



HAL
open science

BAS DU SPECTRE ET GEOMETRIE DES VARIETES DE VOLUME INFINI

Samuel Tapie

► **To cite this version:**

Samuel Tapie. BAS DU SPECTRE ET GEOMETRIE DES VARIETES DE VOLUME INFINI. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT: . tel-00423371

HAL Id: tel-00423371

<https://theses.hal.science/tel-00423371>

Submitted on 9 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)
préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 CNRS - UJF

Bas du spectre et géométrie des variétés de volume infini

Samuel TAPIE

Soutenue à Grenoble le 25 septembre 2009 devant le jury :

<i>Directeurs</i>	Gérard BESSON	Institut Fourier
	Gilles COURTOIS	Ecole Polytechnique
<i>Rapporteurs</i>	Gilles CARRON	Université de Nantes
	Ursula HAMENSTÄDT	Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
<i>Examineurs</i>	Alain JOYE	Institut Fourier
	Jean-Marc SCHLENKER	Université de Toulouse III

Remerciements

Il est d'usage de remercier les personnes sans qui cette thèse n'aurait pu voir le jour, ou n'aurait en tous cas certainement pas ressemblé à ce qu'elle est aujourd'hui. Je suis très heureux de m'y conformer, aujourd'hui que le reste du manuscrit semble terminé (jusqu'à sa prochaine relecture, en tous cas). Cependant, comme il va s'agir d'une tâche longue et complexe, je suggère au lecteur essentiellement intéressé par les Mathématiques de passer ce paragraphe, qui ne parle que d'êtres humains. Quant à celui qui en poursuivra la lecture, après un tel avertissement il ne pourra m'en vouloir de m'attarder un peu pour ceux qui m'ont été chers ces dernières années.

Les relations d'ordre entre les hommes ne servant à rien, je peux bien commencer par qui je veux. Je voudrais donc remercier tous les enseignants qui, de Toulouse à Grenoble en passant par Palaiseau ont fait naître et grandir mon goût pour les Mathématiques. Sans eux, je ne serais pas ici maintenant, et vu le bonheur que je trouve dans ce métier, cela me semble une bonne raison pour les remercier. Ils sont trop nombreux pour que je les cite tous ; je remercie en particulier Danièle Lepeix, Alain Soyeur, Jean Lannes et Jean Barge pour m'avoir accompagné et encouragé chacun à leur manière dans des moments décisifs.

Merci à Gilles et Gérard pour m'avoir permis de commencer la recherche dans le monde de la Géométrie Riemannienne, et pour leur «encadrement» de ces trois dernières années. Ils m'ont d'abord donné un sujet très riche, auquel je n'ai pas réussi à répondre, qui m'a conduit à étudier avec beaucoup de liberté des branches des mathématiques très différentes, à rencontrer de nombreux collègues en France et à l'étranger, et même à trouver des résultats dont je suis assez heureux ! Ils me laissent aujourd'hui dans une région mathématique que j'aime beaucoup, avec de nombreuses perspectives pour la suite... J'ai donc eu la chance d'avoir deux directeurs, qui se connaissent très bien, communiquent constamment, et qui ont une façon de faire des maths et d'encadrer leurs élèves complètement différente. L'un excelle dans la vision d'ensemble d'un travail et de ses applications potentielles, l'autre est d'une patience extrême pour m'aider à résoudre les détails techniques qui «coincement» toujours un peu... Un grand merci, ce fut une source de richesse majeure ! N'hésitez pas à recommencer.

L'Institut Fourier a été un environnement scientifique et humain très riche et productif. Les centres d'intérêts y sont variés, les chercheurs très disponibles pour répondre à un thésard débutant, et il est rare d'y rester avec une question sans y trouver un élément de réponse, pour peu qu'elle soit bien posée ! Merci à tous pour vos réponses patientes, en particulier à Stéphane Baseilhac pour son accueil dans le monde de la géométrie hyperbolique, à Yves Colin de Verdière dont l'oeuvre a largement inspiré la première moitié de cette thèse et qui m'y a bien souvent orienté, à Didier Piau pour ses corrections probabilistes dans mes intégrales stochastiques incertaines, et à Romain Joly pour un bon soutien en analyse fonctionnelle à un moment un peu critique. Et je ne pourrai oublier Sylvain Gallot, qui s'il ne m'encadrerait officiellement pas, a toujours été disponible pour m'accompagner dans les méandres techniques et parfois calculatoires de la géométrie riemannienne, et dont la présence a bien complété un certain trio connu sous un nom de vaccin qui restera pour moi mon «origine mathématique». Tous ont contribué à l'approfondissement de ce travail de thèse, et à ce que «faire des maths» devienne à la fois un métier et un plaisir.

Merci aussi au soutien de tous ceux qui, à l'Institut Fourier, sont au service des mathématiciens plus que des mathématiques. Je pense à tous ceux qui travaillent au premier étage et au rez-de-chaussée, à l'administration, l'informatique et à la bibliothèque : sans leur soutien, aucun de nous n'arriverait à faire son travail ! Ils m'ont beaucoup vu, très souvent aidé, particulièrement Boucif à la bibliothèque et Françoise à la reprographie. Merci à vous tous.

Il me faut aussi remercier tous ceux qui ont fait que ces années à l'Institut ont été, humainement, très heureuses. Merci aux thésards du labo, en particulier Nicolas, Boris et Maxime qui m'ont accueilli à mon arrivée et dans mes premières années, et bien sûr Joanna qui a partagé, jour après jour, le même bureau, le même directeur et les mêmes angoisses du début à la fin de cette aventure étrange qu'est la thèse. Merci bien sûr à tous les autres : nous sommes heureusement trop nombreux pour rentrer dans une introduction de thèse ! Merci aussi aux collègues un peu plus âgés, qui entre la cafet, les couloirs, le Resto U et la salle d'escalade ont peuplé de vie et de discussions ces années. Un merci particulier à Martin pour son soutien grimpeur, administratif et hyperbolique, et à Didier, Zindine et quelques autres pour de longues discussions enrichissantes sur des sujets importants quoique pas toujours heureux., aux joueurs de squash... J'espère que tous continueront à croire qu'un laboratoire est autant un lieu d'humanité que de mathématiques, que l'un ne va pas sans l'autre et qu'il faut s'en occuper tous les jours. Le monde est à construire dès la porte du bureau.

Ce travail de thèse doit beaucoup aux discussions que j'ai eu avec les chercheurs qui m'ont invité à venir exposer dans leurs laboratoires. Les questions

qu'ils m'ont posées, les discussions sur leurs travaux et leurs encouragements, ont permis d'étoffer une étude au début un peu marginale (les «surfaces périodiques généralisées») et de prendre du recul sur mon sujet de thèse original. C'est aussi grâce à eux que j'ai appris que les mathématiques se font en communauté, et que l'on ne travaille pas seulement pour soi, mais pour un grand édifice qui peut intéresser tout le monde... Merci en particulier à Constantin Vernicos et à Bruno Colbois pour des questions très pertinentes dans les débuts de mon travail, à Jérôme Los et Jean-Marc Schlenker pour avoir commencé à réfléchir avec moi sur des problèmes qui les intéressaient, à Alain Joye qui a accepté de rejoindre ce jury de thèse, et à tous ceux qui se sont intéressés à mon travail et m'ont permis d'avancer dans le monde des mathématiciens.

Enfin, finir cette thèse n'a pas été toujours facile. Je dois remercier ceux qui ont eu la patience d'en soutenir les finitions : Gilles et Gérard qui ont enchaîné des corrections durant bien plus longtemps que prévu, et Gilles Carron qui après avoir discuté plusieurs fois de mon travail, a relu le manuscrit avec une attention impressionnante et relevé encore de nombreuses erreurs dont la résolution m'a fait au moins autant avancer que mal dormir. Ursula Hamenstädt, en plus d'accepter de rapporter ce travail, a accepté de m'accueillir comme post-doctorant au Hausdorff Centrum, à Bonn. Depuis plus de deux ans, elle se doutait fortement que je ne répondrais pas à mon sujet de thèse et pourtant a continué à m'encourager. Merci à tous les quatre qui avez un peu lutté pour que je puisse devenir un chercheur autonome : j'espère être à la hauteur dans la suite de mon parcours, qui commence en Allemagne dans quelques jours.

Je n'oublie pas un instant tous ceux qui n'ont rien à voir avec les mathématiques et qui ont sans doute compté plus que tous les autres (que personne ne s'en vexe), pour arriver jusqu'à la fin de cette thèse comme pour le reste. Il y a 20 ans, mes parents m'ont appris que

$$\text{rot}(\text{rot.}) = \text{grad}(\text{div.}) - \Delta.$$

Je ne sais pas si vous pouvez en être fier, mais le résultat est là ! Merci pour ces années d'amour à vos côtés. Merci aussi à JB, Paul et Manu qui ont vu leur frangin devenir «complètement mathématicien» avec bonne humeur, compréhension et espérance ces dernières années, et à toute ma famille qui m'entoure encore et toujours. De ces années à Grenoble, il me faut aussi remercier mes compagnons «à la maison», dans notre chère collocation de l'Île d'Amour, ainsi que tous ceux qui y sont passés plus ou moins souvent. La thèse et tout ce qui allait autour, nous l'avons vécu ensemble, malgré mes absences fréquentes ! Un merci et bon courage en particulier à Caro pour qui ce n'est pas fini... Merci encore à tous ceux du MEJ qui m'ont fait grandir dans d'autres domaines que les maths ces dernières années. Un

immense merci enfin à celle qui m'a rejoint dans les débuts de cette thèse, sans l'amour de qui je n'y serais sans doute pas arrivé, et qui accepte tous les jours de continuer à mes côtés. J'aurais encore bien plus de choses à vous dire que ce petit paragraphe, mais cela ne regarde plus le lecteur.

Et maintenant, la parole est aux mathématiques !

Table des matières

1	Préliminaires de géométrie riemannienne	21
1.1	Eléments de Théorie spectrale	22
1.2	Variétés à coins et revêtements	29
1.3	Hypersurfaces et théorèmes de comparaison	36
2	Graphes, moyennabilité et bas du spectre	41
2.1	Définitions, exemples et résultats	42
2.1.1	Variétés G -périodiques	42
2.1.2	Recollement de fonctions propres	45
2.1.3	Graphes et moyennabilité	47
2.1.4	Résultats : contrôle du bas du spectre	49
2.2	Démonstrations principales	51
2.2.1	Majoration du λ_0 et graphes moyennables	51
2.3	Graphes non moyennables et minoration du λ_0	54
2.4	Applications et Généralisations	67
2.4.1	Bas du spectre des revêtements	67
2.4.2	Variétés à découpages bornés	69
3	Domaines à bord, propriétés génériques et revêtements	73
3.1	Bas du spectre avec condition de Neumann au bord	74
3.1.1	Caractérisation par le spectre positif	74
3.1.2	Diffusion et fonctions λ -harmoniques	76
3.1.3	Principe de Harnack et démonstration du Théorème de Sullivan	80
3.2	Propriétés génériques de la première fonction propre	82
3.2.1	Espaces de Sobolev sur une variété riemannienne	83
3.2.2	Topologie C^k -forte des variétés non compactes	85
3.2.3	Fonctions propres génériques	92
3.3	Revêtements et bas du spectre d'un domaine fondamental	105
4	Variétés hyperboliques et bas du spectre	111
4.1	Bas du spectre, exposant de Poincaré et ensemble limite	112
4.1.1	Bord à l'infini et densité conforme	112

4.1.2	Ensemble limite et variétés géométriquement finies . . .	115
4.1.3	Mesures à l'infini et bas du spectre	118
4.2	Déformation des variétés hyperboliques	122
4.2.1	Espace de déformation	122
4.2.2	Conjecture : maximum du bas du spectre	124
5	Entropie des variétés convexes cocompactes	129
5.1	Entropie : quelques points de vue	130
5.1.1	Ensembles limites et courbure pincée	130
5.1.2	Flot géodésique et entropie	132
5.1.3	Entropie métrique et mesure de Bowen-Margulis	133
5.1.4	Entropie et volume du coeur convexe	136
5.2	Variation de l'entropie	138
5.2.1	Une formule de variation	138
5.2.2	Applications aux variétés hyperboliques	144
6	Quelques perspectives	147
6.1	Spectres des variétés G -périodiques	148
6.1.1	Pincement de géodésiques	148
6.1.2	Autres opérateurs elliptiques	148
6.2	Propriétés de la première fonction propre	149
6.2.1	Une propriété générique : Morse-Smale	149
6.2.2	Propriété générale : Morse-Bott-Smale	150
6.3	Spectre et géométrie hyperbolique	151
6.3.1	Déformations et applications quasi-conformes	151
6.3.2	Conjecture de Canary	152
6.3.3	Formalisme thermodynamique et dimension de Hausdorff	154
6.3.4	Points critiques de l'entropie et du bas du spectre . . .	155

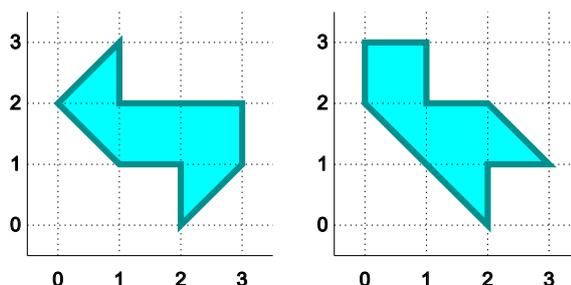
Introduction

Une grande partie de mes affirmations relèvent de la pure spéculation ; on pourra sans doute les traiter de rêveries. J'accepte la qualification : la rêverie n'est-elle pas la catastrophe virtuelle en laquelle s'initie la connaissance ? Au moment où tant de savants calculent de par le monde, n'est-il pas souhaitable que d'aucuns, s'ils le peuvent, rêvent ?

R. Thom

Présentation

Sur un objet métrique lisse (une surface à bord, une variété riemannienne...), on peut en général définir un opérateur différentiel d'ordre 2 appelé *Laplacien*. Ses valeurs propres, quand elles existent, correspondent aux fréquences propres de vibration de notre objet lorsqu'il est soumis à une petite déformation. Ces valeurs propres forment la partie la plus exploitable de ce que l'on appelle le *spectre* du Laplacien. La *géométrie spectrale* a pour but de relier ce spectre avec la géométrie de l'objet dont on est parti. Le titre d'un article bien connu de Mark Kac, *Can one hear the shape of a drum?* résume cette idée : si l'on connaît complètement le spectre du Laplacien sur une surface, peut-on deviner sa géométrie ? La réponse est en général non : ces deux polygones ont exactement le même spectre, ainsi qu'il l'est montré dans [GWW92].



Le spectre fournit cependant des réponses partielles sur la géométrie des objets qui nous intéresseront, les variétés riemanniennes. Sur une variété compacte, le spectre du Laplacien est une suite discrète de valeur propre. La formule de Weyl permet alors de retrouver le volume de la variété à partir de son spectre. Une seule valeur propre permet parfois d'identifier complètement la géométrie d'une variété : dans une famille d'objets dont on contrôle partiellement la géométrie (par exemple une famille de variétés compactes de volume fixé, ou de courbure minorée...), les points extrémaux des valeurs propres du Laplacien correspondent souvent à des variétés très symétriques. Voici deux résultats qui suivent cet idée.

Théorème 1 (Théorème de Lichnerowicz-Obata). *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n dont la courbure de Ricci est minorée par $\kappa > 0$. Alors la première valeur propre non nulle de son Laplacien vérifie*

$$\lambda_1(M) \geq n\kappa,$$

avec égalité si et seulement si (M, g) est la sphère de rayon κ .

Sur une variété M non compacte, le Laplacien n'admet pas forcément de valeur propre. On peut cependant toujours définir le *bas du spectre*, par la

formule

$$\lambda_0(M) = \inf_{\phi} \frac{\|\nabla\phi\|^2}{\|\phi\|^2},$$

où ϕ parcourt l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^1 à support compact dans M , et où l'on a pris la norme L^2 . Le bas du spectre est 0 lorsque la variété est de volume fini. C'est parfois une valeur propre pour le Laplacien, associé à une fonction propre ϕ_0 strictement positive : c'est alors la plus petite de ses valeurs propres. On peut chercher à obtenir des résultats du même type que le Théorème de Lichnerowicz-Obata pour les variétés non-compactes. Notons par exemple le résultat suivant, montré dans [LW01] :

Théorème 2 (Théorème de Li-Wang). *Soit M une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$ dont la courbure de Ricci est minorée par $1 - n$. Supposons que son bas du spectre vérifie*

$$\lambda_0(M) \geq n - 2.$$

Alors on a l'une des deux situations :

1. M n'a qu'un bout de volume infini ;
2. $M = \mathbb{R} \times N$ muni de la métrique produit

$$g_M = dr^2 + (\text{ch}^2 r)g_N,$$

où (N, g_N) est une variété riemannienne compacte dont la courbure de Ricci est minorée par $-(n - 2)$. Dans ce cas,

$$\lambda_0(M) = n - 2.$$

Le problème qui a motivé à l'origine notre travail s'inscrit dans la même veine que ces deux résultats.

Question 1. *Etant donné une famille de variétés hyperboliques de dimension 3 de volume infini, géométriquement finies, quasi-isométriques entre elles, que peut-on dire de celle dont le bas du spectre est maximal, quand elle existe ?*

Cette question, sous une forme plus précise que nous décrirons au Chapitre 4, a été la motivation de départ de toute ma thèse. Alors que je cherchais des exemples plus simples sur lesquels comprendre l'interaction entre bas du spectre et géométrie pour des variétés de volume infini, j'ai été naturellement amené à considérer des surfaces hyperboliques de genre infini bâties à partir de graphes, puis à généraliser ces objets. Cela m'a permis d'acquérir une partie des connaissances nécessaires à l'approche de ce problème. Notons que dans ces différentes études, on retrouvera toujours une hypothèse cruciale sur le spectre : les variétés ont un volume infini, et le bas du spectre est une

valeur propre isolée, associé à une fonction propre. Nous dirons alors qu'elles ont un *trou spectral strictement positif*.

Nous avons donc mené notre travail dans deux directions parallèles. Sur une classe de variétés qui généralise les revêtements $p : M \rightarrow N$, où N est une variété à trou spectral positif, nous avons cherché à relier le bas du spectre de M à celui de N à l'aide de résultats sur le spectre des graphes. Cela nous a conduit à généraliser d'anciens travaux de R. Brooks. Nous avons eu besoin pour cette étude d'étudier différentes caractérisations du bas du spectre, ainsi que des propriétés de la première fonction propre de N . Nous présentons ces résultats dans les chapitres 1, 2 et 3. Dans le même temps, nous avons essayé différentes méthodes pour comprendre, puis essayer de résoudre, la question posée ci-dessus. Aucune n'a complètement abouti ; nous présentons au chapitre 4 différentes facettes de cette question. Au chapitre 5 nous présentons une approche de ce problème, qui donne un résultat intermédiaire intéressant, mais ne permet pas de conclure. Au dernier chapitre nous présentons quelques unes des nombreuses questions qui se sont naturellement posées durant ce travail.

Résumé des résultats

Voici maintenant un résumé plus détaillé des travaux exposés dans ce mémoire.

Chapitre 1 : Préliminaires de géométrie riemannienne

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions classiques de géométrie riemanniennes qui nous serviront aux chapitres 2 et 3. Aucun des résultats que nous présentons n'est vraiment original, mais nous avons adapté leur présentation pour l'utilisation que nous en ferons dans la suite de nos travaux. Les définitions et résultats de la Section 1.2, s'inspirent largement d'anciens travaux de R. Thom, sont peut-être moins connus des géomètres riemanniens.

La Section 1.1 rappelle les résultats classiques de géométrie spectrale dont nous aurons besoin par la suite. Nous y définissons ce qui sera une hypothèse cruciale de la plupart de nos résultats, le *trou spectral* :

Définition 1. *Soit M une variété riemannienne, on dira que M a un trou spectral strictement positif si et seulement si*

1. *le bas du spectre λ_0 est associé à une fonction propre $\phi_0 \in \mathcal{H}^1(M)$; on note alors*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\|\nabla g\|^2}{\|g\|^2} ; \int_M \phi_0 g = 0 \right\}$$

où f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}^1(M)$ orthogonale à ϕ_0 ;

2. on a $\eta = \lambda_1 - \lambda_0 > 0$.

On appelle η le **trou spectral** de M .

La fonction propre ϕ_0 est alors unique à multiplication par une constante près, et de signe constant. Nous supposons donc toujours qu'elle est positive et normalisée pour la norme L^2 lorsque nous parlerons de *la première fonction propre*.

Dans la Section 1.2, nous étudions les revêtements riemanniens galoisiens $p : M \rightarrow N$. Pour certaines fonctions $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, nous y construisons un domaine fondamental pour l'action du groupe de revêtement sur M sur le bord duquel le gradient du relevé de f est tangent. Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit (N, g) une variété riemannienne de dimension n , et $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien de groupe d'automorphisme Γ . Soit $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse telle que pour tout $a > 0$,*

$$N_a = \{x \in N; f(x) \geq a\}$$

est compact, il existe un domaine fondamental $C \subset M$ pour l'action de Γ à bord C^1 par morceaux tel que ∇f soit tangent à ∂C . De plus, si f admet un nombre fini de points critiques, pour tout $1 \leq k \leq n$, le bord de C a un nombre fini de composantes lisses de dimension k .

Nous prouvons ce résultat à partir d'idées dues à R. Thom, et nous présentons sa généralisation à une classe de fonctions plus large : les fonctions dont le gradient est *simplement stratifié*, que nous définirons dans ce paragraphe.

Enfin, dans la Section 1.3, nous décrivons avec quelques détails la géométrie d'une variété au voisinage d'une hypersurface compacte. En particulier, nous décrivons le Laplacien d'une fonction qui ne dépend que de la distance à l'hypersurface, ce dont nous aurons besoin au chapitre 2.

Chapitre 2 : Graphes, moyennabilité et bas du spectre

Ce chapitre est consacré à l'étude des variétés G -périodiques, où G est un graphe à valence constante. Pour un graphe G , nous notons (abusivement) $i \in G$ lorsque i est un sommet de G , et $i \sim j$ lorsque (i, j) est une arête de G .

Définition 2. Soit G un graphe à valence constante $v < \infty$. Nous dirons que M est une **variété G -périodique** s'il existe une sous-variété fermée $C \subset M$ d'intérieur non vide, à bord C^1 par morceaux (voir Section 1.2), qui vérifie les propriétés suivantes.

1. Il existe des sous-variétés $C_i \subset M$ d'intérieurs disjoints telles que

$$M = \bigcup_{i \in G} C_i,$$

et pour tout $i \in G$, il existe une isométrie $J_i : C_i \rightarrow C$.

2. Pour tous $i, j \in G, i \neq j$, si $i \sim j$ alors le bord commun $C_i \cap C_j$ contient une sous-variété de codimension 1.

3. Il existe $R > 0$ et une famille d'ouverts $\alpha_1, \dots, \alpha_v \subset \partial C$, pas forcément connexes, d'adhérences compacte dans ∂C , de classe C^1 , possédant des voisinages tubulaires T_1, \dots, T_v de rayon R disjoints dans C , tels que si $i \sim j$, on ait les propriétés :

(a) la composante de bord $J_i(C_i \cap C_j) \subset \partial C$ contient l'un des α_k ; de même $J_j(C_i \cap C_j)$ contient $\alpha_{k'}$;

(b) l'application

$$J_i \circ J_j^{-1} : J_j(C_i \cap C_j) \rightarrow J_i(C_i \cap C_j)$$

induit une isométrie de $\alpha_{k'}$ sur α_k .

Nous appelons C la **cellule élémentaire** de M , G le **graphe modèle** de M , et les α_k les **zones de transition**.

Ce sont des généralisations naturelles des revêtements dont le groupe d'automorphisme Γ est de type fini, qui correspondent à des variétés G -périodiques où G est un graphe de Cayley de Γ .

Soit M une variété G -périodique de cellule C . Nous dirons qu'une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ continue *se recolle bien dans M* si la fonction $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'intérieur de chaque cellule C_i par

$$\tilde{f}|_{C_i} = f \circ J_i$$

se prolonge en une application continue sur M .

Notons $\mathfrak{h}(G)$ la constante de Cheeger du graphe G , et $\mu_0(G)$ le bas du spectre du Laplacien combinatoire sur G . Ces notions sont présentées à la Section 2.1.3. Les deux résultats principaux de ce chapitre sont alors :

Théorème 4. *Soit G un graphe à valence constante et M une variété G -périodique dont la cellule C admet une première fonction propre qui se recolle bien dans M . Si G est moyennable, on a*

$$\lambda_0(M) = \lambda_0(C).$$

Si G n'est pas moyennable, si le rayon d'injectivité normale de ∂C est strictement minoré par R_{\min} , et si chaque cellule n'admet qu'un nombre fini k de voisins, alors il existe une constante $A' > 0$ qui ne dépend que de k , de R_{\min} et de $\lambda_0(C)$ telle que

$$\lambda_0(M) \leq \lambda_0(C) + A' \mathfrak{h}(G).$$

Théorème 5. *Soit C une cellule de valence v qui admet une première fonction propre ϕ_0 et un trou spectral $\eta = \lambda_1(C) - \lambda_0(C) > 0$. Alors il existe une constante $A > 0$, ne dépendant que de λ_0 et des zones de transition sur C , telle que pour tout graphe G de valence v et toute variété G -périodique M de cellule C où ϕ_0 se recolle bien,*

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(C) + A\eta\mu_0(G).$$

Dans l'article de R. Brooks [Bro85], il est démontré que pour tout revêtement riemannien $p : M \rightarrow N$, sous certaines hypothèses (qui impliquent entre autres un trou spectral positif), $\lambda_0(M) \geq \lambda_0(N)$ avec égalité si et seulement si G est moyennable. Les théorèmes précédents impliquent le résultat :

Corollaire 6. *Soit N une variété dont le trou spectral est positif. Notons ϕ_0 sa première fonction propre. Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien dont le groupe d'automorphisme Γ est de type fini. S'il existe un domaine fondamental $C \subset M$ pour l'action de Γ à bord lisse par morceaux tel que ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann sur ∂C , alors $\lambda_0(M) \geq \lambda_0(N)$ avec égalité si et seulement si G est moyennable.*

Un tel domaine existe dès que le gradient de la première fonction propre est simplement stratifié d'après la Section 1.2. Nous verrons au Chapitre 3 que pour les variétés à rayon d'injectivité strictement positif, dès que la courbure de Ricci est uniformément minorés, que les k premières dérivées de la courbure de Ricci sont bornées et la métrique générique, cette propriété est vérifiée. Nous détaillons à la Section 2.4.1 en quoi notre résultat généralise ceux de Brooks.

Nous présentons aussi à la Section 2.4.2 une application de ce résultat pour encadrer le bas du spectre d'une variété découpée en morceaux de volume fini.

Chapitre 3 : Domaines à bord et revêtements

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de la première fonction propre, de façon à pouvoir appliquer le théorème précédent au cas des revêtements.

A la Section 3.1, nous démontrons une caractérisation du bas du spectre du Laplacien avec condition de Neumann par le *spectre positif* :

Théorème 7. *Soit M une variété complète non compacte, dont le bord ∂M est compact et \mathcal{C}^1 par morceaux. Pour tout réel λ , il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ λ -harmonique positive sur M avec condition de Neumann sur ∂M si et seulement si $\lambda \leq \lambda_0^N(M)$.*

Dans ce théorème, $\lambda_0^N(M)$ désigne le bas du spectre du Laplacien sur M avec condition de Neumann au bord. Ce théorème est dû à D. Sullivan lorsque M est sans bord, dans l'article [Sul87]. Nous en donnons ici une démonstration détaillée, en reprenant les idées de Sullivan basées sur l'utilisation du *mouvement brownien*, que nous adaptons au cas à bord avec condition de Neumann.

Puis, dans la Section 3.2, nous démontrons que lorsque M a un trou spectral strictement positif, pour une métrique générique sa première fonction propre est de Morse. Plus précisément, soit $\mathcal{G}^k(M)$ l'ensemble des métriques de classe \mathcal{C}^k sur M , nous définirons la topologie \mathcal{C}^k -forte à la Section 3.2 pour laquelle nous montrons :

Théorème 8. *L'ensemble des métriques pour lesquelles le trou spectral est strictement positif,*

$$\mathcal{TS}(M) = \left\{ g \in \mathcal{G}^k(M); \lambda_0(g_0) < \lambda_0^{ess}(g_0) \right\},$$

est un ouvert pour la topologie \mathcal{C}^k -forte.

Nous définirons ensuite la notion de *propriété générique* et d'*ensemble résiduel* pour cette topologie, pour montrer le résultat suivant :

Théorème 9. *Soit (M, g_0) une variété riemannienne de classe \mathcal{C}^k dont le rayon d'injectivité, le bas du spectre et le trou spectral sont strictement positifs, et ϕ_0 la première fonction propre de son Laplacien. On suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p = 0, \dots, k-2$, et pour tout $x \in M$,*

$$|\nabla_{g_0}^p \text{Rm}_{g_0}|(x) < C.$$

Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{TS}(M)$ un voisinage de g_0 pour la topologie \mathcal{C}^k -forte sur lequel le rayon d'injectivité, le trou spectral et le bas du spectre sont strictement positifs, et les dérivées de la courbure vérifient l'inégalité précédente. Alors il existe un ensemble $\mathcal{U}_M \subset \mathcal{U}$ résiduel pour la topologie \mathcal{C}^k -forte tel que pour tout $g \in \mathcal{U}_M$, la première fonction propre ϕ_0^g du Laplacien associée à g est de Morse sur M .

Un résultat analogue est démontré dans [Uhl76] pour les fonctions propres non constantes du Laplacien sur une variété compacte. Le passage au cas non

compact nécessite de travailler sur une topologie adaptée, la topologie C^k -forte. Nos hypothèses sur la courbure nous permettent alors d'adapter les idées de K. Uhlenbeck au cas de la première fonction propre d'une variété non compacte avec trou spectral.

Appliqués à l'étude des revêtements riemanniens, ces deux résultats nous permettent d'obtenir une caractérisation nouvelle du bas du spectre adaptée aux domaines fondamentaux :

Théorème 10. *Soit N une variété riemannienne de volume infini dont le rayon d'injectivité, le bas du spectre et le trou spectral sont strictement positifs, et dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k du tenseur de courbure, pour k assez grand, sont uniformément bornées. Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien de groupe d'automorphisme G . On a*

$$\lambda_0(N) = \sup_D \{ \lambda_0(D), D \subset M \text{ domaine fondamental pour } G \}.$$

Lorsque la métrique est générique sur N , ce supremum est atteint par un domaine sur lequel ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann.

Chapitre 4 : Variétés hyperboliques et bas du spectre

Ce chapitre présente la question qui a motivé à l'origine notre travail, et les résultats de géométrie hyperbolique de dimension 3 nécessaires à l'aborder. Aucun des résultats présentés dans ce chapitre n'est nouveau ; leur présentation se veut synthétique et orientée vers le problème qui nous intéresse.

Pour une variété hyperbolique $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, nous définissons à la Section 4.1.1 l'ensemble limite du groupe Γ , sa dimension de Hausdorff δ_Γ , le coeur convexe de la variété et la notion de variété géométriquement finie. Le théorème suivant relie ces notions au bas du spectre du Laplacien :

Théorème 11 (Sullivan, Bishop-Jones). *Soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété hyperbolique de volume infini, géométriquement finie, qui ne soit ni un tore plein, ni un bretzel, ni fuchsienne. Alors*

$$1 < \delta_\Gamma < 2 \text{ et } \lambda_0(M) = \delta_\Gamma(2 - \delta_\Gamma).$$

Il s'agit d'un résultat de D. Sullivan, affiné par des travaux de J. Bishop et P. Jones, que nous présentons à la Section 4.1.3, qui sont basés sur l'utilisation de familles de mesures portées par l'ensemble limite, les mesures de Patterson-Sullivan.

A la Section 4.2.1, nous présentons l'espace des déformations d'une variété hyperbolique :

Définition 3. Soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété géométriquement finie. Nous appellerons **espace de déformation** de Γ , que nous notons $\mathcal{D}_F(\Gamma)$, l'ensemble des représentations de Γ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ (à conjugaison près) fidèles discrètes, dont l'image est géométriquement finie, qui préservent le type des éléments (ie $\rho(\gamma)$ est parabolique si et seulement si γ l'est), et qui sont reliées à la représentation triviale par un chemin continu de représentations.

Nous verrons que cet espace de déformation est muni naturellement d'une structure de variété analytique, et que pour tout $\rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma)$, les variétés $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ et $M_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\Gamma)$ sont homéomorphes et quasi-isométriques.

Le bord du coeur convexe est, en général, une variété plissée (voir Définition 4.1.8). Lorsque la variété $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ est *acylindrique*, ce que nous définirons à la Section 4.2.2, il existe une unique déformation $\rho_0 \in \mathcal{D}_F(\Gamma)$ telle que le bord du coeur convexe de $M_{\rho_0} = \mathbb{H}^3/\rho_0(\Gamma)$ soit totalement géodésique. La question qui nous intéresse est la suivante :

Question 2. *Le maximum du bas du spectre des $(M_\rho)_{\rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma)}$ est-il atteint par la variété M_{ρ_0} dont le bord du coeur convexe est totalement géodésique ? Si oui, est-ce l'unique maximum ?*

Cette question a été posée par R. Canary, dans l'article [CMT99]. Il s'agit là de nouveau d'un problème de type Lichnerowicz-Obata, où l'on espère que le maximum du bas du spectre est atteint par une variété particulièrement symétrique. Cette question s'énonce de façon équivalente pour la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite :

Question 3. *Le minimum de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite des groupes $(\rho(\Gamma))_{\rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma)}$ est-il atteint par $\rho_0(\Gamma)$, où la variété M_{ρ_0} est celle dont le bord du coeur convexe est totalement géodésique ? Si oui, est-ce l'unique minimum ?*

Nous verrons à la Section 4.2.2 qu'il s'agit d'une généralisation naturelle d'un résultat de R. Bowen de 1979. Durant cette thèse, nous avons essayé plusieurs approches de ce problème. Aucune n'a permis de répondre à la question précédente, principalement par manque de contrôle sur les quasi-isométries qui permettent de passer d'une variété à l'autre dans l'espace de déformation. Nous présentons maintenant l'une d'entre elles, qui a donné un résultat intermédiaire intéressant.

Chapitre 5 : Entropie des variétés convexes cocompactes

Ce chapitre étudie la théorie ergodique du flot géodésique sur des variétés convexes cocompactes. Par un théorème dû à Sullivan pour les variétés hyperboliques, généralisé par C.B. Yue pour les variétés à courbure négative pincée, l'entropie du flot géodésique sur les variétés convexes cocompactes

est égale à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite. Nous avons vu que pour les variétés hyperboliques géométriquement finies, cette dimension de Hausdorff était très simplement reliée au bas du spectre. Il est donc naturel pour notre problème de chercher à trouver des points critiques de l'entropie du flot géodésique.

A la Section 5.1, nous présentons dans le contexte des variétés à courbure négative pincée les principales notions de théorie ergodique que nous utiliserons, notamment différentes caractérisations de cette entropie. La Section 5.2.1 démontre le principal résultat de ce chapitre : une formule de variation de l'entropie, donnée par le théorème suivant :

Théorème 12. *Soit (M, g) une variété à courbure négative pincée convexe cocompacte, et $(g_\lambda)_{\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[}$ une famille de métriques de classe \mathcal{C}^1 sur M avec $g_0 = g$. Notons Φ^λ le flot géodésique associé à la métrique g_λ , et posons $h_\lambda = h_T(\Phi^\lambda)$ son entropie topologique. Alors la fonction $\lambda \mapsto h_\lambda$ est dérivable en 0, et sa dérivée vaut*

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} h_\lambda = -h_0 \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \|v\|_\lambda d\mu_{BM}^0(v),$$

où $S^0 M$ est le fibré unitaire tangent pour la métrique g_0 , $\|\cdot\|_\lambda$ est la norme sur TM induite par la métrique g_λ , et $\mu_{BM}^0(v)$ est la mesure de Bowen-Margulis associée au flot géodésique Φ^0 .

Ce théorème est une généralisation d'un résultat démontré *pour les variétés compactes* par A. Katok, H. Knieper et H. Weiss dans [KKW91]. Nous adaptons leur démonstrations au cas convexe cocompact en utilisant quelques arguments plus anciens de Katok.

A la Section 5.2.2, nous appliquons ce résultat au cas des déformations de groupes kleinien, ce qui donne immédiatement une formule de variation de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite qui n'était pas connue. A l'aide du théorème 5.2.1, nous obtenons également une formule de variation du bas du spectre :

Corollaire 13 (Variation du bas du spectre). *Soit (ρ_λ) une famille de déformation de Γ telle que les variétés $M_\lambda = \mathbb{H}^3/\rho_\lambda(\Gamma)$ soit quasi-isométriques par une famille différentiable (ψ_λ) de difféomorphismes. La fonction $\lambda \mapsto \lambda_0(M_\lambda)$ est différentiable en 0, et sa dérivée vaut*

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \lambda_0(M_\lambda) = -2\delta_0(1 - \delta_0) \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \|d\psi_\lambda(v)\| d\mu_{BM}^0(v)$$

où $\|d\psi_\lambda(v)\|$ désigne la norme du vecteur $d\psi_\lambda(v)$ pour la métrique hyperbolique de la variété M_λ , et μ_{BM}^0 est la mesure de Bowen-Margulis sur M_0 .

Nous préciserons dans cette section ce que nous entendons par une *famille différentiable de difféomorphismes*. Cette formule est à mettre en relation avec d'autres formules de variation pour le bas du spectre, dues entre autres à M. Berger, dont nous parlerons à la fin de ce chapitre.

Perspectives et conclusion

Notre dernier chapitre présente différents problèmes qui se sont présentés lors de nos travaux et encore largement ouverts. Certains sont issus de l'étude des variétés G -périodiques, d'autres de l'étude approfondie de la première fonction propre associée au bas du spectre (quand elle existe). Enfin, plusieurs questions sont issues de la géométrie hyperbolique en dimension 3, dont bien sûr la question 2 toujours ouverte.

Ce travail de thèse a été marqué par la grande diversité des Mathématiques que j'ai pu aborder. Un grand merci à Gilles et Gérard pour m'avoir dirigé vers un sujet aussi riche. Ils m'ont également laissé beaucoup de libertés dans les pistes que j'explorais, ce qui m'a encouragé à étudier différents points de vue et plusieurs questions en parallèle. Bien que je n'aie pas répondu à la question initialement posée, ce travail me semble avoir porté quelques fruits intéressants, et les directions pour continuer ces études ne manquent pas. Je suis heureux de partir l'an prochain en post-doctorat au Hausdorff Centrum à Bonn (Allemagne), pour pouvoir y poursuivre ces recherches, et je l'espère en commencer d'autres en lien avec les chercheurs qui seront là bas.

Chapitre 1

Préliminaires de géométrie riemannienne

En mathématiques, les noms sont arbitraires. Libre à chacun d'appeler un opérateur auto-adjoint un "éléphant" et une décomposition spectrale une "trompe". On peut alors démontrer un théorème suivant lequel "tout éléphant a une trompe". Mais on n'a pas le droit de laisser croire que ce résultat a quelque chose à voir avec de gros animaux gris.

G. Sussmann

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension finie n . Tout au long de ce mémoire, nous supposerons que les variétés sont de dimension au moins 2, dénombrables à l'infini, munies d'une structure différentiable de classe C^∞ fixée et (sauf mention explicite) qu'elles sont **connexes** et **complètes**. Les propriétés différentielles des fonctions et tenseurs sur M (comme la métrique, par exemple) se rapporteront à cette structure. Lorsque nous considérerons un revêtement $p : M \rightarrow N$, nous supposerons toujours que la structure différentiable de M est le relevé de celle de N . Une variété complète à bord sera toujours supposée être d'intérieur non-vide, et égale à l'adhérence de son intérieur. Nous supposons que notre lecteur connaît des bases de géométrie riemannienne, en particuliers les notions d'espaces tangents, de géodésiques, de complétude et les différents tenseurs de courbure. Pour une présentation de ces notions, on pourra se référer aux trois premiers chapitres de [GHL04].

Nous noterons systématiquement ∇_g la connexion de Levi-Civita associée à la métrique, Ric_g le tenseur de courbure de Ricci, et Sec_g la courbure sectionnelle. L'indice g disparaîtra souvent lorsqu'il n'y aura pas de risque d'ambiguïté. Nous nous intéresserons principalement à des variétés non compactes. Nous aurons alors besoin de contrôler leur courbure à l'infini, à l'aide de l'une des notions suivantes.

Définition 1.0.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et $\kappa > 0$, on dit que M a une courbure minorée par $-\kappa$ si et seulement si sa courbure de Ricci vérifie en tout point*

$$-\kappa(n-1) \leq \text{Ric}_g.$$

*On dira que M est à **courbure minorée** s'il existe $\kappa > 0$ tels que la courbure de M soit minorée par $-\kappa$. Soit $\kappa_1, \kappa_2 > 0$, on dit que M a une courbure pincée entre $-\kappa_1$ et $-\kappa_2$ si et seulement si sa courbure sectionnelle vérifie en tout point*

$$-\kappa_1 \leq \text{Sec}_g \leq -\kappa_2.$$

*On dira que M est à **courbure négative pincée** s'il existe $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ tels que la courbure de M soit pincée entre $-\kappa_1$ et $-\kappa_2$.*

Nous laisserons le lecteur vérifier à partir des définitions qu'une variété sectionnelle à courbure pincée est également à courbure minorée.

1.1 Éléments de Théorie spectrale

Cette thèse est consacrée à l'étude de certains liens entre le bas du spectre du Laplacien sur des variétés riemanniennes et certaines de leur propriétés géométriques. Nous commençons donc par présenter, dans ce paragraphe, les éléments de théorie spectrale nécessaires à la compréhension de nos travaux.

Le lecteur intéressé par un exposé plus complet pourra se référer par exemple à [Cha84].

Définition 1.1.1. Soit (M, g) une variété riemannienne. On appelle opérateur de **Laplace-Beltrami**, ou plus généralement **Laplacien**, l'opérateur Δ_g défini sur toute fonction \mathcal{C}^2 sur M (à valeur réelle) par

$$\Delta_g f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) := -\operatorname{Trace}((\nabla_g).(\nabla_g f)).$$

Au voisinage d'un point x_0 , la variété M est définie par des coordonnées $(x_i)_{i=1,\dots,n}$, dans lesquelles la métrique g est représentée par un champ de matrices $n \times n$ symétriques définies positives, notées $g_{ij}(x)$. On peut alors exprimer explicitement le Laplacien comme un opérateur différentiel d'ordre 2 par la formule suivante :

Proposition 1.1.1. Dans les coordonnées (x_i) , le Laplacien s'écrit

$$\Delta_g = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où $g^{ij}(x)$ désigne l'inverse de la matrice $g_{ij}(x)$, et \sqrt{g} la racine du déterminant de g_{ij} .

Ce calcul explicite est fait, par exemple, dans [Cha84], p5. Nous utiliserons rarement cette expression explicite pour travailler sur le bas du spectre : d'autres outils, comme le Principe du Min-Max que nous verrons ci-dessous, sont en général plus efficaces.

Remarque 1.1.1. Pour \mathbb{R}^3 muni de la métrique euclidienne standard, le calcul donne

$$\Delta_{eucl} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right).$$

Nous choisissons pour le Laplacien une convention de signe opposée à celle utilisée dans [Cha84] et dans de nombreuses publications anglo-saxonnes. Notre convention, utilisée par nombre de géomètres français (dans [GHL04], par exemple), a l'avantage que l'opérateur ainsi obtenu (avec des conditions de bords classiques que nous présenterons un peu plus loin) est positif, comme le montre la Formule de Green ci-dessous. Le lecteur est invité à se méfier fortement des signes toutes les fois qu'il se référera à un article traitant du Laplacien, quelle que soit la nationalité de son auteur !!

Proposition 1.1.2 (Formule de Green). Soient f, ϕ deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 à support compact dans M , alors

$$\int_M g(\nabla_g f, \nabla_g \phi) dV = \int_M f \Delta \phi dV - \int_{\partial M} f \frac{\partial \phi}{\partial \nu}.$$

Lorsque M a un bord non vide, nous avons noté pour tout point $x \in \partial M$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x) = g_x(\nabla \phi(x), \nu_x)$$

la *dérivée normale* de ϕ en x , où ν_x est la normale rentrante au bord au point x considéré. Nous dirons qu'une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^1 sur M vérifie les *conditions de Dirichlet* si elle est nulle sur ∂M , et les *conditions de Neumann* si son gradient vérifie en tout point de ∂M :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0.$$

Lorsque la normale n'est définie qu'en dehors d'un ensemble de mesure nulle E (par exemple en dehors des *coins* de ∂M , voir paragraphe 1.2), nous dirons encore qu'une fonction vérifie les conditions de Neumann si elle les vérifie en dehors de E . Nous nous placerons en général dans l'un de ces deux cas, ce qui évitera la présence de termes de bord.

L'analyse spectrale repose sur la théorie des opérateurs sur les espaces de Hilbert, dont nous ne détaillerons pas les bases ici (voir par exemple [RS80] pour une introduction complète à cette théorie). Le Laplacien est un opérateur non borné sur $L^2(M)$ (voir [RS80] section VIII), dont le domaine de définition maximal que nous noterons $\tilde{\mathcal{H}}^2(M)$ est l'ensemble des fonctions L^2 dont le Laplacien au sens des distributions est une fonction L^2 . Soit $\mathcal{H}^1(M)$ l'ensemble des fonctions $f \in L^2(M)$ telles que le gradient de f au sens des distributions est un champ de vecteurs de $L^2(M)$ que nous noterons encore ∇f . Muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(M)}^2 = \|f\|_{L^2(M)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(M)}^2,$$

c'est un espace de Hilbert appelé *espace de Sobolev* d'ordre 1, et l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans M est dense dans $\mathcal{H}^1(M)$ (voir [Heb96] p13). Afin d'éviter de surcharger nos formules, nous noterons désormais

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(M)}.$$

On montre alors que $\tilde{\mathcal{H}}^2(M) \subset \mathcal{H}^1(M)$; c'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni de la norme

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{H}}^2}^2 := \|f\|^2 + \|\nabla f\|^2 + \|\Delta f\|^2.$$

Définition 1.1.2. *Si M est sans bord, on appelle **spectre** du Laplacien l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta - \lambda$ n'est pas inversible de $\tilde{\mathcal{H}}^2$ dans L^2 . D'après la formule de Green, c'est un sous-ensemble de \mathbb{R}^+ . On appelle **bas du spectre** sa borne inférieure, notée $\lambda_0(M)$.*

Lorsque M a un bord, pour toute fonction $f \in L^2$, il existe a priori plusieurs fonctions $u \in \tilde{\mathcal{H}}^2$ telles que $\Delta u = f$. On réduit alors le domaine de l'opérateur afin de lever cette ambiguïté.

Définition 1.1.3. *Si ∂M est non vide, on appelle domaine du Laplacien avec condition de Neumann $\tilde{\mathcal{H}}_{Neu}^2$ l'ensemble des fonctions de $\tilde{\mathcal{H}}^2$ dont la dérivée normale est bien définie et nulle presque partout sur ∂M . On appelle domaine du Laplacien avec condition de Dirichlet $\tilde{\mathcal{H}}_{Dir}^2$ l'ensemble des fonctions de $\tilde{\mathcal{H}}^2$ nulles presque partout sur ∂M . On appelle alors **spectre** du Laplacien avec condition de Neumann (resp. de Dirichlet) l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta - \lambda$ n'est pas inversible de $\tilde{\mathcal{H}}_{Neu}^2$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}_{Dir}^2$) dans L^2 . D'après la formule de Green, c'est un sous-ensemble de \mathbb{R}_+ . On appelle bas du spectre avec condition de Neumann (resp. de Dirichlet) sa borne inférieure, notée encore $\lambda_0(M)$ (resp. $\lambda_0^D(M)$).*

Au chapitre 3, nous aurons à considérer des problèmes *mixtes* : le bord de M sera non vide, partitionné en deux parties $\partial_1 M$ et $\partial_2 M$, et nous étudierons le spectre avec conditions de Neumann sur $\partial_1 M$ et de Dirichlet sur $\partial_2 M$. Cela correspond donc à un choix différent de domaine pour notre opérateur.

Remarque 1.1.2. On définit l'espace $\mathcal{H}_0^1(M)$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}_0^2$) comme le complété dans $\mathcal{H}^1(M)$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}^2$) de l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans $\overset{\circ}{M}$. On a alors

$$\tilde{\mathcal{H}}_{Dir}^2 = \tilde{\mathcal{H}}_0^2.$$

D'après la formule de Green, pour les différentes conditions au bord que nous avons étudiées, le Laplacien est toujours l'opérateur associé à la forme quadratique $\|\nabla f\|^2$ sur son domaine. Un résultat classique d'analyse hilbertienne nous donne la caractérisation suivante du bas du spectre :

Proposition 1.1.3 (Principe du Min-Max). *Le bas du spectre (avec condition de Neumann si M a un bord) est donné par*

$$\lambda_0(M) = \inf_f \left\{ \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2} \right\}$$

où f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}^1(M)$.

De même, le bas du spectre avec condition de Dirichlet sur ∂M est donné par

$$\lambda_0(M) = \inf_f \left\{ \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2} \right\}$$

où f parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}_0^1(M)$.

Pour toute fonction f de \mathcal{H}^1 (par exemple continue et \mathcal{C}^1 par morceaux), on appelle

$$\frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}$$

son **quotient de Rayleigh**. Nous dirons qu'une fonction f est λ -**harmonique** si $\Delta f = \lambda f$, et **fonction propre** du Laplacien (avec condition au bord) associée à la valeur propre λ si elle est dans $\tilde{\mathcal{H}}^2$ (resp. $\tilde{\mathcal{H}}_{Neu}^2$ ou $\tilde{\mathcal{H}}_{Dir}^2$) et λ -harmonique. Une valeur propre est un point du spectre, donc nécessairement positive ou nulle. Si M est *compacte*, on montre que le spectre est l'ensemble (discret) de la suite de ses valeurs propres, qui sont alors de multiplicité finie. Pour M de *volume fini*, $\lambda_0 = 0$ est valeur propre associée aux fonctions constantes. Lorsque M n'est pas de volume fini, l'existence de fonctions propres (et donc de valeurs propres) n'est pas assurée. Le résultat suivant, que nous utiliserons souvent par la suite, regroupe plusieurs théorèmes classiques :

Théorème 1.1.4. *S'il existe une fonction $\phi_0 \in \mathcal{H}^1(M)$ telle que son quotient de Rayleigh soit égal à $\lambda_0(M)$, alors ϕ_0 est fonction propre du Laplacien, avec condition de Neumann si $\partial M \neq \emptyset$. Elle est de signe strictement constant sur M , de classe C^∞ sur $\overset{\circ}{M}$. Toute fonction propre du Laplacien associée à la valeur λ_0 est alors proportionnelle à ϕ_0 .*

Lorsque nous parlerons de *la première fonction propre*, nous sous-entendrons donc par là que nous parlons de l'unique fonction propre positive normalisée associée au bas du spectre (quand elle existe). L'unicité découle du fait que le signe d'une fonction propre associée au bas du spectre est constant. Ceci s'obtient en montrant que le quotient de Rayleigh d'une fonction est plus grand que celui de sa valeur absolue, et par le Principe du Maximum une fonction propre positive ne peut s'annuler en un point intérieur de la variété. Si M a un bord, une fonction qui réalise le minimum des quotients de Rayleigh vérifie automatiquement les conditions de Neumann (et est donc fonction propre pour le Laplacien avec condition de Neumann), et sa stricte positivité sur ∂M découle alors du Principe du Maximum Fort (voir [PW84], Chapitre 2).

Définition 1.1.4. *Soit M une variété riemannienne, on dira que M a un trou spectral strictement positif si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *le bas du spectre λ_0 de son Laplacien est associé à une fonction propre $\phi_0 \in \mathcal{H}^1(M)$;
on note alors*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\|\nabla h\|^2}{\|h\|^2}; \int_M \phi_0 h = 0 \right\}$$

où h parcourt l'ensemble des fonctions $\mathcal{H}^1(M)$ orthogonales à ϕ_0 ;

2. *on a $\eta = \lambda_1 - \lambda_0 > 0$.*

*On appelle η le **trou spectral** de M .*

Lorsque M est compacte (avec ou sans bord) le trou spectral de M est donc strictement positif. On peut également exprimer cette définition à l'aide du *spectre essentiel* :

Définition 1.1.5. Soit (M, g) une variété riemannienne et Δ son Laplacien. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est dans le **spectre essentiel** de Δ s'il existe une suite de fonctions $\psi_n \in \widetilde{\mathcal{H}}^2(M)$ toutes orthonormales pour le produit scalaire de $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta \psi_n - \lambda \psi_n\|_{L^2(M)} = 0.$$

On note $\lambda_0^{ess}(g)$ l'infimum du spectre essentiel de Δ .

Proposition 1.1.5. Les éléments du spectre qui ne sont pas dans le spectre essentiel sont des valeurs propres de multiplicité finie. En particulier, le trou spectral est strictement positif si et seulement si

$$\lambda_0(g) < \lambda_0^{ess}(g).$$

La première affirmation est un résultat classique sur le spectre essentiel (voir [Don81], §2). La seconde découle du fait que le bas du spectre ne peut être une valeur propre que de multiplicité 1 d'après le Théorème 1.1.4.

Par la suite, nous étudierons majoritairement des variétés non compactes, dont le trou spectral sera souvent supposé strictement positif. Nous verrons que c'est alors une hypothèse cruciale de nos démonstrations. Avec notre définition, l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n a un trou spectral nul : le bas du spectre est aussi son bas du spectre essentiel, égal à $\frac{(n-1)^2}{4}$. Il est démontré dans [LP82] qu'une variété hyperbolique de dimension n géométriquement finie non compacte a un trou spectral strictement positif si et seulement si $\lambda_0 < \frac{(n-1)^2}{4}$. Nous verrons à la Section 4.2.2 que les variétés hyperboliques de dimension 3 qui ont motivé notre étude vérifient la condition $\lambda_0 < 1$.

Nous aurons également besoin de découper les variétés étudiées en morceaux disjoints. Le lemme élémentaire suivant nous sera alors utile :

Lemme 1.1.6. Soit

$$M = \bigcup_i M_i$$

une partition de la variété M en morceaux d'intérieur non vide dont les bords sont \mathcal{C}^1 par morceaux. On a

$$\lambda_0(M) \geq \inf_i \{\lambda_0(M_i)\}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}^1(M)$ à support compact, on a

$$\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} = \frac{\sum_i \int_{M_i} |\nabla f|^2}{\sum_i \int_{M_i} f^2} \geq \inf_i \left\{ \frac{\int_{M_i} |\nabla f|^2}{\int_{M_i} f^2} \right\} \geq \inf_i \{\lambda_0(M_i)\}.$$

Ce résultat étant valable pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^1(M)$ à support compact, on a bien

$$\lambda_0(M) \geq \inf_i \{\lambda_0(M_i)\}.$$

□

Certaines de nos variétés auront des propriétés de symétrie, que nous utiliserons pour nos problèmes spectraux à l'aide du résultat suivant :

Proposition 1.1.7. *Soit M une variété riemannienne (éventuellement à bord) invariante par un groupe d'isométries G . Si le bas du spectre de M est atteint par une fonction $\phi_0 \in L^2(M)$, alors ϕ_0 est invariante par G .*

Démonstration. D'après le Théorème 1.1.4, ϕ_0 est l'unique fonction propre associée à la valeur propre λ_0 . Soit $g \in G$, posons

$$\phi_g = \phi_0 \circ g.$$

Comme le Laplacien commute aux isométries de M (les dérivées covariantes commutent avec les isométries de g), on a encore

$$\Delta \phi_g = \lambda_0 \phi_g.$$

Il existe donc une constante k_g telle que $\phi_g = k_g \phi_0$. De plus, la norme L^2 de ϕ_g et de ϕ_0 sont évidemment égales : comme ϕ_0 est de signe constant, on a donc $\phi_0 \circ g = \phi_0$ pour tout élément $g \in G$. Ce raisonnement est valable pour le bas du spectre avec condition de Dirichlet au bord, comme pour le bas du spectre avec condition de Neumann (ou toute combinaison des deux). □

Corollaire 1.1.8. *Soit M une variété riemannienne non compacte (éventuellement à bord avec condition de Neumann) invariante par un groupe fini d'isométries G , alors*

$$\lambda_0(M) = \inf_{f_G} \left\{ \frac{\|\nabla f_G\|^2}{\|f_G\|^2} \right\},$$

où f_G parcourt l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans M invariantes par G .

Démonstration. Soit $(U_i)_i$ une suite croissante d'ouverts relatifs de M , à fermetures compactes, tels que

$$M = \bigcup_i U_i.$$

Comme G est fini, il existe une suite d'ouverts à fermetures compactes $(V_i)_i$ invariants par G tels que pour tout i ,

$$U_i \subset V_i.$$

En particulier, M est l'union des $\{V_i\}$. Comme l'ensemble des fonctions à support compact dans M est dense dans $\mathcal{H}^1(M)$, on a

$$\lambda_0(M) = \inf_i \inf_{f \in \mathcal{C}_0^\infty(V_i)} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}.$$

Pour tout i , comme V_i est compact, le bas du spectre du Laplacien sur V_i avec condition de Neumann sur $\partial M \cap \partial V_i$ et condition de Dirichlet sur $\partial V_i \setminus \partial M$, qui s'écrit

$$\lambda_0^{N,D}(V_i) = \inf_{f \in \mathcal{C}_0^\infty(V_i)} \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2},$$

est atteint par une fonction propre ϕ_0^i . D'après la proposition précédente, ϕ_0^i invariante par G , ce qui conclut notre démonstration. \square

1.2 Variétés à coins et revêtements

Soit M une variété de dimension n à bord, nous dirons que ∂M est \mathcal{C}^1 par morceaux s'il existe un atlas \mathcal{C}^1 de M dans \mathbb{R}^n tel que l'image de tout ouvert de M est un ouvert du cadran

$$\{(x_1, \dots, x_n,); x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Nous appelons *coin de M d'ordre k* un point dont l'image dans \mathbb{R}^n par un tel atlas a k coordonnées nulles ; cette propriété ne dépend pas de la carte choisie. On dit aussi que M est une **variété à coins**. Nous dirons que ∂M est lisse par morceaux s'il est muni d'un atlas \mathcal{C}^∞ vérifiant les propriétés précédentes : il est alors homéomorphe à un polyèdre de dimension $n - 1$ localement fini. Les points singuliers de ∂M , c'est-à-dire les coins d'ordre supérieur à 1, forment un ensemble de mesure nulle dans ∂M . On montre alors que les formules d'intégrations de Stokes et Green, et toute la théorie spectrale vue à la section 1.1, restent valable dans le cas des variétés à coins. Pour une description plus détaillée des variétés à coins, le lecteur peut se reporter à [Mic80], Chapitre 2.

Aux Chapitres 2 et 3, nous étudierons (entre autres) le bas du spectre de revêtements riemanniens (voir [GHL04] p59). Nos démonstrations auront besoin d'un **domaine fondamental** bien choisi : nous présentons maintenant cette notion, et quelques exemples de constructions de tels domaines.

Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien, on dit que p est **galoisien** lorsque le groupe $\pi_1(M)$ s'injecte via p dans $\pi_1(N)$ en un sous-groupe distingué. Le groupe

$$\Gamma = \pi_1(N)/\pi_1(M)$$

agit alors naturellement sur M , et est appelé le groupe d'automorphisme de p .

Rappelons qu'un ensemble fermé $D \subset M$ est un **domaine fondamental** pour le revêtement p si $p(D) = N$, donc $\Gamma(D) = M$, et pour tout $g \in G \setminus \{id\}$, $p(\overset{\circ}{D}) \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$. On a alors la propriété suivante :

Proposition 1.2.1. *Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement galoisien dont le groupe d'automorphisme est de type fini. On suppose qu'il existe un domaine fondamental $D \subset M$ dont le bord est lisse par morceaux. Alors le groupe G est engendré par un nombre fini d'éléments $g \in G$ tels que $\overline{D} \cap g(\overline{D})$ est de codimension 1.*

Démonstration. Soit $p : M \rightarrow N$ un tel revêtement, et D un domaine fondamental à bord compact lisse par morceaux. On note $\gamma_1, \dots, \gamma_p, \dots$ la famille (éventuellement infinie) des éléments de G tels que $D \cap \gamma_i(D)$ soit de codimension 1. On dira que les $\gamma_i(D)$ sont les **voisins** de D . Soit $x \in N$ qui possède un relevé $x_0 \in \overset{\circ}{D}$. Soit $g \in G$, et $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe lisse reliant x_0 à $x_g = g(x_0)$. Soit $D_{\mathcal{C}} = D_1 \cup \dots \cup D_m$ une réunion finie de copies de D , connexe, formée de toutes les images de D qui contiennent des points de \mathcal{C} et de tous leurs voisins. On note $\Sigma_{\mathcal{C}}$ la réunion des images de ∂D dans $D_{\mathcal{C}}$. Quitte à perturber légèrement \mathcal{C} , on peut supposer que \mathcal{C} ne traverse $\Sigma_{\mathcal{C}}$ que dans des parties lisses de codimension 1. En effet, par définition d'une variété à bord lisse par morceaux, le complémentaire de ces parties lisses est de codimension au moins 2, donc les parties lisses de codimension 1 forment un ouvert relatif dense dans $\Sigma_{\mathcal{C}}$. Notons alors $D_0 = D, D_1 = g_1(D), \dots, D_q = g_q(D)$ les domaines que traverse effectivement \mathcal{C} . Par construction, D_1 et D_2 sont voisins, D_2 et D_3 également... et on a $g_q = g$. Pour tout $k = 0, \dots, q-1$, il existe donc $j_k \in [1, p]$ tel que

$$\gamma_{j_k} g_k = g_{k+1}.$$

On a donc finalement

$$g = g_q = \gamma_{j_{q-1}} \gamma_{j_{q-2}} \dots \gamma_{j_1} \gamma_{j_0}$$

pour tout $g \in G$. Les $(\gamma_i)_i$ ainsi obtenus pour une famille finie génératrice de G forment alors une famille finie génératrice de Γ . \square

Remarque 1.2.1. On peut exiger que ce système de générateur soit symétrique : si $\gamma \in S$, alors $\gamma^{-1} \in S$. En effet, soit $\gamma \in S$, notons H_{γ} l'hypersurface de codimension 1 qui sépare D et $\gamma(D)$, alors $\gamma^{-1}(H_{\gamma})$ est une hypersurface isométrique à H_{γ} , donc de codimension 1, et qui est commune à D et $\gamma^{-1}(D)$.

L'hypothèse qu'il existe un domaine fondamental pour l'action du groupe d'automorphisme à bord \mathcal{C}^1 par morceaux n'est pas restrictive : nous allons voir maintenant qu'elle est vérifiée pour toute variété \mathcal{C}^{∞} . Pour cela, nous allons utiliser un outil classique de topologie différentielle : les fonctions de Morse.

Définition 1.2.1. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , f est une **fonction de Morse** si et seulement si en tout point critique de f , le hessien d^2f est de rang maximal.

Rappelons qu'en un point $x \in M$, le hessien est une forme quadratique sur T_xM , qui ne dépend pas du choix de la carte dans laquelle il est calculé lorsque x est un point critique. On appelle alors **indice** de f au point x la dimension du sous-espace maximal sur lequel d^2f est défini négatif.

Théorème 1.2.2 (Lemme de Morse). Soit f une fonction de Morse et $x \in M$ un point critique de f d'indice r , il existe un voisinage V de x et une carte $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 dans laquelle f s'écrit

$$f \circ \Psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(\Psi^{-1}(0)) - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Le Lemme de Morse implique, par exemple, que les points critiques de f sont isolés. On trouvera une démonstration de ce résultat, ainsi qu'une présentation de l'utilisation classique des fonctions de Morse en topologie, dans le très classique [Mil63]. Lorsque M est munie d'une structure riemannienne, on peut s'intéresser au gradient des fonctions, et principalement à ses lignes de flot.

Soit f une fonction de Morse. Le gradient de f dépend de la métrique considérée. Soit g une métrique sur M , notons Φ_t^g le flot associé au gradient de f dans la métrique g . Pour tout $t \neq 0$, les points fixes de Φ_t^g sont les points critiques de f .

Définition 1.2.2. Soit x un point critique de f . On appelle **variété stable** de x la sous-variété (ouverte à bord) de M :

$$W_s^g(x) = \left\{ y \in M; \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t^g(y) = x \right\},$$

et **variété instable** de x la sous-variété

$$W_u^g(x) = \left\{ y \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t^g(y) = x \right\}.$$

Théorème 1.2.3 (Thom, 1947). Soit $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse de classe \mathcal{C}^2 . Pour tout point critique x de f d'indice k , $W_s^g(x)$ est une sous-variété de classe \mathcal{C}^1 homéomorphe à \mathbb{R}^{n-k} .

On trouvera une démonstration complète de ce théorème dans [AR67], p87. L'idée en est la suivante : à l'aide des coordonnées données par le Lemme de Morse, on montre que la variété stable d'un point critique x d'indice k est une sous-variété de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x . Puis, on la prolonge à l'aide du flot inverse de gradient jusqu'à couvrir toute la variété stable : comme le flot est de classe \mathcal{C}^1 , cela prouve que toute la variété stable est \mathcal{C}^1 . Lorsque

M est compacte sans bord, tout point de M appartient à la variété stable d'un unique point critique de f , et à la variété instable d'un unique autre. Les variétés stables des points critiques de f forment donc une partition de N , et leurs adhérences sont des sous-variétés à coins puisque leur bord est une réunion de variétés stables d'autres points critiques. Lorsque N est non compacte, une hypothèse supplémentaire est nécessaire pour obtenir une telle partition.

Nous utiliserons les fonctions de Morse par l'intermédiaire du résultat suivant :

Théorème 1.2.4. *Soit (N, g) une variété riemannienne de dimension n , et $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien de groupe d'automorphisme Γ . S'il existe une fonction de Morse $f : N \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, telle que pour tout $a > 0$,*

$$N_a = \{x \in N; f(x) \geq a\}$$

soit compact, alors il existe un domaine fondamental $C \subset M$ pour l'action de Γ à bord C^1 par morceaux tel que le gradient du relevé de f à M soit tangent à ∂C . De plus, si f admet un nombre fini de points critiques, pour tout $1 \leq k \leq n$, le bord de C a un nombre fini de composantes lisses de dimension k .

Le domaine fondamental ainsi construit est donc stable sous le flot de gradient de f . De façon équivalente, la fonction f vérifie les conditions de Neumann sur ∂C .

Démonstration. Comme N_a est compact pour tout $a > 0$, tout point de N appartient à la variété stable d'un point critique α de f (les lignes de gradient ne peuvent s'échapper à l'infini), et comme N est une union dénombrable de compacts, l'ensemble de ces points critique est dénombrable. On note encore f le relevé de f à M . Soit $\alpha_1 \in M$ un maximum local de f , on pose

$$C_1 = \overline{W_s^g(\alpha_1)},$$

d'après le Théorème de Thom c'est une variété à coin connexe de codimension 0. Soit $\alpha_2 \in M$ un autre maximum local de f tel que $p(\alpha_1) \neq p(\alpha_2)$ et $C_1 \cap \overline{W_s^g(\alpha_2)}$ est non vide de codimension 1. On pose

$$C_2 = \overline{W_s^g(\alpha_1)} \cup \overline{W_s^g(\alpha_2)},$$

c'est de nouveau une variété à coin connexe de dimension 0. Soit $\alpha_3 \in M$ un autre maximum local de f tel que $p(\alpha_1) \notin \{p(\alpha_1), p(\alpha_2)\}$ et $C_2 \cap \overline{W_s^g(\alpha_3)}$ est non vide de codimension 1. On pose

$$C_3 = C_2 \cup \overline{W_s^g(\alpha_3)},$$

et par récurrence, on construit ainsi une variété à coins d'intérieur connexe de codimension 0

$$C = \bigcup_{p \geq 1} C_p.$$

Comme chaque point de N appartient à une variété stable d'un point critique, on vérifie sans difficulté que le C ainsi obtenu est un domaine fondamental pour Γ . D'après le Théorème de Thom, ∂C est lisse par morceaux, et est constitué de variétés stables de points critiques de f : le gradient de f est donc tangent à ∂C . De plus, chaque face de codimension k correspond à un point critique d'indice k . Si f admet un nombre fini de points critiques, ∂C admet donc un nombre fini de faces. La Figure 1.1 illustre cette construction dans le cas où N est une surface de volume infini et $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse n'ayant qu'un unique maximum local dans N . \square

Une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent existe toujours, par un théorème classique de la Théorie de Morse :

Théorème 1.2.5. *Sur toute variété différentiable N il existe une fonction de Morse $f : N \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $a > 0$,*

$$N_a = \{x \in N; f(x) \geq a\}$$

soit compact.

Il s'agit du Corollaire 6.7 de [Mil63], dont la démonstration est détaillée tout au long du Chapitre 6 du livre de Milnor (pour revenir à la formulation exacte du résultat de Milnor, il faut changer f en $-f$). Le Théorème 1.2.4 associe donc à toute fonction de Morse un domaine fondamental qui lui est adapté. La propriété nécessaire pour reproduire cette démonstration est en fait bien plus faible que la propriété de Morse : il suffit qu'il existe une partition de la variété de départ en morceaux simplement connexes, stable par le flot de gradient.

Définition 1.2.3. *Soit (N, g) une variété riemannienne et $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Nous dirons que f a un **gradient simplement stratifié** si l'on peut écrire*

$$N = \coprod_i N_i,$$

où les N_i sont des sous-variétés disjointes, simplement connexes et stables par le flot de gradient de f associé à g , et où la partition $(N_i)_i$ est localement finie : tout compact rencontre un nombre fini des N_i .

Une partition de N localement finie en sous-variétés s'appelle une **stratification** (voir par exemple [GM88] p. 37), ce qui justifie notre terminologie. Les éléments N_i de la partition s'appellent des **strates**.

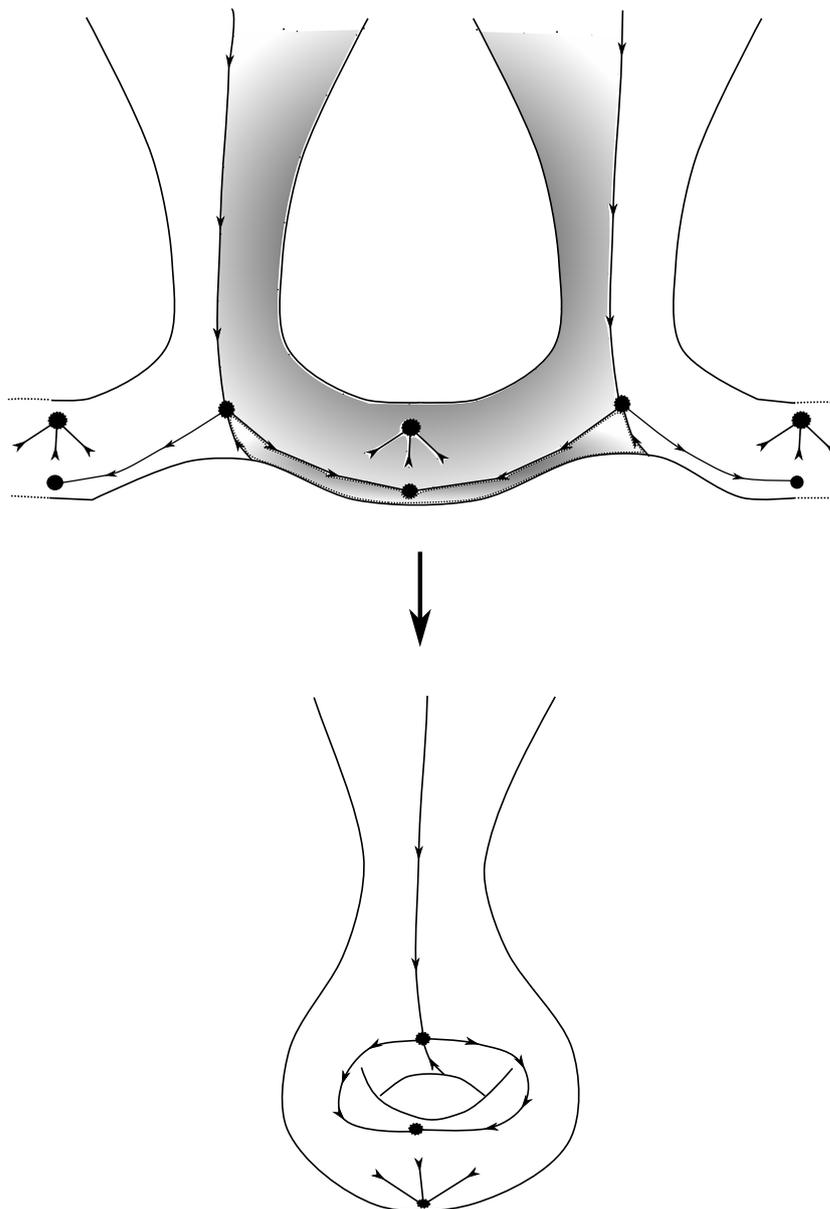


FIGURE 1.1 – *Domaine fondamental et variétés stables* : on a représenté les points critiques de la fonction et leurs variétés stables. En grisé, le domaine fondamental correspondant à la variété stable d'un maximum local

Théorème 1.2.6. *Soit (N, g) une variété riemannienne, et $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien de groupe d'automorphisme Γ . Soit $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le gradient est simplement stratifié, alors il existe un domaine fondamental $C \subset M$ pour l'action de Γ à bord \mathcal{C}^1 par morceaux tel que ∇f soit tangent à ∂C en dehors des points singuliers.*

Démonstration. Soit $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le gradient est simplement stratifié, et

$$N = \coprod_i N_i$$

une stratification associée. Soit $N_1 \subset N$ une strate de codimension 0, et $D_1 \subset M$ un relevé de $\overline{N_1}$ par p . Le bord de N_1 est constitué d'une union localement finie de strates de codimension au moins 1. Si $\overline{N_1} = N$, on pose $D = D_1$. Sinon, comme la stratification est localement finie, il existe $N_2 \neq N_1$ une autre strate de codimension 0 telle que $\overline{N_1} \cup \overline{N_2}$ soit d'intérieur connexe. Soit D_2 un relevé de $\overline{N_1} \cup \overline{N_2}$ qui contient D_1 . Si $\overline{N_1} \cup \overline{N_2} = N$, alors D_2 est un domaine fondamental pour l'action de Γ à bord \mathcal{C}^1 par morceaux tel que ∇f est tangent à ∂C en dehors des points singuliers. Sinon, en répétant ce procédé un nombre dénombrable de fois, on obtient un domaine fondamental vérifiant les propriétés voulues. \square

Le Théorème de Thom ci-dessus dit simplement qu'une fonction de Morse (dont les lignes de gradient ne partent pas à l'infini) a un gradient simplement stratifié. La première généralisation naturelle des fonctions de Morse est la suivante :

Définition 1.2.4. *Soit $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , on dit que f est une **fonction de Morse-Bott** si l'ensemble de ses points critiques est une réunion localement finie de sous-variétés disjointes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, et si en tout point critique $x \in \alpha_p$, le hessien de f est non-dégénéré dans les directions transverses à α_p .*

Théorème 1.2.7. *Soit (N, g) une variété riemannienne de dimension n , et $f : N \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de Morse-Bott, telle que pour tout $a > 0$,*

$$N_a = \{x \in N; f(x) \geq a\}$$

soit compact. Alors le gradient de f est simplement stratifié.

La démonstration du Théorème de Thom se reproduit à l'identique, où les α_i sont désormais des sous-variétés critiques : en un point x d'une sous-variété critique α , nous écrivons le lemme de Morse dans les directions transverses à α , et nous montrons que la sous-variété stable de α est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x . Nous répétons cela pour tout $x \in \alpha$, puis nous prolongeons la sous-variété obtenue à l'aide du flot de gradient. En particulier, pour tout revêtement $p : M \rightarrow N$ de groupe d'automorphisme Γ , il existe un domaine

fondamental pour l'action de Γ à bord \mathcal{C}^1 par morceaux tel que ∇f est tangent à ∂C en dehors des variétés singulières.

On peut construire des fonctions \mathcal{C}^∞ dont le gradient n'est pas simplement stratifié. En revanche, dans le cadre plus rigide des variétés analytiques, est-ce possible ? Nous disons qu'une variété riemannienne est analytique lorsqu'elle est munie d'un atlas dont les changements de cartes sont analytiques et lorsque sa métrique est une fonction analytique pour la structure définie par cet atlas.

Question 1. *Soit (N, g) une variété analytique compacte et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique. Son gradient est-il simplement stratifié ?*

Nous serons confrontés naturellement aux Chapitres 2 et 3 à la questions similaire suivante :

Question 2. *Soit (N, g) une variété riemannienne \mathcal{C}^∞ dont le trou spectral est strictement positif, et ϕ_0 sa première fonction propre. Le gradient de ϕ_0 est-il toujours simplement stratifié ?*

Nous montrerons au Chapitre 3 que génériquement, la première fonction propre d'une variété à trou spectral strictement positif est de Morse : son gradient est donc simplement stratifié. Je n'ai pas eu suffisamment de temps pour terminer l'étude de ces questions, qui sont intéressantes par elles-mêmes. Il est possible que le cas analytique soit connu, quant au cas des fonctions propres dans le cas des variétés non compactes, il est vraisemblablement à faire.

1.3 Hypersurfaces et théorèmes de comparaison

Pour établir les principaux résultats du chapitre 2, nous nous placerons au voisinage d'une hypersurface qui sépare deux ouverts. Dans ce paragraphe, nous décrivons les propriétés géométriques et spectrales de ces voisinages dont nous aurons besoin. Elles s'écrivent assez simplement dans le cas des variétés à courbure constante au voisinage d'hypersurfaces totalement géodésiques. Le cas général s'en déduit à l'aide de théorèmes de comparaison que nous présentons maintenant.

Soit M une variété et $H \subset M$ une hypersurface lisse (éventuellement à bord). On suppose que l'application *exponentielle normale*

$$\Phi : \begin{cases} H \times [-R, R] & \rightarrow M \\ (x, r) & \mapsto \exp_x(r\nu_x) \end{cases}$$

est un difféomorphisme, où on a de nouveau noté ν_x la normale à H en x . On dit alors que le *rayon d'injectivité normale* de H est supérieur à R , ou que H admet un *voisinage tubulaire* de largeur R dans M .

Proposition 1.3.1. *Soit (M, g) une variété à courbure sectionnelle constante $-\kappa$ et (H, g_H) une hypersurface totalement géodésique où g_H est la métrique induite sur H . Sur un voisinage tubulaire de H , on a*

$$\Phi^*g = (\operatorname{ch}\sqrt{\kappa}r)^2 g_H \oplus dr^2.$$

Démonstration. Voir [Col85] lorsque M est de dimension 2 et $\kappa = 1$; le cas général s'en déduit aisément. \square

Conformément à l'usage, nous dirons que Φ^*g est l'écriture de g en **coordonnées de Fermi** au voisinage de H . La forme volume de g s'écrit alors :

$$dV_{\Phi^*g}(x, r) = \theta_\kappa^{n-1}(r) dV_H(x) dr,$$

où nous avons noté

$$\theta_\kappa(r) = \operatorname{ch}(\sqrt{\kappa}r).$$

Soit (M, g) une variété riemannienne et H une hypersurface ayant un voisinage tubulaire H_R de largeur R dans M . En coordonnées de Fermi sur H_R , la forme volume de g s'écrit alors

$$dV_g(x, r) = \theta^{n-1}(x, r) dV_H(x) dr.$$

Proposition 1.3.2 (Comparaison des volume). *Si sur H_R , la courbure de M vérifie*

$$\operatorname{Ric}_g \geq -\kappa(n-1)g,$$

et si la courbure moyenne de H est bornée (en valeur absolue) par $b > 0$, pour tout $(x, r) \in H_R$, on a

$$\theta(x, r) \leq \theta_{\kappa, b}(r) := \operatorname{ch}(\sqrt{\kappa}r) + b \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\kappa}r)}{\sqrt{\kappa}}.$$

L'égalité est atteinte lorsque la courbure sectionnelle de M est constante, égale à $-\kappa$ sur H_R , et la courbure moyenne de H est constante égale à b .

Ce théorème est connu sous le nom d'Inégalité de Heintze-Kärcher.

Démonstration. Pour une fonction $f : H_R \rightarrow \mathbb{R}$, écrite en coordonnées de Fermi $f(x, r)$, nous noterons systématiquement

$$f'(x, r) = \frac{\partial f}{\partial r}(x, r).$$

En utilisant [GHL04] p215-216, on montre que

$$\left| \frac{\theta'}{\theta} \right| \leq \left| \frac{\theta'_{\kappa, b}}{\theta_{\kappa, b}} \right|.$$

Cela conclut la démonstration de notre proposition car $\theta(x, 0) = \theta_{\kappa, B}(0) = 1$. \square

Nous aurons besoin au Chapitre 2 d'une *minoration* de l'élément de volume θ . Il ne semble pas qu'une minoration explicite analogue à la proposition précédente existe dans un cas général (par exemple lorsque la courbure sectionnelle de M est majorée et la courbure moyenne de H minorée) : nous nous placerons alors au voisinage d'une hypersurface *compacte* pour trouver une telle minoration.

Proposition 1.3.3 (Laplacien d'une fonction radiale). *Soit (M, g) une variété riemannienne et H une hypersurface compacte ayant un voisinage tubulaire H_R de largeur R dans M . Soit $f = u \circ r : H_R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ne dépendant que de la distance r à H . On a pour tout $r > 0$,*

$$\Delta f = -u''(r) - (n-1) \frac{\theta'(x, r)}{\theta(x, r)} u'(r).$$

Démonstration. D'après [GHL04] p216, on a

$$\Delta r = -(n-1) \frac{\theta'}{\theta},$$

en notant $\theta' = \frac{\partial \theta}{\partial r}$. On a alors pour toute fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta(u \circ r) = -\operatorname{div}(u'(r) \nabla r) = -u''(r) + \Delta(r) u'(r).$$

□

Dans le cas où M est hyperbolique et H totalement géodésique, on retrouve l'expression connue du Laplacien pour une fonction radiale en coordonnées de Fermi :

$$\Delta f = -f''(r) - (n-1) \operatorname{th} r f'(r).$$

Nous utiliserons au Chapitre 2 le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.4. *Avec les notations de la proposition précédente, soit $\theta_{\inf} : H_R \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction ne dépendant que de r , valant 1 pour $r = 0$ et telle que*

$$r \mapsto \frac{\theta_{\inf}(r)}{\theta(x, r)}$$

soit décroissante pour tout $x \in H$. Pour toute fonction radiale u décroissante, pour tous $(x, r) \in H_R$, on a alors

$$\Delta f \geq -u''(r) - (n-1) \frac{\theta'_{\inf}}{\theta_{\inf}}(r) u'(r) =: \Delta_{\inf} f.$$

Démonstration. Pour tout $x \in H$, on a

$$\theta(x, 0) = \theta_{\inf}(0) = 1$$

et $\frac{\theta_{\inf}}{\theta(x, \cdot)}$ est décroissante. On a donc pour tout $(x, r) \in H_R$,

$$\frac{\theta'}{\theta} \geq \frac{\theta'_{\inf}}{\theta_{\inf}}.$$

La proposition précédente conclut notre preuve puisque $u'(r) < 0$ pour tout $r > 0$. \square

Remarque 1.3.1. Lorsque H est compacte, une telle fonction existe toujours. Il suffit de poser

$$\theta_{\inf}(r) = \exp \left(\int_0^r \inf_{x \in H} \frac{\theta'}{\theta}(x, s) ds \right).$$

On a alors pour tout $(x, r) \in H_R$,

$$\frac{\theta'_{\inf}}{\theta_{\inf}}(r) = (\log \theta_{\inf})'(r) = \inf_{y \in H} \frac{\theta'}{\theta}(y, r) \leq \frac{\theta'}{\theta}(x, r).$$

Lorsque θ est radial, par exemple lorsque la courbure sectionnelle de M et la courbure moyenne de H sont constantes, on a alors $\theta_{\inf} = \theta$.

Notons $V_H(r)$ l'aire de l'hypersurface parallèle à H à distance r :

$$V_H(r) = \int_H \theta^{n-1}(x, r) dV_H(x).$$

Nous aurons besoin par la suite de contrôler une autre quantité géométrique : les *variations radiales* de l'élément de volume.

Définition 1.3.1. Soit H une hypersurface totalement géodésique d'une variété M admettant un voisinage tubulaire T de largeur R . Soit

$$dV_T = \theta^{n-1}(x, r) dV_H(x) dr$$

son élément de volume. On appelle *variations radiales* de θ la fonction

$$\beta_H(x, r) = \frac{(\theta^{n-1})'(x, r)}{\theta^{n-1}(x, r)} - \frac{V'_H(r)}{V_H(r)} = \frac{(\theta^{n-1})'(x, r)}{\theta^{n-1}(x, r)} - \frac{\int_H (\theta^{n-1})'(x, r) dV_H(x)}{\int_H \theta^{n-1}(x, r) dV_H(x)}.$$

Lorsque θ ne dépend que de r , par exemple si M est à courbure sectionnelle constante et si la courbure moyenne de H est constante, on a alors $\beta_H \equiv 0$. En général, pour H compacte, il existe une constante $\mathcal{K} > 0$ telle que sur H_R ,

$$|\beta_H| \leq \mathcal{K}.$$

Chapitre 2

Graphes, moyennabilité et bas du spectre

*La réputation d'un mathématicien repose sur le nombre de faux calculs qu'il
a donnés.*
A. Besicovitch

Ce chapitre est consacré à l'étude du bas du spectre de variétés dont le groupe fondamental n'est pas de type fini, et qui généralisent les variétés périodiques. Nous les appelons des *variétés G -périodiques*, où G désigne le graphe auquel ressemble la variété *vue de très loin*. Nous les construisons précisément au premier paragraphe, à partir d'une cellule à bord, reproduite et recollée en suivant le graphe G . Notre objectif est de relier le bas du spectre de la cellule et la combinatoire du graphe avec le bas du spectre de la variété G -périodique ainsi obtenue. Une famille d'exemples particulièrement intéressants de variétés G -périodiques est donnée par les revêtements riemanniens. Nous montrons que notre théorie s'applique à une large classe de revêtements, pour lesquels notre résultat donne une généralisation de travaux de R. Brooks.

À la première section, nous construisons les variétés que nous étudierons, à partir d'une variété élémentaire à bord, la *cellule*, et d'un graphe à valence constante et nous présentons les notions combinatoires dont nous aurons besoin, ce qui nous permet d'énoncer nos résultats. Puis nous démontrons nos résultats principaux. Enfin, nous présentons son application dans au cas des revêtements riemanniens, ainsi qu'une généralisation de nos méthodes qui permet de calculer une valeur approchée du bas du spectre d'une variété.

2.1 Définitions, exemples et résultats

2.1.1 Variétés G -périodiques

Soit $G = (V, E)$ un **graphe**, où V désigne l'ensemble des sommets de G et $E \subset V \times V$ l'ensemble des arêtes. Pour $i, j \in V$, nous noterons en général $i \sim j$ au lieu de $(i, j) \in E$, et $i \in G$ au lieu de $i \in V$.

Définition 2.1.1. *Soit G un graphe à valence constante $v < \infty$. Nous dirons que M est une **variété G -périodique** s'il existe une sous-variété fermée $C \subset M$ d'intérieur non vide, à bord \mathcal{C}^1 par morceaux (voir Section 1.2), qui vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Il existe des sous-variétés $C_i \subset M$ d'intérieurs disjoints telles que*

$$M = \bigcup_{i \in G} C_i,$$

et pour tout $i \in G$, il existe une isométrie $J_i : C_i \rightarrow C$.

2. *Pour tous $i, j \in G, i \neq j$, si $i \sim j$ alors le bord commun $C_i \cap C_j$ contient une sous-variété de codimension 1.*
3. *Il existe $R > 0$ et une famille d'ouverts $\alpha_1, \dots, \alpha_v \subset \partial C$, pas forcément connexes, d'adhérences compacte dans ∂C , de classe \mathcal{C}^1 , possédant des*

voisinages tubulaires T_1, \dots, T_v de rayon R disjoints dans C , tels que si $i \sim j$, on ait les propriétés :

- (a) la composante de bord $J_i(C_i \cap C_j) \subset \partial C$ contient l'un des α_k ; de même $J_j(C_i \cap C_j)$ contient $\alpha_{k'}$;
- (b) l'application

$$J_i \circ J_j^{-1} : J_j(C_i \cap C_j) \rightarrow J_i(C_i \cap C_j)$$

induit une isométrie de $\alpha_{k'}$ sur α_k .

Nous appelons C la **cellule élémentaire** de M , G le **graphe modèle** de M , et les α_k les **zones de transition**.

Une cellule de valence v est donc la donnée d'une variété à bord lisse par morceaux, et de v zones de transitions. Notons que lorsque ∂C est compact, les deux premières hypothèses de la définition impliquent les suivantes. Lorsque ∂C est non compact, il est possible d'avoir un découpage d'une variété M en une famille de variétés à bord toutes isométriques entre elles, mais qu'il n'existe aucun graphe G localement fini pour lequel M soit G -périodique. L'expression «*Soit C une cellule*» signifie donc que sont fixés :

1. une variété C à bord lisse par morceaux ;
2. une valence $v > 0$ et des composantes de bords compactes disjointes $\alpha_1, \dots, \alpha_v \subset \partial C$ qui admettent des voisinages tubulaires $T_1, \dots, T_k \subset C$ de largeur $R > 0$ disjoints.

L'exemple le plus simple d'une telle variété est le pavage régulier du plan : dans ce cas, C est un carré, et $G = \mathbb{Z}^2$ (voir Figure 2.1).

Ces variétés sont donc une généralisation naturelle des *variétés périodiques* usuelles, modélées en général sur \mathbb{Z}^n . Le groupe fondamental d'une variété G -périodique n'est pas de type fini dès que le graphe G est infini et le groupe fondamental de la cellule relativement au bord $\pi_1(C)/\pi_1(\partial C)$ est non trivial. La cellule élémentaire d'une variété G -périodique n'est jamais unique ; nous verrons par la suite que la question clé pour obtenir des résultats spectraux est souvent de *choisir une cellule adaptée* au problème considéré.

On peut obtenir une première famille d'exemples très riche en recollant des surfaces hyperboliques le long de géodésiques :

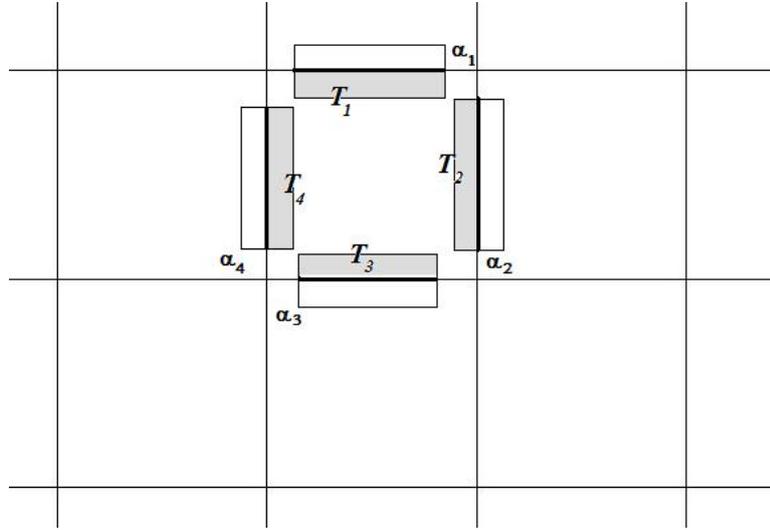


FIGURE 2.1 – Cellule et zones de transition pour le pavage régulier du plan

Exemple 2.1.1. Soit C une surface hyperbolique dont le bord est la réunion de v géodésiques fermées, toutes de même longueur. Pour tout graphe G de valence v , il existe une surface M modélisée sur G à partir de C , construite par recollement de copies de C le long de leurs bords. La métrique hyperbolique ainsi obtenue est lisse (voir [BP92], chapitre B). Les géodésiques de bord forment ici les zones de transition, et elles admettent un voisinage tubulaire dont une largeur minimale est donnée par le Lemme du Collier (voir par exemple [Col85]). On obtient en particuliers de nombreuses surfaces hyperboliques topologiquement infinies, qui généralisent les surfaces périodiques. La figure 2.2 présente deux exemples de cette sorte.

Etant donné une cellule C et un graphe G , il n'y a pas nécessairement unicité à isotopie près de la surface G -périodique que l'on peut construire de cette façon : des twists de Dehn le long des géodésiques recollées restent possibles.

Une autre grande famille à laquelle nos résultats est celle des *revêtements riemanniens galoisiens*. Soit $\pi : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien, où Γ est de type fini. Nous avons vu à la Section 1.2 qu'il existe un domaine fondamental C dans M pour l'action de Γ dont le bord est \mathcal{C}^1 par morceaux. Soit

$$S = \{\gamma_1, \dots, \gamma_v\}$$

un système de générateurs (symétrique) associé au domaine C par la Proposition 1.2.1. L'hypersurface (lisse par morceaux) $C \cap \gamma_1(C) \subset \partial C$ est de

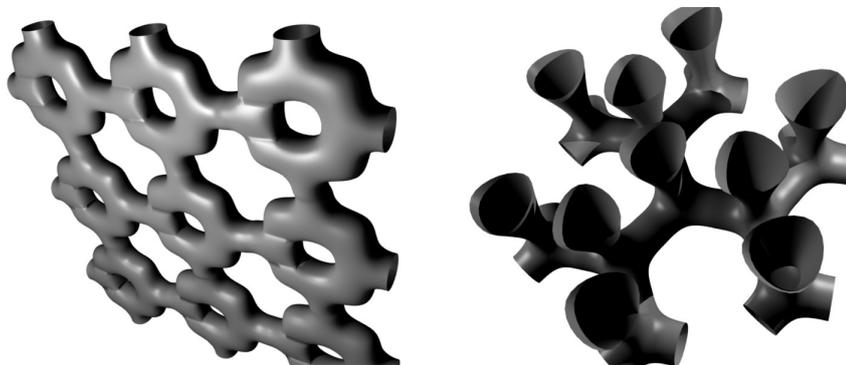


FIGURE 2.2 – Surfaces modelées sur \mathbb{Z}^2 à partir d'un tore à 4 composantes de bord et sur l'arbre de degré 3 à partir d'une cellule de volume infini

codimension 1, lisse par morceaux. En particulier, elle contient un ouvert lisse d'adhérence compacte α_1 , qui admet un voisinage tubulaire T_1 de largeur R . Supposons que $\gamma_1^{-1} = \gamma_{\frac{v}{2}+1}$, on pose $\alpha_{\frac{v}{2}+1} = \gamma_1^{-1}(\alpha_1)$. Quitte à diminuer R , on peut supposer que le voisinage tubulaire $T_{\frac{v}{2}+1}$ de $\alpha_{\frac{v}{2}+1}$ de largeur R n'intersecte pas T_1 . Puis, si $\gamma_2 \notin \{\gamma_1, \gamma_1^{-1}\}$, il existe un ouvert lisse

$$\alpha_2 \subset C \cap \gamma_2(C) \subset \partial C$$

de codimension 1, d'adhérence compacte dans ∂C , et quitte à rétrécir α_1 et R , on peut supposer que son voisinage tubulaire de largeur $2R$ n'intersecte pas T_1 et $T_{\frac{v}{2}+1}$. La proposition suivante est alors immédiate à vérifier :

Proposition 2.1.1. *En répétant ce procédé un nombre fini de fois, on obtient une cellule qui vérifie les propriétés demandées à la Définition 2.1.1 et une variété G -périodique, où G est le graphe de Cayley de Γ associé au système de générateurs S .*

Le pavage régulier du plan décrit par la Figure 2.1 correspond au revêtement canonique $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. La Figure 1.2 présente un exemple de variété \mathbb{Z} -périodique où la cellule a un bord non-compact. On fixe les zones de transition en choisissant un compact dans chaque composante de bord, d'intérieur non vide.

2.1.2 Recollement de fonctions propres

Soit G un graphe de valence constante v , et M une variété G -périodique de cellule C . On suppose que C admet une fonction propre ϕ_0 pour son bas du spectre λ_0 (on rappelle que sauf mention explicite, sur une variété à bord nous considérons toujours le problème de Neumann, défini à la Section 1.1). Pour $i \in G$, on note toujours $J_i : C_i \rightarrow C$ l'isométrie d'identification de la cellule C_i .

Définition 2.1.2. *Nous dirons que ϕ_0 se recolle bien dans M si la fonction $\tilde{\phi}_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'intérieur de chaque cellule C_i par*

$$\tilde{\phi}_0|_{C_i} = \phi_0 \circ J_i$$

se prolonge en une application continue sur M .

Nous appellerons $\tilde{\phi}_0$ l'extension de ϕ_0 à M , et nous la noterons souvent simplement ϕ_0 . Cette hypothèse de recollement de la première fonction propre sera cruciale pour la partie délicate des démonstrations de nos résultats. Il faut la voir comme une hypothèse *sur la cellule C* . Elle est certes très restrictive ; mais pour nombre de variétés G -périodiques intéressantes, il existe une cellule pour laquelle elle est vérifiée. Reprenons les deux familles d'exemples décrites à la section précédente.

Dans le cadre des surfaces hyperboliques, une hypothèse supplémentaire de *symétrie globale de la cellule* assure que la fonction propre se recolle bien.

Soit C une surface hyperbolique dont le bord est constitué de v géodésiques fermées que nous notons $\alpha_1, \dots, \alpha_v$. Supposons que C est munie d'une isométrie globale \mathcal{I} d'ordre v telle que pour tout $k = 1, \dots, v$,

$$\mathcal{I}\alpha_k = \alpha_{k+1},$$

en notant $\alpha_{v+1} = \alpha_1$. Soit G un graphe à valence v et $\{J_i : C_i \rightarrow C\}_{i \in G}$ des copies de C . Soit M la surface modelée sur G à partir de C définie en recollant α_k^i à $\alpha_{k'}^j$ via $J_i^{-1} \circ \mathcal{I}^{k-k'} \circ J_j$, selon n'importe quelle combinaison des bords des cellules telle que la surface ainsi obtenue respecte la combinatoire du graphe.

Proposition 2.1.2. *Si C admet une première fonction propre ϕ_0 , alors celle-ci se recolle bien dans M .*

Démonstration. Il suffit de remarquer que ϕ_0 est invariante par \mathcal{I} d'après la proposition 1.1.7. \square

Dans le cas des revêtements, l'hypothèse de recollement est assurée par un critère très simple à vérifier :

Proposition 2.1.3. *Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement galoisien de groupe d'automorphisme Γ de type fini. On suppose qu'il existe une première fonction propre $\phi_0 : N \rightarrow \mathbb{R}$ associée au bas du spectre $\lambda_0(N)$.*

S'il existe un domaine fondamental à coins $C \subset M$ tel que $\phi_0 \circ p$ vérifie les conditions de Neumann sur ∂C , alors

$$\lambda_0(C) = \lambda_0(N)$$

et la première fonction propre de C existe et est donnée par la restriction de $\phi_0 \circ p$ à C . Elle s'étend donc par l'action de Γ en une fonction $\tilde{\phi}_0$ continue sur M .

Démonstration. Comme ϕ_0 est \mathcal{H}^1 sur N , son relevé à C l'est également. Elle est aussi $\lambda_0(N)$ -harmonique, vérifiant les conditions de Neumann sur ∂C par hypothèse : elle est donc par définition valeur propre du Laplacien avec condition de Neumann associée à $\lambda_0(N)$, et puisqu'elle est positive, $\lambda_0(N)$ est nécessairement le bas du spectre de C . \square

Nous avons vu à la Section 1.2 une condition suffisante pour qu'un tel domaine fondamental existe :

Proposition 2.1.4. *Soit (N, g) une variété riemannienne qui admet une première fonction propre $\phi_0 : N \rightarrow \mathbb{R}$ associée au bas du spectre $\lambda_0(N)$. Si le gradient de la première fonction propre ϕ_0 est simplement stratifié, alors pour tout revêtement $p : M \rightarrow N$ de groupe d'automorphisme Γ , il existe un domaine fondamental à coins $C \subset M$ tel que $\phi_0 \circ p$ vérifie les conditions de Neumann sur ∂C .*

Il s'agit d'un corollaire direct du Théorème 1.2.6.

Nous démontrerons au Chapitre 3 que pour une métrique générique, la première fonction propre est de Morse, et que son gradient est alors simplement stratifié :

Théorème 2.1.5. *Soit N une variété riemannienne de volume infini à courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité et de trou spectral strictement positifs, et ϕ_0 sa première fonction propre. Pour tout $a > 0$, les ensembles $\{x; \phi_0(x) > a\}$ sont compact. De plus, lorsque les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k du tenseur de courbure, pour k assez grand, sont uniformément bornées, ϕ_0 est génériquement de Morse. Pour tout revêtement riemannien $p : M \rightarrow N$ de groupe d'automorphisme G , il existe alors un domaine fondamental pour G sur lequel ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann.*

Cela découle du Théorème 3.3.1 et de la Proposition 3.3.4 que nous démontrerons au chapitre suivant.

Nous nous sommes demandés à la Section 1.2 si la première fonction propre avait toujours un gradient simplement stratifié : en cas de réponse positive, le théorème précédent s'étend à toutes les variétés riemanniennes.

Nous travaillerons donc pour la suite de ce chapitre en supposant que nous avons une variété G -périodique et une cellule C dont la première fonction propre se recolle bien. Nous venons de voir que dans de nombreuses situations intéressantes, cette hypothèse est vérifiée !

2.1.3 Graphes et moyennabilité

Nous présentons maintenant les notions de combinatoire sur les graphes dont nous aurons besoin, pour énoncer et démontrer nos résultats.

Définition 2.1.3. Soit G un groupe, on dit que G est **moyennable** si et seulement si il admet une moyenne invariante à gauche, c'est-à-dire une fonction $m : \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $m(G) = 1$;
2. pour toutes parties G_1 et G_2 disjointes de G ,

$$m(G_1 \cup G_2) = m(G_1) + m(G_2);$$
3. $\forall A \subset G, \forall g \in G, m(gA) = m(A)$.

Un groupe fini est évidemment moyennable : il suffit d'utiliser la moyenne arithmétique classique.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Nous noterons de nouveau $i \in G$ pour un sommet $i \in V$ de G et $i \sim j$ pour une arête $(i, j) \in E$.

Définition 2.1.4. On appelle **constante de Cheeger** de G la constante

$$h(G) = \inf_{G_f \subset G} \frac{\#\partial G_f}{\#G_f},$$

où G_f parcourt l'ensemble des parties finies de G et ∂G_f est l'ensemble des points de G_f reliés à un point de $G \setminus G_f$. Un graphe G est **moyennable** si et seulement si $h(G) = 0$

Cette dernière terminologie vient du résultat classique suivant :

Théorème 2.1.6 (Følner). Soit (Γ, S) un groupe de type fini muni d'un système de générateurs, Γ est moyennable au sens de la Définition 2.1.3 si et seulement si le graphe de Cayley de Γ relativement au système de générateurs S est moyennable au sens de la Définition 2.1.4 ;

On peut par exemple trouver la démonstration de ce théorème dû à Følner dans [Bro81].

Comme cas particuliers des graphes moyennables, citons les graphes finis et les graphes à croissance polynomiale, parmi lesquels les graphes abéliens de type \mathbb{Z}^n . Notons qu'il existe des graphes à croissance exponentielle qui restent moyennables.

Sur un graphe G , nous appellerons Δ_G le **Laplacien combinatoire**

$$(\Delta_G f)(i) = \sum_{i \sim j} (f(i) - f(j)).$$

C'est un opérateur autoadjoint positif, dont la première valeur propre $\mu_0(G)$ est l'infimum des quotients de Rayleigh combinatoires :

$$\mu_0(G) = \inf_f \frac{\sum_{i \sim j} (f(i) - f(j))^2}{\sum_i f(i)^2}$$

où f parcourt l'ensemble des fonctions à support compact dans G . Le théorème suivant relie la moyennabilité du graphe à la première valeur propre de cet opérateur :

Théorème 2.1.7 (Inégalités de Cheeger combinatoires).

$$\frac{1}{2v} \mathfrak{h}(G)^2 \leq \mu_0(G) \leq \mathfrak{h}(G).$$

En particulier, le graphe est moyennable si et seulement si la première valeur propre de son Laplacien combinatoire est nulle. On peut consulter [CdV98] p31 pour une preuve de ce résultat.

2.1.4 Résultats : contrôle du bas du spectre

Notre premier résultat est une adaptation au cadre des variétés G -périodiques de méthodes reliant moyennabilité et bas du spectre :

Théorème 2.1.8. *Soit G un graphe à valence constante et M une variété G -périodique dont la cellule C admet une première fonction propre qui se recolle bien dans M . Si G est moyennable, on a*

$$\lambda_0(M) = \lambda_0(C).$$

Si G n'est pas moyennable, si le rayon d'injectivité normale de ∂C est strictement minoré par R_{\min} , et si le nombre de voisin de chaque cellule (c'est à dire le nombre d'autres cellules que son bord intersecte) est une constante $k < \infty$, alors il existe une constante $A' > 0$ qui ne dépend que de k , de R_{\min} et de $\lambda_0(C)$ telle que

$$\lambda_0(M) \leq \lambda_0(C) + A' \mathfrak{h}(G).$$

Nous obtenons lorsque G n'est pas moyennable le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 2.1.9. *Soit C une cellule de valence v qui admet une première fonction propre ϕ_0 et un trou spectral $\eta = \lambda_1(C) - \lambda_0(C) > 0$. Alors il existe une constante $A > 0$, ne dépendant que de λ_0 , des zones de transition de C et valeurs de ϕ_0 sur ∂C , telle que pour tout graphe G de valence v et toute variété G -périodique M de cellule C où ϕ_0 se recolle bien,*

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(C) + A \eta \mu_0(G).$$

Les constantes A et A' restent positives et bornées lorsque $\lambda_0(C)$ varie ; elle dépendent principalement de dépendent de la géométrie sur les zones de transitions de C et des valeurs de ϕ_0 sur ∂C . Cette dépendance sera détaillée au cours de la démonstration. D'après le lemme 1.1.6, on a toujours

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(C).$$

Si l'on ne cherche pas à garder le contrôle explicite de l'écart entre les bas de spectres, ces théorèmes deviennent alors :

Corollaire 2.1.10. *Soit C une cellule de valence v qui admet une première fonction propre ϕ_0 et un trou spectral strictement positif, soit G un graphe G de même valence v , et M une variété modelée sur G à partir de C où ϕ_0 se recolle bien. Alors*

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(C),$$

avec égalité si et seulement si G est moyennable.

Appliqué au cas des revêtements qui admettent un domaine fondamental dont la première fonction propre se recolle bien, nous obtenons les corollaires suivants :

Corollaire 2.1.11. *Pour tout revêtement riemannien $p : M \rightarrow N$ de groupe d'automorphisme Γ , si Γ est moyennable alors*

$$\lambda_0(M) = \lambda_0(N).$$

Si Γ n'est pas moyennable et s'il existe un domaine fondamental D admettant un nombre fini de voisins dont le bord a un rayon d'injectivité normale strictement minoré, alors il existe une constante $A' > 0$ ne dépendant que de $\lambda_0(N)$, du nombre de voisins de D et du rayon d'injectivité normale de ∂D telle que

$$\lambda_0(M) \leq \lambda_0(N) + A'\mathfrak{h}(G).$$

Ce corollaire est une version précisée de résultats de R. Brooks (voir par exemple la preuve du Théorème 1 de [Bro85]).

Corollaire 2.1.12. *Soit N une variété dont le trou spectral η est strictement positif. Notons ϕ_0 sa première fonction propre. Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien de groupe d'automorphisme Γ de type fini. S'il existe un domaine fondamental $C \subset M$ pour l'action de Γ à bord lisse par morceaux tel que ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann sur ∂C , alors il existe une constante $A > 0$ ne dépendant que de C telle que*

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(N) + A\eta\mu_0(G).$$

En particulier, le théorème précédent et le Théorème 2.1.5 impliquent :

Corollaire 2.1.13. *Soit N une variété riemannienne dont la courbure de Ricci et le rayon d'injectivité sont uniformément minorés, et le trou spectral strictement positif. Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien, dont le groupe d'automorphisme Γ est de type fini. Si le gradient de la première fonction propre est simplement stratifié - par exemple lorsque les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k du tenseur de courbure, pour k assez grand, sont uniformément bornées et la métrique est générique sur N - alors*

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(N)$$

avec égalité si et seulement si Γ est moyennable.

Nos résultats peuvent être vus comme une généralisation des travaux de R. Brooks [Bro85], qui montre que pour un revêtement $p : M \rightarrow N$, sous certaines hypothèses géométriques qui impliquent entre autres que le trou spectral de N est strictement positif,

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(N)$$

avec égalité si et seulement si Γ est moyennable. Nous détaillerons au paragraphe 2.4.1 le lien entre nos résultats et ceux de Brooks.

2.2 Démonstrations principales

2.2.1 Majoration du λ_0 et graphes moyennables

Soit G un graphe de valence v et M une variété G -périodique, de cellule C . On note λ_0 le bas du spectre du spectre C , et on suppose qu'elle admet une première fonction propre ϕ_0 normalisée qui se recolle bien dans M . L'objectif de cette section est de démontrer le Théorème 2.1.8 :

Théorème 2.2.1. *Soit G un graphe à valence constante et M une variété G -périodique de cellule C . Si G est moyennable, on a*

$$\lambda_0(M) = \lambda_0(C).$$

Si G n'est pas moyennable, si le rayon d'injectivité normale de ∂C est strictement minoré par R_{\min} , et si chaque cellule n'admet qu'un nombre fini k de voisins, alors il existe une constante $A' > 0$ qui ne dépend que de k , de R_{\min} et de $\lambda_0(C)$ telle que

$$\lambda_0(M) \leq \lambda_0(C) + A'\mathfrak{h}(G).$$

Démonstration. Rappelons que d'après le lemme 1.1.6, on a toujours

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0.$$

Soit $\phi_\epsilon \in \mathcal{H}^1(M)$ une fonction positive lisse à support compact $K \subset C$ telle que

$$\frac{\|\nabla \phi_\epsilon\|^2}{\|\phi_\epsilon\|^2} \leq \lambda_0(C) + \epsilon,$$

et qui se recolle bien dans M . On peut la construire par exemple en prenant la restriction de ϕ_0 à un compact $K_\epsilon \subset K$ et en lissant la fonction ainsi obtenue de façon à la rendre lisse à support dans K . On supposera pour simplifier les notations que $\|\phi_\epsilon\|^2 = 1$. Pour toute cellule $C_i \subset M$ donnée par la Définition 2.1.1, et $J_i : C_i \rightarrow C$ son isométrie d'identification, on note

$$K_i \subset C_i = J_i^{-1}(K).$$

Soit $R > 0$ fixé, alors pour tout $i \in G$, un voisinage de K_i de largeur R intersecte un nombre fini des $K_j, j \neq i$: nous noterons ce nombre k_ϵ , qui ne dépend pas de i .

Soit $(G_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une famille de parties finies (que nous supposons connexes) de G telle que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\#\partial G_p}{\#G_p} = \mathfrak{h}(G).$$

On note M_p la réunion des cellules correspondant à la partie G_p .

On note M_p^+ un voisinage de largeur R de M_p : l'ensemble $M_p^+ \setminus M_p$ intersecte donc au plus $k_\epsilon \#\partial G_p$ cellules. Nous allons simplement reproduire ϕ_ϵ sur toutes les cellules de M_p , et de rendre la fonction obtenue continue à support compact dans M_p^+ . Cette dernière opération ajoutera au quotient de Rayleigh un terme de l'ordre de $k_\epsilon \frac{\#\partial G_p}{\#G_p}$.

On définit sur $M_p^+ \setminus M_p$ la fonction

$$\psi_p(x) = \frac{1}{R}(R - d(x, M_p)).$$

On l'étend en une fonction que nous notons toujours $\psi_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 1 sur M_p et 0 sur $M \setminus M_p^+$. Comme ∂M_p est lisse par morceaux, ψ_p est \mathcal{C}^1 sur $M \setminus \partial M_p$, et continue sur $\overline{M \setminus \partial M_p}$. On sait qu'alors, $\forall x \in M_p^+ \setminus M_p$, on a

$$|\nabla \psi_p| = |\nabla d(\cdot, M_p)| \leq \frac{1}{R}.$$

Notons encore ϕ_ϵ l'extension de ϕ_ϵ à M , qui existe et est continue par hypothèse.

Soit $\widetilde{\phi}_p$ la fonction définie sur M par

$$\widetilde{\phi}_p = \phi_\epsilon \cdot \psi_p.$$

La fonction $\widetilde{\phi}_p$ est \mathcal{C}^1 par morceaux, continue sur M et à support compact dans M_p^+ . Calculons son énergie.

Pour tout $i \in G_p$, on a

$$\|\nabla \widetilde{\phi}_p\|_{C_i}^2 = \int_{C_i} |\nabla \widetilde{\phi}_p|^2 = \int_C |\nabla \phi_0|^2 \leq \lambda_0 + \epsilon.$$

Soit maintenant C_i une cellule qui intersecte $M_p^+ \setminus M_p$. Sur C_i , la fonction ψ_p est positive, inférieure à 1 et son gradient est de norme $1/R$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{C_i} |\nabla \widetilde{\phi}_p|^2 &= \int_{\alpha_R^+} |\phi_\epsilon \nabla \psi_p + \psi_p \nabla \phi_\epsilon|^2 \leq \frac{1}{R^2} \int_C |\phi_\epsilon|^2 + 2 \int_C |\phi_\epsilon g(\nabla \phi_\epsilon, \nabla \psi_p)| + \int_C |\nabla \phi_\epsilon|^2 \\ &\leq \frac{1}{R^2} + \frac{2}{R^2} \lambda_0 + \lambda_0 + \epsilon. \end{aligned}$$

On a obtenu la dernière majoration à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On a donc

$$\left\| \nabla \widetilde{\phi}_p \right\|_M^2 = \sum_{i \in G_p} \left\| \nabla \widetilde{\phi}_p \right\|_{C_i}^2 + \sum_{C_i \subset M_p^+ \setminus M_p} \left\| \nabla \widetilde{\phi}_p \right\|_{C_i}^2,$$

soit d'après ci-dessus

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \widetilde{\phi}_p \right\|_M^2 &\leq \#G_p(\lambda_0 + \epsilon) + \# \{C_i \subset \partial M_p^+ \setminus M_p\} \left(\frac{1 + 2\lambda_0}{R^2} + \lambda_0 + \epsilon \right) \\ &\leq \#G_p(\lambda_0 + \epsilon) + k_\epsilon \#(\partial G_p) \left(\frac{1 + 2\lambda_0}{R^2} + \lambda_0 + \epsilon \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\left\| \widetilde{\phi}_p \right\|_M^2 \geq \left\| \widetilde{\phi}_p \right\|_{M_p}^2 = \#G_p.$$

On a donc

$$\frac{\left\| \nabla \widetilde{\phi}_p \right\|_M^2}{\left\| \widetilde{\phi}_p \right\|_M^2} \leq \frac{\#G_p(\lambda_0 + \epsilon) + k_\epsilon \#(\partial G_p) \left(\frac{1 + 2\lambda_0}{R^2} + \lambda_0 + \epsilon \right)}{\#G_p} = \lambda_0 + \epsilon + (A' + \epsilon k_\epsilon) \frac{\#\partial G_p}{\#G_p},$$

en posant

$$A' = k_\epsilon \left(\frac{1 + 2\lambda_0}{R^2} + \lambda_0 \right).$$

Lorsque G est moyennable, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\#\partial G_p}{\#G_p} = 0.$$

La majoration précédente implique donc le premier point du Théorème 2.1.8. Lorsque C n'a qu'un nombre fini k de voisins, et le rayon d'injectivité normale du bord est minoré par $R_{min} > 0$, on peut prendre $R = R_{min}$ et $k_\epsilon = k$ pour tout $\epsilon > 0$. Ceci conclut notre preuve par passage à la limite lorsque $p \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$.

□

Cette partie de la démonstration s'adapte dans le cas où C n'admet pas de première fonction propre : il suffit qu'il existe une suite de fonction $(\phi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ dont le quotient de Rayleigh tend vers λ_0 , qui se recollent toutes dans M . Nous n'avons pas besoin que ces fonctions vérifient les conditions de Neumann sur ∂C .

Dans le cas d'un revêtement $p : M \rightarrow N$ de groupe d'automorphisme Γ et domaine fondamental C , la démonstration est analogue (même lorsque $\lambda_0(N)$ n'est pas le bas du spectre de C). On choisit une fonction ϕ_ϵ sur N à support compact dont le quotient de Rayleigh est inférieur à $\lambda_0 + \epsilon$ et une

famille de parties finies $G_p \subset G$ où G est un graphe de Cayley de Γ , qui vérifie

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\#\partial G_p}{\#G_p} = \mathfrak{h}(\Gamma).$$

On relève ϕ_ϵ à la réunion des domaines fondamentaux correspondant à G_p , et on la rend à support compact de la même façon que dans la démonstration précédente : la conclusion du Corollaire 2.1.11 s'ensuit. Notre démonstration est très proche de celle de [Bro81], §2 et a été utilisée depuis dans de nombreux articles traitant de moyennabilité.

Remarque 2.2.1. Dans le cas où G est le graphe de Cayley d'un groupe abélien (par exemple $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2 \dots$), donc moyennable, on retrouve ce qui est appelé communément une *variété périodique*. Le résultat $\lambda_0(M) = \lambda_0(C)$ est alors un corollaire de la *théorie de Floquet*. La démonstration précédente est plus élémentaire que la construction de la théorie de Floquet (mais le résultat beaucoup plus faible), et s'applique à une classe de variétés beaucoup plus large.

2.3 Graphes non moyennables et minoration du λ_0

Nous allons maintenant nous intéresser à la minoration du Théorème 2.1.9, qui n'a d'intérêt que lorsque G n'est pas moyennable.

Soit C une cellule de valence v , et $\alpha_1, \dots, \alpha_v \subset C$ ses zones de transition. Par hypothèses, les α_i admettent des voisinages tubulaires de largeur R disjoints dans C qui s'écrivent

$$T_i = \alpha_i \times [0, R],$$

sur lesquels la courbure de Ricci est minorée par $-\kappa < 0$. On note toujours λ_0 le bas du spectre (avec condition de Neumann) de C , on suppose qu'elle admet une première fonction propre ϕ_0 normalisée et que le trou spectral $\eta = \lambda_1 - \lambda_0 > 0$ (voir Définition 1.1.4). Soit G un graphe de valence v , et M une variété G -périodique de cellule C , telle que ϕ_0 se recolle bien dans M . L'objectif de cette section est donc de démontrer :

Théorème 2.3.1. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0^N(C) + A\eta\mu_0(G),$$

où A dépend de λ_0 , de la géométrie des zones de transitions, et des valeurs de ϕ_0 sur ces zones de transition.

Notons

$$\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0(M), \text{ et } \delta = \tilde{\lambda}_0 - \lambda_0.$$

D'après le lemme 1.1.6, $\delta \geq 0$.

La structure de la démonstration de ce théorème, un peu longue, est la suivante. Nous prenons une fonction test dont nous voulons évaluer le quotient de Rayleigh. Nous la discrétisons en la projetant, sur chaque cellule, sur la fonction propre ϕ_0 , et notre théorème s'obtient par une minoration du terme d'erreur qui reste après cette projection. Nous effectuons cette minoration sur les tubes de jonctions qui s'appuient sur les zones de transitions entre deux cellules. Là, nous montrons que deux possibilités se présentent : soit le terme d'erreur a une norme L^2 minorée, soit la norme de son gradient est minorée, et dans les deux cas cela nous permet de nous ramener au spectre du Laplacien combinatoire sur le graphe et de conclure.

Remarque 2.3.1. L'idée de discrétiser une variété pour obtenir un contrôle sur le spectre du Laplacien riemannien à partir du Laplacien combinatoire sur le graphe sous-jacent à la discrétisation n'est pas nouvelle. Elle est à la base des travaux de Brooks dont nous avons déjà parlé, et plus près de nous de ceux, on peut citer de T. Coulhon et L. Saloff-Costes (voir [CSC95]) et de T. Mantuano (voir [Man05]). Dans ces deux articles, on discrétise la variété grâce à un recouvrement localement fini par des boules, et à chaque fonction f sur la variété, on associe une fonction sur le graphe qui a pour valeur en un sommet la moyenne de f sur la boule correspondante (en pondérant éventuellement le graphe par le volume de la boule). Ici, la discrétisation se fait en projetant sur des «morceaux» de volume infini : les cellules, que nous pondérons à l'aide de leur fonction propre pour rendre ces projections finies.

Démonstration du Théorème 2.3.1. Soit $(f_\epsilon)_{0 < \epsilon < 1}$ une famille de fonctions à support compact dans M telle que pour tout $\epsilon > 0$, on ait

$$\frac{\int_M |\nabla f_\epsilon|^2}{\int_M f_\epsilon^2} \leq \tilde{\lambda}_0 + \epsilon.$$

Nous allons discrétiser ces fonctions en les projetant, cellule par cellule, sur la fonction propre ϕ_0 . La composante perpendiculaire à ϕ_0 , nécessairement non nulle pour que f_ϵ ait un support compact, empêchera d'avoir $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0$. Nous notons toujours ϕ_0 l'extension à M de ϕ_0 , bien définie et continue par hypothèse. Pour chaque cellule C_i de M , posons

$$a_i^2 = \|f_\epsilon\|_{C_i}^2 = \int_{C_i} f_\epsilon^2,$$

$$b_i = \langle f_\epsilon, \phi_0 \rangle_{C_i} = \int_{C_i} f_\epsilon \phi_0,$$

et

$$c_i^2 = \|f_\epsilon - b_i \phi_0\|_{C_i}^2 = \int_{C_i} (f_\epsilon - b_i \phi_0)^2.$$

On a alors $a_i^2 = b_i^2 + c_i^2$. Nous noterons désormais

$$g_i = f_\epsilon - b_i \phi_0 :$$

g_i est la composante de f_i orthogonale à ϕ_0 pour le produit scalaire \mathcal{L}^2 sur C_i .

Sur chaque cellule C_i , comme ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann,

$$\int_{C_i} \nabla \phi_0 \cdot \nabla g_i = \int_{C_i} \Delta \phi_0 g_i = \lambda_0 \int_{C_i} \phi_0 g_i = 0.$$

On a donc

$$\frac{\int_M |\nabla f_\epsilon|^2}{\int_M f_\epsilon^2} = \frac{\sum_i \|\nabla f_\epsilon\|_{C_i}^2}{\sum_i \|f_\epsilon\|_{C_i}^2} = \frac{\sum_i b_i^2 \|\nabla \phi_0\|_{C_i}^2 + \sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2} = \frac{\sum_i \lambda_0 b_i^2 + \sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2}.$$

Comme g_i est orthogonale à ϕ_0 ,

$$\|\nabla g_i\|_{C_i}^2 \geq \lambda_1 \|g_i\|_{C_i}^2 = \lambda_1 c_i^2.$$

On obtient alors

$$\|\nabla g_i\|_{C_i}^2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \|\nabla g_i\|_{C_i}^2 + \frac{\eta}{\lambda_1} \|\nabla g_i\|_{C_i}^2 \geq \lambda_0 c_i^2 + \frac{\eta}{\lambda_1} \|\nabla g_i\|_{C_i}^2,$$

d'où

$$\tilde{\lambda}_0 + \epsilon \geq \frac{\int_M |\nabla f_\epsilon|^2}{\int_M f_\epsilon^2} \geq \frac{\sum_i \lambda_0 b_i^2 + \lambda_0 c_i^2 + \frac{\eta}{\lambda_1} \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2} = \lambda_0 + \frac{\eta}{\lambda_1} \frac{\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2}.$$

On a donc en particulier

$$\delta + \epsilon = \tilde{\lambda}_0 - \lambda_0 + \epsilon \geq \frac{\eta}{\lambda_1} \frac{\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2}. \quad (2.1)$$

Nous allons donc nous intéresser au terme $\frac{\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2}$ et montrer le lemme :

Lemme 2.3.2. *Il existe une constante A ne dépendant que de la géométrie et des valeurs de ϕ_0 sur les zones de transition telle que*

$$\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2 \geq \lambda_1 A \sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2.$$

Démonstration. Soient $i, j \in G$ tels que $i \sim j$ et α_{ij} la zone de transition commune aux deux cellules C_i et C_j (voir Définition 2.1.1). Par hypothèse, il existe dans $C_i \cup C_j$ un voisinage normal T_{ij} de α_{ij} qui s'écrit en coordonnées de Fermi

$$T_{ij} = \alpha_{ij} \times [-R, R].$$

On suppose que

$$(x, r) \in T_{ij} \cap C_i$$

si et seulement si $r \geq 0$, et on note T_{ij}^+ la partie de T_{ij} située dans C_i , et T_{ij}^- l'autre.

Pour obtenir une minoration, nous pouvons nous limiter à l'étude de ce qu'il se passe sur les T_{ij} . On a alors :

$$\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2 \geq \frac{1}{2} \sum_i (\|\nabla g_i\|_{C_i}^2 + \lambda_1 \|g_i\|_{C_i}^2)$$

soit

$$\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{i \sim j} \left(\|\nabla g_i\|_{T_{ij}^+}^2 + \|\nabla g_j\|_{T_{ij}^-}^2 + \lambda_1 (\|g_i\|_{T_{ij}^+}^2 + \|g_j\|_{T_{ij}^-}^2) \right). \quad (2.2)$$

Nous poursuivons alors notre minoration par le lemme suivant :

Lemme 2.3.3. *Il existe une constante A ne dépendant que de la géométrie et des valeurs de ϕ_0 sur les zones de transition telle que pour tous $i, j \in G$ tels que $i \sim j$,*

$$\|\nabla g_i\|_{T_{ij}^+}^2 + \|\nabla g_j\|_{T_{ij}^-}^2 + \lambda_1 (\|g_i\|_{T_{ij}^+}^2 + \|g_j\|_{T_{ij}^-}^2) \geq 2A\lambda_1 (b_i - b_j)^2.$$

Démonstration. Soient $i, j \in G$ tels que $i \sim j$. Comme à la section 1.3, on note $(x, r) \in \alpha_{ij} \times [-R, R]$ les coordonnées de Fermi sur T_{ij} ,

$$dV_\alpha(x) = dV_{g_{\alpha_{ij}}}(x)$$

l'élément de volume sur α_{ij} , et

$$\theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) dr$$

l'élément de volume sur T_{ij} . Soit $r \in [-R, R]$, posons

$$V_{ij}(r) = \int_{\alpha_{ij}} \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x)$$

l'aire de l'hypersurface parallèle à α_{ij} à la distance r . On a donc

$$V_{ij}(0) = \text{Vol}(\alpha_{ij}).$$

Pour nous ramener à un problème ne dépendant que de r , pour chaque fonction f définie sur T_{ij} , notons en lettre capitale sa *moyenne horizontale* :

$$F(r) = \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} f(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x).$$

Comme ϕ_0 se recolle bien, $\phi_0(x, 0)$ est bien définie. Par continuité de f_ϵ , on a donc

$$g_j(x, 0) + b_j \phi_0(x, 0) = g_i(x, 0) + b_i \phi_0(x, 0),$$

d'où

$$|g_j(x, 0) - g_i(x, 0)| = |b_j - b_i|\phi_0(x, 0).$$

Par intégration, on obtient alors

$$|G_j(0) - G_i(0)| = |b_j - b_i|\Phi_0(0),$$

où l'on a donc noté

$$G_i(r) = \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x),$$

et G_j est définie similairement.

On sait d'après le théorème 1.1.4 que $\Phi_0 > 0$. Supposons, quitte à inverser i et j et à changer le signe de G_i , que

$$G_i(0) \geq \frac{1}{2}|b_j - b_i|\Phi_0(0).$$

Nous notons

$$R_0 = \inf \left\{ r \in]0, R] : G_i(r) \leq \frac{1}{4}|b_i - b_j|\Phi_0(0) \right\}.$$

1^{er} cas : $R_0 = R$

On a donc

$$\|G_i\|_{T_{ij}^+} = \int_0^R G_i(r)^2 V_{ij}(r) dr \geq \frac{\Phi_0(0)^2 \text{Vol}(T_{ij}^+)}{16} (b_i - b_j)^2. \quad (2.3)$$

Or, pour tout $r \in [0, R]$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée à la norme euclidienne

$$f \mapsto \sqrt{\int_{\alpha_{ij}} f^2(x, r)\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x)},$$

on a

$$\left(\int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x) \right)^2 \leq \int_{\alpha_{ij}} 1^2\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x) \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)^2\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x),$$

soit

$$\left(\int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x) \right)^2 \leq V_{ij}(r) \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)^2\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x).$$

On a donc

$$\|g_i^2\|_{T_{ij}^+} = \int_0^R \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)^2\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x) dr \geq \int_0^R \frac{\left(\int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)^2\theta^{n-1}(x, r)dV_\alpha(x) \right)^2}{V_{ij}(r)} dr$$

$$= \int_0^R G_i(r)^2 V_{ij}(r) dr = \|G_i\|_{T_{ij}^+} \geq A_1 (b_i - b_j)^2$$

d'après l'inégalité (2.3), avec

$$A_1 = \frac{\Phi_0(0)^2 \text{Vol}(T_{ij}^+)}{16}.$$

2^{eme} cas : $R_0 < R$ On a donc par définition de R_0 ,

$$G_i(R_0) = \frac{1}{4} |b_j - b_i| \Phi_0(0) :$$

nous avons une minoration de la variation de la fonction G_i . Nous allons en déduire une minoration de la norme de son gradient par le lemme suivant, qui est le point technique principal de notre démonstration :

Lemme 2.3.4. *Il existe une constante $A_2 > 0$ ne dépendant que de λ_0 , et de la géométrie et des valeurs de ϕ_0 sur T_{ij} telle que*

$$\int_{T_{ij}} |\nabla G_i|^2 \geq A_2 (b_i - b_j)^2.$$

Démonstration. Posons

$$P = G_i(0) \geq \frac{1}{2} |b_j - b_i| \Phi_0(0)$$

et

$$Q = G_i(R_0) = \frac{1}{4} |b_j - b_i| \Phi_0(0).$$

Nous noterons désormais

$$T = T_{ij}^+ \cap (\alpha_{ij} \times [0, R_0]),$$

g_T la métrique induite de celle de M , et dV_T son élément de volume. Soit G_T la fonction harmonique pour le Laplacien issu de la métrique de M sur T , vérifiant $G_T(0) = P$ et $G_T(R_0) = Q$, et vérifiant les conditions de Neumann sur $\partial\alpha_{ij} \times [0, R_0]$ lorsque $\partial\alpha_{ij} \neq \emptyset$. Parmi toutes les fonctions f de $\mathcal{H}^1(T)$ vérifiant $f(x, 0) = P$ et $f(x, R_0) = Q$, G_T minimise l'énergie de Dirichlet : on a donc

$$\int_{T_{ij}^+} |\nabla G_i|^2 \geq \int_T |\nabla G_i|^2 dV_T \geq \int_T |\nabla G_T|^2 dV_T$$

Il suffit donc de minorer l'énergie de G_T pour démontrer le lemme 2.3.4. Nous allons le faire par comparaison avec le cas où T est muni d'une métrique que nous savons mieux contrôler.

Notons T_{inf} le tube $T = \alpha_{ij} \times [0, R_0]$ muni de la métrique (en coordonnées de Fermi)

$$g_{\text{inf}}(x, r) = (\theta_{\text{inf}}(r))^2 g_\alpha \oplus dr^2,$$

où g_α est la métrique sur α_{ij} induite par celle de M et où θ_{inf} vérifie les hypothèses du Corollaire 1.3.4 : pour tout $x \in \alpha$, la fonction

$$r \mapsto \frac{\theta_{\text{inf}}(r)}{\theta(x, r)}$$

est décroissante. On a vu à la Remarque 1.3.1 qu'une telle fonction existe toujours.

Proposition 2.3.5. *L'élément de volume sur T_{inf} s'écrit*

$$dV_{\text{inf}} = (\theta_{\text{inf}}(r))^{n-1} dV_\alpha(x) dr.$$

Soit f une fonction sur T_{inf} ne dépendant que de la coordonnée r , son Laplacien s'écrit

$$\Delta_{\text{inf}} f = -f''(s) - (n-1) \frac{\theta'_{\text{inf}}}{\theta_{\text{inf}}}(r) f'(r).$$

Dans cette écriture, on note encore $f' = \frac{df}{dr}$.

Démonstration. Il suffit de recopier la preuve du corollaire 1.3.4. Les propositions de [GHL04] utilisées restent valables pour la métrique g_{inf} . En particulier, lorsqu'une fonction f ne dépend que de r , $\Delta_{\text{inf}} f$ est également radiale. \square

Soit maintenant $G_{\text{inf}}(s)$ l'unique fonction définie sur T_{inf} , valant P en $(x, 0)$, Q en (x, R_0) pour tout $x \in \alpha_{ij}$, vérifiant les conditions de Neumann sur $\partial\alpha_{ij} \times [0, R_0]$ si $\partial\alpha_{ij} \neq \emptyset$, et harmonique pour le Laplacien Δ_{inf} . On vérifie par unicité que G_{inf} ne dépend que de s et s'écrit en coordonnées de Fermi :

$$G_{\text{inf}}(r) = Q - \frac{Q - P}{U_{\text{inf}}(R_0)} U_{\text{inf}}(r)$$

avec

$$U_{\text{inf}}(r) = \int_0^r \frac{du}{\theta_{\text{inf}}(u)^{n-1}}.$$

En particulier, comme $P > Q$, G_{inf} est décroissante en r .

Lemme 2.3.6. *Avec les notations précédentes,*

$$\int_T |\nabla G_T|^2 dV_T \geq \int_{T_{\text{inf}}} |\nabla G_{\text{inf}}|^2 dV_{\text{inf}}.$$

Démonstration. Par hypothèse, G_T est harmonique :

$$\Delta_T G_T = 0.$$

De plus, d'après le corollaire 1.3.3, comme G_{inf} ne dépend que de s et est décroissante, on a

$$\Delta_T G_{\text{inf}} = -\frac{d^2 G_{\text{inf}}}{dr^2} - (n-1) \frac{\theta'}{\theta} G'_{\text{inf}} \geq \Delta_{\text{inf}} G_{\text{inf}} = 0.$$

On a donc sur T :

$$\Delta_T(G_T - G_{\text{inf}}) \leq 0.$$

D'après le Principe du Maximum, $G_T - G_{\text{inf}}$ est alors maximale en 0 ou en R_0 . Or,

$$(G_T - G_{\text{inf}})(0) = (G_T - G_{\text{inf}})(R_0) = 0 :$$

on a donc $\forall r \in [0, R_0]$,

$$(G_T - G_{\text{inf}})(r) \leq 0.$$

De plus, par le Principe du Maximum fort (voir [PW84] chapitre 2), on sait qu'alors

$$\frac{\partial G_T}{\partial r}(0) < \frac{dG_{\text{inf}}}{dr}(0)$$

et

$$\frac{\partial G_T}{\partial r}(R_0) > \frac{dG_{\text{inf}}}{dr}(R_0).$$

On a d'après la Formule de Green

$$\begin{aligned} \int_T |\nabla G_T|^2 dV_T &= \int_T G_T(x, r) \Delta_T G_T(x, r) dV_T(x, r) - \int_{\alpha_{ij}} G_T(x, 0) \frac{\partial G_T}{\partial r}(x, 0) dV_\alpha(x) \\ &\quad + \int_{\alpha_{ij}} G_T(x, R_0) \frac{\partial G_T}{\partial r}(x, R_0) \theta^{n-1}(x, R_0) dV_\alpha(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

En effet, comme G_T et G_{inf} vérifient les conditions de Neumann sur $\partial\alpha_{ij} \times [0, R_0]$, les termes de bord associés sont nuls. Le premier terme de cette équation est également nul, par définition de G_T . De plus, la fonction

$$r \rightarrow \int_{\alpha_{ij}} \frac{\partial G_T}{\partial r}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x)$$

est constante : il suffit d'appliquer la formule de Green sur le domaine $\alpha_{ij} \times [0, r]$ avec $f = 1$ et $g = G_T$. On a donc

$$\int_T |\nabla G_T|^2 dV_T = \int_{\alpha_{ij}} \frac{\partial G_T}{\partial r}(0) dV_\alpha(x) (G_T(R_0) - G_T(0)). \quad (2.5)$$

On a alors d'après le Principe du Maximum Fort cité ci-dessus,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{ij}} \frac{\partial G_T}{\partial r}(x, 0) dV_\alpha(x) (G_T(R_0) - G_T(0)) &> \int_{\alpha_{ij}} \frac{dG_{\text{inf}}}{dr}(0) dV_\alpha(x) (G_T(R_0) - G_T(0)) \\ &= \int_{\alpha_{ij}} \frac{dG_{\text{inf}}}{dr}(0) dV_\alpha(x) (G_{\text{inf}}(R_0) - G_{\text{inf}}(0)) = \int_{T_{\text{inf}}} |\nabla G_{\text{inf}}|^2 dV_{\text{inf}} \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green dans T_{inf} et l'équation (2.5) adaptée au tube T_{inf} . On a donc bien

$$\int_T |\nabla G_T|^2 dV_T \geq \int_{T_{\text{inf}}} |\nabla G_{\text{inf}}|^2 dV_{\text{inf}}.$$

□

Il nous suffit donc maintenant, pour prouver le lemme 2.3.4, de minorer l'énergie de G_{inf} sur T_{inf} .

Lemme 2.3.7. *Avec les notations précédentes, il existe une constante $A_2 > 0$ telle que*

$$\int_{T_{\text{inf}}} |\nabla G_{\text{inf}}|^2 dV_{\text{inf}} \geq A_2 (b_i - b_j)^2.$$

Démonstration. Nous connaissons une écriture (presque) explicite de G_{inf} :

$$G_{\text{inf}}(r) = P - \frac{P - Q}{U_{\text{inf}}(R_0)} U_{\text{inf}}(r)$$

avec

$$U_{\text{inf}}(r) = \int_0^r \frac{du}{\theta_{\text{inf}}^{n-1}(u)}.$$

ainsi que l'élément de volume

$$dV_{\text{inf}}(x, r) = \theta_{\text{inf}}^{n-1}(r) dV_{\alpha}(x) dr.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{T_{\text{inf}}} |\nabla G_{\text{inf}}|^2 dV_{\text{inf}} &= \int_0^{R_0} \int_{\alpha_{ij}} (G'_{\text{inf}}(r))^2 \theta_{\text{inf}}^{n-1}(r) dV_{\alpha}(x) dr \\ &= \text{Vol}(\alpha_{ij}) \frac{(P - Q)^2}{U_{\text{inf}}(R_0)^2} \int_0^{R_0} (U'_{\text{inf}}(r))^2 \theta_{\text{inf}}^{n-1}(r) dr. \end{aligned}$$

Or,

$$U'_{\text{inf}}(r) = \frac{1}{\theta_{\text{inf}}^{n-1}(r)},$$

donc

$$\int_0^{R_0} (U'_{\text{inf}}(r))^2 \theta_{\text{inf}}^{n-1}(r) dr = \int_0^{R_0} \frac{1}{\theta_{\text{inf}}^{n-1}(r)} dr = U(R_0) > 0.$$

On a alors

$$\frac{1}{U_{\text{inf}}(R_0)^2} \int_0^{R_0} (U'_{\text{inf}}(r))^2 \theta_{\text{inf}}^{n-1}(r) dr = \frac{1}{U_{\text{inf}}(R_0)} > \frac{1}{U_{\text{inf}}(R)} > 0$$

où R est la largeur du voisinage tubulaire de la zone de transition, car U_{inf} est évidemment croissante.

On a donc finalement

$$\int_{T_{\text{inf}}} |\nabla G_{\text{inf}}|^2 dV_{\text{inf}} = \text{Vol}(\alpha_{ij}) \frac{(P - Q)^2}{U_{\text{inf}}(R_0)} \geq \frac{\text{Vol}(\alpha_{ij}) \Phi_0^2(0)}{16U_{\text{inf}}(R)} (b_i - b_j)^2,$$

car

$$(P - Q)^2 \geq \frac{\Phi_0^2(0)(b_i - b_j)^2}{4}.$$

Ceci conclut la démonstration de notre lemme en posant

$$A_2 = \frac{\text{Vol}(\alpha_{ij})\Phi_0^2(0)}{16U_{\text{inf}}(R)} = \frac{\text{Vol}(\alpha_{ij})\Phi_0^2(0)}{16 \int_0^R \frac{du}{\theta_{\text{inf}}^{n-1}(u)}},$$

qui ne dépend que de la géométrie du tube T et des valeurs de ϕ_0 sur α . On peut écrire cette constante plus explicitement dès que l'on connaît une expression de θ ; par exemple lorsque la courbure sectionnelle de M et la courbure moyenne de α sont constantes. \square

D'après le lemme 2.3.6, cette inégalité implique

$$\int_T |\nabla G_T|^2 dV_T \geq A_2(b_i - b_j)^2,$$

qui elle-même implique le lemme 2.3.4. \square

Pour conclure la démonstration du Lemme 2.3.3, il nous faut minorer l'énergie de g_i . Nous aurons donc besoin d'une expression plus précise de son gradient qui la relie à l'énergie de G_i que nous venons de minorer. Comme par construction des coordonnées de Fermi $\frac{\partial}{\partial r}$ est normalisé, on a

$$\int_{T_{ij}^+} |\nabla g_i|^2 \geq \int_0^R \int_{\alpha_{ij}} \left(\frac{\partial g_i}{\partial r} \right)^2 \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) dr.$$

Nous obtenons alors, de nouveau à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{T_{ij}^+} |\nabla g_i|^2 \geq \int_0^R \frac{\left(\int_{\alpha_{ij}} \frac{\partial g_i}{\partial r} \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right)^2}{V_{ij}(r)} dr.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{dG_i}{dr}(r) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right) = \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} \frac{\partial g_i(x, r)}{\partial r} \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \\ &+ \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \left[\frac{1}{\theta^{n-1}(x, r)} \frac{\partial(\theta^{n-1}(x, r))}{\partial r} - \frac{V'_{ij}(r)}{V_{ij}(r)} \right] \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \\ &= \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} \frac{\partial g_i(x, r)}{\partial r} \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) + \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \beta_{ij}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x), \end{aligned}$$

où

$$\beta_{ij}(x, r) = \frac{1}{\theta^{n-1}(x, r)} \frac{\partial(\theta^{n-1}(x, r))}{\partial r} - \frac{V'_{ij}(r)}{V_{ij}(r)}$$

est la *variation radiale* de l'élément de volume θ que nous avons définie au paragraphe 1.3. D'après ci-dessus, on a donc

$$\int_{T_{ij}^+} |\nabla g_i|^2 \geq \int_0^R \left(\frac{dG_i}{dr} - \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \beta_{ij}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right)^2 V_{ij}(r) dr. \quad (2.6)$$

Or, comme pour tout $r \in [0, R]$, l'aire de l'hypersurface à distance r de α_{ij} est strictement positif :

$$V_{ij}(r) > 0,$$

l'application

$$f \rightarrow \sqrt{\int_0^R f^2(r) V_{ij}(r) dr}$$

définit une norme euclidienne sur l'ensemble des fonctions continues de $[0, R]$ dans \mathbb{R} . D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{T_{ij}^+} |\nabla g_i|^2} &\geq \sqrt{\int_0^R \left| \frac{dG_i}{dr} \right|^2 V_{ij}(r) dr} \\ &- \sqrt{\int_0^R \left| \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \beta_{ij}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right|^2 V_{ij}(r) dr}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cas 2.a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_0^R \left| \frac{dG_i}{dr} \right|^2 V_{ij}(r) dr} - \sqrt{\int_0^R \left| \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \beta_{ij}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right|^2 V_{ij}(r) dr} \\ \geq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^R \left| \frac{dG_i}{dr} \right|^2 V_{ij}(r) dr} \end{aligned}$$

L'inégalité (2.7) devient alors

$$\int_{T_{ij}^+} |\nabla g_i|^2 \geq \frac{1}{4} \int_{T_{ij}^+} |\nabla G_i|^2 \geq \frac{A_2}{4} (b_i - b_j)^2$$

d'après le Lemme 2.3.4.

Cas 2.b :

$$\sqrt{\int_0^R \left| \frac{dG_i}{dr} \right|^2 V_{ij}(r) dr} - \sqrt{\int_0^R \left| \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \beta_{ij}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right|^2 V_{ij}(r) dr}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^R \left| \frac{dG_i}{dr} \right|^2 V_{ij}(r) dr}$$

On a alors

$$\sqrt{\int_0^R \left| \frac{1}{V_{ij}(r)} \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \beta_{ij}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right|^2 V_{ij}(r) dr} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^R \left| \frac{dG_i}{dr} \right|^2 V_{ij}(r) dr},$$

d'où d'après le Lemme 2.3.4,

$$\int_0^R \frac{1}{V_{ij}(r)} \left| \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r) \beta_{ij}(x, r) \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \right|^2 V_{ij}(r) dr \geq \frac{A_2(b_i - b_j)^2}{4}.$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur chaque tranche horizontale, cette majoration devient

$$\begin{aligned} \frac{A_2(b_i - b_j)^2}{4} &\leq \int_0^R \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)^2 \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) \frac{\int_{\alpha_{ij}} \beta_{ij}(x, r)^2 \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x)}{V_{ij}(r)} dr \\ &\leq \mathcal{K}^2 \int_0^R \int_{\alpha_{ij}} g_i(x, r)^2 \theta^{n-1}(x, r) dV_\alpha(x) dr, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{K} = \sup_{(x, r) \in T_{ij}^+} |\beta_{ij}(x, r)| < +\infty$$

est finie car T_{ij} est compact, et ne dépend que de la géométrie de T_{ij} . On a donc

$$\|g_i\|_{T_{ij}^+}^2 \geq A_3(b_i - b_j)^2,$$

avec

$$A_3 = \frac{A_2}{4\mathcal{K}^2} = \frac{\Phi_0(0)^2 \text{Vol}(\alpha_{ij} \times [0, R])}{64\mathcal{K}^2}.$$

En posant

$$2A = \min \left\{ A_1, \frac{A_2}{4\lambda_1}, A_3 \right\},$$

qui ne dépend que de la géométrie du tube T_{ij} et des valeurs de ϕ_0 sur α_{ij} , nous obtenons donc

$$\|\nabla g_i\|_{T_{ij}^+}^2 + \|\nabla g_j\|_{T_{ij}^-}^2 + \lambda_1 (\|g_i\|_{T_{ij}^+}^2 + \|g_j\|_{T_{ij}^-}^2) \geq 2\lambda_1 A(b_i - b_j)^2.$$

Ceci conclut la preuve du lemme 2.3.3

□

La minoration (2.2) devient alors

$$\sum_i \|\nabla g_i\|^2 \geq \lambda_1 A \sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2,$$

où A défini ci-dessus ne dépend que de \mathcal{K} , R , $\text{Vol}(T_{ij})$, $\text{Vol}(\alpha_{ij})$, λ_1 et $\Phi_0(0)$, ce qui conclut la démonstration du Lemme 2.3.2. \square

Achevons la preuve du Théorème 2.1.9. D'après l'inégalité (2.1),

$$\frac{\eta}{\lambda_1} \sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2 \leq (\delta + \epsilon) \|f_\epsilon\|^2 = (\delta + \epsilon) \sum_i a_i^2,$$

donc

$$\eta \sum_i \|g_i\|_{C_i}^2 = \eta \sum_i c_i^2 \leq (\delta + \epsilon) \sum_i a_i^2.$$

On a alors

$$\sum_i a_i^2 = \sum_i b_i^2 + \sum_i c_i^2 \leq \sum_i b_i^2 + \left(\frac{\delta + \epsilon}{\eta}\right) \sum_i a_i^2.$$

Si $\delta \geq \eta$, comme $\mu_0(G) \leq v$ (cela découle directement de la définition, voir paragraphe 2.1.3), on a

$$\delta \geq \frac{\eta}{v} \mu_0(G),$$

ce qui conclut évidemment notre démonstration (indépendamment des lemmes précédents). Sinon, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$\frac{\delta + \epsilon}{\eta} < 1.$$

On obtient alors

$$\sum_i a_i^2 \leq \frac{1}{1 - \frac{\delta + \epsilon}{\eta}} \sum_i b_i^2.$$

L'inégalité (2.1) devient

$$\delta + \epsilon \geq \frac{\eta}{\lambda_1} \frac{\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2} \geq \left(1 - \frac{\delta + \epsilon}{\eta}\right) \frac{\eta \lambda_1 A \sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2}{\lambda_1 \sum_i b_i^2}.$$

Nous rappelons que par définition,

$$\mu_0 = \inf \frac{\sum_{i \sim j} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{\sum_i \alpha_i^2},$$

où (α_i) parcourt l'ensemble des familles positives à support compact dans G (voir section 2.1.3).

On obtient donc en faisant tendre ϵ vers 0 :

$$\delta \geq (\eta - \delta)A\mu_0,$$

soit

$$\delta(1 + A\mu_0) \geq A\eta\mu_0,$$

soit finalement

$$\delta \geq \frac{\eta A}{1 + A\mu_0} \mu_0 \geq \eta A \mu_0, \quad (2.8)$$

où A ne dépend que de λ_0 , de $\Phi_0(0)$ et de la géométrie des zones de transitions d'après les lemmes précédents. \square

2.4 Applications et Généralisations

2.4.1 Bas du spectre des revêtements

Nous avons développé cette théorie des variétés modelées sur un graphe entre autres pour généraliser et préciser certains résultats obtenus par R. Brooks, que nous présentons maintenant. Dans l'article [Bro85], il démontre le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 (Brooks, 1984). *Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement galoisien, et ϕ_0 une fonction $\lambda_0(N)$ -harmonique positive sur M . Soit $D \subset M$ un domaine fondamental pour p , supposons qu'il existe un compact $K \subset D$ tel que*

$$\mathfrak{h}_{\phi_0}(D \setminus K) > 0.$$

Alors $\lambda_0(M) = \lambda_0(N)$ si et seulement si le groupe d'automorphisme de p est moyennable.

Pour un domaine $O \subset M$, la constante $\mathfrak{h}_{\phi_0}(O)$ ci-dessus est définie par

$$\mathfrak{h}_{\phi_0}(O) = \inf_S \left\{ \frac{\int_S (\phi_0)^2 dV_{n-1}}{\int_{\text{int}(S)} (\phi_0)^2 dV_n} \right\},$$

où S parcourt l'ensemble des hypersurfaces compactes strictement incluse dans O , et $\text{int}(S)$ désigne l'ouvert bordé par S qui n'intersecte pas ∂O . Il s'agit d'une constante de Cheeger pour un Laplacien renormalisé ; Brooks montre que $\lambda_0(M) = \lambda_0(N)$ si et seulement si $\mathfrak{h}_{\phi_0}(M) = 0$. L'hypothèse

$$\mathfrak{h}_{\phi_0}(D \setminus K) > 0,$$

est difficile à expliciter. Remarquons qu'il s'agit encore d'une hypothèse sur la géométrie d'un domaine fondamental. Elle implique, comme le souligne Brooks lui-même, que le trou spectral de N est strictement positif. Le seul exemple qu'il traite entièrement Brooks est celui des variétés hyperboliques

sans cusps. Une étude plus poussée de la démonstration de Brooks montre qu'elle n'est pas valable lorsque ∂D n'est pas compact et son rayon d'injectivité normale tend vers 0 dans une direction de ∂D . En particulier, dans le cas où N est une variété hyperbolique et où le groupe d'automorphisme Γ contient des éléments paraboliques (chaque domaine rencontre alors une infinité de ses copies au voisinage du cusp), sa démonstration n'est pas valable. Nous avons vu au paragraphe 2.1.4 que, dans le cas des revêtements, notre Théorème 2.1.9 implique le corollaire :

Corollaire 2.4.2. *Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien galoisien, dont le groupe d'automorphisme Γ est de type fini. Supposons que $\lambda_0(N) < \lambda_1(N)$, et notons ϕ_0 la première fonction propre associée à $\lambda_0(N)$. S'il existe un domaine fondamental C pour l'action de Γ tel que le relevé de ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann sur ∂C , alors*

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(N),$$

avec égalité si et seulement si Γ est moyennable.

Les résultats du prochain chapitre que nous avons déjà cités montrent qu'un tel domaine existe souvent :

Théorème 2.4.3. *Soit N une variété riemannienne de volume infini à courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité et de trou spectral strictement positifs, et ϕ_0 sa première fonction propre. Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien de groupe d'automorphisme G , si le gradient de ϕ_0 est simplement stratifié sur N , il existe un domaine fondamental pour G sur lequel ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann. De plus, lorsque les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k du tenseur de courbure, pour k assez grand, sont uniformément bornées, ϕ_0 est génériquement de Morse et son gradient est alors simplement stratifié.*

Nous retrouvons donc un résultat identique à celui de Brooks lorsque la métrique est générique, avec des hypothèses géométriques plus habituelles qu'une borne sur la constante \mathfrak{h}_ϕ . De plus, la version complète du Théorème 2.1.9 nous donne de surcroît un contrôle intéressant sur l'écart entre les bas du spectre à l'aide de la combinatoire du groupe d'automorphisme du revêtement, qui affine le résultat de Brooks. De plus, notre construction s'applique aussi à d'autres cas que les revêtements : les cellules peuvent être quelconques, et les graphes ne sont pas nécessairement les graphes de Cayley d'un groupe. Lorsque la variété comprend des cusps, s'ils sont à l'intérieur d'un domaine fondamental et si l'on sait que la fonction propre de Morse, notre méthode s'adapte assez bien (on montre que le gradient de la fonction propre reste simplement stratifié ; mais les notations deviennent très lourdes). En revanche, notre théorème de généricité nécessiterait des hypothèses plus précises sur les bouts à l'infini pour traiter le cas des variétés à cusp. Enfin, de

même que dans les travaux de Brooks, nos résultats ne nous permettent pas pour le moment de traiter le cas où le groupe d'automorphisme du revêtement contient un élément parabolique.

Pour obtenir un résultat complet, il suffirait que pour tout revêtement, il existe un domaine fondamental sur lequel la première fonction propre de la variété quotient vérifie les conditions de Neumann. Si le gradient d'une fonction analytique est toujours stratifié (voir Section 1.2, Question 1), nous retrouvons l'exemple de Brooks dans le cas des variétés hyperboliques sans cusp. Si nous pouvons montrer que la première fonction propre a un gradient simplement stratifié sous quelques hypothèses géométriques (courbure minorée, rayon d'injectivité positif), nous obtiendrions une généralisation plus large du résultat de Brooks.

Il est raisonnable de penser qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une métrique générique ou analytique. On pourrait, par un argument d'approximation (voir le chapitre suivant), espérer utiliser le cas générique pour avoir le même résultat pour une métrique générale. Cependant, on a vu que la constante A construites lors de la démonstration de la minoration de $\lambda_0(M) - \lambda_0(N)$ dépendent de façon cruciale de la géométrie des zones de transitions. Dans le cas où ϕ_0 n'est pas de Morse, lorsque l'on approxime la métrique par une suite de métriques génériques, les zones de transitions correspondant aux fonctions propres de Morse ainsi obtenues ont toutes les chances de dégénérer. Il nous manque donc plus d'information sur le comportement des points critiques de ϕ_0 dans le cas général pour pouvoir trouver un domaine fondamental C adapté. Nous reparlerons de cette question dans notre dernier chapitre.

Il nous manque aussi une méthode permettant de traiter le cas où le bord du domaine a un rayon d'injectivité qui tend vers 0 à l'infini (par exemple lorsque le groupe d'automorphisme d'un revêtement entre deux variétés hyperboliques contient un élément parabolique). Cela nécessite une étude supplémentaire du comportement de la fonction propre dans ces «bouts fins» qui nous permettrait de trouver un domaine fondamental adapté.

2.4.2 Variétés à découpages bornés

Nous avons démontré notre théorème dans le cas où le graphe est à valence constante, et où toutes les cellules sont identiques. Lorsque les cellules sont de volume fini, la première fonction propre est constante (elle se recolle alors évidemment très bien!). Nous pouvons alors généraliser nos méthodes au cadre suivant :

Définition 2.4.1. *Soit $M^n = \cup_{i \in I} M_i$ une partitions en morceaux d'intérieur non vide, de volume fini, uniformément majoré par V_M et minoré par V_m , à bords lisses par morceaux, d'intérieurs disjoints, tels que le graphe d'adjacence des M_i (deux éléments sont reliés s'ils sont voisins au sens du para-*

graphe 1.2) soit localement fini à valence bornée par $v > 0$. On dit que le découpage de M dans les M_i est spectralement borné s'il existe des constantes η, V, R, \mathcal{K} telles que pour tous $i, j \in I$, on ait :

1. le volume des ∂M_i est inférieur à V ;
2. le trou spectral de M_i est supérieur à $\eta > 0$;
3. pour tous $i, j \in G, i \sim j$, il existe des **zones de transition**

$$\alpha_{ij} \subset \partial M_i \cap \partial M_j$$

ouvertes d'adhérences compactes, qui admettent des voisinages tubulaires T_{ij} disjoints de largeur R ;

4. il existe une fonction $\theta_{\text{inf}} : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, valant 1 en 0, telle que sur tout tube T_{ij} au voisinage de la zone de transition α_{ij} , l'élément de volume θ_{ij} vérifie, en coordonnées de Fermi :

$$r \mapsto \frac{\theta_{\text{inf}}(r)}{\theta(x, r)}$$

est décroissante pour tout $x \in \alpha_{ij}$.

5. les variations radiales de l'élément de volume (voir Définition 1.3.1) sont bornées par \mathcal{K} .

Les méthodes développées à la section 2.2 permettent alors d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 2.4.4. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe A_1 et A_2 ne dépendant que de $n, v, V_m, V, R, \mathcal{K}$ et θ_{inf} telles que*

$$A_1 \eta \mu_0(G) \leq \lambda_0(M) \leq A_2 \mathfrak{h}(G).$$

Démonstration. La preuve de la majoration est identique à celle du théorème 2.1.8 : il suffit pour cela de la reproduire en remplaçant ϕ_ϵ par la fonction constante 1 (qui se recolle évidemment).

La preuve de la minoration est légèrement différente : nous prenons ici $\phi_0 = 1$, qui n'est plus normalisée. Soit f_ϵ une fonction à support compact dans M d'énergie ϵ -proche de $\lambda_0 = \lambda_0(M)$. La discrétisation de f_ϵ sera alors définie, pour tout $i \in G$, par :

$$a_i^2 = \frac{1}{\text{Vol}(C_i)} \int_{C_i} f_\epsilon^2,$$

$$b_i = \frac{1}{\text{Vol}(C_i)} \int_{C_i} f_\epsilon,$$

et

$$c_i^2 = \frac{1}{\text{Vol}(C_i)} \int_{C_i} (f_\epsilon - b_i)^2.$$

On pose de nouveau

$$g_i = f_\epsilon - b_i.$$

Notre nouvelle normalisation permet que, de nouveau,

$$a_i^2 = b_i^2 + c_i^2,$$

et le quotient de Rayleigh de f_ϵ s'écrit :

$$\lambda_0(M) + \epsilon \geq \frac{\int_M |\nabla f_\epsilon|^2}{\int_M |f_\epsilon|^2} = \frac{\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2}{\sum_i a_i^2 \text{Vol}(C_i)}. \quad (2.9)$$

L'étape clé de notre démonstration sera de nouveau le lemme suivant :

Lemme 2.4.5. *Il existe une constante b ne dépendant que de n, R, V_1, V_2 et κ telle que*

$$\sum_i \|\nabla g_i\|_{C_i}^2 \geq b \sum_{i \sim j} (b_i - b_j)^2.$$

Le recollement de la fonction 1 de par et d'autre de chaque composante de bord α_{ij} permet de reproduire exactement la preuve du lemme 2.3.2. Le reste de la démonstration s'adapte aisément. \square

On rappelle que d'après le théorème 2.1.7, on a

$$\mu_0(G) \geq \frac{\mathfrak{h}(G)^2}{2v}.$$

Ainsi, le résultat de ce théorème s'écrit encore :

$$A_1' \mathfrak{h}(G)^2 \leq \lambda_0(M) \leq C_2 \mathfrak{h}(G),$$

où le graphe G correspond à celui d'un découpage de M en morceaux de volume borné. Nous avons là un analogue discret de résultats plus connus de J. Cheeger et P. Buser : ils montrent par des méthodes analytiques que pour toute variété de dimension n dont la courbure de Ricci est minorée par $-\kappa$,

$$\frac{\mathfrak{h}^2(M)}{4} \leq \lambda_0(M) \leq C(n, \kappa) \mathfrak{h}(M),$$

avec

$$\mathfrak{h}(M) = \inf \frac{\text{Vol}_{n-1}(\partial M')}{\text{Vol}_n(M')},$$

où M' décrit l'ensemble des hypersurfaces bordant un domaine compact de M . La minoration vient du classique [Che70] et est valable quelle que soit M . La majoration est initialement un résultat de Buser ([Bus82]), mais

sous cette formulation, on en trouvera une démonstration plus directe dans [Can92]. Cependant, pour évaluer effectivement λ_0 à partir de ces estimées de la constante de Cheeger, il est toujours délicat de trouver une famille d'hyper-surfaces qui approchent $\mathfrak{h}(M)$ lorsque M n'est pas compacte. Notre résultat permet d'obtenir assez simplement des bornes sur le bas du spectre, en particulier de montrer qu'il est strictement positif lorsqu'il existe un découpage borné non moyennable. Il suggère aussi une méthode de calcul approché de $\lambda_0(M)$ par discrétisation en éléments finis, où il suffit de contrôler le volume des éléments et de leurs bords. Lorsque la variété comporte des cusps, cette méthode est alors plus efficace que les méthodes traditionnelles de discrétisation avec des boules de rayon constant (comme par exemple dans [Man05]), qui nécessitent de contrôler le comportement des fonctions propres à l'infini dans les cusps. En effet, dès que le «morceau» est de volume fini, notre méthode s'intéresse qu'au bord relatif de ces cusps à l'intérieur de la variété.

Chapitre 3

Domaines à bord, propriétés génériques et revêtements

*La science a eu de merveilleuses applications, mais la science qui n'aurait
en vue que les applications ne serait plus de la science, elle ne serait plus
que de la cuisine.*

H. Poincaré

Dans ce chapitre, nous commençons par caractériser le bas du spectre d'un domaine à bord à l'aide de fonctions λ -harmoniques positives. Puis nous montrons que sur une variété sans bord dont le trou spectral est strictement positif, pour une métrique générique la première fonction propre est de Morse. Ces deux résultats nous permettent d'obtenir le Théorème 3.3.1, qui pour tout revêtement riemannien galoisien $p : M \rightarrow N$, relie le bas du spectre de N à celui de domaines fondamentaux bien choisis.

3.1 Bas du spectre avec condition de Neumann au bord

3.1.1 Caractérisation par le spectre positif

Soit M une variété complète non compacte, dont le bord ∂M est compact et \mathcal{C}^1 par morceaux. On rappelle que nous disons qu'une fonction f sur M à valeurs réelles vérifie les *conditions de Neumann sur M* si et seulement si pour tout $x \in \partial M$,

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = g_x(\nabla f(x), \nu(x)) = 0$$

où $\nu(x)$ est la normale à ∂M en x . Lorsque la normale n'est définie qu'en dehors d'un ensemble de mesure nulle E (par exemple les coins de ∂M), nous disons encore qu'une fonction vérifie les conditions de Neumann si elle les vérifie en dehors de E . L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant, que nous adaptons de [Sul87] et qui donne une caractérisation importante du bas du spectre de M avec condition de Neumann :

Théorème 3.1.1. *Pour tout réel λ , il existe une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^∞ , λ -harmonique positive sur M avec condition de Neumann sur ∂M si et seulement si $\lambda \leq \lambda_0(M)$.*

On rappelle que nous notons

$$\lambda_0(M) = \inf_f \frac{\|\nabla f\|_{L^2(M)}^2}{\|f\|_{L^2(M)}^2}$$

où f parcourt l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans M , qui est le bas du spectre associé au problème de Neumann. On peut donc réécrire ce théorème sous la forme

$$\lambda_0(M) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \exists f \in \mathcal{C}^\infty(C), f > 0, \frac{\partial f}{\partial \nu} \equiv 0, \Delta f = \lambda f \right\}.$$

Lorsque $\partial M = \emptyset$, ce résultat est exactement le Théorème 2.1 de [Sul87] et était également démontré dans [CY75], p 345. Nous en présentons une démonstration détaillée, inspirée de celle esquissée dans [Sul87], §3-4. Elle utilise ce que l'on appelle communément le *mouvement brownien*.

Soit K un voisinage compact de ∂M dans M , et $(M_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une famille croissante d'ouverts relatifs de M contenant K , d'adhérence compacte et tels que

$$\bigcup_j M_j = M.$$

On note $\partial^1 M_j = \partial M \subset M_j$ et $\partial^2 M_j = \partial M_j \setminus \partial M$ qu'on suppose également \mathcal{C}^1 par morceaux. On notera encore

$$\lambda_0^j = \lambda_0(M_j) = \inf_f \frac{\|\nabla f\|_{L^2(M_j)}^2}{\|f\|_{L^2(M_j)}^2}$$

où f parcourt l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans $M_j = \overline{M_j} \setminus \partial^2 M_j$: cela correspond au bas du spectre du Laplacien avec *condition de Neumann* sur $\partial^1 M_j$ et de *Dirichlet* sur $\partial^2 M_j$. On a alors

$$\lambda_0(M) = \inf_j \lambda_0^j.$$

On note $p^j(x, y, t) = p_{M_j}(x, y, t)$ le *noyau de la chaleur* de M_j associé au problème mixte considéré, c'est-à-dire la solution fondamentale de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta f = -\frac{\partial f}{\partial t}.$$

On rappelle que nous utilisons un Laplacien défini positif, qui s'écrit sur \mathbb{R}^n muni de la métrique euclidienne

$$\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

On a alors pour tous $x, y \in M_j$ et $t > 0$,

$$p^j(x, y, t) = \sum_k e^{-\lambda_k^j t} \phi_k^j(x) \phi_k^j(y), \quad (3.1)$$

où ϕ_k^j est la fonction propre du Laplacien avec condition de Neumann sur $\partial^1 M_j$ et de Dirichlet sur $\partial^2 M_j$ associée à la valeur propre λ_k^j . Dans cette écriture, une valeur propre de multiplicité plus grande que 1 est répétée, associée à une base de fonctions propres correspondant à son espace propre. Pour tous $x, y \in M$ tels que $x, y \in M_j$ pour tous $j \geq j_0$, on note

$$p(x, y, t) = \inf_{j \geq j_0} p^j(x, y, t).$$

On appelle $p(x, y, t)$ ainsi défini le *noyau de la chaleur minimal* associé au problème de Neumann sur M .

3.1.2 Diffusion et fonctions λ -harmoniques

Les énoncés donnés dans ce paragraphe nécessiteraient, pour être prouvés, un développement de la *théorie de la diffusion* associée à un opérateur elliptique, qui passe entre autres par les *intégrales stochastiques*, bien plus long que ce qui est souhaitable ici. Nous nous contentons donc de présenter certaines définitions, les résultats et les idées clés de la démonstration. Nous invitons le lecteur à se référer à [Sul87] pour une présentation analogue à la nôtre dans le cas du problème sans bord, à [Mal75] et [Cha84] pour la construction du mouvement brownien à l'aide du noyau de la chaleur. Les bases de probabilités nécessaires à cette démonstration se trouvent par exemple dans [Bas95], chapitre I, et le détail de nos démonstrations à partir des intégrales stochastiques se trouve dans [Bas98] dans le cas d'ouverts de \mathbb{R}^d . La justification de leur adaptation aux variétés riemanniennes se trouve par exemple dans [Eme89].

Définition 3.1.1. Soit $j > 0$ et M_j l'un des domaines de M défini ci-dessus. Notons Ω l'ensemble des chemins continus de $\overline{\mathbb{R}}_+$ dans M et $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ défini pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$\tau(\omega) = \inf \{t > 0 : \omega(t) \in \partial^2 M_j\}. \quad (3.2)$$

Soit Ω^j l'ensemble des chemins de $\overline{\mathbb{R}}_+$ dans \overline{M}_j tels que

$$\forall t \geq \tau(\omega), \omega(t) = \omega(\tau(\omega)) \in \partial^2 M_j$$

et

$$\Omega_x^j = \{\omega \in \Omega^j : \omega(0) = x\}.$$

On appelle Ω^j l'ensemble des trajectoires dans M_j .

On appelle *cylindre* de Ω_x^j un ensemble de la forme

$$A = \{\omega \in \Omega_x^j : (\omega(t_1), \dots, \omega(t_k)) \in B\},$$

où $k \in \mathbb{N}$, et $B \subset (M_j)^k$ est un borélien, et les t_j sont des réels

$$0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_k.$$

Pour tout cylindre A de la forme précédente, on pose

$$\mathbb{P}_x^j(A) = \int_B p^j(x, y_1, t_1) p^j(y_1, y_2, t_2 - t_1) \dots p^j(y_{k-1}, y_k, t_k - t_{k-1}) dV(y_1) \dots dV(y_k),$$

où dV désigne la mesure canonique associée à la métrique de M . On peut montrer à partir de la propriété de semi-groupe des noyaux de la chaleur que \mathbb{P}_x^j s'étend en une unique *mesure de probabilité* sur la σ -algèbre de Ω_x^j engendrée par ses cylindres (voir [Cha84]). Ω^j est l'espace de Wiener sur M_j , et \mathbb{P}_x^j la mesure de Wiener en x .

On considère le processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ sur $(\Omega_x^j, \mathbb{P}_x^j)$ défini pour tout $\omega \in \Omega_x^j$ par

$$X_t(\omega) = \omega(t).$$

D'après la définition de \mathbb{P}_x^j , on a pour tout borélien B de M

$$\mathbb{P}_x^j(X_{t+s} \in B | X_t = z) = \int_B p^j(z, y, s) dV(y) = \mathbb{P}_z^j(\{X_s \in B\}) :$$

X_t est un processus de Markov de loi p^j .

On appelle **mouvement brownien** sur M_j (avec réflexion sur $\partial^1 M_j$, ce qui sera désormais sous-entendu) le processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ muni de la loi \mathbb{P}_x^j . Ce terme vient de ce que, dans un modèle physique statistique du type de celui du gaz parfait, $p(x, y, t) dV(y)$ est la densité de probabilité, pour une particule qui se trouvait en x à $t = 0$, de se trouver au voisinage de y au temps t .

Soit $f : M^j \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . En notant pour tous vecteurs $Y, Z \in T_x M$, $g_x(Y, Z) = Y \cdot Z$, la formule d'Itô pour le mouvement Brownien $(X_t)_{t \geq 0}$ s'écrit (voir [Bas95] p 49, [Eme89] p 34) s'écrit :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s - \int_0^t \Delta f(X_s) ds. \quad (3.3)$$

Le dernier terme de notre formule diffère de la formule de [Bas95] p 49 d'un facteur -2 : cela vient de ce que notre convention de signe pour le Laplacien est opposée à celle de Bass, et de ce que le mouvement brownien habituellement considéré lors de l'écriture de la formule d'Itô a pour probabilités de transitions la solution élémentaire de l'équation

$$-\frac{1}{2} \Delta f = \frac{\partial f}{\partial t},$$

alors que nous ne gardons pas ce facteur $\frac{1}{2}$ dans notre construction (voir par exemple [Bas98] p53).

D'après [Bas98] p 33, comme X_t est un brownien avec réflexion normale sur $\partial^1 M_j$, on peut écrire

$$dX_t = dW_t + \nu(X_t) dL_t,$$

où W_t est un brownien sans réflexion sur M_j , $\nu(X_t)$ est la normale rentrante à $\partial^1 M_j$ en X_t lorsque $X_t \in \partial^1 M_j$, et 0 ailleurs, et L_t le *temps local* sur $\partial^1 M_j$. Ce temps local est un processus positif croissant à variation bornée, strictement croissant si et seulement si $X_t \in \partial^1 M$, défini par

$$L_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{d(X_s, \partial^1 M_j) \leq \epsilon} ds,$$

où $d(X_s, \partial^1 M_j)$ désigne la distance de X_s à $\partial^1 M_j$ pour la distance induite par la métrique sur M . La formule (3.3) devient alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dW_s + \int_0^t \nabla f(X_t) \cdot \nu(X_t) dL_t - \int_0^t \Delta f(X_s) ds, \quad (3.4)$$

Supposons f harmonique sur M^j , avec condition de Neumann sur $\partial^1 M^j$, c'est à dire

$$\nabla f \cdot \nu \equiv 0$$

sur $\partial^1 M^j$. En intégrant (3.4) sur Ω_x^j , on obtient

Théorème 3.1.2. *Pour toute fonction f harmonique sur M^j avec condition de Neumann sur $\partial^1 M^j$ et pour tout $t > 0$,*

$$f(x) = \mathbb{E}_x^j(f(X_t)) = \int_{\Omega_x^j} f(\omega(t)) d\mathbb{P}_x^j(\omega) = \int_M p^j(x, y, t) dV(y).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\mathbb{E}_x^j(f(X_0)) = f(x)$$

par définition du mouvement brownien issu de x et que

$$\int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dW_s$$

est une martingale nulle en $t = 0$. Les deux autres termes de (3.4) disparaissent pour f harmonique sur M^j avec condition de Neumann sur $\partial^1 M^j$. \square

Considérons la variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie en (3.2). C'est un temps d'arrêt (voir [Bas95] p 13) vérifiant

$$\mathbb{P}_x^j(\tau > t) = \int_M p^j(x, y, t) dV(y).$$

Puisque

$$p^j(x, y, t) = \sum_k e^{-\lambda_k^j t} \phi_k^j(x) \phi_k^j(y),$$

on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_0^j t} p^j(x, y, t) = \phi_0^j(x) \phi_0^j(y).$$

En particulier, comme $\phi_0 > 0$ sur M_j° ,

$$\mathbb{P}_x^j(\{\tau > t\}) \sim C e^{-\lambda_0^j t} : \quad (3.5)$$

τ est fini presque sûrement. Le théorème d'arrêt de Doob (voir [Bas95] p 29) nous donne alors

Théorème 3.1.3. *Pour tout $\lambda < \lambda_0(M_j)$ et toute fonction f harmonique sur M_j avec condition de Neumann sur $\partial^1 M^j$,*

$$f(x) = \mathbb{E}_x^j(f(X_\tau)) = \int_{\Omega_x^j} f(\omega(\tau(\omega))) d\mathbb{P}_x^j(\omega) = \int_{\partial M_j} f(\xi) d\mu_{j,x}(\xi),$$

où $\mu_{j,x}$ est la mesure de probabilité sur $\partial^2 M_j$ définie par

$$\mu_{j,x}(B) = \mathbb{E}_x^j(\mathbf{1}_{\{X_\tau \in B\}}) = \mathbb{P}_x^j(\{\omega \in \Omega_x^j | \exists t > 0, \omega(t) \in B\})$$

pour tout borélien B de ∂M_j .

Réciproquement, si f est positive et non identiquement nulle sur $\partial^2 M_j$, on pose pour tout $x \in M_j$

$$f(x) = \int_{\partial M_j} f(\xi) d\mu_{j,x}(\xi).$$

On montre qu'on obtient alors une fonction harmonique sur M_j , qui prolonge f , avec conditions de Neumann sur $\partial^1 M_j$ et continue sur $\overline{M_j}$. On montre alors que f est strictement positive sur l'intérieur de M_j . On appelle $\mu_{j,x}$ la **mesure de Poisson**, ou *mesure harmonique*, sur $\partial^2 M_j$ (avec réflexion sur $\partial^1 M_j$) issue de x . La construction que nous venons d'en présenter s'appelle la *méthode de balayage de Poincaré*.

Soit $\lambda < \lambda_0(M_j)$, nous modifions légèrement cette démonstration pour obtenir des fonctions λ -harmoniques sur M_j . Pour toute fonction f positive de classe \mathcal{C}^2 , on considère le processus aléatoire $(Y_t)_{t \geq 0}$ sur Ω_x^j à valeur dans \mathbb{R} défini par

$$Y_t = e^{\lambda \min(t, \tau)} f(X_t),$$

où X_t est toujours le mouvement brownien avec réflexion défini précédemment. La formule d'Itô s'écrit désormais

$$e^{\lambda t} f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t e^{\lambda s} \nabla f(X_s) \cdot dX_s + \int_0^t \lambda e^{\lambda s} f(X_s) ds - \int_0^t e^{\lambda s} \Delta f(X_s) ds. \quad (3.6)$$

De même que précédemment, si f est λ -harmonique (i.e. $\Delta f = \lambda f$) avec condition de Neumann en $\partial^1 M^j$, et en intégrant (3.6) sur Ω_x^j on obtient

Théorème 3.1.4. *Pour toute fonction λ -harmonique f sur M^j avec condition de Neumann sur $\partial^1 M^j$ et pour tout $t > 0$,*

$$f(x) = \mathbb{E}_x^j(e^{\lambda t} f(X_t)) = \int_{\Omega_x^j} e^{\lambda t} f(\omega(t)) d\mathbb{P}_x^j(\omega).$$

Pour tout $\lambda < \lambda_0^j$, d'après (3.5) $e^{\lambda \tau} f(X_\tau)$ est sommable : on obtient donc de même que précédemment

Théorème 3.1.5. *Pour tout $\lambda < \lambda_0^j$, et pour toute fonction λ -harmonique f sur M^j avec condition de Neumann en $\partial^1 M^j$,*

$$f(x) = \mathbb{E}_x^j(e^{\lambda\tau} f(X_\tau)) = \int_{\Omega_x^j} e^{\lambda\tau(\omega)} f(\omega(\tau(\omega))) d\mathbb{P}_x^j(\omega) = \int_{\partial M_j} f(\xi) d\mu_{j,x}^\lambda(\xi),$$

où $\mu_{j,x}^\lambda$ est la mesure (finie, non normalisée) définie pour tout borélien B de ∂M_j par :

$$\mu_{j,x}^\lambda(B) = \mathbb{E}_x^j(e^{\lambda\tau} \mathbf{1}_{\{X_\tau \in B\}}) = \int_{\Omega_x^j} e^{\lambda\tau(\omega)} \mathbf{1}_{\{\omega(\tau(\omega)) \in B\}} d\mathbb{P}_x^j(\omega).$$

Pour tout j , pour tout $\lambda < \lambda_0(M) \leq \lambda_0(M_j)$, soit f_j une fonction positive non identiquement nulle sur $\partial^2 M_j$. Grace au Théorème 3.1.5, on peut la prolonger en une fonction λ -harmonique strictement positive que nous noterons toujours f_j sur l'intérieur de M_j , continue sur $\overline{M_j}$, avec condition de Neumann sur $\partial^1 M_j = \partial M$. Il s'agit maintenant de faire converger une suite de telles fonctions $(f_j)_{j \geq 0}$ vers une fonction λ -harmonique (avec condition de Neumann) définie globalement sur M : c'est l'objet du prochain paragraphe.

Remarque 3.1.1. L'hypothèse

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \equiv 0$$

sur $\partial^1 M_j$ est nécessaire pour que le théorème 3.1.5 soit valide ; sans cela il reste dans la formule de Ito (3.6) un terme de bord difficilement contrôlable.

3.1.3 Principe de Harnack et démonstration du Théorème de Sullivan

Fixons $x_0 \in K \subset M_j$ pour tout j . Le résultat suivant, que nous ne démontrerons pas, est tiré de [Sul87], p 336 lorsque $\partial^1 M = \emptyset$. Il reste vrai pour $\partial^1 M \neq \emptyset$, avec condition de Neumann sur $\partial^1 M$ (voir [Bas98], Chapitre 2).

Proposition 3.1.6. *Soit $x_0 \in M_j$ fixé, et $x \in M_j$.*

Les mesures $\mu_{j,x}$ et μ_{j,x_0} sont équivalentes, et la dérivée de Radon-Nikodym

$$\psi_{j,x}(\xi) = \frac{d\mu_{j,x}}{d\mu_{j,x_0}}(\xi)$$

est telle que à ξ fixé, la fonction $x \mapsto \psi_{j,x}(\xi)$ est positive et harmonique sur M_j , et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{M_j} \setminus \{\xi\}$, nulle sur $\partial^2 M_j \setminus \{\xi\}$ et qui admet un pôle en ξ .

De même, si on pose

$$\psi_{j,x}^\lambda(\xi) = \frac{d\mu_{j,x}^\lambda}{d\mu_{j,x_0}^\lambda}(\xi),$$

alors pour tout ξ fixé la fonction $x \mapsto \psi_{j,x}^\lambda(\xi)$ est positive et λ -harmonique sur M_j , et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{M_j} \setminus \{\xi\}$, nulle sur $\partial^2 M_j \setminus \{\xi\}$ et qui admet un pôle en ξ .

Corollaire 3.1.7 (Principe de Harnack). *Soit $\lambda < \lambda_0^j$, soit f une fonction positive λ -harmonique sur M_j , continue sur $\overline{M_j}$. On a alors*

$$f(x) = \int_{\partial M_j} f(\xi) \psi_{j,x}^\lambda(\xi) d\mu_{j,x_0}^\lambda(\xi).$$

En particulier, dans un compact de M_j contenant x_0 , les valeurs de f sont des combinaisons convexes de $\psi_{j,x}^\lambda(\xi)$ à coefficients en ξ fixes, et $\psi_{j,x}^\lambda(\xi)$ est bornée (en x) sur ce compact.

Ce principe de Harnack va nous permettre d'obtenir une convergence uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions λ -harmoniques.

Démonstration du Théorème 3.1.1. On sait que la suite $\lambda_0^j = \lambda_0(M_j)$ est décroissante, et qu'on a

$$\lambda_0(M) = \inf_j \lambda_0(M_j).$$

Soit $i > 0$, et $\lambda < \lambda_0$, on a $\lambda < \lambda_0^j$ pour tout $j > 0$. D'après la construction précédente, pour tout $j > i$, il existe une fonction λ -harmonique f_j strictement positive sur M_j avec condition de Neumann sur ∂M et valant 1 en x_0 . On prolonge les $(f_j)_{j>0}$ en des fonctions continues à support compact dans M . Comme M est complète, il existe une fonction f vers laquelle (quitte à extraire une sous-suite) la suite des (f_j) converge simplement. Comme les $(f_j)_{j>i}$ sont λ -harmoniques sur M_j , d'après le principe de Harnack ci-dessus la suite converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans l'intérieur de M_j et contenant x_0 . Par convergence dominée, f est alors λ -harmonique sur tout compact de M_j , avec condition de Neumann sur ∂M , ce pour tout $j > 0$.

Pour $\lambda = \lambda_0$, on considère une suite croissante de réels $(\lambda^n)_{n>0}$, avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \lambda_0,$$

et une suite $(f_n)_{n>0}$ de fonctions λ^n -harmoniques positives sur M , valant 1 en x_0 , construites comme précédemment. Quitte à extraire une sous-suite, les (f_n) convergent uniformément sur tout compact vers une fonction positive f_0 qui, par convergence dominée, est λ_0 -harmonique sur M .

La réciproque découlera du lemme suivant :

Lemme 3.1.8. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une fonction λ -surharmonique positive f sur M_j : pour tout $x \in M_j$,*

$$\Delta f \geq \lambda f,$$

et qui vérifie les conditions de Neumann sur $\partial M = \partial^1 M_j$. Alors

$$\lambda_0(M_j) \geq \lambda.$$

Démonstration. Pour tout $t > 0$, en intégrant la formule (3.6), on obtient

$$f(x) \geq \mathbb{E}_x^j(e^{\lambda t} f(X_t)) = \int_{M_j} e^{\lambda t} f(y) p^j(x, y, t) dV(y) + \int_{\Omega_x^j} e^{\lambda \tau(\omega)} f(\omega(\tau(\omega))) \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}} d\mathbb{P}_x^j(\omega).$$

On a donc pour tout t positif,

$$f(x) \geq \int_{M_j} e^{\lambda t} f(y) p^j(x, y, t) dV(y).$$

Comme $f(x)$ est finie et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_0^j t} p^j(x, y, t) = \phi_0^j(x) \phi_0^j(y),$$

avec $\phi_0^j > 0$ sur $\overset{\circ}{M}_j$, on a nécessairement $\lambda \leq \lambda_0^j$, ce qui conclut la démonstration du lemme 3.1.8. Comme ceci est valable pour tout $j \in \mathbb{N}$, cela conclut la preuve du théorème 3.1.1. \square

\square

L'une des applications classiques de ce théorème est le résultat suivant :

Corollaire 3.1.9. *Soit N une variété non compacte (éventuellement à bord) et $p : M \rightarrow N$ un revêtement fini, alors*

$$\lambda_0(M) = \lambda_0(N).$$

Lorsque N a un bord, le bas du spectre est évidemment pris pour le problème de Neumann.

Démonstration. Toute fonction λ -harmonique positive sur N se relève en une fonction λ -harmonique sur M : le théorème 3.1.1 assure donc, quel que soit le revêtement, que

$$\lambda_0(M) \geq \lambda_0(N).$$

De plus, comme le revêtement est fini, toute fonction \mathcal{C}^∞ à support compact sur N se relève en une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact sur M . Le principe du min-max (voir Section 1.1) nous donne alors l'autre inégalité. \square

3.2 Propriétés génériques de la première fonction propre

Soit (M^n, g_0) une variété riemannienne de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq \frac{n}{2} + 2$, complète non compacte sans bord, de volume infini, dont le trou spectral pour le Laplacien Δ_{g_0} associé à g_0 est strictement positif : il existe une première fonction propre $\phi_0 \in \mathcal{H}^1(M)$ associée au bas du spectre $\lambda_0(g_0)$, et $\lambda_1(g_0) >$

$\lambda_0(g_0) > 0$. De façon équivalente, le bas du spectre essentiel $\lambda_0^{ess}(g_0)$ de Δ_{g_0} est strictement supérieur à $\lambda_0(g_0)$. Nous supposons de plus que les normes des $k - 1$ premières dérivées covariantes du tenseur de Riemann sont uniformément bornées. L'objectif de cette section est de montrer que pour une métrique générique au voisinage de notre métrique de départ, la première fonction propre est de Morse. Pour donner du sens à une telle affirmation, nous aurons besoin d'une topologie particulière sur l'ensemble des métriques sur M , adaptée à la situation non compacte : la *topologie \mathcal{C}^k -forte*, que nous définirons au premier paragraphe. Nous montrerons en particulier que, pour cette topologie, g_0 admet un voisinage sur lequel le trou spectral est strictement positif. Nous rappellerons aussi quelques résultats sur les espaces de Sobolev des variétés non compactes dont nous aurons besoin par la suite. Le deuxième paragraphe est consacré à la preuve du théorème de généricité.

3.2.1 Espaces de Sobolev sur une variété riemannienne

Soit (M, g_0) une variété riemannienne de classe \mathcal{C}^k , que nous ne supposons pas compacte. Nous définissons les topologies dont nous aurons besoin pour démontrer notre théorème de généricité : celle des espaces de Sobolev pour les fonctions sur M , et une topologie « forte » sur l'espace des métriques sur M .

Pour toute p -forme différentielle $\alpha : (TM)^p \rightarrow \mathbb{R}$, et pour tout système de carte $(x_i)_{i=1..n}$ au voisinage de $x \in M$, on note

$$|\alpha|_g^2(x) = \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p=1}^n g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} \alpha_{j_1 \dots j_p}, \quad (3.7)$$

où on a noté

$$g^{ij} = (g^{-1})_{ij}.$$

Par définition, on a alors pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{R})$,

$$|d\phi|_g^2(x) = g_x(\nabla\phi, \nabla\phi) = |\nabla\phi|_g^2.$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$, avec $k \geq 2$. On note $\nabla^0\phi = \phi$, et pour tout $2 \leq p \leq k$,

$$\nabla^p\phi = \nabla^{p-1}d\phi : (TM)^p \rightarrow \mathbb{R}$$

la $p - 1$ -ème dérivée covariante de $d\phi$. C'est une p -forme linéaire.

On définit alors la **norme de Sobolev** d'ordre k de la fonction ϕ par :

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}^k(g_0)}^2 = \sum_{p=0}^k \int_M |\nabla_{g_0}^p \phi|_{g_0}^2(x) dv_{g_0}(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

On note

$$\mathcal{C}^{k,\infty}(g_0) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}); \|\phi\|_{\mathcal{H}^k(g_0)} < \infty \right\}.$$

Définition 3.2.1. On appelle *espace de Sobolev d'ordre k* le complété de $\mathcal{C}^{k,\infty}(g_0)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(g_0)}$. On note cet espace $\mathcal{H}^k(g_0)$, c'est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(g_0)}$.

Pour tous $p \geq q \geq 0$, on a évidemment $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{H}^q$. Notons que la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(g_0)}$ fait intervenir les $k - 1$ premières dérivées de la métrique g_0 . On a par définition $H^0(g_0) = L^2(M, g_0)$, et $\mathcal{H}^1(M)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des fonctions de carré sommable dont le gradient au sens des distributions est de carré sommable. On retrouve donc la définition de \mathcal{H}^1 que nous avons donnée à la Section 1.1. Rappelons qu'on a noté $\tilde{\mathcal{H}}^2(g_0)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(M)$ dont le Laplacien au sens des distributions est de carré sommable (voir Définition 1.1.5).

Proposition 3.2.1. Si (M, g_0) est complète sans bord, à courbure de Ricci minorée et rayon d'injectivité strictement positif, alors

$$\tilde{\mathcal{H}}^2(g_0) = \mathcal{H}^2(g_0),$$

et leurs normes respectives sont équivalentes.

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [Heb96], p16. Notons que sans hypothèse géométrique sur M , on a pour toute fonction $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2

$$|\Delta_g u|^2 \leq n |\nabla^2 u|^2.$$

On a donc toujours $\mathcal{H}^2(g_0) \subset \tilde{\mathcal{H}}^2(g_0)$, et le Laplacien envoie toujours \mathcal{H}^2 dans $L^2 = \mathcal{H}^0$. Nous aurons besoin par la suite de généraliser ce résultat aux espaces de Sobolev d'ordre $k > 2$, ce qui nécessite une hypothèse supplémentaire sur le tenseur de courbure.

Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle norme par

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}^k(g_0)}^2 = \sum_{p=0}^{k/2} \int_M |\Delta_{g_0}^p \phi|^2(x) dv_{g_0}(x) + \sum_{p=0}^{k/2-1} \int_M |\nabla \Delta_{g_0}^p \phi|^2(x) dv_{g_0}(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

lorsque k est pair, et

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}^k(g_0)}^2 = \sum_{p=0}^{(k-1)/2} \int_M |\Delta_{g_0}^p \phi|^2(x) dv_{g_0}(x) + \sum_{p=0}^{(k+1)/2} \int_M |\nabla \Delta_{g_0}^p \phi|^2(x) dv_{g_0}(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

lorsque k est impair. On pose

$$\tilde{\mathcal{C}}^{k,\infty}(g_0) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}); \|\phi\|_{\tilde{\mathcal{H}}^k(g_0)} < \infty \right\},$$

et on note $\tilde{\mathcal{H}}^k(g_0)$ le complété de $\tilde{\mathcal{C}}^{k,\infty}(g_0)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{H}}^k(g_0)}^2$. On a par définition $\tilde{\mathcal{H}}^0(g_0) = L^2(g_0)$, $\tilde{\mathcal{H}}^1(g_0) = \mathcal{H}^1(g_0)$, et cette définition de $\tilde{\mathcal{H}}^2(g_0)$ est identique à celle que nous avons donnée à la Section 1.1.

Théorème 3.2.2. *Soit $k \geq 2$, supposons que la métrique g_0 est de classe \mathcal{C}^k , que (M, g_0) est complète, sans bord, de rayon d'injectivité strictement positif, et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p = 0, \dots, k-2$, et pour tout $x \in M$,*

$$|\nabla_{g_0}^p \text{Rm}_{g_0}|(x) \leq C,$$

où Rm désigne le tenseur de courbure de Riemann associé à g_0 . Alors l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans M est dense dans \mathcal{H}^k , et pour tout $p \leq k$,

$$\tilde{\mathcal{H}}^p(g_0) = \mathcal{H}^p(g_0).$$

Notre première affirmation est donnée par le Théorème 2 de [Aub76]. La seconde découle de la Proposition 3 de ce même article de T. Aubin.

Corollaire 3.2.3. *Sous ces mêmes hypothèses, le Laplacien Δ_{g_0} est un opérateur borné de $\mathcal{H}^k(g_0)$ dans $\mathcal{H}^{k-2}(g_0)$, toutes ses fonctions propres L^2 sont dans $\mathcal{H}^k(g_0)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ qui n'est pas dans le spectre de Δ_{g_0} , l'opérateur $\Delta_{g_0} - \lambda$ est bijectif de $\mathcal{H}^k(g_0)$ dans $\mathcal{H}^{k-2}(g_0)$.*

Remarque 3.2.1. Il n'est pas certain que dans nos deux théorèmes précédents, l'hypothèse d'un rayon d'injectivité positif soit nécessaire. On peut se référer par exemple à l'article de G. Salomonsen, [Sal01]. De même, une utilisation des coordonnées harmoniques similaire à celle du Chapitre 2 de [Heb96] permet sans doute de limiter notre contrôle de la courbure aux tenseurs de Ricci, sans utiliser le tenseur de Riemann complet. N'ayant pas eu le temps d'approfondir ces questions, la suite de mes résultats sera présentée sous les hypothèses, peut-être trop fortes, du Théorème 3.2.2.

3.2.2 Topologie \mathcal{C}^k -forte des variétés non compactes

Nous allons maintenant construire une topologie sur l'ensemble des métriques sur M , adaptée aux problèmes que nous considérerons. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{G}^k(M)$ l'ensemble des métriques de classe \mathcal{C}^k sur M .

Définition 3.2.2. *Soit $\mathfrak{U} = (U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ un atlas de classe \mathcal{C}^k de M . Nous dirons que \mathfrak{U} est un **atlas localement fini** si pour tout $\alpha \in A$, U_α ne rencontre qu'un nombre fini de U_β , $\beta \neq \alpha$, et son adhérence $\overline{U_\alpha}$ est compacte.*

Nos variétés étant toutes σ -compactes, un tel atlas existe toujours. Nous fixons donc \mathfrak{U} un atlas localement fini. Pour toute fonction $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et pour toute métrique $g \in \mathcal{G}^k(M)$, on pose

$$U_{k,\epsilon}(g) = \left\{ h \in \mathcal{G}^k(M); \max_{\alpha : x \in U_\alpha} \sup_{0 \leq p \leq k} \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in [1, n]} \left| \frac{\partial^p (h - g)}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_p}} \right| (x) \leq \epsilon(x) \right\},$$

où pour tout $\alpha \in A$, les x_{α_i} sont les coordonnées locales définies par la carte U_α, ϕ_α . Ainsi, une métrique $h \in U_{k,\epsilon}(g)$ si et seulement si en tout point, dans les cartes locales définies par \mathfrak{U} , toutes ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont ϵ -proches de celles de g .

Définition 3.2.3. *On appelle **topologie \mathcal{C}^k forte** sur $\mathcal{G}^k(M)$, ou **topologie de Whitney**, la topologie engendrée par les $U_{k,\epsilon}(g)$, où ϵ parcourt l'ensemble des fonctions de M dans \mathbb{R}_+^* et g l'ensemble des métriques sur M .*

Cette topologie ne dépend pas de l'atlas localement fini choisi. Notons qu'il suffit de définir la fonction ϵ localement : si $(\epsilon_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fonctions de $\overline{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, il existe une fonction $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $\alpha \in A$ et $x \in U_\alpha$,

$$\epsilon(x) \leq \epsilon_\alpha(x).$$

On peut bien sûr, dans cette définition, remplacer $\mathcal{G}(M)$ par n'importe quel espace de fonctions de X dans \mathbb{R} , où X est une variété différentiable de classe au moins \mathcal{C}^k (ici, $X = T^2M$). Il existe deux autres topologies classiques sur les espaces de fonctions : la **topologie uniforme** d'ordre k , et la **topologie de la convergence sur tout compact** (en anglais, « *compact-open topology* »). Lorsque M est compacte, ces trois topologies sont identiques, engendrées par la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty,k} &= \sup_{0 \leq p \leq k} \left\| \sup_{\alpha : x \in U_\alpha} \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in [1,n]} \frac{\partial^p f}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_p}}(x) \right\|_{\infty} \\ &= \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in U_\alpha} \sup_{0 \leq p \leq k} \sup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in [1,n]} \left| \frac{\partial^p f}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_p}} \right|(x). \end{aligned}$$

Pour une discussion générale sur les propriétés de ces topologies, le lecteur pourra se référer à [Hir94]. Notons que la topologie \mathcal{C}^k -forte n'est en général pas métrisable, contrairement à la topologie de la convergence sur tout compact ou de la convergence uniforme. Si on munit l'ensemble des formes bilinéaires symétriques de classe \mathcal{C}^k sur TM de la topologie de Whitney ou de la topologie uniforme, l'ensemble $\mathcal{G}^k(M)$ est un *ouvert* pour cette topologie ; ce résultat est faux pour la topologie de la convergence sur tout compact ! Par la suite, pour tout compact $K \subset M$, nous appellerons *norme infinie d'ordre k* la norme définie sur les fonctions de K dans \mathbb{R} par

$$\|f\|_{\infty,K,k} = \sup_{0 \leq p \leq k} \|\nabla^p f\|_{\infty,K} = \sup_{0 \leq p \leq k} \sup_{x \in K} |\nabla^p f|(x). \quad (3.8)$$

La topologie \mathcal{C}^k -forte est plus fine que la topologie uniforme. Pour la comprendre un peu mieux, voici une propriété fondamentale de ses suites convergentes :

Proposition 3.2.4. *Soit $(g_n) \in \mathcal{C}^k(M)^\mathbb{N}$ une suite qui converge vers g_∞ pour la topologie \mathcal{C}^k -forte. Alors il existe $N > 0$ et un compact $K \subset M$ tel que pour tout $n \geq N$,*

$$g_n|_{M \setminus K} = g_\infty|_{M \setminus K}.$$

De plus, pour tout $p = 0, \dots, k$,

$$\|g_n - g_\infty\|_{\infty, K, p} \rightarrow 0.$$

Notons que le compact K que nous allons construire dépend en général de la suite (g_n) .

Démonstration. Soit $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts tels que $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$ et

$$\bigcup_{p \geq 0} K_p = M,$$

montrons qu'il existe $p, N > 0$ tels que pour tout $n \geq N$,

$$g_n|_{M \setminus K_p} = g_\infty|_{M \setminus K_p}.$$

Par l'absurde, supposons que pour tout $N, p \in \mathbb{N}$, il existe $n_{N,p} \geq N$ et $x_{N,p} \in M \setminus K_p$, tel que

$$|g_{n_{N,p}}(x_{N,p}) - g_\infty(x_{N,p})| \geq \epsilon_{N,p} > 0.$$

On peut supposer sans perdre de généralité qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $N, p > 0$, les boules centrées en $x_{N,p}$ de rayon δ sont disjointes. Soit $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon(x_{N,N}) < \epsilon_{N,N}.$$

Comme les $x_{N,N}$ sont isolés, une telle fonction existe. Notons

$$U_{k,\epsilon}(g_\infty) = \left\{ h \in \mathcal{G}^k(M); \sup_{0 \leq p \leq k} |\nabla_{g_\infty}^p (h - g_\infty)(x)| \leq \epsilon(x) \right\},$$

par définition de la topologie \mathcal{C}^k -forte, c'est un voisinage de g_∞ . On vérifie immédiatement que pour tout $N \geq 0$,

$$g_{n_{N,N}} \notin U_{k,\epsilon},$$

ce qui est absurde puisque par hypothèse la suite (g_n) converge vers g_∞ pour la topologie \mathcal{C}^k -forte. Il existe donc un compact $K \subset M$ tel que

$$g_n|_{M \setminus K} = g_\infty|_{M \setminus K}.$$

Il est alors évident d'après la définition de la topologie \mathcal{C}^k -forte que pour tout $p = 0, \dots, k$,

$$\|g_n - g_\infty\|_{\infty, K, p} \rightarrow 0.$$

□

Remarque 3.2.2. La réciproque est évidemment vraie : si (g_n) est une suite de métriques, s'il existe un compact K et une suite de métriques $N > 0$, tel que pour tout $n \geq N$,

$$g_n|_{M \setminus K} = g_\infty|_{M \setminus K},$$

et si les $g_n|_K$ convergent uniformément (avec toutes leurs dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k) vers $g_\infty|_K$, alors la suite (g_n) converge vers g_∞ pour la topologie \mathcal{C}^k -forte.

Nous aurons besoin du fait que deux métriques proches au sens de la topologie \mathcal{C}^k -forte définissent les mêmes espaces de Sobolev :

Proposition 3.2.5. *Pour tout $p \in [0, k]$, il existe une constante $B_p > 1$ et un voisinage \mathcal{U}_p de g pour la topologie \mathcal{C}^k -forte tel que pour tout $h \in \mathcal{U}_p$, et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^p(g)$,*

$$\frac{1}{B_p} \int_M |\nabla_g^p f|_g^2 dv_g \leq \int_M |\nabla_h^p f|_h^2 dv_h \leq B_p \int_M |\nabla_g^p f|_g^2 dv_g,$$

où ces inégalités sont toujours définies dans $\overline{\mathbb{R}}$. En particulier, pour tout $h \in \mathcal{U}_p$, on a

$$\mathcal{H}^p(h) = \mathcal{H}^p(g),$$

et les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^p(g)}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^p(h)}$ sont équivalentes.

Démonstration. Pour toute fonction $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_M \phi(x) dv_h(x) = \int_M \phi(x) \frac{dv_h}{dv_g}(x) dv_g(x).$$

Pour $p = 0$, il suffit donc de considérer une constante $B_0 > 1$ quelconque et le voisinage $\mathcal{U}_0 = U_{k, \epsilon_0}(g)$ (voir Définition 3.2.3) où $\epsilon_0 : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est telle que pour tout $h \in U_{k, \epsilon_0}(g)$, et pour tout $x \in M$,

$$\frac{1}{B_0} \leq \frac{dv_h}{dv_g}(x) \leq B_0.$$

Comme $\frac{dv_h}{dv_g}(x)$ est le déterminant de h dans une base de $T_x M$ orthonormée pour g , une telle fonction existe par continuité du déterminant. On vérifie immédiatement qu'alors B_0 et \mathcal{U}_0 vérifient la conclusion de notre théorème.

Soit maintenant

$$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$$

un atlas localement fini. Pour $p = 1$, soit $B_1 < B_0$. Considérons un voisinage $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$ de g tel que pour tout $h \in \mathcal{U}_1$, on ait pour tout point $x \in M$, pour tout α tel que $x \in U_\alpha$ et pour tous $i, j \in [1, n]$,

$$\frac{1}{B_1} g^{ij} \leq h^{ij} \leq B_1 g^{ij},$$

où g^{ij} désigne les coordonnées de g^{-1} dans la carte locale U_α . Un tel voisinage existe par continuité de l'inverse. Comme pour toute fonction de \mathcal{H}^1 et pour presque tout $x \in M$, on a

$$|\nabla_g f|_g^2 = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i f \partial_j f,$$

on vérifie immédiatement que B_1 et \mathcal{U}_1 conviennent.

Soit $p \geq 1$, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.2.6. *Pour tout ouvert de carte $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ d'adhérence compacte K , et pour tout $\epsilon > 0$ (constant), il existe une constante $C_{\epsilon,\alpha} > 0$ telle que si*

$$\|g - h\|_{\infty, K, p} \leq \epsilon,$$

alors en tout point $x \in U_\alpha$, et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^p(g)$,

$$\frac{1}{C_{\epsilon,\alpha}} |\nabla_g^p f|_g^2 \leq |\nabla_h^p f|_h^2 \leq C_{\epsilon,\alpha} |\nabla_g^p f|_g^2,$$

avec de plus

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_{\epsilon,\alpha} = 0.$$

Démonstration. Soit $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ et $f \in \mathcal{H}^p(g)$. Pour tout $x \in U_\alpha$, on écrit explicitement dans un système de coordonnées relatif à U_α , les p premières dérivées covariantes de f en fonction des dérivées partielles de la métrique d'ordre inférieur ou égal à $p - 1$. En traduisant les symboles de Christoffel comme sommes de dérivées de la métrique à chaque dérivation (voir [GHL04], §2.B) on montre par récurrence que pour tout entier p , la norme de la dérivée covariante d'ordre p s'écrit comme un polynôme dont les coefficients sont les dérivées partielles d'ordre $\leq p$ de la fonction f , et les variables sont les dérivées partielles de la métrique d'ordre inférieur à $p - 1$. De plus, ce polynôme n'a pas de terme constant (i.e. ne dépendant pas de la métrique). L'existence de notre constante C_ϵ et sa continuité découlent alors de la continuité uniforme des dérivées partielles de la métrique sur le compact K . \square

Soit maintenant $\zeta = (\zeta_\alpha)_\alpha$ une partition de l'unité subordonnée à \mathfrak{U} : pour tout $x \in M$,

$$\sum_\alpha \zeta_\alpha(x) = 1.$$

Soit $f \in \mathcal{H}^p(g)$, pour toute métrique $h \in \mathcal{U}_1$, on a

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(h)} = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \zeta_\alpha(x) |\nabla_h^p f|(x) dv_h(x).$$

Soit $(\epsilon_\alpha)_\alpha$ une famille de constantes positives telles que pour toute carte U_α , la constante $C_{\epsilon,\alpha}$ associée par le lemme ci-dessus soit inférieure à B_0 , et soit \mathcal{U}_p un voisinage de g tel que pour tout $h \in \mathcal{U}_p$ et pour tout $U_\alpha \in \mathfrak{U}$, on ait

$$\|g - h\|_{\infty, U_\alpha, p} < \epsilon_\alpha.$$

On a alors

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \zeta_\alpha(x) |\nabla_h^p f|(x) dv_h(x) \leq \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \zeta_\alpha(x) C_{\epsilon,\alpha} |\nabla_g^p f|(x) B_0 dv_g(x),$$

soit

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(h)} \leq C_p \|f\|_{\mathcal{H}^p(g)},$$

avec

$$C_p = B_0 \sup_\alpha C_{\epsilon,\alpha} \leq B_0^2.$$

On démontre l'autre encadrement de même, ce qui termine la démonstration de la proposition 3.2.5. \square

Enfin, cette topologie forte est adaptée au problème spectral que nous regardons : avoir un trou spectral strictement positif est une propriété ouverte, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.2.7. *Pour tout $k \geq 2$, l'ensemble*

$$\mathcal{TS}(M) = \left\{ g \in \mathcal{G}^k(M); \lambda_0(g) < \lambda_0^{ess}(g) \right\}$$

est un ouvert pour la topologie \mathcal{C}^k -forte.

Nous avons appelé cet ensemble \mathcal{TS} pour «Trou Spectral».

Démonstration. Soit $k \geq 2$, notre résultat découlera directement des deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.8. *L'application*

$$g \mapsto \lambda_0(g)$$

est continue pour la topologie \mathcal{C}^k -forte.

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{G}^k(M)$, notons $\lambda_0 = \lambda_0(g)$. Soit $\epsilon > 0$, montrons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_\epsilon \subset \mathcal{G}^k(M)$ de g pour la topologie \mathcal{C}^k -forte tel que pour tout $h \in \mathcal{V}_\epsilon$,

$$|\lambda_0 - \lambda_0(h)| < \epsilon.$$

Soit $\eta > 0$, d'après la Proposition 3.2.5, il existe un voisinage \mathcal{V}_η de g (toujours pour la topologie \mathcal{C}^k -forte) tel que pour tout $h \in \mathcal{V}_\eta$, les espaces $\mathcal{H}^1(g)$ et $\mathcal{H}^1(h)$ sont identiques, et pour tout $f \in \mathcal{H}^1(g)$, on a

$$\frac{1}{1+\eta} \int_M f^2 dv_g \leq \int_M f^2 dv_h \leq (1+\eta) \int_M \nabla f^2 dv_g$$

et

$$\frac{1}{1+\eta} \int_M |\nabla f|_g^2 dv_g \leq \int_M |\nabla f|_h^2 dv_h \leq (1+\eta) \int_M |\nabla f|_g^2 dv_g.$$

Pour tout $h \in \mathcal{V}_\eta$ et $f \in \mathcal{H}^1(g)$, on a alors

$$\frac{1}{(1+\eta)^2} \frac{\int_M |\nabla f|_g^2 dv_g}{\int_M \nabla f^2 dv_g} \leq \frac{\int_M |\nabla f|_h^2 dv_h}{\int_M \nabla f^2 dv_h} \leq (1+\eta)^2 \frac{\int_M |\nabla f|_g^2 dv_g}{\int_M \nabla f^2 dv_g},$$

d'où

$$\frac{\lambda_0}{(1+\eta)^2} \leq \lambda_0(h) \leq (1+\eta)^2 \lambda_0.$$

Pour η suffisamment petit, $\mathcal{V}_\epsilon = \mathcal{V}_\eta$ convient donc. \square

Lemme 3.2.9. *L'application*

$$g \mapsto \lambda_0^{ess}(g)$$

est continue pour la topologie \mathcal{C}^k -forte.

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{G}^k(M)$, et soit $\epsilon > 0$. D'après la Proposition 2.1 de [Don81], pour tout $h \in \mathcal{G}^k(M)$ et tout $\lambda > 0$, l'intervalle $]-\infty, \lambda]$ intersecte le spectre essentiel de Δ_h si et seulement si pour tout $\delta > 0$, il existe un sous-espace de dimension infinie $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{H}^2(h)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\int_M f \Delta_h f dv_h < (\lambda + \delta) \int_M f^2 dv_h,$$

c'est à dire pour tout $f \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\frac{\int_M |\nabla f|_h^2 dv_h}{\int_M f^2 dv_h} < \lambda + \delta.$$

Notons donc $\lambda_0^{ess} = \lambda_0^{ess}(g)$ et pour tout $\delta > 0$, posons $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{H}^2(g)$ un espace de dimension infini tel que pour toute $f \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\frac{\int_M |\nabla f|_g^2 dv_g}{\int_M f^2 dv_g} < \lambda_0^{ess} + \delta.$$

Soit $\eta > 0$ tel que $(1+\eta)^2 \lambda_0^{ess} < \lambda + \epsilon$ et $(1+\eta)^2 (\lambda_0^{ess} - \epsilon) < \lambda_0^{ess} - \epsilon/2$, et soit \mathcal{V}_η un voisinage sur lequel les espaces de Sobolev sont équivalents, comme défini au lemme précédent. Pour tout $h \in \mathcal{V}_\eta$ et pour toute $f \in \mathcal{D}_\delta$, on a alors

$$\frac{\int_M |\nabla f|_h^2 dv_h}{\int_M f^2 dv_h} < (1+\eta)^2 (\lambda_0^{ess} + \delta) < \lambda_0^{ess} + \epsilon + (1+\eta)^2 \delta$$

par définition de η . On a donc $\lambda_0^{ess}(h) < \lambda_0^{ess} + \epsilon$ pour toute métrique $h \in \mathcal{V}_\eta$. De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^2(g)$, on a également

$$\frac{\int_M |\nabla f|_g^2 dv_g}{\int_M \nabla f^2 dv_g} \leq (1 + \eta)^2 \frac{\int_M |\nabla f|_h^2 dv_h}{\int_M \nabla f^2 dv_h}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $h \in \mathcal{V}_\eta$ tel que $\lambda_0^{ess}(h) < \lambda_0^{ess} - \epsilon$. Alors, pour tout $\delta > 0$ il existe $\mathcal{D}'_\delta \subset \mathcal{H}^2(g)$ de dimension infinie tel que pour toute $f \in \mathcal{D}'_\delta$, on a alors

$$\frac{\int_M |\nabla f|_h^2 dv_h}{\int_M f^2 dv_h} < \lambda_0^{ess} - \epsilon - \delta.$$

On a donc par définition de η , pour tout $\delta > 0$ et toute $f \in \mathcal{D}'_\delta$,

$$\frac{\int_M |\nabla f|_g^2 dv_g}{\int_M f^2 dv_g} \leq (1 + \eta)^2 (\lambda_0^{ess} - \epsilon - \delta) < \lambda_0^{ess} - \frac{\epsilon}{2} - (1 + \eta)^2 \delta.$$

Le bas du spectre essentiel de Δ_g est donc inférieur $\lambda_0^{ess} - \epsilon/2$, ce qui est absurde.

On a donc montré que pour tous $g \in \mathcal{G}^k(M)$ et $\epsilon > 0$, il existe un voisinage \mathcal{V}_η de g pour la topologie \mathcal{C}^k -forte tel que pour tout $h \in \mathcal{V}_\eta$,

$$\lambda_0^{ess}(h) \in]\lambda_0^{ess}(g) - \epsilon, \lambda_0^{ess}(g) + \epsilon[.$$

Ceci conclut la démonstration de notre lemme. □

□

3.2.3 Fonctions propres génériques

Une propriété est dite *générique* lorsque l'ensemble des éléments qui la vérifie est *résiduel* au sens suivant.

Définition 3.2.4. *Soit E un espace topologique et $A \subset E$, on dit que A est **résiduel** dans E si A est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E . On dit aussi que A est un **ensemble de Baire** ou un **ensemble de seconde catégorie**.*

On dit aussi que les éléments de A sont des *éléments génériques* de E .

A la Section 3.3, nous nous intéresserons au gradient de la première fonction propre afin de construire, pour des revêtements riemanniens, un domaine fondamental sur lequel elle vérifie les conditions de Neumann. Nous avons vu à la Section 1.2 qu'une telle construction est possible lorsque la fonction propre est de Morse. L'objectif de ce paragraphe est de montrer que c'est génériquement le cas :

Théorème 3.2.10. *Soit (M, g_0) une variété riemannienne de classe \mathcal{C}^k , où $k \geq \max\{\frac{n}{2} + 2, 4\}$, dont le rayon d'injectivité, le bas du spectre et le trou spectral sont strictement positifs, et ϕ_0 la première fonction propre de son Laplacien. On suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p = 0, \dots, k - 2$, et pour tout $x \in M$,*

$$|\nabla_{g_0}^p \text{Rm}(g_0)| (x) < C.$$

Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{TS}(M)$ un voisinage de g_0 pour la topologie \mathcal{C}^k -forte sur lequel le rayon d'injectivité, le trou spectral et le bas du spectre sont strictement positifs, et les dérivées de la courbure vérifient l'inégalité précédente. Alors il existe un ensemble $\mathcal{U}_M \subset \mathcal{U}$ résiduel (dans \mathcal{U}) pour la topologie \mathcal{C}^k -forte tel que pour tout $g \in \mathcal{U}_M$, la première fonction propre ϕ_0^g du Laplacien associée à g est de Morse sur M .

Ce théorème est un analogue du Théorème 3 p 1067 de l'article de K. Uhlenbeck [Uhl76]. Les démonstrations d'Uhlenbeck s'appliquent à des familles d'opérateurs elliptiques sur une variété *compacte*, et l'adapter au cas des variétés non compactes demande un peu d'attention. Nous le faisons pour la première valeur propre pour le Laplacien sur des variétés à trou spectral positif dont la métrique est voisine de g_0 : les hypothèses clés qui nous le permettent sont que $\Delta_g(\mathcal{H}^k) \subset \mathcal{H}^{k-2}$, et que la fonction ϕ_0 n'est pas constante.

Le Théorème de Baire (voir [Rud80] p127) affirme qu'un ensemble A résiduel dans un espace métrique complet E est dense dans E . La topologie \mathcal{C}^k -forte que nous avons définie à la section précédente n'est en général pas métrisable. Bien que le Théorème de Baire ne s'y applique donc pas directement, un théorème identique reste vrai :

Théorème 3.2.11. *L'ensemble $\mathcal{G}^k(M)$ muni de la topologie \mathcal{C}^k -forte est un espace de Baire, c'est-à-dire que tout ensemble résiduel dans $\mathcal{G}^k(M)$ est dense.*

Ce résultat découle du Théorème 4.2 p 59 de [Hir94] et du fait que si une suite (g_n) converge uniformément sur M ainsi que ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k , alors la limite est encore une métrique de classe \mathcal{C}^k sur M .

Nous avons défini à la Section 1.2 les fonctions de Morse. Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$, être de Morse est une propriété qui ne dépend que du choix d'un atlas \mathcal{C}^2 sur M . En particulier, cela ne dépend pas de la métrique. La propriété de Morse est générique au sens du théorème suivant :

Théorème 3.2.12. *L'ensemble des fonctions de Morse de M dans \mathbb{R} est résiduel dans $\mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$ muni de la topologie \mathcal{C}^2 -forte.*

Ce résultat est très connu (voir par exemple [AR67], Chapitre 7) ; nous indiquons simplement les grandes étapes de sa preuve, car nous suivrons les mêmes lors de la démonstration du Théorème 3.2.10. Pour cette démonstration, lorsque nous parlerons d'un « *compact* K », cela sous-entendra que K est d'une part compact, et d'autre part l'adhérence d'un ouvert à bord lisse.

Esquisse de preuve. On note \mathcal{M} l'ensemble des fonctions de Morse de M dans \mathbb{R} . Pour tout compact $K \subset M$, on note \mathcal{M}_K l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^2 qui sont de Morse sur K . Le Théorème 3.2.12 se démontre par les étapes suivantes.

1. *Pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble \mathcal{M}_K est ouvert pour la topologie \mathcal{C}^2 -forte.* Il suffit pour cela de montrer que l'ensemble des fonctions de Morse sur K est un ouvert dans $\mathcal{C}^2(K, \mathbb{R})$ muni de la topologie \mathcal{C}^2 -uniforme sur K . Or, une fonction est de Morse si et seulement si sa différentielle intersecte transversalement la section nulle du fibré cotangent T^*M (nous verrons un peu plus loin ce que cela signifie). D'après le Théorème 18.2 de [AR67], l'intersection transverse est une propriété ouverte pour la norme infinie, ce qui termine de démontrer ce point.
2. *Pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble \mathcal{M}_K est dense dans $\mathcal{C}^2(M)$ pour la topologie \mathcal{C}^2 -forte.* Il suffit encore une fois de montrer que l'ensemble des fonctions de Morse sur K est dense dans $\mathcal{C}^2(K, \mathbb{R})$ muni de la topologie \mathcal{C}^2 -uniforme sur K , et de prolonger chaque fonction de Morse définie sur K en une fonction définie sur M , à l'aide d'une fonction « *cut-off* » bien choisie qui n'augmente pas la norme infinie. L'image par ce prolongement de l'ensemble des fonctions de Morse sur K est alors dense dans $\mathcal{C}^2(M)$ pour la topologie \mathcal{C}^2 -forte. La densité des fonctions de Morse dans l'espace métrique complet $\mathcal{C}^2(K, \mathbb{R})$ se montre avec des arguments de transversalité reposant sur le théorème de Sard-Smale que nous présentons ci-dessous. Ce point est démontré, par exemple, dans [AR67], p100.
3. Comme nos variétés sont une réunion dénombrables de compacts, l'ensemble \mathcal{M} est l'intersection des \mathcal{M}_K pour un ensemble dénombrable de compact. Comme nous venons de voir que ceux-ci sont des ouverts denses de $\mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$, l'ensemble \mathcal{M} est bien résiduel dans $\mathcal{C}^2(M, \mathbb{R})$.

□

Nous allons démontrer le Théorème 3.2.10 en suivant ces trois mêmes étapes. La première étape découlera d'une utilisation adaptée des inclusions de Sobolev. La seconde utilisera des arguments développés par K. Uhlenbeck pour l'étude des fonctions propres non constantes d'une variété compacte. Elles reposent sur l'utilisation du Théorème de Transversalité de Sard-Smale.

Soit \mathcal{U} un voisinage de g_0 dans $\mathcal{G}^k(M)$ tel que pour tout $g \in \mathcal{U}$, le trou spectral de Δ_g est strictement positif ainsi que le bas du spectre, et tel que pour tout $p = 0, \dots, k-2$, et pour tout $x \in M$,

$$|\nabla_g^p \text{Rm}_g|(x) < C.$$

Un tel voisinage existe d'après le Théorème 3.2.7, la continuité du bas du spectre pour la topologie \mathcal{C}^k -forte, et la continuité des applications $g \mapsto \nabla_g^p \text{Rm}_g$. On suppose de plus que pour tout $g \in \mathcal{U}$, on a l'égalité

$$\mathcal{H}^k(g) = \mathcal{H}^k(g_0) :$$

quitte à restreindre \mathcal{U} , un tel voisinage existe toujours d'après la Proposition 3.2.5. De nouveau, jusqu'à la fin de ce chapitre, lorsque nous parlerons d'un «compact K », cela sous-entendra que K est compact et l'adhérence d'un ouvert à bord lisse. La première étape de la démonstration du Théorème 3.2.10 est donnée par la propriété suivante :

Proposition 3.2.13. *Soit $K \subset M$ un compact, notons $\mathcal{GM}_K(M) \subset \mathcal{U}$ l'ensemble des métriques de \mathcal{U} telles que pour tout $g \in \mathcal{GM}_K(M)$, la première fonction propre ϕ_0^g est de Morse sur K . L'ensemble $\mathcal{GM}_K(M)$ est un ouvert de \mathcal{U} pour la topologie \mathcal{C}^k forte.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{GM}_K(M)$, par hypothèse la fonction ϕ_0^g est de Morse sur K . Pour toute métrique $h \in \mathcal{U}$, nous noterons

$$\mathcal{H}^k = \mathcal{H}^k(g),$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(g)}$ dont on rappelle qu'elle est équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^k(h)}$. D'après nos hypothèses sur le tenseur de courbure et le Corollaire 3.2.3, l'opérateur Δ_h est alors un opérateur borné de \mathcal{H}^k dans \mathcal{H}^{k-2} , associé à la forme quadratique

$$Q_h(f, \phi) = \int_M f(x) \Delta_h \phi(x) \alpha_h(x) dv_g(x),$$

où nous avons noté

$$\alpha_h(x) = \frac{dv_h}{dv_g}(x).$$

D'après l'expression générale du Laplacien associé à la métrique (voir la Proposition 1.1.1), l'application $h \rightarrow \Delta_h$ est une application continue de \mathcal{U} muni de la topologie \mathcal{C}^k -forte dans l'ensemble des opérateurs bornés de \mathcal{H}^k dans \mathcal{H}^{k-2} . L'application qui à h associe la première fonction propre ϕ_0^h est alors continue de \mathcal{U}_1 dans \mathcal{H}^k (le lecteur familier avec la théorie spectrale - ou très patient - trouvera ce résultat dans le livre classique de T. Kato, [Kat95], à la Section IV.3.5 ; on peut également le montrer à la main à l'aide d'un théorème des fonctions implicites dans \mathcal{H}^k).

Or, on a vu que l'ensemble des fonctions de Morse sur K est un ouvert pour la topologie \mathcal{C}^2 -uniforme sur K : il existe un $\eta > 0$ tel que toute fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\|f - \phi_0^g\|_{\infty, K, 2} := \sup_{0 \leq p \leq 2} \sup_{x \in K} \|\nabla_g^p(f - \phi_0^g)(x)\| < \eta$$

est de Morse sur K .

De plus, d'après les théorèmes d'injections de Sobolev sur le compact K (voir par exemple [Heb96] p21), pour $k \geq \frac{n}{2} + 2$ (où n est la dimension de M), $\mathcal{H}^k(K)$ muni de la norme de Sobolev restreinte à K s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^2(K)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty, K, 2}$ (voir l'équation (3.8) ci-dessus). Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^k(K)$ vérifiant

$$\sup_{m \in [0, k]} \int_K |\nabla_g^m(f - \phi_0^g)|_g^2 dv_g < \delta,$$

on a

$$\|f - \phi_0^g\|_{\infty, K, 2} < \eta$$

Par continuité de l'application $h \rightarrow \phi_0^h$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ de g pour la topologie \mathcal{C}^k -forte tel que pour tout $h \in \mathcal{U}_1$,

$$\sup_{m \in [0, k]} \int_M |\nabla_g^m(\phi_0^h - \phi_0^g)|^2 dv_g < \delta.$$

D'après les arguments précédents la fonction ϕ_0^h est alors de Morse sur K pour tout $h \in \mathcal{U}_1$. Ceci conclut la démonstration de la Proposition 3.2.13. \square

Nous poursuivons la démonstration du Théorème 3.2.10 par la proposition suivante :

Proposition 3.2.14. *Soit $K \subset M$ un compact, l'ensemble $\mathcal{GM}_K(M) \subset \mathcal{U}$ des métriques de \mathcal{U} telles que pour tout $g \in \mathcal{GM}_K(M)$, la première fonction propre ϕ_0^g est de Morse sur K est dense dans \mathcal{U} pour la topologie \mathcal{C}^k forte.*

L'ouvert \mathcal{U} ci-dessus est toujours celui défini juste avant la Proposition 3.2.13.

Nous allons démontrer cette proposition en nous appuyant sur les idées de l'article [Uhl76], que nous adaptions au cas du bas du spectre sur une variété non compact avec trou spectral. L'outil essentiel est ici le Théorème de Transversalité de Sard-Smale, que nous présentons maintenant.

Définition 3.2.5. *Soient N, N' deux sous-variétés de M . On dit que N et N' sont **transverses** si pour tout $x \in N \cap N'$,*

$$T_x N + T_x N' = T_x M.$$

Soit $\phi : U \rightarrow M$ une application \mathcal{C}^1 , où U est de dimension finie, on dit que ϕ est transverse à N si pour tout point $x \in U$ tel que $\phi(x) \in N \subset M$, on a

$$Im(D_x \phi) + T_{\phi(x)} N = T_{\phi(x)} M.$$

Nous appellerons **variété de Banach** une variété dont l'espace modèle est un espace de Banach séparable, et dont les changements de carte sont des isomorphismes de cet espace. La définition précédente demande quelques précisions en dimension infinie :

Définition 3.2.6. *On dit que deux sous-variétés \mathcal{N} et \mathcal{N}' d'une variété de Banach \mathcal{M} sont **transverses** si pour tout $x \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}'$, $T_x\mathcal{N}$ contient un supplémentaire fermé de $T_x\mathcal{N}'$ dans $T_x\mathcal{M}$. Soit $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ une application \mathcal{C}^1 entre deux variétés de Banach, on dit que ϕ est transverse à \mathcal{N} si pour tout point $x \in \mathcal{U}$ tel que $\phi(x) \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, $(d\phi)^{-1}(T_{\phi(x)}\mathcal{N})$ admet un supplémentaire fermé dans \mathcal{U} et $\text{Im}(D_x\phi)$ contient un supplémentaire fermé de $T_{\phi(x)}\mathcal{N}$ dans $T_{\phi(x)}\mathcal{M}$.*

Définition 3.2.7. 1. *Une application $F : E \rightarrow F$ entre deux espaces de Banach est un **opérateur de Fredholm** si son noyau et son image admettent des supplémentaires fermés, son image admet un supplémentaire de dimension finie (son co-noyau), et son noyau est de dimension finie.*

2. *L'**indice** d'un opérateur de Fredholm est la dimension de son noyau moins celle de son conoyau.*

3. *Une application $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre deux variétés de Banach est une **application de Fredholm** si sa différentielle est un opérateur de Fredholm en tout point. Son indice est alors, en chaque point, celui de sa différentielle.*

Exemple 3.2.1. Pour tout $k \geq 1$, notons \mathcal{H}^k l'espace de Sobolev d'ordre k , et supposons que les $k - 2$ dérivées du tenseur de courbure de Riemann soient uniformément bornées. Pour tout $\lambda \in]0, \lambda_1(g_0)[$, l'opérateur $\Delta_{g_0} - \lambda$ est un opérateur de Fredholm de \mathcal{H}^k dans \mathcal{H}^{k-2} car l'unique valeur propre de Δ_{g_0} strictement inférieure à $\lambda_1(g_0)$ est de multiplicité finie. Il est d'indice 0 car il est auto-adjoint sur L^2 .

De la même façon que dans [Uhl76], nous utiliserons la version suivante du Théorème de transversalité de Sard-Smale :

Théorème 3.2.15 (Théorème de Sard-Smale). *Soient Q, B, X, Y et Y' des variétés de Banach, avec $Y' \subset Y$, où X, Y et Y' sont de dimension finie. Soit $\pi : Q \rightarrow B$ une application \mathcal{C}^k de Fredholm d'indice 0. Alors, si $f : Q \times X \rightarrow Y$ est de classe \mathcal{C}^k pour $k > \max(1, \dim X + \dim Y' - \dim Y)$, et si f est transverse à Y' , alors l'ensemble*

$$\{b \in B; f_b = f|_{\pi^{-1}(b) \times X} \text{ est transverse à } Y'\}$$

est résiduel dans B .

Démonstration. Voir [Uhl76], p1061. □

Démonstration de la Proposition 3.2.14. Soit $K' \subset M$ un compact tel que $K \subset \overset{\circ}{K}'$, et tel qu'il existe une fonction «cut-off» χ_K de classe \mathcal{C}^∞ qui vaut 1 sur K , nulle sur $M \setminus K'$, et dont les k premières dérivées covariantes sont toutes inférieures à 1. Un tel compact existe toujours : il suffit par exemple que $d(K, M \setminus K') > 1$, et de prendre une régularisation de la fonction

$$x \mapsto \max\{0, 1 - d(x, K)\}.$$

On note $\mathcal{G}^k(K')$ l'ensemble des métriques de classe \mathcal{C}^k définies sur K' , et pour toute métrique $g \in \mathcal{G}^k(M)$, on définit une injection de $\mathcal{G}^k(K')$ dans $\mathcal{G}^k(M)$ par l'application

$$\iota_g : h \mapsto \chi_K h + (1 - \chi_K)g,$$

où on a étendu h à $M \setminus K'$ par la forme bilinéaire identiquement nulle.

Par construction, pour tout $h \in \mathcal{G}^k(K')$, la métrique $\iota_g(h)$ est égale à h sur K et égale à g sur $M \setminus K'$. De plus, on choisit χ_K telle que

$$\|\nabla_g^p g - \iota_g(h)\|_{\infty, K', k} \leq C_k \|g - h\|_{\infty, K', k},$$

où C_k est une constante qui ne dépend que de k et de g . On vérifie alors immédiatement à partir des définitions que pour tout $g \in \mathcal{C}^k(M)$, l'inclusion ι_g de $\mathcal{G}^k(K')$ muni de la norme précédente vers $\mathcal{G}^k(M)$ muni de la topologie \mathcal{C}^k -forte est continue. En particulier si g est dans l'ouvert \mathcal{U} défini précédemment, il existe un voisinage \mathcal{O}_g de $g|_{K'}$ pour la topologie uniforme tel que

$$\iota_g(\mathcal{O}_g) \subset \mathcal{U}.$$

Par définition de \mathcal{U} , pour tout $h \in \mathcal{O}_g$ le rayon d'injectivité de $(M, \iota_g(h))$, son bas du spectre et son trou spectral sont alors strictement positifs, et les dérivées covariantes du tenseur de courbure de $\iota_g(h)$ vérifient pour tout $p = 0, \dots, k$,

$$|\nabla_{\iota_g(h)}^p \text{Rm}_{\iota_g(h)}| \leq C.$$

Notons que d'après le Principe de Décomposition de [DL79] que nous avons déjà cité, pour tout $h \in \mathcal{G}^k(K')$,

$$\lambda_0^{\text{ess}}(\iota_g(h)) = \lambda_0^{\text{ess}}(g).$$

La Proposition 3.2.14 découlera de la proposition suivante et de la continuité des injections ι_g .

Proposition 3.2.16. *Avec les notations précédentes, pour tout $g \in \mathcal{G}^k(M)$, l'ensemble des métriques $h \in \mathcal{O}_g$ telles que la première fonction propre du Laplacien associé à $\iota_g(h)$ est de Morse sur K est résiduel dans \mathcal{O}_g , donc dense par le Théorème de Baire appliqué à l'espace de Banach $\mathcal{G}^k(K')$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{G}^k(M)$, nous munissons \mathcal{O}_g de la norme infinie sur K' de degré k : l'ensemble \mathcal{O}_g est alors un ouvert de l'espace de Banach $\mathcal{G}^k(K')$, donc une variété de Banach. Nous avons ainsi restreint les variations de la métrique à un compact précisément pour obtenir une variété de Banach. Pour tout $h \in \mathcal{O}_g$, nous noterons (en omettant de façon abusive l'application ι_g qui sera sous-entendu) Δ_h le Laplacien associé à la métrique $\iota_g(h)$, $\lambda_0(h)$ sa première valeur propre (isolée par définition de \mathcal{O}_g), ϕ_0^h la première fonction propre associée et dv_h l'élément de volume associé à $\iota_g(h)$. Nous notons toujours $\mathcal{H}^k = \mathcal{H}^k(M, g)$: remarquons que nous travaillons avec les espaces de Sobolev sur la variété M complète. Nous notons

$$\mathcal{S}^k = \left\{ u \in \mathcal{H}^k; \int_M u^2 dv_g = 1 \right\} :$$

c'est une sous-variété (de Banach) de \mathcal{H}^k de codimension 1, et pour tout $\phi \in \mathcal{S}^k$, l'espace tangent en ϕ à \mathcal{S}^k est

$$T_\phi \mathcal{S}^k = \left\{ v \in \mathcal{H}^k(M), \int_M \phi v dv_g = 0 \right\}.$$

Quitte à restreindre le voisinage \mathcal{O}_g , on peut supposer qu'il existe $l > 0$ tel que pour tout $h \in \mathcal{O}_g$,

$$\lambda_0(h) < l < \lambda_1(\iota_g(h)) \leq \lambda_0^{ess}(\iota_g(h)) = \lambda_0^{ess}(g). \quad (3.9)$$

Posons alors

$$F : \mathcal{S}^k \times]0, l[\times \mathcal{O}_g \rightarrow \mathcal{H}^{k-2}$$

définie par

$$F(\phi, \lambda, h) = \Delta_h \phi - \lambda \phi.$$

D'après la formule générale du Laplacien et les propriétés générales de l'application d'évaluation sur un compact (voir [AR67], Chapitre 3), pour tout $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , l'application

$$(h, x) \in \mathcal{O}_g \times M \mapsto \Delta_h(\phi)(x)$$

est de classe \mathcal{C}^{k-2} . L'application F est donc de classe \mathcal{C}^{k-2} . On notera également

$$F_h = F(., ., h).$$

Lemme 3.2.17. *La fonction ϕ est fonction propre de Δ_h associée à λ si et seulement si $F(\phi, \lambda, h) = 0$. De plus, lorsque la valeur propre λ est simple, (ϕ, λ) est un point régulier de F_h .*

Démonstration. Le premier point est évident. Soit (ϕ, λ, h) tel que $\Delta_h \phi = \lambda \phi$, la différentielle $dF_h : T_\phi \mathcal{S}^k \times]0, l[\rightarrow \Delta_h(\mathcal{H}^k)$ vaut

$$dF_h(v, s) = \Delta_h v - s\phi - \lambda v,$$

où v parcourt l'ensemble des fonctions de \mathcal{H}^k qui sont L^2 -orthogonales à ϕ . De plus, comme λ est une valeur propre simple, l'application $v \mapsto \Delta_h v - \lambda v$ est surjective de $\mathcal{H}^2(M)$ dans l'ensemble des fonctions de $L^2(M)$ orthogonales à ϕ . D'après le Théorème 3.2.2, sa restriction à \mathcal{H}^k est alors surjective sur l'ensemble des fonctions de \mathcal{H}^{k-2} orthogonales à ϕ , ce qui conclut notre démonstration. \square

Soit $h \in \mathcal{O}_g$, par définition de l le Laplacien Δ_h n'admet qu'une valeur propre $\lambda_0(h)$ sur $]0, l[$, simple, associée à la fonction ϕ_0^h . Posons

$$Q = F^{-1}(0) \subset \mathcal{S}^k \times]0, l[\times \mathcal{O}_g.$$

Notons que Δ_h est un opérateur borné de \mathcal{H}^k dans \mathcal{H}^{k-2} surjectif. D'après le lemme ci-dessus et le théorème des fonctions implicites, Q est donc une sous-variété de Banach de $\mathcal{S}^k \times]0, l[\times \mathcal{O}_g$. Notons $\pi : Q \rightarrow \mathcal{O}_g$ la restriction à Q de la projection canonique

$$\mathcal{S}^k \times]0, l[\times \mathcal{O}_g \rightarrow \mathcal{O}_g.$$

D'après l'encadrement (3.9), pour toute métrique $h \in \mathcal{O}_g$, $\lambda_0(h) \in]0, l[$: π est donc surjective, et pour tout $h \in \mathcal{O}_g$, on a

$$\pi^{-1}(h) = \{(\phi_0^h, \lambda_0(h), h)\}.$$

On note $\partial_1 F : T\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la différentielle partielle de F selon $\mathcal{S}^k \times]0, l[$, et $\partial_h F : T\mathcal{O}_g \rightarrow \mathbb{R}$ sa différentielle partielle selon $\mathcal{O}_g \subset \mathcal{G}^k(K')$.

Lemme 3.2.18. *L'espace tangent à Q en un point (ϕ, λ, g) est :*

$$T_{(\phi, \lambda, h)}Q = \left\{ (v, \eta, \delta h) \in \mathcal{H}^k \times \mathbb{R} \times T_g\mathcal{O}_g; \int_M \phi v = 0, (\Delta_h - \lambda)v - \eta\phi + (\partial_h F)\delta h = 0 \right\}.$$

De plus, la projection π est un opérateur de Fredholm d'indice 0 sur Q .

Démonstration. Par définition,

$$T_{(\phi, \lambda, h)}Q = \left\{ (v, \eta, \delta h) \in T_\phi\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \times T_g\mathcal{O}_g; T_{(\phi, \lambda, g)}F(v, \eta, h) = 0 \right\}.$$

Cela donne immédiatement l'expression voulue. Comme Q est une sous-variété lisse, π est différentiable, et on vient de voir qu'elle est bijective de Q sur \mathcal{O}_g , elle est donc évidemment un opérateur de Fredholm d'indice 0. \square

Soit $\beta : Q \times M \rightarrow T^*M$ définie par

$$\beta(\phi, \lambda, h, x) = d\phi(x).$$

Proposition 3.2.19. *Supposons que $\beta : Q \times K \rightarrow T^*M$ soit de classe \mathcal{C}^1 et transverse à la section nulle de T^*M sur K . Alors l'ensemble des $h \in \mathcal{O}_g$ tels que ϕ_0^h est de Morse sur K est résiduel dans \mathcal{O}_g .*

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{O}_g$, par définition, ϕ_0^h est de Morse sur K si et seulement si $d\phi_0^h$ est transverse à la section nulle de T^*M sur K . Or, $\beta_h = \beta|_{\pi^{-1}(h) \times \overset{\circ}{K}} = d\phi_0^h$: notre propriété est donc un corollaire direct du théorème de Sard-Smale, avec $f = \beta$ et Y' la section nulle de T^*M restreinte à K . Comme la dimension de M et celle de la section nulle de T^*M sont égales à la moitié de la dimension de T^*M , il suffit bien que β soit de classe \mathcal{C}^1 . \square

Terminons la démonstration de la Proposition 3.2.16. Soit $\xi_0 \in \Gamma(T^*M)$ la section nulle. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $\beta : Q \times K \rightarrow T^*M$ est de classe \mathcal{C}^1 et transverse à ξ_0 . Comme pour tout $h \in \mathcal{O}_g$, la métrique $i_g(h)$ est de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$, le Laplacien définit en coordonnées locales (voir Proposition 1.1.1) un opérateur elliptique dont les coefficients sont de classe \mathcal{C}^{k-1} . D'après la théorie locale des équations elliptiques (voir [GT01], p185), les fonctions propres ϕ_0^h sont de classe \mathcal{C}^k . L'application β est donc de classe \mathcal{C}^{k-1} . Montrons maintenant que son image est transverse à ξ_0 .

Par définition, l'image de $(\phi, \lambda, h, x) \in Q \times K$ par β est dans ξ_0 si et seulement si $d\phi(x) = 0$. Soit $(\phi, \lambda, h, x) \in Q \times K$ tel que $d\phi(x) = 0$, nous voulons donc montrer que

$$\text{Im}(d_{(\phi, \lambda, h, x)}\beta) + T_{(x, d\phi(x))}\xi_0 = T_{(x, 0)}(T^*M).$$

Soit $(v, \eta, \delta h) \in T_{(\phi, \lambda, h)}Q$, et $x \in K$. On a pour tout $X \in T_xM$,

$$d\beta(v, \eta, \delta h, X) = d_x v + d_x^2 \phi(X, \cdot),$$

où $d_x^2 \phi = \nabla d\phi$ est la différentielle seconde de ϕ dans un système de coordonnées quelconque, puisque x est un point critique de ϕ . Soit U_x un voisinage (d'adhérence compacte) de x diffeomorphe à \mathbb{R}^n et (x_1, \dots, x_n) une carte locale au voisinage de x . Il nous suffit de montrer que pour tout $i = 1 \dots n$, il existe $(v, \eta, \delta h) \in T_{(\phi, \lambda, g)}Q$ tel que

$$\partial_{x_i} v \neq 0.$$

D'après le Lemme 3.2.18, l'espace tangent TQ est caractérisé par les égalités :

$$\int_M \phi v dv_g = 0 \text{ et } (\Delta_g - \lambda)v - \eta\phi + (\partial_h F)\delta h = 0.$$

Si l'on se restreint aux variations sur Q qui préservent λ_0 , c'est-à-dire $\eta = 0$, ces contraintes deviennent :

$$(\Delta_h - \lambda)v = -(\partial_h F)\delta h,$$

avec v orthogonale à ϕ . Nous allons exprimer un tel v à partir d'une *fonction de Green associée* à ϕ .

Proposition 3.2.20. *Soit (M, g) une variété dont le trou spectral est strictement positif, et $\phi \in \mathcal{H}^k(M)$ la fonction propre associée à son bas du spectre λ_0 . Il existe alors une unique fonction $G_\phi : M \times M \setminus \text{Diag} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 sur $M \times M \setminus \text{Diag}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. pour tous $x \neq y$, $G_\phi(x, y) = G_\phi(y, x)$;
2. pour tout $x \in M$, $G_\phi(x, \cdot) \in \mathcal{H}^1(M)$;
3. pour tout $x \in M$,

$$\int_M \phi(y) G_\phi(x, y) dv_g(y) = 0;$$

4. pour tout $x \in M$ et $f \in \mathcal{H}^2(M)$ telle que $\int_M \phi f dv_g = 0$,

$$\int_M G_\phi(x, y) (\Delta_g - \lambda_0) f(y) dv_g(y) = f(x).$$

On a noté ici dv_g l'élément de volume sur M associé à la métrique g . On appelle G_ϕ la **fonction de Green modifiée** associée à ϕ .

Autrement dit, pour tout $x \in M$, $G_\phi(x, \cdot)$ est une solution faible de l'équation distributionnelle

$$(\Delta_g - \lambda_0) G_\phi(x, \cdot) = \delta(x)$$

sur l'orthogonal de ϕ dans $L^2(g)$ (qui est un sous-espace de Hilbert fermé stable par $\Delta_g - \lambda$), où $\delta(x)$ désigne la mesure de Dirac en x . L'existence d'une telle solution faible découle de la théorie classique des équations elliptiques, on pourra par exemple se référer à [GT01], chapitre 8¹.

Posons

$$J = \text{Im}(\partial_h F) \subset \mathcal{H}^{k-2}(M).$$

Comme $\Delta_h - \lambda$ est inversible de l'orthogonal de ϕ dans lui-même, pour tout $j = (\partial_h F) \delta h \in J \cap \{\phi\}^\perp$, il existe un unique $v \in \{\phi\}^\perp$ tel que $(v, 0, \delta h) \in T_{(\phi, \lambda, h)} Q$ et

$$(\Delta_h - \lambda)v = -(\partial_h F) \delta h.$$

Ce v est explicitement donné par

$$v(x) = - \int_M G_\phi(x, y) j(y) dv_h(y),$$

¹Uhlenbeck affirme l'existence de telles fonctions dans le cas compact, sans justification. Cette référence n'est pas vraiment la bonne; j'en cherche une meilleure. Toute suggestion bienvenue!!

où G_ϕ est la fonction de Green modifiée associée à ϕ et au Laplacien Δ_h , définie dans la proposition précédente.

On a donc

$$\partial_{x_i} v(x) = - \int_M (\partial_{x_i} G_\phi)(x, y) j(y) dv_h(y).$$

Supposons maintenant par l'absurde que pour tout $(v, 0, \delta h) \in T_{(\phi, \lambda, h)} \mathcal{Q}$,

$$\partial_{x_i} v(x) = 0.$$

D'après ci-dessus, pour tout $j \in J$ orthogonal à ϕ ,

$$\int_M (\partial_{x_i} G_\phi)(x, y) j(y) dv_h(y) = 0.$$

Posons

$$a = \frac{\int_M (\partial_{x_i} G_\phi)(x, y) \phi(y) dv_h(y)}{\int_M \phi^2 dv_h},$$

on a donc pour tous $j \in J$,

$$\int_M [(\partial_{x_i} G_\phi)(x, y) - a\phi(y)] j(y) dv_h = 0.$$

D'après le lemme 3.2.21 ci-dessous, pour tout $y \in K$,

$$\partial_{x_i} G_\phi(x, y) = a\phi(y) + cste.$$

C'est impossible puisque d'après la Proposition 3.2.20, $\partial_{x_i} G_\phi(x, \cdot)$ a une singularité en x . Nous aurons donc terminé la démonstration de notre théorème, dès que nous aurons démontré le lemme :

Lemme 3.2.21. *Soit $w \in \mathcal{L}^1(M)$, $w \in \mathcal{C}^2(M \setminus \{y\})$. Supposons que pour tout $j \in J$,*

$$\int_M w(x) j(x) dv_h(x) = 0,$$

alors w est constant sur K .

Démonstration. Nous nous inspirons largement de la démonstration de [Uhl76], p 1075. L'espace tangent à \mathcal{O}_g en la métrique h est

$$T_h \mathcal{O}_g = \{ \delta h; \delta h \text{ 2-forme symétrique sur } M \text{ à support dans } K' \}.$$

La fonction w est orthogonale à J si et seulement si pour tout $\delta h \in T_h \mathcal{O}_g$,

$$\int_M w \partial_h F(\delta h) dv_h = 0. \quad (3.10)$$

Comme

$$F(\phi, \lambda, h) = \Delta_h \phi - \lambda \phi,$$

on a par définition, au point $(\phi, \lambda, h) \in Q$ considéré,

$$\partial_h F(\delta h) = \partial_h(\Delta_h \phi)(\delta h).$$

De plus, d'après la formule de Green, on a

$$\int_M \iota_g(h)(\nabla_{\iota_g(h)} \phi, \nabla_{\iota_g(h)} w) dv_h = \int_M w(\Delta_h \phi) dv_h. \quad (3.11)$$

On note $d\phi \odot dw$ la 2-forme symétrique définie pour tout $x \in M$ et $X, Y \in T_x M$ par

$$d\phi \odot dw(X, Y) = \frac{1}{2}(d_x \phi(X) d_x w(Y) + d_x w(X) d_x \phi(Y)).$$

Dans un système de coordonnées locales (x_i) quelconques au voisinage du point x , la matrice de $d\phi \odot dw$ s'écrit $\frac{1}{2}(d_{x_i} \phi d_{x_j} w + d_{x_j} \phi d_{x_i} w)$. Comme $\iota_g(h)$ est symétrique, on a alors, au point x et dans ce système de coordonnées,

$$\iota_g(h)(\nabla_{\iota_g(h)} \phi, \nabla_{\iota_g(h)} w) = \sum_{i,j} (\iota_g(h))^{ij} d_{x_i} \phi d_{x_j} w = \text{Trace}(\iota_g(h)(x)^{-1}(d_x \phi \odot d_x w)).$$

Nous réécrivons donc la Formule 3.11 sous la forme suivante :

$$\int_M \text{Trace}(\iota_g(h)^{-1} \cdot d\phi \odot dw) dv_h = \int_M w(\Delta_h \phi) dv_h, \quad (3.12)$$

où l'inverse et le produit matriciel sont pris dans un système de coordonnées arbitraire en chaque point (on vérifie que cette expression ne dépend pas de ce système).

Notons

$$(T_h \mathcal{O}_g)_0 = \{\delta h \in T_h \mathcal{O}_g; \forall x \in K', \text{Trace}(h^T \delta h(x)) = 0\} :$$

$(T_h \mathcal{O}_g)_0$ est l'espace des variations de h qui préservent la forme volume dv_h sur K' . Il nous suffira de considérer de telles variations. On vérifie immédiatement que $d\iota_g(T_h \mathcal{O}_g)_0$ est inclus dans l'ensemble des variations qui préservent la forme volume de $\iota_g(h)$ sur tout M , car la fonction cut-off n'ajoute qu'un terme multiplicatif à l'élément de volume sur $K' \setminus K$ qui reste constant lors de ces variations. En différentiant terme à terme la formule (3.12) le long de $(T_h \mathcal{O}_g)_0$, on obtient alors pour tout $\delta h \in (T_h \mathcal{O}_g)_0$,

$$\int_M \text{Trace}(d(\iota_g)^{-1}(\delta h) \cdot dw \odot d\phi) dv_h = \int_M w \partial_h F(\delta h) dv_h = 0 \quad (3.13)$$

d'après l'équation (3.10). De plus, pour tout $x \in K$, par définition on a

$$d\iota_g(\delta h)(x) = \delta h(x),$$

donc

$$d(\iota_g)^{-1}(\delta h) = -g^{-1} \cdot \delta h.$$

D'après la formule précédente, on a alors pour presque tout $x \in K$ et pour toute matrice symétrique δh telle que $\text{Trace}(h^{-1} \cdot \delta h) = 0$,

$$\text{Trace}(-g^{-1} \cdot \delta h \cdot dw \odot d\phi) = 0.$$

Comme

$$\langle A, B \rangle := \text{Trace}(A \cdot B)$$

définit un produit scalaire sur l'ensemble des matrices symétriques, et comme l'application $\delta h \rightarrow -g^{-1} \delta h$ est bijective, pour presque tout $x \in K$ il existe alors $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$dw \odot d\phi = \lambda(x)h.$$

Or, h est de rang maximal $n \geq 2$, et défini positif. Au contraire, $dw \odot d\phi$ est de rang au plus 2, et si $n = 2$, son déterminant est négatif. On a donc

$$\lambda(x) = 0$$

presque partout sur K . Comme dw est continue en dehors de y , son support est donc inclus dans l'ensemble des points critiques de ϕ contenus dans K . Comme M est de volume infini, la fonction ϕ est non constante. Par le principe du prolongement unique d'Aronszajn pour les solutions d'équations elliptiques (voir [Aro57]), l'ensemble des points critiques de ϕ est alors d'intérieur vide. La différentielle dw est donc nulle sur K , et la fonction w constante. Ceci achève la démonstration de notre lemme, qui conclut celle de la Proposition 3.2.16. Cette dernière implique la Proposition 3.2.14. \square

\square

\square

Les Propositions 3.2.13 et 3.2.14 montrent que pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\mathcal{GM}_K(M) \subset \mathcal{U}$ des métriques de \mathcal{U} telles que pour tout $g \in \mathcal{GM}_K(M)$, la première fonction propre ϕ_0^g est de Morse sur K est un ouvert dense dans \mathcal{U} pour la topologie \mathcal{C}^k forte. Comme M est une réunion dénombrable de compacts, cela conclut la démonstration du Théorème 3.2.10.

3.3 Revêtements et bas du spectre d'un domaine fondamental

Dans cette section, nous utilisons les techniques présentées dans les deux sections précédentes pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit N une variété riemannienne de dimension n , de volume infini dont le rayon d'injectivité, le bas du spectre et le trou spectral sont strictement positifs, et dont les $k - 2$ premières dérivées covariantes du tenseur de courbure sont uniformément bornées pour $k \geq n + 2$. Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien de groupe d'automorphisme G . On a*

$$\lambda_0(N) = \sup_D \{ \lambda_0(D), D \subset M \text{ domaine fondamental pour } G \}.$$

Ce supremum est atteint lorsque la métrique est générique sur N par un domaine sur lequel ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann.

On rappelle que $\lambda_0(D)$ est le bas du spectre de D avec condition de Neumann au bord, et qu'un fermé $D \subset M$ à bord de classe \mathcal{C}^1 par morceaux est un domaine fondamental pour le groupe G si $p(D) = N$ et pour tout $g \in G \setminus \{id\}$, $g(\overset{\circ}{D}) \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$.

Démonstration. Soit N une variété riemannienne quelconque, et soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement riemannien de groupe d'automorphisme G . Une première inégalité est immédiate, et découle du Principe du Min-Max :

Lemme 3.3.2. *Pour tout domaine fondamental $D \subset M$ pour le revêtement p , on a*

$$\lambda_0(N) \geq \lambda_0(\overline{D}).$$

Nous nous intéressons donc à l'autre inégalité. Notons g_0 la métrique de N (ainsi que son relevé à M), qu'on suppose de volume infini, de rayon d'injectivité et de trou spectral strictement positifs. On ne suppose pour le moment que

$$\text{Ric}_{g_0} \geq -\kappa g_0,$$

pour $\kappa > 0$. Soit ϕ_0 la première fonction propre de N associée à $\lambda_0(N)$, par hypothèse, ϕ_0 existe et n'est pas constante. Nous commençons par contrôler les ensembles de niveaux de ϕ_0 :

Lemme 3.3.3. *Pour tout $a > 0$, l'ensemble*

$$N_a = \{x \in N; \phi_0(x) \geq a\}$$

est compact.

Démonstration. Soit $a > 0$, par l'absurde, supposons N_a non compacte. Comme N est complète, et ϕ_0 continue, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0} \in (N_a)^\mathbb{N}$ de points de N_a , et $r > 0$ tels que les $B(x_n, r)$ soient deux à deux disjoints. On suppose r inférieur au rayon d'injectivité de N , qui est positif par hypothèse. Par définition de N_a , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_0(x_n) \geq a$. De plus, d'après [Yau75], il existe une constante C ne dépendant que de la dimension de N

et d'une borne inférieure sur sa courbure de Ricci, telle que les solutions positive de $\Delta f = \lambda f$ vérifient

$$\left| \frac{\nabla f}{f} \right| \leq C.$$

Il existe donc $r_0 < r$ tel que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in B(x_n, r_0)$,

$$\phi_0(x) \geq \frac{a}{2}.$$

De plus, d'après [GP92], lorsque r_0 est inférieur à l'infimum des rayons d'injectivités de M , il existe une constante C_d qui ne dépend que de d la dimension de N telle que pour tout $n \geq 0$,

$$\text{Vol}(B(x_n, r_0)) > C_d r_0^d > 0.$$

On a donc

$$\int_N \phi_0^2 \geq \sum_{n \geq 0} \frac{a^2}{4} \text{Vol}(B(x_n, r_0)) = \infty,$$

ce qui est absurde. □

A l'aide de la Section 1.2, nous démontrons notre théorème dans le cas où la métrique est générique ou analytique sur N .

Proposition 3.3.4. *Si ϕ_0 est de Morse sur N , alors il existe un domaine fondamental $D \subset M$ à bord \mathcal{C}^1 par morceaux tel que*

$$\lambda_0(N) = \lambda_0(D).$$

Démonstration. D'après le théorème 3.1.1, il suffit de trouver un domaine D tel que ϕ_0 vérifie les conditions de Neumann au bord, c'est-à-dire tel que $\nabla \phi_0$ soit tangent à ∂D_0 . D'après le théorème 3.2.10, pour une métrique générique sur N la fonction ϕ_0 est de Morse. Les ensembles $N_a, a \in \mathbb{R}$ étant compacts, un tel domaine existe d'après le Théorème 1.2.4. □

D'après le Théorème 1.2.6, cette proposition se généralise à toutes les situations où le gradient de ϕ_0 est *simplement stratifié* sur N (voir la Section 1.2). Lorsque ce n'est pas le cas, nous démontrons le théorème 3.3.1 par approximation en ajoutant les hypothèses de courbure nécessaires :

Proposition 3.3.5. *Supposons que les $k - 2$ premières dérivées covariantes du tenseur de courbure de g_0 sont uniformément bornées pour k assez grand, et que le bas du spectre, le trou spectral et le rayon d'injectivité sont strictement positifs. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un domaine fondamental D_ϵ à bord \mathcal{C}^1 tel que*

$$\lambda_0(D_\epsilon) \geq \lambda_0(N) - \epsilon.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, d'après le lemme 3.1.8, il suffit de montrer qu'il existe un domaine fondamental D_ϵ qui admette une fonction $(\lambda_0(N, g_0) - \epsilon)$ -surharmonique positive pour le Laplacien associé à la métrique g_0 avec condition de Neumann sur ∂D_ϵ . On note toujours $\lambda_0 = \lambda_0(g_0)$ et ϕ_0 la fonction propre de Δ_{g_0} associée à λ_0 .

Lemme 3.3.6. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage \mathcal{V}_ϵ de g_0 pour la topologie \mathcal{C}^k -forte tel que pour tout $g \in \mathcal{V}_\epsilon$, la fonction propre ϕ_0^g est $(\lambda_0 - \epsilon)$ -surharmonique positive pour le Laplacien associé à la métrique g_0 .*

Démonstration. Par continuité du bas du spectre pour la topologie \mathcal{C}^k -forte (voir Lemme 3.2.8) et le Théorème 3.2.7, il existe un voisinage \mathcal{V}_1 de g_0 tel que pour tout $g \in \mathcal{V}_1$, le bas du spectre de Δ_g est strictement positif, une valeur propre isolée, et

$$|\lambda_0(g_0) - \lambda_0(g)| \leq \epsilon.$$

Nous allons utiliser des coordonnées plus adaptées au calcul local du Laplacien pour la métrique g_0 : les coordonnées harmoniques.

Définition 3.3.1. *Soit $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ un système de coordonnées dans une carte locale. On dit que ce sont des **coordonnées harmoniques** pour la métrique g_0 si pour tout $i = 1, \dots, n$,*

$$\Delta_{g_0}(x_i) = 0.$$

De telles coordonnées existent toujours localement ; le théorème suivant va nous permettre de les utiliser pour définir la topologie \mathcal{C}^k -forte :

Théorème 3.3.7. *Soit (N, g_0) une variété riemannienne de volume infini dont le rayon d'injectivité, le bas du spectre et le trou spectral sont strictement positifs, et dont les $k - 2$ premières dérivées covariantes du tenseur de courbure sont uniformément bornées pour k assez grand. Alors il existe un atlas localement fini dont toutes les cartes définissent des coordonnées harmoniques.*

Ce théorème découle directement du Théorème 1.3 de [Heb96]. Nous fixons donc pour la suite un tel atlas harmonique \mathfrak{A} .

Dans une carte locale (x_i) , on a pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 ,

$$\Delta_g f = (g^{ij}(\partial_{ij} f - \Gamma_{ij}^p \partial_p f)),$$

où les Γ_{ij}^p sont les Symboles de Christoffel de g dans la carte locale (x_i) , et où l'on a adopté la convention de sommation d'Einstein (voir [Heb96], Chapitre 1). En particulier, pour tout $p = 1, \dots, n$, on a

$$\Delta_{g_0} x_p = g^{ij} \Gamma_{ij}^p,$$

toujours en adoptant la convention de sommation d'Einstein. Dans un système de coordonnées harmoniques pour g_0 , on a donc pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2

$$\Delta_{g_0} f = g_0^{ij} \partial_{ij} f,$$

d'où

$$(\Delta_g - \Delta_{g_0})f = (g^{ij} - g_0^{ij})\partial_{ij} f - g^{ij}\Gamma_{ij}^p \partial_p f.$$

Pour $f = \phi_0^g$, on a alors

$$\Delta_g \phi_0^g = g^{ij}(\partial_{ij} \phi_0^g - \Gamma_{ij}^p \partial_p \phi_0^g) = \lambda_0(g)\phi_0^g$$

donc

$$|g^{ij} \partial_{ij} \phi_0^g - \lambda_0(g)\phi_0^g| \leq |g^{ij}\Gamma_{ij}^p \partial_p \phi_0^g|. \quad (3.14)$$

Par continuité de l'application qui, dans un système de coordonnées fixe, associe à la métrique ses symboles de Christoffel, il existe un voisinage de g_0 pour la topologie \mathcal{C}^k -forte (associée à l'atlas harmonique défini précédemment) $\mathcal{V}_2 \subset V_1$ tel que pour tout $g \in \mathcal{V}_1$, dans toute carte de \mathfrak{U} et pour tout $p = 1, \dots, n$, on ait

$$|g^{ij}\Gamma_{ij}^p| \leq \epsilon.$$

De plus, par hypothèse, pour tout $g \in \mathcal{V}_1$, la courbure de Ricci de (M, g) et son rayon d'injectivité sont bornés par une constante uniforme sur \mathcal{V}_1 . Comme ϕ_0^g est une fonction propre positive de Δ_g , d'après [Yau75], il existe une constante C ne dépendant que de \mathcal{V}_1 (et pas de g) telle que pour tout $g \in \mathcal{V}_1$, on ait

$$|\nabla \phi_0^g| \leq C\phi_0^g.$$

La majoration (3.14) devient alors

$$|g^{ij} \partial_{ij} \phi_0^g - \lambda_0^g \phi_0^g| \leq C\epsilon\phi_0^g,$$

donc puisque $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$,

$$|g^{ij} \partial_{ij} \phi_0^g - \lambda_0 \phi_0^g| \leq (C + 1)\epsilon\phi_0^g.$$

On obtient alors

$$|\Delta_{g_0} \phi_0^g - \lambda_0 \phi_0^g| = |g_0^{ij} \partial_{ij} \phi_0^g - \lambda_0 \phi_0^g| \leq |(g_0^{ij} - g^{ij})\partial_{ij} \phi_0^g| + |g^{ij} \partial_{ij} \phi_0^g - \lambda_0 \phi_0^g|.$$

De plus, il existe un voisinage $\mathcal{V}_3 \subset V_2$ de g tel que pour toute métrique $g \in \mathcal{V}_3$, sur toute carte de \mathfrak{U} et pour tous $i, j = 1, \dots, n$, on ait

$$|g^{ij} - g_0^{ij}| \leq \epsilon |g^{ij}|.$$

On a donc

$$|(g_0^{ij} - g^{ij})\partial_{ij} \phi_0^g| \leq \epsilon |g^{ij} \partial_{ij} \phi_0^g| = \epsilon |\lambda_0^g \phi_0^g - g^{ij}\Gamma_{ij}^p \partial_p \phi_0^g|,$$

donc

$$|(g_0^{ij} - g^{ij})\partial_{ij}\phi_0^g| \leq \epsilon(\lambda_0 + \epsilon + C\epsilon)\phi_0^g$$

d'après les arguments précédents. Finalement pour toute métrique $g \in \mathcal{V}_3$,

$$|\Delta_{g_0}\phi_0^g - \lambda_0\phi_0^g| \leq (C + 1 + \lambda_0 + C\epsilon)\epsilon\phi_0^g.$$

Quitte à remplacer ϵ par $B\epsilon$ où B est une constante positive indépendante de ϵ , ceci conclut notre démonstration puisque ϕ_0^g est positive. □

Soit donc \mathcal{V}_ϵ le voisinage donné par le lemme précédent. D'après le Théorème 3.2.10, il existe $g \in \mathcal{V}_\epsilon$ tel que ϕ_0^g est de Morse sur N . D'après la Proposition 3.3.4, il existe alors un domaine fondamental D_ϵ pour l'action du groupe de revêtement tel que ϕ_0^g vérifie les conditions de Neumann sur ∂D_ϵ . D'après le lemme précédent, la fonction ϕ_0^g est $\lambda_0 - \epsilon$ -surharmonique pour le Laplacien associé à g_0 . Ceci conclut donc la preuve de la Proposition 3.3.5, ce qui termine également la démonstration du Théorème 3.3.1 dans le cas général. □

□

Chapitre 4

Variétés hyperboliques et bas du spectre

Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes.

A. Weil

Ce chapitre décrit le cadre qui, à l'origine, a motivé tout notre travail : le lien entre certaines propriétés géométriques des variétés hyperboliques de dimension 3 de volume infini, et leur bas du spectre. Ce lien s'établit en étudiant l'action du groupe fondamental de la variété sur le bord à l'infini de l'espace hyperbolique : c'est ce que nous allons présenter maintenant. La géométrie hyperbolique est un champ d'étude vaste, et nous n'en présentons ici que ce qui est nécessaire pour décrire les résultats que nous avons obtenus et pour comprendre un peu plus largement nos motivations. L'essentiel des notions et résultats dont nous aurons besoin se trouvent résumés dans les articles [Sul87] et [CMT99] pour le lien entre le bas du spectre et la géométrie des variétés hyperboliques, et l'article de survol [And98] pour la théorie des déformations des variétés hyperboliques de volume infini. Pour une description récente plus globale de l'état des connaissances en géométrie hyperbolique de dimension 3, nous conseillons au lecteur l'excellent livre d'A. Marden [Mar07].

4.1 Bas du spectre, exposant de Poincaré et ensemble limite

4.1.1 Bord à l'infini et densité conforme

Nous noterons \mathbb{H}^3 l'espace hyperbolique de dimension 3, que nous représenterons en général comme la boule unité de \mathbb{R}^3 munie de la métrique

$$g_x = \frac{g_{eucl}}{(1 - |x|^2)^2},$$

où g_{eucl} est la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 et pour tout $x \in \mathbb{H}^3$, $|x|$ désigne la norme euclidienne de x . Cet espace est l'unique variété de dimension 3, complète, sans bord et simplement connexe, dont la courbure sectionnelle vaut constamment -1 . Le lecteur désirant une introduction élémentaire aux variétés hyperboliques est invité à lire les deux premiers chapitres du classique [BP92].

La sphère unité \mathbb{S}^2 est alors identifiée au *bord à l'infini* de \mathbb{H}^3 , c'est-à-dire au quotient de l'ensemble des rayons géodésiques infinis par la relation d'équivalence qui identifie deux rayons qui restent à distance finie l'un de l'autre. De chaque point de $x \in \mathbb{H}^3$, il existe alors une unique géodésique $\gamma_{x,\xi}$ dont le point à l'infini est ξ ; nous dirons que $\gamma_{x,\xi}$ se *termine* en ξ . Nous la noterons alors en général S^∞ . L'ensemble des isométries de \mathbb{H}^3 s'identifie à $PSL_2(\mathbb{C})$, et l'action de tout élément $g \in PSL_2(\mathbb{C})$ sur \mathbb{H}^3 se prolonge en une action sur S^∞ conforme pour la métrique canonique de la sphère dans notre modèle de la boule.

Définition 4.1.1. *Nous nous plaçons dans le modèle de la boule de \mathbb{H}^3 . Soit $\xi \in S^\infty$, on appelle **horosphère** centrée en ξ toute sphère (euclidienne) contenue dans \mathbb{H}^3 , tangente à S^∞ en ξ .*

Une horosphère centrée en ξ est orthogonale à l'ensemble des géodésiques qui se terminent en ξ . Identifions le point $0 \in \mathbb{R}^3$ à une origine arbitrairement fixée dans \mathbb{H}^3 , que nous noterons toujours 0 . Pour tout point $\xi \in \mathbb{S}^\infty$, les horosphères centrées en ξ forment une famille à un paramètre, paramétrée par exemple par la distance hyperbolique (algébrique) entre l'horosphère et le point 0 , qui feuillète \mathbb{H}^3 .

Définition 4.1.2. *Pour tout $\xi \in \mathbb{S}^\infty$, on note γ_ξ le rayon géodésique de 0 à ξ . On appelle **fonction de Busemann** en ξ la fonction qui à tous $x, y \in \mathbb{H}^3$ associe*

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma_\xi(t)) - d(y, \gamma_\xi(t)).$$

Proposition 4.1.1. 1. *Pour tous $\xi \in \mathbb{S}^\infty$ et $x, y, z \in \mathbb{H}^3$, on a*

$$\beta_\xi(x, z) + \beta_\xi(z, y) = \beta_\xi(x, y),$$

2. *La fonction de Busemann ne dépend pas de l'origine 0 choisie ;*

3. *Pour tous $\xi \in \mathbb{S}^\infty$ et $x, y \in \mathbb{H}^3$, $\beta_\xi(x, y)$ est égal à la distance hyperbolique algébrique entre les horosphères centrées en ξ et passant respectivement par x et y .*

4. *Soit $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ et $\xi \in \mathbb{S}^\infty$, le jacobien $|\gamma'|(\xi)$ de l'application conforme γ en ξ vaut*

$$|\gamma'|(\xi) = e^{-\beta_\xi(x, \gamma x)},$$

où $x \in \mathbb{H}^3$ est un point arbitrairement choisi.

Démonstration. Le point 1. est immédiat d'après la définition, et justifie l'appellation *cocycle de Busemann* pour $\beta_\xi(., .)$. Le point 2. découle d'un calcul simple que nous laissons au lecteur. Pour démontrer le point 3., on montre d'abord que si x et y sont sur la même horosphère centrée en ξ , alors $\beta_\xi(x, y) = 0$, en plaçant l'origine au milieu du segment $[xy]$. Puis, lorsque x et y sont sur deux horosphères distinctes centrées en ξ , on peut d'après l'étape précédente et la propriété de cocycle supposer que x, y et ξ sont alignés. Il suffit alors de placer l'origine en x pour que notre résultat soit immédiat. Pour une démonstration du point 4., le lecteur pourra se référer à la Section 2 de [Sul79]. \square

Nous allons nous intéresser par la suite à des familles de mesures sur la sphère à l'infini, au sens suivant :

Définition 4.1.3. *Soit $\alpha > 0$. Une **densité conforme** de dimension α sur \mathbb{S}^∞ est une famille de mesures $(\mu_x)_{x \in \mathbb{H}^3}$ sur \mathbb{S}^∞ , absolument continues les unes par rapports aux autres, qui vérifie pour tous points $x, y \in \mathbb{H}^3$*

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\alpha\beta_\xi(x, y)}.$$

La sphère à l'infini \mathbb{S}^∞ porte une mesure naturelle : la mesure de Lebesgue ν_0 , induite sur la sphère unité par la métrique canonique $g_{\mathbb{S}^2}$ de la sphère ronde de \mathbb{R}^3 . Nous allons l'utiliser pour construire un premier exemple de densité conforme :

Définition 4.1.4. Soit $x \in \mathbb{H}^3$, on appelle **métrique visuelle** de \mathbb{S}^∞ en x la métrique riemannienne

$$g_x(\xi) = e^{-\beta_\xi(x,0)} g_{\mathbb{S}^2}(\xi).$$

La mesure g_x est donc une métrique conforme à $g_{\mathbb{S}^2}$. Elle induit une mesure ν_x sur \mathbb{S}^2 , absolument continue par rapport à ν_0 , qui vérifie en tout point $\xi \in \mathbb{S}^\infty$:

$$\frac{d\nu_x}{d\nu_0}(\xi) = e^{-2\beta_\xi(x,0)}.$$

On l'appelle la **mesure visuelle** en x .

Par construction, l'ensemble des mesures visuelles forme une densité conforme de dimension 2. Le nom *mesure visuelle* provient de la propriété suivante :

Proposition 4.1.2. Soit $x \in \mathbb{H}^3$, et soit $A \subset \mathbb{S}^\infty$. On note $A_x \subset S_x\mathbb{H}^3$ l'ensemble des vecteurs unitaires v en x tels que la géodésique issue de x de vecteur vitesse v se termine dans A . On munit $S_x\mathbb{H}^3$ de la mesure de Lebesgue λ_S sur la sphère unité. Alors on a

$$\lambda_S(A_x) = \nu_x(A).$$

Dit autrement, $\nu_x(A)$ est la mesure de A sur la sphère à l'infinie vue du point x . Cette propriété est évidente en 0 puisque les géodésiques passant par 0 sont des diamètres de la boule, et fournissent donc une isométrie canonique de \mathbb{S}^∞ sur $S_0\mathbb{H}^3$. Pour les autres points de \mathbb{H}^3 , cela découle du point 3 de la Propriété 4.1.1 et de la transitivité de $PSL_2(\mathbb{C})$ sur \mathbb{H}^3 . Cette idée de mesure visuelle se généralise de la façon suivante. Soit $B \subset \mathbb{S}^\infty$ un ensemble de **dimension de Hausdorff** d , tel que

$$0 < H_d(B) < \infty,$$

où H_d désigne la **mesure de Hausdorff** de dimension d . Le lecteur pourra se reporter aux premières pages de [Sul84] pour une définition de la dimension de Hausdorff et de la mesure de Hausdorff.

Définition 4.1.5. On appelle mesure visuelle associée à B la famille de mesure $(\nu_x^B)_{x \in \mathbb{H}^3}$, définie en tout point $x \in \mathbb{H}^3$ pour tout $A \subset \mathbb{S}^\infty$ par

$$\nu_x^B(A) = H_d((A \cap B)_x),$$

où $(A \cap B)_x \subset S_x\mathbb{H}^3$ est de nouveau l'ensemble $A \cap B$ vu de x .

Proposition 4.1.3. *La famille des $(\nu_x^B)_{x \in \mathbb{H}^3}$ définit une densité conforme de dimension d .*

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette propriété à partir de la définition de la mesure de Hausdorff, en suivant la démonstration esquissée dans [Sul79], p. 174.

Nous verrons bientôt d'autres densités conformes intéressantes sur S^∞ , reliées à nos problèmes de bas du spectre. Il apparaîtra que, dans les situations qui nous intéressent, ces densités seront égales à des mesures visuelles associées à un ensemble bien choisi.

4.1.2 Ensemble limite et variétés géométriquement finies

Désormais, Γ désignera un sous-groupe discret de type fini de $PSL_2(\mathbb{C})$ agissant par isométries, proprement discontinument et sans point fixe sur \mathbb{H}^3 . Son action se prolonge donc par applications conformes à S^∞ . Nous appellerons un tel groupe Γ un **groupe kleinien**. Le quotient $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ muni de la métrique quotient sera alors une variété riemannienne de dimension 3, dont la métrique est hyperbolique et la courbure sectionnelle constamment égale à -1 . Réciproquement, toute variété M orientable complète de dimension 3 sans bord de courbure sectionnelle constante égale à -1 s'obtient de cette façon, où Γ s'identifie naturellement au groupe fondamental $\pi_1(M)$.

Soit $x \in \mathbb{H}^3$, on appelle **ensemble limite** de Γ l'ensemble

$$\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma x} \cap S^\infty.$$

Comme Γ agit discontinûment sur \mathbb{H}^3 , Λ_Γ est l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite de x . Les propriétés suivantes sont élémentaires à vérifier :

Proposition 4.1.4. 1. *L'ensemble limite Λ_Γ ne dépend pas du point base x choisi;*

2. *c'est le plus petit fermé de $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup S^\infty$ invariant par l'action de Γ ;*

3. *s'il contient au moins 3 points, il est infini, et est l'adhérence de l'ensemble des points fixes des éléments de Γ .*

Nous supposons pour la suite de ce mémoire que Λ_Γ contient au moins trois points : on dit que Γ est *non élémentaire*. L'ensemble limite Λ_Γ a en général une **dimension de Hausdorff** non entière, que nous noterons δ_Γ . Nous verrons plus loin que cette dimension est fortement reliée au bas du spectre de la variété M , ce qui est à l'origine de notre étude. Le complémentaire de l'ensemble limite,

$$\Omega_\Gamma = S^\infty \setminus \Lambda_\Gamma,$$

appelé **ensemble de discontinuité** de Γ . C'est l'ensemble maximal de S^∞ sur lequel Γ agit proprement discontinument et sans point fixe. Le théorème

d'Ahlfors relie très simplement l'ensemble de discontinuité et le bord à l'infini de M :

Théorème 4.1.5 (Théorème de finitude d'Ahlfors, 1964). *Si Γ est de type fini, alors*

$$\partial^\infty M := \Omega_\Gamma / \Gamma$$

est la réunion d'un nombre fini de surfaces de Riemann de volume fini ayant chacune un nombre fini de cusps.

Un autre ensemble important pour la géométrie de M est construit à partir de l'ensemble limite. On note $CH(\Lambda_\Gamma)$ l'**enveloppe convexe** dans \mathbb{H}^3 de Λ_Γ , c'est-à-dire le plus petit convexe de \mathbb{H}^3 dont l'adhérence contient Λ_Γ . Puisque Λ_Γ est invariant sous l'action de Γ , $CH(\Lambda_\Gamma)$ l'est également.

Définition 4.1.6. *On appelle **coeur convexe** de M l'ensemble*

$$C(M) = CH(\Lambda_\Gamma) / \Gamma.$$

*On dit que M est **géométriquement finie** si son coeur convexe est de volume fini, et **convexe cocompacte** s'il est compact.*

Proposition 4.1.6. *L'ensemble $C(M)$ est le plus petit convexe de M homotope à $\bar{M} = (\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}^\infty) / \Gamma$.*

Pour une démonstration et une description plus détaillée des propriétés du coeur convexe que nous allons évoquer maintenant, le lecteur peut consulter par exemple [EM87] qui donne une preuve détaillée de ces résultats dus originellement à Thurston. Par extension, on dit que le groupe kleinien Γ est géométriquement fini (resp. convexe cocompact) si la variété $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$ l'est.

Définition 4.1.7. *Soit Σ une surface hyperbolique de volume fini. On appelle **lamination géodésique** sur Σ une réunion compacte de géodésiques simples disjointes de Σ . Chacune des géodésiques de la lamination est appelée une **feuille**.*

Définition 4.1.8. *Soit $f : \Sigma \rightarrow f(\Sigma) \subset M$ un homéomorphisme, on dit que $f(\Sigma)$ est une **surface hyperbolique plissée** si f vérifie les conditions suivantes :*

1. *f envoie toute courbe rectifiable de Σ sur une courbe rectifiable de même longueur ;*
2. *tout point $x \in \Sigma$ est contenu dans un arc géodésique ouvert qui est envoyé par f sur un arc géodésique ouvert ;*
3. *f envoie les cusps de Σ sur des cusps de M .*

L'image de Σ par f , munie de sa métrique des chemins, est donc isométrique à une surface hyperbolique. On montre qu'en fait, $f(\Sigma)$ est totalement géodésique, sauf sur une lamination géodésique de Σ , que l'on appelle le **lieu de plissage** de $f(\Sigma)$. A chaque feuille γ du lieu de plissage, on associe un nombre qui correspond à l'angle de plissage de $f(\Sigma)$ le long γ . L'ensemble de ces nombres définit une mesure transverse sur la lamination de plissage, et la donnée d'une lamination et d'une mesure transverse définit une lamination géodésique mesurée, mais nous ne chercherons pas à définir rigoureusement ce concept. Nous avons introduit ces définitions du fait du théorème suivant, dû à Thurston, dont une démonstration complète se trouve dans [EM87] :

Théorème 4.1.7. *Le bord du coeur convexe d'une variété géométriquement finie est une surface hyperbolique plissée, homéomorphe à Ω_Γ/Γ .*

Pour rendre la fin de cet énoncé correcte, il faut ajouter le fait que si Γ est un *groupe fuchsien* (voir définition ci-dessous), alors $C(M)$ est réduit à une surface hyperbolique et on appelle *bord de $C(M)$* la réunion de deux copies de $C(M)$. Les articles [BO04] et [Lec06] caractérisent l'ensemble des laminations géodésiques mesurées qui peuvent apparaître comme plissages du bord du coeur convexe d'une variété géométriquement finie. Nous n'approfondirons pas vraiment ce point de vue dans cette thèse ; le lecteur intéressé par ces questions peut se référer à ces deux articles et aux références qui y sont données.

Par la suite, nous nous intéresserons *exclusivement à des variétés géométriquement finies*. C'est une hypothèse forte, qui implique d'après la proposition précédente et le Théorème d'Ahlfors que ces variétés sont homéomorphes à l'intérieur de variétés compactes à bord. Les variétés hyperboliques dont le groupe fondamental est de type fini sont en fait toutes homéomorphes à l'intérieur de variétés compactes à bord : on appelle ce résultat le Théorème de Sagesse, conjecturé en 1974 par A. Marden et prouvé en 2004 par Ian Agol (voir [Ago04]). Mieux comprendre les variétés géométriquement infinies est à l'origine de nombreuses questions de géométrie hyperbolique de dimension 3 (Théorème de Densité, Théorème de la Lamination Terminale...), dont nous ne parlerons pas du tout dans ce mémoire. Nous invitons le lecteur qui souhaiterait un résumé de ces questions à se reporter au chapitre 5 du livre d'A. Marden [Mar07].

Définition 4.1.9. *On dit qu'un groupe kleinien est **fuchsien** s'il préserve un plan totalement géodésique de \mathbb{H}^3 . Un groupe kleinien $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{C})$ est dit **quasi-fuchsien** si la variété quotient $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ est géométriquement finie, homéomorphe à un produit $S \times \mathbb{R}$, où S est une surface compacte de genre supérieur à 2. On dira qu'une variété est fuchsienne (resp. quasi-fuchsienne) si elle s'écrit \mathbb{H}^3/Γ , avec Γ fuchsien (resp. quasi-fuchsien).*

Soit donc Γ un groupe fuchsien, à conjugaison près, c'est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$. Posons $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$, notons g_S sa métrique hyperbolique ; la variété $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ est alors isométrique à $S \times \mathbb{R}$ muni de la métrique

$$g_M = dr^2 + \text{ch}^2 r g_S.$$

Lorsque Γ est quasi-fuchsien, la variété $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ est quasi-isométrique à une variété fuchsienne (Γ est une déformation d'un groupe fuchsien, voir Section 4.2.1 ci-dessous). Les variétés fuchiennes et quasi-fuchiennes sont les exemples de variétés hyperboliques de volume infini les plus simples à étudier, et sur lesquelles on dispose du plus grand nombre de résultats. Nous verrons à la Section 4.2.2 que la question qui nous intéresse est résolue pour les variétés fuchiennes et quasi-fuchiennes. Nous nous intéresserons donc principalement aux variétés géométriquement finies *qui ne sont pas quasi-fuchiennes*.

4.1.3 Mesures à l'infini et bas du spectre

Nous allons présenter maintenant la construction d'une densité conforme portée par l'ensemble limite : les mesures de Patterson-Sullivan. C'est elle qui nous permettra de faire le lien entre la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite et le bas du spectre de la variété quotient. Elle sera l'un de nos outils principaux pour les paragraphes qui suivent. Nous en rappelons ici brièvement la construction, et nous indiquerons au fur et à mesure de notre description les articles dans lesquels ces résultats sont démontrés.

Soit Γ un groupe kleinien.

Définition 4.1.10. On appelle *série de Poincaré* de Γ aux points $x, y \in \mathbb{H}^3$ la série

$$g_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)},$$

où on a noté $d(x, \gamma y)$ la distance pour la métrique hyperbolique entre x et γy . Soient $x, y \in \mathbb{H}^3$, on appelle *exposant critique* de Γ , que l'on note $\delta^c(\Gamma)$, l'infimum des s tels que la série $g_s(x, y)$ converge :

$$\delta^c(\Gamma) = \inf \{s > 0; g_s(x, y) < +\infty\}.$$

Cet exposant ne dépend pas de x et y .

Cet exposant critique est, dans les situations qui nous intéressent, une autre caractérisation de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite :

Théorème 4.1.8 (Sullivan, 1984). *Lorsque $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ est géométriquement finie, on a l'égalité*

$$\delta^c(\Gamma) = \delta_\Gamma,$$

et la série $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta d(x, \gamma y)}$ diverge.

Soit $s > \delta_\Gamma$, et $x, y \in \mathbb{H}^3$. On note μ_x^s la mesure de probabilité portée par $\overline{\Gamma x}$ définie par

$$\mu_x^s = \frac{1}{g_s(x, y)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)} \delta_{\gamma y},$$

où $\delta_{\gamma y}$ désigne la mesure de Dirac au point γy . Ces notations utilisent certainement trop la lettre « δ » mais ce sont celles communément employées. Nous essaierons de limiter les risques de confusions. Lorsque $s \rightarrow \delta_\Gamma$, nous obtenons la mesure que nous recherchons :

Théorème 4.1.9 (Sullivan, 1979). *Si M est géométriquement finie, pour tout $x \in \mathbb{H}^3$ les mesures μ_x^s convergent faiblement lorsque $s \rightarrow \delta_\Gamma$ vers une mesure μ_x portée par Λ_Γ . Cette mesure ne dépend pas du point y considéré lors de sa construction ; on l'appelle **mesure de Patterson-Sullivan** en x .*

Ce théorème a d'abord été obtenu par S.J. Patterson dans [Pat76] pour les groupes fuchsien, puis par D. Sullivan dans [Sul79]. Nous obtenons ainsi une famille de mesures, μ_x , portées par l'ensemble limite, qui vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 4.1.10. *1. Les mesures $(\mu_x)_{x \in \mathbb{H}^3}$ sont absolument continues entre elles, et vérifient pour tous $x, y \in \mathbb{H}^3$ et $\xi \in \Lambda_\Gamma$:*

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\delta_\Gamma \beta_\xi(x, y)},$$

les (μ_x) forment donc une densité conforme de dimension δ_Γ sur S^∞ .

2. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\gamma^* \mu_x = \mu_{\gamma x} = |\gamma'|^{\delta_\Gamma} \mu_x,$$

où $|\gamma'|(\xi) = e^{-\beta_\xi(x, \gamma x)}$ désigne toujours le jacobien de γ vu comme application conforme sur S^∞ .

Ces propriétés sont démontrées à la Section 2 de [Sul79]. Lorsque Γ n'est pas géométriquement finie, la série de Poincaré ne diverge pas nécessairement en δ_Γ , et quelques ajustements sont nécessaires pour obtenir une telle famille de mesure. D'après le Théorème 4.1.9, la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite Λ_Γ est δ_Γ . Supposons que la mesure de Hausdorff de dimension δ_Γ de l'ensemble limite soit finie :

$$H_{\delta_\Gamma}(\Lambda_\Gamma) < \infty.$$

On remarque que les propriétés de la densité conforme (μ_x) décrites ci-dessus sont identiques à celles de la mesure visuelle associée à Λ_Γ (voir Définition 4.1.5). Le théorème suivant nous dit qu'elles sont alors égales :

Théorème 4.1.11. *Les mesures $(\mu_x)_{x \in \mathbb{H}^3}$ forment l'unique densité conforme portée par l'ensemble limite (à constante multiplicative près). En particulier, si $H_{\delta_\Gamma}(\Lambda_\Gamma) < \infty$, alors il existe une constante telle que*

$$\mu_x = \nu_x^{\Lambda_\Gamma},$$

où $\nu_x^{\Lambda_\Gamma}$ est la mesure visuelle en x associée à Λ_Γ .

Ce théorème découle du Corollaire 20 de [Sul79] et du Théorème 1 de [Sul84].

Notre point de départ était le bas du spectre de certaines variétés hyperboliques géométriquement finies. Cela nous a conduit à nous intéresser à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite du fait du théorème suivant :

Théorème 4.1.12 (Sullivan, 1987). *Soit $\delta^c(\Gamma)$ l'exposant critique d'un groupe kleinien (quelconque) Γ , le bas du spectre $\lambda_0(M)$ de la variété $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ vérifie*

$$\lambda_0(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta^c(\Gamma) < 1; \\ \delta^c(\Gamma)(2 - \delta^c(\Gamma)) & \text{si } \delta^c(\Gamma) > 1 \end{cases}$$

Toute fonction λ -harmonique positive sur M se relève en une fonction λ -harmonique sur \mathbb{H}^3 . Or, on a

$$\lambda_0(\mathbb{H}^3) = 1.$$

La caractérisation du bas du spectre donnée par le Théorème 3.1.1 implique donc que, nécessairement, $\lambda_0(M) \leq 1$.

Nous ne démontrerons pas le Théorème 4.1.12 dans cette version complète ; nous invitons le lecteur à se reporter à [Sul87]. Nous allons en revanche esquisser la preuve d'une version plus faible, mais plus précise dans la situation qui nous intéressera par la suite.

Proposition 4.1.13. *Soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété géométriquement finie qui vérifie $\delta_\Gamma > 1$. Alors son bas du spectre vérifie*

$$\lambda_0(M) = \delta_\Gamma(2 - \delta_\Gamma),$$

et la première fonction propre associée est donnée par

$$\Phi_0(x) = \int_{\Lambda_\Gamma} 1\mu_x = \int_{\Lambda_\Gamma} e^{-\delta_\Gamma \beta_\xi(x,0)} d\mu_0(\xi),$$

où μ_x désigne la mesure de Patterson-Sullivan en x .

Démonstration. Nous avons déjà vu que pour une variété géométriquement finie, $\delta^c(\Gamma) = \delta_\Gamma$. Posons

$$\lambda_0 = \delta_\Gamma(2 - \delta_\Gamma).$$

D'après le principe du Min-Max (voir la Proposition 1.1.3) associé au Théorème 1.1.4, il suffit de montrer que la fonction

$$\Phi_0(x) = \int_{\Lambda_\Gamma} 1\mu_x$$

est λ_0 -harmonique (elle est évidemment positive) et de carré sommable sur M .

La démonstration la plus ancienne que je connaisse de ce que Φ_0 est λ_0 harmonique se trouve à la Section 7 de l'article [Sul79]. Il est démontré qu'elle est de carré sommable dans [Sul84], Section 6. \square

Nous étudierons par la suite exclusivement des variétés géométriquement finies de volume infini. Quelques résultats supplémentaires nous aideront à passer du point de vue du spectre à celui de l'ensemble limite :

Théorème 4.1.14. *Soit Γ un groupe kleinien de type fini, tel que $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ soit géométriquement finie.*

1. Si $\text{Vol}(M) = \infty$, alors $\delta_\Gamma < 2$;
2. Si M n'est pas un tore plein ou un bretzel, alors $\delta_\Gamma \geq 1$; de plus dans ce cas, $\delta_\Gamma = 1$ si et seulement si Γ est fuchsien.

Combiné avec la proposition précédente, nous obtenons donc là une amélioration dans le cas des variétés hyperboliques géométriquement finies du Théorème de Li-Wang que nous citons en introduction. Ce théorème rassemble les résultats du Corollaire 1.3 et du Corollaire 1.8 de l'article de C. Bihop et P. Jones [BJ97].

Corollaire 4.1.15. *Soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété hyperbolique de volume infini, géométriquement finie, qui ne soit ni un tore plein, ni un bretzel, ni fuchsienne. Alors*

$$1 < \delta_\Gamma < 2 \text{ et } \lambda_0(M) = \delta_\Gamma(2 - \delta_\Gamma).$$

Les variétés que nous étudierons par la suite vérifieront (sauf mention explicite) les hypothèses de ce corollaire. D'après les travaux de Lax et Phillips (voir [LP82]) que nous avons déjà cités, elles ont donc un trou spectral strictement positif, et leur première fonction propre est donnée par la Proposition 4.1.13. Les questions que nous formulerons en terme de bas du spectre seront donc équivalentes à des questions sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite. C'est dans ce but que nous avons introduit les outils de la Section 4.1.1.

4.2 Déformation des variétés hyperboliques

4.2.1 Espace de déformation

Soit $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ un groupe kleinien de type fini. Une **représentation** ρ de Γ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ est caractérisée par l'image des générateurs par ρ . L'ensemble $\mathcal{HOM}(\Gamma, PSL_2(\mathbb{C}))$ des représentations de Γ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ est donc un sous-ensemble de $(PSL_2(\mathbb{C}))^k$, qui hérite donc de la topologie d'un produit d'espace de matrices, communément appelée **topologie de la convergence algébrique** : une famille $(\rho_n)_{n>0}$ de représentation *converge algébriquement* vers ρ_∞ si et seulement si, dans $PSL_2(\mathbb{C})$, $\rho_n(\gamma_1) \rightarrow \rho_\infty(\gamma_1), \dots, \rho_n(\gamma_k) \rightarrow \rho_\infty(\gamma_k)$. Deux représentations ρ_1, ρ_2 sont dites *conjuguées* s'il existe un élément $g \in PSL_2(\mathbb{C})$ tel que $\rho_2 = g\rho_1g^{-1}$.

On appelle **variété des représentations** $X(\Gamma)$ l'ensemble des représentations de Γ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ quotienté par cette relation d'équivalence, que l'on munira de la topologie quotient. On note traditionnellement

$$AH(\Gamma) = \{\rho \in \mathcal{HOM}(\Gamma, PSL_2(\mathbb{C})) \text{ fidèle discrète}\} / \sim.$$

Théorème 4.2.1 (Jorgensen). *L'ensemble $AH(\Gamma)$ est fermé dans $X(\Gamma)$.*

La démonstration originale de ce résultat se trouve dans [Jør76]. Nous supposons maintenant que le bord à l'infini de $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ est incompressible, c'est-à-dire que l'application

$$i_* : \pi_1(\partial^\infty M) \rightarrow \pi_1(M)$$

induite par l'inclusion est injective. Lorsque le bord n'est pas incompressible, certains résultats que nous allons présenter maintenant deviennent plus compliqués à énoncer ; nous ne nous intéresserons de toutes façons dans ce mémoire qu'à des variétés à bord incompressible. De plus, nous supposons que M est géométriquement finie et nous ne nous intéresserons qu'aux représentations de Γ qui respectent cette propriété :

Définition 4.2.1. *Nous appellerons **espace de déformation** de Γ , que nous notons $\mathcal{D}_F(\Gamma)$, le sous-ensemble de $AH(\Gamma)$ formé des représentations de Γ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ (à conjugaison près) dont l'image est géométriquement finie, qui préservent le type des éléments (ie $\rho(\gamma)$ est parabolique si et seulement si γ l'est), et qui sont reliées à la représentation triviale par un chemin continu de représentations.*

Théorème 4.2.2. *L'ensemble $\mathcal{D}_F(\Gamma)$ est un ouvert de $X(\Gamma)$, égal à la composante connexe de l'identité de l'intérieur de $AH(\Gamma)$:*

$$\mathcal{D}_F(\Gamma) = (AH(\Gamma))_0.$$

Il est homéomorphe au produit

$$\mathcal{T}(S_1) \times \dots \times \mathcal{T}(S_k),$$

où $\partial^\infty M = S_1 \coprod \dots \coprod S_k$ est le bord à l'infini de M , et pour chaque surface S_i , $\mathcal{T}(S_i)$ désigne l'espace de Teichmüller de S_i .

Il s'agit là de l'écriture dans le cas des variétés à bord incompressible du Théorème 5.1.3 p 243 du livre de Marden [Mar07]. Il regroupe les résultats de plusieurs articles, nous invitons le lecteur à se référer à la bibliographie indiquée par Marden pour plus de détail.

Nous pouvons donc déformer le groupe fondamental de notre variété, pour obtenir un groupe qui lui ressemble, dont la variété quotient est encore géométriquement finie. Et l'ensemble de ces déformations forme une variété analytique, dont la dimension est donnée par la somme des dimensions des espaces de Teichmüller. Nous ne parlerons pas beaucoup plus dans ce mémoire de la théorie de Teichmüller ; nous invitons le lecteur intéressé par cet aspect de la question à consulter, par exemple, l'ouvrage classique de F. Gardiner [Gar87]. Le théorème suivant nous permet de voir ces représentations du groupe Γ comme des déformations de la variété elle-même :

Théorème 4.2.3 (Marden, 1974). *Soit $\rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma)$, il existe un difféomorphisme $\psi_\rho : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ quasi-isométrique et ρ -équivariant, qui s'étend en une application quasi-conforme sur S^∞ qui envoie Λ_Γ sur $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$.*

Nous avons utilisé les deux notions suivantes :

Définition 4.2.2. *Une application $\psi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ est une **quasi-isométrie** si et seulement si elle est un homéomorphisme, et il existe des constantes $C, b > 0$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{H}^3$,*

$$C^{-1}d(x, y) - b \leq d(\psi(x), \psi(y)) \leq Cd(x, y) + b.$$

Elle est ρ -équivariante si pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{H}^3$, on a

$$\psi_\rho(\gamma x) = \rho(\gamma)\psi_\rho(x).$$

Du fait de l'équivariance, ψ_ρ passe donc au quotient en un difféomorphisme quasi-isométrique entre $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ et $M_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\Gamma)$, et une application quasiconforme entre $\partial^\infty M$ et $\partial^\infty M_\rho$. Les applications ψ_ρ ne sont pas uniques ; elles nous permettent néanmoins de traduire les déformations de Γ en des déformations des variétés quotients. Réciproquement, une quasi-isométrie ψ entre deux variétés hyperboliques géométriquement finie se relève en une quasi-isométrie de \mathbb{H}^3 , ρ -équivariante, et induit une représentation du groupe fondamental ρ . Un grand nombre de recherches en géométrie hyperbolique proviennent de la question générale suivante : comment relier les

déformations algébriques du groupes avec les déformations géométriques de la variété quotient ?

La théorie d'Ahlfors-Bers relie par exemple les déformations algébriques du groupe aux déformations de la structure conforme du bord à l'infini de la variété, c'est elle qui permet de démontrer le Théorème 4.2.2. De nombreux travaux, notamment ceux de F. Bonahon, tentent de relier ces déformations aux changements de plissage du bord du coeur convexe de la variété. L'article [BO04] établit, dans certains cas, une bijection entre des éléments de $\mathcal{D}_F(\Gamma)$ et certaines laminations de plissages du bord du coeur convexe. Nous allons pour notre part nous intéresser à la variation du bas du spectre lorsque l'on déforme la variété, et essayer de la relier nous aussi, dans certain cas, au plissage du bord du coeur convexe.

4.2.2 Conjecture : maximum du bas du spectre

L'ensemble limite Λ_Γ d'un groupe fuchsien Γ est, dans le modèle de la boule, un cercle de \mathbb{R}^3 . Sa dimension de Hausdorff est donc 1, et d'après le Théorème 4.1.12, le bas du spectre de \mathbb{H}^3/Γ vaut également 1. Pour une déformation quasi-fuchsienne géométriquement finie $\rho(\Gamma) \in \mathcal{D}_F(\Gamma)$, d'après le Théorème d'Isomorphisme de Marden, $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$ est l'image du cercle Λ_Γ par un homéomorphisme quasi-conforme de la sphère. Si $\rho(\Gamma)$ est également un groupe fuchsien, son ensemble limite est un cercle, de dimension de Hausdorff 1. Un théorème de Bowen nous assure que cela n'arrive que dans le cas fuchsien :

Théorème 4.2.4 (Bowen, 1979). *Soit Γ un groupe quasi-fuchsien, la dimension de Hausdorff de Λ_Γ est supérieure ou égale à 1, et vaut 1 si et seulement si Γ est fuchsien.*

Ce théorème a été démontré pour la première fois dans [Bow79].

D'après le Théorème 4.1.12, ce résultat s'exprime également de façon spectrale :

Corollaire 4.2.5. *Soit Γ un groupe quasi-fuchsien géométriquement fini, le bas du spectre $\lambda_0(\mathbb{H}^3/\Gamma)$ est inférieur ou égal à 1, et vaut 1 si et seulement si Γ est fuchsien.*

Le résultat de Li-Wang ([LW01]) que nous avons déjà cité (voir notre Introduction) peut être vu comme une généralisation de ce corollaire. On cherche à généraliser le théorème de Bowen aux groupes kleinien Γ tels que $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ n'est pas homéomorphe à un produit $S \times \mathbb{R}$, où S est une surface hyperbolique. Nous allons présenter maintenant une classe de groupes pour lesquels cette généralisation est naturelle.

Définition 4.2.3. *On dit qu'une variété hyperbolique M est **acylindrique** si tout anneau $\mathbb{S}^1 \times I \subset \overline{M}$ dont l'inclusion induit une application injective d'un groupe fondamental dans l'autre et tel que $\mathbb{S}^1 \times \partial I \subset \partial^\infty M$ est isotope à un anneau contenu dans $\partial^\infty M$.*

On montre qu'une variété acylindrique M a un bord incompressible (voir le début du paragraphe précédent). En particulier, M ne peut être un bretzel ou un tore plein. Lorsque M est géométriquement finie, les hypothèses du Corolaire 4.1.15 sont donc vérifiées, et les questions sur le bas du spectre sont équivalentes aux questions sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite.

Soit M une variété hyperbolique géométriquement finie, non homéomorphe à un produit $S \times \mathbb{R}$. La variété \overline{M} est une variété topologique compacte à bord lisse (dont éventuellement des points qui correspondent aux cusps); on note alors DM la variété obtenue en faisant le double de M le long de $\partial^\infty M$. On peut alors caractériser les variétés acylindriques de la façon suivante :

Théorème 4.2.6 (Thurston). *Avec les hypothèses précédentes, la variété M est acylindrique si et seulement si son double DM admet une métrique hyperbolique complète de volume fini. Cette métrique est alors unique.*

Esquisse de la preuve. Puisque M est hyperbolique, elle est asphérique. Comme le bord est incompressible, il n'existe aucun disque essentiel s'appuyant sur $\partial^\infty M$: son double est encore asphérique. Si M est acylindrique, la variété DM est alors atoroïdale. Elle vérifie donc les hypothèses du Théorème d'Hyperbolisation de Thurston (voir [Mar07] p324) : il existe une métrique hyperbolique complète sur DM , unique d'après le Théorème de Rigidité de Motstow (voir [BP92], chapitre C). On montre que cette métrique est symétrique par rapport à l'image de $\partial^\infty M$ dans DM . Chaque moitié de DM est alors homéomorphe au coeur convexe $C(M)$, et leur bord commun est totalement géodésique. On «relève» cette métrique à M , en la définissant sur $C(M)$ comme la métrique hyperbolique obtenue précédemment sur l'une des moitiés de DM , et on la prolonge à M . Ce prolongement est unique : il donne à chaque bout de M une métrique fuchsienne, déterminée par la métrique de la composante de bord qui le relie à M . Par construction, le bord du coeur convexe de la variété ainsi obtenue est alors totalement géodésique.

Réciproquement, si DM admet une métrique hyperbolique complète de mesure finie, d'après le Théorème d'Hyperbolisation, DM est atoroïdale. La variété M est donc nécessairement acylindrique. \square

Le lecteur pourra se reporter à [Thu82] pour une présentation un peu plus détaillée des arguments que nous avons donnés ci-dessus.

Corollaire 4.2.7. *Soit M une variété hyperbolique acylindrique, il existe une unique métrique hyperbolique sur M telle que le bord du coeur convexe soit totalement géodésique dans M .*

Démonstration. Si M admet une métrique hyperbolique telle que le bord du coeur convexe soit totalement géodésique, alors le double (métrique) du

coeur convexe est une variété hyperbolique homéomorphe à DM . Une telle variété est unique d'après le théorème précédent. \square

Notons maintenant $M_0 = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété hyperbolique dont le bord du coeur convexe est une réunion de surfaces hyperboliques totalement géodésiques. L'ensemble de discontinuité de Γ est alors une union de disques euclidiens disjoints, et l'ensemble limite $\Lambda_0 = \Lambda_\Gamma$ est l'adhérence d'une union dénombrable de cercles euclidiens. Les éléments de Γ envoient ces cercles les uns sur les autres, et il y a un nombre fini de classes d'équivalence de cercles modulo Γ , qui correspondent aux composantes de bord de $\overline{M_0}$.

D'après le Corollaire précédent, pour tout $\rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma) \setminus \{id\}$, le bord du coeur convexe de $M_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\Gamma)$ n'est pas totalement géodésique. L'ensemble limite $\Lambda_{\rho(\Gamma)}$, que nous noterons en général Λ_ρ , est l'image de Λ_0 par un homéomorphisme ψ_ρ quasiconforme de \mathbb{S}^∞ . Pour au moins l'une des classes d'équivalence de cercles de Λ_0 de décrites ci-dessus, l'image de ces cercles par ψ_ρ est un quasi-cercle, de dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1. La conjecture suivante, issue de l'article [CMT99], généralise donc le résultat de Bowen cité précédemment :

Question 3 (Canary, Minsky et Taylor). *Avec les notations précédentes, pour tout $\rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma)$, la dimension de Hausdorff de Λ_ρ est-elle minimale si et seulement si $\rho = id$?*

Pour toute variété $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ géométriquement finie, notons

$$d(M) = \inf \{ \delta_{\rho(\Gamma)}; \rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma) \}.$$

De l'article [CMT99], on déduit le résultat suivant :

Théorème 4.2.8. *Si M est acylindrique, alors $1 < d(M) < 2$.*

Démonstration. Il suffit de constater que lorsque M est acylindrique, elle n'est ni un bretzel, ni un tore plein, et son coeur incompressible ne peut être un livre de fibré en intervalles généralisé. Ce théorème découle alors immédiatement du théorème II de [CMT99]. Les termes *coeur incompressible* et *livre de fibrés en intervalles* sont définis dans [CMT99] aux pages 21 et 22 ; nous ne détaillerons pas ici leur signification. Seul ce théorème sera utile à la suite de notre étude. \square

Corollaire 4.2.9. *Soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, notons*

$$L_0(M) = \sup \{ \lambda_0(\mathbb{H}^3/\rho(\Gamma)); \rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma) \},$$

si M est acylindrique, on a

$$L_0(M) = d(M)(2 - d(M)) \text{ et } 0 < L_0(M) < 1.$$

La conjecture précédente se reformule donc de la façon suivante :

Question 4 (Maximum pour le bas du spectre). *Avec les hypothèses du Corollaire 4.2.9, $L_0(M)$ est-il atteint uniquement pour la représentation $\rho_0 = id$?*

Je suis sans doute encore assez loin d'avoir répondu à ces questions. Beaucoup d'approches que j'ai essayées se sont heurtées au manque de contrôle explicite des quasi-isométries ψ_ρ ; j'en détaillerai une qui a donné quelques résultats intermédiaires intéressants dans le prochain chapitre. Comprendre les différents points de vue utiles à l'étude de ce problème, et plus généralement à l'étude des propriétés de l'ensemble limite des variétés hyperboliques, a représenté un grand investissement en temps. Mais cela m'a amené à apprendre des Mathématiques très variées, à aborder différents problèmes ouverts, et à en discuter avec des collègues aux spécialités diverses. Alors que je rédige cette thèse, je me trouve donc avec plusieurs projets de recherches, dont certains sont déjà entamés, que j'espère pouvoir poursuivre et faire aboutir. Certains sont directement reliés à la résolution de cette conjecture ou plus largement à la géométrie hyperbolique de dimension 3. D'autres cherchent à utiliser des résultats analytiques, comme les propriétés des fonctions propres, pour comprendre la géométrie des variétés de volume infini. J'en parlerai plus en détail au dernier chapitre. Il est à la fois frustrant de s'arrêter ainsi en cours de route, et motivant de croire à la suite de ce travail, dont les débuts semblent prometteurs.

Chapitre 5

Entropie des variétés convexes cocompactes

*Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur disiez, ils
le traduisent dans leur propre langue, et cela devient quelque chose de
complètement différent.*

J.W. Goethe

Dans ce chapitre, nous présentons une autre approche de l'action à l'infini d'un groupe kleinien : l'étude des *propriétés ergodiques du flot géodésique* sur la variété quotient. Nous verrons que l'*entropie* du flot géodésique est égale à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite ; ce résultat dû originellement à Sullivan nous permet d'utiliser les outils de la théorie ergodique pour étudier cette dimension de Hausdorff. Nous nous inspirons ici des travaux de Katok, Knieper et Weiss [KKW91] pour établir une formule de dérivation de cette entropie dans le cas d'une famille de variétés convexe-cocompactes. D'après les résultats que nous avons présentés au chapitre précédent, cela induit donc une formule de dérivation pour leur bas du spectre. Notre résultat pour l'entropie s'énonce sans difficulté particulière pour des *variétés de n'importe quelle dimension à courbure négative pincée* convexes cocompactes. Nous commençons donc par le présenter dans ce cadre général, puis nous revenons aux variétés hyperboliques de dimension 3 pour le relier de façon plus précise au bas du spectre et à la Conjecture 3.

5.1 Entropie : quelques points de vue

5.1.1 Ensembles limites et courbure pincée

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n dont le groupe fondamental est de type fini et à courbure négative pincée, c'est-à-dire dont la courbure sectionnelle vérifie

$$-\kappa_1 \leq \text{Sec}_g \leq -\kappa_2 < 0.$$

D'après le théorème de Cartan-Hadamard, son revêtement universel \widetilde{M} est difféomorphe à \mathbb{R}^n via l'application exponentielle en un point arbitrairement choisi, que nous noterons 0. Son bord à l'infini $\partial^\infty \widetilde{M}$ (au même sens qu'à la Section 4.1.1) est encore homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^{n-1} , canoniquement isométrique à la sphère unité du fibré tangent $T_0 \widetilde{M}$. Le groupe fondamental de M induit un groupe Γ agissant par isométrie, discrètement et sans point fixe sur \widetilde{M} , et dont l'action se prolonge en une action sur $\partial^\infty \widetilde{M}$, conforme pour les métriques de Gromov (voir [Yue96]). Les variétés hyperboliques de dimension 3 rentrent évidemment dans ce cadre plus général. Nous y reprenons les concepts et notations présentés au chapitre précédent. L'ensemble limite de Γ , toujours noté $\Lambda_\Gamma \subset \partial^\infty \widetilde{M}$, est défini comme l'ensemble des points d'adhérence dans \widetilde{M} de l'orbite d'un point arbitraire de \widetilde{M} . Nous supposons toujours que Λ_Γ contient au moins 3 points, et est alors infini. Nous notons δ_Γ sa dimension de Hausdorff (calculée dans une des métriques de Gromov sur la sphère à l'infini), et $CH(\Lambda_\Gamma)$ son enveloppe convexe dans \widetilde{M} . Le coeur convexe de M est toujours

$$C(M) = CH(\Lambda_\Gamma)/\Gamma,$$

et nous disons que M est **convexe cocompacte** lorsque $C(M)$ est compact.

On appelle série de Poincaré de Γ l'application qui à $s > 0$ et $x, y \in \widetilde{M}$ associe

$$g_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)},$$

où la distance est celle induite sur \widetilde{M} par le relevé de la métrique de M . On note toujours δ^c son exposant critique.

Théorème 5.1.1 (Yue, 1996). *Soit M une variété à courbure pincée convexe cocompacte, alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de Γ est égale à son exposant critique :*

$$\delta_\Gamma = \delta^c.$$

De plus, la série de Poincaré diverge en δ_Γ .

On peut alors reproduire la construction des mesures de Patterson-Sullivan décrite à la Section 4.1.3, pour obtenir une famille de mesures $(\mu_x)_{x \in \widetilde{M}}$ à support dans Λ_Γ , absolument continues les unes par rapport aux autres, qui vérifient pour tous $x, y \in \widetilde{M}$ et $\xi \in \partial^\infty \widetilde{M}$:

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\delta_\Gamma \beta_\xi(x, y)},$$

où $\beta_\xi(x, y)$ est la fonction de Busemann dont la définition est identique à la Définition 4.1.2. De plus, on a encore pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\gamma^* \mu_x = \mu_{\gamma x} = e^{-\delta_\Gamma \beta_\xi(x, \gamma x)} \mu_x. \quad (5.1)$$

Pour approfondir l'ensemble des notions et résultats présentés ci-dessus, nous invitons le lecteur à consulter [Yue96], sections 1, 2, 3 et 5. Notons que la relation

$$\lambda_0(M) = \delta_\Gamma((n-1) - \delta_\Gamma)$$

n'est pas valable en général. Elle n'est connue que dans le cas des *espaces symétriques de rang 1* : il s'agit du Théorème 4.1.12 dû à Sullivan que nous avons déjà cité dans le cas des variétés hyperboliques réelles, et d'un résultat de K. Corlette pour les autres espaces symétriques (voir [Cor90]) ; notons que la constante $(n-1)$ est remplacée dans le cas autres espaces symétriques par l'entropie volumique du revêtement universel (voir le Paragraphe 5.1.4 ci-dessous). Il est conjecturé que cette relation est fautive en général. Pour la suite de ce chapitre, hormis à la dernière section, nous travaillerons donc exclusivement sur la dimension de Hausdorff δ_Γ . Introduisons maintenant le point de vue qui nous permettra d'obtenir nos résultats : l'entropie du flot géodésique.

5.1.2 Flot géodésique et entropie

Nous notons SM le *fibré unitaire tangent* de M , et $S_xM \subset T_xM$ la fibre au dessus de x , isométrique à \mathbb{S}^{n-1} . On appelle *flot géodésique* de M l'application $\Phi : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM$ qui à $v \in T_xM$ et $t \in \mathbb{R}$ associe

$$\Phi_t(v) = \dot{\gamma}_{x,v}(t),$$

où $\gamma_{x,v}$ désigne la géodésique issue du point x de vecteur directeur v , et $\dot{\gamma}_{x,v}(t)$ désigne le vecteur vitesse de cette géodésique au point $\gamma_{x,v}(t)$. Nous allons exploiter dans ce chapitre la théorie des systèmes dynamiques appliquée au flot Φ , pour obtenir des information sur l'ensemble limite de Γ . Nous n'aurons plus à considérer l'action des éléments du groupe Γ , mais uniquement les géodésiques de M . La lettre γ sera donc désormais réservée à ces géodésiques. Nous noterons en général $v(\infty)$ et $v(-\infty)$ les points à l'infini de la géodésique $\gamma_{x,v}$. On appelle *orbites* du vecteur $v \in T_xM$, l'ensemble

$$\{\Phi_t(v); t \in \mathbb{R}\}.$$

Nous identifierons les orbites du flot aux géodésiques de M : en effet, deux vecteurs sont sur la même orbite si et seulement si ils sont basés sur une même géodésique de M . Une orbite périodique de Φ se projette donc sur une unique géodésique fermée γ de M . On notera alors ℓ_γ sa longueur.

Définition 5.1.1. *Lorsque M est à courbure négative pincée, la limite*

$$h_T = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \# \{\gamma \text{ géodésiques fermées, } \ell_\gamma \leq R\}}{R}$$

existe et est finie. On l'appelle l'entropie topologique - ou souvent entropie - du flot géodésique Φ , ou simplement entropie de M .

Les questions décrites au chapitre précédent conduisent naturellement à s'intéresser à cette entropie, du fait du théorème suivant :

Théorème 5.1.2 (Sullivan, Yue). *Si M est convexe cocompacte, alors l'entropie topologique du flot géodésique est égale à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite.*

Dans le cas des variétés hyperboliques, il s'agit du Théorème 3 de [Sul84]. Pour des variétés convexes cocompactes à courbure pincées, cela découle du Théorème 6.3.1 de [Yue96].

Cette égalité est encore vraie dans le cas d'une variété hyperbolique géométriquement finie, mais la preuve nécessite quelques arguments supplémentaires (voir [Sul84]) On remarque que la question 3 se reformule dans le cadre de la théorie ergodique du flot géodésique de la façon suivante :

Question 5 (Entropie minimale). *Soit $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété hyperbolique acylindrique géométriquement finie, l'entropie de M est-elle minimale parmi les entropies des variétés $M/\rho(\Gamma)$, $\rho \in \mathcal{D}_F(\Gamma)$ si et seulement si le bord du coeur convexe de M est totalement géodésique ?*

On dit qu'un point $v \in SM$ est **récurrent** pour le flot Φ si pour tout voisinage \mathcal{O} de v dans TM , il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, avec $t_n \rightarrow \pm\infty$ lorsque n tend vers $\pm\infty$, telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{O} \cap \Phi_{t_n} \mathcal{O} \neq \emptyset.$$

Nous noterons $R(\Phi)$ l'ensemble des points récurrents pour Φ ; on vérifie sans difficulté que $R(\Phi)$ est fermé, et qu'un vecteur v est dans $R(\Phi)$ si et seulement si $v(\infty)$ et $v(-\infty)$ sont dans Λ_Γ . On l'appelle en général **ensemble récurrent** de Φ . Nous avons donc une identification naturelle

$$R(\Phi) = ((\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma) \setminus \text{Diag}) \times \mathbb{R}/\Gamma,$$

où *Diag* désigne la diagonale de $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$, et où l'action de Γ sur $((\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma) \setminus \text{Diag}) \times \mathbb{R}$ est donnée pour tout $g \in \Gamma$ par

$$g(\xi, \zeta, t) = (g\xi, g\zeta, t).$$

En particulier, l'ensemble des géodésiques fermées est contenu dans $R(\Phi)$. C'est le plus petit fermé de SM invariant par l'action de Γ qui a cette propriété :

Proposition 5.1.3. *Soit M une variété complète à courbure négative pincée convexe cocompacte, Γ son groupe fondamental agissant par isométrie sur son revêtement universel, Λ_Γ son ensemble limite et $R(\Phi)$ l'ensemble récurrent pour le flot géodésique.*

1. *L'action diagonale de Γ sur $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ est **topologiquement transitive**, c'est-à-dire qu'il existe une orbite dense ;*
2. *Le flot Φ est topologiquement transitif sur $R(\Phi)$;*
3. *Les géodésiques périodiques sont denses dans $R(\Phi)$.*

Ces résultats sont démontrés, par exemple, dans [Ebe72]. Cela implique en particulier que l'entropie topologique du flot sur M est identique à l'entropie de la restriction du flot à $R(\Phi)$.

5.1.3 Entropie métrique et mesure de Bowen-Margulis

Une des façons d'étudier l'entropie d'un flot consiste à passer par une mesure intermédiaire, à support dans TM , invariante par le flot en question, de calculer son **entropie métrique** puis de la relier à l'entropie topologique. Nous aurons besoin de ces outils par la suite. Nous allons donc les présenter maintenant, en soulignant comment ce point de vue permet d'obtenir des résultats sur l'ensemble limite. Notre nous limiterons au cas du flot géodésique, bien que ces outils s'adapte au cas de n'importe quel système dynamique (discret ou continu). Le lecteur qui souhaiterait aborder la théorie ergodique dans toute sa généralité est invité à se référer au livre de A. Katok et B. Hasselblatt [KH95], assez complet et très agréable à lire.

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent. Soit μ une mesure de probabilité sur SM , et $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ une partition mesurable de SM .

Définition 5.1.2. On appelle *entropie de la partition* \mathcal{P} la quantité

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_{i \in I, \mu(P_i) > 0} \mu(P_i) \log \mu(P_i).$$

Soit $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{Q} = (Q_j)_{j \in J}$ deux partitions de SM , on note

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = (P_i \cap Q_j)_{(i,j) \in I \times J},$$

et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_t(\mathcal{P}) = (\Phi_t(P_i))_{i \in I}.$$

Comme Φ_t est bijective, $\Phi_t(\mathcal{P})$ reste une partition de SM .

Pour toute partition \mathcal{P} et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}_{-n} = \mathcal{P} \vee \Phi_{-1}(\mathcal{P}) \vee \dots \vee \Phi_{-n+1}(\mathcal{P}).$$

Proposition 5.1.4. Soit μ une mesure de probabilité sur SM invariante par le flot géodésique, et \mathcal{P} une partition mesurable telle que $H_\mu(\mathcal{P}) < \infty$. La limite

$$h_\mu(\Phi, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_\mu(\mathcal{P}_{-n})}{n}$$

existe, on l'appelle l'*entropie métrique* de Φ par rapport à μ relativement à la partition \mathcal{P} .

Définition 5.1.3. On appelle *entropie métrique* de Φ par rapport à μ la quantité

$$h_\mu(\Phi) = \sup \{h_\mu(\Phi, \mathcal{P}), \mathcal{P} \text{ partition mesurable avec } H_\mu(\mathcal{P}) < \infty\}.$$

On trouvera à la Section 4.3 de [KH95] une description plus développée de ces notions, et notamment des critères permettant d'assurer que ce supremum est atteint par une partition bien choisie. Cette entropie métrique est reliée à l'entropie topologique, que nous avons définie à la section précédente par le théorème suivant :

Théorème 5.1.5 (Principe variationnel de l'entropie).

$$h_T(\Phi) = \sup_{\mu} h_\mu(\Phi),$$

où μ parcourt l'ensemble des mesures de probabilité à support dans $R(\Phi)$ invariante par le flot géodésique.

Rappelons que $R(\Phi)$ est l'ensemble récurrent de Φ , défini à la section précédente comme l'adhérence des géodésiques fermées dans SM . Nous allons voir que dans le cas qui nous intéresse, ce supremum est atteint par une mesure unique, dont nous présentons la construction.

Pour une géodésique fermée $\gamma \subset SM$, on note toujours ℓ_γ sa longueur, et $d\ell_\gamma$ la mesure de Lebesgue le long de γ . Pour tout $t > 0$, on note toujours $P(t)$ l'ensemble des géodésiques fermées de longueur plus petite que t ; on pose alors

$$L(t) = \sum_{\gamma \in P(t)} \ell_\gamma.$$

Le théorème suivant est dû à Bowen :

Théorème 5.1.6. *Il existe une unique mesure invariante par Φ portée par $R(\Phi)$ d'entropie maximale $h_\Gamma(\Phi)$. Elle est donnée par la limite faible*

$$\mu_{BM} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{L(t)} \sum_{\gamma \in P(t)} d\ell_\gamma.$$

On l'appelle la **mesure de Bowen-Margulis** associée au flot géodésique Φ ; le flot géodésique est ergodique par rapport à celle-ci.

Ce théorème est dû sous cette forme à R. Bowen dans l'article [Bow74]. La mesure d'entropie maximale avait également été construite sous une autre forme par G. Margulis dans l'article [Mar70], d'où son nom. Notons que ce théorème utilise de façon essentielle l'hypothèse que la variété est à courbure négative pincée convexe cocompacte : cela implique que le flot est Anosov, et que l'ensemble récurrent $R(\Phi)$ est compact, ce qui permet l'adaptation de la démonstration de Bowen à notre situation.

Remarquons que la donnée d'une mesure sur $R(\Phi)$ invariante par le flot est équivalente à la donnée d'une mesure sur $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ invariante par Γ . Nous allons maintenant procéder dans l'autre sens, en construisant explicitement une mesure invariante par Γ sur $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ à partir des mesures de Patterson-Sullivan, pour en déduire une mesure sur $R(\Phi)$ que nous comparerons à la mesure de Bowen-Margulis.

Soit $x \in \widetilde{M}$. On note U la mesure sur $(\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma) \setminus \text{Diag}$ définie par

$$dU(\xi, \zeta) = e^{\delta_\Gamma(\beta_\xi(x,y) + \beta_\zeta(x,y))} d\mu_x(\xi) d\mu_x(\zeta),$$

où y est un point quelconque de la géodésique qui va de ξ à ζ .

Proposition 5.1.7. *1. La mesure U ne dépend pas des points x et y choisis;*

2. Elle est invariante par l'action de Γ .

Un calcul direct donne la première affirmation, tandis que la seconde découle immédiatement de l'égalité (5.1). Cette mesure induit donc une mesure sur $R(\Phi)$, invariante par le flot géodésique Φ , que nous noterons temporairement \tilde{U} . Le théorème suivant est un des résultats les plus fondamentaux pour l'étude de l'ensemble limite d'une variété à courbure négative :

Théorème 5.1.8 (Sullivan, Yue). *Si M est convexe cocompacte, alors*

$$\tilde{U}(R(\Phi)) < \infty.$$

De plus, l'entropie métrique de \tilde{U} est égale à $\delta_\Gamma = h_T$. A renormalisation près, elle est donc l'unique mesure invariante par Φ d'entropie maximale :

$$\tilde{U} = k\mu_{BM}.$$

Dans le cas des variétés hyperboliques convexe cocompactes, il s'agit du Théorème 3 de [Sul84]. Ce résultat à été adapté au cas de la courbure négative pincée par Yue au théorème 6.3.1 de [Yue96]. Les résultats que nous venons de présenter pour les variétés convexes cocompactes se généralisent aux variétés hyperboliques géométriquement finies. On montre alors que la divergence de la série de Poincaré à son exposant critique est équivalent à ce que $\tilde{U}(R(\Phi)) < \infty$. C'est en fait par l'intermédiaire de ce résultat que Sullivan montre dans [Sul84] que l'exposant critique est égal à la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite pour une variété hyperbolique géométriquement finie non convexe cocompacte.

5.1.4 Entropie et volume du coeur convexe

Pour toute variété **compacte** (M, g) à courbure sectionnelle strictement négative, on sait que l'entropie du flot géodésique est égale à l'**entropie volumique** de la variété, c'est-à-dire le taux de croissance exponentielle du volume des boules dans le revêtement universel \tilde{M} :

$$h_T = h_V(M) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Vol}(B_{\tilde{g}}(x, r))}{r},$$

où $x \in \tilde{M}$ et $B(x, r)$ désigne la boule de rayon r dans \tilde{M} pour la métrique relevée de g . La démonstration originale de ce résultat est due à Manning, dans [Man79], et repose de façon essentielle sur le fait que l'ensemble limite du groupe fondamental de M soit $\partial^\infty M$ tout entier. Soit maintenant (M, g) une variété à courbure négative pincée de volume infini convexe cocompacte. Nous allons donner une caractérisation analogue de l'entropie topologique h_T en fonction du volume de certaines boules. Notons $\Lambda(M)$ l'ensemble limite de Γ , $CH(\Lambda(M))$ l'enveloppe convexe de $\Lambda(M)$ dans \mathbb{H}^3 , et

$$C(M) = CH(\Lambda(M))/\Gamma$$

le coeur convexe de M .

Théorème 5.1.9. *Soit $x \in CH(\Lambda(M))$, l'entropie de M est donnée par*

$$h_T = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{Vol}(B(x, r) \cap CH(\Lambda(M))))}{r}.$$

Ce théorème découle assez simplement des résultats de [Sul79] dans le cas hyperbolique, et des travaux de [Yue96] dans le cas d'une variété à courbure pincée, bien qu'il n'y soit pas écrit sous cette forme.

Démonstration. Soit $x \in CH(\Lambda(M))$, l'orbite de x est entièrement contenu dans $CH(\Lambda(M))$. D'après [Sul79], Corollaire 10, et [Yue96], Théorème 6.2.5, il existe $C_2 \geq C_1 > 0$ tels que pour tout $r > 0$, le nombre n_r de points de l'orbite de x à distance inférieure à r de x vérifie

$$C_1 e^{h_T r} \leq n_r \leq C_2 e^{h_T r}. \quad (5.2)$$

On note D un domaine fondamental compact pour l'action de Γ sur $CH(\Lambda(M))$: un tel domaine existe par hypothèse. On note d son diamètre, et on suppose que $x \in D$. On a alors

$$n_r \leq \frac{\text{Vol}(B(x, r) \cap CH(\Lambda(M)))}{\text{Vol}(D)} \leq n_{r+d}.$$

L'encadrement (5.2) devient alors

$$C_1 e^{h_T r} \leq \frac{\text{Vol}(B(x, r) \cap CH(\Lambda(M)))}{\text{Vol}(D)} \leq C_2 e^{h_T d} e^{h_T r},$$

on a donc bien

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{Vol}(B(x, r) \cap CH(\Lambda(M))))}{r} = h_T.$$

□

Cette vision volumique de l'entropie, reliée à certains résultats récents sur le volume du coeur convexe des variétés hyperboliques, donne une autre intuition pour approcher la Question 3 que nous avons présenté au chapitre précédent. En effet, P. Storm a montré dans [Sto07b] que pour une variété hyperbolique de dimension 3 acylindrique, le volume du coeur convexe est *minimal* dans son espace de déformation si et seulement si le bord du coeur convexe est totalement géodésique. Relié à la proposition précédente, cela conduirait bien à penser que l'entropie est minimale dans le cas totalement géodésique. En réalité ces deux résultats sont largement indépendants, puisque le volume du coeur convexe n'a - a priori - que peu de lien avec la longueur de l'ensemble des géodésiques fermées (asymptotiquement, nous sommes surtout intéressés par celles dont la longueur est grande).

5.2 Variation de l'entropie

5.2.1 Une formule de variation

Soit (M, g) une variété à courbure négative pincée, de volume infini, convexe cocompacte. Soit $\epsilon > 0$ et $(g_\lambda)_{\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[}$ une famille de métrique sur M , telle que $g_0 = g$, et de classe \mathcal{C}^1 , c'est-à-dire que l'application

$$(\lambda, x) \rightarrow (g_\lambda : (T_x M)^2 \rightarrow \mathbb{R})$$

est de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[$, on note $S^\lambda M \subset TM$ le fibré unitaire tangent pour la métrique g_λ , et μ^λ la mesure de Bowen-Margullis pour le flot géodésique Φ^λ associé à la métrique g_λ . Pour un vecteur $v \in TM$, on notera $\|v\|_\lambda$ sa norme pour la métrique g_λ :

$$\|v\|_\lambda = \sqrt{g_\lambda(v, v)}.$$

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 5.2.1. *Avec les notations précédentes, posons $h_\lambda = h_T(\Phi^\lambda)$. Alors la fonction $\lambda \mapsto h_\lambda$ est dérivable en 0, et sa dérivée vaut*

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} h_\lambda = -h_0 \int_{S^0 M} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \|v\|_\lambda d\mu^0(v).$$

Ce théorème est l'analogie, dans le cas des variétés convexes cocompactes, du Théorème 3 de [KKW91]. Nous allons reprendre et adapter l'idée de leur démonstration : au lieu de nous intéresser à toutes les orbites fermées de Φ^0 , nous allons nous concentrer sur certaines, dont la longueur est peu modifiée par la perturbation de la métrique, en un sens que nous définissons maintenant. Les arguments que nous développons sont adaptés des articles [Kat80], [Kat82] et [Kat88].

Définition 5.2.1. *Soit $\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[$, on définit le **poinds** de la métrique g_λ par rapport à g_0 par*

$$\mu^0(g_\lambda) = \int_{S^0 M} \|v\|_\lambda d\mu^0(v).$$

*Soit $v \in S^0 M$ un vecteur dont l'orbite pour Φ^0 est fermée de longueur l . Pour tout $\eta > 0$, on dit que l'orbite de v est **η -uniformément distribué** par rapport à la métrique g_λ si et seulement si*

$$\left| \frac{1}{l} \int_0^l \|\Phi_t^0(v)\|_\lambda dt - \mu^0(g_\lambda) \right| < \eta.$$

Remarque 5.2.1. Comme la mesure de Bowen-Margulis est normalisée, le poinds de la métrique g_0 par rapport à elle-même est 1 :

$$\mu^0(g_0) = \int_{S^0 M} \|v\|_0 d\mu^0(v) = 1,$$

et les orbites fermées sont η -uniformément distribuées par rapport à la métrique g_0 pour tout $\eta > 0$. Comme le support de μ^0 est compact, la fonction $\lambda \rightarrow \mu^0(g_\lambda)$ est de classe \mathcal{C}^1 .

La proposition clé qui nous permettra d'adapter à notre situation la démonstration de la formule de variation de [KKW91] est la suivante :

Proposition 5.2.2. *Soit (M, g_0) une variété convexe cocompacte, et g_λ une autre métrique hyperbolique sur M convexe cocompacte, alors*

$$\frac{h_0}{\int_{S^0M} \|v\|_\lambda d\mu^0(v)} \leq h_\lambda \leq h_0 \int_{S^\lambda M} \|v\|_0 d\mu^\lambda(v),$$

où μ^0 et μ^λ sont les mesures de Bowen-Margulis respectivement associées à g_0 et g_λ .

Il s'agit en fait d'une version adaptée à notre situation du Théorème 2.1 de [Kat82]. La démonstration que nous présentons maintenant s'inspire largement de celle présentée par Katok dans cet article.

Démonstration. Les rôles de g et g_0 étant symétriques dans notre encadrement, il suffit de montrer que

$$h_0 = h_{\mu^0}(\Phi^0) \leq h_\lambda \int_{S^0M} \|v\|_\lambda d\mu^0(v) = \mu_0(g_\lambda)h_\lambda.$$

D'après le Théorème 5.1.6, on sait que μ^0 est ergodique par rapport au flot géodésique Φ^0 . Nous utilisons alors la caractérisation suivante de l'entropie métrique d'un flot, que nous présentons maintenant. Pour tout $T > 0$, on définit la distance d_T^Φ sur S^0M par

$$d_T^\Phi(v, w) = \max_{0 \leq t \leq T} d^0(\Phi_t^0 v, \Phi_t^0 w),$$

où d^0 désigne la distance induite sur S^0M par la métrique g_0 . Pour tout $T, \epsilon > 0$, et $0 < \delta < 1$, on note $N_{\Phi^0}(T, \epsilon, \delta)$ le nombre minimal de boules de S^0M de rayon ϵ pour la métrique d_T^Φ qui recouvrent un ensemble de mesure $\geq 1 - \delta$ pour la mesure μ^0 . Nous avons défini l'entropie métrique d'un flot Φ par rapport à une mesure invariante par le flot au paragraphe 5.1.3. Nous allons utiliser la caractérisation suivante de l'entropie de Φ^0 par rapport à μ :

Lemme 5.2.3. *Pour tout $\delta > 0$, l'entropie métrique de Φ^0 par rapport à μ est donnée par*

$$h_\mu(\Phi^0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\Phi^0}(T, \epsilon, \delta)}{T} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\Phi^0}(T, \epsilon, \delta)}{T}.$$

Démonstration. Il s'agit de la proposition 1.6 de [Kat82], qui repose essentiellement sur le théorème 1.1 de [Kat80]. Dans la mesure où le support de μ est compact, stable par Φ , et où Φ est ergodique par rapport à μ , ces deux résultats restent valables dans le cas présent : il suffit d'en recopier la démonstration en considérant Φ^0 comme un flot sur $(\text{supp}(\mu), d_0)$. \square

Pour tout $T, \epsilon > 0$, on pose

$$A_{\epsilon, T} = \left\{ v \in R(\Phi^0) : \left| \frac{1}{T} \int_0^T \|\Phi_t^0 v\|_\lambda dt - \mu_0(g_\lambda) \right| < \epsilon \right\}$$

et

$$B_{\epsilon, T} = \{ v \in R(\Phi^0) : \exists t, T \leq t \leq (1 + \epsilon)T; d^0(v, \Phi_t^0 v) < \epsilon \},$$

où d^0 désigne la distance dans S^0M issue de g^0 .

Puisque Φ^0 est ergodique par rapport à μ^0 , pour tout $\epsilon > 0$, d'après le Théorème d'Ergodicité de Birkhoff (voir [KH95] p. 136-138) on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu^0(A_{\epsilon, T}) = 1. \quad (5.3)$$

Montrons que de même, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu^0(B_{\epsilon, T}) = 1. \quad (5.4)$$

Soit $\epsilon > 0$, et soit Ξ une partition de $R(\Phi^0)$ en parties mesurables, de μ_0 -mesures strictement positives et de diamètres inférieurs à ϵ . Comme $R(\Phi^0)$ est compacte, on peut supposer Ξ finie. Soit $\xi \in \Xi$, notons χ_ξ sa fonction caractéristique. On note

$$C_{\epsilon, T, \xi} = \left\{ v \in \xi; \int_0^T \chi_\xi(\Phi_t^0 v) dt < \int_0^{(1+\epsilon)T} \chi_\xi(\Phi_t^0 v) dt \right\}.$$

Par ergodicité de Φ^0 , pour presque tout $v \in \xi$, on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_\xi(\Phi_t^0 v) dt = \mu^0(\xi).$$

Pour tout $\delta > 0$, il existe donc $T_{\epsilon, \delta} > 0$ tel que pour tout $T > T_{\epsilon, \delta}$, on ait

$$\mu^0(C_{\epsilon, T, \xi}) > \mu^0(\xi) - \delta. \quad (5.5)$$

Or, pour tout $v \in C_{\epsilon, T, \xi}$, il existe $t > 0$, $T < t < (1 + \epsilon)T$, tel que $\Phi_t^0 v \in \xi$. Comme le diamètre de ξ est inférieur à ϵ , on a donc

$$C_{\epsilon, T, \xi} \subset B_{\epsilon, T} \cap \xi.$$

On a donc d'après l'inégalité (5.5)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu^0(B_{\epsilon, T} \cap \xi) = \mu^0(\xi).$$

En appliquant ce procédé à tous les $\xi \in \Xi$, on obtient bien la limite (5.4).

Nous allons approximer les orbites des éléments de $A_{\epsilon, T}$ par des géodésiques fermées uniformément distribuées par rapport à la métrique g_λ . Pour cela, nous allons avoir besoin du lemme classique suivant :

Lemme 5.2.4 (Lemme de fermeture d'Anosov). *Soit g une métrique à courbure strictement négative sur une variété M , d la distance qu'elle induit sur son fibré unitaire tangent SM et Φ son flot géodésique. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ et $T_\epsilon > 0$ tels que pour tout $t > T_\epsilon$ et $v \in SM$, si*

$$d(v, \Phi_t v) < \delta_\epsilon,$$

alors il existe une géodésique fermée $\gamma_v = \{\Phi_s\}_{s=0}^{t'}$ de période t' , avec $|t-t'| < \epsilon$, tel que pour tout $s \in [0, t]$, on ait

$$d(\Phi_s v, \Phi_s w) < \epsilon.$$

On trouvera une démonstration de ce lemme dans le cas d'un système dynamique discret à la page 269 du livre [KH95]. Le cas des flots se déduit du cas discret à l'aide du théorème de récurrence de Poincaré (voir [KH95], Chapitre 17) ; on en trouvera une démonstration complète adaptée au cas des variétés à courbure négative dans l'Appendice A de la thèse de F. Maucourant [Mau02].

Soit maintenant $\epsilon > 0$. D'après les limites (5.3) et (5.4), il existe $T_\epsilon > 0$ tel que pour tout $T > T_\epsilon$, on ait

$$\mu^0(A_{\epsilon, T} \cap B_{\delta_\epsilon, T}) > \frac{1}{2}, \quad (5.6)$$

où δ_ϵ est associé à ϵ par le Lemme de Fermeture d'Anosov. Soit $T > T_\epsilon$, posons $A = A_{\epsilon, T} \cap B_{\delta_\epsilon, T}$, et soit $\Lambda_{\epsilon, T}$ un ensemble maximal 3ϵ -séparé pour la distance d_T^Φ sur A . Les boules (pour la distance d_T^Φ) de rayon 3ϵ centrées en les points de $\Lambda_{\epsilon, T}$ recouvrent A (sinon, $\Lambda_{\epsilon, T}$ ne serait pas maximal). On a donc d'après (5.6),

$$\#\Lambda_{\epsilon, T} \geq N_{\Phi^0}(T, 3\epsilon, \frac{1}{2}).$$

Or, d'après le Lemme de Fermeture d'Anosov, pour tout $v \in \Lambda_{\epsilon, T}$, il existe une géodésique fermée γ_v , qui contient un élément $w(v) \in S^0 M$ tel que

$$d_T^\Phi(v, w(v)) < \epsilon.$$

Pour tous $v_1, v_2 \in \Lambda_{\epsilon, T}$, $v_1 \neq v_2$, on a donc

$$d_T^\Phi(w(v_1), w(v_2)) \geq d_T^\Phi(v_1, v_2) - d_T^\Phi(v_1, w(v_1)) - d_T^\Phi(v_2, w(v_2))$$

soit

$$d_T^\Phi(w(v_1), w(v_2)) > 3\epsilon - \epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

Donc si les deux géodésiques γ_{v_1} et γ_{v_2} sont confondues, les points $w(v_1)$ et $w(v_2)$ sont à distance supérieure à ϵ . Or, sur une même géodésique γ , il y a au plus $\frac{\ell(\gamma)}{\epsilon}$ points séparés par une distance ϵ . Or, par définition de l'ensemble A , les géodésiques γ_v que nous avons construites ont une longueur qui vérifie

$$T - \epsilon \leq \ell(\gamma_v) \leq (1 + \delta_\epsilon)T + \epsilon$$

pour tout $v \in A$. On a donc

$$\#\{\gamma_v; v \in \Lambda_{\epsilon, T}\} \geq \frac{\epsilon \#\Lambda_{\epsilon, T}}{(1 + \delta_\epsilon)T + \epsilon} \geq \frac{\epsilon}{(1 + \delta_\epsilon)T + \epsilon} N_{\Phi^0}(T, 3\epsilon, \frac{1}{2}). \quad (5.7)$$

Soit $v \in \Lambda_{\epsilon, T}$ et γ_v la géodésique pour la métrique g_0 , de longueur t' , construite précédemment. Il existe une unique géodésique γ_v^λ pour la métrique g_λ dans la même classe d'homotopie libre que γ_v . La longueur de γ_v^λ pour la métrique g_λ est alors

$$\begin{aligned} \ell_\lambda(\gamma_v^\lambda) &\leq \ell_\lambda(\gamma_v) = \int_0^{t'} \|\Phi_s^0(w(v))\|_\lambda ds \\ \ell_\lambda(\gamma_v^\lambda) &\leq \int_0^T \|\Phi_s^0 w(v)\|_\lambda ds + \int_T^{t'} \|\Phi_s^0 w(v)\|_\lambda ds \\ &\leq \int_0^t \|\Phi_s^0 v\|_\lambda ds + \int_0^T |\|\Phi_s^0 w(v)\|_\lambda - \|\Phi_s^0 v\|_\lambda| ds + \epsilon T \max\{.\}_\lambda \end{aligned}$$

soit finalement

$$\ell_\lambda(\gamma_v^\lambda) \leq T(\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K),$$

où K est une constante indépendante de T et ϵ . En effet, $v \in A_{\epsilon, T}$, on a $d_T^\Phi(v, w(v)) \leq \epsilon$, la fonction $v \mapsto \|v\|_\lambda$ est uniformément continue sur $R(\Phi)$, et d'après le Corollaire A.1 de la Thèse [Mau02], $\frac{\delta_\epsilon}{\epsilon}$ est uniformément borné car la courbure sectionnelle de notre variété est négative pincée. On a donc

$$\gamma_v^\lambda \in P^\lambda(T.(\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K)),$$

où $P^\lambda(T.(\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K))$ désigne l'ensemble des géodésiques fermées pour la métrique g_λ de longueur inférieure à $T.(\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K)$. On a donc, d'après la minoration (5.7), et pour tous $T > T_\epsilon$

$$\#P^\lambda(T.(\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K)) \geq \frac{\epsilon}{T(1 + \epsilon)} N_{\Phi^0}(T, 3\epsilon, \frac{1}{2}),$$

d'où

$$\frac{\log \#P^\lambda(T)}{T} \geq \frac{1}{\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K} \frac{\log N_{\Phi^0}(T', 3\epsilon, \frac{1}{2}) - \log T' - \log \epsilon / (1 + \epsilon)}{T'}$$

avec $T' = \frac{T}{\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K}$. Comme $T' \rightarrow \infty$ lorsque $T \rightarrow \infty$, un passage à la limite donne

$$h_\lambda \geq \frac{1}{\mu^0(g_\lambda) + \epsilon K} h_0,$$

ce pour tout $\epsilon > 0$. Par passage à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, ceci conclut la démonstration de la Proposition 5.2.2. \square

A partir de cette proposition, nous rejoignons la démonstration de la formule de variation de l'entropie présentée dans [KKW91] :

Démonstration du Théorème 5.2.1. On note donc $S^\lambda M$ le fibré unitaire tangent de (M, g_λ) , $\|\cdot\|_\lambda$ la norme associée à g_λ et μ^λ la mesure de Bowen-Margulis pour le flot géodésique sur $S^\lambda M$. D'après la Proposition 5.2.2, pour tout $\lambda \in [-\epsilon, \epsilon]$, on a

$$h_0 \left(\frac{1}{\int_{S^0 M} \|v\|_\lambda d\mu^0(v)} - 1 \right) \leq h_\lambda - h_0 \leq h_0 \left(\int_{S^\lambda M} \|v\|_0 d\mu^\lambda(v) - 1 \right).$$

En linéarisant $\|v\|_\lambda$ au voisinage de 0, on a

$$\|v\|_\lambda = \|v\|_0 + \lambda \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \|v\|_s + o(\lambda, v).$$

En reportant ce développement dans l'inégalité précédente, on obtient

$$h(g_0) \left(-\lambda \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \|v\|_s d\mu^0(v) + o_1(\lambda) \right) \leq h(g_\lambda) - h(g_0).$$

De plus, il existe une bijection naturelle $J^\lambda : S^\lambda M \rightarrow S^0 M$, donnée pour tout $v_\lambda \in S^\lambda M$ par

$$J^\lambda(v_\lambda) = \frac{v_\lambda}{\|v_\lambda\|_0}.$$

La famille d'applications $(J^\lambda \circ \Phi_t^\lambda \circ (J^\lambda)^{-1})_{t \in \mathbb{R}}$ définit alors un flot d'Anosov sur $S^0 M$, dont on vérifie que la mesure de Bowen-Margulis est $J_*^\lambda \mu^\lambda$. On a alors

$$\int_{S^\lambda M} \|v\|_0 d\mu^\lambda(v) = \int_{S^0 M} \frac{1}{\|v'\|_\lambda} d(J_*^\lambda \mu^\lambda)(v'),$$

d'où par linéarisation,

$$h(g_\lambda) - h(g_0) \leq h(g_0) \left(-\lambda \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \|v\|_s d(J_*^\lambda \mu^\lambda)(v) + o_2(\lambda) \right).$$

De plus, d'après le Lemme 7 de [KKW91], les mesures de Bowen-Margulis $J_*^\lambda \mu^\lambda$ convergent faiblement vers μ^0 . On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} h_\lambda &= -h_0 \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \|v\|_\lambda d\mu^0(v) \\ &= \frac{-h(g_0)}{2} \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} g_\lambda(v, v) d\mu^0(v). \end{aligned}$$

\square

5.2.2 Applications aux variétés hyperboliques

Revenons maintenant au cas des variétés hyperboliques réelles, et exprimons notre résultat dans le cadre des déformations d'un groupe kleinien. Soit donc $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ une variété convexe cocompacte de volume infini, son espace de déformation $\mathcal{D}_F(\Gamma)$ est muni naturellement d'une structure analytique : celle issue des espaces de Teichmüller par l'identification

$$\mathcal{D}_F(\Gamma) = \mathcal{T}(S_1) \times \dots \times \mathcal{T}(S_k),$$

où $\partial^\infty M = S_1 \amalg \dots \amalg S_k$ est le bord à l'infini de M , et pour chaque surface S_i , $\mathcal{T}(S_i)$ désigne l'espace de Teichmüller de S_i (voir le Théorème 4.2.2). De plus, grâce au théorème d'isomorphisme de Marden, à chaque élément de $\mathcal{D}_F(\Gamma)$ est associé une quasi-isométrie de M sur $M_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\Gamma)$. Soit $(\rho_\lambda)_{\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[}$ une famille de déformation de Γ , de classe \mathcal{C}^1 pour la structure analytique décrite ci-dessus. Pour appliquer les résultats du paragraphe précédents, nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire :

Hypothèse : régularité des quasi-isométries

Il existe une famille de difféomorphisme $(\psi_\lambda)_{\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[}$, où

$$\psi_\lambda : M \rightarrow M_{\rho_\lambda}$$

est une quasi-isométrie, telle que l'application

$$\lambda \mapsto g_\lambda = \psi_\lambda^* g_{M_\lambda}$$

soit de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque 5.2.2. Il est possible que cette hypothèse soit vérifiée par n'importe quelle famille de déformation (ρ_λ) de classe \mathcal{C}^1 dans $\mathcal{D}_F(\Gamma)$: cela semble découler de la construction des quasi-isométries proposée par A. Douady et C. Earle dans [DE86]. Je n'ai pas localisé ce résultat sous cette forme, ni eu le temps de le démontrer : je le laisse donc pour le moment comme une hypothèse supplémentaire.

Nous fixons donc la variété M et son fibré tangent, et nous ramenons via les applications ψ_ρ les métriques (hyperboliques) des variétés M_ρ en des métriques sur M (toujours hyperboliques). Le fibré tangent de M est uniquement défini, en revanche une métrique issue d'une représentation non triviale induit un fibré *unitaire* tangent différent de celui de défini par la métrique de départ sur M . Notons

$$\delta_\lambda = \delta_{\rho_\lambda(\Gamma)}$$

la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de $\rho_\lambda(\Gamma)$. On a vu qu'elle était égale à l'entropie du flot géodésique sur M_λ . Le Théorème 5.2.1 se réécrit donc dans notre cadre :

Théorème 5.2.5 (Variation de la dimension de Hausdorff). *Avec les notations précédentes, soit (ρ_λ) une famille de déformation de Γ vérifiant l'hypothèse de régularité des quasi-isométries, et (ψ_λ) la famille de difféomorphismes donnée par cette hypothèse. La fonction $\lambda \mapsto \delta_\lambda$ est différentiable en 0, et sa dérivée vaut*

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \delta_\lambda = -\delta_0 \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \|d\psi_\lambda(v)\| d\mu_{BM}^0(v),$$

où $\|d\psi_\lambda(v)\|$ désigne la norme du vecteur $d\psi_\lambda(v)$ pour la métrique hyperbolique de la variété M_λ , et μ_{BM}^0 est la mesure de Bowen-Margulis associée au flot géodésique sur $M_0 = M$ (voir Paragraphe 5.1.3).

La différentiabilité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite n'est démontrée (à ma connaissance) que dans le cas où le groupe kleinien admet une partition de Markov : la dimension de Hausdorff est alors une fonction analytique dans $\mathcal{D}_F(\Gamma)$. On pourra se référer à l'article [Rue82] pour une définition des partitions de Markov et la démonstration de ce résultat. Il existe des groupes kleinien convexes cocompacts pour lesquels on ne sait pas s'ils admettent une partition de Markov : pour ceux-ci, notre théorème donne un premier résultat de différentiabilité.

Ce résultat ne permet pas, tel quel, de trouver des points critiques pour la dimension de Hausdorff (et encore moins de résoudre la conjecture 3) : nous n'avons en général que très peu d'informations sur les difféomorphismes ψ_λ . Il serait intéressant, dans des cas particuliers où l'on arrive à décrire plus précisément ces quasi-isométries (notamment le cas quasi-fuchsien), d'essayer d'obtenir une formule de variation qui relie explicitement la dérivée de la dimension de Hausdorff aux variations dans l'espace de Teichmüller $\mathcal{D}_F(\Gamma)$, ou à des variations d'autres quantités géométriques de M .

Nous nous intéressons maintenant aux implications de ce résultat pour le bas du spectre. Nous notons toujours $(\rho_\lambda)_{\lambda \in]-\epsilon, \epsilon[}$ une famille \mathcal{C}^1 de déformations d'une variété hyperbolique $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, vérifiant l'hypothèse de régularité des quasi-isométries qui nous donne une famille $\psi_\lambda : M \rightarrow \mathbb{H}^3/\rho_\lambda(\Gamma)$ de difféomorphisme. Nous notons désormais $M_\lambda = (M, g_\lambda)$, où g_λ est la métrique hyperbolique de $\mathbb{H}^3/\rho_\lambda(\Gamma)$ ramenée sur M via ψ_λ .

Corollaire 5.2.6 (Variation du bas du spectre). *Avec les notations précédentes, la fonction $\lambda \mapsto \lambda_0(M_\lambda)$ est différentiable en 0, et sa dérivée vaut*

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \lambda_0(M_\lambda) = -2\delta_0(1 - \delta_0) \int_{S^0 M} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \|d\psi_\lambda(v)\| d\mu_{BM}^0(v).$$

Démonstration. Comme d'après le Théorème 4.1.12, $\lambda_0(M_\lambda) = \delta_\lambda(2 - \delta_\lambda)$, on a

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \lambda_0(M_\lambda) = (2 - 2\delta_0) \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \delta_\lambda.$$

La formule découle alors du théorème précédent. \square

Pour une valeur propre du Laplacien de multiplicité simple sur une variété compacte, il existe une formule classique de variation lorsque l'on bouge la métrique, connue sous le nom de **formule de Hadamard** :

Théorème 5.2.7. *Soit (g_t) une famille différentiable de métriques sur une variété compacte M . Supposons que $\lambda_k(g_0)$ soit une valeur propre du Laplacien de multiplicité simple, associée à la fonction ϕ_k . Alors la fonction $t \mapsto \lambda_k(g_t)$ est différentiable en 0, et sa dérivée vaut*

$$\lambda'_k(0) = -\langle g'(0), \phi_k \text{Hess} \phi_k \rangle - \langle \delta g'(0) + \frac{1}{2} \widetilde{dg'(0)}, \phi_k d\phi_k \rangle.$$

Dans cette expression, $g'(0) : (TM)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la dérivée de g_t en 0,

$$\widetilde{g'(0)} = \text{Trace}_g(g'(0))$$

est sa trace, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire entre formes différentielles induit par g_0 .

On trouvera une démonstration de ce théorème dans [Ber73]. La démonstration de cette formule reste valide pour le bas du spectre lorsqu'il s'agit d'une valeur propre isolée ; on a vu au chapitre précédent que c'était toujours le cas pour les variétés convexes cocompactes acylindriques. Il serait intéressant de comparer la formule de Hadamard avec la formule de notre corollaire 5.2.6, dans la mesure où on connaît une expression de ϕ_0 , donnée par 4.1.13.

Chapitre 6

Quelques perspectives

Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels. Un philosophe tel que lui aurait dû savoir que le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que, à ce titre, une question de nombres vaut bien une question de système du monde.

G. Jacobi

Comme nous l'avions mentionné en introduction, les travaux que nous avons présentés dans ce mémoire ne prétendent pas être complets. Les études qui ont mené aux résultats des chapitres 2, 3 et 5 ont naturellement posé un nombre important de questions. En guise de conclusion, nous en présentons quelques unes, qui nous paraissent les plus pertinentes dans le cadre de cet exposé. L'ordre où elles sont présentées correspond à celui que nous avons adopté pour présenter nos résultats.

6.1 Spectres des variétés G -périodiques

Les variétés G -périodiques que nous avons présentées à la Section 2.1.1 généralisent naturellement les revêtements riemanniens. On peut donc essayer de généraliser à cette situation des résultats connus sur les revêtements comme par exemple, en ce qui concerne le bas du spectre, l'article de R. Brooks [Bro86].

6.1.1 Pincement de géodésiques

Dans [CCdV88], on considère une surface hyperbolique dont on pince uniformément d'un facteur ϵ un nombre fini de géodésiques. Les premières valeurs propres de la surface tendent alors vers 0, et sont équivalentes à $\epsilon\mu_i(G)$, où les $\mu_i(G)$ sont les premières valeurs propres du graphe (fini) sous-jacent au découpage de la surface le long de ces géodésiques. Les méthodes employées pour montrer ce résultat (en particulier le lemme des petites valeurs propres, voir [CCdV88]) ne se généralisent pas au cas du pincement d'un nombre infini de géodésiques. A partir des méthodes que nous avons développées, il est peut-être possible, dans le cas où le graphe n'est pas moyennable, d'obtenir un équivalent analogue de la première valeur propre lorsque l'on pince uniformément toutes les géodésiques de jonction. En effet, les estimations de l'élément de volume en coordonnées de Fermi que nous avons utilisés dans la démonstration du Théorème 2.1.9 deviennent explicites dans le cas d'un tube hyperbolique centré sur une géodésique. En utilisant des méthodes analogues à celles de [Col85], on peut alors espérer trouver un tel équivalent. On peut alors se demander, dans le cas où le graphe n'est pas moyennable, si la variété G -périodique admet d'autres valeurs propres isolées, et si oui, si on peut trouver un équivalent de cette valeur propre lorsque le pincement tend vers 0.

6.1.2 Autres opérateurs elliptiques

Il paraîtrait naturel d'étendre notre étude pour contrôler le bas du spectre d'autres opérateurs elliptiques, définis sur une cellule C et étendus à une variété M construite à partir de C selon un graphe G par recollement. Les

exemples les plus naturels sont les opérateurs de Schrödinger : considérons sur C l'opérateur

$$H = \hbar\Delta + V,$$

où \hbar est une constante et V une fonction \mathcal{C}^∞ sur C . En supposant que V se recolle bien dans M , l'opérateur H sur M a une interprétation particulièrement intéressante pour ses applications physiques : il décrit la fonction d'onde d'un électron dans une macromolécule périodique, comme par exemple une feuille de graphène. Il serait intéressant alors de pouvoir caractériser le bas du spectre de H sur M en fonction du bas du spectre sur V et de la combinatoire de G .

6.2 Propriétés de la première fonction propre

Nous avons vu que lorsque le bas du spectre d'une variété de volume infini est atteint par une fonction propre, qui se trouve alors nécessairement positive, l'ensemble de ses points critiques donne des informations intéressantes sur la géométrie de la variété elle-même. Nous présentons deux problèmes à ce sujet, le premier paraissant le plus abordable.

6.2.1 Une propriété générique : Morse-Smale

Soit M une variété riemannienne compacte, et f une fonction de Morse sur M . On note $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ses points critiques.

Définition 6.2.1. *On dit que f est une **fonction de Morse-Smale** si pour tous $i \neq j$, la variété stable $W^s(\alpha_i)$ de α_i intersecte transversalement (voir la Définition 3.2.5) la variété instable $W^u(\alpha_j)$, et $W^u(\alpha_i)$ intersecte transversalement $W^s(\alpha_j)$.*

Les sous-variétés stable et instable d'un point critiques sont définies à partir du flot de gradient de f sur M : ce sont donc des sous-variétés qui dépendent de la métrique sur M , et pas seulement de f . Le résultat suivant est dû à Smale :

Théorème 6.2.1 (Théorème de Généricité de Smale). *Soit f une fonction de Morse sur M , l'ensemble des métriques sur M pour lesquelles f est de Morse-Smale est résiduel dans l'ensemble de toutes les métriques.*

Voir [AR67], p113. La démonstration présentée dans ce livre ne s'adapte bien sûr pas au cas des fonctions propres du Laplacien sur (M, g) , qui dépendent de la métrique g . La question suivante est un alors prolongement naturel du théorème de généricité d'Uhlenbeck :

Question 6. *L'ensemble des métriques sur une variété compacte M pour lesquelles les fonctions propres du Laplacien sont de Morse-Smale est-il résiduel pour la topologie uniforme d'ordre k , avec k assez grand, dans l'ensemble des métriques ?*

Dans le cas d'une variété M non compacte, nous pouvons encore formuler une question analogue, qui prolonge naturellement notre Théorème 3.2.10 :

Question 7. *Soit (M, g_0) une variété non compacte dont le rayon d'injectivité, le bas du spectre et le trou spectral sont strictement positifs, et dont les $k - 2$ premières dérivées de la courbure de Ricci sont uniformément bornées pour k assez grand. Soit U un voisinage de g_0 pour la topologie C^k -forte sur lequel cette propriété reste vraie. L'ensemble des métriques g pour lesquelles la première fonction propre ϕ_0 associée au bas du spectre $\lambda_0(g)$ est de Morse-Smale est-il résiduel dans U pour la topologie C^k -forte ?*

Il semble possible et intéressant de s'inspirer des idées de la démonstration de Smale du Théorème de Généricité précédent et de celles d'Uhlenbeck que nous avons détaillées à la Section 3.2 pour essayer de montrer ce résultat.

6.2.2 Propriété générale : Morse-Bott-Smale

Soit maintenant (M, g) une variété munie d'une métrique C^∞ de volume infini, dont le trou spectral est strictement positif. La fonction propre ϕ_0 associée au bas du spectre de Δ_g joue le rôle des fonctions constantes en volume fini. On peut espérer que la fonction ϕ_0 ait des propriétés analytiques très particulières. Le principe du Maximum nous dit, par exemple, qu'elle n'admet aucun minimum local. Les résultats de Yau que nous avons déjà utilisés (voir [Yau75]) montrent entre autres qu'elle décroît exponentiellement vite à l'infini dans les bouts dont le rayon d'injectivité est uniformément minoré. Nous allons de nouveau nous intéresser à ses points critiques.

Rappelons (voir Définition 1.2.3) que le gradient d'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est **simplement stratifié** s'il existe une stratification 1.2.4) de M en strates simplement connexes stable par le flot de gradient. Nous avons vu comme exemple d'une telle fonction les **fonctions de Morse-Bott**, c'est à dire les fonctions dont l'ensemble des points critiques est une union disjointe finie de sous-variétés lisses $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k$, et tel que en tout point critique $x \in \alpha_i$, le hessien de f en x est non-dégénéré dans les directions transverses à α_i . Pour une sous-variété critique α_i telle que le hessien de f est non-dégénéré dans les directions transverses à α_i , on définit de la même façon que pour un point critique les variétés stables et instables associées à α_i . La définition suivante généralise naturellement la Définition 6.2.1 :

Définition 6.2.2. *Une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse-Bott est dite de Morse-Bott-Smale si pour tous $i \neq j$, la sous-variété stable $W^s(\alpha_i)$ de la sous-variété critique α_i intersecte transversalement la sous-variété instable $W^u(\alpha_j)$, et $W^u(\alpha_i)$ intersecte transversalement $W^s(\alpha_j)$.*

On peut se poser la question suivante :

Question 8. *Pour toute métrique de volume infini dont le trou spectral est strictement positif, le gradient de la première fonction propre est-il simplement stratifié ? La première fonction propre est-elle de Morse-Bott ? Si oui, est-elle de Morse-Bott-Smale ?*

Nous avons vu au paragraphe 2.4.1 qu'une réponse affirmative à la première question impliquerait (entre autres) la validité du Théorème 2.1.9 pour toute métrique à courbure de Ricci et rayon d'injectivité minorés, ainsi que pour les revêtements qui préservent les cusps. De nombreux travaux existent qui étudient, sur les variétés compactes, les *ensembles critiques nodaux* des fonctions propres non constantes, c'est-à-dire l'ensemble des points critiques où ces fonctions s'annulent. On peut citer en particulier les nombreux articles de H. Donnelly et C. Fefferman (voir par exemple [DF88]), et l'article de S.Y. Cheng [Che76]. De même que dans la démonstration du principe du prolongement unique d'Aronszajn dont nous avons déjà parlé (voir [Aro57]), ces études sont basées sur des estimés locaux appelées *inégalités de Carleman*. Celles-ci ne s'appliquent pas en dehors des points d'annulation des fonctions propres, ce qui nous impose donc de chercher de nouvelles méthodes, ou des estimés analogues qui s'appliqueraient à notre situation.

Remarquons qu'à partir d'une fonction de Morse-Bott sur une variété, l'article de D. Austin et F. Braams [AB95] décrit comment reconstruire la cohomologie de la variété, en donnant des interprétations intéressantes des opérations cohomologiques exprimées à partir des sous-variétés critiques de la fonction. En cas de réponse affirmative à la question 8, on peut donc espérer relier les sous-variétés critiques de la première fonction propre aux nombres de Betti de la variété considérée.

6.3 Spectre et géométrie hyperbolique

L'étude de la question 3 m'a naturellement dirigé vers plusieurs problèmes. Certains sont directement reliés à la résolution de cette question, d'autres sont reliés, plus généralement, au comportement de l'exposant critique (ou du bas du spectre) dans les familles de déformations de variétés géométriquement finies.

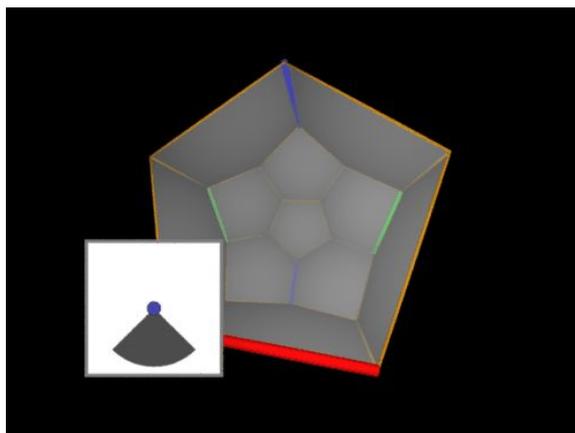
6.3.1 Déformations et applications quasi-conformes

On a vu au chapitre précédent que pour appliquer notre formule de variation de l'entropie à toutes les déformations de variétés hyperboliques géométriquement finies, il nous reste à démontrer que l'on peut toujours les réaliser par une famille différentiable de quasi-isométrie. Comme nous l'avons noté, cela semble découler de la construction de Douady et Earle présentée dans [DE86], nous le vérifierons très prochainement. Une étude plus précise des applications de Douady et Earle semble aussi nécessaire pour comparer la

formule que nous avons obtenue avec d'autres formules de variation du bas du spectre : nous reparlerons de cette question un peu plus loin. Il est possible que d'autres informations intéressantes sur les déformations des variétés de dimension 3 découlent d'une étude plus précise de la construction de Douady et Earle ; cela n'a pas été fait à ma connaissance.

6.3.2 Conjecture de Canary

La question 3 reste bien sûr ouverte. Deux directions logiques se présentent : chercher un schéma général de démonstration, et chercher des familles explicites d'exemples non quasi-fuchsien sur lesquels on puisse essayer de la démontrer. Dans un travail commun avec P. Storm (Pennsylvania University), nous avons construit une famille à un paramètre de variétés convexes cocompactes difféomorphes entre elles, l'une ayant un coeur convexe à bord totalement géodésique. Il s'agit de l'orbifold dont le groupe fondamental Γ est généré par les réflexions sur les bords d'un dodécaèdre hyperbolique privé de deux faces.



La figure ci-dessus présente un dodécaèdre euclidien privé d'une face. Nous réalisons notre dodécaèdre dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 en considérant le groupe engendré par les inversions en les demisphères qui coupent le bord à l'infini en 10 cercles, orthogonaux deux à deux. On se ramène au cas d'une famille de variétés (sans changer l'ensemble limite) en prenant un revêtement d'ordre 2 de l'orbifold quotient. Pour un tel groupe Γ , on dispose d'une *partition de Markov* naturelle, délimitée par les cercles sur le bord à l'infini qui sont points fixes des réflexions qui engendrent Γ .

Cela nous permet d'appliquer un algorithme dû à C. Mc Mullen décrit dans [McM98] pour calculer une valeur approchée de la dimension de Hausdorff des ensembles limites de ces variétés. Le lecteur pourra se référer

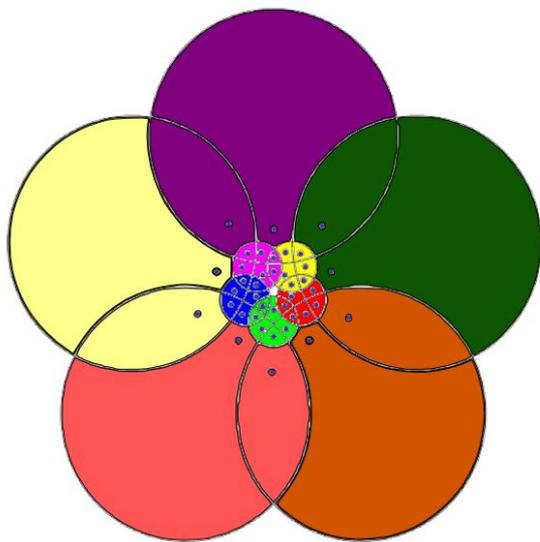


FIGURE 6.1 – *Dodécaèdre hyperbolique* : on a projeté la sphère à l’infini sur le plan par projection stéréographique. Le groupe que l’on considère est engendré par les inversions en les cercles dessinés ci-dessus. Les couleurs correspondent à la partition de Markov.

à l’article de Mc Mullen pour une définition des partitions de Markov et une description de cet algorithme. Les calculs numériques *confirment empiriquement*, pour cette famille de déformation, la conjecture de Canary : le minimum de la dimension de Hausdorff est atteint *dans le cas où le bord du coeur convexe est totalement géodésique* et vaut alors environ 1,753. Je ne connais pas d’autre exemple non quasi-fuchsien où ce résultat ait été numériquement testé. Il serait intéressant de chercher une démonstration de cette conjecture adaptée à cette famille de variétés ; les idées de [KS08] suggèrent quelques directions pour cela.

On a vu qu’un des problèmes majeurs dans l’étude de cette conjecture est le manque de contrôle sur les quasi-isométries qui relient deux variétés de la même famille de déformation. On peut éviter d’avoir à étudier ces isométries en faisant le double du coeur convexe le long de son bord (qu’il soit plissé ou non). On obtient alors un *amalgame convexe riemannien* au sens de [Sto07a], c’est-à-dire un espace d’Alexandrov qui admet une structure de variété riemannienne en dehors d’une hypersurface singulière qui le coupe en deux parties convexes. Cet amalgame est quasi-isométrique à la variété hyperbolique obtenue en faisant le double du coeur convexe lorsque son bord est totalement géodésique. On montre alors à partir de travaux de Bourdon et Pansu que l’exposant critique de ces amalgames convexes est supérieur à 2, égal à 2 lorsque le bord est totalement géodésique. J’essaie en ce moment

de relier l'exposant critique de ce double de la variété à celui de la variété de départ, en utilisant la Théorie de Bass-Serre des produits amalgamés.

6.3.3 Formalisme thermodynamique et dimension de Hausdorff

Dans l'article [Rue82], D. Ruelle montre que la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite d'un groupe kleinien Γ est une fonction analytique sur son espace de déformation dès qu'il existe une partition de Markov adaptée. Les méthodes employées pour cela sont connues sous le nom de *formalisme thermodynamique*, et ont servi à la démonstration originale par Bowen du Théorème 4.2.4. Les travaux de J. Anderson et A. Rocha (voir [AR97]) montrent l'existence d'une partition de Markov pour certains groupes klieiniens, par exemple ceux qui sont obtenus comme des combinaisons de Maskit de groupe quasi-fuchsien, ce qui permet d'obtenir la différentiabilité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite pour ces groupes. Cependant, comme d'ailleurs dans l'article pionnier [BS79], leur démonstration ne permet pas d'obtenir une construction explicite de la partition de Markov adaptée à chacun de ces groupes klieiniens. Ils montrent simplement qu'il existe une telle partition pour l'un des groupes dans leur espace de déformation, puis celle-ci est transportée par une application quasi-conforme pour donner une partition adaptée au groupe considéré. De plus, il existe des groupes klieiniens pour lesquels la construction d'Anderson et Rocha ne s'applique pas.

J. Los a proposé une nouvelle façon d'associer explicitement, à chaque groupe fuchsien, une partition de Markov (voir [Los09]) du cercle. Il semble possible d'étendre sa construction au cas des groupes klieiniens de type fini : nous avons l'intention d'y travailler cet automne. L'existence générale d'une telle partition permettrait d'étendre le résultat de Ruelle à tout groupe kleinien : la dimension de Hausdorff serait alors une fonction analytique sur l'espace de déformation de n'importe quel groupe kleinien. Cela permettrait aussi de généraliser aux groupes klieiniens les travaux de M. Bridgeman et E. Taylor présentés dans [BT08]. Pour un groupe fuchsien Γ , Bridgeman construit à l'aide du formalisme thermodynamique une forme quadratique sur l'espace tangent à $\mathcal{D}_F(\Gamma)$, non dégénérée en dehors du lieu fuchsien, et égale à la métrique de Weil-Peterson sur le lieu fuchsien. L'article [McM08] montre que sur le lieu fuchsien, dans une direction transverse au lieu fuchsien, cette forme quadratique n'est autre que la dérivée seconde de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite. Une telle forme quadratique pourrait être construite sur l'espace tangent à $\mathcal{D}_F(\Gamma)$ pour tout groupe kleinien Γ admettant une partition de Markov. On peut alors se demander quelle est sa signification géométrique.

6.3.4 Points critiques de l'entropie et du bas du spectre

On peut essayer d'appliquer notre formule de variation pour l'entropie des variétés de courbure négative pincée convexes cocompactes à la recherche de points critiques de l'entropie. La question la plus naturelle est la suivante : les variétés localement symétriques de courbure strictement négative convexes cocompactes sont-elles des points critiques globaux de l'entropie ? Sont-elles des points critiques de l'entropie dans leur classe conforme ? Dans le cas compact, la réponse à ces deux questions est positive, du fait de l'égalité entre la mesure de Bowen-Margulis et la mesure de Liouville pour les espaces symétriques (voir en particulier l'article [Ham90] d'U. Hamenstädt). Pour des variétés convexes-cocompactes de volume infini, ce n'est plus le cas : le support de la mesure de Bowen-Margulis (l'ensemble récurrent) est de mesure de Liouville nulle. Toutefois, pour les espaces symétriques, la mesure de Bowen-Margulis est égale à la mesure harmonique associée (voir [Yue96], Section 6), ce qui donne une première piste tentante, au moins pour essayer de trouver un extremum lorsque la structure conforme à l'infini est fixée.

Nous avons obtenu au Corollaire 5.2.6 une formule de variation du bas du spectre pour une famille de déformation d'une variété hyperbolique convexe cocompacte. On a vu que la formule de Hadamard donne également une telle formule (lorsque le bas du spectre est une valeur propre isolée, ce qui est le cas pour une variété géométriquement finie non fuchsienne), qui utilise l'expression de la fonction propre associée. Puisque cette expression nous est donnée par la proposition 4.1.13, il serait intéressant de comparer ces deux formules. On peut espérer s'en servir pour caractériser les points critiques du bas du spectre, en s'inspirant des idées développées dans [ESI08] pour les variétés compactes.

Il est aussi naturel de chercher un extremum pour le bas du spectre dans un autre cadre : soit (M, g) une variété géométriquement finie hyperbolique de volume infini, et notons $[g]$ sa classe conforme.

Question 9. *A-t-on*

$$\max_{g' \in [g]} \lambda_0(g') = \lambda_0(g)?$$

Ce résultat est connu pour les variétés compactes, donnée par exemple par le Théorème 3.8 de l'article [BCG91]. Mais celui-ci utilise fortement le fait que pour des variétés (M, g) localement symétriques à courbure négative, on a

$$\lambda_0(g) = \frac{h_V^2}{4},$$

où

$$h_V(M) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Vol}(B_{\tilde{g}}(x, r))}{r}$$

est l'entropie volumique (voir Section 5.1.4). A partir de l'égalité

$$\lambda_0 = \delta_0(h_V - \delta_0),$$

peut-on généraliser leur démonstration de façon à répondre à la question précédente ?

Un grand merci au lecteur pour avoir lu ce mémoire jusqu'au bout. J'espère qu'il l'aura intéressé, et que peut-être il lui aura donné quelques idées ou envies de recherches. N'hésitez pas à me signaler toute erreur ou question en m'envoyant un mail à samuel.tapie@polytechnique.org.

Index

- η -uniformément distribué, 138
- λ -harmonique, 26
- ρ -équivariante, 123
- acylindrique, 124
- atlas localement fini, 85
- bord à l'infini, 112
- cellule, 14, 43
- coeur
 - convexe, 116
 - incompressible, 126
- conditions
 - de Dirichlet, 24
 - de Neumann, 24
- constante de Cheeger, 48
- convexe cocompacte, 116, 131
- coordonnées de Fermi, 37
- coordonnées harmoniques, 108
- courbure
 - minorée, 22
 - négative pincée, 22
- dérivée normale, 24
- densité conforme, 113
- dimension de Hausdorff, 114, 115
- domaine fondamental, 29, 30
- ensemble
 - de Baire, 92
 - de discontinuité, 115
 - de seconde catégorie, 92
 - limite, 115
 - récurrent, 133
- entropie, 132
- entropie
 - de la partition, 134
 - métrique, 133, 134
 - topologique, 132
 - volumique, 136
- enveloppe convexe, 116
- espace
 - de Baire, 93
 - de déformation, 18, 122
 - de Sobolev, 24, 84
- exponentielle normale, 36
- exposant critique, 118
- fibré unitaire tangent, 132
- flot géodésique, 132
- fonction
 - de Busemann, 113
 - de Green modifiée, 102
 - de Morse, 31
 - de Morse-Bott, 35
 - de Morse-Bott-Smale, 150
 - de Morse-Smale, 149
 - propre, 26
- formalisme thermodynamique, 154
- formule de Hadamard, 146
- Fredholm
 - application de, 97
 - opérateur de, 97
- générique, 92
- géométriquement finie, 116
- gradient simplement stratifié, 33
- graphe, 42
- graphe
 - modèle, 14, 43
- groupe
 - fuchsien, 117

- kleinien, 115
- quasi-fuchsien, 117
- horosphère, 112
- indice, 31, 97
- lamination géodésique, 116
- Laplace-Beltrami, 23
- Laplacien, 23
- Laplacien combinatoire, 48
- lieu de plissage, 117
- livre de fibrés en intervalles, 126
- métrique visuelle, 114
- mesure
 - de Bowen-Margulis, 135
 - de Hausdorff, 114
 - de Patterson-Sullivan, 119
 - de Poisson, 79
 - visuelle, 114
- mouvement brownien, 77
- moyennable, 48
- norme de Sobolev, 83
- noyau de la chaleur, 75
- orbites, 132
- partition de Markov, 152
- poids, 138
- quasi-isométrie, 123
- quotient de Rayleigh, 26
- récurrent, 133
- résiduel, 92
- rayon d'injectivité normale, 36
- représentation, 122
- revêtement
 - galoisien, 29
- série de Poincaré, 118
- spectre, 24, 25
- spectre
 - bas du, 24
 - essentiel, 27
- strates, 33
- stratification, 33
- surface hyperbolique plissée, 116
- théorie de Floquet, 54
- topologie
 - C^k forte, 86
 - de la convergence algébrique, 122
 - de la convergence sur tout compact, 86
 - de Whitney, 86
 - uniforme, 86
- topologiquement transitive, 133
- transverses, 96, 97
- trou spectral, 13, 26
- variété
 - G -périodique, 14, 42
 - à coins, 29
 - de Banach, 97
 - des représentations, 122
 - instable, 31
 - périodique, 54
 - stable, 31
- variations radiales, 39
- voisinage tubulaire, 36
- voisins, 30
- zones de transition, 14, 43, 70

Bibliographie

- [AB95] D. M. Austin and P. J. Braam. Morse-Bott theory and equivariant cohomology. In *The Floer memorial volume*, volume 133 of *Progr. Math.*, pages 123–183. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [Ago04] Ian Agol. Tameness of hyperbolic 3-manifolds. www.arxiv.org/abs/math.GT/0405568, 2004.
- [And98] James W. Anderson. A brief survey of the deformation theory of Kleinian groups. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 23–49 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.
- [AR67] Ralph Abraham and Joel Robbin. *Transversal mappings and flows*. An appendix by Al Kelley. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [AR97] James W. Anderson and André C. Rocha. Analyticity of Hausdorff dimension of limit sets of Kleinian groups. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 22(2) :349–364, 1997.
- [Aro57] N. Aronszajn. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 36 :235–249, 1957.
- [Aub76] Thierry Aubin. Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 100(2) :149–173, 1976.
- [Bas95] Richard F. Bass. *Probabilistic techniques in analysis*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Bas98] Richard F. Bass. *Diffusions and elliptic operators*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1998.
- [BCG91] Gérard Besson, Gilles Courtois, and Sylvestre Gallot. Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques. *Invent. Math.*, 103(2) :417–445, 1991.

- [Ber73] M. Berger. Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes. *Compositio Math.*, 26 :129–149, 1973.
- [BJ97] Christopher J. Bishop and Peter W. Jones. Hausdorff dimension and Kleinian groups. *Acta Math.*, 179(1) :1–39, 1997.
- [BO04] Francis Bonahon and Jean-Pierre Otal. Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3. *Ann. of Math. (2)*, 160(3) :1013–1055, 2004.
- [Bow74] Rufus Bowen. Maximizing entropy for a hyperbolic flow. *Math. Systems Theory*, 7(4) :300–303, 1974.
- [Bow79] Rufus Bowen. Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50) :11–25, 1979.
- [BP92] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Bro81] Robert Brooks. The fundamental group and the spectrum of the Laplacian. *Comment. Math. Helv.*, 56(4) :581–598, 1981.
- [Bro85] Robert Brooks. The bottom of the spectrum of a Riemannian covering. *J. Reine Angew. Math.*, 357 :101–114, 1985.
- [Bro86] Robert Brooks. The spectral geometry of a tower of coverings. *J. Differential Geom.*, 23(1) :97–107, 1986.
- [BS79] Rufus Bowen and Caroline Series. Markov maps associated with Fuchsian groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50) :153–170, 1979.
- [BT08] Martin J. Bridgeman and Edward C. Taylor. An extension of the Weil-Petersson metric to quasi-Fuchsian space. *Math. Ann.*, 341(4) :927–943, 2008.
- [Bus82] Peter Buser. A note on the isoperimetric constant. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(2) :213–230, 1982.
- [Can92] Richard D. Canary. On the Laplacian and the geometry of hyperbolic 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 36(2) :349–367, 1992.
- [CCdV88] Bruno Colbois and Yves Colin de Verdière. Sur la multiplicité de la première valeur propre d’une surface de Riemann à courbure constante. *Comment. Math. Helv.*, 63(2) :194–208, 1988.
- [CdV98] Yves Colin de Verdière. *Spectres de graphes*, volume 4 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.

- [Cha84] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [Che70] Jeff Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
- [Che76] Shiu Yuen Cheng. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv.*, 51(1) :43–55, 1976.
- [CMT99] Richard D. Canary, Yair N. Minsky, and Edward C. Taylor. Spectral theory, Hausdorff dimension and the topology of hyperbolic 3-manifolds. *J. Geom. Anal.*, 9(1) :17–40, 1999.
- [Col85] Bruno Colbois. Petites valeurs propres du laplacien sur une surface de Riemann compacte et graphes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(20) :927–930, 1985.
- [Cor90] Kevin Corlette. Hausdorff dimensions of limit sets. I. *Invent. Math.*, 102(3) :521–541, 1990.
- [CSC95] Thierry Coulhon and Laurent Saloff-Coste. Variétés riemanniennes isométriques à l’infini. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 11(3) :687–726, 1995.
- [CY75] Shiu Yuen Cheng and Shing Tung Yau. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(3) :333–354, 1975.
- [DE86] Adrien Douady and Clifford J. Earle. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math.*, 157(1-2) :23–48, 1986.
- [DF88] Harold Donnelly and Charles Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds. *Invent. Math.*, 93(1) :161–183, 1988.
- [DL79] Harold Donnelly and Peter Li. Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds. *Duke Math. J.*, 46(3) :497–503, 1979.
- [Don81] Harold Donnelly. On the essential spectrum of a complete Riemannian manifold. *Topology*, 20(1) :1–14, 1981.
- [Ebe72] Patrick Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds. I. *Ann. of Math. (2)*, 95 :492–510, 1972.

- [EM87] David B. A. Epstein and Albert Marden. Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces. In *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)*, volume 111 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 113–253. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [Eme89] Michel Emery. *Stochastic calculus in manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989. With an appendix by P.-A. Meyer.
- [ESI08] Ahmad El Soufi and Saïd Ilias. Laplacian eigenvalue functionals and metric deformations on compact manifolds. *J. Geom. Phys.*, 58(1) :89–104, 2008.
- [Gar87] Frederick P. Gardiner. *Teichmüller theory and quadratic differentials*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1987. A Wiley-Interscience Publication.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [GM88] Mark Goresky and Robert MacPherson. *Stratified Morse theory*, volume 14 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [GP92] Robert E. Greene and Peter Petersen, V. Little topology, big volume. *Duke Math. J.*, 67(2) :273–290, 1992.
- [GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [GWW92] Caroline Gordon, David Webb, and Scott Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110(1) :1–22, 1992.
- [Ham90] Ursula Hamenstädt. Entropy-rigidity of locally symmetric spaces of negative curvature. *Ann. of Math. (2)*, 131(1) :35–51, 1990.
- [Heb96] Emmanuel Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, volume 1635 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Hir94] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

- [Jør76] Troels Jørgensen. On discrete groups of Möbius transformations. *Amer. J. Math.*, 98(3) :739–749, 1976.
- [Kat80] Anatole Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (51) :137–173, 1980.
- [Kat82] Anatole Katok. Entropy and closed geodesics. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(3-4) :339–365 (1983), 1982.
- [Kat88] Anatole Katok. Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 8*(Charles Conley Memorial Issue) :139–152, 1988.
- [Kat95] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [KKW91] Anatole Katok, Gerhard Knieper, and Howard Weiss. Formulas for the derivative and critical points of topological entropy for Anosov and geodesic flows. *Comm. Math. Phys.*, 138(1) :19–31, 1991.
- [KS08] Steve Kerckhoff and Peter Storm. From the 24-cell to the cuboctahedron. <http://www.sas.upenn.edu/~pstorm>, 2008.
- [Lec06] Cyril Lecuire. Plissage des variétés hyperboliques de dimension 3. *Invent. Math.*, 164(1) :85–141, 2006.
- [Los09] Jérôme Los. Volume entropy for surface groups via bowen-series like maps. prépublication, 2009.
- [LP82] Peter D. Lax and Ralph S. Phillips. The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces. *J. Funct. Anal.*, 46(3) :280–350, 1982.
- [LW01] Peter Li and Jiaping Wang. Complete manifolds with positive spectrum. *J. Differential Geom.*, 58(3) :501–534, 2001.
- [Mal75] Paul Malliavin. Diffusions et géométrie différentielle globale. In *Differential operators on manifolds (Centro Internaz. Mat. Estivo (C.I.M.E.), III Ciclo, Varenna, 1975)*, pages 207–279. Cremonese, Rome, 1975.

- [Man79] Anthony Manning. Topological entropy for geodesic flows. *Ann. of Math. (2)*, 110(3) :567–573, 1979.
- [Man05] Tatiana Mantuano. Discretization of compact Riemannian manifolds applied to the spectrum of Laplacian. *Ann. Global Anal. Geom.*, 27(1) :33–46, 2005.
- [Mar70] G. A. Margulis. Certain measures that are connected with U-flows on compact manifolds. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 4(1) :62–76, 1970.
- [Mar07] Albert Marden. *Outer circles*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. An introduction to hyperbolic 3-manifolds.
- [Mau02] François Maucourant. *Approximation diophantienne, dynamique des chambres de Weyl et répartition d'orbites de réseaux*. PhD thesis, Université Lille I, 2002.
- [McM98] Curtis T. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics. III. Computation of dimension. *Amer. J. Math.*, 120(4) :691–721, 1998.
- [McM08] Curtis T. McMullen. Thermodynamics, dimension and the Weil-Petersson metric. *Invent. Math.*, 173(2) :365–425, 2008.
- [Mic80] Peter W. Michor. *Manifolds of differentiable mappings*, volume 3 of *Shiva Mathematics Series*. Shiva Publishing Ltd., Nantwich, 1980.
- [Mil63] John Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [Pat76] S. J. Patterson. The exponent of convergence of Poincaré series. *Monatsh. Math.*, 82(4) :297–315, 1976.
- [PW84] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1984. Corrected reprint of the 1967 original.
- [RS80] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.
- [Rud80] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombrès and F. Hoffman, Third printing.

- [Rue82] David Ruelle. Repellers for real analytic maps. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2(1) :99–107, 1982.
- [Sal01] Gorm Salomonsen. Equivalence of Sobolev spaces. *Results Math.*, 39(1-2) :115–130, 2001.
- [Sto07a] Peter A. Storm. The barycenter method on singular spaces. *Comment. Math. Helv.*, 82(1) :133–173, 2007.
- [Sto07b] Peter A. Storm. Hyperbolic convex cores and simplicial volume. *Duke Math. J.*, 140(2) :281–319, 2007.
- [Sul79] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50) :171–202, 1979.
- [Sul84] Dennis Sullivan. Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math.*, 153(3-4) :259–277, 1984.
- [Sul87] Dennis Sullivan. Related aspects of positivity in Riemannian geometry. *J. Differential Geom.*, 25(3) :327–351, 1987.
- [Thu82] William Thurston. Hyperbolic geometry and 3-manifolds. In *Low-dimensional topology (Bangor, 1979)*, volume 48 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 9–25. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
- [Uhl76] Karen Uhlenbeck. Generic properties of eigenfunctions. *Amer. J. Math.*, 98(4) :1059–1078, 1976.
- [Yau75] Shing Tung Yau. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 :201–228, 1975.
- [Yue96] Chengbo Yue. The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(12) :4965–5005, 1996.

Résumé

Cette thèse étudie les variétés non compactes dont le bas du spectre du Laplacien est une valeur propre isolée, parmi lesquelles on trouve les variétés hyperboliques de dimension 3 géométriquement finies et acylindriques. L'objectif général est de relier la géométrie de ces variétés à certaines propriétés spectrales.

Au Chapitre 2, nous étudions les variétés G -périodiques, qui généralisent les variétés périodiques et les revêtements : une variété est G -périodique si elle est la réunion de variétés à bord identiques, recollées en suivant un graphe à valence constante G . Nous relierons alors le bas du spectre d'une telle variété avec celui de sa cellule élémentaire et la combinatoire du graphe G sous-jacent. En particulier, nous montrons que les deux bas du spectres sont égaux si et seulement si le graphe est moyennable.

Au Chapitre 3, nous donnons une caractérisation du bas du spectre d'une variété à bord par ses fonctions λ -harmoniques positives, en reprenant des idées de D. Sullivan basée sur l'utilisation du mouvement brownien. Puis nous montrons que pour une métrique générique, lorsque le bas du spectre est une valeur propre isolée la première fonction propre est de Morse. Ce résultat est une extension de travaux de K. Uhlenbeck aux variétés non compactes. Enfin, nous utilisons les deux théorèmes précédents pour montrer que pour tout revêtement au dessus d'une variété dont le bas du spectre est une valeur propre isolée, on peut génériquement construire un domaine fondamental pour l'action du groupe de revêtement sur lequel le relevé de la première fonction propre vérifie les conditions de Neumann. Ceci nous permet d'appliquer les résultats du Chapitre 2 aux revêtements génériques, et de généraliser d'anciens travaux de R. Brooks.

Au Chapitre 4, nous présentons une conjecture due à R. Canary, qui prévoit que lorsque l'on déforme une variété hyperbolique de dimension 3 géométriquement finie et acylindrique, le bas du spectre est maximal lorsque le bord du coeur convexe est lisse. Cette conjecture reste ouverte en dehors du cas quasi-fuchsien où elle est connue depuis les années 1980. Nous présentons au Chapitre 5 une étude de l'entropie des variétés à courbure négative pincée convexe cocompacte, qui généralise au cas non compact des travaux de A. Katok, G. Knieper et H. Weiss, et qui nous permet d'obtenir une formule de variation du bas du spectre dans le cas des déformations des variétés hyperboliques convexe cocompactes.

Mots-clés

Géométrie riemannienne, théorie spectrale, Laplacien, bas du spectre, moyennabilité, graphes, revêtements, diffusion, fonctions propres génériques, géométrie hyperbolique, coeur convexe, espace de déformation, flot géodésique, variation de l'entropie.

Riemannian geometry, spectral theory, Laplacian, bottom of the spectrum, amenability, graphs, coverings, diffusion, generic eigenfunctions, hyperbolic geometry, convex core, deformation space, geodesic flow, variation of the entropy.

Classification mathématique

47A10, 47B40, 53C21, 53C25, 53C43, 58C40, 58J60, 58J65