



HAL
open science

Contribution à la modélisation des formes et des flux biophysiques dans le géosystème

Cyril Fleurant

► **To cite this version:**

Cyril Fleurant. Contribution à la modélisation des formes et des flux biophysiques dans le géosystème. Planète et Univers [physics]. Université d'Angers, 2009. tel-00423777

HAL Id: tel-00423777

<https://theses.hal.science/tel-00423777>

Submitted on 12 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
AGROCAMBUS OUEST
CENTRE DE FORMATION ET DE RECHERCHE D'ANGERS

Cyril Fleurant

**Contribution à la modélisation des formes et des flux
biophysiques dans le géosystème**

Présenté le 9 octobre 2009 devant le jury composé de :

Thierry Brossard, Directeur de Recherche CNRS, Université de Franche-Comté (*rapporteur*)

Nathalie Carcaud, Professeure, AgroCampus Ouest Angers (*Directrice des Recherches*)

Daniel Delahaye, Professeur, Université de Caen (*rapporteur*)

Jean-Jacques Delannoy, Professeur, Université de Savoie (*rapporteur*)

Monique Fort, Professeure, Université Paris 7 (*examinatrice*)

Heather Viles, Professor, University of Oxford, England (*examinatrice*)



Cyril Fleurant

**Contribution à la modélisation des formes et des flux
biophysiques dans le géosystème**

REMERCIEMENTS

MERCI à Thierry Brossard, Daniel Delahaye et Jean-Jacques Delannoy pour leur travail d'expertise et pour leurs commentaires constructifs sur ce mémoire. Toute ma gratitude va également à Nathalie Carcaud et Monique Fort pour leurs conseils et leur présence à cette soutenance. I am also deeply indebted to Heather Viles who crossed the chanel to take part to my jury.

Cette étape de l'Habilitation à Diriger des Recherches est également l'occasion de remercier ceux qui me sont chers pour leur soutien et leur affection : composantes fondamentales d'un tel projet.

*À Sandrine
À Victor, Abel, Martin et Jeanne Awetash*

SOMMAIRE

Introduction	2
1 La modélisation	10
2 Travaux de recherche	28
3 Parcours scientifique	76
Perspectives	96
Bibliographie	109
Annexes : choix d'articles	120
Compte Rendu à l'Académie des Sciences	120
Mathematical Geology	128
Journal of Theoretical Biology	156
L'Espace Géographique	170
Hydrological Processes	182
Karstologia	202
Géomorphologie, Relief, Processus, Environnement	214
Journal of the Geological Society	228
WSEAS Transactions on Environment and Development	246
Ecological Modelling	258

INTRODUCTION

INTERDISCIPLINARITÉ ET MULTI-ÉCHELLES sont les mots clés de ce mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches. Au travers de ces quelques pages je tente de synthétiser des travaux de recherche variés qui s'inscrivent dans de nombreuses disciplines scientifiques (Figure 1) à des échelles spatio-temporelles larges (Figure 2).

Cette variété n'est pas le fruit d'un hasard qui m'aurait conduit d'un laboratoire de recherche à un autre en fonction des opportunités d'emplois mais bien d'une réelle volonté d'explorer des champs scientifiques différents. Évidemment, cette posture me conduit aujourd'hui à ne pas être un spécialiste d'un domaine de recherche particulier. Pour illustration ma production scientifique s'inscrit dans des sections CNU diverses : 23, 24, 35, 36, 60 ou encore 67 !

1 Des objets d'étude nombreux

Les objets d'étude que j'ai abordés ont ce point commun qu'ils peuvent tous être identifiés dans le géosystème. Ces objets "naturels" se trouvent à différentes strates du système Terre et sont liés entre eux par des flux de matières et d'énergie. Il s'agit par exemple des aquifères souterrains, des cours d'eau ou encore de la végétation.

Ces objets ont également des échelles spatiales très variées qui vont de l'espace interstitiel (le micromètre) au bassin versant (la centaine de kilomètres).

Enfin, les échelles temporelles des processus mis en oeuvre à leur formation ou aux flux qui les relient sont aussi très étendues puisqu'elles vont de quelques minutes (un traçage dans une colonne de laboratoire) à quelques millions d'années (la formation de modelés par érosion).

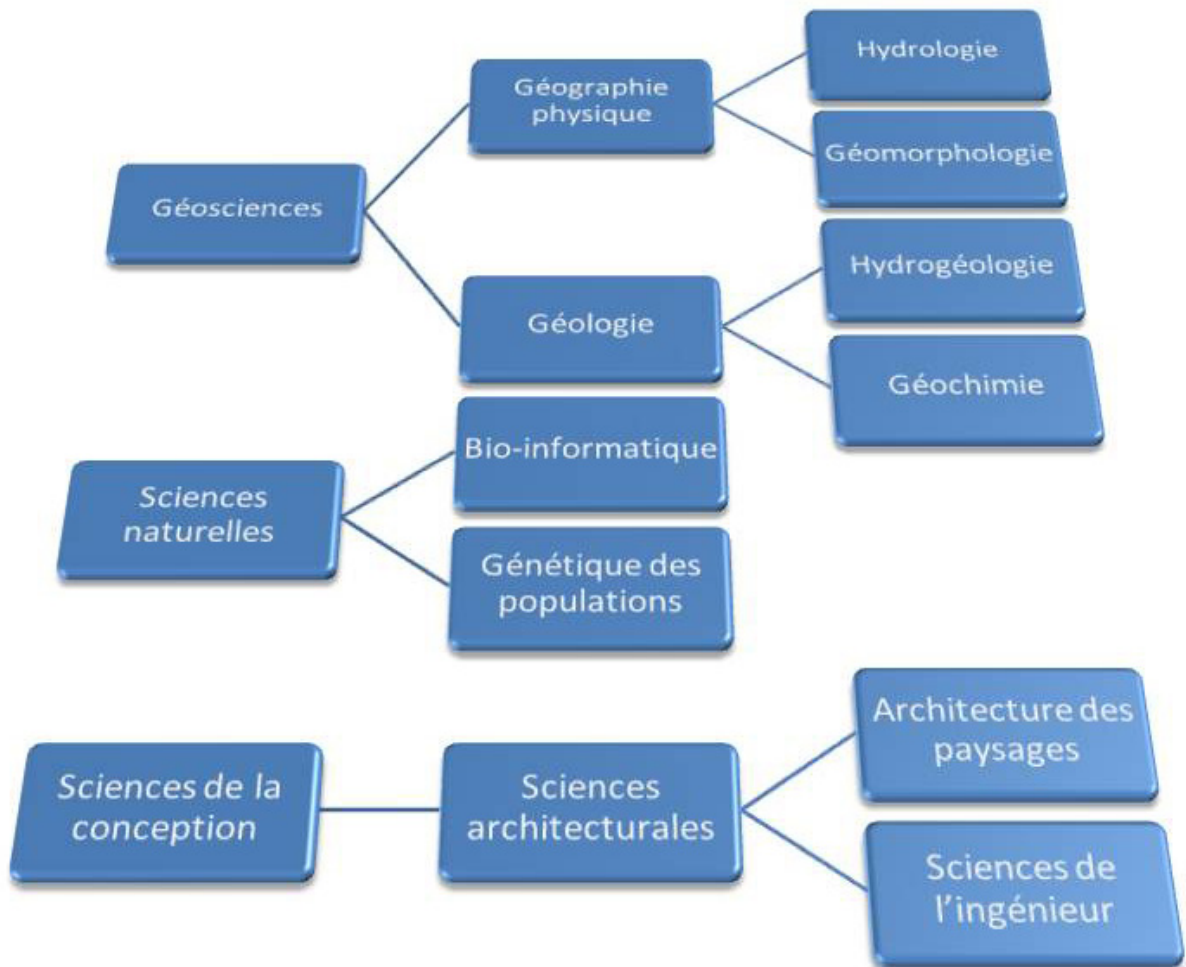


FIGURE 1 – Représentation des disciplines scientifiques abordées dans les travaux de recherche.

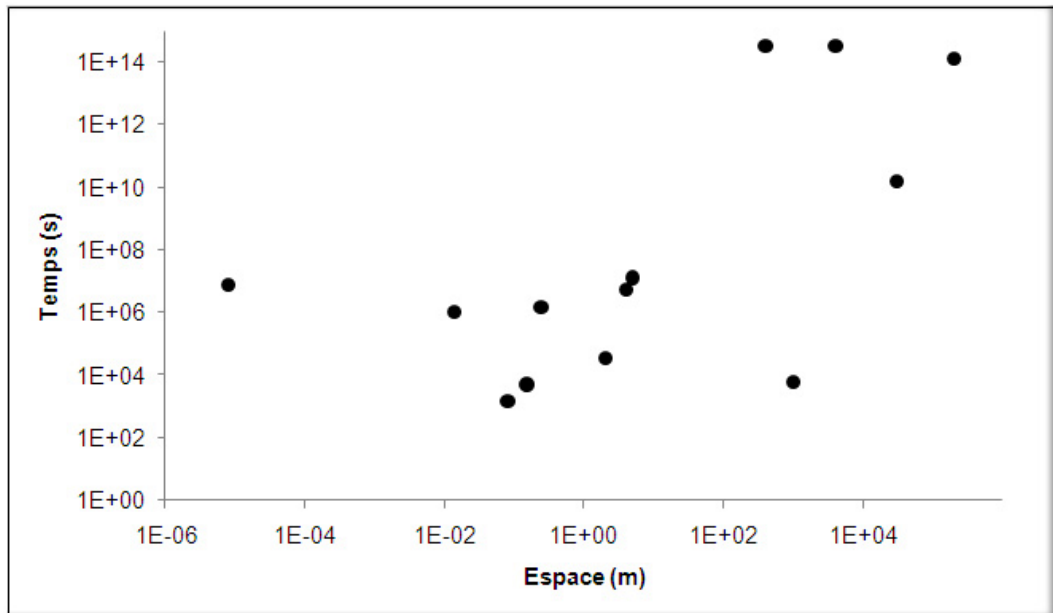


FIGURE 2 – Graphe espace-temps des processus étudiés : chaque point représente un couple espace-temps caractéristique des processus modélisés durant mes travaux de recherche.

2 Une démarche scientifique : la modélisation

La cohérence de mes travaux est essentiellement méthodologique et articulée autour de la Modélisation (Figure 3).

Dans son sens le plus large, la modélisation est une représentation simplifiée de la réalité du monde complexe dans lequel nous vivons.

La modélisation est donc une mise en équations de phénomènes complexes ayant pour objectif final de prédire un phénomène.

Pour répondre à une problématique scientifique on peut faire des expériences sur le système que l'on souhaite étudier ; le but étant de comprendre le fonctionnement du système. Ces expériences sont dites *in situ*, *in vivo* ou encore *in vitro*.

Toutefois, certains systèmes ne permettent pas ces approches expérimentales classiques, pour des raisons d'échelles spatiale ou temporelle dans la plupart des cas. Mais, depuis plusieurs décennies, un nouveau type expérimental permet d'accéder malgré tout à la compréhension de ces systèmes, ce sont les expériences *in silico*.

Ces expériences virtuelles qui construisent le réel dans la mémoire des ordinateurs ont révolutionné notre façon de voir le monde.

Aussi, la modélisation n'est pas uniquement un outil calculatoire mais c'est véritablement

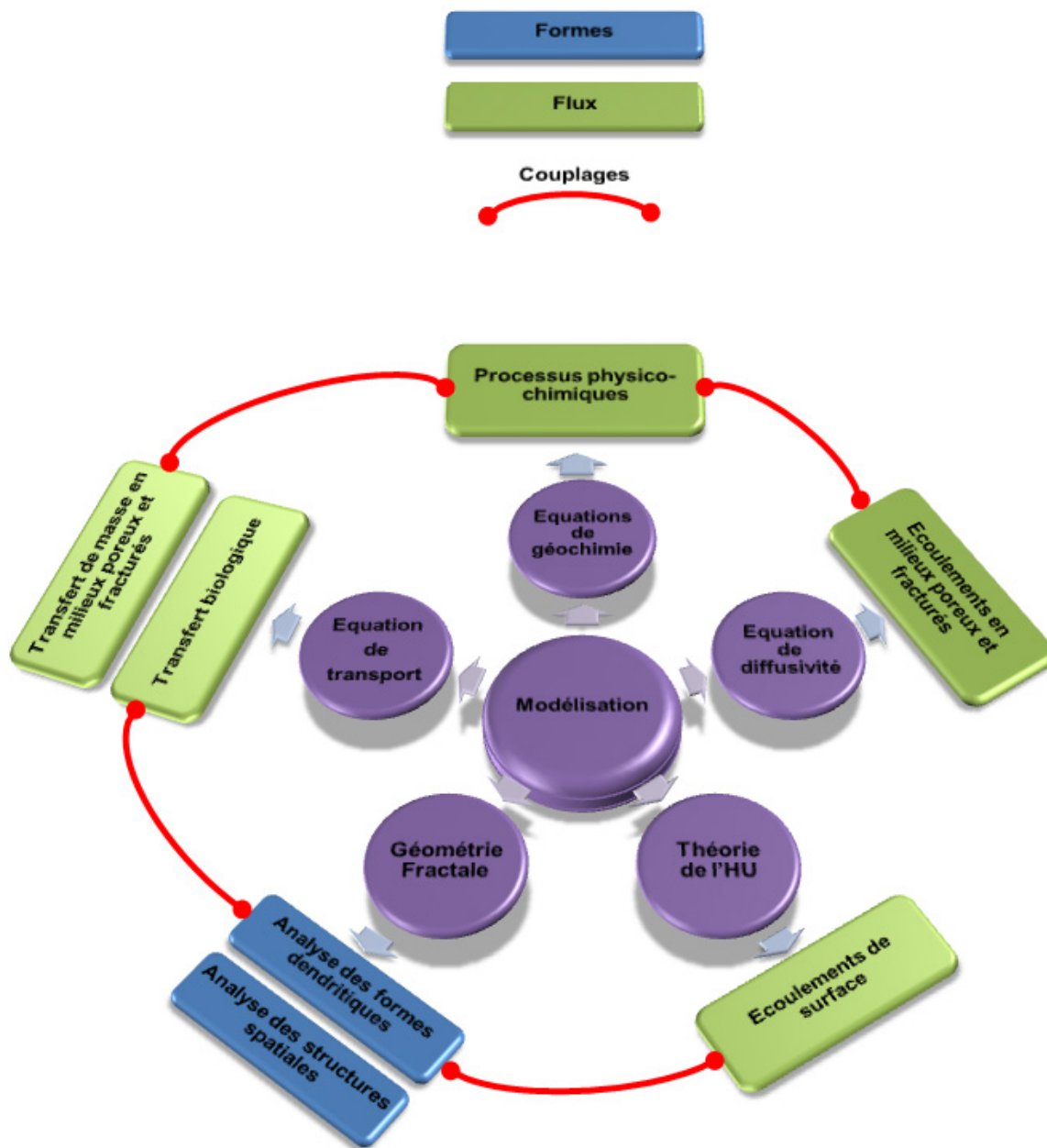


FIGURE 3 – La modélisation : méthodologie fédératrice des travaux de recherche.

un autre moyen de faire de la science. La modélisation permet donc de faire deux choses essentielles :

- comprendre le fonctionnement d'un système (hypothèses) ;
- faire des prédictions.

Globalement la modélisation peut se faire suivant deux approches très différentes. La première consiste à partir de mesures faites sur un système et à essayer ensuite de trouver un formalisme mathématique qui décrit ces données. C'est ce que l'on fait lorsqu'on trace une régression sur des données. Le modèle est l'équation mathématique (une droite si la régression est linéaire) qui traverse au mieux les points de mesure. Ce type de modèle est très souvent limité car les paramètres du modèle (les coefficients de la droite de régression par exemple) n'ont pas forcément un sens physique qui nous permet de donner une interprétation de la relation que l'on a mise en évidence. Aussi, cette approche ne permet souvent pas de comprendre le fonctionnement du système et encore moins d'en extrapoler le comportement.

La seconde approche est, elle, issue d'un raisonnement théorique. Des hypothèses sont faites sur les processus de fonctionnement du système. Ces processus sont mis en équations. Si leur complexité interdit une approche analytique, les équations de ces processus sont numérisées via langage informatique (Fortran, C, C++, Java, etc.). La résolution numérique des équations donne une réponse qui, confrontée à la réalité, permet de valider ou non le modèle. Le modèle validé sous entend que les processus mis en équations sont proches de la réalité. La validation est une phase essentielle qui statue la description mathématique des processus du système. A cette étape le fonctionnement du système peut être envisagé et donc des scénarios exploratoires (extrapolation) peuvent être envisagés.

Les travaux de recherche exposés dans ce mémoire sont basés uniquement sur cette deuxième approche.

Il existe des modèles de plusieurs types : physique, paramétrique, conceptuel, déterministe, stochastique ou encore empirique. Chaque type de modèle a des ambitions bien différentes, des domaines d'actions privilégiés, des complexités variées. Le point commun de ces modèles c'est qu'ils sont tous faux !

En effet, le but d'un modèle est de simplifier la complexité de la réalité. Ces simplifications conduisent à des erreurs et rendent les modèles faux au sens où ils ne peuvent pas représenter exactement la réalité.

Un modèle est une caricature du système qu'il représente. Les simplifications qui doivent être faites mettent en avant les processus prégnants du systèmes à modéliser. Aussi, un même système peut être modélisé de plusieurs manières, en mettant en avant un processus

plutôt qu'un autre. Cela dépend des objectifs de l'expérience *in silico* que l'on veut mener.

3 Articulation des travaux et du mémoire

L'organisation de ce mémoire est concentrique avec au coeur, l'élément fédérateur de mes travaux de recherche, la modélisation (Figure 3).

Dans un premier temps (Chapitre 1), je décrirai les équations et/ou théories que j'ai abordées dans ces travaux. Les objectifs de ce chapitre sont i) de montrer les différents champs disciplinaires ii) de décrire les processus modélisés.

Ces processus sont liés à des flux bio-physiques (écoulement, gènes) et/ou à des formes bio-physiques (relief, végétaux). Les couplages entre ces processus sont exposés sous forme d'applications qui illustrent mes travaux de recherche (Chapitre 2) :

- des applications sur le stockage des déchets nucléaires et la corrosion des verres illustrent le couplage entre les équations de transport et la géochimie.
- des applications sur la modélisation géomorphologique des karsts et des lacs montrent un exemple du couplage entre les équations de la diffusivité et de la géochimie.
- une application sur le transfert biologique dans un réseau hydrographique permet d'aborder le couplage entre l'équation de transport et la géométrie fractale.
- une application sur la modélisation pluie-débit donne une idée du couplage possible entre la théorie de l'hydrogramme unitaire et la géométrie fractale.
- des applications variées sur l'analyse des formes.

Le chapitre 3 décrit mon parcours scientifique, notamment mes activités d'enseignement, d'encadrement et de vie d'équipe.

Une sélection de 10 publications est présentée en annexe. Ce choix a pour objectif de montrer les thèmes variés abordés :

Fleurant C. and W-C Jeong, 2001, Dispersion of inert particles in a rough fracture, *Compte Rendu à l'Académie des Sciences*, 332(2), p. 115-120.

Fleurant C. and J. van der Lee, 2001, A stochastic model of transport in 3-D porous media, *Mathematical Geology*, 33(4), p. 449-474.

Fleurant C., Duchesne J. and P. Raimbault, 2004, An allometric model for trees, *Journal of Theoretical Biology*, 227(1), p. 137-147.

Roland B. et **C. Fleurant**, 2004, Caractérisation des formes du bocage à l'aide de la géométrie fractale, *L'Espace Géographique*, 2, p. 165-174.

Fleurant C., Kartiwa B. and B. Roland, 2006, An Analytical Geomorphological Instantaneous Unit Hydrogram, *Hydrological Processes*, 20(18), p. 3879-3895.

Fleurant C., Tucker G.E. and H.A. Viles, 2008, Modèle d'évolution de paysages, application aux karsts en cockpit de Jamaïque, *Karstologia*, 49, p. 33-42.

Fleurant C., Tucker G. and H.A. Viles, 2008, A model of cockpit karst landscape, *Géomorphologie, Relief, Processus, Environnement*, 1, p. 3-14.

Fleurant C., Tucker G. and H.A. Viles, 2008, A cockpit karst evolution model, *Journal of the Geological Society, Special issue : Landscape Evolution : Denudation, Climate and Tectonics over Different Time and Space Scales*, 296, p. 47-62.

Fleurant C., Burley J.B., Loures L., Lehman W. and J. Mchugh, 2009, Inverse Box-Counting Method and Application : A Fractal-Based Procedure To Reclaim a Michigan Surface Mine, *WSEAS Transactions on Environment and Development*, 1(5), p.76-85.

Chaput-Bardy A., **Fleurant C.**, Secondi J. and C. Lemaire, 2009, Modelling the effect of in-stream and overland dispersal on gene flow in river networks, *Ecological Modelling*, sous presse.

LES TRAVAUX DE RECHERCHE sont basés sur un certain nombre de théories et/ou d'équations qui décrivent les processus de fonctionnement des systèmes étudiés. Il s'agit de :

- l'équation de diffusivité qui symbolise l'écoulement des fluides en milieux poreux et fracturés ;
- l'équation de transport qui gère le transfert de masse dans les milieux poreux et fracturés ;
- la théorie de l'hydrogramme unitaire qui décrit les processus de ruissellement sur un bassin versant ;
- la théorie fractale qui pose les règles d'une nouvelle géométrie permettant de décrire des objets de formes complexes ;
- les équations de géochimie qui prennent en compte la réactivité des éléments avec leur milieu.

1 L'équation de diffusivité

L'équation de diffusivité (équation de Navier-Stockes appliquée aux milieux poreux et fracturés) qui gère les écoulements en milieux poreux et fracturés (Figure 1.1) découle de l'association de deux équations fondamentales de circulation d'un fluide à l'échelle du VER¹ :

- l'équation de continuité :

Cette équation exprime le principe bien connu "rien ne se crée, rien ne se perd, tout se transforme", injustement attribuée à Lavoisier². L'équation de continuité exprime

1. VER : Volume Élémentaire Représentatif

2. Cette maxime appartient en réalité à Anaxagore de Clazomènes, philosophe grec (500-428 av. J-C)

donc la conservation de la matière ou encore le bilan de masse. Dans un volume fermé fixe : la variation de la masse d'un fluide pour une unité de temps donnée est égale à la somme algébrique des flux massiques qui traversent la surface du volume considéré. Cette équation s'écrit :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \rho q = 0 \quad (1.1)$$

avec ρ la masse volumique du fluide [ML^{-3}], \vec{u} le vecteur vitesse [LT^{-1}] lui-même fonction de l'espace et du temps, ω la porosité du milieu poreux [sans dimension] et q le débit par unité de volume de fluide prélevé (quantité positive) ou injecté (quantité négative) dans le milieu poreux [T^{-1}]. L'opérateur mathématique divergence div est défini de la façon

suivante : si on considère un vecteur à trois coordonnées $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, alors la divergence

de \vec{v} est la quantité $\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$.

– la loi de Darcy :

Henri Darcy³ en étudiant les fontaines de la ville de Dijon montra la relation de proportionnalité entre le débit du fluide qui traverse un milieu poreux et la charge hydraulique. Cette équation fondamentale de l'hydraulique permet donc de calculer la perte de charge due à la friction. Réécrite ultérieurement par Julius Weisbach⁴, l'équation de Darcy-Weisbach s'écrit donc :

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \left[\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p) + \rho g \overrightarrow{\operatorname{grad}}(z) \right] \quad (1.2)$$

avec k un tenseur de perméabilité⁵ [L^2], μ la viscosité dynamique du fluide [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$], p la pression du fluide [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$], g l'accélération de la pesanteur [LT^{-2}] et z l'axe vertical de l'espace orienté vers le haut. L'opérateur mathématique gradient $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$ est défini de la façon suivante : si on considère une fonction W qui varie dans les trois directions de

l'espace, alors le gradient de W est le vecteur $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(W) \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}$.

La combinaison des équations 1.1 et 1.2 à l'équation d'état isotherme du fluide permet d'établir l'équation de diffusivité (de Marsily, 1986) :

$$\nabla^2 h = \frac{\omega}{eK} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{q}{eK} \quad (1.3)$$

avec $h(x, y, z, t)$ la charge hydraulique dans le milieu poreux [L], e l'épaisseur du milieu poreux [L], K une valeur homogène de la conductivité hydraulique du milieu poreux

3. Henry Darcy était ingénieur général des ponts et chaussées (1803-1858)

4. Julius Weisbach était ingénieur et mathématicien allemand (1806-1871)

5. Le tenseur de perméabilité exprime le fait que la valeur de la perméabilité d'un milieu poreux n'est pas identique dans toutes les directions de l'espace, en raison de l'anisotropie du milieu. Le tenseur s'écrit donc sous la forme d'une matrice 3×3 diagonale.

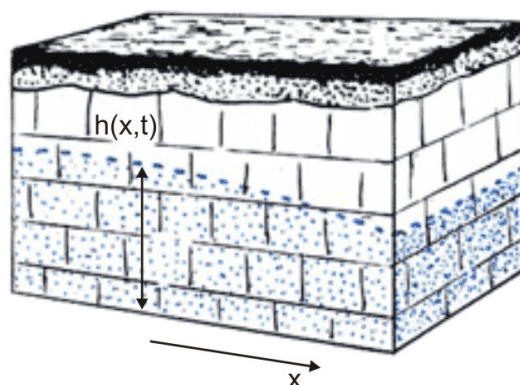


FIGURE 1.1 – L'équation de diffusivité permet de modéliser les variations de la hauteur d'un aquifère (source : CRDP de Rouen).

$[LT^{-1}]$, ω la porosité du milieu poreux [sans dimension] et q un terme source d'entrée ou de sortie de fluide dans le milieu poreux $[LT^{-1}]$. L'opérateur mathématique Laplacien ∇ est défini de la façon suivante : si on considère une fonction ϕ qui varie dans les trois directions de l'espace, alors le Laplacien de ϕ est la quantité $\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$.

2 L'équation de transport

Dans les systèmes naturels, les fluides sont en mouvement ; même s'il est extrêmement lent, ce déplacement est dû à un gradient de pression hydraulique, on parle de convection. La convection est l'entraînement d'une masse par le seul mouvement du fluide. Si on considère un volume quelconque représentatif de milieu poreux, un VER (on notera \vec{dS} un vecteur perpendiculaire sortant à la surface enveloppe de ce volume), alors l'expression mathématique de ce flux convectif s'écrit :

$$\Phi_C = \iint_S C\vec{U}\cdot\vec{dS} \quad (1.4)$$

où C est la concentration de la masse transportée $[ML^{-3}]$, et \vec{U} la vitesse moyenne de pore $[LT^{-1}]$ du milieu poreux.

La diffusion moléculaire est un phénomène physique lié à l'agitation thermique moléculaire. Dans un liquide au repos les particules de fluide subissent un mouvement brownien⁶ et sont déplacées uniformément dans toutes les directions de l'espace. Le résultat de cette agitation moléculaire est le transfert de particules des zones de fortes concentrations vers les zones de plus faibles concentrations.

Dans un milieu poreux saturé, cette agitation moléculaire ne peut se faire de façon isotrope,

6. Robert Brown (1773-1858) était un botaniste écossais et il observa le mouvement erratique de petites particules de pollen immergées dans de l'eau.

à cause des grains du milieu. Pour tenir compte de ce phénomène qui réduit la possibilité qu'a une particule à diffuser, on définit un coefficient de diffusion moléculaire effectif (D_m) caractérisant la diffusion de l'élément dans le milieu considéré :

$$D_m = \tau d_0$$

où τ est appelée la tortuosité (Bear, 1972).

Fick⁷ a établi que ce flux de particules est proportionnel (pour un liquide au repos) au gradient de concentration. Sur un VER, l'expression mathématique de ce flux diffusif s'écrit :

$$\Phi_d = \iint_S D_m \overrightarrow{\text{grad}}(C) \cdot d\vec{S} \quad (1.5)$$

où C est la concentration de la masse transportée [ML^{-3}], et D_m le coefficient de diffusion moléculaire dans le milieu poreux.

Lorsqu'un fluide est en mouvement, différents mélanges viennent s'ajouter au processus purement diffusif que nous venons de décrire, on parle alors de dispersion cinématique. La dispersion cinématique est la conséquence de la non-uniformité du champ des vitesses dans le milieu poreux à différentes échelles :

- l'espace entre deux grains de milieu poreux peut être considéré comme un capillaire (Figure 1.2). La vitesse est nulle à la surface et augmente vers le centre où elle y est maximale ;
- la géométrie des grains produit des variations de direction et de module des vitesses locales (Figure 1.3).

Lorsque la dispersion cinématique s'opère dans la direction principale de l'écoulement, on parle de dispersion longitudinale. Dans le cas d'une dispersion cinématique dans le plan normal à la direction principale d'écoulement, on parle de dispersion transversale.

Si l'on veut considérer l'écoulement d'un soluté en milieu poreux saturé, on ne peut pas séparer la diffusion moléculaire de la dispersion cinématique. On regroupe donc ces deux phénomènes sous le terme de dispersion hydrodynamique. Sur un VER, l'expression mathématique de ce flux dispersif s'écrit :

$$\Phi_D = \iint_S D \overrightarrow{\text{grad}}(C) \cdot d\vec{S} \quad (1.6)$$

D est le tenseur de dispersion [LT^{-2}], symétrique et du second ordre. Sa direction principale est celle du vecteur vitesse de l'écoulement.

Les coefficients du tenseur sont des fonctions du module de la vitesse d'écoulement. Si l'on

7. Adolph Fick (1829-1901) était un physiologiste allemand et s'inspira des lois de diffusion de la chaleur de Fourier pour établir sa loi de diffusion de masse.

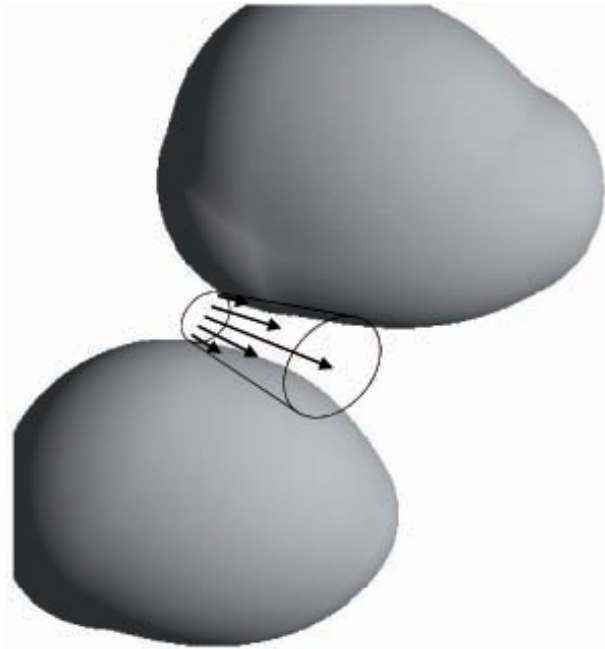


FIGURE 1.2 – Profil parabolique des vitesses entre deux grains de milieu poreux.

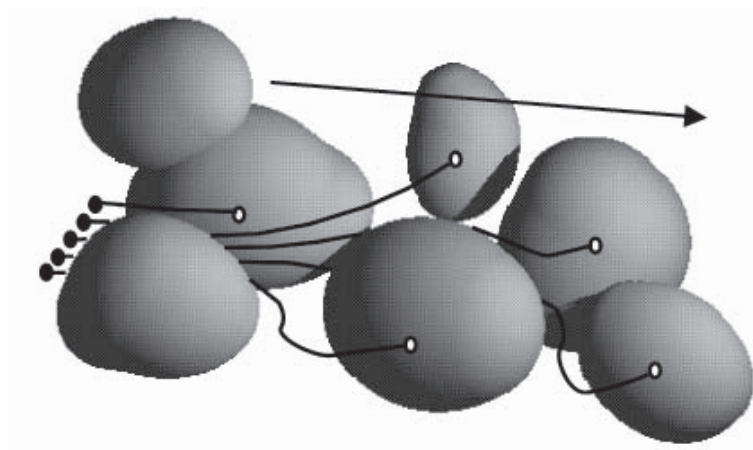


FIGURE 1.3 – Divers chemins empruntés par les particules entre le temps t (●) et $t + dt$ (○).

exprime le tenseur de dispersion dans les directions principales d'anisotropie :

$$D = \begin{pmatrix} D_X & 0 & 0 \\ 0 & D_Y & 0 \\ 0 & 0 & D_Y \end{pmatrix}$$

D_X est le coefficient de dispersion longitudinale (dans le sens de l'écoulement) et D_Y est le coefficient de dispersion transversale (perpendiculaire à l'écoulement). La forme générale des coefficients de dispersion est alors :

$$D_X = D_m + \alpha_X U \quad (1.7)$$

$$D_Y = D_m + \alpha_Y U \quad (1.8)$$

où α_X et α_Y sont respectivement les dispersivités longitudinale et transversale [L] et U la vitesse moyenne de pore.

Si l'on prend en compte les divers processus que l'on vient de développer, on peut écrire mathématiquement le déplacement d'un soluté en milieu poreux saturé. Il suffit pour cela d'établir une équation de conservation de la masse sur un VER : les flux convectif, diffusif et dispersif qui entrent ou sortent du VER produisent une variation de la concentration de masse en fonction du temps :

$$\Phi_C + \Phi_d + \Phi_D = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V C dV \quad (1.9)$$

où $dV [L^3]$ est le volume du VER. En intégrant les équations (1.4), (1.5) et (1.6) on obtient successivement :

$$\iint_S C \vec{U} \cdot d\vec{S} + \iint_S D_m \overrightarrow{\text{grad}}(C) \cdot d\vec{S} + \iint_S \overrightarrow{D} \overrightarrow{\text{grad}}(C) \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V C dV \quad (1.10)$$

$$\iint_S (C \vec{U} + \overrightarrow{D} \overrightarrow{\text{grad}}(C)) \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V C dV \quad (1.11)$$

où \overrightarrow{D} est le tenseur de diffusion-dispersion [LT^{-2}], symétrique et du second ordre qui associe donc le coefficient de diffusion moléculaire et le tenseur de dispersion.

Le passage à l'équation de transport est réalisé en utilisant les formules d'Ostrogradski (transformation de l'intégrale de surface en intégrale de volume) et de Leibniz (passage de la différentielle dans l'opérateur intégral) :

$$\iint_S \vec{\phi} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \text{div}(\phi) \cdot dV \quad \text{Formule d'Ostrogradski} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \phi dV = \iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV \quad \text{Formule de Leibniz} \quad (1.13)$$

Ainsi, l'équation de transport s'écrit :

$$\text{div}(\overrightarrow{D} \overrightarrow{\text{grad}} C - C \vec{U}) = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (1.14)$$

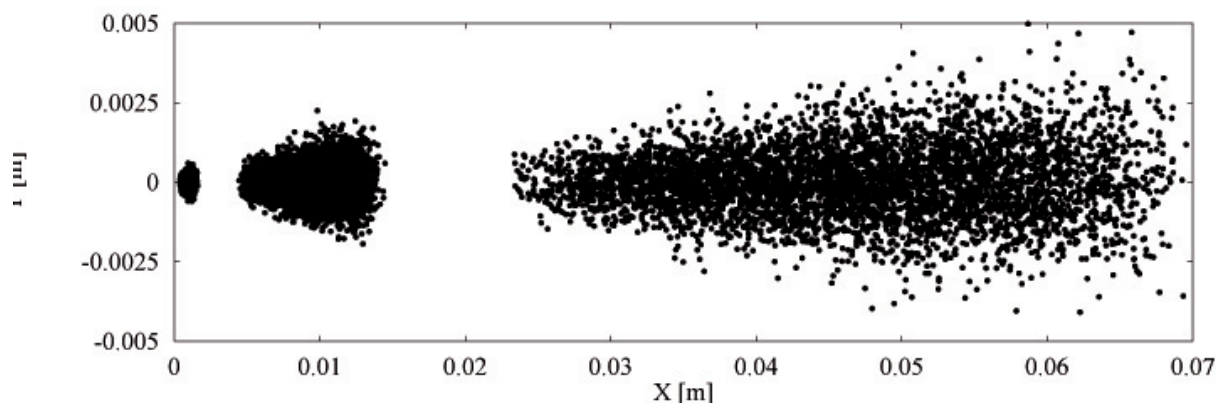


FIGURE 1.4 – En utilisant la méthode des particules pour résoudre l'équation de transport (1.14) on peut visualiser l'étalement du nuage de polluant animé par la convection, la diffusion et la dispersion.

L'équation de transport (1.14) peut être résolue numériquement par différentes méthodes : différences finies, éléments finis ou marche au hasard (Figure 1.4).

Lorsque le problème posé est assez simple (paramètres constants dans l'espace et le temps, conditions initiales et aux limites simples), il existe des solutions exactes de l'équation (1.14), appelées solutions analytiques.

Elles permettent de déterminer la valeur de la concentration en un point de l'espace, à un temps donné. Les solutions analytiques existent pour des cas mono-, bi- et tridimensionnels et pour des injections ponctuelles instantanées et ponctuelles à durée variable.

Si l'on ramène notre système à une étude monodimensionnelle (la longueur est très grande par rapport à la largeur), il existe une solution de l'équation du transport d'un traceur dans ce milieu semi-infini (de Marsily, 1986). L'équation de transport (1.14) s'écrit en monodimensionnel :

$$D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (1.15)$$

où C est la concentration du traceur [ML^{-3}], D est le coefficient de dispersion [LT^{-2}] et U la vitesse moyenne de pore [LT^{-1}]. Pour les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} C(x, t = 0) &= 0 \quad \forall x \\ C(x = 0, t \geq 0) &= C_0 \end{aligned}$$

l'équation (1.15) a pour solution (Sauty, 1980) :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - Ut}{2\sqrt{Dt}} \right) + \exp \left(\frac{Ux}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + Ut}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \quad (1.16)$$

où erfc est la fonction d'erreur complémentaire définie par $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-x^2} dx$.

Comme l'indiquent les conditions aux limites, l'équation (1.16) est la solution d'une injection continue de traceur. Pour une injection à durée variable (t_0), on applique le principe de superposition (Banton & Bangoy, 1997) et cette équation devient :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - Ut}{2\sqrt{Dt}} \right) + \exp \left(\frac{Ux}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + Ut}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] - \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - U(t - t_0)}{2\sqrt{D(t - t_0)}} \right) + \exp \left(\frac{Ux}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + U(t - t_0)}{2\sqrt{D(t - t_0)}} \right) \right] \quad (1.17)$$

Dans le cas limite d'une injection instantanée et ponctuelle de traceur (dans un milieu infini) la solution est également bien connue (de Marsily, 1986) :

$$dC(x, t) = \frac{dM}{2\omega\sqrt{\pi Dt}} \exp \left(-\frac{(x - Ut)^2}{4Dt} \right) \quad (1.18)$$

Dans ces équations, D représente le coefficient de dispersion apparent, il inclut à la fois la dispersion cinématique et la diffusion moléculaire. Il est défini comme étant égal à :

$$D = D_m + \alpha U \quad (1.19)$$

où α est la dispersivité du milieu considéré et D_m le coefficient de diffusion moléculaire en milieu poreux.

Les solutions analytiques tridimensionnelles sont données dans Banton & Bangoy (1997). Pour une injection instantanée et ponctuelle dans un milieu tridimensionnel infini une solution de l'équation (1.14) est :

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0 S}{8\sqrt{\pi^3 t^3 D_x D_y D_z}} \exp \left(-\frac{(x - Ut)^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t} \right) \quad (1.20)$$

où S est la section d'injection selon y et z .

Cette solution indique que les surfaces d'isoconcentration sont des ellipsoïdes de révolution suivant l'axe X . Les centres de ces ellipsoïdes sont $(Ut, 0, 0)$ et les demi axes sont $(2D_x t, 2D_y t, 2D_z t)$.

Pour une injection ponctuelle continue dans un milieu tridimensionnel on a :

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0 S U}{8\pi\sqrt{D_y D_z}} \exp \left(\frac{Ux}{2D_x} \right) \left(\exp \left(\frac{-Ur}{2D_x} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{r - Ut}{2\sqrt{D_x t}} \right) + \exp \left(\frac{Ur}{2D_x} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{r + Ut}{2\sqrt{D_x t}} \right) \right) \quad (1.21)$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + \frac{D_x}{D_y} y^2}$$

3 La théorie de l'hydrogramme unitaire

La modélisation pluie-débit consiste à prédire le débit à l'exutoire d'un bassin versant à partir des données climatiques. Les phénomènes mis en jeu sont extrêmement complexes (hétérogénéité des caractéristiques spatiales du bassin versant, variabilité des conditions initiales, hétérogénéité spatiale et temporelle des événements climatiques, non-linéarité des phénomènes de transport dans les drains, etc). Ce modèle nécessite donc des hypothèses simplificatrices fortes.

Les opérations traditionnellement mises en oeuvre pour modéliser la transformation d'une pluie en débit sont de deux types :

- tout d'abord, la fonction de production calcule la part des précipitations totales qui va effectivement ruisseler et participer à l'écoulement. On appelle pluie brute les précipitations totales et pluie nette la fraction efficace de cette pluie brute ;
- dans un second temps, la fonction de transfert définit la manière dont la pluie nette va se manifester en terme de débit à l'exutoire du bassin versant.

Généralement la fonction de transfert utilise le concept de l'hydrogramme unitaire, fondé sur le principe de superposition des réponses hydrologiques du bassin versant (hypothèse simplificatrice).

Le raisonnement est construit sur la base des systèmes linéaires. Considérons donc le bassin versant comme un système linéaire (Figure 1.5). Ce système produit un signal de sortie $s(t)$ pour un signal d'entrée $e(t)$ donné. Pour un bassin versant, les signaux d'entrée et de sortie peuvent être illustrés par l'équation du cycle hydrologique (1.22).

$$\begin{aligned}\Delta &= e(t) - s(t) \\ \Delta &= P - Q\end{aligned}\tag{1.22}$$

avec P les précipitations nettes (schématiquement elles correspondent aux précipitations brutes moins l'évapotranspiration) [LT^{-1}] et Q les différents types d'écoulements (écoulements de surface, hypodermique et souterrain) [LT^{-1}]. Δ représente le stockage temporaire de l'eau dans les réservoirs souterrains du fait des vitesses différentielles importantes entre les écoulements de surface, de subsurface et souterrain. En théorie, l'équation de conservation (1.22) est nulle sur une année hydrologique. Comme Δ représente une variation de stock d'eau, on peut l'écrire sous une forme différentielle. De plus en considérant que ce stock varie linéairement avec les écoulements, l'équation (1.22) devient :

$$\begin{aligned}\frac{kds(t)}{dt} + s(t) &= e(t) \\ \frac{kdQ(t)}{dt} + Q(t) &= P(t)\end{aligned}\tag{1.23}$$

On obtient ainsi une équation différentielle qui lie l'entrée du système (les précipitations) à la sortie (les écoulements). Quelle est la solution de cette équation ?

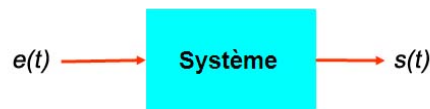


FIGURE 1.5 – Un système linéaire peut être vu comme une boîte qui, pour un signal d’entrée $e(t)$, produit un signal en sortie $s(t)$.

La théorie des systèmes linéaires nous donne la solution :

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau)T(t - \tau)d\tau \quad (1.24)$$

C’est ce qu’exprime de façon plus complète le modèle de Chow et al. (1988) :

$$q(t) = A \int_0^t P(\tau)T(t - \tau)d\tau \quad (1.25)$$

où q est le débit à l’exutoire du bassin versant [L^3T^{-1}], A est l’aire du bassin versant [L^2], P l’intensité des précipitations nettes [LT^{-1}] et T une fonction dite de transfert [T^{-1}].

Pour pouvoir calculer le débit à l’exutoire d’un bassin versant il faut donc connaître la fonction de transfert, les autres variables étant connues. Il existe plusieurs approches pour déterminer cette fonction de transfert, toutes basées sur le concept d’hydrogramme unitaire.

L’hydrogramme unitaire a été défini sous sa première forme (pas de temps discrets) par Sherman (1932). L’hydrogramme unitaire est construit à partir des deux hypothèses principales suivantes (Nash, 1957; Dooge, 1959; Chow, 1964) :

- L’hydrogramme unitaire est par définition l’hydrogramme de crue correspondant à la transformation d’une pluie nette instantanée, de hauteur unité et uniforme sur le bassin versant.
- L’hydrogramme unitaire est un opérateur linéaire, si bien que l’hydrogramme généré par une pluie nette quelconque, uniforme sur le bassin versant, est obtenu par simple convolution entre l’hydrogramme unitaire et la pluie nette.

Le choix de l’hydrogramme unitaire caractéristique d’un bassin versant est un problème très délicat. La détermination expérimentale de ce dernier à partir d’événements réels issus de pluies ayant des caractéristiques proches de l’averse unitaire est toujours pratiquée pour des bassins versants jaugés mais reste complexe à mettre en oeuvre. D’autres approches méthodologiques sont possibles pour identifier l’hydrogramme unitaire, nous développerons ici l’une des plus importantes et des plus couramment utilisées : le modèle de Nash (1957).

Le modèle de Nash (Nash, 1957) est un modèle global d’hydrogramme unitaire, dont la forme, une fonction Gamma de paramètres τ et k , est posée arbitrairement. La fonction de

Nash est caractéristique de la distribution du temps de parcours d'une goutte traversant une série de k réservoirs linéaires dont le temps caractéristique de vidange est τ :

$$T_{\text{Nash}} = \frac{1}{\tau \Gamma(k)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{k-1} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.26)$$

où $\Gamma(k)$ est la fonction Gamma d'argument k .

Les paramètres τ et k n'ont pas de réalité physique et doivent être calés à partir de chroniques d'événements pluie-débit. C'est là l'un des inconvénients majeurs du modèle de Nash, qui ne peut donc pas être utilisé pour des bassins versants non jaugés.

La recherche d'une fonction de transfert géomorphologique, peut permettre de donner un sens physique à l'hydrogramme unitaire établi à partir de paramètres déterminés en fonction de la géométrie du bassin versant étudié. Il peut en outre être un outil privilégié pour étudier les réponses hydrologiques de bassins versants non jaugés.

Le premier hydrogramme unitaire géomorphologique est dû à Rodriguez-Iturbe & Rinaldo (1997). Dans ce modèle, l'hydrogramme unitaire n'est autre qu'une estimation de la fonction densité de probabilité des temps de parcours des gouttes d'eau entre leur point de chute sur le bassin versant et l'exutoire. La plupart du temps, les auteurs cherchent d'abord à déterminer les fonctions densité de probabilité des longueurs des chemins hydrauliques du bassin versant avant d'effectuer un changement de variable afin de passer de la variable longueur à la variable temps par introduction de la vitesse. Il existe globalement deux approches distinctes menant à un hydrogramme unitaire géomorphologique : la première raisonne sur les chemins hydrauliques (elle est présentée dans le paragraphe ci-dessous), la seconde sur les fonctions géomorphologiques (elle sera décrite dans le paragraphe 4.2 du chapitre 2, puisque l'auteur a contribué à son développement).

Le modèle de Rodriguez-Iturbe & Rinaldo (1997), appelé Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph est basé sur un raisonnement probabiliste des chemins hydrauliques possibles sur un bassin versant et s'écrit :

$$T(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} p(\gamma) f_{\gamma}(t) \quad (1.27)$$

$p(\gamma)$ est la probabilité d'avoir un chemin γ emprunté par une goutte de pluie depuis sa chute jusqu'à l'exutoire. Γ est l'ensemble des chemins possibles des γ . $f_{\gamma}(t)$ (T^{-1}) est la fonction densité de probabilité des temps de transfert dans le chemin γ .

4 La géométrie fractale

Dans les géosystèmes, nombre d'objets sont caractérisés par la complexité de leur forme : réseau de fractures, structure dendritique des végétaux ou des réseaux hydrographiques,

etc. Dans la modélisation des processus biophysiques, la forme des objets est souvent un facteur limitant du fait de cette complexité : modéliser l'écoulement dans un tuyau est toujours plus facile que dans un milieu poreux car la géométrie du tuyau est simple contrairement à celle du milieu poreux.

Les outils quantitatifs permettant de décrire la complexité de ces formes naturelles qui nous entourent sont très limités du fait même de l'indifférence des sciences pour les formes pendant des siècles :

- en sciences physiques, les formes complexes ont été réduites à leur centre de gravité, donc à un point.
- en mathématiques, les objets trop irréguliers, trop discontinus étaient considérés comme des "monstres mathématiques".
- les domaines "nobles" de la Science - la physique relativiste (macrocosme) et la physique quantique (microcosme) - vulgarisaient le mésocosme.

Face à cette indifférence de la Science pour les formes, des théories dites morphologiques sont apparues :

- la théorie des catastrophes (R. Thom - 1970).
- la théorie du chaos (J. York - 1960).
- la théorie des structures dissipatives (I. Prigogine - 1960).
- la géométrie fractale (B. Mandelbrot - 1960).

Les fractales ont été observées à la fin du 19^{ème} siècle, bien que le terme "fractal" ait été attribué bien plus tard. Ces objets mathématiques particuliers ont été considérés comme de simples curiosités pendant très longtemps.

Les fractales ont été au coeur d'une nouvelle branche des mathématiques dans la seconde moitié du 20^{ème} siècle, grâce au travail du mathématicien français Benoît Mandelbrot. Durant son travail de recherche en "économétrie", il a découvert des lois d'invariance de forme entre les courbes de prévision des prix à court et à long terme. La géométrie fractale était née.

Le mot fractal vient du latin *fractus* qui signifie cassé, brisé. Cette géométrie s'intéresse donc aux objets dont l'irrégularité ne permet pas de les décrire correctement avec la géométrie classique dite euclidienne.

La géométrie fractale s'est imposée très rapidement dans de nombreux domaines scientifiques comme un outil fondamental de description des objets naturels. De nombreuses références montrent la pluridisciplinarité d'utilisation de cet outil (Mandelbrot, 1988, 1995; Barnsley, 1988; Feder, 1988; Schroeder, 1991; Peitgen H. & Saupe, 1992) et ses applications dans les sciences de la terre (Korvin, 1992; Turcotte, 1992; Vicsek, 1994; Barton, 1995; Rodriguez-Iturbe & Rinaldo, 1997), dans les sciences du paysage (Frankhauser, 1994; Dauphiné, 1995), dans les sciences de l'ingénieur (Nakagawa, 1999; Dekking, 1999), dans

les sciences physiques (Gouyet, 1992; Sapoval, 1997), dans les sciences de la vie (West et al., 1997; Douady & Couder, 1992).

Dans ses deux ouvrages majeurs (Mandelbrot, 1975) et (Mandelbrot, 1988), l'auteur montre les limites de la géométrie euclidienne pour décrire les objets naturels qui composent les géosystèmes. La géométrie fractale est ainsi la seconde grande révolution non euclidienne⁸.

Cette géométrie est en fait une synthèse de nombreux travaux concernant les monstres mathématiques déjà pointé du doigt par de grands mathématiciens comme Cantor, Péano, Lebesgue ou Hausdorff.

Une fractale peut être définie par les caractéristiques suivantes :

- sa structure est "fine", quelle que soit l'échelle d'observation ;
- sa structure est trop irrégulière pour être décrite par la géométrie euclidienne ;
- elle a la propriété d'être auto-similaire ou auto-affine (homothéties internes) ;
- elle a une dimension, dite fractale, qui est toujours supérieure à sa dimension topologique.

Pour illustrer le concept de fractales, imaginons un survol des côtes de la Bretagne. Quelle distance parcourons-nous ? Pour déterminer la longueur de cette côte, on peut envisager deux résolutions différentes :

1. une série de photos à partir de clichés pris à 10.000 mètres d'altitude.
2. une deuxième série de photos à partir de clichés pris à 500 m d'altitude où les détails de la côte seront donc plus précis.

Après un rapide calcul, on va découvrir que la côte est plus longue dans le deuxième cas que dans le premier. Si on l'examine avec une résolution encore plus fine, alors de nouveaux détails apparaîtront et sa longueur sera encore plus grande. La côte bretonne est une fractale et les fractales sont partout dans la nature (Barnsley, 1988).

Le flocon de von Koch (Figure 1.6) illustre les caractéristiques des fractales et est souvent utilisé comme modèle mathématiques des fractales naturelles que sont les côtes du littoral. Ce flocon de von Koch est facile à concevoir, comme la majorité des fractales d'ailleurs, c'est un des nombreux paradoxes qu'elles soulèvent : leur complexité est générée à partir de règles simples. Cette complexité est produite par la propriété d'auto-similarité : la structure reste identique à toutes les échelles. Un autre paradoxe intéressant est la relation entre la longueur du flocon de von Koch et sa surface. En effet, on peut montrer très facilement qu'à l'itération n , la longueur du flocon de von Koch est $L = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$ et que son aire est $A = A_0 + \frac{3}{4}A_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}}\right)$, A_0 étant l'aire initial du triangle. Ainsi on voit tout de suite

8. La géométrie riemannienne avait déjà, en son temps, mis à mal le cinquième postulat d'Euclide sur la congruence des angles droits

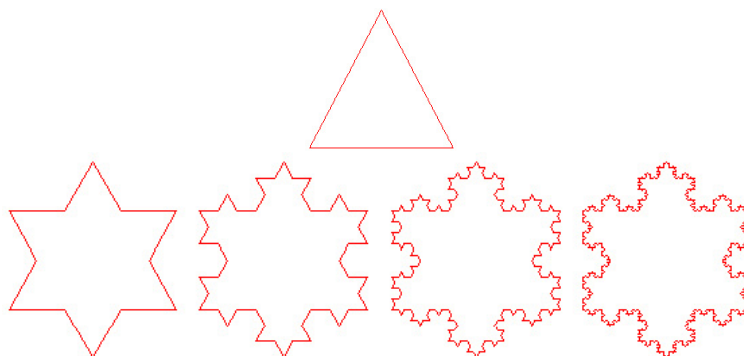


FIGURE 1.6 – Le flocon ou l'île de von Koch. Sa construction est très simple : l'initiateur est un triangle équilatéral auquel, à chaque itération, est ajouté sur chacune des faces après une réduction d'un facteur 3. Sa dimension fractale 1.26, la longueur est infinie mais son aire converge vers une valeur constante !

que lorsque se processus tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L = +\infty \quad (1.28)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A = 1.6 A_0 \quad (1.29)$$

Le flocon de von Koch est donc une courbe de longueur infinie et d'aire finie, surprenant !

Il existe de nombreuses autres fractales mathématiques toutes merveilleusement complexes et paradoxales. Parmi les plus célèbres on notera les poussières de Cantor (Figure 1.7), le tapis de Sierpinski (Figure 1.8) ou l'éponge de Menger (Figure 1.9).

Toutes ces fractales sont caractérisées par leur dimension fractale. En réalité il existe plusieurs dimensions fractales (la dimension de Hausdorff-Besicovitch, 1919, la dimension de Minkowski-Bouligand, 1930) mais c'est la dimension fractale dite d'homothétie qui est la plus répandue car la plus aisée à calculer. Si une fractale est décomposable en N parties dans un rapport d'homothétie de r du tout, alors sa dimension fractale est $D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$. Par exemple pour les poussières de Cantor, le segment initial est divisé en $r = 3$ et on obtient $N = 2$ segments et ainsi de suite, la dimension fractale est donc $D_{\text{Cantor}} = \frac{\log(2)}{\log(\frac{1}{3})} = 0.63$. Pour le flocon de von Koch, chaque face du triangle est divisée en $r = 3$ parties et on ajoute deux segments de plus ce qui fait $N = 4$ segments, donc $D_{\text{von Koch}} = \frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{3})} = 1.26$.

Ces fractales mathématiques sont des objets théoriques et les fractales naturelles que l'on rencontre dans les géosystèmes ont des propriétés moins "extrêmes". Par exemple, leur propriété d'auto-similarité ne s'étend que sur quelques ordres seulement (l'infini n'ayant pas de sens dans la réalité des objets qui nous entourent). Cette propriété est de plus statistique, c'est-à-dire que d'un ordre à l'autre elle n'est pas exactement la même.

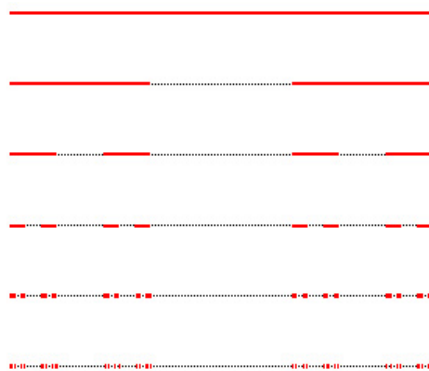


FIGURE 1.7 – Les poussières de Cantor encore appelées ensemble triadique de Cantor forment une fractale de dimension 0.63. Elles sont constituées d’une infinité de poussières pourtant toutes disjointes !

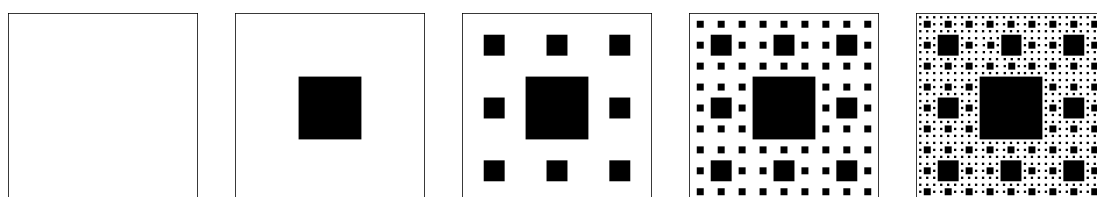


FIGURE 1.8 – Le tapis de Sierpinski est de dimension 1.89 et bien que ce soit une figure du plan (dimension topologique de 2), sa surface est nulle !

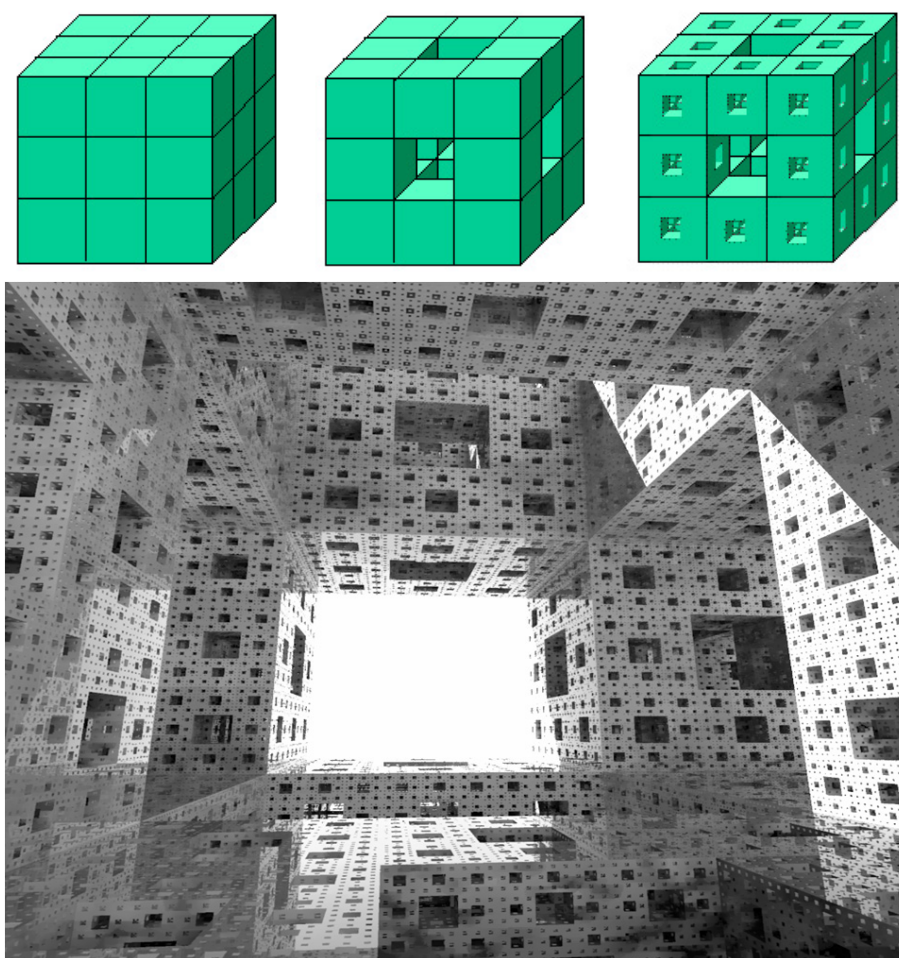


FIGURE 1.9 – L'éponge de Menger (en haut schéma de Philip Vanegmond, en bas de Paul Bourke) est une construction fascinante puisque sa surface est infinie alors que son volume est nul !

Dans le cas des fractales naturelles, le calcul de la dimension fractale se fait par le biais de méthodes qui explorent la structure de la fractale à différentes échelles, c'est le cas par exemple de la méthode du comptage des boîtes (the box counting method) développée dans le paragraphe 5.1.

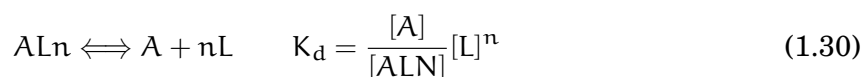
5 Les équations en géochimie

Les flux physiques ne sont pas toujours non-réactifs avec le milieu dans lequel ils évoluent : les écoulements d'une eau suffisamment chargée en dioxyde de carbone sur un plateau calcaire peuvent provoquer une érosion du fait de la réaction géochimique entre l'acide carbonique de l'eau et le calcaire de la roche.

Les processus géochimiques ont lieu entre trois phases différentes : la phase liquide mobile, la phase liquide immobile et la phase solide. La phase liquide immobile est constituée de particules (molécules d'eau et ions) fixées à la surface des grains par la force d'attraction moléculaire (on parle "d'eau liée"). Cette phase peut également comprendre l'eau piégée dans les structures en cul-de-sac. La phase mobile comprend entre autre "l'eau libre". Le milieu poreux correspond à la phase solide. Les mécanismes géochimiques comprennent (Haderler & Schulz, 2003; Nash & McLaren, 2007) :

- la complexion des ions pour former les molécules électriquement neutres ;
- les réactions acide/base, en fonction du pH de la solution ;
- les réactions d'oxydoréductions qui conditionnent l'état de valence des ions transportés ;
- les réactions de précipitation/dissolution ;
- les réactions d'adsorption/désorption.

Le complexe en solution aqueuse est un édifice polyatomique contenant un ion central entouré de ligands : molécules neutres ou anions. La stabilité du complexe est exprimée par sa constante de dissociation K_d . La forme générale d'une réaction de complexion est :



où AL_n est le complexe et L le ligand. Le complexe est stable si $K_d \ll 1$.

Une réaction acide/base est une réaction d'échange protonique entre la forme acide d'un couple acide/base et la forme base d'un autre couple. C'est une réaction rapide, l'équilibre est atteint quasi instantanément. Quelle que soit la solution, les relations suivantes sont toujours vraies :



A est l'acide et B la base, alors :



et

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \left(\frac{[\text{B}]}{[\text{A}]}\right) \quad (1.33)$$

où $\text{p}K_a = -\log(K_a)$.

Une réaction d'oxydo-réduction se traduit par un échange électronique entre oxydant et réducteur :



Dissolution et précipitation sont des réactions opposées. La précipitation est la création d'une phase solide à partir d'éléments en solution. A l'équilibre, on introduit une constante de dissolution, appelée produit de solubilité K_s :



Adsorption et désorption sont également des réactions opposées. L'adsorption est la fixation d'éléments en solution sur le minéral. Dans ces mécanismes d'adsorption plusieurs cas sont distingués :

- la cinétique d'adsorption est instantanée, réversible et linéaire. Dans ce cas F , la fraction de masse liée au solide et C , la concentration de la masse en solution sont toujours à l'équilibre. Soit $F_t = \sum_i F_i$, on note alors $K_{ij} = \frac{F_i C_j}{F_j C_i}$ le coefficient d'adsorption des éléments i et j .
- l'isotherme d'adsorption à l'équilibre est non linéaire : c'est le cas où les éléments se déplacent indépendamment de leurs voisins. On a plusieurs modèles :
 - loi du degré 2, $F = K_1 C - K_2 C^2$
 - loi de Langmuir, $F = \frac{K_1 C}{1 + K_2 C}$
 - loi de Freundlich, $F = K_1 C^{\frac{1}{n}}$
 - loi exponentielle, $C = K_1 F e^{(K_2 F)}$

CHAPITRE 2

TRAVAUX DE RECHERCHE

LES TRAVAUX DE RECHERCHE exposés ici sont organisés autour du couplage des processus décrits dans le chapitre précédent. Bien sûr il existe plusieurs façons de coupler ces processus. Dans ce chapitre je n'aborderai que les couplages qui ont été réalisés dans mes travaux.

Ces couplages font appel à des modèles conceptuels et numériques, destinés à répondre à des questions scientifiques bien précises. Aussi, les logiciels commerciaux n'étaient donc pas en mesure d'y répondre précisément. J'ai donc programmé (en C++ principalement) les modèles numériques présentés dans ce mémoire.

Pour chaque couplage, une ou plusieurs applications, tirées de mes travaux de recherche, sont présentées. Les résultats de ces applications sont référencées suivant la nomenclature suivante :

Publications avec Comité de Lecture	PCL
Brevet	B
Conférencier Invité	CI
Conférences avec Comité de Lecture	CCL
Rapports de Recherche	RR
Développement de Logiciels	DL
Vulgarisation Scientifique	VS

1 Couplage transport-géochimie

1.1 Principes

La méthode de marche au hasard

Il existe globalement deux types d'approche de résolution numérique de l'équation de transport :

- les méthodes aux différences finies et aux éléments finis (Goblet, 1981). Elles ont l'inconvénient d'être peu précises pour les grands nombres de Péclet (cas où la convection domine sur la dispersion). En effet, leurs résultats sont biaisés par la dispersion numérique lorsque la convection devient prédominante. Cette dispersion numérique est liée à la double nature de l'équation de transport : la dispersion donne une équation hyperbolique et la convection donne une équation parabolique. Ce problème ne peut être résolu que par un affinement poussé du maillage et donc avec de lourds temps de calculs.
- les méthodes de particules ou de marche au hasard ("particle tracking" ou "random walk") sont issues de la physique statistique. Le polluant est représenté par des particules qui subissent un mouvement de convection auquel s'ajoutent des fluctuations aléatoires rendant compte de la dispersion des vitesses dans le milieu poreux et de la diffusion moléculaire (Ackerer & Kinzelbach, 1985; Kinzelbach, 1986; Delay et al., 1993, 1994). Les propriétés statistiques du déplacement global du nuage de polluant sont connues et régies par les propriétés du milieu et les paramètres d'écoulement. Ces méthodes ne sont pas sujettes à la dispersion numérique dont souffrent les méthodes des différences finies ou aux éléments finis, mais elles génèrent des fluctuations de concentrations dues aux déplacements aléatoires des particules, fluctuations qui peuvent être atténuées en augmentant le nombre de particules. Ces oscillations sont générées dans les zones de basses concentrations (faible densité de particules). La méthode de marche au hasard demande, en général, un temps de calcul plus long qu'avec les autres méthodes.

Pour ce qui est du couplage de l'équation de transport (1.14) avec les équations géochimiques, je n'ai utilisé que la méthode des particules dans mes travaux de recherche. C'est donc cette dernière que je vais développer.

La méthode de marche au hasard est une méthode issue de la physique statistique utilisée pour les phénomènes de diffusion et de dispersion. La description déterministe du transfert d'un polluant en milieu poreux est rendue impossible du fait de la complexité de la géométrie du milieu. Tant que le mouvement d'un polluant reste imprévisible, la meilleure approche sera de considérer tous les mouvements possibles ainsi que leur probabilité d'être réalisés tout en respectant les propriétés statistiques du milieu poreux.

La méthode de marche au hasard traite l'équation de transport (1.14) de façon hyperbolique. Elle consiste à remplacer le nuage de polluant par un nombre de particules discrètes

qui subissent un déplacement par convection, avec une vitesse moyenne, auquel s'ajoutent des fluctuations aléatoires (dispersion et diffusion) autour de ce mouvement moyen.

La résolution de l'équation de transport (1.14) avec la méthode de marche au hasard demande un temps de calcul plus long qu'avec les autres méthodes. La précision des calculs converge en \sqrt{N} , N étant le nombre de particules injectées (Ackerer et al., 1990). Il est illusoire de rechercher une grande précision du point de vue numérique.

Les notions qui suivent sont décrites dans Wustmann (1993), Ackerer (1988), Kinzelbach (1986) et Kinzelbach (1988).

On considère $X(t)$, une variable aléatoire qui représente la position de la particule au temps t .

Soit t_i , $i = 0, \dots, N$ l'ensemble des dates successives, chacune d'entre elles correspondant à un déplacement $S(t_i)$ de la particule, on parle de saut.

Si les intervalles de temps sont égaux, alors $\Delta t = (t_{i-1} - t_i)$. On peut déterminer la trajectoire complète de la particule par :

$$X(t_N) = X(t_0) + \sum_{i=1}^N S(t_i)$$

La probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $(X - \frac{dX}{2}, X + \frac{dX}{2})$ s'écrit :

$$P(X - \frac{dX}{2} \leq X(t) \leq X + \frac{dX}{2})$$

La densité de probabilité s'écrit alors :

$$W(X, t)dX = P(X - \frac{dX}{2} \leq X(t) \leq X + \frac{dX}{2})$$

Les déplacements de la particule sont supposés indépendants les uns des autres, on parle de processus markovien :

$$W(X, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(X - At)^2}{4Dt}\right)$$

L'écriture explicite dans un espace-temps discrétisé est alors :

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \left(u + \frac{\partial D}{\partial t}\right)\Delta t + Z\sqrt{6D\Delta t}$$

Pour le passage en tridimensionnel, l'équation générale s'écrit :

$$\frac{\partial W(X, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_i} (A_i^* W(X, t)) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_i} (D_{i,j} \frac{\partial W(X, t)}{\partial X_j})$$

où

$$A_i^* = u_i^* = u_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial D_{i,j}}{\partial X_j}$$

La solution explicite à cette équation est :

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) = & X(t) + U_x^* \Delta t \\ & + (Z_1 \sqrt{6D_t} \frac{U_x}{U} - Z_2 \sqrt{6D_t} \frac{U_y}{U_{x,y}} - Z_3 \sqrt{6D_t} \frac{U_z}{U} \frac{U_x}{U_{x,y}}) \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$Y(t + \Delta t) = Y(t) + U_y^* \Delta t \quad (2.2)$$

$$+ (Z_1 \sqrt{6D_t} \frac{U_y}{U} + Z_2 \sqrt{6D_t} \frac{U_x}{U_{x,y}} - Z_3 \sqrt{6D_t} \frac{U_z}{U} \frac{U_y}{U_{x,y}}) \sqrt{\Delta t} \quad (2.3)$$

$$Z(t + \Delta t) = Z(t) + U_z^* \Delta t + (Z_1 \sqrt{6D_t} \frac{U_z}{U} + Z_3 \sqrt{6D_t} \frac{U_{x,y}}{U}) \sqrt{\Delta t}$$

avec

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \\ u_{x,y} &= \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \\ u_x^* &= u_x + \frac{\partial D_{x,x}}{\partial X} + \frac{\partial D_{x,y}}{\partial Y} + \frac{\partial D_{x,z}}{\partial Z} \\ u_y^* &= u_y + \frac{\partial D_{y,x}}{\partial X} + \frac{\partial D_{y,y}}{\partial Y} + \frac{\partial D_{y,z}}{\partial Z} \\ u_z^* &= u_z + \frac{\partial D_{z,x}}{\partial X} + \frac{\partial D_{z,y}}{\partial Y} + \frac{\partial D_{z,z}}{\partial Z} \end{aligned}$$

où Z_1 , Z_2 et Z_3 sont des nombres aléatoires de distribution uniforme entre -1 et 1 et $D_{i,j}$ est le tenseur de dispersivité tel que nous l'avons défini plus haut.

Couplage de la géochimie

L'équation de transport (1.14) décrit le transport d'un élément conservatif (il ne se dégrade pas) et non réactif (il n'a pas d'échanges avec le solide), ce qui est très rare en réalité. On associe donc au transport soit des phénomènes d'interactions simples (coefficient de retard, isothermes de Langmuir et de Freundlich), ou plus complexes comme la spéciation

(Coudrain-Ribstein, 1988; Fabriol et al., 1993; van der Lee, 1997).

La réaction d'un soluté avec le milieu regroupe un ensemble de processus physico-chimiques qui retiennent le soluté sur les grains solides du milieu poreux. Parmi ces réactions on peut citer les échanges cationiques (les ions positivement chargés qui viennent en contact avec des surfaces négatives, des argiles par exemple) et les réactions chimiques (précipitation, dissolution, oxydoréduction).

Dans le cas le plus simple et le plus fréquent, ces réactions sont considérées comme instantanées et réversibles. Cela signifie que les cinétiques de réactions sont très rapides et de même ordre de grandeur entre soluté et solide. Il apparaît dans ce cas un retard du soluté par rapport à un traceur non réactif. Ce retard s'exprime dans l'équation de transport par un facteur justement appelé coefficient de retard. L'équation (1.14) devient alors :

$$\operatorname{div} \left(\overline{D} \operatorname{grad} C - C \vec{U} \right) = R \frac{\partial C}{\partial t}$$

où C est la concentration [ML^{-3}], t le temps [T], \vec{U} la vitesse moyenne de pore [LT^{-1}], \overline{D} le tenseur de dispersion [L^2T^{-1}] et R le coefficient de retard ($R \geq 1$).

On voit que le facteur de retard diminue la vitesse moyenne U et la dispersion D du soluté (en les divisant). Physiquement, le facteur de retard s'exprime en fonction d'un coefficient de partition K_d qui détermine le partage des quantités entre phase liquide (le soluté) et phase solide (les grains du milieu poreux) :

$$\begin{aligned} R &= 1 + \frac{1 - \omega}{\omega} \rho K_d \\ \overline{C} &= K_d C \end{aligned} \quad (2.4)$$

où ρ est la masse volumique du solide [ML^{-3}], C la concentration de la phase liquide [ML^{-3}], ω la porosité et \overline{C} la concentration adsorbée sur le solide [ML^{-3}].

Le coefficient K_d est constant, on a donc une relation linéaire entre les particules à adsorber et les particules mobiles, on parle d'isotherme linéaire (de Marsily, 1986). Il existe des cas où l'adsorption n'est pas linéaire, ce sont les isothermes de Freundlich ou de Langmuir.

En appliquant l'équation (2.4), on peut introduire la notion de réactivité aux particules. Il est aisé de définir l'état hydrodynamique d'une particule en lui attribuant un nombre : 1 si la particule est en mouvement, 0 si elle est immobile. Initialement, toutes les particules sont mobiles. Puis, on applique l'équation (2.4), à chaque pas de temps, afin de répartir les particules en mouvement et immobiles, suivant la loi du coefficient de partition :

$$\overline{N} = \frac{1 - \omega}{\omega} \rho K_d N \quad (2.5)$$

où \overline{N} est le nombre de particules par m^3 qui doit s'adsorber sur les grains solides du milieu poreux et N est le nombre de particules par m^3 représentant le soluté.

On voit que l'introduction de particules réactives nécessite une discrétisation spatiale (mailles), afin de définir le nombre de particules présentes par m^3 .

Numériquement, la réactivité se fait de la façon suivante : on détermine, *a priori*, le nombre de particules à sorber ou à désorber dans la maille, en fonction du nombre de particules mobiles présentes dans cette maille (cela revient à appliquer l'équation 2.5).

Dans chaque maille, on comptabilise le nombre de particules mobiles et immobiles (immobilisées au pas de temps précédent). Ces particules sont toutes remises à l'état mobile (1), puis un tirage probabiliste répartit les états des particules afin que l'équation (2.5) soit respectée (*i.e.* \bar{N} particules doivent avoir un état immobile : 0).

1.2 Application au stockage des déchets nucléaires

Quel est le rôle hydrodynamique des colloïdes dans le transport des déchets nucléaires ?

Objectifs et méthodes :

On admet généralement que la propagation d'un élément conservatif et non réactif (dit traceur parfait), qui ne réagit donc pas physico-chimiquement avec le milieu dans lequel il circule (eau + matrice poreuse), suit l'équation classique de transport (1.14).

Dans cette équation, la dispersion est caractérisée par des coefficients de dispersion, coefficients qui sont mesurés en laboratoire (traçage en colonne) ou sur le terrain (traçage en aquifère). Or, de nombreuses expériences de traçages ainsi que des études théoriques (Fried & Combarous, 1971; Dieulin, 1980; Matheron & de Marsily, 1980; Simmons, 1982; Freyberg, 1986; Gelhar, 1993) montrent que :

- suivant l'échelle du traçage, les coefficients de dispersion sont différents ;
- à une échelle donnée, les coefficients de dispersion augmentent avec la distance au point d'injection.

Ces constatations sont des inconvénients majeurs pour la prédiction de la propagation des polluants ou encore des radionucléides.

Forts de ces informations expérimentales, de nombreux auteurs (parmi lesquels, ceux cités plus haut) en sont venus à la conclusion que le transport d'un élément ne pouvait être représenté par une loi diffusive exprimée par l'équation de transport, en particulier pour des temps assez courts et lorsque la convection est prédominante devant la diffusion.

Dans l'équation de transport (1.14), la convection, la diffusion et la dispersion sont indépendantes l'une de l'autre du point de vue physique, ce qui n'est pas le cas en réalité : la vitesse moyenne d'une entité particulière dépend du trajet qu'elle va emprunter.

Cet aspect du transport est primordial car il constitue la base même de l'étude de la migration des polluants en milieu géologique, et on ne peut en effet pas envisager d'étudier, par exemple, des processus géochimiques sans avoir en amont une bonne description des

processus de transport.

Dans le cadre du projet européen *CARESS*, qui visait à étudier le rôle des colloïdes dans le transport des radionucléides en provenance des stockages de déchets nucléaires, il m'a été confié la tâche de l'étude de la composante hydrodynamique du transport : l'étude de la migration des colloïdes.

Afin d'atteindre ces objectifs et à la lumière des problèmes précédemment énoncés sur le modèle de transport (1.14), j'ai choisi de développer un modèle ([DL 6]) de transport de masse :

- qui décrive de façon mécaniste et à une échelle microscopique les processus fondamentaux du transport que sont la convection, la dispersion et la diffusion moléculaire ;
- qui soit représentatif de la complexité des milieux géologiques : déplacement tridimensionnel, lois probabilistes pour rendre compte de la nature aléatoire des milieux poreux par exemple ;
- qui soit équivalent au modèle hydrodispersif classique (au transport fickien) sans souffrir de son inconvénient majeur : la non adaptabilité au changement d'échelle ;
- qui puisse s'adapter à la fois au transport en milieu poreux et aux milieux fracturés ;
- qui puisse représenter à la fois le transport de solutés et de particules plus grosses comme les colloïdes, par exemple ;
- qui soit facilement adaptable à l'ajout de nouveaux phénomènes comme la rétention chimique, les variations de porosité ou les effets chromatographiques (couplage).

Le modèle développé est basé sur une approche mettant en jeu le déplacement aléatoire de particules (équation 2.6).

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n^j = \sum_{i=1}^n (u^j \cos \theta_i dt + \delta \xi^X) \\ Y_n^j = \sum_{i=1}^n (u^j \sin \theta_i \cos \phi_i dt + \delta \xi^Y) \\ Z_n^j = \sum_{i=1}^n (u^j \sin \theta_i \sin \phi_i dt + \delta \xi^Z) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec X_n^j , Y_n^j , Z_n^j , les coordonnées d'une particule j à l'itération n , u^j la vitesse convective de la particule, θ_i , ϕ_i , $\delta \xi^X$, $\delta \xi^Y$ et $\delta \xi^Z$ des variables aléatoires. Ces particules sont animées par ces variables aléatoires et le transport global est caractérisé par un paramètre de dispersion σ (Figure 2.1).

On constate que le modèle (2.6), s'il est basé sur les mêmes principes de marche aléatoire que l'équation (2.1), ne présente pas le transport de masse en décomposant convection, diffusion et dispersion comme pour l'approche classique. Son approche originale permet de se soustraire des inconvénients majeurs de l'équation de transport 1.14.

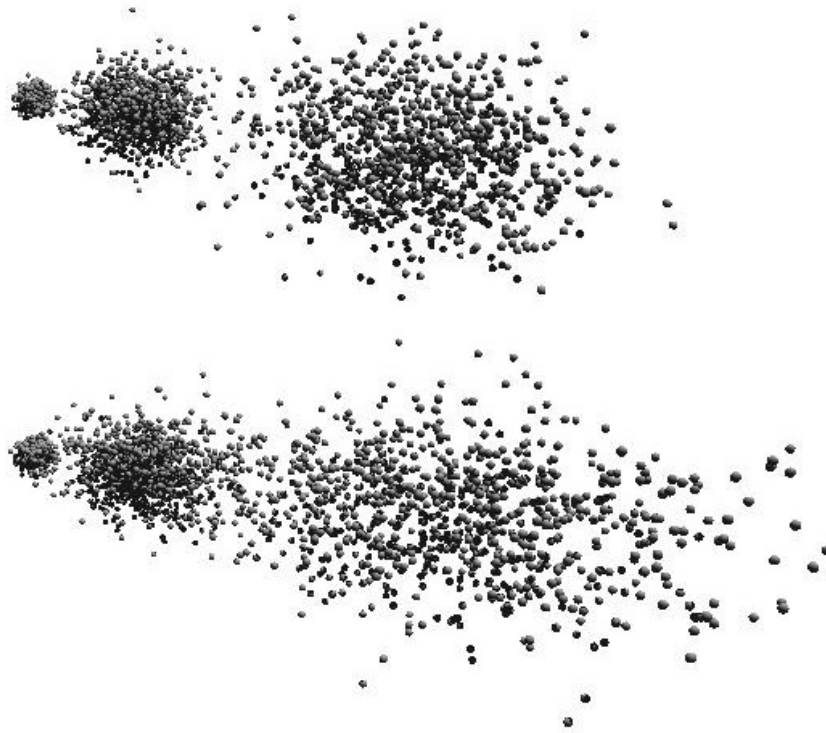


FIGURE 2.1 – Vue tridimensionnelle de l'influence du paramètre σ sur la structure du nuage de particules pour trois temps différents (en haut $\sigma = 0.1$ et en bas $\sigma = 0.2$).

Résultats :

Concernant le milieu poreux ([PCL 12], [PCL 14], [CCL 4], [CCL 6], [CCL 7], [RR 2], [RR 3], [RR 4], [RR 5], [RR 6], [RR 7], [DL 6]), le déplacement d'une particule suit un schéma stochastique Markovien tridimensionnel comme le proposent de Jong (1958) et Saffman (1959).

Dans notre approche, la vitesse de chaque particule (échelle microscopique) est affectée aléatoirement de sorte que la progression du nuage de toutes les particules soit représentative d'un écoulement en milieu poreux (échelle macroscopique).

En attribuant une loi de distribution probabiliste aux vitesses des particules, on peut ainsi lier la vitesse convective à la dispersion par un paramètre (σ).

Sur le plan numérique, le modèle stochastique possède les mêmes avantages que les autres méthodes de marche aléatoire (absence de dispersion numérique, écriture explicite, souplesse de programmation).

Des calculs théoriques ont permis de déterminer des relations entre le paramètre de disper-

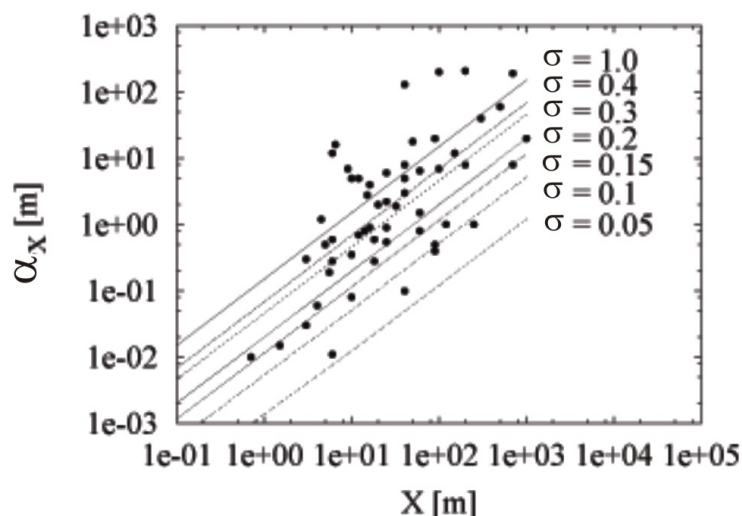


FIGURE 2.2 – Abaques donnant la valeur de σ à utiliser en fonction de l'échelle du problème à traiter. Les données expérimentales (•) sont tirées de Gelhar (1986).

sion du modèle stochastique (σ) et les coefficients de dispersion longitudinal et transversal, classiquement utilisées dans l'équation de transport (1.14). Ces résultats théoriques nous ont montré que :

- le choix du paramètre de dispersion σ permettait de régler le type de transport hydrodynamique :
- pour de faibles valeurs de σ (≤ 0.1), la dispersion du modèle est quasi diffusive, le transport est fickien ;
- pour des valeurs plus forte de σ , la dispersion devient hyper-diffusive caractérisant une hydrodynamique non fickienne.

En restreignant le modèle stochastique au transport fickien, nous avons pu le comparer à l'équation de transport (1.14) par le biais de solutions analytiques monodimensionnelles, mais aussi tridimensionnelles.

Une étude comportementale du modèle a également pu mettre en avant l'intégration du modèle au changement d'échelle : augmentation de la dispersion avec la distance parcourue. Des abaques ont été réalisés, mettant en relation le paramètre de dispersion σ et l'augmentation de la dispersivité expérimentale en fonction de la distance.

Ces abaques permettent de déterminer *a priori* la valeur du paramètre σ à utiliser pour que le modèle intègre le changement d'échelle (Figure 2.2).

Dans le cadre du transport colloïdal, un effet chromatographique peut affecter les processus hydrodispersifs, il faut donc en tenir compte. Nous avons pour cela introduit une loi d'exclusion d'une particule, qui lie la taille et la vitesse de la particule à la taille moyenne

de pore du milieu. Cette loi (équation 2.7) conduit aux mêmes résultats qu'en utilisant un coefficient de correction dans le modèle hydrodispersif classique, mais sa description phénoménologique permet de l'utiliser dans n'importe quel type de transport : fickien et non fickien.

$$R = \frac{1}{\frac{r}{a} + 1} \quad (2.7)$$

avec r le rayon de la particule et a la demi-ouverture de pore.

La réactivité a donc été introduite dans le modèle sous formes d'une adsorption avec isotherme linéaire (équation 2.5) et d'une cinétique irréversible :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}}{dt} &= K N \\ K &= K_1 \exp(-K_3 \bar{N}) + K_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

où \bar{N} est le nombre de particules fixes normalisées par le rapport au nombre total de particules. N est le nombre de particules mobiles normalisées par le rapport au nombre total de particules. K_1 , K_2 et K_3 sont des constantes de calages normalisées qui expriment une probabilité K de fixation. En effet, tout comme il est décrit dans Kinzelbach (1988), à chaque particule est attribué un état : immobile ou mobile. Un nombre aléatoire est tiré uniformément entre 0 et 1, si ce nombre est inférieur à K , la particule devient définitivement immobile. Dans le cas contraire, la particule est mobile, son état pouvant bien évidemment changer au pas de temps suivant.

Concernant le milieu fracturé ([PCL 13], [CCL 15], [RR 2], [RR 3], [RR 4], [RR 5], [RR 6], [RR 7], [DL 6]), la différence fondamentale avec le modèle en milieu poreux vient de la distribution des vitesses des particules. En effet, dans le modèle de transport (2.6), la distribution des vitesses des particules représente la nature aléatoire de l'hydrodynamique du milieu. Dans le cas d'une fracture, le champ des vitesses peut être représenté de façon déterministe par un profil parabolique dit de Poiseuille :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n^j = \sum_{i=1}^n (u_X^j(Z_n^j) dt + \delta \xi^X) \\ Y_n^j = \sum_{i=1}^n (u_Y^j dt + \delta \xi^Y) \\ Z_n^j = \sum_{i=1}^n (\delta \xi^Z) \end{array} \right.$$

Le transport de masse dans la fracture nécessite deux étapes préliminaires : la création numérique de la fracture et le calcul de l'hydrodynamique qui découle de sa structure.

La fracture est générée par le biais de deux surfaces fractales plus ou moins éloignées l'une de l'autre (Figure 2.3). La dimension fractale de ces surfaces est liée la rugosité de la

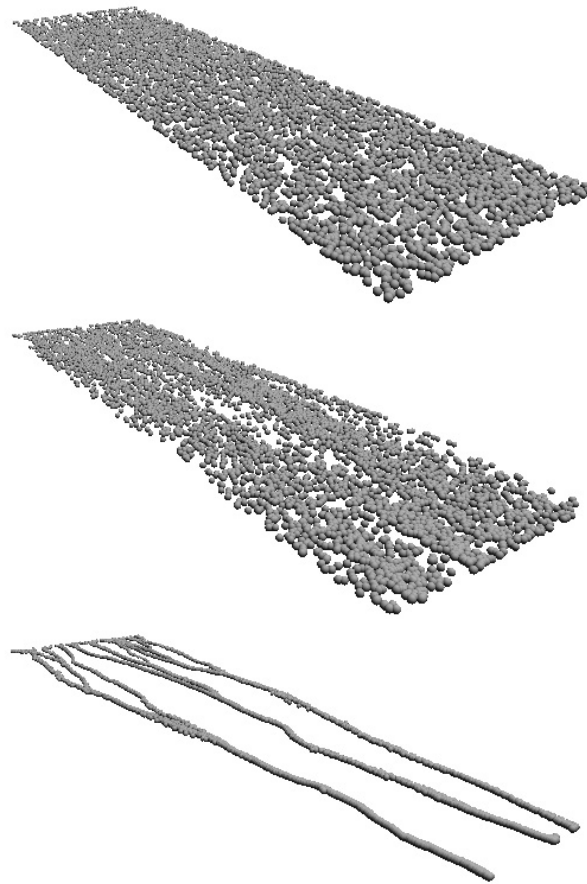


FIGURE 2.3 – Vue tridimensionnelle des chemins empruntés par les particules pour les différentes ouvertures moyennes des fractures : fracture lisse (en haut), 5×10^{-4} m (au milieu), 2×10^{-4} m (en bas)

fracture et permet de traiter les cas de fractures synthétiques (lisses) de laboratoire et de fractures représentatives de la réalité (rugosité, zones de contact).

L'analyse comportementale du modèle permet de retirer un certain nombre de résultats sur le transport en fracture :

- en augmentant la rugosité de la fracture (pour une différence de charge et une ouverture constantes), on génère des chemins préférentiels (les chenaux). Des particules arrivent donc plus vite à la sortie de la fracture et la dispersion augmente ;
- en diminuant l'ouverture (pour une différence de charge et une rugosité constantes), des zones de contact créent des chenaux qui peuvent mener à des doubles pics de restitution des particules ;
- le choix du modèle bidimensionnel ou tridimensionnel est important suivant le système étudié (taille des particules, dimensions de la fracture, hydrodynamique) ;

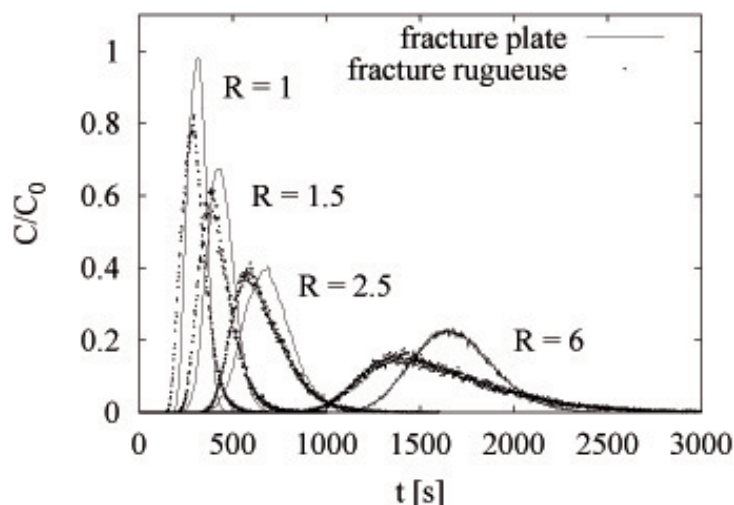


FIGURE 2.4 – Courbes de restitution de particules transportées dans une fracture lisse et rugueuse, avec adsorption par une isotherme linéaire.

- le transport des particules multi-tailles est différent du transport mono-taille. En introduisant des lois de distribution des rayons des particules, on montre que les courbes de restitution sont sensiblement différentes et ce d'autant plus que l'hétérogénéité des rayons est importante ;
- les grosses particules, du fait de leur encombrement, vont échantillonner en moyenne des vitesses plus rapides, la dispersion cinématique sera donc plus importante ;
- les particules les plus grosses vont plus vite, elles arrivent donc plus tôt à la sortie de la fracture ;
- plus les particules sont grosses et plus leur dispersion augmente, alors que la loi de Stokes-Einstein montre que la diffusion moléculaire d'une particule est inversement proportionnelle à son rayon : les grosses particules diffusent donc moins que les petites ;
- l'augmentation de l'hétérogénéité des tailles (augmentation de l'écart-type des tailles) augmente la dispersion.

Tout comme pour le modèle de dispersion en milieu poreux, nous avons étendu le transport des particules en fracture au transport réactif (Figure 2.4). En utilisant une loi d'adsorption de type isotherme linéaire, nous avons pu confirmer des résultats relatifs au transport de particules réactives dans une fracture lisse et rugueuse :

- dans une fracture lisse ou rugueuse, la dispersion des particules réactives ne suit plus la dispersion de Taylor-Aris, mais y est supérieure ;
- cette augmentation de la dispersion est moins importante dans une fracture rugueuse que dans une fracture lisse.

1.3 Application à la dissolution des verres nucléaires

Quelle est la vitesse de corrosion d'un verre nucléaire ?

Objectifs et méthodes :

Les verres nucléaires sont utilisés pour stocker les déchets nucléaires. Si ces verres, durant leur stockage, sont en contact avec l'eau souterraine, ils peuvent se dissoudre et donc libérer leur contenu toxique. Cette étude vise à étudier ces processus de dissolution par une approche numérique.

Le principe du modèle est de considérer le verre comme un milieu poreux, à l'échelle de plusieurs micromètres. Le verre n'est donc pas décrit ici comme un système atomique, mais comme un matériau de composition homogène dans l'espace.

Le modèle utilisé est alors l'équation de transport (1.14) mais réduite à sa composante diffusive qui de façon monodimensionnelle s'écrit :

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.9)$$

La solution de cette équation peut s'écrire sous forme analytique :

$$C(x, t) = C_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (2.10)$$

et sous forme elliptique :

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \frac{\partial D}{\partial t} \Delta t + Z\sqrt{6D\Delta t}$$

les équation géochimiques sont prises en compte par le biais d'une loi isotherme de Langmuir (équation 2.11).

La composition du verre est la suivante : $\text{Na}_2(\text{SiO}_2)_5\text{Fe}_2\text{O}_3$. La formule stoechiométrique indique qu'1 mole de ce verre est composé de 2 moles de sodium, de 2 moles de fer, de 5 moles de silice et de 14 moles d'oxygène. La masse molaire de ce verre est donc $m_g = 2 \times 23 + 5 \times 28 + 14 \times 16 + 2 \times 56 = 522 \text{ g/mole}$. La proportion des éléments de ce verre est la suivante : 9% de sodium, 27% de silice, 43% d'oxygène et 21% de fer.

Si on considère un volume d'étude de longueur L , de largeur l et de hauteur h , le volume de verre sera $V_g = (1 - \omega) Llh \text{ m}^3$, ω étant la porosité. De même, le volume des vides, qui peuvent potentiellement se remplir d'eau, sera $V_w = \omega Llh \text{ m}^3$. La masse totale de verre dans ce volume sera donc $\rho_g V_g \text{ kg}$ et la masse d'eau sera $\rho_w V_w \text{ kg}$, où ρ_g et ρ_w sont respectivement la masse volumique de l'eau (1000 kg/m^3) et du verre (2500 kg/m^3). Ces informations nous donnent la masse des éléments de ce verre, soit $\frac{2m_{\text{Na}}}{m_g} \rho_g V_g \text{ kg}$ de sodium,

$\frac{5m_{Si}}{m_g} \rho_g V_g$ kg de silice, $\frac{14m_O}{m_g} \rho_g V_g$ kg d'oxygène et $\frac{2m_{Fe}}{m_g} \rho_g V_g$ kg de fer, où m_{Na} , m_{Si} , m_O et m_{Fe} sont respectivement les masses molaires du sodium (23 g/mole), de la silice (28 g/mole), de l'oxygène (16 g/mole) et du fer (56 g/mole).

Afin de répartir cette masse sur notre système d'étude, il faut discrétiser notre système. Dans un premier temps nous avons discrétisé le système en N_n parties, de façon mono-dimensionnelle, selon l'axe X . Nous avons donc N_n parties de volume égal $lhd_x m^3$, où $d_x = \frac{L}{N_n}$. La répartition de ces masses d'éléments est nécessaire afin de contrôler les échanges entre les particules d'eau diffusantes et ces quantités présentes.

Le modèle de dissolution du verre est basé sur un échange instantané et irréversible entre les particules d'eau diffusantes et la masse du verre présente. Les particules diffusantes possèdent des caractéristiques : taille, coefficient de diffusion moléculaire, etc., et un terme concentration. Ce terme est simplement une case numérique qui indique la quantité fixée sur cette particule.

L'échange entre l'eau et le verre se fait par le biais d'une isotherme de Langmuir, qui dans un premier temps ne tient compte que de la dissolution du sodium (la dissolution des autres éléments étant parfaitement similaire) :

$$C_w^{Na} = \frac{kC^w}{1 + \frac{k}{C_g^{Na}} C^w} \quad (2.11)$$

où C_w^{Na} (kg/mole) est la concentration du sodium à dissoudre, C^w (kg/mole) la concentration de l'eau présente dans le verre, C_g^{Na} (kg/mole) est la concentration du sodium disponible dans le verre pouvant être dissoute et k un coefficient de partage (adimensionnel). Cette isotherme de Langmuir exprime que quelle que soit la valeur de k , la quantité de sodium à dissoudre ne peut excéder la quantité de sodium déjà présente dans le verre.

La quantité de sodium qui passe en solution ou qui disparaît de la composition initiale du verre, permet de mettre à jour la valeur de la porosité via une règle empirique :

$$w(t + dt) = w(t) \left(1 + \frac{C_w^{Na} V_{Na}}{m_{Na}} \right)$$

V_{Na} étant le volume molaire de sodium ($15.6 \times 10^{-6} m^3/mole$). Cette formule exprime que le fait de faire passer du sodium en solution sous-entend que le volume qu'il occupe est disponible. La porosité augmente donc du fait de ce volume disponible.

Le coefficient de diffusion moléculaire exprime la "liberté" qu'a une particule à diffuser. Une particule dans l'eau libre possède un fort coefficient de diffusion (de l'ordre de $1 \times 10^{-9} m^2/s$, par exemple, pour le sodium), alors que dans un milieu poreux de faible porosité (donc de faible espace pour diffuser), ce coefficient est fortement diminué (il peut être inférieur à $1 \times 10^{-19} m^2/s$ pour ce même atome de sodium dans un verre nucléaire).

Dans notre modèle, la porosité varie avec le temps, on peut donc imaginer faire varier les coefficients de diffusion en fonction de cette porosité. Quelle loi utiliser ? En hydrogéologie il existe une loi empirique liant ces deux paramètres, c'est la loi d'Archie :

$$D_{\text{app}} = \omega^p D_m$$

La diffusion apparente (D_{app} (m^2/s)) est donc proportionnelle à la diffusion moléculaire dans l'eau libre (D_m (m^2/s)). Le facteur de proportionnalité est donné en puissance de la porosité. En général, le coefficient p est compris entre 1.2 et 2.8. Une valeur de p correspond donc à un milieu poreux donné, aussi cette loi ne semble pas correspondre tout à fait à notre problème, puisque notre milieu poreux est évolutif en terme de porosité.

Nous avons donc mis au point une autre loi empirique de la forme :

$$D_{\text{app}} = \frac{p\omega}{1 + \frac{p-D_m}{D_m}\omega} \quad (2.12)$$

Cette loi exprime l'idée que la diffusion apparente est nulle lorsque la porosité est nulle et qu'elle est égale à la diffusion moléculaire dans l'eau libre lorsque la porosité vaut 1. Entre ces deux valeurs extrêmes de la porosité, la diffusion apparente augmente : $p = \left. \frac{dD_{\text{app}}}{d\omega} \right|_{\omega=0}$. Cette loi pose de gros problèmes numériques : la forte variation de la diffusion avec la porosité perturbe la loi de diffusion fickienne.

Résultats :

Les simulations ont permis de calculer la vitesse d'un front de corrosion des verres nucléaires de l'ordre de 10^{-13} m/s. Cette vitesse a été également mesurée lors d'expériences et elle est similaire à celle calculée par le modèle ([RR 1], [DL 4]).

Afin de valider le modèle de transfert de particules, j'ai proposé un cas simple de diffusion monodimensionnelle sur une distance de plusieurs micromètres. La Figure 2.5 présente ces résultats, le modèle numérique donne l'évolution des concentrations des particules d'eau dans le verre pour quatre temps. Ce modèle numérique est comparé à l'équation analytique (2.10), qui est la solution exacte à ce problème.

Dans une seconde étape, le modèle est appliqué à la dissolution du verre en ne prenant en compte que le sodium. Les résultats de la simulation sont présentés sur les Figures 2.6 et 2.7. On peut y voir l'évolution des concentrations du sodium dans le verre pour différents temps ainsi que les profils correspondants de la porosité du verre.

On peut déduire de la Figure 2.6 une information intéressante qu'est la vitesse du front de corrosion du verre. En effet, si l'on pose l'hypothèse que ce front de corrosion est déterminé par une concentration nulle en sodium, on a alors l'évolution de ce front en fonction du temps (Figure 2.8). On voit que l'avancée du front de corrosion est une fonction puissance du temps ce qui nous permet, par dérivation, de donner les vitesses ($V_c(t)$) de corrosion du verre aux différents pas de temps : $V_c(1 \text{ semaine}) = 5 \times 10^{-13}$ m/s, $V_c(1 \text{ mois}) = 3 \times 10^{-13}$

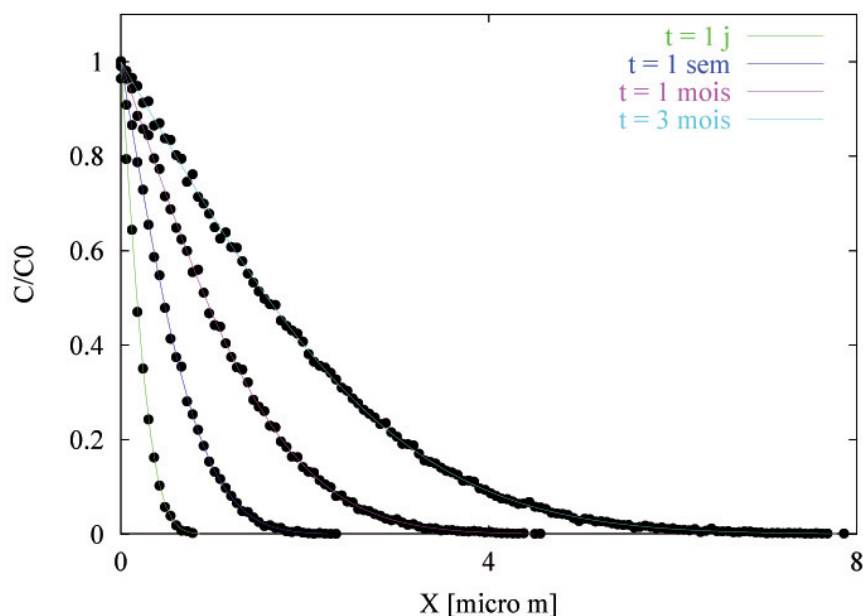


FIGURE 2.5 – Diffusion de particules inertes dans un verre. Le coefficient de diffusion moléculaire vaut ici 3.85×10^{-19} m²/s. On compare ici le modèle numérique • et le modèle analytique : l'équation (2.10).

m/s et $V_c(3 \text{ mois}) = 2 \times 10^{-13}$ m/s. Ces vitesses sont du même ordre de grandeur que celles données dans Aertsens & Ghaleb (2001).

Sur la Figure 2.7, on peut suivre les profils de porosité à différents temps. La valeur limite ($\omega \simeq 18\%$) correspond à la proportion de sodium dans la composition du verre initial, pour notre exemple choisi. On constate également que pour $X = 0$, la porosité vaut 1, ce qui est normal puisqu'en $X = 0$, c'est l'interface verre-eau. On a donc un très fort gradient de porosité, en "marche d'escalier". Ceci est à l'origine du problème de notre relation entre porosité et coefficient de diffusion. En effet, si on applique la relation (2.12) on impose également un très fort gradient des coefficients de diffusion dans les premiers nanomètres du verre.

2 Couplage écoulement-géochimie

2.1 Principes

La méthode des différences finies

La méthode numérique dite des différences finies permet de trouver la solution d'une équation aux dérivées partielles, ce qui est le cas de l'équation de diffusivité (1.3). Une équation

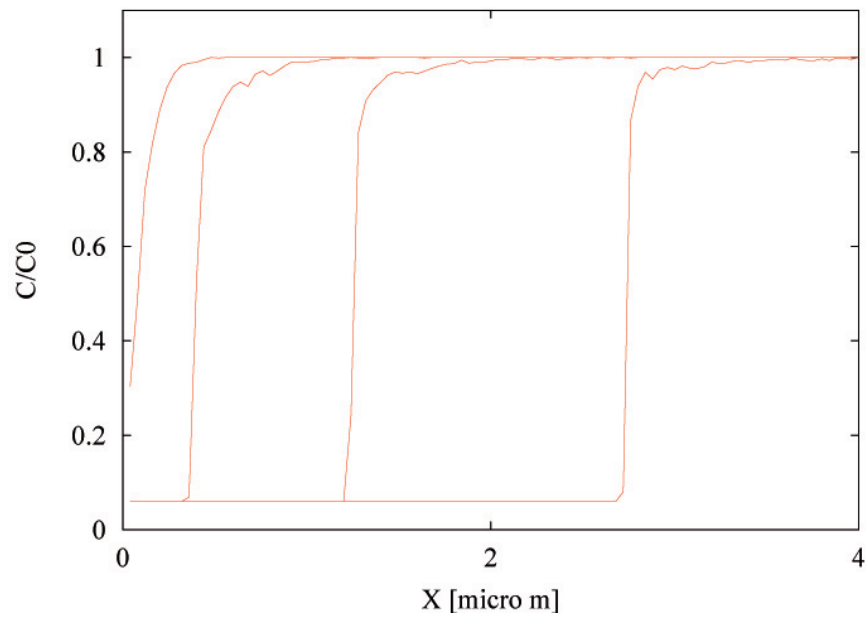


FIGURE 2.6 – Profils des concentrations de sodium dans le verre pour différents temps (de gauche à droite) : 1 jour, 1 semaine, 1 mois et 3 mois.

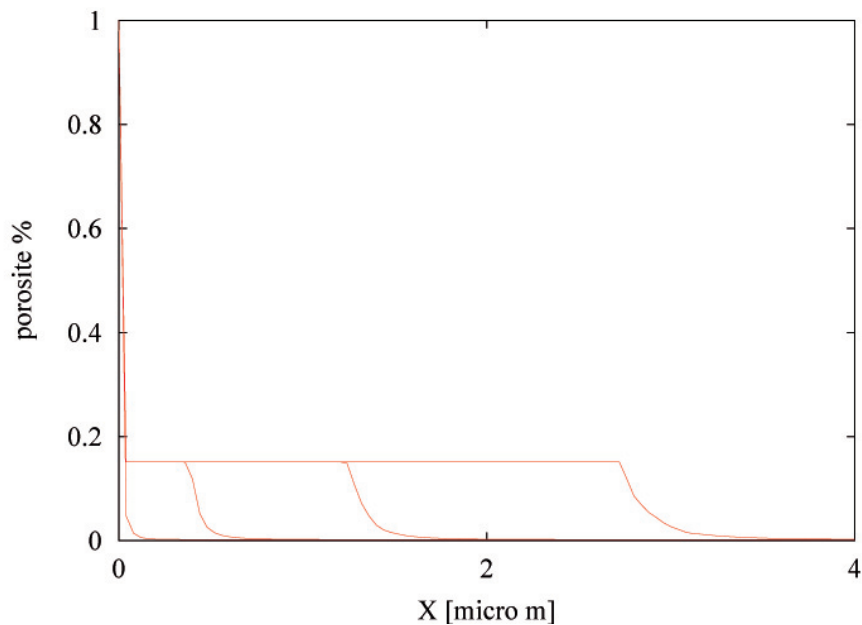


FIGURE 2.7 – Profils de la porosité dans le verre pour différents temps (de gauche à droite) : 1 jour, 1 semaine, 1 mois et 3 mois.

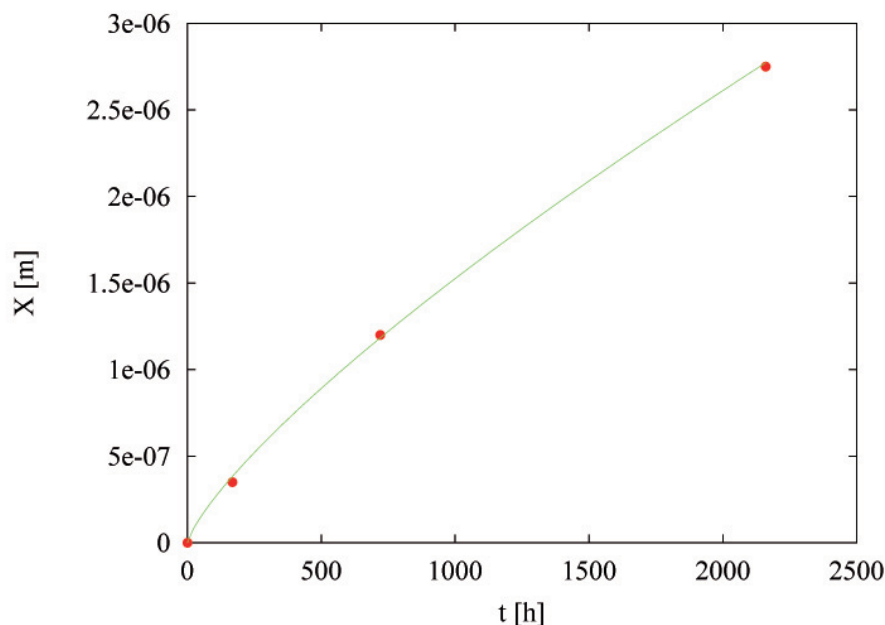


FIGURE 2.8 – Évolution du profil de corrosion du verre en fonction du temps : $X = 2.2 \times 10^{-11} t^{0.74}$ m.

aux dérivées partielles est une équation dont la fonction (dans le cas de l'équation de diffusivité, la fonction est la charge hydraulique, h) n'est plus dépendante d'une seule variable, mais de plusieurs ($h(x, y, z, t)$ est fonction de x , y , z et t). Les méthodes de résolution de ce type d'équations sont nombreuses (différences finies, éléments finis, éléments finis mixte-hybrides) mais la méthode des différences finies est la plus abordable du point de vue technique. Pour illustrer la méthode des différences finies, considérons l'équation (1.3) en bidimensionnelle et en régime permanent. Dans ce cas $h(x, y, z, t)$ ne dépend que de deux coordonnées de l'espace x et y . L'équation (1.3) se réduit donc à :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{Q}{eK} \quad (2.13)$$

Si on veut déterminer les valeurs de la concentration h en x et en y , il faut trouver une solution à cette équation.

L'idée est de remplacer les dérivées par des différences. Pour ce faire, on discrétise l'espace, c'est-à-dire que l'on découpe l'espace en zones définies par des entiers. Cette opération est décrite sur la Figure 2.9. Chaque zone est définie par son centre (i, j) , i et j variant de 1 jusqu'à n , n étant le nombre de carrés qui découpent la zones. On voit que chacune de ces zones est de dimension $\Delta x \times \Delta y$. Sachant qu'une dérivée exprime les variations d'une fonction sur un intervalle on peut écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x, y) - h(x_0, y)}{x - x_0} \quad (2.14)$$

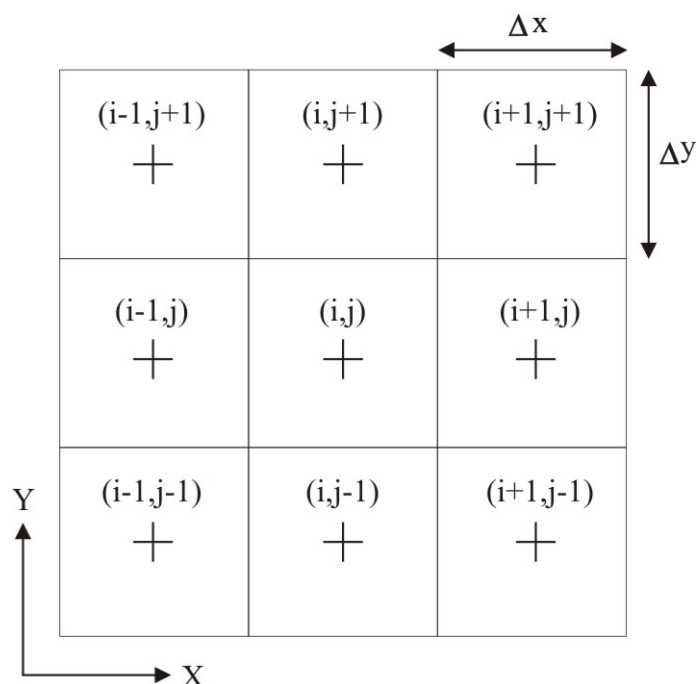


FIGURE 2.9 – Principe de discrétisation de l'espace.

Ce qui revient à écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\delta x} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\delta y} \quad (2.16)$$

Pour les dérivées secondes, on a la différence des dérivées premières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{(h_{i+1,j} - h_{i,j}) - (h_{i,j} - h_{i-1,j})}{\delta x^2} \\ &= \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} - 2h_{i,j}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'équation (2.13) devient alors :

$$\frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} - 2h_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 2h_{i,j}}{\Delta y^2} = \frac{Q}{eK} \quad (2.18)$$

Si on prend des mailles carrées, $\Delta x = \Delta y$, l'équation (2.18) devient :

$$h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j} = \frac{Q\Delta x^2}{eK} \quad (2.19)$$

Pour chaque maille de l'espace on aura une équation faisant intervenir la maille considérée et ses quatre voisines. On s'est donc ramené ici à un système d'équations linéaires avec autant d'inconnues que d'équations. La résolution se fera donc de façon itérative par méthode

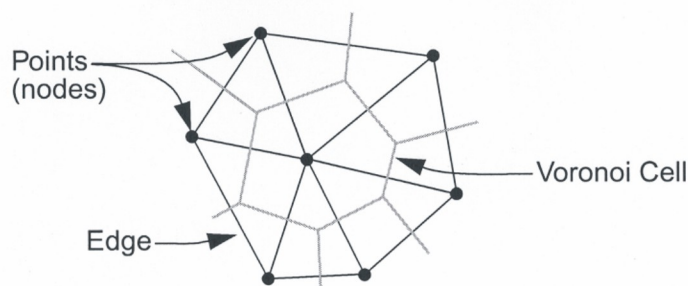


FIGURE 2.10 – Principe de discrétisation de l'espace avec des cellules de Voronoï.

matricielle.

Dans les applications qui sont présentées la résolution des équations différentielles se fait suivant la méthode dite des volumes finis qui est basée sur les mêmes principes que la méthode des différences finies. Cette méthode nécessite une discrétisation particulière appelée polygones de Voronoï (Figure 2.10).

Pour discrétiser notre zone d'étude on utilise une série de points aléatoirement distribués qui permettent une discrétisation fidèle de la surface topographique initiale. Ces points, ou noeuds, sont reliés les uns aux autres pour former un réseau de triangles irréguliers (Braun & Sambridge, 1997). Ce maillage est construit suivant les règles de Delaunay, qui offrent de nombreux avantages à la modélisation (Tucker et al., 2001).

Du point de vue numérique, cette triangulation permet de résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode des volumes finis (Versteeg & Malalasekera, 1995).

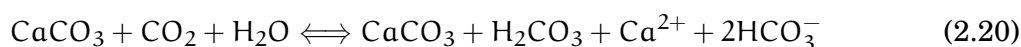
La géochimie des carbonates

Le dioxyde de carbone (CO_2) présent dans l'atmosphère est dissout par les précipitations et se retrouve ainsi dans le sol, les eaux de surface et les eaux souterraines. Cette dissolution du dioxyde de carbone donne l'acide carbonique H_2CO_3 qui est l'agent majeur de la dissolution de la calcite (CaCO_3) contenue dans les roches carbonatées.

Cette dissolution peut opérer dans deux situations bien différentes : en système ouvert où les carbonates sont en contact avec les intempéries atmosphériques ou, au contraire, en système fermé, cas des fractures, par exemple.

Dans le cas du système ouvert, la roche carbonatée est en contact avec les précipitations, sa dissolution va alors dépendre principalement de la hauteur d'eau en contact avec elle et de la nature hydrodynamique du flux (Dreybrodt, 1996).

La réaction de dissolution de la calcite dans un système ouvert s'écrit (Trudgill, 1985) :



Au passage on note que, pour des raisons stoechiométriques, une mole de Ca^{2+} consomme une mole de CO_2 . Ainsi la valeur absolue du flux de CO_2 est égale à celle du Ca^{2+} .

Ce flux F [$\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}$] est calculé par l'équation de Plummer-Wigley-Parkhurst, dite équation PHP :

$$F = k_1(\text{H}^+)_{\delta} + k_2(\text{H}_2\text{CO}_3^*)_{\delta} + k_3 - k_4(\text{HCO}_3^-)_{\delta}(\text{Ca}^{2+})_{\delta} \quad (2.21)$$

$(X)_{\delta}$ [ML^{-3}], représente l'activité de l'espèce chimique X prise à la position $z = \delta$, donc à l'interface solide-liquide. L'activité et la concentration sont liées par l'équation $(X) = \gamma_X [X]$. Où γ_X est le coefficient d'activité de l'ion X et $[X]$ [$\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}$] est la concentration de X .

Le coefficient γ_X peut être calculé par la loi de Debye-Hückel :

$$\log \gamma_X = -Az_i^2 \frac{\sqrt{I}}{1 + a_i B \sqrt{I}} \quad (2.22)$$

Où A et B sont des constantes fonctions de la température en degrés Celcius, a_i (Å) est le rayon ionique de X , z_i est la charge ionique de X et I est la force ionique de la solution. Dans les eaux des systèmes karstiques naturels, la loi de Debye-Hückel est valide du fait de la faible force ionique des solutions (Dreybrodt, 1988).

La solution de cette équation est souvent présentée sous la forme suivante (Buhmann & Dreybrodt, 1985; Kaufmann & Braun, 1999) :

$$F = k_1 \left(1 - \frac{[\text{Ca}^{2+}]}{[\text{Ca}^{2+}]_{eq}} \right) \quad [\text{Ca}^{2+}] \leq [\text{Ca}^{2+}]_s \quad (2.23)$$

$$F = k_2 \left(1 - \frac{[\text{Ca}^{2+}]}{[\text{Ca}^{2+}]_{eq}} \right)^4 \quad [\text{Ca}^{2+}] > [\text{Ca}^{2+}]_s \quad (2.24)$$

Où k_1 [$\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}$] et k_2 [$\text{ML}^{-2}\text{T}^{-1}$] sont des constantes cinétiques de la dissolution, $[\text{Ca}^{2+}]_{eq}$ [ML^{-3}] est la concentration du calcium à l'équilibre, donc lorsque la solution est saturée en calcium. $[\text{Ca}^{2+}]_s$ est le seuil de concentration du calcium pour lequel le flux F passe d'une cinétique d'ordre inférieur à une cinétique d'ordre supérieur. En effet, l'expérience montre (Eisenlohr & Rossier, 1997; Dreybrodt & Gabrovsek, 2000) que lorsque la concentration de la solution s'approche de l'équilibre, les carbonates montrent une inhibition à la dissolution du fait d'impuretés (phosphate et silicates). Ainsi, le flux F diminue très sensiblement de façon non-linéaire après un seuil, noté ici $[\text{Ca}^{2+}]_s$. La valeur de ce seuil varie suivant les expériences, $0.7 \leq [\text{Ca}^{2+}]_s \leq 0.9$ (Kaufmann & Braun, 1999).

Dans le cas de la cinétique d'ordre inférieur, l'hydratation du CO_2 et le transport des ions

par diffusion moléculaire sont tous deux des facteurs limitants. Le coefficient k_1 vaut (*e.g.* Buhmann & Dreybrodt (1985)) :

$$k_1 = k_0 \left(1 + \frac{k_0 \delta}{6D_{Ca} [Ca^{2+}]_{eq}} \right)^{-1} \quad (2.25)$$

avec k_0 [$ML^{-2}T^{-1}$] une constante, D_{Ca} [L^2T^{-1}] le coefficient de diffusion moléculaire du calcium et δ [L] la hauteur de la couche limite.

Dans le cas de la cinétique d'ordre supérieur, c'est la dissolution de la calcite à l'interface roche-solution qui est le facteur limitant. La constante k_2 vaut (*e.g.* Palmer (1991)) :

$$k_2 = k_1 \left(1 - [Ca^{2+}]_s \right)^3 \quad (2.26)$$

Le couplage de ces équations dissolution/précipitation des carbonates avec l'équation de diffusivité est présenté dans l'application suivante.

2.2 Application à la modélisation géomorphologique des karsts

Les processus souterrains jouent-ils un rôle dans le développement superficiel des karsts en cockpit ?

Objectifs et méthodes :

La modélisation des processus géomorphologiques est rendue possible depuis plusieurs dizaines d'années grâce à l'utilisation de simulations numériques de plus en plus performantes. Ces codes de calcul permettent de simuler la non-linéarité et l'interaction des processus qui façonnent les formes des paysages.

Les formes de karst sont la résultante de processus très particuliers. L'hydrologie et les formes qui les caractérisent sont la conséquence de la grande solubilité de la roche qui les compose.

Il existe une grande variété de modèles karstiques dont les modèles caractéristiques dépendent d'un grand nombre de variables. Les karsts en cockpits sont présents dans certaines régions tropicales où les conditions lithologique, géologique et climatique peuvent favoriser leur développement. Ces modèles particuliers peuvent être décrits par une succession de dépressions et de collines. Le développement de ces formes est comparable à celui des dolines. Ces karst en cockpits sont présents uniquement dans les régions humides où les précipitations dépassent en moyenne 1500 mm/an.

De nombreuses études montrent que ce sont les processus de dissolution (décrits par les équations 2.23 à 2.26) qui sont principalement à l'origine des formes de ces karsts en cockpits. Le modèle fonctionne sur le principe d'une discrétisation spatio-temporelle (cellules de Voronoï) qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles suivant un schéma

numérique explicite.

Un premier objectif a été de tester des hypothèses relatives à l'importance du rôle souterrain des karsts à l'échelle d'un seul cockpit c'est-à-dire que la zone de simulation n'était que de $400 \times 400 \text{ m}^2$ (Figure 2.11).

Le couplage utilisé ici prenait en compte les processus de dissolution des carbonates (équations 2.23 à 2.26) et les écoulements en milieux fracturés (équation 2.19). La dissolution des carbonates a été calculée par l'équation :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{m_{Ca}}{\rho_{CaCO_3}} \frac{Q [Ca^{2+}]_{eq}}{2k_1(a_0 + b_0)} \ln \left(\frac{1 - \frac{[Ca^{2+}]_{in}}{[Ca^{2+}]_{eq}}}{1 - \frac{[Ca^{2+}]_s}{[Ca^{2+}]_{eq}}} \right) \quad (2.27)$$

avec $[Ca^{2+}]_{in}$ la concentration du calcium en entrée des fractures, $[Ca^{2+}]_{eq}$ la concentration du calcium à l'équilibre, $[Ca^{2+}]_s = 0.9 \times [Ca^{2+}]_{eq}$, Q les écoulements souterrains qui est fonction de la charge hydraulique h dans l'équation (2.19), a_0 et b_0 étant respectivement l'ouverture et la largeur caractéristiques des fractures.

L'équation (2.27) couple donc les équations géochimiques de dissolution des carbonates avec les écoulements souterrains.

Dans un second temps, l'étude s'est portée sur les conditions topographique, hydrologique et géochimique nécessaires au développement des formes de cockpits à une plus petite échelle (16 km^2). Nous avons intégré dans le modèle les processus liés à la dissolution géochimique des carbonates afin de simuler l'érosion et donc la genèse des formes karstiques. Ces formes sont la résultante de l'interaction et d'un feed-back positif entre les écoulements et l'érosion.

L'évolution de la topographie est fondée sur une hypothèse explicitée par les principes de fonctionnement de l'épikarst. Dans ce cas, l'érosion est indirectement liée à la dissolution de la roche de la zone épikarstique (équation 2.28).

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = - \left[\frac{DR_{max} - DR_{min}}{q_{max} - q_{min}} (q_i - q_{max}) + DR_{max} \right] \quad (2.28)$$

où z_i est l'altitude d'un point i du maillage, DR_{max} (240 mm/ka) et DR_{min} (48 mm/ka) sont respectivement le maximum et le minimum de l'érosion mesurée sur le terrain d'étude, q_i est l'écoulement sur la cellule de Voronoï i , q_{max} et q_{min} sont respectivement le maximum et le minimum des écoulements calculés sur la zone d'étude au temps t .

La géométrie initiale adaptée de notre zone d'étude est une surface lisse et légèrement ondulée de 16 km^2 ($X = Y = 4000 \text{ m}$). L'altitude moyenne de ces ondulations est $Z_0 = 600 \text{ m}$. Ces ondulations représentent une succession de sommets ($Z_0 + 10 \text{ cm}$) et de dépressions ($Z_0 - 10 \text{ cm}$) qui sont destinées à guider les écoulements en début de simulation. Cette surface

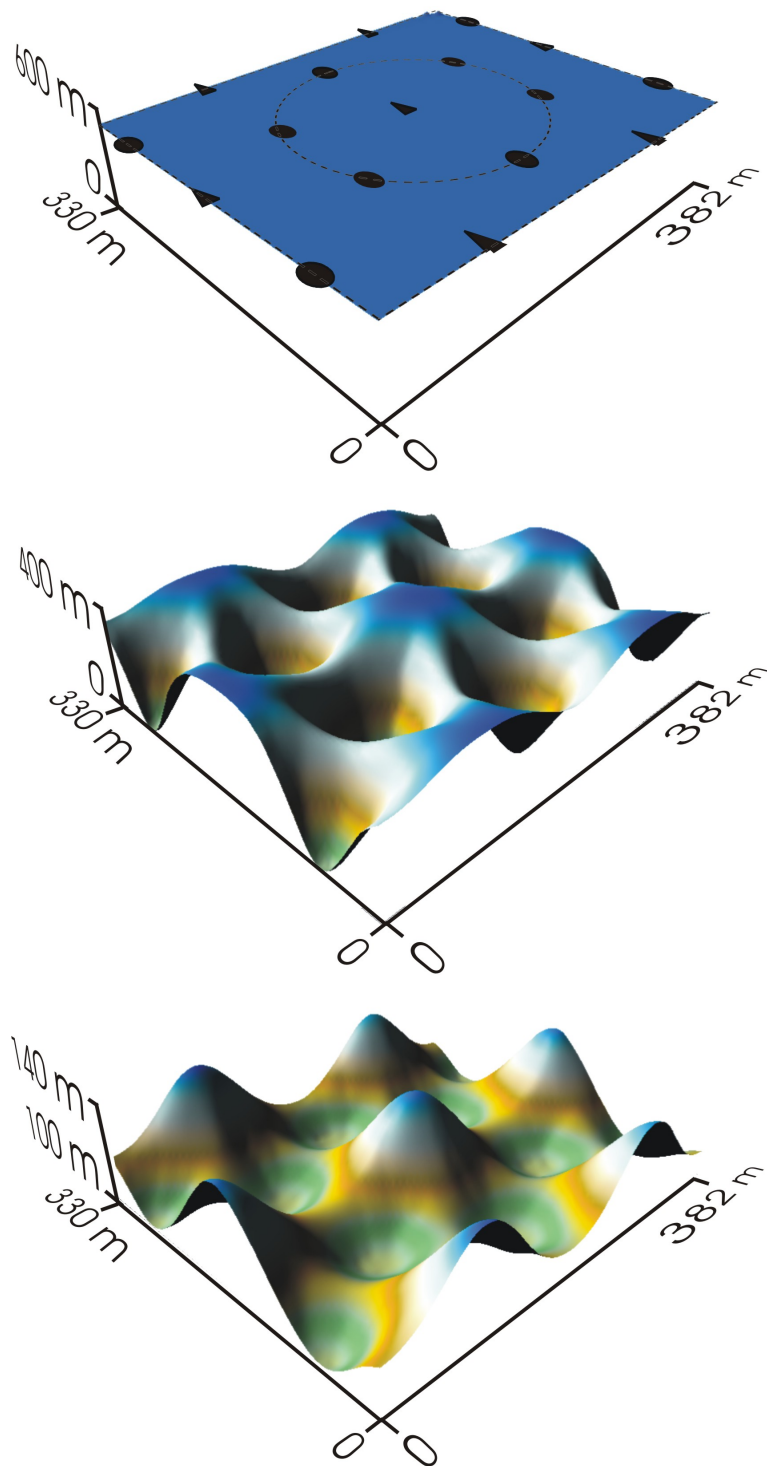


FIGURE 2.11 – Simulation d'un cockpit : sur le plateau calcaire, les écoulements sont initialement guidés vers les dépressions (disques noirs). Le modèle simule ensuite le couplage écoulements/processus de dissolution qui façonne le relief.

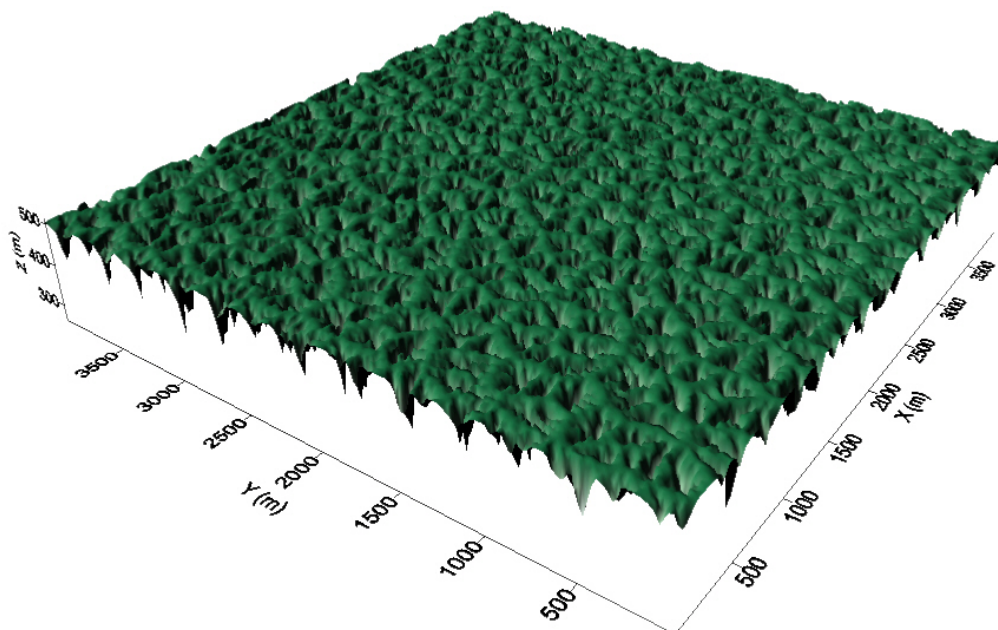


FIGURE 2.12 – Simulation d'un ensemble de cockpits : pour cette simulation, le temps de simulation est de quatre millions d'années. Le MNT simulé, peut ainsi être analysé : calculs de la pente moyenne, du relief relatif moyen, des propriétés d'échelle.

lisse et ondulée que nous pouvons assimiler à un plateau est discrétisée en 40000 cellules de Voronoï. Chaque noeud, centré sur la cellule de Voronoï, est donc représentatif d'une zone de l'ordre de 400 m².

Résultats :

Dans le cas de la modélisation à l'échelle d'un seul cockpit ([PCL 5], [PCL 6], [CCL 12], [CCL 13], [DL 2]), il a été mis en évidence que, seule, l'érosion mécanique n'est pas une hypothèse suffisante pour expliquer la forme des karsts en cockpit (Figure 2.11). Ceci est tout à fait cohérent, sachant que de nombreux auteurs rapportent l'importance des processus de dissolution par rapport à l'érosion pour ce qui concerne les systèmes karstiques.

L'objectif des simulations est de tester l'approche du modèle afin de savoir si les processus géomorphologiques mis en équation permettent de recréer les formes typiques des karsts en cockpit. Pour cela nous avons comparé les formes simulées aux formes réelles grâce à trois indices morphométriques : la pente moyenne, le relief relatif (hauteur entre les dépressions et les sommets des cockpits) et les propriétés d'échelle du relief (Figure 2.13). Ces trois indices sont discriminants pour caractériser, dans la région des "cockpits country" de Jamaïque, les karsts en cockpits.

Trois simulations ont été menées en faisant varier le facteur climatique. Les simulations

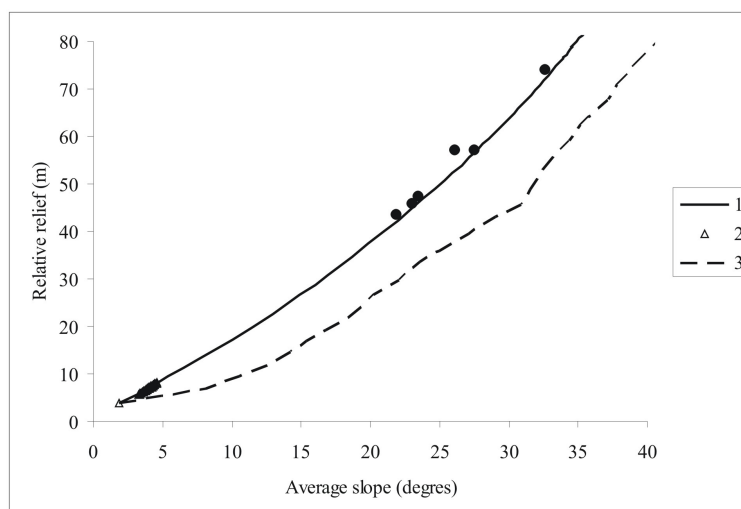


FIGURE 2.13 – Résultat de simulations : la confrontation du modèle avec les données de terrain (disques noirs) permet d’ajuster la valeur de certaines variables comme la quantité de dioxyde de carbone dans l’eau.

donnent des modèles numériques qui sont analysés et comparés aux formes réelles par le biais d’indices morphométriques.

En considérant que la dissolution souterraine est également un facteur important dans l’évolution de la géomorphologie superficielle du karst, ce que traduit les principes de fonctionnement de l’épikarst, on obtient effectivement des simulations très proches de la réalité. Le modèle de dissolution spatio-temporelle anisotrope traduit le fait que les fractures les plus en aval sur la pente reçoivent plus d’eau d’infiltration, et *vice versa*. Ainsi, les parois des fractures les plus en aval s’agrandissent plus et ces fractures laissent donc infiltrer plus d’eau, et ainsi de suite. Ce feed-back positif entre écoulement et dissolution est la clé de nombreuses théories sur le fonctionnement des systèmes karstiques. Or, plus la dissolution est active dans la zone de subsurface, plus cette dernière sera érodée.

Dans le modèle, les valeurs de la pluie moyenne annuelle varient de 1 m/an à 2 m/an. Les résultats montrent clairement que ces pluies doivent être bien supérieures à 1 m/an pour simuler des karsts en cockpit réalistes. Ceci est en accord avec les conclusions de nombreux auteurs.

Dans le cas de la modélisation à l’échelle de plusieurs cockpits (Figure 2.12), les résultats de l’étude amènent à mettre en avant plusieurs points ([PCL 4], [CCL 8], [DL 2]). Les similarités morphologiques entre les modèles simulés et réels offrent, dans un premier temps, une étape essentielle de notre étude, en termes de validation de la modélisation des processus. Le fonctionnement de l’épikarst révèle, à travers ces hypothèses, une idée

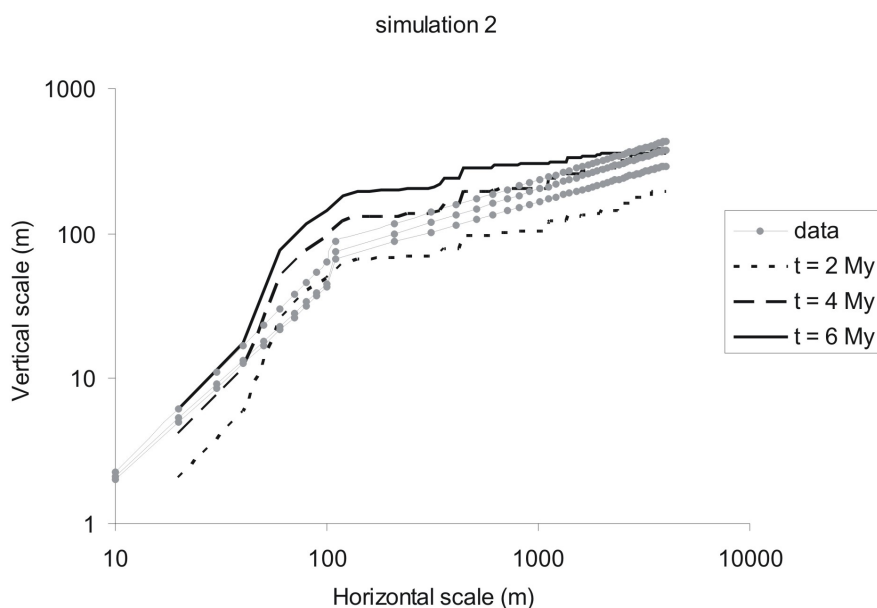


FIGURE 2.14 – Résultat de simulations : la confrontation du modèle avec les données de terrain (disques gris reliés) permet d’ajuster la valeur de certaines variables comme le facteur climatique.

originale en ce qui concerne les karsts en cockpits : leur forme extérieure, et donc visible, est fortement influencée par les processus souterrains de dissolution, donc invisibles.

Les résultats montrent que, pour simuler la genèse de karst en cockpits ressemblant à ceux de la réalité, les précipitations doivent avoir une intensité au moins supérieure à 1.5 m/an, ce qui est parfaitement cohérent avec les remarques ci-dessus. Les résultats des simulations montrent clairement l’impact fort du facteur climatique sur la morphologie des karsts obtenus (Figure 2.14). Pour les valeurs des paramètres du modèle, nous pouvons conclure que des karsts en cockpits n’ont pu se former que pour des précipitations intenses et très fréquentes.

2.3 Application à la modélisation géomorphologique des Lacs de Namibie et Titan

Les processus de formation des Pans de Namibie sont-ils identiques à ceux qui forment les lacs sur Titan ?

Objectifs et méthodes :

Titan est le plus gros satellite de Saturne (2575 km de rayon) et est composé en partie de glace d’eau formant un épais manteau d’environ 800 à 900 km. Titan est avec la Terre le

seul corps du système solaire à posséder une atmosphère massive et composée majoritairement d'azote (la pression atmosphérique à la surface des deux planètes est très proche). Concernant la géomorphologie, l'exploration par la mission Cassini-Huygens a révélé l'existence de systèmes fluviaux à la surface du sol. Ces réseaux de drainage ne seraient pas créés par l'eau liquide comme sur Terre ou Mars, mais par des pluies de méthane liquide, qui est le second constituant de l'atmosphère de Titan après l'azote.

Dans les conditions très froides de Titan (94K à la surface), le méthane gazeux de l'atmosphère est condensé sous forme liquide à basse altitude et solide à plus haute altitude, donnant ainsi lieu à un cycle similaire au cycle de l'eau sur Terre. Les modèles thermodynamiques indiquent que ces composants atmosphériques gazeux peuvent ainsi précipiter sous forme d'orages liquides violents.

Le cycle du méthane et de ses dérivés sur Titan serait donc analogue à celui de l'eau dans les régions terrestres arides, où les précipitations se font essentiellement sous forme d'orages et où le taux d'évaporation potentielle au sol excède largement le taux de précipitation.

Il existe plusieurs régions du monde qui peuvent prétendre à être un analogue de Titan, en terme de structures géomorphologiques observées, mais une étude récente (Lopez, 2007) semble montrer que la Namibie est la meilleure candidate.

Le nord de la Namibie est actuellement soumis à un régime climatique tel que le taux moyen de précipitations est de l'ordre de 300 mm/an, alors que le taux d'évaporation potentielle est de l'ordre de 2000 mm/an (Mendelsohn et al. 2002). Ainsi, bien que l'eau liquide ne soit pas stable à long terme à la surface du sol, des précipitations d'eau liquide se produisent sous forme d'orages et l'eau peut stagner à la surface ou dans la proche sub-surface pendant quelques semaines avant de s'évaporer (Christelis et Struckmeier 2001).

Ce climat aride, combiné à une topographie relativement plane, est responsable du développement d'une morphologie très particulière, qui semble analogue à celle des "lacs", des réseaux dendritiques et des dunes découverts sur Titan.

Les deux objectifs principaux de ces travaux sont i) de montrer que la Namibie est un bon analogue géomorphologique de Titan et ii) de développer un modèle numérique qui décrit les processus des formes observées en Namibie et sur Titan.

Dans un premier temps, une mission de terrain (juillet 2008) a permis de collecter des arguments de terrain, permettant ainsi de démontrer que les pans de Namibie se développent bien par érosion régressive de la couche de calcrète.

La seconde phase de ce travail (en cours) est d'intégrer les processus géomorphologiques et géochimiques similaires à ceux développés pour étudier le développement et la morphologie des systèmes karstiques terrestres (Fleurant et al. 2007a,b). Ces modèles tridimensionnels permettent de tester l'influence de nombreux paramètres, tels que la pente de la surface

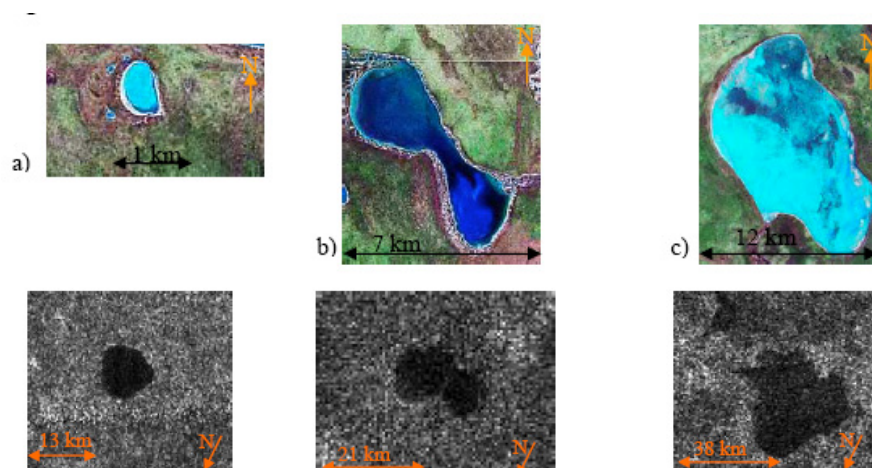


FIGURE 2.15 – Images Landsat des pans de Namibie (en haut) et images radar des "lacs" de Titan (en bas). Tiré de Lopez (2007).

topographique, la teneur en minéraux solubles du substrat, leur solubilité, la température du fluide, l'abondance des précipitations, la répartition temporelle des périodes sèches et des périodes humides, les circulations d'eaux souterraines et superficielles, la hauteur de la nappe phréatique, sur les morphologies observées et sur leur vitesse de croissance.

Résultats :

Le modèle, en cours de programmation ([PCL 0], [CCL 1], [CCL 5], [DL 0], [VS 1]), sera d'abord validé par comparaison avec les formes et le fonctionnement hydrologique observés en Namibie (les paramètres thermodynamiques régissant la dissolution/précipitation des carbonates dans l'eau sur Terre étant connus). Puis, le modèle sera utilisé pour contraindre les paramètres thermodynamiques que doivent posséder les matériaux de la surface de Titan pour obtenir les formes qu'on y observe.

Présentée récemment ([CCL 1], [CCL 5]), notre approche devrait permettre, par une méthode indirecte et grâce à cet analogue terrestre, à la fois de comprendre la mise en place de ces formes et de donner un ordre de grandeur des composants géochimiques sur Titan.

3 Couplage transport-fractal

3.1 Principes

L'équation de transport nécessite pour être résolue numériquement une discrétisation spatio-temporelle, c'est la méthode des différences finies, par exemple. Comme vu précédemment, la discrétisation spatiale peut être mono (déplacement longitudinale uniquement), bi (déplacements longitudinal et latéral) ou tridimensionnelle (déplacements dans l'espace à

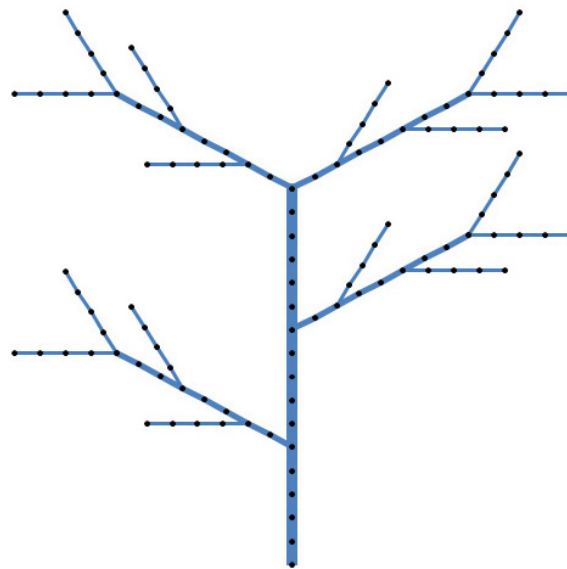


FIGURE 2.16 – Discrétisation d'un réseau hydrographique. Chaque point est connecté à un noeud aval et au moins un noeud amont.

trois dimensions). Or, comment discrétiser un objet qui n'est, par définition, pas mono, bi ou tri-dimensionnel comme un objet fractal ?

C'est le cas, par exemple, d'un réseau hydrographique qui est un arbre au sens topologique. La discrétisation se fait alors simplement en répartissant sur le réseau des points reliés les uns aux autres. Ces points sont tous à égale distance les uns des autres. Chaque point est caractérisé par ses coordonnées euclidiennes et surtout par sa connexion avec les points amont et le point aval (Figure 2.16). Les méthodes numériques telles que les différences finies ou les volumes finis peuvent alors s'appliquer selon un schéma dit explicite.

La méthode de marche aléatoire peut également tout à fait s'appliquer sur ce type de discrétisation. Elle est même la seule possible dans le cas où l'on souhaite modéliser des flux biologiques par individu centré.

Les modèles individu centré prennent en compte l'individu biologique avec toutes ses composantes propres : localisation, gènes ou encore capacité de déplacement.

La méthode de marche au hasard se prête bien aux structures dendritiques et est très facile à mettre en oeuvre (équation 2.29).

$$N(t + \Delta t) = N(t) + Z \times C \quad (2.29)$$

où N est l'indice du point sur lequel se trouve l'individu aux temps t et $t + \Delta t$, Z est un nombre aléatoire suivant la loi uniforme entre 0 et 1 et C la capacité de déplacement spécifique à l'individu. Cette capacité peut être de quelques mètres par génération pour un

insecte à quelques kilomètres par génération pour un grand mammifère.

Les individus sont donc numériquement autonomes et les propriétés de la population à laquelle ils appartiennent peuvent ainsi être étudiées statistiquement par les opérateurs classiques : moyenne, écart-type.

Un modèle individu centré permet ainsi de définir des règles simples à l'échelle d'un individu et d'explorer le comportement souvent complexe de sa population.

Les fractales que sont ici les réseaux hydrographiques sont générées par une procédure itérative. Comme dit précédemment, une fractale est relativement simple à construire du fait de sa propriété d'auto-similarité : structure identique à des échelles différentes. L'algorithme de la génération de ces fractales permet, à partir des paramètres désirés du réseau, de générer un réseau hydrographique artificiel.

3.2 Application au transfert biologique sur un réseau hydrographique

La structure génétique d'une population d'individus est-elle influencée par la structure spatiale sur laquelle elle vit ?

Objectifs et méthodes :

Cette étude s'intéresse à la dynamique de populations inféodées aux cours d'eau (insectes, poisson ou encore mammifères).

Les réseaux hydrographiques sont des éléments complexes qui structurent le géosystème, et où les organismes qui y sont inféodés doivent faire face d'une part à de fortes variations spatio-temporelles et d'autre part à de forts gradients écologiques. Ces gradients résultent principalement de la topologie des réseaux hydrographiques et tout particulièrement de leur caractère fractal et de leur structure dendritique. Cette structure contraint la dispersion et le flux de gènes des organismes qui sont inféodés aux cours d'eau.

Ce travail a consisté à élaborer un modèle numérique pour simuler la dispersion et le flux génique des populations sur des réseaux hydrographiques artificiels. Le modèle devait tenir compte des caractéristiques géométriques du réseau hydrographique et des caractéristiques biologiques des espèces étudiées inféodées au cours d'eau. Le modèle devait également permettre d'étudier la dynamique des populations, *i.e.* (re)colonisation, extinction, identification des populations sources et des populations puits, sur la structure des populations.

Les réseaux hydrographiques ont été modélisés suivant la procédure décrite dans le paragraphe 3.1. Les différentes variables géomorphologiques permettent de générer une famille importante de réseaux (Figure 2.17).

Le déplacement sur le réseau se fait par une méthode de marche au hasard du type de

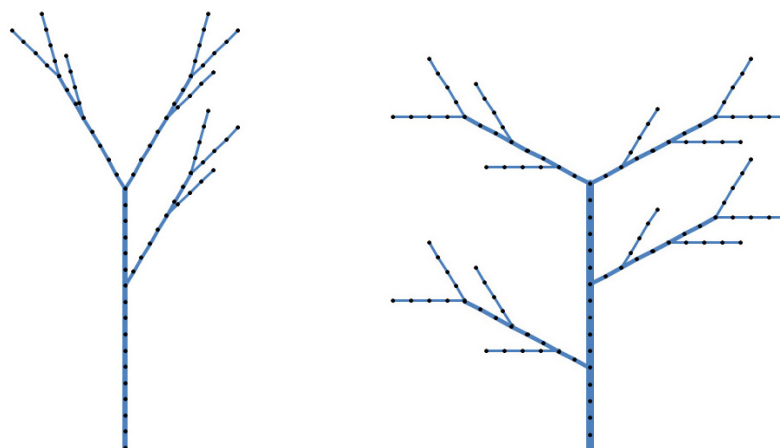


FIGURE 2.17 – Exemple de deux réseaux hydrographiques d'ordre $n = 3$, pour différents paramètres géomorphologiques : $R_N = 3$, $R_L = 2$, $\alpha = 30^\circ$ (à gauche) et $R_N = 4$, $R_L = 2$, $\alpha = 60^\circ$ (à droite).

l'équation (2.29). Ce déplacement peut se faire soit strictement le long du réseau, soit à l'extérieur du réseau, donc entre biefs du cours d'eau (Figure 2.18).

Résultats :

Plus de 200 réseaux hydrographiques artificiels ont été créés à partir d'indices géomorphologiques ([PCL 0], [PCL 0], [PCL 1], [CCL 2], [CCL 3], [CCL 7]) et un modèle biologique individu-centré ([DL 1]) a été appliqué sur chacun de ces réseaux afin de chercher des corrélations entre leurs indices géomorphologiques et la dispersion génétique des espèces calculée par le modèle biologique. Il s'agit donc de tester comment le degré de ramification d'un réseau hydrographique peut affecter les stratégies de dispersion des individus.

À notre connaissance, cette étude est la première prenant en compte la dispersion externe au réseau, c'est-à-dire les mouvements des individus entre les drains du réseau hydrographique. Les premiers résultats nous ont permis de vérifier les hypothèses de départ concernant l'influence de la géométrie d'un réseau ramifié sur la structure génétique des populations.

Le rapport de bifurcation R_N influe fortement sur la connectivité du réseau. Un individu qui disperse hors du réseau a donc plus de chance de parvenir à une autre branche du réseau lorsque ce rapport est grand. La Figure 2.18 montrent que le nombre de noeuds qui peut être atteint lors de la dispersion externe est plus élevé que pour la dispersion interne.

Les simulations ont révélé que l'indice génétique F_{ST} est positivement corrélé au rapport R_N . En termes biologiques, cela signifie que la différenciation entre les sous-bassins ver-

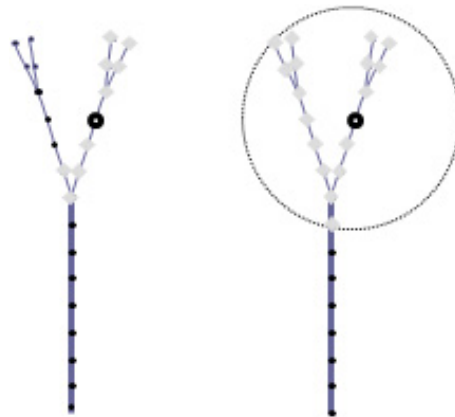


FIGURE 2.18 – Exemple de déplacements interne et externe sur un réseau d'ordre $n = 2$, pour les paramètres géomorphologiques suivants : $R_N = 2$, $R_L = 2$, $\alpha = 15^\circ$. Pour un réseau donné, un déplacement interne ou externe au réseau donne des dynamiques de populations très différentes.

sants est favorisée lorsque la complexité du réseau augmente.

L'angle de bifurcation α affecte également la structure génétique. Lors de la dispersion, les individus ont de meilleures chances de réussir à atteindre une autre branche lorsque cet angle est faible.

On remarque que l'indice FST a tendance à augmenter avec la complexité du réseau et avec l'angle de bifurcation (Figure 2.19).

Plus de 4000 simulations, effectuées sur un cluster de 200 noeuds, ont permis d'étudier tous les cas de figure possibles concernant les paramètres du réseau hydrographique et des individus. La Figure 2.20 montre un exemple de résultat obtenu : l'influence de la proportion déplacements interne/externe au réseau sur la différenciation génétique.

4 Couplage fractal-Hydrogramme Unitaire

4.1 Principes

L'hydrogramme unitaire est un modèle qui permet de modéliser les écoulements de surface sur un bassin versant. L'équation (1.25) permet de calculer ces écoulements seulement si on connaît la fonction de transfert $T(t)$ du bassin versant.

Le couplage de l'hydrogramme unitaire et de la géométrie fractale vient de la nature de cette fonction de transfert. En effet, la fonction de transfert peut avoir une nature uniquement hydraulique (Sherman, 1932), mais certains auteurs lui ont donné un caractère hydro-géomorphologique basé sur la nature fractale des réseaux hydrographiques

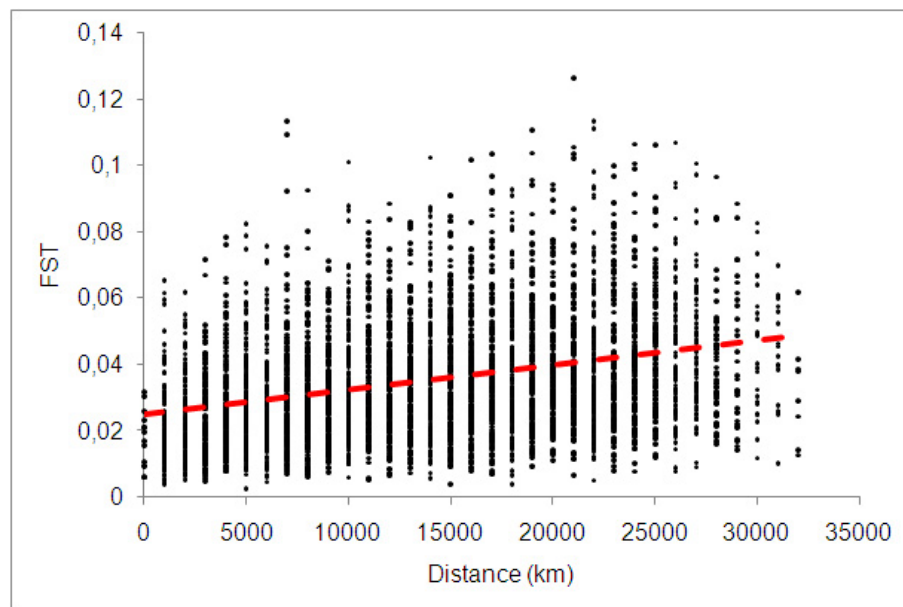


FIGURE 2.19 – L'analyse de la différenciation génétique calculée à partir de l'indice F_{ST} , montre un isolement par la distance : plus les populations sont éloignées géographiquement et plus leur structure génétique est différente.

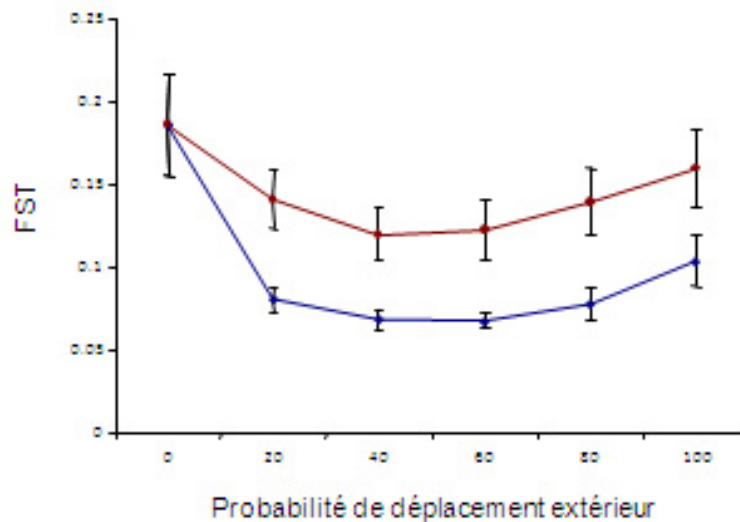


FIGURE 2.20 – Il existe une relation quadratique entre la probabilité de déplacement des individus hors réseau et la différenciation génétique de la population associée. Cette relation est d'autant plus marquée que l'angle entre les branches du réseau est faible.

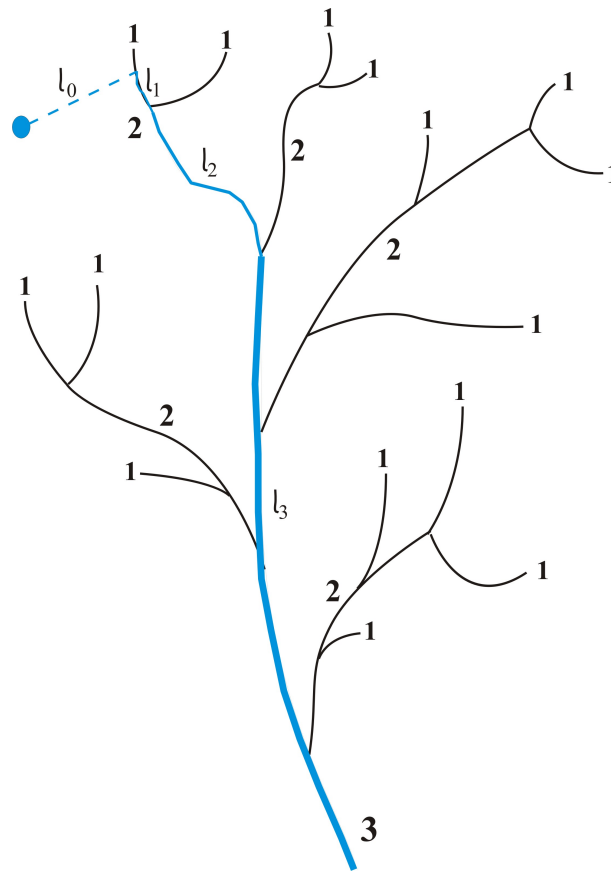


FIGURE 2.21 – Principes de hiérarchisation de Strahler (1957) pour un réseau hydrographique.

(Rodriguez-Iturbe & Rinaldo, 1997; Cudennec et al., 2004; Fleurant et al., 2006).

Considérons un réseau hydrographique vu d'avion (Figure 2.21). Sa forme dite dendritique est un arbre au sens topologique et sa structure détient toutes les caractéristiques d'un objet fractal naturel :

- un réseau hydrographique possède une structure de plus en plus fine au fur et à mesure que l'échelle d'observation grandit. On touche d'ailleurs ici une différence fondamentale entre les fractales naturelles dont la finesse de la structure s'arrête à une certaine échelle d'observation, alors que pour les fractales mathématiques, la structure est fine jusqu'à l'infini, voire même au delà !
- la structure des réseaux hydrographiques est trop irrégulière pour être décrite par la géométrie euclidienne. En effet, ces réseaux sont composés de segments qui convergent mais le résultat de la structure globale n'est plus un segment.
- il a été montré dans de nombreux auteurs (e.g. Turcotte (1992); Snell & Sivapalan (1994)) que les réseaux hydrographiques sont auto-similaires ou auto-affines d'un point de vu

statistique seulement. C'est à dire qu'une structure identique peut se retrouver à différentes échelles d'observation.

- il est possible de calculer la dimension fractale des réseaux hydrographiques. Un réseau hydrographique est, comme nous l'avons dit précédemment, un assemblage de segments. Sa dimension topologique est donc égale à 1¹. Nous verrons ci-dessous que sa dimension fractale est comprise entre 1 et 2, un réseau hydrographique est donc un objet non euclidien dont la structure est comprise entre le segment et le plan !

La géométrie d'un réseau hydrographique peut être caractérisée par des règles simples basées sur sa structure hiérarchique. Les biefs de l'extrémité amont sont des sources dites d'ordre $\omega = 1$, les biefs résultants de la confluence de deux biefs de même ordre $\omega = i$ sont d'ordre $\omega = i + 1$, et les biefs résultants de la confluence de deux biefs d'ordres différents conserve l'ordre du bief dont l'ordre est le plus grand (Strahler, 1957). Ces règles peuvent être synthétisées par l'équation suivante :

$$\omega = \max(\omega_i, \omega_j) + \delta_{\omega_i, \omega_j} \quad (2.30)$$

avec $\delta_{\omega_i, \omega_j}$ l'indice de Kronecker défini par :

$$\delta_{\omega_i, \omega_j} = \begin{cases} 1 & = \text{si } \omega_i = \omega_j \\ 0 & = \text{sinon} \end{cases} \quad (2.31)$$

L'ordre du bassin versant correspond à l'ordre du bief le plus élevé. Une méthode de hiérarchisation a été développée pour mettre en évidence des lois géométriques générales d'organisation des réseaux hydrographiques (Strahler, 1957). Horton (1945) a montré que lorsqu'on note N_i le nombre de segments d'ordre i et \bar{L}_i la longueur moyenne des N_i segments d'ordre i , le rapport de confluence $R_B = \frac{N_{i-1}}{N_i}$ et le rapport de longueur $R_L = \frac{\bar{L}_i}{\bar{L}_{i-1}}$ sont sensiblement identiques pour un réseau hydrographique donné. Ces rapports de Horton sont stables et varient entre 3 et 5 pour R_B et entre 1,5 et 3,5 pour R_L .

De nombreux auteurs ont étudié la validité expérimentale de ces rapports (Tarboton et al., 1988; LaBarbera & Rosso, 1989). Mais, comme l'indique Dooge (1986) : "ces lois sont statistiques par nature", cela signifie qu'il ne faut pas en attendre une description exacte d'un réseau hydrographique pris isolément, mais plutôt un comportement moyen, une tendance générale, pour un grand nombre de réseaux.

Outre les lois de Horton, on peut également citer les lois de Tokunaga (1984), qui sont plus générales et décrivent plus précisément la structure des réseaux hydrographiques. En effet, le rapport d'embranchement de Tokunaga donne le nombre moyen de tronçons d'ordre i qui rejoignent un bief d'ordre j ($i < j$). Cette taxonomie est en fait identique aux lois de Horton pour le cas particulier où la densité de drainage (rapport de la longueur totale

1. On rappelle que la dimension topologique d'un point est 0, celle d'un segment ou d'une droite est 1, celle d'un carré ou d'un disque est 2 et celle d'un cube ou d'une pyramide est 3.

$d = 2 \frac{\ln(R_L)}{\ln(R_B)}$	Feder, 1988
$D = \max\left(1, \frac{\ln(R_L)}{\ln(R_B)}\right)$	La Barbera et Rosso, 1987, 1989
$D = d \frac{\ln(R_B)}{\ln(R_L)}$	Tarboton, <i>et al.</i> , 1990
$D = \left(\frac{1}{2-d}\right) \frac{\ln(R_B)}{\ln(R_L)}$	La Barbera et Rosso, 1990
$d = \max\left(1, 2 \frac{\ln(R_L)}{\ln(R_A)}\right)$	Rosso, <i>et al.</i> , 1991
$D = \min\left(2, 2 \frac{\ln(R_B)}{\ln(R_A)}\right)$	Rosso, <i>et al.</i> , 1991

TABLE 2.1 – Les différents résultats de la dimension fractale d'un réseau hydrographique.

du réseau hydrographique sur son aire) du réseau hydrographique est uniforme (Dodds & Rothman, 2000).

La structure fractale des réseaux hydrographiques a tout particulièrement été étudiée par Tarboton et al. (1988); LaBarbera & Rosso (1987, 1989); Nikora (1991); Nikora et al. (1993); Nikora & Sapozhnikov (1993). Ces auteurs ont étudié l'invariance d'échelle (auto-similarité) de la structure des réseaux hydrographiques et sa relation avec la dimension fractale. Ils ont montré que l'auto-similarité a un sens statistique pour ces fractales naturelles que sont les réseaux hydrographiques et que cette auto-similarité est en relation très étroite avec les fonctions puissances qui expriment quant à elles justement des caractéristiques identiques à différentes échelles.

Ainsi, on voit que ces expressions prennent en compte les rapports de Horton et font l'hypothèse que les réseaux hydrographiques sont auto-similaires alors que de nombreuses études montrent qu'ils sont en fait auto-affines (Nikora et al., 1993; Schuller et al., 2001). Les différentes expressions analytiques de la dimension fractale sont données dans le Tableau 2.1. La méthode la plus juste pour déterminer la dimension fractale d'un réseau hydrographique reste la méthode du comptage de boîtes ou la méthode des masses.

La nature fractale des réseaux hydrographiques semble être la conséquence d'une auto-organisation du relief (Rigon et al., 1994; Bak, 1996; Rodriguez-Iturbe & Rinaldo, 1997; Dodds & Rothman, 2000) ceci ayant pour conséquence une appartenance de ses caractéristiques à des classes d'universalité.

Le couplage entre l'hydrogramme unitaire et la géométrie fractale vient de la nature même de la fonction de transfert qui va être explicitée maintenant. Cette fonction de transfert est basée sur les propriétés fractales des réseaux hydrographiques.

4.2 Application à la modélisation pluie-débit

Peut-on prédire le débit à l'exutoire d'un bassin versant ?

Objectifs et méthodes :

Le modèle pluie-débit développé ici utilise une fonction de transfert géomorphologique, elle-même basée sur les propriétés scalantes des réseaux hydrographiques. Cette fonction de transfert repose sur des hypothèses générales de symétrie couplées aux propriétés fractales des structures dendritiques. Elle révèle ainsi un caractère polyvalent qui lui permet d'être appliquée aux structures ramifiées en général (Duchesne et al., 2002; Fleurant et al., 2004), et pas seulement aux réseaux hydrographiques (voir "Application à l'analyse des formes dendritiques végétales" au paragraphe 5.2).

Dans ses hypothèses, le modèle présenté ici utilise les résultats de Duchesne et al. (1997) et Cudennec (2000)). L'objectif est de décrire la structure des réseaux grâce à la hiérarchisation de Strahler (1964) et d'appliquer les lois de Horton (1945).

Comme le montre la Figure 2.21, si l'on prend une goutte de pluie nette qui tombe sur le bassin versant, alors la distance que va parcourir cette goutte de pluie jusqu'à l'exutoire est :

$$L = \sum_{k=1}^n l_k \quad (2.32)$$

où l_k est la longueur du bief d'ordre k et n est l'ordre total du réseau hydrographique. l_0 est la longueur que parcourt la goutte sur le versant.

Les travaux de Duchesne et al. (1997) et Cudennec (2000) ont montré que la loi densité de probabilité des variables l_k était de la forme :

$$T(l_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_k}} \frac{1}{\sqrt{l_k}} e^{-\frac{l_k}{2l_k}} \quad k=1, 2, \dots, n \quad (2.33)$$

On reconnaît une loi Gamma de paramètres $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2l_k}$ que l'on peut donc noter : $\Gamma\left(l_k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2l_k}\right)$.

Ainsi, on peut en déduire la loi densité de probabilité de la variable L (Feller, 1971) :

$$T(L) = T(l_1) \star T(l_2) \star \dots \star T(l_n) \quad (2.34)$$

$$= \Gamma\left(l_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2l_1}\right) \star \Gamma\left(l_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2l_2}\right) \star \dots \star \Gamma\left(l_n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2l_n}\right) \quad (2.35)$$

où \star symbolise l'intégrale de convolution.

En faisant le changement de variables $L = \bar{v}_{rh} t$, (\bar{v}_{rh} est la vitesse moyenne de l'eau dans le réseau hydrographique) pour passer de la variable des longueurs L à celle des temps t , on obtient la fonction de transfert géomorphologique :

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\bar{v})^n \prod_{i=1}^n l_i}} \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{\left(-\frac{\bar{v}t}{2l_n}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_n(k) \left(\frac{n-1}{2}\right)_k}{k! \left(\frac{n}{2}\right)_k} \left(\frac{\bar{v}t}{2(l_n - l_{n-1})}\right)^k \quad (2.36)$$

avec

$$b_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 2 \\ \sum_{j=0}^k \frac{b_{i-1}(j) \left(\frac{i-2}{2}\right)_j (-k)_j}{j! \left(\frac{i-1}{2}\right)_j} \left(\frac{\bar{l}_{i-1} - \bar{l}_{i-2}}{\bar{l}_{i-1} - \bar{l}_i} \frac{\bar{l}_{i-1}}{\bar{l}_{i-2}}\right)^j & \text{pour } i = 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

et

$$(x)_k = x(x+1)(x+2) \dots (x+k-1)$$

Résultats :

Cette fonction de transfert est un modèle Analytique Géomorphologique d'Hydrogramme Unitaire (AGHU). Le modèle pluie-débit (équation 1.25) peut être utilisé et les résultats obtenus montrent que ([PCL 7], [PCL 8]) :

- ce nouveau modèle analytique possède des variables géomorphologiques, qui sont facilement et rapidement accessibles à partir d'une carte ou d'un SIG ;
- la nature du modèle, basée sur les caractéristiques fractales des réseaux hydrographiques, permet une utilisation à de multiples échelles et a ainsi permis de valider le modèle sur des bassins versants d'échelles très différentes ;
- les hypothèses de symétrie qui fondent le modèle lui donnent des caractères universel et versatile. Le modèle décrit ici la structure morphométrique des réseaux hydrographiques en particulier mais il peut aussi quantifier des structures ramifiées en général ;
- le modèle analytique de fonction de transfert étant paramétré par des variables géomorphologiques issues du bassin versant réel, l'AGHU correspondant permet, par simple convolution avec la pluie, d'obtenir des simulations pluie-débit ne nécessitant aucun calage. Ainsi, le modèle devient un outil utile à la prédiction de crues ainsi que pour l'étude de la réponse hydrologique sur des bassins versants non jaugés (Figure 2.22).

5 Analyse de structures spatiales

5.1 Application à l'analyse des formes du bocage

Quelles sont les influences d'un maillage bocager sur les flux hydrologiques et de contaminants ?

Objectifs et méthodes :

Le paysage de bocage, typique de l'Ouest de la France, a été considérablement dégradé par les restructurations et les agrandissements de parcelles liés aux remembrements successifs à partir du milieu du vingtième siècle. Depuis un peu plus d'une dizaine d'années, ce mouvement s'est inversé, suite aux études qui ont mis en valeur ses différentes vertus : préservation des espèces faunistiques et floristiques vivant dans et autour des haies (Burel & Baudry, 1994), préservation des sols grâce aux haies et talus les protégeant du lessivage et de l'érosion. Ainsi, après l'essoufflement du mouvement d'après-guerre favorisant

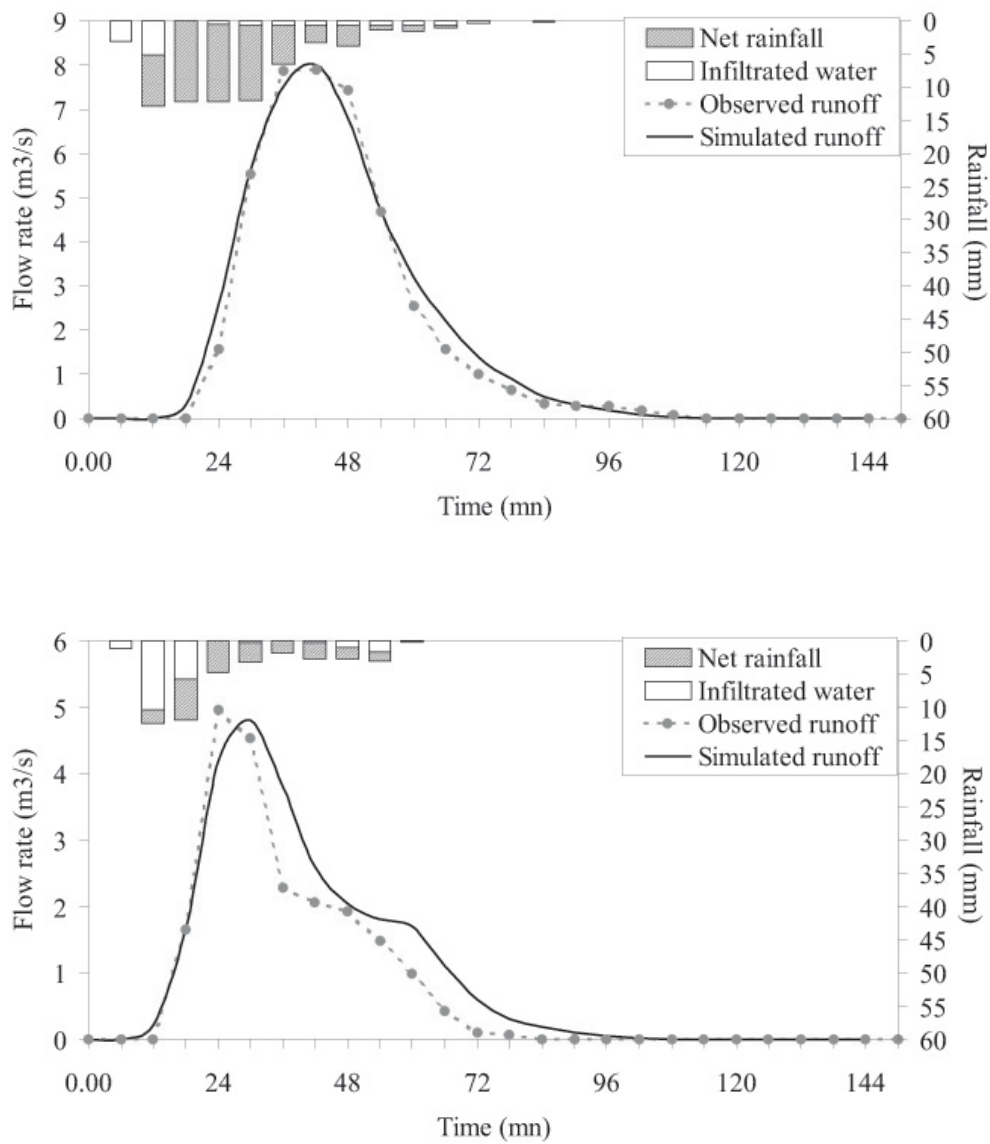


FIGURE 2.22 – Application du modèle pluie-débit sur un petit bassin versant de 26×10^4 m². L'utilisation de la fonction de transfert (équation 2.36) ne nécessite aucun calage.

l'agriculture intensive, les aménagements ruraux actuels auraient davantage tendance à réhabiliter le bocage, en relation avec un type d'agriculture plus raisonné et soucieux de l'environnement.

Il y a peu d'études qui se sont intéressées à l'influence du bocage sur les écoulements au niveau du bassin versant. Mérot (1978) et Mérot & Molenat (1999) ont étudié deux petits bassins versants géomorphologiquement similaires, l'un étant bocager et l'autre plus ouvert. Ils ont mis en évidence un léger effet "écrêteur de crue" dû à la présence du bocage. Il décrivent un coefficient de ruissellement moins important et des pics de crue moins élevés sur le bassin versant bocager. En outre, le volume ruisselé augmenterait linéairement avec la hauteur de pluie nette dans la situation avec bocage, mais exponentiellement sans bocage. De plus, l'état d'humidité du bassin aurait plus d'influence sur le bassin versant non bocager. Cependant, aucune comparaison de ce type n'a été effectuée sur un même bassin versant avec deux réseaux de haies différents, avant et après remembrement par exemple.

Résultats :

La première étape de ce travail a été de trouver une méthode pour essayer de caractériser la forme d'un maillage bocager ([PCL 10]). La déstructuration du maillage bocager observée entre 1958 et 1996 sur le bassin versant de l'étude se traduit par une diminution de la dimension fractale (Figure 2.23). Une approche géométrie a montré qu'il est possible de caractériser les formes du bocage à l'aide de la géométrie fractale (Figure 2.24). En d'autres termes, la diminution de la dimension fractale quantifie le démantèlement du bocage par une structure qui, avec le temps, devient plus hétérogène.

Ces informations avaient pour objectifs d'être utilisées au même titre que d'autres paramètres, tels que la densité de haies, la connectivité du réseau dans des modèles de fonctionnement de ce paysage : physique (hydrologie, ruissellement et érosion), chimique (diffusion des micro-polluants) ou biologiques (corridors écologiques).

Pour des raisons de santé grave du doctorant que j'encadrais, ce travail a malheureusement été abandonné.

5.2 Application à l'analyse des formes dendritiques végétales

Comment caractériser les formes végétales complexes ?

Objectifs et méthodes :

L'analogie entre réseaux hydrographique et structures végétales est bien connue (*i.e.* les réseaux hydrographiques sont dits dendritiques, du grec *dentros* qui signifie arbre). D'ailleurs du point de vue topologique, réseaux hydrographiques et structures végétales sont des "arbres" (Figure 2.25).

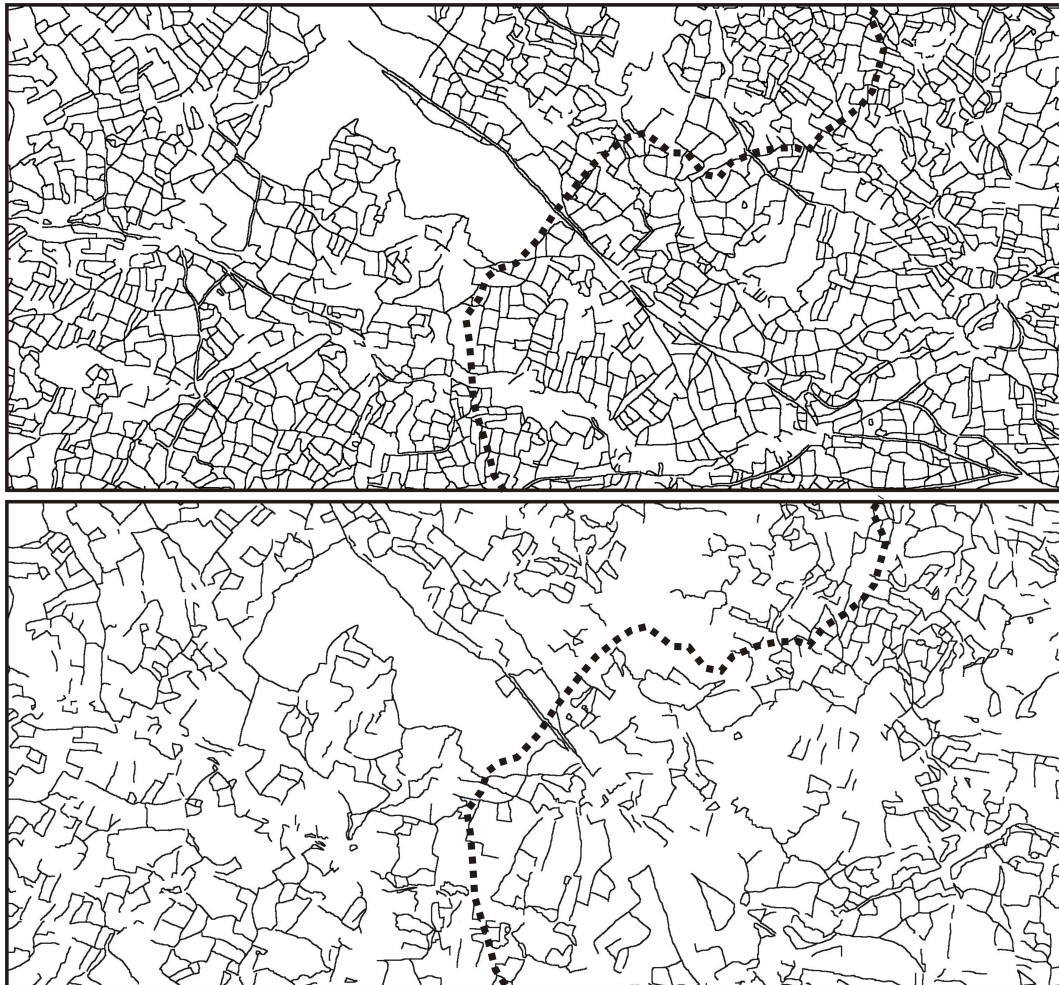


FIGURE 2.23 – La maille bocagère de 1958 (en haut) et en 1996 (en bas) laisse transparaître ici toute sa complexité. Comment caractériser cette structure ? La géométrie fractale est un outil intéressant pour ces formes si complexe.

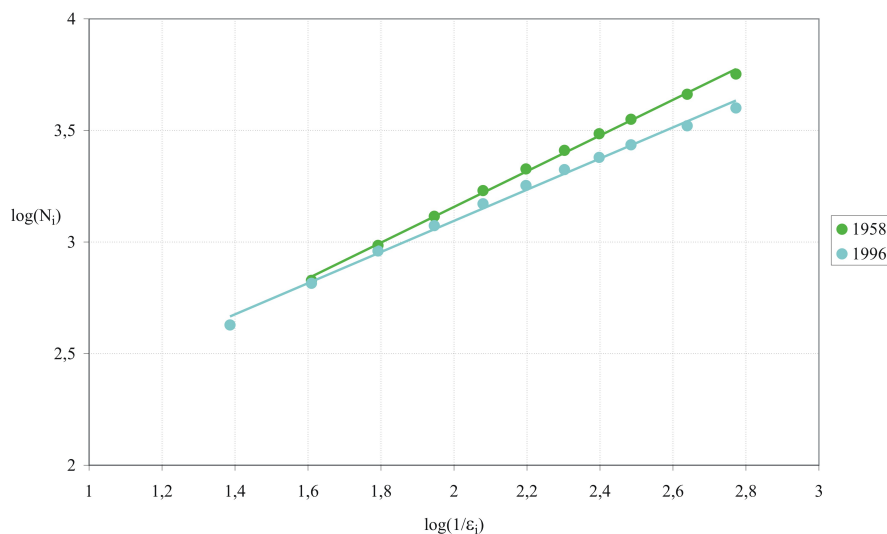


FIGURE 2.24 – La méthode du comptage de boîtes permet de calculer la dimension fractale du bocage à deux dates différentes. Elle vaut 1.84 en 1958 et 1.64 en 1996.

Dans son étude méthodologique sur les systèmes racinaires d'espèces herbacées, Fitter (1982) montre que l'on peut utiliser les lois de Horton en ordonnant les ramifications selon l'ordre morphométrique pour quantifier et ordonner la ramification racinaire.

Holland (1969) montre que la ramification de plusieurs espèces d'Eucalyptus peut être décrite et expliquée par les lois de Horton et par l'effet de la dominance apicale sur la croissance des jeunes rameaux.

Leopold (1971) travaillant sur des espèces d'architecture très différentes aboutit à la même conclusion. Il ajoute que l'arrangement le plus probable semble minimiser la longueur totale des tiges dans le système de ramification.

Oohata & Shidei (1971) étudient avec la méthode de Horton la ramification de quatre types de végétaux ligneux : des arbustes à grandes feuilles persistantes, des conifères à feuilles persistantes, des arbres à grandes feuilles caduques. Ils montrent que le rapport de ramification varie dans un éventail beaucoup plus large que les réseaux hydrographiques : de 3.0 à 8.0. Ce rapport varie en fonction du type biologique.

Withney (1972) montre chez 16 espèces ligneuses que le rapport de ramification dépend principalement de la disposition des feuilles, de la caducité et de la taille des aiguilles, et qu'il est plus caractéristique de l'espèce et relativement indépendant des conditions externes.

Utilisant l'arborescence morphométrique de Strahler, Barker et al. (1973) montrent que chez le bouleau et le pommier, les logarithmes des nombres moyens de branches terminales de chaque ordre de ramification, de leur diamètre moyen et du nombre de bourgeons portés

par ces branches sont alignés en regard des ordres de ramification portés en abscisse. Les logarithmes des moyennes des longueurs des rameaux correspondants sont beaucoup plus dispersés. Ils en déduisent que ces deux espèces ont bien une ramification fractale et que les longueurs sont plus significatives de la forme spécifique des arbres. Crawford & Young (1990) montrent, chez des chênes que la distribution de la longueur des branches suit un algorithme simple de type fractale commun avec d'autres organismes vivants. Berger (1991) utilise les fractales pour modéliser la croissance d'arbres, Chen et al. (1993) pour modéliser la canopée d'une population de peuplier et Mahon & Kronauer (1976) pour modéliser la mécanique de l'arbre.

La structure des arbres est donc un sujet très étudié et toujours d'actualité (Sismilich et al., 2003). Les enjeux sont multiples même si l'on peut citer des axes primordiaux (Muhar, 2001) :

- en botanique, la description bio-mathématique est un thème de recherche soutenu pour permettre le développement de modèle prédictif sur la production végétale, en particulier pour ce qui concerne les maladie des arbres. Les modèles mathématiques sur le développement des arbres sont nombreux et pour certains d'entre eux utilisent un vocabulaire très proche de celui des réseaux hydrographiques puisqu'ils parlent d'hydraulique végétale (Niklas, 1992; Fruh & Kurth, 1999; Bidet et al., 2000).
- en foresterie, la gestion du développement des forêts a besoin de connaître l'évolution de la forme des arbres en fonction de leurs conditions d'implantation (types de sol, co-existence avec d'autres espèces). Ceci peut également permettre de prédire l'évolution de l'impact visuel de la forêt et donc de prendre des mesures préventives (Berezovskaya et al., 1997).
- en imagerie, la construction *sensu stricto* d'une image fidèle de l'arbre est de plus en plus priseée, souvent dans l'utilisation de logiciels commerciaux (Viennot et al., 1989). Que les méthodes soient déterministes comme l'utilisation des L-systèmes (Lindenmayer & Prusinkiewicz, 1988), stochastique comme le système AMAP (Jaeger & de Reffye, 1992) ou encore botanique comme le système TREE (Bosanac, 1990), l'objectif est le même, obtenir une image de l'arbre la plus fidèle possible.

Résultats :

Le modèle de structure des réseaux hydrographiques (équation 2.36) est appliqué ici sur cet objet végétal qui est donc d'une nature complètement différente. Les seuls liens entre ces deux objets étant leur forme, leur propriété allométrique et leur nature fractale.

Ainsi on montre ([PCL 9], [PCL 11], [CCL 11]) que bien que très différents, structures végétales et réseaux hydrographiques semblent pouvoir être décrit par un même modèle mathématique (Figure 2.26).



FIGURE 2.25 – La structure d'une partie d'un *Cupressus Ciparis* (à gauche) est topologiquement semblable à celle de la Loire (à droite), les échelles sont pourtant très différentes.

5.3 Application au processus d'auto-organisation spatiale

Peut-on organiser des objets avec un rendu spatial naturel à partir de lois déterministes ?

Objectifs et méthodes :

Ce thème de recherche concerne essentiellement le développement d'un outil pour simuler la plantation de végétaux afin de recréer un aspect "naturel".

Résultats :

Ce thème a donné lieu à plusieurs développements :

- la création d'un logiciel d'analyse de dimensions fractales de plantations d'arbres dans le paysage ([DL 3]).
- le dépôt d'un brevet concernant un procédé d'élaboration d'un plan d'implantation de végétaux basé sur le principe d'auto-organisation ([B 1]).
- la participation à la création d'une entreprise (Société Aaricia) de prestation de services en plantation de végétaux par un ancien étudiant d'AgroCampus Ouest. Cette aide à la création d'entreprise s'est déroulée en plusieurs étapes :
 - avril 2002 : participation d'un ancien étudiant d'AgroCampus Ouest à un concours de

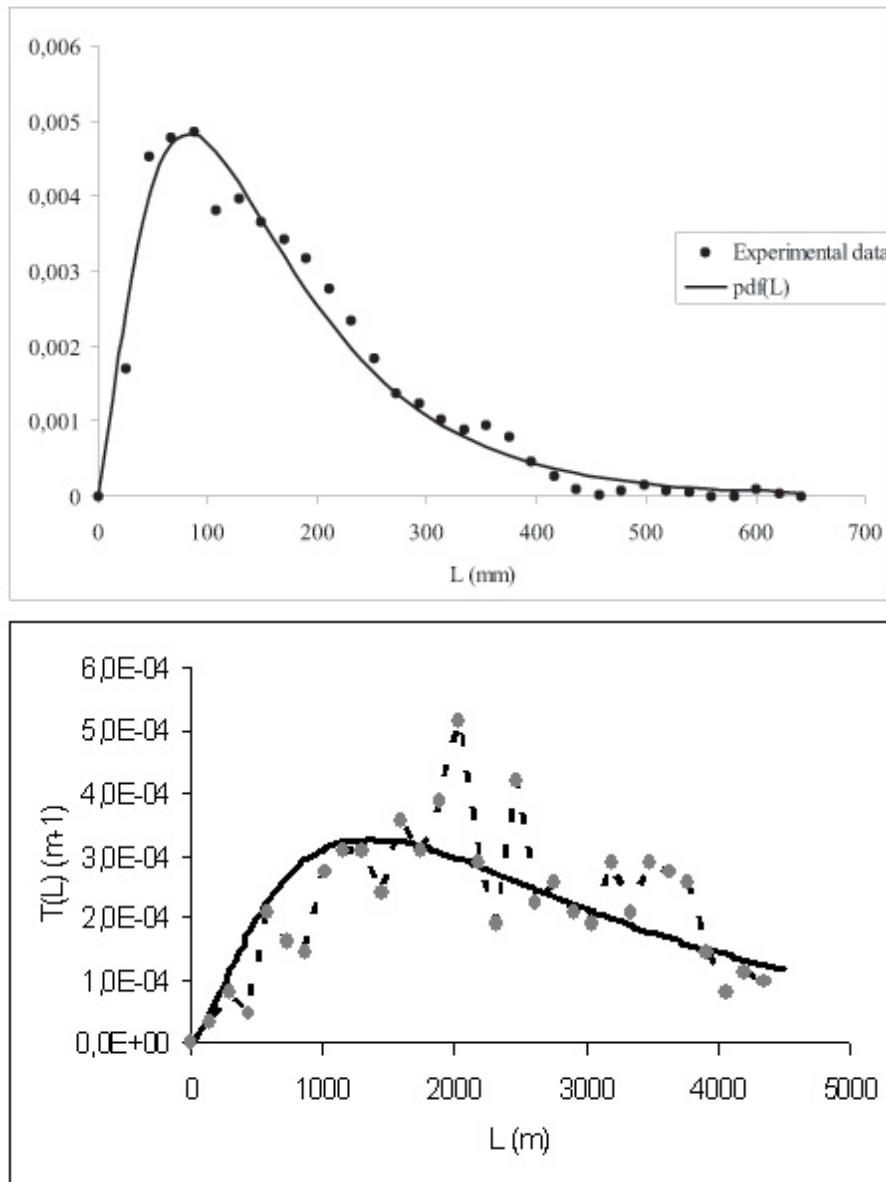


FIGURE 2.26 – La fonction allométrique (2.36) peut être appliquée sur des objets de natures très différentes et d'échelles très variées : un arbuste (en haut) et une rivière (en bas).

création d'entreprise (Angers Technopole Incubation et ANVAR) sur une idée innovante, idée basée sur les principes de notre brevet ([B 1]);

- juin 2002 : dépôt, auprès de l'INPI, du brevet ([B 1]) permettant à cet ancien étudiant d'avoir l'exclusivité de la méthode de plantation ;
- septembre 2002 : demande de financement du département paysage, auprès de l'ANVAR, pour l'embauche d'un analyste programmeur destiné à l'élaboration du logiciel de plantations auto-organisées, indispensable pour la prestation de services ;
- décembre 2002 : acceptation de notre demande de financement par l'ANVAR, à hauteur de 60000 Euros ;
- février 2003 : recrutement d'un analyste programmeur au département paysage.

Cette étude sur l'auto-organisation spatiale a fait l'objet d'importants développements théoriques et informatiques. Ces thématiques ont su à la fois se tourner vers le monde de la recherche appliquée, par le biais de collaboration avec l'ANVAR et la création d'une entreprise, et vers la recherche fondamentale, en proposant des modèles originaux de la structure de la répartition d'objets dans l'espace ([PCL 2], [PCL 3], [CCL4], [CCL 6]).

CHAPITRE 3

PARCOURS SCIENTIFIQUE

1 Présentation

Cyril Fleurant, né le 9 avril 1971

Docteur de l'école Nationale Supérieure des Mines de Paris

Enseignant-Chercheur, Unité de Recherche Paysage

AgroCampus Ouest - Département Paysage

2, rue Le Nôtre

49045 Angers cedex 01

Tél. : 02 41 22 54 98

Fax : 02 41 22 55 28

cyril.fleurant@agrocampus-ouest.fr

1.1 Carrière

Depuis 02/2001 Maître de Conférences, département Paysage, AgroCampus Ouest (Angers).

08/2003 - 09/2004 Délégation, département de Géographie, Université d'Oxford (Angleterre).

10/2000 - 01/2001 Maître Assistant, département de Physique Subatomique, École des Mines de Nantes.

11/1999 - 08/2000 ATER, département de Génie Civil, Université de Nantes-St Nazaire et École Centrale de Nantes.

10/1996 - 10/1999 Doctorant, Centre d'Informatique Géologique, École des Mines de Paris.

1.2 Formation, diplômes

2001 Qualification aux fonctions de Maître de Conférences en sections 35, 36 et 60.

2000 Doctorat en hydrologie et hydrogéologie quantitatives. UMR 7619, École des Mines de Paris.

1995 DEA hydrologie et hydrogéologie quantitatives. UMR 7619, Université P. & M. Curie (Paris).

1994 Maîtrise des Sciences et Techniques d'ingénierie des géoressources de l'eau et de l'environnement. Institut de géodynamique, Université de Bordeaux.

1990-1992 Mathématiques supérieures et spéciales. Lycée A. Briand (Saint-Nazaire).

1.3 Compétences techniques

- Programmation : C/C++, Scilab, \mathbb{R} , \LaTeX , Java
- Langues : Anglais (avancé), Espagnol (débutant), Russe (débutant)

1.4 Reviewer

Geophysical Research Letters (I.F. 2.5)

Nonlinear Process in Geophysics (I.F. 1.3)

1.5 Dimension internationale

La facette internationale de mon parcours scientifique s'exprime au travers de collaborations, de projets de recherche ou encore d'encadrement d'étudiants.

Le cadre technique de ma thèse de Doctorat a été développé pour répondre à la contribution du Centre d'Informatique Géologique de l'École des Mines de Paris au programme européen CARESS (EC Pr. : F14W-CT96-0021). Ce programme, qui s'est déroulé de 1996 à 1999, avait pour objectif d'essayer de comprendre l'influence des colloïdes sur le transport des radionucléides autour des zones de stockage des déchets nucléaires. La contribution de l'École des Mines dans ce programme était d'apporter sa compétence en terme de calcul numérique et de modélisation. Ce programme de recherche m'a permis de rencontrer de nombreux partenaires européens :

- CEA (Saclay, France)
- CNRS (France)
- University of Loughborough (Royaume-Unis)
- INFN (Italie)
- GSF (Allemagne)
- CIEMAT (Espagne)
- QuantiSci (Royaume-Unis)

Les réunions d'avancement inter-laboratoires se sont déroulées tous les six mois afin de mettre en commun les informations résultantes des compétences respectives. Ces réunions ont donc amené à plusieurs missions à l'étranger :

Belgique, 2000 2 jours, réunions des co-partenaires du programme européen *CARESS*.

Espagne, 1998 2 jours, réunions des co-partenaires du programme européen *CARESS*.

Italie, 1997 2 jours, réunions des co-partenaires du programme européen *CARESS*.

Angleterre, 1996 3 jours, réunions des co-partenaires du programme européen *CARESS*.

Afin d'ouvrir mon profil de recherche à la modélisation en géomorphologie j'ai pris des contacts avec des collègues du Geomorphology Research Group (Université d'Oxford). Nous avons développé ensemble un programme de recherche pour contribuer au développement d'un outil de modélisation capable de simuler les processus de genèse des paysages karstiques. Afin de rendre cette collaboration plus efficace, j'ai passé un an de délégation dans ce groupe de recherche :

Angleterre, 2004 1 an, délégation au Department of Geography, University of Oxford, UK.

Dans le cadre d'une collaboration avec des collègues de l'université de Nantes (laboratoire de Planétologie et de Géodynamique) destinée à comparer les processus de formation des Pans de Namibie avec ceux qui forment les lacs sur Titan (le plus gros satellite de Saturne), j'ai participé à 15 jours de terrain (géologie) en Namibie :

Namibie, 2008 2 semaines de terrain dans le cadre du projet *Reliefs - CNRS* : étude de la morphologie des "pans" d'Etosha.

J'ai été invité, en tant que conférencier, dans deux universités Nord américaine pour y faire une conférence, rencontrer des étudiants et nouer des collaborations :

Canada, 2007 1 semaine, conférencier invité par le Centre de Recherche en Horticulture, Université Laval, Québec.

États-Unis, 2006 1 semaine, conférencier invité par le Landscape Architecture Department, Michigan State University.

2 Activités d'encadrement

2.1 Encadrement de thèses

2002-2004 Bernard Roland, AgroCampus Ouest.

Sujet : Bocages, formes du paysage et flux.

La thèse a été interrompue pour des raisons de santé de Bernard Roland.

2005-2008 Audrey Chaput-Bardy, Université d'Angers.

Sujet : Structure des populations sur un réseau hydrographique dendritique. Date de soutenance : 24 juin 2008.

2.2 Jury de thèse

2008 Audrey Chaput-Bardy : **co-encadrant**. Date de soutenance : 24 juin 2008 (Université d'Angers). Sujet : structure des populations sur un réseau hydrographique dendritique. Jury : X. Vekemans (rapporteur, président de Jury, Professeur à l'Université de Lille 1), Stéphanie Manel (rapporteuse, Maître de Conférences, HDR, à l'Université Joseph Fourier, Grenoble), Eric Petit (rapporteur, Maître de Conférences, HDR, INRA/AgroCampus Rennes), A. Pagano (directeur de thèse, Maître de Conférences, HDR, à l'Université d'Angers), J. Secondi (co-encadrant, Maître de Conférences à l'Université d'Angers), C. Fleurant (co-encadrant, Maître de Conférences à l'Institut National d'Horticulture, Angers).

2004 Budi Kartiwa : **examineur**. Date de soutenance : 4 mars 2004 (Université d'Angers). Sujet : Modélisation du fonctionnement hydrologique des bassins versants : applications sur des bassins versants de Java et Sumatra (Indonésie). Jury : G. Moguelet (Président de Jury, Directeur de l'UFR Sciences et Professeur à l'Université d'Angers), J. Corbonnois (rapporteuse, Professeure à l'université de Metz), F. Petit (Rapporteur, Professeur à l'Université de Liège), J. Duchesne (Directeur de thèse, Professeur à l'Institut National d'Horticulture - Angers), B. Lidon (Examineur, Ingénieur au CIRAD - Montpellier), G. Irianto (Examineur, chef du département CSAR - Indonésie), C. Fleurant (co-encadrant, Maître de Conférences à l'Institut National d'Horticulture, Angers).

2.3 Encadrement de stages de recherche, niveau MASTER

Lehmann J. W. (2009) Replicating natural patterns in the landscape : a fractal based method and application for reforesting a reclaimed Michigan surface mine, Master in Landscape Architecture, School of Planning and Design, Michigan State University (USA), 54 p.

Sylla S. (2009) Optimisation et mise en service d'un logiciel de calcul appliqué à la génétique spatialisée des populations, Master informatique, Université d'Angers, 50 p.

Réthoré C. (2007) Développement d'une interface graphique du logiciel *Gene-Net*, Master informatique, Université d'Angers, 50 p.

Chartin C. (2006) Modélisation de l'érosion dans les vignobles de l'A.O.C. Coteaux-du-Layon-Chaumes, inscrits au Patrimoine Mondiale de l'UNESCO, Master géo-hydrosystèmes et environnements, Université de Tours, 50 p.

Rochereau L. (2006) Modélisation des karsts en cockpit à grande échelle : caractérisation scalante de ces paysages, Master sciences de la terre, de l'univers et de l'environnement,

Université de Nantes, 23 p.

Darlhac E. (2005) Développement d'un logiciel de calcul appliqué à la génétique spatialisée des populations, Master informatique, Université d'Angers, 48 p.

Mallard B. (2005) Modélisation numérique d'évolution des reliefs karstiques, Master sciences de la terre, de l'univers et de l'environnement, Université de Nantes, 26 p.

Boulestreau P. (2003) étude des relations forme-flux dans les bassins versants bocagers, Master hydrologie, hydrogéologie, géochimie et géostatistique, Université Pierre et Marie Curie, 50 p.

Durandet L. (2003) Aide à la conception de plantation de végétaux, Master modèles informatiques avancés, Université d'Angers, 46 p.

Roquigny E. (2001) Les fractales : un nouvel outil au service du paysage, école Nationale d'Ingénieurs en Horticulture et Paysage, Institut National d'Horticulture, 20 p.

3 Activités d'enseignement

3.1 Service d'enseignement des années 1997-1998-1999 : Doctorant

Cette section présente mes enseignements pendant le déroulement de ma thèse de Doctorat à l'école des Mines de Paris. Durant ces deux années universitaires j'ai effectué **95 h eq. TD** d'enseignement réparties de la façon suivante :

Matière	%	Niveau
Modélisation hydrogéologique	50	M2
Programmation C++	25	M2
Hydrologie et hydrogéologie	20	L3
Hydrologie et hydrogéologie	5	L2

Les TD de "modélisation hydrologique et hydrogéologique" :

Ces séances ont été suivies par des étudiants du DEA Hydrologie, Hydrogéologie, Géochimie et Géostatistique de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6. Cette formation comportait une composante théorique sur la modélisation hydrologique et hydrogéologique : notions de transfert (pluie, infiltration, ruissellement), discrétisation d'un bassin versant, étude des conditions aux limites, résolution des équations par une méthode aux différences finies. Ensuite, l'apprentissage de la modélisation numérique était fait par une application avec le logiciel *NEWSAM* : calcul de l'hydrodynamique souterraine en tenant compte des apports hydrologiques de surface (pluie, débit extérieur au bassin versant), calage de débit de rivière sur des données réelles, pompage avec notion de débit réservé.

Les Cours et TD de "programmation C++" :

Cette formation a été dispensée aux étudiants du DEA "Hydrologie, Hydrogéologie, Géochimie et Géostatistique" de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6. La partie théorique

(langage C : variables, opérateurs, fonctions, structures de contrôle, tableaux et pointeurs, langage C++, notion de classe) s'est déroulée sur une demi-journée et la partie programmation (calcul intégral, traitement des données, programmation orientée objets) sur trois jours et demi. Ces enseignements avaient pour support un document photocopié donné aux étudiants.

Les TP d'"hydrologie et hydrogéologie" :

Cinq séances de TP, délivrées aux élèves ingénieurs des mines (Paris) de première année, ayant pour objet l'utilisation des cartes géologiques dans le cadre de certaines activités d'ingénierie (environnement, travaux publics, ressources en eau, ...). Une première partie était destinée à l'apprentissage des méthodes de lecture et d'exploitation des cartes géologiques, puis dans un second temps, les techniques acquises servaient à étudier différents problèmes d'hydrogéologie régionale (alimentation en eau, recherche de pollution, etc).

Les Cours d'"hydrologie et d'hydrogéologie" :

Cette séance de cours, en classe préparatoire BCPST2 du lycée François 1^{er} de Fontainebleau (Mme Meriguet), a permis d'illustrer l'application des mathématiques et de la physique par un problème concret d'hydrologie : la pollution d'un fleuve. Nous avons montré comment on pouvait simplifier un problème complexe (pollution d'un fleuve par une usine) en utilisant une méthode théorique (méthode des images) pour donner rapidement des informations sur ce problème.

3.2 Service d'enseignement de l'année universitaire 1999-2000 : ATER

Cette section présente mes enseignements en IUT au département de Génie Civil de Saint-Nazaire en tant qu'ATER (service à mi-temps). Durant cette année universitaire j'ai effectué **110 h eq. TD** d'enseignement répartis de la façon suivante :

Matière	%	Niveau
Sciences Physiques	22	L2
Mathématiques	20	L2
électricité	28	L1
Informatique	30	L1

Les TP d'"électricité" s'articulaient autour des connaissances suivantes :

- Dipôles passifs en courant alternatif monophasé, puissance en alternatif sinusoïdal, systèmes triphasés, transformateurs.

Les 13 étudiants sont répartis sur 6 TP :

- Redressement et filtrage : à partir d'une tension alternative du réseau, obtenir une tension continue.

- Résonnance : mettre en évidence les phénomènes de surtension ou de surintensité qui apparaissent à la résonnance.
- Triphasé : étudier les différents montages de récepteurs en triphasé et mesurer la puissance consommée par ces derniers.
- Transformateur monophasé : déterminer les caractéristiques d'un transformateur à partir de divers essais (à vide, en court circuit).
- Charge et décharge d'un condensateur : étudier le courant dans un circuit inductif.
- Ampèremètre et voltmètre : étudier leurs caractéristiques et applications à la recherche de résistance par la méthode du pont de Wheastone.

Le programme enseigné est le suivant :

- Généralités sur la logique et l'informatique, logique séquentielle, logique conditionnelle, logique itérative, algorithmique, programmation en Visual Basic.

Les 12 étudiants (2 par poste informatique : PC pentium II, 166 MHz) suivent, pendant le TP, les enseignements cités plus haut et appliquent ces connaissances à divers exercices : gestion de base de données, calculs de sommes et produits de matrices, etc.

Les enseignements de Sciences Physiques se répartissent en deux matières :

- L'éclairage : la lumière, grandeurs et unités photométriques, aspects colorés des sources, sources lumineuses, les luminaires.
- L'acoustique : le son, réflexion et réfraction des ondes sonores, le bruit.

Les 12 étudiants sont répartis sur 4 TP :

- Isolation acoustique d'une façade : utiliser un sonomètre pour mesurer l'intensité d'un bruit.
- Bruits aérien et d'impact : mesurer le bruit et étudier l'isolation acoustique d'une paroi.
- Photométrie : étudier une source lumineuse en chambre noire.
- éclairage artificiel intérieur : utiliser un photomètre pour étudier l'éclairage artificiel.

Les enseignements de mathématiques sont les suivants :

- Probabilité : tirage aléatoire, variable aléatoire, lois de densité discrètes et continues, moments.
- Statistiques : histogramme, moyenne et écart-type, droite de Henry, coefficient de corrélation.
- équations différentielles : homogène, de Bernoulli, du premier et second ordre.
- Algèbre linéaire : matrices, valeurs et vecteurs propres, diagonalisation et inversion.

3.3 Service d'enseignement des années universitaires 2001 à 2008 : Maître de Conférences

Afin de mieux répondre aux exigences des secteurs de l'horticulture et du paysage, Agro-Campus Ouest a créé en 1998 deux nouvelles écoles d'ingénieurs : l'ENIHP (école Nationale d'Ingénieurs en Horticulture et Paysage) et l'ENSHAP (école Nationale Supérieure d'Horticulture et d'Aménagement du Paysage).

L'ENIHP possède un cursus sur 5 ans qui comprend de nombreux stages qui ancrent la formation des ingénieurs dans le monde professionnel. Elle recrute 45 bacheliers en 1ère année, 20 titulaires d'un BTS ou d'un DUT en 2ème année.

L'ENSHAP propose un cursus en 3 ans, après une classe préparatoire ou un premier cycle universitaire. À l'ENSHAP les étudiants complètent et approfondissent leur formation scientifique et acquièrent une formation technologique, économique et humaine, garante de leur opérationnalité professionnelle.

J'enseigne à la fois à l'ENIHP et à l'ENSHAP. De plus, dans le cadre des diplômes co-habilités, j'ai enseigné également dans le Master Pro. "Ecoingénierie des zones humides et biodiversité" (de 2001 à 2005) et dans le Master Pro. "Science et ingénierie de l'environnement" (en 2005).

Cette section présente mes enseignements à AgroCampus Ouest en tant que Maître de Conférences. Durant ces 7 années universitaires j'ai effectué :

- 2002-2003 : **130 h eq. TD**
- 2003-2004 : **140 h eq. TD**
- 2004-2005 : **165 h eq. TD**
- 2005-2006, à 80% : **140 h eq. TD**
- 2006-2007, à 80% : **140 h eq. TD**
- 2007-2008 : **165 h eq. TD**
- 2008-2009 : **204 h eq. TD**

répartis de la façon suivante :

Matières	%	Niveau
Hydrologie quantitative	20	M2
Modélisation en paysage	30	M1
Hydrologie quantitative	40	L3
Initiation au paysage	10	L2

Les objectifs de l'ensemble des cours sont :

- d'être capable de mettre en équation un problème complexe en sciences de l'eau ou du paysage ;
- de pouvoir développer une méthodologie (analytique ou numérique) pour le résoudre ;
- de maîtriser des outils numériques simples (Excel) et plus complexes (programmation sous Scilab ou \mathbb{R}) ;
- de structurer ses connaissances pour pouvoir critiquer les résultats obtenus.

Les cours d'hydrologie et d'hydrogéologie quantitatives abordent les thèmes relatifs aux sciences de l'eau et à la modélisation de leurs processus :

- les enjeux et le contexte dans l'aménagement du paysage
- les notions liées aux bassins versants, la mesure des pluies et débits
- l'érosion, les inondations et l'aménagement
- l'hydrologie fréquentielle
- l'assainissement pluviale et le dimensionnement d'ouvrages
- le transfert de matière dans les milieux poreux et fracturés, la ressource en eau
- la modélisation pluie-débit
- la modélisation du transfert de polluants.

Le cours de modélisation en paysage développent les approches méthodologiques utilisées par les modèles :

- la modélisation pour quoi faire ?
- la modélisation comment faire ?
- approches physique/analogique/axiomatique/déterministe/stochastique/...
- applications aux géosciences

Les cours en initiation au paysage font intervenir trois enseignants sur trois approches complémentaires du paysage : l'approche sensible et cognitive, l'approche sociale et l'approche scientifique. J'interviens dans cette dernière partie :

- le paysage sous l'angle de la géographie, de la géophysique et de la géomorphologique
- les outils d'analyse du paysage
- la quantification et la modélisation du paysage

3.4 Formation continue

On m'a proposé de faire un enseignement (mars 1999) dans le cadre d'une formation continue proposée à des ingénieurs et chercheurs, par le Centre d'Informatique Géologique de l'école des Mines de Paris. La formation était de **32 h eq. TD** délivrée à 6 ingénieurs et chercheurs venant d'EDF (électricité de France, centre de recherche de Chatou), de l'IPSN (Institut de Protection et de Sureté Nucléaire, Saclay) et de Calligée (Bureau d'études de Sciences et techniques en Géologie, Nantes).

Cette formation comportait une composante théorique sur la modélisation hydrologique et hydrogéologique : notions de transfert (pluie, infiltration, ruissellement), discrétisation d'un bassin versant, étude des conditions aux limites, résolution des équations par une méthode aux différences finies. Ensuite, l'apprentissage de la modélisation numérique était fait par une application avec le logiciel *NEWSAM* : calcul de l'hydrodynamique souterraine en tenant compte des apports hydrologiques de surface (pluie, débit extérieur au bassin versant), calage de débit de rivière sur des données réelles, pompage avec notion de débit réservé.

3.5 Méthodes pédagogiques : les TICE

L'ensemble des mes cours, supports de cours, énoncés de TD et TP et données numériques sont en accès en ligne sur l'intranet d'AgroCampus Ouest, et consultables à l'adresse :

<http://intranet.inh.fr/cours/cfleuran/>.

Ces ressources ne sont donc accessibles que depuis l'intranet d'AgroCampus Ouest. Toutefois le lecteur peut parcourir la liste des cours (sans liens d'accès) à l'adresse :

<http://www.inh.fr/pageperso/cfleuran/lectures.html>.

La mise en place des TICE permet aux étudiants d'avoir des ressources pédagogiques accessibles à tout instant. Il s'agit notamment d'avoir l'énoncé exact du TD ou TP, se remémorer les consignes de rédaction du TD ou TP. Elles leurs permettent également, pendant les TD ou TP, de travailler en autonomie : les ressources sont à leur disposition, à eux de faire l'effort de chercher l'information. De plus, en dehors du cours, les étudiants peuvent reprendre à tête reposée un schéma, une formule, un concept.

Ces ressources permettent également à l'enseignant, d'utiliser, via un vidéo-projecteur, des outils efficaces de communications (PowerPoint, par exemple) et d'avoir un accès rapide et facile à ces ressources, via les connexions internet, quelle que soit la salle où il a cours.

L'ensemble des supports de cours sont des documents PowerPoint et ont pour objectifs de guider l'étudiant dans la progression et la compréhension du cours, d'illustrer les propos de l'enseignant et d'alléger l'attention de l'enseignant sur la forme afin qu'il puisse se concentrer sur le fond.

3.6 Création de documents pédagogiques

Ces documents sont consultables sur l'intranet d'AgroCampus Ouest :

(<http://intranet.inh.fr/cours/cfleuran/cours/>):

Fleurant C., 2001-2009, Cours d'initiation au paysage : le paysage physique, 24 diapositives.

Fleurant C., 2001-2009, Cours d'initiation au paysage : quantification du paysage, 19 diapositives.

Fleurant C., 2001-2009, Cours d'initiation au paysage : informatique et paysage, 21 diapositives.

Fleurant C., 2001-2009, Cours d'initiation au paysage : exemples, 29 diapositives.

Fleurant C., 2001-2009, Cours d'hydrologie quantitative : hydrologie générale, 44 diapositives.

Fleurant C., 2001-2009, Cours d'hydrologie quantitative : bassin versant et réponse hydrologique, 24 diapositives.

- Fleurant C.**, 2001-2009, Cours d'hydrologie quantitative : modèles hydrologiques, 38 diapositives.
- Fleurant C.**, 2001-2009, Cours d'hydrologie quantitative : hydrologie et aménagement du paysage, 19 diapositives.
- Fleurant C.**, 2001-2009, Cours d'hydrologie quantitative : hydrologie et dimensionnement d'ouvrages, 72 diapositives.
- Fleurant C.**, 2001-2009, Cours d'hydrologie quantitative : hydrologie et changement climatique, 14 diapositives.
- Fleurant C.**, 2005-2009, Cours de modélisation en paysage, 76 diapositives.
- Fleurant C.**, 2005-2009, Cours de programmation \mathbb{R} , 19 diapositives.
- Fleurant C.**, 2002, Cours d'hydrologie et d'hydrogéologie quantitatives, 99 p.
- Fleurant C.**, 1999, Initiation à la programmation C++ - cours-TD aux élèves du DEA Hydrologie, Hydrogéologie, Géochimie et Géostatistique, Rapport Technique LHM/RD/99/3, école des Mines de Paris, Centre d'Informatique Géologique, 41 pages.

3.7 Tutorat de stages de fin d'étude (M2)

- Franchi A.** (2001), La Politique Agricole Commune et ses réformes : implications pour le paysage et la biodiversité en Europe, 38 p.
- Leroy L.** (2001), Le maître d'oeuvre de conception et d'exécution des aménagements paysagers dans son environnement, 48 p.
- Schleuniger C.** (2001), Le Pays des 7 Rivières : vers une gestion différenciée des espaces communaux ruraux, 45 p.
- Benhamo S.** (2002) La prise en compte des valeurs paysagères dans l'aménagement et la gestion des rivières-vallées. Analyse critique de retours d'expériences d'études paysagères réalisées sur deux sites particuliers : Le bassin versant de la Sèvre Nantaise (44,49,79,85) et le bassin versant du Wimereux, 66 p.
- Gouleau J.** (2002) Éléments de méthode pour l'étude des grands paysages du sud du Gard, 46 p.
- Attila C.** (2003) Le Seuil de Bourgogne : identité paysagère et projet de territoire, 39 p.
- Bigot D.** (2003) Quelques éléments pour améliorer la gestion de l'eau en Haute-Gironde, 43 p.
- Gysin S.** (2003) Diagnostic et orientations du volet "zones naturelles" du Projet de Territoire de la Communauté de Communes Loire et Sillon dans une contexte de mise en place d'un Schéma de Cohérence Territoriale (SCOT) à l'échelle de la métropole Nantes Saint-Nazaire, 40 p.
- Lanher M.** (2003) Perception et traitement paysager d'une infrastructure de transport en tissu périurbain, 41 p.
- Leplé F.** (2003) Vayres-les-Roses : comment promouvoir les roses pour valoriser et développer le territoire de la commune ?, 40 p.

- Malherbe C.** (2003) Plan d'Interprétation et de Développement Touristique Durable de la Vallée de la Vésubie : étude paysagère et axes de réflexion, 52 p.
- Minguy F.** (2003) Les structures arborées dans les paysages de Poitou-Charentes. Élaboration d'une méthodologie d'inventaire et proposition d'outils d'analyse. Application à trois communes du secteur bocager des terres rouges et de la plaine de Niort, 46 p.
- Nicolas S.** (2003) Étude paysagère et d'environnement préalable à l'aménagement foncier de la commune de Cernion (08), 41 p.
- Paris M.** (2003) Construire la ville complexe. Architecture, urbanisme et paysage, 41 p.
- Delbosc M.** (2003) De l'Esquisse au Dossier de Consultation des Entreprises : l'Inforgani-sation, 38 p.
- Hantz O.** (2003) Le patrimoine vert des Autoroutes du Sud de la France : inventaire et informatisation des données en vue d'une aide à la gestion, 52 p.
- Barbry Y.** (2004) La maîtrise d'oeuvre paysage des projets privés : de l'esquisse à la réali-sation, 43 p.
- Matringe C.** (2004) L'ouverture d'une carrière : conciliation entre économie, écologie et paysage. Exemple en bouche de Moisson (78), 44 p.
- Ruiz S.** (2004) Analyse paysagère et proposition d'un parti d'aménagement de la Section Muret/Mortres-Tolosane de l'Autoroute A64, 72 p.
- Suire A.** (2004) Mise en place d'un Plan Loire Paysage, 73 p.
- Debois C.** (2005) Réhabilitation d'anciennes carrières en base de loisirs dans une optique écologique, 46 p.
- Deneuille A.** (2005) Le Répertoire départemental "Architecture, Paysage et Développe-ment local" dans le département de la Drome. Une manière de concilier paysage et déve-loppement local, 34 p.
- Gicquel G.** (2005) Établissement d'un schéma directeur pour un développement écono-mique et durable des carrières de pierres ornementales, 33 p.
- Guyodo M.** (2005) Études préalables à l'aménagement d'un espace ludique et didactique de trois hectares, 50 p.
- Léonardon E.** (2005), Analyse de l'occupation du sol et identification des unités paysa-gères en vue d'une gestion optimale des ressources naturelles sur la partie haute du bassin versant du Rio Conchos - Sierra Tarahumara, Etat de Chihuahua, Mexique, 32 p.
- Marqueton S.** (2005) Le volet paysager des études d'impact sur l'environnement pour les projets de parc éolien, 60 p.
- Dufour J.-B.** (2006) L'assainissement alternatif dans les projets d'aménagement. Une ré-ponse à la problématique 'eaux pluviales', 55 p.
- Mendiboure M.** (2006) Le Parc Central de Doha : un projet qui marque l'ouverture du Qatar à l'Occident, 39 p.
- Pinet M.** (2006) Le paysage pour donner des émotions, 45 p.
- Sirami A.-C.** (2006) Carrières et aménagement du territoire : le paysage, contrainte ou guide de projet, 40 p.

- Bonnot C.** (2007) La gestion des eaux pluviales dans les aménagements. Application au projet, 37 p.
- Drevet V.** (2007) Reconquête et appropriation d'un site dégradé au bord de la Loire : Le Breil, 50 p.
- Leroy E.** (2007) Quel outil pour une organisation durable des espaces destinés à l'extension urbaine sur le littoral ?, 45 p.
- Nussbaumer J.** (2007) Quel type de travaux neufs développer dans l'agence ISS Mulhouse pour en assurer son activité ?, 39 p.
- Sordel N.** (2007) Les opérations grand site ou comment allier tourisme et préservation d'un site remarquable ?, 50 p.
- Besse A.** (2008) Faire du parc de stationnement un élément positif du paysage, 46 p.
- Goffi C.** (2008) Influence de la structure du bocage et des pratiques agricoles sur trois espèces de carabes à diverses échelles spatiales et temporelles, 35 p.
- Morice M.** (2008) La perception du paysage dans les études d'impact d'environnement, analyse et apports d'outils : le suiveur du regard, 40.
- Debroize J.-M.** (2008) Etude d'impact du projet d'aménagement, 39 p.
- Oeuvrare M.** (2008) Quels aménagements face aux contraintes posées par la localisation géographique de la région du Finnmark ? 45 p.
- Gaulard L.** (2009) Etudes de paysage en milieu urbain et péri-urbains dans le cadre de l'agence, 45 p.
- Micand A.** (2009) Participer à l'élaboration d'un plan de gestion des équipements d'accueil du public du littoral oléronnaise, 45 p.
- Bréheret M.** (2009) Entrée paysagère pour un projet d'urbanisme, regards croisés d'un paysagiste et d'un urbaniste et influences sur un projet de territoire, 45 p.

3.8 Missions d'enseignement à l'étranger

2006 8h de cours à des élèves de la Michigan State University (USA).

4 Activités de vie d'équipe

4.1 Responsabilités et fonctions

2008 Organisateur des 1ères Journées Doctorales en Paysage

<http://recherche-paysage.inh.fr>

2007-2011 Élu Directeur de l'équipe de recherche *Paysage*.

2007-2009 Élu au Conseil d'Administration d'AgroCampus Ouest.

2005-2006 Membre du comité de pilotage de la formation Master Paysage.

2004-2006 Élu au conseil réglementaire des enseignants.

2004-2005 Membre du comité de pilotage de la réorganisation des formations LMD.

2002-2003 Responsable du Master 2 Paysage.

4.2 Participation à des commissions

depuis 2001 Commission documentation : achat de livres (enseignement et recherche) et abonnements aux revues scientifiques (papiers et numérique). Cette commission se réunit une fois par semestre pour faire le point sur les sujets liés aux ouvrages et revues.

depuis 2005 Commission informatique : organisation de l'informatique à AgroCampus Ouest, tant au niveau de l'enseignement que de la recherche.

2001-2002 Commission de réflexion sur l'enseignement des sciences à AgroCampus Ouest. Le travail a consisté à s'assurer des liens entre les matières fondamentales (mathématiques et physiques) et leurs applications dans le cursus des ingénieurs d'AgroCampus Ouest.

4.3 Participation à des jurys

2009 Jury des concours agronomiques et vétérinaires, concours A, classes préparatoires BCPST (INA-PG).

2009 Jury de recrutement d'un Maître de Conférences en Géographie Physique (Université d'Angers), poste MCF0641.

2008 Jury de thèse d'Audrey Chaput-Bardy en tant que co-encadrant.

2004 Jury de thèse de Budi Kartiwa en tant qu'examinateur.

depuis 2001 Jurys de mémoire de fin d'études des élèves ingénieurs d'AgroCampus Ouest, soit 84 jurys de Master 2 .

2002-2005 Jurys de recrutement des étudiants du Master Pro. Ecoingénierie des zones humides et biodiversité.

2002-2003 Jurys de recrutement des futurs étudiants ingénieurs de l'ENIHP.

5 Liste des publications

5.1 Synthèse :

Publications avec Comité de Lecture (PCL)	14
Brevet (B)	1
Conférencier Invité (CI)	2
Conférences avec Comité de Lecture (CCL)	17
Rapports de Recherche (RR)	8
Développement de Logiciels (DL)	6
Vulgarisation Scientifique (VS)	2

5.2 Articles soumis ou en cours d'ici fin 2009

[PCL 0] Bourgeois O., Lopez T., Le Mouélic S., Tobie G., **Fleurant C.**, Le Corre L., Rodriguez S., Bodeur Y., Le Deit L. and C. Sotin, The lakes of Titan : a model of formation based on surface dissolution/precipitation processes and landforms of the semi-arid Etosha basin (Namibia), soumis à *Icarus*.

[PCL 0] Chaput-Bardy A., Secondi J., Lemaire C. and **C. Fleurant**, *Gene-Net* an individual-based model to simulate dispersal and gene flow in synthetic river networks, soumis à *Molecular Ecology Resources*.

[PCL 0] Fourcade Y., Secondi J., Chaput-Bardy A., **Fleurant C.** and C. Lemaire, The variance of F_{st} among loci in hydrographic networks, sera soumis à *Genetics*.

5.3 Publications avec comité de lecture (PCL)

[PCL 1] Chaput-Bardy A., **Fleurant C.**, Secondi J. and C. Lemaire, 2009, Modelling the effect of in-stream and overland dispersal on gene flow in river networks, *Ecological Modelling*, sous presse.

[PCL 2] **Fleurant C.**, Burley J.B., Loures L., Lehman W. and J. Mchugh, 2009, Inverse Box-Counting Method and Application : A Fractal-Based Procedure To Reclaim a Michigan Surface Mine, *WSEAS Transactions on Environment and Development*, 1(5), p.76-85.

[PCL 3] **Fleurant C.**, Burley J.B., Loures L., Lehman W. and J. Mchugh, 2008, Inverse box-counting method : a fractal-based procedure to create biospheric landscape patterns, Panagopoulos, T. and J.B. Burley, (eds.) in : *New Aspects Of Landscape Architecture Proceedings Of The 1st WSEAS International Conference On Landscape Architecture (La '08)* Algarve, Portugal, p. 86-91.

[PCL 4] **Fleurant C.**, Tucker G. and H.A. Viles, 2008, A model of cockpit karst landscape, *Géomorphologie, Relief, Processus, Environnement*, 1, p. 3-14.

- [PCL 5] **Fleurant C.**, Tucker G. and H.A. Viles, 2008, A cockpit karst evolution model, *Journal of the Geological Society, Special issue : Landscape Evolution : Denudation, Climate and Tectonics over Different Time and Space Scales*, 296, p. 47-62.
- [PCL 6] **Fleurant C.**, Tucker G.E. and H.A. Viles, 2008, Modèle d'évolution de paysages, application aux karsts en cockpit de Jamaïque, *Karstologia*, 49, p. 33-42.
- [PCL 7] **Fleurant C.**, Kartiwa B. and B. Roland, 2006, An Analytical Geomorphological Instantaneous Unit Hydrogram, *Hydrological Processes*, 20(18), p. 3879-3895.
- [PCL 8] **Fleurant C.** and P. Boulestreau, 2004, Comment on "A geomorphological explanation of the unit hydrograph concept", *Hydrological Processes*, 19(2), p. 541-543.
- [PCL 9] **Fleurant C.**, Duchesne J. and P. Raimbault, 2004, An allometric model for trees, *Journal of Theoretical Biology*, 227(1), p. 137-147.
- [PCL 10] Roland B. et **C. Fleurant**, 2004, Caractérisation des formes du bocage à l'aide de la géométrie fractale, *L'Espace Géographique*, 2, p. 165-174.
- [PCL 11] Duchesne J., Raimbault P. and **C. Fleurant**, 2002, Towards a universal law of tree morphometry by combining fractal geometry and statistical physics, *World Scientific*, p. 93-102.
- [PCL 12] **Fleurant C.** and J. van der Lee, 2001, A stochastic model of transport in 3-D porous media, *Mathematical Geology*, 33(4), p. 449-474.
- [PCL 13] **Fleurant C.** and W-C Jeong, 2001, Dispersion of inert particles in a rough fracture, *Compte Rendu à l'Académie des Sciences*, 332(2), p. 115-120.
- [PCL 14] **Fleurant C.** and J. van der Lee, 2000, Stochastic modelling of tracer transport in three dimensions, *Journal of International Association of Hydrological Sciences*, p. 109-114.

5.4 Brevet (B)

- [B 1] Duchesne J., **Fleurant C.** et F. Tanguy, 2002, Brevet d'un procédé d'élaboration d'un plan d'implantation de végétaux, plan d'implantation de végétaux obtenu et système informatique pour l'élaboration d'un tel plan, INPI, Brevet Européen N° 02 07836.

5.5 Conférencier invité (CI)

- [CI 1] **Fleurant C.**, 2007, La Recherche en Paysage : caractérisation des formes, dynamiques des paysages et processus écologiques, Université Laval, Québec (Canada), 9-13 mai 2007.
- [CI 2] **Fleurant C.**, 2006, Quantitative approaches in landscape sciences, Michigan State University, East Lansing (USA), 23-30 août 2006.

5.6 Conférences avec comité de lecture (CCL)

- [CCL 1] Bourgeois O., Lopez T., Le Mouélic S., **Fleurant C.**, Tobie G. and T. Cornet, 2009, Formation of Titan's lakes by episodic dissolution and precipitation of a surface layer under

semi-arid conditions : comparison with the Pans and calcrete of Etosha (Namibia), AGU Fall Meeting, San Fransisco (USA), December 2009.

[CCL 2] Fourcade Y., Secondi J., Chaput-Bardy A., **Fleurant C.** et C. Lemaire, 2009, Scans génomique dans les réseaux hydrographiques : l'influence de la dimension fractale, 2nd séminaire sur la théorie des fractales et leurs applications, Université d'Angers, juin 2009.

[CCL 3] **Fleurant C.**, Chaput-Bardy A., Secondi J. and C. Lemaire, 2008, An individual-based model to simulate dispersal and genes flow in synthetic river networks, Colloque RTP-Paysage : Modélisation paysagère spatialisée, Toulouse, 3-5 juin 2008.

[CCL 4] **Fleurant C.**, Burley J.B., Loures L., Lehman W. and J. Mchugh, 2008, Inverse box-counting method : a fractal-based procedure to create biospheric landscape patterns, 1th International Conference on Landscape Architecture, June 11-13, Faro Portugal.

[CCL 5] Bourgeois O., Lopez T., Le Mouélic S., **Fleurant C.**, Tobie G., Le Core L. Le Deit L., Sotin C. and Bodeur Y., 2008, A surface dissolution/precipitation model for the development of lakes on Titan, based on an arid terrestrial analogue : the pans and calcretes of Etosha (Namibia), 39th Lunar and Planetary Science Conference, League City, Texas, March 10-14, 2008.

[CCL 6] **Fleurant C.** and J.B. Burley, 2007, Inverse box-counting method : a fractal-based procedure to create biospheric landscape patterns, National Meeting of the ASMR, Gilette-WY, June, 2-7.

[CCL 7] Chaput-Bardy A., **Fleurant C.**, Secondi J. and T. Lodé, 2006, An individual-based model to simulate dispersal and gene flow in a dendritic landscape, 11th International Behavioral Ecology Congress, Tours, July 23-29, 2006.

[CCL 8] **Fleurant C.**, Tucker G. and H.A. Viles, 2006, Modelling cockpit karst landforms : a large scale study, BGRG International Conference "Geomorphology and Earth System Science", 28-30 June 2006, Loughborough University, UK.

[CCL 9] La Jeuness I., Bedhomme R., Chartin C., Communal P.Y., Duchesne J., **Fleurant C.**, Jadas-Hécart A., Moguedet G. and F. Picard, 2005, Traàabilité des pratiques viticoles et durabilité des A.O.C. dans un site inscrit au patrimoine mondial de l'UNESCO. Séminaire de la Zone Atelier Loire (ZAL), Saumur, juin 2005.

[CCL 10] **Fleurant C.**, 2005, Fractales et structures des réseaux hydrographiques, 1^{er} séminaire sur la théorie des fractales et leurs applications, Université d'Angers, juin 2005.

[CCL 11] Duchesne J., Raimbault P. et **C. Fleurant**, 2005, Morphométrie des arbres par la géométrie fractale et la physique statistique, 1^{er} séminaire sur la théorie des fractales et leurs applications, Université d'Angers, juin 2005.

[CCL 12] **Fleurant C.**, Tucker G.E. and H.A. Viles, 2004a, Modélisation morphologique des paysages karstiques, 2^{ième} rencontres du Végétal et du Paysage, 18-19 novembre 2004, Angers.

[CCL 13] **Fleurant C.**, Tucker G.E. and H.A. Viles, 2004b, Cockpit Karst, a landscape evolution model, William Smith meeting, Earth's dynamic surface, catastrophe and conti-

nuité in landscape evolution, 4-5 of October 2004, Londres (Royaume-Uni).

[CCL 14] **Fleurant C.** and J. van der Lee, 2000, Stochastic modelling of tracer transport in three dimensions, *Tracers and Modelling in Hydrogeology, Proceedings of the TraM'2000*, Liège (Belgique), May 2000.

[CCL 15] **Fleurant C.**, 2000, Surfaces fractales, fractures géologiques et transfert dans les bétons fissurées, Séminaire du Laboratoire de Génie Civil Nantes-Saint-Nazaire, école Centrale de Nantes.

[CCL 16] **Fleurant C.** and J. van der Lee, 1999, 3D mass transport in porous and fractured media, European Geophysical Society, 24th General Assembly, Hydrology, Ocean and Atmosphere, La Hague (Pays-bas), May 1999.

[CCL 17] **Fleurant C.** et J. van der Lee, 1998, Modélisation 3-D de la dispersion des traceurs inertes et des colloïdes en milieu poreux, Colloque de l'Association des Chercheurs et Thésards de l'école des Mines de Paris, Paris.

5.7 Rapports de recherche (RR)

[RR 1] **Fleurant C.**, 2001, RW3D : application à la dissolution des verres nucléaires, école des Mines de Nantes, 116 p.

[RR 2] Collectif, 2001, The role of colloids in the transport of radionuclides from a radioactive waste repository : implication on safety assessment, European Commission, EUR 19781 EN, 109 p.

[RR 3] **Fleurant C.**, 2000, Modélisation stochastique du transport de masse en milieux poreux et fracturés, Thèse de Doctorat, école Nationale Supérieure des Mines de Paris, 198 p.

[RR 4] van der Lee J. and **C. Fleurant**, 1999, Final progress report, European Project CARESS, EC Pr. : F14W-CT96-0021. 20 p.

[RR 5] van der Lee J. and **C. Fleurant**, 1998, Second annual progress report, A summary report produced for the European Commission Directorate General XII, European Project CARESS , EC Pr. : F14W-CT96-0021. 20 p.

[RR 6] van der Lee J. and **C. Fleurant**, 1997, Six-monthly progress report, Modelling studies of colloid transport, European Project CARESS, EC Pr. : F14W-CT96-0021. 20 p.

[RR 7] **Fleurant C.** and J. van der Lee, 1997, First annual progress report, A summary report produced for the European Commission Directorate General XII, European Project CARESS, EC Pr. : F14W-CT96-0021. 20 p.

[RR 8] **Fleurant C.**, 1995, Approche expérimentale des processus de modification d'un milieu poreux absorbant, à double porosité, soumis à l'écoulement, mémoire de DEA Hydrologie et Hydrogéologie Quantitatives, Université Pierre et Marie Curie, 50 p.

5.8 Développement de logiciels (DL)

[DL 0] **Fleurant C.**, Tobie G., Bourgeois O., et S. Le Mouelic, 2009, *Titan*, (code en C++ en cours de développement sous Windows), modèle de dissolution des roches carbonatés pour simuler le développement de dépressions.

[DL 1] **Fleurant C.**, 2006-2007-2008-2009, *Gene-Net*, (code en C++ développé sous Windows, Interface Graphique en QT et Qwt), modèle individu centré appliqué à la génétique spatialisée des populations.

[DL 2] Tucker G.E, **Fleurant C.** and A. Dessiter, 2004, *CHILD* (Channel-Hillslope Integrated Landscape Development : contribution au code C++ développé sous Linux), introduction des composantes de dissolution des roches carbonatés.

[DL 3] **Fleurant C.**, 2001a, *FRACDIM* (FRACtal DIMension : code en C++ développé sous Windows), calcul de la dimension fractale par les méthodes des boîtes et des densités.

[DL 4] **Fleurant C.**, 2001b, *RW3D3* (Random Walk 3D, version 3 : code en C++ développé sous UNIX HP), diffusion moléculaire de particules dans un milieu poreux à très faible porosité, application à la dissolution des verres nucléaires.

[DL 5] **Fleurant C.**, 2000, *RW3D2* (Random Walk 3D, version 2 : code en C++ développé sous Windows), diffusion moléculaire de particules dans une fracture, applications au transfert du chlore dans les fractures du béton.

[DL 6] **Fleurant C.** and J. van der Lee, 1999, *RW3D* (Random Walk 3D : code en C++ développé sous UNIX SUN), transfert de particules par convection et diffusion dans des milieux poreux et fracturés.

5.9 Vulgarisation scientifique (VS)

[VS 1] Bourgeois O. et **Fleurant C.**, juin 2009, Lacs et orages d'hydrocarbures dans les déserts glacés de Titan, magazine de vulgarisation scientifique régionale : *Têtes Chercheuses*, 10, p 17.

[VS 2] **Fleurant C.**, juin 1997, Témoignages sur le doctorat, *Mines-Avenir*, Numéro Spécial : "les troisièmes cycles", p 18-19.

QU'ILS SOIENT DE RECHERCHE OU PÉDAGOGIQUE, plusieurs des projets présentés dans ce mémoire sont en cours de développement. Ce chapitre montre les prolongements qui vont être mis en oeuvre.

6 Projets de recherche

6.1 Auto-organisation spatiale

L'auto-organisation spatiale a fait l'objet d'importants développements théoriques et informatiques. Cette thématique a su à la fois se tourner vers le monde de la recherche appliquée, par le biais de collaboration avec l'ANVAR et la création d'une entreprise, et vers la recherche fondamentale, en proposant un modèle original de la répartition des arbres dans l'espace.

L'arbre occupe une place privilégiée dans l'aménagement du paysage et dans sa perception. Sur le plan de l'aménagement il existe aujourd'hui une forte demande de l'utilisation de modèles pour contrôler la plantation des arbres (Thomas et al., 2007). La demande est tout particulièrement importante concernant la réhabilitation des carrières et mines à ciel ouvert (Berger, 2008).

Sur le plan académique, il n'existe peu ou pas d'ouvrage de synthèse sur les disciplines scientifiques du paysage. Le Professeur J.B. Burley (Michigan State University - USA), souhaite éditer un tel ouvrage et m'a demandé d'y collaborer dans les années à venir.

Nous avons d'ores et déjà engagé une collaboration étroite sur le sujet ([PCL 2], [PCL 3], [CCL 4], [CCL 6]) et avons invité un collègue allemand à se joindre à nous pour compléter notre projet. Ce collègue allemand est spécialiste de la représentation 3D des arbres.

La méthode mathématique utilisée (Inverse Box-Counting method) a été brevetée ([B 1]) et un moteur de calcul a été développé en C# (Durandet, 2003). Ces outils ont été testés (Lehmann, 2009) sur le cas particulier de réhabilitation d'une mine dans le Michigan (USA) et

à une échelle restreinte. J.B. Burley et moi-même souhaitons maintenant lancer une campagne de tests plus systématique et à plus grande échelle afin de déterminer les limites d'application du modèle. Dans un deuxième temps il est envisagé de "carrosser" le moteur de calcul d'une interface graphique afin d'en faire un outil applicable en bureau d'étude par exemple.

Afin de rendre plus efficace cette collaboration, J.B. Burley viendra passer 1 an dans l'équipe de recherche Paysage dans le cadre d'une "sabbatical year" en 2011-2012. Un dossier de financement sera déposé l'année prochaine auprès de la région Pays-de-la-Loire dans le cadre du programme "Chaires Régionales de Chercheurs Etrangers".

6.2 Génétique des populations et réseaux hydrographiques

La relation entre structure hydrographique et dispersion génétique repose sur la modélisation de la dispersion et des flux géniques sur un réseau hydrographique, à partir des traits d'histoire de vie des espèces. Cette étude a été rendue possible grâce au développement d'un logiciel de génétique spatialisée des populations, de manière à représenter les flux géniques entre les individus ou populations sur un réseau hydrographique artificiel.

Le moteur de calcul de ce logiciel, *Gene-Net*, a été développé en C++ ([DL 1]) et agrémenté d'une interface graphique en Qt et Qwt (Figure 3.1, 3.2 et 3.3).

Notre modèle a bien entendu des limites qui peuvent être réduites. Nous avons utilisé des réseaux dichotomique où l'angle de bifurcation a été fixé : toutes les branches se séparent d'une même valeur de l'angle α . Cette dichotomie n'est pas une réalité sur un réseau naturel, et il serait donc intéressant d'examiner l'influence de ce facteur géométrique.

Un réseau hydrographique naturel est soumis à des facteurs stochastiques (inondations, sécheresse, pollution), qui affectent les taux de croissance intrinsèque de la population : la probabilité d'extinction par exemple. Ces facteurs n'ont pas été considérés dans nos simulations.

La prise en compte de la dispersion hors réseau amène de nouvelles questions. Par exemple, les réseaux hydrographiques sont modélisés dans notre étude comme des objets complètement isolés et donc sans influences extérieures. En particulier, il n'y a pas d'échanges entre les migrants de différents bassins versants. Ces échanges n'ont pas lieu pour les espèces strictement aquatiques, mais ils devraient être considérés pour des espèces capables de circuler hors réseau.

Gene-Net a un potentiel d'applications sur le plan théorique : les modèles classiques de génétique spatialisée des populations sont de type 1D ou 2D (Whitlock, 2008). Or une étude récente (Fourcade, 2009) a montré une déviation de ces modèles classiques par rapport à *Gene-Net* qui simule le déplacement des populations sur des réseaux hydrographiques, objets fractals qui ne sont ni mono-dimensionnels ni bi-dimensionnels.

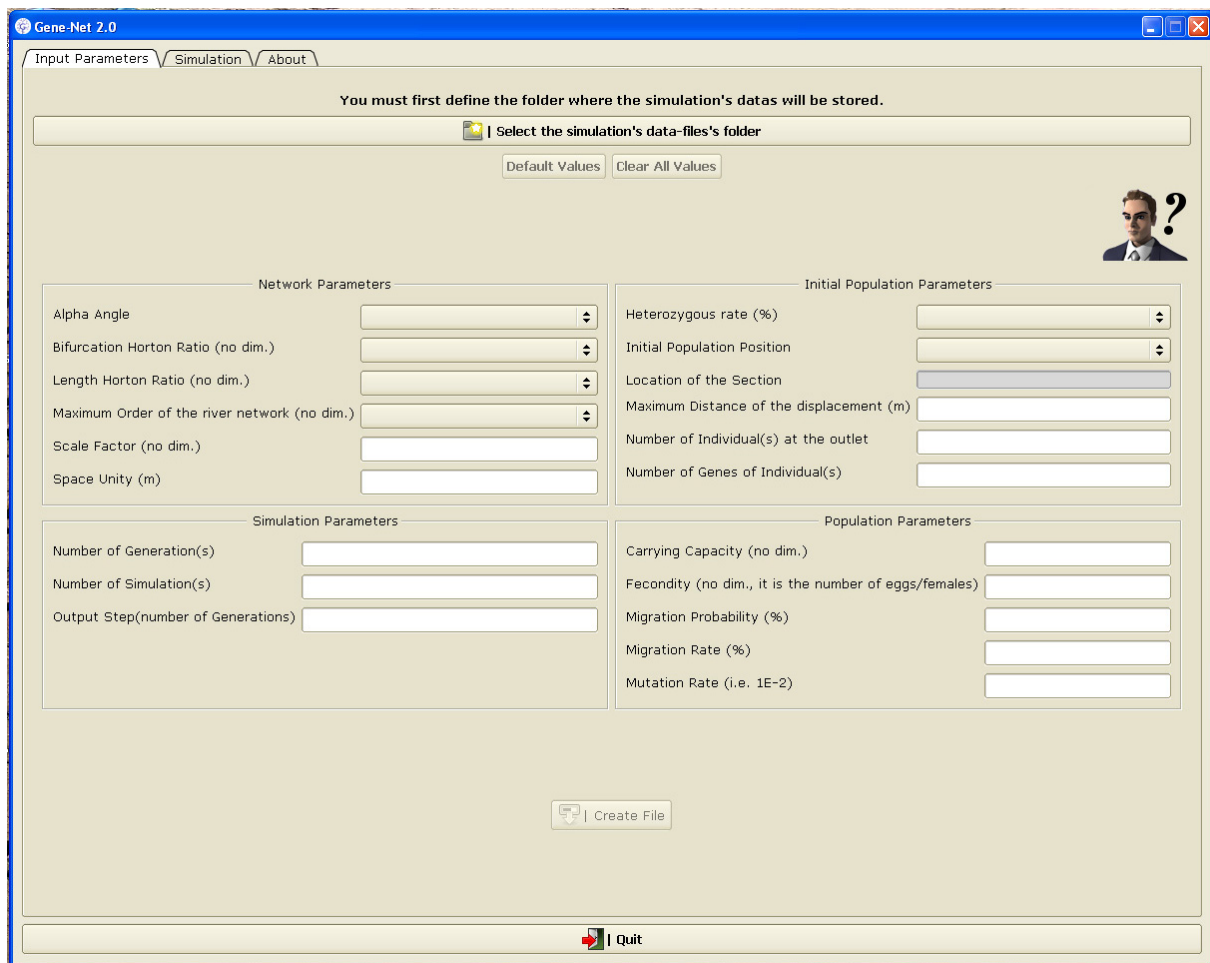


FIGURE 3.1 – Le logiciel GeneNet est un modèle de génétique spatialisée des populations. L'utilisateur entre les paramètres de la simulation concernant les propriétés du réseau hydrographique ou encore les caractéristiques de la population.

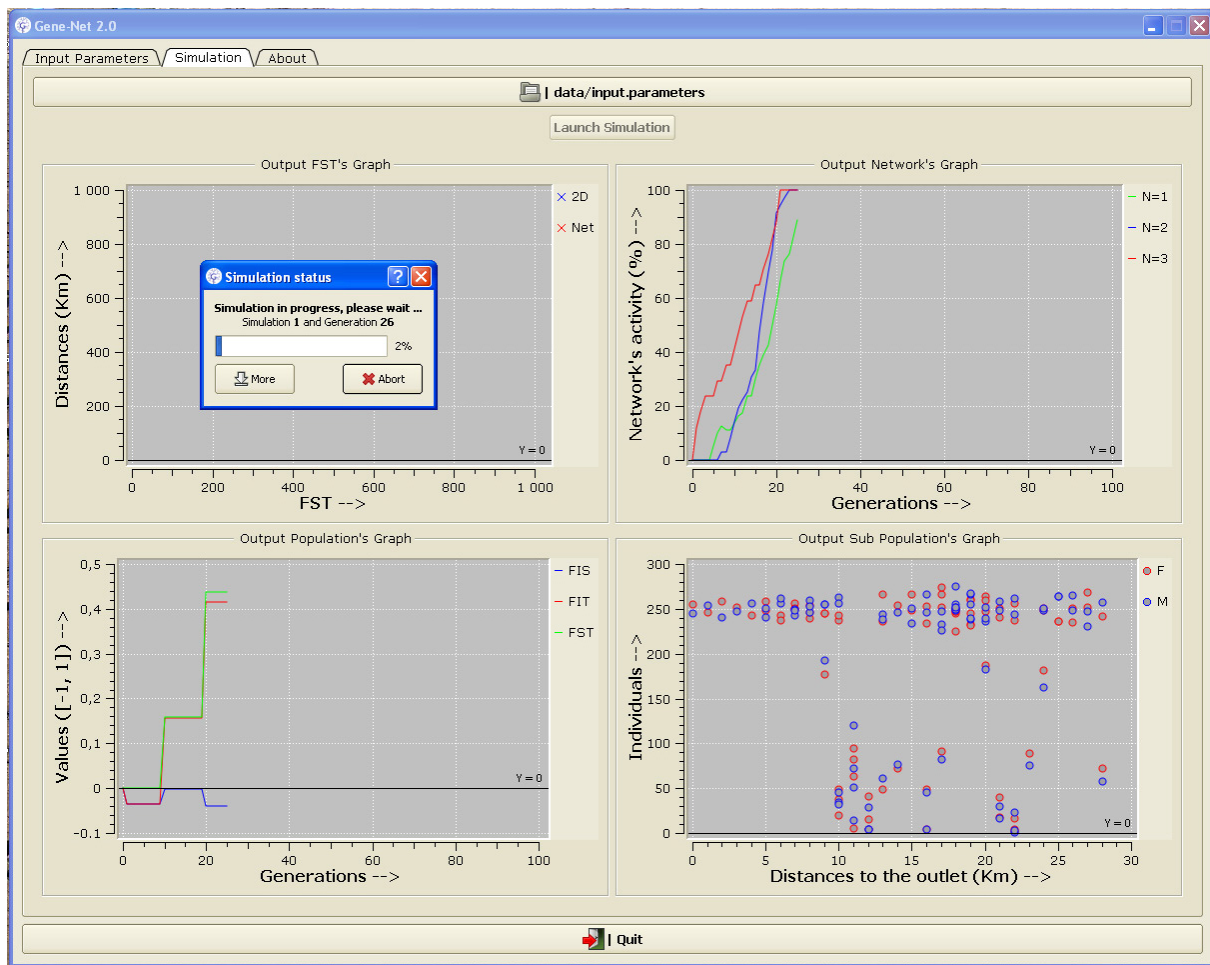


FIGURE 3.2 – Le logiciel GeneNet est un modèle de génétique spatialisée des populations. Les calculs sont effectués et une fenêtre permet de suivre l'évolution de la simulation en temps réel.



FIGURE 3.3 – Le logiciel GeneNet est un modèle de génétique spatialisée des populations. Gene-Net est développé en collaboration avec des collègues de l'Université d'Angers et sera mis en ligne prochainement.

Plusieurs auteurs montrent l'importance des effets démographiques (Excoffier & Ray, 2008) ou génomiques (Faure et al., 2008) sur les variabilités génétiques. *Gene-Net* semble également mettre en évidence une influence de la géométrie du déplacement des populations. On pourra en effet montrer la corrélation entre les paramètres génétiques (variabilité des FST par exemple) avec les paramètres géométriques du réseau hydrographique (la dimension fractale par exemple).

Les applications peuvent également être très appliquées : cette déviation entre modèles spatialisés classiques et *Gene-Net*, induite par la géométrie des réseaux hydrographiques a de nombreux enjeux en écologie moléculaire (évaluation de la structuration des populations sur un réseau), en politique de conservation des espèces inféodées aux cours d'eau (programme de reproduction, taille efficace des populations).

Ces aspects sont actuellement en cours d'étude ([PCL 0]) et devraient permettre d'apporter une confirmation solide, dans les années à venir, de l'influence de la géométrie du déplacement des populations sur leurs caractéristiques génétiques.

6.3 Modélisation géomorphologique

La modélisation géomorphologique des karsts a été un projet ambitieux puisqu'il impliquait le développement d'un modèle couplant les processus hydrologiques, hydrogéologiques et géomorphologiques. La quantification de l'érosion chimique des roches carbonatées reste un problème délicat à mettre en oeuvre tant sur le point de la mesure (Gabrovsek, 2009) que pour l'aspect modélisation (Kaufmann, 2009).

Le modèle développé ([DL 2]) pour simuler l'évolution de cette érosion au cours du temps nous permet aujourd'hui de poser les bases d'un nouveau modèle de dissolution des roches carbonatées pour simuler le développement de dépressions ([DL 0]). Dans l'objectif de comparer les lacs de Titan (Hayes et al., 2008) avec leur analogue terrestre en Namibie (le Pan d'Etosha), il est d'abord nécessaire de construire un modèle qui simule la formation de ce Pan. Ce modèle sera d'abord validé par comparaison avec les formes et le fonctionnement hydrologique observés en Namibie (les paramètres thermodynamiques régissant la dissolution/précipitation des carbonates dans l'eau sur Terre étant connus). Puis, le modèle sera utilisé pour contraindre les paramètres thermodynamiques que doivent posséder les matériaux de la surface de Titan pour obtenir les formes qu'on y observe.

Ce modèle implique une bonne connaissance des fonctionnements hydrologique et hydrogéologique sur le terrain. Les informations de notre campagne de terrain (juillet 2008) nous ont apporté les données nécessaires pour construire le modèle. Le Pan d'Etosha se trouve dans une cuvette quasiment plane. Cette cuvette est composée de calcrète (roche carbona-

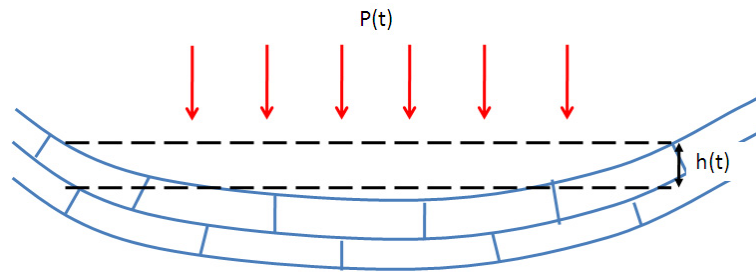


FIGURE 3.4 – Hypothèse du modèle de formation du Pan d'Etosha : une couche mince de calcrète renferme une nappe phréatique qui fluctue ($h(t)$) suivant l'apport climatique ($P(t)$). La forme en cuvette est très exagérément accentuée afin de mieux percevoir les processus impliqués.

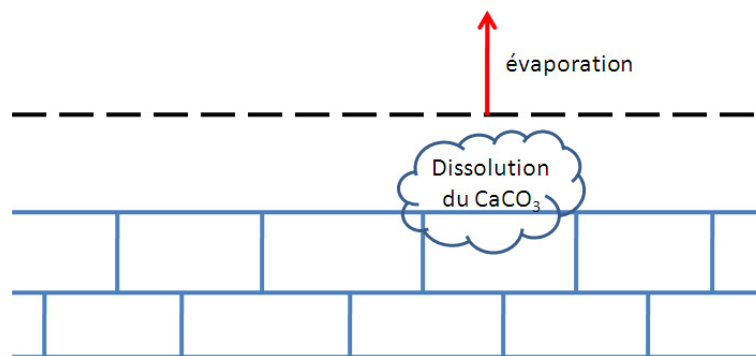


FIGURE 3.5 – Hypothèse du modèle de formation du Pan d'Etosha : la dissolution des calcrètes érode la roche. La compétition entre dissolution et précipitation dépend des conditions géochimiques locales.

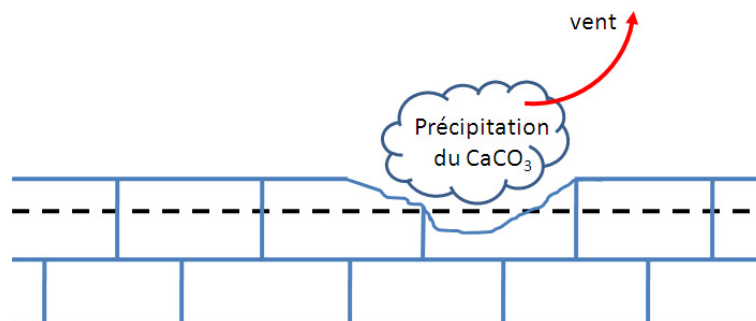


FIGURE 3.6 – Hypothèse du modèle de formation du Pan d'Etosha : les carbonates reprécipités sont ensuite entraînés par le vent pour former des dunes.

tée) d'une épaisseur maximum de 10 m et sur une étendue d'environ 100 km × 100 km. La nappe phréatique, artésienne en de nombreux points topographiques, a un écoulement transversal limité et fluctue principalement suivant la verticale en fonction de l'alimentation climatique (Figure 3.4).

La dissolution du calcrète se fait en milieu ouvert alors que l'évaporation fait baisser le niveau de la nappe (Figure 3.5). La dissolution des carbonates se fait à la surface du calcrète mais également dans la matrice poreuse en négligeant la convection et en ne tenant compte que de la diffusion (Genthon & Ormond, 2008; Kalia & Balakotaiah, 2009).

En fonction des conditions géochimiques locales, le carbonate dissout dans l'eau reprécipite et est évacué par le vent pour former des dunes (Goudie, 1995) observées sur le terrain (Figure 3.6).

Notre approche devrait permettre, par une méthode indirecte et grâce à cet analogue terrestre, à la fois de comprendre la mise en place de ces formes et de donner un ordre de grandeur des composants géochimiques sur Titan.

L'ensemble de ces développements se fait avec trois collègues de l'Université de Nantes (laboratoire de planétologie et de géogynamique - UMR-CNRS 6112). Une thèse¹ en collaboration avec nos deux laboratoires devrait débuter en 2009.

7 Projets pédagogiques

Outre le maintien et l'entretien de mes supports de cours, deux projets majeurs sont en cours :

- transfert de mes supports de cours, TD et devoirs surveillés sur une plate forme d'enseignement Moodle.
- édition d'un ouvrage pédagogique collectif.

Concernant ce second point, cet ouvrage est actuellement en cours d'évaluation pas deux comités de lecture chez Armand-Colin et les Presses Universitaires de Rennes.

1. Résumé du sujet de thèse : la composition et la morphologie de la surface de Titan, le plus gros satellite de Saturne, seront étudiées à partir des données de l'imageur hyperspectral infrarouge VIMS et du radar de la mission Cassini, dans laquelle l'UMR 6112 est fortement impliquée. Les processus de façonnement des reliefs superficiels (lacs, chenaux, montagnes, etc.) et d'échanges sol-atmosphère seront contraints à l'aide de modèles numériques de dissolution développés à AgroCampus Ouest Angers et seront comparés à des analogues situés dans différents environnements terrestres tels que les karsts des régions semi-arides et les thermokarsts des régions périglaciaires. Les signatures spectrales et les propriétés physico-chimiques de différents composants possibles de la surface de Titan (glaces, hydrocarbures, clathrates) seront étudiées à l'aide d'expériences de laboratoire utilisant entre autres le spectromètre infrarouge de l'UMR 6112. Ce travail se fera en collaboration avec C. Fleurant (INHP Angers) et C. Sotin (JPL NASA), responsable de l'exploitation des données VIMS.

Titre de l'ouvrage : Pluridisciplinarité en Paysage : concepts, méthodes et outils.

Disciplines : Géographie Physique, Géographie Humaine et Sociale.

Coordinateur : Cyril Fleurant.

Auteurs : 11 Enseignants-chercheurs d'AgroCampus Ouest et 2 architectes paysagistes (DPLG) également enseignants à AgroCampus Ouest :

- Véronique Beaujouan, Maître de conférences en géomatique.
- Nathalie Carcaud, Professeure en géographie physique et en géographie humaine et sociale.
- Geoffroy de Castelblajac, architecte paysagiste DPLG, Agence Babylone (Paris) et enseignant à AgroCampus Ouest, Angers.
- Virginie Caubel, Maître de conférences en pédologie.
- Hervé Daniel, Maître de conférences en botanique.
- Hervé Davodeau, Maître de conférences en géographie humaine et sociale.
- Cyril Fleurant, Maître de conférences en modélisation des géosciences.
- Frédérique Garnier, architecte paysagiste DPLG, Agence (Paris) et enseignante à AgroCampus Ouest, Angers.
- Fabienne Joliet, Maître de conférences en lecture du paysage, perceptions et représentations.
- David Montenbault, Maître de conférences en géographie physique et en géographie humaine et sociale.
- Walid Oueslati, Professeur en économie.
- Béatrice Plottu, Maître de conférences en économie.
- Julien Salanié, Maître de Conférences en économie.

Motivations et argumentaire de ce projet pédagogique :

Alors que nos sociétés s'urbanisent de plus en plus, elles accordent une place croissante à leur cadre de vie et donc au paysage. Ainsi, ce concept pluriel est-il de plus en plus pris compte par les politiques publiques dans le cadre de l'aménagement des territoires.

Aujourd'hui, en réponse aux attentes sociétales, les formations de l'enseignement supérieur ouvrant aux multiples métiers du paysage sont en augmentation croissante (Licence pro, Master 2, ingénieur, architecte).

Le secteur Paysage est en plein essor. L'évolution du cadre législatif sur le paysage à toutes les échelles (Loi paysage 1993, le 1% paysage, les chartes et atlas du paysage) a favorisé l'émergence de nouveaux besoins scientifiques, techniques et d'encadrement. Selon le rapport de branche 2008 de l'Union Nationale des Entrepreneurs du Paysage (UNEP), "le besoin en ingénieurs paysagistes dans le secteur des entreprises de paysage doit doubler

dans les cinq ans à venir".

Ainsi, depuis deux ou trois ans on voit éclore les formations supérieures en paysage dans de nombreuses universités. Ces formations viennent compléter celles des écoles du paysage : AgroCampus Ouest (Angers), l'ENSNP (Blois), l'ENSP (Versailles), l'ITIAP (Lille) et l'Ecole d'Architecture du Paysage (Bordeaux).

L'intérêt de cet ouvrage est donc d'apporter une base, un guide sur les concepts, les méthodes et outils des disciplines scientifiques qui nourrissent les problématiques liées au Paysage. Cet ouvrage pourra donc s'adresser à des étudiants dans des formations d'enseignement supérieur dans les disciplines du paysage : élèves ingénieurs, de Masters, de licence Pro et de BTS. Du fait de son caractère pédagogique, cet ouvrage pourra également être à destination des enseignants et des professionnels du paysage. Sur le fond, le sens de l'ouvrage est de :

1. Montrer comment se fait l'analyse du Paysage avec une approche pluridisciplinaire ;
2. Poser les bases théoriques des disciplines qui alimentent le Paysage ;
3. Illustrer aux travers d'exemples ("projets" Paysage) l'utilisation des méthodes et outils développés.

De plus, il existe peu d'ouvrages universitaires spécifiques à l'attention des futurs aménageurs du paysage. Le nombre de formations supérieures et universitaires dans les disciplines du Paysage est en forte progression. La demande d'ouvrages de référence va dans le même sens. L'originalité de l'ouvrage est de montrer les apports indispensables des sciences dures et des sciences humaines et sociales dans l'approche Paysage. L'ouvrage est basé sur la complémentarité et l'articulation entre les "sciences dures" et les sciences humaines avec, de surcroît, une approche multi-entrées. C'est ce qui fait la spécificité de ce projet au regard des ouvrages déjà publiés. La force de l'ouvrage est de présenter les concepts, les méthodes et les outils fondamentaux des disciplines du paysage tout en montrant leurs principes d'applications sur des cas réels. Les co-auteurs sont des enseignants-chercheurs et des professionnels du Paysage (Architectes et Ingénieurs Paysagistes). Les enjeux sociétaux liés à l'aménagement du territoire, à l'architecture du Paysage vont croissants et prennent une place fondamentale dans les sujets d'actualités comme le développement durable ou le Grenelle de l'environnement.

Sommaire prévisionnel est le suivant :

Introduction

1. Morphologies rurales et urbaines (Hervé Davodeau, David Montembault)

Ce chapitre d'ouverture de l'ouvrage présente "la matière" que les chapitres suivants exploiteront chacun à leur manière. Avant de passer les paysages au crible des différentes disciplines, il s'agit donc de les décrire et d'en comprendre les dynamiques. Les héritages

paysagers, dans les villes comme dans les campagnes, sont toujours remaniés par les processus économiques, les évolutions sociales et culturelles, les régulations politiques. De façon très synthétique, ce chapitre propose donc un état des lieux des paysages contemporains et des dynamiques paysagères à l'oeuvre.

- 1.1. Paysages de ville et paysage des champs : le choc des héritages
 - 1.1.1. Les paysages hérités de la campagne
 - 1.1.2. Les paysages hérités de la ville
- 1.2. Des paysages en profonde mutation
 - 1.2.1. Les dynamiques territoriales, moteur des mutations paysagères
 - 1.2.2. L'exode rural et ses effets paysagers
 - 1.2.3. La périurbanisation et ses effets paysagers
- 1.3. Une nouvelle mixité ou l'urbain généralisé ?
 - 1.3.1. Les campagnes urbaines
 - 1.3.2. Les villes campagne

2. Géosciences et Paysage (Cyril Fleurant, Nathalie Carcaud)

Ce chapitre a pour objectif de montrer quels concepts, quelles méthodes et quels outils utilisés en géosciences peuvent nourrir les problématiques du paysage. Parmi les géosciences on montrera tout particulièrement l'importance des approches en géographie physique au travers de méthodes et d'outils spécifiques.

- 2.1. Concepts du paysage en géographie physique
 - 2.1.1. Les définitions : les différentes approches en géosciences
 - 2.1.2. La morphogenèse
 - 2.1.3. Une approche intégrée des anthroposystèmes : interactions nature/société
- 2.2. Les données disponibles
 - 2.2.1. Les cartes et blocs-diagramme
 - 2.2.2. Les photographies aériennes et satellitales
 - 2.2.3. Archivages sédimentaires
 - 2.2.4. Les données quantitatives et numériques
- 2.3. Analyse et quantification des formes et des processus
 - 2.3.1. Analyse des structures spatiales et de leurs processus
 - 2.3.2. L'informatique et les SIG
 - 2.3.3. La modélisation numérique des processus

3. Ecologie et Paysage (Hervé Daniel, Virginie Caubel)

Ce chapitre a pour objectif de rappeler et de synthétiser des concepts de base concernant la biodiversité, l'écologie des communautés et l'écologie du paysage. L'accent sera donné sur les relations entre ces connaissances scientifiques (déjà développées dans d'autres ou-

vrages) et la problématique de l'aménagement du paysage, notamment au travers les enjeux de conservation du " patrimoine naturel z.

3.1. Biodiversité : enjeux et concepts

3.1.1. Rappels sur le concept

3.1.2. Notion de patrimoine naturel

3.2. Pollution et qualité des milieux

3.3. Processus écologiques dans les paysages

3.4. Gestion des milieux : diagnostics écologiques, plan de gestion, impact écologique, ingénierie écologique, techniques de végétalisation

4. Economie et Paysage (Walid Oueslati, Julien Salanié, Béatrice Plottu)

Ce chapitre a pour objectif de décliner les concepts d'économie publique utilisés dans l'analyse économique du paysage. Nous présentons les différentes méthodes d'évaluation économique des aménités paysagères et mettons en évidence la complexité de la décision publique en présence de biens non marchands.

4.1. Concepts de l'économie publique et critères de décision

4.1.1. Bien public et externalité

4.1.2. Portée et limites de l'analyse coûts bénéfices

4.1.3. Actualisation

4.2. Méthodes d'évaluation des biens non marchands

4.2.1. Principes de l'évaluation

4.2.2. Evaluation contingente et choix multi attributs (exemple lié au paysage)

4.2.3. Méthode prix hédonique (exemple lié au paysage)

4.2.4. Méthode du coût de trajet (exemple lié au paysage)

4.3. Aide Multicritère à la décision (cas concret lié au paysage)

5. Politiques publiques et Paysage (Hervé Davodeau)

Ce chapitre a pour objectifs de définir les politiques paysagères, d'en décrire le contenu et de les analyser (objectifs, acteurs, outils, effets). Il s'agit de comprendre ce qui est fait "au nom du paysage", que ces actions relèvent de la patrimonialisation, de l'aménagement ou de la gestion.

5.1. Cadrage et définitions

5.1.1. Politiques publiques et paysages

5.1.2. Politiques publiques paysagères

5.2. Les principaux outils des politiques paysagères

5.2.1. La patrimonialisation des paysages remarquable

5.2.2. La planification des paysages ordinaires

5.2.3. Les outils contractuels

5.3. Les politiques paysagères et leurs effets

5.3.1. Diversité des objectifs

5.3.2. Des effets directs sur les paysages et leur perception

5.3.3. Des effets indirects

6. Perception et représentation du Paysage (David Montembault, Fabienne Joliet)

Ce chapitre a pour objectif de présenter la façon dont se construisent les multiples représentations paysagères, puis de proposer différentes manières de les prendre en compte dans une démarche d'analyse des paysages. Après quelques rappels sur différentes théories de la perception et sur les processus de construction des représentations paysagères, nous présenterons ensuite quelques méthodes d'analyse paysagère intégrant cette variété des points de vue. Enfin, une histoire de la sensibilité paysagère occidentale et du métier de paysagiste permettra d'illustrer cette évolution permanente des perceptions.

6.1. Du paysage perçu au paysage représenté

6.1.1. Différentes théories de la perception

6.1.2. Importance de la mémoire dans le processus de perception

6.1.3. Une multitude de regard sur le paysage

6.1.4. La construction des représentations paysagères

6.2. Quelques méthodes d'analyse du paysage

6.2.1. Une lecture à l'échelle des territoires

6.2.2. L'analyse plastique (dite des paysagistes?)

6.2.3. L'étude des représentations

6.2.4. Autres méthodes d'analyse des perceptions

7. Projets interdisciplinaires (Véronique Beaujouan + Geoffroy de Castelblajac et Frédérique Garnier + autres)

Ce chapitre de synthèse illustre une démarche interdisciplinaire complète d'un projet de paysage. On montre comment les différentes disciplines abordées dans les chapitres précédents viennent ici nourrir des projets réels de maîtrise d'IJuvre et de maîtrise d'ouvrage.

7.1. Description des phases théoriques d'un projet : analyse, diagnostic, enjeux, propositions.

7.2. Exemples de projet de type maîtrise d'IJuvre.

7.3. Exemples de projet de type maîtrise d'ouvrage.

Références bibliographiques

8 Projets professionnel

La reconnaissance nationale et internationale de notre nouvelle Unité de Recherche Paysage est une priorité, aussi il semble judicieux de consolider et de renforcer son pôle scientifique. Une montée en puissance ne peut se faire sans l'intégration de doctorants et de post-doctorants et donc de personnels habilités à les encadrer. Or, l'équipe de recherche Paysage n'est animée aujourd'hui que par deux Professeurs. L'obtention d'HDR et/ou le recrutement de Professeurs va donc dans le sens d'une meilleure reconnaissance académique de cette unité de recherche.

Dans le cas de l'obtention de l'HDR, je souhaite postuler sur un poste de Professeur à AgroCampus Ouest, si un tel poste venait à s'ouvrir. Cette option me permettrait, au sein du département Paysage et de l'Unité de recherche Paysage, de renforcer l'activité de recherche scientifique du paysage en recrutant un ou plusieurs doctorants et/ou post-doctorants. Dans le cas où un poste de Professeur ne s'ouvre pas ou si je ne réussissais pas au concours, je reste très ouvert à la mobilité et je pourrais ainsi postuler dans un autre établissement en France (Université, CNRS, Cemagref, INRA, IRD, CIRAD, LCPC) ou à l'étranger.

BIBLIOGRAPHIE

- Ackerer, P. (1988). *Groundwater flow and quality modeling*, chapter : Random walk method to simulate pollutant transport in alluvial aquifers or fractured rocks, pages 475–486.
- Ackerer, P. & Kinzelbach, W. (1985). Modélisation du transport de contaminant par la méthode de marche au hasard : influence des variations du champ d'écoulement au cours du temps sur la dispersion. In G. de Marsily, editor, *The stochastic approach to subsurface flow*, pages 517–529.
- Ackerer, P., Mosé, R., & Semra, K. (1990). Natural tracer test simulation by stochastic particle tracking method. In G. Moltyaner, editor, *Proceeding of the international conference on transport and mass exchange processes in sand and gravel aquifers : field and modelling studies*, pages 595–604.
- Aertsens, M. & Ghaleb, D. (2001). New technics for modelling glass dissolution. *J. of nuclear materials*, **298**(1-2), 37–46.
- Bak, P. (1996). *How nature Works ?* Copernicus/Springer-Verlag.
- Banton, O. & Bangoy, L. (1997). *Hydrogéologie multiscience environnementale des eaux souterraines*. AUPELF.
- Barker, S., Cumming, G., & Horsfield, K. (1973). Quantitative morphometry of the branching structure of trees. *J. Theor. Biol.*, **40**, 33–43.
- Barnsley, F. (1988). *Fractals everywhere*. Academic Press.
- Barton, C. (1995). *Fractals in the earth sciences*. Hardcover.
- Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media*. Elsevier.
- Berezovskaya, F., Karev, G., Kisliuk, O., Khlebopros, R., & Tcelniker, Y. (1997). Fractal approach to computer-analytical modeling of tree crown. *J. Trees*, **11**, 323–327.

- Berger, D. (1991). Modification of a simple fractal tree growth scheme : implications on growth, variation and evolution. *J. Theor. Biol.*, **152**, 513–529.
- Berger, A. (2008). *Designing the reclaimed landscape*. New York : Taylor & Francis.
- Bidel, L., Pagès, L., Rivière, L., Pellous, G., & Lorendeau, J. (2000). Massflowdyn i : a carbon transport and partitioning model for root system architecture. *Annals of botany*, **85**, 869–886.
- Bosanac, B. (1990). *Tree : a knowledge-based system for generating images of trees*. Graduate school of design.
- Braun, J. & Sambridge, M. (1997). Modelling landscape evolution on geological time scales : a new method based on irregular spatial discretization. *Basin Research*, **9**, 27–52.
- Buhmann, D. & Dreybrodt, W. (1985). The kinetics of calcite dissolution and precipitation in geologically relevant situations of karst areas. 1. open system. *Chem. Geol.*, **48**, 189–211.
- Burel, F. & Baudry, J. (1994). *Control of biodiversity in hedgerow network landscapes in western France. Hedgerow management and nature conservation*. Wye College Press.
- Chen, S., Impens, I., Ceulemans, R., & Kochelbreghe, F. (1993). Measurement of gap fraction of fractal generated canopie using digitalized image analysis. *Agricultural and Forest Meteorology*, **65**, 245–259.
- Chow, V. (1964). *Applied Hydrology, Civil Engineering Series*. McGraw-Hill International Edition.
- Chow, V., Maidment, D., & Mays, L. (1988). *Applied Hydrology*. New York, McGraw-Hill.
- Coudrain-Ribstein, A. (1988). *Transport d'éléments et réactions géochimiques dans les aquifères*. Ph.D. thesis, Université Louis Pasteur - Strasbourg.
- Crawford, J. & Young, I. (1990). A multiple scaled fractal tree. *J. Theor. Biol.*, **145**, 199–206.
- Cudennec, C. (2000). *Description mathématique de l'organisation du réseau hydrographique et modélisation hydrologique*. Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Agronomie de Rennes.
- Cudennec, C., Fouad, Y., Gatot, I. S., & Duchesne, J. (2004). A geomorphological explanation of the unit hydrograph concept. *Hydrological Processes*, **18**, 603–621.
- Dauphiné, A. (1995). *Chaos, fractales et dynamiques en géographie*. Reclus : "espaces modes d'emploi".
- de Jong, G. J. (1958). Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits. *Transactions, American Geophysical Union*, **39**(1), 67–74.

- de Marsily, G. (1986). *Quantitative Hydrology*. Academic Press, London.
- Dekking (1999). *Fractals : theory and applications in engineering*. Michel.
- Delay, F., Dzikowski, M., & de Marsily, G. (1993). A new algorithm for representing transport in porous media in one dimension, including convection, dispersion and interaction with the immobile phase with first-order kinetics. *Mathematical Geology*, **25**(6), 689–712.
- Delay, F., de Marsily, G., & Carrier, E. (1994). One-dimensional solution of the transport equation in porous media in transient state by a new numerical method for the management of particle tracking. *Computers and Geosciences*, **20**(7/8), 1169–1200.
- Dieulin, A. (1980). *Propagation de pollution dans un aquifère alluvial, l'effet de parcours*. Ph.D. thesis, Univ. P. et M. Curie et École des Mines de Paris.
- Dodds, P. & Rothman, D. (2000). Scaling, universality and geomorphology. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, **28**, 571–610.
- Dooge, J. (1959). A general theory of the unit hydrograph. *J. Geophys. Res.*, **64**(2), 241–256.
- Dooge, J. (1986). Looking for hydrological laws. *Water Resources Res.*, **22**, 46S–58S.
- Douady, S. & Couder, Y. (1992). Phyllotaxis as a physical self-organized growth process. *Physical Review Letters*, **68**(13), 2098–2101.
- Dreybrodt, W. (1988). *Processes in Karst Systems*. Springer.
- Dreybrodt, W. (1996). Principles of early development of karst conduits under natural and man-made conditions revealed by mathematical analysis of numerical models. *Water Resources Res.*, **32**(9), 2923–2935.
- Dreybrodt, W. & Gabrovsek, F. (2000). Dynamics of the evolution of a single karst conduit. In : Klimchouk, A., Ford, D.C., Palmer, A.N. and Dreybrodt, W., Editors, 2000. *Speleogenesis : Evolution of Karst Aquifers*, Nat. Speleol. Soc., pages 184–193.
- Duchesne, J., Cudennec, C., & Corbierre, V. (1997). Relevance of the H2U model to predict the discharge of a catchment. *Water Science and Technology*, **36**, 169–175.
- Duchesne, J., Raimbault, P., & Fleurant, C. (2002). Towards a universal law of tree morphometry by combining fractal geometry and statistical physics. *Proceeding : Emergent Nature, Patterns, growth and scaling in the sciences*, pages 93–102.
- Durandet (2003). Aide à la conception de plantation de végétaux. *Mémoire de Master 2*, Université d'Angers.
- Eisenlohr, L., Bouzelboudjen, M. & Rossier, Y. (1997). Numerical versus statistical modeling of natural response of a karst hydrogeological system. *J. Hydrology*, **202**, 244–262.

- Excoffier, L., & Ray, N. (2008). Surfing during population expansions promotes genetic revolutions and structuration. *Trends in Ecology and Evolution*, **23**, 357–361.
- Fabriol, R., Sauty, J., & Ouzounian, G. (1993). Coupling geochemistry with a particle tracking transport model. *Journal of Contam. Hydrol.*, **13**, 117–129.
- Faure, M. F., David, P., Bonhomme, F., & Bierne, N. (2008). Genetic hitchhiking in a subdivided population of *Mytilus edulis*. *BMC Evolutionary Biology*, **8**, 164.
- Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum Press.
- Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley.
- Fitter, A. (1982). Morphometric analysis of root systems : application of the technic and influence os soil fertility on root system development in two herbaceous species. *Plant Cell and Environment*, **5**, 313–322.
- Fleurant, C., Duchesne, J., & Raimbault, P. (2004). An allometric model for trees. *J. Theor. Biology*, **227**, 137–147.
- Fleurant, C., Kartiwa, B. & Roland, B. (2006). An analytical geomorphological instantaneous unit hydrogram. *Hydrological Processes*, **20**(18), 3879–3895.
- Fourcade, Y. (2009). Détection des polymorphismes sous sélection dans les réseaux hydrographiques : les limites des modèles classiques de génétique des populations. *Mémoire de Master 2*, Université d'Angers.
- Frankhauser, P. (1994). *La fractalité des structures urbaines*. Anthropos.
- Freyberg, D. L. (1986). A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer : spatial moments and the advection and dispersion of nonreactive tracers. *Water Res. Res.*, **22**(13), 2031–2046.
- Fried, J. & Combarous, M. (1971). Dispersion in porous media. *Adv. Hydrosci.*, **7**, 169–282.
- Fruh, T. & Kurth, W. (1999). The hydraulic system of trees : theoretical framework and numerical simulation. *J. Theor. Biol.*, **201**, 251–270.
- Gabrovsek, F. (2009). On concepts and methods for the estimation of dissolutional denudation rates in karst areas. *Geomorphology*, **106**, 9–14.
- Gelhar, L. (1986). Stochastic subsurface hydrology from theory to application. *Water Res. Res.*, **22**(9), 135S–145S.
- Gelhar, L. (1993). *Stochastic subsurface hydrology*. Prentice Hall.
- Genthon, P. & Ormond A. (2008). Infiltrative instability near topography with implication for the drainage of soluble rocks. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, **12**, 1285–1293.

- Goblet, P. (1981). *Modélisation des transferts de masse et d'énergie en aquifère*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Goudie, A. & Wells, G. (1995). The nature, distribution and formation of pans in arid zones. *Earth Science Reviews*, **38**, 1–69.
- Gouyet, J. (Physique et structures fractales). 1992. Masson.
- Hadeler, A. & Schulz, H. (2003). *Geochemical Processes in Soil and Groundwater Research Report : Measurement, Modelling, Upscaling*. John Wiley and Sons.
- Hayes, A., Aharonson, O., Callahan, P., Elachi, C., Gim, Y., Kirk, R., Lewis, R., Lopes, R., Lorenz, R., Lunine, J., Mitchell, K., Mitri, G., Stofan, E., & Wall, S. (2008). Hydrocarbon lakes on Titan : Distribution and interaction with a porous regolith. *Geoph. Res. Lett.*, **35**, L09204.
- Holland, P. (1969). The maintenance of structure and shape of three mallee eucalypts. *New Phytol.*, **68**, 411–421.
- Horton, R. (1945). erosional development of streams and their drainage basins ; hydrological approach to quantitative morphology. *Bulletin of the Geological Society of America*, **56**, 275–370.
- Jaeger, M. & de Reffye, P. (1992). Basic concepts of computer simulation of plant growth. in : The 1990 mahabaleshwar seminar on modern biology, mahabaleshwar (ind). *J. Biosciences*, **17**, 275–291.
- Kalia, N. & Balakotaiah, V. (2009). Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates. *Chemical Engineering Science*, **64**, 376–390.
- Kaufmann, G. (2009). Modelling karst geomorphology on different time scales. *Geomorphology*, **106**, 62–77.
- Kaufmann, G. & Braun, J. (1999). Karst aquifer evolution in fractured rocks. *Water Resources Res.*, **35**(11), 3223–3238.
- Kinzelbach, W. (1986). *Groundwater modeling*. Elsevier.
- Kinzelbach, W. (1988). *Groundwater flow and quality modelling*, chapter The random walk method in pollutant transport simulation, pages 227–245. D. Reidel Publishing Company.
- Korvin, G. (1992). *Fractal models in earth sciences*. elsevier.
- LaBarbera, P. & Rosso, R. (1987). Fractal geometry of river networks. *EOS Transaction AGU*, **68**, 12–76.

- LaBarbera, P. & Rosso, R. (1989). On the fractal dimension of stream networks. *Water Resources Res.*, **25**(4), 735–741.
- Lehmann, W. (2009). Replicating natural patterns in the landscape : a fractal based method and application for reforesting a reclaimed Michigan surface mine. *Master in Landscape Architecture*, School of Planning and Design, Michigan State University (USA).
- Leopold, L. (1971). Trees and streams : the efficiency of branching patterns. *J. Theor. Biol.*, **31**, 339–354.
- Lidenmayer, A. & Prusinkiewicz, P. (1988). Development models of multicellular organism : a computer graphics perspective. in langton ec (ed.) artificial life.
- Lopez, T. (2007). Morphologie et évolution des lacs de Titan : Analogie avec les pans de Namibie. *Master 2 Géosciences Planétaire*, Université de Nantes.
- Mahon, T. M. & Kronauer, R. (1976). 1976. *J. Theor. Biol.*, **59**, 443–466.
- Mandelbrot, B. (1975). *Les objets fractals*. Flammarion.
- Mandelbrot, B. (1988). *Fractal geometry of nature*. Hardcover.
- Mandelbrot, B. (1995). *Les objets fractals*. Flammarion.
- Matheron, G. & de Marsily, G. (1980). Is transport in porous media always diffusive? a counterexample. *Water Res. Res.*, **16**(5), 901–917.
- Mérot, P. (1978). *Le bocage en Bretagne granitique : une approche de la circulation des eaux*. M Thèse INRA-ENSA-Univ Rennes 1.
- Mérot, P., Gascuel-Oudou, C. & Molenat, J. (1999). Influence du réseau de haies des paysages bocagers sur le cheminement de l'eau de surface. *Revue des Sciences de l'Eau*, **12**(1), 23–44.
- Muhar, A. (2001). Three-dimensional modelling and visualisation of vegetation for landscape simulation. *Landscape and Urban Planning*, **54**, 5–17.
- Nakagawa, M. (1999). *Chaos and fractals in engineering*. World Scientific Publishing Company.
- Nash, D. & McLaren, N. (2007). *Geochemical Sediments and Landscapes*. Blackwell Publishing Ltd.
- Nash, J. (1957). The form of the instantaneous unit hydrograph. *International Association of Scientific Hydrology*, **42**, 112–114.
- Niklas, K. (1992). *Plant biomechanic : an engineering approach to plant form and function*. The University of Chicago Press.

- Nikora, V. (1991). Fractal structures of river plan forms. *Water Resources Res.*, **27**(6), 1327–1333.
- Nikora, V. & Sapozhnikov, V. (1993). River network, fractal geometry and its computer simulation. *Water Resources Res.*, **29**(10), 3569–3575.
- Nikora, V., Sapozhnikov, V., & Noever, D. (1993). Fractal geometry of individual river channels and its computer simulation. *Water Resources Res.*, **29**(10), 3561–3568.
- Oohata, S. & Shidei, T. (1971). Studies on the branching structure of trees. *Japanese Journal of Ecology*, **21**(1-2), 7–14.
- Palmer, A. (1991). Origin and morphology of limestone caves. *Geol. Soc. Am. Bull.*, **103**, 1–21.
- Peitgen H., H. J. & Saupe, D. (1992). *Fractals for the classroom*. Springer-Verlag.
- Rigon, R., Rinaldo, A., & Rodriguez-Iturbe, I. (1994). On landscape self-organization. *J. Geophys. Res.*, **99**(11), 971–993.
- Rodriguez-Iturbe, I. & Rinaldo, A. (1997). *Fractal river basins*. Cambridge University Press.
- Saffman, P. (1959). Dispersion due to molecular diffusion and macroscopic mixing in flow through a network of capillaries. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 194–208.
- Sapoval, B. (1997). *Universalités et fractales*. Flammarion.
- Sauty, J.-P. (1980). An analysis of hydrodispersive transfer in aquifers. *Water Res. Res.*, **16**(1), 145–158.
- Schroeder (1991). *Fractals, chaos, power laws*. Freeman and Company.
- Schuller, D., Rao, A., & Jeong, G. (2001). Fractal characteristics of dense stream networks. *J. Hydrology*, **243**, 1–16.
- Sherman, L. (1932). Streamflow from rainfall by unit-graph method. *Engineering News-Record*, pages 501–505.
- Simmons, C. (1982). A stochastic-convective transport representation of dispersion in one-dimensional porous media systems. *Water Res. Res.*, **18**(4), 1193–1214.
- Sismilich, M., Menzies, M., Gandar, P., Jameson, P., & Clemens, J. (2003). Development of a mathematical method for classifying and comparing tree architecture using parameters from a topological model of a trifurcating botanical tree. *J. Theor. Biol.*, **220**, 371–391.
- Snell, J. & Sivapalan, M. (1994). On geomorphological dispersion in natural catchments and the geomorphological hydrograph. *Water Resources Res.*, **30**(7), 2311–2323.

- Strahler, A. (1957). quantitative analysis of watershed geomorphology. *Transaction AGU*, **38**, 913–920.
- Strahler, A. (1964). *Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks*. in V.T. Chow, Handbook of applied hydrology.
- Tarboton, D., Bras, R., & Rodriguez-Iturbe, I. (1988). The fractal nature of river networks. *Water Resources Res.*, **25**(8), 1317–1322.
- Thomas, I., Frankhauser, P., & Biernacki, C. (2007). The morphology of built-up landscapes on Wallonia (Belgium) : A classification using fractal indices. *Landscape and Urban Planning*, **84**, 99–115.
- Tokunaga, E. (1984). Ordering of divide segments and law of divide segment numbers. *Transaction, Japanese Geomorphological Union*, **5**, 71–77.
- Trudgill, S. (1985). *Limestone Geomorphology*. London, Longman.
- Tucker, G., Catani, F., Rinaldo, A., & Bras, R. (2001). Statistical analysis of drainage density from digital terrain data. *Geomorphology*, **36**, 187–202.
- Turcotte, D. (1992). *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge University Press.
- van der Lee, J. (1997). *Modélisation du comportement géochimique et du transport des radionucléides en présence de colloïdes*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre d'Informatique Géologique.
- Versteeg, H. & Malalasekera, W. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. London, Longman.
- Vicsek (1994). *Fractal in natural sciences*. Hardcover.
- Viennot, X., Eyrolles, G., Janey, N., & Arquès, D. (1989). Combinatorial analysis of ramified patterns and computer imagery of trees. *Computer Graphics*, **23**(3), 31–40.
- West, G., Brown, J., & Enquist, B. (1997). A general model for the origin of allometric scaling laws in biology. *Science*, **276**, 122–126.
- Withney, G. (1972). The bifurcation ratio as an indicator of adaptative strategy in woody plant species. *Bull. of the Torrey Botanical Club*, **103**(2), 67–72.
- Whitlock, M. C. (2008). Evolutionary inference from QST. *Molecular Ecology*, **17**, 1885–1896.
- Wustmann, P. (1993). *Modélisation du transfert de solutés réactifs dans un milieu poreux saturé*. Ph.D. thesis, École Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg.

Annexes : choix d'articles

*COMPTÉ RENDU À L'ACADÉMIE DES
SCIENCES*

Fleurant C. and W-C Jeong, 2001, Dispersion of inert particles in a rough fracture, *Compte Rendu à l'Académie des Sciences*, 332(2), p. 115-120.

Dispersion de particules inertes dans une fracture rugueuse

Cyril Fleurant*, Woo-Chang Jeong

École des mines de Paris, Centre d'informatique géologique, 35, rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau cedex, France

Reçu le 2 novembre 2000 ; accepté le 11 décembre 2000

Présenté par Ghislain de Marsily

Abstract – Dispersion of inert particles in a rough fracture. This paper aims to show a transport model of either smooth or rough fractures. These are numerically generated by means of a fractal surface method. In order to study dispersion processes, a 3D transport model is used. This model is based on a random walk that takes into account both the sizes of the particles and the size exclusion effect of particles on the fracture walls. Simulations are carried out to study dispersion processes in which transport cases in either smooth or rough fractures and transport of several sizes particles are involved. © 2001 Académie des sciences / Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

modelling / mass transport / non-Fickian dispersion / stochastic processes / poly-dispersion

Résumé – Cet article présente un modèle de transport en fracture, lisse ou rugueuse. La fracture est numériquement créée par le biais d'une méthode de surface fractale. Un modèle tridimensionnel de transport est alors utilisé, afin d'étudier les processus de dispersion. Ce modèle est basé sur une marche aléatoire, qui tient compte de la taille des particules et de l'effet d'exclusion de ces particules sur les parois de la fracture. Des simulations sont effectuées afin d'étudier les processus de dispersion pour les cas de transport en fractures lisses ou rugueuses et de transport de particules de tailles différentes. © 2001 Académie des sciences / Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

modélisation / transport de masse / dispersion non fickienne / processus stochastique / poly-dispersion

Abridged version

In the case of a single fracture, the transport of aqueous solution might be considered either in two-dimensions, or in three-dimensions [11, 12]. In two-dimensions (in a plan), one supposes that the fluid runs out at a constant speed. In three-dimensions, one introduces a parabolic velocity profile on the cross-section of the fracture (*figure 1*).

In a single fracture, the transport processes are the convection and the molecular diffusion, which act longitudinally and transversely. This phenomenon is commonly called the Taylor–Aris dispersion.

In the case of Fickian transport, the longitudinal dispersion coefficient is given, for instance, by [1] (equation (1))

and transport is modeled by advection–dispersion equation. In the case of three-dimensional transport, local velocities of particles are determined by a velocity profile known as Poiseuille (equation (2)), which expresses that the velocity is nil on the walls of the fracture and that it is maximum in its center.

In order to simulate the transport of particles in a rough fracture, it is convenient to generate first the roughness of the fracture. The method we used is described in detail by [2] and [8].

The walls of a single fracture are generated by fractal surfaces. The fractal surfaces being both non symmetrical, it allows the value of the aperture to decrease and zones of contact to be created (mechanical normal constraint of the

* Correspondance et tirés à part.

Adresse e-mail : fleurant@cig.ensmp.fr (C. Fleurant).

rock). In order to apply a transport model, it is advisable to determine velocities for each mesh. The best way is to use the software FRACAS [3, 8], which allows to calculate the hydrodynamics by a finite difference method. Then, the classical 3D random walk equations are used as the particle transport model [10].

Then the various approaches of some of the fracture models are applied to clarify and to propose information in the field of dispersion.

First, one generates various fractures with several fractal dimensions. Figures 4 and 5 show the results of simulations of the stochastic model.

At a second level, we suggest to simulate the transport of different sizes of particles (table). The 3D model of smooth fracture is used in order to take into account the particle sizes and the boundary conditions. The breakthrough curves of various simulations are presented in figure 6.

In a third stage one proposes to simulate the transport of poly-dispersed particle sizes. Obviously, only 3D models of fractures can take into account this variability of sizes.

The radii of the particles are distributed according to two simple laws: uniform and Gaussian. Each particle has

its own radius and its own molecular diffusion coefficient, thus the transport process takes them into account when boundary conditions and diffusion processes are computed. In figure 7, the results of simulations are presented and show the influence of the size distribution of the particles on transport.

This paper aimed to present a fracture transport model. The fractures can only be generated by means of two fractal surfaces more or less distant from one another. The fractal dimension of these surfaces depend on the roughness of the fracture and makes it easier to treat the synthetic case of laboratory fractures (smooth) and of natural fractures (roughness, zones of contact).

The application of the software FRACAS [3, 8] allowed to calculate the velocity field into the fracture and thus to use a model of transport. The model of dispersion in fracture was thus developed in the general case of a three-dimensional flow in a rough fracture (with or without zones of contact), simplified cases (smooth and rough fracture in two-dimensions, smooth fracture in three-dimensions) were also presented.

1. Introduction

Nous allons envisager successivement dans cet article différents cas de transport conservatif et non réactif dans une fracture, lisse et rugueuse [4]. Dans le cas d'une fracture unique, le transport de soluté peut être envisagé, soit en bidimensionnel, soit en tridimensionnel [11, 12]. En bidimensionnel, on suppose alors que le fluide s'écoule à vitesse constante. En tridimensionnel, on introduit un profil parabolique des vitesses sur la section de la fracture. Dans une fracture unique, les processus de transport sont la convection et la diffusion moléculaire, qui agit longitudinalement et transversalement, c'est ce que l'on appelle plus communément la dispersion de Taylor.

Dans une fracture lisse, si L est la longueur de la fracture, U la vitesse moyenne du fluide (figure 1), alors [6] donnent quelques indications sur les conditions de transport du fluide : si le temps de séjour moyen est inférieur à un temps critique ($\frac{6a^2}{\pi^2 D_m}$), où a [L] est l'ouverture de la fracture et D_m [$m^2 \cdot s^{-1}$] la diffusion moléculaire, le transport est alors non fickien. Dans le cas contraire, lorsque la diffusion moléculaire est significative et homogénéise la concentration du traceur sur l'ouverture de la fracture, le transport est alors fickien et est modélisé par l'équation classique de convection–dispersion. Le coefficient de dispersion longitudinale s'écrit alors [1] :

$$D_X = D_m + \frac{U^2 a^2}{210 D_m} \quad (1)$$

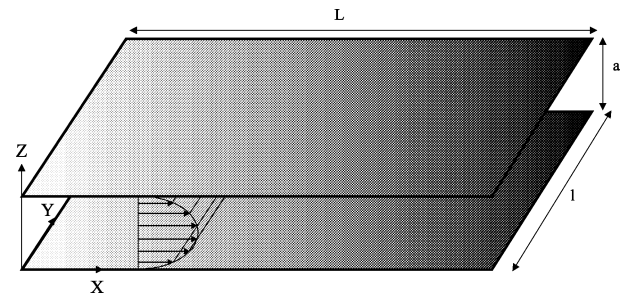


Figure 1. Système d'une fracture avec son profil parabolique des vitesses.

Figure 1. Fracture system with a parabolic velocity profile.

Ce coefficient de dispersion, dit de Taylor–Aris, est une valeur asymptotique, qui n'est valable qu'à partir d'une longueur critique de la fracture [9].

Dans le cas du transport tridimensionnel, les vitesses locales des particules sont déterminées par un profil des vitesses, dit de Poiseuille, de la forme :

$$u_x(z) = \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{4z^2}{a^2} \right) \quad (2)$$

Ce profil exprime que la vitesse est nulle aux parois de la fracture et qu'elle est maximale ($\frac{3}{2}U$) au centre.

Si le temps de séjour est inférieur au temps critique ($\frac{6a^2}{\pi^2 D_m}$), alors le problème est tridimensionnel (c'est-à-dire qu'il faut tenir compte de la distribution parabolique des vitesses). Dans le cas contraire, on peut simplifier le problème en le traitant comme bidimensionnel (c'est-à-dire qu'on utilise la dispersion de Taylor–Aris).

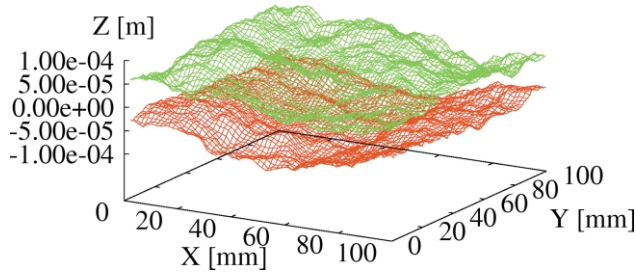


Figure 2. Exemple de fracture rugueuse obtenue par la génération de deux surfaces fractales.

Figure 2. Example of rough fracture obtained by the generation of two fractal surfaces.

2. Le modèle de transport en fracture

2.1. Génération de la rugosité

Afin de simuler le transport de particules dans une fracture rugueuse, il convient en premier lieu de générer la rugosité de la fracture. La méthode que nous avons utilisée est décrite en détail dans [2] et dans [8].

2.2. Génération d'une fracture

Il suffit de générer deux surfaces fractales de même moyenne et de même écart type, puis de définir l'ouverture de cette fracture comme étant la distance a entre les deux moyennes des rugosités. Le fait de ne pas avoir de surfaces identiques permet d'obtenir des zones de contact lorsque la distance a diminue. Les zones de contact apparaissent en fonction de la contrainte mécanique normale de la roche et exercent des conséquences primordiales sur le comportement hydrodynamique de la fracture. La *figure 2* montre une fracture générée par la méthode décrite ci-dessus ; la dimension fractale est de 2,3. La moyenne des rugosités est de $1 \cdot 10^{-4}$ m et l'écart type de $5 \cdot 10^{-5}$ m ; l'ouverture moyenne est de $1 \cdot 10^{-4}$ m.

2.3. Caractéristiques hydrodynamiques des fractures

Afin d'appliquer le modèle de marche aléatoire, il convient de déterminer les vitesses $u_X(z)$ et u_Y pour chacune des mailles. Nous utilisons pour cela le logiciel FRACAS [3, 8], qui permet de calculer l'hydrodynamique dans la fracture par une méthode aux différences finies.

FRACAS est utilisé pour une fracture rugueuse (*figure 2*), afin d'obtenir les champs de vitesse (*figure 3*) pour différentes ouvertures moyennes. On constate que, lorsque l'ouverture moyenne diminue, des zones de contact apparaissent. L'écoulement doit

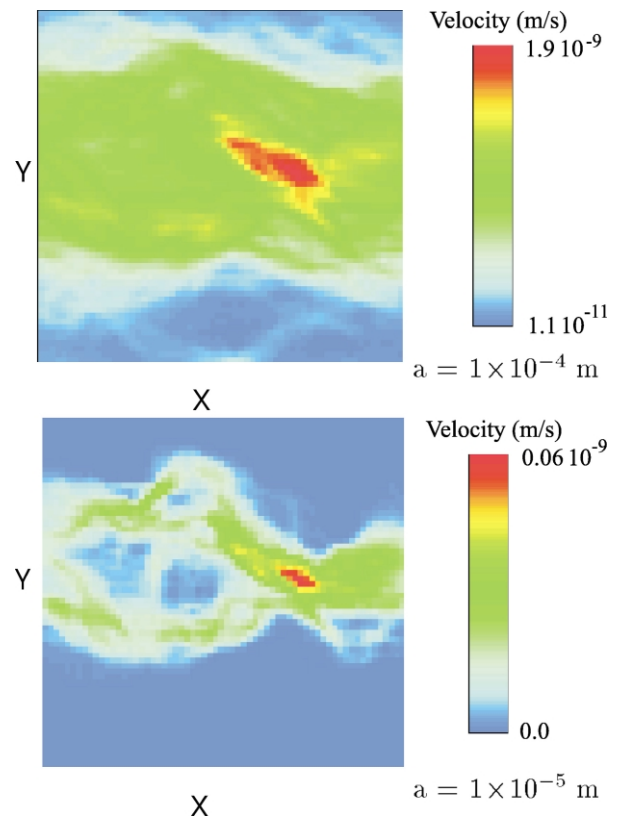


Figure 3. Champ de vitesses dans la fracture calculé à partir des épaisseurs, pour différentes ouvertures moyennes : $1 \cdot 10^{-4}$ m et $1 \cdot 10^{-5}$ m.

Figure 3. Speed field in the fracture according to the distribution of the apertures, for several average apertures: $1 \cdot 10^{-4}$ m and $1 \cdot 10^{-5}$ m.

alors contourner ces zones ; on parle alors de chenailisation.

2.4. Le modèle de transport

Un modèle classique de marche aléatoire tridimensionnelle est utilisé pour le transport des particules [10] :

$$\begin{cases} X^j = \sum_{i=0}^{n-1} (u_X^j(Z_i^j) dt + \delta \xi_{i,D_m}^X) \\ Y^j = \sum_{i=0}^{n-1} (u_Y^j dt + \delta \xi_{i,D_m}^Y) \\ Z^j = \sum_{i=0}^{n-1} (\delta \xi_{i,D_m}^Z) \end{cases} \quad (3)$$

On rappelle qu'ici $\delta \xi_{i,D_m}$ sont des nombres aléatoires, tirés d'une loi normale de moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{2 D_m dt}$, où D_m est le coefficient de diffusion moléculaire. D_m peut être calculé indépendamment pour chaque particule, en fonction de son diamètre, par le biais de l'équation de Stokes–Einstein.

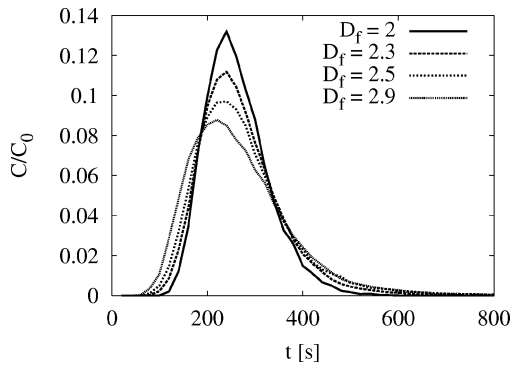


Figure 4. Courbes de restitution du modèle de transport, pour différentes rugosités.

Figure 4. Breakthrough curves of the transport model with several roughnesses.

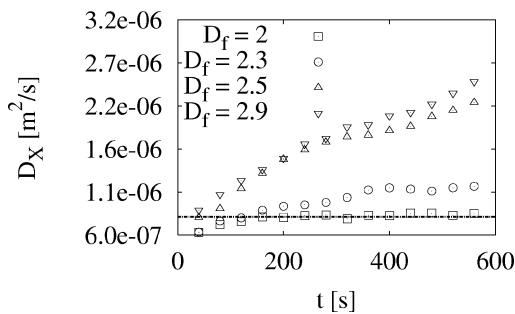


Figure 5. Évolution du coefficient de dispersion longitudinale en fonction du temps, pour différentes valeurs de la rugosité.

Figure 5. Longitudinal dispersion coefficient versus time for several fracture roughnesses.

3. Comportement du modèle

Dans cette partie, nous allons étudier successivement l'influence de la rugosité d'une fracture et de la taille des particules sur leur transport et leur dispersion.

3.1. Variation de la rugosité

On se propose ici de comparer la dispersion des particules dans des fractures de rugosités différentes. On génère donc différentes fractures, dont les moyennes et écart type des rugosités sont respectivement $1 \cdot 10^{-4}$ et $5 \cdot 10^{-4}$ m et dont les dimensions fractales valent 2,3, 2,5 et 2,9.

L'ouverture moyenne reste constante et égale à $5 \cdot 10^{-4}$ m, ainsi que la différence de charge, qui vaut 1,86. La figure 4 présente les résultats des simulations du modèle de transport. On constate que, plus la dimension fractale augmente, plus la fracture est rugueuse, et plus le nuage de particules se déplace vite en moyenne et plus il est dispersé. C'est également ce que confirme la figure 5 : sur cette dernière,

Tableau. Résultats de simulation des modèles de transport 2D et 3D pour des particules de tailles différentes. Le temps de séjour moyen est ici de 10000 s.

Table. Simulation results of 3D and 2D transport models for several particle sizes. Average residence time is 10000 s.

Rayon (nm)	D_m ($m^2 \cdot s^{-1}$)	Temps critique (s)	D_X^{2D} ($m^2 \cdot s^{-1}$)	D_X^{3D} ($m^2 \cdot s^{-1}$)
1	$1,87 \cdot 10^{-10}$	812	$8,23 \cdot 10^{-10}$	$8,23 \cdot 10^{-10}$
10	$1,87 \cdot 10^{-11}$	8127	$6,38 \cdot 10^{-9}$	$6,38 \cdot 10^{-9}$
100	$1,87 \cdot 10^{-12}$	81273	$6,36 \cdot 10^{-8}$	$4,30 \cdot 10^{-8}$
1000	$1,87 \cdot 10^{-13}$	812736	$6,36 \cdot 10^{-7}$	$8,64 \cdot 10^{-8}$

on peut suivre l'évolution en fonction du temps de la dispersion des particules pour différentes rugosités de fracture. On constate que, pour la fracture lisse ($D_f = 2,3$), le régime asymptotique de la dispersion longitudinale est atteint très rapidement (le régime asymptotique théorique, décrit par l'équation (1) est tracé en ligne continue). Pour la fracture qui présente la rugosité la plus faible ($D_f = 2,3$), ce régime asymptotique est également atteint, mais moins rapidement que pour la fracture lisse. En revanche, pour les fractures les plus rugueuses ($D_f = 2,5$ et $D_f = 2,9$), la diffusion moléculaire n'a pas le temps d'homogénéiser les particules sur l'ouverture de la fracture et le régime asymptotique n'est pas encore atteint. Ce phénomène est également souligné dans [5] et [14]. En effet, en augmentant la dimension fractale, on perturbe le champ des vitesses en le rendant plus hétérogène ; on augmente ainsi la dispersion des particules.

3.2. Variation de la taille des particules

3.2.1. Particules mono-taille

Des simulations successives sont faites pour quatre rayons différents de particules : 1, 10, 100 et 1000 nm (tableau). Les particules sont transportées dans une fracture lisse de longueur 10 cm, de largeur 2,2 cm et d'ouverture constante et égale à 500 μm .

Le modèle de fracture lisse 3D est utilisé afin de tenir compte de deux processus :

- à chaque taille de particules correspond un coefficient de diffusion moléculaire ; on prend donc en compte la diffusion moléculaire sur la verticale, qui aura des conséquences sur les vitesses longitudinales ;
- les conditions aux limites sont différentes suivant la taille des particules ; c'est le processus d'exclusion.

Les courbes de restitution des différentes simulations sont présentées sur la figure 6. Sur cette figure, on compare le modèle de transport 3D avec le modèle 2D. On constate (figure 6 et tableau) que, pour les petites particules de 1 et 10 nm, les deux modèles de dispersion sont identiques (les courbes des modèles sont confondues). Ces deux simulations mettent en

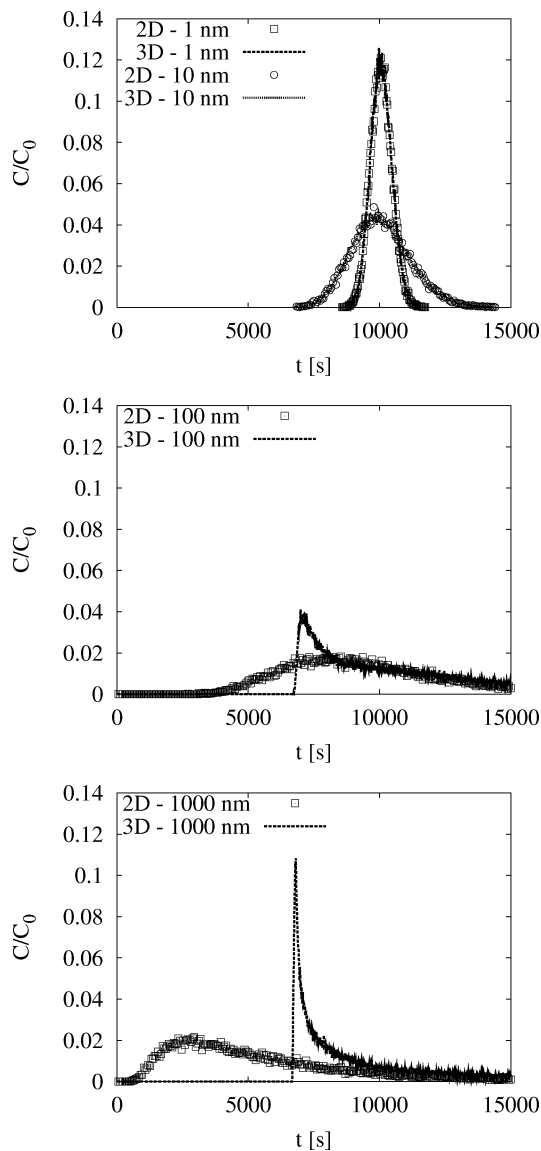


Figure 6. Courbes de restitution des modèles 2D et 3D pour différentes tailles de particules.

Figure 6. Breakthrough curves of the 2D and 3D transport model for several particle size.

évidence des temps de séjour moyens des particules supérieurs au temps critique. On est donc dans le cas où la dispersion de Taylor–Aris peut être utilisée pour modéliser le transport des particules dans la fracture.

Pour les particules de taille plus importante, de 100 nm et 1 μm , il en est autrement. Le temps de séjour moyen est, dans ces deux cas, inférieur au temps critique, la diffusion moléculaire n’a donc pas le temps d’homogénéiser les particules dans la fracture ; le modèle de dispersion de Taylor–Aris ne convient donc plus.

Le modèle 2D suppose des temps de première arrivée des particules très courts, puisque le coefficient de dispersion de Taylor–Aris augmente avec la taille

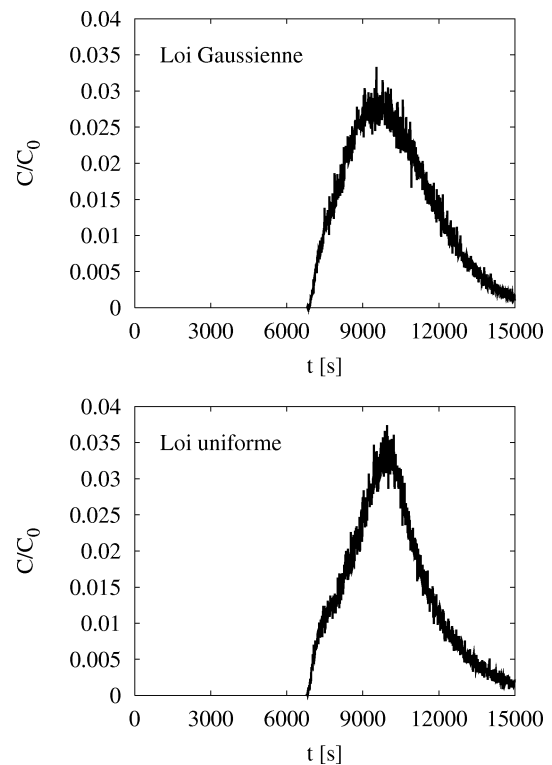


Figure 7. Courbes de restitution du modèle de transport, pour différentes lois de distribution des rayons des particules.

Figure 7. Breakthrough curves of the transport model for several distribution laws of the particles’ radii.

de ces dernières. Ceci dérive du fait que la vitesse moyenne U est calculée entre $-(\frac{a}{2} - r)$ et $(\frac{a}{2} - r)$; cette moyenne est donc plus forte que lorsqu’elle est calculée entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$. En revanche, le modèle 3D, qui tient compte, quant à lui, de processus plus microscopiques et plus physiques (diffusion moléculaire et profil des vitesses de type Poiseuille dans la fracture), impose aux particules de ne pas aller plus vite que la vitesse la plus rapide de la fracture ($\frac{3U}{2}$). Le temps de percé théorique est donc de $\frac{2L}{3U}$; dans notre cas, cette valeur vaut 6666,6 s, ce qui correspond à la valeur du modèle numérique (figure 6). Cette différence entre les comportements des différents modèles induit, bien évidemment, des coefficients de dispersion différents. Ainsi, on remarque dans le tableau que le modèle 2D surestime la dispersion, et ce d’autant plus que la taille des particules augmente.

3.2.2. Particules multi-tailles

Dans un deuxième temps, on se propose de simuler le transport de particules multi-tailles. Bien évidemment, seuls les modèles de fractures 3D (lisse et rugueuse) peuvent tenir compte de cette variabilité des tailles, car ils prennent en considération la dimension verticale de la fracture, c’est-à-dire le profil parabolique des vitesses et la diffusion moléculaire.

Les rayons des particules sont distribués suivant deux lois simples : uniforme et gaussienne. Les coefficients de diffusion moléculaire sont alors calculés en fonction de ces rayons par le biais de la formule de Stokes–Einstein. Chaque particule possède son rayon et son coefficient de diffusion moléculaire ; la fonction du transport les prend ainsi en compte pour les conditions aux limites et le processus de diffusion. Sur la *figure 7* sont présentés les résultats des simulations, dont les caractéristiques techniques sont équivalentes à celles énoncées précédemment. Les courbes de restitution obtenues montrent l'influence de l'hétérogénéité des tailles des particules sur le transport. Très peu de différences sont observées entre les courbes issues de la loi normale et de la loi de taille constante (non présentée ici) : l'écart type de la loi normale proposée ne semble pas être suffisamment significatif pour pouvoir influencer le transport. En revanche, la loi uniforme impose une équiprobabilité des rayons entre 1 et 100 nm, ce qui donne une courbe de restitution déformée par la présence, en nombre équivalent, de très petites et de très grosses particules.

On retrouve certaines de ces conclusions dans la référence [13], qui établit que la dispersion du strontium est supérieure à celle d'un traceur parfait (ceci montre que l'effet de taille peut s'appliquer également aux ions de grosse dimension), ainsi que dans la référence [7].

Références

- [1] Aris R., On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube, *Proc. Roy. Soc. London A* 235 (1956) 67–77.
- [2] Brown S.R., Simple mathematical model of rough fracture, *J. Geophys. Res. B* 100 (4) (1995) 5941–5952.
- [3] Cacas M.C., Développement d'un modèle tridimensionnel stochastique discret pour la simulation de l'écoulement et des transferts de masse et de chaleur en milieu fracturé, thèse, École nationale supérieure des mines de Paris, 1989.
- [4] Fleurant C., Modélisation stochastique du transport de masse dans les milieux poreux et fracturés, École nationale supérieure des mines de Paris, 2000.
- [5] Grindrod P., Lee A.J., Colloid migration in non-uniform fractures: particle tracking in 3D, Technical report, INTERA, Chiltern House, 45 Station Road, Henley-on-Thames, Oxfordshire, RG9 1AT, UK, 1996.
- [6] Hull L.C., Miller J.D., Clemo T.M., Laboratory and simulation studies of solute transport in fracture networks, *Water Resour. Res.* 23 (8) (1987) 1505–1513.

4. Conclusion

Le modèle de dispersion en fracture a donc été développé dans le cas général d'un écoulement tridimensionnel en fracture rugueuse.

Le modèle permet de retirer un certain nombre de résultats sur le transport en fracture :

- le choix du modèle 2D ou 3D est important suivant le système étudié (taille des particules, dimensions de la fracture) ;
- en augmentant la rugosité de la fracture, on génère des chemins préférentiels ; des particules arrivent donc plus vite et la dispersion augmente ;
- en introduisant des lois de distribution du rayon des particules, on montre que les courbes de restitution sont sensiblement différentes de celles obtenues avec une taille unique et ce, d'autant plus que l'hétérogénéité des rayons est importante ;
- les grosses particules, du fait de leur encombrement, vont échantillonner en moyenne des vitesses plus rapides ; elles arrivent donc plus tôt ; la dispersion cinématique sera donc plus importante ;
- l'augmentation de l'hétérogénéité des tailles (augmentation de l'écart type des tailles) augmente la dispersion.

[7] James S.C., Chrysikopoulos C.V., Transport of polydisperse colloid suspensions in a single fracture, *Water Resour. Res.* 35 (3) (1999) 707–718.

[8] Jeong W.C., Bruel D., Fault hydrogeology, Technical report LHM/RD/98/06, École des mines de Paris, 1998.

[9] Kessler J.H., Hunt J.R., Dissolved and colloidal contaminant transport in a partially clogged fracture, *Water Resour. Res.* 30 (4) (1994) 1195–1206.

[10] Kinzelbach W., *Groundwater modeling*, Elsevier, 1986.

[11] Neretnieks I., Eriksen T., Tähtinen P., Tracer movement in a single fissure in granitic rock: some experimental results and their interpretation, *Water Resour. Res.* 18 (4) (1982) 849–858.

[12] Novakowski K.S., Evans G.V., Lever D.A., Raven K.G., Example of measuring hydrodynamic dispersion in a single fracture, *Water Resour. Res.* 21 (8) (1985) 1165–1174.

[13] Wels C., Smith L., Vandergraaf T.T., Influence of specific surface area on transport of sorbing solutes in fractures: an experimental analysis, *Water Resour. Res.* 32 (7) (1996) 1943–1954.

[14] Wels C., Smith L., Beckie R., The influence of surface sorption on dispersion in parallel plate fractures, *J. Contam. Hydrol.* 28 (1997) 94–114.

MATHEMATICAL GEOLOGY

Fleurant C. and J. van der Lee, 2001, A stochastic model of transport in 3-D porous media, *Mathematical Geology*, 33(4), p. 449-474.

A Stochastic Model of Transport in Three-Dimensional Porous Media¹

Cyril Fleurant² and Jan van der Lee²

Modeling of solute transport remains a key issue in the area of groundwater contamination. The fundamental processes of solute transport are advection and dispersion and an accurate description is needed for all modeling studies. The most common approach (advection-dispersion equation) considers an average advective flow rate and a Fickian-like dispersion. Here we propose a more accurate approach: advection is a function of the dispersive behavior of the solute and of medium characteristics. This method provides useful insight for the dispersion process in general. The aim of this article is to present the mathematical background of the random walk model and a simple numerical application.

KEY WORDS: modeling, mass transport, non-Fickian dispersion, random walk, stochastic processes.

INTRODUCTION

Solute transport model has been the subject of an intense research effort in recent years and remains a key research area in hydrogeology. The motivations are problems of aquifers contamination and particularly migration of radionuclides from repository sites.

The movement of solute in porous media is commonly described by the advection-dispersion equation:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla C - C\mathbf{U}) = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (1)$$

where C is the concentration (M/L^3), t is the time (T), \mathbf{U} is the average velocity (L/T), \mathbf{D} is the dispersion tensor (L^2/T), and ∇ is the operator divergence or gradient.

This classical approach considers the dispersive mass flux equal to the Fick's first law. If the dispersion tensor is expressed in its principal directions of anisotropy,

¹Received 5 October 1999; accepted 23 May 2000.

²Centre d'Informatique Géologique, École des Mines de Paris, 35 rue St honoré, 77305 Fontainebleau cedex, France. e-mail: cyril.fleurant@libertysurf.fr

it is limited to three components: D_X is the longitudinal dispersion coefficient (in the direction of the flow), D_Y and D_Z are the transverse dispersion coefficients.

In the domain of typical groundwater velocities, the following relations are admitted:

$$\begin{aligned} D_X &= D_m + \alpha_X U \\ D_Y &= D_Z = D_m + \alpha_Y U \end{aligned} \quad (2)$$

where α_X and α_Y are the longitudinal and transverse dispersivities respectively (L), D_m is the molecular diffusion coefficient in porous media (L^2/T) and U is the modulus of the average velocity (L/T).

Two different methods are commonly used to solve the advection-dispersion equation numerically:

- Finite difference and finite element methods are fast and can be used for a variety of scales. But they are inflexible when other processes have to be added (such as sorption, dual-porosity, etc.). Their results are not precise for a high Peclet number, i.e., when advection is predominant, resulting in an alteration by the numerical dispersion. This is due to the double nature of the advection-dispersion equation, advection forming the parabolic and dispersion the hyperbolic part. The solution of this problem is to refine the mesh and so to increase the calculation time.
- Methods using particles. These methods come from stochastic physics in order to solve diffusion and dispersion problems. A deterministic description of the pollutant transfer in porous media is impossible, consequently the best approach is to consider all possible movements (Scheidegger, 1953). Many models exist to solve the advection-dispersion equation in this way (Ackerer and Kinzelbach, 1985; Uffink, 1988; Wen and Kung, 1995; Delay and others, 1996; Banton, Delay, and Porel, 1997). These methods are generally less efficient than the other methods, in terms of calculation time, but they are more flexible and can be used for many different situations such as particle interactions, volume exclusion, and non-Fickian dispersion.

The most important drawbacks of the advection-dispersion Equation (1) to simulate solute transport can be attributed to the non-Fickian behavior of the dispersive transport as well as the apparent scale dependence of the dispersivity (Matheron and de Marsily, 1980; Neuman and Zhang, 1990; Dagan, 1990; Gelhar, 1993).

Fitting of experimental data by the advection-dispersion Equation (1) sometimes fails because of non-Fickian behavior leading to long tails in breakthrough curves and skewness in the spatial dissemination of solute (Carrera, 1993). If the dispersion of solute was Fickian, the rate of increase in size of a plume should be

constant. This has been demonstrated experimentally at the Borden site (Ontario, Canada) where the rate of longitudinal growth increased with time and reaches a constant value only after 3 years (Freyberg, 1986).

Most difficulties in simulating solute transport arise from the manner in which dispersion is treated. The advection rate (defined by the ratio of the system length and breakthrough time) must be a consequence of the average pathway length, and therefore depends on dispersion. With the advection-dispersion Equation (1), advection is independent of dispersion.

The classical random walk approach generally aims at solving the following equation:

$$X(t + \Delta t) = X(t) + U \Delta t + \Omega \sqrt{2D \Delta t} \tag{3}$$

where Ω is a random number from a Gaussian distribution with 0 mean and a standard deviation equal to unity. This formula does not give any useful solution either, because it is still based on the assumption of an average flow velocity and some random noise factor that represents the dispersive effect. Therefore, Equation (3) is another formulation of Equation (1). A more mechanistic description of the dispersion requires a different random walk approach.

Different theories have been proposed to explain and to express hydrodynamic dispersion in porous media. The mathematical basis of this paper's theory is inspired to the statistical theory utilizing microscopic pore structure parameters, brought forward by, e.g., Scheidegger (1953), de Jong (1958), and Saffman (1959).

These authors provided mathematical descriptions of displacement and dispersion of particles in a porous medium. The medium is regarded as an assemblage of small, randomly orientated straight tubes of eventually variable length, denoted by ℓ . Each time a particle reaches a junction, a new direction is randomly chosen according to a uniform distribution of probability density functions for θ and ϕ (Fig. 1).

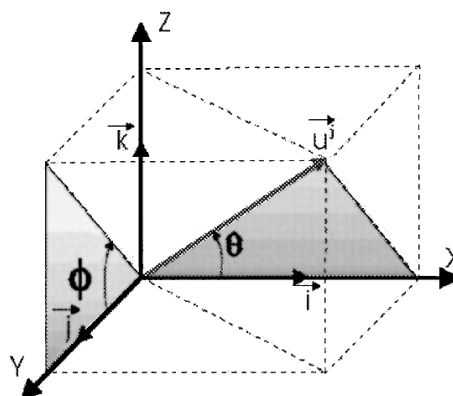


Figure 1. Geometrical principles and general notation of the approach.

Accordingly, the spatial coordinates X , Y , and Z after n steps are given by:

$$\begin{cases} X_n = \sum_i^n (\ell_i \cos \theta_i) \\ Y_n = \sum_i^n (\ell_i \sin \theta_i \cos \phi_i) \\ Z_n = \sum_i^n (\ell_i \sin \theta_i \sin \phi_i) \end{cases}$$

The actual flow velocity (u) depends on the direction, in such a way that the flow velocity tends to zero when the direction is perpendicular to the mean flow direction, hence for $\theta \rightarrow \pi/2$. The total residence time is then given by:

$$T_n = \sum_i^n (\ell_i, u_i)$$

The assumption of straight capillary tubes was introduced in order to establish simplified mathematical relationships for macroscopic quantities, such as the advection rate as well as the longitudinal and transverse dispersion.

This theory has led to one of the first comprehensive demonstrations of the behavior of longitudinal and transverse dispersion as a function of time, distance, and average flow velocity. At present, it also seems an appropriate basis for comprehensive modeling of solute transfer and dispersion.

PRINCIPLES OF THE THREE-DIMENSIONAL MODEL

Mathematical Background

Transport of matter in a porous medium is a function of the flow velocity vector \vec{u}^j with pore velocity as the scalar value. Its random nature leads to an average flow velocity U but also to a noise that leads to spatial dispersion. Increasing the spatial scale increases the noise (for the number of movements is increased): hence dispersion is scale dependent as expected and desired.

Notations are introduced in an orthonormal coordination system (\vec{i} , \vec{j} , and \vec{k}) such that \vec{i} points to X , the direction of the average flow velocity. As shown schematically in Figure 1, vector \vec{u}^j can be expressed relative to the basis (\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}) in terms of the angles θ and ϕ :

$$\begin{cases} \delta X^j = u^j dt \cos \theta \\ \delta Y^j = u^j dt \sin \theta \cos \phi \\ \delta Z^j = u^j dt \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

where u^j is the velocity of the particle j , dt is the time step and δX^j , δY^j , and δZ^j are the elementary displacements of the particle j during a time step in the X , Y , and Z directions, respectively. We assume a pure Markovian process, i.e., a stochastic process in which the prediction of the probability distribution of a random variable at time t depends only on that given distribution at the previous time. The Markovian process can be written for the particle j :

$$\begin{cases} X_n^j = \sum_{i=1}^n (u^j dt \cos \theta_i) \\ Y_n^j = \sum_{i=1}^n (u^j dt \sin \theta_i \cos \phi_i) \\ Z_n^j = \sum_{i=1}^n (u^j dt \sin \theta_i \sin \phi_i) \end{cases} \quad (4)$$

Stochastic Parameters

Deviation Parameters

Equation (4) is the schematization of the particle trajectory in porous media. A particle runs through a porous medium bypassing the grains. The orientation of the trajectories are random, according to the angles θ and ϕ , which are random variables. This is the principle of the stochastic models described by the de Jong (1958) and Saffman (1959), but these authors considered a random porous medium (with a random channels system); here we consider random trajectories of the solute. The stochastic behavior of angles θ and ϕ represents the spatial variance of the vector \vec{u}^j . We make the assumption (also made by de Jong, 1958, and Saffman, 1959) of random perpendicular directions uniformly distributed, then the azimuthal angle ϕ is distributed within $[0, \pi]$ according to a uniform probability density function (noted pdf):

$$\text{pdf}(\phi) = \frac{1}{\pi} \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \pi \quad (5)$$

The polar angle θ is the randomness of the static medium properties and the hydrodynamic. We make the assumption of a laminar flow between the grains of the medium, then the probability of a particle to have a straight trajectory (direction of the main flow) is large while the probability to have a trajectory perpendicular to the main flow is not realistic. These informations impose mathematical criteria on the pdf of θ : a symmetrical function with $P(0) = 1$ and $P(-\pi/2) = P(\pi/2) = 0$ (where $P(\theta)$ denotes the probability of θ). This physical argument of laminar flow

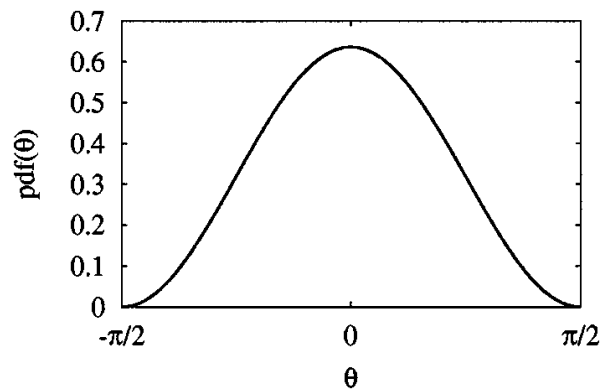


Figure 2. Probability density functions of θ .

leads to many possible functions that allow those mathematical properties, then we have to choose arbitrarily (because of lack of informations). Then we chose a square cosine function (Fig. 2) for its continuity and derivative properties:

$$\text{pdf}(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta \quad \text{for } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

Diffusion Parameter

The diffusion is added on the convective transport using a Gaussian function. At each coordinate of the particle, a random variable is added where the probability density function is (Fig. 3):

$$\text{pdf}(\xi) = \frac{1}{\sigma_d \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_d^2}\right) \quad \sigma_d = \sqrt{2D_m dt} \quad (7)$$

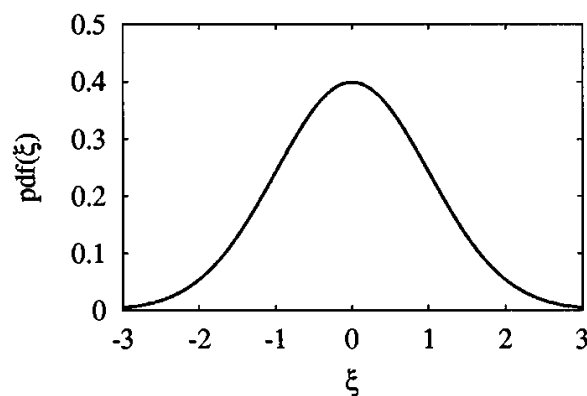


Figure 3. Probability density function of ξ .

where dt is the time step and D_m the molecular diffusion coefficient in porous media:

$$D_m = \tau d_0$$

where d_0 is molecular diffusion coefficient in free water and τ the tortuosity.

Convection Parameter

Even for a homogeneous porous medium, porosity is distributed according to some statistical distribution that leads to a random behaviour of velocities at pore scale. We make the assumption (as de Jong, 1958, made) that a particle j keeps a constant value of its velocity u^j at each time step; that means a particle runs through a capillary that has constant velocities in its cross section. Then particles velocities are initially (before transport simulation) randomized according to a pdf. A lognormal pdf was chosen, because of several criteria:

- if particles are trapped in dead-end pores or slow down in stagnant zones, velocities have to be very small or nil;
- if we make the assumption of a parabolic velocities profile between two grains of the medium, then particles could not have velocities faster than $3U/2$ or $2U$.

These two facts imply a nonsymmetrical function. A lognormal probability density function allows such properties (Fig. 4):

$$f_{dp}(u^j) = \frac{1}{(u_{\max} - u^j)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln((u_{\max} - u^j)/U))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

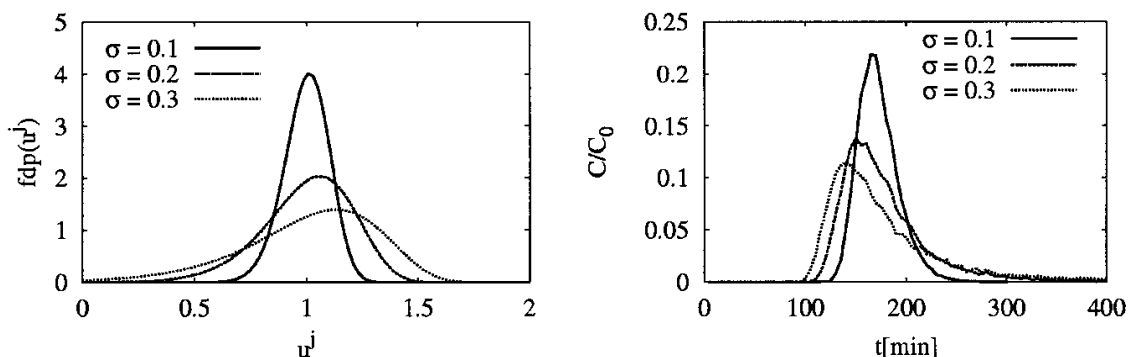


Figure 4. Probability density function of u^j vs. the parameters σ and the impacts on the breakthrough curves.

Table 1. Simulation Data

Column length	10	cm
Column diameter	5	cm
Average velocity	1×10^{-5}	m/s
Injection time	8	min
Time step	8	min

where u_{\max} is a parameter that controls the maximum velocity. U is the macroscopic average velocity and σ the standard deviation of the pdf. When σ is lower than 0.1, the probability density function of the velocities is approaches a Gaussian shape. To keep a constant velocity of the function (8), u_{\max} has to be related to U and σ by the following relation (see Appendix A):

$$u_{\max} = U(1 + e^{(\sigma^2/2)}) \quad (9)$$

The standard deviation σ controls the spatial distribution of the particle cloud. It is interesting to study the sensitivity of this parameter to understand its impact. According to Equation (8) and Figure 4, when σ is close to zero, the greatest velocity is close to the average velocity and the distribution is effectively Gaussian. Figure 4 also shows the impact of the parameter σ on the resulting breakthrough curves. The simulation data is given in Table 1. When σ increases, interval of velocities increases then dispersion increases (Fig. 5).

The complete Markovian process including advection-diffusion-dispersion is then

$$\begin{cases} X_n^j = \sum_{i=1}^n (\xi_i^X + u^j dt \cos \theta_i) \\ Y_n^j = \sum_{i=1}^n (\xi_i^Y + u^j dt \sin \theta_i \cos \phi_i) \\ Z_n^j = \sum_{i=1}^n (\xi_i^Z + u^j dt \sin \theta_i \sin \phi_i) \end{cases} \quad (10)$$

Here we have the position of a particle j after n steps.

RULES OF THE RANDOM WALK PROCESS

The aim of this section is to find, from the equation of the random walk (10), some mathematical relations between the microscopic parameters of the random walk model presented here and the macroscopic parameters of the classical

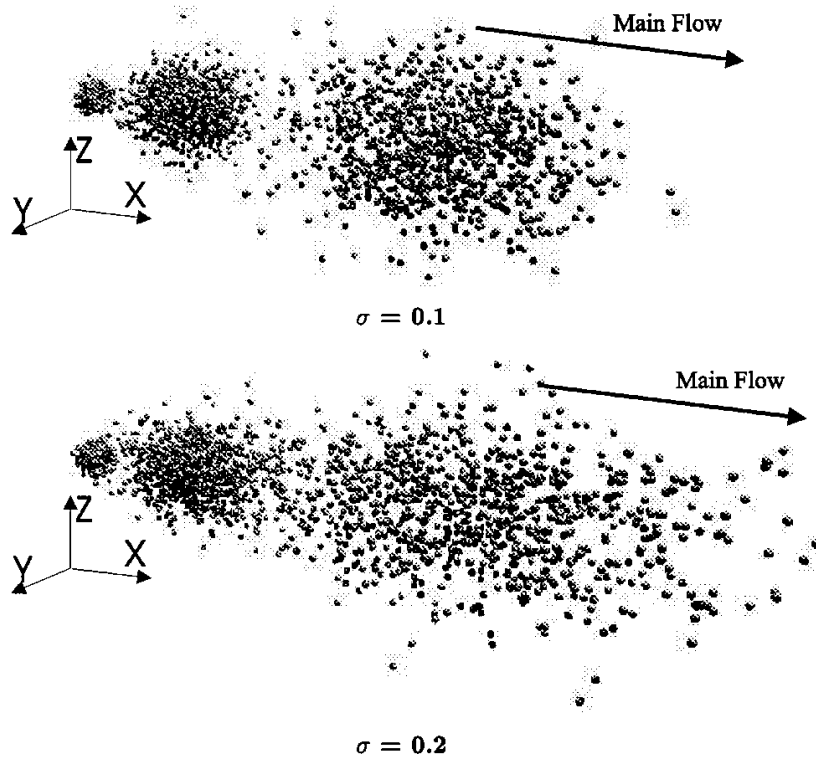


Figure 5. Tridimensionnal perspective view of the influence of σ on the structure cloud, at three different times.

transport model such as average velocity and dispersivity. First, statistical properties of the displacement of a single particle are studied.

Rules for a Particle

Here we consider a single particle j , so the velocity u^j is keeps as a constant value. According to the Lindeberg–Lévy theorem (Kaufmann, 1965), mean displacements of a single particle after n steps along the axes are given by

$$\langle \delta X_n^j \rangle = n \langle \delta X^j \rangle \quad \langle \delta Y_n^j \rangle = n \langle \delta Y^j \rangle \quad \langle \delta Z_n^j \rangle = n \langle \delta Z^j \rangle$$

and the variances of these displacements are

$$\sigma_{\delta X_n^j}^2 = n \sigma_{\delta X^j}^2 \quad \sigma_{\delta Y_n^j}^2 = n \sigma_{\delta Y^j}^2 \quad \sigma_{\delta Z_n^j}^2 = n \sigma_{\delta Z^j}^2$$

where $\langle \rangle$ denote an ensemble average and σ^2 the variance of the displacement.

After performed means and variances (see Appendix B), one obtains

$$\begin{aligned}\langle \delta X_n^j \rangle &= \frac{8u^j dt}{3\pi} \\ \langle \delta Y_n^j \rangle &= \langle \delta Z_n^j \rangle = 0 \\ \sigma_{\delta X_n^j}^2 &= 2Ddt + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) (u^j dt)^2 \\ \sigma_{\delta Y_n^j}^2 &= \sigma_{\delta Z_n^j}^2 = 2Ddt + \frac{(u^j dt)^2}{8}\end{aligned}$$

Then according to the Lindeberg–Lévy theorem, the pdf of the longitudinal and transverse displacements are, after many steps,

$$\begin{aligned}\text{fdp}(\delta X_n^j) &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi \left(2Ddt + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) (u^j dt)^2 \right)}} \\ &\quad \times \exp \left(- \frac{\left(\delta X_n^j - \frac{8u^j dt}{3\pi} \right)^2}{2n \left(2Ddt + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) (u^j dt)^2 \right)} \right) \\ \text{fdp}(\delta Y_n^j) &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi \left(2Ddt + \frac{(u^j dt)^2}{8} \right)}} \exp \left(- \frac{(\delta Y_n^j)^2}{2n \left(2Ddt + \frac{(u^j dt)^2}{8} \right)} \right) \\ \text{fdp}(\delta Z_n^j) &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi \left(2Ddt + \frac{(u^j dt)^2}{8} \right)}} \exp \left(- \frac{(\delta Z_n^j)^2}{2n \left(2Ddt + \frac{(u^j dt)^2}{8} \right)} \right)\end{aligned}$$

Figure 6 illustrates that after $n > 10$ the Lindeberg–Lévy theorem is true and even more accurate when the diffusion coefficient increases.

Here we have demonstrated that for a quite large number of steps, the displacement of a single particle is a diffusive model.

Now, looking at a cloud of particles, one must consider the distribution of the velocity of all the particles.

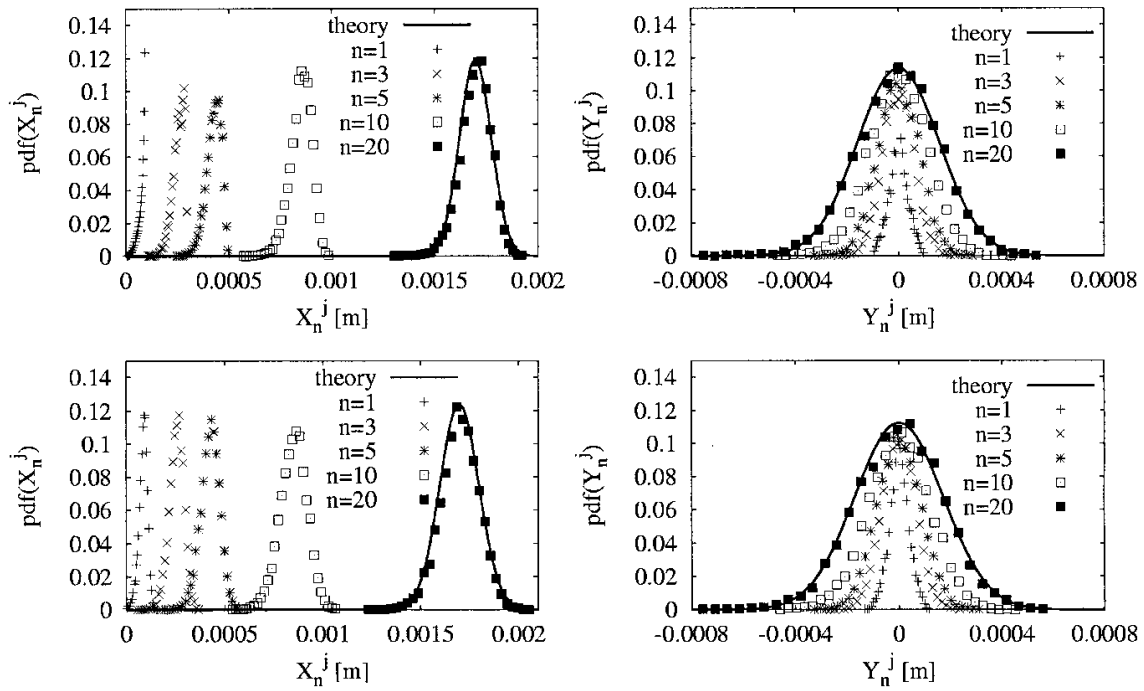


Figure 6. Evolution of δX_n^j and δY_n^j pdf vs. n . No diffusion (up) and $D_m = 1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ (down).

Rules for a Cloud of Particles

The particle cloud is a numerical analogy of a plume of solute. Now we want to calculate the two first moments of the cloud: the center of mass variance of the plume.

Calculation of the first moments is straightforward and the coordinates of the center of mass is

$$\begin{aligned} \langle X_n^j \rangle &= \frac{8n \langle u^j \rangle dt}{3\pi} \\ \langle Y_n^j \rangle &= 0 \\ \langle Z_n^j \rangle &= 0 \end{aligned}$$

The variances of the particles cloud in the X direction and Y, Z directions are (see Appendix C):

$$\begin{aligned} \sigma_{X_n^j}^2 &= 2nDdt + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) \langle (u^j)^2 \rangle n dt^2 + \frac{64}{9\pi^2} (\sigma_{u^j}^2) n^2 dt^2 \\ \sigma_{Y_n^j}^2 &= \sigma_{Z_n^j}^2 = 2nDdt + \frac{\langle (u^j)^2 \rangle n dt^2}{8} \end{aligned}$$

$(\langle X_n^j \rangle, \langle Y_n^j \rangle, \langle Z_n^j \rangle)$ is the center of mass of the particle cloud and $\sigma_{X_n^j}^2, \sigma_{Y_n^j}^2, \sigma_{Z_n^j}^2$ are the variances of the cloud, i.e., the spread of the cloud relative to its center of mass. To calculate $\langle u^j \rangle, \langle (u^j)^2 \rangle$, and $\sigma^2 u^j$ we use Equation (8). By definition, the probability density function of u^j is a Gaussian function with the following variable changing:

$$Y = \frac{\ln(u_{\max} - u^j) - \ln(U)}{\sigma} \quad (11)$$

where Y is a random variable from a normal law with 0 mean and 1 standard deviation. If u_{\max} is replaced by its value [Eq. (25)],

$$u^j = U(1 + e^{\sigma^2/2} - e^{\sigma Y})$$

then:

$$\langle (u^j)^2 \rangle = U^2 \langle (1 + e^{\sigma^2/2} - e^{\sigma Y})^2 \rangle$$

with:

$$\langle e^{(\sigma Y)} \rangle = e^{(\sigma^2/2)}$$

$$\langle e^{(2\sigma Y)} \rangle = e^{(2\sigma^2)}$$

$$\langle (u^j)^2 \rangle = U^2(1 - e^{\sigma^2} + e^{2\sigma^2})$$

The final expression is

$$\begin{aligned} \sigma_{u^j}^2 &= \langle (u^j)^2 \rangle - \langle u^j \rangle^2 \\ &= U^2(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}) \end{aligned}$$

The mean positions and the variances of the cloud are then ($t = ndt$)

$$\langle X_n^j \rangle = \frac{8}{3\pi} U t \quad (12)$$

$$\langle Y_n^j \rangle = 0 \quad (13)$$

$$\langle Z_n^j \rangle = 0 \quad (14)$$

$$\sigma_{X_n^j}^2 = 2D_m t + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) (1 - e^{\sigma^2} + e^{2\sigma^2}) U^2 t dt + \frac{64}{9\pi^2} (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}) U^2 t^2 \quad (15)$$

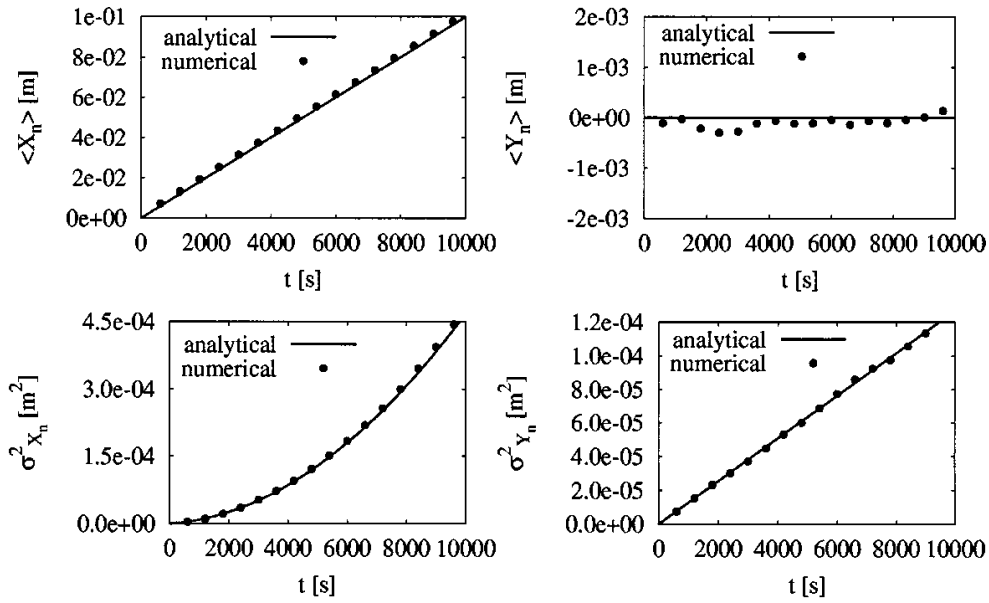


Figure 7. Evolution of the centers of mass and the variances of the particles cloud vs. time.

$$\sigma_{Y_n^j}^2 = 2D_m t + \frac{(1 - e^{\sigma^2} + e^{2\sigma^2})U^2 t dt}{8} \quad (16)$$

$$\sigma_{Z_n^j}^2 = 2D_m t + \frac{(1 - e^{\sigma^2} + e^{2\sigma^2})U^2 t dt}{8} \quad (17)$$

Figure 7 shows the evolution of coordinates of the center of mass and of the variances of the plume. A numerical simulation was carried out with parameters presented in Table 1, theoretical curves are the plotted Equations (17), and numerical results are those given by the random walk model after a statistical analysis of the particle coordinates. The displacement of the center of mass of the cloud increases linearly with time, which is confirmed by experimental results of a nonreactive solute (Freyberg, 1986; Brusseau, 1998). Comments on the variances will be given in the next section, which is concerned with the dispersion.

Dispersion Coefficients

The dispersion mechanisms differ from one scale to another. At the molecular scale, diffusion causes mixing. At microscopic scale, mixing is caused by the velocity distribution resulting from porous medium characteristics, such as porosity, tortuosity and dead-end pores. At a macroscopic scale, mixing is caused by the velocity distribution resulting from the variability of hydraulic conductivity. A distinction is generally made between Fickian and non-Fickian dispersion (Sahimi, 1993). If the transport is called Fickian, the longitudinal variance of the cloud

grows linearly with time. For non-Fickian transport, the longitudinal variance of the cloud does not grow linearly with time and is related to the heterogeneous porous media (Matheron and de Marsily, 1980; Dieulin, 1980; Simmons, 1982; Neuman and Zhang, 1990; Cvetkovic, Cheng, and Wen, 1996; Fiori, 1998). Non-Fickian transport can be classified as subdiffusive transport (fractal dispersion) and superdiffusive transport (the case of hydrodynamic dispersion in multilayered media without transverse dispersion). In mathematical terms,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\propto t^\alpha \\ D &\propto t^{\alpha-1}\end{aligned}$$

where σ^2 is the longitudinal variance of the cloud, D is the longitudinal dispersion coefficient, t is the time, and α the value describing the transport regime. If $\alpha = 1$, dispersion is Fickian. If $\alpha < 1$, dispersion is subdiffusive, and if $\alpha > 1$, dispersion is superdiffusive.

The dispersion coefficient has a scale dependent value. The well-known relation between the dispersion coefficient and the variance is the Einstein equation (Dagan, 1986; Gelhar, 1986; Freyberg, 1986):

$$D_i = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_i^2}{dt} \quad (18)$$

Using the relation, one can calculate the dispersion coefficients of the random walk model by taking the derivative of the Equations (17):

$$D_X = D_m + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) (1 - e^{\sigma^2} + e^{2\sigma^2}) \frac{U^2 dt}{2} + \frac{64}{9\pi^2} (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}) \frac{U^2 t}{2} \quad (19)$$

$$D_Y = D_m + \frac{(1 - e^{\sigma^2} + e^{2\sigma^2}) U^2 dt}{16} \quad (20)$$

$$D_Z = D_m + \frac{(1 - e^{\sigma^2} + e^{2\sigma^2}) U^2 dt}{16} \quad (21)$$

Figure 8 shows the evolution of the dispersion coefficients vs. time. Longitudinal dispersion coefficient is superdiffusive ($\alpha > 1$) and transverse dispersion coefficients are diffusive ($\alpha = 1$).

Here we demonstrated that the distribution of the particle velocities introduces non-Fickian behavior. This was the initial aim of the approach: the dispersion has to grow with time.

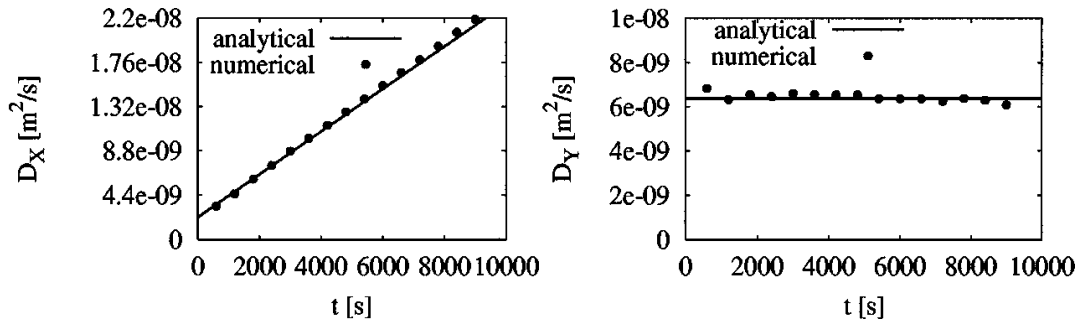


Figure 8. Evolution of the dispersion coefficients vs. time.

MODEL NUMERICAL VALIDATION TEST

In order to validate the mathematical basis of the model, it is useful to compare the numerical calculations with an analytical solution. Because we have no reliable solutions for non-Fickian dispersion, tests have been limited to Fickian transport, i.e. classical one-dimensional (1D) advection-dispersion. The model is tested for a pulse injection with variations in the molecular diffusion coefficient, average velocity, and spatial scale. The transport model is forced to be 1D, i.e., the column length is very long compared to the diameter. In a semiinfinite medium subjected to a uniform flow, the analytical solution of a variable time injection is (Bear, 1972; de Marsily, 1986)

$$\begin{aligned}
 C(X, t) = & \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{X - Ut}{2\sqrt{D_X t}} \right) + \exp \left(\frac{UX}{D_X} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{X + Ut}{2\sqrt{D_X t}} \right) \right] \\
 & - \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{X - U(t - t_0)}{2\sqrt{D_X(t - t_0)}} \right) \right. \\
 & \left. + \exp \left(\frac{UX}{D_X} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{X + U(t - t_0)}{2\sqrt{D_X(t - t_0)}} \right) \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

where C_0 is the initial injected concentration (M/L^3), U is the average velocity (L/T), X is the observation point (L), D_X is the longitudinal dispersion coefficient (L^2/T^2), t is the time (T), and t_0 is the injection time (T); erfc denotes the complementary error function.

Variations in Diffusion Coefficient

Three simulations were carried out with three different values of the diffusion coefficient. For these three simulations, the average velocity is constant ($U = 1 \times 10^{-5}$ m/s) and the dispersion parameter of the random walk model

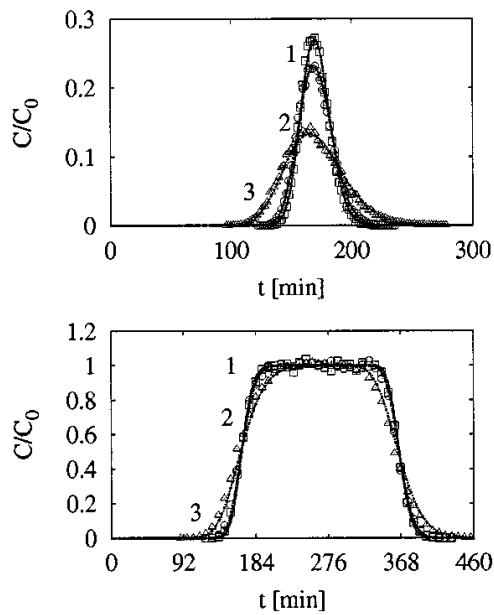


Figure 9. Comparison between simulated curves by the random walk model and analytical solution [Eq. (22)] for different values of the molecular diffusion coefficient. Column length is 10 cm and average velocity is 1×10^{-5} m/s. The dispersivity of the analytical solution is fit to 1.5×10^{-4} m and the random walk model parameter is $\sigma = 0.05$. Diffusion coefficients are 9.3×10^{-10} m²/s (1), 1.86×10^{-9} m²/s (2), and 9.3×10^{-9} m²/s (3).

(σ) is equal to 0.05. The control location (X) is at 10 cm from the injection point. Injection times (t_0) are 8 and 200 min. The dispersivity of the analytical solution is fit ($\alpha_X = 1.5 \times 10^{-4}$ m) and satisfies Equation (2). According to Equation (2), when the diffusion coefficient increases, for a given velocity and dispersivity, transport becomes diffusive. At first, the diffusion coefficient has a value of 9.3×10^{-10} m²/s, which could correspond to the value of tritium diffusion coefficient in a porous medium with a tortuosity of 0.1. Figure 9 confirms that the random walk transport model compares well with the advection-dispersion equation. Equation (19) shows that for small values of the parameters σ , the dispersion coefficient becomes independent of time, which is the case of Fickian transport. With these small values of σ , one can compare the dispersion coefficients according to the random walk model [Eq. (19)] and the analytical solution [Eqs. (22) and (2)], these values are equal.

Variations in Average Velocity

Simulations were carried out with three values of average velocity. The system parameters are the same as those described in the previous section. The diffusion coefficient is constant and equal to 9.3×10^{-10} m²/s. Simulations shown in Figure 10 also confirm the mathematical basis of the random walk model for a weak dispersive porous medium. The fitting value of the dispersivity is the same that in the previous section ($\alpha_X = 1.5 \times 10^{-4}$ m). These two tests are a validation of the numerical model to simulate a Fickian dispersive transport as the classical advection-dispersion equation.

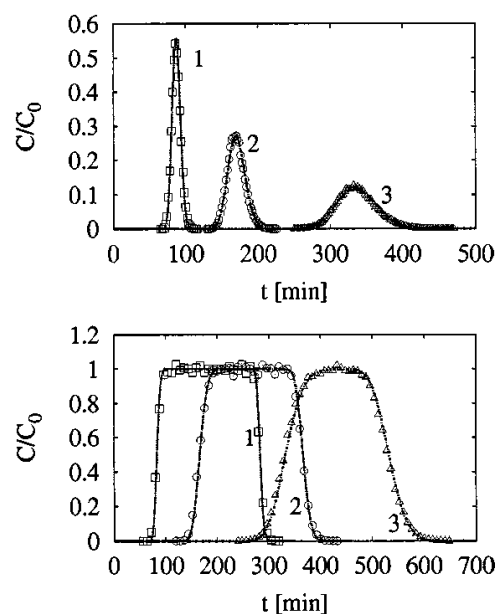


Figure 10. Comparison between simulated curves by the random walk model and analytical solution [Eq. (22)] for different values of the average velocity. Column length is 10 cm and diffusion coefficient is 9.3×10^{-10} m²/s. The dispersivity of the analytical solution is fit to 1.5×10^{-4} m and the random walk model parameter is $\sigma = 0.05$. Average velocities are 2×10^{-5} m/s (1), 1×10^{-5} m/s (2), and 5×10^{-6} m/s (3).

Scale Variations

One simulation was carried out at constant velocity ($U = 1 \times 10^{-5}$ m/s) and at constant value of the dispersion parameter of the random walk model ($\sigma = 0.05$). (Fig. 11). Control planes were set at $X = 5, 10, 15,$ and 20 cm. This test is of significance to the random walk model behavior: even though σ is constant, the values of the dispersivity have to be increased with the distance from the injected point to fit the model (Table 2). The intrinsic dispersion of the random walk model allows to have a nonscale-dependent nature of the parameter σ .

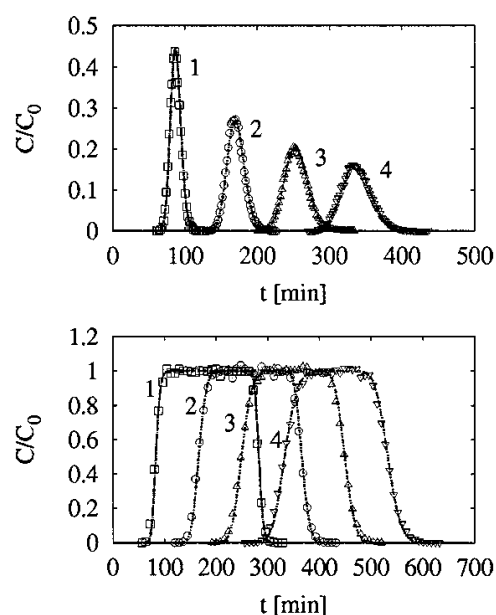


Figure 11. Comparison between simulated curves by the random walk model and analytical solution [Eq. (22)] for different transport scale. Results are summed up in the Table 2. Distance locations are 5 cm (1), 10 cm (2), 15 cm (3), and 20 cm (4).

Table 2. Comparison Between Values of Analytical Dispersivities and the Dispersion Parameters Values of the model^a

X (m)	σ_X (m)	σ
0.05	1.5×10^{-5}	0.05
0.10	4.5×10^{-5}	0.05
0.15	5.5×10^{-5}	0.05
0.20	6.5×10^{-5}	0.05

^aAverage velocity is 1×10^{-3} m/s and diffusion coefficient is 9.3×10^{-10} m²/s.

CONCLUSIONS

The random walk model presented is based on a mechanistic description of the solute dispersion in porous medium. First, we exposed the mathematical background of the random walk model with the three transport functions: advection, diffusion, and dispersion. Trajectories of solute particles are described in three dimensions by a random walk equation. The random pathways of a particle is determined by two random angles whose probability density functions follow from some assumptions we made. Heterogeneity of the porous medium is described by a law of the velocities; randomness of the particles velocity is actually a representation of the heterogeneities distribution (porosity or permeability). These heterogeneities are described by a parameter (σ) that is the variance of the microscopic velocities around the average velocity.

In a second example, we performed calculations to determine the relationship between the random walk microscopic parameters and the commonly used macroscopic parameters such as average velocity and dispersivity. For small values of the dispersion parameter of the random walk model, i.e., when the model is forced to be Fickian, one can compare the dispersion coefficient of an analytical solution of the advection-dispersion equation and those of the random walk model, calculated in this paper. The dispersion coefficients are equal, which is a kind of validation of the random walk model in a particular case of Fickian transport.

Then simulations were carried out to validate the random walk model with a 1D analytical solution in case of Fickian transport and for a small dispersive medium. It is important to note that breakthrough curves are obtained without any numerical method that could introduce numerical dispersion. Indeed, particles are just counted when they go through a virtual plane that corresponds to the distance location of the concentration control. The analytical solution and breakthrough curves of the random walk model were in good agreement for the three kinds of test made: variation of the diffusion coefficient, variation of the average velocity, and variation of transport scale. This last test is significant of the random walk

model behavior and shows that when advection and dispersion are dependent, dispersion of a solute increases with distance from its injection point. This allows the use of scale-constant dispersion parameters.

This model is an interesting tool to study more complex systems such as, e.g., transport of colloidal suspensions including the volume and charge exclusions effects and the porosity occlusion by particles filtration.

Actually, colloidal transport lends itself to this kind of model because it is very easy to distinguish precisely the dispersive behavior of the colloids on one hand, and on the other, the dispersive behavior of the solute.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank Dr. Chantal de Fouquet, Dr. Christian Lantuéjoul, Nicolas Jeannée (from the Centre de Géostatistique de l'École des Mines de Paris), and Sandrine Fleurant for their mathematical comments, and Gavin Brown for his constructive English review.

REFERENCES

- Ackerer, P., and Kinzelbach, W., 1985, Modélisation du transport de contaminant par la méthode de marche au hasard: Influence des variations du champ d'écoulement au cours du temps sur la dispersion, *in* de G. Marsily, ed., *The stochastic approach to subsurface flow: Montvillargenne*, p. 517–529.
- Banton, O., Delay, F., and Porel, G., 1997, A new time domain random walk method for solute transport 1-D heterogeneous media: *Groundwater*, v. 35, no. 6, p. 1008–1013.
- Bear, J., 1972, *Dynamics of fluids in porous media*: Elsevier, New York, 640 p.
- Brusseau, M., 1998, Non-ideal transport of reactive solutes in heterogeneous porous media: Model testing and data analysis using calibration versus prediction: *Jour. Hydrology*, v. 209, p. 147–165.
- Carrera, J., 1993, An overview of uncertainties in modelling groundwater solute transport: *Jour. Contam. Hydrology*, v. 13, p. 23–48.
- Cvetkovic, V., Cheng, H., and Wen, X., 1996, Analysis of non-linear effect on tracer migration in heterogeneous aquifers using lagrangian travel time statistics: *Water Resources Res.*, v. 32, no. 6, p. 1671–1680.
- Dagan, G., 1986, Statistical theory of groundwater flow and transport: Pore to laboratory, laboratory to formation, and formation to regional scale: *Water Resources Res.*, v. 22, no. 9, p. 120S–134S.
- Dagan, G., 1990, Transport in heterogeneous porous formation: spatial moments, ergodicity and effective dispersion: *Water Resources Res.*, v. 26, no. 6, p. 1281–1290.
- de Jong, G. J., 1958, Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits: *Transactions, American Geophysical Union*, v. 39, no. 1, p. 64–74.
- de Marsily, G., 1986, *Quantitative hydrology*: Academic Press, London, 250 p.
- Delay, F., Housset-Resche, H., Porel, G., and de Marsily, G., 1996, Transport in 2-D saturated porous medium: A new method for particle tracking: *Math. Geology*, v. 28, no. 1, p. 45–71.
- Dieulin, A., 1980, Propagation de pollution dans un aquifère alluvial, l'effet de parcours: Unpubl. doctoral dissertation, École des Mines de Paris, 180 p.

- Fiori, A., 1998, On the influence of pore-scale dispersion in non-ergodic transport in heterogeneous formations: *Transp. Porous Media*, v. 30, p. 57–73.
- Freyberg, D. L., 1986, A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer: Spatial moments and the advection and dispersion of non-reactive tracers: *Water Resources Res.*, v. 22, no. 13, p. 2031–2046.
- Gelhar, L., 1986, Stochastic subsurface hydrology from theory to application: *Water Resources Res.*, v. 22, no. 9, p. 135S–145S.
- Gelhar, L., 1993, *Stochastic subsurface hydrology*: Prentice-Hall, New York, 270 p.
- Kauffman, A., 1965, *Cours moderne de calcul des probabilités*: Albin Michel, Paris, 350 p.
- Matheron, G., and de Marsily, G., 1980, Is transport always diffusive? A counterexample: *Water Resources Res.* v. 16, no. 5, p. 901–917.
- Newman, S., and Zhang, Y., 1990, A quasi linear theory of non-Fickian and Fickian subsurface dispersion: Theoretical analysis with application to isotopic media: *Water Resources Res.*, v. 26, no. 5, p. 887–902.
- Saffman, P., 1959, A theory of dispersion in porous medium: *Jour. Fluid Mech.*, v. 6, no. 21, p. 321–349.
- Sahimi, M., 1993, Fractal and superdiffusive transport and hydrodynamic dispersion in heterogeneous porous media: *Transp. Porous Media*, v. 13, no. 1, p. 3–40.
- Scheidegger, A., 1953, Statistical hydrodynamics in porous media: *Jour. Appl. Phys.*, v. 25, no. 8, p. 994–1001.
- Simmons, C., 1982, A stochastic-convective transport representation of dispersion in one-dimensionnal porous media system: *Water Ressources Res.*, v. 18, no. 4, p. 1193–1214.
- Uffink, G., 1988, Modelling of solute transport with the random-walk method: *in* E. Custodio, ed., *Groundwater flow and quality modelling*: The Netherlands, p. 247–265.
- Wen, X., and Kung, C., 1995, A Q-BASIC program for modelling advective mass transport with retardation and radioactive decay by particle tracking: *Computer Geosciences*, v. 13, p. 250–265.

APPENDIX A

The probability density function of u^j is a Gaussian with the following variable change:

$$Y = \frac{\ln(u_{\max} - u^j) - \ln(U)}{\sigma}$$

Then the relationship between u^j and Y is

$$u^j = u_{\max} - Ue^{(\sigma Y)} \quad (23)$$

By taking the average,

$$\langle u^j \rangle = u_{\max} - Ue^{(\sigma Y)} \quad (24)$$

with the following result,

$$\langle e^{(\sigma Y)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma x)} e^{(-x^2/2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x^2/2 + \sigma x)} dx = e^{(\sigma^2/2)}$$

Equation (24) is then

$$\langle u^j \rangle = u_{\max} - U e^{(\sigma^2/2)}$$

We assume the following relationship: $\langle u^j \rangle = U$, then,

$$u_{\max} = U(1 + e^{(\sigma^2/2)}) \tag{25}$$

APPENDIX B

Mean Position of the Longitudinal Component

The mean position of the longitudinal displacement is

$$\langle \delta X^j \rangle = \langle \xi_i^X \rangle + u^j dt \langle \cos \theta_i \rangle$$

According to Equations (7) for the diffusion distribution and Equation (6) for the pdf of θ ,

$$\begin{aligned} \langle \xi_i^X \rangle &= 0 \quad \text{by definition} \\ \langle \cos \theta_i \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(x) dx = \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

then:

$$\langle \delta X^j \rangle = \frac{8u^j dt}{3\pi}$$

Mean Position of the Transverse Component

The mean position of the transverse displacement is:

$$\langle \delta Y^j \rangle = \langle \xi_i^Y \rangle + \langle u^j dt \sin \theta_i \cos \phi_i \rangle$$

According to Equation (7) for the diffusion distribution, Equation (6) for the pdf of θ and Equation (5) for the pdf of ϕ :

$$\begin{aligned}\langle \xi_i^Y \rangle &= 0 \quad \text{by definition} \\ \langle \sin \theta_i \cos \phi_i \rangle &= \langle \sin \theta_i \rangle \langle \cos \phi_i \rangle \quad \text{because } \theta \text{ and } \phi \text{ are independent} \\ &= \left(\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos^2(x) dx \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) dx \right) = 0\end{aligned}$$

An identical mathematical approach can be used for $\langle \delta Z^j \rangle$ —hence, the mean position of the transverse displacements are

$$\begin{aligned}\langle \delta Y^j \rangle &= 0 \\ \langle \delta Z^j \rangle &= 0\end{aligned}$$

Mean Variance of the Longitudinal Displacement

The mean variance of the longitudinal displacement is defined by

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta X^j}^2 &= \langle (\delta X^j - \langle \delta X^j \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle (\delta X^j)^2 \rangle - \langle \delta X^j \rangle^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle (\delta X^j)^2 \rangle &= \langle (\xi_i^X + u^j dt \cos \theta_i)^2 \rangle \\ &= \langle (\xi_i^X)^2 \rangle + (u^j dt)^2 \langle (\cos \theta_i)^2 \rangle + 2u^j dt \underbrace{\langle \xi_i^X \rangle}_{=0} \langle \cos \theta_i \rangle\end{aligned}$$

$$\langle (\xi_i^X)^2 \rangle = 2D_m dt \quad \text{by definition}$$

$$\langle \cos^2 \theta_i \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx = \frac{3}{4}$$

then

$$\sigma_{\delta X^j}^2 = 2D_m dt + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) (u^j dt)^2$$

Mean Variances of the Transverses Displacement

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta Y^j}^2 &= \langle (\delta Y^j - \langle \delta Y^j \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle (\delta Y^j)^2 \rangle \quad \text{because } \langle \delta Y^j \rangle = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle (\delta Y^j)^2 \rangle &= \langle (\xi_i^Y + u^j dt \sin \theta_i \cos \phi_i)^2 \rangle \\ &= \langle (\xi_i^Y)^2 \rangle + (u^j dt)^2 \langle (\sin \theta_i \cos \phi_i)^2 \rangle + 2u^j dt \underbrace{\langle \xi_i^Y \rangle}_{=0} \langle \sin \theta_i \cos \phi_i \rangle\end{aligned}$$

$$\langle (\xi_i^Y)^2 \rangle = 2D_m dt \quad \text{by definition}$$

$$\langle \sin^2 \theta_i \cos^2 \phi_i \rangle = \left(\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^2(x) dx \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(x) dx \right) = \frac{1}{8}$$

thus,

$$\sigma_{\delta Y^j}^2 = 2D_m dt + \frac{(u^j dt)^2}{8}$$

and similarly,

$$\sigma_{\delta Z^j}^2 = 2D_m dt + \frac{(u^j dt)^2}{8}$$

APPENDIX C

Variance in the X direction of a particle j around the center of mass is expressed by

$$\begin{aligned}\sigma_{X_n^j}^2 &= \langle (X_n^j - \langle X_n^j \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle (X_n^j)^2 \rangle - \langle X_n^j \rangle^2\end{aligned}$$

$$\langle (X_n^j)^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i^X + u^j dt \cos \theta_i) \right)^2 \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \left(\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^X \right) + u^j dt \left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right) \right)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^X \right)^2 + (u^j dt)^2 \left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2u^j dt \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^X \right) \left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^X \right)^2 \right\rangle + (u^j)^2 dt^2 \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 \right\rangle \\
&\quad + 2 \underbrace{\langle u^j \rangle}_{=0} dt \left(\sum_{i=1}^n \langle \xi_i^X \rangle \right) \left(\sum_{i=1}^n \langle \cos \theta_i \rangle \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^X \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \left((\xi_i^X)^2 + 2 \sum_{j<i}^n \xi_i^X \xi_j^X \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\langle (\xi_i^X)^2 \rangle}_{=2D_m dt} + 2 \sum_{j<i}^n \underbrace{\langle \xi_i^X \xi_j^X \rangle}_{=0} \right) \\
&= 2n D_m dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \left(\cos^2 \theta_i + 2 \sum_{j<i}^n \cos \theta_i \cos \theta_j \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\langle \cos^2 \theta_i \rangle + 2 \sum_{j<i}^n \underbrace{\langle \cos \theta_i \cos \theta_j \rangle}_{8/3\pi} \right)
\end{aligned}$$

$$\langle \cos^2 \theta_i \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(x) dx = \frac{3}{4}$$

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{4} + 2 \frac{64}{9\pi^2} \sum_{j<i}^n 1 \right) = \frac{3n}{4} + \frac{64}{9\pi^2} n(n-1)$$

indeed

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j < i}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n = \sum_{i=1}^n (n - i) = \frac{n(n - 1)}{2}$$

thus,

$$\sigma_{X_n^j}^2 = 2n D_m dt + \left(\frac{3}{4} - \frac{64}{9\pi^2} \right) \langle (u^j)^2 \rangle n dt^2 + \frac{64}{9\pi^2} (\sigma_{u^j}^2) n^2 dt^2$$

The variance in the Y direction or in the Z direction of a particle j around the center of mass is expressed by

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_n^j}^2 &= \langle (Y_n^j - \langle Y_n^j \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle (Y_n^j)^2 \rangle \quad \text{because } \langle Y_n^j \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (Y_n^j)^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i^X + u^j dt \sin \theta_i \cos \phi_i) \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^Y \right) + (u^j dt) \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \phi_i \right) \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^Y \right)^2 + (u^j dt)^2 \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \phi_i \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2u^j dt \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^Y \right) \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \phi_i \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^Y \right)^2 \right\rangle + \langle (u^j)^2 \rangle dt^2 \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \phi_i \right)^2 \right\rangle \\ &\quad + 2 \underbrace{\langle u^j \rangle}_{=0} dt \left(\sum_{i=1}^n \langle \xi_i^Y \rangle \right) \left(\sum_{i=1}^n \langle \sin \theta_i \cos \phi_i \rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^Y \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \left((\xi_i^Y)^2 + 2 \sum_{j<i}^n \xi_i^Y \xi_j^Y \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\langle (\xi_i^Y)^2 \rangle}_{=2D_m dt} + 2 \sum_{j<i}^n \underbrace{\langle \xi_i^Y \rangle \langle \xi_j^Y \rangle}_{=0} \right) \\
&= 2n D_m dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \phi_i \right)^2 \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \left(\sin^2 \theta_i \cos^2 \phi_i + 2 \sum_{j<i}^n \sin \theta_i \cos \phi_i \sin \theta_j \cos \phi_j \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\langle \sin^2 \theta_i \cos^2 \phi_i \rangle + 2 \sum_{j<i}^n \underbrace{\langle \sin \theta_i \cos \phi_i \rangle \langle \sin \theta_j \cos \phi_j \rangle}_{=0} \right)
\end{aligned}$$

$$\langle \sin^2 \theta_i \cos^2 \phi_i \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^2(x) dx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(x) dx = \frac{1}{8}$$

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \phi_i \right)^2 \right\rangle = \frac{n}{8}$$

so,

$$\sigma_{Y_n^j}^2 = 2n D_m dt + \frac{\langle (u^j)^2 \rangle n dt^2}{8}$$

*JOURNAL OF THE THEORETICAL
BIOLOGY*

Fleurant C., Duchesne J. and P. Raimbault, 2004, An allometric model for trees, *Journal of Theoretical Biology*, 227(1), p. 137-147.

An allometric model for trees

C. Fleurant^{a,*}, J. Duchesne^a, P. Raimbault^b

^aLandscape Laboratory, National Institute of Horticulture, 2 rue Le Nôtre, 49045 Angers cedex 01, France

^bHorticultural Department, National Institute of Horticulture, 2 rue Le Nôtre, 49045 Angers cedex 01, France

Received 6 June 2003; received in revised form 10 October 2003; accepted 16 October 2003

Abstract

This paper presents a general mathematical model for the morphometric description of trees. This model is based on the introduction of fractal theory, and more particularly of the concept of self-similarity, into a statistical physics rationale. Fractal theory provides the necessary tools to describe the complexity of tree structure. Statistics, when applied to physics, makes it possible to explain the properties of complex objects starting from their components. The combination of both tools allowed us to develop a theoretical model that is the probability density function of the morphometric lengths of trees. An example of validation of this law is given here: the theoretical model of morphometric lengths is compared with experimental data of *Cupressocyparis*.

© 2003 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Fractal; Topology; Tree; Branching networks

1. Introduction

Branching networks can be of completely different natures (Fig. 1). In this example, one is a tree and the other is a stream network. Both networks are three-dimensional but Fig. 1 only represents their projected shape onto a plane. The striking similarity between their structures leads us to describe them using this analogy.

1.1. Branching networks

Well before Mandelbrot (1988) developed his fractal theory, branching networks and more particularly stream networks structure had been studied very extensively. In fact, geological scientists and hydrologists such as Horton (1945), Schumm (1956), Strahler (1957) or Shreve (1969) took an interest in analysing the complex ordering of these networks. They performed topological and morphometric analyses (Kirshen and Bras, 1983) which can be applied to all branching

networks that are three-dimensional and organised into a hierarchy. A stream network is made up of several headwaters which represent its origins upstream, and an outlet which is a unique point downstream. The headwaters merge to form confluences, thus creating stream stretches that merge in their turn, and so forth down to the outlet. A stream stretch is a segment of a stream network situated between two confluences. The precise position of a stream segment within the whole river network can be identified by classifying the network. Many classification systems have been put forward (Horton, 1945) but we have decided upon Strahler's system (1957) which is the most widely used. The classification system (Fig. 2) is as follows:

- headwaters are first-order stream segments;
- when two stream segments within the same order i merge, the stream segment resulting from this confluence is within order $i + 1$;
- when two stream segments within different orders, i and j merge, the stream segment resulting from this confluence is within order $\max(i, j)$.

Strahler's classification thus makes it possible to organize the different segments of a stream network into a hierarchy. Consequently, the stream outlet will have the highest index value, corresponding to the river

*Corresponding author. Tel.: +33-2-41-22-54-98; fax: +33-2-41-22-55-28.

E-mail addresses: cfleur@nimbus.geog.ox.ac.uk, cyril.fleurant@inh.fr (C. Fleurant), jean.duchesne@inh.fr (J. Duchesne), pierre.raimbault@inh.fr (P. Raimbault).

¹Present address: School of Geography and the Environment, Mansfield Road, University of Oxford, OX1 3TB, UK.



Fig. 1. Left side, part of the *Cupressocyparis* structure; right side, river Loire (France) structure.

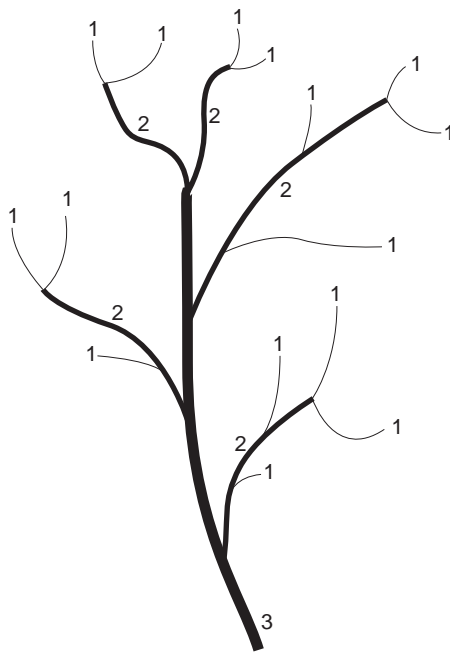


Fig. 2. The concept of Stralher's hierarchical classification system.

network order. Starting from the segments and their classification, it is possible to identify one segment as being representative of all segments within the same order.

Hydrologists relied on this classification to put forward general geometric laws concerning the ordering of stream networks. Among them, Horton's laws (1945), describe the way stream networks are organized. These laws express the so-called bifurcation ratio R_B and length ratio R_L , also known as Horton's ratios. A great number of experimental studies on stream networks (La Barbera and Rosso, 1987, 1989, 1990; Feder, 1988; Tarboton et al., 1990; Rosso et al., 1991) reveal that these ratios are rather stable and fluctuate between 3 and 5 for R_B and between 1.5 and 3.5 for R_L .

Table 1

The various findings of the fractal dimension in a stream network

Fractal dimensions	Authors
$d = 2 \frac{\ln(R_L)}{\ln(R_B)}$	Feder (1988)
$D = \max\left(1, \frac{\ln(R_L)}{\ln(R_B)}\right)$	La Barbera and Rosso (1987, 1989)
$D = d \frac{\ln(R_B)}{\ln(R_L)}$	Tarboton et al. (1990)
$D = \left(\frac{1}{2-d}\right) \frac{\ln(R_B)}{\ln(R_L)}$	La Barbera and Rosso (1990)

d is a scaling exponent of the stream sinuosity, D is the fractal dimension, R_L and R_B are respectively the Horton's length ratio and bifurcation ratio.

As Smart (1968) and Dooge (1986) point out: "these laws have a statistical nature". This means that one should not expect an accurate description of a stream network in isolation but, that these laws indicate an average pattern, a general trend for a large number of networks.

Fractal geometry, which has been developed by Mandelbrot (1988), makes it possible to describe complex objects having an irregular structure whereas standard Euclidian geometry does not. A numerous of authors (Tarboton et al., 1988; La Barbera and Rosso, 1987, 1989; Nikora and Sapozhnikov, 1993) have studied the self-similarity of the structure of stream networks and its relationship with the fractal dimension (Table 1).

1.2. Fractals and morphometry of trees

Fitter (1982) distinguishes between two classifications that regulate tree structure: one is morphogenetic and follows the example of trees, starting with a single common branch (tree trunk), the other one is morphometric, it follows the example of stream networks and starts with external branches. In his methodological study of the root systems of herbaceous plants, Fitter suggests that Horton's laws may be applied in terms of ordering branches according to the morphometric order, so as to quantify and organize root branching.

Holland (1969) shows that the branching pattern of several Eucalyptus species may be described and explained thanks to Horton's laws and the effect of apical dominance on shoot growth.

Leopold (1971) carried out research on several species with different architectures (*Abies concolor*, *Pinus taeda*) and reached a similar conclusion. In addition, he claims that the most probable arrangement seems to minimize the total length of twigs in the branching system.

Oohata and Shidei (1971) use Horton's method to study the branching of four different ligneous plants:

evergreen shrubs with broad leaves (*Cinnamomum camphora*), evergreen conifers and deciduous trees with broad leaves. They show that the branching ratio fluctuates to a much larger extent than stream networks: from 3.0 to 8.0. This ratio varies according to life form.

Withney (1972) shows that the branching ratio of 16 ligneous plants essentially depends on the arrangement of leaves, the deciduous nature of leaves and branches and the size of needles, and that it does not entirely depend on external conditions but rather is specific to one species.

Using Stralher's morphometric tree diagram, Barker et al. (1973) demonstrate that in the case of birches and apple trees, logarithms of the average numbers of terminal branches in each branching order, average diameter and number of buds on these branches are lined up with the branching orders on the abscissa. Logarithms of the average lengths of the corresponding branches are much more scattered. They deduce that both species have fractal branching and that lengths are more characteristic of the specific shape of trees.

Crawford and Young (1990) indicate that, in the case of oak trees (*Quercus robur*), the distribution of branch lengths follows a basic fractal algorithm which can be found in other living organisms. Berger (1991) uses fractals to establish a tree growth scheme (*ficus elastica*), Chen et al. (1993) uses them to establish a model of canopy architecture of a poplar stand (*Populus* sp.) and Mahon and Kronauer (1976), a model of tree mechanics (*Quercus rubra*).

Tree structure is still a very topical subject involving intensive research (Sismilich et al., 2003). Issues involved are multiple, but some of the main areas of interest should be mentioned (Muhar, 2001): in the field of botany, bio-mathematic description is a research theme which is strongly encouraged to develop predictive models on plant production, and more particularly on tree diseases. There exist many mathematic models of tree development and some of them resort to a terminology which is very similar to stream networks, since they deal with plant hydraulics (Niklas, 1992; Fruh and Kurth, 1999; Bidet et al., 2000). In the field of forestry, managing forest development requires that the changes in the shape of trees resulting from the planting conditions (types of soil, co-existence with other species, etc.) be known. It can also help in anticipating the evolution of the forest visual impact and in taking preventive measures (Berezovskaya et al., 1997). Finally in the field of image processing, working out the most faithful computer simulation of a tree has become a central objective especially in terms of commercial software (Viennot et al., 1989). Whether the methods are determinist such as L-systems (Lidenmayer and Prusinkiewicz, 1988), stochastic such as the AMAP approach (Jaeger and de Reffye, 1992) or botanical such as the TREE approach (Bosanac, 1990), the only aim is

to obtain the most faithful image of a tree compared to reality.

What processes are has the origin of the complex branching structure of trees?

Could the reading of this structure provide information about the nature of the processes of vegetal morphogenesis?

This study has no pretention to offer the definitive answer, but only to open a field of investigation by providing an allometric model for trees. This allometric model describes a theoretical relation between the dimensions (call morphometric lengthes) and the structure (the shape) of tree. The model is adapted from a hydrogeomorphologic reasoning used for rivers networks.

We have adapted the model to represent the branching structure of trees, giving the distribution of the morphometric lengthes of the apexes. We hope that this structural distribution will promote discussion leading to a better understanding of certain processes of the vegetal morphogenesis.

2. The model

The model introduced here uses findings of research carried out on stream networks (Duchesne et al., 1997; Cudennec, 2000), and applies them to trees, and more specifically to their branching structures.

The focus is to describe tree structure according to Strahler stream ordering (1957), and to apply Horton's laws (1945) to a physical statistics rationale, in order to elaborate a descriptive theoretical model of branch lengths.

2.1. Tree structure and ordering

The fundamental difference between studies carried out on stream networks and the tree structural model proposed here, lies in the fact that the tree is analysed in three dimensions, whereas stream networks are projected on to a plane. Nevertheless, both approaches (Strahler stream ordering, Horton's laws) to analyse stream networks in two dimensions can be applied directly to a three-dimensional tree modelling.

The analogy with stream networks entitles us to assert that a branch (likened to a segment) is an element of a tree situated between two successive branching. Consequently, Strahler stream ordering can be implemented:

- A bud or a terminal branch belong to the first order;
- Two order i branches form an order $i + 1$ branch;
- When two branches in different orders join, they form a branch which is assigned to the larger order.

The tree trunk (likened to the outlet) is assigned the larger order, corresponding to the order of the tree.

Horton’s laws also make it possible to work out the R_B and R_L :

$$R_L = \frac{\bar{l}_k}{l_{k-1}}, \tag{1}$$

$$R_B = \frac{N_{k-1}}{N_k}, \tag{2}$$

where \bar{l}_k is the average value of the morphometric lengths of k order and N_k is the number of morphometric lengths of k order.

2.2. Definition of morphometric length

Before giving the analytical equation of the probability density function of morphometric lengths, it is necessary to define this variable accurately. If we take an indefinite point on one branch (Fig. 3), the path to be covered between this point and the trunk collar successively goes over branches of increasing orders. The morphometric length is defined as follows:

$$L = \sum_{k=1}^n l_k, \tag{3}$$

where l_k is the length of the branch or branch segment in k order and n is the order of the tree. Hence, the morphometric length is the added lengths n of the branches.

The morphometric length L may be calculated using a vector with n components (l_1, l_2, \dots, l_n) .

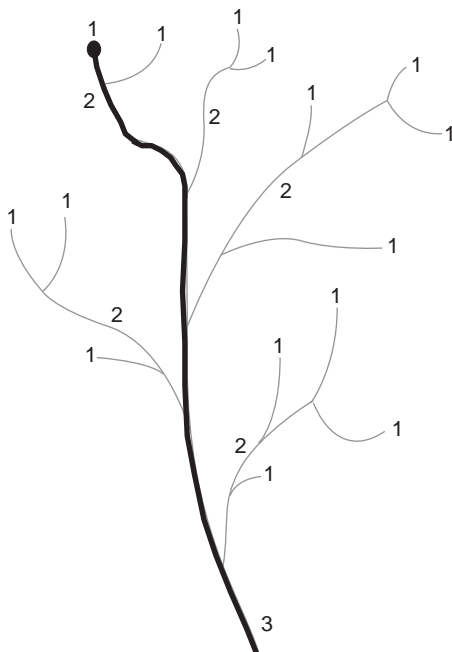


Fig. 3. The morphometric length is the added lengths of branches up to an indefinite point of the tree. Here, the path between an apex of the tree and the trunk basis.

2.3. Probability density functions of the tree’s morphometric lengths

The determination of the probability density function (*pdf*) of reduced morphometric lengths can be derived from two assumptions (independence and isotropy of the *pdf*(l_k). See appendix for mathematical details) and lead to

$$pdf(l_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{l}_k}} \frac{1}{\sqrt{l_k}} e^{-l_k/2\bar{l}_k}. \tag{4}$$

A Gamma distribution with $\alpha = \frac{1}{2}$ and $\beta = 1/2\bar{l}_k$ can be recognized here and is named $\Gamma(\frac{1}{2}, 1/2\bar{l}_k)$.

Then, combining Eqs. (3) and (4), one can calculate the probability density function of the morphometric lengths

$$pdf(L) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n r^{i-(n+1)/2}}{2\bar{L}} \right)^{n/2} \frac{L^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} e^{-\left(\sum_{i=1}^n r^{i-n} L \right) / 2\bar{L}} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_n(k)(n-1/2)_k}{k!(n/2)_k} \left(\frac{1-r^n}{2\bar{L}r^{n-1}} L \right)^k \tag{5}$$

with

$$b_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2, \\ \sum_{j=0}^k \frac{b_{i-1}(j)(i-2/2)_j(-k)_j}{j!(i-1/2)_j} (-r)^j & \text{for } i = 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

and

$$r = \frac{l_k}{l_{k-1}}. \tag{6}$$

3. Applications to *Cupressocyparis*

The only way of testing our theoretical model (Eq. (5)) is to measure the morphometric lengths of a tree. To do so, we have chosen *Cupressocyparis leylandii* (Fig. 4) a conifer which can grow up to several tens of

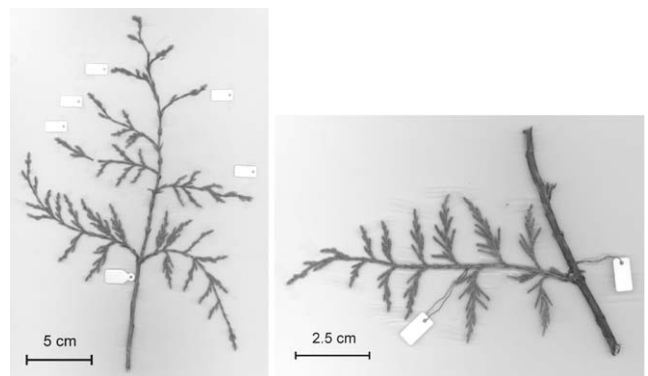


Fig. 4. The *Cupressocyparis* is first cut up and then is classified to keep its structures.

Table 2

Experimental values of the measured tree parameters (*Cupressocypariss*). N_k is the number of morphometric length of k order, \bar{l}_k is the average value of the morphometric lengths of k order, R_L and R_B are the Horton's ratios

Order k	1	2	3	4	5
N_k	7488	1608	251	20	1
\bar{l}_k (mm)	5.4	8.4	22.5	77.6	49.7
R_L	1.56	2.66	3.44	0.64	
R_B	4.65	6.4	12.55	20	

meters high, and which is often mistaken for *Thuja plicata* because both are currently used for trimmed hedges. We have chosen a young tree (3 years) about 1 m high.

To determine the morphometric lengths of this tree means measuring distances between its basis and all apexes. We chose a young tree in order to restrict the measurements.

First we cut up the tree (Fig. 4) and classified the branches to keep the tree structure. Then we took 7488 measurements manually to determine the morphometric lengths. A concise account of measurements is given in Table 2. It includes the number of k order lengths, the average lengths for each k and the corresponding Horton's ratios (R_L and R_B).

It can be noticed that R_L ratios are lower on average than the stream networks' ratios, whereas this is not the case with R_B ratios (according to the results of Oohata and Shidei, 1971). The high average values of R_B reveal that there is a larger number of branching in $k + 1$ order than k order. In fact, there are 7488 first-order branchings compared to 1608 second-order branchings and so forth.

Concerning the R_L ratio, its low values compared to those of stream networks show that the average lengths do not differ greatly from one order to another.

Once the morphometric lengths have been captured digitally, it is easy for us to determine their distribution, that is to say the histogram of the tree morphometric lengths. The borderline case histogram—when the class interval approaches 0—is a probability density function (*pdf*). Then this experimental histogram may be compared with the theoretical law (5) which is in fact the probability density function of morphometric lengths.

Our theoretical model (Eq. (5)) requires three variables: Strahler ordering n , the average of morphometric lengths \bar{L} and Horton's ratio r . But considering the variations in the ratio (Table 2), which value should be chosen?

It should be remembered that Horton's ratio r (Eq. (6)) is defined as the ratio of successive order components rather than average components, as this is usually the case with stream networks.

This definition, along with our isotropy hypothesis has led us to establish the probability density function of morphometric lengths l_k given in Eq. (4).

To calculate the value r means assessing the optimal reduction factor, so that the histograms of l_k/r^{k-1} are as similar as possible. As well as the morphometric lengths histograms of orders 1–5, before (Fig. 5a) and after (Fig. 5b) reduction with factor r .

A value of $r = 1.5$ is found for Horton's ratio; this value allows l_k/r^{k-1} histograms to be as superimposed as possible and it offers complete validation to our isotropy hypothesis.

It is obvious that no factor r may adjust the five histograms accurately and this is where our isotropy hypothesis reaches its limits. Indeed, this is the only difference between self-similar fractal mathematics with infinite order and natural fractal structures whose self-similarity is no longer obvious beyond some order, which is often very small ($n = 2$ or 3).

With this value r , we have all variable values for our model:

- $n = 5$, for the Strahler hierarchical ordering of the studied tree;
- $\bar{L} = 163.7$ mm, for the average of morphometric total lengths;
- $r = 1.5$, for Horton's ratio.

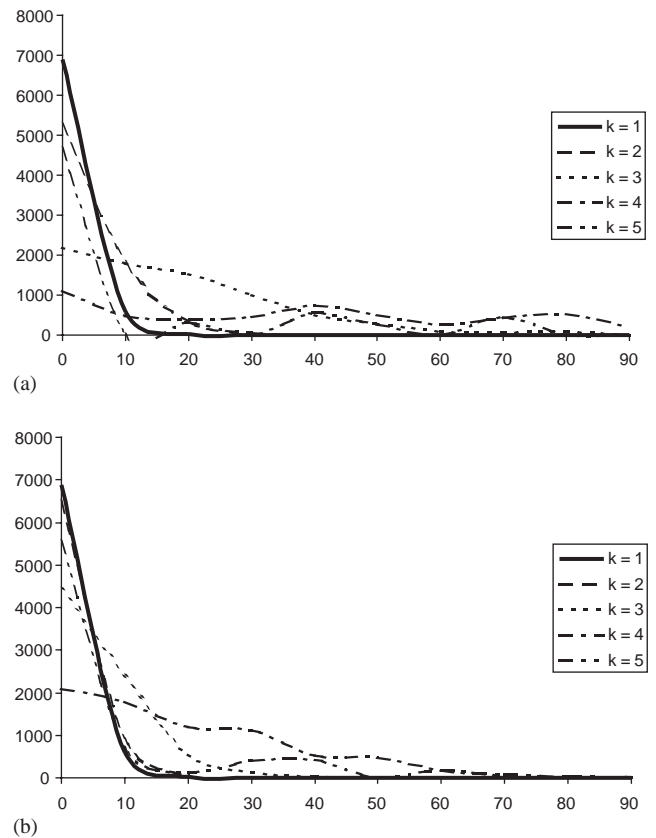


Fig. 5. Experimental histograms of l_k (a) and l_k/r^{k-1} (b) components for the different values of $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Our model can now be compared with the experimental histogram of morphometric lengths (Fig. 6). It can be noticed that the histogram of the morphometric lengths which have been measured on the tree and the theoretical law (Eq. (5)) adjust almost perfectly. It is essential to add that the adjustment does not require any fitting, since the variable values (appearing above) result from measurements on the tree; they are consequently a necessary and sufficient condition to put forward Eq. (5).

This theoretical model not only simulates properly the allometry of the studied tree, but also the relation which exists between the morphometric lengths and the tree structure. We are tempted to think that this simulated relation can be found in many tree species (forthcoming research on apple trees) as shown for example in Fig. 8 representing a limetree showing clearly that the distribution of apices is more important near the tree base.

4. Discussion and conclusion

The plant stem only grows in the first millimeters or centimeters of stem extremity, also called the apex. The maximum number of apices is to be found slightly

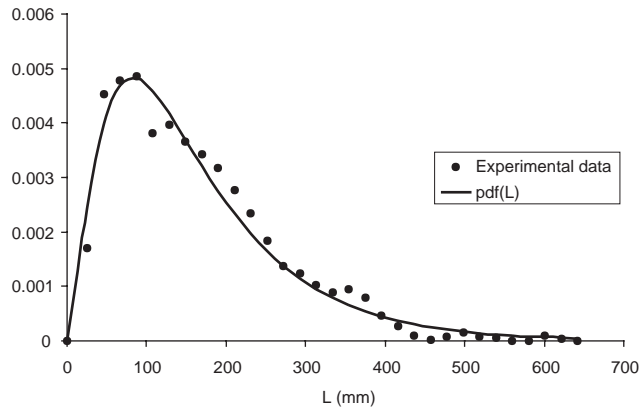


Fig. 6. Comparison between the theoretical model (Eq. (5)) and experimental data of *Cupressocyparis*.

above plant base (Fig. 8); beyond this point, the number of apices decreases very gradually. Branching points come out on the apex.

Trees have two branching patterns depending on species (Hallé, 1970). In the case of the continuous growth type, lateral branching comes out slightly behind the apex, as the axis keeps on growing (Fig. 7a). This is the case of *Cupressocyparis leylandii*. Concerning the rythmic growth type, branching only comes out after a dormant period of several weeks or months of the main axis; then when the growth period starts again, branching occurs where growth has stopped (Fig. 7b); this is the case of the apple tree *Malus pumila*, submitted in a previous publication (Duchesne et al., 2002). The Gamma law applies to both branching patterns, although they are completely different.

The apex of the main stem causes inhibition of the secondary apices and exerts growth control, a common



Fig. 8. A limetree structure with Gamma distribution of its apices. Picture from Pierre Raimbault.

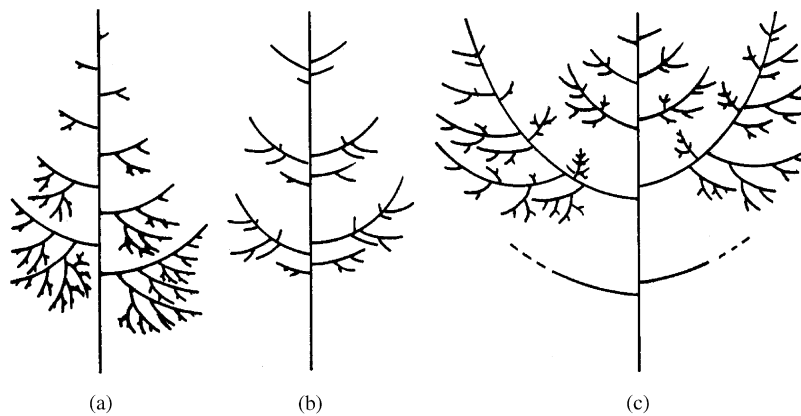


Fig. 7. Several trees growth types: continuous (a), rythmic (b) and alternate (c).

phenomenon in branched plants named apical dominance by biologists. In young trees, apical dominance is exerted in succession on 5–7 branching orders, which are organized into a hierarchy. As the plant grows, the main axis loses control of the branching, and then the tree includes a set of several hierarchical systems which are more or less independent from one another on the biological level (Raimbault and Tanguy, 1993; Raimbault et al., 1995). Visually, this evolution results in the withdrawal of the main axis to the benefit of several equivalent axes (Fig. 7c). This biological evolution results in a drift of the height of the curve representing the Gamma law towards the right, which tends to a Gaussian distribution (forthcoming publication on apple trees).

What is the point of such a mathematical study?

If the branched shapes of trees are now described precisely, the genesis of such shapes poses insoluble problems. Hierarchical branching of apical dominance through gradient and flow of hormone distribution is now understood quite well (Cline, 1994, 1997). But this does not account for the complexity of branching. Studying the distribution of apexes morphometric lengths should enhance discussion on the causality of plant morphogenesis.

Basically, do plants branch in response to an internal impulse, as viscous fingering patterns are obtained by injecting between two blades poorly viscous fluid into a more viscous fluid? Or does branching result from an external attraction from the environment?

It is likely that branching is the result of a strong interference between several processes belonging to both categories.

Measuring morphometric lengths of trees and interpreting their structure is arduous delicate work. The research we have carried out on our young *Cupressocyparis* proves to be impossible to do on an oak tree several meters high. Consequently, we have developed a protocol of photogrammetric measures in order to make the task easier. Photogrammetry helps the 3-D reconstruction of complex objects, thanks to the processing of digital photographs.

Acknowledgements

Reviews of Anne Bouillon and Niall O’Dea and anonymous referee have helped to improve and to clarify the manuscript.

Appendix A

The determination of both $pdf(l_k)$ and $pdf(L)$ needs some mathematical developments that are presented in this section. The first part of these mathematical details

(until Eq. (A.15)) can also be found in Cudennec (2000) and Duchesne et al. (2002).

A.1. Choosing a symbolic space

Let us have a symbolic space, named morphometric lengths space. This symbolic space has n dimensions corresponding to n -axis onto which n components of morphometric lengths are projected. Fig. 3 is a specific example for $k = n = 3$. Then the $(l_1, l_2$ et $l_3)$ three components of L can be projected onto the axis of the symbolic space which is only three-dimensional in this case.

Let us consider an elementary volume $d_l = (dl_1, dl_2, \dots, dl_n)$, the probability of having a morphometric length between (l_1, l_2, \dots, l_n) and $(l_1 + dl_1, l_2 + dl_2, \dots, l_n + dl_n)$ volume interval is $F(l_1, l_2, \dots, l_n)dl_1, dl_2, \dots, dl_n$, where F is the joint probability density function of (l_1, l_2, \dots, l_n) . If we have $d^n N$, the number of morphometric lengths between (l_1, l_2, \dots, l_n) and $(l_1 + dl_1, l_2 + dl_2, \dots, l_n + dl_n)$ volume interval, then

$$F(l_1, l_2, \dots, l_n)dl_1 dl_2 \dots dl_n = \frac{d^n N}{N}, \quad (\text{A.1})$$

where N is the total number of morphometric lengths.

At this stage of the rationale, we must take the self-similarity properties of our branching system into account, and use one of Horton’s laws. Beside the length ratio (R_L) defined in this particular law, the following ratio may be given:

$$r = \frac{l_k}{l_{k-1}}. \quad (\text{A.2})$$

In fact Cudennec (2000) demonstrate that $r \simeq R_L$.

To explain the form of the function F with more accuracy, we should make working hypothesis.

A.2. Choosing the fundamental hypothesis

- The independence hypotheses of the distribution function of components reduced by the morphometric length. According to this hypothesis, the distribution function of a component l_k only depends on l_k , not on any of the other components l_j , k being different from j . This leads us to give an analytical function F as a product of n functions for one variable

$$F(l_1, l_2, \dots, l_n) = f_1(l_1)f_2(l_2)\dots f_n(l_n). \quad (\text{A.3})$$

- The isotropy hypothesis of distributions. We consider that the distribution law of l_k is isotropic. Because of the self-similarity nature of tree structure and Horton’s law, the k order component is one factor r larger on average than the $k - 1$ order component. The isotropy hypothesis should then be applied, with

the reduced components of branch lengths l_k/r^{i-1} as coordinates of the symbolic space, rather than the components l_k .

For calculation reasons, we will extract the square root of these reduced components:

$$z_k = \sqrt{\frac{l_k}{r^{k-1}}} = \frac{x_k}{r^{(k-1)/2}}. \tag{A.4}$$

The isotropy hypothesis helps consider all functions $f_k(l_k)$ identical in relation (A.3)

$$F(l_1, l_2, \dots, l_n) = f(l_1)f\left(\frac{l_2}{r}\right)\dots f\left(\frac{l_n}{r^{n-1}}\right) \tag{A.5}$$

then

$$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)\dots\varphi(z_n), \tag{A.6}$$

where functions ϕ and φ are respectively different from functions F and f .

Function ϕ can also be defined as

$$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{d^n N}{N dz_1 dz_2 \dots dz_n}. \tag{A.7}$$

The isotropy hypothesis means that the density of points representing the extremities of vectors in the symbolic space has a spherical symmetry. The reduced components z_k represent a solution to the equation of a hypersphere:

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = C^{ste}. \tag{A.8}$$

The distribution function of z_k should then have a constant value

$$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = C^{ste}. \tag{A.9}$$

Both hypotheses allow us to determine the probability density function of morphometric lengths.

A.3. Determination of the probability density function of reduced morphometric lengths

Derivating relations (A.7) and (A.8), we have

$$2z_1 dz_1 + 2z_2 dz_2 + \dots + 2z_n dz_n = 0 \tag{A.10}$$

from which it follows

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \phi}{\partial z_2} dz_2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial z_n} dz_n = 0. \tag{A.11}$$

According to relation (A.6)

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi(z_k)}{\partial z_k} = \frac{1}{\varphi(z_k)} \frac{d\varphi(z_k)}{dz_k} \quad \forall i, 1 \leq i \leq n. \tag{A.12}$$

So Eq. (A.9) can be replaced with

$$\frac{1}{\varphi(z_1)} \frac{d\varphi(z_1)}{dz_1} + \frac{1}{\varphi(z_2)} \frac{d\varphi(z_2)}{dz_2} + \dots + \frac{1}{\varphi(z_n)} \frac{d\varphi(z_n)}{dz_n} = 0. \tag{A.13}$$

This mathematical formula helps determine the various values z_1, z_2, \dots, z_n where function φ reaches an extremum value. If there is no restrictive condition for this equation, we can demonstrate that a solution can be obtained by cancelling all the derivatives of the function.

Still, Eq. (A.8) precisely expresses a restrictive relation on the z_k components. This constraint is handled by using Lagrange multipliers method (Sears 1971), relations (A.8) and (A.13) can then be combined, multiplying (A.8) by a constant value λ and adding each term to relation (A.13). This results in the following equation, in which n differentials are considered to be independent:

$$\left[2\lambda z_1 \frac{1}{\varphi(z_1)} \frac{d\varphi(z_1)}{dz_1} \right] dz_1 + \dots + \left[2\lambda z_n \frac{1}{\varphi(z_n)} \frac{d\varphi(z_n)}{dz_n} \right] dz_n = 0. \tag{A.14}$$

Only then can we consider differentials to be independent, and the solution to Eq. (A.14) amounts to cancelling each differential successively:

$$\frac{1}{\varphi(z_k)} \frac{d\varphi(z_k)}{dz_k} = -2\lambda z_k \quad \forall i, 1 \leq k \leq n. \tag{A.15}$$

Eq. (A.15) is successively equal to

$$\frac{d \log(\varphi(z_k))}{dz_k} = -2\lambda z_k \quad \forall i, 1 \leq k \leq n, \tag{A.16}$$

$$\log(\varphi(z_k)) = -\lambda z_k^2 + C^{ste} \quad \forall i, 1 \leq k \leq n, \tag{A.17}$$

$$\varphi(z_k) = A e^{-\lambda z_k^2} \quad \forall i, 1 \leq k \leq n. \tag{A.18}$$

Function φ , is a normal distribution with a zero mean and a standard deviation $1/\sqrt{2\lambda}$. Constant A can be calculated since φ is a probability density function, consequently by definition, its integral taken between $-\infty$ and $+\infty$ should be equal to 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z_k) dz_k = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\lambda z_k^2} dz_k = 1. \tag{A.19}$$

The solution to this integral is definitely known (Spiegel, 2000) and gives to A a value of $\sqrt{\lambda/\pi}$. Therefore, function φ is known to the λ Lagrange multiplier, and by modifying the variable of relation (A.4), we have the probability density function of reduced components of branch lengths

$$pdf(l_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{r^{i-1}}} \frac{1}{\sqrt{l_k}} e^{-\lambda l_k / r^{i-1}}. \tag{A.20}$$

Moreover, constant λ may be explained by expressing the l_k components average, named \bar{l}_k , it gives

successively

$$\begin{aligned} \bar{l}_k &= \int_0^{+\infty} l_k \text{pdf}(l_k) dl_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{r^{k-1}}} \int_0^{+\infty} \frac{l_k}{\sqrt{l_k}} e^{-\lambda l_k / r^{k-1}} dl_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{r^{k-1}}} \int_0^{+\infty} l_k^{1/2} e^{-\lambda l_k / r^{k-1}} dl_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{r^{k-1}}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{r^{k-1}}{\lambda}\right)^{3/2} \\ &= \frac{r^{k-1}}{2\lambda}. \end{aligned}$$

After replacing this result in Eq. (A.20) we have

$$\text{pdf}(l_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{l}_k}} \frac{1}{\sqrt{l_k}} e^{-l_k/2\bar{l}_k}. \tag{A.21}$$

A Gamma distribution with $\alpha = \frac{1}{2}$ and $\beta = 1/2\bar{l}_k$ can be recognized here and is named $\Gamma(\frac{1}{2}, 1/2\bar{l}_k)$.

The second step consists of determining the probability density distribution for L , knowing that $L = \sum_{k=1}^n l_k$. The most usual way to calculate the distribution $\text{pdf}(L)$, is to use the following property: If we have n independent random variables $l_k, k = 1, 2, \dots, n$ of probability density function $\text{pdf}(l_k)$ then the random variable L defined as $L = \sum_{k=1}^n l_k$ has a probability density function $\text{pdf}(L)$ such as

$$\text{pdf}(L) = \text{pdf}(l_1) \star \text{pdf}(l_2) \star \dots \star \text{pdf}(l_n), \tag{A.22}$$

where \star is the convolution integral.

A.4. Convolution integral of two Gamma distributions

Let us work out the convolution integral of two Gamma distributions with β parameters which are different in pairs, we then try to calculate $\Gamma(\alpha, \beta_1) \star \Gamma(\alpha, \beta_2)$. To do this calculation, we will use the characteristic Gamma distribution functions. In fact, to convolute both Gamma distributions means that we are looking for the probability density function $\text{pdf}(L)$ for L such as $L = l_1 + l_2$ where l_1 and l_2 have a probability density function represented by the functions $\Gamma(\alpha, \beta_1)$ and $\Gamma(\alpha, \beta_2)$. Moreover, the characteristic functions, named φ_k^\star , have the following property:

$$\varphi_{l_1+l_2}^\star = \varphi_{l_1}^\star \varphi_{l_2}^\star. \tag{A.23}$$

The characteristic function of a random variable, named l_k variables here, is defined as a mathematical expectation of the exponential function of this random variable;

in the present case we have therefore:

$$\begin{aligned} \varphi_{l_k}^\star(s) &= E[e^{-sl_k}] \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sl_k} \text{pdf}(l_k) dl_k \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta_k^\alpha} \int_0^{+\infty} l_k^{\alpha-1} e^{-l_k\left(s+\frac{1}{\beta_k}\right)} dl_k \\ &= \frac{1}{(1+s\beta_k)^\alpha}. \end{aligned}$$

Here we have

$$\varphi_{l_1+l_2}^\star(s) = \frac{1}{[(1+s\beta_1)(1+s\beta_2)]^\alpha}.$$

Concerning our case, $\alpha = \frac{1}{2}$, then function $\text{pdf}(L)$ such as $L = l_1 + l_2$ can be worked out thanks to Laplace transform tables

$$\begin{aligned} \text{pdf}(L) &= \frac{1}{\sqrt{\beta_1\beta_2}} e^{-(1/\beta_1+1/\beta_2)L/2} \\ &\quad \times I_0\left(\frac{(1/\beta_2 - 1/\beta_1)L}{2}\right), \end{aligned} \tag{A.24}$$

where $I_0(x) = 1 + x^2/2^2 + x^4/2^24^2 + x^6/2^24^26^2 + \dots$ is the modified Bessel function of the first kind and zero order. The result of the probability density function of morphometric lengths L is therefore

$$\text{pdf}(L) = \frac{1+r}{2\sqrt{r\bar{L}}} e^{-(1+r)^2L/4r\bar{L}} I_0\left(\frac{(1-r)(1+r)L}{4r\bar{L}}\right). \tag{A.25}$$

A.5. Convolution integral of n Gamma distributions

The result of the convolution integral for n Gamma distributions is obtained by working out the generalized characteristic functions (Mathai, 1982; Moschopoulos, 1985; Sim, 1992):

Let l_1, l_2, \dots, l_n , be n independent random distributed according to a Gamma distribution of the following type:

$$\Gamma(\alpha_i, \beta_i) = \frac{\beta_i^{\alpha_i} l_i^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\beta_i l_i}. \tag{A.26}$$

Then the probability density function for $L = \sum_{i=1}^n l_i$, is

$$\begin{aligned} \text{pdf}(y) &= \left(\prod_{i=1}^n \beta_i^{\alpha_i}\right) \frac{L^{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - 1}}{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)} e^{-\beta_n L} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_n(k) (\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i)_k}{k! (\sum_{i=1}^n \alpha_i)_k} [(\beta_n - \beta_{n-1})L]^k, \end{aligned} \tag{A.27}$$

where

$$b_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2 \\ \sum_{j=0}^k \frac{b_{i-1}(j) (\sum_{p=1}^{i-2} \alpha_p)_j (-k)_j}{j! (\sum_{p=1}^{i-1} \alpha_p)_j} C_i^j & \\ \text{for } i = 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

with

$$C_i = \frac{\beta_{i-2} - \beta_{i-1}}{\beta_i - \beta_{i-1}} \quad (\text{A.28})$$

and

$$(x)_k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1). \quad (\text{A.29})$$

By returning to our initial notations, the probability density function of morphometric lengths is defined by the following equation:

$$\begin{aligned} pdf(L) = & \left(\frac{\sum_{i=1}^n r^{i-(n+1)/2}}{2\bar{L}} \right)^{n/2} \frac{L^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n r^{i-n} L}{2\bar{L}}} \\ & \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_n(k)(n-1/2)_k}{k! \binom{n}{k}} \left(\frac{1-r^n}{2\bar{L}r^{n-1}} L \right)^k \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

and

$$b_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2, \\ \sum_{j=0}^k \frac{b_{i-1}(j)(i-2/2)_j(-k)_j}{j!(i-1/2)_j} (-r)^j & \\ \text{for } i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

References

- Barker, S., Cumming, G., Horsfield, K., 1973. Quantitative morphology of the branching structure of trees. *J. Theor. Biol.* 40, 33–43.
- Berezovskaya, F., Karev, G., Kisliuk, O., Khlebopros, R., Tselniker, Y., 1997. Fractal approach to computer-analytical modeling of tree crown. *J. Trees* 11, 323–327.
- Berger, D., 1991. Modification of a simple fractal tree growth scheme: implications on growth, variation and evolution. *J. Theor. Biol.* 152, 513–529.
- Bidel, L., Pagès, L., Rivière, L., Pellous, G., Lorendeau, J., 2000. Massflowdyn i: a carbon transport and partitioning model for root system architecture. *Ann. Bot.* 85, 869–886 doi:10.1006/anbo.2000.1149.
- Bosanac, B., 1990. Tree: a knowledge-based system for generating images of trees. Graduate school of design, Harvard University, Ph.D. thesis.
- Chen, S., Impens, I., Ceulemans, R., Kochelbreggh, F., 1993. Measurement of gap fraction of fractal generated canopies using digitalized image analysis. *Agric. For. Meteorol.* 65, 245–259 doi:10.1016/0168-1923(93)90007-5.
- Cline, M., 1994. The role of hormones in apical dominance. New approaches to an old problem in plant development. *Physiol. Plantarum* 90, 230–237.
- Cline, M., 1997. Concepts and terminology of apical dominance. *Am. J. Bot.* 84 (8), 1064–1069.
- Crawford, J., Young, I., 1990. A multiple scaled fractal tree. *J. Theor. Biol.* 145, 199–206.
- Cudennec, C., 2000. Description mathématique de l'organisation du réseau hydrographique et modélisation hydrologique. Ph.D. Thesis.
- Dooge, J., 1986. Looking for hydrological laws. *Water Resour. Res.* 22, 46S–58S.
- Duchesne, J., Cudennec, C., Corbierre, V., 1997. Relevance of the h2u model to predict the discharge of a catchment. *Water Sci. Technol.* 36 (5), 169–175 doi:10.1016/S0273-1223(97)00471-X.
- Duchesne, J., Raimbault, P., Fleurant, C., 2002. Towards a universal law of tree morphometry by combining fractal geometry and statistical physics. Proceeding: Emergent Nature, Patterns, Growth and Scaling in the Sciences, Granada, Spain, pp. 93–102.
- Feder, J., 1988. *Fractals*. Plenum Press, New York.
- Fitter, A., 1982. Morphometric analysis of root systems: application of the technic and influence of soil fertility on root system development in two herbaceous species. *Plant Cell Environ.* 5, 313–322.
- Fruh, T., Kurth, W., 1999. The hydraulic system of trees: theoretical framework and numerical simulation. *J. Theor. Biol.* 201, 251–270 doi:10.1006/jtbi.1999.1028.
- Hallé, F., 1970. *Essai sur l'architecture et la dynamique de croissance des arbres tropicaux*. Masson, Paris.
- Holland, P., 1969. The maintenance of structure and shape of three mallee eucalypts. *New Phytol.* 68, 411–421.
- Horton, R., 1945. Erosional development of streams and their drainage basins; hydrological approach to quantitative morphology. *Bull. Geol. Soc. Am.* 56, 275–370.
- Jaeger, M., de Reffye, P., 1992. Basic concepts of computer simulation of plant growth. In: *The 1990 Mahabaleshwar Seminar on Modern Biology, Mahabaleshwar (Ind)*. *J. Biosci.* 17, 275–291.
- Kirshen, D., Bras, R., 1983. The linear channel and its effects on the geomorphological iuh. *J. Hydrol.* 65, 175–208 doi:10.1016/0022-1694(83)90216-0.
- La Barbera, P.L., Rosso, R., 1987. Fractal geometry of river networks. *EOS Trans. AGU* 68, 12–76.
- La Barbera, P.L., Rosso, R., 1989. On the fractal dimension of stream networks. *Water Resour. Res.* 25 (4), 735–741.
- La Barbera, P.L., Rosso, R., 1990. On the fractal dimension of stream networks. *Water Resour. Res.* 26, 2245–2248.
- Leopold, L., 1971. Trees and streams: the efficiency of branching patterns. *J. Theor. Biol.* 31, 339–354.
- Lidenmayer, A., Prusinkiewicz, P., 1988. Development models of multicellular organism: a computer graphics perspective. In: *Langton, E.C. (Ed.), Artificial Life. Proceedings of an Interdisciplinary Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems*. Addison-Wesley, Los Alamos, New Mexico. Reading, MA, pp. 221–249.
- Mahon, T.M., Kronauer, R., 1976. Tree structure: deducing the principal of mechanical design. *J. Theor. Biol.* 59, 443–466.
- Mandelbrot, B., 1988. *Fractal Geometry of Nature*. Hardcover. Freeman and Co., New York.
- Mathai, A., 1982. Storage capacity of a dam with gamma type inputs. *Ann. Inst. Statist. Math.* 34, 591–597.
- Moschopoulos, P., 1985. The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Ann. Inst. Statist. Math.* 37, 541–544.
- Muhar, A., 2001. Three-dimensional modelling and visualisation of vegetation for landscape simulation. *Landscape and Urban Planning* 54, 5–17 doi:10.1016/S0169-2046(01)00122-0.
- Niklas, K., 1992. *Plant Biomechanic: An Engineering Approach to Plant Form and Function*. The University of Chicago Press, Chicago.
- Nikora, V., Sapozhnikov, V., 1993. River network, fractal geometry and its computer simulation. *Water Resour. Res.* 29 (10), 3569–3575.
- Oohata, S., Shidei, T., 1971. Studies on the branching structure of trees. *Japan. J. Ecol.* 217 (1–2), 7–14.
- Raimbault, P., Tanguy, M., 1993. La gestion des arbres d'ornement. 1 partie: Une méthode d'analyse et de diagnostic de la partie aérienne. *Rev. For. Fr.* 2, 97–116.
- Raimbault, P., de Jonghe, F., Tanguy, R.T., 1995. La gestion des arbres d'ornement. 2 partie: Gestion de la partie aérienne: les principes de la taille longue moderne des arbres d'ornement. *Rev. For. Fr.* 13, 80–87.
- Rosso, R., Bacchi, B., Barbera, P.L., 1991. Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks. *Water Resour. Res.* 27 (3), 381–387.

- Schumm, S., 1956. Evolution of drainage system and slopes in badlands at pearth amboy. *Bull. Geol. Soc. Am.* 87, 597–646.
- Sears, F., 1971. *An Introduction to Thermodynamics, the Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Shreve, R., 1969. Stream lengths and basin areas in topologically random channel networks. *J. Geol.* 77, 397–414.
- Sim, C., 1992. Point processes with correlated gamma interarrival times. *Stat. Probab. Lett.* 15, 135–141 doi:10.1016/0167-7152(92)90126-P.
- Sismilich, M., Menzies, M., Gandar, P., Jameson, P., Clemens, J., 2003. Development of a mathematical method for classifying and comparing tree architecture using parameters from a topological model of a trifurcating botanical tree. *J. Theor. Biol.* 220, 371–391 doi:10.1006/jtbi.2003.3177.
- Smart, J., 1968. Statistical properties of stream lengths. *Water Resour. Res.* 4, 1001–1014.
- Spiegel, M., 2000. *Mathematical Handbook*. Schaum's Outline Series. Schaum's outline series, London.
- Strahler, A., 1957. Quantitative analysis of watershed geomorphology. *Trans. AGU* 38, 913–920.
- Tarboton, D., Bras, R., Rodriguez-Iturbe, I., 1988. The fractal nature of river networks. *Water Resour. Res.* 25 (8), 1317–1322.
- Tarboton, D., Bras, R., Rodriguez-Iturbe, I., 1990. Comment on “on the fractal dimension of stream networks” by P. la Barbera and R. Rosso. *Water Resour. Res.* 26, 2243–2244.
- Viennot, X., Eyrolles, G., Janey, N., Arquès, D., 1989. Combinatorial analysis of ramified patterns and computer imagery of trees. *Comput. Graphics* 23 (3), 31–40.
- Withney, G., 1972. The bifurcation ratio as an indicator of adaptative strategy in woody plant species. *Bull. Torrey Bot. Club* 103 (2), 67–72.

L'ESPACE GÉOGRAPHIQUE

Roland B. et **C. Fleurant**, 2004, Caractérisation des formes du bocage à l'aide de la géométrie fractale, *L'Espace Géographique*, 2, p. 165-174.

Caractérisation des formes du bocage à l'aide de la géométrie fractale

BERNARD ROLAND, CYRIL FLEURANT

Laboratoire du Paysage, Institut national d'Horticulture,
2, rue Le Nôtre, 49045 Angers cedex

RÉSUMÉ.— Le paysage bocager a évolué de façon radicale ces cinquante dernières années du fait des développements agricoles. Les formes de la maille bocagère ont des conséquences fondamentales sur les flux du paysage : flux hydrologiques et écologiques plus particulièrement. Aussi faisons nous ici une tentative de caractérisation de la structure du réseau bocager par la géométrie fractale. La méthode du comptage de boîtes nous a permis d'obtenir de bons résultats d'analyse de la maille bocagère par le biais de paramètres de la géométrie fractale (dimension, coupures supérieure et inférieure).

BOCAGE, GÉOMÉTRIE FRACTALE,
MAILLE BOCAGÈRE, MÉTHODE DU
COMPTAGE DE BOÎTES

ABSTRACT.— Using fractal geometry to characterise hedgerow lattice.— The hedgerow landscape has changed radically over the past fifty years in line with agricultural development. The shape of the hedgerow lattice has numerous effects, for example, on the hydrological and ecological functions of the landscape. We have therefore attempted to characterise the network structure using fractal geometry. The box-counting method makes it possible to obtain significantly different results when analysing this structure using fractal parameters (dimension, upper and lower cut-offs).

BOX-COUNTING METHOD, FRACTAL
GEOMETRY, HEDGEROW LATTICE,
HEDGEROW LANDSCAPE

Pourquoi analyser le paysage de bocage à l'aide de l'outil fractal ?

Le bocage désigne dans le langage des géographes un paysage agraire d'enclos verdoyants. Il s'oppose au paysage de champs ouverts. Les enclos sont constitués, au sens strict, de haies vives qui entourent complètement les parcelles exploitées. Par extension, des enclos non fermés ou composés de talus, de murets peuvent être qualifiés de bocage (Soltner, 1995). Ses formes sont très diverses et présentent une forte irrégularité; leur origine est complexe. Les historiens, les géographes, les ethnologues, les agronomes s'y sont intéressés, tentant d'identifier les causes de ces formes ou d'expliquer leur évolution. Chiva (1991) décrit cette quête et les difficultés rencontrées pour « Comprendre la genèse, dans la longue durée, de ces objets

complexes que sont les paysages non urbains, distinguer les paramètres de leur structuration, démêler l'enchevêtrement des facteurs hétérogènes qui les ont façonnés...».

À ce titre, le bocage présente un intérêt particulier, car la structure en réseau du maillage de haies met en relief le tracé du parcellaire et peut faciliter l'analyse de ses formes. Il matérialise l'empreinte des structures agricoles, l'organisation technique et économique d'un pays. En outre, par sa diversité, il marque fortement l'identité d'un territoire. Enfin, l'évolution de ses formes permet une analyse historique. Dans les cinquante dernières années, ce paysage a été profondément bouleversé par la modernisation des structures agricoles et la mécanisation. L'augmentation de la productivité s'est souvent accompagnée de l'agrandissement des parcelles : la haie devient un obstacle au passage des engins de plus en plus gros ; les surfaces d'exploitation augmentant, l'entretien des haies devient trop coûteux ; l'emprise de plusieurs mètres au sol réduit d'autant la surface de production ; les pouvoirs publics et les politiques de développement rural ont favorisé ces pratiques.

Les différents spécialistes qui se sont intéressés à ce paysage montrent la complexité de ces formes et la décrivent qualitativement sans pouvoir quantifier cette irrégularité. Pourtant l'intérêt de bien connaître les formes qui caractérisent un paysage est évident, notamment dans l'interprétation des flux qui se propagent à différentes échelles.

Plusieurs outils mathématiques sont à la disposition des observateurs pour décrire les formes, notamment la géométrie, qui est fondée sur la caractérisation des propriétés des formes. Cependant, elle atteint rapidement ses limites pour décrire des formes naturelles, dès lors qu'il s'agit de lignes au rayon de courbure infiniment variable par exemple. Les mathématiciens du début du xx^e siècle parlaient de « courbes pathologiques », de « monstres mathématiques ».

Mandelbrot (1995) cite les courbes de Von Koch, de Peano ou de Sierpinski. Elles résistent à toute tentative de description par les outils mathématiques connus jusqu'alors. La géométrie fractale qu'il invente dans les années 1960 permet de décrire ces courbes dites « non rectifiables ». Il introduit un paramètre caractéristique, leur dimension fractale : « C'est un nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble géométrique ou d'un objet naturel, et qui se réduit, dans le cas des objets de la géométrie usuelle d'Euclide, à leurs dimensions usuelles » (Mandelbrot, 1982 ; Mandelbrot, 1995).

L'observation montre que les lignes brisées sur un plan ont une dimension fractale comprise entre 1 et 2. Dans l'introduction de son ouvrage *Les Objets fractals*, Mandelbrot (1995) formule de façon intuitive la relation entre la dimension fractale et la forme de l'objet étudié : « Pour caractériser de telles figures, on peut d'abord dire, très grossièrement, qu'une figure dont la dimension se situe entre 1 et 2 doit être plus effilée qu'une surface ordinaire, tout en étant plus massive qu'une ligne ordinaire ».

On peut ainsi, par extension, considérer que la dimension d'un objet constitué de lignes, qui présentent des directions très variables en couvrant le plan de façon homogène, s'approche de 2 et qu'à l'inverse, pour un plan peu occupé par des lignes de sinuosité peu contrariée, la dimension est proche de 1. Entre ces deux limites se présente toute la gamme de courbures variablement chahutées.

Chiva (1991) nous parle de « la prise en considération du parcellaire qui permet d'introduire celle des phénomènes d'échelle, d'emboîtement d'échelles et, par là, de discontinuité ». Ces éléments descriptifs sont caractéristiques des objets fractals. Il apparaît donc possible de mesurer la dimension fractale d'un maillage bocager.

Dans son ouvrage, Burel (1999) présente plusieurs paramètres caractéristiques des formes. Parmi eux, l'analyse fractale constitue un outil qui décrit l'occupation des sols. La dimension fractale d'un paysage bocager, représenté par un réseau maillé en vue aérienne, apparaît donc opportune. La géométrie fractale a été et est toujours utilisée très largement pour décrire et expliquer des objets géologiques (Korvin, 1992) et des phénomènes physiques (Sapoval, 1997; Gouyet, 1992). Mais, depuis quelques années, elle est également un outil novateur pour la caractérisation et, souvent, la compréhension, des formes complexes du paysage : les cours d'eau et leur bassin-versant (Rodriguez-Iturbe, Rinaldo, 1997; Hauchard *et al.*, 1999), la géomorphologie (Cheng *et al.*, 1999; Nikora *et al.*, 1999; Tyre *et al.*, 1999), l'analyse paysagère ou l'architecture (Duchesne *et al.*, 2001; Bovill, 1995), les réseaux et les structures urbaines (Benguigui, 1992; Frankhauser, 1994; 1998a; 1998b).

L'objet de ce travail est de présenter une analyse de la trame bocagère à l'aide de l'outil fractal afin d'essayer d'en caractériser la forme. Ce travail est l'amorce d'une réflexion plus profonde, et donc de travaux à venir, sur l'influence des structures paysagères (bocages, murettes, haies) et des aménagements anthropiques sur les flux hydriques (inondations, érosions destructives, etc.) et les flux de polluants (transferts des polluants agricoles).

Matériel et méthode

Nous avons ainsi recherché un site d'étude dans un paysage bocager encore suffisamment dense pour présenter une irrégularité du maillage de haies, avec les caractéristiques suivantes : un bassin-versant (en vue d'une application ultérieure à l'hydrologie) de 20 à 50 km²; un maillage de haies relictuel, ayant évolué au cours des cinquante dernières années, au travers d'épisodes de développement agricole plus ou moins marqués; l'existence de prises de vue aériennes du secteur à plusieurs époques durant cette période.

Le département de la Mayenne (France) présente de nombreux sites répondant à ces critères. Celui qui a été retenu se situe en amont du bassin de l'Orthe, sur les communes de Saint-Martin-de-Connée et Izé (fig. 1). De plus, il existe, dans cette région, un programme de réhabilitation et de replantation de haies qui pourrait devenir un terrain d'application des résultats de cette étude théorique.

Par interprétation des photos aériennes (missions IGN 1958 et 1996, échelle : 1/25 000), nous avons reporté le tracé du maillage sur un fond de plan cadastral au 1/5 000, afin de respecter les limites parcellaires existantes sur lesquelles sont implantées les haies et de tenir compte de la déformation des représentations photographiques (fig. 2). Nous avons délimité le contour du bassin-versant (d'une superficie d'environ 30 km²). Afin d'affiner l'analyse de l'évolution et de caractériser des variations dans l'évolution du maillage, à l'intérieur de ce périmètre, nous avons distingué dans les mesures les deux communes du bassin, séparées par une zone « frontière »; en effet chaque commune possède un historique particulier en matière de foncier : Saint-Martin-de-Connée a connu une réorganisation foncière entre 1990 et 1994 et Izé des échanges amiables échelonnés sur la durée de l'étude.

Pour évaluer la dimension fractale, plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature. Nous avons choisi la méthode dite du « comptage de boîtes » (*the box-counting method*) qui est décrite dans de nombreuses références (Frankhauser, 1994; Rodriguez-Iturbe et Rinaldo, 1997; Gonzato, 1998; Foroutan-pour *et al.*, 1999), car elle

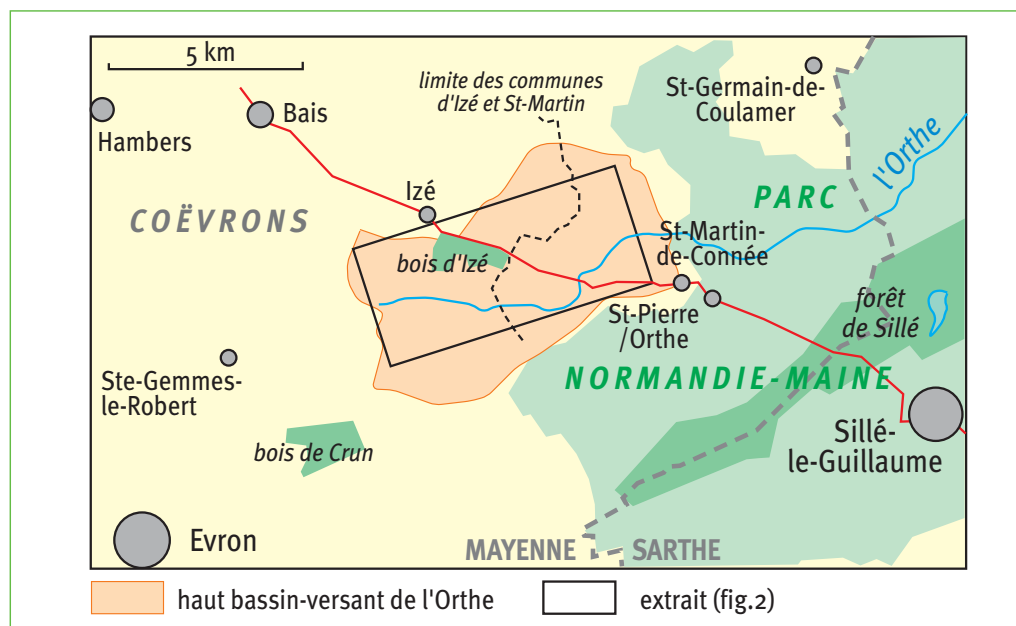


Fig. 1/ Cartes de situation du bassin-versant de l'Orthe (coordonnées : 48° 10' 30" N, 0° 12' 30" W à 48° 14' 30" N, 0° 20' 00" W)

s'applique bien aux structures anthropiques comme le bocage. Frankhauser (1994) l'utilise pour caractériser les structures urbaines et Burel (1999) pour caractériser les formes du paysage ou l'occupation du sol.

Cette méthode adapte la formule de Mandelbrot (1982) de la façon suivante. La relation entre le nombre de boîtes pleines et la taille unitaire des boîtes peut s'écrire dans la zone de fractalité :

$$N \varepsilon^D = K \quad (1)$$

où N est le nombre de boîtes pleines, ε la taille unitaire de la boîte, D la dimension fractale, K une constante.

La relation peut encore s'écrire (à une constante près) :

$$D = \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (2)$$

Où Log() représente le logarithme décimal.

La méthode consiste à appliquer successivement sur l'espace que l'on étudie un quadrillage de plus en plus fin et à compter à chaque itération le nombre de cases pleines (c'est-à-dire le nombre de cases qui contiennent au moins une partie de l'objet à mesurer). On trace le graphe des points $P_i [1/\varepsilon_i, N_i]$ sur une échelle bi-logarithmique. La pente de la droite de régression, estimée dans le nuage de points compris dans la zone de fractalité, correspond ainsi à la dimension fractale de l'objet, d'après la relation (2).

Nous avons appliqué la méthode du comptage de boîtes sur le tracé résultant, en l'adaptant à notre objet. En effet, pour tenir compte de la faible étendue prévisible de la fractalité, nous avons débuté le comptage à partir d'une trame constituée de



Fig. 2 / Report du maillage de haies sur le bassin-versant de l'Orthe en 1958 (en haut) et en 1996 (en bas)

Ce maillage n'est qu'un extrait de la zone d'étude, voir figure 1. Les pointillés représentent la limite entre les deux communes : Izé et Saint-Martin-de-Connée (échelle approximative : 1/66 250).

27 boîtes de 1 km (longueur terrain) de côté ($\epsilon_1 = 1$ km). Puis, successivement, ont été appliqués sur la zone d'étude des quadrillages avec des mailles carrées correspondant à une division entière de ce maillage initial, 1/2 km, 1/3 km, 1/4 km, 1/5 km, 1/6 km, 1/7 km, 1/8 km, 1/9 km, 1/10 km, 1/11 km, 1/12 km, 1/14 km, 1/16 km, 1/24 km, 1/32 km (réalisé à l'aide du logiciel AUTOCAD®). Le périmètre de la région étudiée est donc strictement identique, à chaque étape du comptage.

Cette méthode itérative présente l'avantage, par rapport aux autres citées plus haut, pour laquelle ϵ est divisé par deux à chaque itération, d'augmenter le nombre de points de mesure et d'affiner le résultat dans le cas d'un objet présentant une faible étendue de fractalité.

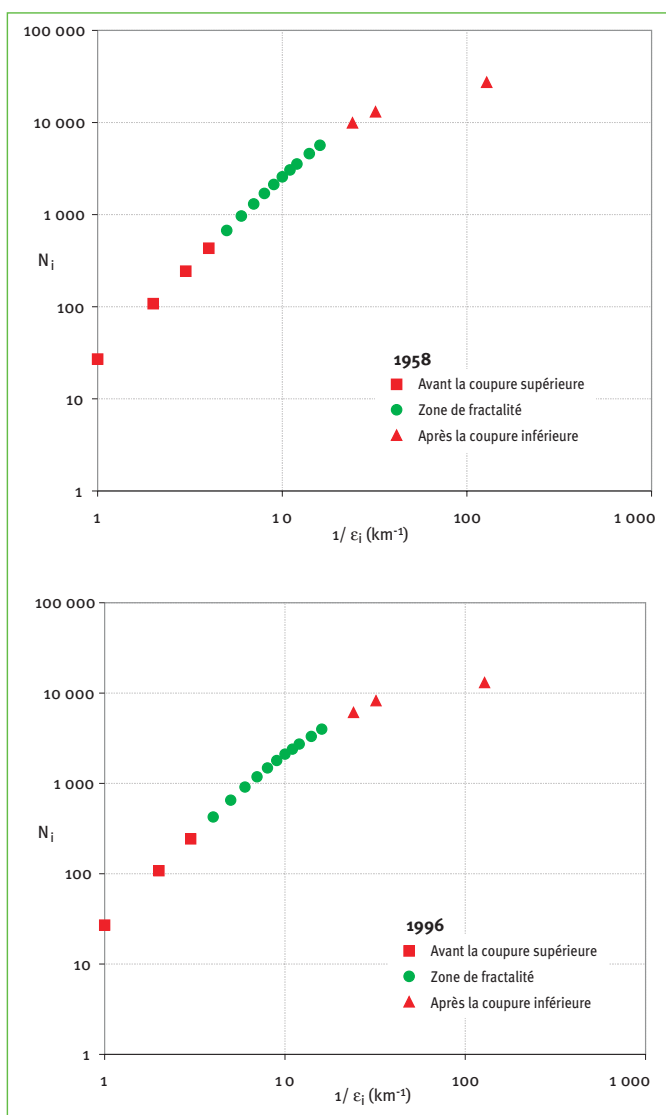


Fig. 3/ Résultat du comptage de boîtes sur le bassin-versant de l'Orthe amont, en 1958 et en 1996

Nous avons effectué le comptage de boîtes en appliquant la règle suivante : « une boîte est pleine, si elle contient un tronçon de haie ; inversement, elle est vide si elle n'en contient aucun ».

Résultats et discussion

Les résultats, les graphes N_i en fonction de $1/\epsilon_i$, sont donnés sur la figure 3.

Les graphes obtenus sont de même type pour l'ensemble des secteurs, et montrent que les nuages de points peuvent être séparés en 3 secteurs (fig. 4). Ces trois secteurs sont identifiés par des ruptures de pente dans l'alignement des points de mesure. Les ruptures de pente des trois droites indiquent deux coupures, appelées inférieure et supérieure (nous en donnerons une signification plus précise ultérieurement). Les secteurs sont les suivants. Avant la coupure supérieure, la pente de la droite de régression est égale à 2 : toutes les boîtes du quadrillage sont pleines, leur nombre augmente comme le carré de leur taille (carré rouge plein sur les graphes). Dans la zone de fractalité, la pente est D : la dimension fractale (disque vert sur les graphes). Pour des boîtes de taille inférieure à la coupure inférieure, la pente est 1 car le nombre de boîtes pleines augmente proportionnellement à la taille des boîtes (triangle rouge plein sur les graphes). En théorie, la pente ne tend pas exactement vers 1, mais vers $1 + \delta$ (δ représente ici un nombre très petit) qui correspond à la dimension fractale moyenne des segments individuels qui constituent la structure du maillage bocager.

Les points n'appartenant ni à la droite de pente 2 ni à celle de pente 1 sont donc des points qui décrivent la fractalité de l'objet étudié, ici la structure bocagère. La détermination de la dimension fractale revient alors à identifier la zone d'alignement la plus rigoureuse sur les graphes présentés sur la figure 3. Celle-ci s'avère délicate, car l'étendue de la fractalité est réduite. La détermination des limites de la zone caractérisant le comportement scalant (coupures supérieure et inférieure) apparaît donc essentielle pour identifier cette étendue. Kulatikale *et al.* (1997) indiquent que la mesure par comptage de boîtes de la plupart des phénomènes naturels révèle le même type de comportement. Il précise que « une des questions les plus critiques lorsque l'on applique la méthode des boîtes à la mesure d'un objet naturel, est l'identification de la taille de boîte à partir de laquelle le nuage de points est aligné dans le graphe en bi-logarithmique. Ce rang est dépendant de l'ordre d'auto-similarité, du facteur de réduction et certainement des coupures inférieure et supérieure caractéristiques ».

Il faut ici rappeler la notion de fréquence de coupure et son interprétation intuitive. Comme l'indique Sapoval (1997), la détermination des coupures inférieure et supérieure, «c'est-à-dire de la plus petite taille non fractale et de la taille jusqu'à laquelle la géométrie est fractale», peut constituer une caractérisation utile.

Dans sa discussion sur la longueur de la côte bretonne, Mandelbrot (1995) définit les notions de coupures externe et interne qui limitent l'étendue du comportement scalant d'un objet fractal. «Il est raisonnable de supposer que la côte réelle est assujettie à deux coupures. Sa coupure externe se mesure en dizaines ou en centaines de kilomètres. Pour une côte ne se bouclant pas, cette coupure externe pourrait être la distance entre les deux extrémités. Pour une île, elle pourrait être le diamètre du plus petit cercle qui contient toute la côte. D'autre part, la coupure interne se mesure en centimètres.»

Par analogie à cette démonstration, concernant l'étude du parcellaire bocager, nous proposons les relations entre la coupure supérieure (ou externe) et les plus grands espaces ouverts dans le paysage bocager, et entre la coupure inférieure (ou interne) et la taille des plus petites parcelles entourées de haies sur le parcellaire étudié. Cette proposition permet, à partir de la détermination des coupures supérieure et inférieure, de caractériser de façon quantitative la structure d'un maillage bocager.

L'observation des résultats du comptage de boîtes nous permet donc de déterminer les coupures inférieure et supérieure, et donc de donner un ordre de grandeur de cette structure du bocage. Les résultats de ces coupures sont donnés dans le tableau 1.

Sur le nuage de points compris entre les deux coupures, on calcule la droite de régression et son critère de dispersion (coefficient R^2). La figure 5 illustre le calcul de cette régression pour l'exemple du bassin-versant tout entier. Nous avons procédé de la même façon pour les communes d'Izé et Saint-Martin-de-Connée. L'ensemble des résultats de l'observation est indiqué dans le tableau 2. Les coefficients R^2 des droites de régression sont tous supérieurs à la valeur 0,99. Ces résultats montrent un alignement très satisfaisant des points dans la zone de fractalité, vérifiant ainsi notre hypothèse sur la détermination des coupures supérieure et inférieure du maillage. On constate également que le coefficient R^2 diminue systématiquement avec la diminution de la dimension fractale. Ceci est lié à la méthode utilisée, en effet, pour un maillage bocager plus hétérogène (date la plus récente : 1996), l'échantillonnage (nombre de boîtes pleines) est plus réduit, l'ajustement est donc moins bon.

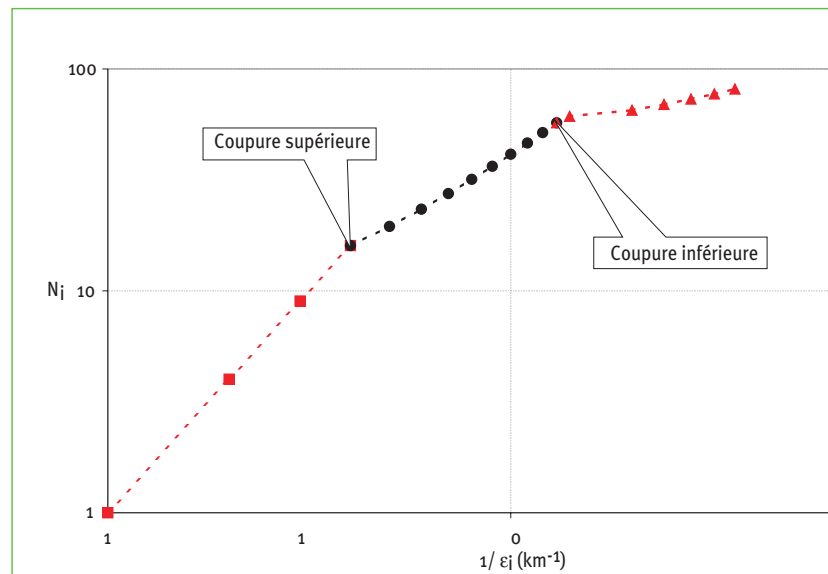


Fig. 4/ Comptage de boîtes sur une structure maillée

Avant la coupure supérieure, les points sont alignés sur une droite de pente égale à 2. Après la coupure inférieure les points sont alignés sur une droite de pente égale à 1. Les points de la zone de fractalité sont ainsi alignés sur une droite de pente égale à $1 < D < 2$.

Tabl. 1 / Relevé des coupures supérieures et inférieures pour les deux dates d'observation et pour les deux communes du bassin-versant (bv)

Années	Coupures supérieures			Coupures inférieures		
	Izé	Saint-Martin	bv entier	Izé	Saint-Martin	bv entier
1958	200 m	140 m	200 m	40 m	40 m	40 m
1996	250 m	200 m	250 m	70 m	60 m	70 m

Tabl. 2 / Résultat du calcul des dimensions fractales pour les deux communes du bassin-versant. Les dimensions fractales sont calculées par régression linéaire dont on donne le coefficient de corrélation R²

Année	Izé		Saint-Martin		Bv entier	
	D	R ²	D	R ²	D	R ²
1958	1,82	0,9980	1,81	0,9990	1,84	0,9983
1996	1,69	0,9949	1,57	0,9974	1,64	0,9958

Les résultats nous permettent également de vérifier la pertinence de la mesure et de valider une de nos hypothèses. On obtient un résultat significativement différent, en 1996, entre les communes d'Izé et de Saint-Martin-de-Connée, caractérisant l'historique des échanges parcellaires particulier de chacune des deux communes. Le maillage bocager de la commune de Saint-Martin-de-Connée semble en effet (fig. 2), en 1996, plus lacunaire et plus déconnecté que celui de la commune d'Izé, alors que ces maillages étaient identiques en 1958. L'analyse fractale révèle sur cet exemple des différences significatives qui permettent de caractériser la structure du réseau maillé. En 1958, le réseau est constitué principalement de petites parcelles, fermées et connectées entre elles. En 1996, le réseau est ouvert et parfois très déstructuré. La dimension fractale peut également être interprétée comme un indicateur de la lacunarité du réseau. Cheng (1999) propose, par exemple, des outils qui permettent de la caractériser. La piste ouverte ici semble donc intéressante à explorer afin de corréler la valeur de la dimension fractale avec d'autres paramètres caractéristiques de la structure du maillage bocager.

Perspectives et conclusion

Ces premiers résultats permettent de montrer qu'il est possible de caractériser les formes du bocage à l'aide de la géométrie fractale. La déstructuration du maillage bocager entre 1958 et 1996 se traduit par une diminution de la dimension fractale. En d'autres termes, la diminution de la dimension fractale entre 1958 et 1996 quantifie le démantèlement du bocage par une structure qui, avec le temps, devient plus hétérogène. Nous avons également montré que même si l'irrégularité du maillage est grande, l'étendue de la fractalité est réduite; ceci nous conduit à manipuler cet outil avec précaution. Toutefois, nous pensons que la dimension fractale de la trame bocagère apporte un élément de connaissance nouveau.

En outre, l'analyse fractale permet de déterminer une fréquence de coupure supérieure et une fréquence de coupure inférieure, caractéristiques d'une trame bocagère.

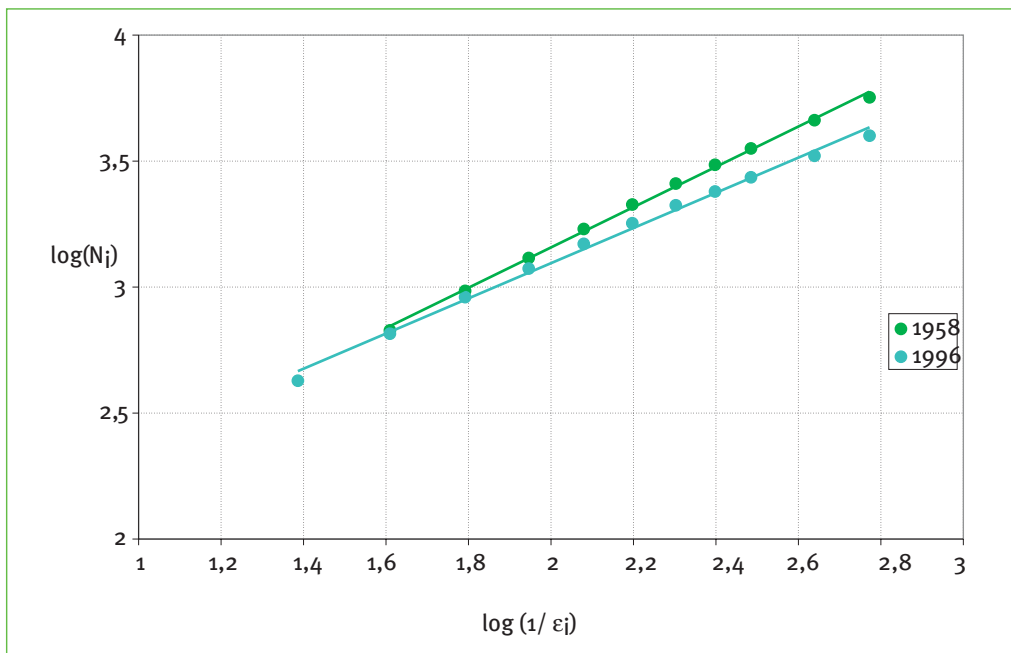


Fig. 5/ Représentation de la droite de régression des nuages de points résultant du comptage de boîtes sur le bassin de l'Orthe en 1958 et en 1996

Dans notre étude, elles se distinguent dans tous les cas entre un maillage dense et bien connecté, avant aménagement foncier, et un réseau déstructuré qui résulte des agrandissements de parcelles agricoles. La mesure de ces grandeurs apporte donc également un élément de caractérisation de la structure maillée du bocage.

Ces informations pourraient être utilisées au même titre que d'autres paramètres, tels que la densité de haies, la connectivité du réseau dans des modèles de fonctionnement de ce paysage : physique (hydrologie, ruissellement et érosion), chimique (diffusion des micro-polluants) ou biologiques (corridors écologiques...).

L'hydrologie, en particulier, paraît être une voie d'application possible. Le phénomène de percolation est modélisé à l'échelle microscopique à l'aide de la géométrie fractale. Schroeder (1991) s'intéresse à la notion de seuil de percolation sur un réseau à partir de la probabilité d'occupation des mailles d'une trame carrée. Nous envisageons d'appliquer ces travaux à la trame macroscopique du bocage.

Cette première analyse sur un territoire test laisse déjà entrevoir des perspectives de développement et d'application intéressantes. Les résultats obtenus pourraient également contribuer à quantifier des indicateurs utilisés dans l'analyse paysagère. La dimension fractale et ses coupures supérieure et inférieure pourraient à l'avenir être utilisées comme indicateur dans l'analyse paysagère. On pourra aussi proposer de les corrélérer à certains codes visuels utilisés par les paysagistes tels que la profondeur, la transparence, l'ouverture d'un paysage. La lacunarité nous semble un bon indice pour mesurer ces caractéristiques.

Les auteurs tiennent à remercier Gérard Clouet (Chambre d'Agriculture de la Mayenne) pour sa collaboration dans le choix du site d'étude grâce à sa parfaite connaissance du terrain et des milieux bocagers, et Jean Duchesne (Professeur, responsable du Laboratoire du Paysage de l'INH – Institut National d'Horticulture – Angers, France) pour la relecture de ce texte.

Références

- BENIGUI L. (1992). « Some speculation on fractals and railway networks ». *Physica A*, n° 191, p. 75-78.
- BOVILL C. (1995). *Fractal Geometry in Architecture and Design*. New York, Berlin : Springer Verlag, 190 p.
- BUREL F., BAUDRY J. (1999). *Écologie du paysage*. Paris, New York, Londres : TEC & DOC.
- CHENG Q. (1999). « The gliding box method for multifractal modeling ». *Computers and Geosciences*, n° 25, p. 1073-1079.
- CHENG Y., LEE P., LEE T. (1999). « Self-similarity dimensions of the Taiwan island landscape ». *Computers and Geosciences*, n° 25, p. 1043-1050.
- CHIVA I. (1991). « Pour une grammaire du paysage agricole ». *Études rurales*, n° 121.
- DUCHESNE J., TANGUY F., JOLIET F. (2001). « How does the fractal geometry lead to new identification of the landscape shapes ? » *38th IFLA World Congress 2001*, p. 59-69.
- FOUROUTAN-POUR K., DUTILLEUL P., SMITH D.L. (1999). « Advance in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation ». *Applied Mathematics and Computation*, n° 105, p. 195-210.
- FRANKHAUSER P. (1994). *La Fractalité des structures urbaines*. Paris: Anthropos, 291 p.
- FRANKHAUSER P. (1998a). « La formalisation fractale des tissus urbains ». *Cahiers de géographie du Québec*, vol. 42, n° 117, p. 379-398.
- FRANKHAUSER P. (1998b). « Fractal geometry of urban patterns and their morphogenesis ». In *Discrete Dynamics in Nature and Society*, n° 2, p. 127-145.
- GONZATO G. (1998). « A practical method implementation of the box counting algorithm ». *Computers and Geosciences*, vol. 24, n° 1, p. 95-100.
- GOUYET J.-F. (1992). *Physique et structures fractales*. Paris : Hermès, 185 p.
- HAUCHARD E., DELAHAYE D., FRANKHAUSER P. (1999). « Analyse morphologique de talwegs et comportements scalants. Applications des dimensions non entières à la géographie physique ». *L'Espace géographique*, n° 3, p. 215-225.
- KORVIN G. (1992). *Fractal Models in the Earth Sciences*. North Holland : Elsevier, 396 p.
- MANDELBROT B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. New York : Freeman and Co, 280 p.
- MANDELBROT B. (1995). *Les Objets fractals*. Paris : Flammarion, 212 p.
- NIKORA V., PEARSON C., SHANKAR U. (1999). « Scaling properties in landscape patterns: New Zealand experience ». *Landscape Ecology*, n° 14, p. 17-33.
- PINNADUWA H., FIELDER R., PANDA B. (1997). « Box fractal dimension as a measure of statistical homogeneity of jointed rock masses ». *Engineering Geology*, n° 48, p. 217-229.
- RODRIGUEZ-ITURBE I., RINALDO A. (1997). *Fractal River Basins*. Cambridge : Cambridge University Press.
- SAPOVAL B. (1997). *Universalités et fractales*. Paris : Flammarion.
- SCHROEDER M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws*. New York : Freeman.
- SOLTNER D. (1995). *L'Arbre et la Haie*. Sainte-Gemmes-sur-Loire : Sciences et Techniques agricoles.
- STAMPS A. (2002). « Fractals, skylines, nature and beauty ». *Landscape and Urban Planning*, n° 913, p. 1-22.
- TYRE A., POSSINGHAM H., LINDENMAYER D. (1999). « Modelling dispersal behavior on a fractal landscape ». *Environmental Modelling and Software*, n° 14, p. 103-113.

HYDROLOGICAL PROCESSES

Fleurent C., Kartiwa B. and B. Roland, 2006, An Analytical Geomorphological Instantaneous Unit Hydrogram, *Hydrological Processes*, 20(18), p. 3879-3895.

Analytical model for a geomorphological instantaneous unit hydrograph

C. Fleurant,^{1*} B. Kartiwa² and B. Roland¹

¹ *Département Paysage, Institut National d'Horticulture, Angers, France*

² *Center for Soil and Agroclimate Research, Bogor, Indonesia*

Abstract:

The rainfall-runoff modelling of a river basin can be divided into two processes: the production function and the transfer function. The production function determines the proportion of gross rainfall actually involved in the runoff. The transfer function spreads the net rainfall over time and space in the river basin. Such a transfer function can be modelled using the approach of the geomorphological instantaneous unit hydrograph (GIUH). The effectiveness of geomorphological models is actually revealed in rainfall-runoff modelling, where hydrologic data are desperately lacking, just as in ungauged basins. These models make it possible to forecast the hydrograph shape and runoff variation versus time at the basin outlet. This article is an introduction to a new GIUH model that proves to be simple and analytical. Its geomorphological parameters are easily available on a map or from a digital elevation model. This model is based on general hypotheses on symmetry that provide it with multiscale versatile characteristics. After having validated the model in river basins of very different nature and size, we present an application of this model for rainfall-runoff modelling. Since parameters are determined relying on real geomorphological data, no calibration is necessary, and it is then possible to carry out rainfall-runoff simulations in ungauged river basins. Copyright © 2006 John Wiley & Sons, Ltd.

KEY WORDS geomorphological function; transfer function; river basin; rainfall-runoff

INTRODUCTION

The purpose of rainfall-runoff modelling is the conversion of rainfall into runoff at the river basin outlet. This complex process is the result of the combination of multiple factors involved at various spatial scales. The process pattern made by hydrologists usually includes two functions: the production function and the transfer function. The production function makes it possible to determine the fallen rain (gross rainfall) actually involved in the runoff at the river outlet. The transfer function works out the runoff at the outlet according to the net rainfall. Here, we will focus exclusively on the transfer function and its geomorphological characteristics.

The transfer function can be understood through an overall approach (Chow *et al.*, 1988), namely instantaneous unit hydrograph (IUH) theory (Sherman, 1932; Nash, 1957; Dooge, 1959; Lienhard, 1964; Rodriguez-Iturbe and Valdès, 1979; Duchesne *et al.*, 1997). IUH theory (Sherman, 1932) is a determinist model that relies on three major hypotheses:

- a univocal relationship between rainfall and runoff, in the case of rainfall having the same intensity and duration features;
- linearity between unit rainfalls of different intensity and the corresponding runoffs;
- uniformity of rainfall over the whole surface of the river basin.

*Correspondence to: C. Fleurant, Département Paysage, Institut National d'Horticulture, 2 rue le Nôtre, 49045 Angers, France.
E-mail: cyril.fleurant@inh.fr

The three hypotheses are quite restrictive. However, the unit hydrograph method has a major advantage, i.e. its simplicity; this is why it has been used for many years on quite a large number of river basins throughout the world (Chow *et al.*, 1988). The unit hydrograph method is based on three basic principles:

- The unit rainfall is a rainfall impulse by definition, which means that it is short lasting compared with the basin lag, homogeneous in space and with a sufficient intensity to generate a runoff surge.
- For a unit rainfall involving a runoff depth h (m), the relation between the rate of flow by unit area $q(t)$ (m s^{-1}), the unit hydrograph $T(t)$ (s^{-1}) and h is:

$$q(t) = h(t)T(t) \quad (1)$$

- The additionality property applying to the unit hydrograph is a linear element. Therefore, if a complex rainfall is divided into a succession of unit rainfalls, it is possible to calculate the corresponding hydrograph as follows:

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)T(t - \tau)d\tau \quad (2)$$

where $q(t)$ (m s^{-1}) is the rate of flow per unit area, $i(t)$ (m s^{-1}) is the net rainfall (rainfall in excess of infiltration and interception) falling uniformly on the drainage basin, and $T(t)$ (s^{-1}) is a transfer function, and more precisely the probability density function of time transfer on the drainage basin (Gupta *et al.*, 1980). Consequently, the difficulties of expressing the rate of flow $q(t)$ are twofold: what is the value of the net rainfall $i(t)$ and which function $T(t)$ should be chosen?

Choosing the characteristic IUH of a river basin is a delicate issue. Its experimental measurement with real rainfall events is always worked out in gauged river basins, but it remains difficult to carry out. Consequently, theoretical approaches for identifying a suitable IUH have been used. For example, (Nash, 1957, 1959, 1960) conceptualized the river basin and compared it with a series of n identical linear reservoirs, whose analytical model for the unit hydrograph is a two-parameter Gamma law, where n is the number of cascade reservoirs and τ is the usual release rate from one reservoir into another.

The n and τ parameters have no physical reality and must be determined by relying on previous accounts of rainfall-runoff events. This is one of the major drawbacks of the Nash model and other similar models (Dooge, 1959; Lienhard, 1964), which cannot, therefore, be used in ungauged river basins.

If the hydrograph depends on rainfall, it also depends strongly on the geomorphological features of the river basin (shape, slope, organization of the river network). Therefore, determining a geomorphological transfer function such as the geomorphological IUH (GIUH; Rodriguez-Iturbe and Valdès, 1979), or the model described in the present article, makes it possible to give physical meaning to the unit hydrograph that has been constructed on the basis of parameters set according to the river basin's geometry. Such geomorphological models are based on the analyses of the morphological characteristics of river basins and, more particularly, river networks.

The purpose of this article is to present a new analytical model for the geomorphological transfer function, i.e. a theoretical law giving the distribution of hydraulic pathways according to the river basin geomorphology. This model has already been introduced in Fleurant and Boulestreau (2005) and is a theoretical coupling of quantitative geomorphology and hydrology. Here, we present some applications of the model. We will compare this theoretical law with the distribution of real hydraulic pathways in two river basins. By way of an applied example, we will also show how to use this geomorphological transfer function as an analytical GIUH (AGIUH), and thus make rainfall-runoff simulations.

AN ANALYTICAL GEOMORPHOLOGICAL TRANSFER FUNCTION

The geomorphological theory of the unit hydrograph has been formulated by Rodriguez-Iturbe and Valdès (1979). This model is called GIUH, and provides the times of transfer according to the geomorphology of the

drainage basin. It can be expressed as follows (Rodriguez-Iturbe and Rinaldo, 1997):

$$T(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} p(\gamma) f_{\gamma}(t) \quad (3)$$

where $p(\gamma)$ is the probability to have a γ path, γ being any path covered by a raindrop in the stream network, and Γ is the set of all the possible paths γ . $f_{\gamma}(t)$ (s^{-1}) is the probability density function of the travel time of the path γ .

The GIUH model $T(t)$ in Equation (3) is the frequency distribution of travel times from points within the drainage basin to the outlet. Rosso (1984) shows that Equation (3) can be fitted by a Gamma law whose parameters depend on Horton's parameters.

The GIUH model has generated a wealth of literature over the last 25 years. For most modifications, workers put forward the hypothesis that the response to rainfall input coming out of each drain is either an exponential function (Rodriguez-Iturbe and Valdès, 1979), a single-valued function (Gupta *et al.*, 1980; Gupta and Waymire, 1983), or else a Gamma function (van der Tak and Bras, 1990; Jin, 1992; Kirchner *et al.*, 2001). In all cases, these hypotheses are empirical and, therefore, influenced by experimental observations.

The model described in this article is different from the GIUH of Rodriguez-Iturbe and Valdès (1979) from two main aspects:

- It is based on general hypotheses on symmetry combined with the fractal properties of branched structures; thus, it is able to be used for branched structures in general (Duchesne *et al.*, 2002; Fleurant *et al.*, 2004), and not for stream networks exclusively.
- The reasoning is carried out on pathway lengths rather than on the times of transfer to the basin.

The model introduced here uses the findings of research carried out on stream networks (Duchesne *et al.*, 1997; Cudennec, 2000; Cudennec *et al.*, 2004). The focus is on describing network structures thanks to Strahler stream ordering (Strahler, 1964), and by applying Horton's laws (Horton, 1945) to a geomorphological statistics rationale, in order to elaborate a descriptive theoretical model of network lengths.

Well before Mandelbrot (1988) developed his fractal theory; branching networks, and more particularly stream network structures, had been studied very accurately. In fact, geological scientists and hydrologists such as Horton (1945), Schumm (1956), Strahler (1957) or Shreve (1969) took an interest in analysing the complex ordering of these networks. They made topological and hydraulic analyses (Kirshen and Bras, 1983) that can be applied to all branching networks that are three-dimensional and organized into a hierarchy. Many classification systems have been put forward (Horton, 1945), but we have decided upon Strahler's system (Strahler, 1952), which is the most widely used. The classification system (Figure 1) is as follows:

- headwaters are first-order stream segments;
- when two stream segments within the same order i merge, the stream segment resulting from this confluence is within order $i + 1$;
- when two stream segments within different orders i and j merge, the stream segment resulting from this confluence is within order $\max(i, j)$.

Strahler's classification thus makes it possible to organize the different segments of a stream network into a hierarchy. Consequently, the stream outlet will have the highest index value, corresponding to the river network order.

Hydrologists relied on this classification to put forward general geometric laws concerning the ordering of stream networks. Among them, Horton's laws (Horton, 1945) describe the way stream networks are organized. One of these laws expresses the so-called length ratio $R_L = \overline{l_i}/\overline{l_{i-1}}$, also known as Horton's ratio. A great number of experimental studies on stream networks (LaBarbera and Rosso, 1987, 1989, 1990; Feder, 1988;

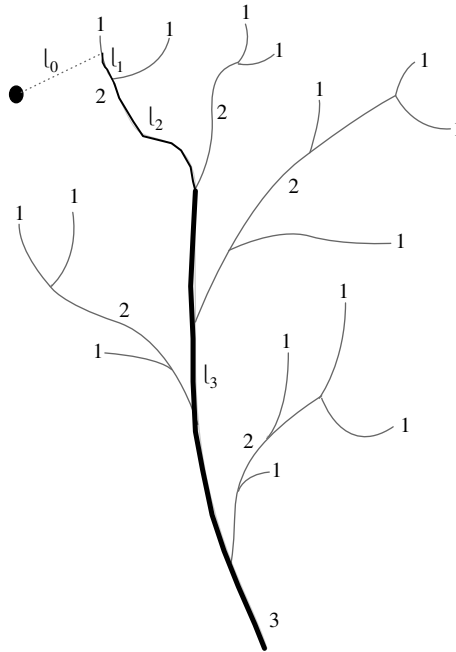


Figure 1. The concept of Strahler's hierarchical classification system. The hydraulic length is the added lengths of channel up to an indefinite raindrop of the river basin. Here, the path between a raindrop of the river basin and the outlet passes through first, second and third orders

Tarboton *et al.*, 1990; Rosso *et al.*, 1991) reveal that this ratio is rather stable and fluctuates between 1.5 and 3.5.

A brief outline of the model is given hereafter, and a detailed description can be found in Appendix A.

Definition of hydraulic lengths

Before giving the theoretical expression of probability density function of hydraulic lengths, it is necessary to define this variable accurately. As shown in Figure 1, if we take an indefinite point on the river basin to represent a raindrop, then the path to be covered between this point and the outlet successively goes over channels of increasing orders. The hydraulic length is defined as:

$$L = l_0 + \sum_{k=1}^n l_k \quad (4)$$

where l_k (m) is the length of the channel in k order and n is the order of the river network. l_0 (m) is the length of the hillslope. Hence, the hydraulic length is the added lengths n of the channels.

The hydraulic length L (m), in the river network, may be calculated using a vector with n components (l_1, l_2, \dots, l_n) . It is important to note that some length can be nil: a first-order channel might join a third-order one directly, so l_2 would be zero in that particular instance.

The transfer function of the drains

The rationale of Duchesne *et al.* (1997); Cudennec (2000) and Cudennec *et al.*, (2004), founded on the hypotheses on symmetry combined with fractal geometry, leads to the probability density function of the

drains' hydraulic lengths of order k that we have reformulated as follows (see Appendix A for details):

$$\text{pdf}(l_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{l}_k}} \frac{1}{\sqrt{l_k}} e^{-l_k/2\bar{l}_k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

A Gamma distribution with $\alpha = 1/2$ and $\beta = 1/2\bar{l}_k$ can be recognized here and termed $\Gamma(l_k, 1/2, 1/2\bar{l}_k)$, where \bar{l}_k is the mean of l_k .

The geomorphological transfer function in the stream network

We put forward the hypothesis that the distribution law in Equation (5) is an appropriate model for representing the hydraulic pathways of individual drains, which is consistent with research work by van der Tak and Bras (1990), Jin (1992) and Kirchner *et al.* (2001).

Now, the step consists of determining the probability density function for L , knowing that $L = \sum_{k=1}^n l_k$. The usual way to calculate the probability density function of L is to use the following property (Feller, 1971): if we have n independent random variables $l_k, k = 1, 2, \dots, n$, of probability density function $\text{pdf}(l_k)$, then the random variable L defined as $L = \sum_{k=1}^n l_k$ has a probability density function $\text{pdf}(L)$ such as:

$$\text{pdf}(L) = \text{pdf}(l_1) * \text{pdf}(l_2) * \dots * \text{pdf}(l_n) \quad (6)$$

where $*$ is the convolution integral. A full explanation of the convolution operator $*$ is given in Appendix A. Equation (6) can be calculated very easily with numerical calculation software, though an analytical solution exists that is explained in this paper.

The result of the convolution integral for n Gamma distributions is obtained by working out the generalized characteristic function (Mathai, 1982; Moschopoulos, 1985), and we can thus assert the following theorem (Sim, 1992):

Let l_1, l_2, \dots, l_n be n independent random distributed according to a Gamma distribution of the following type $\Gamma(l_k, 1/2, 1/2\bar{l}_k)$, then the probability density for $L = \sum_{k=1}^n l_k$ is:

$$\begin{aligned} \text{pdf}(L) &= \text{pdf}(l_1) * \text{pdf}(l_2) * \dots * \text{pdf}(l_n) \\ &= \Gamma\left(l_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\bar{l}_1}\right) * \Gamma\left(l_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\bar{l}_2}\right) * \dots * \Gamma\left(l_n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\bar{l}_n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n \prod_{i=1}^n \bar{l}_i}} \frac{L^{(n/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-L/2\bar{l}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_n(k) \left(\frac{n-1}{2}\right)_k}{k! \left(\frac{n}{2}\right)_k} \left[\frac{L}{2(\bar{l}_n - \bar{l}_{n-1})}\right]^k \end{aligned} \quad (7)$$

with

$$b_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2 \\ \sum_{j=0}^k \frac{b_{i-1}(j) \left(\frac{i-2}{2}\right)_j (-k)_j}{j! \left(\frac{i-1}{2}\right)_j} \left(\frac{\bar{l}_{i-1} - \bar{l}_{i-2} \bar{l}_{i-1}}{\bar{l}_{i-1} - \bar{l}_i \bar{l}_{i-2}}\right)^j & \text{for } i = 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

and

$$(x)_k = x(x+1)(x+2) \dots (x+k-1) \quad (8)$$

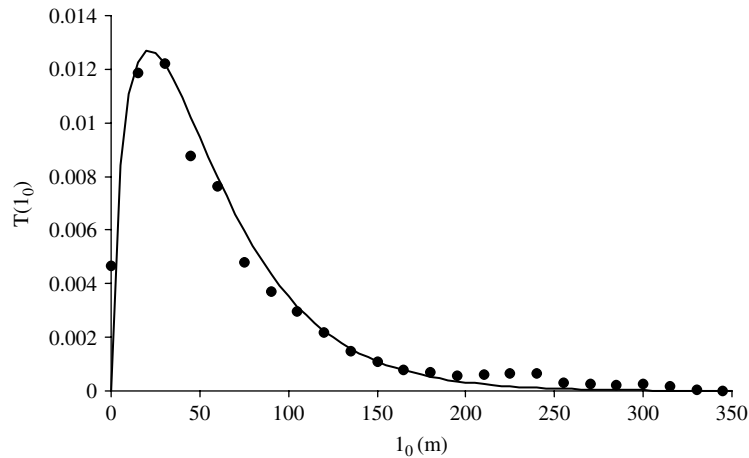


Figure 2. Distributions of the hydraulic lengths on the hillslopes of Bunder and the corresponding probability density function $\text{pdf}(l_0)$

Equation (7) is a geomorphological transfer analytical function, since it represents the distribution of hydraulic pathways through which water travels inside the river network. Moreover, the parameters of this analytical function are geomorphological:

- the Strahler order n represents the rate of the hierarchical system of the river network;
- the lengths \bar{l}_k (m) are the average hydraulic lengths for each Strahler order.

In fact, this transfer function is equivalent to a Width function (Rodriguez-Iturbe and Rinaldo, 1997), since it gives the probability of having a given distance between a definite point of the stream network and the outlet of the drainage basin.

The transfer function applied to the hillslopes

First, the impact of time transfer applied to the slopes was not considered by the GIUH model. Then, van der Tak and Bras (1990) took this impact into account by convoluting a transfer function on the basin slopes thanks to the GIUH model. The transfer function applied to the basin slopes is a Gamma $\text{pdf}(l_0) = \Gamma(l_0, \alpha_h, \beta_h)$ law.

The α_h shape parameter can be determined experimentally and can reach values ranging from 1.2 to 3.1 (van der Tak and Bras, 1990). The value of the scale parameter is $\beta_h = \alpha/\bar{l}_0$, so that the $\Gamma(l_0, \alpha_h, \beta_h)$ integral is still equal to unity (Figure 2).

METHODOLOGY AND EXPERIMENTAL DATA

In order to compare the geomorphological transfer analytical function in Equation (7) with data from real river basins, it is first necessary to assess the parameter values of the model (Strahler order n and average lengths l_k within the different orders k). Then we will just have to compare the graph of the function in Equation (7) with that of the experimental Width function of the river basins studied.

Assessment of the model's parameters

The parameters of the model are of a geomorphological nature and easily available; these are the Strahler order n of the river basin and the drains' average lengths of order k (\bar{l}_k). These parameters can be assessed either with numerical data from the river basin (digital elevation model, digitalization), combined with retrieval

software for geomorphological data (ArcView, MapWindow), or manually with a map of the stream network. In the second case, the procedure is as follows: first, the river basin is divided into a number of points representing raindrops falling uniformly on the river basin surface. The path of the raindrops down the hillslope to the stream network is determined using the contour lines; it is represented by length l_0 in Figure 1. Finally, the distance from this point to the river basin outlet is assessed by combining the covered lengths with the different Strahler orders; they correspond to lengths l_1, l_2, \dots, l_n .

For each point (or raindrop) we have the lengths l_1, l_2, \dots, l_n (some of them are obviously equal to zero) corresponding to the distance covered by a raindrop through the river network, within the different Strahler orders. Thus, we can calculate the average distance $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n$ covered for all the raindrops.

A sensitivity study of this methodology was carried out by Kartiwa (2004), revealing that it is not necessary to have a large number of points, i.e. too detailed a grid. In fact, Kartiwa's study on several river basins highlights the fact that shifting from a 3000-point grid to a 30-point grid involves very few measurement errors exceeding 10% of the estimated \bar{l}_k averages. As for the Strahler order n of the river basin, it is obtained even more quickly by reading the map and applying the Strahler rules specified before. This sensitivity study highlights the fact that the parameters of the model are manually available quite rapidly.

Experimental data

In order to compare the analytical equation of the geomorphological transfer function (Equation (7)) with reality, we have chosen two very different river basins with regard to scale and morphology (Figures 3 and 4).

The Bunder river basin is located in Indonesia, its surface area is $29 \times 10^4 \text{ m}^2$ and its Strahler order is 3. It is situated in the Wonosari region, 80 km north of Yogyakarta, the province capital, $07^\circ 53'S$ and $110^\circ 32'E$.

The river basin of Saint-Michel Mont-Mercure is located in France (Vendée), its surface area is $673 \times 10^4 \text{ m}^2$, and its Strahler order is 5. Its precise location is Vendée, $46^\circ 48'3''N$ and $0^\circ 54'8''W$.

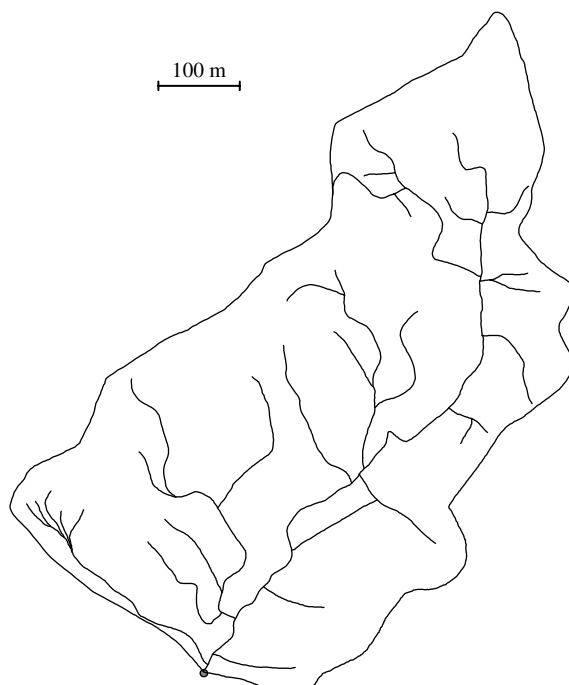


Figure 3. Bunder watershed map, Wonosari, Yogyakarta, Indonesia. The Bunder is a Strahler order 3 river basin with area of only $29 \times 10^4 \text{ m}^2$

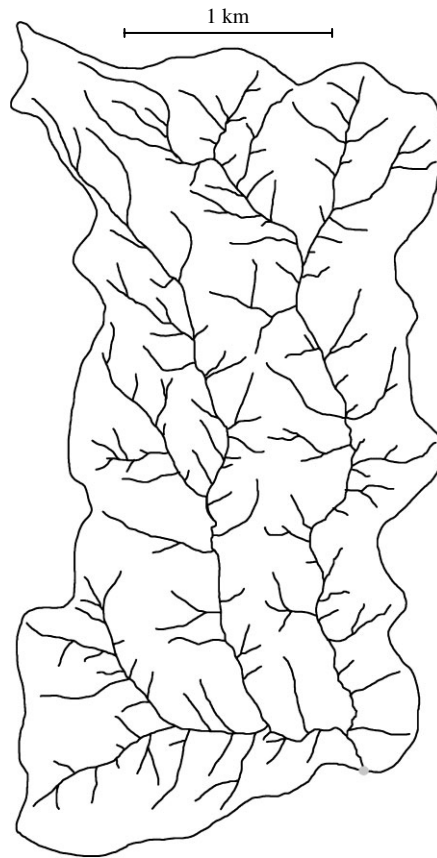


Figure 4. Saint-Michel river basin map, France. The Saint-Michel has a Strahler order 5 river basin with area of $673 \times 10^4 \text{ m}^2$

Table I. Geomorphological characteristics of the river basins studied

River basin	Area (10^4 m^2)	Strahler order	\bar{l}_1 (m)	\bar{l}_2 (m)	\bar{l}_3 (m)	\bar{l}_4 (m)	\bar{l}_5 (m)
Saint-Michel	673	5	149	240	1275	426	329
Bunder	29	3	39	62	329	—	—

The model parameters resulting from the experimental river basins are determined manually with the method described above, and appear in Table I.

RESULTS AND APPLICATIONS

The geomorphological transfer function

The comparison between the model (Equation (7)) and the experimental data is shown in Figure 5. The model parameters are given in Table I for each river basin, and Equation (7) can thus be compared with the experimental Width function of the river basins.

Note that, even though it is far from being perfect, the analytical function of geomorphological transfer provides the experimental Width function with a relatively good trend. It should be noted that no calibration

ANALYTICAL MODEL FOR GIUH

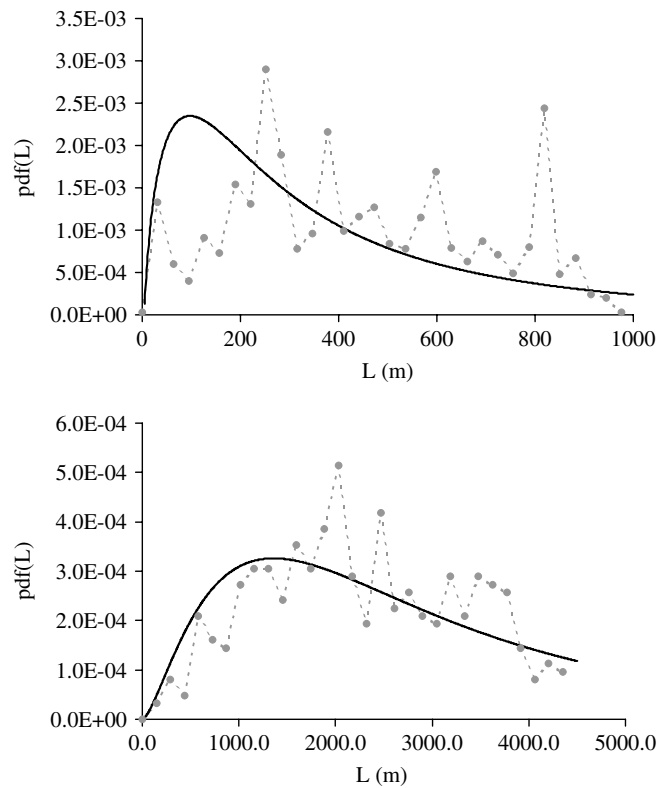


Figure 5. Comparison between the experimental probability density functions of the hydraulic pathways (experimental Width functions) of the drainage basins of Bunder (top, dashed line) and Saint-Michel (bottom, dashed line) and the corresponding theoretical probability density functions (Equation (7)). Simulated parameters are given in Table I

is necessary, since the geomorphological parameters of the transfer function are directly derived from the experimental basins. Here is the major asset of such a function, which is based on general laws on symmetry, and repeats the hydraulic paths distribution (Width function) of the river basin, the geomorphological features of the latter being known (Strahler order and average lengths of hydraulic paths within the different orders).

Moreover, it can be noted that the combination of the symmetry hypotheses with fractal geometry (see model development in appendix), makes it possible to skip scale problems. In fact, although the Saint-Michel river basin has a surface area which is more than twenty times as big as that of Bunder, this scale aspect does not necessarily limit the use of the model.

The AGIUH model

Equation (2) shows the relation between the GIUH, rainfall and the hydrograph. The function $T(t)$ corresponds to the distribution of rainfall transfer times over the whole river basin. And yet, the analytical geomorphological transfer function (Equation (7)) specified in the present article is a theoretical Width function; consequently, it determines the lengths distribution covered by rain throughout the whole river basin. It is thus possible to shift from function $\text{pdf}(L)$ to function $T(t)$, supposing (Beven and Wood, 1993) an average runoff speed \bar{v} in the stream network and \bar{v}_h in the hillslopes. Then the geomorphological transfer

function (Equation (7)) becomes an AGIUH that reads

$$T(t) = \text{pdf}\left(\frac{L}{\bar{v}}\right) * \text{pdf}\left(\frac{l_0}{\bar{v}_h}\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\bar{v})^n \prod_{i=1}^n \bar{l}_i}} \frac{t^{(n/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\bar{v}t/2\bar{l}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_n(k) \left(\frac{n-1}{2}\right)_k}{k! \left(\frac{n}{2}\right)_k} \left[\frac{\bar{v}t}{2(\bar{l}_n - \bar{l}_{n-1})}\right]^k * \text{pdf}\left(\frac{l_0}{\bar{v}_h}\right) \quad (9)$$

with $b_n(k)$ and $(x)_k$ given in Equation (7).

The aim of this paper is not to discuss the rainfall-runoff modelling. However, it seems important to describe an application of such an AGIUH.

Data watershed

To keep as close as possible to the theory of the unit hydrograph, the smaller river basin (Bunder) is chosen in order to fulfil the hypothesis of rainfall homogeneity. The rainfall-runoff data used (Kartiwa, 2004) correspond to two short events. The gross rainfall data are assessed with a tipping-bucket rain-gauge, allowing measurements with an accuracy to within 0.2 mm. Measurements are recorded every 6 min. Water depths at the river outlet are measured with an ultrasound sensor, which gives the distance between the sensor and the depth of runoff. The transformation of water depth into runoff was carried out with a rating curve that had been previously established.

The region is situated in an intertropical zone and has an equatorial type of climate under the influence of a monsoon. It is characterized by an alternation of a rainy season lasting 6 months on average (from November to April) and a dry season starting from May until October. Average annual rainfall is between 1500 and 3000 mm.

Production function

In order to determine the net rainfall that transforms gross rainfall into rainfall runoff, it is necessary to assess the runoff deficit. This runoff deficit may be analysed more precisely by studying the infiltration of water into the soil. Several methods are available to assess the infiltration rate of water: Green and Ampt (1911), Horton (1933), Philip (1957) or Holtan (1961). We have chosen Horton's law because, in our present state of knowledge, we believe it is the most appropriate method to explain the hydraulic functioning of our specific case, i.e. the Indonesian drainage basin (Kartiwa, 2004).

This law makes it possible to express the instant capacity for infiltration according to time, in the case of saturating rainfall, in the form of (Horton, 1933)

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt} \quad (10)$$

where $f(t)$ (mm min^{-1}) is the infiltration capacity at time t (min), f_0 (mm min^{-1}) is the initial infiltration capacity, f_c (mm min^{-1}) is the final infiltration capacity, and k (min^{-1}) is a constant. The value of the mass infiltration F is then worked out in the case of saturating rainfall:

$$F(t) = f_c t + \frac{f_0 - f_c}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (11)$$

To make the most of Horton's law for modelling, it is necessary to start from the equation linking f and F to be able to express (accurately enough) at any time the instant capacity for infiltration according to the amount of water already infiltrated into the ground, whether rainfall is saturating or not:

$$f(t) = f_0 - k(F(t) - f_c t) \quad (12)$$

Net rainfall (RE, rainfall excess) is then worked out using

$$\text{RE}(t) = R(t) - [f_0 - k(F(t) - f_c t)] \quad (13)$$

The prevailing types of soils are Mollisols of the haplustolls type on the one hand and haplustolls and Inceptisols of the utropets and ustropets type on the other hand. Land use is mainly gardens (37.8%), agroforestry (30%), and rice fields/groundnut cultivation (24%); 8.2% of the basin's surface are residential areas. The infiltration rate of water has been measured using the submersion method (double-ring infiltrometer; Hills, 1970). The measuring points are chosen for each type of land use. After setting the measured infiltration with the equation of Horton's law, the three parameters f_0 , f_c and k of Horton's law are determined (Table II).

Model parameters

The hydraulic pathway averages within the various orders are $\bar{l}_1 = 39$ m, $\bar{l}_2 = 68$ m and $\bar{l}_3 = 336$ m, which represents an average of $\bar{L} = 443$ m for the whole river network.

The theoretical probability density function of the hillslope hydraulic pathways $\text{pdf}(l_0) = \Gamma(l_0, \alpha_h, \beta_h)$ is adjusted to experimental data (Figure 2). The shape parameter α_h is 1.6 and matches the observations of van der Tak and Bras (1990).

The average stream flow velocity in the river network has been determined (Kartiwa, 2004) in the field with a pygmy current meter. The value of the hillslope velocity is calculated using Manning's semi-empirical equation (Chow, 1959):

$$\bar{v}_h = \frac{D^{2/3} S^{1/2}}{n_m} \quad (14)$$

where D is the average depth of runoff on the hillslope and S is the average slope. The experimental values of the parameters related to slope appear in Table II. Concerning the average depth of water, the value of parameter D is very hard to work out. Consequently, we have fixed a value for D making the value of \bar{v}_h consistent with the observed runoff rates on the basin slopes studied. The Manning parameter $n_m = 0.075$ ('heavy brush'). These values lead to $\bar{v}_h = 0.17$ m s⁻¹. The field method provides results in the order of 1 m s⁻¹ and 0.9 m s⁻¹ respectively. For the simulations (Figure 6), we have set an average velocity $\bar{v} = 0.95$ m s⁻¹ for the stream network.

For each of the two rainfall-runoff events in the Bunder river basin, the net rainfall determined by the production function is convoluted with the AGIUH model following Equation (2), in order to simulate a

Table II. Values of the Horton parameters on the Bunder watershed

Land use	Area (%)	f_0 (mm min ⁻¹)	f_c (mm min ⁻¹)	k (min ⁻¹)
Garden	37.8	1.149	0.106	0.244
Agroforestry	30.0	1.335	0.107	0.253
Rice/arachid	24.0	1.278	0.144	0.136
Settlement	8.2	0.490	0.143	0.068
Mean value	—	1.181	0.118	0.206

Table III. Values of the simulation parameters corresponding to the model presented. The model has four common parameters: n , the Strahler order of the drainage basin; \bar{v} , the average rate of flow in the stream network; \bar{v}_h , the average runoff rate on the slopes; \bar{l}_0 , the average hydraulic lengths on the slopes

Model parameter	n	\bar{l}_0 (m)	\bar{v} (m s ⁻¹)	\bar{v}_h (m s ⁻¹)	\bar{l}_1 (m)	\bar{l}_2 (m)	\bar{l}_3 (m)
Value	3	57	0.95	0.17	39	68	336

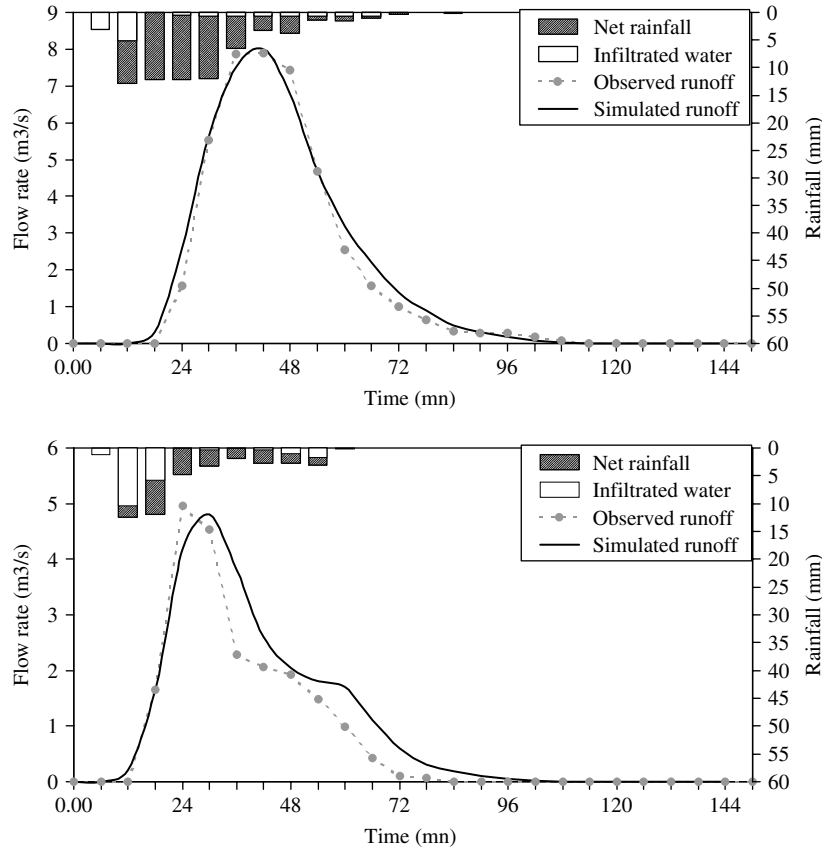


Figure 6. Rainfall-runoff simulation on the Bunder river basin. Observed rainfall-runoff data for the event of 14 November 2001 at Bunder. Infiltration is calculated by an original method from Kartiwa (2004). Simulations are carried out using the AGIUH (Equation (9)) convoluted within net rainfall according to Equation (2). Model parameters are given in Tables I, II and III and the average water velocity on the whole river basin is $\bar{v} = 0.95 \text{ m s}^{-1}$

hydrograph. This simulated hydrograph is then compared with the real hydrograph (Figure 6). The simulation quality is assessed thanks to the Nash and Sutcliffe (1970) coefficient:

$$F = 1 - \frac{\sum (Q_{\text{exp}} - Q_{\text{sim}})^2}{\sum (Q_{\text{exp}} - \overline{Q_{\text{exp}}})^2} \quad (15)$$

where Q_{exp} ($\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$) is the actual flow rate, Q_{sim} ($\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$) is the simulated flow rate and $\overline{Q_{\text{exp}}}$ ($\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$) is the average value of the actual flow rate.

A Nash–Sutcliffe coefficient higher than 0.8 means a good simulation that is close to the stream measurements; this is the case of our simulations, with coefficient values of 0.97 and 0.98.

CONCLUSION AND PROSPECTS

We have described an analytical geomorphological transfer function representing the theoretical distribution of hydraulic lengths in a river basin. This model is based on the assumption that the reduced lengths distributions l_k/R_L in order k (Strahler order) are similar and represented by a Gamma law with $(1/2, 1/2\bar{l}_k)$ parameters.

The analytical geomorphological transfer function results from the convolution of these n Gamma laws (Equations (6) and (7)), n being the total Strahler order in the river basin. This theoretical result is an analytical function depending on $n + 1$ geomorphological parameters, which are easily available by simply reading a map or analysing digital data (e.g. digital elevation model). These parameters are the Strahler order in the stream network n and the average lengths $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n$ from the drains to the different network orders.

After explaining the approach to obtain this analytical function (Equation (7)), we have tested our theoretical model in two very different river basins, as far as their morphological nature and scale were concerned. The results reveal that this theoretical function, equivalent to a Width function by definition, highlights the real structure of both experimental river basins, without any calibration being implemented. Such function makes it possible to give a fairly accurate description of the morphological structure of the stream network in the river basin.

Then, we presented an applied example of this analytical geomorphological transfer function for the rainfall-runoff modelling. In fact, by assuming that flow velocity is homogeneous through the stream network, it is possible to convert this analytical geomorphological transfer function into an AGIUH (Equation (9)), and thus to model the conversion of rainfall into runoff in a river basin.

The major conclusions that can be drawn are as follows:

- We have described the development of a new AGIUH model, whose geomorphological parameters can be easily and rapidly determined.
- The transfer function, based on the fractal features of stream networks, can be used at multiple scales. This makes it possible to validate the model on river basins having quite different scales.
- The hypotheses on symmetry (Duchesne *et al.*, 1997), which constitute the foundations of the model, make it universal and versatile. In this particular case, the model provides a description of the geomorphometric structure of stream networks, but it may be used for branched structures in general (Duchesne *et al.*, 2002; Fleurant *et al.*, 2004).
- Since the analytical model of the transfer function is parameterized with geomorphological variables derived from the real river basin, the corresponding AGIUH makes it possible to carry out rainfall-runoff simulations through a simple convolution with rainfall and with no calibration. Consequently, the model proves to be a useful tool for anticipating floods and studying the resulting hydrological response even in ungauged river basins.

These findings pave the way for additional validation work of the model, at various scales and with regard to even more varied hydrological applications. Actually, the relation that exists between the river basin's geomorphology and the rainfall-runoff response is a significant issue for the understanding of hydro-geomorphological processes (Poole *et al.*, 2002; Yair and Raz-Yassif, 2004).

ACKNOWLEDGEMENTS

The review of Anne Bouillon, Keith Beven and two referees have helped to improve and to clarify this manuscript.

REFERENCES

- Beven K, Wood E. 1993. Channel network hydrology. In *Flow Routing and the Hydrological Response of Channel Networks*, Beven K, Kirkby M (eds). Wiley.
- Chow V. 1959. *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill: New York.
- Chow V, Maidment D, Mays L. 1988. *Applied Hydrology*. McGraw-Hill: New York.
- Cudennec C. 2000. *Description mathématique de l'organisation du réseau hydrographique et modélisation hydrologique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Agronomie de Rennes.
- Cudennec C, Fouad Y, Sumarjo Gatot I, Duchesne J. 2004. A geomorphological explanation of the unit hydrograph concept. *Hydrological Processes* **18**: 603–621.

- Dooge J. 1959. A general theory of the unit hydrograph. *Journal of Geophysical Research* **64**(2): 241–256.
- Duchesne J, Cudennec C, Corbierre V. 1997. Relevance of the H2U model to predict the discharge of a catchment. *Water Science and Technology* **36**: 169–175.
- Duchesne J, Raimbault P, Fleurant C. 2002. Towards a universal law of tree morphometry by combining fractal geometry and statistical physics. In *Proceeding: Emergent Nature, Patterns, Growth and Scaling in the Sciences*; 93–102.
- Feder J. 1988. *Fractals*. Plenum Press.
- Feller W. 1971. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley.
- Fleurant C, Boulestreau P. 2005. Comment on 'Cudennec, Fouad, Sumarjo Gatot, Duchesne, A geomorphological explanation of the unit hydrograph concept. *Hydrological Processes*, **18** (2004) 603–621'. *Hydrological Processes* **19**: 541–543.
- Fleurant C, Duchesne J, Raimbault P. 2004. An allometric model for trees. *Journal of Theoretical Biology* **227**: 137–147.
- Green WH, Ampt GA. 1911. Studies on soils physics: 1, flow of air and water through soils. *Journal of Agricultural Science* **4**: 1–24.
- Gupta V, Waymire E. 1983. On the formulation of an analytical approach to hydrologic response and similarity at the basin scale. *Journal of Hydrology* **65**: 95–123.
- Gupta V, Waymire E, Wang C. 1980. A representation of an instantaneous unit hydrograph from geomorphology. *Water Resources Research* **16**(5): 855–862.
- Hills RC. 1970. *The Determination of the Infiltration Capacity on Field Soils using the Cylinder Infiltrometer*. British Geomorphological Research Group, Technical Bulletin No. 3. Geo Abstracts.
- Holtan HN. 1961. *A Concept for Infiltration Estimates in Watershed Engineering*. Agricultural Research Service Bulletin 51. USDA: Washington, DC.
- Horton RE. 1933. The role of infiltration in the hydrologic cycle. *Eos, Transactions of the AGU* **14**: 446–460.
- Horton R. 1945. Erosional development of streams and their drainage basins; hydrological approach to quantitative morphology. *Bulletin of the Geological Society of America* **56**: 275–370.
- Jin C. 1992. A deterministic gamma-type geomorphologic instantaneous unit hydrograph based on path types. *Water Resources Research* **28**(2): 479–486.
- Kartiwa B. 2004. *Modélisation du fonctionnement hydrologique des bassins versants. Application sur des bassins versants de Java et Sumatra (Indonésie)*. PhD thesis, Institut National d'Horticulture.
- Kirchner J, Feng X, Neal C. 2001. Catchment-scale advection and dispersion as a mechanism for fractal scaling in stream tracer concentrations. *Journal of Hydrology* **254**: 82–101.
- Kirshen D, Bras R. 1983. The linear channel and its effects on the geomorphological IUH. *Journal of Hydrology* **65**: 175–208.
- LaBarbera P, Rosso R. 1987. Fractal geometry of river networks. *Eos, Transactions of the AGU* **68**: 12–76.
- LaBarbera P, Rosso R. 1989. On the fractal dimension of stream networks. *Water Resources Research* **25**(4): 735–741.
- LaBarbera P, Rosso R. 1990. On the fractal dimension of stream networks. *Water Resources Research* **26**: 2245–2248.
- Lienhard J. 1964. A statistical mechanical prediction of the dimensionless UH. *Journal of Geophysical Research* **69**: 5231–5238.
- Mandelbrot B. 1988. *Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company: NY.
- Mathai A. 1982. Storage capacity of a dam with gamma type inputs. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **34**: 591–597.
- Moschopoulos P. 1985. The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **37**: 541–544.
- Nash J. 1957. The form of the instantaneous unit hydrograph. *International Association of Science and Hydrology* **45**(3): 114–121.
- Nash J. 1959. Synthetic determination of unit hydrograph parameters. *Journal of Geophysical Research* **64**(1): 112–114.
- Nash J. 1960. A unit hydrograph study, with particular reference to British catchments. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* **17**: 249–282.
- Nash J, Sutcliffe J. 1970. River flow forecasting through conceptual models: 1. Discussion and principles. *Journal of Hydrology* **10**: 282–290.
- Philip J. 1957. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil Science* **83**: 345–357.
- Poole G, Stanford JA, Frissell CA, Running SW. 2002. Three-dimensional mapping of geomorphic controls on flood-plain hydrology and connectivity from aerial photos. *Geomorphology* **48**(4): 329–347.
- Rodriguez-Iturbe I, Rinaldo A. 1997. *Fractal River Basins*. Cambridge University Press.
- Rodriguez-Iturbe I, Valdés J. 1979. The geomorphologic structure of hydrologic response. *Water Resources Research* **15**(6): 1409–1420.
- Rosso R. 1984. Nash model relation to Horton order ratios. *Water Resources Research* **20**: 914–920.
- Rosso R, Bacchi B, LaBarbera P. 1991. Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks. *Water Resources Research* **27**(3): 381–387.
- Schumm S. 1956. Evolution of drainage system and slopes in badlands at Peart Amboy. *Bulletin of the Geological Society of America* **87**: 597–646.
- Sherman L. 1932. Streamflow from rainfall by unit-graph method. *Engineering News-Record* 501–505.
- Shreve R. 1969. Stream lengths and basin areas in topologically random channel networks. *Journal of Geology* **77**: 397–414.
- Sim C. 1992. Point processes with correlated gamma interarrival times. *Statistics and Probability Letters* **15**: 135–141.
- Strahler A. 1952. Hypsometric analysis of erosional topography. *Geol. Soc. Am. Bull.*, **63**: 1117–1142.
- Strahler A. 1957. Quantitative analysis of watershed geomorphology. *Transactions of the AGU* **38**: 913–920.
- Strahler A. 1964. Quantitative geomorphology of drainage and channel networks. In Van.Te.Chow (ed.). *Handbook of Applied Hydrology*. McGraw Hill Book Company: NY: 39–76.
- Tarboton D, Bras R, Rodriguez-Iturbe I. 1990. Comment on 'On the fractal dimension of stream networks' by P. LaBarbera and R. Rosso. *Water Resources Research* **26**: 2243–2244.
- Van der Tak L, Bras R. 1990. Incorporating hillslope effects into the geomorphologic instantaneous unit hydrograph. *Water Resources Research* **26**(10): 2393–2400.
- Yair A, Raz-Yassif N. 2004. Hydrological processes in a small arid catchment: scale effects of rainfall and slope length. *Geomorphology* **61**(1–2): 155–169.

APPENDIX A

Detailed calculations concerning the present model

The determination of both $\text{pdf}(l_k)$ and $\text{pdf}(L)$ needs some mathematical developments, which are presented in this section.

The distribution model of the l_k drains' hydraulic lengths (Equation (5)) is based on two hypotheses on symmetry, which are combined with the fractal nature of the stream networks (Duchesne *et al.*, 1997; Cudennec, 2000; Cudennec *et al.*, 2004):

- The independence hypothesis of the distribution function of components reduced by the morphometric length l_k/R_L . According to this hypothesis, the distribution function of a component l_k only depends on l_k , not on any of the other components l_j , k being different from j .
- The isotropy hypothesis of distributions. One considers that the distribution law of l_k is isotropic. Because of the self-similarity nature of tree structure and Horton's law, the k -order component is larger, on average, than the $(k-1)$ -order component, because $\bar{l}_k = R_L \bar{l}_{k-1}$. The isotropy hypothesis should then be applied, with the reduced components of branch lengths l_k/R_L^{k-1} as coordinates of the symbolic space.

Such hypotheses lead to the distribution the l_k drains' hydraulic lengths (Duchesne *et al.*, 1997; Cudennec, 2000; Cudennec *et al.*, 2004):

$$\text{pdf}(l_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{R_L^{k-1}}} \frac{1}{\sqrt{l_k}} e^{-\lambda l_k / R_L^{k-1}} \quad (\text{A.1})$$

The constant λ may be explained by expressing the l_k components average, i.e. \bar{l}_k , giving successively:

$$\begin{aligned} \bar{l}_k &= \int_0^{+\infty} l_k \text{pdf}(l_k) dl_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{R_L^{k-1}}} \int_0^{+\infty} \frac{l_k}{\sqrt{l_k}} e^{-\lambda l_k / R_L^{k-1}} dl_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{R_L^{k-1}}} \int_0^{+\infty} l_k^{1/2} e^{-\lambda l_k / R_L^{k-1}} dl_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{R_L^{k-1}}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{R_L^{k-1}}{\lambda}\right)^{3/2} \\ &= \frac{R_L^{k-1}}{2\lambda} \end{aligned}$$

After replacing this result in Equation (A.1) we have

$$\text{pdf}(l_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{l}_k}} \frac{1}{\sqrt{l_k}} e^{-l_k / 2\bar{l}_k} \quad (\text{A.2})$$

A Gamma distribution with $\alpha = 1/2$ and $\beta = 1/2\bar{l}_k$ can be recognized here, i.e. $\Gamma(l_k, 1/2, 1/2\bar{l}_k)$.

The second step consists of determining the probability density distribution for L , knowing that $L = \sum_{k=1}^n l_k$. The usual way to calculate the distribution $\text{pdf}(L)$ is to use the following property (Feller, 1971): if we have n independent random variables l_k , $k = 1, 2, \dots, n$, of probability density function $\text{pdf}(l_k)$, then the random variable L defined as $L = \sum_{k=1}^n l_k$ has a probability density function $\text{pdf}(L)$ such as

$$\text{pdf}(L) = \text{pdf}(l_1) * \text{pdf}(l_2) * \dots * \text{pdf}(l_n) \quad (\text{A.3})$$

where $*$ is the convolution integral. To clarify this complex mathematical process, consider the simplest example of what a convolution integral with only two functions is. If $f(x)$ and $g(x)$ are two functions:

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)dy$$

Convolution integral of two Gamma distributions

Let us work out the convolution integral of two Gamma distributions with β parameters that are different in pairs; we then try to calculate $\Gamma(\alpha, \beta_1) * \Gamma(\alpha, \beta_2)$. To do this calculation, we will use the characteristic Gamma distribution functions. In fact, to convolute both Gamma distributions means that we are looking for the probability density function pdf(L) for L such as $L = l_1 + l_2$, where l_1 and l_2 have a probability density function represented by the functions $\Gamma(\alpha, \beta_1)$ and $\Gamma(\alpha, \beta_2)$. Moreover, the characteristic functions $\varphi_{l_k}^*$ have the following property:

$$\varphi_{l_1+l_2}^* = \varphi_{l_1}^* \varphi_{l_2}^* \tag{A.4}$$

The characteristic function of a random variable l_k variables here is defined as a mathematical expectation of the exponential function of this random variable. In the present case, therefore, we have

$$\begin{aligned} \varphi_{l_k}^*(s) &= E [e^{-sl_k}] \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sl_k} \text{pdf}(l_k) dl_k \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta_k^\alpha} \int_0^{+\infty} l_k^{\alpha-1} e^{-l_k[s+(1/\beta_k)]} dl_k \\ &= \frac{1}{(1 + s\beta_k)^\alpha} \end{aligned}$$

Here one has

$$\varphi_{l_1+l_2}^*(s) = \frac{1}{[(1 + s\beta_1)(1 + s\beta_2)]^\alpha}$$

Concerning our case, $\alpha = 1/2$, then function pdf(L) such as $L = l_1 + l_2$ can be worked out thanks to Laplace transform tables:

$$\text{pdf}(L) = \frac{1}{\sqrt{\beta_1\beta_2}} \exp \left[-\frac{\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)L}{2} \right] I_0 \left[\frac{\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right)L}{2} \right] \tag{A.5}$$

where

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

is the modified Bessel function of the first kind and zero order. Therefore, the result of the probability density function of morphometric lengths L is

$$\text{pdf}(L) = \frac{1}{2\sqrt{l_1 l_2}} \exp \left[-\frac{\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)L}{4} \right] I_0 \left[\frac{\left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1}\right)L}{4} \right] \tag{A.6}$$

Convolution integral of n Gamma distributions

The result of the convolution integral for n Gamma distributions is obtained by working out the generalized characteristic functions (Mathai, 1982; Moschopoulos, 1985; Sim, 1992). Let l_1, l_2, \dots, l_n , be n independent random distributed according to a Gamma distribution of the following type:

$$\Gamma(l, \alpha_i, \beta_i) = \frac{\beta_i^{\alpha_i} l^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\beta_i l} \tag{A.7}$$

Then the probability density function for $L = \sum_{i=1}^n l_i$ is

$$\text{pdf}(L) = \left(\prod_{i=1}^n \beta_i^{\alpha_i} \right) \frac{L^{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i-1}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)} e^{-\beta_n L} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_n(k) \binom{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i}{k}}{k! \binom{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{k}} [(\beta_n - \beta_{n-1})L]^k \tag{A.8}$$

where

$$b_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2 \\ \sum_{j=0}^k \frac{b_{i-1}(j) \binom{i-2}{\sum_{p=1}^j \alpha_p} (-k)_j}{j! \binom{i-1}{\sum_{p=1}^j \alpha_p}} C_i^j & \text{for } i = 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

with

$$C_i = \frac{\beta_{i-2} - \beta_{i-1}}{\beta_i - \beta_{i-1}} \tag{A.9}$$

and

$$(x)_k = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) \tag{A.10}$$

By returning to our initial notations, the probability density function of morphometric lengths is defined by

$$\text{pdf}(L) = \frac{1}{\sqrt{2^n \prod_{i=1}^n \bar{l}_i}} \frac{L^{(n/2)+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-L/2\bar{l}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_n(k) \binom{\frac{n-1}{2}}{k}}{k! \binom{\frac{n}{2}}{k}} \left[\frac{L}{2(\bar{l}_n - \bar{l}_{n-1})} \right]^k \tag{A.11}$$

with

$$b_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2 \\ \sum_{j=0}^k \frac{b_{i-1}(j) \binom{i-2}{\frac{i-2}{2}} (-k)_j}{j! \binom{i-1}{\frac{i-1}{2}}} \left(\frac{\bar{l}_{i-1} - \bar{l}_{i-2} \bar{l}_{i-1}}{\bar{l}_{i-1} - \bar{l}_i \bar{l}_{i-2}} \right)^j & \text{for } i = 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

Fleurant C., Tucker G.E. and H.A. Viles, 2008, Modèle d'évolution de paysages, application aux karsts en cockpit de Jamaïque, *Karstologia*, 49, p. 33-42.

Cyril FLEURANT¹,
Gregory TUCKER²
et Heather VILES³

(1) Département Paysage,
Institut national d'horticulture,
2, rue Le Nôtre,
49045 Angers cedex, France.
cyril.fleurant@inh.fr

(2) Department of Geological
Sciences, Cooperative Institute
for Research in Environmental
Sciences, University of Colorado,
Boulder, USA

(3) School of Geography and
the Environment, University
of Oxford, Oxford, UK

Modèle d'évolution de paysages, application aux karsts en cockpit de Jamaïque

RÉSUMÉ : Cet article présente les résultats d'un modèle géomorphologique d'évolution des karsts en cockpit (Jamaïque). Dans un premier temps, nous expliquons comment les processus de dissolution des carbonates ont été implémentés dans le logiciel d'évolution géomorphologique CHILD. Puis nous donnons les détails de notre modèle d'érosion, basé sur les principes de la théorie de l'épikarst. Le modèle prend en compte l'anisotropie spatio-temporelle conformément à ce qui est observé empiriquement ou encore décrit par des scénarii de l'évolution des karsts en cockpit. Ce modèle nécessite d'abord d'introduire un réseau de fractures afin de prendre en compte les écoulements de sub-surface. Ensuite, la dissolution et donc l'ouverture des fractures sont calculées ce qui participe à un processus de feed-back positif entre dissolution et écoulement. La relation entre la dissolution des carbonates fracturés et l'évolution de la topographie est introduite

par le biais d'une relation empirique illustrant les processus de l'approche de l'épikarst. Les simulations des paysages par ce modèle anisotrope donnent des résultats très proches de la réalité et confortent à la fois l'importance de la prise en compte de l'anisotropie spatio-temporelle de la dissolution et surtout la validité de l'approche empirique de l'épikarst pour décrire la genèse des karsts en cockpit.
MOTS-CLÉS : érosion, dissolution, karst, fracture, paysage, modélisation.

ABSTRACT: LANDSCAPE EVOLUTION MODEL, EXAMPLE OF COCKPIT KARST TERRAINS, JAMAICA. A model of cockpit karst landscape evolution is presented. After explaining implementation of dissolution processes of limestone in the landscape evolution model CHILD, we develop a model of limestone denudation based on epikarst theory processes. The model takes into account an anisotropic dissolution in space and time according to what is observed in reality or

described by scenarios of cockpit karst landscape evolution. This model requires a fracture's network to take into account subsurface flow. Then, dissolution and thus fractures widening are computed and show a positive feedback between dissolution and flow. The relation between subcutaneous dissolution of fractures and denudation of the topography is introduced by means of an empirical equation associated with epikarst processes: the denudation is taken to be proportional to the dissolution in the subcutaneous zone. Simulated cockpit karst terrains are compared with real landscapes by means of morphometric criteria. Results of the model are very close to reality which hence confirms the importance of anisotropic dissolution processes and above all could be a numerical validation of the epikarst processes to describe cockpit karst genesis.

KEY WORDS: erosion, dissolution, karst, fracture, landscape, modelling.

Introduction

L'évolution des paysages résulte de forces : la tectonique, l'érosion et la sédimentation qui, elles-mêmes, sont le produit de processus complexes dépendants des mouvements lithosphériques, des conditions climatiques ou encore des caractéristiques des roches. La compréhension de l'évolution des paysages demande donc des outils numériques capables de tenir compte de la complexité de ces processus non-linéaires et interagissant qui façonnent les paysages. Un effort tout particulier a été fourni ces dix dernières années pour

mettre en place de tels modèles, capables de simuler l'évolution des paysages sur de grandes échelles de temps. Les principaux modèles généralement utilisés sont passés en revue dans Coulthard [2001]. Il s'agit de SIBERIA [Willgoose *et al.*, 1991], GOLEM [Tucker and Slingerland, 1994], CASCADE [Braun and Sambridge, 1997], CAESAR [Coulthard *et al.*, 1998] et CHILD [Tucker *et al.*, 1999].

Il existe une grande variété de paysages karstiques dont les formes sont contrôlées par de nombreuses variables géologiques, chimiques ou

encore climatiques [White, 1984]. Les variations de chacune de ces composantes pourront conduire à un paysage différent : un karst à dolines, un fluvio-karst ou encore un karst à tourelles.

Les karsts en cockpits (figure 1) sont décrits comme irréguliers et formés de dépressions en forme d'étoile, ils sont propres aux régions tropicales [Sweeting, 1972]. Grund [1914] avait déjà proposé une hypothèse quant à leur formation : les dépressions des cockpits seraient un état avancé des dolines, leur processus de formation serait donc similaire.



Figure 1 : Vue aérienne d'un karst en cockpit en Jamaïque. Cliché de Parris Lyew-Aye. An oblique aerial view of cockpit karst terrain in Jamaica.

On ne trouve des karsts en cockpit que dans les régions humides très fortement arrosées par des pluies. Seules des régions dont la quantité de pluie brute est supérieure à 1500 mm par an sont susceptibles de pouvoir développer ce type de karst [Verstappen, 1964; Sweeting, 1972]. Toutefois, la pluie ne suffit pas, il faut également une roche carbonatée très dure et compacte avec un réseau de fractures préexistant.

On qualifie les processus karstiques par la prédominance du transfert de masse en solution sur le transfert par d'autres processus [White, 1984]. Voilà pourquoi l'intégration des processus de dissolution des roches carbonatées est essentielle pour modéliser les phénomènes karstiques.

Cet article décrit la mise en équation, c'est-à-dire la modélisation, des processus complexes qui illustrent le fonctionnement de l'épikarst dans le cas très particulier des karsts en cockpit. Les processus souterrains jouent-ils un rôle dans le développement superficiel des karsts en cockpit ? Plusieurs auteurs [e.g. Williams, 1987; Pfeffer, 1997] apportent des réponses, il est vrai fondamentales, mais relativement descriptives, à cette problématique.

Les auteurs de cette note n'ont pas la prétention de donner l'ensemble des clés du développement des paysages de karst en cockpit, mais simplement d'apporter un éclairage quantitatif (i.e. par la modélisation

numérique) à cette problématique. L'objectif de cet article est donc de tester des hypothèses relatives à l'importance du rôle souterrain (i.e. de la zone épikarstique) des karsts en cockpit au regard de leur développement géomorphologique. De cette étude, les auteurs dégagent aussi les conditions hydrologiques et géochimiques qui permettent à des paysages karstiques de se développer en cockpit.

Dans un premier temps, nous présentons l'intégration de processus de dissolution chimique des roches carbonatées dans le modèle CHILD [Tucker *et al.*, 2001a, b]. Puis nous présenterons un modèle de dissolution anisotrope dans l'espace et le temps. Ce modèle sera testé à l'échelle d'un seul cockpit.

Les paysages simulés seront comparés aux cockpits réels par le biais de deux critères géométriques caractéristiques à ce type de paysage et récemment mis en évidence par Lyew-Ayee [2004] : il s'agit de la pente et du relief différentiel (différence entre la hauteur du sommet et la profondeur d'une dépression). Cette comparaison permettra à la fois de donner l'ordre de grandeur des différents paramètres du modèle de dissolution et également d'émettre des hypothèses de scénario sur la formation de ces cockpits.

I. Le modèle géomorphologique

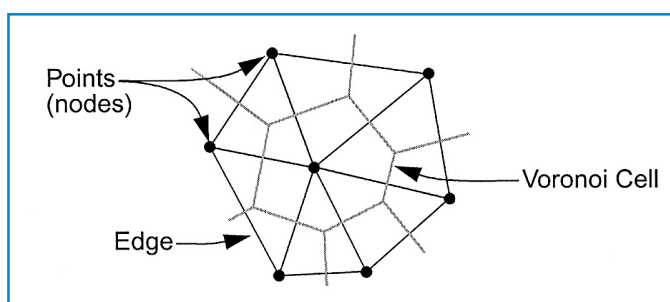
Le modèle CHILD [Channel-Hillslope Integrated Landscape Development] est un modèle numérique d'évolution des paysages [Tucker *et al.*, 2001a,b]. L'évolution de la topographie dans le temps est simulée par l'interaction et le feed-back entre les écoulements de surface, l'érosion de la roche et le transport des sédiments. CHILD est un support numérique capable de modéliser un grand nombre de processus liés à la géomorphologie d'un bassin versant, aussi nous ne présenterons ici qu'une petite partie de ses caractéristiques. Dans CHILD, l'évolution de la topographie en fonction du temps est la somme de plusieurs contributions :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} \Big|_{\text{diffusion}} + \frac{dz}{dt} \Big|_{\text{érosion}} + \frac{dz}{dt} \Big|_{\text{tectonique}} + \frac{dz}{dt} \Big|_{\text{dissolution}} \quad (1)$$

Ces différents termes sont résolus numériquement sur le cadre spatial particulier des polygones de Voronoï. Les trois premiers termes sont présents dans la quasi-totalité des modèles d'évolution des paysages. Le dernier terme, concernant la dissolution des roches, est l'apport original de ce travail.

Le cadre spatial de CHILD est composé d'une série de points aléatoirement distribués qui permettent une discrétisation fidèle de la surface topographique initiale (figure 2). Ces points, ou nœuds, sont reliés les uns aux

Figure 2: Illustration schématique de la spatialisation de CHILD [d'après Tucker *et al.*, 2001a]. Schematic illustration of the spatial framework in CHILD.



autres pour former un réseau de triangles irréguliers [Braun and Sambridge, 1997; Tucker *et al.*, 2001a]. Ce maillage est construit suivant les règles de Delaunay, qui offrent de nombreux avantages à la modélisation [Tucker *et al.*, 2001b]. Du point de vue numérique, cette triangulation permet de résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode des volumes finis [Versteeg and Malalasekera, 1995].

La discrétisation temporelle programmée dans le logiciel CHILD est originale et permet de tenir compte des grandes disparités de temps liées aux processus géomorphologiques : l'évolution de la topographie se fait à l'échelle du millier d'années alors que l'échelle de temps d'une pluie ne sera que de quelques minutes à quelques jours. La variabilité à l'échelle géologique est simulée par une méthode stochastique (loi de Poisson) qui donne la distribution de l'amplitude (\bar{P} en m/an) et de la fréquence ($\frac{\bar{T}_r}{\bar{T}_r + \bar{T}_b}$) des pluies [Eagleason, 1978]. La durée de la pluie est \bar{T}_r ans et la période entre deux pluies est \bar{T}_b ans. L'inverse de la fréquence, $\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_b}{\bar{T}_r}$, est appelé facteur de variabilité climatique et sera utilisé ultérieurement dans les simulations [Tucker and Bras, 2000].

Les écoulements se font des nœuds amont vers les nœuds aval (figure 3), en suivant une procédure simple. Une partie de l'eau totale (Q_{in} m³/s) qui entre dans le polygone de surface A_i m² associé au nœud i , s'infiltré (Q_{sub} m³/s). Cette quantité, $Q_{subcapacity}$ (m³/s), est déterminée par la capacité d'infiltration du sol et de la roche. Le reste de l'eau qui ne s'infiltré pas constitue le ruissellement de surface, Q_{sur} (m³/s).

Le transport des sédiments par des processus continus sur le versant est modélisé dans CHILD par l'équation classique de diffusion des versants [e.g. Braun and Sambridge, 1997] :

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{diffusion} = k_D \Delta^2 z \quad (2)$$

où k_D (m²/s) est le coefficient de diffusion du transport des sédiments et Δ^2 représente le Laplacien. Beaumont *et al.* [1992], explicitent k_D comme une

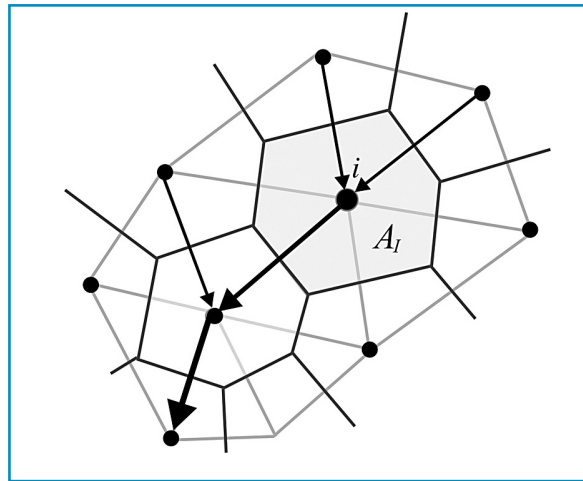


Figure 3: Illustration de la procédure des écoulements sur un maillage triangulaire de Delaunay.

Cette triangulation permet de définir des polygones de surface A_i (m²) qui sont les cellules élémentaires du calcul.

Illustration of steepest-descent flow routing in Delaunay TIN framework. TIN framework allows the definition of elementary cells A_i (m²) needed to compute processes.

fonction à la fois de la lithologie (k_D est faible pour des roches résistantes) et du climat (k_D est plus fort sous des climats plus "rudes"). Ce coefficient de diffusion des sédiments peut varier de 3×10^{-4} m²/s [Enzel *et al.*, 1996] à 3×10^{-2} m²/s [McKean *et al.*, 1993].

L'érosion mécanique et le dépôt sédimentaire sont modélisés par l'équation de continuité [Tucker *et al.*, 2001a] :

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{erosion} = - \left(\frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} \right) \quad (3)$$

où q_s est le volume transporté de sédiments.

II. L'érosion karstique

Le dioxyde de carbone (CO_2) présent dans l'atmosphère et produit par la végétation se retrouve sous forme dissoute dans l'eau de pluie et dans les sols. La forme dissoute du CO_2 , l'acide carbonique H_2CO_3 , est l'agent majeur de l'érosion des roches carbonatées.

L'évolution spatiale et temporelle des systèmes karstiques dépend de la cinétique de la dissolution des carbonates, et plus précisément de la calcite ($CaCO_3$). On distingue le système ouvert où les carbonates sont en contact avec les intempéries atmosphériques par opposition au système fermé, cas des fractures par exemple, qui sont très peu en contact avec l'extérieur. Dans le cas du système ouvert, la dissolution des roches carbonatées va alors dépendre de la hauteur d'eau en contact avec les carbonates et de la nature hydrodynamique du flux [Dreybrodt, 1985].

La vitesse de l'érosion karstique correspond principalement à la vitesse d'érosion des carbonates par dissolution. Plusieurs modèles ont été propo-

sés pour quantifier cette érosion [Corbel, 1959; Pulina, 1972; Ford, 1981]. Le modèle d'érosion maximum de White [1984], le plus complet et le plus utilisé, fait l'hypothèse que les eaux d'infiltration sont à l'équilibre avec les carbonates :

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{dissolution} = DR = - \frac{1000 m_{Ca} (\bar{P} - E)}{\rho_{CaCO_3}} [Ca^{2+}]_{eqopen} \quad (4)$$

où DR (m/s) est la vitesse de l'érosion superficielle, $\bar{P} - E$ (m/s) est la pluie effective, m_{Ca} (kg/mol) est la masse atomique de la calcite et ρ_{CaCO_3} (kg/m³) est la masse volumique de la calcite. La concentration du calcium à l'équilibre peut être déterminée analytiquement en fonction des constantes d'équilibre et de la pression du dioxyde de carbone [White, 1988] :

$$[Ca^{2+}]_{eqopen} = \left(\frac{K_I K_C K_H P_{CO_2 open}}{4 K_2 \gamma_{Ca} \gamma_{HCO_3}^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

Les valeurs de $[Ca^{2+}]_{eqopen}$ varient en fonction de la pression en CO_2 et de la température.

La relation (4) présente plusieurs intérêts : elle ne nécessite aucun calage et elle combine les trois variables climatiques que sont la température, la pression du dioxyde de carbone et les précipitations. Chacun de ces paramètres possède un degré d'influence différent sur cette érosion. En appliquant le modèle (4), on fait l'hypothèse que l'érosion chimique est uniforme sur l'ensemble du karst. Pour les karsts en cockpit, $DR \approx 1,3 \times 10^{-4}$ m/an.

La cinétique de dissolution de la calcite est également bien connue et sera notée F dans la suite de l'article [Buhmann and Dreybrodt, 1985].

III. Concepts du modèle

La karstification est un processus si complexe qu'il est très difficile d'établir les relations évidentes et quantifiables entre ses composantes : la dissolution de la calcite, les propriétés géologiques des carbonates ou encore les variables climatiques. Il existe une littérature abondante sur la description qualitative de ces processus [e.g. Sweeting, 1972; Williams, 1985, 1987], mais très peu sur les relations quantitatives.

Bien que la dissolution joue un rôle prépondérant dans le développement du karst, ce n'est pas le seul processus. De nombreux auteurs mettent en évidence la relation forte entre l'érosion chimique en surface et les processus de karstification sous-jacents sans toutefois en donner une expression qualitative.

La dissolution dans un réseau de fractures correspond à une érosion chimique de la roche, donc à sa disparition dans les profondeurs du réseau karstique. La disparition de cette quantité de matière entraîne logiquement avec elle l'abaissement de la surface topographique dont le sol vient combler les dépressions. Ceci nous amène donc à formuler une hypothèse sous-tendue par la théorie de l'épikarst : l'érosion superficielle est proportionnelle à la dissolution des fractures de la zone épikarstique.

La théorie de l'épikarst [e.g. Ford and Williams, 1989] apporte les bases descriptives de la formation de certains types de karst, comme les karsts en cockpit : sur une topographie caractérisée par une légère pente initiale et pourvue d'un réseau de fractures, les eaux météoriques s'infiltrent (figures 4a et 4b). Du fait de la rapide réduction de l'ouverture des fractures avec la profondeur, les eaux de la zone subcutanée sont ainsi perchées et s'écoulent des points hauts topographiques vers les points bas topographiques. Les points hauts locaux et les points bas de la "nappe" perchée correspondent globalement à ceux de la topographie sus-jacente. Ainsi l'écoulement des eaux se fait préférentiellement au niveau des fractures situées aux points bas de la topographie. La dissolution est donc plus importante au niveau des points bas de la topographie. Apparaît ainsi un feed-back positif entre l'écoulement dans les fractures et la dissolution. Ce feed-back positif est entretenu par l'apport

d'eau de subsurface au niveau des fractures situées aux points bas de la topographie. Or, cette quantité d'eau qui s'écoule dans les fractures n'augmente pas indéfiniment, le système n'étant alimenté que par les précipitations. Si ce feed-back est très important en début de simulation (i.e. les fractures s'ouvrent très rapidement), on verra sur la figure 13 qu'il diminue fortement avec le temps de simulation.

A. Géométrie du modèle et conditions initiales

Afin de vérifier cette hypothèse, nous mettons en place dans le modèle CHILD un réseau de fractures à géométrie simple. Initialement, un plateau calcaire est discrétisé en 4600 cellules de Voronoï (figure 5) et disséqué par des fractures planes verticales (figure 6). Les fractures ont une profondeur de 100 m [Williams, 1985] et une ouverture initiale $a_0 = 10^{-4}$ m [Gabrovsek and Dreybrodt, 2001]. Ce réseau de fractures est couvert d'un sol fin et permet d'affecter à chaque cellule de Voronoï une

conductivité hydraulique, c'est-à-dire une capacité d'infiltration à l'eau. Les conductivités hydrauliques permettent ainsi de quantifier la part des écoulements de surface et de sub-surface (figure 7). Si la conductivité hydraulique d'une cellule de Voronoï n'est pas suffisante pour que toute l'eau présente s'infiltrer (l'eau de pluie + celle venant de l'amont) alors la quantité d'eau restante s'écoule vers la cellule de Voronoï située en aval.

Sur l'ensemble du domaine d'étude sont disposées des fractures espacées de $s = 1$ m. La conductivité hydraulique obtenue est donc de l'ordre de 10^{-7} m/s, valeur caractéristique d'une faible karstification initiale [Singhal and Gupta, 1999].

De plus, nous considérerons que les dépressions sont disposées en étoile autour des sommets [e.g. Sweeting, 1972]. Ainsi les écoulements sont initialement dirigés, grâce à une pente de 1 %, des sommets vers les dépressions. La distance moyenne entre dépression et sommet est de 110 m [Lyew-Ayee, 2004].

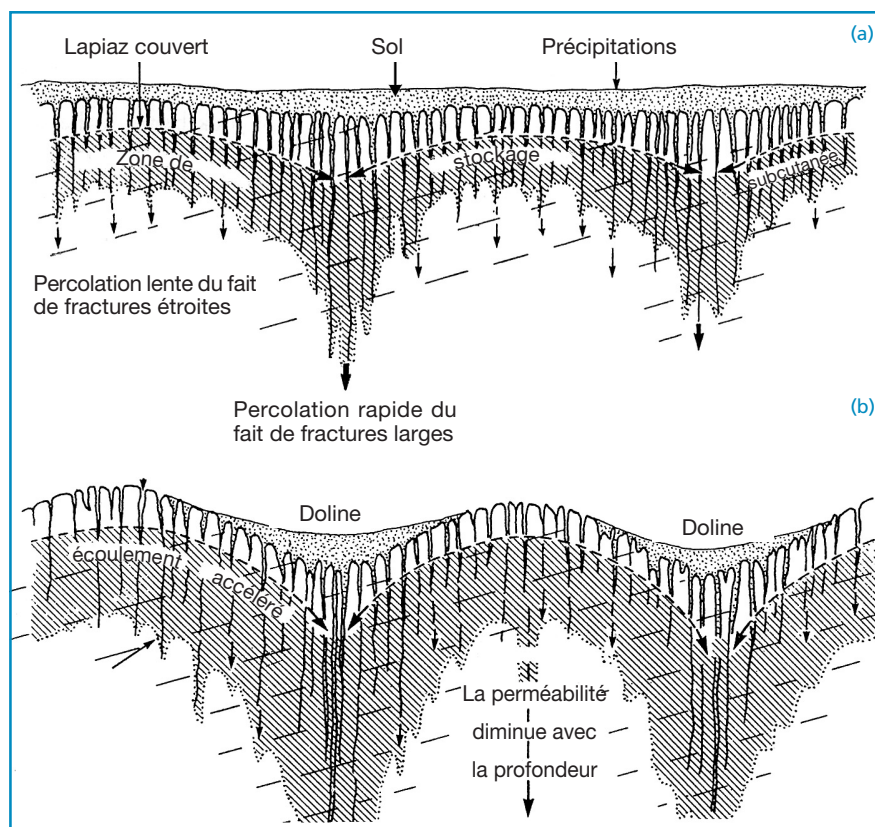


Figure 4: Illustration de la zone épikarstique de carbonates karstifiés [d'après Williams, 1985]. Les fractures permettent aux eaux de s'infiltrer (a) et localisent ainsi la dissolution des carbonates. Dissolution souterraine et évolution de la topographie sont alors fortement corrélées (b). Illustration of the subcutaneous zone in karstified rocks (after Williams, 1985). The interconnected fissures network provides solute pathways (a). Fissures are considerably widened by solution. Preferred flow paths develop at the base of the epikarstic zone. These are enhanced by solution and become increasingly dominant (b).

B. Etapes de calcul

Le détail des procédures de calcul des écoulements dans les fractures et de leur dissolution n'est pas présenté ici pour des raisons de place mais peut être demandé aux auteurs.

Pour synthétiser, la dissolution dans une fracture, l'élargissement de son ouverture qui en découle et l'érosion superficielle sont modélisés successivement par les étapes suivantes :

1. La conductivité hydraulique d'une fracture type et la conductivité hydraulique moyenne de la cellule de Voronoï correspondante sont calculées à partir de la géométrie initiale du système (ouverture et espacement des fractures) ;
2. Le débit disponible à l'infiltration sur une cellule de Voronoï est alors évalué. On calcule ainsi le débit qui peut circuler dans une fracture en fonction de sa conductivité hydraulique ;
3. Si le régime d'écoulement dans les fractures est laminaire, le débit est calculé par l'équation de Poiseuille ;
ou
- 3'. Si le régime hydraulique dans les fractures est turbulent, le débit est calculé par l'équation de Darcy-Weissbach ;
4. On calcule la valeur des différents paramètres liés à la dissolution des fractures ;
5. On obtient la nouvelle valeur de l'ouverture de la fracture (figure 8), en considérant que la dissolution dans la fracture est uniforme et donnée par le flux de sortie [Dreybrodt *et al.*, 1999] :

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_i = \frac{m_{Ca}}{\rho_{CaCO_3}} F(L) \quad (6)$$

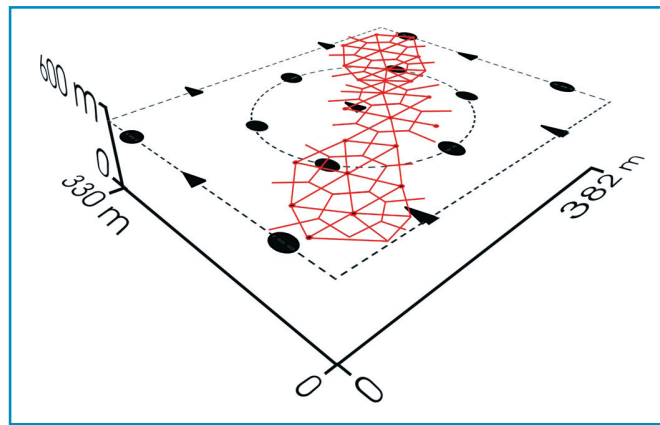
6. On calcule l'évolution de la topographie associée :

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_i = \alpha_i DR \quad (7)$$

où DR (m/s) est l'érosion maximale du modèle de White, 1984 définie par l'équation (4) et :

$$\alpha_i = \frac{\left. \frac{da}{dt} \right|_i}{\left. \frac{da}{dt} \right|_{max}} \quad (8)$$

$\left. \frac{da}{dt} \right|_{max}$ (m/s) est la vitesse d'ouverture maximale d'une fracture durant un pas de temps donné. L'évolution de la topographie (équation 7) est basée sur l'hypothèse que nous avons formulée précédemment et qui découle elle-même des processus décrits par la théorie de l'épikarst : il y a correspondance



locale entre évolution de la topographie et dissolution des fractures de la zone subcutanée. L'équation (8) montre que l'évolution de la topographie ne peut pas être supérieure à DR (m/s), puisque $0 \leq \alpha_i \leq 1$. De plus, α_i est un facteur directement lié aux processus de dissolution des fractures de la zone épikarstique (écoulement et dissolution). Il permet ainsi d'avoir une évolution de la topographie anisotrope dans l'espace et le temps.

7. On met à jour les valeurs des conductivités hydrauliques des fractures et des cellules de Voronoï à partir des nouvelles valeurs des ouvertures calculées à l'étape 6 ;
8. L'ensemble des processus du modèle ayant été exécutés pendant ce pas de temps, on reprend à l'étape 1 à partir de la géométrie nouvellement obtenue.

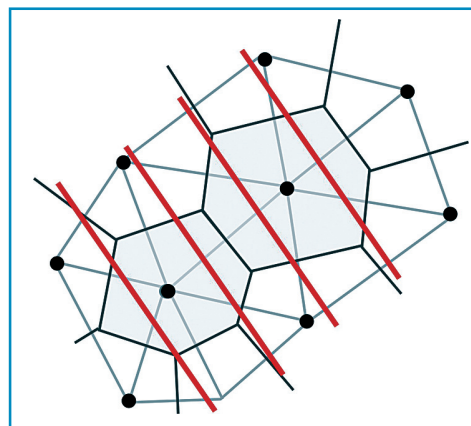


Figure 5: Le domaine d'étude est initialement discrétisé en 4600 cellules de Voronoï (en rouge) qui ont été volontairement grossies ici. Cette discrétisation permet d'avoir un maillage fin de 1 nœud pour 6 m d'arête. L'eau s'écoule initialement des sommets (triangles noirs) vers les dépressions (disques noirs). The simulated area is discretized into 4600 Voronoi cells (red lines) which provides a thin mesh: 1 node every 6 m. Water initially flows from summits (black triangles) to depressions (black circles).

Figure 6: le domaine d'étude est disséqué par des fractures planes et verticales. Chaque cellule de Voronoï est ainsi associée à une conductivité hydraulique, c'est-à-dire, à une quantité d'eau qui peut potentiellement s'infiltrer. Les fractures étant verticales et parallèles, il n'existe pas d'intersection entre elles. Ce modèle fracturé est donc une simplification de la réalité que l'on rencontre régulièrement dans la littérature [par exemple Bear *et al.*, 1993].

The study area is dissected by vertical smooth fractures. Each Voronoi cell is linked to a hydraulic conductivity. As fractures are vertical and smooth there is no intersection between them.

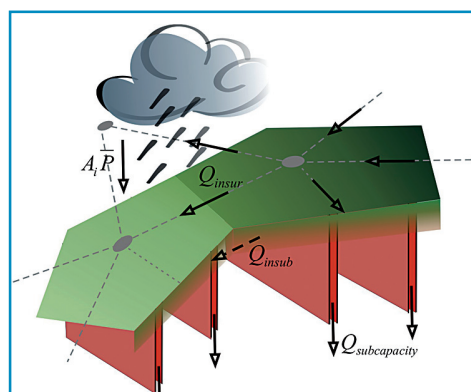


Figure 7: les écoulements de l'eau souterraine et de surface sur le domaine suivent une procédure simple contrôlée par les conductivités hydrauliques. Surface and sub-surface flows are computed according to a simple routing procedure controlled by hydraulic conductivities.

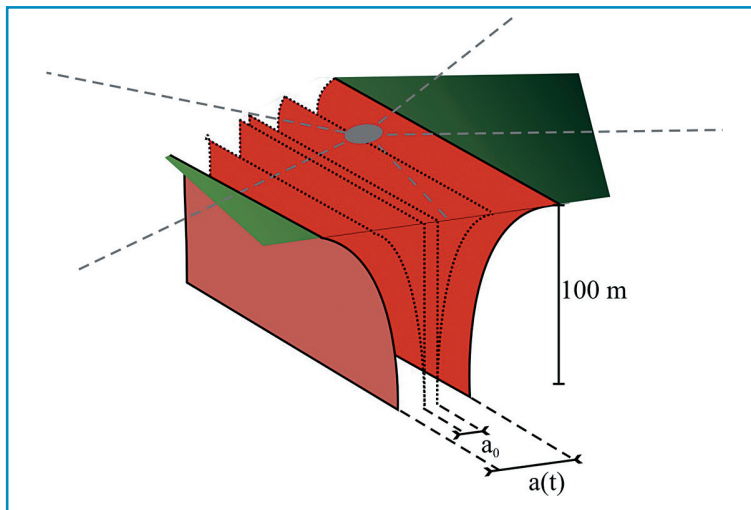
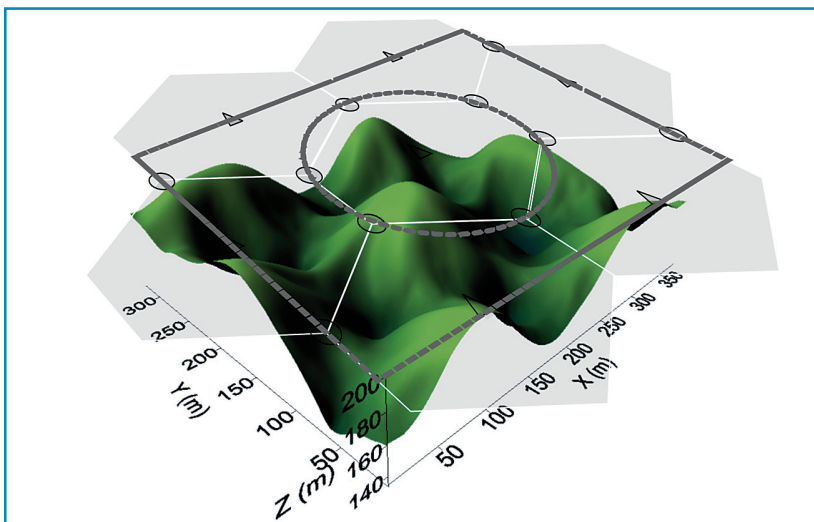


Figure 8 : Les fractures sont assimilées à des plans verticaux d'ouverture initiale 10^{-4} m et de profondeur 100 m. La dissolution des carbonates provoque une augmentation de l'ouverture de ces fractures et donc une augmentation de la conductivité hydraulique : feedback positif. *Fractures are considered as vertical planes with initial aperture 10^{-4} m and 100 m length. Due to carbonate dissolution, fracture widening takes place all along the profile and aperture is enlarged over time producing a positive feed-back.*

Figure 9 : La structure géométrique initiale est superposée ici à un paysage simulé de cockpit. Les dépressions sont disposées en étoile autour des sommets. *Initial spatial geometry is overlapped with a simulated landscape. Depressions are stars-shaped around summits.*



IV. Résultats

L'objectif des simulations est de tester le modèle afin de voir sa capacité à reproduire les processus géomorphologiques caractéristiques des paysages karstiques de type cockpit (figure 9). Les travaux portant sur la caractérisation quantitative des karsts sont nombreux [Day, 1979 ; Brook and Hanson, 1991]. Lyew-Ayee [2004] a conduit une étude très détaillée sur 84 km² dans la région des cockpits karsts en Jamaïque, en utilisant des techniques morphométriques sur SIG. Les nombreuses données qu'il a collectées sont déterminées à partir d'un modèle numérique de terrain. Le travail de Lyew-Ayee met en avant deux paramètres très caractéristiques des cockpits karsts que nous avons choisis comme critères comparatifs de nos simulations : il s'agit de la pente moyenne et du relief différentiel.

En partant de conditions géométriques initiales moyennes et en appliquant d'abord le modèle de dissolution à l'équilibre et ensuite le modèle de dissolution cinétique, peut-on

reproduire les formes moyennes réelles des karsts en cockpit ? Si tel est le cas, alors les hypothèses qui sous-tendent le modèle permettront de valider quantitativement une partie des processus de formation des paysages karstiques.

A. Simulation de référence

Une simulation de référence est préalablement effectuée afin de générer la forme d'un cockpit, sans prise en compte de la dissolution. La dernière composante de l'équation (1) est donc nulle.

Cette simulation de référence demande au préalable une paramétrisation des équations (2) et (3) que nous ne développons pas ici mais qui est décrite en détail dans Bogaart *et al.*, 2003.

Après le dépôt des sédiments calcaires durant l'Oligocène (70 millions d'années avant notre ère) et l'Eocène (45 millions d'années avant notre ère), la région des cockpits (Jamaïque) aurait subi une élévation tectonique l'amenant à une hauteur d'environ 600 m au-dessus du niveau de la mer [Lyew-Ayee, 2004]. La karstification aurait débuté à la fin du Miocène ou au début du Pliocène, en raison des conditions climatiques favorables [Pfeffer, 1997]. Ceci nous permet de simplifier nos équations en imposant la valeur de

$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{\text{tectonique}} = 0$ m/s dans l'équation (1) et de faire l'hypothèse que la néo-tectonique ne joue aucun rôle dans la karstification actuelle. De nombreuses études ont été faites sur les processus de transfert des sédiments sur les versants [e.g. Martin et Church, 1997], et la valeur de la diffusivité pour des processus lents et continus donne $10^{-4} \leq k_D \leq 10^{-2}$ m²/an (équation 2). Comme nous l'avons dit précédemment, la valeur du coefficient de diffusion est dépendante de la nature de la roche et du climat. Dans notre cas, nous attendions plutôt des valeurs faibles de k_D , les roches carbonatées étant caractérisées comme très dures. Devant le manque d'information sur sa valeur, nous testerons plusieurs valeurs de k_D .

Cinq simulations ont été menées en faisant varier la pluie annuelle $\langle P \rangle$ (m/an) et le coefficient de diffusion k_D (m²/an). Les simulations ont une durée de 10 millions d'années afin de couvrir la fin du Miocène, l'ensemble du Pliocène et une partie du Pléistocène ; sachant que l'ensemble des théories admet que la formation des karsts en cockpit s'est déroulée essentiellement durant le Pliocène [Pfeffer, 1997]. Tous les 10 000 ans la pente moyenne et le relief relatif du cockpit témoin sont calculés afin de pouvoir enregistrer son évolution. Nous pouvons ainsi comparer ces valeurs simulées

avec les mesures réelles moyennes d'un cockpit représentatif de cette région de Jamaïque.

Les résultats montrent (figure 10) qu'à valeur constante du k_D , l'augmentation des précipitations moyennes améliore les simulations. Toutefois, cette augmentation ne permet pas de tendre vers une relation : pente moyenne - relief relatif, identique à celle observée dans la réalité. En effet la pente moyenne augmente trop vite par rapport au relief relatif.

Avec une valeur constante pour la pluie, nous avons fait varier le coefficient de diffusion k_D (figure 10) afin de déterminer l'ordre de grandeur de ce coefficient que nous ne connaissons pas *a priori*. Comme nous le supposions, connaissant la dureté des carbonates blancs et le climat humide de la Jamaïque, il semble que $k_D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$ soit une valeur cohérente par rapport aux valeurs déterminées sur le terrain.

Sur la figure 10, on voit que les courbes résultats (1 et 2 par exemple), donnant l'évolution du relief relatif en fonction de la pente moyenne du cockpit, sont plus ou moins longues. Ces différentes longueurs ne doivent pas être interprétées par le lecteur comme autant de temps de simulation différents. L'arrêt d'une courbe correspond au fait qu'un équilibre a été atteint. Ainsi, si nous prenons l'exemple de la courbe 2 sur la figure 10, on constate qu'au bout d'un temps t_2 , le système relief relatif – pente est constant, c'est-à-dire qu'il garde quasiment la même valeur quel que soit le temps $t \geq t_2$. En prenant maintenant la courbe 1 de la figure 10, on voit que la simulation correspondante amène également à un équilibre mais vers des valeurs plus faibles du système relief relatif – pente, ce qui est cohérent puisque pour la simulation 1, les précipitations sont en moyenne deux fois plus faibles que pour la simulation 2.

Ces simulations de référence apportent une conclusion importante : quelles que soient les valeurs des paramètres du modèle, il n'est pas possible de reproduire la morphométrie d'un cockpit ayant les caractéristiques moyennes de ceux observés en réalité. L'érosion mécanique et la diffusion sédimentaire ne sont donc pas les seuls processus à prendre en compte.

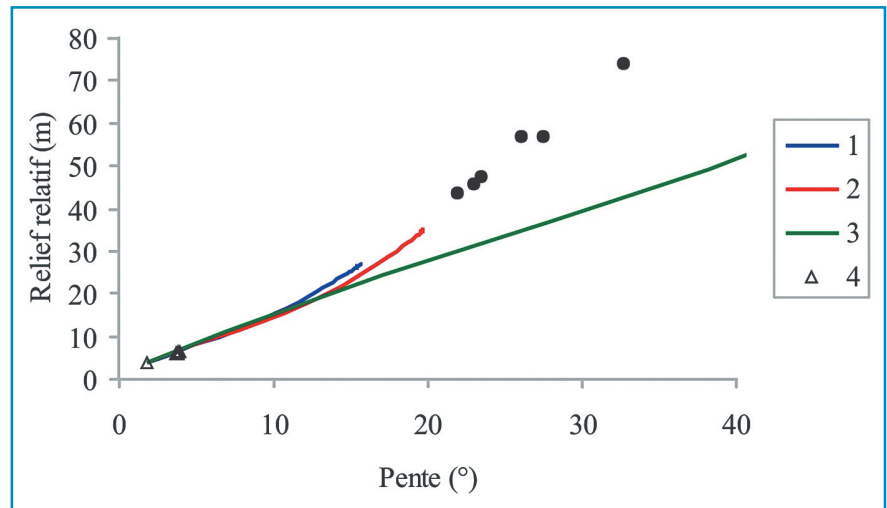


Figure 10: Résultats de la simulation de référence. Les données réelles de Leyw-Ayee, 2004 sont représentées par des disques noirs et indiquent la relation entre la pente moyenne et le relief relatif.

1: $\langle P \rangle = 1 \text{ m/an}$ et $k_D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$ 2: $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$ et $k_D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$
 3: $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$ et $k_D = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{an}$ 4: $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$ et $k_D = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{an}$

Results of the reference simulations Real data from Leyw-Ayee's study 2004 are black circles and represent average values of both the relative relief and the slope in the cockpit country, Jamaica.

B. Simulations avec le modèle de dissolution anisotrope

Il n'est pas facile de déterminer la valeur de la pression en CO_2 d'un sol, cette dernière variant avec de nombreux paramètres parmi lesquels l'humidité ou l'activité biologique. L'ordre de grandeur de cette pression dans les sols des cockpits à Puerto Rico est de $0,01 \leq P_{\text{CO}_2} \leq 0,1 \text{ atm}$. [Miotke, 1975 in White, 1984, p. 195]. Cette valeur correspond également aux observations de Smith and Atkinson [1976] sur la région des cockpits en Jamaïque ($P_{\text{CO}_2} \approx 0,017 \text{ atm}$). Cette valeur de la pression en dioxyde de carbone correspond à l'ordre de grandeur pour un système ouvert, en contact direct avec l'atmosphère. Pour ce qui est d'un système fermé, comme une fracture, la valeur admise est bien plus faible, de l'ordre de 10^{-3} atm [Dreydbrot, 1985; Romanov *et al.*, 2003; Kaufman and Braun, 2001].

Les variables environnementales étant soit déterminées en fonction de celles données dans la bibliographie, soit fixées aux valeurs les plus cohérentes en fonction des simulations précédentes ($\langle P \rangle$ et k_D), nous n'avons que peu de marge de manœuvre sur la simulation. Les seuls paramètres que nous pouvons modifier sont la concentration d'entrée du calcium dans les fractures ($[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inflow}}$), la durée de la pluie (\bar{T}_r) et le temps entre les pluies (\bar{T}_b). $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inflow}}$ dépend essentiellement des

caractéristiques du sol sus-jacent aux fractures. La valeur de $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inflow}}$ est nulle si aucun sol n'est présent au-dessus de la fracture. Sa valeur augmente avec l'épaisseur du sol. En effet, plus le sol est épais et plus les eaux qui s'y infiltrent ont le temps de se charger en calcium.

De nombreux auteurs [e.g. Lyew-Ayee, 2004] décrivent un sol très fin dans la région des cockpits de Jamaïque. Pour cette raison, nous faisons l'hypothèse que $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inflow}} = 0 \text{ mol/m}^3$, l'eau d'infiltration n'ayant pas le temps d'atteindre la concentration à l'équilibre.

Le rapport $\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_b}{\bar{T}_r}$ peut être considéré

comme un facteur climatique caractérisant l'intermittence des pluies [Tucker and Bras, 2000]. Dans le modèle nous ferons varier ce facteur de 1 à 50. Plus le rapport augmente et plus les pluies sont espacées dans le temps et *vice versa*.

L'utilisation de ce modèle peut permettre de valider numériquement la théorie de l'épikarst, théorie descriptive de la morphométrie des karsts en cockpit [Williams, 2004]. Les conditions aux limites et les conditions initiales sont ici les mêmes que dans les simulations précédentes à l'exception du réseau de fractures. En effet, comme nous l'avons décrit précédemment, un réseau de fractures est généré afin de reproduire les conditions hydrodynamiques proches de la réalité : partage entre écoulements de surface et de sub-surface.

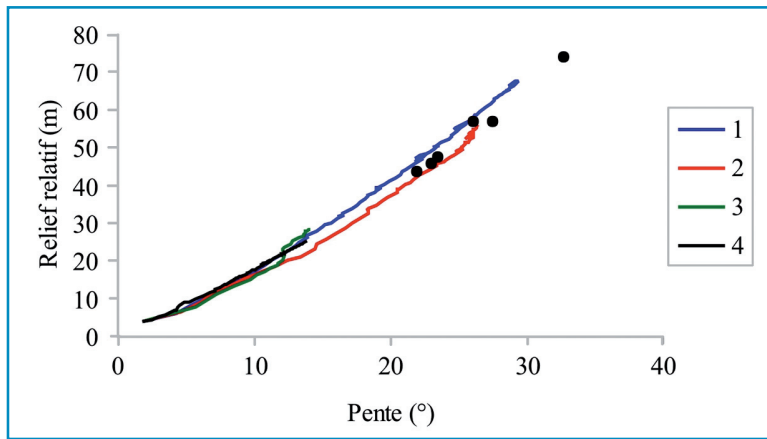


Figure 11: Résultats des simulations avec le modèle de dissolution anisotrope. Pour toutes les simulations, $k_D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$. Les disques noirs ont la même signification que sur la figure 10.

- 1: $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$, $\bar{T}_r = 1000 \text{ ans}$, $\bar{T}_b = 0 \text{ an}$ ($\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_b}{\bar{T}_r} = 1$)
- 2: $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$, $\bar{T}_r = 500 \text{ ans}$, $\bar{T}_b = 500 \text{ ans}$ ($\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_b}{\bar{T}_r} = 2$)
- 3: $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$, $\bar{T}_r = 100 \text{ ans}$, $\bar{T}_b = 900 \text{ ans}$ ($\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_b}{\bar{T}_r} = 10$)
- 4: $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$, $\bar{T}_r = 20 \text{ ans}$, $\bar{T}_b = 980 \text{ ans}$ ($\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_b}{\bar{T}_r} = 50$)

Results of the simulations using the anisotropic dissolution model ($k_D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$).

La dissolution souterraine résulte de l'infiltration de l'eau dans les fractures et dépend ainsi de la position des fractures le long de la pente topographique. Plus les fractures sont situées à l'aval de la pente et plus elles reçoivent une grande quantité d'eau de la nappe perchée [Williams, 2004], et plus la dissolution est importante, et *vice versa*. Ce processus est rendu possible parce

que nous avons fait l'hypothèse précédemment que l'équilibre cinétique n'est jamais atteint du fait de la dynamique rapide de l'eau dans les fractures. Apparaît ainsi un feed-back positif entre l'écoulement dans les fractures et la dissolution, car plus la dissolution est importante, plus la fracture s'ouvre et donc plus elle laisse s'infiltrer l'eau. En théorie, ce feed-back positif amène à un

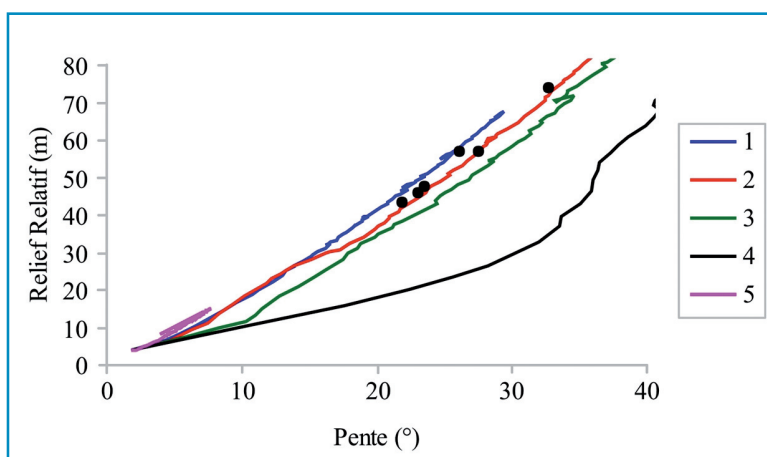


Figure 12: Résultats des simulations avec le modèle de dissolution anisotrope. Les disques noirs ont la même signification que sur la figure 10.

- Pour toutes les simulations, $\langle P \rangle = 2 \text{ m/an}$ et $\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_b}{\bar{T}_r} = 1$.
- 1: $k_D = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$ 2: $k_D = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{an}$ 3: $k_D = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{an}$
 4: $k_D = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{an}$ 5: $k_D = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$

Results of the simulations using the anisotropic dissolution model.

comportement extrême du système fracturé: l'augmentation exponentielle de l'ouverture des fractures [Dreybrodt, 1985]. Cette augmentation n'est entretenue que pour des conditions hydrodynamiques particulières, on parle de conditions aux limites à potentiel imposé: la quantité d'eau qui entre dans le système fracturé est constante et en quantité toujours suffisante. Dans la réalité, ce feed-back positif est modéré par des conditions hydrodynamiques à l'entrée du système fracturé qui sont très variables et dépendantes des aléas climatiques.

Les résultats des simulations du modèle anisotrope de la dissolution sont présentés sur les figures 11 et 12. Dans un premier temps on peut dire que ce modèle simule des karsts en cockpit dont les propriétés morphométriques sont très proches de celles observées dans la réalité. Ainsi l'adéquation entre la simulation 1 et les données réelles de Lyew-Ayee [2004] vont dans le sens d'une confirmation numérique de la théorie de l'épikarst.

Au début des simulations, l'ouverture est la même pour toutes les fractures ($a_0 = 10^{-4} \text{ m}$), quelle que soit leur position par rapport au sommet. Les eaux de surface et de sub-surface s'écoulant des sommets vers les dépressions, la quantité d'eau pouvant s'infiltrer dans les fractures est plus importante en aval. Ainsi, la dissolution des parois des fractures aval est plus importante que celles situées en amont (figure 13). En conséquence, l'érosion étant corrélée à la dissolution des fractures, elle aussi plus forte en aval (figure 14).

V. Discussion et conclusion

L'objectif de cette étude sur la morphologie des karsts en cockpit était de simuler les processus de leur évolution à partir d'hypothèses sur leur genèse. Notre modèle est basé sur une dissolution anisotrope dans l'espace et le temps conformément aux processus décrits dans la théorie de l'épikarst.

Les simulations du modèle sont comparées à des simulations de référence où seule l'érosion mécanique est envisagée et où la dissolution chimique des carbonates est donc absente.

Des karsts simulés, on peut extraire les caractéristiques morphologiques qui évoluent en fonction du temps. Deux caractéristiques morphologiques ont été choisies, au regard des travaux de Lyew-

Ayee, 2004, pour comparer les karsts simulés aux karsts réels : la pente moyenne et le relief relatif.

L'adéquation entre les morphologies des karsts simulés et réels est une étape essentielle pour valider leurs hypothèses de genèse. Toutefois c'est une étape nécessaire mais probablement pas suffisante.

L'érosion karstique met en place des processus divers et complexes que nous n'abordons pas ici, par exemple l'entraînement des particules vers le fond des fractures ou l'écroulement des zones fracturées dans des cavités sous-jacentes.

Ainsi, cette étude nous a permis de mettre en évidence l'importance de la prise en compte des processus d'anisotropie temporelle et spatiale dans le cas de l'évolution morphométrique des karsts en cockpit.

L'anisotropie spatiale correspond à l'hétérogénéité des valeurs de conductivités hydrauliques fréquemment observées dans les systèmes karstiques. Cette hétérogénéité participe à la différenciation spatiale de l'hydraulique de surface et de l'hydraulique souterraine et modifie ainsi fortement les comportements chimiques de dissolution de la roche.

L'anisotropie temporelle rend compte des effets de cinétique chimique dans les processus de dissolution. La prise en compte de la cinétique est indispensable pour modéliser la dissolution des milieux carbonatés fracturés.

Etant donné les résultats, nous pouvons mettre en avant un certain nombre de points :

- Seule, l'érosion mécanique n'est pas une hypothèse suffisante pour expliquer la forme des karsts en cockpit. Ceci est tout à fait cohérent, sachant que de nombreux auteurs rapportent l'importance des processus de dissolution par rapport à l'érosion pour ce qui concerne les systèmes karstiques.
- En considérant que la dissolution souterraine est également un facteur important dans l'évolution de la géomorphologie superficielle du karst, ce que traduit la théorie de l'épikarst, on obtient effectivement des simulations très proches de la réalité. Le modèle de dissolution spatio-temporelle anisotrope traduit le fait que les fractures les plus en aval sur la pente reçoivent plus d'eau d'infiltration de la nappe perchée (zone épikarstique), et vice versa. Ainsi, les parois des fractures les plus en aval s'agrandissent plus et ces fractures laissent donc infiltrer plus d'eau, et ainsi de suite. Ce feed-back positif entre écoulement et dissolution est la pierre angulaire de nombreuses théories sur le fonctionnement des systèmes karstiques. Or, plus la dissolution est active dans la zone subcu-

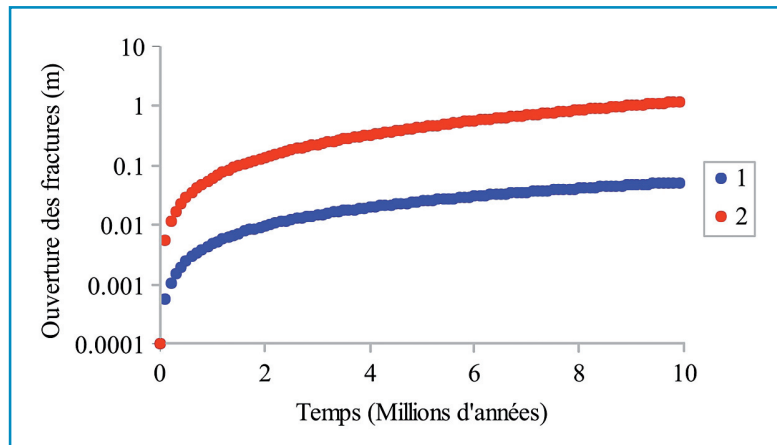


Figure 13: La dissolution des parois des fractures et donc l'augmentation de leur ouverture dépend de leur position sur la pente du cockpit. La fracture 1 est située à 20 m du sommet alors que la fracture 2 se trouve, elle, 60 m plus en aval. L'écoulement de sub-surface est donc plus important dans la fracture 2, la dissolution y est donc plus importante.

Dissolution of fractures depends on their locations on the cockpit slope. Fracture 1 is located at 20 m from the summit and fracture 2 is 60 m farther. Subsurface flow is thus greater in fracture 2, so dissolution is greater as well. Fracture widening is then greater by several orders of magnitude over time.

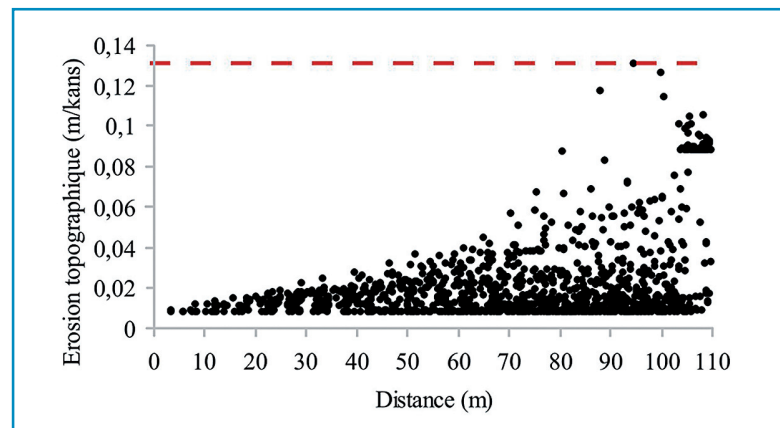


Figure 14: l'érosion chimique est anisotrope sur la pente d'un cockpit. Cette érosion est plus importante en aval (la distance entre sommet et dépression est de l'ordre de 110 m). La ligne rouge représente la valeur du modèle de White, 1984, DR (équation 4)

Denudation rate is anisotropic on the cockpit slope. Denudation is more important downstream (distance from a summit to a depression is 110 m). The red line is the maximum denudation rate of the White's model, 1984.

tanée, donc proche de la surface, et plus cette dernière sera érodée.

- Dans le modèle, les valeurs de la pluie moyenne annuelle varient de 1 m/an à 2 m/an. Les résultats montrent clairement que ces pluies doivent être bien supérieures à 1 m/an pour simuler des karsts en cockpit réalistes. Ceci est en accord avec les conclusions de nombreux auteurs comme par exemple Sweeting [1972].

$$\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_p}{\bar{T}_r}$$

- Le facteur climatique $\frac{\bar{T}_r + \bar{T}_p}{\bar{T}_r}$ illustre l'intermittence des pluies à l'échelle géologique. Ce facteur tend vers 1 lorsque la fréquence des pluies augmente. Les résultats montrent un fort impact de ce facteur sur les simulations. Aussi, il semble que l'on ne puisse reproduire la morphologie des karsts que pour des pluies très intenses et très fréquentes.
- Le coefficient de diffusion k_D influence aussi fortement les simulations. Toutefois, les

paysages simulés se rapprochent des paysages réels seulement pour un mince intervalle de valeurs autour de $k_D \approx 10^{-3} \text{ m}^2/\text{an}$.

Pour comparer les paysages simulés et les paysages réels, nous avons utilisé deux paramètres morphométriques: la pente et le relief relatif. Or, il existe bien d'autres méthodes d'analyse des paysages et en particulier celle des caractéristiques scalantes [Weissel *et al.*, 1994], qui semble être une méthode particulièrement bien adaptée aux cas des karsts en cockpit [Lyew-Ayee, 2004]. De plus, nous avons étudié les processus sur un

seul cockpit. Maintenant il serait important de tester l'influence des paramètres lors d'un changement d'échelle, en

simulant un paysage entier de karst en cockpit (figure 14) et en analysant ses caractéristiques morphologiques.

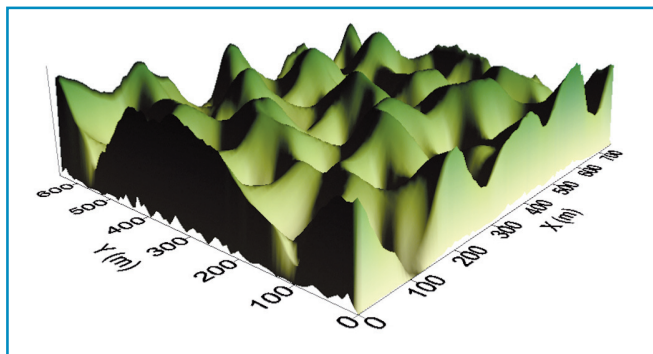


Figure 15: Paysage simulé d'un karst en cockpit. Il est intéressant de comparer cette vue virtuelle avec la figure 1. A simulated cockpit karst landscape. It is interesting to compare this artificial view with a real one on Figure 1.

Bibliographie

- BEAR J., TSANG C.F. and DE MARSILY G., 1993** - Flow and contaminant transport in fractured rock, Academic Press, 230 p.
- BEAUMONT C., FULLSACK P. and HAMILTON J., 1992** - Erosional control of active compressional orogens. In: McClay K. R. (Ed.), *Thrust Tectonics*. New York: Chapman and Hall, pp. 1-18.
- BOGAART P.W., TUCKER G.E. and DE VRIES J.J., 2003** - Channel network morphology and sediment dynamics under alternating periglacial and temperate regimes: a numerical simulation study, *Geomorphology*, 54 (3-4), pp. 257-277.
- BRAUN J. and SAMBRIDGE M., 1997** - Modelling landscape evolution on geological time scales: a new method based on irregular spatial discretization, *Basin Research*, 9, pp. 27-52.
- BROOK G.A. and HANSON M., 1991** - Double fourier series analysis of cockpit and doline and karst near browns town, Jamaica, *Physical Geography*, 12 (1), pp. 37-54.
- BUHMANN D. and DREYBRODT W., 1985** - The kinetics of calcite dissolution and precipitation in geologically relevant situations of karst areas. 1. Open system, *Chem. Geol.* 48, pp. 189-211.
- CORBEL J., 1959** - Vitesse de l'érosion, *Zeitschrift für Geomorphologie*, pp. 31-28.
- COULTHARD T.J., 2001** - Landscape evolution models: a software review, *Hydrological Processes*, 15 (1), pp. 165-173.
- COULTHARD T.J., KIRKBY M.J. and MACKLIN M.G., 1998** - Modelling the 1686 flood of Cam Gill Beck, Starbotten. upper Warfedale. In *The Quaternary of the Eastern Yorkshire Dales: Field Guide*, Howard A, Macklin MG (eds). Quaternary Research Association: London, pp. 11-18.
- DAY M.J., 1979** - The hydrology of polygonal karst depressions in northern Jamaica, *Zeitsch. Geomorph. N.F.*, 32, pp. 25-34.
- DREYBRODT W., 1985** - *Processes in Karst Systems*, Springer, Berlin, 240 p.
- DREYBRODT W., GABROVSEK F. and SIEMERS J., 1999** - Dynamics of the early evolution of karst, in *Karst Modelling*, Palmer and Palmer Ed., 256 p.
- EAGLESON P.S., 1978** - Climate, soil, and vegetation. 1. Introduction to water balance dynamics, *Water Resour. Res.*, 14, pp. 705-712.
- ENZEL Y., AMIT R., PORAT N., ZILBERMAN E. and HARRISON B.J., 1996** - Estimating the ages of fault scraps in the Arava, Israel, *Tectonophysics*, 253, pp. 305-317.
- FORD D.C. and WILLIAMS P.W., 1989** - *Karst geomorphology and hydrology*, Unwin Hyman, London, 320 p.
- FORD D.C., 1981** - Geologic Structure and a New Exploration of Limestone Cavern Genesis. *Transactions of the Cave Research Groups of Great Britain*, 13, pp. 81-94.
- GABROVSEK F. and DREYBRODT W., 2001** - A comprehensive model of the early evolution of karst aquifers in limestone in the dimensions of length and depth, *J. Hydrol.* 240 3-4, pp. 206-224.
- GRUND D., 1914** - The geographical cycle in the karst, *Benchmark Papers in Geology*, 59, pp. 54-59.
- KAUFMANN G. and BRAUN J., 2001** - Modelling karst denudation on a synthetic landscape, *Terra Nova*, 13 (5), pp. 313-320.
- LYEW-AYEE P., 2004** - *Digital topographic analysis of cockpit karst: a morphological study of the cockpit country region, Jamaica*, Ph.D. Thesis, University of Oxford, 210 p.
- MCKEAN J.A., DIETRICH W.E., FINKEL R.C., SOUTHON J.R. and CAFFEE M.W., 1993** - Quantification of soil production and downslope creep rates from cosmogenic. *Geology*, 21, pp. 343-346.
- MARTIN Y. and CHURCH M., 1997** - Diffusion in landscape development models: on the nature of basic transport relations, *Earth Surface Processes and Landforms* 22, pp. 273-279.
- PFEFFER K.H., 1997** - Paleoclimate and tropical karst in the west Indies, *Zeitsch. Geomorph. N.F., Suppl. B-d* 108, pp. 5-13.
- PULINA M., 1972** - A comment on present day chemical denudation in Poland, *Geographica Polonica*, 23, pp. 45-62.
- ROMANOV D., GABROVSEK F. and DREYBRODT W., 2003** - The impact of hydrochemical boundary conditions on the evolution of limestone karst aquifers. *J. Hydrol.*, 276, pp. 240-253.
- SINGHAL B. and GUPTA R., 1999** - *Applied Hydrogeology of Fractured Rocks*. Kulwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands. 400 p.
- SMITH D.I. and ATKINSON T.C., 1976** - *Process, landforms and climate in limestone regions*, in Derbyshire Ed.: *Geomorphology and climate*. Pp. 367-409. Wiley, London.
- SWEETING M.M., 1972** - *Karst Landforms*. MacMillan, London, 150 p.
- TUCKER G.E., LANCASTER S.T., GASPARINI N.M. and BRAS R.E., 2001a** - The channel-hillslope integrated landscape development model (CHILD). In: R.S. Harmon and W.W. Doe, Editors, *Landscape Erosion and Evolution Modeling*, Kluwer Publishing, Dordrecht, pp. 349-388.
- TUCKER G.E., LANCASTER S.T., GASPARINI N.M., BRAS R.E. and RYBARCZYK S.M., 2001b** - An object-oriented framework for hydrologic and geomorphic modeling using triangulated irregular networks, *Computers and Geosciences* 27 8, pp. 959-973.
- TUCKER G.E. and BRAS R.E., 2000** - A stochastic approach to modeling the role of rainfall variability in drainage basin evolution, *Water Resources Research* 36 7, pp. 1953-1964.
- TUCKER G.E., GASPARINI N.M., BRAS R.E. and LANCASTER S.T., 1999** - A 3D Computer Simulation Model of Drainage Basin and Floodplain Evolution: Theory and Applications, Technical report prepared for U.S. Army Corps of Engineers Construction, Engineering Research Laboratory, pp 125-156.
- TUCKER G.E. and SLINGERLAND R.L., 1994** - Erosional dynamics, flexural isostasy, and long-lived escarpments: a numerical modeling study, *Journal of Geophysical Research* 99, pp. 12229-12243.
- VERSTAPPEN H., 1964** - Karst morphology of the Star Mountains and its relation to lithology and climate, *Zeitschrift für Geomorphologie*, 8, pp. 40-49.
- VERSTEEG H.K. and MALALASEKERA W., 1995** - *An Introduction to Computational Fluid Dynamics; The Finite Volume Method*. Longman, New York, 257 p.
- WEISSEL J.K., PRATSON L.F. and MALINVERNO A., 1994** - The length-scaling properties of topography, *J. Geophys. Res.*, 99 (B7), pp. 13,997-14,012.
- WHITE W.B., 1984** - Rate processes: chemical kinetics and karst landform development, La Fleur RG (ed.). *Groundwater as a geomorphic agent*. Allen and Unwin, London Boston Sydney pp. 227-248.
- WHITE W.B., 1988** - *Geomorphology and hydrology of karst terrains*, Oxford University Press, New York, 465 p.
- WILLGOOSE G.R., BRAS R.L. and RODRIGUEZ-ITURBE I., 1991** - A physically based coupled network growth and hillslope evolution model, 1, theory, *Water Resources Research* 27, pp. 1671-1684.
- WILLIAMS P.W., 1985** - Subcutaneous hydrology and the development of doline and cockpit karst, *Zeitsch. Geomorph. N.F.*, 29 4, pp. 463-482.
- WILLIAMS P.W., 1987** - Geomorphic inheritance and the development of tower karst, *Earth Surface Processes and Landforms*, 12, pp. 453-465.
- WILLIAMS P.W., 2004** - Dolines, in Gunn, J (ed.), *Encyclopedia of Caves and Karst Science*. Fitzroy Dearborn: New York, pp 304-310.

*GÉOMORPHOLOGIE, RELIEF,
PROCESSUS, ENVIRONNEMENT*

Fleurant C., Tucker G. and H.A. Viles, 2008, A model of cockpit karst landscape, *Géomorphologie, Relief, Processus, Environnement*, 1, p. 3-14.

A model of cockpit karst landscape, Jamaica

Modélisation d'un paysage de karst de type cockpit (Jamaïque)

Cyril Fleurant*, Gregory E. Tucker**, Heather A. Viles***

Abstract

This paper deals with a landscape evolution model to compute cockpit karsts landforms. The CHILD model is used to model geomorphic processes at regional scale. After examining briefly CHILD's principles and equations of limestone dissolution processes, the denudation model is detailed. The relation between subcutaneous dissolution and denudation of the topography is introduced by means of an empirical equation associated with epikarst processes: the denudation is taken to be proportional to the dissolution in the subcutaneous zone. The model takes into account an anisotropic dissolution in space according to what is observed in reality or described by scenarios of cockpit karst landscape evolution. Simulated cockpit karst terrains are compared with real landscapes by means of several morphometric criteria: slope, relative relief and scaling properties. Results confirm the importance of anisotropic dissolution processes and could provide a numerical validation of the epikarst processes to describe cockpit karst genesis.

Key words: model, landscape evolution, karst denudation, subcutaneous zone, morphometric analysis.

Résumé

Cet article présente une étude sur l'utilisation d'un modèle numérique morphogénétique développé afin de pouvoir simuler l'évolution de la forme des karsts en cockpits. Le modèle CHILD est ici utilisé pour une modélisation à petite échelle (paysage entier). Dans un premier temps, nous rappelons le fonctionnement de CHILD ainsi que les équations qui décrivent les processus de dissolution des carbonates. Puis, nous donnons les détails du modèle d'érosion, basé sur les principes de fonctionnement de l'épikarst : la relation entre la dissolution souterraine des carbonates et l'érosion en surface est introduite par le biais d'une relation empirique. Ainsi l'érosion est considérée comme proportionnelle à la dissolution de la zone sous-cutanée. Dans cette approche, le modèle prend en compte l'anisotropie spatiale conformément à ce qui est observé dans la réalité ou est encore décrit par des scénarios de l'évolution des karsts de type cockpit. Les paysages simulés sont comparés aux paysages réels grâce à des indices morphométriques : la pente, le relief relatif et les propriétés de variation d'échelle de la topographie. Les résultats confortent à la fois l'importance de la prise en compte de l'hétérogénéité spatiale de la dissolution et surtout la validité de la prise en compte de l'épikarst pour décrire la genèse des karsts de type cockpit.

Mots clés : modèle, évolution géomorphologique, cockpit, érosion karstique, zone sous-cutanée, analyse morphométrique.

Version française abrégée

Les karsts de type cockpit sont présents dans certaines régions tropicales humides où les précipitations dépassent en moyenne 1 500 mm/an, lorsque les conditions lithologique peuvent favoriser leur développement. Ces paysages particuliers se présentent comme une succession de dépressions et de collines. Leur développement est comparable à celui des dolines (fig. 1). La modélisation des processus géomorphologiques est rendue possible depuis plusieurs dizaines d'années grâce à l'utilisation de simulations numériques de plus en plus performantes. Ces codes de calcul

permettent de simuler la non-linéarité et l'interaction des processus qui façonnent les formes du relief.

Dans une étude précédente, C. Fleurant et al. (2007) ont exposé une méthode de simulation pour un seul cockpit (0,01 km²). L'objectif de cet article est d'étudier les conditions topographique, hydrologique et géochimique nécessaires au développement des formes de karst de type cockpit pour un ensemble plus vaste (16 km²), mais du fait du très grand changement d'échelle spatiale des formes étudiées les processus géomorphologiques, ainsi que les équations utilisées, ne peuvent être simplement transposées. Les auteurs utilisent le modèle CHILD en y intégrant les processus liés

* Département Paysage, Institut National d'Horticulture, 2 rue Le Notre, 49045 Angers Cedex 01, France. Courriel : cyril.fleurant@inh.fr

** Department of Geological Sciences, Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences, University of Colorado, Boulder, USA. E-mail: gtucker@cires.colorado.edu

*** Centre for the Environment, University of Oxford, South Parks Road, Oxford OX1 3QY, UK. E-mail: heather.viles@ouce.ox.ac.uk

à la dissolution chimique des carbonates. CHILD est un modèle numérique géomorphologique (Tucker et al., 1999) qui simule l'évolution des formes de la topographie dans le temps. Ces formes sont la résultante de l'interaction et d'un feedback positif entre les écoulements, l'érosion et la sédimentation. Comme les processus de dissolution sont principalement à l'origine des formes de karst de type cockpit, l'évolution de la topographie peut se ramener à l'équation (2). CHILD fonctionne sur le principe d'une discrétisation spatio-temporelle (fig. 2 et équation 3) qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles suivant un schéma numérique explicite. L'évolution de la topographie est fondée sur une hypothèse expliquée par les principes de fonctionnement de l'épikarst : les écoulements souterrains et l'érosion chimique de surface peuvent être traduits mathématiquement par l'équation (7). Dans ce cas, l'érosion de la topographie est indirectement liée à la dissolution de la roche de la zone épikarstique (fig. 3).

La géométrie initiale adoptée pour la zone d'étude est une surface lisse et légèrement ondulée de 16 km² ($X = Y = 4\ 000\ m$). L'altitude moyenne de ces ondulations est $Z_0 = 600\ m$. Ces ondulations représentent une succession de sommets ($Z_0 + 10\ cm$) et de dépressions ($Z_0 - 10\ cm$) (fig. 4) qui sont destinées à guider les écoulements de l'eau en début de simulation. Cette surface lisse et ondulée que nous pouvons assimiler à un plateau est discrétisée en 40 000 cellules de Voronoï. Chaque nœud, centré sur la cellule de Voronoï, est donc représentatif d'une zone de l'ordre de 400 m².

L'objectif des simulations est de tester l'approche du modèle (équation 7) afin de savoir si les processus géomorphologiques mis en équation permettent de recréer les formes typiques des karsts de type cockpit. Pour cela nous avons comparé les paysages simulés (fig. 5) aux paysages réels grâce à trois indices morphométriques : la pente moyenne, le relief relatif (hauteur entre les dépressions et les sommets des cockpits) et les propriétés d'échelle du relief. P. Lyew-Ayee (2004) a montré que ces trois indices sont discriminants pour caractériser, dans la région des « cockpits country » de Jamaïque, les paysages de karst de type cockpit. Les paramètres des simulations sont présentés dans le tableau 1 et les données de terrain dans le tableau 2. Trois simulations ont été menées en faisant varier le facteur climatique (équation 4). Les simulations donnent des paysages numériques (fig. 5) qui sont analysés et comparés aux paysages réels par le biais d'indices morphométriques (fig. 6 à 11).

Les ressemblances entre les paysages morphologiques réels et ceux qui sont simulés constituent dans un premier temps une étape essentielle de notre étude, puisqu'elles valident la modélisation des processus. L'hypothèse de départ relative à l'influence de l'épikarst (processus souterrain de dissolution) sur la formation du karst de type cockpit (processus de surface) qui a été mise en équations dans le modèle semble être validée par les résultats. Ceux-ci montrent que pour simuler la genèse du karst de type cockpit ressemblant à celui que l'on observe dans les régions tropicales, la quantité des précipitations doit être au moins supérieure à 1,5 m/an, ce qui est parfaitement cohérent avec les études de

nombreux auteurs (e.g. Sweeting, 1972). À l'échelle des temps géologiques, le facteur climatique montre l'importance des précipitations. Il tend vers 1 lorsque la durée de la saison pluvieuse augmente. Les résultats des simulations montrent clairement l'impact fort de ce facteur climatique sur la morphologie des paysages de karst obtenus. Pour les valeurs des paramètres du modèle, nous pouvons conclure que les modèles du karst de type cockpit n'ont pu se former que pour des précipitations abondantes pendant une longue saison des pluies.

Introduction

Landscape evolution is the result of various forces: tectonics, erosion, deposition, which in turn, are governed by complex processes related to lithospheric movements, climatic conditions and rock properties. A better understanding of landscape evolution can be assisted by numerical tools that make it possible to explore the complex non-linear and interacting processes shaping landscapes. Significant progress has been made in quantifying the evolution of drainage-basin landscapes by physical processes such as mechanical weathering, sediment transport on hillslopes and channels, and channel incision into bedrock. For many of these processes, we now have geomorphic transport laws that describe their long-term impact on topography (see review by Dietrich *et al.*, 2003). In contrast, few quantitative models exist to describe chemical geomorphic processes and their role in shaping karst terrain. In this paper, we study the evolution of cockpit karst landscapes by means of a simulation model.

Karst is terrain that possesses distinctive hydrology and landforms as a result of high rock solubility and well-developed secondary porosity (Ford and Williams, 1989). Often, but not always, found in areas underlain by carbonate rocks such as limestone and dolomite, karst terrain appears very distinct to 'normal' fluvial landscapes with a lack of established surface drainage networks. Major surface karst landforms include enclosed depressions such as dolines, which are the major routeways by which water is translated from the surface to the subsurface zone. Several conceptual models of karst landscapes stress the importance of the epikarstic zone (i.e. the uppermost zone of weathered bedrock below the soil) which is usually heavily fissured and is the location for most dissolutional activity (Williams, 1983). In the past, a clear climatic control on karst landscapes was recognised, and although a simplistic link between climate and relief is now less accepted, temperate karst areas are often characterised by polygonal networks of dolines whilst humid tropical karsts often consist of networks of dramatic hills. In Jamaica and other areas, conical hills are separated by deep dolines (called cockpits) making up what is known as 'cockpit karst' (fig. 1).

Over the last ten years, much effort has been focused on developing models that can simulate landscape evolution on large time and space scales (e.g. Willgoose *et al.*, 1991; Braun and Sambridge, 1997; Tucker *et al.*, 2001). Most such models incorporate both short-range processes such as hill slope diffusion, and long-range processes such as fluvial

Fig. 1 – An oblique aerial view of cockpit karst terrains in Jamaica (Photo by P. Lyew-Ayee).

Fig. 1 – *Vue aérienne oblique d'un paysage de karst en cockpits dans la région de « Cockpit Country » en Jamaïque* (photo de P. Lyew-Ayee).



transport. A partial list of current models includes SIBERIA (Willgoose *et al.*, 1991), GOLEM (Tucker and Slingerland, 1994), DELIM (Howard, 1994), CASCADE (Braun et Sambridge, 1997), CAESAR (Coulthard *et al.*, 1998), ZSCAPE (Densmore *et al.*, 1998), and CHILD (Tucker *et al.*, 1999) and they are reviewed in Coulthard (2001).

Although modelling of subsurface runoff and relief generation in karst has resulted in considerable research (Groves and Howard, 1994; Clemens *et al.*, 1997; Kaufman and Braun, 1999, 2000), very few models explore rock dissolution processes by surface water and surficial landscape evolution (Ahnert and Williams, 1997; Kaufman and Braun, 2001).

Starting from a squared two-dimensional network and simple erosion laws, Ahnert and Williams (1997) recreated tower karst landscapes. Kaufman and Braun (2001) demonstrated how carbon dioxide-enriched surface runoff shapes a landscape typical of large karstic valleys by the chemical dissolution of calcite contained in rocks. They used the CASCADE model for their study, and included an erosion factor related to the dissolution of carbonate rocks. Fleurant *et al.* (2007) used the CHILD model to simulate the evolution on a single cockpit.

A wide variety of karst landscapes exist whose morphologies depend on a number of variables (White, 1984): chemical variables such as temperature, pressure of carbon dioxide and rainfall; physical variables such as relief and rainfall; geological variables such as tectonics, characteristic features of soluble rocks, stratigraphy and lithology. The variations of the different components listed above over a range of timescales result in different landscapes: doline karst, fluvio-karst or tower karst. Nevertheless, a common characteristic of karst landscapes is that they are mainly composed of a series of closed depressions and hills (Trudgill, 1985).

Cockpit karst is a form of polygonal karst usually thought to occur only under humid tropical climatic conditions. Polygonal karst (Ford and Williams, 1989) is characterised by a network of closed depressions covering an entire landscape; cockpit karst is a variant of this where the closed depressions are deep, large and often star-shaped with residual hills found between them. In order for cockpit karst to form several requirements must be met, i.e. abundant runoff, massive and pure limestones, and a regional system of fractures which allow the development of underground drainage

(White, 1984). Sweeting (1972) hypothesizes that annual rainfall of over 1500 mm is required to form cockpit karst. The type site for cockpit karst is found in the Cockpit Country in Jamaica, where the landscape is underlain by White Limestone, a massive and exceptionally pure unit (Lyew-Ayee, 2004). Karstic processes are characterised by the predominance of mass transport of solutes over other transport processes (White, 1984). This is why the integration of carbonate rock dissolution processes is essential for the modelling karstic phenomena.

The objective of the present paper is to examine the topographic, hydrologic, and geochemical conditions under which cockpit karst can develop. We describe the integration of chemical dissolution processes of carbonate rocks in the computer model CHILD. Integrating chemical erosion into the model will allow us to test some hypotheses of cockpit karst landscape development in Jamaica, and will also permit further testing of karst landscape evolution theories.

We will consider briefly the functioning principles of the CHILD model as well as the modifications which were necessary to simulate rock dissolution processes. These modifications build upon the work presented in Fleurant *et al.* (2007) and are now tested at the regional scale. The simulated landscape will be compared to a real cockpit karst landscape through three morphometric criteria typical of this type of landscape, and recently highlighted by Lyew-Ayee (2004): average slope, relative relief and scaling characteristics. Such a comparison will make it possible to provide both ranges of validity for the various parameters of dissolution models and put forward hypotheses of scenarios for cockpit formation.

Geomorphological model

The CHILD model (Channel-Hillslope Integrated Landscape Development) is a numerical model of landscape evo-

lution (Tucker *et al.*, 1999). The evolution of topography over time is simulated through the interaction and feedback between surface flows, rock erosion and the transport of sediments. CHILD is a numerical simulation method used for modelling a large number of processes related to the geomorphology of catchment basins. As it has been well-described in previous work, we will consequently only present a small number of these features. In this computer model, the evolution of topography over time results from the combination of several factors:

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{dz_i}{dt} \Big|_{\text{diffusion}} + \frac{dz_i}{dt} \Big|_{\text{erosion}} + \frac{dz_i}{dt} \Big|_{\text{tectonic}} + \frac{dz_i}{dt} \Big|_{\text{dissolution}} \quad (1)$$

These various factors are numerically solved using a particular spatial framework: Voronoï polygons. The first three factors are present in most models of landscape evolution; a detailed description can be found in Tucker *et al.* (2001). The last factor, concerning rock dissolution, will be discussed in a subsequent section. Here we focus on dissolution processes of limestone, the other processes are neglected. Several studies (e.g. White, 1984 or Lyew-Ayee, 2004) and the presence of thick equatorial forest strengthen the assumption of the dissolution erosion predominance over mechanical erosion. So equation (1) reduces to:

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{dz_i}{dt} \Big|_{\text{dissolution}} \quad (2)$$

Implications of uplift and mechanical erosion are discussed in several papers (e.g. Pfeffer, 1997). Cockpit karst landforms in Jamaica are restricted to areas of the White Limestone Group. This white limestone was first exposed to erosion by uplift in the Upper Miocene and no traces can be discerned today of a surface drainage system in the cockpit areas. Thus, we assume that landscape development from the Miocene onwards has been dominated by solutional processes, without any significant contribution from either other denudation processes or tectonics.

Spatial discretization

The spatial framework of the CHILD model is composed of an irregular network of points and is used to obtain a reliable discretization of the topographic surface. These points, also called nodes, are connected to form a mesh of triangles known as a Triangulated Irregular Network, or TIN (Braun and Sambridge, 1997; Tucker *et al.*, 2001). This gridded model is built up using Delaunay triangulation and offers several advantages over a raster-based approach (Braun and Sambridge, 1997; Tucker *et al.*, 2001). From the numerical point of view, triangulation makes it possible to solve equations involving partial derivatives using the finite-volume method (Versteeg and Malalasekera, 1995). Each node of the triangulation is associated with a Voronoï cell (fig. 2). Such a method can thus be used to solve physical equations related to geomorphologic processes, with exchanges of mass between nodes calculated at the Voronoï polygon interfaces.

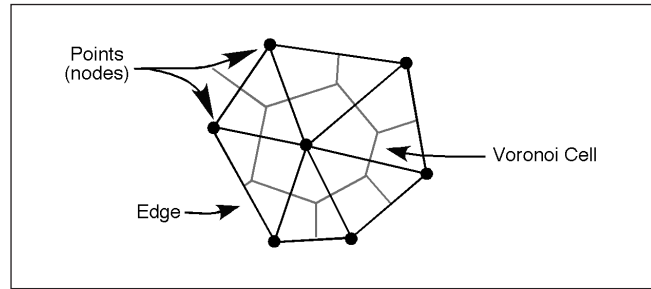


Fig. 2 – Schematic illustration of the spatial framework in CHILD model. The study area (16 km²) is discretized into 40000 Voronoï cells. Each cell is 400 m² large.

Fig. 2 – Illustration schématique du mode de discrétisation du modèle CHILD. La zone d'étude a une surface de 16 km² et est découpée en 40 000 cellules de Voronoï. Chaque cellule de Voronoï représente une surface de 400 m².

Temporal discretization

The temporal framework of the CHILD model makes it possible to consider the significant time disparities resulting from geomorphologic processes: the evolution of topography spreads over thousands of years, whereas rainfall frequency can range from a few minutes to a few days. Rainfall variability at a geological time scale is simulated using a stochastic method based on a Poisson storm-arrival model and exponentially distributed storm intensity and duration, which gives the distribution of rainfall frequency and intensity (Tucker and Bras, 2000). Equations are solved iteratively, according to an alternation of rainy and dry periods. Storm intensity and duration are assumed to be independent. The probability density functions for storm intensity, duration and interstorm interval are given by:

$$\begin{aligned} fdp(P) &= \frac{1}{P} \exp\left(-\frac{P}{P}\right) \\ fdp(T_r) &= \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{T_r}{T_r}\right) \\ fdp(T_b) &= \frac{1}{T_b} \exp\left(-\frac{T_b}{T_b}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

The mean annual rainfall $\langle P \rangle$ is linked with \bar{P} :

$$\langle P \rangle = \bar{P} \frac{\bar{T}_r}{\bar{T}_r + \bar{T}_b} \quad (4)$$

The parameter $\frac{\bar{P}}{\langle P \rangle}$

can be thought of as a climate variability factor (Tucker and Bras, 2000).

Surface runoff is modelled using an algorithm that routes water from one cell to the next following the path of steepest descent. In the case of an enclosed depression, water either evaporates or is forced to find an outlet, using a lake-filling algorithm (Tucker *et al.*, 2001). Local runoff generation, at one node, can be modelled using several functions: Horton runoff or excess runoff on saturated soils.

Calcite dissolution and karst denudation

Although calcite is slightly soluble in deionised water, most karst denudation occurs through the dissolution of calcite by water acidified by carbon dioxide. In the case of open systems, carbonates are affected by climatic events (rain in the studied case) and other flowing waters (rivers for example). The dissolution of carbonate rocks will then depend on the flux of water in contact with carbonates, and on the hydrodynamic nature of flows (Dreybrodt, 1988).

The calcite dissolution process in an open system can then be expressed as follows (Trudgill, 1985):



It should be noted that, for stoichiometric reasons, one mole of Ca^{2+} consumes one mole of CO_2 . Consequently, the absolute flow value of CO_2 is equal to that of Ca^{2+} .

The karst denudation process corresponds to the erosion of carbonates through dissolution. Several models have been put forward to quantify this erosion (Corbel, 1959; Ford, 1981). White's (1984) denudation model (DR) is the most comprehensive and widely used; it speculates that infiltration waters and carbonates are in equilibrium:

$$DR = -1000 \frac{m_{\text{Ca}}}{\rho_{\text{CaCO}_3}} < P > \left(\frac{K_1 K_C K_H P_{\text{CO}_2}}{4 K_2 \gamma_{\text{Ca}} \gamma_{\text{HCO}_3}^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

where K_1 (mol/m^3), K_2 (mol/m^3), K_C (mol^2/m^6) and K_H ($\text{mol}/\text{m}^3/\text{atm}$) are equilibrium constants which only depend on temperature, g_X is the activity coefficient of X and P_{CO_2} (atm.) is the pressure of carbon dioxide in open system, *i.e.* under atmospheric conditions. The DR values may vary according to the temperature and CO_2 pressure. The values of P_{CO_2} pressure depend on local factors: the atmospheric conditions and soil biological activity. The relation between P_{CO_2} and the actual evapotranspiration rate (E) and therefore the geographical variation of carbon dioxide pressure in soils is (Brook and Hanson, 1991):

$$\log(P_{\text{CO}_2}) = -3.47 + 2.09(1 - e^{-0.00172 < E >}) \quad (6)$$

In Jamaica for example, $E \approx 1$ m/y, which gives $P_{\text{CO}_2} \approx 0.0176$ atm. Such values are consistent with the values Smith *et al.* (1976) put forward for tropical areas: $P_{\text{CO}_2} \approx 0.01$ atm.

The relation (5) combines rock, equilibria and climatic factors. Each of the three climatic variables (temperature, carbon dioxide pressure and effective rainfall) has a different impact on denudation rate. In order of importance, the key controls are: effective rainfall (linear relation), carbon dioxide pressure (cube root relation) and temperature, which has a non-linear influence on chemical constants. As mentioned previously, White's model (1984) gives the maximum value of karst denudation for the whole studied area. Therefore, if the model (5) is applied, it is assumed that the karst denudation rate is uniform across the studied

karst. For typical values of cockpit karst terrains $DR \approx 130$ mm/ky (Smith *et al.*, 1976).

Model concepts

As the karstification process is complex it is difficult to establish clear and quantifiable relations between its various components: calcite dissolution, geologic properties of carbonates, rock structure, and climatic variations. There is a considerable literature on the qualitative description of these processes (e.g. Jennings, 1985; Sweeting, 1972; Williams, 1985), but little modelling work has so far been produced quantifying these. Although dissolution plays an essential role in the development of karst, it is not the only process involved with collapse, and subsidence brings material down into closed depressions (Jennings, 1985). Many authors also highlight the close relation between surface denudation and underground karstification processes, but do not provide quantitative data to link the two (Dreybrodt, 1988).

These linkages are strongly suggested by the epikarst zone (e.g. Ford and Williams, 1989). The epikarst is the uppermost zone of highly weathered karst bedrock below the soil. Runoff waters passing through the soil become enriched in carbon dioxide, producing a maximum dissolution rate within the epikarst zone. Most dissolution is accomplished within 10 m of the surface as a result. This dissolution within the epikarst zone leads directly to surface lowering, as soils subside into the enlarged voids created. Thus, the higher the subsurface dissolution rate, the more rapidly topography lowers over time. Therefore, in the model presented in this paper, the rate of dissolution of topography is taken to be proportional to the underground dissolution.

The mathematical model

Equations of the model express a simple linear relationship between surface denudation rate and underground dissolution, thus subsurface flow:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} \Big|_{\text{dissolution}} = - \left[\frac{DR_{\text{max}} - DR_{\text{min}}}{q_{\text{max}} - q_{\text{min}}} (q_i - q_{\text{max}}) + DR_{\text{max}} \right] \quad (7)$$

where z_i (m) is the altitude of the node i , DR_{max} (m/s) and DR_{min} (m/s) are respectively the maximum and the minimum denudation rates on the study area, q_i (m^3/s) is the subsurface flow going through the Voronoï cell i , q_{max} (m^3/s) and q_{min} (m^3/s) are respectively the maximum and the minimum subsurface flow on the study area at time t (s). Equation (7) is illustrated by figure 3: the more subsurface flow increases, the more denudation rate increases.

Boundary and initial conditions

It is assumed that development of cockpit landforms begins on a smooth gently undulating surface ($X = Y = 4000$ m). The average altitude of these depressions and summits is $Z_0 = 600$ m (fig. 4). In fact, following the

Fig. 3 – **Principle of equation (7).** Denudation rate of the topography DR is taken to be proportional to the underground flow q (subcutaneous zone).

Fig. 3 – **Illustration du fonctionnement de l'équation (7).** L'érosion karstique DR est directement en relation avec le flux de subsurface q (zone épikarstique).

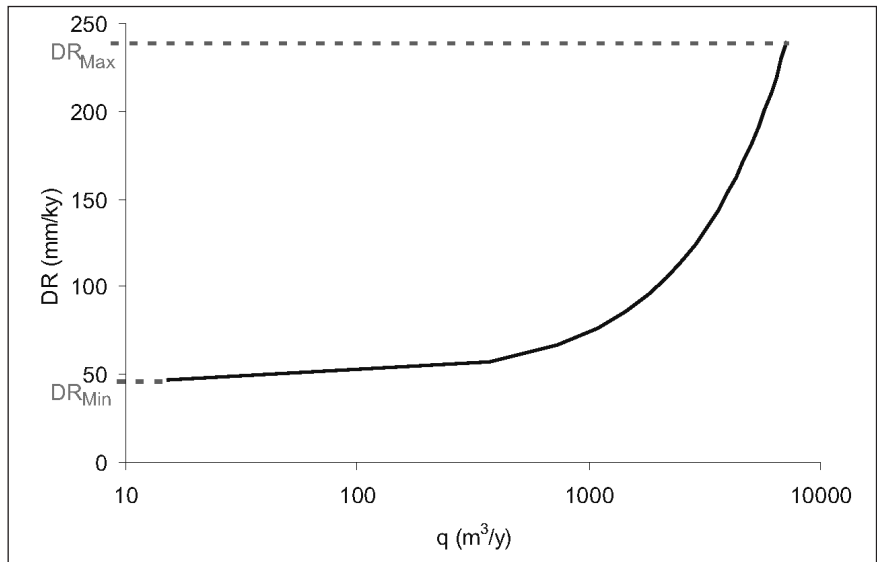
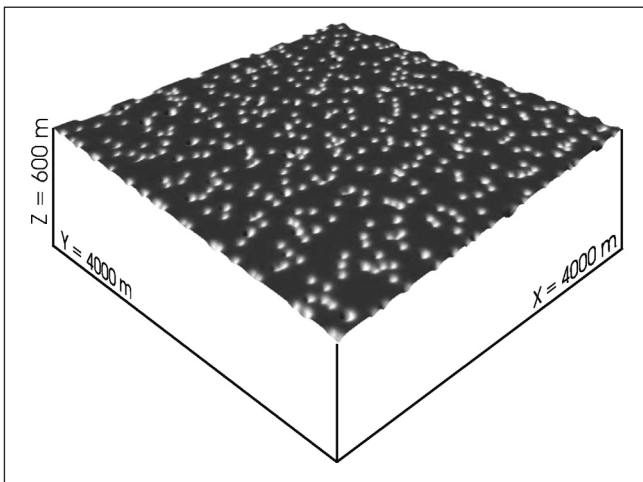


Fig. 4 – **Boundary conditions.** Initial topography is a smooth 600 m high surface with random sinks (-10 cm). The density of these depressions is 25 km⁻².

Fig. 4 – **Conditions aux limites.** La topographie initiale est une surface lisse de 600 m d'altitude sur laquelle sont réparties aléatoirement des dépressions (-10 cm). La densité de ces dépressions est d'une pour 25 km².



of each Voronoï cell is 10⁻⁷ m/s. This value is typical of slow initial karstification processes (Singhal and Gupta, 1999). This hydraulic conductivity controls the partitioning of surface runoff and subsurface flow. Initially, depressions, cockpits or sinks are created using a random uniform function in the study area (16 km²). The density of sinks is approximately $d = 25 \text{ km}^{-2}$ (fig. 5). This average value was calculated by Lyew-Ayee (2004) for the whole cockpit country in Jamaica. In the model, the value of rainfall is $\langle P \rangle = 2 \text{ m/y}$. Many field studies (e.g. Sweeting, 1972) clearly show that average rainfall has to be greater than 1 m/yr to produce cockpit karst landscapes. Moreover, actual average effective rainfall in Jamaica is about 2 m/yr (Lyew-Ayee, 2004).

The local maximum and minimum denudation rates were estimated by Smith *et al.* (1972) in the Cockpit karst areas:

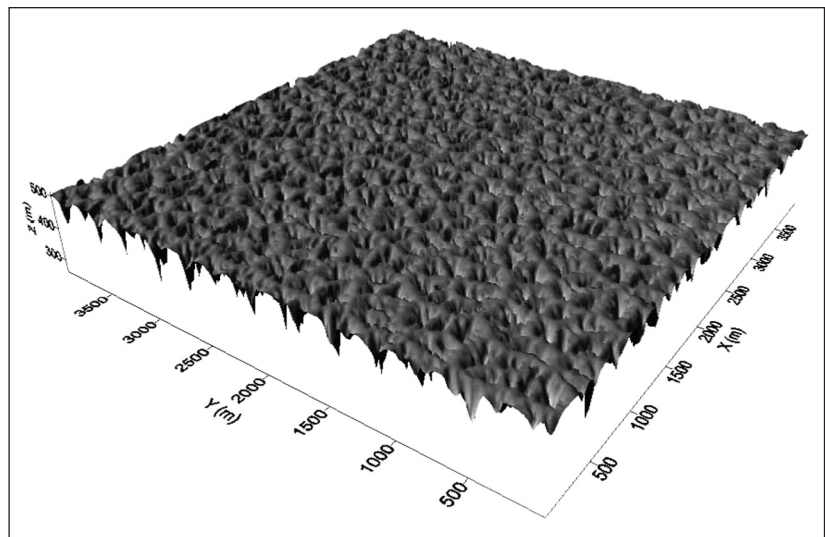
$$\begin{aligned} DR_{\min} &= (CaCO_3)_{\min} \frac{\langle P \rangle}{\rho_{CaCO_3}} \\ DR_{\max} &= (CaCO_3)_{\max} \frac{\langle P \rangle}{\rho_{CaCO_3}} \end{aligned} \quad (8)$$

limestone sediment deposition that occurred during the Oligocene and Eocene, the cockpit area of Jamaica is thought to have undergone a tectonic elevation of the ground, from subaqueous to approximately $Z_0 = 600 \text{ m}$ above sea level (Lyew-Ayee, 2004). Consequently, the karstification process is presumed to have only started during the Pliocene, when climatic conditions were favourable (Pfeffer, 1997).

The limestone plateau is discretized into 40000 Voronoï cells. Hydraulic conductivity

Fig. 5 – **Example of a simulated cockpit karst landscape.** Here, the climatic factor is 2 and the simulation time is 4 My. The DEM of a simulated landscape can be used to perform analysis. In this study, three analyses are carried out: average slope, relative relief and scaling characteristics.

Fig. 5 – **Exemple d'un paysage de karst en cockpit simulé.** Pour cette simulation, le facteur climatique est de 2 et le temps de simulation est de quatre millions d'années. Le MNT simulé, peut ainsi être analysé : calculs de la pente moyenne, du relief relatif moyen, des propriétés d'échelle.



where $(CaCO_3)$ (ppm) is the minimum or maximum hardness values of $CaCO_3$ which were founded in the cockpit karst areas and r_{CaCO_3} (kg/m^3) is volumetric weight of calcite. For values of the parameters given in the table 1, one obtains $DR_{min} = 48$ mm/ky and $DR_{max} = 240$ mm/ky. These denudation rates are local values of the limestone dissolution. DR_{min} occurs when subsurface flow is low whilst DR_{max} holds at higher values of subsurface flow. The average value of these denudation rates is 144 mm/ky which is very close to the typical value uses for cockpit karst terrains ($DR = 130$ mm/ky from Smith *et al.*,1976).

Results

The objective of simulations is to test the mathematical model (7), in order to assess its capacity to recreate geomorphologic processes typical of cockpit karst landscapes of the cockpit type.

Field data

There has been considerable research effort expended on morphometric analysis of karst landscapes aiming at producing quantitative data with which to test landscape evolution models (e.g. Brook and Hanson, 1991). Such research has been vastly aided by the advent of digital datasets from which DEMs can be produced. Lyew-Ayee (2004) used a suite of morphometric techniques to characterise and analyse and area covering 84 km² of the cockpit karst in Jamaica. He proposed several parameters, which could be used to distinguish cockpit karst from other relief types, of which we use the following: average slope, relative relief and scaling properties. Slopes are calculated from the DEM using a moving window – a 3x3 cell kernel – which is displaced throughout the grid. To calculate slopes, a third-order finite difference estimator is used that is based on the eight outer points of the moving window. Determination of relative relief needs to identify sinks and summits within the landscape. Then relative relief may be determined using sink and summit points. A cluster analysis of both the average slope and the average relative relief, that is the distance between depressions and summits of cockpits, was used (Lyew-Ayee, 2004) as a crucial measure in distinguishing cockpit and non-cockpit karst landscapes. The scaling properties give a picture of the scale of variations of the horizontal and vertical characteristics of the landscape (Weissel *et al.*, 1994). These scaling properties can be studied by conducting neighbourhood analysis of the grid. The range of elevation within a specified horizontal radius (from 10 m to 4000 m) is calculated. Results of the scaling characteristics are plotted as a log-log plot. Data show a major scaling break in the plot of vertical relief versus horizontal scale at around 100 m in the X axis. This value reveal the average spacing between sinks and summits which is significant with those observe in initial geometry conditions of the model (fig. 6). Then, data clearly show two scales to the landscape: before and after the scaling break. Data can thus be fitted by a linear equation before and after this breaking scale: $z = c(x,y)^m$ where c is an amplitude factor and m is a scaling exponent (tab. 2).

Parameters	Description	Unity	Value
Geometry			
X	Length: X direction	m	4000
Y	Width: Y direction	m	4000
Z ₀	Initial high of the topography	m	600
N	Number of Voronoï cells		40000
d	Density of sinks	km-2	25
Climatic factors, geological-lithological characteristics			
<P>	Precipitation	m/an	2
T _r	Storm duration	y	100 à 1000
T _b	Interstorm period	y	0 à 900
ρ _{CaCO3}	Volumetrie weight of calcite	kg/m3	2400
(CaCO3) _{min}	Minimum hardness of calcite	ppm	58
(CaCO3) _{max}	Maximum hardness of calcite	ppm	282
DR _{min}	Minimum denudation rate	mm/ky	48
DR _{max}	Maximum denudation rate	mm/ky	240

Table 1 – Values of the model's parameters.

Tableau 1 – Description et valeur des paramètres utilisés pour les simulations du modèle.

Name of the 'Cockpit Country' area	Slope (en°)	Relatif relief (en m)	c (before x = 100 m)	c (after x = 100 m)	m (before x = 100 m)	m (after x = 100 m)
Barbecue bottom	31	74	0.08	11.21	1.45	0.44
Quickstep	24	54	0.099	9.01	1.33	0.45
Windsor	26	57	0.097	9.77	1.32	0.41

Table 2 – Morphometric properties of the Cockpit Country study area (Lyew-Ayee, 2004).

Tableau 2 – Propriétés morphométriques des trois zones d'étude dans la région des « Cockpit Country » (Lyew-Ayee, 2004).

Model simulations

Starting from these boundary and initial conditions, and applying the model (7), is it possible to simulate the landforms of a cockpit karst at regional scale?

The model needs the input of many variable values (tab. 1) most of which are drawn from published sources

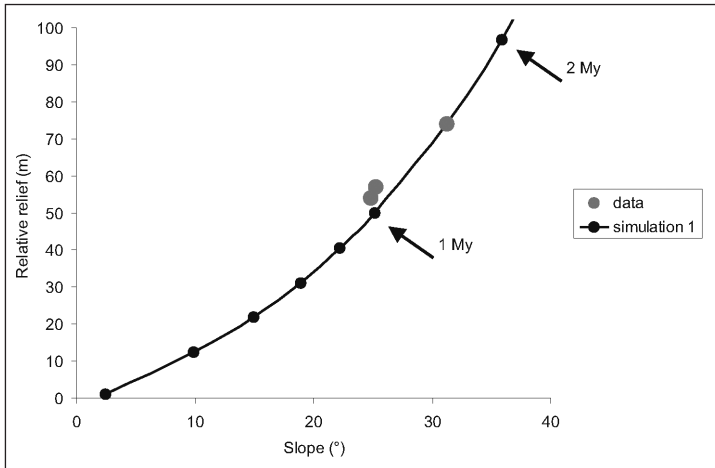


Fig. 6 – Evolution of average slope versus relative relief. The simulation 1 is computed with

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} = 1 \quad (\overline{T_r} = 1000 \text{ y and } \overline{T_b} = 0 \text{ y}).$$

Fig. 6 – Évolution de la pente moyenne en fonction du relief relatif moyen du paysage simulé. La simulation 1 correspond à un facteur climatique de

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} = 1 \quad (\overline{T_r} = 1000 \text{ ans et } \overline{T_b} = 0 \text{ an}).$$

(e.g. Smith *et al.*, 1972 or Lyew-Ayee, 2004). The only parameters which can be modified are the storm duration T_r and the interstorm period T_b . The duration ratio

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}}$$

can be thought of as an intermittency factor or a climate variability factor (Tucker and Bras, 2000). In the present simulations, we change the value of the ratio from 1 to 10 to explore a large range of climate scenarios, where increasing the ratio will increase the intermittency of rainfall. Using the parameter values given in table 1, three simulations were carried out with different values for the climatic factor

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}}$$

Simulations were run over a time period of 10 million years, based on published suggestions that karstification has been active here since the Pliocene (Pfeffer, 1997). The average hillslope and relative relief of the test-cockpit are computed every 10,000 years in order to note its evolution over time. Therefore, it is possible to compare the simulated values with the real average measurements of the test-cockpit in the studied area of Jamaica. The simulated landscapes (figure 5 is an example for

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} = 2 \text{ at } t = 4\text{My}$$

have been analysed in the same way as a DEM of a real cockpit karst landscape, with data collected for average slope, relative relief and scaling properties.

The results of the model simulations are shown in figures 6 to 9. Firstly, we can observe that the relative relief, the average slope and the scaling characteristics of the simulated landscape are quite similar to those observed in the field. These simulations lead to a key conclusion: using the chosen values of the model parameters, it is possible to recreate the morphometry of a cockpit karst landscape.

Slope versus relative relief

The results presented in figures 6, 7 and 8 on the evolution of slope and relative relief show that changing the climatic factor does not change the resultant landforms but only the time interval required to produce them. If the climatic factor is

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}}$$

the time needed to develop the same slope/relative relief value is

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} \text{ My.}$$

Therefore, the more the interstorm period increases, the longer the landscape takes to develop. Moreover, if one uses the slope/relative relief index to characterise the quality of the simulated landscape, the simulation is close to the real landscape when $1 \text{ My} \leq t \leq 1.5 \text{ My}$ for

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} = 1 \text{ (fig. 6),}$$

when $2 \text{ My} \leq t \leq 3 \text{ My}$ for

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} = 2 \text{ (fig. 7),}$$

and $t > 10 \text{ My}$ when

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} = 10 \text{ (fig. 8).}$$

So, according to known information on the length of time available for cockpit karst formation in Jamaica (e.g. Pfeffer, 1997), the climatic factor used by the model must be less than 10, which is equivalent to having total storm duration at least nine times greater than interstorm periods:

$$\frac{\overline{T_r} + \overline{T_b}}{\overline{T_r}} < 10 \Rightarrow \overline{T_b} < 9\overline{T_r} \quad (9)$$

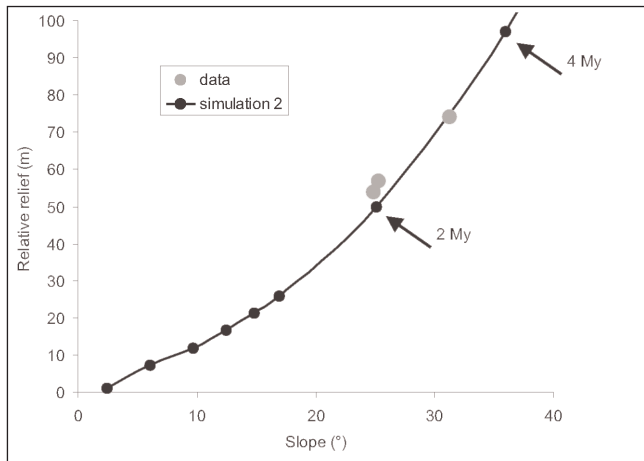


Fig. 7 – Evolution of average slope versus relative relief. The simulation 2 is computed with

$$\frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 2 \quad (\overline{T}_r = 500 \text{ y and } \overline{T}_b = 500 \text{ y}).$$

Fig. 7 – Évolution de la pente moyenne en fonction du relief relatif moyen du paysage simulé. La simulation 2 correspond à un facteur climatique de

$$\frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 2 \quad (\overline{T}_r = 500 \text{ ans et } \overline{T}_b = 500 \text{ ans}).$$

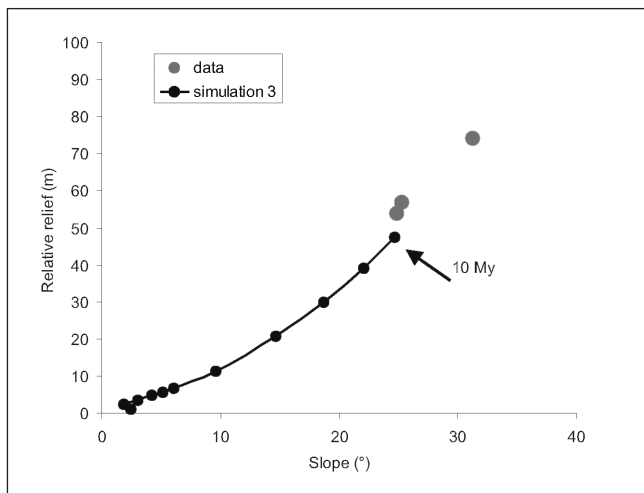


Fig. 8 – Evolution of average slope versus relative relief. The simulation 3 is computed with

$$\frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 10 \quad (\overline{T}_r = 100 \text{ y and } \overline{T}_b = 900 \text{ y}).$$

Fig. 8 – Évolution de la pente moyenne en fonction du relief relatif moyen du paysage simulé. La simulation 1 correspond à un facteur climatique de

$$\frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 10 \quad (\overline{T}_r = 100 \text{ ans et } \overline{T}_b = 900 \text{ ans}).$$

This result is very consistent with many authors' observations (e.g. Sweeting, 1972) that humid tropical climates, characterised by year-round abundant rainfall, are needed to produce a cockpit karst landscape.

Scaling characteristics

Results of the scaling analysis are presented on figure 9. For each simulation, only three scaling curves are plotted corresponding to the most relevant times. Field data from the Jamaican cockpit karst clearly show a scaling break at around 100 m (average distance between sinks and summits), whereas these two scales (before and after 100 m) are less distinct within the simulated landscapes. The reason is probably due to the standard deviation of the average distance between sinks and summits. In the simulations, this distance is about 109 m, and the standard deviation is large (40 m), so that most of the distances range between 40 m and 180 m when the range of the distance in the field is from 80 m to 120 m only (Lyew-Ayee, 2004).

Concerning the scale less than 100 m, one can notice that simulations begin only at 20 m on the horizontal scale which is the grid resolution of the model. The scaling characteristics of the simulated landscapes, before and after the scaling break, show a relatively good general trend. But, if we go into the details one can notice (fig. 10) that relative (%) and absolute (m) errors are lower after the scaling break. This is probably due to the size of the model grid: the size of the Voronoï cells is, in average, 20 m. As the average radius of a cockpit is 109 m, we only have 5 Voronoï cells to model the hillslope landform of a cockpit. Beyond the horizontal scale $(X,Y) = 100$ m, the landscape is analysed at a regional scale, so the grid size of the model (20 m) becomes less important.

The behaviour of the scaling characteristics curves *versus* the climatic factor is the same as that of the slope/relative relief index. Increasing the climatic factor, increases the time needed to obtain a landscape with similar landforms.

Discussion and conclusion

Simulations carried out in the model are compared to real cockpit karst landforms from the Cockpit Karst Country in Jamaica. Morphometric characteristics can be deduced from simulated karst and compared with those measured from DEMs of real karst landscapes. Three morphologic characteristics based on Lyew-Ayee' work (2004) were chosen to compare simulated and real karst: average slope, relative relief and scaling characteristics.

The similarity between the simulated and real karst morphology constitutes an essential stage in the validation of the hypotheses put forward on their genesis. Though it is a necessary stage, it is probably not a sufficient one, and further tests need to be carried out to test the validity of our model. The present study highlights how essential it is to take spatial anisotropy of denudation into account when studying the morphometric evolution of cockpit karst.

The spatial anisotropy of denudation corresponds to the heterogeneity of many variables, e.g. hydraulic conductivity or depth of soil, which are frequently observed in karstic systems and that we have encapsulated in a simple linear model. Further work could usefully be done in the field in quanti-

Fig. 9 – **Scaling properties of the simulated landscape.** These virtual landscapes are simulated for several climatic factors:

$$(A) \frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 1 \quad (\overline{T}_r = 1000 \text{ y and } \overline{T}_b = 0 \text{ y}),$$

$$(B) \frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 2 \quad (\overline{T}_r = 500 \text{ y and } \overline{T}_b = 500 \text{ y})$$

$$\text{and (C) } \frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 10 \quad (\overline{T}_r = 100 \text{ y and } \overline{T}_b = 900 \text{ y}).$$

Fig. 9 – **Les propriétés d'échelle des paysages simulés.** Ces paysages virtuels sont simulés pour différentes valeurs du facteur climatique :

$$(A) \frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 1 \quad (\overline{T}_r = 1000 \text{ ans et } \overline{T}_b = 0 \text{ an}),$$

$$(B) \frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 2 \quad (\overline{T}_r = 500 \text{ ans et } \overline{T}_b = 500 \text{ ans})$$

$$\text{et (C) } \frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r} = 10 \quad (\overline{T}_r = 100 \text{ ans et } \overline{T}_b = 900 \text{ ans}).$$

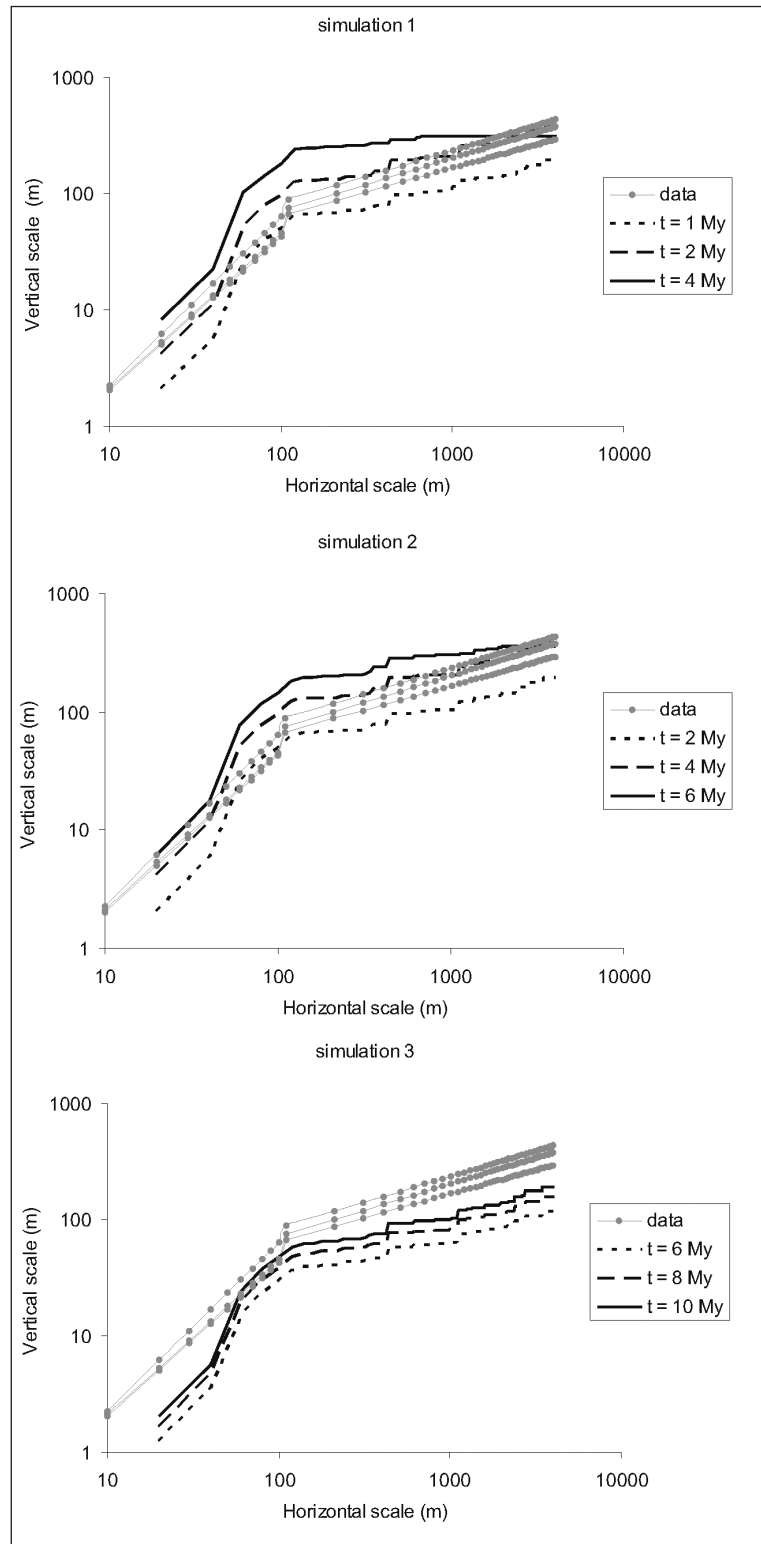
ifying different aspects of these spatial variations, and using them to refine our model if necessary.

Considering that underground dissolution has been shown to be a significant factor in the evolution of surface karst geomorphology, as highlighted in the epikarst, the simulations obtained using our model are encouraging. The spatial-anisotropic dissolution model reveals that the lowest topography locations on the hillslope receive the largest quantity of infiltrating water, and vice versa. Consequently, dissolution of the topography is more active downslope.

The aim of the present study on the morphology of cockpit karst was to simulate their evolution processes on the basis of various hypotheses on their genesis. The model was based on a spatial anisotropy of dissolution processes which has already been established as being necessary to simulate karst landscape development at the scale of individual cockpits by Fleurant *et al.* (2007). Denudation rate of the topography was linked with underground dissolution through the concept of the epikarst zone.

With regard to these results, several conclusions can be summarised as follow. Results clearly show that rainfall has to be greater than 1 m/y to simulate realistic cockpit terrains. This is in good agreement with observed data and received wisdom on climatic influence on karst topography (Sweeting, 1972). The climatic factor

$$\frac{\overline{T}_r + \overline{T}_b}{\overline{T}_r}$$



is an image of the rainfall intermittency over a geological time scale. This factor tends towards unity when rainfall frequency increases. Results of our simulations clearly show a strong impact of this factor on the shape of the obtained cockpit karst. Therefore, it seems that the morphology of cockpit karst terrains can be simulated only under conditions of heavy and very frequent rainfall over millions of year periods ($\overline{T}_b < 9 \overline{T}_r$).

Fig. 10 – **Model errors.** Example of relative (black curve in %) and absolute (grey curve in m) errors between the 'best' simulated curve (Simulation 1: $t = 1.2$ My) and data (Windsor).

Fig. 10 – **Erreurs du modèle.** Exemple des erreurs relative (courbe noire en %) et absolue (courbe grise en m) entre la meilleure des simulations (simulation 1 pour le temps $t = 1.2$ millions d'années) et les données de terrains (Windsor).

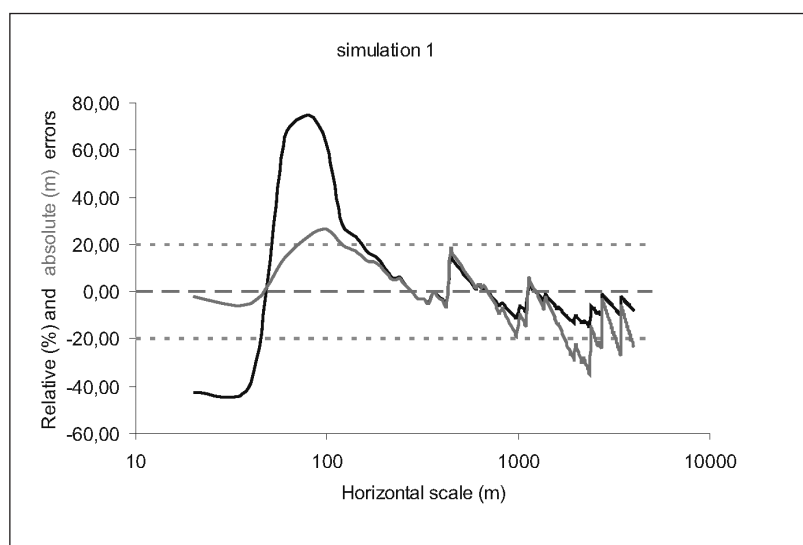
Based on the epikarst processes, and considering that the denudation rate of the surface topography is proportional to underground dissolution, we have been able to develop a cockpit karst landscape evolution model at regional scale. The model is based on a number of simplifying assumptions and could be improved in several areas if more field data become available. To compare real and simulated landscapes we have used three types of morphometric parameters: average slope, relative relief and scaling characteristics (Lyeu-Ayee, 2004). However, several other parameters could also be used to describe and compare modelled output with cockpit karst terrains and particularly geostatistic analysis or aspect analysis.

Acknowledgments

We thank Parris Lyew-Ayee for his constructive discussions on cockpit karst country in Jamaica and three referees for their help to improve and to clarify this manuscript.

References

- Ahnert F., Williams P.W. (1997) – Karst landform development in a three-dimensional theoretical model. *Zeitschrift für Geomorphologie N.F.*, Suppl. Bd., 108, 63-80.
- Braun J., Sambridge M. (1997) – Modelling landscape evolution on geological time scales: a new method based on irregular spatial discretization. *Basin Research* 9, 27-52.
- Brook G.A., Hanson M. (1991) – Double Fourier series analysis of cockpit and doline and karst near browns town, Jamaica. *Physical Geography* 12, 1, 37-54.
- Clemens T., Hückinghaus D., Sauter M., Liedl R., Teutsch G. (1997) – Modelling the genesis of karst aquifer systems using a coupled reactive network model. *Hard Rock Hydrosciences Proceedings of Rabat Symposium*, International Association of Hydrological Sciences Publ. S2, 241, 61-68.
- Corbel J. (1959) – Vitesse de l'érosion. *Zeitschrift für Geomorphologie* 12, 31-28.
- Coulthard T.J. (2001) – Landscape evolution models: a software review. *Hydrological Processes* 15, 1, 165-173.
- Coulthard T.J., Kirkby M.J., Macklin M.G. (1998) – Modelling the 1686 flood of Cam Gill Beck, Starbotton. upper Warfedale. In: Howard A, Macklin MG (Eds). *The Quaternary of the Eastern Yorkshire Dales*. Field Guide. Quaternary Research Association, London, 11-18.



- Densmore A.L., Ellis M.A., Anderson R.S. (1998) – Landsliding and the evolution of normal fault-bounded mountains. *Journal of Geophysical Research* 103, 15203-15219.
- Dietrich W. E., Bellugi D., Heimsath A. M., Roering J. J., Sklar L., Stock J. D. (2003) – Geomorphic transport laws for predicting the form and evolution of landscapes. In: P. Wilcock & R. Iverson (Eds) *Prediction in Geomorphology*, AGU Geophysical Monograph Series 135, 103-132.
- Dreybrodt W. (1988) – *Processes in Karst Systems*. Springer, Berlin, 452 p.
- Fleurant C, Tucker G.E. and Viles H.A. (2007) – Modèle d'évolution de paysages, application aux karsts en cockpit de Jamaïque. *Karstologia* 49, 33-42.
- Ford D.C. (1981) – Geologic Structure and a New Exploration of Limestone Cavern Genesis. *Transactions of the Cave Research Groups of Great Britain* 13, 81-94.
- Ford D.C., Williams P.W. (1989) – *Karst geomorphology and hydrology*. Unwin Hyman, London, 551 p.
- Groves C.G., Howard A.D. (1994) – Early development of karst systems 1. Preferential flow path enlargement under laminar flow. *Water Resources Research* 30, 10, 2837-2846.
- Howard A.D. (1994) – A detachment-limited model of drainage-basin evolution. *Water Resources Research* 30, 7, 2261-2285.
- Jennings J. N. (1985) – *Karst geomorphology*. Oxford, Blackwell, 510 p.
- Kaufmann G., Braun J. (1999) – Karst aquifer evolution in fractured rocks. *Water Resources Research* 35, 11, 3223-3238.
- Kaufmann G., Braun J. (2000) – Karst aquifer evolution in fractured, porous rocks. *Water Resources Research* 36, 6, 1381-1392.
- Kaufmann G., Braun J. (2001) – Modelling karst denudation on a synthetic landscape. *Terra Nova* 13, 5, 313-320.
- Lyew-Ayee P. (2004) – *Digital topographic analysis of cockpit karst: a morpho-geological study of the cockpit country region, Jamaica*. Ph.D. Thesis, University of Oxford, 210 p.
- Pfeffer K.H. (1997) – Paleoclimate and tropical karst in the west Indies. *Zeitschrift für Geomorphologie, N.F.*, Suppl. Bd., 108, 5-13.
- Singhal B., R. Gupta (1999) – *Applied Hydrogeology of Fractured Rocks*. Kulwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 400 p.

- Smith D.I., Drew D.P., Atkinson T.C. (1972)** – Hypotheses of karst landform development in Jamaica. *Transaction Cave Research Group of Great Britain* 14, 12, 159-173
- Sweeting M.M. (1972)** – *Karst Landforms*. MacMillan, London, 352 p.
- Trudgill S.T. (1985)** – *Limestone Geomorphology*. London, Longman, 196 p.
- Tucker G.E., Slingerland R.L. (1994)** – Erosional dynamics, flexural isostasy, and long-lived escarpments: a numerical modeling study. *Journal of Geophysical Research* 99, 12229-12243.
- Tucker G.E., Gasparini N., Bras R.L., Lancaster S.L. (1999)** – A 3D Computer Simulation Model of Drainage Basin and Floodplain Evolution: Theory and Applications. *Technical report prepared for U.S. Army Corps of Engineers Construction Engineering Research Laboratory*, 623 p.
- Tucker G.E., Bras R.L. (2000)** – A stochastic approach to modeling the role of rainfall variability in drainage basin evolution. *Water Resources Research* 36, 7, 1953-1964.
- Tucker G.E., Lancaster S.T., Gasparini N., Bras R.E. (2001)** – The channel-hillslope integrated landscape development model (CHILD). In: Harmon and Doe (Eds) *Landscape Erosion and Evolution Modeling*, Kluwer Publishing, Dordrecht, 349-388.
- Versteeg H.K., Malalasekera W. (1995)** – *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. Longman, New York, 257 p.
- Weissel J.K., Pratson L.F., Malinverno A. (1994)** – The length-scaling properties of topography. *Journal of Geophysical Research* 99(B7), 13,997-14,012.
- Willgoose G.R., Bras R.L., Rodriguez-Iturbe I. (1991)** – A physically based coupled network growth and hillslope evolution model, 1, theory. *Water Resources Research* 27, 1671-1684.
- Williams P.W. (1983)** – The role of the subcutaneous zone in karst hydrology. *Journal of Hydrology* 61, 45-67.
- Williams P.W. (1985)** – Subcutaneous hydrology and the development of doline and cockpit karst. *Zeitschrift für Geomorphologie, N.F.*, 29, 4, 463-482.
- White W.B. (1984)** – Rate processes: chemical kinetics and karst landform development. In La Fleur (Eds), *Groundwater as a geomorphic agent*, Allen and Unwin, 227-248.

Article soumis le ??????, accepté le ?????? 2007.

*JOURNAL OF THE GEOLOGICAL
SOCIETY*

Fleurant C., Tucker G. and H.A. Viles, 2008, A cockpit karst evolution model, *Journal of the Geological Society, Special issue : Landscape Evolution : Denudation, Climate and Tectonics over Different Time and Space Scales*, 296, p. 47-62.

Modelling cockpit karst landforms

C. FLEURANT¹, G. E. TUCKER² & H. A. VILES³

¹*Département Paysage, Institut National d'Horticulture, 49045 Angers, France
(e-mail: cyril.fleurant@inh.fr)*

²*Department of Geological Sciences, Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences, University of Colorado, Boulder, CO, USA*

³*Centre for the Environment, University of Oxford, South Park, Oxford OX1 3QY, UK*

Abstract: The purpose of this article is to present a model of the formation processes of cockpit karst landscapes. The CHILD software was used to simulate landscape evolution including dissolution processes of carbonate rocks. After examining briefly how the CHILD model operates, two applications of this model involving dissolution of carbonate rocks are presented. The simulated landscapes are compared with real landscapes of the Cockpit Country, Jamaica, using morphometric criteria. The first application is based on the hypothesis that dissolution of carbonate rocks is isotropic over time and space. In this case, dissolution is constant throughout the whole area studied and for each time step. The simulated landscapes based on this hypothesis have morphometric features which are quite different from those of real landscapes. The second application considers that dissolution of carbonate rocks is anisotropic over time and space. In this case, it is necessary to take into account subsurface and underground processes, by coupling surface runoff and water infiltration into the fractured carbonates.

Over large temporal and spatial scales, morphometric evolution of landscapes is governed by a number of complex processes and factors: climatic conditions, erosion and sedimentation. A better understanding of landscape evolution requires numerical tools that make it possible to explore such complex processes. Over the last 10 years, particular focus has been put on the development of such models (Willgoose *et al.* 1991; Beaumont *et al.* 1992; Braun & Sambridge 1997; Kaufman & Braun 2001; Tucker *et al.* 2001*a, b*). The main models are SIBERIA (Willgoose *et al.* 1991), GOLEM (Tucker & Slingerland 1994), CASCADE (Braun & Sambridge 1997), CAESAR (Coulthard *et al.* 1998) and CHILD (Tucker *et al.* 1999), as reviewed in Coulthard (2001). Very few of them explore the dissolution processes of carbonates and their role in the production of karst morphologies. Consequently, the aim of the present study is to model the morphometric evolution of cockpit karst landscapes, including the various geomorphic processes involved.

There has been considerable research into quantification of underground karstic processes (Day 1979*a*; Gunn 1981; Groves & Howard 1994; Clemens *et al.* 1997; Siemers & Dreybrodt 1998; Kaufman & Braun 1999, 2000; Bauer *et al.* 2005), but very few studies have explored dissolution by surface waters (Ahnert & Williams, 1997; Kaufman & Braun 2001). Starting from a three-dimensional network and using simple

erosion laws, Ahnert & Williams (1997) recreated tower karst landscapes, whilst Kaufman & Braun (2001) demonstrated how CO₂-enriched surface runoff shapes landscapes typical of large karstic valleys through dissolution processes.

Karst landscapes offer a wide variety of morphometric styles depending on numerous variables (White 1984) such as temperature, partial pressure of carbon dioxide and precipitation. Changing the value of one of the variables can modify the landscape and result in doline karst, cockpit karst or tower karst.

Cockpit karst landscapes are usually described as a succession of summits and depressions with irregular size and position. Several morphometric techniques have been developed to describe the geometry of cockpit karst landscapes (Day 1979*b*; Lyew-Ayee 2004).

However, within cockpit karst the depressions are often said to be star-shaped (Sweeting 1972). Grund (1914 in Sweeting 1972) put forward a hypothesis concerning their formation, i.e. that cockpit karsts with star-shaped depressions could be more extensively developed doline karsts. Cockpit karst landscapes are usually thought to occur only in humid tropical areas. Only regions with total precipitation exceeding 1500 mm a year are likely to develop this type of karst (Sweeting 1972). However, rain is not enough; very hard carbonates and a pre-existing

fracture network are also necessary. In fact, the geological features and structure are a major component in the formation of cockpit karst terrains (Lyew-Ayee 2004).

The objective of the present paper was to describe the integration of carbonate dissolution processes in the CHILD landscape evolution model (Tucker *et al.* 2001a, b). Interest in integrating dissolution into the model is governed by the need to understand the evolution of cockpit karst landscapes. In the present paper, we describe the functioning principles of the CHILD model and consider the contribution of the new processes used to model karst dissolution.

Two applications of this karst dissolution model are described: isotropic time–space dissolution and anisotropic time–space dissolution. Both applications will be tested on the slope scale, that is at the scale of one single cockpit.

The morphometric features of the simulated cockpits will be compared with the geometrical properties of real cockpits, thanks to data collected in the typesite cockpit karst area in Jamaica and recently highlighted by Lyew-Ayee (2004).

Geomorphologic model

The CHILD model (Channel–Hillslope Integrated Landscape Development) is a numerical model of landscape evolution (Tucker *et al.* 2001a, b). The evolution of topography over time is simulated through interaction and feedback between surface runoff, erosion and the transport of sediment. CHILD is used for modelling a large number of geomorphic processes at the scale of a drainage basin. In the CHILD model, the evolution of topography (z) over

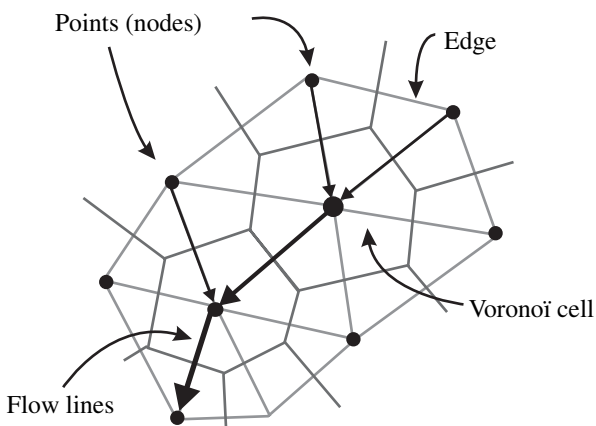


Fig. 1. Schematic illustration of the spatial framework in the CHILD model (after Tucker *et al.* 1999) and illustration of steepest-descent flow routing in TIN framework.

time (t) results from the combination of several factors:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{creep}} + \frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{erosion}} + \frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{tectonic}} + \frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{dissolution}} \quad (1)$$

These various factors are numerically solved using a particular spatial framework (Fig. 1): Voronoi polygons (Braun & Sambridge 1997). The first three factors are present in all landscape evolution models mentioned above. A detailed description of the spatial framework can be found in Tucker *et al.* (1997, 1999, 2001a, b). The last factor concerns dissolution and this is precisely what is original about the present study.

Mass transfer onto slope

The transport of sediments is modelled through a diffusion equation (McKean *et al.* 1993; Kooi & Beaumont 1994; Braun & Sambridge 1997):

$$\frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{creep}} = k_d \Delta^2 z \quad (2)$$

where k_d (m^2/s) is the diffusion coefficient of sediment transport. Beaumont *et al.* (1992) describe k_d in terms of physics by associating it with both lithology and climate. Thus, the values of k_d tend to decrease in the case of resistant rocks, and to increase under harsh climates. The values of k_d vary from 0.0001 to 0.01 m^2/y (e.g. Martin & Church 1997). Given the geological and climatic conditions of the cockpit karst typesite in Jamaica, we should expect low values for k_d , but since data on specific values is lacking, we have put several values to the test.

Mechanical erosion and deposition

Mechanical erosion and deposition are modelled using a continuity equation (Tucker *et al.* 2001a, b):

$$\frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{erosion}} = -\Delta q_s \quad (3)$$

where q_s (m^2/s) is the sediment flux per unit width. In the case of limited transport fluvial processes, the transported flux of sediments q_s is expressed as a power law (Willgoose *et al.* 1991; Tucker & Bras 1998):

$$q_s = \frac{1}{\rho_{\text{CaCO}_3} (1 - \omega)} k_f (k_t Q_{\text{sur}}^{m_f} S^{n_f} - \tau_c)^p \quad (4)$$

where ρ_{CaCO_3} (kg/m^3) is sediment mass density – here carbonate rock, ω is sediment porosity, S is topographic gradient and τ_c (N/m^2) is critical shear stress; k_f (kg m/N/y), k_t (N y/m^4), m_f , n_f and p are parameters.

The values of the equation (4) parameters can be estimated using the Einstein–Brown transport equation (Bogaart *et al.* 2003). Equation (4) may be written as follows:

$$q_s = 40\rho_{\text{CaCO}_3} V \sqrt{g(s-1)d_{50}^3} \times \left(\frac{1}{(s-1)d_{50}} \right)^3 Q_{\text{sur}}^{1.8} n^{1.8} S^{2.1} \quad (5)$$

where $s = \rho_{\text{CaCO}_3}/\rho_w$ is the specific density of sediment grains, d_{50} (m) is the median sediment grain size, n is Manning's resistance coefficient and V is the fall velocity of the sediment grain,

$$V = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\mu^2}{gd_{50}^3(s-1)}} - \sqrt{\frac{36\mu^2}{gd_{50}^3}}(s-1). \quad (6)$$

with $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{CaCO}_3} = 2700 \text{ kg/m}^3$, $d_{50} = 10^{-3} \text{ m}$, $n = 0.03$ as specific values for these parameters, we have:

$$q_s = 0.02Q_{\text{sur}}^{1.8} S^{2.1}. \quad (7)$$

Correspondence to equation (4) gives $k_f = 1.0 \text{ kg m/N/y}$, $k_t = 0.125 \text{ N y/m}^4$, $m_f = 1.8$, $n_f = 2.1$, $\tau_c = 0.0 \text{ N/m}^2$ and $p = 1.0$.

Tectonic movements

Movements resulting from tectonic processes in general can be simulated using a simple model:

$$\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\text{tectonic}} = U \quad (8)$$

where U (m/s) is the uplift velocity or the base level change rate.

In the present case, we will consider that tectonic movements are constant in each grid of the model. In view of parameterization of this equation, the history of our study site should be looked at.

After the deposit of limestone sediments during the Oligocene and Eocene, the area apparently underwent a tectonic lift, resulting in its plateaus rising to a height of 600 m above sea level (Lyew-Ayee 2004). Thus, karstification would have started to occur only at the beginning of the Pliocene, when climatic conditions were favourable (Versey 1972; Pfeffer 1997). Because of the lack of

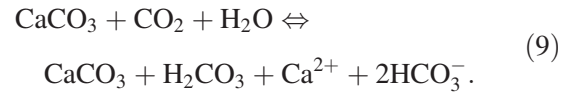
information, we can consider here that the impact of tectonics happened before karstification. As a result, equation (8) can be simplified, by supposing that $U = 0 \text{ m/s}$.

Dissolution processes

Carbon dioxide (CO_2) contained in the atmosphere is dissolved by precipitation and can therefore be found in soil, as well as surface water and groundwater. The dissolution of carbon dioxide produces carbonic acid, H_2CO_3 , which is the major factor for the dissolution of calcite (CaCO_3) contained in carbonate rocks.

Such dissolution may occur in two totally different contexts: open systems where carbonates are in direct contact with atmospheric phenomena; and closed systems, within tight fractures, for example. In open systems, precipitation comes into contact with carbonate rocks and the dissolution of the latter will then depend on the quantity of water in contact and on the hydrodynamic nature of the flows (Dreybrodt 1988).

The calcite dissolution reaction in an open system can be expressed as follows (Trudgill 1985):



It is essential to determine the carbon dioxide flux F ($\text{mol/m}^2/\text{s}$) since it helps to determine the quantity of dissolved calcite and consequently the quantity of eroded carbonate rocks. This flux can be expressed as follows (Buhmann & Dreybrodt 1985; Kaufman & Braun 1999):

$$F = k_1 \left(1 - \frac{[\text{Ca}^{2+}]}{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq}}} \right) \quad \text{if } [\text{Ca}^{2+}] \leq [\text{Ca}^{2+}]_s \quad (10)$$

$$F = k_2 \left(1 - \frac{[\text{Ca}^{2+}]}{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq}}} \right)^4 \quad \text{if } [\text{Ca}^{2+}] > [\text{Ca}^{2+}]_s \quad (11)$$

where k_1 ($\text{mol/m}^2/\text{s}$) and k_2 ($\text{mol/m}^2/\text{s}$) are kinetic constants of the dissolution and $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq}}$ (mol/m^3) is the equilibrium calcium concentration, that is when the solution is saturated with calcium. $[\text{Ca}^{2+}]_s$ represents the threshold of calcium concentration at which the flux F shifts from low-order kinetics to high-order kinetics. Dreybrodt and Eisenlohr (2000) show that, when the solution concentration is close to equilibrium, the carbonate dissolution rate decreases because of impurities (phosphates and silicates). Therefore, beyond a threshold value $[\text{Ca}^{2+}]_s$, the value of the flux F

significantly decreases in a non-linear way (Fig. 2). The value of this threshold may vary by $0.7 \leq [\text{Ca}^{2+}]_s \leq 0.9$ (Kaufman & Braun 1999).

In the case of low-order kinetics, hydration of CO_2 and ion transport through molecular diffusion are two rate-limiting factors. The value of the coefficient k_1 is (e.g. Buhmann & Dreybrodt 1985):

$$k_1 = k_0 \left(1 + \frac{k_0 \delta}{6D_{\text{Ca}}[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq}}} \right)^{-1} \quad (12)$$

where k_0 ($\text{mol}/\text{m}^2/\text{s}$) is a constant value, D_{Ca} (m^2/s) is molecular diffusion coefficient of calcium and δ (m) is the diffusion boundary layer.

In the case of high-order kinetics, the rate-limiting factor is the dissolution of calcite at the interface between rock and the solvent. The value of the constant k_2 is (e.g. Dreybrodt 1996):

$$k_2 = k_1 (1 - [\text{Ca}^{2+}]_s)^{-3}. \quad (13)$$

The coefficient k_2 is several orders higher than k_1 .

The case of time-space isotropic dissolution

Dissolution of carbonate rocks is also called denudation. Several denudation models have been proposed (e.g. Corbel 1959; Ford 1981). White's (1984) maximum denudation model is the most comprehensive (Dreybrodt 1988; White 1988):

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{\text{dissolution}} = DR = - \frac{1000 m_{\text{Ca}} (P - E)}{\rho_{\text{CaCO}_3}} \times \left(\frac{K_1 K_C K_H P_{\text{CO}_2 \text{open}}}{4 K_2 \gamma_{\text{Ca}} \gamma^2 \text{HCO}_3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

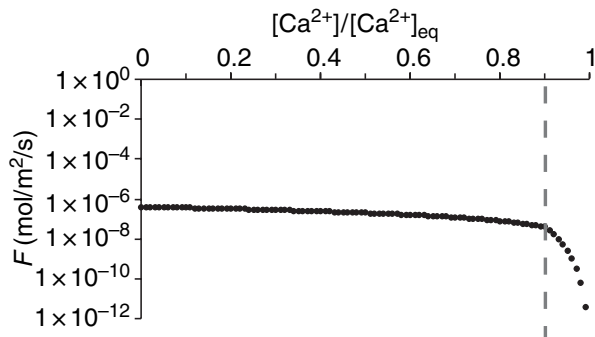


Fig. 2. Dependence of dissolution rates on saturation ratio $[\text{Ca}^{2+}]_s/[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq}}$. Owing to inhibition, the non-linear surface rates close to equilibrium are so slow that they become rate-limiting. The vertical line separates the region of linear kinetics from that of non linear kinetics ($[\text{Ca}^{2+}]_s = 0.9[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq}}$).

where DR (m/s) is the denudation rate, spatially uniform over all the study area, E (m/s) is the evapotranspiration, $(P - E)$ (m/s) is the effective precipitation, m_{Ca} (kg/mol) is the atomic weight of the calcite and ρ_{CaCO_3} (kg/m^3) is the volumic weight of the calcite, K_1 (mol/m^3), K_2 (mol/m^3), K_C (mol^2/m^6) and K_H ($\text{mol}/\text{m}^3/\text{atm}$) are equilibrium constants which only depend on temperature, and $P_{\text{CO}_2 \text{open}}$ (atm) is the pressure of carbon dioxide in open system.

The values of carbon dioxide pressure are governed by local factors and may thus be directly related to climatic conditions (Brook *et al.* 1983):

$$\log P_{\text{CO}_2} = -3.47 + 2.09(1 - e^{-0.00172ER}). \quad (15)$$

In Jamaica for example, $ER \approx 1000$ mm/a, which gives $P_{\text{CO}_2} \approx 0.0176$ atm. This value is consistent with the values Smith & Atkinson (1976) gave for tropical areas: $P_{\text{CO}_2} \approx 0.01$ atm.

Equation (14) requires no adjustment and combines three climatic variables: temperature, carbon dioxide pressure and precipitation. When White's (1984) model is applied, it is assumed that denudation is maximal and constant all over the studied area. Variations in topography over time, as given in equation (1), will also be constant. Therefore, this model is isotropic in space and time. As an example, the denudation value of cockpit karst is 0.13 m/k years approximately.

The case of time-space anisotropic dissolution

Karstification is a complex process, and it is difficult to establish clear and quantifiable relations between its various components: calcite dissolution, surface runoff and groundwater flow. Many authors assume that there is a close relation between surface denudation, hence a decrease in the topographic elevation, and subsurface dissolution processes.

Dissolution of carbonates in a network of fractures results in their disappearing into the depth of the karst. This complete dissolution of materials results in the topographic surface sinking and the resulting depressions filling with soil. A description of such processes can be found in the epikarst concept (e.g. Ford & Williams 1989). Consequently, the higher the subsurface dissolution of the fractured medium is, the quicker the overlying topography subsides. This epikarst concept is the starting point of the introduction to the anisotropic dissolution of carbonates.

Epikarst functions as follows (Williams 1985): take a carbonate rock with a gently sloping

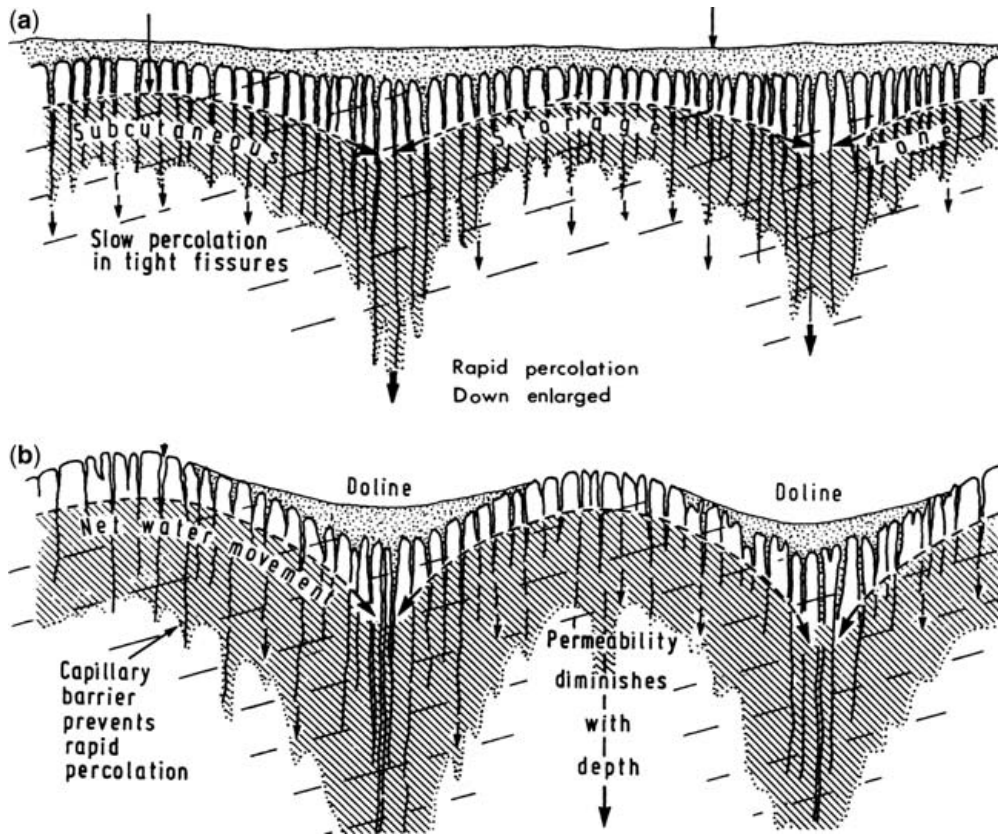


Fig. 3. Illustration of the subcutaneous (or epikarstic) zone in karstified rocks (after Williams 1985). Limestone terrains inherit a three-dimensional permeability from the structural features of the bedrock (a). The interconnected fissure network provides solute pathways. Fissures are considerably widened by solution. Preferred flow paths develop at the base of the epikarstic zone. These are enhanced by solution and become increasingly dominant (b).

topography and a network of fractures (Fig. 3a). Precipitation will both run across surface and infiltrate the network of fractures. Since fractures narrow rapidly as they get deeper, water located in the subcutaneous zone is perched and percolates downward, from high points towards lower points. The shape of this hydrodynamic flow globally corresponds to that of the overlying topography. Consequently, water in the subcutaneous zone usually flows down to lower points of the perched water table, that is to say to the lower points of topography. This large inflow of water results in a quicker dissolution in the fractures located at the lower points of the perched water table and consequently enhancement of the topography (Fig. 3b). Positive feedback can be noted between the water flow in the subcutaneous zone and dissolution in the fractures (Bauer *et al.* 2005). The present approach is a good example of the time–space anisotropy of carbonate dissolution: the rate of dissolution depends on the initial position of rocks with regard to slope and hence water flow.

Consequently, it can be noted that the implementation of the hydraulic functioning of the epikarst in our model requires coupling surface

flow, subsurface flow and the underground dissolution of fractured carbonates.

Surface and sub-surface flows

The CHILD model allows several patterns of surface runoff: either the Hortonian runoff or runoff as a result of excessive saturation of the soil. Such procedures are used to simulate surface runoff but they do not take into account local infiltration in each cell of the model. In the present case, the point is to implement the hydrodynamics of an epikarst, that is to say being able to determine the quantity of runoff water and infiltrating water into each cell of the model. For this purpose, we chose a simple flow procedure which considers hydrodynamics of our system at cell scale (Figs 1 & 4):

$$\begin{aligned}
 Q_{in} &= Q_{insur} + Q_{insub} + P \times A_i \\
 Q_{sub} &= \min(Q_{in}, Q_{subcapacity}) \\
 Q_{sur} &= \max(Q_{in} - Q_{sub}, 0)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

where Q_{in} (m^3/s) is sum of the surface (Q_{insur} , m^3/s) and the subsurface (Q_{insub} , m^3/s) flows into the cell under consideration. P (m) is precipitation and A (m^2) surface of the cell. The volume

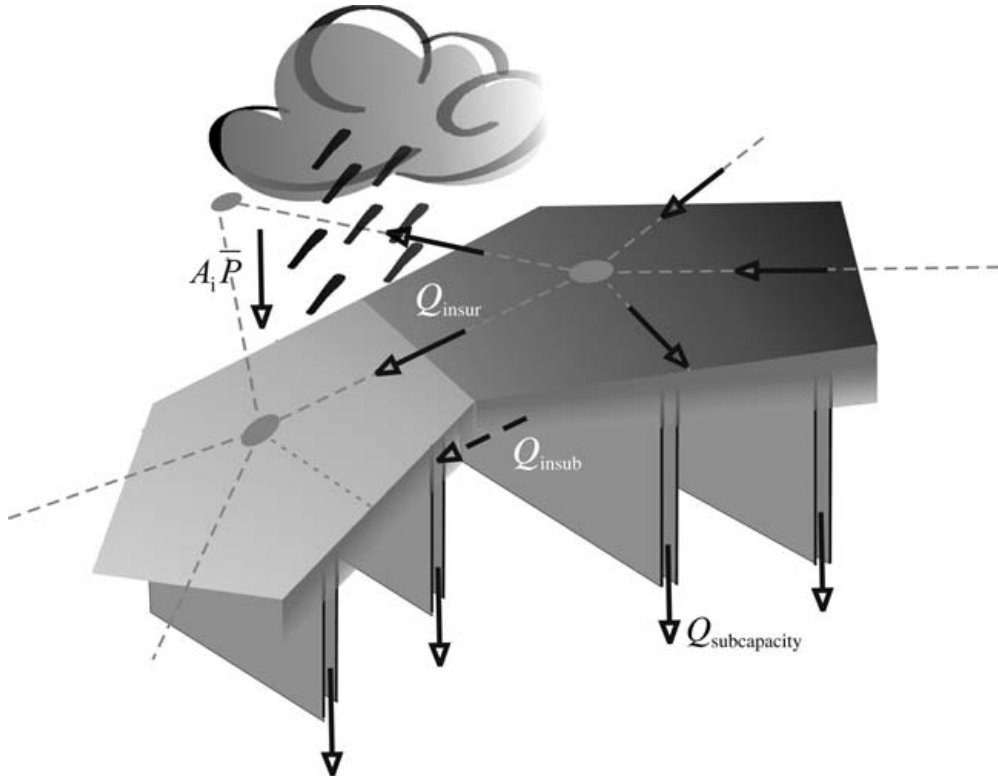


Fig. 4. Using a flow routing described in the text, surface runoff and subsurface flow are computed by means of a fracture network.

of infiltrating water ($Q_{\text{subcapacity}}, \text{m}^3/\text{s}$) varies according to the hydraulic conductivity of the associated cell. The volume of water that does not infiltrate ($Q_{\text{sur}}, \text{m}^3/\text{s}$) is the surface runoff. Such a procedure requires that hydraulic conductivity is assigned to each cell. It will then be possible to simulate the hydrodynamic functioning of the epikarst.

Hydrodynamics in one fracture

In order to determine the hydraulic conductivity of a fracture network, first the hydraulic conductivity of a single fracture should be expressed. We assume that each fracture in the network is represented by two parallel planes separated by a distance of a_0 (m), corresponding to the fracture aperture.

In the case of laminar flow, the flow rate within the fracture is expressed using Poiseuille's equation (Beek *et al.* 1999):

$$Q_{\text{fracture}} = \frac{g}{12\mu} a_0^3 b_0 M \frac{h}{L} \quad (17)$$

where g (m/s^2) is the gravity, μ (m^2/s) the dynamic viscosity, b_0 (m) the fracture width, h (m) the hydraulic head, L (m) the fracture depth and $M = -0.575(a_0/b_0) + 1$ a geometric parameter.

The dissolution of calcite on the inner surfaces of the fracture results in the fracture widening, and an

increasing flow rate. Beyond a determined value, the flow rate becomes turbulent and the equation (17) cannot be applied any longer. The threshold between laminar and turbulent flow is computed using the Reynolds number (Marsily 1986):

$$Re = \frac{2 \times 10^6 Q_{\text{fracture}}}{a_0 + b_0}. \quad (18)$$

Flow rate is turbulent when $Re > 2000$. The linear relation between flow rate and the hydraulic load no longer exists and the flow rate is computed using the Darcy–Weissbach equation (Dreybrodt 1988):

$$Q_{\text{fracture}} = \sqrt{\frac{4g(a_0 b_0)^3 h}{f(a_0 + b_0)L}} \frac{h}{|h|} \quad (19)$$

where f is the friction factor,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{r(a_0 + b_0)}{7.42 a_0 b_0} + 2.51 \nu \frac{(a_0 + b_0)^3 L}{16 g (a_0 b_0)^3 h} \right) \quad (20)$$

The roughness value of the fracture r (m) is approximately 2% that of its aperture (Romanov *et al.* 2003).

Consequently, the maximum flow rate which can infiltrate into a fracture with simple geometry is known. We can then deduce the maximum flow

rate ($Q_{\text{subcapacity}}$) which can infiltrate into a network of parallel fractures of a cell (Bear *et al.* 1993; Singhal & Gupta 1999):

$$Q_{\text{subcapacity}} = \frac{Q_{\text{fracture}} N_{\text{fracture}}}{s} \quad (21)$$

where s (m) is the mean distance between fractures and N_{fracture} the number of fractures of the cell.

Dissolution inside a fracture

As previously noted, the calcite present on the fracture walls dissolves, thus widening the fractures over time. Such a process is a typical profile of the evolution of fracture widening. This profile is the result of differential kinetics along the fracture (Dreybrodt 1996; Dreybrodt & Gabrovsek 2000):

$$F_{\text{lower}}(x) = k_1 \left(1 - \frac{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{in close}}}{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}} \right) e^{-\frac{2k_1(a_0+b_0)x}{Q[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}}}$$

for $x \leq x_s$

(22)

$$F_{\text{higher}}(x) = k_2 \left[\frac{6k_1(a_0+b_0)(x-x_s)}{Q[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}} + \left(1 + \frac{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{sclose}}}{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}} \right)^{-3} \right]^{-\frac{4}{3}}$$

for $x > x_s$

$$x_s = \frac{Q[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}}{2k_1(a_0+b_0)} \ln \left(\frac{1 - \frac{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{in close}}}{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}}}{1 - \frac{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{sclose}}}{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}}} \right)$$

where $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{in close}}$ is the calcium concentration at the entrance of the fracture, $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq close}}$ is the calcium concentration at equilibrium and *close* refers to a closed system, a deep fracture.

Beyond a certain distance x_s (m), the flow related to low-order kinetics quickly decreases (Fig. 5). Consequently, if high-order kinetics were not taken into account beyond x_s , dissolution would be insignificant. The evolution of fracture widening can then be computed (Dreybrodt *et al.* 1999; Kaufmann 2003):

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{m\text{Ca}}{\rho_{\text{CaCO}_3}} F_{\text{higher}}(L). \quad (23)$$

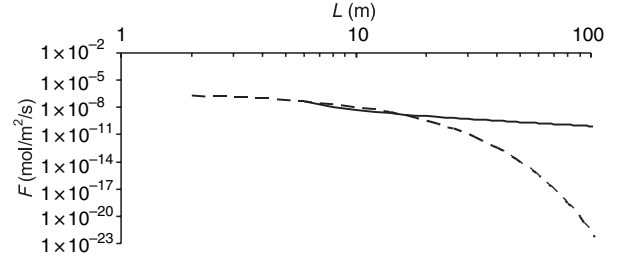


Fig. 5. Dissolution rates along the uniform fracture. Fractures widening take place and is controlled by a positive feedback between dissolution and flow into the fracture. The dashed line represents the dissolution rates for linear kinetics valid up to equilibrium. Note the steep decay in dissolution rates by ten orders of magnitude in the first 70 m of the fracture. The solid line shows the dissolution rates for non-linear kinetics. Here the rates drop much more slowly in a hyperbolic manner, and sufficient dissolution is still active at the exit to widen the fracture.

In the present study, equations expressing the dissolution along the inner walls of the fracture and those expressing fracture hydrodynamics have been taken into account. These coupled equations represent the hydraulic functioning of the epikarst and correspond to our anisotropic time–space dissolution model.

Results

The purpose of the present study is to understand the evolution of cockpit karst terrains. Firstly, we have described the integration processes of carbonate rock dissolution into the CHILD model. We have developed two types of possible scenarios relating to cockpit karst formation. The first scenario involves isotropic time–space dissolution. The second one is an anisotropic time–space dissolution model and it corresponds to an epikarst concept.

In order to know whether the processes involved in both approaches could recreate the geomorphometry of cockpit karst terrains, it is necessary to compare the simulated landscapes with the real ones. To do so, we will use Lyew-Ayees's (2004) in-depth study, carried out over 84 km² in the cockpit karst area of Jamaica. Data used result from geostatistical calculations based on a high-resolution digital elevation model. The GIS digital tools were used to calculate a large number of morphometric parameters linked to these typical landscapes, e.g. roughness, summit and depression density. In his study, Lyew-Ayee (2004) put forward two morphometric criteria typical of cockpit karst landscapes: average slope and relative relief. Results from morphometric analysis reveal

Table 1. Morphometric properties of the Cockpit Country study area (Lyew-Ayee 2004)

Name	Slope (deg)	Relative relief (m)
Barbecue Bottom	32.63	74.2
Quickstep	26.04	54.11
Windsor	27.45	57.08
Elderslie	23.46	47.46
Nassau Valley	22.99	45.97
Queen of Spain's Valley	21.86	43.54

that the average slope of the cockpit karst country (Jamaica) varies from 21.86 to 32.63°. Similarly, the relative relief varies from 43.54 to 77.02 m (Table 1). Slopes are calculated from the DEM using a moving window – a 3 × 3 cell kernel – which moved throughout the grid. To calculate slopes, the method is a third-order finite difference estimator which uses the eight outer points of the moving window.

Determination of relative relief needs to identify sinks and summits of the landscape. Then relative relief may be determined using sink and summit points. A cluster analysis of both the average slope and the average relative relief was used (Lyew-Ayee 2004) as a crucial measure in distinguishing cockpit and non-cockpit karst landscapes.

Reference simulations

Reference simulations are implemented without taking carbonate dissolution into account; the last component of the equation (1) is then nil $\frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{dissolution}} = 0$ m/s. Such reference simulations aim to provide comparison criteria with those simulations using isotropic and anisotropic dissolution approaches, as described above.

Measurement data obtained by Lyew-Ayee (2004) from a DEM gave the initial geometry of our system. Consequently, we have chosen to study a limestone plateau discretized into 4600 Voronoi cells. The dimensions of our system correspond to average measurements carried out by Lyew-Ayee (2004) in the cockpit area (Fig. 6):

- a star-shaped distribution of depressions towards which runoff is initially directed on a 1% hillslope;
- a 220 m distance between these depressions.

As mentioned above, we carried out the present study at single cockpit scale, in order to test the processes under consideration. Once the processes are validated, it will be possible to extend the scale of the study to a whole cockpit country.

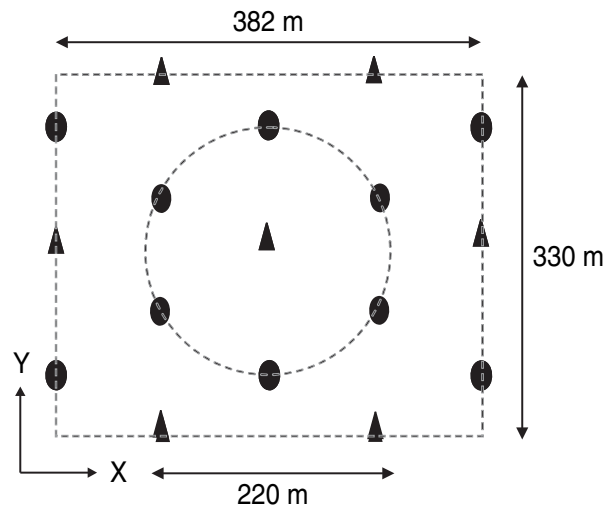


Fig. 6. Design of the simulated area: depressions (circles) are star-shaped around summits (triangles). Distance between summits and depressions is 110 m, which corresponds to an average value from Lyew-Ayee's (2004) morphometric data.

Five reference simulations were performed (Fig. 7) with varying annual precipitation P (m/a) and diffusion coefficient k_d (m²/a). Each simulation should spread over the whole period available for karstification, which is 10 million years (Pliocene era and part of the Pleistocene era). During each simulation, the variations of the morphometric parameters were recorded, in order to compare them with those of the real landscape.

With a constant value of the diffusion coefficient k_d (Fig. 8), an increase in the average precipitation improves simulations. However, with such an increase, a satisfactory adjustment of the real data can never be obtained. With a constant precipitation value, we varied the diffusion coefficient k_d to determine its order of magnitude. It seems that $k_d \approx 10^{-3}$ m²/s is the closest value to the real data.

These reference simulations lead to a major conclusion: whatever the values of the model parameters, the simulated cockpits never have the same average morphometric features as those observed in real landscapes. Consequently, mechanical erosion and diffusion of sediments should not be the only processes taken into account.

Simulations using time–space isotropic dissolution

This application of the CHILD model takes into account carbonate rock dissolution, and considers that it is isotropic over time and space (see above). Therefore, the last component of equation (1) is not nil but equal to $\frac{\partial z}{\partial t}|_{\text{dissolution}} = DR$ m/s,

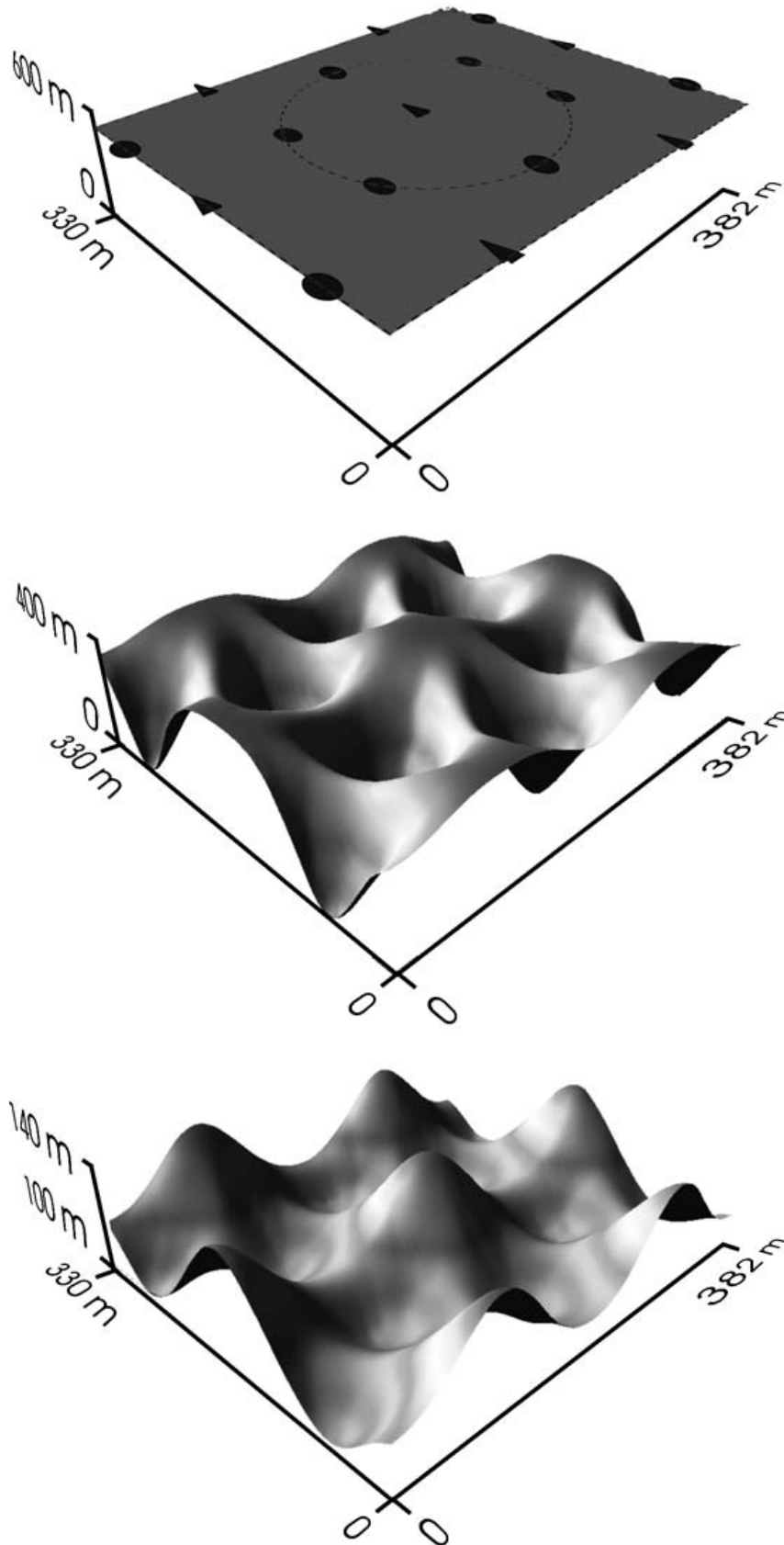


Fig. 7. According to the initial geometry and boundary conditions of the system, CHILD is running to simulate a cockpit karst shape (upper picture). Surface runoff is initially directed towards depressions (middle picture) and erosion is computed until the end of the simulation (lower picture).

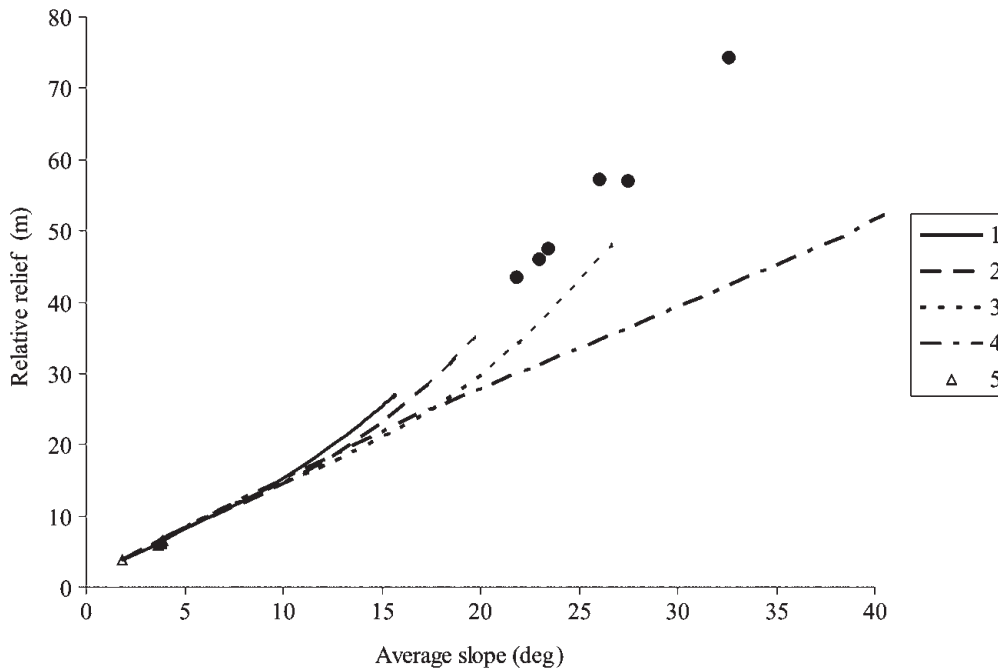


Fig. 8. Reference simulations of the evolution of average slope v. relative relief for various parameters. Here, dissolution is not taken into account. Real data from Lyew-Ayee's (2004) study are black circles and represent average values of both the relative relief and the slope in the Cockpit Country, Jamaica. (1) $P = 1$ m/a and $k_d = 10^{-3}$ m²/a; (2) $P = 2$ m/a and $k_d = 10^{-3}$ m²/a; (3) $P = 3$ m/a and $k_d = 10^{-3}$ m²/a; (4) $P = 2$ m/a and $k_d = 10^{-4}$ m²/a; 5, $P = 2$ m/a and $k_d = 10^{-2}$ m²/a.

where DR is a constant value provided by White's (1984) maximum denudation model.

Initial and boundary conditions are similar to those of the reference simulations. In the case of the present

simulations, the DR value had to be worked out. As previously noted, this value depends on a significant number of variables, including precipitation and carbon dioxide pressure. The order of magnitude of

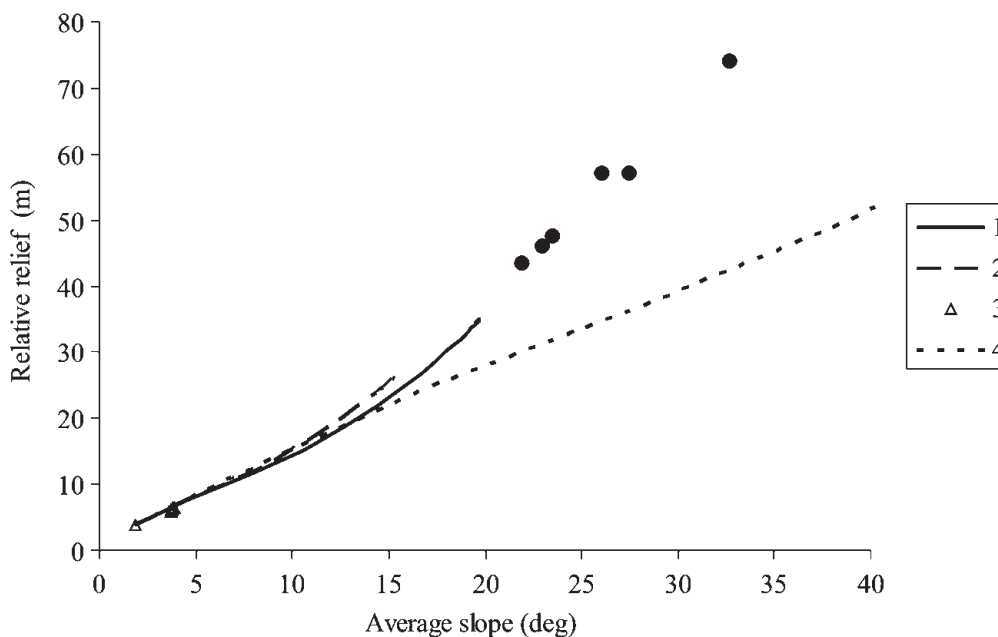


Fig. 9. Simulations using the isotropic dissolution model: evolution of average slope v. relative relief for various parameters. (1) $P = 2$ m/a, $k_d = 10^{-3}$ m²/a and $P_{CO_2open} = 10^{-2}$ atm; (2) $P = 1$ m/a, $k_d = 10^{-3}$ m²/a and $P_{CO_2open} = 10^{-2}$ atm; (3) $P = 2$ m/a, $k_d = 10^{-2}$ m²/a and $P_{CO_2open} = 10^{-2}$ atm; (4) $P = 2$ m/a, $k_d = 10^{-4}$ m²/a and $P_{CO_2open} = 10^{-2}$ atm.

Table 2. *Chemical parameters of the model*

Parameter	Description	Unit	Value
$[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eqopen}}$	Concentration of calcium at equilibrium (opened system)	mol m^{-3}	4.1
$[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eqclose}}$	Concentration of calcium at equilibrium (closed system)	mol m^{-3}	1.9
$[\text{Ca}^{2+}]_{\text{sopen}}$	Threshold concentration (opened system)	mol m^{-3}	3.69
$[\text{Ca}^{2+}]_{\text{sclose}}$	Threshold concentration (closed system)	mol m^{-3}	1.71
$[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inclose}}$	Concentration of calcium (entrance of the fracture)	mol m^{-3}	0.0–0.9
k_0	Low-order rate coefficient	$\text{mol m}^{-2} \text{s}^{-1}$	4×10^{-7}

Table 3. *Hydrodynamical parameters of the model*

Parameter	Description	Unit	Value
g	Gravitational acceleration	m s^{-2}	9.81
h/L	Gradient in fractures		1.0
μ	Kinematic viscosity	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	1.14×10^{-6}
r	Fracture wall roughness	m	$2 \times a_0/100$
$D_{\text{Ca}}^{\text{laminar}}$	Calcium molecular diffusion (laminar flow)	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	10^{-9}
$D_{\text{Ca}}^{\text{turbulent}}$	Calcium molecular diffusion (turbulent flow)	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	10^{-5}

carbon dioxide pressure in the karst cockpit region is $P_{\text{CO}_2} \approx 0.01$ atm (Smith & Atkinson 1976; Miotke 1975, in White 1984, p. 195).

In these simulations, we only varied precipitation in order to change DR values (Fig. 9). The other parameters depending on the assigned value of DR are given in Tables 2–4.

The findings of these simulations, which assume that dissolution is isotropic over time and space, are almost similar to those of the reference simulations. This approach only adds a constant component to the evolution of topography over time. Consequently, the decrease in the topographic elevation z is simply quicker than that of the reference simulations. The topographic elevation reaches the water table level within only 4 million years, whereas such a level is not reached in the reference simulation in 10 million years.

Thus, the conclusions drawn from the time–space isotropic dissolution model are quite similar

to those of the reference simulations. Assuming a constant denudation in space and time does not allow us to simulate a cockpit karst morphometry identical to that observed in the field.

Simulations using time–space anisotropic dissolution

This application of the CHILD model takes into account carbonate dissolution, but considers that it is anisotropic over time and space (see above). Therefore, the last component of equation (1) is not a constant anymore but equal to $\frac{\partial z_i}{\partial t} \Big|_{\text{dissolution}} = \alpha_i(z_i, t) DR$ m/s, where DR is a constant value provided by White’s (1984) maximum denudation model, and $\alpha_i(z_i, t)$ is a function depending on space and time.

The function $\alpha_i(z_i, t)$ should help us recreate the links between hydrodynamics and dissolution, which should be as close to reality as possible. This is developed through the use of the epikarst

Table 4. *Environmental parameters of the model*

Parameter	Description	Unit	Value
P	Precipitation	m/a	1–3
$P_{\text{CO}_2\text{open}}$	Carbon dioxide pressure (opened system)	atm	10^{-2}
$P_{\text{CO}_2\text{close}}$	Carbon dioxide pressure (closed system)	atm	10^{-3}
ρ_{CaCO_3}	Calcite density	kg/m^3	2400
ρ_w	Water density	kg/m^3	1000
m_{Ca}	Calcium atomic mass	kg/mol	0.04
m_{CaCO_3}	Calcite atomic mass	kg/mol	0.1

concept described above. We have also described the relation between surface runoff, subsurface flow and the dissolution of fractured carbonate rocks.

The dissolution of fractured carbonate rocks is the result of water infiltration into the fractures and thus depends on the position of fractures along the cockpit hillslope. In fact, the higher the dissolution, the wider the fracture opens, and the greater water infiltration there is.

In the case of cockpit karst, surface denudation seems directly linked to the dissolution of underlying fractured rocks (Williams 1985; Lyew-Ayee 2004), and combining both processes seem to be relevant:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \alpha_i(z_i, t)DR = \frac{\frac{\partial a}{\partial t}|_i}{\frac{\partial a}{\partial t}|_{\max}} DR \quad (24)$$

where $\frac{\partial a(t)}{\partial t}|_i$ represents the fracture aperture variation in the i cell according to the time step dt , and $\frac{\partial a(t)}{\partial t}|_{\max}$ is the maximum aperture variation obtained, during a similar time step, over the whole simulated area.

It is thus obvious that function $\alpha_i(z_i, t)$ varies over time and space since it depends on both the position of the cell along the cockpit slope and the aperture of the fracture which widens over time. Moreover, this function lies between 0 and 1, and denudation will never exceed White's (1984) maximum denudation. Equation (24) also shows that denudation reaches its maximum where fracture dissolution is the highest, that is to say on the lower slopes of the cockpits. Conversely, denudation is limited on the cockpit summits where the amount of infiltrated water is less and the rate of dissolution slower.

The present time–space anisotropic dissolution approach requires that hydraulic conductivity is assigned to each cell of the studied area. This has been implemented through the development of a network of parallel fractures over the whole area of study. Fractures are separated by space $s = 1$ m and their initial aperture is $a_0 = 10^{-4}$ m. Initial hydraulic conductivity for each cell is (Gabrovsek & Dreybrodt 2001):

$$k = \frac{g}{12\mu} \frac{a_0^3}{s}. \quad (25)$$

Initial hydraulic conductivity is then 10^{-7} m/s approximately, this value being typical of initial karstification process (Singhal & Gupta 1999). All the other variables involved in simulations are listed in Tables 2–4.

Here are the various calculation stages used in simulations of time–space anisotropic dissolution:

1. Starting from the initial geometry of a fracture, its hydraulic conductivity and that of the corresponding Voronoï cell are worked out.
2. Surface runoff and subsurface flow is calculated using equation (17).
3. If the flow into fractures is laminar, the flow rate is computed using equation (17), the molecular diffusion coefficient D_{Ca}^{laminar} , and the diffusion boundary layer $\delta = a_0/2$.
4. If the flow is turbulent, the flow rate is computed using equation (19), the molecular diffusion coefficient $D_{Ca}^{\text{turbulent}}$ and the diffusion boundary layer $\delta = a_0/S_h$. Indeed, when the flow is turbulent, the fluid is separated from the mineral surface by a diffusion boundary layer which is a_0/S_h thick. The transfer between fluid and mineral depends on its thickness (Incropera & Dewitt 1996). S_h is the Sherwood number:

$$S_h = \frac{\frac{f}{8}(Re - 1000)Sc}{1 + 1.27\sqrt{\frac{f}{8}(Sc^{\frac{2}{3}} - 1)}} \quad (26)$$

where Sc is the Schmitt number and is about 1000 when the fluid is water.

5. The various variables linked to dissolution are computed: k_1 (equation (12)), k_2 (equation (13)) and the dissolution rate at the lower extremity of the fracture $F_{\text{higher}}(L)$ (equation (23)).
6. Fracture aperture is worked out, assuming that the dissolution inside the fracture is uniform along its whole profile (equation (23)).
7. The topographic denudation is calculated, assuming that it is related to dissolution in the fractures (equation (24)).
8. Since fractures have widened, the new values of hydraulic conductivity are computed as well as those of the cells.
9. Back to stage 2.

We have very little scope for manipulating the values of the simulation variables, given that we have previously examined the influence of precipitation P and diffusion coefficient k_d . Concerning closed systems such as fractures, the value of carbon dioxide pressure is much lower than in open systems, and is approximately 10^{-3} atm (Dreybrodt 1988; Dreybrodt *et al.* 1999; Kaufman & Braun 2001).

The only adjustable parameter is the concentration of incoming calcium into the fractures ($[Ca^{2+}]_{\text{in}}$). This parameter only depends on the properties of the overlying soil. When the soil is very thin or almost nonexistent, $[Ca^{2+}]_{\text{in}}$ tends to zero, but when the soil is thicker, $[Ca^{2+}]_{\text{in}}$ approaches $[Ca^{2+}]_s$ (Smith *et al.* 1972).

Simulations taking into account the space–time anisotropic dissolution are presented in Figures 10

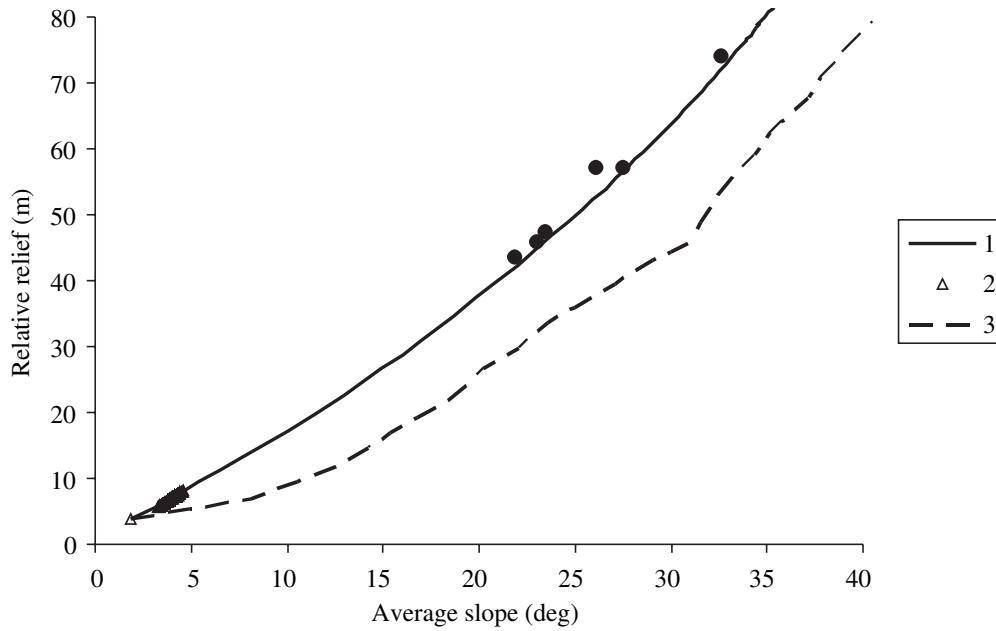


Fig. 10. Simulations using the anisotropic dissolution model: evolution of average slope v. relative relief for various parameters. (1) $P = 2 \text{ m/a}$, $k_d = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{a}$, $P_{\text{CO}_2\text{open}} = 10^{-2} \text{ atm}$ and $P_{\text{CO}_2\text{close}} = 10^{-3} \text{ atm}$; (2) $P = 2 \text{ m/a}$, $k_d = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{a}$, $P_{\text{CO}_2\text{open}} = 10^{-2} \text{ atm}$ and $P_{\text{CO}_2\text{close}} = 10^{-3} \text{ atm}$; (3) $P = 2 \text{ m/a}$, $k_d = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{a}$, $P_{\text{CO}_2\text{open}} = 10^{-2} \text{ atm}$ and $P_{\text{CO}_2\text{close}} = 10^{-3} \text{ atm}$.

& 11. In general, this model simulates cockpit karst landscapes with a morphometry quite similar to that observed in the field. More particularly, simulation 1 in Fig. 10 shows variables whose values

are very consistent with literature on that subject, where real data are $P = 2 \text{ m/a}$, $k_d = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{a}$, $P_{\text{CO}_2\text{open}} = 10^{-2} \text{ atm}$ and $P_{\text{CO}_2\text{close}} = 10^{-3} \text{ atm}$.

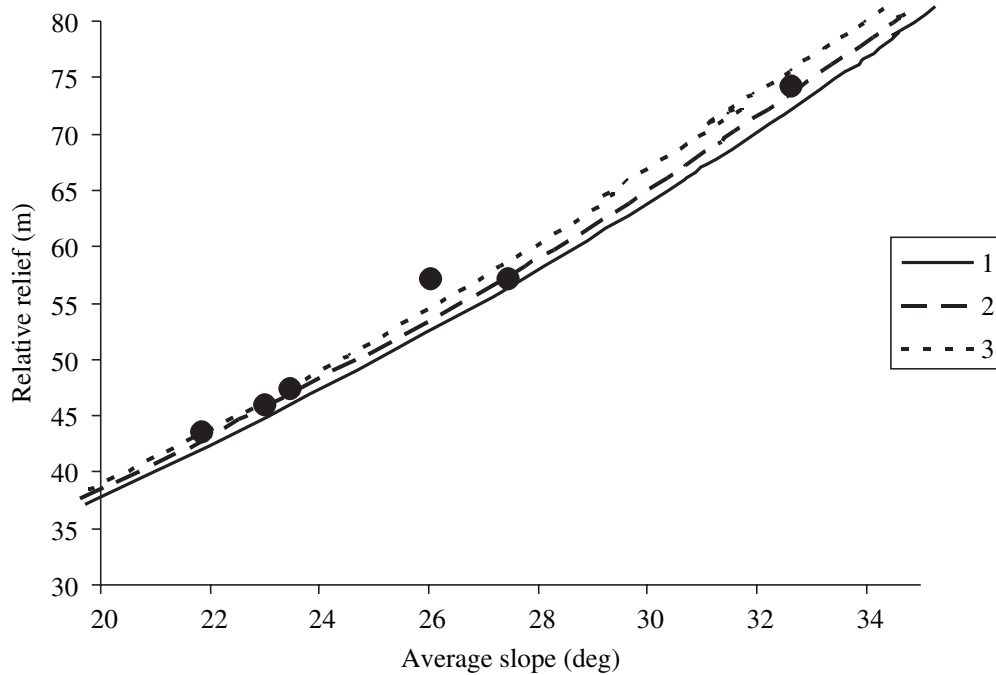


Fig. 11. Simulations using the anisotropic dissolution model: evolution of average slope v. relative relief for various parameters. 1, $P = 2 \text{ m/a}$, $k_d = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{a}$, $P_{\text{CO}_2\text{open}} = 10^{-2} \text{ atm}$, $P_{\text{CO}_2\text{close}} = 10^{-3} \text{ atm}$ and $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inclose}}/[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eqclose}} = 0$ (this simulation is actually the same that simulation in Fig. 10); (2) $P = 2 \text{ m/a}$, $k_d = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{a}$, $P_{\text{CO}_2\text{open}} = 10^{-2} \text{ atm}$, $P_{\text{CO}_2\text{close}} = 10^{-3} \text{ atm}$ and $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inclose}}/[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eqclose}} = 0.5$; (3) $P = 2 \text{ m/a}$, $k_d = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{a}$, $P_{\text{CO}_2\text{open}} = 10^{-2} \text{ atm}$, $P_{\text{CO}_2\text{close}} = 10^{-3} \text{ atm}$ and $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{inclose}}/[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eqclose}} = 0.9$.

If we go into the detail, it can be noted that the quality of simulations may be improved by adjusting the $[\text{Ca}^{2+}]_{\text{in}}$ parameter, corresponding to calcium concentration at the entrance of the fracture (Fig. 11). Today, the cockpit region of Jamaica has thin soil (Lyew-Ayee 2004) and it is reasonable to assume that this type of soil already existed in this region, at least during certain periods, when karstification occurred.

The cockpit karst landscapes which are simulated in this space–time anisotropic dissolution model have very similar morphometric features to those observed in the field. Such simulations are based on the epikarst concept, which describes the coupling of surface runoff, subsurface flow and the dissolution of carbonate rocks. In fact, our simulations provide numerical validation of the epikarst concept.

Conclusion

The aim of the present study was to simulate the morphological formation processes of cockpit karst landscapes in Jamaica. The CHILD model was used to simulate landscape evolution. Two applications of the model were implemented, one based on the hypothesis of time–space isotropic dissolution and the other based on a space–time anisotropic dissolution.

Karst landscapes, simulated on the scale of a cockpit, were compared with reference simulation where only mechanical erosion was taken into account, and henceforth, where rock dissolution was sidestepped.

Morphological features and their variations in time were deduced from these simulated cockpit karst landscapes. Two morphological features based on Lyew-Ayee's (2004) work were chosen to compare simulated karst landscapes and real karst landscapes: average hillslope and relative relief.

The adequacy between the simulated karst morphometry and that of real karst landscapes constitutes an essential stage in the validation of the hypotheses put forward on their formation. With regard to the findings of the present study, the following main points should be emphasized:

- Mechanical erosion, occurring through surface runoff, cannot be the only process accounting for the shape of cockpit karst landscapes. This is consistent with karstification which highlights the central part of dissolution processes in mechanical erosion (White 1984).
- The hypothesis of space–time isotropic dissolution of carbonate rocks, combined with mechanical erosion, does not improve the quality of simulations. In fact, the evolution of the

topographic level is similar to that of mechanical erosion, within one constant. The topographic level decreases faster, but with the same spatial variability.

- Space–time anisotropic dissolution was introduced by modelling the processes described in the epikarst concepts. This application highlights the fact that surface runoff, subsurface flow and carbonate rock dissolution have a combined effect. Therefore, a fracture system corresponding to the cells within the model was developed. The lowest fractures on the hillslope received the largest quantity of infiltration water from the perched water table (sub-cutaneous or epikarstic zone). Consequently, the lowest fractures along the hillslope dissolved more rapidly and thus infiltrated more water, and so on. There is positive feedback between runoff into fractures and their enlargement through dissolution. The more active the dissolution of fractured rocks in the subcutaneous zone is, the more extensive the denudation of the topographic surface appears. In fact, denudation involves various complex processes which are not discussed here (e.g. driving of particles towards the bottom of fractures, and collapse of the fractured zones into underlying caves).

The present study highlights how essential it is to take space–time anisotropic dissolution processes into account when studying karstification. Spatial anisotropy was modelled using the heterogeneity of hydraulic conductivity, observed in the karstic systems. Taking heterogeneity into account allows us to recreate the hydrodynamic functioning of a karstic system. It is then possible to combine runoff and dissolution processes more accurately. Temporal anisotropy is modelled using the positive feedback resulting from the combining of runoff and dissolution. Such positive feedback proves to be essential to the understanding of the overall functioning of cockpit karst terrains in Jamaica.

We thank Parris Lyew-Ayee for his constructive discussions on the cockpit karst country in Jamaica, Anne Bouillon for English review and two referees have helped to improve and to clarify this manuscript.

References

- AHNERT, F. & WILLIAMS, P. W. 1997. Karst landform development in a three-dimensional theoretical model. *Zeitschrift für Geomorphologie, Suppl.*, **108**, 63–80.
- BAUER, S., LIEDL, R. & SAUTER, M. 2005. Modeling the influence of epikarst evolution on karst aquifer genesis: a time-variant recharge boundary condition for joint karst–epikarst development. *Water Resources Research*, **41**(9), W09416.

- BEAR, J., TSANG, C. F. & DE MARSILY, G. (eds) 1993. *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*. Academic Press, San Diego, CA.
- BEAUMONT, C., FULLSACK, P. & HAMILTON, J. 1992. Erosional control of active compressional orogens. In: MCCLAY, K. R. (ed.) *Thrust Tectonics*. Chapman and Hall, New York, 1–18.
- BEEK, W. J., MUTTZALL, K. M. K. & VAN HEUVAN, J. W. 1999. *Transport Phenomena*, 2nd edn. Wiley, Chichester.
- BOGAART, P. W., TUCKER, G. E. & DE VRIES, J. J. 2003. Channel network morphology and sediment dynamics under alternating periglacial and temperate regimes: a numerical simulation study. *Geomorphology*, **54**, 257–277.
- BRAUN, J. & SAMBRIDGE, M. 1997. Modelling landscape evolution on geological time scales: a new method based on irregular spatial discretization. *Basin Research*, **9**, 27–52.
- BROOK, G. A., FOLKOFF, M. E. & BOX, E. O. 1983. A global model of soil carbon dioxide. *Earth Surface Processes and Landforms*, **8**, 79–88.
- BUHMANN, D. & DREYBRODT, W. 1985. The kinetics of calcite dissolution and precipitation in geologically relevant situations of karst areas. 1. Open system. *Chemical Geology*, **48**, 189–211.
- CLEMENS, T., HÜCKINGHAUS, D., SAUTER, M., LIEDL, R. & TEUTSCH, G. 1997. Modelling the genesis of karst aquifer systems using a coupled reactive network model. In: Hard Rock Hydrosciences, Proceedings of Rabat Symposium S2, Vol. **241**, IAHS Publications.
- CORBEL, J. 1959. Vitesse de L'érosion. *Zeitschrift für Geomorphologie*, 31–28.
- COULTHARD, T. J. 2001. Landscape evolution models: a software review. *Hydrological Processes*, **15**, 165–173.
- COULTHARD, T. J., KIRKBY, M. J. & MACKLIN, M. G. 1998. Modelling the 1686 flood of Cam Gill Beck, Starbotton, upper Warfedale. In: HOWARD, A. & MACKLIN, M. G. (eds) *The Quaternary of the Eastern Yorkshire Dales: Field Guide*. Quaternary Research Association, London, 11–18.
- DAY, M. J. 1979a. The hydrology of polygonal karst depressions in northern Jamaica. *Zeitschrift für Geomorphologie*, **32**, 25–34.
- DAY, M. J. 1979b. Surface roughness as a discriminator of tropical karst styles. *Zeitschrift für Geomorphologie*, **32**, 1–8.
- DREYBRODT, W. 1988. *Processes in Karst Systems*. Springer, Berlin.
- DREYBRODT, W. 1996. Principles of early development of karst conduits under natural and man-made conditions revealed by mathematical analysis of numerical models. *Water Resources Research*, **32**, 2923–2935.
- DREYBRODT, W. & EISENLOHR, L. 2000. Limestone dissolution rates in karst environments. In: KLIMCHOUK, A., FORD, D. C., PALMER, A. N. & DREYBRODT, W. (eds) *Speleogenesis: Evolution of Karst Aquifers*. Natural Speleological Society, USA, 136–148.
- DREYBRODT, W. & GABROVSEK, F. 2000. Dynamics of the evolution of a single karst conduit. In: KLIMCHOUK, A., FORD, D. C., PALMER, A. N. & DREYBRODT, W. (eds) *Speleogenesis: Evolution of Karst Aquifers*. Natural Speleological Society, USA, 184–193.
- DREYBRODT, W., GABROVSEK, F. & SIEMERS, J. 1999. Dynamics of the early evolution of karst. In: PALMER, A. & PALMER, M. (eds) *Karst Modelling*. Karst Waters Institute: Charlestown, WV, 184–193.
- FORD, D. C. 1981. Geologic structure and a new exploration of limestone cavern genesis. *Transactions of the Cave Research Groups of Great Britain*, **13**, 81–94.
- FORD, D. C. & WILLIAMS, P. W. 1989. *Karst Geomorphology and Hydrology*. Unwin Hyman, London.
- GABROVSEK, F. & DREYBRODT, W. 2001. A comprehensive model of the early evolution of karst aquifers in limestone in the dimensions of length and depth. *Journal of Hydrology*, **240**, 206–224.
- GROVES, C. G. & HOWARD, A. D. 1994. Early development of karst systems 1. Preferential flow path enlargement under laminar flow. *Water Resources Research*, **30**, 2837–2846.
- GUNN, J. 1981. Hydrological processes in karst depressions. *Zeitschrift für Geomorphologie*, **25**, 313–331.
- INCROPERA, F. P. & DEWITT, D. P. 1996. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer 889*. Wiley, New York.
- KAUFMANN, G. 2003. A model comparison of karst aquifer evolution for different matrix-flow formulations. *Journal of Hydrology*, **283**, 281–289.
- KAUFMANN, G. & BRAUN, J. 1999. Karst aquifer evolution in fractured rocks. *Water Resources Research*, **35**, 3223–3238.
- KAUFMANN, G. & BRAUN, J. 2000. Karst aquifer evolution in fractured, porous rocks. *Water Resources Research*, **36**, 1381–1392.
- KAUFMANN, G. & BRAUN, J. 2001. Modelling karst denudation on a synthetic landscape. *Terra Nova*, **13**, 313–320.
- KOOI, H. & BEAUMONT, C. 1994. Escarpment evolution on high-elevation rifted margins: insights derived from a surface processes model that combines diffusion, advection, and reaction. *Journal of Geophysics Research*, **99**, 12191–12209.
- LYEW-AYEE, P. 2004. Digital topographic analysis of cockpit karst: a morpho-geological study of the Cockpit Country region, Jamaica, PhD thesis, University of Oxford.
- MARTIN, Y. & CHURCH, M. 1997. Diffusion in landscape development models: on the nature of basic transport relations. *Earth Surface Processes and Landforms*, **22**, 273–279.
- MARSILY DE, G. 1986. *Quantitative Hydrology*, Elsevier, Oxford.
- MCKEAN, J. A., DIETRICH, W. E., FINKEL, R. C., SOUTHON, J. R. & CAFFEE, M. W. 1993. Qualification of soil production and downslope creep rates from cosmogenic ¹⁰Be accumulations on a hillslope profile. *Geology*, **21**, 343–346.
- PFEFFER, K. H. 1997. Paleoclimate & tropical karst in the West Indies. *Zeitschrift für Geomorphologie, Suppl.*, **108**, 5–13.
- ROMANOV, D., GABROVSEK, F. & DREYBRODT, W. 2003. The impact of hydrochemical boundary conditions on the evolution of limestone karst aquifers. *Journal of Hydrology*, **276**, 240–253.

- SIEMERS, J. & DREYBRODT, W. 1998. Early development of karst aquifers on percolation networks of fractures in limestone. *Water Resources Research*, **34**, 409–419.
- SINGHAL, B. & GUPTA, R. 1999. *Applied Hydrogeology of Fractured Rocks*. Kluwer Academic Press, Dordrecht.
- SMITH, D. I. & ATKINSON, T. C. 1976. Process, landforms and climate in limestone regions. In: DERBYSHIRE, E. (ed.) *Geomorphology and Climate*. Wiley, London, 367–409.
- SMITH, D. I., DREW, D. P. & ATKINSON, T. C. 1972. Hypotheses of karst landform development in Jamaica. *Transactions of the Cave Research Group of Great Britain*, **14**, 159–173.
- SWEETING, M. M. 1972. *Karst Landforms*. Macmillan, London.
- TUCKER, G. E. & BRAS, R. L. 1998. Hillslope processes, drainage density, and landscape morphology. *Water Resources Research*, **34**, 2751–2764.
- TUCKER, G. E. & SLINGERLAND, R. L. 1994. Erosional dynamics, flexural isostasy, and long-lived escarpments: a numerical modeling study. *Journal of Geophysical Research*, **99**, 12229–12243.
- TUCKER, G. E., GASPARINI, N. M., LANCASTER, S. T. & BRAS, R. L. 1997. An integrated hillslope and channel evolution model as an investigation and prediction tool. Technical Report prepared for the United States Army Corps of Engineers Construction Engineering Research Laboratories.
- TUCKER, G. E., GASPARINI, N. M., BRAS, R. L. & LANCASTER, S. L. 1999. A 3D computer simulation model of drainage basin and floodplain evolution: theory and applications. Technical report prepared for the United States Army Corps of Engineers Construction Engineering Research Laboratory.
- TUCKER, G. E., LANCASTER, S. T., GASPARINI, N. M. & BRAS, R. E. 2001a. The channel–hillslope integrated landscape development model (CHILD). In: HARMON, R. S. & DOE, W. W. (eds) *Landscape Erosion and Evolution Modeling*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 349–388.
- TUCKER, G. E., LANCASTER, S. T., GASPARINI, N. M., BRAS, R. E. & RYBARCZYK, S. M. 2001b. An object-oriented framework for hydrologic and geomorphic modeling using triangulated irregular networks. *Computers and Geosciences*, **27**, 959–973.
- TRUDGILL, S. T. 1985. *Limestone Geomorphology*. Longman, London.
- VERSEY, H. R. 1972. Karst in Jamaica. In: HERAK, M. & SPRINGFIELD, V. T. (eds) *Karst: Important Karst Regions of the Northern Hemisphere*, Elsevier, Amsterdam, 445–466.
- WHITE, W. B. 1984. Rate processes: chemical kinetics and karst landform development. In: LA FLEUR, R. G. (ed.) *Groundwater as a Geomorphic Agent*. Allen & Unwin, London, 227–248.
- WHITE, W. B. 1988. *Geomorphology and Hydrology of Karst Terrains*. Oxford University Press, New York.
- WILLGOOSE, G. R., BRAS, R. L. & RODRIGUEZ-ITURBE, I. 1991. A physically based coupled network growth and hillslope evolution model, 1, theory. *Water Resources Research*, **27**, 1671–1684.
- WILLIAMS, P. W. 1985. Subcutaneous hydrology and the development of doline and cockpit karst. *Zeitschrift für Geomorphologie*, **29**, 463–482.

WSEAS TRANSACTIONS ON ENVIRONMENT AND DEVELOPMENT

Fleurant C., Burley J.B., Loures L., Lehman W. and J. Mchugh, 2009, Inverse Box-Counting Method and Application : A Fractal-Based Procedure To Reclaim a Michigan Surface Mine, *WSEAS Transactions on Environment and Development*, 1(5), p.76-85.

Inverse Box-Counting Method and Application: A Fractal-Based Procedure To Reclaim a Michigan Surface Mine

CYRIL FLEURANT*, JON BURLEY,⁺ LUIS LOURES,*⁺ WADE LEHMANN,⁺
& JESSICA MCHUGH⁺

*Unité de Recherche Paysage; AgroCampus Ouest,
2 rue le Nôtre, 49045 Angers cedex 01,
FRANCE

⁺ Landscape Architecture Program; School of Planning, Design, and Construction,
Michigan State University, 48824-1221 East Lansing,
U.S.A.

*+ Department of Landscape Architecture; Faculty of Natural Resources,
University of Algarve, 8005-139 Faro,
PORTUGAL

e-mail: cyril.fleurant@agrocampus-ouest.fr; burleyj@msu.edu; lcloures@ualg.pt;
lehmann9@msu.edu; mchughje@msu.edu

Abstract: Planners and designers are interested in replicating biospheric landscape patterns to reclaim surface mines to match existing natural landscape patterns. One approach that shows promise is the use of fractal geometry to generate biospheric landscape patterns. While the measurement of the actual fractal dimension of a landscape can be difficult, a box-counting method was developed at AgroCampus Ouest, Angers, France which approximates the spatial patterns of biospheric landscapes. Essentially the procedure entails covering a natural object/pattern with a regular grid of size r and then one simply counts the number of grid boxes, $N(r)$, that contain some part of the object. The boxes are subdivided and the value of r is progressively reduced and $N(r)$ is similarly re-measured until some of the boxes become empty (containing no landscape objects of interest). Then the fractal dimension of the object is approximated to be the $\log(N(r))/\log(1/r)$. We illustrate this procedure by measuring and replicating a stand of trees in the Upper Peninsula of Michigan and applying the method for a planting plan on a surface mine. Our study revealed a fractal number of 1.017 ($p \leq 0.01$), with a mean of 77.4 trees per 100 m by 100 m stand, and a standard deviation of 34.87 trees per stand.

Key-words: - landscape architecture, landscape planning, physical geography, landscape ecology, landscape science, plant ecology

1 Introduction

Planners, designers, and environmental specialists are interested in assessing the spatial composition of landscape features such as the distribution of hills, arrangement of vegetation, and shapes of water bodies to blend disturbed landscapes with natural landscapes. However natural looking compositions were difficult to mathematically replicate. Typical approaches employed to replicate landscapes included gestalt methods and ecological field laboratory methods. The gestalt method was heuristic in nature where an individual would artistically blend and integrate patterns together. The ecological field laboratory method employed the measures of frequency, density, and size to construct patterns. A different approach evolved that relied upon the concept of fractals to quantify spatial patterns in the landscape.

1.1 Origin of Fractals

Fractals were first noticed/observed at the end of the 19th century. Although the term "fractal" was only attributed later, the Peano curves seem to be the very first examples of fractal objects, first described by Guiseppe Peano (1858 – 1932). These were curves that could, through a series of iterations and a few simple rules, fill a space [12]. Such mathematical objects have been considered as mere mathematical curiosities for a long time.

Fractals have been the heart of a new branch of mathematics only in the second half of the 20th century, thanks to the work of the French mathematician Benoît Mandelbrot. While researching "econometry" (mathematics applied to economy), he discovered that there is no difference in the shape/pattern of the curves of predicting short-term and long-term prices. He presents a comprehensive description of the curves following this property and invented the word fractal (coming

from the Latin word *fractus*, meaning broken) to name the objects where irregularity distinguishes them from the Euclidian geometry curves. Since their discovery, the use and application of fractals have spread. They are now used in many sciences including geology, biology and econometrics.

1.2 Further Descriptions Illustrating Fractals

To illustrate the concept of fractals, imagine a tour along the French coastline of Brittany, a rugged rocky coastline. What is the actual length of this coastline? To determine the length of the coastline, one can look at two forms for resolution:

1. a series of pictures from 10,000 meters high and calculating the visible length of the coast.

2. a second series of pictures from 500 m high and observing details of the coastline one meter by one meter.

After calculating the length, one will discover the coast is more precisely known in the second case and the calculated length is actually longer. If one examines the coast at an even higher resolution, new details appear and the length of the coast will increase even more. The more precise the measuring instrument is, the more the length of the coast increases, because any one section of the coastline is equally as complex at any scale or resolution. The Brittany coastline example introduces a fundamental understanding of the fractal world. The complexity of the Brittany coast (being unable to be described with Euclidian geometry) makes it a fractal object. In the landscape, fractals are everywhere.

A useful conceptual definition of a fractal is a "geometrical shape resulting from infinite regular fragmentation of a given form." It is indeed possible to describe a fractal as a repetition of the same operation on each part of the curve. An essential property results from this kind of internal homothetia: self-similarity. If one looks closely at a piece of the curve, it looks like the whole curve itself. The von Koch's snowflake illustrates this property. This von Koch's snowflake fractal, as most all the fractals, is easy to design even if the resulting shape is complex. The von Koch's snowflake has the geometric property where as the construction iteration process increases towards infinity, the total length L increases towards infinity. Therefore, the length of the curve is infinite. Here lies a paradox: the area of the von Koch's snowflake A is a finite measure (see equations 1 and 2).

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{4}{3}} + 3 \times \sqrt{\frac{3}{20}} \times \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \right] = 2 \times \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (1), (2)$$

In many respects there is little difference between the mathematics of fractals and descriptive statistics.

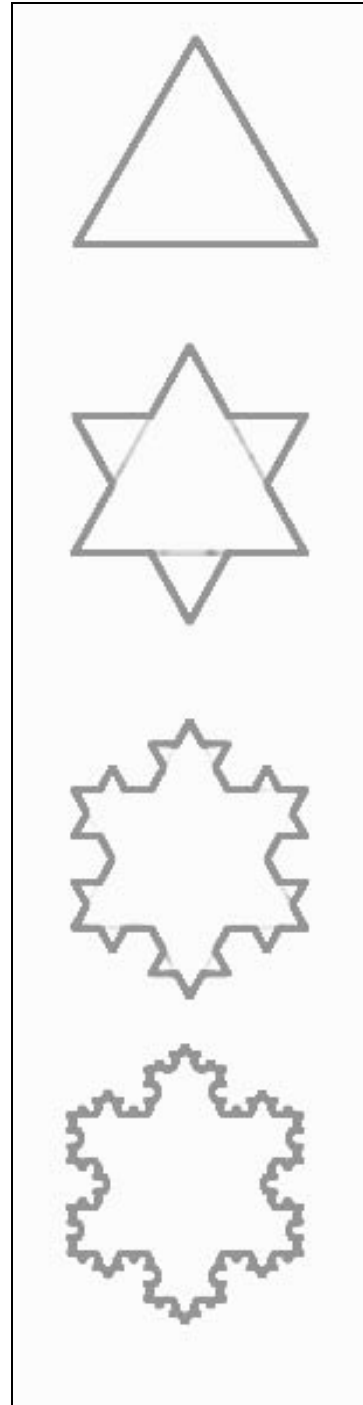


Figure 1. Four iterations of the Koch Snowflake. At an infinite number the perimeter of the snowflake approaches infinity but the area is finite.

1.3 Geometric Properties of Fractals

Geometric properties of fractals are used in many models and numerous sciences [8] [9] [15]. For example in economics, fractals are used in complex random phenomena, such as in finance to represent the variations of the prices on the trade market. In climatology, fractal models can also be applied to understand the turbulence of atmospheric movements. In geology, they can be used for modeling the earth relief or rock porosity. For computer sciences, fractals assist in finding the optimal arrangement of electronic components, to avoid crossings of circuit tracks. In chemistry, they are used to design new materials. The fractal nature of such materials gives them exceptional properties, such as a very high thermal cooling power.

1.4 Planning and Design Applications

There is a belief that fractals may have an application to recreate complex landscape patterns that are difficult to describe with typical Euclidian approaches because the landscape is full of fractals: rivers, trees, landscape networks in general [1]. Fractals are highly detailed, complex geometric shapes and one measure of their complexity is fractal dimension [12]. Thus several authorities have examined fractals in landscape planning and design including studies by Diaz-Delgado, Lloret, and Pon; DiBari; Griffith, Martinko, and K.P. Price; Li; Milne; Palmer; and Thomas, Grankhauser, and Biernacki; [3] [4] [7] [10] [13] [14] [16]. However, the use of fractals seems to be looking for a practical application. For example in describing landscapes, it has always been easy to calculate an existing pattern, but difficult to replicate the pattern. In this paper we present an approach to replicate the pattern and possibly a practical approach in the use of fractals.

2 Methodology

The approach in the methodology is related to the dimensions of fractals. Both Euclidian geometry and fractal geometry have dimension number. In Euclidian geometry, the point (the elementary unit in geometry) is of Euclidian dimension 0. Lines or curves are of dimension 1. Areas are of dimension 2, such as a circle or rectangle. Volumes are of dimension 3, such as ball or cube. Euclidian dimensions are also call topological dimensions and are named in honor of Euclidian geometric objects such as a circle or a square. Fractal objects have dimensions too.

2.1 Fractal Dimensions

To illustrate fractal dimensions, consider the Brittany coastline. If one needs to measure 1 m length of a relatively straight line with a 20 cm ruler, this ruler will be used 5 times, 10 times for a 10 cm ruler, 20 times for a 5 cm ruler. Let's suppose now that the line one needs to measure is highly variable and curved. One will not be able to follow the coastline precisely with the ruler and one will underestimate the real length. But, the smaller the ruler is, the more accurate the result. To analyze this phenomenon in a mathematical way, one can say that the result tends towards the exact length of the line when the ruler is small when compared to the curvature of this line. If one can divide the length of a ruler of an infinite small size by "n," one has to use this ruler n times more (same as if the line were straight). This property can define the topological dimension of the curve or line as we have (Equation 3):

$$D_{topological} = \frac{\log(n)}{\log(n)} = 1 \quad (3)$$

Replicating the process again with a surface, one can use a square where the length of the side is L. To measure its area, one can use a smaller square where the length of the side is L/2, then you will need 4 of them, 16 with an L/4 square, and so on. So, if the length of the side of the measuring square is divided by "n," the number of such squares used is multiplied by "n" (Equation 4):

$$D_{topological} = \frac{\log(n^2)}{\log(n)} = 2 \times \frac{\log(n)}{\log(n)} = 2 \quad (4)$$

Similar results can be obtained for volumes and the topological dimension of a Euclidian geometric object with a fractal dimension of 3.

In the relatively simple case of self-similar fractal objects (meaning they seem the same whichever zooming factor is used), resulting in a constant iterative factor "k," the fractal dimension is (Equation 5):

$$D_{fractal} = \frac{\log(n)}{\log(k)} \quad (5)$$

Where:

n = is the number of the subsets counted during the scaling process using a factor 1/k (self-similarity factor).

k = is the number of iterations

The von Koch's snowflake illustrates how to calculate the fractal dimension of self-similar fractal

objects. Call L the initial length of the triangle (the snowflake starts as an equilateral triangle). If one uses a ruler of length L and applies it on the snowflake, one can only measure the initial triangle and find a length of $3L$ for the snowflake. If one uses a smaller ruler of size $L/3$, we can follow the snowflake more precisely and apply it 12 times. One can continue by dividing again the size of the ruler by 3 (the snowflake presents an infinite number of spikes, with smaller and smaller sizes), it will be applied 48 times, and so on. In other words, each time the size of the ruler is divided by 3, the number of times it is applied on the snowflake is multiplied by 4. This process can be carried on indefinitely. Then according to the same reasoning one can calculate the fractal dimension of the von Koch's snowflake (Equation 6):

$$D_{fractal} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.262 \quad (6)$$

Therefore, we can only conclude that the fractal dimension of this strange curve is not 1 as any of classic linear geometrical curves. The von Koch's snowflake has a topological dimension equal to 1 (it's a broken line), but a fractal dimension strictly greater than 1, and moreover, which is not an integer but a real number.

2.2 Inverse box-counting method: a tool for replicating landscapes

The fractal dimension is not easy to calculate but can be estimated by several methods. The box-counting method is one of the easier and more popular methods to implement (Figure 2): the natural object is covered with a regular grid of size r and one simply counts the number of grid boxes, $N(r)$, that contain some part of the object. The value of " r " is progressively reduced and $N(r)$ is similarly measured. As " r " trends to very small values (0 in a theoretical way) one finds that $\log(N(r))/\log(1/r)$ becomes the fractal dimension of the object.

In our study, we illustrate the application of fractals in the planting pattern of trees in the Upper Peninsula of Michigan in Iron and Dickinson counties (Figure 3). The location of trees can be placed on a map (100 meters by 100 meters) derived from an aerial photograph and measured. This set of points (location of trees) can be viewed as a complex and fractal object in the landscape. The box-counting method is a simple way to characterize the complexity of this planting through the value of its fractal dimension. The greater the value of the

fractal dimension (2 is the maximum value in a plane), the less the complexity of the planting pattern (in terms of scale, alignment, structure, etc.). This method was developed by Duchesne *et al.* [5] and computed by Durandet in the Landscape Department of the National Institute of Horticulture and Landscape (Angers, France), now the Unité de Recherche Paysage; AgroCampus Ouest [5] [6]. By using the inverse box-counting method one is able to control the randomness of a planting of trees or other natural landscape pattern with several parameters: the fractal dimension (D), the average minimum distance between two trees (ϵ_{min}) and the average maximum size of the glades (ϵ_{max}). Figure 4 illustrates some of the initial patterns for European vegetation generated by Unité de Recherche Paysage; AgroCampus Ouest.

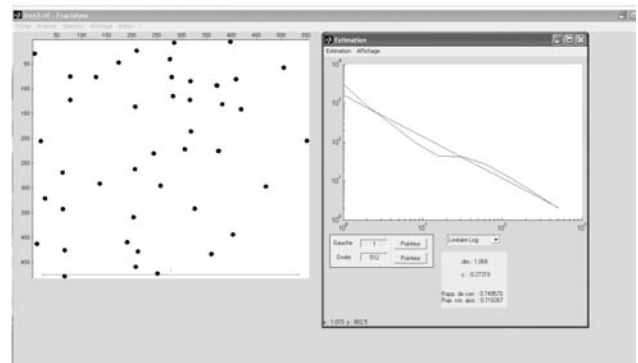


Figure 2. Example of fractal pattern for a distribution of points and the plot, forming a regression line, supplied by Cyril Fleurant, Unité de Recherche Paysage; AgroCampus Ouest.



Figure 3. Location of the study areas of Iron and Dickinson Counties in the Upper Peninsula of Michigan.

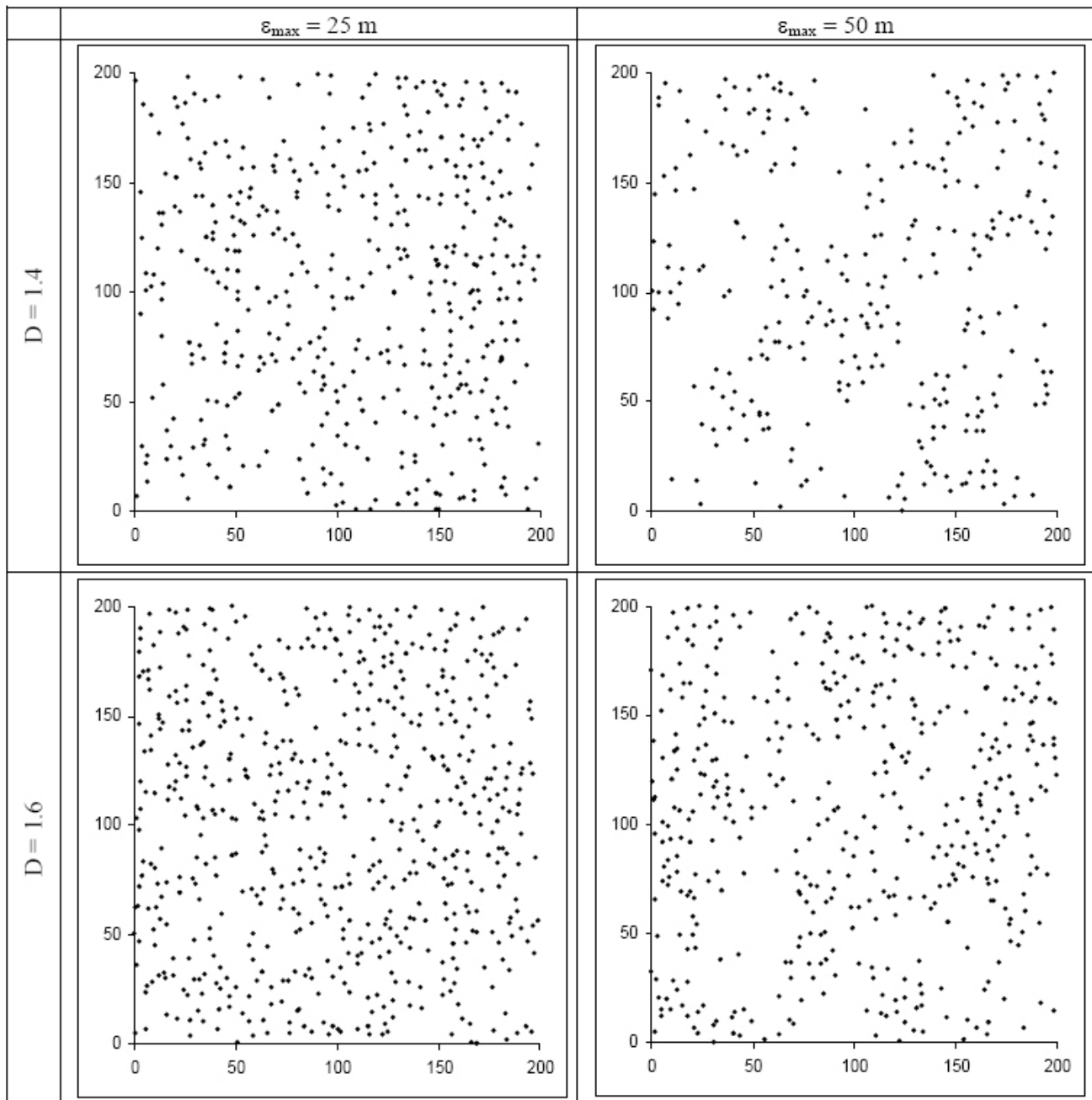


Figure 4. Fractal patterns of vegetation in European stands as supplied by Cyril Fleurant, Unité de Recherche Paysage; AgroCampus Ouest.

In the process, the pairs of values r and the number of boxes $N(r)$, start with a value of r being 100 meters, and $N(r)$ being one. Then r is divided in half and r is 50 meters, while $N(r)$ can range from one to four, depending upon how many boxes contain trees. The pairs for the regression analysis start with the first pair where at least one box is empty and end when only one tree is found in any box. The slope of the regression equations represents the fractal number.

We selected five 100 meter by 100 meter boxes in Iron County and five 100 meter by 100 meter boxes in Dickinson County [11] [17]. The areas that we selected to measure were rocky and dry xeric northern forests, an environment similar to waste rock piles on a surface mine where a fractal planting plan for dry forests might be appropriate [2]. These forests are predominantly composed of about 16% red pine (*Pinus resinosa* Sol. Ex Aiton), 21% jack pine (*Pinus banksiana* Lamb.), 15% Eastern white

pine (*Pinus strobus* L.), and 12% northern pin oak (*Quercus ellipsoidalis* E.J. Hill), plus a scattering of other trees such as 7% quaking aspen (*Populus tremuloides* Michx.), 3% red maple (*Acer rubrum* L.), 4% paper birch (*Betulus papyrifera* Marsh.), 4% northern red oak (*Quercus rubra* L.), 7% white oak (*Quercus alba* L.) and 7% of bigtooth aspen (*Populus grandidentata* Michx.).

3 Results

Figure 5 presents an aerial photograph of trees distributed in the study area of Iron County, Michigan; while Figure 6 illustrates the results related to one of the aerial plots, Iron County 2. Figure 7 and 8 illustrate a stand in Dickinson County, Michigan.

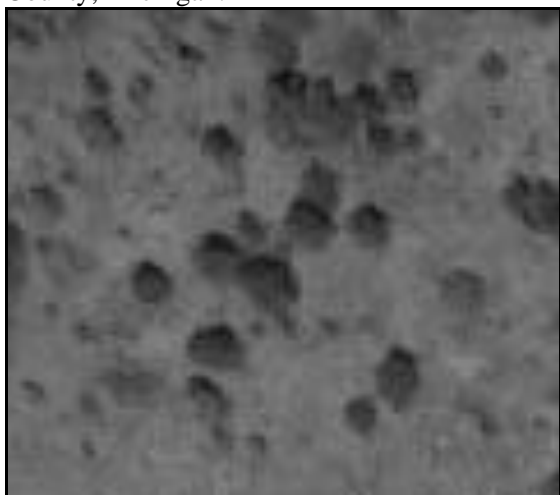


Figure 5. An aerial photograph from Iron County, Michigan with dimensions 100 meters by 100 meters.

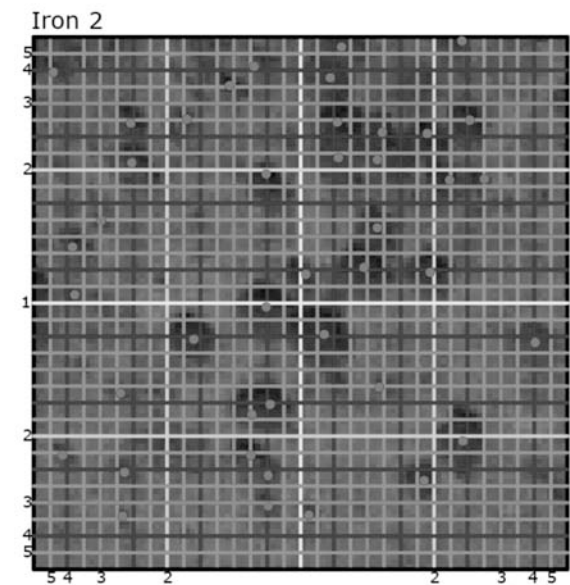


Figure 6. The same aerial photograph from Iron County in Figure 5 now divided into grids with the location of trees.

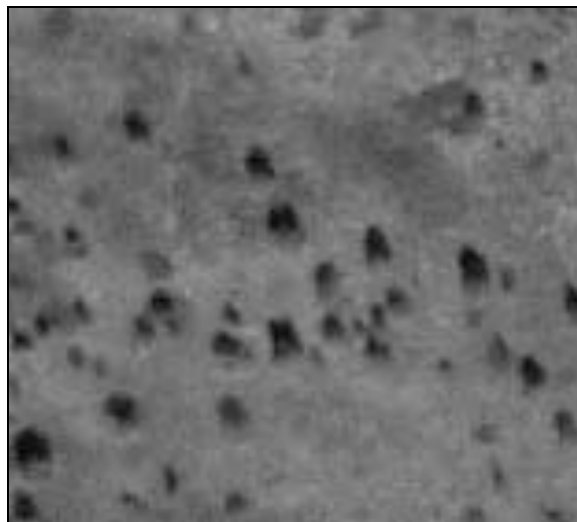


Figure 7. An aerial photograph from Dickinson County, Michigan with dimensions 100 meters by 100 meters.

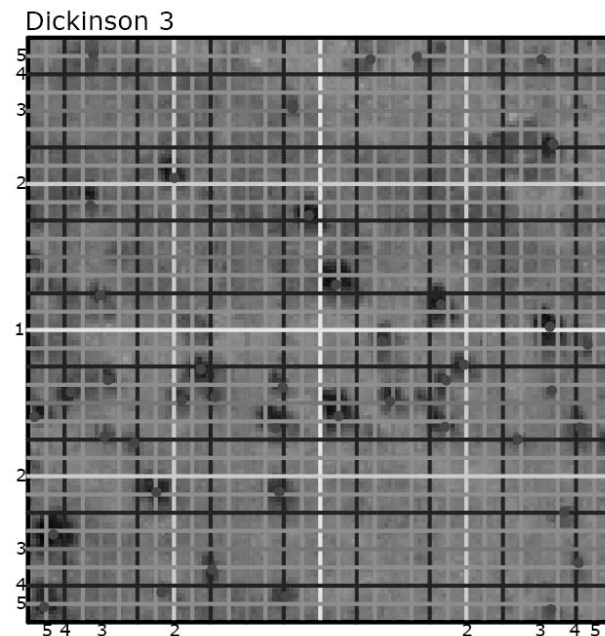


Figure 8. The same aerial photograph from Iron County in Figure 7 now divided into grids with the location of trees.

From the 10 plots of trees, 43 pairs of numbers were derived (Table 1). The regression analysis revealed an adjusted r-square of 0.792, with a significant regression ($p \leq 0.01$), a significant constant ($p \leq 0.01$) and a significant predictor $\ln(1/r)$ ($p \leq 0.01$). The regression is expressed in Equation 7. The slope of the line expressed in Equation 7 is 1.017. This suggests that the fractal dimension is nearly a line in typology.

$$\ln(N(r)) = 1.017 \ln(1/r) + 5.875 \tag{7}$$

Where:

- N(r) = number of boxes with trees
- r = length of one side of box

The investigation revealed that each stand contained an average of 77.4 trees and a standard deviation of 34.87 trees per stand.

Table 1. Pairs of numbers for regression analysis.

Country	Ln(1/r)	Ln(N(r))
Iron 1	-3.219	2.773
	-2.526	4.043
	-1.833	4.521
	-1.139	4.787
Iron 2	-3.219	2.773
	-2.526	3.434
	-1.833	3.738
Iron 3	-4.605	0.000
	-3.912	1.099
	-3.219	2.485
	-2.526	3.044
	-1.833	3.526
Iron 4	-1.139	3.714
	-3.219	2.773
	-2.526	3.951
	-1.833	4.575
Iron 5	-1.139	4.796
	-3.912	1.386
	-3.219	2.708
	-2.526	3.219
Dickinson 1	-1.833	3.367
	-3.219	2.773
	-2.526	4.060
	-1.833	4.533
Dickinson 2	-1.139	4.727
	-3.219	2.773
	-2.526	3.912
	-1.833	4.489
Dickinson 3	-1.139	4.700
	-0.446	4.718
	-3.912	1.386
	-3.219	2.708
Dickinson 4	-2.526	3.526
	-1.833	3.807
	-1.139	3.829
	-3.219	2.773
Dickinson 5	-2.526	3.871
	-1.833	4.407
	-1.139	4.443
	-3.219	2.773
Dickinson 5	-2.526	3.714
	-1.833	4.382
	-1.139	4.190

4 Discussion & Conclusion

To apply the inverse box-counting approach to this area in the landscape one would then follow these procedures:

- A. Divide the landscape to be planted in 100 meter grids.
- B. Divide each 100 meter grid into grids with sides equal to 3.125 meters (the size of the smallest boxes in Figures 6 and 8).
- C. Randomly fill the 100 meter grids with an average of 77.4 trees per grid and a standard deviation of 35 trees. The number of trees per grid can be increased proportionally if the mortality rate of the trees is known, such as a 20% mortality rate means that the grids should be planted with an average of 97.75 trees.
- D. The composition of the stands should be about:
 - 21% jack pine (*Pinus banksiana* Lamb.),
 - 16% red pine (*Pinus resinosa* Sol. Ex Aiton),
 - 15% Eastern white pine (*Pinus strobus* L.),
 - 12% northern pin oak (*Quercus ellipsoidalis* E.J. Hill)
 - 7% quaking aspen (*Populus tremuloides* Michx.),
 - 7% bigtooth aspen (*Populus grandidentata* Michx.),
 - 7% white oak (*Quercus alba* L.),
 - 4% paper birch (*Betulus papyrifera* Marsh.)
 - 4% northern red oak (*Quercus rubra* L.),
 - 3% red maple (*Acer rubrum* L.),
 - 4% assorted list of 24 trees by Curtis [2].

This approach is illustrated with Table 2 and with Figure 9, where 7.5 percent of random numbers were assigned to boxes with a 3.125 meter grid on a 100 m by 100 m site located at the surface mine in the Upper Peninsula of Michigan. In the Upper Peninsula of Michigan, a typical mine site contains waste rock, with environmental conditions similar to xeric forest sites in the region (Figure 10). The process generated 46 boxes for planting trees. 46 boxes are within one standard deviation (± 35) of the average of 77.4, so 46 boxes were deemed acceptable. Then each box was randomly assigned a tree species based upon the percentage of composition indicated by Curtis [2]. Table 3 lists the composition of the planting area. Notice that because random numbers are employed, the composition may not be exactly the same as the percentages noted by Curtis [2]. The result will be that each planted stand will have variation.

The planting scheme can be accomplished with seedlings being planted by hand or even with machine planting, as long as the tree is placed in the correct designated box.

Table 2. Boxes with trees. Both box number and tree species are randomly selected.

Box Number	Tree
38	paper birch
87	jack pine
137	assorted trees
154	northern pin oak
160	Eastern white pine
180	jack pine
202	big tooth aspen
205	Eastern white pine
214	big tooth aspen
232	northern red oak
266	red pine
317	big tooth aspen
327	red maple
366	jack pine
379	Eastern white pine
385	white oak
401	quaking aspen
417	red pine
423	northern pin oak
502	northern pin oak
525	assorted trees
544	jack pine
545	jack pine
561	red pine
570	northern pin oak
584	jack pine
585	jack pine
596	paper birch
625	Eastern white pine
665	red pine
697	white oak
706	white oak
708	quaking aspen
712	red pine
719	jack pine
729	Eastern white pine
738	northern pin oak
743	quaking aspen
806	Eastern white pine
878	quaking aspen
890	Eastern white pine
911	Eastern white pine
931	Eastern white pine
956	northern pin oak
963	big tooth aspen
972	jack pine

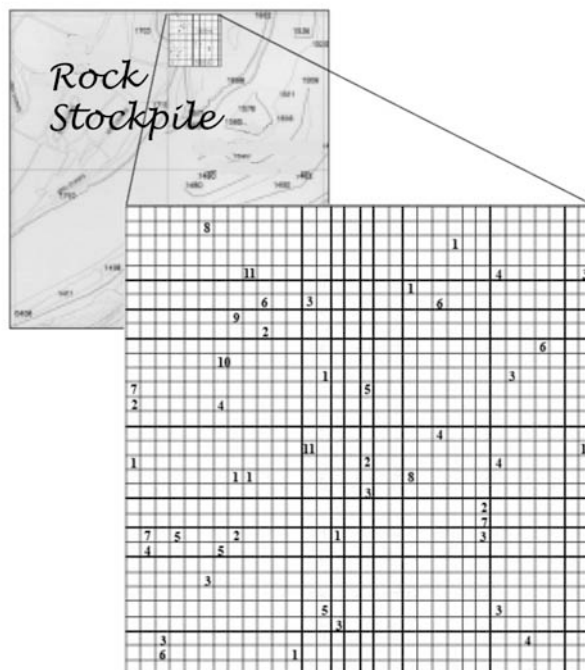


Figure 9. A planting plan example based in the methodology described in this paper: 1) jack pine, 2) red pine, 3) Eastern white pine, 4) northern pin oak, 5) quaking aspen, 6) big tooth aspen, 7) white oak, 8) paper birch, 9) northern red oak, 10) red maple, and 11) assorted trees from Curtis [2].



Figure 10. An example of a waste rock pile in the Upper Peninsula on Michigan (Used by permission of Jon Bryan Burley ©2007, all rights reserved).

The inverse box-counting process illustrates that it is possible to use the fractal pattern to create a stand of vegetation. The process employs calculating the fractal score of an existing pattern and employing the inverse box process to apply the pattern to a landscape. However the inverse box-counting process is a reverse process, as opposed to a forward process when investigators first began calculating the fractal scores of objects. The reverse process takes an existing score to create something new. Currently there is no mathematical proof that this process is truly reversible.

Table 3. Tree composition in the planting plan.

Species	Plan	Curtis [2]
jack pine	20%	21 %
red pine	11%	16 %
Eastern white pine	20%	15 %
northern pin oak	13%	12 %
quaking aspen	9%	7 %
bigtooth aspen	9%	7 %
white oak	7%	7 %
paper birch	4%	4 %
northern red oak	2%	4 %
red maple	2%	3 %
assorted list of 24 trees	3 %	4 %

While this process has been employed with vegetation, we believe that it is possible to replicate fractal patterns of hills, waterways, and complex multi-species patterns. We expect to explore this potential in the future. In our study we did not differentiate various species of vegetation. With more careful on-site study, it may be possible to gather multi-species data and construct patterns with numerous species (Figure 11).



Figure 11. This is a picture of the forest vegetation in the Upper Peninsula of Michigan. Notice the interspersed of tree species. Each species may have its own fractal number in the forest.

We encourage reclamation and restoration planning and design specialists to explore the

inverse box-counting method to create biospheric landscapes.

References

- [1] Barnsley M.F., *Fractals Everywhere*, Morgan Kaufmann, 2nd edition, 1993.
- [2] Curtis, J.T., *Vegetation of Wisconsin: A Plant Community Ordination*, University of Wisconsin Press, 1959.
- [3] Diaz-Delgado, R., F. Lloret, and X. Pon. Quantitative characterization of the regressive ecological success by fractal analysis of plant spatial patterns, *Landscape Ecology*, Vol.19, No.7, 2005, pp. 731-745.
- [4] DiBari, J.N., Evaluation of five landscape-level metrics for measuring the effects of urbanization on landscape structure: the case of Tucson, Arizona, USA, *Landscape and Urban Planning*, Vol.79, 2007, pp. 308-313.
- [5] Duchesne J., C. Fleurant, and F. Tanguy, Brevet d'un procédé d'élaboration d'un plan d'implantation de végétaux, plan d'implantation de végétaux obtenu et système informatique pour l'élaboration d'un tel plan, INPI, European patent N° 02 07836, 2002.
- [6] Durandet L., Aide à la conception de plantation de végétaux, *Master Informatique*, Université d'Angers, 2003.
- [7] Griffith, J.A., E.A. Martinko, and K.P. Price, Landscape structure analysis of Kansas at three scales, *Landscape and Urban Planning*, Vol.52, 2000, pp. 45-61.
- [8] Harrar, K. and L. Hamami. The Box Counting Method for Evaluate the Fractal Dimension in Radiographic Images. *6th WSEAS International Conference on Circuits, Systems, Electronics, Control & Signal Processing (CSECS '07)*, 2007, pp. 385-389.
- [9] Hsiung S., and J.H. Jeng. 2005. Image retrieval using fractal feature. *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Computers*, 2005.
- [10] Li, B.L., Fractal geometry applications in description and analysis of patch patterns and patch dynamics, *Ecological Modelling*, Vol.132, No.1, 2000, pp. 33-50.
- [11] Linsemier, L.H., *Soil survey of Iron County, Michigan*. United States Dept. of Agriculture, Washington, D.C.: Natural Resources Conservation Service : Forest Service, 1997.
- [12] Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.
- [13] Milne, B.T., The utility of fractal geometry in landscape design, *Landscape and Urban Planning*, Vol.21, No.1-2, 1991, pp. 81-90.
- [14] Palmer, M.W., Fractal geometry: a tool for describing spatial patterns of plant communities, *Journal of Plant Ecology*, Vol.75, No.1-2, 1988, pp. 91-102.
- [15] Sarris, A., M. Maniadakis, O. Lazaridou, V. Kalogrias, M. Bariotakis, and S. Pprintsos. Studying Land Use Patterns in Crete Island, Greece, Through a Time Sequence of Landsat Images and Mapping

Vegetation Patterns, *WSEAS Transactions on Environment and Development*, Vol.2, No.1, 2005, pp. 272-279.

- [16] Thomas, I., P. Grankhauser, and C. Biernacki, The morphology of built-up landscapes on Wallonia (Belgium): a classification using fractal indices, *Landscape and Urban Planning*, Vol.84, 2007, pp.99-115.
- [17] United States Department of Agriculture., *Soil Survey of Dickinson County, Michigan*, United States Department of Agriculture, Washington, D.C. Soil Conservation Service, 1989.

ECOLOGICAL MODELLING

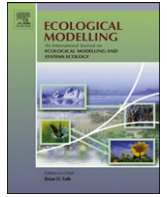
Chaput-Bardy A., **Fleurent C.**, Secondi J. and C. Lemaire, 2009, Modelling the effect of in-stream and overland dispersal on gene flow in river networks, *Ecological Modelling*, sous presse.



Contents lists available at ScienceDirect

Ecological Modelling

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ecolmodel



Modelling the effect of in-stream and overland dispersal on gene flow in river networks

A. Chaput-Bardy^{a,1}, C. Fleurant^{b,*}, C. Lemaire^{a,2}, J. Secondi^a

^a Laboratoire d'Etudes Environnementales des Systèmes Anthropisés, Université d'Angers, 2 bd Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France

^b Unité de Recherche Paysage, AgroCampus Ouest, 2 rue Le Nôtre, 49045 Angers Cedex 01, France

ARTICLE INFO

Article history:
Available online xxx

Keywords:
Genetic structure
Individual-based model
Freshwater organisms
Simulations

ABSTRACT

Modelling gene flow across natural landscapes is a current challenge of population genetics. Models are essential to make clear predictions about conditions that cause genetic differentiation or maintain connectivity between populations. River networks are a special case of landscape matrix. They represent stretches of habitat connected according to a branching pattern where dispersal is usually limited to upstream or downstream movements. Because of their peculiar topology, and the increasing concern about conservation issues in hydrosystems, there has been a recent revival of interest in modelling dispersal in river networks. Network complexity has been shown to influence global population differentiation. However, geometric characteristics are likely to interact with the way individuals move across space. Studies have focused on in-stream movements. None of the work published so far took into consideration the ability of many species to disperse overland between branches of the same network though. We predicted that the relative contribution of these two dispersal modalities (in-stream and overland) would affect the overall genetic structure. We simulated dispersal in synthetic river networks using an individual-based model. We tested the effect of dispersal modalities, i.e. the ratio of overland/in-stream dispersal, and two geometric parameters, bifurcation angle between branches and network complexity. Data revealed that if geometrical parameters affected population differentiation, dispersal parameters had the strongest effect. Interestingly, we observed a quadratic relationship between p the proportion of overland dispersers and population differentiation. We interpret this U-shape pattern as a balance between isolation by distance caused by in-stream movements at low values of p and intense migrant exchanges within the same branching unit at high values of p . Our study is the first attempt to model out-of-network movements. It clearly shows that both geometric and dispersal parameters interact. Both should be taken into consideration in order to refine predictions about dispersal and gene flow in river network.

© 2009 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Dispersal is a key life history trait for population processes as it contributes to gene flow, prevents local extinction, and determines the probability of patch recolonization (Hanski, 1999; Clobert et al., 2001; Bullock et al., 2002; Bowler and Benton, 2005; Ronce, 2007). The spatial distribution of dispersal events across an area determines preferential connections and gene flow level between patches. Connectivity level between demes affects migration-drift equilibrium and the overall level of genetic differentiation of popu-

lations. Modelling dispersal in landscapes is thus an essential step to investigate the relationships between the distribution of habitat patches, connectivity networks and the resulting spatial genetic structure of populations (Campbell Grant et al., 2007). Model outputs help to build predictions for instance about the effect of connectivity on the inbreeding level and the potential for local adaptation of demes which are both major issues from a theoretical and conservation point of view.

Natural environments are anisotropic which means that heterogeneity in landscape composition and spatial organization causes individuals to move along preferential pathways across the landscape matrix (Gustafson and Gardner, 1996; Béliste, 2005). Many studies attempted to model gene flow in different types of landscapes (Nuismer et al., 2003; Cushman et al., 2006; Shaw et al., 2006; Ceddia et al., 2007; Vuilleumier and Fontanillas, 2007). Still, river networks can be considered as a particular case of landscape matrix (Campbell Grant et al., 2007). The peculiarity arises from their topology. River networks are continuous stretches of habi-

* Corresponding author. Fax: +33 2 41 22 55 28.

E-mail address: cyril.fleurant@agrocampus-ouest.fr (C. Fleurant).

¹ Current address: UMR 7179 CNRS-MNHN, Equipe EVOLTRAIT, 4 av du Petit Château, 91800 Brunoy, France.

² Current address: Laboratoire 2EPF, UMR PaVé-INRA-Agrocampus Ouest-Université d'Angers, 42, rue Georges Morel, BP 57, 49071 Beaucauzé Cedex, France.

tats, suitable for breeding or dispersal, connected in a dendritic (i.e. branching) pattern. The “biological” distance between two sites is not defined by the straight-line distance (Euclidian distance) but by the length of the watercourse between the two points (Fagan, 2002). Consequently, the geometrical configuration of the river network determines the distribution of distance between breeding sites. The distance following the watercourse (Little et al., 1997) and the number of branches (Gardner et al., 2003) are parameters that could affect dispersal of individuals, gene flow patterns and ultimately spatial genetic structure. However, in river networks, individuals do not necessarily disperse along a watercourse (i.e. in-stream dispersal). They can also move between branches (i.e. overland dispersal) if all life stages are either strictly aquatic, or if floods connect different watercourses.

In species whose dispersal is restricted to the watercourse, movements are constrained by water flow, network topology, and physical barriers to dispersal such as bordering terrestrial habitat (Slatkin, 1985; Rissler et al., 2004; Lowe et al., 2006). It results from these properties that gene flow occurs preferentially along branches (Ward et al., 1994; Bilton et al., 2001; Beck and Pruett-Jones, 2002; Power and Dietrich, 2002; Peckarsky et al., 2005). Gene flow is generally asymmetric as more individuals move downstream following the water flow than the other way round (Hernandez-Martich et al., 1995). In addition, the hierarchical structure of river networks tends to isolate populations living in different branches from each others (McGlashan et al., 2001). Individuals are then distributed among different watercourses when they move upstream, whereas they are concentrated, joining at confluences, when they move downstream (Power and Dietrich, 2002). These two types of movement are expected to result in decreased genetic diversity upstream (Schmidt et al., 1995) and increased genetic differentiation between branches (Power and Dietrich, 2002). In addition, upstream populations are more sensitive to genetic drift because of their geographic isolation (Fraser et al., 2004). Therefore, the genetic structure of populations is supposed to reflect the hierarchical structure of the river network (Meffe and Vrijenhoek, 1988). This assumption was verified in 56% of fish species (Avise, 2000), the freshwater prawn, *Macrobrachium australiense* (Cook et al., 2002), and the white-clawed crayfish *Austropotamobius pallipes* (Grandjean et al., 1997).

Nevertheless, genetic patterns do not always match the spatial organization of the river network because of barriers to dispersal caused by dams (Hurwood and Hughes, 1998; McGlashan and Hughes, 2000) or out-of-network dispersal (Hurwood and Hughes, 2001). A number of species like freshwater insects (Kovats et al., 1996; Miller et al., 2002; Petersen et al., 2004; Macneale et al., 2005) or amphibians (Lowe, 2002) shows overland and in-stream dispersal. For these organisms, overall genetic differentiation is supposed to decrease with the level of overland connectivity between nearby but independent watercourses (Gibbs et al., 1998). This prediction has recently received support from an empirical study in the Banded damselfly, *Calopteryx splendens* (Chaput-Bardy et al., 2008). Genetic analyses revealed that gene flow preferentially occurred along watercourses. However, overland dispersal accounted for the mismatch between the spatial genetic structure and the river network structure.

Two network parameters are likely to influence the effect of overland dispersal on genetic structure. (i) The mean angle between two branches joining at a confluence is also of importance as the Euclidean distance between two sites of adjacent branches decreases with the bifurcation angle. (ii) For a given area, the number of branches that receive migrants from other branches increases with the complexity of the network, i.e. the number of branches, owing to the higher density of watercourses. For organisms with strict in-stream dispersal, higher complexity is expected to promote differentiation between regions of the network (sub-catchments). In contrast, it is expected to lower population differentiation when

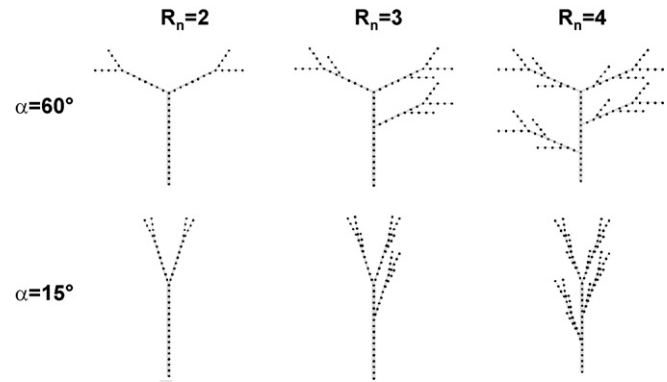


Fig. 1. Bifurcation angle α and dispersal pathways in river networks. In-stream dispersal is unaffected by α (up). In contrast, overland dispersal is very sensitive to variation of α as the fraction of the network receiving migrants from a node increases when α decreases (down). Circles indicate the dispersal range and diamonds the nodes that can actually be reached from the focal node.

overland dispersal allows gene flow between otherwise distant branches. In genetic terms, overall population differentiation is expected to be positively correlated with the mean bifurcation angle but the relationship with network complexity is less straightforward.

In summary, it can be predicted that the population genetic structure in a river network depends on the geometry of the river network, the dispersal modalities used by the species, and the presence of barriers. The first mathematical models investigating the effect of river network topology on genetic patterns were carried out a few decades ago (Sawyer, 1978; Meffe and Vrijenhoek, 1988). However, a revival of interest in the effect of river structure on dispersal or gene flow has been occurring (Charles et al., 2000; McGlashan and Hughes, 2000; Fagan, 2002; Lowe, 2002; Neuenschwanger, 2006; Labonne et al., 2008; Cote et al., 2009). Recently, Labonne et al. (2008) demonstrated using simulations the effect of the size and the number of branches on connectivity as well as on metapopulation persistence. However, none of these authors attempted to model out-of-network dispersal. The effects of bifurcation angles and network complexity on genetic structure remain to be investigated for species or life stages able of out-of-network dispersal (Campbell Grant et al., 2007) (Fig. 1). In the present study, we used an individual-based model to simulate in-stream and overland dispersal and tested the effects of the branching pattern, bifurcation angles and the probability of overland dispersal on the overall genetic structure of demes in the network.

2. Materials and methods

2.1. Modelling of synthetic river networks

River networks have two main properties. Firstly, they are made of segments (watercourse stretches) and confluence points that form a branching network (Ganio et al., 2005). The geometry of a network is characterized by the hierarchical structure of watercourses (segments) categorized in orders. Many classification systems have been put forward but we decided upon Strahler's system (Strahler, 1957) that is the most widely used. The classification system is as follows: (i) headwaters are considered as first order stream segments, (ii) when two stream segments within the same order $\omega = i$ merge, the stream segment resulting from this confluence is considered as order $\omega = i + 1$, (iii) when two stream segments of different orders, $\omega = i$ and $\omega = j$ merge, the stream segment resulting from this confluence is of order $\omega = \max(i, j)$ (Strahler, 1957). The river network order corresponds to the highest index value

of a segment. This classification puts forward general geometric laws. Among them, Horton's laws (Horton, 1945) describe the way stream networks are organized. These laws express the so-called bifurcation ratio R_B and length ratio R_L , also known as Horton's ratios. A great number of experimental studies on stream networks (Tarboton et al., 1990; Rosso et al., 1991) revealed that these ratios are rather stable and fluctuate between 3 and 5 for R_B and between 1.5 and 3.5 for R_L . Horton's laws also make it possible to work out the R_B and R_L (Eq. (2)), where \bar{l}_k is the average value of the morphometric lengths of k order and N_k is the number of morphometric lengths of k order.

$$R_L = \frac{\bar{l}_k}{\bar{l}_{k-1}}, \quad R_B = \frac{N_{k-1}}{N_k} \quad (2)$$

2.2. Modelling in-stream and overland dispersal in synthetic river networks

In our synthetic networks, each node is connected to one or two upper nodes (upstream) and one lower node (downstream). Upstream and downstream dispersal is allowed. Dispersal is defined as the fraction m of adults that move out of their natal node before breeding, so it is different from effective migration. Among dispersers, a fraction $(1 - p)$ of adults disperse in-stream, i.e. along the watercourse, and a fraction (p) disperses overland, i.e. between branches of the network. River networks are discretized into evenly spaced nodes. Each node is a potential breeding site. Individuals can disperse up to four nodes when moving in-stream, and to an equivalent distance when moving overland to another

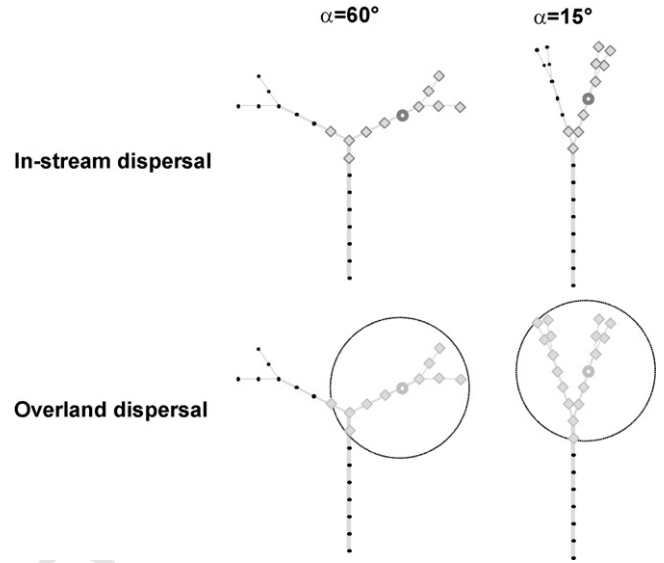


Fig. 2. Examples of synthetic river network used for simulations in the present study. River order ω and branch length ratio R_L were respectively 3 and 2. The bifurcation ratio R_B varied between 2 and 4. The figure shows only two values of the bifurcation angle α , 15° and 60°.

branch. The dispersal distribution is uniform so that individuals can reach any node within a four-node range. We allowed p to vary between 0 and 1. A zero value indicates that only in-stream dispersal occurs. When $p = 1$, all adults disperse overland when possible.

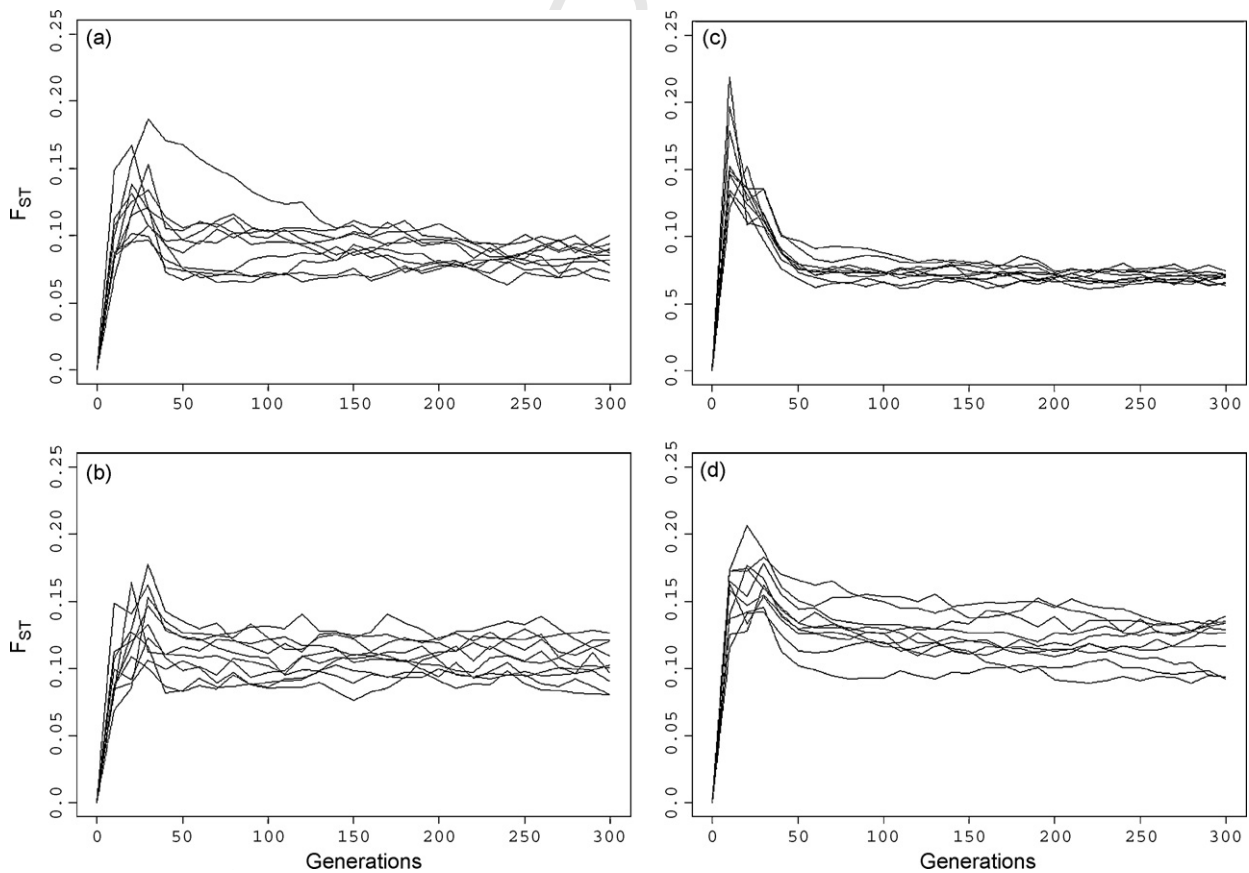


Fig. 3. Variation of F_{ST} in river networks with different bifurcation angles α , and levels of branching complexity R_B : (a) $R_B = 2$, $\alpha = 15^\circ$, (b) $R_B = 2$, $\alpha = 90^\circ$, (c) $R_B = 4$, $\alpha = 15^\circ$, (d) $R_B = 4$, $\alpha = 90^\circ$. Graphs show 20 replicates for each sets of simulation where $\omega = 3$ (river network order), $R_L = 2$ (the length ratio), $m = 0.1$ (dispersal rate), $p = 0.6$ (overland dispersal rate) are constant. Results indicate that migration-drift equilibrium is reached by the 300th generation. We used this value as the maximum number of iterations in the study.

Table 1
Generalized linear models after a stepwise AIC for the relationship between genetic differentiation ($\log F_{ST}$), branching ratio of the river network (R_B), bifurcation angle between branches (α), migration rate (m), proportion of overland dispersal (p), and the quadratic term (p^2). For each model are shown the number of parameters (k), log-likelihood (LL), change in Akaike's Information Criterion (ΔAIC), AIC weight (wAICc), and the percentage deviance explained (%DE) in the $\log F_{ST}$ response variable.

Model	Variables	k	Log-likelihood	ΔAIC	AIC weights	%DE
1	Complete model without the interaction $\alpha:m$	22	5305.831	0.0	0.514	86.51
2	Complete model	23	5305.943	0.1	0.486	86.51

As a general rule for $p > 0$, individuals disperse in-stream if no site can be reached by an **out-of-network** movement. Bifurcation angle α determines the overland distance between two nodes on adjacent branches but not their in-stream distance. Successful overland dispersal is more likely for low values of α as distances between branches are shorter. On the contrary, in-stream dispersal should prevail in network with high values of α .

Boundary nodes (boundaries of the river catchment) are linked to upper nil nodes. For these nodes we consider that individuals disperse out of the network. The reason is that boundary nodes receive fewer migrants (only from one direction) and are thus more prone to genetic drift. They could thus bias the estimation of the overall population structure.

2.3. Colonization, demographic and genetic parameters

Individuals were introduced from the lowermost node. We allowed colonization of the entire network from this single node. The carrying capacity K for each node was fixed to 100 adults. If the number of adults after migration in a population exceeded K , then a sample of K individuals was randomly drawn from the pool of resident and migrant adults. Extra individuals were not allowed to breed. Strictly monogamous pairs were formed randomly from the sample of adults. Each pair produced **five** offspring so that no variation in breeding success occurred. There was no overlap between generations.

Individuals were characterized by **10** bi-allelic loci with a mutation rate of 10^{-8} like **single nucleotide polymorphism (SNP)** markers (Brumfield et al., 2003). A population, defined as all adults present on a given node. Sex of new individuals **was** drawn at random. Individuals of the initial sample (first generation on the lower node) were heterozygous for the **10** loci. By this way all simulations start with the same initial conditions: allele frequencies set at 0.5 for the **10** loci. For all subsequent generations and populations egg genotype resulted from the random sampling of one allele from each parent. Hardy-Weinberg equilibrium was assumed for each population.

2.4. Test of network geometry and dispersal characteristics on genetic structure

We modeled three river networks representative of many catchments observed in natural environment. The Horton parameters for the selected networks were as follows: Network A $\omega = 3$, $R_L = 2$, $R_B = 2$; Network B $\omega = 3$, $R_L = 2$, $R_B = 3$; and Network C $\omega = 3$, $R_L = 2$, $R_B = 4$. For each of these three river networks, we created six additional networks with different values of α , the bifurcation angle between two branches joining at a confluence. We set α respectively to 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , and 90° . Higher values are not expected to occur frequent. Keeping α constant across the whole network could cause crossings between higher order branches. In order to avoid this problem, we used a simple rule. Each bifurcation angle involving one last order segment was set to α . Angles for all other bifurcations were set to $\alpha/2$.

A total of 18 networks were synthesized, Fig. 2 represents some of them. Size was fixed so that the distance between the lower and

upper node was 26 nodes. Network size, i.e. the number of nodes, was 54 for $R_B = 2$, 88 for $R_B = 3$, and 132 for $R_B = 4$.

For each network we selected six values of p , the fraction of overland dispersers: 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, and 1. For all 36 combinations of α and p we ran 20 replicates. In addition, we replicated these simulations for all parameter combinations at two dispersal

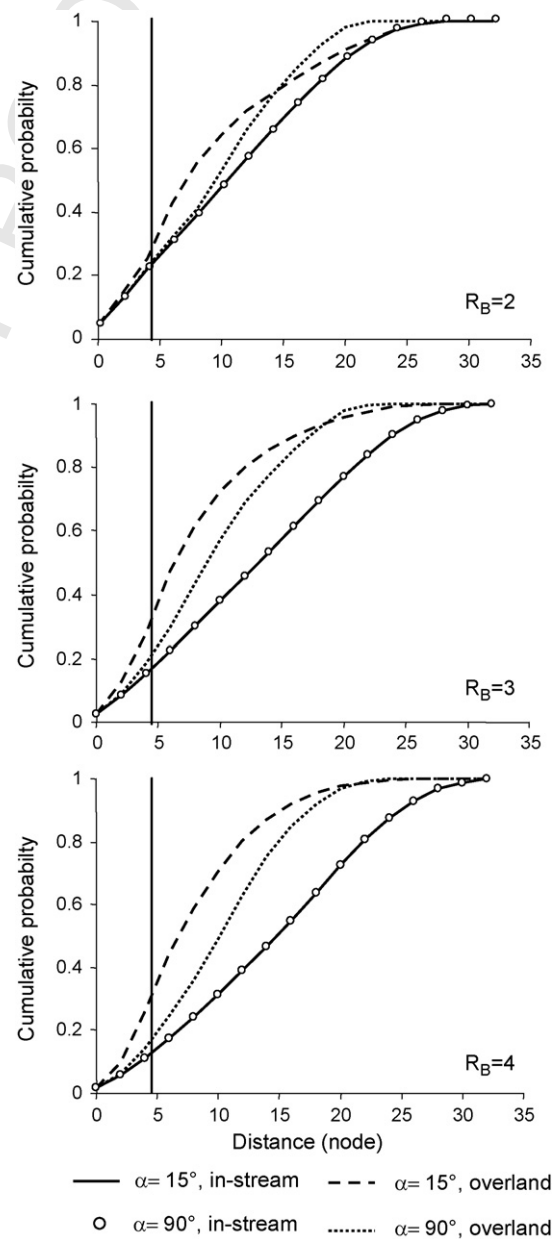


Fig. 4. Cumulative probability of the number of nodes that can be reached from any site against the distance to the focal node. Functions are given for **three** levels of network complexity R_B , **two** bifurcation angles and two dispersal modalities (in-stream and overland). The vertical lines indicate the maximal dispersal distance in our simulations.

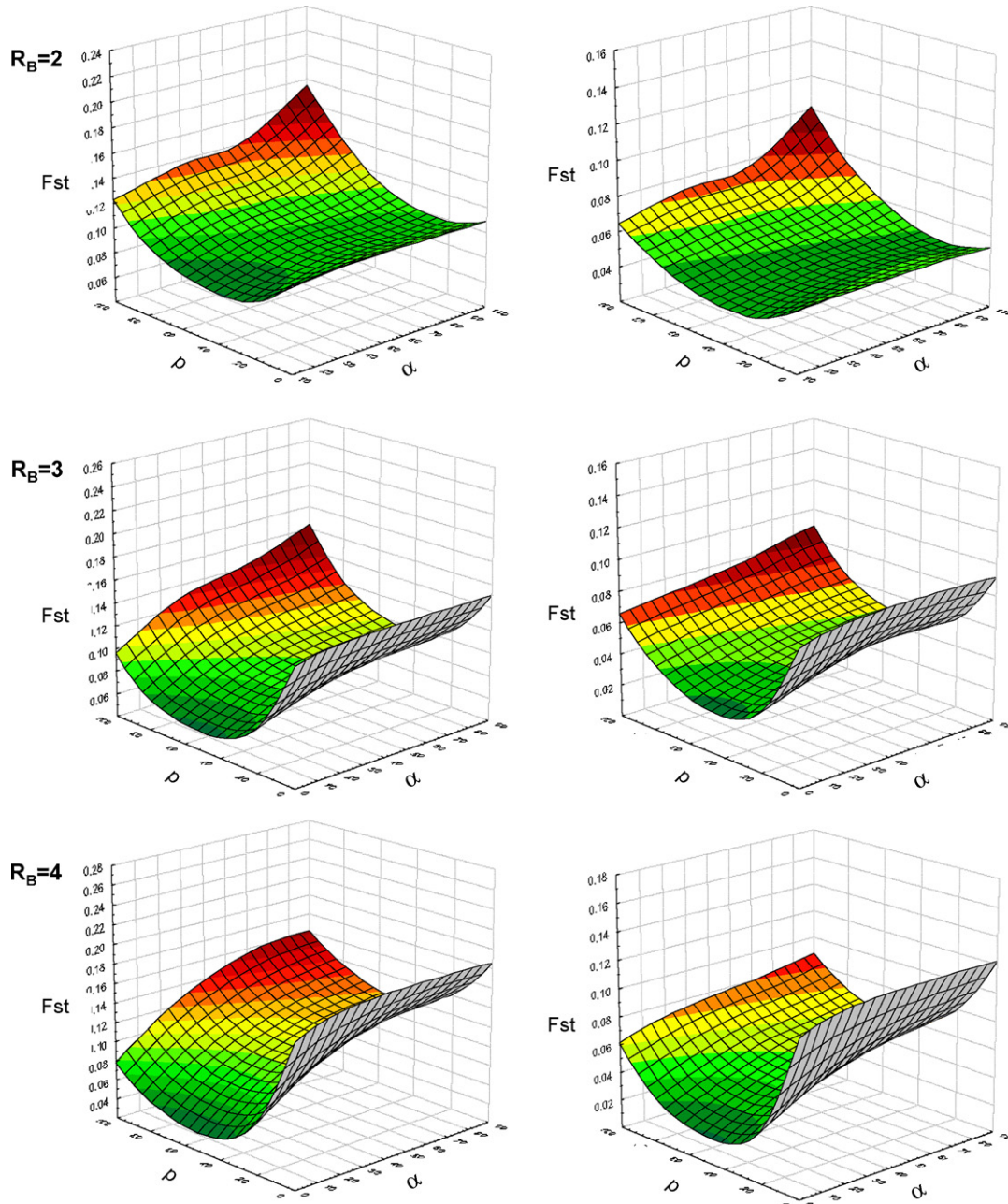


Fig. 5. Response surface of overall F_{ST} value to bifurcation angle α and branching complexity R_B . Estimations were made using a weighted least square method on F_{ST} values for 20 replicates of each combination of α and R_B .

Table 2

Q7 ANOVA results of the most parsimonious GLM (see Model 1 in Table 1). Df is the degree of freedom and Df Resid the degree of freedom of the residual deviance.

	Df	Residual deviance	Df Resid	Deviance	F	p
Null			4319	160.801		
R_B	2	3.999	4317	156.802	396.438	<0.0001
α	1	7.376	4316	149.427	1462.368	<0.0001
m	1	83.490	4315	65.936	16553.809	<0.0001
p	1	0.024	4314	65.912	4.795	0.02859
p^2	1	31.782	4313	34.13	6301.440	<0.0001
$R_B:\alpha$	2	1.046	4311	33.084	103.697	<0.0001
$R_B:m$	2	0.094	4309	32.991	9.300	<0.0001
$R_B:p$	2	5.609	4307	27.382	556.011	<0.0001
$R_B:p^2$	2	2.895	4305	24.487	286.962	<0.0001
$\alpha:p$	1	0.511	4304	23.976	101.387	<0.0001
$\alpha:p^2$	1	0.795	4303	23.181	157.659	<0.0001
$m:p$	1	0.030	4302	23.151	5.983	0.01448
$m:p^2$	1	0.614	4301	22.537	121.695	<0.0001
$p:p^2$	1	0.850	4300	21.687	168.457	<0.0001

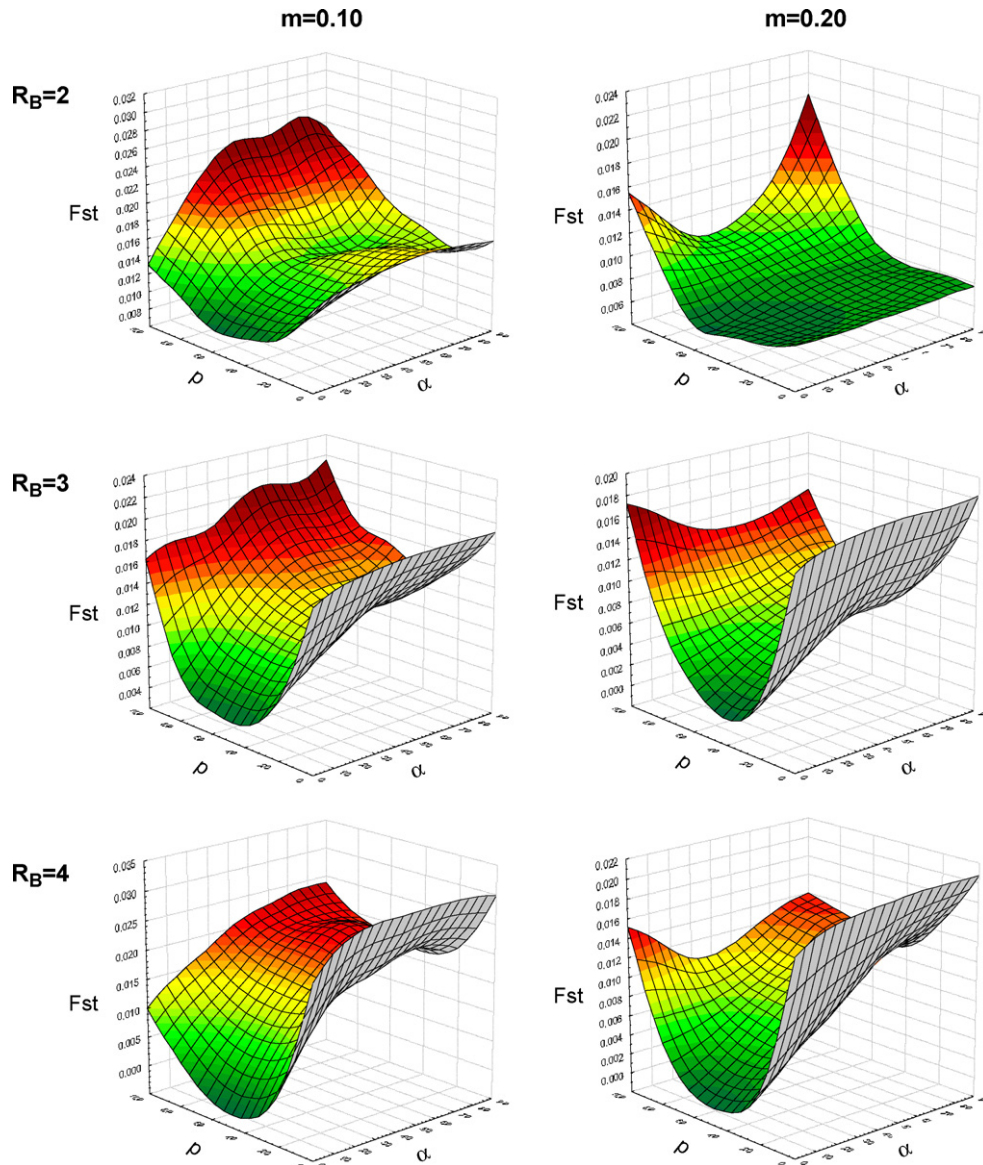


Fig. 6. Response surface of overall F_{ST} to bifurcation α , and branching complexity R_B . Estimations were made using a weighted least square method on standard deviation of F_{ST} values for 20 replicates of each combination of α and R_B .

levels ($m=0.1$ and 0.2). Each simulation was run for 300 generations. Preliminary tests using the more complex network (**Network C**) showed that this length was sufficient to reach migration-drift equilibrium for the range of network sizes we simulated (Fig. 3). Overall, we ran 4320 simulations ($3 \text{ networks} \times 6\alpha \times 6p \times 2m \times 20$ replicates).

We computed the mean and the variance of the overall F_{ST} value for each for α and p combinations and m values. We thus included all populations and all individuals in the computation of the F statistics. For each network, we visualized the effect of α and p on F_{ST} and F_{ST} standard deviation as a response surface fitted using the weighted least square method using STATISTICA 7.1 (StatSoft, Inc., 1984-2005).

Generalized linear models (GLMs) were constructed to test for the influence of R_B , α , p and their interactions on F_{ST} . We carried out a factorial analysis including all factors and their pairwise interactions. We used a squared term of p to test for non-linear effect of this variable (McCullagh and Nelder, 1983). GLMs assumed a normal error structure, as the response variable ($\log F_{ST}$) was adjusted to a Gaussian distribution. A stepwise Akaike's Information Criterion with a backwards selection procedure was used to select the

most parsimonious model from the complete model: $\log(F_{ST}) \sim R_B + \alpha + m + p + p^2 + R_B:\alpha + R_B:m + R_B:p + R_B:p^2 + \alpha:m + \alpha:p + \alpha:p^2 + m:p + m:p^2 + p:p$ (Burnham and Anderson, 2002). For each model considered we also calculated the percentage deviance explained (%DE) as a measure of goodness-of-fit. Model selection was carried out using the StepAIC function in MASS package available in R (R project for statistical computing, ver. 2.8.1, <http://www.r-project.org/>).

3. Results

3.1. Connectivity and dispersal modality

Fig. 4 shows that, in synthetic river networks, the distribution of pairwise distances differs for the two modalities of dispersal considered. The probability of reaching a node is higher for **out-of-network dispersal** than for in-stream dispersal for all distances (Fig. 4). In addition, the probability difference between in-stream and overland dispersal increased with R_B . Finally, the difference depended on the bifurcation angle as it increased with α for a given R_B (Fig. 4). Thus, this graph shows that the level of network com-

Table 3

Effect of branching ratio of the river network (R_B), bifurcation angle between branches (α), migration rate (m), proportion of overland dispersal (p), and the quadratic term (p^2), on between genetic differentiation ($\log F_{ST}$). Here is presented the most parsimonious Model 1 from the complete model. We used a generalized linear model and applied a stepwise AIC with a backward selection procedure (see Section 2). R_B2 and $m10$ were taken as reference.

	Estimate	SE	t	p
(Intercept)	-9.63E-01	7.77E-03	-123.99	<0.0001
R_B3	1.30E-01	8.42E-03	15.397	<0.0001
R_B4	1.89E-01	8.42E-03	22.471	<0.0001
α	-3.71E-04	1.11E-04	-3.343	0.00084
$m20$	-2.52E-01	5.69E-03	-44.234	<0.0001
p	-8.73E-03	3.94E-04	-22.166	<0.0001
p^2	1.45E-04	6.90E-06	21.048	<0.0001
$R_B3:\alpha$	5.00E-04	1.03E-04	4.843	<0.0001
$R_B4:\alpha$	1.46E-03	1.03E-04	14.167	<0.0001
$R_B3:m20$	2.03E-02	5.29E-03	3.829	0.00013
$R_B4:m20$	1.92E-02	5.29E-03	3.634	0.00028
$R_B3:p$	-6.86E-03	2.76E-04	-24.829	<0.0001
$R_B4:p$	-8.22E-03	2.76E-04	-29.743	<0.0001
$R_B3:p^2$	5.35E-05	2.65E-06	20.149	<0.0001
$R_B4:p^2$	5.65E-05	2.65E-06	21.297	<0.0001
$\alpha:p$	6.55E-05	4.40E-06	14.876	<0.0001
$\alpha:p^2$	-5.31E-07	4.23E-08	-12.556	<0.0001
$m20:p$	-2.54E-03	2.26E-04	-11.275	<0.0001
$m20:p^2$	2.39E-05	2.17E-06	11.032	<0.0001
$p:p^2$	-5.33E-07	4.11E-08	-12.979	<0.0001

278 **plexity R_B** influences the probability of successful dispersal. It is also
 279 indicative of an interaction between network geometry, R_B and α ,
 280 and dispersal modalities on the biological connectivity of the whole
 281 **Q2** river network (Fig. 5).

282 **3.2. Effect of dispersal parameters m and p**

283 The complete model, $\log(F_{ST}) \sim R_B + \alpha + m + p + p^2 + R_B:\alpha + R_B:m$
 284 $+ R_B:p + R_B:p^2 + \alpha:m + \alpha:p + \alpha:p^2 + m:p + m:p^2 + p:p^2$, gave a good
 285 fit to the dataset (residual adjustment test, $p > 0.1$). According to
 286 the model selection procedure (stepwise AIC), the two best models
 287 accounted for more than 86.5% of explained deviance (Table 1). The
 288 best model, Model 1, contained all variables (R_B , α , m , p and p^2) and
 289 all but one interaction $\alpha:m$, and the second best model, Model 2, was
 290 the complete model (Table 1). Results of both models were strongly
 291 similar; consequently we chose to show the results for Model 1 only.
 292 Most interactions were significant although their residual deviance
 293 was small (Table 2). The large sample size of simulations might have
 294 caused the undue detection of small effects without little biological
 295 sense. We thus focused our analysis on the main significant effects
 296 and interactions.

297 The main factors influencing F_{ST} were the migration rate m
 298 (residual deviance = 83.49, $p < 0.0001$, Table 2), and squared over-
 299 land dispersal p^2 (residual deviance = 31.78, $p < 0.0001$) (Table 2
 300 and Fig. 6). Dispersal rate m had the most influential effect on F_{ST}
 301 (Table 3). For $m = 0.20$ the response surface was strongly flattened,
 302 which outlined the fact that F_{ST} weakly responded to variations
 303 of the bifurcation angle α , and the proportion of overland dis-
 304 persers p when m was high enough (Fig. 6). Surprisingly, we found
 305 a quadratic relationship between F_{ST} and p . F_{ST} decreased for values
 306 of p between 0 and 0.5. It increased for values of p above 0.5 (Fig. 6).
 307 A similar relationship was logically observed for the standard deviation
 308 of F_{ST} (Fig. 7). Thus, a minimum of genetic differentiation was
 309 reached for intermediate values of p .

310 In order to make sure that the quadratic relationship was
 311 not an artefact caused by dispersal rules, we ran additional simu-
 312 lations where overland disperser died when they could not
 313 reach a node. We carried out ten replicates for two values of
 314 the bifurcation angle ($\alpha = 15^\circ$ and 90°) on the following network:
 315 $\omega = 3$, $R_B = 3$, $m = 0.1$. Results showed again a quadratic relation-
 316 ship between p and F_{ST} (data not shown). The only difference
 317 was null F_{ST} values for $p = 1$ as individuals could not disperse

overland out of the initial node and thus could not colonize the
 network.

320 **3.3. Effect of network parameters**

321 The geometry of the network (i.e. the number of branches and
 322 the bifurcation angle between branches) significantly affected the
 323 overall genetic structure. According to the positive values of their
 324 coefficients, an increase in R_B or α was reflected by an increase in
 325 F_{ST} (Table 3). These two factors respectively took 3.99 ($p < 0.0001$)
 326 and 7.38 ($p < 0.0001$) of the residual deviance (Table 2). Fig. 7 illus-
 327 trates the overall effect of α on F_{ST} . When overland dispersal occurs,
 328 overall population differentiation increases with distance between
 329 branches. However, Fig. 6 and Table 2 show that the level of net-
 330 work complexity R_B influenced the relationship between the two
 331 variables ($R_B:\alpha$, residual deviance = 1.05, $p < 0.0001$). Similarly, F_{ST}
 332 increased with bifurcation ratio. Thus, population genetic differ-
 333 entiation increased with network complexity R_B . Here again, the
 334 relationship between this variable and F_{ST} was not strictly linear
 335 but strongly affected by the interaction with p the proportion of
 336 overland dispersers (residual deviance = 5.61, $p < 0.0001$).

337 **4. Discussion**

338 We investigated the effects of network geometry and dis-
 339 persal modalities on the genetic differentiation of populations.
 340 To our knowledge, this study is the first attempt to explicitly
 341 consider out-of-network dispersal, i.e. movements of individu-
 342 als between branches. Results clearly showed that dispersal and
 343 network characteristics not only influence the overall level of popu-
 344 lation differentiation but also the way they interact is important too.
 345 As a consequence, both factor types should be considered jointly
 346 when investigating population processes in river networks.

347 **4.1. Effect of network parameters**

348 Variation of the bifurcation ratio R_B strongly influences the den-
 349 sity of watercourses when keeping constant the catchment area.
 350 An individual dispersing out-of-network has thus a better chance
 351 to reach another branch in highly than in poorly ramified net-
 352 works. Figs. 3 and 4 show that the number of nodes that can be
 353 reached is higher when dispersing overland than when dispers-

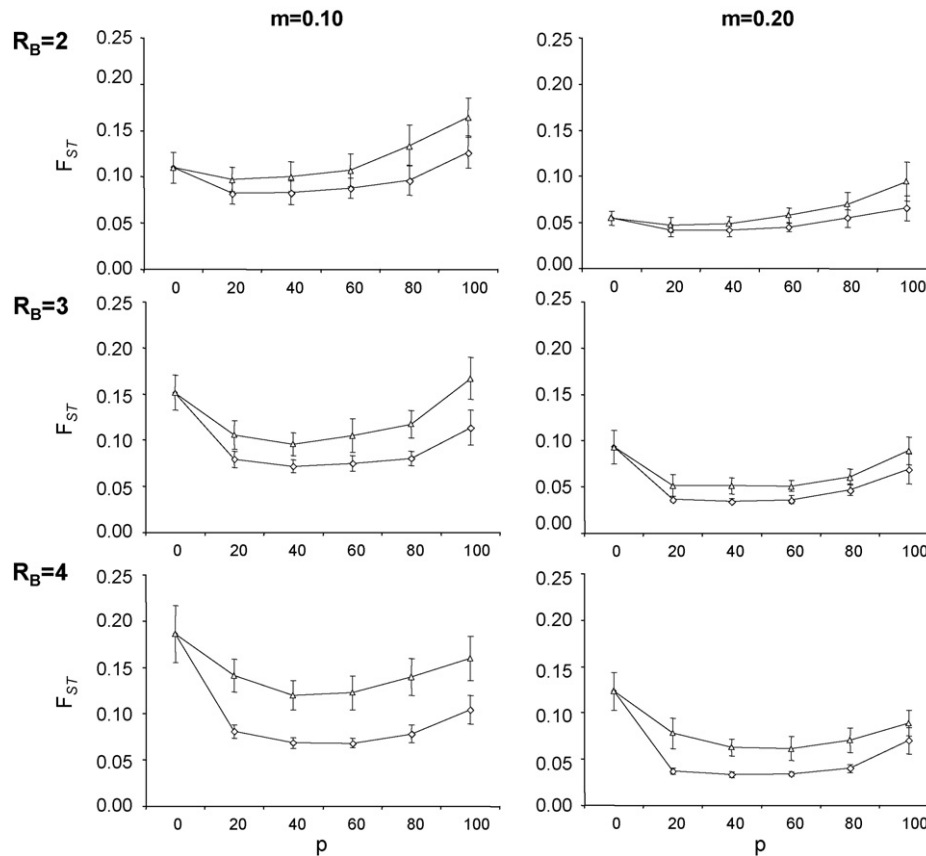


Fig. 7. Interaction between p , the proportion of terrestrial dispersers, the bifurcation angle α , and network complexity R_B on overall population differentiation F_{ST} . Triangles: $\alpha = 90^\circ$; diamonds $\alpha = 15^\circ$.

ing in-stream, and that the difference tends to increase with R_B . They clearly illustrate the importance of considering the different dispersal pathways available to individuals.

Simulations revealed that overall F_{ST} was positively related to R_B . For a given dispersal range, the fraction of movements within branches of the same branching unit increased with the number of branches. In biological terms, this means that differentiation between sub-catchments is favored when network complexity increases. As predicted the bifurcation angle α affected the genetic structure too. Individuals have better opportunities to successfully disperse overland in network with low values of α because of the reduced mean pairwise distance between sites. Consistently, we observed a positive relationship between α and the overall level of population differentiation. Thus, the simulation results support our initial predictions about the relationships between river network parameters and the level of population differentiation. F_{ST} tended to increase with network complexity and bifurcation angle between branches, i.e. with decreasing opportunity for successful overland dispersal. However, the effect of network parameters did not only consist in linear changes of the overall F_{ST} value. Interactions between R_B and p contributed to the bending of the surface response.

4.2. Effect of dispersal parameters m and p

Dispersal m and the proportion of overland dispersers p appeared as the major factors contributing to population differentiation. The reduction in deviance when these factors were considered was much greater than for any other factor. Dispersal alone seemed to be the most influential on F_{ST} as shown in Fig. 4. Doubling its value from 0.1 to 0.2 caused a strong flattening of the

surface response whatever the combinations of the other parameters. Such a result suggests that moderate to strong migration would cancel the effect of network geometry. Thus, the effects of other factors would only be detected under a range of low dispersal rates.

Unexpectedly, we observed a quadratic relationship between p , the proportion of overland dispersers, and population differentiation F_{ST} . The effect was reinforced with increasing values of R_B . We interpret the curvilinear shape of this relationship as the effect of a balance between two mechanisms. Without overland dispersal, gradual differentiation according to an isolation by distance pattern occurred (results not shown). It results that nodes located close to the outlet and in distant branch tended to differentiate because they were located far apart. In contrast, genetic differentiation was strongly reduced when overland dispersal was allowed, i.e. when regular exchanges of migrants between branches could occur. However, F_{ST} increased again for high values of p when most migrants dispersed out-of-network. Under such conditions, migration is expected to occur mostly within sub-units (sub-catchment) of the network. Accordingly, in-stream dispersal was very low, reducing the effect of effective migration along the network. Stronger population differentiation for low and high values of p is thus likely to be accounted for by the relative effects of the two dispersal modalities.

4.3. Perspectives and current limits of investigations of dispersal in river networks

We developed an individual-based model to predict spatial genetic structure of organisms able to disperse in-stream and out-of-network. We believe that this study can be useful to improve our understanding of population processes in river networks and

we hope it will help stimulating other investigations on the topic. Nevertheless, we have to keep in mind that synthetic networks still represent simpler versions of natural river networks. For this reason, the effects on ecological processes of some of investigated factors, like network geometry, might be over- or under-estimated. Owing to computation constraints, our synthetic networks represented only a part of the range of all existing networks. Much larger values of R_B can be observed for larger catchments. Moreover, we found that most variables interacted to affect the overall population differentiation. Thus, we cannot extrapolate our findings to higher levels of complexity yet. We focused on a restricted range of R_B values. Even if this range encompasses a large proportion of catchments observed, we are still unable to predict the shape of the surface response for very complex networks.

We used dichotomic networks and the bifurcation angle α was fixed, i.e. all branches split with the same angle. Dichotomy is not an absolute rule in river network geometry and it would be highly interesting to consider the influence of this geometric factor in future studies. Moreover, α is far from being constant. The variance of α may be of some importance and ought to be considered too, even if we do not expect that drastically different conclusions would be drawn as the bifurcation angle was not the strongest effect we detected. Finally, natural river networks are subjected to stochastic factors (e.g. flood, drought, pollution) affecting intrinsic population growth rates, carrying capacities and deme extinction probability. These factors were not considered in our simulations. We kept the demographic part of the simulation quite simple. However, there are few reasons for demographic stochasticity such as local extinctions and recolonizations to reduce overall population differentiation. Demographic stochasticity is usually shown to work the other way round as it reduces metapopulation effective size (Whitlock and Barton, 1997).

Considering overland dispersal opens new questions. For instance, river networks are modelled as objects completely isolated from external influences. In particular, no exchanges of migrants between neighboring catchments or other water bodies are allowed. In real situations, the closest branch to a river network can belong to a completely different catchment. If it makes no difference for strictly aquatic species, this situation has to be considered for species able of out-of-network movements. Such a situation is more likely to be observed in higher order segments (upstream parts) and is more likely in flat areas where terrestrial barriers to dispersal maybe less stringent than in areas with strong elevation variations. Overland movements from one valley to another could be simply impossible for many species when large altitude changes are required.

It is obvious from these considerations that the field of investigation is still vast. The present study is a first attempt to study gene flow patterns in river networks when different dispersal modalities are available. It completes other simulation studies or methods that have been developed recently to analyze population genetic structure (Neuenschwanger, 2006; Labonne et al., 2008). The development of predictive methods specifically designed to address this issue is still highly required. Such methods are obviously important for basic science but they are also badly needed for conservation purpose given the general degradation of freshwater habitats and the reduction and fragmentation of populations they harbor. We hope this work, by considering the possibility of different dispersal modalities, will contribute to improve our understanding of population processes in river networks.

Q3 Uncited references

Shimano (2005) and Wang and Yin (1997).

Acknowledgments

We thank Guillaume Chapron, Eric D'Arlhac and Charline Retore for their helpful assistance in model programming. We gratefully acknowledge Jean-Michel Richer (LERIA, University of Angers) for his help to run the 4320 simulations and Mirabelle Gouat for her insights into statistics. This study was supported by the Région Pays de la Loire.

References

- Avisé, J.C., 2000. *Phylogeography: The History and Formation of Species*. Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Beck, M.L., Pruett-Jones, S., 2002. Fluctuating asymmetry, sexual selection, and survivorship in male dark-winged damselflies. *Ethology* 108, 779–791.
- Béliste, M., 2005. Measuring landscape connectivity: the challenge of behavioral landscape ecology. *Ecology* 88, 1988–1995.
- Bilton, D.T., Freeland, J.R., Okamura, B., 2001. Dispersal in freshwater invertebrates. *Ann. Rev. Ecol. Syst.* 32, 159–181.
- Bowler, D.E., Benton, T.G., 2005. Causes and consequences of animal dispersal strategies: relating individual behaviour to spatial dynamics. *Biol. Rev.* 80, 205–225.
- Brumfield, R.T., Beerli, P., Nickerson, D.A., Edwards, S.V., 2003. The utility of single nucleotide polymorphisms in inferences of population history. *Trends Ecol. Evol.* 18, 249–256.
- Bullock, J.M., Kenward, R.E., Hails, R., 2002. *Dispersal Ecology*. Blackwell Science, Oxford.
- Burnham, K.P., Anderson, D.R., 2002. *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.
- Campbell Grant, E.H., Lowe, W.H., Fagan, W.F., 2007. Living in the branches: population dynamics and ecological processes in dendritic networks. *Ecol. Lett.* 10, 165–175.
- Ceddia, M.G., Bartlett, M., Perrings, C., 2007. Landscape gene flow, coexistence and threshold effect: the case of genetically modified herbicide tolerant oilseed rape (*Brassica napus*). *Ecol. Model.* 205, 169–180.
- Chaput-Bardy, A., Lemaire, C., Picard, D., Secondi, J., 2008. In-stream and overland dispersal across a river network influences gene flow in a freshwater insect, *Calopteryx splendens*. *Mol. Ecol.* 17, 3496–3505.
- Charles, S., Bravo de la Parra, R., Mallet, J.P., Persat, H., Auger, P., 2000. Annual spawning migrations in modelling brown trout population dynamics inside an arboreous river network. *Ecol. Model.* 133, 15–31.
- Clobert, J., Danchin, E., Dhondt, A.A., Nichols, J.D., 2001. *Dispersal*, New York, 452 p.
- Cook, B., Hughes, J.M., Bunn, S.E., 2002. Population structure of the freshwater prawn *Macrobrachium australiense* in drainages of western Queensland, Australia. *Freshwater Biol.* 12, 2098–2112.
- Cote, D., Kehler, D.G., Bourne, C., Wiersma, Y.F., 2009. A new measure of longitudinal connectivity for stream networks. *Landscape Ecol.* 24, 101–113.
- Cushman, S.A., McKelvey, K.S., Hayden, J., Schwartz, M.K., 2006. Gene flow in complex landscapes: testing multiple hypotheses with causal modeling. *Am. Nat.* 168, 486–499.
- Fagan, W.F., 2002. Connectivity, fragmentation, and extinction risk in dendritic metapopulations. *Ecology* 83, 3243–3249.
- Fraser, D.J., Lippe, C., Bernatchez, L., 2004. Consequences of unequal population size, asymmetric gene flow and sex-biased dispersal on population structure in brook charr (*Salvelinus fontinalis*). *Mol. Ecol.* 13, 67–80.
- Ganio, L.M., Torgerser, C.E., Gresswell, R.E., 2005. A geostatistical approach for describing pattern in stream networks. *Front. Ecol. Environ.* 3, 138–144.
- Gardner, B., Sullivan, P.J., Lembo, A.J., 2003. Predicting stream temperatures: geostatistical model comparison using alternative distance metrics. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 60, 344–351.
- Gibbs, H.L., Gibbs, K.L., Siebenmann, M., Collins, L., 1998. Genetic differentiation among populations of the rare mayfly *Siphonisca aerodromia* Needham. *J. N. Am. Benthol. Soc.* 17, 461–474.
- Grandjean, F., Souty-Grosset, C., Raimond, R., Holdich, D.M., 1997. Geographical variation of mitochondrial DNA between populations of the white-clawed crayfish *Austropotamobius pallipes*. *Freshwater Biol.* 37, 493–501.
- Gustafson, E.J., Gardner, R.H., 1996. The effect of landscape heterogeneity on the probability of patch colonization. *Ecology* 77, 94–107.
- Hanski, I., 1999. *Metapopulation Ecology*. Oxford University Press, New York, 313 p.
- Hernandez-Martich, J.D., Novak, J.D., Smith, J.M., Johns, P.E., 1995. Genetic structure of mosquitofish populations in the Altamaha and Ogeechee drainages of Georgia: reporting an undescribed form in the Ocmulgee river. *Biochem. Syst. Ecol.* 23, 617–625.
- Horton, R.E., 1945. Erosional development of streams and their drainage basins, hydrographical approach to quantitative morphology. *Geol. Soc. Am. Bull.* 56, 275–370.
- Hurwood, D.A., Hughes, J.M., 1998. Phylogeography of the freshwater fish, *Mogurnda adspersa*, in streams of north-eastern Queensland, Australia: evidence for altered drainage patterns. *Mol. Ecol.* 7, 1507–1517.
- Hurwood, D.A., Hughes, J.M., 2001. Nested clade analysis of the freshwater shrimp, *Caridina zebra* (Decapoda: Atyidae), from north-eastern Australia. *Mol. Ecol.* 10, 113–126.
- Kovats, Z.E., Ciborowski, J.H., Corkum, L.D., 1996. Inland dispersal of adult aquatic insects. *Freshwater Biol.* 36, 265–276.

- 555 Labonne, J., Ravigné, V., Parisi, B., Gaucherel, C., 2008. Linking dendritic network
556 structures to population demogenetics: the downside of connectivity. *Oikos* 117,
557 1479–1490.
- 558 Little, L.S., Edwards, D., Porter, D.E., 1997. Kriging in estuaries: as the crow flies, or as
559 the fish swims? *J. Exp. Mar. Biol. Ecol.* 213, 1–11.
- 560 Lowe, W.H., 2002. Landscape-scale spatial population dynamics in human-impacted
561 stream systems. *Environ. Manage.* 30, 225–233.
- 562 Lowe, W.H., Likens, G.E., Power, M.E., 2006. Linking scales in stream ecology. *Bio-*
563 *Science* 56, 591–597.
- 564 Macneale, K.H., Peckarsky, B.L., Likens, G.E., 2005. Stable isotopes identify dispersal
565 patterns of stonefly populations living along stream corridors. *Freshwater Biol.*
566 50, 1117–1130.
- 567 McCullagh, P., Nelder, J.A., 1983. *Generalized Linear Models*. Chapman and Hall,
568 London.
- 569 McGlashan, D.J., Hughes, J.M., 2000. Reconciling patterns of genetic variation with
570 stream structure, earth history and biology of the Australian freshwater fish
571 *Craterocephalus stercusmuscarum* (Atherinidae). *Mol. Ecol.* 9, 1737–1751.
- 572 McGlashan, D.J., Huges, J.M., Bunn, S.E., 2001. Within-drainage population genetic
573 structure of the freshwater fish *Pseudomugil signifer* (Pseudomugilidae) in north-
574 ern Australia. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 58, 1842–1852.
- 575 Meffe, G.K., Vrijenhoek, R.C., 1988. Conservation genetics in the management of
576 desert fishes. *Conserv. Biol.* 2, 157–169.
- 577 Miller, M.P., Blinn, D.W., Keim, P., 2002. Correlation between observed dispersal capa-
578 bilities and patterns of genetic differentiation in populations of four aquatic
579 insect species from the Arizona White Mountains, USA. *Freshwater Biol.* 47,
580 1660–1673.
- 581 Neuenschwanger, S., 2006. AQUASPLATCHE: a program to simulate genetic diversity
582 in populations living in linear habitats. *Mol. Ecol. Notes* 6, 583–585.
- 583 Nuismer, S.L., Thompson, J.N., Gomulkiewicz, R., 2003. Coevolution between hosts
584 and parasites with partially overlapping geographic ranges. *J. Evol. Biol.* 16,
585 1337–1345.
- 586 Peckarsky, B.L., Hughes, J.M., Mather, P.B., Hillyer, M., Encalada, A.C., 2005. Are
587 populations of mayflies living in adjacent fish and fishless streams genetically
588 differentiated? *Freshwater Biol.* 50, 42–51.
- 589 Petersen, I., Masters, Z., Hildrew, A.G., Ormerod, S.J., 2004. Dispersal of adult aquatic
590 insects in catchments of differing land use. *J. Appl. Ecol.* 41, 934–950.
- 591 Power, M.E., Dietrich, W.E., 2002. Food webs in river networks. *Ecol. Res.* 17, 451–
592 471.
- 593 Rissler, L.J., Wilbur, H.M., Taylor, D.R., 2004. The influence of ecology and genetics on
594 behavioral variation in salamander populations across the Eastern Continental
595 Divide. *Am. Nat.* 164, 201–213.
- 596 Ronce, O., 2007. How does it feel to be like a rolling stone? Ten questions about
597 dispersal evolution. *Ann. Rev. Ecol. Syst.* 38, 231–253.
- 598 Rosso, R., Bacchi, B., La Barbera, P., 1991. Fractal relation of mainstream length to
599 catchment area in river networks. *Water Resour. Res.* 27, 381–387.
- 600 Sawyer, S., 1978. Isotropic random walks in a tree. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*
601 *verwandte Gebiete* 42, 279–292.
- 602 Schmidt, S.K., Hughes, J.M., Bunn, S.E., 1995. Gene flow among conspecific popu-
603 lations of *Baetis* spp. (Ephemeroptera): adult flight and larval drift. *J. N. Am.*
604 *Benthol. Soc.* 14, 147–157.
- 605 Shaw, M.W., Harwood, T.D., Wilkinson, M.J., Elliott, L., 2006. Assembling spatially
606 explicit landscape models of pollen and spore dispersal by wind for risk assess-
607 ment. *Proc. R. Soc. B: Lond.* 273, 1705–1713.
- 608 Shimano, Y., 2005. Characteristics of the stream network composition of drainage
609 basins in the Japanese Islands. *Environ. Geol. Water Sci.* 20, 5–14. Q5
- 610 Slatkin, M., 1985. Gene flow in natural populations. *Ann. Rev. Ecol. Syst.* 16, 393–
611 430.
- 612 Strahler, A.N., 1957. Quantitative analysis of watershed geomorphology. *Trans. AUG*
613 38, 913–920.
- 614 Tarboton, D., Bras, R., Rodriguez-Iturbe, I., 1990. Comment on “on the fractal dimen-
615 sion of stream networks” by La Barbera and Rosso. *Water Resour. Res.* 26,
616 2243–2244.
- 617 Vuilleumier, S., Fontanillas, P., 2007. Landscape structure affects dispersal in the
618 greater white-toothed shrew: inference between genetic and simulated eco-
619 logical distances. *Ecol. Model.* 201, 369–376.
- 620 Ward, R.D., Woodwark, M., Skibinski, O.F., 1994. A comparison of genetic diversity
621 levels in marine, freshwater and anadromous fishes. *J. Fish. Biol.* 44. Q6
- 622 Wang, X., Yin, Z.Y., 1997. A comparison of drainage networks derived from digital
623 elevation models at two scales. *J. Hydrol.* 210, 221–241.
- 624 Whitlock, M.C., Barton, N.H., 1997. The effective size of subdivided population. *Genet-*
625 *ics* 146, 427–441.