 dans la direction ξ est alors donnée par :

$$D_\Omega \mathbf{E}[0; \xi] = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \mathcal{E}(t\xi).$$

Pour étudier la différentiabilité de l'application $r \mapsto \mathcal{E}(r)$ nous allons utiliser la représentation intégrale de $\mathcal{E}(r)$ obtenue en utilisant la première méthode (*cf* section

5.1 Introduction

3.2). On pose $\mathcal{E}^i(r) = \mathbf{E}^i(\Omega_r)$ et $\mathcal{E}^s(r) = \mathbf{E}^s(\Omega_r)$. On note $\Psi_{E_\kappa}^r$, $\Psi_{M_\kappa}^r$, C_0^r , C_κ^r et M_κ^r les opérateurs de potentiels et les opérateurs intégraux de frontière sur la surface Γ_r et γ_D^r , $\gamma_{N_\kappa}^r$, $\gamma_D^{c,r}$ et $\gamma_{N_\kappa}^{c,r}$ les opérateurs de traces sur Γ_r . On fixe un réel $\eta \neq 0$ et on pose $\rho = \frac{\mu_e \kappa_i}{\mu_i \kappa_e}$, d'après les résultats établis dans la première partie de cette thèse on a :

$$(5.1) \quad \mathcal{E}^{tot}(r) = \mathbf{E}^{inc} + \mathcal{E}^s(r)$$

avec

$$(5.2) \quad \mathcal{E}^s(r) = \left(-\Psi_{E_{\kappa_e}}^r - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^r C_0^r \right) \mathbf{j}_r \quad \text{dans } \Omega_r^c = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_r}$$

où \mathbf{j}_r est solution des équations intégrales

$$\mathbf{S}^r \mathbf{j}_r = -\rho \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_i}^r \right) \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc} - C_{\kappa_i}^r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc},$$

et

$$\mathbf{T}^r \mathbf{j}_r = -\rho C_{\kappa_i}^r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc} - \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_i}^r \right) \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc}.$$

$$(5.3) \quad \mathcal{E}^i(r) = -\frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}}^r \gamma_{N_{\kappa_e}}^{c,r} \mathcal{E}^{tot}(r) - \Psi_{M_{\kappa_i}}^r \gamma_D^{c,r} \mathcal{E}^{tot}(r) \quad \text{dans } \Omega_r$$

Nous rappelons que les opérateurs \mathbf{S}^r et \mathbf{T}^r sont composés des opérateurs C_0^r , $C_{\kappa_e}^r$, $M_{\kappa_e}^r$, $C_{\kappa_i}^r$ et $M_{\kappa_i}^r$ et que ces derniers sont définis sur l'espace $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$.

Notation : soit $\mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ l'ensemble des applications linéaires et continues d'un espace de Fréchet \mathcal{X} dans un espace de Fréchet \mathcal{Y} .

Nous devons par conséquent étudier la différentiabilité au sens de Gâteaux des applications

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c \left(\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r) \right) \\ r &\mapsto M_\kappa^r \\ r &\mapsto C_\kappa^r \end{aligned}$$

et des applications :

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c \left(\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r), \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_r) \cup \mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega_r^c) \right) \\ r &\mapsto \Psi_{E_\kappa}^r \\ r &\mapsto \Psi_{M_\kappa}^r. \end{aligned}$$

La définition même de dérivabilité de ces applications soulève des questions non triviales que nous allons discuter dans le paragraphe suivant.

5.1.1 Difficultés

Nous sommes confrontés principalement à deux difficultés. Tout d'abord nous allons devoir contourner le problème suivant :

Comment dériver des applications de la forme $r \mapsto f(r)$ où $f(r)$ est une fonction ou un opérateur dont le domaine de définition varie avec r ?

La deuxième difficulté est que pour pouvoir construire des dérivées de forme de la solution en utilisant la représentation intégrale (5.1)-(5.3), nous devons absolument démontrer que les dérivées agissent entre les mêmes espaces que les opérateurs intégraux eux-mêmes, à savoir $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ (on dérive en $r = 0$).

Même si aujourd'hui il existe de nombreux travaux sur le calcul de variations de forme [19, 32, 33, 39, 40], dans le cadre des équations intégrales surfaciques, la littérature mathématique n'est pas très étendue sur ce sujet. Pour répondre à ces questions, nous nous sommes essentiellement inspirée des papiers de R. Potthast [36, 35, 34] dans lesquels il a étudié la différentiabilité au sens de Fréchet des solutions des problèmes de diffraction d'ondes acoustiques avec conditions de Dirichlet et de Neumann puis de la solution du problème du conducteur parfait mais dans les espaces de fonctions continues. Que l'on se place dans les espaces de fonctions continues $\mathcal{C}^k(\Gamma_r)$, où dans $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$ les mêmes difficultés persistent mais l'alternative que propose R. Potthast ne se généralise pas à l'espace $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$. Nous présentons dans la suite les différentes techniques utilisées par R. Potthast pour étudier la dérivabilité de telles fonctions f .

Une première idée, assez classique, est qu'au lieu d'étudier l'application

$$r \in B_\delta \mapsto f(r) \in \mathcal{C}^k(\Gamma_r)$$

on considère plutôt l'application

$$r \in B_\delta \mapsto f(r) \circ (\mathbf{I} + r) \in \mathcal{C}^k(\Gamma_0).$$

Ce point de vu s'étend aux espaces de Sobolev.

Proposition 5.1.1 *Soit u_r une fonction scalaire définie sur Γ_r . Alors $u_r \in H^s(\Gamma_r)$ si et seulement si $u_r \circ (\mathbf{I} + r) \in H^s(\Gamma_0)$.*

PREUVE. On utilise la définition de l'espace $H^s(\Gamma_r)$ vu au chapitre 1 en prenant comme cartes locales $((\mathbf{I} + r) \circ \psi_i)$ pour $i = 1, \dots, p$. ■

Désormais nous notons τ_r la transformation qui à une fonction u_r définie sur Γ_r associe la fonction $u_r \circ (\mathbf{I} + r)$ définie sur Γ_0 . Pour tout $r \in B_\delta$, la transformation τ_r admet un inverse. On a

$$(\tau_r u_r)(x) = u_r(x + r(x)) \text{ et } (\tau_r^{-1} u)(x_r) = u(x).$$

5.1 Introduction

Ensuite, au lieu d'étudier l'application

$$r \in B_\delta \mapsto A_r \in \mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\Gamma_r), \mathcal{C}^0(\Gamma_r))$$

on considère plutôt l'application

$$r \in B_\delta \mapsto \tau_r A_r \tau_r^{-1} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{C}^0(\Gamma_0), \mathcal{C}^0(\Gamma_0)).$$

Ce point de vue s'étend également aux espaces d'applications linéaires et continues entre les espaces de Sobolev.

Ce qu'on aurait envi de faire c'est d'insérer le produit $\tau_r^{-1} \tau_r = \mathbf{I}_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r)}$ entre chaque opérateur dans la représentation intégrale de la solution et d'étudier la différentiabilité des applications

$$\begin{aligned} r &\mapsto \tau_r C_0^r \tau_r^{-1}, \\ r &\mapsto \tau_r C_\kappa^r \tau_r^{-1}, \\ r &\mapsto \tau_r M_\kappa^r \tau_r^{-1}, \\ r &\mapsto \Psi_{E_\kappa}^r \tau_r^{-1}, \\ r &\mapsto \Psi_{M_\kappa}^r \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

mais d'autres difficultés persistent. Les opérateurs intégraux surfaciques que nous considérons sont définis pour des fonctions tangentes à Γ_r . Comme l'a très bien fait remarquer R. Potthast, l'opérateur $\tau_r M_\kappa^r \tau_r^{-1}$, restreint aux fonctions tangentes à Γ_r , a la même régularité que le potentiel de double couche. Et si on différencie $\tau_r M_\kappa^r \tau_r^{-1}$, il est certain que nous n'obtiendrons pas un opérateur avec la même régularité que M_κ et qui agisse sur $\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ puisque :

$$\tau_r(\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)) \neq \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0).$$

Aussi, le champ \mathbf{E}^{inc} est analytique donc $\tau_r(\gamma_D^r \mathbf{E}^{inc}) \in \tau_r(\mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r))$. Considérons la trace $f(r) = \tau_r(\gamma_D^r \mathbf{E}^{inc})$. Pour $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$, sa dérivée directionnelle $\frac{\partial f(t\xi)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ n'est plus tangente à Γ_0 donc $M_\kappa \frac{\partial f(t\xi)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ n'est pas défini. On a bien sûr le même problème avec la trace de Neuman $\gamma_{N_\kappa}^r$ et les autres opérateurs.

Pour se ramener à des fonctions tangentes à Γ_0 , l'idée de R. Potthast était d'introduire des opérateurs de projection sur les espaces tangents des surfaces Γ_0 et Γ_r . Notons π_0 la projection orthogonale sur le plan tangent à Γ_0 . C'est un opérateur linéaire et continu des fonctions vectorielles et continues sur Γ_r dans l'espace des fonctions vectorielles et tangentes à Γ_0 et pour $\mathbf{u}_r \in (\mathcal{C}(\Gamma_r))^3$ on a

$$(\pi_0 \mathbf{u}_r)(x) = \mathbf{u}_r(x + r(x)) - (\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{u}_r(x + r(x))) \mathbf{n}(x).$$

Proposition 5.1.2 *La restriction de π_0 aux fonctions continues et tangentes à Γ_r admet un inverse, on le note $\pi(r)$. L'application $\pi(r)$ est définie pour une fonction \mathbf{u} tangente à Γ_0 par*

$$(\pi(r)\mathbf{u})(x+r(x)) = \mathbf{u}(x) - \mathbf{n}(x) \frac{\mathbf{n}_r(x+r(x)) \cdot \mathbf{u}(x)}{\mathbf{n}_r(x+r(x)) \cdot \mathbf{n}(x)}.$$

Et $\pi(r)\mathbf{u} \in H_{\times}^s(\Gamma_r)$ si et seulement si $\mathbf{u} \in H_{\times}^s(\Gamma)$.

Notons que $\pi(0) = \pi_0$. Dans le cadre des espaces de fonctions il suffisait d'insérer le produit $\pi(r)\pi(0) = \mathbf{I}_{\mathcal{C}_{\times}^0(\Gamma_r)}$ dans la représentation intégrale de la solution pour se ramener à l'étude d'opérateur intégraux définis sur $\mathcal{C}_{\times}^0(\Gamma_0)$ qui ne dépend plus de r mais ici on obtiendrait des opérateurs définis sur

$$\pi(0) \left(\mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r) \right) = \left\{ u \in \mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \text{div}_{\Gamma_r}(\pi(r)\mathbf{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_r) \right\}.$$

Cet espace dépend encore de la variable r et ne correspond pas à $\mathbf{H}_{\times}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$. Notre approche consiste à utiliser la décomposition de Helmholtz (voir chapitre 1) des espaces $\mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$ pour $s \in \mathbb{R}$ et à introduire de nouveaux opérateurs inversibles \mathbf{P}_r définis sur $\mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$ et qui ne sont pas des opérateurs de projections.

5.1.2 Alternative : utilisation de la décomposition de Helmholtz

Nous avons vu au chapitre 1 que la surface Γ_0 étant régulière et simplement connexe, l'espace $\mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ admet la décomposition suivante pour $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0) = \nabla_{\Gamma_0} (H^{s+2}(\Gamma_0)/\mathbb{R}) \bigoplus \mathbf{rot}_{\Gamma_0} (H^{s+1}(\Gamma_0)/\mathbb{R}).$$

Puisque le réel δ est choisi de telle sorte que pour tout $r \in B_{\delta}$ les surfaces Γ_r sont encore régulières et simplement connexes, alors les espace $\mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$ admettent également la même décomposition.

Soit $\mathbf{j}_r \in \mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$ et soit $\nabla_{\Gamma_r} p_r + \mathbf{rot}_{\Gamma_r} q_r$ sa décomposition de Helmholtz. Puisque $p_r \in H^{s+2}(\Gamma_r)$ et $q_r \in H^{s+1}(\Gamma_r)$, les changement de variables de Γ_r à Γ_0 , $p(r) = \tau_r(p_r)$ et $q(r) = \tau_r(q_r)$, sont dans $H^{s+2}(\Gamma_0)$ et $H^{s+1}(\Gamma_0)$ respectivement d'après la proposition 5.1.1. L'opérateur suivant :

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_r : \mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r) &\longrightarrow \mathbf{H}_{\times}^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0) \\ \mathbf{j}_r = \nabla_{\Gamma_r} p_r + \mathbf{rot}_{\Gamma_r} q_r &\mapsto \mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} p(r) + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q(r) \end{aligned}$$

est alors bien défini.

L'opérateur \mathbf{P}_r transforme un champ de vecteurs \mathbf{j}_r tangent à Γ_r en un champ de vecteurs \mathbf{j} tangent à Γ_0 . Cet opérateur est linéaire, continu et admet un inverse \mathbf{P}_r^{-1} donné par :

5.1 Introduction

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_r^{-1} : \mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0) &\longrightarrow \mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r) \\ \mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q &\mapsto \mathbf{j}_r = \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}(p) + \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}(q). \end{aligned}$$

On insère l'identité $\mathbf{I}_{\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)} = \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{P}_r$ dans la représentation intégrale de $\mathcal{E}(r)$:

$$\mathcal{E}^s(r) = \left(-\Psi_{E_{\kappa_e}}^r \mathbf{P}_r^{-1} - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^r \mathbf{P}_r^{-1} (\mathbf{P}_r C_0^r \mathbf{P}_r^{-1}) \right) \mathbf{P}_r \mathbf{j}_r, \quad \text{dans } \Omega_r^c,$$

où

$$\mathbf{P}_r \mathbf{j}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{P}_r^{-1} \left(-\rho \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{P}_r M_{\kappa_i}^r \mathbf{P}_r^{-1} \right) \mathbf{P}_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc} - (\mathbf{P}_r C_{\kappa_i}^r \mathbf{P}_r^{-1}) \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc} \right),$$

et aussi

$$\mathbf{P}_r \mathbf{j}_r = \mathbf{P}_r \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{P}_r^{-1} \left(-\rho (\mathbf{P}_r C_{\kappa_i}^r \mathbf{P}_r^{-1}) \mathbf{P}_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc} - \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{P}_r M_{\kappa_i}^r \mathbf{P}_r^{-1} \right) \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc} \right),$$

$$\mathcal{E}^i(r) = -\frac{1}{\rho} (\Psi_{E_{\kappa_i}}^r \mathbf{P}_r^{-1}) (\mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^{c,r}) \mathcal{E}^{tot}(r) - (\Psi_{M_{\kappa_i}}^r \mathbf{P}_r^{-1}) (\mathbf{P}_r \gamma_D^{c,r}) \mathcal{E}^{tot}(r), \quad \text{dans } \Omega_r.$$

Les opérateurs $\mathbf{P}_r M_{\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1}$ et $\mathbf{P}_r C_{\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1}$ sont bien définis de $\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ dans lui-même. Par contre, les opérateurs $\Psi_{E_{\kappa}}^r \mathbf{P}_r^{-1}$ et $\Psi_{M_{\kappa}}^r \mathbf{P}_r^{-1}$ sont définis de $\mathbf{H}_\times^{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ dans $\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_r) \cup \mathbf{H}_{loc}^s(\mathbf{rot}, \Omega_r^c)$. Par conséquent, nous allons étudier la restriction de ces opérateurs à tout compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. En effet, étant donné un compact K inclus dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, il existe un réel $\delta_K < \delta$ tel que pour tout $r \in B_{\delta_K}$ on a $K \cap \Gamma_r = \emptyset$. Les noyaux de ces opérateurs sont alors de classe \mathcal{C}^∞ sur K pour tout r . De plus, puisque $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ est réunion dénombrable de compacts, on va pouvoir définir une dérivée sur $\Omega \cup \Omega^c$.

Finalement nous allons étudier les propriétés de différentiabilité des applications suivantes pour $s \in \mathbb{R}$:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} B_{\delta_K} &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathcal{C}^\infty(K)) && : r \mapsto \Psi_{E_{\kappa}}^r \mathbf{P}_r^{-1} \\ B_{\delta_K} &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathcal{C}^\infty(K)) && : r \mapsto \Psi_{M_{\kappa}}^r \mathbf{P}_r^{-1} \\ B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)) && : r \mapsto \mathbf{P}_r M_{\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1} \\ B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)) && : r \mapsto \mathbf{P}_r C_{\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1} \end{aligned}$$

Maintenant regardons de plus près la représentation intégrale des opérateurs cités ci-dessus (5.6).

▷ **Représentation intégrale de $\Psi_{E_{\kappa}}^r \mathbf{P}_r^{-1}$.**

L'opérateur $\Psi_{E_{\kappa}}^r \mathbf{P}_r^{-1}$ est défini pour $\mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q \in \mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ et $x \in K$ par :

$$\begin{aligned}\Psi_{E\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j}(x) &= \kappa \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x - y_r|) (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r) \\ &\quad + \kappa \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x - y_r|) (\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r) d\sigma(y_r) \\ &\quad - \kappa^{-1} \nabla \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x - y_r|) (\Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r).\end{aligned}$$

▷ Représentation intégrale de $\Psi_{M\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1}$.

L'opérateur $\Psi_{M\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1}$ est défini pour $\mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q \in \mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ et $x \in K$ par :

$$\begin{aligned}\Psi_{M\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j}(x) &= \mathbf{rot} \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x - y_r|) (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r) \\ &\quad + \mathbf{rot} \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x - y_r|) (\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r)(y_r) d\sigma(y_r).\end{aligned}$$

▷ Représentation intégrale de $\mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}$.

Rappelons que pour $\mathbf{j}_r \in \mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$, l'opérateur C_κ^r est défini par

$$\begin{aligned}C_\kappa^r \mathbf{j}_r(x_r) &= -\kappa \mathbf{n}_r(x_r) \times \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r) \\ &\quad - \kappa^{-1} \mathbf{n}_r(x_r) \times \nabla_{\Gamma_r}^{x_r} \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) \text{div}_{\Gamma_r} \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r).\end{aligned}$$

On veut écrire $C_\kappa^r \mathbf{j}_r$ sous la forme $\nabla_{\Gamma_r} P_r + \mathbf{rot}_{\Gamma_r} Q_r$. Puisque $\text{div}_{\Gamma_r} \mathbf{rot}_{\Gamma_r} = 0$, $\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \nabla_{\Gamma_r} = 0$ et $\Delta_{\Gamma_r} = \text{div}_{\Gamma_r} \nabla_{\Gamma_r} = -\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \mathbf{rot}_{\Gamma_r}$ on en déduit que :

$$\text{div}_{\Gamma_r} C_\kappa^r \mathbf{j}_r = \Delta_{\Gamma_r} P_r \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}_{\Gamma_r} C_\kappa^r \mathbf{j}_r = -\Delta_{\Gamma_r} Q_r.$$

Par conséquent on a :

$$(5.7) \quad P_r(x_r) = -\kappa \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \text{div}_{\Gamma_r} \left(\mathbf{n}_r(x_r) \times \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r) \right)$$

et

$$\begin{aligned}Q_r(x_r) &= -\kappa (-\Delta_{\Gamma_r}^{-1}) \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \left(\mathbf{n}_r(x_r) \times \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r) \right) \\ &\quad - \kappa^{-1} (-\Delta_{\Gamma_r}) \mathbf{rot}_{\Gamma_r} (-\mathbf{rot}_{\Gamma_r}) \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) \text{div}_{\Gamma_r} \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r), \\ &= \kappa \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \left(\mathbf{n}_r(x_r) \times \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r) \right) \\ &\quad + \kappa^{-1} \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) \text{div}_{\Gamma_r} \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r).\end{aligned}$$

5.1 Introduction

L'opérateur $\mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}$ est défini pour $\mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q \in \mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ par :

$$\mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} = \nabla_{\Gamma_0} P(r) + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} Q(r),$$

avec

$$P(r)(x) = -\kappa (\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \text{div}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}) \left((\tau_r \mathbf{n}_r)(x) \times \tau_r \left\{ \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r) \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) (\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r) d\sigma(y_r) \right\} (x) \right)$$

et

$$Q(r)(x) = \kappa (\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}) \left((\tau_r \mathbf{n}_r)(x) \times \tau_r \left\{ \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r) \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) (\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r) d\sigma(y_r) \right\} (x) \right) \\ + \kappa^{-1} \tau_r \left(\int_{\Gamma_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) (\Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r) \right) (x).$$

▷ **Représentation intégrale de $\mathbf{P}_r M_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}$.**

Rappelons que pour $\mathbf{j}_r \in \mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_r}, \Gamma_r)$, l'opérateur M_κ^r est défini par

$$M_\kappa^r \mathbf{j}_r(x_r) = \int_{\Gamma_r} ((\nabla^{x_r} G(\kappa, |x_r - y_r|)) \cdot \mathbf{n}_r(x_r)) \mathbf{j}_r(y_r) d\sigma(y_r) \\ - \int_{\Gamma_r} \nabla^{x_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) (\mathbf{n}_r(x_r) \cdot \mathbf{j}_r(y_r)) d\sigma(y_r).$$

En procédant comme pour l'opérateur $\mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}$, on obtient que l'opérateur $\mathbf{P}_r M_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}$ est défini pour $\mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q \in \mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ par :

$$\mathbf{P}_r M_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} P'(r) + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} Q'(r),$$

avec

$$P'(r)(x) = (\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \text{div}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}) \tau_r \left\{ - \int_{\Gamma_r} (\nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) \cdot \mathbf{n}_r(\cdot)) (\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r) d\sigma(y_r) \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_r} ((\nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) \cdot \mathbf{n}_r(\cdot)) (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r) \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_r} \nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) ((\mathbf{n}_r(\cdot) - \mathbf{n}_r(y_r)) \cdot (\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r)) d\sigma(y_r) \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_r} \nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) ((\mathbf{n}_r(\cdot) - \mathbf{n}_r(y_r)) \cdot (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r)) d\sigma(y_r) \right\} (x),$$

et

$$\begin{aligned}
 Q'_r(x) = & (\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}) \tau_r \left\{ \int_{\Gamma_r} (\nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) \cdot \mathbf{n}_r(\cdot)) (\text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r) d\sigma(y_r) \right. \\
 & + \int_{\Gamma_r} ((\nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) \cdot \mathbf{n}_r(\cdot)) (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r) d\sigma(y_r) \\
 & - \int_{\Gamma_r} \nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) ((\mathbf{n}_r(\cdot) - \mathbf{n}_r(y_r)) \cdot (\text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y_r)) d\sigma(y_r) \\
 & \left. - \int_{\Gamma_r} \nabla^{x_r} G(\kappa, |\cdot - y_r|) ((\mathbf{n}_r(\cdot) - \mathbf{n}_r(y_r)) \cdot (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y_r)) d\sigma(y_r) \right\} (x).
 \end{aligned}$$

Les opérateurs ci-dessus sont composés d'opérateurs intégraux faiblement singuliers et pseudo-homogènes de classe -1 et des opérateurs différentiels surfaciques définis au chapitre 1. Par un changement de variable dans l'intégrale, nous nous ramenons finalement à l'étude des propriétés de différentiabilité d'applications de la forme $r \mapsto \tau_r \mathcal{K}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ ou $t \mapsto \mathcal{P}_r \tau_r^{-1}$ où \mathcal{K}_{Γ_r} est un opérateur intégral sur la surface Γ_r de noyau pseudo-homogène défini comme au chapitre 2 et \mathcal{P}_r est l'opérateur de potentiel associé et aussi de celles des applications

$$\begin{aligned}
 r & \mapsto \tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \\
 r & \mapsto \tau_r \text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \\
 r & \mapsto \tau_r \text{div}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \\
 r & \mapsto \tau_r \text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \\
 r & \mapsto \tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}
 \end{aligned}$$

Avant d'effectuer ce travail, nous allons commencer par rappeler quelques résultats élémentaires sur la différentiabilité dans les espaces de Fréchet et quelques résultats établis dans le livre de A. Henrot et M. Pierre [32] qui nous seront très utiles.

5.2 Différentiabilité dans les espaces de Fréchet

5.2.1 Définitions et propriétés

Les espaces de Fréchet sont des espaces vectoriels localement convexes, métrisables et complets sur lesquels on peut étendre certains résultats élémentaires de calcul différentiel valables dans les espaces de Banach. Nous en rappelons quelques-uns dans ce paragraphe. Nous renvoyons le lecteur au livre de J. T. Schwarz [42] pour plus d'informations.

Définition 5.2.1 *Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux espaces de Fréchet. Soit U un sous ensemble ouvert de \mathcal{X} . Une application $f : U \rightarrow \mathcal{Y}$ est dite différentiable au sens de Gâteaux*

5.2 Différentiabilité dans les espaces de Fréchet

ou G -différentiable en $r_0 \in U$ si la limite suivante

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(r_0 + t\xi) - f(r_0)}{t} = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} f(r_0 + t\xi)$$

existe pour tout $\xi \in \mathcal{X}$. On note

$$\frac{\partial}{\partial r} f[r_0, \xi]$$

la dérivée au sens de Gâteaux de f en r_0 dans la direction ξ .

L'application $\xi \mapsto \frac{\partial}{\partial r} f[r_0, \xi]$ ne définit pas toujours une application linéaire et continue de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} .

Définition 5.2.2 On dira que f est continûment différentiable au sens de Gâteaux ou G -différentiable si l'application $\frac{\partial f}{\partial r}$ est une application continue de $U \times \mathcal{X}$ dans \mathcal{Y} et si pour tout $r_0 \in U$ la dérivée première $\frac{\partial}{\partial r} f[r_0, \cdot]$ est linéaire.

Les dérivées d'ordre supérieures de f dans la direction ξ sont définies de la façon suivante :

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} f[r_0, \xi] = \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(r_0 + t\xi)|_{t=0}.$$

On dit que f est \mathcal{C}^m G -différentiable si $\frac{\partial^m f}{\partial r^m}$ est une application continue de $U \times \underbrace{\mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}}_{m\text{fois}}$ dans \mathcal{Y} .

Lorsque les dérivées au sens de Gâteaux sont bien des fonctions continues et linéaires, certains résultats valables dans les espaces de Banach le sont également dans les espaces de Fréchet, comme les règles de dérivation de produit de fonctions et de fonctions composées et le développement limité de Taylor avec reste intégral ([42] p. 30). Par contre le théorème de dérivation de l'inverse d'une fonction nécessite le cadre des espaces de Banach mais nous n'en avons pas besoin ici.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour étudier la différentiabilité l'application qui à r associe l'inverse de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_r , ou les inverses des opérateurs \mathbf{S}_r et \mathbf{T}_r .

Théorème 5.2.3 Soient \mathcal{X} un espace de Fréchet et \mathcal{Y} une algèbre de Banach unitaire. Soit U un sous ensemble ouvert de \mathcal{X} . On suppose que l'application $f : U \rightarrow \mathcal{Y}$ est G -différentiable en $r_0 \in U$ et que $f(r)$ est inversible dans \mathcal{Y} pour tout $r \in U$ et que l'application $g : r \mapsto (f(r))^{-1}$ est continue en r_0 . Alors g G -différentiable en r_0 et sa dérivée première dans la direction ξ est :

$$(5.8) \quad \frac{\partial g}{\partial r}[r_0, \xi] = -f^{-1}(r_0) \frac{\partial}{\partial r} f[r_0, \xi] f^{-1}(r_0).$$

De plus si f est \mathcal{C}^m différentiable au sens de Gâteaux alors g aussi.

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

PREUVE. Soit $\xi \in \mathcal{X}$ et $t > 0$ suffisamment petit pour que $(r_0 + t\xi) \in U$, on a :

$$\begin{aligned}
 & (f(r_0 + t\xi))^{-1} - (f(r_0))^{-1} \\
 &= (f(r_0))^{-1} f(r_0) (f(r_0 + t\xi))^{-1} - (f(r_0))^{-1} f(r_0 + t\xi) (f(r_0 + t\xi))^{-1} \\
 &= (f(r_0))^{-1} (f(r_0) - f(r_0 + t\xi)) (f(r_0 + t\xi))^{-1} \\
 &= (f(r_0))^{-1} (f(r_0) - f(r_0 + t\xi)) (f(r_0))^{-1} \\
 &\quad + (f(r_0))^{-1} (f(r_0) - f(r_0 + t\xi)) ((f(r_0 + t\xi))^{-1} - (f(r_0 + t\xi))^{-1}).
 \end{aligned}$$

Puisque g est continue en r_0 on $\lim_{t \rightarrow 0} ((f(r_0 + t\xi))^{-1} - (f(r_0))^{-1}) = 0$ et puisque f est dérivable en r_0 on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(r_0))^{-1} (f(r_0) - f(r_0 + t\xi)) (f(r_0))^{-1}}{t} = - (f(r_0))^{-1} \frac{\partial}{\partial r} f[r_0, \xi] (f(r_0))^{-1}.$$

Par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(r_0 + t\xi))^{-1} - (f(r_0))^{-1}}{t} = - (f(r_0))^{-1} \frac{\partial}{\partial r} f[r_0, \xi] (f(r_0))^{-1}.$$

■

5.2.2 Quelques dérivées de forme classiques

Lemme 5.2.4 Soit $x \in \Gamma_0$. L'application $f : r \in B_\delta \mapsto x + r(x) \in \mathbb{R}^3$ est \mathcal{C}^∞ différentiable au sens de Gâteaux et sa dérivée première en $r_0 \in B_\delta$ est définie pour $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ par :

$$\frac{\partial}{\partial r} f[r_0, \xi] = \xi(x).$$

Les dérivées d'ordres supérieurs sont nulles.

PREUVE.

$$f(r_0 + t\xi) - f(r_0) - t\xi(x) = (x + r_0(x) + t\xi(x)) - (x + r_0(x)) - t\xi(x) = 0.$$

■

Définition 5.2.5 Soit $r \in B_\delta$. On appelle jacobien tangentiel de $(I+r)$ sur Γ_0 la quantité notée J_r et définie par

$$(5.9) \quad J_r = \det(I + D\tilde{r}) \left\| (I + D\tilde{r})^{-1} \mathbf{n} \right\|$$

où \tilde{r} est un prolongement de r à \mathbb{R}^3 .

5.2 Différentiabilité dans les espaces de Fréchet

On peut également utiliser la géométrie différentielle pour le définir. On utilise les notations du chapitre 1. Soit $x \in \Gamma_0$ et (ψ_i, \mathcal{O}_i) une carte locale au voisinage de x . Pour $x = \psi_i(u_0, v_0)$ et on note $e_1 = \frac{\partial \psi_i}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $e_2 = \frac{\partial \psi_i}{\partial v}(u_0, v_0)$. L'élément d'aire sur Γ_0 est alors donné par

$$d\sigma(x) = |e_1 \times e_2| dudv.$$

Soit $x_r = x + r(x) \in \Gamma_r$, puisque $I+r$ est un difféomorphisme de Γ_0 sur Γ_r , le couple $((I+r) \circ \psi_i, \mathcal{O}_i)$ définit une carte locale de Γ_r au voisinage de x_r . L'élément d'aire sur Γ_r est alors donné par

$$d\sigma(x_r) = |(I+Dr)e_1 \times (I+Dr)e_2| dudv = |\text{com}(I+Dr)(e_1 \times e_2)|,$$

où $\text{com}(A)$ désigne la comatrice de A . Le jacobien tangentiel est défini comme étant la fonction définie sur Γ_0 telle que

$$d\sigma(x + r(x)) = J_r(x)d\sigma(x)$$

Par conséquent $J_r = |\text{com}(I+Dr)\mathbf{n}(x)|$. On en déduit la formule (5.9).

Les lemmes suivants sont prouvés dans [32], ici nous allons utiliser la géométrie différentielle.

Lemme 5.2.6 *L'application f qui à $r \in B_\delta$ associe $J_r \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ est \mathcal{C}^∞ différentiable au sens de Gâteaux et sa dérivée première en $r = 0$ est définie pour $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ par :*

$$\frac{\partial f}{\partial r}[0, \xi] = \text{div}_\Gamma \xi.$$

PREUVE. On pose $g(r) = (I+Dr)e_1 \times (I+Dr)e_2$. On a $J_r = \frac{|g(r)|}{|g(0)|}$. On a

$$g(r_0+t\xi) - g(r_0) = t(D\xi)e_1 \times (I+Dr_0)e_2 + t(I+Dr_0)e_1 \times (D\xi)e_2 + t^2(D\xi)e_1 \times (D\xi)e_2.$$

On en déduit que g est infiniment différentiable au sens de Gâteaux en $r_0 \in B_\delta$, sa dérivée première est

$$\frac{\partial g}{\partial r}[r_0, \xi] = (D\xi)e_1 \times (I+Dr_0)e_2 + (I+Dr_0)e_1 \times (D\xi)e_2$$

et si $r = 0$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial r}[r_0, \xi] = \text{trace}(D\xi)(e_1 \times e_2) - {}^t(D\xi)(e_1 \times e_2).$$

Sa dérivée seconde est

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}[0, \xi] = 2\text{com}(D\xi)(e_1 \times e_2).$$

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

Les dérivées d'ordre supérieur sont nulles. Étant composée d'applications infiniment G-différentiables, $f : r \mapsto J_r$ est également infiniment G-différentiable et sa dérivée première en $r = 0$ est définie pour $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial r}[0, \xi] = \frac{1}{|g(0)|^2} \frac{\partial g}{\partial r}[0, \xi] \cdot g(0) = \operatorname{div} \xi - ([{}^t D\xi] \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \operatorname{div}_{\Gamma_0} \xi.$$

■

Lemme 5.2.7 *L'application f qui à $r \in B_\delta$ associe $\tau_r \mathbf{n}_r = \mathbf{n}_r \circ (\mathbf{I} + r) \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ est \mathcal{C}^∞ différentiable au sens de Gâteaux et sa dérivée première en $r = 0$ est définie pour $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ par :*

$$\frac{\partial f}{\partial r}[0, \xi] = -[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n}(x).$$

PREUVE. En utilisant la géométrie différentielle on a

$$\mathbf{n}_{r_0+t\xi}(x + (r_0 + t\xi)(x)) = \frac{(\mathbf{I} + Dr_0 + tD\xi)e_1 \times (\mathbf{I} + Dr_0 + tD\xi)e_2}{|(\mathbf{I} + Dr_0 + tD\xi)e_1 \times (\mathbf{I} + Dr_0 + tD\xi)e_2|} = \frac{g(r_0 + t\xi)}{|g(r_0 + t\xi)|}.$$

Étant composée d'application infiniment G-différentiable, l'application $r \mapsto \tau_r \mathbf{n}_r$ l'est forcément. D'après les règles de dérivation, sa dérivée première en $r = 0$ dans la direction ξ est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_r \mathbf{n}_r}{\partial r}[0, \xi] &= \frac{1}{g(0)} \frac{\partial g}{\partial r}[0, \xi] - \frac{1}{|g(0)|^3} \left(\frac{\partial g}{\partial r}[0, \xi] \cdot g(0) \right) g(0) \\ &= \frac{1}{g(0)} \frac{\partial g}{\partial r}[0, \xi] - \left(\frac{1}{g(0)} \frac{\partial g}{\partial r}[0, \xi] \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{g(0)} \frac{\partial g}{\partial r}[0, \xi] = (\operatorname{div} \xi) \mathbf{n} - [\nabla \xi] \mathbf{n}.$$

■

NB : ce dernier lemme est valable pour des surfaces moins régulières et ce qui est intéressant c'est que les dérivées sont de même régularité que le vecteur normal lui-même, pourvu que ξ soit suffisamment régulière.

5.3 Dérivées de forme d'un opérateur intégral de noyau pseudo-homogène

Dans cette section nous nous intéressons à la différentiabilité au sens de Gâteaux des applications qui à $r \in B_\delta$ associent l'opérateur intégral $\tau_r \mathcal{K}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ avec \mathcal{K}_{Γ_r} défini pour $u_r \in H^s(\Gamma_r)$ par :

$$(5.10) \quad \mathcal{K}_{\Gamma_r} u_r(x_r) = \operatorname{vp} \int_{\Gamma_r} k_r(y_r, x_r - y_r) u_r(y_r) d\sigma(y_r), \quad x_r \in \Gamma_r$$

5.3 Dérivées de forme d'un opérateur intégral de noyau pseudo-homogène

et des applications qui à $r \in B_\delta$ associent l'opérateur de potentiel $\mathcal{P}_r \tau_r^{-1}$ avec \mathcal{P}_r défini pour $u_r \in H^s(\Gamma_r)$ par :

$$(5.11) \quad \mathcal{P}_r u_r(x) = \int_{\Gamma_r} k(y_r, x - y_r) u_r(y_r) d\sigma(y_r), \quad x \in K,$$

où k_r est un noyau faiblement singulier et pseudo-homogène de classe $-m$ avec $m \geq 0$ en la variable $z_r = x_r - y_r \in \mathbb{R}^3$ et régulier par rapport à la première variable y_r .

Par le changement de variable $x_r \mapsto x + r(x)$, nous avons :

$$\tau_r \mathcal{K}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}(u)(x) = \text{vp.} \int_{\Gamma_0} k_r(y + r(y), x + r(x) - y - r(y)) u(y) J_r(y) d\sigma(y), \quad x_r \in \Gamma_r$$

et

$$\mathcal{P}_r \tau_r^{-1}(u)(x) = \int_{\Gamma_0} k_r(y + r(y), x - y - r(y)) u(y) J_r(y) d\sigma(y), \quad x \in K$$

Nous allons tout d'abord considérer des noyaux k_r qui sont des restrictions à Γ_r d'une même fonction $(x, y) \mapsto G(x - y)$ définie sur \mathbb{R}^3 où $G(z)$ est pseudo-homogène de classe $-m$. Notons que pour $r \in B_\delta$ on a $x_r - y_r = 0$ si et seulement si $x - y = 0$, donc cette classe de noyaux a bien un sens. Le théorème suivant établit l'infinie différentiabilité au sens de Gâteaux des opérateurs intégraux surfaciques de tels noyaux κ_r et qu'on obtient leurs dérivées en dérivant leurs noyaux.

Théorème 5.3.1 *Soit $G(z)$ un noyau pseudo-homogène de classe $-m$ sur \mathbb{R}^3 . On suppose que pour tout $r \in B_\delta$, on a $k_r(y_r, x_r - y_r) = G(x_r - y_r)$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma_0), H^{s+m}(\Gamma_0)) \\ r &\mapsto \tau_r \mathcal{K}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est \mathcal{C}^∞ différentiable au sens de Gâteaux et

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} \{ \tau_r \mathcal{K}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \} [0, \xi] u(x) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial^m \{ G(x + r(x) - y - r(y)) \}}{\partial r^m} [0, \xi] u(y) d\sigma(y),$$

et la dérivée première du noyau est définie pour $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ par

$$\frac{\partial \{ G(x + r(x) - y - r(y)) \}}{\partial r} [0, \xi] = (\xi(x) - \xi(y)) \cdot \nabla^z G(x - y) + G(x - y) \text{div}_\Gamma \xi(y).$$

PREUVE. Notons $(\Gamma_0 \times \Gamma_0)^*$ l'ensemble des couples $(x, y) \in \Gamma_0 \times \Gamma_0$ tels que $x \neq y$. Considérons l'application

$$f : U \times (\Gamma_0 \times \Gamma_0)^* \mapsto f(r, x, y) = G(x + r(x) - y - r(y)) J_r(y) \in \mathbb{C}.$$

▷ Étape 1 :

Tout d'abord on montre que pour $(x, y) \in (\Gamma_0 \times \Gamma_0)^*$ fixé l'application $r \mapsto f(r, x, y)$

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

est infiniment différentiable au sens de Gâteaux sur B_δ . En effet, d'après le lemme 5.2.6 l'application $r \mapsto J_r(y)$ est infiniment G-différentiable sur B_δ , l'application $r \mapsto x + r(x)$ est également infiniment G-différentiable sur B_δ et le noyau G est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 . L'application $r \mapsto f(r, x, y)$ étant composée d'applications infiniment G-différentiables l'est également et en utilisant la formule de Leibniz on a :

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} f[r_0, \xi](x, y) = \sum_{\alpha=0}^k \binom{k}{\alpha} \frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} \{G(x + r(x) - y - r(y))\} [r_0, \xi] \frac{\partial^{k-\alpha} J_r(y)}{\partial r^{k-\alpha}} [r_0, \xi]$$

avec

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} \{G(x_r - y_r)\} [r_0, \xi] = D_z^\alpha G[x + r_0(x) - y - r_0(y), \underbrace{\xi(x) - \xi(y)}_{\alpha \text{ fois}}].$$

▷Étape 2 :

Nous montrons ensuite que chaque dérivée définit un nouveau noyau pseudo-homogène de même classe, c'est-à-dire que pour tout $k \geq 0$ l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial^k}{\partial r^k} f[r_0, \xi](x, y)$$

est pseudo-homogène de classe $-m$ également. Vu que $\frac{\partial^{k-\alpha} J_r}{\partial r^{k-\alpha}} [r_0, \xi]$ est de classe \mathcal{C}^∞ nous allons tout simplement montrer que

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} \{G(x + r(x) - y - r(y))\} [r_0, \xi]$$

définit un noyau pseudo-homogène toujours de classe $-m$. Par définition, $G(z)$ admet le développement asymptotique suivant lorsque z tend vers zéro :

$$G(z) = G_m(z) + \sum_{j=1}^{l-1} G_{m+j}(z) + G_{m+l}(h, z)$$

où G_{m+j} est homogène de classe $-(m+j)$ pour $j = 0, \dots, l-1$ et G_{m+l} est de régularité arbitraire. Il s'agit alors de montrer que les dérivées successives de chaque terme du membre de gauche sont pseudo-homogènes de classe $-(m+j)$. On conclut grâce à la proposition suivante.

Proposition 5.3.2 *Soient $G_m(z)$ homogène de classe $-m$ et $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$. La fonction $(x, y) \mapsto D^k G_m[x + r_0(x) - y - r_0(y), \xi(x) - \xi(y)]$ est pseudo-homogène de classe $-m$.*

PREUVE. On fait la preuve seulement pour la dérivée première c'est-à-dire pour $k = 1$. Dans ce cas on a

$$DG_m[x + r_0(x) - y - r_0(y), \xi(x) - \xi(y)] = (\xi(x) - \xi(y)) \cdot \nabla G_m(x + r_0(x) - y - r_0(y)).$$

5.3 Dérivées de forme d'un opérateur intégral de noyau pseudo-homogène

On utilise la formule de Taylor pour tout $n \geq 0$ lorsque $x - y$ tend vers zéro :

$$r_0(x) - r_0(y) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} D^j r_0[y, x - y] + g_n(x, y)$$

et

$$\xi(x) - \xi(y) = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l!} D^l \xi[y; x - y] + h_n(x, y)$$

avec g_n et $h_n \in \mathcal{C}^\infty$. On peut supposer δ suffisamment petit de sorte que

$$\nabla G_m(x + r_0(x) - y - r_0(y)) = \sum_{i=0}^n D^i(\nabla G_m)[x - y, r_0(x) - r_0(y)] + f_n(x, y)$$

avec f_n suffisamment régulière. On pose $z = x - y$. Les applications $z \mapsto D^j r_0[y; z]$ et $z \mapsto D^l \xi[y; z]$ sont respectivement j -linéaire et l -linéaire en z . Pour $l = 1, \dots, n - 1$ la fonction $D^l \xi[y; z] \cdot \nabla G_m(z)$ est alors homogène de classe $-m + l - 1$ et plus généralement pour $l = 1, \dots, j = 1, \dots$ et $i = 0, \dots$ la fonction

$$D^l \xi[y, z] \cdot (D^i(\nabla G_m)[z, D^j r_0[y, z]])$$

est homogène de classe $-m + (l - 1) + i(j - 1)$. Par définition,

$$(\xi(x) - \xi(y)) \cdot \nabla G_m(x + r_0(x) - y - r_0(y))$$

est pseudo-homogène de classe $-m$. ■

▷Étape 3 :

On utilise la linéarité de l'intégrale pour montrer que l'opérateur est également infiniment G-différentiable. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral et pour la dérivée première

$$f(r_0 + t\xi, x, y) - f(r_0, x, y) = t \frac{\partial f}{\partial r}[r_0, \xi](x, y) + t^2 \int_0^1 (1 - \lambda) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}[r_0 + \lambda t\xi, \xi](x, y) d\lambda.$$

On doit vérifier que chaque terme de l'égalité ci-dessus est le noyau d'un opérateur agissant de $H^s(\Gamma_0)$ dans $H^{s+m}(\Gamma_0)$. Les deux premiers termes du membre de gauche de l'égalité ci-dessus sont des noyaux de classe $-m$ et on vient de montrer que $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}[0, \xi]$ définit un noyau de classe $-m$. Il reste à prouver que l'opérateur de noyau

$$(x, y) \mapsto \int_0^1 (1 - \lambda) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}[r_0 + \lambda t\xi, \xi](x, y)$$

agit bien de $H^s(\Gamma_0)$ dans $H^{s+m}(\Gamma_0)$. Pour ce faire, puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}[r_0 + \lambda t\xi, \xi]$ est pseudo-homogène de classe $-m$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$, il suffit d'utiliser le théorème

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

de Lebesgue pour intervertir l'intégration par rapport à la variable λ et l'intégration sur Γ_0 . On a

$$\begin{aligned} & \frac{\int_{\Gamma_0} f(r_0 + t\xi, x, y)u(y)d\sigma(y) - \int_{\Gamma_0} f(r_0, x, y)u(y)d\sigma(y)}{t} - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial f}{\partial r}[r_0, \xi](x, y)u(y)d\sigma(y) \\ &= t \int_{\Gamma_0} \left(\int_0^1 (1 - \lambda) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}[r_0 + \lambda t\xi, \xi](x, y)d\lambda \right) u(y)d\sigma(y). \end{aligned}$$

On passe à la limite en $t = 0$ et on obtient la dérivée première aux sens de Gâteaux. Ce raisonnement est valable pour $\xi \in \mathcal{C}^\infty$. Pour les dérivées d'ordre supérieur il suffit d'étendre le développement de Taylor à un ordre convenable.

Nous avons montré que $r \mapsto \tau_r \mathcal{K}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ est infiniment différentiable au sens de Gâteaux et que pour obtenir ses dérivées directionnelles il suffit de dériver son noyau. Maintenant l'application qui à $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ associe l'opérateur intégral de noyau $\frac{\partial^m \{G(x + r(x) - y - r(y))\}}{\partial r^m}[r_0, \xi]$ est clairement linéaire et continue en ξ . ■

On rappelle que K est un compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_0$ qui est disjoint de toutes les surfaces Γ_r pour $r \in B_\delta$. Dans ce cas les noyaux pseudo-homogènes $G(x_r - y_r)$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $K \times \Gamma_0$.

Théorème 5.3.3 *Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $G(z)$ un noyau pseudo-homogène de classe $-(m+1)$ sur \mathbb{R}^3 . On suppose que pour tout $r \in B_{\delta_K}$, on a $k_r(y_r, x - y_r) = G(x - y_r)$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c \left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathcal{C}^\infty(K) \right) \\ r &\mapsto \mathcal{P}_r \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment différentiable au sens de Gâteaux et

$$(5.12) \quad \frac{\partial^m \mathcal{P}_r \tau_r^{-1}}{\partial r^m}[r_0, \xi]u(x) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \{G(x - y - r(y))\} [r_0, \xi]u(y)d\sigma(y).$$

Sa dérivée première en $r = 0$ dans la direction $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\gamma_0)$ est l'opérateur intégral noté $\mathcal{P}^{(1)}$ de noyau

$$\frac{\partial}{\partial r} \{G(x - y - r(y))\} [r_0, \xi] = -\xi(y) \cdot \nabla^z G(x - y) + G(x - y) \operatorname{div}_\Gamma \xi(y).$$

L'opérateur $\mathcal{P}^{(1)}$ s'étend en un opérateur linéaire et continu de $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{s+m}(\Omega)$ et $H_{loc}^{s+m}(\Omega)$.

PREUVE. Le noyau est de classe \mathcal{C}^∞ sur K et ses dérivées de tout ordre aussi. Il suffit alors de suivre les mêmes étapes que dans la preuve du théorème précédent. Maintenant regardons le noyau de la dérivée première : le terme $G(x - y) \operatorname{div}_\Gamma \xi(y)$ à

5.3 Dérivées de forme d'un opérateur intégral de noyau pseudo-homogène

la même régularité que $G(x-y)$ lorsque $x-y$ tend vers 0 tandis que $\xi(y) \cdot \nabla G(x-y)$ perd un ordre de régularité. Cette fois-ci la singularité créée par la dérivation de G n'est pas annulée par le produit scalaire avec $\xi(x) - \xi(y)$ comme pour les opérateurs intégraux surfaciques. Pour cette raison le noyau doit être pris de classe $(-m+1)$ pour que sa dérivée première agisse bien de $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{s+m}(\Omega)$ et $H_{loc}^{s+m}(\Omega^c)$. ■

Remarque 5.3.4 *On en conclut que les opérateurs intégraux surfaciques ne perdent pas de régularité alors que les opérateurs de potentiels perdent un ordre de régularité à chaque fois qu'on les dérive.*

Maintenant on va pouvoir montrer la différentiabilité au sens de Gâteaux des opérateurs intervenant la représentation intégrale de la solution $\mathcal{E}(r)$.

On note V_κ^r l'opérateur intégral défini pour $u_r \in H^s(\Gamma_r)$ par

$$V_\kappa^r u_r(x) = \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x_r - y_r|) u_r(y_r) d\sigma(y_r).$$

On note ψ_κ^r l'opérateur intégral de simple couche défini pour $u_r \in H^s(\Gamma_r)$ par

$$\psi_\kappa^r u_r(x) = \int_{\Gamma_r} G(\kappa, |x - y_r|) u_r(y_r) d\sigma(y_r), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_r.$$

Corollaire 5.3.5 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma), H^{s+1}(\Gamma)) \\ r &\mapsto \tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment Gâteaux-différentiable en $r = 0$ et sa dérivée première dans la direction $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ est

$$(5.13) \quad \frac{\partial \tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] u(x) = \int_{\Gamma_0} k'(y, x-y) u(y) d\sigma(y)$$

où

$$k'(x, y) = G(\kappa, |x-y|) \left(\frac{(\xi(x) - \xi(y)) \cdot (x-y)}{|x-y|} \left(i\kappa - \frac{1}{|x-y|} \right) + \operatorname{div}_\Gamma \xi(y) \right).$$

PREUVE. Nous avons montré au chapitre 2 que $G(k, |z|)$ est pseudo-homogène de classe -1 . ■

Corollaire 5.3.6 *L'application*

$$\begin{aligned} B_{\delta_K} &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma), \mathcal{C}^\infty(K)) \\ r &\mapsto \tau_r \psi_\kappa^r \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment Gâteaux-différentiable en $r = 0$. Sa dérivée première se prolonge en un opérateur linéaire et continu de $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^s(\Omega) \cup H_{loc}^s(\Omega^c)$.

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

PREUVE. Nous avons montré au chapitre 2 que $G(k, |z|)$ est pseudo-homogène de classe -1 . ■

Maintenant nous allons étudier la différentiabilité de quelques cas particuliers d'opérateurs intégraux qui ne sont pas des restrictions à Γ_r d'un même noyau défini sur \mathbb{R}^3 .

On note D_κ^r l'opérateur intégral défini pour $u_r \in H^s(\Gamma_r)$ par

$$D_\kappa^r u_r(x) = \int_{\Gamma_r} \mathbf{n}_r(x_r) \cdot \nabla^z G(\kappa, |x_r - y_r|) u_r(y_r) d\sigma(y_r).$$

Corollaire 5.3.7 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma), H^{s+1}(\Gamma)) \\ r &\mapsto \tau_r D_\kappa^r \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment Gâteaux-différentiable en $r = 0$.

PREUVE. On a

$$\mathbf{n}_r(x_r) \cdot \nabla^z G(\kappa, |x_r - y_r|) u_r(y_r) = \mathbf{n}_r(x_r) \cdot (x_r - y_r) \frac{G(\kappa, |x_r - y_r|)}{|x_r - y_r|} \left(i\kappa - \frac{1}{|x_r - y_r|} \right).$$

Au premier chapitre nous introduisons, grâce à la géométrie différentielle, un opérateur de projection au voisinage de Γ_0 ,

$$P(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i(x) \psi_i \circ \Pi \circ \psi_i^{-1}(x)$$

où les (ψ_i, \mathcal{O}_i) sont des cartes locales, les λ_i forment une partition de l'unité et considérons le développement

$$\mathbf{n}(x) \cdot (P(x) - P(y)) = \mathbf{n}(x) \cdot DP[x, y - x] + \mathbf{n}(x) \cdot D^2P[x, y - x] + \dots$$

sachant que $DP[x, \cdot]$ agit sur le plan tangent à Γ_0 en x . Pour les surfaces Γ_r on utilise le même développement avec l'opérateur de projection

$$P_r(x_r) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \circ (\mathbf{I} + r)^{-1}(x_r) (\psi_i \circ (\mathbf{I} + r)) \circ \Pi \circ (\psi_i \circ (\mathbf{I} + r))^{-1}(x_r).$$

On a

$$\mathbf{n}_r(x_r) \cdot (P_r(x_r) - P_r(y_r)) = \mathbf{n}_r(x_r) \cdot DP_r[x_r, y_r - x_r] + \mathbf{n}_r(x_r) \cdot D^2P_r[x_r, y_r - x_r] + \dots$$

On a $\mathbf{n}_r(x + r(x)) \cdot DP_r[x + r(x), y + r(y) - x - r(y)] = 0$ pour tout x et $y \in \Gamma_0$ cela indépendamment de r . On peut donc dériver par rapport à r ce développement et finalement on obtient que les dérivées du noyau sont toujours pseudo-homogènes de classe -1 . Ensuite on procède comme dans la preuve du lemme 5.3.1 ■

5.4 Dérivées de forme des opérateurs différentiels surfaciques

On note B_κ^r l'opérateur intégrale défini pour $u_r \in \mathbf{H}^s(\Gamma_r)$ par

$$B_\kappa^r \mathbf{u}_r(x) = \int_{\Gamma_r} \nabla^z G(\kappa, |x_r - y_r|) (\mathbf{n}_r(x_r) - \mathbf{n}_r(y_r)) \cdot u_r(y_r) d\sigma(y_r).$$

Corollaire 5.3.8 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma), H^{s+1}(\Gamma)) \\ s &\mapsto \tau_r B_\kappa^r \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment Gâteaux-différentiable en $r = 0$.

PREUVE. la fonction $\nabla^z G(k, |z|)$ est pseudo-homogène de classe 0 et

$$\frac{\partial^k \mathbf{n}_r(x + r(x)) - \mathbf{n}_r(y + r(y))}{\partial r^k} [0, \xi] = 0$$

lorsque $x = y$. ■

5.4 Dérivées de forme des opérateurs différentiels surfaciques

Lemme 5.4.1 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma_0), \mathbf{H}^{s-1}(\Gamma_0)) \\ r &\mapsto \tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment G-différentiable en $r = 0$ et on a

$$\frac{\partial \tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] u = -[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \nabla_{\Gamma_0} u + (\nabla_{\Gamma_0} u \cdot [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

PREUVE. Reprenons la définition du gradient tangentiel vu au chapitre 1. Pour une fonction $u_r \in H^s(\Gamma_r)$ on a :

$$\nabla_{\Gamma_r} u_r = \nabla \tilde{u}_r - (\mathbf{n}_r \cdot \nabla \tilde{u}_r) \mathbf{n}_r.$$

Commençons par étudier la différentiabilité de $r \mapsto \tau_r \nabla (\widetilde{\tau_r^{-1} u})$. Soit $x \in \Gamma_0$, on a

$$\tau_r \nabla (\widetilde{\tau_r^{-1} u})(x) = \nabla (\tilde{u} \circ (\mathbf{I} + r)^{-1})(x + r(x)) = \nabla_{x+r(x)} (\widetilde{\mathbf{I} + r(x)})^{-1} \circ \nabla_x \tilde{u}.$$

et

$$\nabla_{x+r(x)} (\widetilde{\mathbf{I} + r})^{-1} = (\nabla_x (\widetilde{\mathbf{I} + r}))^{-1}.$$

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

L'application $f : r \mapsto \nabla_x \left(\widetilde{\mathbb{I}+r} \right)$ est continue, d'inverse continue et infiniment différentiable en $r = 0$. On a

$$f(t\xi) - f(0) = \mathbb{I} + \nabla_x \left(t\widetilde{\xi} \right) - \mathbb{I} = t\nabla_x \widetilde{\xi}.$$

La dérivée première est $\frac{\partial}{\partial r} f[0, \xi] = \nabla_x \widetilde{\xi}$ et les dérivées suivantes sont nulles. D'après le lemme 5.2.3 l'application $r \mapsto \left(\nabla_x \left(\widetilde{\mathbb{I}+r} \right) \right)^{-1}$ est également infiniment différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$ et on a

$$\frac{\partial \left(\nabla_x \left(\widetilde{\mathbb{I}+r} \right) \right)^{-1}}{\partial r} [0, \xi] = -\nabla_x \widetilde{\xi}(x).$$

On a

$$(\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} u)(x) = \tau_r \nabla \left(\widetilde{\tau_r^{-1} u} \right) (x) - \left(\mathbf{n}_r(x + r(x)) \cdot \left(\tau_r \nabla \left(\widetilde{\tau_r^{-1} u} \right) (x) \right) \right) \mathbf{n}_r(x + r(x)).$$

D'après le lemme 5.2.7 l'application $r \mapsto \mathbf{n}_r(x + r(x))$ est différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$ et on a

$$\frac{\partial \mathbf{n}_r(x + r(x))}{\partial r} [0, \xi] = -[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n}(x).$$

En utilisant les règles de dérivation standard on obtient

$$\frac{\partial \tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0; \xi] u = -[\nabla \widetilde{\xi}] \nabla \widetilde{u} + \left(([\nabla \widetilde{\xi}] \nabla \widetilde{u}) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} + (\nabla \widetilde{u} \cdot [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\nabla \widetilde{u} \cdot \mathbf{n}) [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n}.$$

Tout d'abord on ajoute les deux premiers termes du membre de gauche, ce qui donne :

$$-[\nabla \widetilde{\xi}] \nabla \widetilde{u} + \left(([\nabla \widetilde{\xi}] \nabla \widetilde{u}) \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} = -[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \nabla \widetilde{u}.$$

On ajoute alors le quatrième terme :

$$-[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \nabla \widetilde{u} + (\nabla \widetilde{u} \cdot \mathbf{n}) [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n} = -[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \nabla_{\Gamma} u.$$

Pour conclure il suffit de noter que $\nabla \widetilde{u} \cdot [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n} = \nabla_{\Gamma_0} u \cdot [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n}$. ■

Lemme 5.4.2 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma), \mathbf{H}^{s-1}(\Gamma)) \\ r &\mapsto \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$ et on a

$$\frac{\partial \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] u = {}^t[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{rot}_{\Gamma_0} u - \operatorname{div}_{\Gamma_0} \xi \mathbf{rot}_{\Gamma_0} u.$$

5.4 Dérivées de forme des opérateurs différentiels surfaciques

PREUVE. Soit $u \in H^s(\Gamma)$. Par définition, on a

$$\tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} = (\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} u)(x) \times \mathbf{n}_r(x + r(x))$$

D'après le lemme précédent et le lemme 5.2.7 cette application est bien infiniment différentiable. On a

$$\frac{\partial \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] u = -[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \nabla_{\Gamma_0} u \times \mathbf{n} - \nabla_{\Gamma_0} u \times [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n}.$$

Sachant qu'étant donné une matrice A et b et c des vecteurs on a

$$Ab \times c + b \times Ac = \text{trace}(A)(b \times c) - {}^t A(b \times c),$$

on en déduit le lemme avec $A = -[\nabla_{\Gamma_0} \xi]$, $b = \nabla_{\Gamma_0} u$ et $c = \mathbf{n}$. ■

Vu les représentations intégrales des opérateurs $\mathbf{P}_r C_r^r \mathbf{P}_r^{-1}$ et $\mathbf{P}_r M_r^r \mathbf{P}_r^{-1}$ nous devons étudier la différentiabilité au sens de Fréchet des applications $r \mapsto \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ et $r \mapsto \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$. On a vu que pour $r \in B_\delta$ l'opérateur \mathbf{rot}_{Γ_r} est linéaire et continu de $\mathbf{H}^{s+1}(\Gamma_r)$ dans $H_*^s(\Gamma_r)$, que l'opérateur différentiel surfacique div_{Γ_r} est linéaire et continu de $\mathbf{H}_*^{s+1}(\Gamma_r)$ dans $H_*^s(\Gamma_r)$ et que $\Delta_{\Gamma_r}^{-1}$ est défini de $H_*^s(\Gamma_r)$ dans $H^{s+2}(\Gamma_r)/\mathbb{R}$. Pour pouvoir utiliser les règles de dérivation de fonctions composées il est important de construire des dérivées en $r = 0$ entre les espaces $\mathbf{H}^{s+1}(\Gamma_0)$ et $H_*^s(\Gamma)$ pour l'opérateur de rotationnel, entre les espaces $\mathbf{H}_*^{s+1}(\Gamma_0)$ et $H_*^s(\Gamma_0)$ pour l'opérateur de divergence et entre les espaces et entre les espaces $H_*^s(\Gamma_0)$ et $H^{s+2}(\Gamma_0)$ pour l'opérateur de Laplace-Beltrami. Comme alternative nous allons utiliser la proposition suivante.

Proposition 5.4.3 *Soit u une fonction scalaire définie sur Γ_r . Alors $u_r \in H_*^s(\Gamma_r)$ si et seulement si $J_r \tau_r u_r = J_r u_r \circ (\mathbf{I} + r) \in H_*^s(\Gamma_0)$.*

Par conséquent l'opérateur $u \mapsto J_r \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} u$ est bien défini de $\mathbf{H}^{s+1}(\Gamma_0)$ dans $H_*^s(\Gamma_0)$.

Lemme 5.4.4 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}^s(\Gamma_0), \mathbf{H}_*^{s-1}(\Gamma_0)) \\ r &\mapsto J_r \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est Gâteaux-différentiable en $r = 0$ et on a

$$\frac{\partial J_r \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] \mathbf{u} = - \sum_{i=1}^3 \nabla_{\Gamma_0} \xi_i \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_0} \mathbf{u}_i.$$

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

PREUVE. Soit $\mathbf{u}_r \in \mathbf{H}^s(\Gamma_r)$. Par définition on a :

$$\text{rot}_{\Gamma_r} \mathbf{u}_r = -\text{trace}(\mathbf{rot}_{\Gamma_r} \mathbf{u}_r).$$

Par conséquent l'application $r \mapsto \tau_r \text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ est infiniment différentiable en $r = 0$ de $\mathbf{H}^s(\Gamma_0)$ dans $H^{s-1}(\Gamma_0)$ et étant donné $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma_0)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_r \text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] \mathbf{u} &= -\text{trace} \left(\frac{\partial \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] \mathbf{u} \right) \\ &= -\text{trace} \left({}^t[\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{rot}_{\Gamma_0} \mathbf{u} \right) + \text{div}_{\Gamma_0} \xi \cdot \text{trace}(\mathbf{rot}_{\Gamma_0} \mathbf{u}) \\ &= -\sum_{i=1}^3 \nabla_{\Gamma_0} \xi_i \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_0} \mathbf{u}_i - \text{div}_{\Gamma_0} \xi \text{rot}_{\Gamma_0} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Pour conclure on utilise le lemme 5.2.6 : $\frac{\partial J_r}{\partial r} [0, \xi] = \text{div}_{\Gamma_0} \xi$.

Pour $u \in \mathbf{H}^s(\Gamma_0)$, il est clair que $\sum_{i=1}^3 \nabla_{\Gamma_0} \xi_i \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_0} \mathbf{u}_i$ est de moyenne nulle puisque l'espace $\nabla_{\Gamma_0} H^s(\Gamma_0)$ est orthogonal à l'espace $\mathbf{rot}_{\Gamma_0} H^s(\Gamma_0)$ pour le produit scalaire \mathbf{L}^2 . Un autre argument tout aussi simple sans utiliser la forme explicite de la dérivée première : pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma_0)$, on dérive l'application

$$r \mapsto \int_{\Gamma_0} J_r \tau_r \text{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \mathbf{u} \, d\sigma \equiv 0.$$

■

En ce qui concerne l'opérateur de divergence, nous devons le composer par l'opérateur de projection sur Γ_r pour obtenir une application bien définie.

Lemme 5.4.5 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\Gamma_0), \mathbf{H}_*^{s-1}(\Gamma_0)) \\ r &\mapsto J_r \tau_r \text{div}_{\Gamma_r} \pi(r) \end{aligned}$$

est infiniment G -différentiable en $r = 0$ et on a

$$\frac{\partial J_r \tau_r \text{div}_{\Gamma_r} \pi(r)}{\partial r} [0, \xi] \mathbf{u} = -\sum_{i=1}^3 \nabla_{\Gamma_0} \xi_i \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_0} (\mathbf{u} \times \mathbf{n})_i + \text{rot}_{\Gamma_0} ((\mathbf{u} \times [\nabla_{\Gamma_0} \xi] \mathbf{n})).$$

PREUVE. Pour $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Gamma_0)$ on a $\text{div}_{\Gamma_r} \pi(r) \mathbf{u} = \text{rot}_{\Gamma_r} (\pi(r) \mathbf{u} \times \mathbf{n}_r)$.

■

De tout ce qui précède on déduit les lemmes suivants.

Lemme 5.4.6 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H^s(\Gamma_0), \mathbf{H}_*^{s-2}(\Gamma_0)) \\ r &\mapsto J_r \tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$.

5.5 Dérivabilité par rapport au domaine de la solution

PREUVE. Il suffit d'écrire :

$$\tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} = (J_r \tau_r \operatorname{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1})(\tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}).$$

L'opérateur $\tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ est composé de deux opérateurs différentiables au sens de Gâteaux en $r = 0$. ■

Notons que $u_r \in H^s(\Gamma_r)/\mathbb{R}$ si et seulement si $\tau_r u_r \in H^s(\Gamma_0)/\mathbb{R}$.

Lemme 5.4.7 *L'application*

$$\begin{aligned} B_\eta &\rightarrow \mathcal{L}_c(H_*^{s+2}(\Gamma_0), H^s(\Gamma_0)/\mathbb{R}) \\ r &\mapsto \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \tau_r^{-1} J_r^{-1} \end{aligned}$$

est infiniment différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$.

PREUVE. On a déjà vu au chapitre 1, que l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_{Γ_r} est inversible de $H^{s+2}(\Gamma_r) / \mathbb{R}$ sur $H_*^s(\Gamma_r)$. Par conséquent, l'opérateur $J_r \tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ est inversible de $H^{s+2}(\Gamma_0)/\mathbb{R}$ sur $H_*^s(\Gamma_0)/\mathbb{R}$. D'après le théorème 5.2.3 et le lemme précédent on déduit que $r \mapsto \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \tau_r^{-1} J_r^{-1}$ est différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$ et que

$$\frac{\partial \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \tau_r^{-1} J_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] = -\Delta_{\Gamma_0}^{-1} \circ \left(\frac{\partial J_r \tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}}{\partial t} [0, \xi] \right) \circ \Delta_{\Gamma_0}^{-1}.$$

■

Maintenant nous avons tous les outils pour établir la différentiabilité au sens de Gâteaux de la solution.

5.5 Dérivabilité par rapport au domaine de la solution

Pour plus de simplicité dans l'écriture nous allons utiliser les notations suivantes

$$\Psi_{E_\kappa}(r) = \Psi_{E_\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1}, \quad \Psi_{M_\kappa}(r) = \Psi_{M_\kappa}^r \mathbf{P}_r^{-1}, \quad C_\kappa(r) = \mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}, \quad \text{et } M_\kappa(r) = \mathbf{P}_r M_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}.$$

Théorème 5.5.1 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_0$. Les applications*

$$\begin{aligned} B_{\delta_K} &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_x^{s-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathcal{C}^\infty(K)) \\ r &\mapsto \Psi_{E_\kappa}(r) \\ r &\mapsto \Psi_{M_\kappa}(r) \end{aligned}$$

sont infiniment différentiables au sens de Gâteaux en $r = 0$. De plus, leurs dérivées premières se prolongent en des opérateurs linéaires et continus de $\mathbf{H}_x^{\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ dans

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{H}_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$ et étant donné $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ les potentiels $\frac{\partial \Psi_{E_\kappa}}{\partial r}[0, \xi]\mathbf{j}$ et $\frac{\partial \Psi_{M_\kappa}}{\partial r}[0, \xi]\mathbf{j}$ satisfont l'équation de Maxwell harmonique

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} - \kappa^2 \mathbf{u} = 0$$

dans Ω et Ω^c et la condition de Silver-Müller.

PREUVE. Soit $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{s-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ et $\nabla_{\Gamma_0} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q$ sa décomposition de Helmholtz. Rappelons que $\Psi_{E_\kappa}(r)\mathbf{j}$ et $\Psi_{M_\kappa}(r)\mathbf{j}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Psi_{E_\kappa}(r)\mathbf{j} &= \kappa \Psi_\kappa^r \tau_r^{-1}(\tau_r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j}) - \kappa^{-1} \nabla \Psi_\kappa^r \tau_r^{-1}(\tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p), \\ \Psi_{M_\kappa}(r)\mathbf{j} &= \mathbf{rot} \psi_\kappa^r \tau_r^{-1}(\tau_r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j}). \end{aligned}$$

D'après les lemmes 5.4.1 et 5.4.2, l'application $r \mapsto \tau_r \mathbf{P}_r$ est différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$ et la dérivée première est dans $\mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^{s-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$, le lemme 5.4.6 nous dit que l'application $r \mapsto \tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ est différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$ et la dérivée est dans l'espace $\mathcal{L}_c(H^{s+2}(\Gamma_0), H^s(\Gamma_0))$, le lemme 5.3.6 nous dit que l'application $\psi_\kappa^r \tau_r^{-1}$ est différentiable en $r = 0$ et sa dérivée première est dans $\mathcal{L}_c(\mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^s(\Omega) \cup H_{loc}^s(\Omega^c))$. On en déduit que $r \mapsto \Psi_{E_\kappa}(r)$ et $r \mapsto \Psi_{M_\kappa}(r)$ sont différentiables en $r = 0$ et que la dérivée première est dans $\mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^{\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathbf{L}^2(\Omega) \cup \mathbf{L}_{loc}^2(\Omega^c))$. On rappelle qu'on a les égalités suivantes,

$$\mathbf{rot} \Psi_{E_\kappa}(r)\mathbf{j} = \kappa \Psi_{M_\kappa}(r)\mathbf{j} \text{ et } \mathbf{rot} \Psi_{M_\kappa}(r)\mathbf{j} = \kappa \Psi_{E_\kappa}(r)\mathbf{j}.$$

Sur K , on peut intervertir la dérivation par rapport à x et par rapport à r , ce qui donne :

$$\mathbf{rot} \frac{\partial \Psi_{E_\kappa}}{\partial r}[0, \xi]\mathbf{j} = \kappa \frac{\partial \Psi_{M_\kappa}}{\partial r}[0, \xi]\mathbf{j} \text{ et } \mathbf{rot} \frac{\partial \Psi_{M_\kappa}}{\partial t}(0)\mathbf{j} = \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0)\mathbf{j}.$$

On en déduit le théorème. ■

On rappelle que l'opérateur $C_\kappa(r)$ admet la représentation suivante :

$$(5.14) \quad C_\kappa(r) \mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} P(r) + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} Q(r),$$

où

$$P(r) = -\kappa (\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \mathbf{rot}_{\Gamma_r}) (\tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1}) [(\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p) + (\tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)]$$

et

$$\begin{aligned} Q(r) = & -\kappa (\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \text{div}_{\Gamma_r} \pi(r)) (\tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1}) [(\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p) + (\tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)] \\ & + \kappa^{-1} (\tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1}) (\tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p). \end{aligned}$$

5.5 Dérivabilité par rapport au domaine de la solution

Remarque 5.5.2 Soient $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$ et $\nabla_{\Gamma_0} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} q$ sa décomposition de Helmholtz. On cherche à dériver :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j} &= \mathbf{P}_r C_\kappa^r (\nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p + \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q) \\ &= \mathbf{P}_r (\nabla_{\Gamma_r} P_r + \mathbf{rot}_{\Gamma_r} Q_r) \\ &= \nabla_{\Gamma_0} P(r) + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} Q(r). \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{\partial \mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j}}{\partial r} [0, \xi] = \nabla_{\Gamma_0} \frac{\partial P}{\partial r} [0, \xi] + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} \frac{\partial Q}{\partial r} [0, \xi].$$

La différentielle par rapport à r de $\mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j}$ dépend uniquement de celles de $P(r) = \tau_r(P_r)$ et $Q(r) = \tau_r(Q_r)$.

Théorème 5.5.3 L'opérateur :

$$\begin{aligned} B_\eta &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)) \\ r &\mapsto \mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} \end{aligned}$$

est différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$.

PREUVE. On a :

$$\begin{aligned} P(r) &= -\kappa(\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \tau_r^{-1})(\tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1})(\tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1})(\tau_r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j}) \\ Q(r) &= -\kappa(\tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \tau_r^{-1})(\tau_r \text{div}_{\Gamma_r} \pi(r))(\tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1})(\tau_r \mathbf{P}_r \mathbf{j}) \\ &\quad + \kappa^{-1}(\tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1})(\tau_r \Delta_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p) \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.4.7 l'application $r \mapsto \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} J_r^{-1} \tau_r^{-1}$ est différentiable au sens de Gâteaux de B_δ dans $\mathcal{L}_c(H^s(\Gamma_0) \setminus \mathbb{R}, \mathcal{H}_*^{s+2}(\Gamma_0))$, le lemme 5.4.4 nous dit que l'application $r \mapsto J_r \tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1}$ est différentiable au sens de Gâteaux de B_δ dans $\mathcal{L}_c(\mathbf{H}^{s+1}(\Gamma_0), \mathbf{H}_*^s(\Gamma_0))$, le lemme 5.3.5 nous dit que l'application $r \mapsto \tau_r V_\kappa^r \tau_r^{-1}$ est différentiable au sens de Gâteaux de B_δ dans $\mathcal{L}_c(H^{s-1}(\Gamma_0), H^{s+1}(\Gamma_0))$ et on a vu que $r \mapsto \tau_r \mathbf{P}_r$ est différentiable en $r = 0$ de B_δ dans l'espace $\mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathbf{H}^s(\Gamma_0))$. Étant composée d'applications différentiables au sens de Gâteaux en $r = 0$, l'application $r \mapsto \mathbf{P}_r C_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}$ l'est aussi. ■

L'opérateur $\mathbf{P}_r M_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1}$ admet la représentation suivante :

$$(5.15) \quad \mathbf{P}_r M_\kappa^r \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{j} = \nabla_{\Gamma_0} P'(r) + \mathbf{rot}_{\Gamma_0} Q'(r),$$

où

$$\begin{aligned} (5.16) \quad P'(r)(x) &= \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \text{div}_{\Gamma_r} \pi(r) [\\ &\quad \int_{\Gamma_0} \{ \nabla G(\kappa, |x_r - y_r|) \langle \mathbf{n}_r(x_r) - \mathbf{n}_r(y_r), (\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y) \\ &\quad + \nabla G(\kappa, |x_r - y_r|) \langle \mathbf{n}_r(x_r) - \mathbf{n}_r(y_r), (\tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y) \\ &\quad - \langle (\nabla G)(\kappa, |x_r - y_r|), \mathbf{n}_r(x_r) \rangle (\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y) \\ &\quad - \langle (\nabla G)(\kappa, |x_r - y_r|), \mathbf{n}_r(x_r) \rangle (\tau_r \mathbf{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y) \} J_r(y) d\sigma(y)], \end{aligned}$$

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

et

$$\begin{aligned}
 (5.17) \quad Q'(r)(x) = & \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \operatorname{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} [\\
 & \int_{\Gamma_0} \{ \nabla G(\kappa, |x_r - y_r|) \langle \mathbf{n}_r(x_r) - \mathbf{n}_r(y_r), (\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y) \\
 & + \nabla G(\kappa, |x_r - y_r|) \langle \mathbf{n}_r(x_r) - \mathbf{n}_r(y_r), (\tau_r \operatorname{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y) \\
 & - \langle (\nabla G)(\kappa, |x_r - y_r|), \mathbf{n}_r(x_r) \rangle (\tau_r \nabla_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} p)(y) \\
 & - \langle (\nabla G)(\kappa, |x_r - y_r|), \mathbf{n}_r(x_r) \rangle (\tau_r \operatorname{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} q)(y) \} J_r(y) d\sigma(y)].
 \end{aligned}$$

Théorème 5.5.4 *L'opérateur :*

$$\begin{aligned}
 B_\delta & \rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)) \\
 r & \mapsto \mathbf{P}_r M_\kappa \mathbf{P}_r^{-1}
 \end{aligned}$$

est différentiable en $r = 0$.

PREUVE. On a :

$$\begin{aligned}
 P'(r) & = \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \operatorname{div}_{\Gamma_r} \pi(r) [\tau_r B_\kappa^r \tau_r^{-1} - \tau_r D_\kappa^r \tau_r^{-1}] (\tau_r \mathbf{P}_r \mathbf{j}) \\
 Q'(r) & = \tau_r \Delta_{\Gamma_r}^{-1} \operatorname{rot}_{\Gamma_r} \tau_r^{-1} [\tau_r B_\kappa^r \tau_r^{-1} - \tau_r D_\kappa^r \tau_r^{-1}] (\tau_r \mathbf{P}_r \mathbf{j})
 \end{aligned}$$

D'après les lemmes 5.3.7 et 5.3.8, les applications $r \mapsto \tau_r D_\kappa^r \tau_r^{-1}$ et $r \mapsto \tau_r B_\kappa^r \tau_r^{-1}$ sont différentiables au sens de Gâteaux en $r = 0$ de B_η dans $\mathcal{L}_c(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$. Étant composée d'applications différentiables au sens de Gâteaux en $r = 0$, $r \mapsto \mathbf{P}_r M_\kappa \mathbf{P}_r^{-1}$ l'est aussi. ■

La dérivabilité de la solution résulte du théorème suivant :

Théorème 5.5.5 *On suppose que les applications*

$$\begin{aligned}
 B_\delta & \rightarrow \mathbf{H}_\times^{\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0) \\
 r & \mapsto \mathbf{P}_r \left(\mathbf{n}_r \times \mathbf{E}_{|\Gamma_r}^{inc} \right) \\
 r & \mapsto \mathbf{P}_r \left(\mathbf{n}_r \times \left(\operatorname{rot} \mathbf{E}^{inc} \right)_{|\Gamma_r} \right)
 \end{aligned}$$

sont G -différentiables en $r = 0$. Alors l'application qui à r associe la solution $\mathcal{E}(r) = \mathbf{E}(\Omega_r) \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \cup \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega^c)$ du problème de diffraction par le diélectrique Ω_r est différentiable en $r = 0$.

PREUVE. Immédiat par composition d'applications différentiables entre les espaces adéquats. ■

5.5 Dérivabilité par rapport au domaine de la solution

5.5.1 Caractérisation de la dérivée première

Considérons l'application qui à $r \in B_\delta$ associe la solution $\mathcal{E}(r) = (\mathbf{E}^i(\Omega_r), \mathbf{E}^s(\Omega_r))$ du problème de transmission par l'interface Γ_r , suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot rot} \mathbf{E}^i(\Omega_r) - \kappa_i^2 \mathbf{E}^i(\Omega_r) = 0 & \text{dans } \Omega_r \\ \mathbf{rot rot} \mathbf{E}^s(\Omega_r) - \kappa_e^2 \mathbf{E}^s(\Omega_r) = 0 & \text{dans } \Omega_r^c \end{cases}$$

avec les conditions au bord :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_r \times \mathbf{E}^i(\Omega_r) - \mathbf{n}_r \times \mathbf{E}^s(\Omega_r) = -\mathbf{n}_r \times \mathbf{E}_{|\Gamma_r}^{inc} & \text{sur } \Gamma_r \\ \mu_i^{-1} \mathbf{n}_r \times \mathbf{rot} \mathbf{E}^i(\Omega_r) - \mu_e^{-1} \mathbf{n}_r \times \mathbf{rot} \mathbf{E}^s(\Omega_r) = \mu_e^{-1} \mathbf{n}_r \times (\mathbf{rot} \mathbf{E}^{inc})_{|\Gamma_r} & \text{sur } \Gamma_r \end{cases}$$

et $\mathbf{E}^s(\Omega_r)$ vérifie la condition de Silver-Müller.

Le théorème suivant donne une caractérisation de la première dérivée de $r \mapsto \mathcal{E}(r)$ en $r = 0$.

Théorème 5.5.6 *Soit K un compact de $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. On suppose que les applications*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathbf{H}_\times^{\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0) \\ r &\mapsto \mathbf{P}_r \mathbf{n}_r \times \mathbf{E}_{|\Gamma_r}^{inc} \\ r &\mapsto \mathbf{P}_r \mathbf{n}_r \times (\mathbf{rot} \mathbf{E}^{inc})_{|\Gamma_r} \end{aligned}$$

sont différentiables en $r = 0$. Alors, l'application :

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(K) \\ r &\mapsto (\mathbf{E}^i(\Omega_r), \mathbf{E}^s(\Omega_r)) \end{aligned}$$

est infiniment différentiable au sens de Gâteaux en $r = 0$ et la dérivée première en $r = 0$ dans la direction ξ est dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cup \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega^c)$ et est solution du problème de transmission suivant $\mathcal{P}'(\xi)$:

$$(5.18) \quad \begin{cases} \mathbf{rot rot} \frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial r}[0, \xi] - \kappa_i^2 \frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial r}[0, \xi] = 0 \\ \mathbf{rot rot} \frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r}[0, \xi] - \kappa_e^2 \frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r}[0, \xi] = 0 \end{cases}$$

avec les conditions au bord :

$$(5.19) \quad \begin{cases} \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial r}[0, \xi] - \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r}[0, \xi] = g_D \\ \mu_i^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial r}[0, \xi] - \mu_e^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{rot} \frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r}[0, \xi] = g_N, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} g_D &= -(\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}) \\ &\quad + \mathbf{rot}_\Gamma(\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}), \end{aligned}$$

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

et

$$g_N = -(\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mu_i^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^i - \mu_e^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^s - \mu_e^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{inc}) \\ + \operatorname{rot}_\Gamma(\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot (\mu_i^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^i - \mu_e^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^s - \mu_e^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{inc}).$$

et où $\frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r}[0, \xi]$ satisfait la condition de Silver-Müller.

PREUVE. Puisqu'on peut intervertir la dérivation par rapport à $x \in K$ et celle par rapport à r , les fonctions ci-dessus sont solutions des équations de Maxwell et les dérivées directionnelles de \mathcal{E}^s en $r = 0$ satisfont la condition de Silver-Müller. Ceci peut se voir en utilisant la représentations intégrale de $\mathcal{E}(r)$. On a

$$\mathcal{E}^s(r) = (-\Psi_{E_{\kappa_e}}(r) - i\eta\Psi_{M_{\kappa_e}}(r))\mathbf{j}_r, \quad \text{dans } \Omega_r^c,$$

où

$$\mathbf{j}_r = \mathbf{S}^{-1}(r) \left(\rho C_{\kappa_i}(r) \mathbf{P}_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc} - \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_i}(r) \right) \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc} \right),$$

avec

$$\mathbf{S}(r) = \rho \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_i}(r) \right) \left(C_{\kappa_e}(r) + i\eta \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + i\eta M_{\kappa_e}(r) \right) C_0 \right) \\ + C_{\kappa_i}(r) \left(\left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e}(r) \right) + i\eta C_{\kappa_e}(r) C_0(r) \right),$$

et

$$\mathcal{E}^i(r) = -\frac{1}{\rho} (\Psi_{E_{\kappa_i}}(r)) \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^{c,r} (\mathcal{E}^s(r) + \mathbf{E}^{inc}) - (\Psi_{M_{\kappa_i}}(r)) \mathbf{P}_r \gamma_D^{c,r} (\mathcal{E}^s(r) + \mathbf{E}^{inc}), \quad \text{dans } \Omega_r.$$

On dérive $r \mapsto \mathcal{E}^s(r)$ selon les règles de dérivations de produit de fonctions.

$$\frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r}[0, \xi] = \left(-\frac{\partial \Psi_{E_{\kappa_e}}}{\partial r}[0, \xi] - i\eta \frac{\partial \Psi_{M_{\kappa_e}}}{\partial r}[0, \xi] C_0 - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}} \frac{\partial C_0}{\partial r}[0, \xi] \right) \mathbf{j} \\ + (-\Psi_{E_{\kappa_e}} - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}} C_0) \mathbf{S}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial r}[0, \xi] \mathbf{j} \right) \\ + (-\Psi_{E_{\kappa_e}} - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}} C_0) \mathbf{S}^{-1} \left(-\rho \frac{\partial M_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_D \mathbf{E}^{inc} - \frac{\partial C_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc} \right) \\ + (-\Psi_{E_{\kappa_e}} - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}} C_0) \mathbf{S}^{-1} \left(-\rho \left(\frac{1}{2} + M_{\kappa_i} \right) \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right) \\ + (-\Psi_{E_{\kappa_e}} - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}} C_0) \mathbf{S}^{-1} \left(-C_{\kappa_i} \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right).$$

On fait la même chose avec $r \mapsto \mathcal{E}^i(r)$

5.5 Dérivabilité par rapport au domaine de la solution

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial r}[0, \xi] = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{E_{\kappa_i}}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_{N_{\kappa_e}}^c (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^{inc}) - \frac{\partial \Psi_{M_{\kappa_i}}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_D^c (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^{inc}) \\
& - \frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] - \Psi_{M_{\kappa_i}} \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \\
& - \frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} \left(\frac{\partial M_{\kappa_e}}{\partial r}[0, \xi] + i\eta \frac{\partial C_{\kappa_e}}{\partial r}[0, \xi] C_0 + C_{\kappa_e} \frac{\partial C_0}{\partial r}[0, \xi] \right) \mathbf{j} \\
& - \Psi_{M_{\kappa_i}} \left(\frac{\partial C_{\kappa_e}}{\partial r}[0, \xi] + i\eta \frac{\partial M_{\kappa_e}}{\partial r}[0, \xi] C_0 + \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) \frac{\partial C_0}{\partial r}[0, \xi] \right) \mathbf{j} \\
& - \frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} \left(\left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) + i\eta C_{\kappa_e} C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial r}[0, \xi] \mathbf{j} \right) \\
& - \frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} \left(\left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) + i\eta C_{\kappa_e} C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-\rho \frac{\partial M_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_D \mathbf{E}^{inc} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial C_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc} \right) \\
& - \frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} \left(\left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) + i\eta C_{\kappa_e} C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-\rho \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_i} \right) \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right) \\
& - \frac{1}{\rho} \Psi_{E_{\kappa_i}} \left(\left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) + i\eta C_{\kappa_e} C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-C_{\kappa_i} \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right) \\
& - \Psi_{M_{\kappa_i}} \left(C_{\kappa_e} + i\eta \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial r}[0, \xi] \mathbf{j} \right) \\
& - \Psi_{M_{\kappa_i}} \left(C_{\kappa_e} + i\eta \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-\rho \frac{\partial M_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_D \mathbf{E}^{inc} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial C_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc} \right) \\
& - \Psi_{M_{\kappa_i}} \left(C_{\kappa_e} + i\eta \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-\rho \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_i} \right) \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right) \\
& - \Psi_{M_{\kappa_i}} \left(C_{\kappa_e} + i\eta \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_e} \right) C_0 \right) \mathbf{S}^{-1} \left(-C_{\kappa_i} \frac{\partial \mathbf{P}_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right).
\end{aligned}$$

Nous avons montrés plus haut que les opérateurs de potentiels ainsi que leurs dérivées directionnelles satisfont les équations de Maxwell et la conditions de Silver-Müller. Il reste à déterminer les conditions aux limites. On pourrait utiliser la représentation intégrale de la solution comme R. Potthast mais cela nous contraindrait à écrire de longs calculs (vue la représentation intégrale ci-dessus). Nous allons ici dériver tous simplement les conditions de transmissions.

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

Pour $x \in \Gamma_0$ On dérive tout simplement en $r = 0$ l'expression :

$$\mathbf{n}_r(x + r(x)) \times (\mathcal{E}^i(r)(x + r(x)) - \mathcal{E}^s(r)(x + r(x)) - \mathbf{E}^{inc}(x + r(x))) = 0.$$

Cela donne dans la direction ξ :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial \tau_r \mathbf{n}_r}{\partial r} [0, \xi](x) \times (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x)) \\ & + \mathbf{n}(x) \times \left(\frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial r} [0, \xi](x) - \frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r} [0, \xi](x) \right) \\ & + \mathbf{n} \times (\xi(x) \cdot \nabla (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc})). \end{aligned}$$

On rappelle que $\frac{\partial \tau_r \mathbf{n}_r}{\partial r} [0, \xi](x) = -[\nabla_\Gamma \xi] \mathbf{n}$ et on utilise

$$\nabla u = \nabla_\Gamma u + \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \mathbf{n}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(x) \times \left(\frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial r} [0, \xi](x) - \frac{\partial \mathcal{E}^s}{\partial r} [0, \xi](x) \right) = & [\nabla_\Gamma \xi] \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x)) \\ & - \mathbf{n} \times (\xi(x) \cdot \nabla_\Gamma (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x))) \\ & - (\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x)). \end{aligned}$$

Puisque la composante tangentielle de $\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}$ est nulle on a :

$$(\xi(x) \cdot \nabla_\Gamma (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x))) = ([{}^t \nabla_\Gamma \mathbf{n}] \xi) (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x)))$$

et

$$[\nabla_\Gamma \xi] \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x)) = ([\nabla_\Gamma \xi] \mathbf{n}) \times \mathbf{n} (\mathbf{E}^i(x) - \mathbf{E}^s(x) - \mathbf{E}^{inc}(x)) \cdot \mathbf{n}.$$

Pour des surfaces régulières on a $\nabla_\Gamma \mathbf{n} = {}^t \nabla_\Gamma \mathbf{n}$. et on a

$$([\nabla_\Gamma \xi] \mathbf{n}) \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times ([{}^t \nabla_\Gamma \mathbf{n}] \xi) = \mathbf{rot}_\Gamma (\xi \cdot \mathbf{n}).$$

On en déduit la première condition. On obtient la deuxième condition de la même façon en remplaçant \mathbf{E}^i par $\mu_i^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}^i$, \mathbf{E}^s par $\mu_e^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s$ et \mathbf{E}^{inc} par $\mu_e^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}^{inc}$. ■

Finalement nous avons deux possibilités pour calculer la dérivée de forme de la solution. Soit on dérive la représentation intégrale, ce qui peut donner de longs calculs, soit on utilise le nouveau problème aux limites associé à la dérivée première et on le résoud en utilisant les méthodes d'équations intégrales développées dans la première partie de la thèse. Si nous regardons de plus près les conditions aux limites, nous devons alors calculer les dérivées normales des opérateurs de potentiels, ce qui a été fait au chapitre 2.

5.6 Dérivées de forme du champ lointain

Nous rappelons que pour le problème d'optimisation de forme nous avons besoin des dérivées de forme du champ lointain $\mathbf{E}^\infty(\Omega)$ associé à la solution $\mathbf{E}(\Omega)$ du problème de diffraction par le diélectrique Ω . On procède comme précédemment et on étudie l'application $r \in B_\delta \mapsto \mathbf{E}^\infty(\Omega_r) \in \mathcal{C}^{infly}(S^2)$. Une représentation intégrale du champ lointain est

$$\mathbf{E}^\infty(\Omega_r) = \left(-\Psi_{E_{\kappa_e}}^{\infty,r} - i\eta\Psi_{M_{\kappa_e}}^{\infty,r} C_0^r \right) \mathbf{j}_r \quad \text{dans } \Omega_r^c = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_r}$$

ou \mathbf{j}_r est solution de l'équation intégrale

$$\mathbf{T}^r \mathbf{j}_r = -\rho C_{\kappa_i}^r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc} - \left(-\frac{1}{2} \mathbf{I} + M_{\kappa_i}^r \right) \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc}.$$

Les opérateurs $\Psi_{E_{\kappa_e}}^{\infty,r}$ et $\Psi_{M_{\kappa_e}}^{\infty,r}$ sont de noyaux infiniment différentiables, nous avons donc le résultat suivant :

Corollaire 5.6.1 *Soit $s \in \mathbb{R}$. Les applications*

$$\begin{aligned} B_\delta &\rightarrow \mathcal{L}_c(\mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0), \mathcal{C}^\infty(S^2)) \\ r &\mapsto \Psi_{E_{\kappa_e}}^{\infty,r} \tau_r^{-1} \\ r &\mapsto \Psi_{M_{\kappa_e}}^{\infty,r} \tau_r^{-1} \end{aligned}$$

sont infiniment Gâteaux-différentiables en $r = 0$ et on a pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^s(\text{div}_{\Gamma_0}, \Gamma_0)$:

$$\frac{\partial \Psi_{E_{\kappa_e}}^{\infty,r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] \mathbf{j}(\hat{x}) = i\kappa \hat{x} \times \left(\int_{\Gamma_0} e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} (\text{div}_{\Gamma_0} \xi(y) - i\kappa \hat{x} \cdot \xi(y)) \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \right) \times \hat{x},$$

et

$$\frac{\partial \Psi_{M_{\kappa_e}}^{\infty,r} \tau_r^{-1}}{\partial r} [0, \xi] \mathbf{j}(\hat{x}) = \kappa \hat{x} \times \left(\int_{\Gamma_0} e^{-i\kappa \hat{x} \cdot y} (\text{div}_{\Gamma_0} \xi(y) - i\kappa \hat{x} \cdot \xi(y)) \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \right).$$

PREUVE. Fixons x et y . L'application $r \in B_\delta \mapsto e^{i\kappa \hat{x} \cdot (y+r(y))} \in \mathbb{C}$ est infiniment différentiable en $r = 0$ et les dérivées successives définissent des noyaux de classe \mathcal{C}^∞ . Ensuite on suit les mêmes étapes que dans la preuve du théorème 5.3.1. \blacksquare

Pour les dérivées de forme du champ lointain nous n'avons donc pas besoin de plus de régularité pour le champ incident \mathbf{E}^{inc} .

Théorème 5.6.2 *Étant donné le champ incident électrique $\mathbf{E}^{inc} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \mathbb{R}^3)$, l'application qui à $r \in V_{ad}$ associe le champ lointain $\mathbf{E}^\infty(\Omega_r) \in \mathcal{S}_\times(S^2)$ est infiniment Gâteaux-différentiable en $r = 0$. De plus la dérivée première dans la direction $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$, notée $D_\Omega \mathbf{E}^\infty[0, \xi]$, est le champ lointain associé à la solution du nouveau problème de diffraction $\mathcal{P}'(\xi)$.*

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

PREUVE. On utilise la représentation intégrale de $\mathbf{E}^\infty(\Omega_r)$ et on conclut par composition d'applications infiniment différentiables entre les espaces adéquats. Puisqu'on peut intervertir la dérivation par rapport à r et le passage à la limite pour $x \rightarrow \infty$, la dérivée première du champ lointain est le champ lointain associé à la dérivée première de la solution du problème de diffraction diélectrique. C'est pourquoi nous pouvons calculer la dérivée du champ lointain dans la direction $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$ en résolvant le problème $\mathcal{P}'(\xi)$. \blacksquare

Pour calculer les dérivées de forme du champ lointain nous avons également deux possibilités. Soit nous dérivons les opérateurs intégraux et nous utilisons les règles de dérivations de fonctions composées et de produit de fonctions, soit nous résolvons le problème dérivé et nous devons calculer des dérivées normales des opérateurs de potentiels.

▷ **Utilisation des dérivées de forme des opérateurs intégraux surfaciques :**
 Pour dériver numériquement le champ lointain nous utilisons la représentation intégrale obtenue en résolvant l'équation intégrale associée à l'opérateur \mathbf{T} (cf tableau page 56). On note \mathbf{j} la solution de l'équation intégrale. On pose $\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty(r) = \Psi_{E_{\kappa_e}}^{\infty,r} \mathbf{P}_r^{-1}$ et $\Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty(r) = \Psi_{M_{\kappa_e}}^{\infty,r} \mathbf{P}_r^{-1}$. Dans la direction ξ , la dérivée première est :

$$\begin{aligned}
 D_\Omega \mathbf{E}^\infty[0, \xi] = & \left(-\frac{\partial \Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty}{\partial r}[0, \xi] - i\eta \frac{\partial \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty}{\partial r}[0, \xi] C_0 - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty \frac{\partial C_0}{\partial r}[0, \xi] \right) \mathbf{j} \\
 & + (-\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty C_0) \mathbf{T}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r}[0, \xi] \mathbf{j} \right) \\
 & + (-\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty C_0) \mathbf{T}^{-1} \left(-\rho \frac{\partial C_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_D \mathbf{E}^{inc} - \frac{\partial M_{\kappa_i}}{\partial r}[0, \xi] \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc} \right) \\
 & + (-\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty C_0) \mathbf{T}^{-1} \left(-\rho C_{\kappa_i} \frac{\partial \tau_r \gamma_D^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right) \\
 & + (-\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty C_0) \mathbf{T}^{-1} \left(-\left(\frac{1}{2} + M_{\kappa_i} \right) \frac{\partial \tau_r \gamma_{N_{\kappa_e}}^r \mathbf{E}^{inc}}{\partial r}[0, \xi] \right).
 \end{aligned}$$

Ce calcul nécessite donc de calculer pour chaque variations ξ sept nouveaux opérateurs ainsi que les dérivées des traces du champ incident.

▷ **Utilisation du problème dérivé :**

Nous pouvons aussi calculer la dérivée du champ lointain en résolvant le problème dérivé $\mathcal{P}'(\xi)$ en utilisant les équations intégrales construites dans la première partie de cette thèse. Nous utiliserons la même équation intégrale que pour calculer le champ lointain lui-même. Si on prend $\mu_i = \mu_e$ comme pour le problème physique on a

$$D_\Omega \mathbf{E}^\infty[\xi] = (-\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty) \mathbf{T}^{-1} \left(-\rho C_{\kappa_i} g_D - \left(-\frac{1}{2} + M_{\kappa_i} \right) g_N \right)$$

5.6 Dérivées de forme du champ lointain

où

$$g_D = -(\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}) \\ + \mathbf{rot}_\Gamma (\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}).$$

et

$$g_N = -(\xi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{rot} \mathbf{E}^i - \mathbf{rot} \mathbf{E}^s - \mathbf{rot} \mathbf{E}^{inc}).$$

Cette représentation nécessite le calcul de la composante tangentielle des dérivées normales de la solution et du champ incident et de leurs composantes normales. C'est ici que nous allons utiliser les nouveaux opérateurs intégraux introduits au chapitre 2.

▷ Composante normale :

Pour éviter d'introduire de nouveaux opérateurs associés aux composantes normales des potentiels électriques et magnétiques nous utilisons l'égalité :

$$(\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}) \cdot \mathbf{n} = \text{div}_\Gamma \left(\frac{1}{\kappa_i} \gamma_{N_{\kappa_i}} \mathbf{E}^i - \frac{1}{\kappa_e} \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^s - \frac{1}{\kappa_e} \gamma_{N_{\kappa_e}} \mathbf{E}^{inc} \right).$$

▷ Dérivée normale :

Au chapitre 2 nous avons introduit de nouveaux opérateurs, notés M_κ^\dagger et C_κ^\dagger , liés aux dérivées normales des potentiels électriques et magnétiques. Nous rappelons que :

$$M_\kappa^\dagger \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \{ \mathbf{n} \times \gamma_n + \mathbf{n} \times \gamma_n^c \} \Psi_{M_\kappa}, \text{ et } C_\kappa^\dagger \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \{ \mathbf{n} \times \gamma_n + \mathbf{n} \times \gamma_n^c \} \Psi_{E_\kappa}$$

et

$$\mathbf{n} \times (\gamma_n - \gamma_n^c) \Psi_{E_\kappa} = \kappa \mathbf{n} \times \mathbf{I} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma, \\ \mathbf{n} \times (\gamma_n - \gamma_n^c) \Psi_{M_\kappa} = \mathbf{H}_\Gamma \cdot \mathbf{I} - \mathcal{R}_\Gamma.$$

On peut alors écrire :

$$\mathbf{n} \times \gamma_n^c \mathbf{E}^s = \left(\frac{\kappa_e}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{I} + \frac{1}{2\kappa_e} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma + C_{\kappa_e}^\dagger + i\eta \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}_\Gamma \mathbf{I} - \mathcal{R}_\Gamma) + M_{\kappa_e}^\dagger \right) \right) \mathbf{j}. \\ \mathbf{n} \times \gamma_n \mathbf{E}^i = \left(-\frac{\kappa_i}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{I} - \frac{1}{2\kappa_i} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma + C_{\kappa_i}^\dagger \right) \gamma_{N_{\kappa_i}}^c \mathbf{E}^i + \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{H}_\Gamma \mathbf{I} - \mathcal{R}_\Gamma) + M_{\kappa_i}^\dagger \right) \gamma_D \mathbf{E}^i. \\ \mathbf{n} \times \gamma_n^c \mathbf{rot} \mathbf{E}^s = \kappa_e \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}_\Gamma \mathbf{I} - \nabla \mathbf{n}) + M_{\kappa_e}^\dagger + i\eta \left(\frac{\kappa_e}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{I} + \frac{1}{2\kappa_e} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma + C_{\kappa_e}^\dagger \right) \right) \mathbf{j}.$$

5. Dérivées de forme de la solution du problème de diffraction

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \gamma_n \mathbf{rot} \mathbf{E}^i &= \kappa_i \left(-\frac{1}{2}(\mathbf{H}_\Gamma \mathbf{I} - \mathcal{R}_\Gamma) + M_{\kappa_i}^\dagger \right) \gamma_{N_{\kappa_i}}^c \mathbf{E}^i \\ &\quad + \kappa_i \left(-\frac{\kappa_i}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{I} - \frac{1}{2\kappa_i} \mathbf{n} \times \nabla_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma + C_{\kappa_i}^\dagger \right) \gamma_D \mathbf{E}^i. \end{aligned}$$

Il faut noter que cette représentation n'est valable que pour les surfaces régulières puisque nous avons besoin des dérivées du vecteur normal à savoir sa divergence surfacique \mathcal{H}_Γ et son gradient tangentiel \mathcal{R}_Γ . Dans le chapitre suivant nous allons développer deux méthodes de descentes en utilisant ces deux méthodes pour le calcul des dérivées de forme du champ lointain.

Chapitre 6

Le problème d'optimisation de forme

6.1 Introduction

La problématique que nous voulons résoudre est la suivante : Déterminer la forme optimale de la lentille diélectrique, étant donné

- (i) les caractéristiques de la source primaire \mathbf{E}^{inc} ,
- (ii) le profil de rayonnement souhaité, noté I^∞ .

Dans la majorité des applications physiques, on veut seulement optimiser l'amplitude du champ lointain. Les exemples de gabarits de rayonnement désirés sont alors des champs lointains dont l'amplitude est :

- (i) une fonction gaussienne asymétrique : en notant $I^\infty = \frac{|I^\infty|}{\max(|I^\infty|)}$ et (θ, ϕ) les coordonnées sphériques de $\hat{x} \in S^2$, le gabarit I^∞ désiré est défini par

$$I^\infty(\theta, \phi) = e^{-\frac{\theta^2 \cos^2(\phi)}{K_0}} \cdot e^{-\frac{\theta^2 \sin^2(\phi)}{K_{90}}}$$

où K_0 et K_{90} permettent de fixer l'ouverture du gabarit de rayonnement dans les deux plans $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 90^\circ$. Si $0^\circ < \theta_{ouv} < 90^\circ$ désigne l'angle d'ouverture du diagramme de rayonnement à NdB décibel dans l'un des deux plans, ces constantes sont définies par

$$K_{0,90} = -\frac{\theta_{ouv}}{\ln\left(10^{\frac{NdB}{20}}\right)}.$$

En générale on prend $NdB = -3dB$;

- (ii) une fonction constante sur une section de la sphère unité et zéro sinon : dans ce cas le gabarit I^∞ est représenté par une fonction indicatrice sur la sphère unité.

Dans ce cas, les seules données étant l'amplitude, on cherche à minimiser la fonction coût :

$$J_1(\Omega) = \int_{S^2} \omega(\hat{x}) (|\mathbf{I}^\infty(\hat{x})| - |\mathbf{E}^\infty(\Omega)(\hat{x})|)^2 d\sigma(\hat{x}),$$

où ω est un poids sur la sphère unité S^2 et $\mathbf{E}^\infty(\Omega)$ désigne le champ lointain associé à la solution $\mathbf{E}(\Omega)$ du problème de diffraction par le diélectrique Ω soumis au champ électrique incident \mathbf{E}^{inc} . Le poids ω permet de définir la section de la sphère unité sur laquelle nous voulons optimiser le champ lointain \mathbf{E}^∞ . En pratique on prend

$$\omega(\hat{x}) = \omega(\theta, \phi) = \mathbb{1}_{\{\theta \in [0^\circ, 90^\circ]\}}.$$

Il existe tout de même quelques applications où on prend en compte la phase, par exemple pour la conception d'antenne à réflecteur. Dans ce cas on cherche à minimiser la fonction coût quadratique

$$J_2(\Omega) = \int_{S^2} \omega(\hat{x}) |\mathbf{I}^\infty(\hat{x}) - \mathbf{E}^\infty(\Omega)(\hat{x})|^2 d\sigma(\hat{x}).$$

Nous nous sommes principalement intéressé à cette dernière pour la réalisation numérique d'un algorithme d'optimisation de forme. Comme nous l'avons au chapitre 4, avec le logiciel utilisé et la méthode de discrétisation utilisée il est difficile de monter en fréquence tout en gardant une bonne approximation du champ lointain avec peu d'éléments dans la triangulation. Dans le meilleur des cas on peut considérer des diffracteurs diélectriques de la taille d'une longueur d'onde seulement, par conséquent il est assez difficile d'obtenir des profils de rayonnement dont la forme des diagramme se rapproche d'une gaussienne asymétrique avec des angles d'ouvertures assez faibles ou d'une indicatrice. Ce que nous pouvons faire c'est choisir des profils idéaux \mathbf{I}^∞ dont on connaît la (ou une) solution, le but fixé étant de montrer l'applicabilité des méthodes d'équations intégrales de frontières dans la résolution de problèmes d'optimisation de forme et de vérifier numériquement les résultats théoriques énoncés au chapitre 5.

Pour déterminer numériquement le minimum de la fonction coût J_2 nous allons procéder de la façon suivante. Nous introduisons un ensemble de domaines admissibles D_{ad} sur le lequel nous allons évaluer J_2 . Pour notre problème nous construisons D_{ad} de la façon suivante :

- (i) on fixe un domaine Ω_0 borné, simplement connexe et de frontière Γ_0 régulière,
- (ii) on introduit un ensemble de variations admissibles V_{ad} . Ici nous choisissons un espace vectoriel $V_{ad} \subset \mathbf{L}^2(\Gamma_0)$.
- (iii) on définit alors D_{ad} par

$$\Omega_r \in D_{ad} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega_r \text{ est borné, simplement connexe} \\ \text{et de frontière } \Gamma_r = (1+r)\Gamma_0 \text{ régulière} \\ \text{avec } r \in V_{ad}. \end{cases}$$

6.2 Algorithmes d'optimisation de forme

On considère alors l'application $r \mapsto \mathcal{J}(r) = J_2(\Omega_r)$ définie sur V_{ad} . Nous voulons construire une méthode de descente de type gradient pour déterminer numériquement le minimum de la fonctionnelle \mathcal{J} . Nous avons donc besoin de calculer les dérivées premières directionnelles de \mathcal{J} . La différentiabilité de \mathcal{J} dépend uniquement de celle de $r \mapsto \mathbf{E}^\infty(\Omega_r)$ que nous avons établi au chapitre précédent pour des variations $r \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_0)$. Connaissant les dérivées de formes du champ lointain, celle de la fonction coût \mathcal{J} s'obtient d'après les règles usuelles de dérivations et on a :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}[0, \xi] = D_\Omega J[0, \xi] = 2\Re \left(\int_{S^2} \omega(\hat{x}) D_\Omega \mathbf{E}^\infty[0, \xi](\hat{x}) \cdot \overline{(\mathbf{E}^\infty(\hat{x}) - \mathbf{I}^\infty(\hat{x}))} d\sigma(\hat{x}) \right)$$

Les dérivées directionnelles associées à la fonction coût J_1 s'écrivent

$$D_\Omega J_1[0, \xi] = 2\Re \left(\int_{S^2} \omega(\hat{x}) \left(1 - \frac{|\mathbf{I}^\infty(\hat{x})|}{|\mathbf{E}^\infty(\hat{x})|} \right) D_\Omega \mathbf{E}^\infty[0, \xi](\hat{x}) \cdot \overline{\mathbf{E}^\infty(\hat{x})} d\sigma(\hat{x}) \right).$$

Dans la section suivante nous allons présenter deux méthodes pour choisir la direction dans laquelle nous devons faire bouger la surface Γ_0 pour que la fonction coût décroît. Les tests numériques seront présentés dans le chapitre suivant.

6.2 Algorithmes d'optimisation de forme

6.2.1 Une méthode de gradient

La méthode que nous décrivons dans ce paragraphe s'inspire de celle décrite par H. Heese dans sa thèse [20] pour résoudre un problème d'optimisation différent et en 2D. L'idée consiste à choisir comme domaines admissibles des déformations de la sphère unité. En effet tout domaine simplement connexe est homéomorphe à la sphère unité et peut-être paramétré par la sphère unité par projection orthogonale. Ce qui nous amène à définir les ensembles de variations admissibles et de domaines admissibles suivants.

▷ Variations admissibles :

On considère uniquement des variations de la sphère unité selon la normale.

$$V_{ad} = \{r \in \mathbf{L}^2(S^2), r(\hat{x}) = s(\hat{x}) \cdot \hat{x} \text{ avec } s \in L^2(S^2) \text{ et } (1 + s(\hat{x})) > 0\}.$$

▷ Variations admissibles :

Soit $\hat{x} \in S^2$ et (θ, ϕ) ses coordonnées sphériques, on a

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $r \in V_{ad}$ on définit un domaine admissible

$$\Omega_{x_0, r} = \left\{ x_0 + (1 + ts(\theta, \phi)) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, t \in [0, 1[, \theta \in [0, \pi] \text{ et } \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\right\}.$$

C'est un domaine borné, simplement connexe et de frontière lisse

$$\Gamma_{x_0, r} = \left\{ x_0 + (1 + s(\theta, \phi)) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, \pi] \text{ et } \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\right\}.$$

Remarque 6.2.1 Soient $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $r_1, r_2 \in V_{ad}$. Alors il existe une fonction $r \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_{x_0, r_1})$ telle que $(I+r)\Gamma_{x_0, r_1} = \Gamma_{x_0, r_2}$. Il suffit de prendre $r = r_1 - r_2$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et on considère l'ensemble de domaines admissibles

$$D_{ad} = \{D_{x_0, v}, v \in V_{ad}\}.$$

Nous allons construire une méthode numérique de minimisation de J_2 sur D_{ad} en se ramenant à une fonction à variables réelles.

Pour commencer nous devons définir une famille de sous espaces de $L^2(S^2)$ de dimension finie. Puisque les harmoniques sphériques forment une base orthonormée de $L^2(S^2)$ nous introduisons les espaces vectoriels sur \mathbb{R} de dimension $(n+1)^2$, notés V_n engendrés par

$$T_n = \{\Re(Y_k^l), \Im(Y_k^l), k = 0, \dots, n \text{ et } l = 0, \dots, k\}.$$

On renomme $\xi_1, \dots, \xi_{(n+1)^2}$ les éléments de T_n . On a bien $V_n \subset \mathbf{L}^2(S^2)$. On considère l'ensemble

$$D_n = \{D_{x_0, r}, r \in V_n \cap V_{ad}\}.$$

On va chercher à minimiser la fonction coût J_2 dans l'ensemble D_n . Soit $r_0 \in V_{ad} \cap V_n$, il existe une constante positive R_0 telle que pour tout $(t_1, \dots, t_{(n+1)^2}) \in B(0, R_0)$,

on a $r = \left(r_0 + \sum_{i=1}^{(n+1)^2} t_i \xi_i \right) \in V_n \cap V_{ad}$. On introduit alors l'application

$$F : \begin{array}{ccc} B(0, R_0) & \rightarrow & R_+ \\ (t_1, \dots, t_{(n+1)^2}) & \mapsto & J_2 \left(\left(I + \sum_{i=1}^{(n+1)^2} t_i \xi_i \right) S^2 \right). \end{array}$$

Le gradient de F s'exprime en fonction des dérivées de forme de J_2 .

Proposition 6.2.2 L'application F est différentiable sur $B(0, R_0)$ et on a pour tout $(t_1^0, \dots, t_{(n+1)^2}^0) \in B(0, R_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_1^0, \dots, t_{(n+1)^2}^0) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}[r_0, \xi] = D_{S^2} J_2[r_0, \xi_i] = D_{\Omega_{x_0, r_0}} J_2[0, \xi_i]$$

6.2 Algorithmes d'optimisation de forme

où

$$r_0 = \sum_{i=1}^{(n+1)^2} t_i^0 \xi_i \quad \text{et} \quad \Omega_{x_0,0} = S^2.$$

Pour calculer les dérivées de formes du champ lointain nous dériverons la représentation intégrale.

Algorithme :

On choisit une tolérance ϵ_g .

- Soit $N := 0$ et $\Omega_{x_0,r_0} \in D_n$.
- On calcule pour $i = 1, \dots, (n+1)^2$ les dérivées $D_{\Omega_{x_0,r_N}} J[0, \xi_i]$.
- Si pour $i = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, (n+1)^2$ on a

$$|D_{\Omega_{x_0,r_N}} J[0, \xi_i]| < \epsilon_g$$
 alors Ω_{x_0,r_N} est un minimum local.
 Sinon on calcule

$$\xi = - \sum_{i=1}^{(n+1)^2} D_{\Omega_{x_0,r_N}} J[0, \xi_i] \cdot \xi_i,$$

puis on se donne un pas $h > 0$ et on calcule $r_{N+1} = r_N + jh\xi$ et $j = j + 1$ tant que

$$J(\Omega_{x_0,r_N+jh\xi}) < J(\Omega_{x_0,r_N+(j-1)h\xi}).$$

Cette méthode s'applique dans les cas où on veut optimiser le champ lointain sans contrainte sur la surface du diffracteur diélectrique. Cependant pour les applications physiques nous devons fixer une partie plane de la surface du diffracteur diélectrique à laquelle est intégrée l'antenne. Une possibilité serait alors de considérer des variations d'un hémisphère. Dans ce cas on fait bouger uniquement la surface sphérique. Les harmoniques sphériques restreintes à une section Σ de la sphère unité forment encore une base de $\mathbf{L}^2(\Sigma)$ mais plus orthonormée.

6.2.2 Autre méthode de descente

La seconde méthode est basée sur la formule

$$D_\Omega J_2[0, \xi] = 2\Re \left(\int_\Gamma \xi(y) \cdot (D_\Omega \mathbf{E}^\infty)^* [\overline{(\mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty)}](y) d\sigma(y) \right)$$

En effet, puisque $D_\Omega \mathbf{E}^\infty[0, \cdot]$ est un opérateur linéaire en ξ et composé d'opérateur intégraux, il est possible de calculer son adjoint. Il suffit alors de choisir comme direction de descente la fonction

$$(6.1) \quad \xi = -2\Re \left((D_\Omega \mathbf{E}^\infty)^* [0, \overline{\mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty}] \right).$$

Ainsi on aura $D_\Omega J_2[0, \xi] = -\|\xi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 < 0$.

On peut noter que la méthode précédente consiste à prendre comme direction de descente le projeté de

$$\xi = -2\Re \left((D_{S^2} \mathbf{E}^\infty)^* [r_0, \overline{\mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty}] \right)$$

dans la base $(\xi_1, \dots, \xi_{(n+1)^2})$ de V_n muni du produit scalaire \mathbf{L}^2 . En effet on a

$$\int_{S^2} \xi(\hat{x}) \cdot \xi_i(\hat{x}) d\sigma(\hat{x}) = -D_{S^2} J_2[r_0, \xi_i].$$

Pour cette méthode nous allons utiliser le problème aux limites associé à la dérivé première et la représentation intégrale associée à l'opérateur \mathbf{T} , ainsi $D_\Omega J_2[0, \cdot]$ est une application linéaire en $\xi \cdot \mathbf{n}$.

$$D_\Omega J[\xi] = 2\Re \left(\int_\Gamma (\xi(y) \cdot \mathbf{n}(y)) (f_1(y) + \text{rot}_\Gamma f_2(y)) d\sigma(y) \right)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1 = & \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}) \rho C_{\kappa_i}^* f_3 \\ & + \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\text{rot } \mathbf{E}^i - \text{rot } \mathbf{E}^s - \text{rot } \mathbf{E}^{inc}) \left(-\frac{1}{2} + M_{\kappa_i}^* \right) f_3 \end{aligned}$$

et

$$f_2 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^i - \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^{inc}) \rho C_{\kappa_i}^* f_3$$

où

$$f_3 = \mathbf{T}^{*-1} \left(-\Psi_{E_{\kappa_e}}^\infty - i\eta \Psi_{M_{\kappa_e}}^\infty \right)^* [\overline{\omega(\theta) (\mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty)}]$$

Cette méthode nécessite en plus de calculer les adjoints pour le produit scalaire \mathbf{L}^2 des opérateurs intégraux surfaciques et des opérateurs de champ lointain.

6.2 Algorithmes d'optimisation de forme

Lemme 6.2.3 *Les opérateurs $\Psi_{E_\kappa}^\infty$ et $\Psi_{M_\kappa}^\infty$ admettent des adjoints pour le produit scalaire L^2 définis par :*

$$(6.2) \quad \Psi_{E_\kappa}^{\infty,*} : \begin{array}{l} \mathcal{S}_\times(S^2) \rightarrow \mathcal{S}'(\Gamma) \\ \mathbf{u}(\hat{x}) \mapsto \kappa \int_{S^2} e^{i\kappa\langle \hat{x}, y \rangle} \hat{x} \times \mathbf{u}(\hat{x}) \times \hat{x} d\sigma(\hat{x}) \end{array}$$

$$(6.3) \quad \Psi_{M_\kappa}^{\infty,*} : \begin{array}{l} \mathcal{S}_\times(S^2) \rightarrow \mathcal{S}'(\Gamma) \\ \mathbf{u}(\hat{x}) \mapsto -i\kappa \int_{S^2} e^{i\kappa\langle \hat{x}, y \rangle} \hat{x} \times \mathbf{u}(\hat{x}) d\sigma(\hat{x}) \end{array}$$

Soit $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ on a :

$$M_\kappa^* \mathbf{j} = (M_\kappa(\mathbf{j} \times \mathbf{n})) \times \mathbf{n},$$

$$C_\kappa^* \mathbf{j} = (C_\kappa(\mathbf{j} \times \mathbf{n})) \times \mathbf{n}.$$

Algorithme :

On choisit une tolérance ϵ_g .

- Soit $N := 0$ et $\Omega_{x_0, r_0} = S^2$.
- On calcule $\xi = -(D_\Omega E^\infty)^*[\mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty]$.
- Si $|D_\Omega J[0, \xi]| = \|\xi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 < \epsilon_g$ alors Ω_{x_0, r_N} est un minimum local,

Sinon on se donne un pas $h > 0$ et on pose $j = 0$ puis on calcule $r_{N+1} = r_N + jh\xi$ et $j = j + 1$ tant que

$$J(\Omega_{x_0, r_N + jh\xi}) < J(\Omega_{x_0, r_N + (j-1)h\xi}).$$

Chapitre 7

Simulations numériques

7.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques résultats numériques obtenus avec les méthodes de descentes décrites au chapitre précédent.

Nous commençons ce chapitre par expliquer comment les dérivées de forme du champ lointain ont été implémentées. Ensuite en section 7.3 nous montrons dans un premier temps quelques résultats numériques sur le calcul des dérivées de forme du champ lointain. Il s'agit de vérifier que les dérivées premières directionnelles calculées en dérivant la représentation intégrale du champ lointain et en résolvant le problème \mathcal{P}' donnent le même résultat. Puis nous présentons différents résultats numériques pour mettre en évidence quelques propriétés associées à la solution du problème d'optimisation de forme.

7.2 Schéma numérique

Comme au chapitre 4 nous utilisons la triangulation pour approcher une surface Γ . On se donne un pas h et une triangulation \mathcal{T}_h défini comme au chapitre 4. La surface Γ_h ainsi obtenue est caractérisée par :

- (i) l'ensemble des triangles qu'on numérote T_1, \dots, T_{N_t} et
- (ii) l'ensemble des sommets de ces triangles qu'on numérote p_1, \dots, p_{N_s} . Avec ces seules données nous pouvons calculer les centres c_1, \dots, c_{N_t} des triangles, les vecteurs normaux des triangles $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{N_t}$ ainsi que les aires des triangles $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{N_t}$ en utilisant les formules données au chapitre 4. Par conséquent chaque variations $r \in V_{ad}$ sera approchée par des fonctions linéaires par morceaux sur chaque triangle ainsi r_h sera uniquement déterminée par ses valeurs aux sommets des triangles. Vu que nous n'aurons pas besoin des dérivées de ξ_h d'ordre supérieur à 1 ce point de vue convient parfaitement. On note $\psi_1, \dots, \psi_{N_s}$ la base de fonctions linéaires par

morceaux. L'espace V_{ad} est alors approché par l'espace

$$V_{ad}^h = \left\{ r_h = \sum_{j=1}^{N_s} r(p_j) \psi_j, r \in V_{ad} \right\}.$$

7.2.1 Dérivées de forme des opérateurs intégraux surfaciques

Pour calculer numériquement les dérivées de forme des noyaux des opérateurs intégraux surfaciques nous avons besoin de celles des éléments d'aires et des vecteurs normaux. Soit $r_h \in V_{ad}^h$, on note $\mathcal{A}_i^{r_h}$ l'élément d'aire de la surface $(I+r_h)\Gamma_h$ et \mathbf{n}_{h,r_h} le vecteur normal unitaire de cette surface. Soit $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ approché par $\xi_h = \sum_{j=1}^{N_s} \xi(p_j) \psi_j$. Pour $i = 1, \dots, N_t$, on a sur chaque triangle T_i :

$$\frac{\partial \tau_{r_h} \mathbf{n}_{h,r_h}}{\partial r_h} [0, \xi_h](c_i) = -[\nabla_{\Gamma_h} \xi_h] \mathbf{n}_h = - \sum_{j=1}^{N_s} (\xi(p_j) \cdot \mathbf{n}_i) \nabla_{\Gamma_h} \psi_j(c_i)$$

et

$$\frac{\partial \tau_{r_h} \mathcal{A}_i^{r_h}}{\partial r_h} [0, \xi_h = (\operatorname{div}_{\Gamma_h} \xi_h)(c_i)] \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i \sum_{j=1}^{N_s} \xi(p_j) \cdot \nabla_{\Gamma_h} \psi_j(c_i).$$

Pour implémenter numériquement les dérivées de forme des opérateurs intégraux surfaciques nous n'utiliserons pas la méthode présentée au chapitre 5 pour étudier théoriquement les dérivées de formes de ces opérateurs. ici nous allons tout simplement dériver les opérateurs discrétisés en insérant le produit $I_{\mathcal{D}^0(\Gamma_h, \mathcal{T}_h)} = \tau_{r_h}^{-1} \tau_{r_h}$ entre chaque opérateur dans la représentation intégrale du champ lointain. Pour discrétiser leurs dérivées de forme nous procédons comme au chapitre 4. Pour les dérivées des opérateurs $\tau_r S_\kappa^r \tau_r^{-1}$ et $\tau_r M_\kappa^r \tau_r^{-1}$ nous utilisons la méthode de Nyström, nous ne rappelons pas la méthode ici. Nous allons nous concentrer sur l'opérateur $\tau_r T_\kappa^r \tau_r^{-1}$. Rappelons que T_κ est défini pour $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_\times^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$:

$$T_\kappa \mathbf{j}(x) = \mathbf{n}(x) \times \int_\Gamma \nabla_\Gamma^x (\nabla_\Gamma^y (G(\kappa, |x-y|)) \cdot \mathbf{j}(y)) d\sigma(y)$$

Pour le discrétiser nous avons procédé de la façon suivante. On approche la solution fondamentale par la fonction G_h définie par

$$G_h(\kappa, |x-y|) = \begin{cases} G(\kappa, |x-y|) & \text{si } |x-y| \geq \epsilon(h), \\ \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi(\epsilon(h))} & \text{si } |x-y| < \epsilon(h). \end{cases}$$

Ensuite on approche G_h par une fonction linéaire par morceaux. On a

$$G_h(\kappa, |x-y|) \simeq \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_s} G_h(\kappa, |p_k - p_l|) \psi_k(x) \psi_l(y).$$

7.2 Schéma numérique

L'opérateur T_k est alors discrétisé en la matrice $T_\kappa^h = (T_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq N_t}$ où T_{ij}^h est une matrice bloc 3×3 telle que

$$T_{ij}^h \mathbf{j}_h(c_i) = \mathcal{A}_j * \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_s} G_h(\kappa, |p_k - p_l|) \mathbf{n}(c_i) \times \nabla_{\Gamma_h}^x \psi_k(c_i) \langle \nabla_{\Gamma_h}^y \psi_l(c_j), \mathbf{j}_h(c_j) \rangle.$$

Pour discrétiser la dérivée de forme de T_k nous allons dériver la formule ci-dessus en utilisant tout simplement les règles de dérivations. Nous avons déjà donné la dérivée des éléments d'aires et du vecteur normal. Il reste les dérivées des gradients tangentiels des fonctions de la base de $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h, \Gamma_h)$. Pour cela nous utilisons les formules de dérivations du gradient tangentiel. Nous avons juste besoin de sa partie tangente à la surface Γ_h qui est

$$\left[\frac{\partial (\tau_{r_h} \nabla_{\Gamma_h} \tau_{r_h}^{-1}) \psi_k}{\partial r_h} [0, \xi_h] \right]_{\Gamma_h} = -[\nabla_{\Gamma_h} \xi_h] \nabla_{\Gamma_h} \psi_k.$$

7.2.2 Composante tangentielle des dérivées normales des opérateurs de potentiels

Pour discrétiser la composante tangentielle des dérivées normales des opérateurs de potentiels Ψ_{E_κ} et Ψ_{M_κ} nous devons discrétiser les opérateurs M_κ^\dagger et C_κ^\dagger . On a

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= - \int_{\Gamma} \Delta_{\Gamma} G(\kappa, |x - y|) \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \\ &\quad - \kappa \int_{\Gamma} G(\kappa, |x - y|) \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \\ &\quad - H_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}(x)}(\kappa, |x - y|) \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial \nabla G}{\partial \mathbf{n}(x)}(\kappa, |x - y|) (\mathbf{j}(y) \cdot \mathbf{n}(x)) d\sigma(y) \end{aligned}$$

et

$$(7.2) \quad \begin{aligned} C_\kappa^\dagger \mathbf{j}(x) &= -\kappa \mathbf{n}(x) \times \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}(x)}(\kappa, |x - y|) \mathbf{j}(y) d\sigma(y) \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(x) \times \int_{\Gamma} \frac{\partial \nabla G}{\partial \mathbf{n}(x)}(\kappa, |x - y|) \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{j}(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Les noyaux des trois derniers termes du second membre de (7.1) sont faiblement singuliers. On utilise la méthode de Nyström pour les discrétiser. Pour discrétiser $\Delta_{\Gamma} G(\kappa, |x - y|)$ on utilise l'égalité

$$\Delta_{\Gamma}^x G(\kappa, |x - y|) = \operatorname{div}_{\Gamma}^x \nabla_{\Gamma}^x G(\kappa, |x - y|) = -\operatorname{div}_{\Gamma}^x \nabla_{\Gamma}^y G(\kappa, |x - y|).$$

On approche $G(\kappa, |\cdot - \cdot|)$ par des linéaires par morceaux en chaque variables x et y et on a

$$\Delta_{\Gamma}^x G_h(\kappa, |x - y|) \simeq - \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_s} G_h(\kappa, |p_k - p_l|) \nabla_{\Gamma}^x \psi_k(x) \cdot \nabla_{\Gamma}^y \psi_l(y).$$

Le noyau du premier terme du second membre de (7.2) est faiblement singulier. On utilise également la méthode de Nyström pour le discrétiser. Pour le second on utilise une intégratio par partie dans l'intégrale

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \nabla G}{\partial \mathbf{n}(x)}(\kappa, |x - y|) \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{j}(y) d\sigma(y) = - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma}^y \left(\frac{\partial \nabla G}{\partial \mathbf{n}(x)}(\kappa, |x - y|) \right) \cdot \mathbf{j}(y) d\sigma(y)$$

Le noyau $\left(\frac{\partial \nabla G}{\partial \mathbf{n}(x)}(\kappa, |x - y|) \right)$ a la même régularité que le potentiel de double couche. On l'approche alors par des linéaires par morceaux en la variable y et par des constantes par morceaux en la variable x puis on lui applique le gradient tangentiel.

Nous avons besoin également de calculer numériquement $H_{\Gamma} = \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{n}$ et $\mathcal{R}_{\Gamma} = \nabla_{\Gamma} \mathbf{n}$. Pour ce faire donner avons d'approcher le vecteur normal par des linéaires par morceaux. On utilise alors la formule

$$\mathbf{n}_h(p_i) = \frac{\sum_{\{j, p_i \in T_j\}} \mathcal{A}_j \mathbf{n}_h(c_j)}{\sum_{\{j, p_i \in T_j\}} \mathcal{A}_j}.$$

On utilise la même formule (deux fois) pour calculer le terme $\nabla_{\Gamma_h} \operatorname{div}_{\Gamma_h} \mathbf{j}_h$ qui intervient dans les relations de sauts où \mathbf{j}_h est constant sur chaque triangle.

7.3 Résultats numériques

7.3.1 Sur le calcul des dérivées de forme du champ lointain

Tout d'abord nous devons vérifier que les deux méthodes de discrétisations des dérivées de forme du champ lointain sont correctes. Il n'existe pas de méthodes théoriques pour calculer les dérivées de forme exactes dans le cas de la sphère diélectrique, sauf si on prend comme direction de descente le vecteur normal, il s'agit alors de dériver les coefficients dans les séries de Mie par rapport au rayon. Pour une direction quelconque on peut définir une dérivée de forme de référence à laide des différences finies. Prenons les paramètres suivants :

▷ paramètres : $R = 1$, $\mu_e = \mu_i = \mu_0$, $\kappa_e R = 1$, $\kappa_i = 2\kappa_e$, $\eta = 1$.

7.3 Résultats numériques

▷ onde incidente : une onde plane,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{i\kappa_e x \cdot d}, \text{ avec } d = (0, 0, 1) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ direction : l'application

$$\begin{aligned} \xi &: S^2 && \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \hat{x} = (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (0, 0, x_3). \end{aligned}$$

On calcule pour $t = 0.001$ la quantité

$$D_{S^2} \mathbf{E}_{ref}^\infty[0, \xi] = \frac{(\mathbf{E}^\infty((I+t\xi)S^2) - \mathbf{E}^\infty(S^2))}{t}.$$

Dans le tableau ci-dessous nous donnons les erreurs relatives en norme \mathbf{L}^2 sur la sphère unité entre les dérivées de forme calculées en dérivant la représentation intégrale (RI) et en résolvant le problème $\mathcal{P}'(\xi)$ avec la dérivée de référence $D_{S^2} \mathbf{E}_{ref}^\infty[0, \xi]$.

N_t	Erreur relative	
	(RI)	$\mathcal{P}'(\xi)$
216	0.0220	0.1110
512	0.0087	0.0816
1024	0.0030	0.0576
2016	0.0013	0.0394

Les dérivées de forme calculées en dérivant la représentation intégrale convergent rapidement vers la dérivée de référence puisque nous avons dérivé la même représentation intégrale avec laquelle est calculé le champ lointain.

7.3.2 Sur la méthode de gradient

Dans ce paragraphe nous présentons quatre tests numériques. Pour les trois premiers nous avons choisi un champ lointain cible dont on connaît une solution, pour le dernier nous avons choisi comme champ lointain cible une fonction dont l'amplitude est une gaussienne asymétrique.

▷ Test 1 :

Pour la première expérience numérique nous avons choisi comme champ lointain de référence celui associé au diffracteur diélectrique dont la géométrie est paramétrée par la sphère unité à l'aide des harmoniques d'ordre $n \leq 3$:

$$\Omega_{ref} = (1 + .75Y_1^0 - .3Y_2^0 - .1Y_3^3)S^2.$$

On cherche alors à minimiser la fonctionnelle \mathcal{J} sur $V_3 \cap V_{ad}$. La dimension de V_3 est 9. Dans ce cas nous savons qu'il existe une solution. L'intérêt de ce test est de

vérifier que la méthode converge vers une solution et que la solution est bien obtenue pour la forme Ω_{ref} . Comme forme initiale on prend la sphère unité.

▷ Tests 2 et 3 :

Ici nous avons choisi comme champ lointain cible pour ces deux tests celui associé à un cube diélectrique éclairé par une onde plane. dans le test 2 nous utilisons une fréquence plus faible que dans le test 3. Nous voulons mettre en évidence qu'avec des fréquences plus grandes on obtient alors une solution qui se rapproche du cube. Pour ces deux tests nous avons évalué la fonction coût \mathcal{J} sur $V_9 \cap V_{ad}$ c'est-à-dire avec 100 fonctions.

▷ Test 4 :

Enfin nous avons cherché à construire un test en relation avec l'application physique. Alors ici nous avons choisi comme champ lointain cible une fonction sur la sphère unité dont l'amplitude I^∞ est une gaussienne asymétrique définie comme au chapitre 6 avec $NdB = -3dB$ et $\theta_{ouv} = 30^\circ$ dans les deux plans $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 90^\circ$. On a cherché à modifier un hyperhémisphère, à savoir une boule de diamètre $1.2\lambda_0$ tronquée selon un plan situé à une distance $.3\lambda_0$ du centre de la boule. Cet hyperhémisphère est éclairé par une source point située à une distance $d = \frac{\lambda_0}{8}$ de la surface plane du diffracteur diélectrique. Nous avons cherché à optimiser l'amplitude du champ lointain en modifiant uniquement la surface sphérique de l'hyperhémisphère. Nous avons donc évalué la fonction coût J_1 sur l'ensemble des éléments de $V_9 \cap V_{ad}$ restreints à la surface sphérique de l'hyperhémisphère (on prolonge par zéro sur la face plane). Au final, au bout de 10 itérations, l'erreur relative a diminué de plus de 50%. La forme associée est assez irrégulière.

7.3 Résultats numériques

Test 1.

Données

▷ Constantes diélectriques : $\mu_i = \mu_e$, $\kappa_e = \pi$ et $\kappa_i = \sqrt{2}\pi + i$.

▷ Onde incidente : une source point,

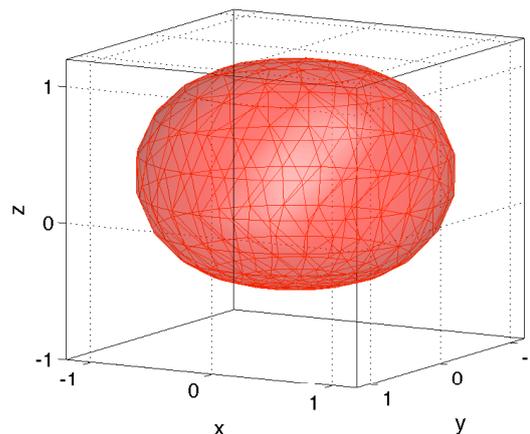
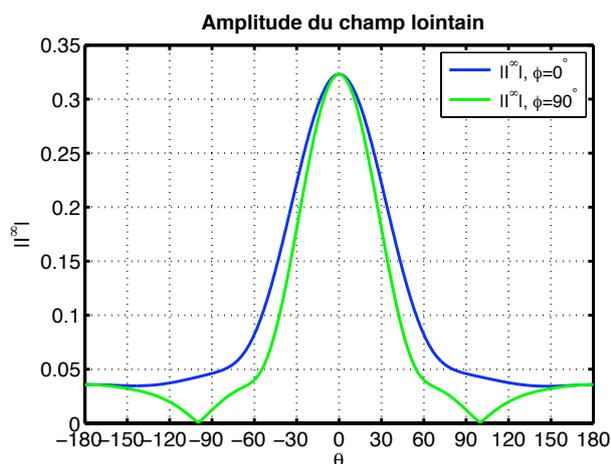
$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \mathbf{rot}(G(\kappa_e, |x - d|)\vec{p}) \text{ avec } d = (0, 0, -1.25) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Triangulation : 444 triangles, 224 points.

▷ Champ lointain souhaité :

▷ forme associée :

$$x = (1 + .75Y_1^0(\hat{x}) - .3Y_2^0(\hat{x}) - .1Y_3^0(\hat{x}))\hat{x}.$$

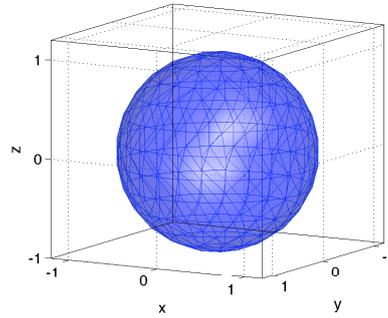
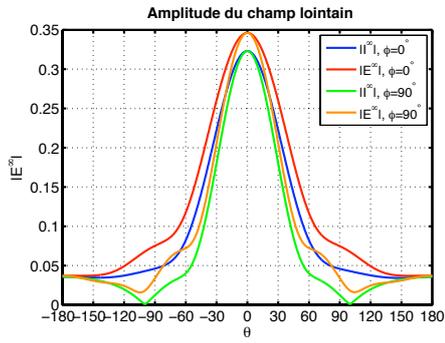


Résultats

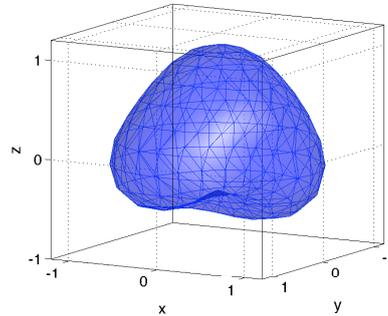
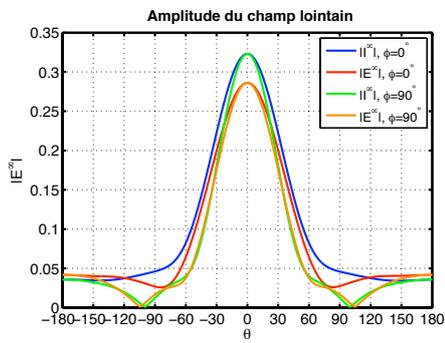
Itération N_{it}	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}{\ \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}$
0	0.5671
1	0.2178
2	0.1359
3	0.0903
4	0.0641
5	0.04058
10	$2.97 \cdot 10^{-3}$
15	$3.52 \cdot 10^{-4}$
25	$3.1 \cdot 10^{-5}$

7. Simulations numériques

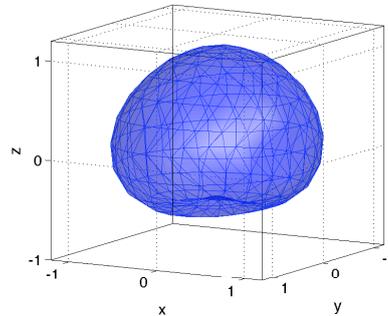
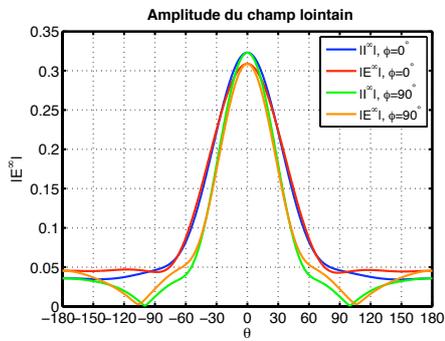
Itération $N = 0$



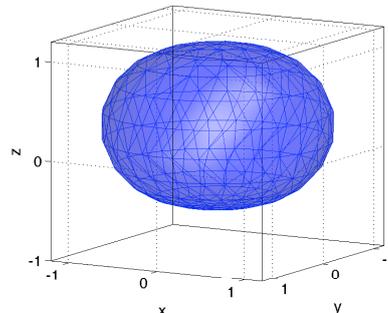
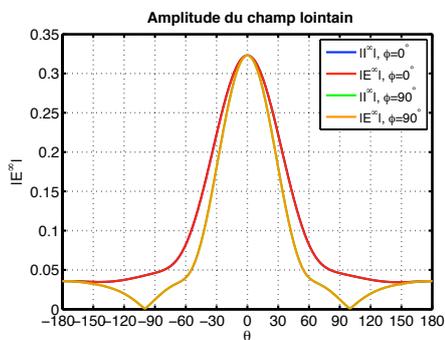
Itération $N = 1$



Itération $N = 2$



Itération $N = 25$



7.3 Résultats numériques

Test 2.

Données

▷ Constantes diélectriques : $\mu_i = \mu_e$, $\kappa_e = 1$ et $\kappa_i = 2$.

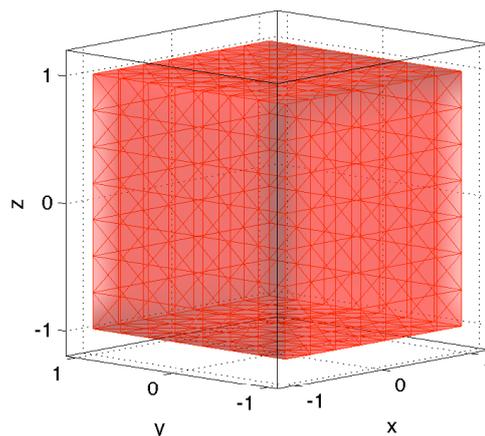
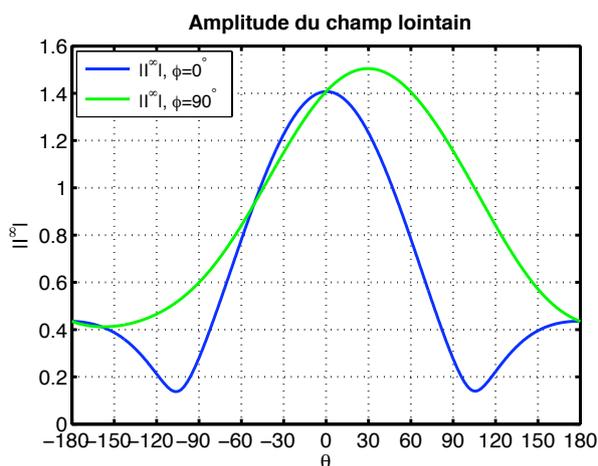
▷ Onde incidente : une onde plane,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{ix \cdot d}, \text{ avec } d = \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Triangulation : 444 triangles, 224 points.

▷ Champ lointain souhaité :

▷ forme associée : cube

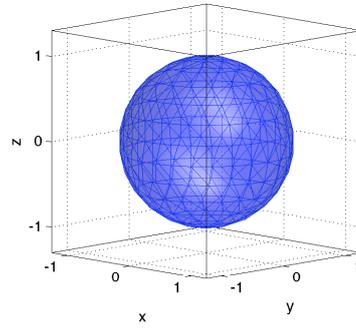
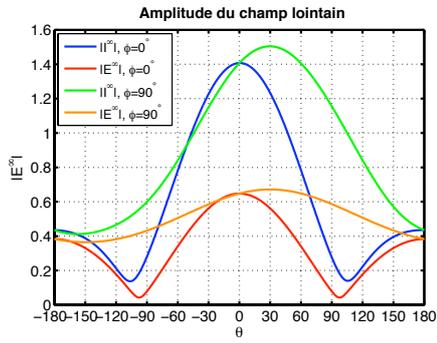


Résultats

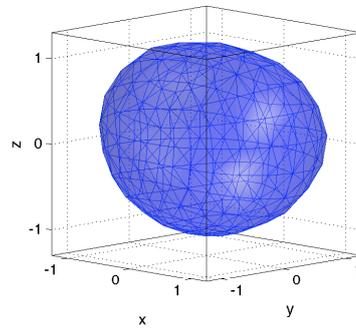
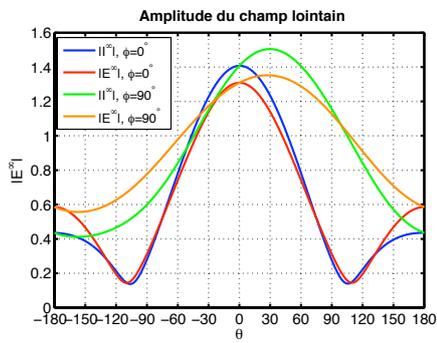
Itération N_{it}	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}{\ \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}$
0	0.5497
1	0.1158
2	0.0852
5	0.0778
10	0.0717
15	0.0649
25	0.0507

7. Simulations numériques

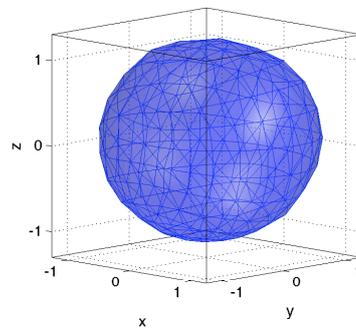
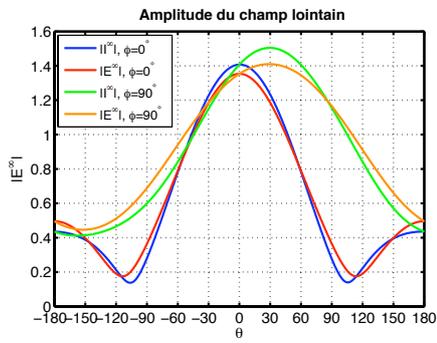
Itération $N = 0$



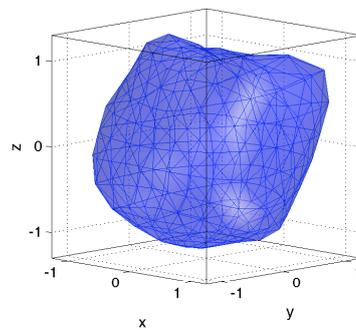
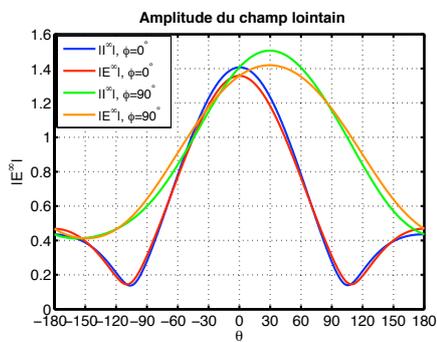
Itération $N = 1$



Itération $N = 2$



Itération $N = 25$



7.3 Résultats numériques

Test 3.

Données

▷ Constantes diélectriques : $\mu_i = \mu_e$, $\kappa_e = 1$ et $\kappa_i = 2$.

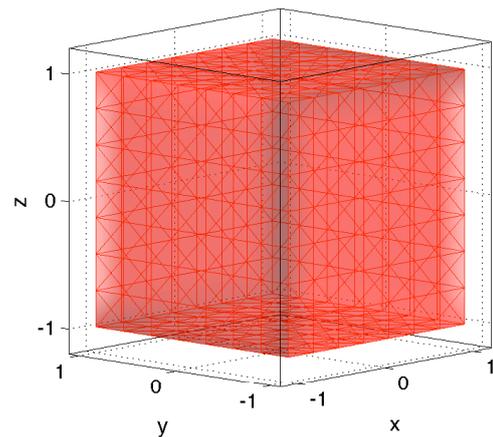
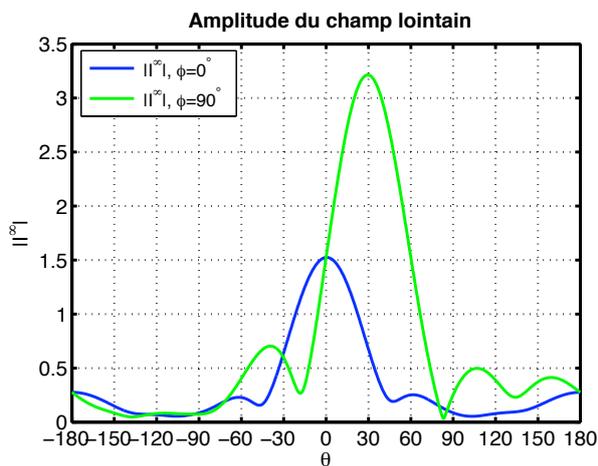
▷ Onde incidente : une onde plane,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{ix \cdot d}, \text{ avec } d = \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Triangulation : 444 triangles, 224 points.

▷ Champ lointain souhaité :

▷ forme associée : cube

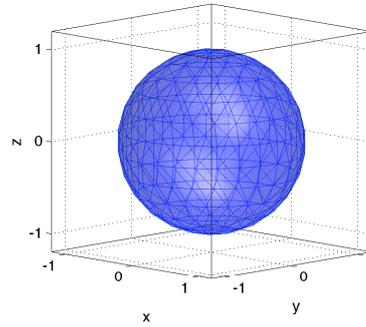
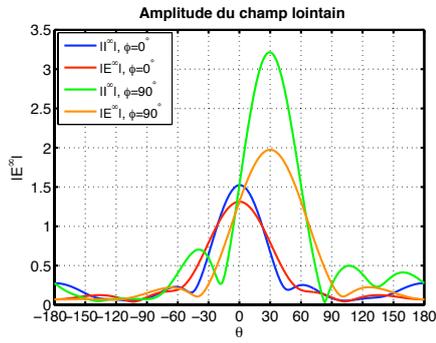


Résultats

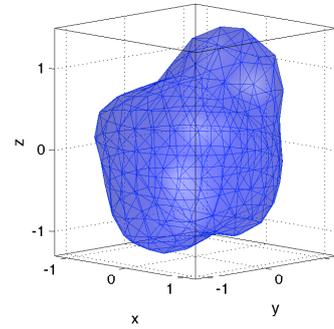
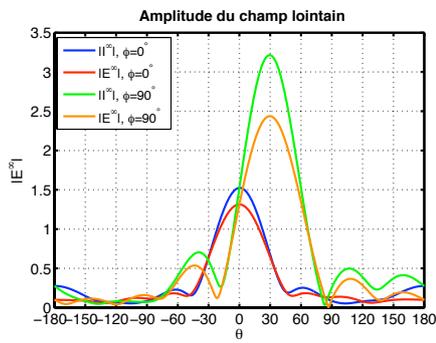
Itération N_{it}	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}{\ \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}$
0	0.4666
1	0.2509
2	0.2022
5	0.1049
10	0.0707
15	0.0605
25	0.0548

7. Simulations numériques

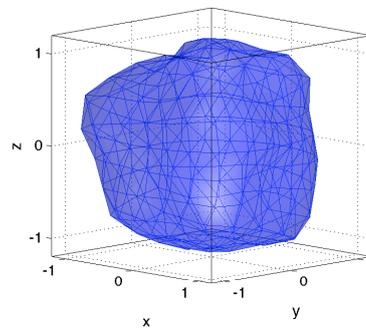
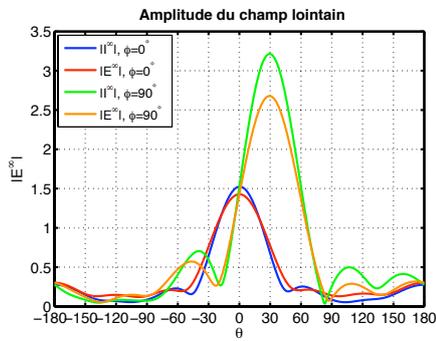
Itération $N = 0$



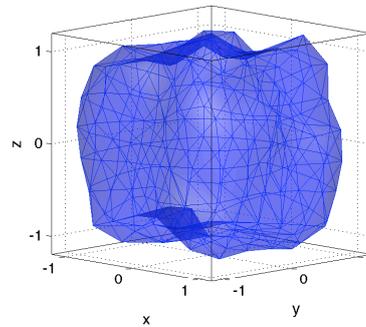
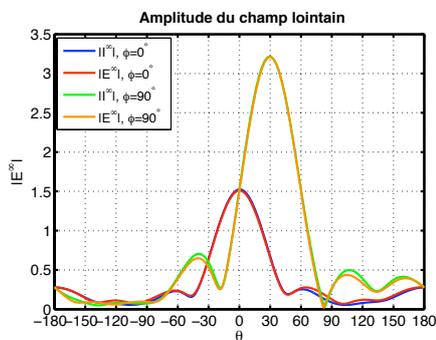
Itération $N = 1$



Itération $N = 2$



Itération $N = 25$



Test 4.

Données

▷ Constantes diélectriques : $\mu_i = \mu_e$, $\kappa_e = \pi$ et $\kappa_i = 2\kappa_e$.

▷ Onde incidente : une source point,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \mathbf{rot} (G(\kappa_e, |x - d|) \vec{p}) \text{ avec } d = (0, 0, -0.25) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Triangulation : 748 triangles, 376 points.

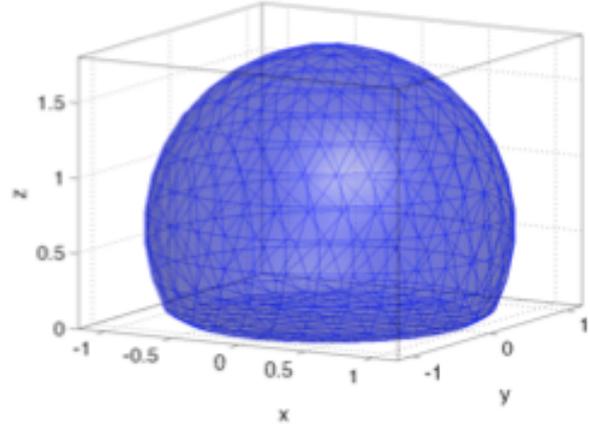
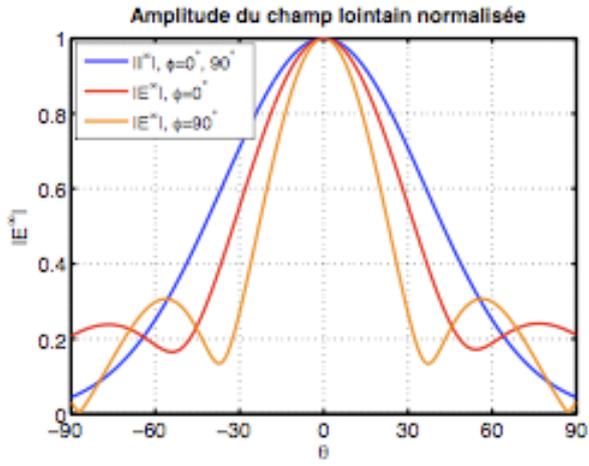
▷ Diagramme en rayonnement souhaité : diagramme de type gaussien asymétrique avec des angles d'ouverture identiques dans les plans $\phi = 0^\circ$ et $\phi = 90^\circ$, on prend $\theta_{ouv} = 30^\circ$.

Résultats

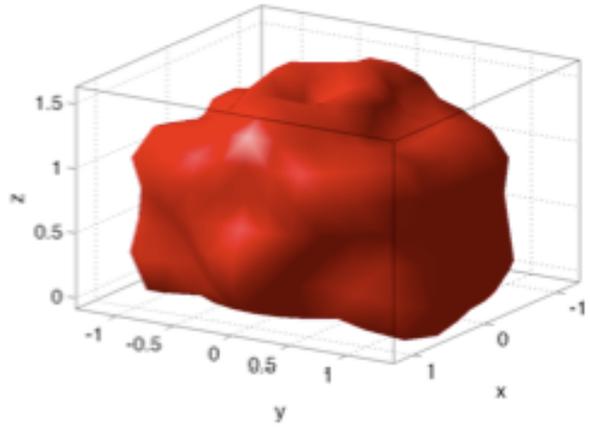
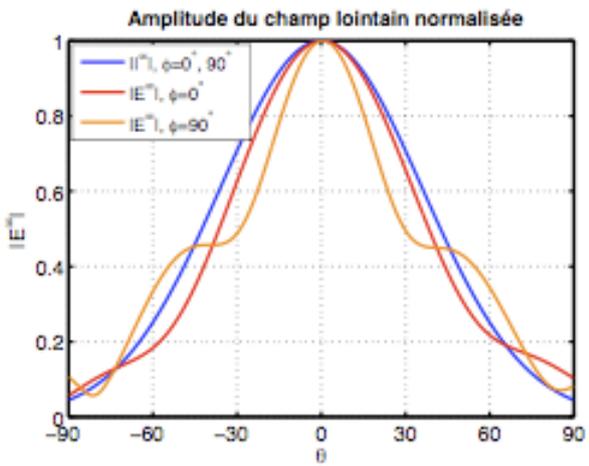
Itération N_{it}	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}{\ \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}$
0	0.3786
1	0.2754
2	0.1946
3	0.1745
4	0.1644
5	0.1588
10	0.1401

7. Simulations numériques

Itération $N = 0$



Itération $N = 10$



7.3.3 Sur l'autre méthode de descente

Avec cette méthode nous avons réalisé deux tests en choisissant uniquement des champs lointains cibles dont on connaît une solution. L'erreur entre les dérivées de formes exactes et celles calculées avec le problème \mathcal{P}' est trop grande lorsqu'on monte en fréquence donc les fonctions coût ne diminuent pas. Nous nous sommes donc restreint à des petites fréquences.

▷ Test 1 :

Ici nous avons choisi comme champ lointain de référence, celui calculé à partir d'un ellipsoïde tourné de 45° par rapport à l'axe (Ox) et soumis à une onde plane. On constate que la forme optimale se rapproche également d'un ellipsoïde tourné 45° selon le même axe mais les dimensions ne sont pas tout à fait les mêmes.

▷ Test 2 :

Nous avons réalisé la même expérience qu'au test 3 du paragraphe précédent.

Test 1.

Données

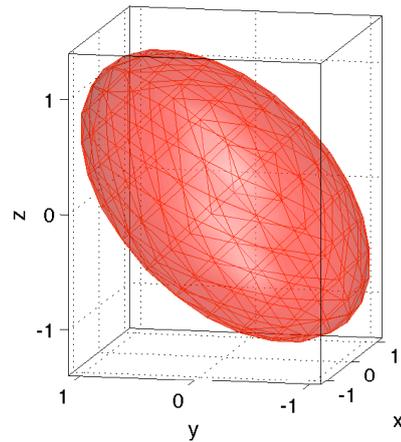
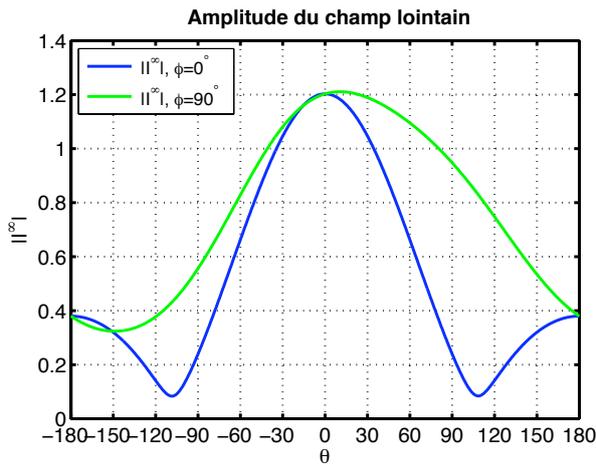
- ▷ Constantes diélectriques : $\mu_i = \mu_e$, $\kappa_e = 1$ et $\kappa_i = 2$.
- ▷ Onde incidente : une onde plane,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{ix \cdot d}, \text{ avec } d = (0, 0, 1) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- ▷ Triangulation : 444 triangles, 224 points.
- ▷ Champ lointain souhaité :

▷ forme associée : ellipsoïde

$$\left(\frac{x_1}{1.2}\right)^2 + 5 \left(\frac{x_2 - x_3}{.9}\right)^2 + 5 \left(\frac{x_2 + x_3}{1.5}\right)^2 = 1$$

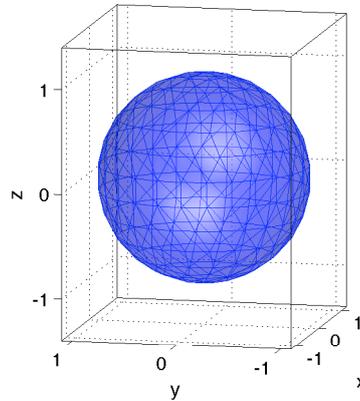
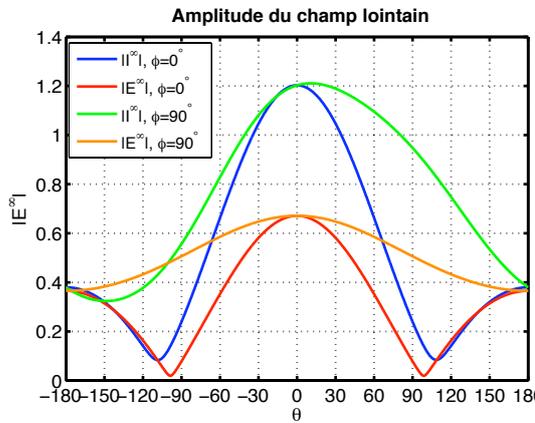


Résultats

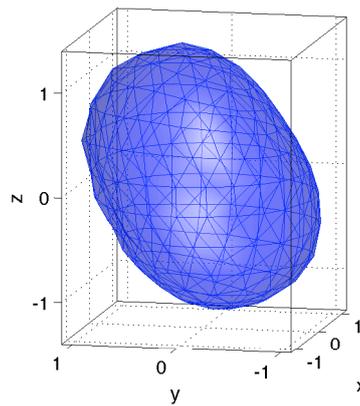
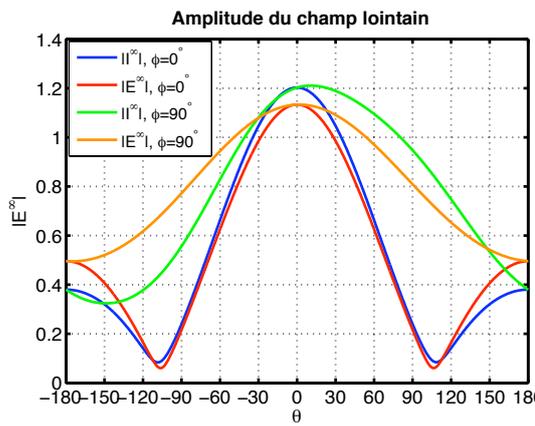
Itération N_{it}	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}{\ \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}$
0	0.4474
1	0.16.98
2	0.0624
5	0.0386
10	0.0288
25	0.0224

7.3 Résultats numériques

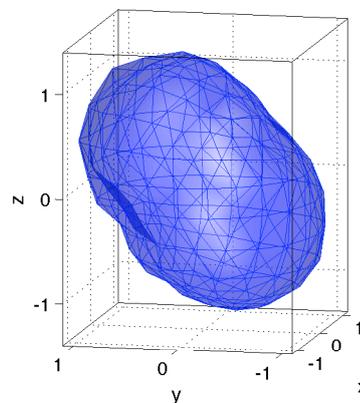
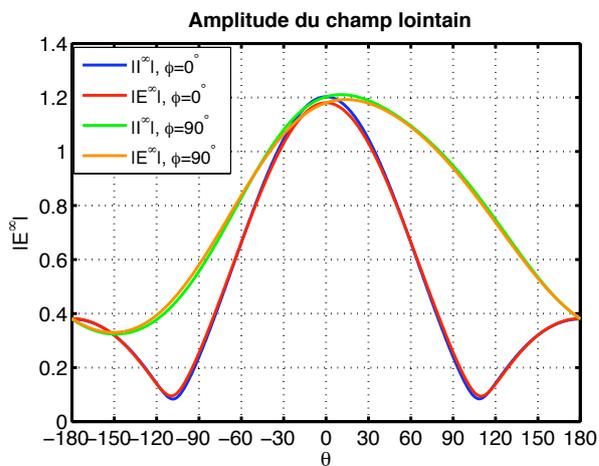
Itération $N = 0$



Itération $N = 1$



Itération $N = 25$



Test 2.

Données

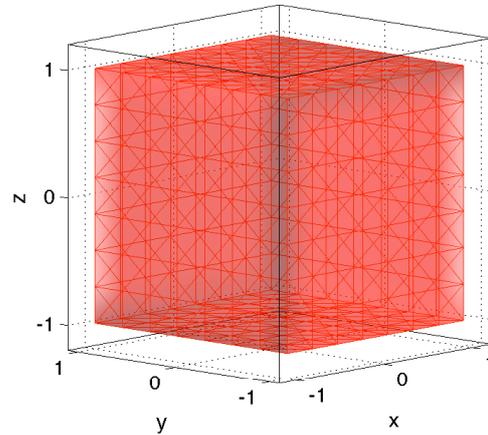
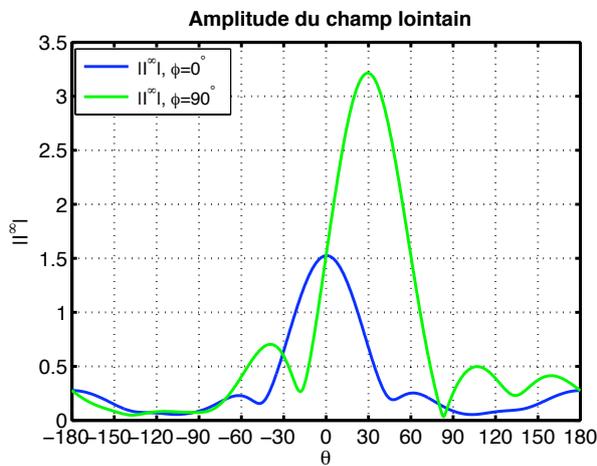
▷ Constantes diélectriques : $\mu_i = \mu_e$, $\kappa_e = \pi$ et $\kappa_i = \sqrt{2}\pi + i$.

▷ Onde incidente : une onde plane,

$$\mathbf{E}^{inc}(x) = \vec{p} e^{ix \cdot d}, \text{ avec } d = \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \text{ et } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Champ lointain souhaité :

▷ forme associée : cube

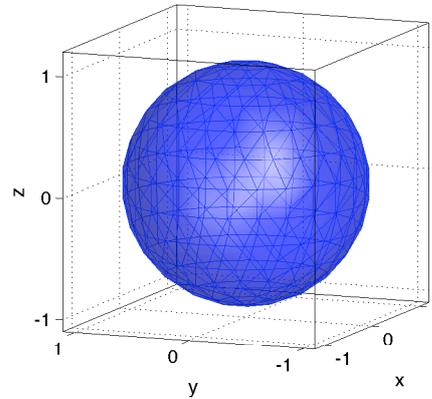
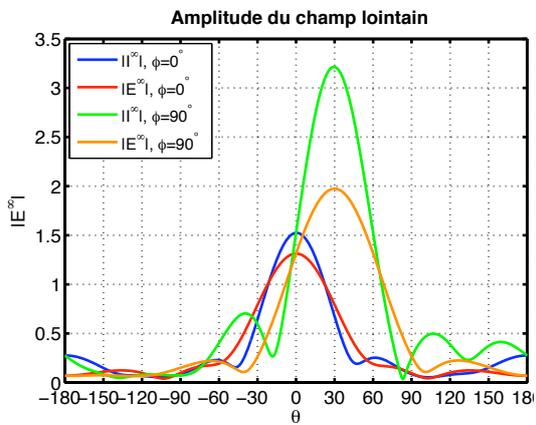


Résultats

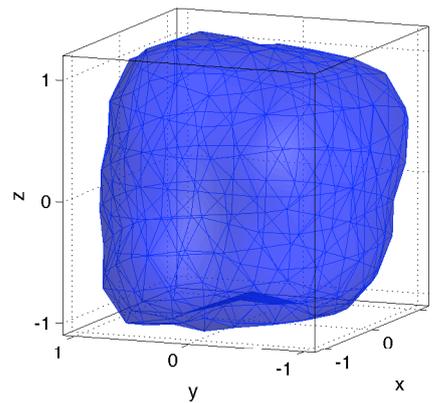
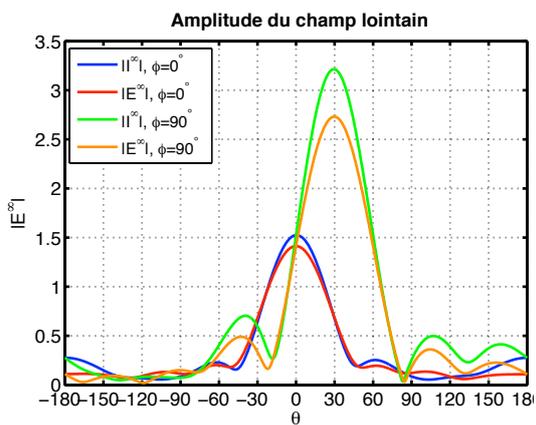
Itération N_{it}	Erreur relative $\frac{\ \mathbf{E}^\infty - \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}{\ \mathbf{I}^\infty\ _{\mathbf{L}^2}}$
0	0.4666
1	0.2000
2	0.1184
3	0.0988
4	0.0952
5	0.0908

7.3 Résultats numériques

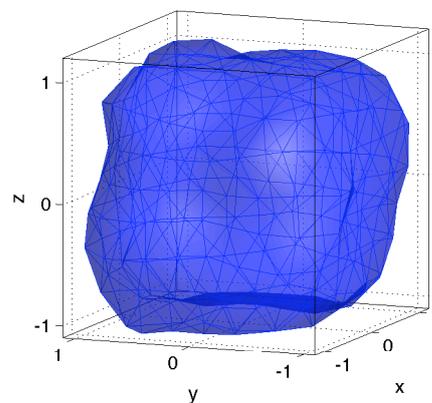
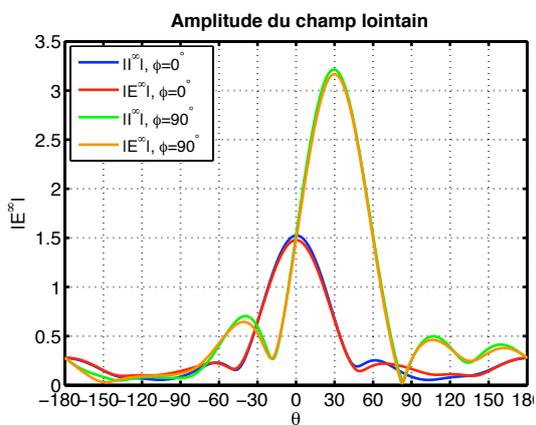
Itération $N = 0$



Itération $N = 1$



Itération $N = 5$



Conclusion et perspectives

dans la première partie de cette thèse nous avons construit et analysé quatre nouvelles équations intégrales de frontière alternatives pour le problème de diffraction diélectrique en appliquant les deux méthodes présentées par R. E. Kleinman et P. A. Martin dans [26] pour résoudre le problème correspondants en acoustique. Les opérateurs intégraux associés aux équations intégrales ne sont pas fortement elliptiques sur des espaces fonctionnels classiques tels les espaces de Sobolev comme dans le cas scalaire mais on montre qu'ils sont de Fredholm d'indice zéro sur $\mathbf{H}_x^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$. selon un choix convenable des paramètres introduits dans la représentation intégrale de la solution nous avons montré, dans le cas des surfaces régulières, que ces équations intégrales admettent une unique solution pour toute la plage des fréquences réelles. Quelques résultats numériques présentés dans le chapitre 4 montrent l'applicabilité de ces deux méthodes. dans la seconde partie de cette thèse nous avons étudié la dérivabilité par rapport au domaine des opérateurs intégraux surfaciques sur l'espace de régularité mixte $\mathbf{H}_x^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ interviennent dans la formulation intégrale du problème de diffraction diélectrique. On montre notamment que ces dérivées de forme ont la même régularité que les opérateurs intégraux eux-mêmes. Nous avons déterminés également une forme explicite et simple des dérivées de forme de ces opérateurs, ce qui rend possible leurs implémentations. Ensuite nous avons développé deux algorithmes d'optimisation de forme du diffracteur diélectrique en vue de l'obtention d'un champ lointain idéal en utilisant une simple méthode de gradient. Les résultats numériques sont assez satisfaisants et montrent bien l'applicabilité des méthodes d'équations intégrales de frontières pour la résolution de problème d'optimisation de forme en électromagnétisme.

Pour en revenir à l'application physique, il va falloir construire des méthodes numériques plus rigoureuses et efficaces. Il existe de nombreuses perspectives pour améliorer ces résultats numériques. On peut notamment utiliser des méthodes rapides ou tout simplement utiliser des discrétisations de degrés supérieurs. L'un des objectifs fixés était de faire valider le code par l'IETR mais le logiciel utilisé ne nous permet pas de réaliser des calculs avec les fréquences utilisées en pratique. Aussi dans cette thèse nous avons uniquement considéré des lentilles homogènes. Cependant pour miniaturiser les lentilles tout en conservant leurs performances une méthode consiste à construire des lentilles avec plusieurs couches de matériaux diélectriques tels que la permittivité décroît progressivement vers la permittivité à l'extérieur du diélectrique

(le vide en général). Il serait donc intéressant de construire des méthodes d'équations intégrales de frontière pour des permittivités variables.

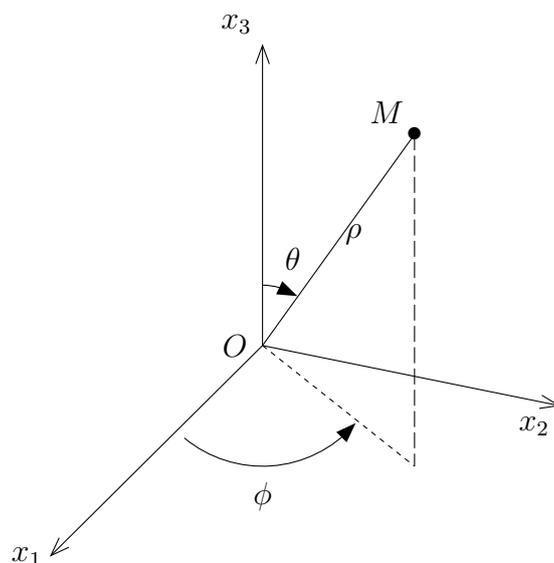
Annexe A

Théorie de Mie pour les équations de Maxwell

Dans ce chapitre nous présentons la théorie de Mie pour la diffraction d'ondes électromagnétiques harmoniques en temps. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur aux livres [30, 31].

Soit (O, e_1, e_2, e_3) un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 et $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On note (ρ, θ, ϕ) ses coordonnées sphériques et on a

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \theta \cos \phi, \\ x_2 = \rho \cos \theta \sin \phi, \\ x_3 = \rho \cos \theta. \end{cases}$$



On associe à tout point $x = (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$ le repère orthonormé directe mobile

$(0, e_\rho, e_\phi, e_\theta)$ défini par :

$$\begin{aligned} e_\rho &= \sin(\theta) \cos(\phi) e_1 + \sin(\theta) \sin(\phi) e_2 + \cos(\theta) e_3 \\ e_\theta &= \cos(\theta) \cos(\phi) e_1 + \cos(\theta) \sin(\phi) e_2 - \sin(\theta) e_3 \\ e_\phi &= -\sin(\phi) e_1 + \cos(\phi) e_2. \end{aligned}$$

A.1 Solutions harmoniques des équations de Helmholtz

Soit u une solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + \kappa^2 u = 0$. On cherche u sous la forme $u(x) = R(\rho)\Phi(\phi)\Theta(\theta)$. On a alors :

$$(A) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi = 0$$

$$(B) \quad \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] \Theta = 0$$

$$(C) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + [\kappa^2 \rho^2 - n(n+1)] R = 0$$

Solutions de (A) : $\Phi_m(\phi) = e^{im\theta}$.

Solutions de (B) : $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos(\theta))$, le m ième polynôme de Legendre d'ordre n .

Solutions de (C) : on fait le changement de variable $t = \kappa\rho$ et on trouve

$$(C_1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} \right) + [t^2 - n(n+1)] \Theta_1 = 0$$

Les solutions de (C_1) sont les fonctions de Bessel sphériques :

$$j_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(t) \text{ et } y_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(t)$$

où J_α et Y_α sont les fonctions de Bessel ordinaires. On définit les fonctions de Hankel sphériques de première et seconde espèce par $h_n^{(1)} = j_n + iy_n$ et $h_n^{(2)} = j_n - iy_n$. On prendra selon les cas :

$$R_n(\rho) = j_n(\kappa\rho), \quad h_n^{(1)}(\kappa\rho).$$

A.2 Solutions harmoniques des équations de Maxwell

Théorème A.1.1 *Les fonctions harmoniques sphériques*

$$Y_n^m(\hat{x}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|!)}{(n+|m|!)}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

pour $m = -n, \dots, n$ and $n = 0, 1, 2, \dots$ forment une base orthonormale de $L^2(\partial B_1)$.

Théorème A.1.2 *La fonction définie par $u_{n,m}^{(1)}(x) = j_n(\kappa\rho)Y_n^m(\hat{x})$ satisfait l'équation de Helmholtz $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ dans \mathbb{R}^3 tout entier.*

On a les développements asymptotiques suivants :

$$h_n^{(1)}(t) = (-i)^{n+1} \frac{e^{it}}{t} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}$$

$$\frac{\partial h_n^{(1)}}{\partial t}(t) = (-i)^n \frac{e^{it}}{t} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème A.1.3 *La fonction définie par $u_{n,m}^{(3)}(x) = h_n^{(1)}(\kappa\rho)Y_n^m(\hat{x})$ satisfait l'équation de helmholtz dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et la condition de radiation de Sommerfeld*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - i\kappa\rho u \right) = 0.$$

A.2 Solutions harmoniques des équations de Maxwell

Soit u une solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + \kappa^2 u = 0$. La fonction définie par $\mathbf{u}(x) = \mathbf{rot}(xu(x))$ satisfait $\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 \mathbf{u} = 0$.

On pose $M_{n,m}^{(1)}(x) = \mathbf{rot}(xj_n(\kappa\rho)Y_n^m(\hat{x}))$ et $N_{n,m}^{(1)} = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} M_{n,m}^{(1)}$ pour $n = 1, 2, \dots$ and $m = -n, \dots, n$. On en déduit le théorème suivant

Théorème A.2.1 *Les fonctions $M_{n,m}^{(1)}$ et $N_{n,m}^{(1)}$ sont solutions de l'équation de Maxwell $\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 u = 0$ dans \mathbb{R}^3 .*

On pose $M_{n,m}^{(3)}(x) = \mathbf{rot}(xh_n^{(1)}(\kappa\rho)Y_n^m(\hat{x}))$ et $N_{n,m}^{(3)} = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{rot} M_{n,m}^{(3)}$ pour $n = 1, 2, \dots$ and $m = -n, \dots, n$.

Théorème A.2.2 *Les fonctions $M_{n,m}^{(3)}$ et $N_{n,m}^{(3)}$ sont solutions de l'équation de Maxwell $\mathbf{rot rot u} - \kappa^2 u = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et satisfont la condition de radiation de Silver-Müller.*

Grâce à

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(u\mathbf{v}) &= u \operatorname{rot} \mathbf{v} + (\nabla u) \times \mathbf{v} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot}(xu(x)) &= -x\Delta u(x) + \nabla \left\{ u(x) + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}(x) \right\} \\ \nabla^x f(|x|) &= \frac{x}{\rho} f'(\rho) \\ \nabla^x f(\hat{x}) &= \frac{1}{\rho} \nabla^{\hat{x}} f(\hat{x}).\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}M_{n,m}^{(3)}(x) &= \nabla (h_n^{(1)}(\kappa\rho)Y_n^m(\hat{x})) \times x = h_n^{(1)}(\kappa\rho) \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_n^m(\hat{x}) \\ N_{n,m}^{(3)}(x) &= \frac{1}{i\kappa} \operatorname{rot} \operatorname{rot}(xh_n^{(1)}(\kappa\rho)Y_{n,m}(\hat{x})) \\ &= -x\Delta (h_n^{(1)}Y_n^m(\hat{x})) + \nabla \left\{ h_n^{(1)}(\kappa\rho)Y_n^m(\hat{x}) + \rho \frac{\partial h_n^{(1)}(\kappa\rho)}{\partial \rho} Y_n^m(\hat{x}) \right\} \\ &= \frac{1}{i\kappa} \left\{ \kappa^2 x h_n^{(1)}(\kappa\rho) + \kappa \frac{x}{\rho} \frac{\partial h_n^{(1)}(\kappa\rho)}{\partial \rho} + \frac{x}{\rho} \kappa \frac{\partial h_n^{(1)}(\kappa\rho)}{\partial \rho} + \rho \kappa^2 \frac{x}{\rho} \frac{\partial^2 h_n^{(1)}(\kappa\rho)}{\partial \rho^2} \right\} Y_n^m(\hat{x}) \\ &\quad + \frac{1}{i\kappa} \left\{ h_n^{(1)}(\kappa\rho) + \rho \frac{\partial h_n^{(1)}(\kappa\rho)}{\partial \rho} \right\} \frac{1}{\rho} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m(\hat{x}) \\ &= \frac{x}{i\kappa\rho^2} n(n+1) h_n^{(1)}(\kappa\rho) Y_n^m(\hat{x}) + \frac{1}{i\kappa\rho} \left\{ h_n^{(1)}(\kappa\rho) + \kappa\rho \frac{\partial h_n^{(1)}(\kappa\rho)}{\partial \rho} \right\} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m(\hat{x}).\end{aligned}$$

Pour calculer numériquement $M_{nm}^{(3)}$ et $N_{nm}^{(3)}$ nous avons besoin de pouvoir calculer explicitement $\nabla_{\partial B_1} Y_n^m$. On utilise les relations suivantes

$$\begin{aligned}\nabla u(x) &= \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi \\ \nabla_{\partial B_R} u(x) &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\phi\end{aligned}$$

Et on obtient :

$$\nabla_{\partial B_1} Y_n^m(\hat{x}) = \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} e^{im\phi} e_\theta + im \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} e^{im\phi} e_\phi$$

avec

$$\frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} = \frac{n \cos(\theta) P_n^m(\cos(\theta)) - (l+m) P_{n-1}^m(\cos(\theta))}{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}}$$

Expression du champ lointain à l'aide des séries de Mie :

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{M_{n,m}^{(3)}(\rho\hat{x})}{G_\kappa(\rho\hat{x})} &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{h_n^{(1)}(\kappa\rho)}{G_\kappa(\rho\hat{x})} \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_n^m = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{4\pi\rho}{e^{i\kappa\rho}} h_n^{(1)}(\kappa\rho) \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_{n,m}(\hat{x}) \\ &= \frac{4\pi(-i)^{n+1}}{\kappa} \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_{n,m}(\hat{x})\end{aligned}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{N_{n,m}^{(3)}(\rho \hat{x})}{G_\kappa(\rho \hat{x})} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \frac{4\pi\rho}{e^{i\kappa\rho}} \frac{\partial h_n^{(1)}}{\partial \rho}(\kappa\rho) \nabla_{\partial B_1} Y_{n,m}(\hat{x}) = \frac{4\pi(-i)^{n+1}}{\kappa} \nabla_{\partial B_1} Y_{n,m}(\hat{x}).$$

A.3 Développement en série Mie des opérateurs intégraux surfaciques

Théorème A.3.1 *Les harmoniques sphériques vectorielles d'ordre n données par*

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_n^m$$

pour $n = 1, 2, \dots$ et $m = -n, \dots, n$ forment une base orthormée complète pour l'espace $\mathbf{L}^2(\partial B_1)$ et pour $\mathbf{H}_X^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\partial B_1}, \partial B_1)$ (par complétion de $\mathbf{L}_X^2(\partial B_1)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\partial B_1}, \partial B_1)}$ définie au chapitre précédent).

Soit $\mathbf{j} = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^n \alpha_{nm} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m + \beta_{nm} \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_{n,m} \in \mathbf{H}_X^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\partial B_1}, \partial B_1)$. Alors les images de \mathbf{j} par les opérateurs intégraux M_κ , C_κ et C_0 sur la sphère de rayon ρ sont :

$$M_\kappa \mathbf{j} = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^n \alpha_{nm}^{M_\kappa} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m + \beta_{nm}^{M_\kappa} \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_{n,m}$$

avec

$$\alpha_{nm}^{M_\kappa} = -\alpha_{nm} \left(i\kappa\rho j_n(\kappa\rho) h_n^{(1)}(\kappa\rho) + i \frac{(\kappa\rho)^2}{2} \left(\frac{j_n}{\partial t}(\kappa\rho) h_n^{(1)}(\kappa\rho) + j_n(\kappa\rho) \frac{h_n^{(1)}}{\partial t}(\kappa\rho) \right) \right)$$

et

$$\beta_{nm}^{M_\kappa} = \beta_{nm} \left(i\kappa\rho j_n(\kappa\rho) h_n^{(1)}(\kappa\rho) + i \frac{(\kappa\rho)^2}{2} \left(\frac{j_n}{\partial t}(\kappa\rho) h_n^{(1)}(\kappa\rho) + j_n(\kappa\rho) \frac{h_n^{(1)}}{\partial t}(\kappa\rho) \right) \right),$$

$$C_\kappa \mathbf{j} = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^n \alpha_{nm}^{C_\kappa} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m + \beta_{nm}^{C_\kappa} \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_{n,m}$$

avec

$$\alpha_{nm}^{C_\kappa} = -i\beta_{nm}(\kappa\rho)^2 j_n(\kappa\rho) h_n^{(1)}(\kappa\rho)$$

et

$$\beta_{nm}^{C_\kappa} = i\alpha_{nm} \left(j_n(\kappa\rho) + \kappa\rho \frac{j_n}{\partial t}(\kappa\rho) \right) \left(h_n^{(1)}(\kappa\rho) + \kappa\rho \frac{h_n^{(1)}}{\partial t}(\kappa\rho) \right),$$

A. Théorie de Mie pour les équations de Maxwell

$$C_{0\mathbf{j}} = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^n \alpha_{nm}^{C_0} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m + \beta_{nm}^{C_0} \mathbf{rot}_{\partial B_1} Y_{n,m}$$

avec

$$\alpha_{nm}^{C_0} = -\beta_{nm} \frac{1}{2n+1}$$

et

$$\beta_{nm}^{C_0} = \alpha_{nm} \left(\frac{2}{2n+1} + \frac{n(n+1)}{2n+1} \right).$$

Bibliographie

- [1] Craig F. Borhen and Donald R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley Sciences. John Wiley & Sons Inc, Berlin, 1998.
- [2] James H. Bramble, Tzanio V. Kolev, and Joseph E. Pasciak. The approximation of the Maxwell eigenvalue problem using a least-squares method. *Math. Comp.*, 74(252) :1575–1598 (electronic), 2005.
- [3] A. Buffa and P. Ciarlet, Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations. I. An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1) :9–30, 2001.
- [4] A. Buffa and P. Ciarlet, Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations. II. Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1) :31–48, 2001.
- [5] A. Buffa, M. Costabel, and C. Schwab. Boundary element methods for Maxwell’s equations on non-smooth domains. *Numer. Math.*, 92(4) :679–710, 2002.
- [6] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. On traces for $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 276(2) :845–867, 2002.
- [7] A. Buffa and R. Hiptmair. A coercive combined field integral equation for electromagnetic scattering. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2) :621–640 (electronic), 2004.
- [8] A. Buffa, R. Hiptmair, T. von Petersdorff, and C. Schwab. Boundary element methods for Maxwell transmission problems in Lipschitz domains. *Numer. Math.*, 95(3) :459–485, 2003.
- [9] Michel Cessenat. *Mathematical methods in electromagnetism*, volume 41 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996. Linear theory and applications.
- [10] Barbara Chantraine-Barès. *Synthèse et optimisation d’antennes lentilles substrats à diagramme de rayonnement formé en ondes millimétriques*. Thèse de doctorat, Institut d’électronique et des télécommunications de Rennes, 2004.
- [11] David Colton and Rainer Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

-
- [12] David L. Colton and Rainer Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.
- [13] Martin Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains : elementary results. *Siam J. Math. Anal.*, 19(3) :613–626, 1988.
- [14] Martin Costabel and Monique Dauge. Maxwell eigenmodes in tensor product. *1991 Mathematics Subject Classification*, 78M10, 2006.
- [15] Martin Costabel and Ernst P. Stephan. Strongly elliptic boundary integral equations for electromagnetic transmission problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 109(3-4) :271–296, 1988.
- [16] Armel de La Bourdonnaye. Décomposition de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 316(4) :369–372, 1993.
- [17] G. I. Èskin. *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh pseudodifferentsialnykh uravnenii*. Izdat. "Nauka", Moscow, 1973.
- [18] Gaël Godi. *Conception et optimisation d'antennes lentilles multicouches et de diélectriques*. Thèse de doctorat, Institut d'électronique et des télécommunications de Rennes, 2006.
- [19] J. Hadamard. Sur quelques questions du calcul des variations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 24 :203–231, 1907.
- [20] Harald Heese. *Theory and numerics for shape optimization in superconductivity*. Dissertation des doktorgrades, Institut d'électronique et des télécommunications de Rennes, 2006.
- [21] Frank Hettlich. Fréchet derivatives in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 11(2) :371–382, 1995.
- [22] Frank Hettlich. Erratum : "Frechet derivatives in inverse obstacle scattering" [Inverse Problems **11** (1995), no. 2, 371–382 ; MR1324650 (95k :35217)]. *Inverse Problems*, 14(1) :209–210, 1998.
- [23] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 2007. Pseudo-differential operators, Reprint of the 1994 edition.
- [24] Jean-Lin Journé. *Calderón-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Calderón*, volume 994 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [25] A. Kirsch. The domain derivative and two applications in inverse scattering theory. *Inverse Problems*, 9(1) :81–96, 1993.
- [26] R. E. Kleinman and P. A. Martin. On single integral equations for the transmission problem of acoustics. *SIAM J. Appl. Math.*, 48(2) :307–325, 1988.

BIBLIOGRAPHIE

- [27] E. Hadji Kone. *Équations intégrales surfaciques et volumiques pour la diffraction d'ondes électromagnétiques par un corps diélectrique*. Thèse de doctorat, IRMAR, Université de Rennes 1, 2009.
- [28] Rainer Kress. *Linear integral equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999.
- [29] Yves Meyer. *Ondelettes et opérateurs. II*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1990. Opérateurs de Calderón-Zygmund. [Calderón-Zygmund operators].
- [30] Peter Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.
- [31] Jean-Claude Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral representations for harmonic problems.
- [32] Michel Pierre and A. Henrot. *Variation et Optimisation de Formes, une Analyse géométrique*. Springer, 2005.
- [33] Olivier Pironneau. *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [34] Roland Potthast. Fréchet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering. *Inverse Problems*, 10(2) :431–447, 1994.
- [35] Roland Potthast. Domain derivatives in electromagnetic scattering. *Math. Methods Appl. Sci.*, 19(15) :1157–1175, 1996.
- [36] Roland Potthast. Fréchet differentiability of the solution to the acoustic Neumann scattering problem with respect to the domain. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 4(1) :67–84, 1996.
- [37] Roland Potthast. *Fréchet Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*. PhD in Numérical analysis, Gottingen, 1996.
- [38] Roland Potthast. *Point sources and multipoles in inverse scattering theory*, volume 427 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [39] J. Simon. Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2(7-8) :649–687 (1981), 1980.
- [40] Jan Sokołowski and Jean-Paul Zolésio. *Introduction to shape optimization*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Shape sensitivity analysis.
- [41] Olaf Steinbach and Markus Windisch. Modified combined field integral equations for electromagnetic scattering. *SIAM J. Numer. Anal.*, (47) :1149–1167, 2009.
- [42] J. T. Schwartz. Non-linear functional analysis. *Math. Comp.*, 43(167) :29–46, 1984.

- [43] Michael E. Taylor. *Partial differential equations. I*, volume 115 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. Basic theory.
- [44] Michael E. Taylor. *Tools for PDE*, volume 81 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. Pseudo-differential operators, paradifferential operators, and layer potentials.

Résumé :

Les antennes lentilles sont des dispositifs ayant pour support les ondes électromagnétiques et sont constituées d'une source primaire et d'un système focalisant diélectrique (la lentille). La montée en importance récente d'applications en ondes millimétriques (exemple : radars d'assistance ou d'aide à la conduite), nécessite la construction d'antennes lentilles de quelques centimètres qui répondent à des cahiers des charges spécifiques à chaque cas. L'une des problématiques à résoudre consiste à déterminer la forme optimale de la lentille étant donnés : (i) les caractéristiques de la source primaire, (ii) les caractéristiques en rayonnement fixées. Ce projet de thèse vise à développer de nouveaux outils pour l'optimisation de forme en utilisant une formulation intégrale du problème.

Cette thèse s'articule en deux parties. Dans la première nous avons construit plusieurs formulations intégrales pour le problème de diffraction diélectrique en utilisant une approche par équation intégrale surfacique. Dans la seconde nous avons étudié les dérivées de forme des opérateurs intégraux standard en électromagnétisme dans le but de les incorporer dans un algorithme d'optimisation de forme.

Mots clefs : Équations de Maxwell harmoniques en temps, équation intégrale de frontière, décomposition de Helmholtz, dérivées de forme, optimisation de forme, méthode de gradient.

Abstract :

Integrated lens antennas are devices having electromagnetic waves as support and are composed of a primary source and a dielectric focusing system (the lens). The recent increase of applications in millimetric waves (example : adaptative cruise control radars), needs the design of lens antennas of a few centimeters with specific requirements. One of the problems consists in determining the optimal shape of the lens given : (i) the primary source, (ii) the radiation pattern. This PhD thesis project aims to develop new tools for shape optimization using integral formulation of the problem.

This PhD thesis is structured in two parts. In the first one we have constructed several integral formulations for the dielectric scattering problem using boundary integral equation approach. In the second one we have studied the shape derivatives of the standard boundary integral operators in electromagnetism in order to incorporate this derivatives in shape optimization algorithms.

Key words : Time-harmonic Maxwell's equations, single boundary integral equation, Helmholtz decomposition, shape derivatives, shape optimization, gradient method.