

Contributions à l'analyse numérique de méthodes de volumes finis, à la modélisation et au calcul en électrocardiologie

Yves Coudière

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
UMR 6629, CNRS – Université de Nantes – ECN

Le 2 juillet 2009

Préliminaires

Maillages non structurés, distordus

Méca flu / milieux poreux

Diffusion anisotrope, hétérogène

Imagerie, médecine

Méthodes de volumes finis
Analyse numérique

EDP réaction-diffusion

Electrocardiologie/physiologie
Modélisation

Raffinement non conforme (AMR)

Calcul scientifique (2D, 3D)

Préliminaires (biblio)

Maillages non structurés, distordus

Méca flu / milieux poreux

Diffusion anisotrope, hétérogène

Imagerie, médecine

Méthodes de volumes finis
Analyse numérique

EDP réaction-diffusion

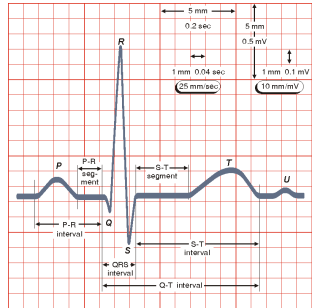
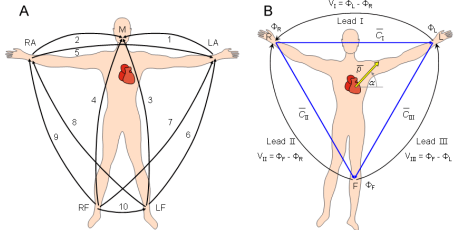
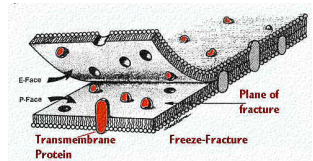
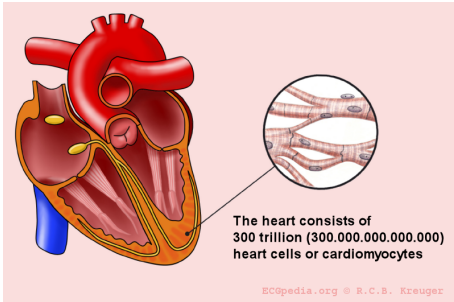
Electrocardiologie/physiologie
Modélisation

Raffinement non conforme (AMR)

Calcul scientifique (2D, 3D)

Actions Inria – Thèse C. Pierre – Financement ANR (JCJC)

Introduction



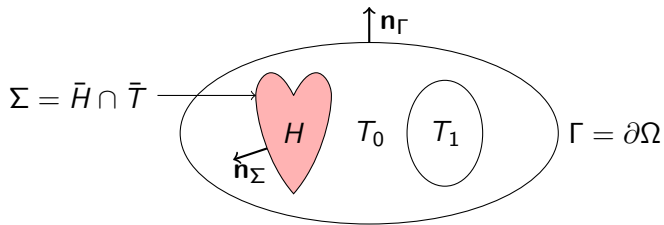
Motivations et applications (exemples)

- Comprendre la propagation du potentiel d'action cardiaque, de l'échelle du tissu à celle de l'organe ou du corps entier.
 - Couplage de modèles à l'échelle de la cellule (hétérogénéités cellulaire, oreillettes, ventricules, réseau spécial de conduction).
 - Interaction avec le thorax (et hétérogénéités).
 - Hiérarchie de modèles à ce niveau macroscopique (bidomaine → eikonale).
- Ablation radiofréquence (clinique),
- Expérimentation numérique pour biologie,
- Améliorer notre compréhension de l'ECG.

Plan

- ① Modèles, données, paramètres
- ② Les EDP
- ③ Schémas volumes finis
- ④ Expériences numériques

Electrocardiologie

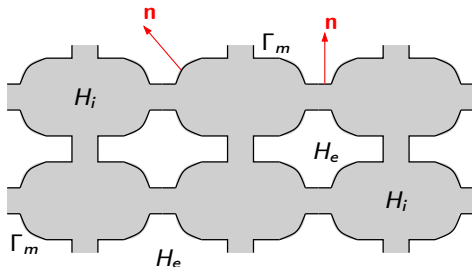


Thorax : conducteur électrique quasi-statique

Le thorax est borné et hétérogène $T = \cup_i T_i$

Coeur : Domaine H , système d'EDP + modèle de cellule + conditions d'interfaces Σ

L'échelle microscopique



- Potentiel électrique intra-cellulaire ϕ_i , conductivité G_i
- Potentiel électrique extra-cellulaire ϕ_e , conductivité G_e
- La physiologie est écrite sur la membrane qui sépare les deux domaines, et liée à $V_m = \phi_i - \phi_e$

L'échelle macroscopique

- Le potentiel de membrane

$$V_m = \phi_i - \phi_e$$

- L'équation de courant, $A_m \gg 1$,

$$A_m (C_m \partial_t V_m + I_{ions}) = -\operatorname{div} (G_e \nabla \phi_e)$$

$$A_m (C_m \partial_t V_m + I_{ions}) = \operatorname{div} (G_i \nabla \phi_i)$$

- Électrophysiologie, $I_{ions} = \dots$ (à préciser ...)
- Équilibre électrostatique dans le thorax

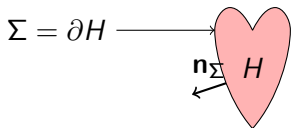
$$\operatorname{div} (G_T \nabla \phi_T) = 0$$

- conditions d'interface

Conditions d'interface

Pas de flux de courant sortant

$$G_i \nabla \phi_i \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0, \quad G_e \nabla \phi_e \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0.$$



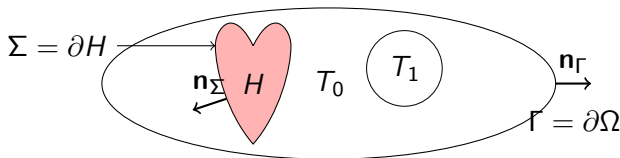
Conditions d'interface

Continuité du flux de courant extracellulaire – extracardiaque

$$G_e \nabla \phi_e \cdot \mathbf{n}_\Sigma = G_T \nabla \phi_T \cdot \mathbf{n}_\Sigma,$$

Pas de flux de courant sortant du milieu intracellulaire,

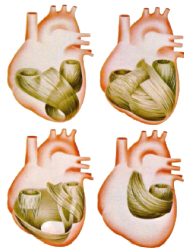
$$G_i \nabla \phi_i \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0, \quad G_T \nabla \phi_T \cdot \mathbf{n}_\Gamma = 0.$$



Anisotropie, hétérogénéités, problème de transmission

- Anisotropie dans le coeur, G_i et G_e :

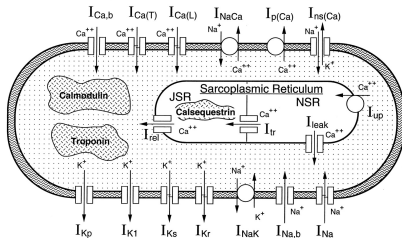
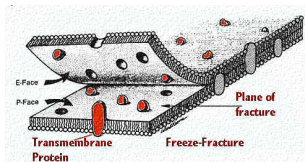
$$G_{i,e}(x) = R(x) \begin{pmatrix} g_{i,e}^l & & \\ & g_{i,e}^{t1} & \\ & & g_{i,e}^{t2} \end{pmatrix} R(x)^T$$



- Hétérogénéité dans le thorax : $G_T(x) = G_{T,i}$ for $x \in T_i$
- Problème de transmission : deux potentiels, ϕ_i et ϕ_e d'une part, un potentiel, ϕ_T d'autre part ...

Électrophysiologie cellulaire

Modèle de type Hodgkin-Huxley



- Espèces ioniques : Na^+ , K^+ , Ca^{++} , Cl^- , H^+ , ...
- Physiologie = courants ioniques,
 $I_{ions}(V_m; [X_1], \dots, [X_M]; w_1, \dots, w_N)$

Équations différentielles non linéaires

Électrophysiologie cellulaire

$$C_m \frac{d}{dt} V_m + I_{ions}(t; V_m, \dots) = 0 \quad (1)$$

petites échelles de temps < 1 ms

- Courants ioniques « simples »

$$I_j = \bar{G}_j f(w_1, \dots, w_N)(V_m - E_j), \quad E_j = \frac{RT}{F} \ln \frac{[X_j]_e}{[X_j]_i}$$

- Équations des « portes »

$$\frac{dw_j}{dt} = \alpha_j(V_m)(1 - w_j) - \beta_j(V_m)w_j$$

- Équations des concentrations

$$\frac{d[X_i]}{dt} = \sum_j \lambda_{ij} I_j(t, V_m, \dots)$$

Modèles simplifiés

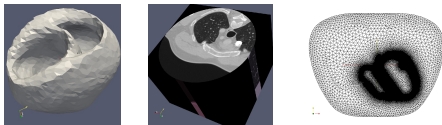
$$I_{ions} = I_{ions}(V_m, w)$$
$$\frac{dw}{dt} = G(V_m, w)$$

- $w(t, x) \in \mathbb{R}$ est une variable scalaire
- Phénoménologique, pas de problème de positivité

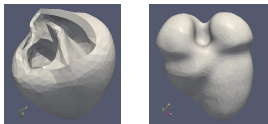
Aliev-Panfilov, MacCulloch, Mitchell-Schaeffer, Fenton-Karma, ...

Équation bistable, type *Fitzhugh-Nagumo*

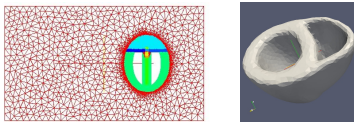
Données (géométrie, fibres)



(a) médicales



(b) expérimentales



(c) analytique (*in silico*)

Synthèse

- Comprendre les équations bidomaines
- Approximation sur des maillages non structurés
- Schémas en temps (positivité, précision, etc)
- Calculs pratiques en 2D, 3D

Les équations bidomaines isolées

- Équation de courant dans le coeur

$$A_m (C_m \partial_t V_m + I_{ions}) = -\operatorname{div} (G_e \nabla \phi_e)$$

- Équilibre électrostatique (coeur)

$$-\operatorname{div} ((G_i + G_e) \nabla \phi_e) = \operatorname{div} (G_i \nabla V_m)$$

- Condition de flux nul au bord

$$G_e \nabla \phi_e \cdot \mathbf{n} = 0, \quad G_i \nabla \phi_i \cdot \mathbf{n} = 0$$

Les équations bidomaines isolées

- Équation de courant dans le coeur $V_m = \phi_i - \phi_e$.

$$A_m(C_m \partial_t V_m + I_{ions}) = B V_m, \quad B = (A_i^{-1} + A_e^{-1})^{-1}$$

- Équilibre électrostatique

$$\phi_e = -(A_i + A_e)^{-1} A_i V_m,$$

$$\phi_i = (A_i + A_e)^{-1} A_e V_m$$

- Formulation isolée : flux de courant nul au bord

$$G_e \nabla \phi_e \cdot \mathbf{n} = 0, \quad G_i \nabla \phi_i \cdot \mathbf{n} = 0$$

Les équations monodomaine

- Simplification monodomaine

$$G_i(x) = \lambda G_e(x) \Rightarrow B = \frac{1}{1 + \lambda} A_i = \frac{\lambda}{1 + \lambda} A_e$$

- Une équation parabolique semilinéaire

$$A_m (C_m \partial_t V_m + I_{ions}) = \operatorname{div}(G \nabla V_m)$$

avec (moyenne des tenseurs)

$$G = (G_i^{-1} + G_e^{-1})^{-1}$$

- Donnée initiale et condition de bord

$$V_m(0) \in L^2(\Omega), \quad G \nabla V_m \cdot \mathbf{n} = 0$$

Les équations monodomaine/bidomaines

- Une équation parabolique semilinéaire et des EDO

$$\partial_t V + F(V, W) = BV$$

$$\partial_t W + G(V, W) = 0$$

- Si $B = \operatorname{div}(G(x)\nabla\cdot)$, c'est OK (principe du maximum)

Les équations monodomaine/bidomaines

- Une équation parabolique semilinéaire et des EDO

$$\partial_t V + F(V, W) = BV$$

$$\partial_t W + G(V, W) = 0$$

- $B = (A_i^{-1} + A_e^{-1})^{-1}$ est maximal monotone, autoadjoint

solutions fortes locales pour des modèles Lipschitz et des données régulières, via des estimations dans des Sobolev (interpolés)

Les équations monodomaine/bidomaines

- Une équation parabolique semilinéaire et des EDO

$$\partial_t V + F(V, W) = BV$$

$$\partial_t W + G(V, W) = 0$$

- $B = (A_i^{-1} + A_e^{-1})^{-1}$ est un opérateur elliptique d'ordre 2

Les équations monodomaine/bidomaines

- Une équation parabolique semilinéaire et des EDO

$$\partial_t V + F(V, W) = BV$$

$$\partial_t W + G(V, W) = 0$$

- $B = (A_i^{-1} + A_e^{-1})^{-1}$ est un opérateur elliptique d'ordre 2

Inégalité d'énergie

$$\frac{d}{dt}(\|V\|_0^2 + \lambda\|W\|_0^2) + \beta\|V\|_1^2 + \int_{\Omega}(F(V, W)V + \lambda G(V, W)W) \leq 0$$

Les équations monodomaine/bidomaines

- Une équation parabolique semilinéaire et des EDO

$$\partial_t V + F(V, W) = BV$$

$$\partial_t W + G(V, W) = 0$$

- $B = (A_i^{-1} + A_e^{-1})^{-1}$ est un opérateur elliptique d'ordre 2

Inégalité d'énergie + hypothèses sur F et G

$$\frac{d}{dt}(\|V\|_0^2 + \lambda\|W\|_0^2) + \beta\|V\|_1^2 + \int_{\Omega} (|V|^p + |W|^2) \leq 0$$

Existence et unicité de solutions faibles *globales* (Y. Bourgault, Y. C. and C. Pierre, *JNLA-B*, 2008)

Approximation numérique

Monodomaine : *éq. scalaire parabolique + système d'EDO raides*

- Maillages non structurés irréguliers
- Gestion de l'anisotropie tournante
- Fronts raides
- Schéma en temps (rapports d'échelles en temps, stabilité numérique) ?

Bidomaine : *éq. scalaire parabolique + système d'EDO raides + éq. d'équilibre elliptique*

- Double anisotropie + hétérogénéités (discontinuités)
- Grand système linéaire creux, mal conditionné (Neumann homogène)

Les schémas volumes finis

Monodomaine : Stabilité + convergence

Un résultat de convergence pour le schéma volumes finis classique pour les éqs. monodomaine, avec estimations d'erreur dans $L^2(0, T; H^1)$ et $L^\infty([0, T], L^2)$ (Y. C. and C. Pierre, *JNLA-B*, 2006).

Bidomaine : schémas DDFV

Utilisation d'une méthode DDFV étendue au 3D et aux discontinuités (Y.C., C. Pierre, O. Rousseau and R. Turpault, *IJVF*, 2009).

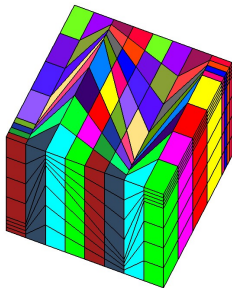
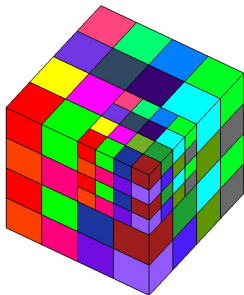
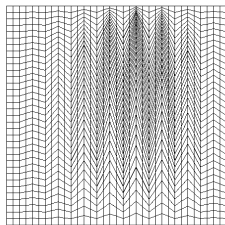
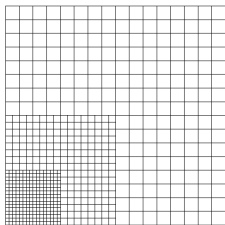
Les schémas DDFV

Ce sont des schémas

- très précis en présence d'hétérogénéités/discontinuités
- très précis sur les flux
- qui discrétisent exactement la condition d'interface
- qui acceptent tous les maillages

Contraintes analogues à celle des écoulements en milieux poreux.

Exemples de maillages

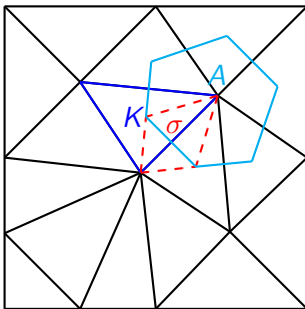


Une méthode VF à 2 maillages en 2D

$$\int_K \operatorname{div}(G \nabla u) = \int_{\partial K} \nabla u \cdot G \mathbf{n}_K$$

Comment approcher les flux

$$\nabla u \cdot G \mathbf{n} ?$$



- **Premier maillage** : une inconnue par centre K, L, \dots
- **Second maillage** : une inconnue par sommet A
2 schémas volumes finis (K et A)
- **Le maillage diamants** : un vecteur par interface σ

Formalisme

- \mathbf{U} l'espace des gradients (vecteurs), $(\mathbf{u}_D)_D$, pdt scalaire.
- X l'espace des pressions (scalaires), $(p_K)_K$, $(p_A)_A$, pdt scalaire.

$$\operatorname{div}_h : \mathbf{u}, \text{vecteurs} \xrightarrow{\text{Classical FV, flux}=\phi(x,\mathbf{u})} \text{scalaires}$$

$$\nabla_h : p, \text{scalaires} \xrightarrow{\text{Green Formula}} \text{vecteurs}$$

Propriété de dualité

analogue de la formule de Green

$$(\mathbf{u}, \nabla_h p) + (\operatorname{div}_h(\mathbf{u}), p) = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_{h, \partial\Omega}$$

- L'expression du gradient est simple (différences finies)

$$\nabla_D p_h = \frac{1}{2|D|} ((p_L - p_K)\mathbf{N}_{KL} + (p_B - p_A)\mathbf{N}_{AB}).$$

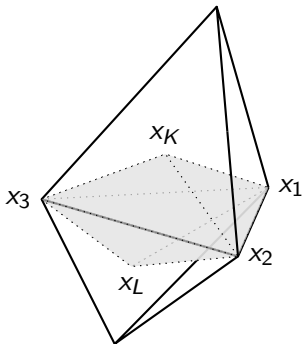
- L'assemblage de la matrice aussi (boucle sur les interfaces).
- Continuité du flux pour des coefficients discontinus (conservativité).
- Toutes les conditions aux limites.
- Aussi pour des flux non linéaires.

Analyse numérique

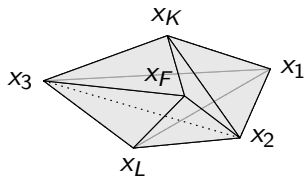
- *Dualité discrète* : le problème discret est bien posé (système linéaire SDP).
- *Commutativité* : $\operatorname{div}_h(\pi \mathbf{u}) = \pi(\operatorname{div} \mathbf{u})$.
- *Consistance du gradient* (P1-exact, P2-exact sur des parallélogrammes).
- *Inégalités de Poincaré* (ou résultats de compacité), fait intervenir la plus petite valeur propre de la matrice de Gram

$$\mathbb{G}(\mathbf{N}_{KL}, \mathbf{N}_{AB}) = \frac{1}{4|D|} \begin{pmatrix} |\mathbf{N}_{KL}|^2 & \mathbf{N}_{KL} \cdot \mathbf{N}_{AB} \\ \mathbf{N}_{KL} \cdot \mathbf{N}_{AB} & |\mathbf{N}_{AB}|^2 \end{pmatrix}$$

Diamants 3D (C. Pierre)



(d) Cellule diamant $D(F)$.



(e) Partie $D_{x_1}(F)$ associée au noeud x_1 .

Commentaires

- La *dualité discrète* est conservée
- Expression du gradient moins simple
- Volumes de contrôles qui se recouvrent
- Contraintes géométriques sur les maillages
- Inégalité de Poincaré ? Commutativité ?

Une méthode 3D à 3 maillages

- Une méthode volumes finis à 3 maillages :
 - *premier maillage* (donné),
 - *second maillage* dont les volumes de contrôles sont centrés aux sommets,
 - *troisième maillage* dont les volumes de contrôle sont centrés sur les faces ou les arêtes.
- La gradient/flux est calculé sur des *diamants* associés à des couples face-arête qui contiennent
 - 6 sommets qui définissent 3 directions linéairement indépendantes ;
 - 3 interfaces associées aux 3 maillages
- Le nombre de DDL est $\#(\text{cellules} + \text{faces} + \text{arêtes} + \text{sommets})$.

Commentaires

- L'expression du gradient est toujours aussi simple (3 différences finies).

$$3|D|\nabla_D p = (p_L - p_K)\mathbf{N}_{KL} + (p_B - p_A)\mathbf{N}_{AB} + (p_F - p_E)\mathbf{N}_{EF}$$

- Assemblage par parcours des *diamants* (très simple).
- *Dualité discrète* évidente par construction.
- *Consistance* naturelle (P1-exact), et *commutativité*.
- *Inégalité de Poincaré* : matrice de Gram

$$\mathbb{G}(\mathbf{N}_{KL}, \mathbf{N}_{AB}, \mathbf{N}_{EF})$$

non dégénérescence des mailles.

Résultats

- Application au problème de l'ECG (IJFV 2009)
- Description de la méthode, premiers résultats (Algoritmy 2009, Workshop VF 2009)
- Convergence, estimations d'erreurs pour la diffusion non linéaire (en préparation)
- Extension aux problèmes de convection-diffusion (SINUM 2009)

Le problème semi-discret I

- Équation d'évolution de V_m

$$A_m \left(C_m \frac{dV_m}{dt} + I_{ions} \right) = K_e \phi_e$$

La matrice K_e discrétise $-\text{div}(G_e \nabla(\cdot))$.

- Équilibre quasi-statique

$$(K_i + K_e) \phi_e = K_i V_m$$

$$K_T \phi_T = 0$$

En discrétisant les conditions d'interface correctement, soit

$$\bar{K} \bar{\phi} = f(V_m)$$

Le problème semi-discret II

- Et le modèle ionique !

$$I_{ions} = I_{ions}(V_m; [X_1], \dots, [X_6]; w_1, \dots, w_N)$$

$$\frac{dw_j}{dt} = f_j(V_m, w_j)$$

$$\frac{d[X_i]}{dt} = \lambda I_{X_i}$$

Trois exemples numériques

- Modèle bidomaine couplé sur une géométrie analytique ;
- Modèle monodomaine et couplage faible sur une image médicale ;
- Modèle monodomaine et couplage de modèles ioniques

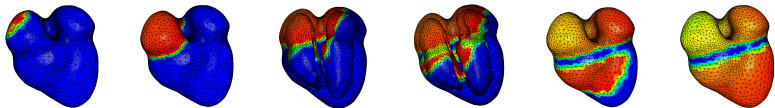
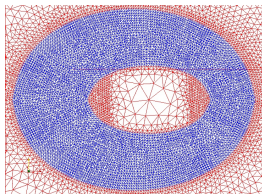
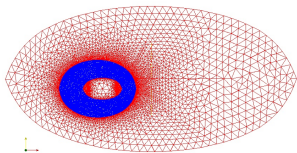


Figure: Potentiel de membrane, Visible Man, TNNP, A_m non physique

Des difficultés numériques

- Echec de propagation (*propagation failure*)
- Conséquence sur le pas de temps
 - échelles de temps réaction/diffusion et au sein des termes de réaction
 - méthode en temps robuste et précise ?
- Convergence en maillage très difficile à obtenir.
- Conséquences en 3D ?
 - Mailler un volume de 50 – 100 cm³ avec une résolution de l'ordre de 0.1 mm ou même moins.
- Résoudre à *chaque pas de temps* un grand système linéaire creux mal conditionné (90% du CPU).

Couplage fort en 2D



8554 noeuds, 17016 triangles.

$$Am = 2000cm^{-1}$$

$$g_i^l = 4mS.cm^{-1}$$

$$g_e^l = 1.8mS.cm^{-1}$$

$$g_0 = 2.39mS.cm^{-1}$$

$$C_m = 1\mu F.cm^{-2}$$

$$g_i^t = 2mS.cm^{-1}$$

$$g_e^t = 1.5mS.cm^{-1}$$

- 1 Faber, Rudy (2000), normale, 100BPM/240BPM
- 2 Shaw, Rudy (1997), ischemie, 100BPM

Preconditionnement

Résolution du système linéaire = 90% du temps CPU

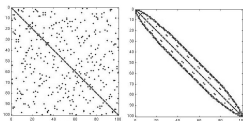


Figure: Symetric Reverse Cuthill-MacKee

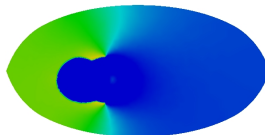
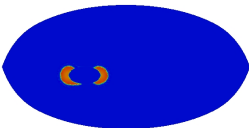
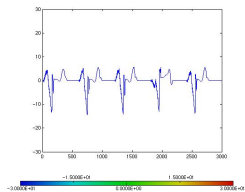
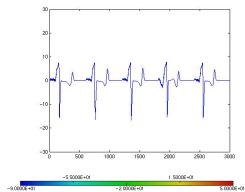
preconditionning	none	ILU0	ILU1
BiCGStab	43.8	7.1	6.9
GMRes	63.8	24.2	25.8

Table: Nombre d'itération pour obtenir un résidu= $1E - 3$

residual	$1E - 3$	$1E - 5$	$1E - 7$
BiCGStab	92	260	1012
GMRes	112	1253	

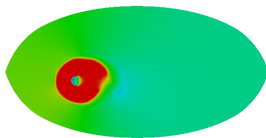
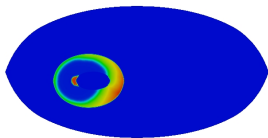
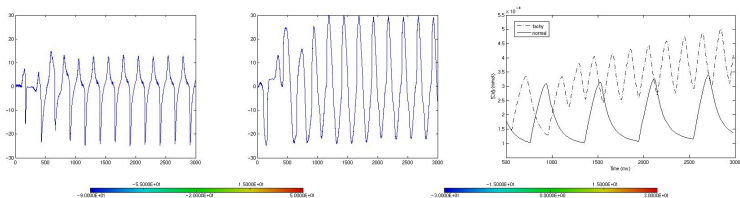
Table: CPU pour 100 résolutions avec le préconditionneur ILU(0)

2 stimulations, 100 BPM



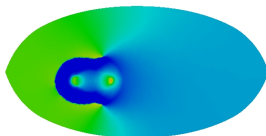
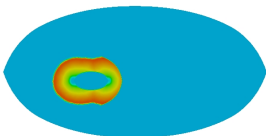
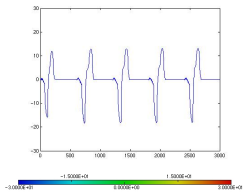
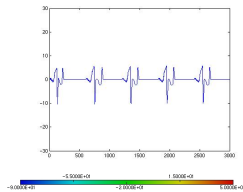
2 stimulations, 240 BPM

- Plus de distinction QRS - T
- Saturation en $[Ca^{++}]_i$.



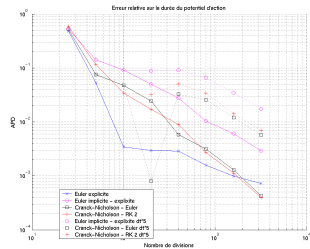
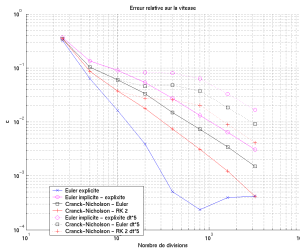
2 stimulations, 100 BPM, Ischemie

- Modification des états d'équilibre



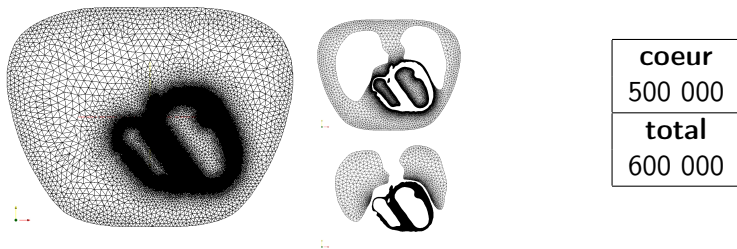
Commentaires

- Convergence (vitesse de propagation) ?
 - Pas d'espace de l'ordre de 0.05 mm pour $A_m = 2000 \text{ cm}^{-1}$.



- Diffusion : schéma de Gear implicite
- Réaction : BDF2 semi-implicite

2D monodomain et couplage faible



- $A_m = 500$ pour avoir convergence en maillage
- Caclul d'ECG en découplant les équations

(Y.C., C. Pierre, O. Rousseau and R. Turpault, 2009).

Résultats

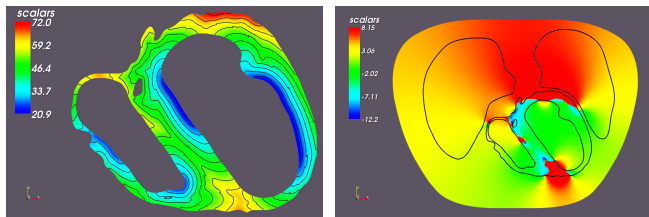


Figure: Isochrones (gauche) and potentiel extracellulaire (droite)

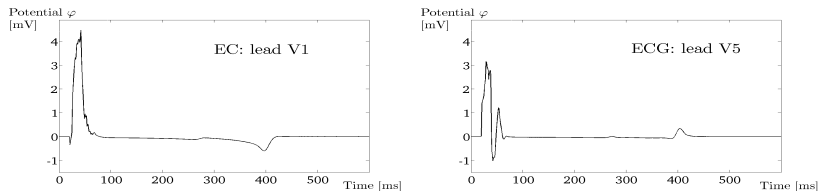
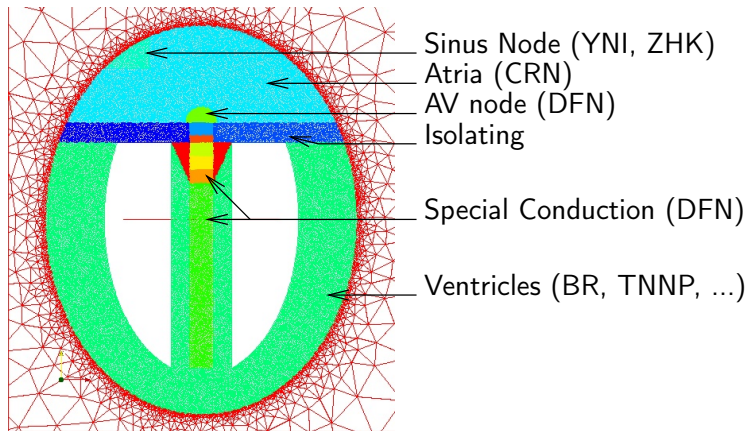


Figure: Potentiels de surface

2D avec couplage de modèles ioniques



- Modèles de CellML
- Couplage ??

Exemple sur une géométrie réelle

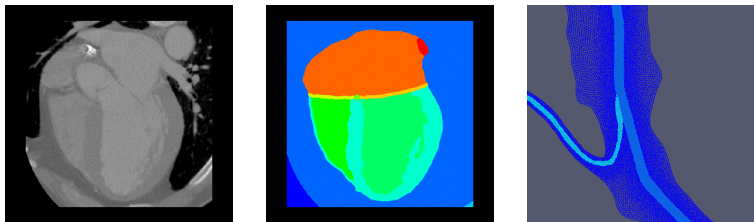


Figure: Génération de maillage depuis un CT scan (Heart Institute, Univ Ottawa)

- 75 000 noeuds et 145 000 triangles.
- 11 sous-domaines.

Allure de la propagation

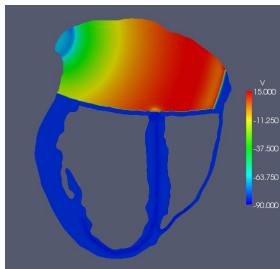


Figure: Propagation

C'est un travail en cours à améliorer

- Couplages : noeud SA/oreillette/noeuds AV, His-Purkinje/ventricule
- Hétérogénéités (transmurale et apex-base)
- Anisotropie

Perspectives

- Monodomain optimal pour approcher un bidomaine (*Y. Bourgault*)
- Comprendre l'insertion d'un tissu dans un autre (*R. Turpault*)
- Intégrer à l'échelle du tissu des pathologies décrites expérimentalement sur la cellule (*G. Loussouarn, F. Charpentier*)
- Améliorer les modèles d'éq. eikonale (*M. Sermesant*)
- Préconditionneur/méthode pour le système bidomaine (*A. Azzouzi*)
- Formulation intégrale (méthode multipôles, projet ANR)
- Estimations d'erreurs en DDFV 3D (*F. Hubert*) + Stokes
- Limiteurs pour la convection-diffusion (*G. Manzini*)

Bibliographie - Articles

[Back to intro](#)



Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault. *IJFV*, 2009.

A 2D/3D discrete duality finite volume scheme. Application to ECG simulation.



Y. Coudière and M. Manzini. *SINUM*, 2009.

The discrete duality finite volume method for convection-diffusion problems.



Y. Bourgault, Y. Coudière, and C. Pierre. *Nonlinear Anal. B*, 2009.

Existence and uniqueness of the solution for the bidomain model used in cardiac electrophysiology.



Y. Coudière and C. Pierre. *Nonlinear Anal. N*, 2006.

Stability and convergence of a finite volume method for two systems of reaction-diffusion equations in electro-cardiology.



A. Dervieux, D. Leservoisier, P.-L. George, and Y. Coudière. *IJNMF*, 2003.

About theoretical and practical impact of mesh adaptation on approximation of functions and PDE solutions.



Y. Coudière, T. Gallouët, and R. Herbin. *M2AN*, 2001.

Discrete Sobolev inequalities and L^p error estimates for finite volume solutions of convection diffusion equations.



Y. Coudière, J.-P. Vila, and P. Villedieu. *CRAS Sér. I*, 2000.

Convergence d'un schéma volumes finis explicite en temps pour les systèmes hyperboliques linéaires symétriques en domaines bornés (convergence of a finite volume time-explicit scheme for symmetric linear hyperbolic systems on bounded domains).



Y. Coudière and P. Villedieu. *M2AN*, 2000.

Convergence of a finite volume scheme for the linear convection-diffusion equation on locally refined meshes.



Y. Coudière, J.-P. Vila, and P. Villedieu. *M2AN*, 1999.

Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional diffusion convection problem.

Bibliographie - Imagerie/Physiologie I

[Back to intro](#)



Sermesant M., Konukoglu E., Delingette H., Coudière Y., Chinchapatnam P., Rhode K.S., Razavi R., and Ayache N. *FIMH*, 2007.

An anisotropic multi-front fast marching method for real-time simulation of cardiac electrophysiology.



M. Pop, M. Sermesant, Y. Coudière, J. Graham, M. Bronskill, A. Dick, and G. Wright. *ISBI*, 2006.

A theoretical model of ventricular reentry and its radiofrequency ablation therapy.



M. Pop, M. Sermesant, A. Dick, Graham J.J., Y. Coudière, and G.A. Wright. *Cardiostim*, 2006.

Aid of computer modelling to identify ventricular re-entries due to infarct scars.



M. Pop, M. Sermesant, Graham J.J., A. Dick, Y. Coudière, and G.A. Wright. *Cardiostim*, 2006.

Assessment of radiofrequency ablation of ventricular arrhythmias via magnetic resonance imaging and computer modelling.



M. Sermesant, Y. Coudiere, V. Moreau-Villeger, K.S. Rhode, D.L. Hill, and R.S. Razavi. *MICCAI*, 2005.

A fast-marching approach to cardiac electrophysiology simulation for xmr interventional imaging.



M. Sermesant, O. Faris, F. Evans, E. McVeigh, Y. Coudière, H. Delingette, and N. Ayache. *IS4TM*, 2003

Preliminary validation using in vivo measures of a macroscopic electrical model of the heart.



M. Sermesant, Y. Coudière, H. Delingette, and N. Ayache. *ISBI*, 2002.

Progress towards an electromechanical model of the heart for cardiac image analysis.

Bibliographie - Imagerie/Physiologie II

[Back to intro](#)



M. Sermesant, Y. Coudière, H. Delingette, N. Ayache, J. Sainte-Marie, D. Chapelle, F. Clément, and M. Sorine. *MS4CSM*, 2002.

Progress towards model-based estimation of the cardiac electromechanical activity from ecg signals and 4d images.



M. Sermesant, Y. Coudière, H. Delingette, N. Ayache, and J.A. Désidéri. *MICCAI*, 2001.

An electro-mechanical model of the heart for cardiac image analysis.



N. Ayache, D. Chapelle, F. Clément, Y. Coudière, H. Delingette, J.A. Désidéri, M. Sermesant, M. Sorine, and José M. Urquiza. *FIMH*, 2001.

Towards model-based estimation of the cardiac electro-mechanical activity from ecg signals and ultrasound images.

Bibliographie - Conférences I

Back to intro



Y. Coudière and F. Hubert. *Algoritmy*, 2009.

A 3D discrete duality finite volume method for nonlinear elliptic equations.



Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault. *Algoritmy*, 2009.

A 2D/3D finite volume method used to solve the bidomain equations of electrocardiology.



Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault. *FVCA 5*, 2008.

A DDFV scheme for anisotropic and heterogeneous elliptic equations, application to a bio-mathematics problem : electrocardiogram simulation.



Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault. *3rd MIT Conf.*, 2005.

A finite volume method for the coupled heart-torso bidomain model in electrocardiology.



Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault. *FVCA 4*, 2005.

Stability and convergence of a finite volume method for a reaction-diffusion system of equations in electro-cardiology.



Y. Coudière, J.P. Vila, and P. Villedieu. *Besançon*, 1999.

Convergence of the finite volumes method for friedrichs' systems on bounded domains.



Y. Coudière and P. Villedieu. *Bulgarie*, 1999.

Cell centered finite volume schemes for convection-diffusion problems.



Y. Coudière and P. Villedieu. *FVCA 2*, 1999.

Convergence rate of the finite volume time-explicit upwind scheme for the maxwell system on a bounded domain.

Bibliographie - Conférences II

[Back to intro](#)



Y. Coudière, J.P. Vila, and P. Villedieu. *FVCA 1*, 1996.

Convergence of a finite volume scheme for a diffusion convection problem.

Bibliographie - Autres I

Back to intro



Y. Bourgault and Y. Coudière and M. Rioux. *En préparation*, 2009.

Optimal monodomain approximations of the bidomain equations for the isolated heart.



Y. Coudière and F. Hubert. *En préparation*, 2009.

Error estimates for a 3D extension of the Discrete Duality Finite Volume scheme for nonlinear elliptic equations.



Y. Coudière. *Workshop VF*, 2009.

A 3D extension of DDFV schemes for anisotropic diffusion problems on general grids.



Y. Coudière. *Workshop VF*, 2006.

Un schéma volumes finis en dualité discrète 3D, application au système bidomaine de l'électrocardiologie.



Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault. *HAL*, 2006.

Solving the fully coupled heart and torso problems of electrocardiology with a 3D discrete duality finite volume method.



Y. Coudière and C. Pierre. *École CEA-INRIA*, 2004.

Finite volume approximation of the FitzHugh-Nagumo equations.



Y. Coudière, B. Palmerio, A. Dervieux, and D. Leservoisier. *Rapport INRIA*, 2002.

Accuracy barriers in mesh adaptation.



Y. Coudière. *Thèse*, 1999.

Analyse de schémas volumes finis sur maillages non structurés pour des problèmes linéaires hyperboliques et elliptiques.

Exposés

- à venir
 - École CEA-INRIA, novembre 2009.
 - Cardiac modeling workshop, Univ. Gräz, octobre 2009.
- récents
 - Semaine « Calcul Scientifique », CIRM, février 2009.
 - Séminaire Institut du thorax (Nov. 2008).
 - Séminaire Momas (Octobre 2008)
 - Journées Mabem Nice (Octobre 2008)
 - Séminaire Univ. Ottawa (Septembre 2008)
 - 3 séminaires en juillet 2008, MOX, Univ. Milano, CNR-IMATI, Pavie.