

Réseaux d'Automates Stochastiques :

Analyse transitoire en temps continu et
Algèbre tensorielle pour une sémantique en temps discret

Leonardo BRENNER

Directeur de thèse : Mme Brigitte PLATEAU

Laboratoire d'Informatique de Grenoble
Projet MESCAL
CAPES - Brésil



Conception du système

Systèmes complexes

Le développement des systèmes informatiques est devenu si complexe que leur conception ne peut être basée uniquement sur l'intuition et l'expérience du concepteur. Il faut donc s'appuyer sur **méthodes formelles de modélisation** et **prédiction de performances** pour gestion plus systématique de la conception du système pendant son cycle de vie.

Problématique

- Modélisation : la taille des systèmes (plus de 10 millions états) ;
- Évaluation : grande volume de données à stocker et à manipuler.

Objectif

Proposer des méthodes adaptées à la modélisation et prédiction de performances de grands modèles.

Modélisation de systèmes

Chaînes de Markov

- Formalisme classique ;
- Les propriétés mathématiques facilitent l'analyse des performances.

Modélisation par des Chaînes de Markov

- Représentation du système en terme d'état/transitions ;
- La dynamique du système est représentée par une *matrice de transition* ;
- Échelles de temps :
 - Temps continu, distribution exponentielle ;
 - Temps discret, distribution géométrique.

Modélisation de systèmes

Chaînes de Markov

- **Avantage** : simplicité et facilité d'utilisation ;
- **Problème** : quasiment impossible d'envisager une modélisation directe pour de grands systèmes.

Formalismes structurés

- Capturent les aspects compositionnels de grands systèmes ;
 - Génération automatique de la chaîne de Markov sous-jacente :
 - Calcul des indices de performances.

Modélisation de systèmes

Formalismes structurés

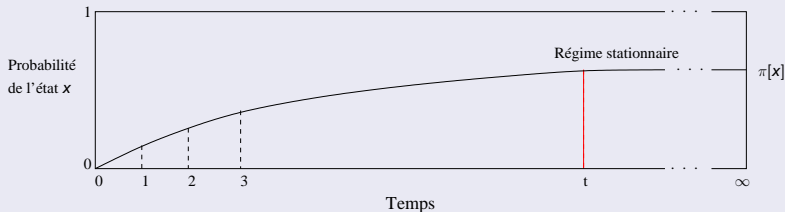
- **Réseaux de files d'attente (QN)** [Little61, Basket *et al.*75, Reiser *et al.*80] :
 - Approche orientée “ressources consommées par des clients”.
- **Réseaux de Petri stochastiques (SPN)** [Florin *et al.* 85] :
 - Analyse fine des synchronisations.
- **Algèbres de processus (PEPA)** [Hillston95] :
 - Composition concurrente, exécution parallèle.
- **Réseaux d'automate stochastiques (SAN)** [Plateau84] :
 - Intégration des synchronisations au modèle état-transition.

Analyse de performance

Type d'analyse

- **Transitoire** : évolution du comportement du système (**dépendant du temps** et de l'**état initial**) ;
- **Stationnaire** : comportement moyen du système (**independant du temps** et de l'**état initial**).

Évolution du système



Contributions de la thèse

Analyse transitoire - problème

- Les méthodes d'analyse transitoire sont très coûteuses :
 - Dépend du calcul de la somme d'une série.
- Méthodes de détection de la stationnarité peuvent réduire ce coût.

Contribution

Une comparaison de l'efficacité des méthodes de détection de la stationnarité sur de grands modèles.

Contributions de la thèse

SAN à temps discret - Problème

- Possibilité d'occurrence de plusieurs événements dans une même unité de temps ;
- Modélisation plus complexe qu'en temps continu.
 - Combinatoire de l'espace d'état ;
 - Combinatoire des événements et des conflits dans une unité de temps.

Contribution

Proposition une algèbre tensorielle qui permet une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret.

Plan

- Contexte
- **Analyse Transitoire**
 - Réseaux d'Automate Stochastique
 - Disponibilité ponctuelle
 - Détection de la stationnarité
 - Comparaison des méthodes
- SAN à temps discret
- Conclusions et perspectives

Modélisation de grands systèmes

Réseaux d'Automates Stochastiques (SAN)

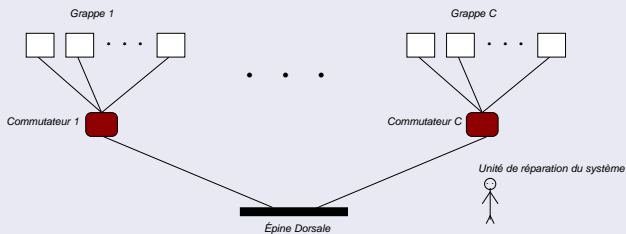
- Chaque sous-système est représenté par un automate stochastique ;
- Les automates sont définis par des états, transitions et événements ;
- Les événements locaux changent l'état local d'un seul automate ;
- Les événements synchronisants changent l'état local de plusieurs automates simultanément.

L'interaction entre les automates

- **Événements synchronisants** : transitions synchronisées ;
- **Taux et/ou probabilités fonctionnels** : valeur des transitions depend de l'état global.

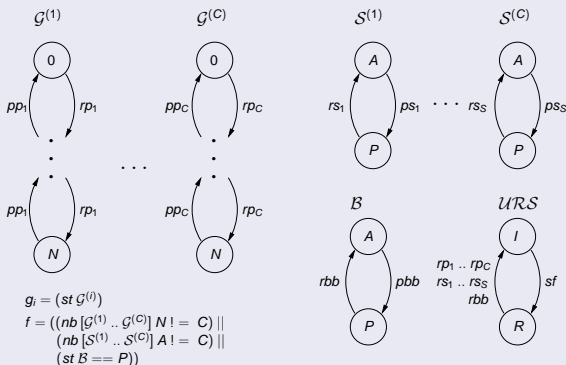
Modélisation de grands systèmes

Grappes de stations de travail



Modélisation de grands systèmes

Modèle SAN



Type	Événement	Taux	Type	Événement	Taux	Type	Événement	Taux	Type	Événement	Taux	Type	Événement	Taux
loc	pp_1	$\lambda_1.g_1$	syn	rp_1	μ_1	loc	ps_1	ρ_1	syn	rs_1	τ_1	loc	pbb	γ
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	syn	rbb	δ
loc	pp_c	$\lambda_c.g_c$	syn	rp_c	μ_c	loc	ps_s	ρ_s	syn	rs_s	τ_s	loc	sf	$\alpha.f$

Modélisation de grands systèmes

Descripteur markovien

$$Q = \bigoplus_{i=1}^N Q_i^{(i)} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\bigotimes_{i=1}^N Q_{e^+}^{(i)} + \bigotimes_{i=1}^N Q_{e^-}^{(i)} \right)$$

- $Q_i^{(i)}$ matrices de transitions des événements locaux ;
- $Q_{e^+}^{(i)}$ matrices de transitions de l'événement synchronisant e .

Calcul sur le Descripteur markovien

- Méthodes spécifiques pour \bigotimes_g ;
- Méthode *shuffle* [Fernandes98].

Disponibilité ponctuelle et détection de la stationnarité

- Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature :
 - Convergence du vecteur ;
 - Contrôle de la suite de w_n .
- Méthodes testées pour des petits modèles.
 - Modèles stockés sur un **format matriciel** (plein ou creux).

Démarche

On a utilisé des méthodes de détection de la stationnarité dans le calcul de la **disponibilité ponctuelle** sur un ensemble de grands modèles stockés dans un format tensoriel.

Disponibilité ponctuelle

La disponibilité ponctuelle (**PAV** - *Point Availability Value*) est l'espérance de la récompense avec la distribution transitoire à l'instant t .

$$PAV(t) = \sum_i \pi_t[i] r(i)$$

$\pi_t[i]$ i -ème élément du vecteur de probabilité de la distribution transitoire à l'instant t ;

$r(i)$ la fonction de récompense pour l'état i .

- Vaut 1 pour l'ensemble d'état UP ($\mathbf{1}_{UP}$).

Problème

Calculer la distribution transitoire à l'instant t (π_t).

Distribution transitoire

Méthode d'uniformisation

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} P^n$$

Troncation de Fox-Glynn [FG88]

$$\sum_{n=0}^{K_\varepsilon} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} < (1 - \varepsilon)$$

Distribution transitoire approchée

$$\sum_{n=0}^{K_\varepsilon} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} P^n$$

Disponibilité ponctuelle

Disponibilité ponctuelle approchée

$$PAV_{\varepsilon}(t) = \pi_0 \sum_{n=0}^{K_{\varepsilon}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} P^n \mathbf{1}_{UP}$$

Élévation de la Matrice P à la puissance n

$$w_n = \begin{cases} w_0 = \mathbf{1}_{UP} \\ w_n = Pw_{n-1} \end{cases}$$

Disponibilité ponctuelle approchée

$$PAV_{\varepsilon}(t) = \pi_0 \sum_{n=0}^{K_{\varepsilon}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} w_n$$

Détection de la stationnarité

Objectif

Réduire le coût de calcul en arrêtant les multiplications matrice-vecteur lorsqu'on atteint la stationnarité de $P^n \mathbf{1}_{UP}$.

Soit N le nombre de multiplications matrice-vecteur nécessaires pour atteindre la stationnarité de $P^n \mathbf{1}_{UP}$ et K_ϵ le nombre de multiplications nécessaires pour calculer la distribution transitoire à l'instant t .

$$PAV_\epsilon(t) = \pi_0 \sum_{n=0}^N e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} w_n + \pi_0 \sum_{n=N+1}^{K_\epsilon} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} w_N$$

Méthodes de détection de la stationnarité

Convergence du vecteur

- Proposée par Ciardo *et al.* en 1993 ;
- La stationnarité est détectée par la convergence du vecteur ;
- La convergence du vecteur est détectée par comparaison de 2 vecteurs selon différentes normes ;
- La stationnarité est détectée lorsque la différence entre 2 vecteurs successifs est plus petite que l'erreur maximum acceptée.

Contrôle de la suite de w_n

- Proposée par Sericola en 1999 ;
- Détection par la comparaison de la différence entre le minimum (m_n) et le maximum (M_n) des composants du vecteur w_n .

Comparaison des méthodes

Méthodes comparées

- CAI** Méthode de convergence de vecteur avec le test de *Convergence Absolue Individuelle* du vecteur (norme infinie);
- CAA** Méthode de convergence de vecteur avec le test de *Convergence Absolue Accumulée* du vecteur (norme L1);
- CSW** Méthode de *Contrôle de la Suite de w_n* .

Comparaison de méthodes de détection de la stationnarité

- 2 critères : nombre d'itérations et précision des résultats ;
- 6 différents modèles ;
- Variation de la taille de modèles ;
- Variation de l'ensemble d'états *UP* ;
- Variation de l'erreur maximum acceptée.

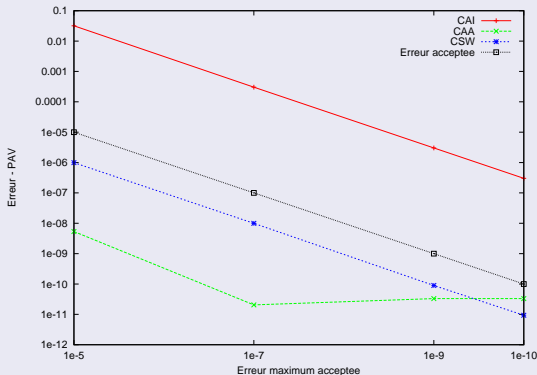
Analyse des mesures

Méthode CAI

- Bonne performance sur le nombre d'itérations ;
- Fausse détection de la stationnarité :
 - Erreur dans le calcul de la disponibilité ponctuelle.

Analyse des mesures

Fausse détection de la stationnarité



Modèle testé

- Grappes de stations de travaux ;
- 6 automates ;
- 70% des serveurs disponibles (UP) ;
- 16.810.000 états ;

Méthode	Itérations*
CAI	119.658
CAA	214.458
CSW	189.524

* pour une erreur de $1e^{-10}$.

Analyse des mesures

Méthode CAI

- Bonne performance sur le nombre d'itérations ;
- Fausse détection de la stationnarité :
 - Erreur dans le calcul de la disponibilité ponctuelle.

Méthode CAA

- Mauvais performance sur le nombre d'itérations pour de grands modèles ;
- Fausse détection de la stationnarité.

Analyse des mesures

Méthode CAI

- Bonne performance sur le nombre d'itérations ;
- Fausse détection de la stationnarité :
 - Erreur dans le calcul de la disponibilité ponctuelle.

Méthode CAA

- Mauvais performance sur le nombre d'itérations pour de grands modèles ;
- Fausse détection de la stationnarité.

Méthode CSW

- Bon compromis entre le deux critères observés ;
- Calcul fiable et rapide de la disponibilité ponctuelle.

Synthèse

Détection de la stationnarité

- Plusieurs méthodes ;
- Problème de fausse détection.

Apport

- Adaptation des méthodes à l'algèbre tensorielle généralisée ;
- Utilisation sur des grands modèles ;
- Comparaison des méthodes de détection de la stationnarité.

Plan

- Contexte
- Analyse Transitoire
- **SAN à temps discret**
 - Problématique
 - Travaux précédents
 - SAN à temps discret
 - Algèbre Tensorielle complexe
 - Automate global
 - Descripteur discret
- Conclusions et perspectives

Rappel

SAN à temps discret - Problème

- Possibilité d'occurrence de plusieurs événements dans une même unité de temps ;
- Modélisation plus complexe qu'en temps continu.
 - Combinatoire de l'espace d'état ;
 - Combinatoire des événements et des conflits dans une unité de temps.

Contribution

Proposition une algèbre tensorielle qui permet une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret.

Modèles à temps discret

Caractéristiques

- Le temps est découpé en intervalle ;
- Événements indépendants : distribution géométrique ;
- Sémantique Markovienne ;

Difficulté de modélisation

- Plusieurs événements peuvent avoir lieu pendant une même unité de temps.
 - **Combinatoire des événements ;**
 - **Conflit des événements ;**

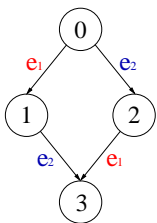
3 situations

- Simultanéité ;
- Conflits ;
- Concurrence.

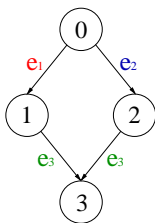
Modèles à temps discret

Situations entre événements

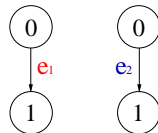
Simultanéité



Conflit



Concurrence

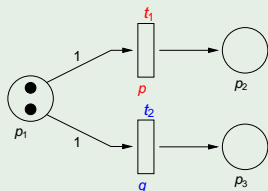


Modèles à temps discret

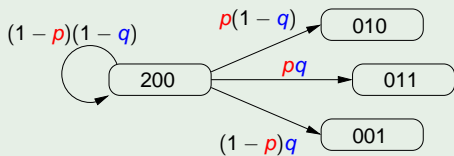
Réseaux de Petri stochastiques (SPN) - Simultanéité

- Plusieurs transitions candidates : plusieurs jetons

SPN avec des transitions simultanées



Grphe de marquage

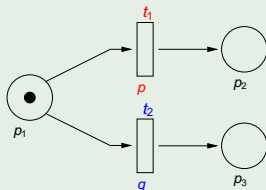


Modèles à temps discret

Réseaux de Petri stochastiques (SPN) - Conflit

- Différentes sémantiques pour traiter les cas de conflit ;
- Cas de conflit : plusieurs transitions candidates au même instant.

SPN avec des transitions en conflit



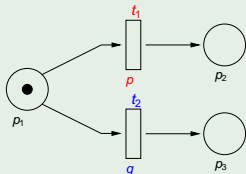
Probabilités de t_1 et t_2 suivent une distribution géométrique de paramètres p et q .

Modèles à temps discret

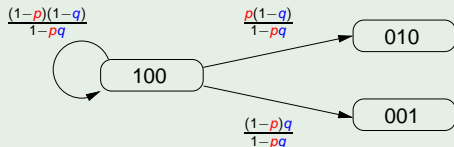
Travaux de Molloy sur SPN - Cas de conflit [Molloy85]

- Les transitions t_1 et t_2 ne peuvent pas avoir lieu en même temps ;
- On rajoute une probabilité de normalisation calculée à partir de p et q .

Modèle SPN



Graphe de marquage

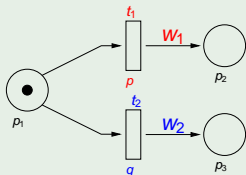


Modèles à temps discret

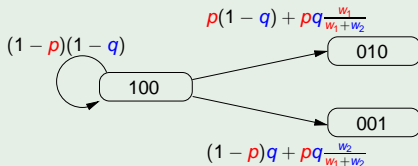
Travaux de Ciardo sur SPN - Cas de conflit [Ciardo95]

- On associe des poids (w_1 et w_2) aux transitions (t_1 et t_2) ;
- La probabilité d'occurrence dépend alors des poids des transitions.

Modèle SPN



Graphe de marquage



Modèles à temps discret

Réseaux d'automate stochastique (SAN)

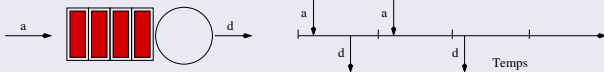
- Travaux de Atif [PA91] : première sémantique pour SAN à temps discret ;
- *Événements compatibles* :
 - Deux événements ou plus qui peuvent se réaliser pendant une même unité de temps ;
 - Concernent des automates différents : modélise la concurrence ;
 - L'ensemble d'événements compatibles : très complexe à déterminer.
- **Cas de conflit** : choix aléatoire (\approx Molloy) ;
- Simultanéité est **écartée**.

Modèles à temps discret

Travaux de Benoit sur SAN [Benoit03]

- **Priorité sur les événements :**
 - Ordre d'occurrence entre les événements ;
 - Sémantique en cas de conflit ;
 - Déterminisme du modèle.
- **Algorithme de génération extensive de la chaîne de Markov sous-jacente :**
 - Identification automatique des événements réalisables dans 1 unité de temps.

Priorité des événements sur une file

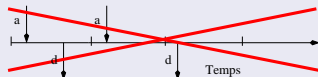


Modèles à temps discret

Travaux de Benoit sur SAN [Benoit03]

- **Priorité sur les événements :**
 - Ordre d'occurrence entre les événements ;
 - Sémantique en cas de conflit ;
 - Déterminisme du modèle.
- **Algorithme de génération extensive de la chaîne de Markov sous-jacente :**
 - Identification automatique des événements réalisables dans 1 unité de temps.

Priorité des événements sur une file



Modèles à temps discret

Travaux de Benoit sur SAN [Benoit03]

- **Priorité sur les événements :**
 - Ordre d'occurrence entre les événements ;
 - Sémantique en cas de conflit ;
 - Déterminisme du modèle.
- **Algorithme de génération extensive de la chaîne de Markov sous-jacente :**
 - Identification automatique des événements réalisables dans 1 unité de temps.

Priorité des événements sur une file



Modèles à temps discret

Travaux de Benoit sur SAN [Benoit03]

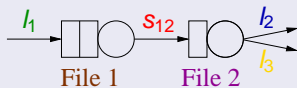
- **Priorité sur les événements :**
 - Ordre d'occurrence entre les événements ;
 - Sémantique en cas de conflit ;
 - Déterminisme du modèle.
- **Algorithme de génération extensive de la chaîne de Markov sous-jacente :**
 - Identification automatique des événements réalisables dans 1 unité de temps.

Priorité des événements sur une file

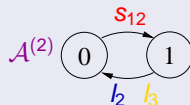
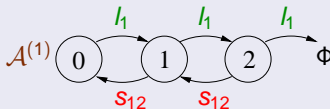


SAN à temps discret

Modèle SAN à temps discret



Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	S_{12}	ρ_{12}	1
loc	h_1	ρ_1	2
loc	l_2	ρ_2	3
loc	l_3	ρ_3	4



État fantôme Φ

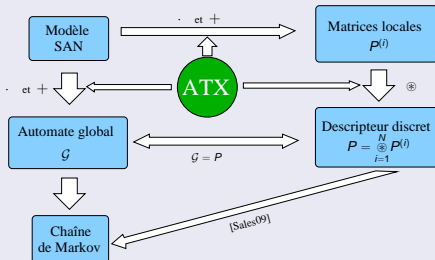
L'état fantôme est un état intermédiaire utilisé pour rendre l'occurrence d'un événement possible après l'occurrence d'un événement plus prioritaire.

SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

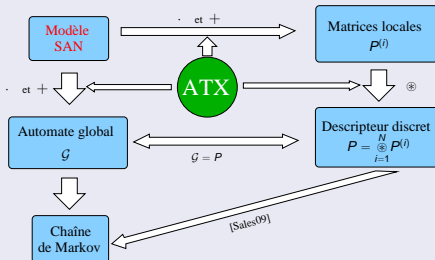


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

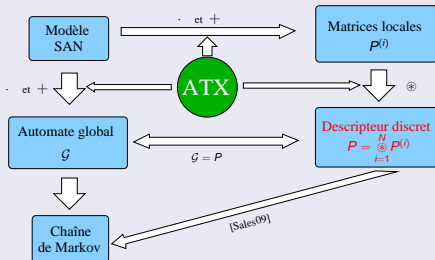


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

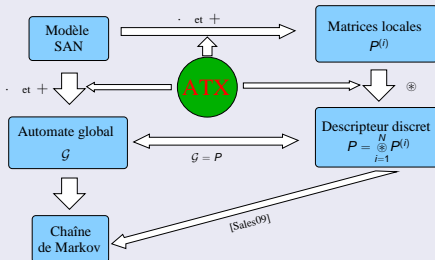


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

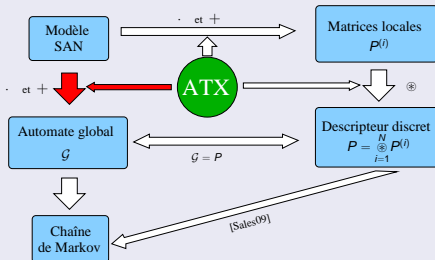


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

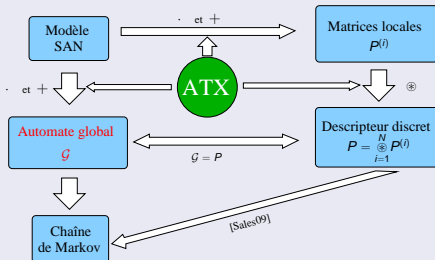


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

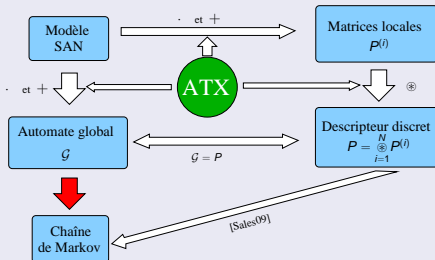


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

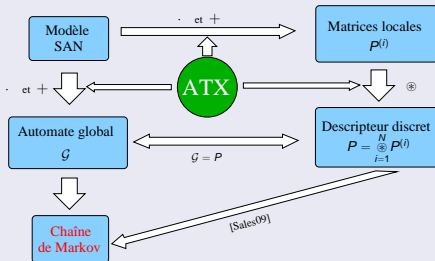


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

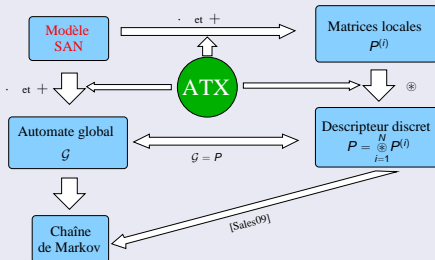


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

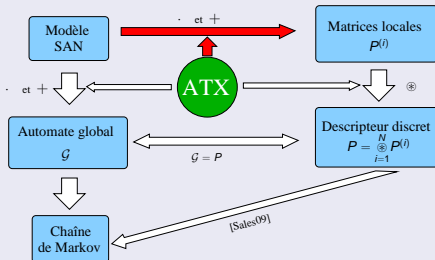


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

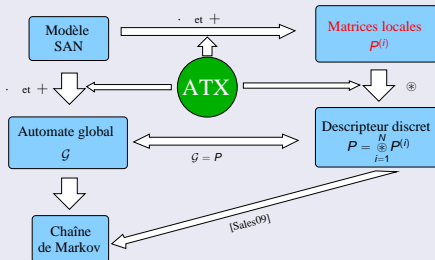


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

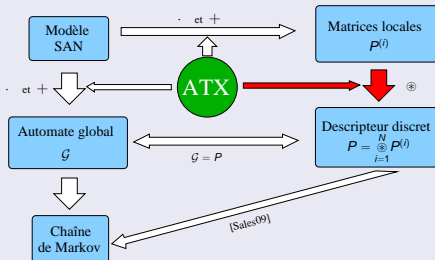


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

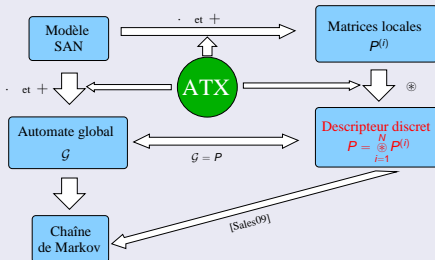


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation

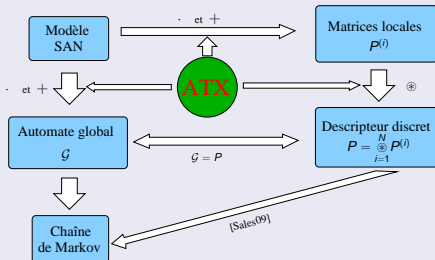


SAN à temps discret

Notre objectif

Proposer une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret basée sur cette sémantique.

Schéma de représentation



Algèbre Tensorielle complexe - ATX

Motivation

L'inadaptation des algèbres tensorielles classiques et généralisée pour la représentation de l'occurrence d'événements simultanés.

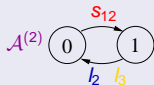
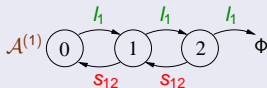
Nouvelle algèbre

- 3 opérateurs sur les événements
 - Produit de simultanéité “.”;
 - Somme de choix “+”;
 - Produit de concurrence “*”.
- 1 opérateur sur les matrices
 - Produit tensoriel complexe “ \otimes ”.

Algèbre Tensorielle complexe - ATX

Produit de simultanéité “.”

- Occurrence simultanée d'événements ;
- Dynamique local (composant) du système.



Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	s_{12}	ρ_{12}	1
loc	h_1	ρ_1	2
loc	b_2	ρ_2	3
loc	b_3	ρ_3	4

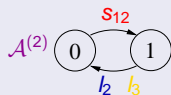
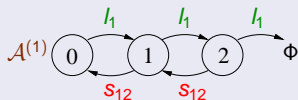
Produit de simultanéité

$$s_{12} \cdot h_1$$

Algèbre Tensorielle complexe - ATX

Somme de choix "+"

- Plusieurs événements peuvent déclencher la même transition.



Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	s_{12}	ρ_{12}	1
loc	h_1	ρ_1	2
loc	b_2	ρ_2	3
loc	b_3	ρ_3	4

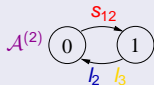
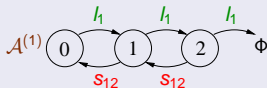
Somme de choix

$$b_2 + (\bar{b}_2 \cdot b_3)$$

Algèbre Tensorielle complexe - ATX

Produit de concurrence “*”

- Concurrence d'événements ;
- Composition des sous-systèmes du modèle.



Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	s_{12}	ρ_{12}	1
loc	h_1	ρ_1	2
loc	b_2	ρ_2	3
loc	b_3	ρ_3	4

Produit de concurrence

$$h_1 * b_2$$

$$s_{12} * s_{12}$$

Algèbre Tensorielle complexe - ATX

Sémantique des événements synchronisants

Un événement synchronisant est réalisable uniquement s'il est réalisable dans tous les automates concernés par l'événement (\mathcal{O}_e).

Degré d'idempotence

- Exprime la dynamique des événements synchronisants ;
- Chaque événement a un degré d'idempotence η_e associé ($\eta_e = |\mathcal{O}_e|$).

Propriétés liées au degré d'idempotence

$$h_1 * h_2 = h_1 \cdot h_2 \quad s_{12} * s_{12} = s_{12} \quad (s_{12} \cdot h_1) * s_{12} = s_{12} \cdot h_1$$

Algèbre Tensorielle complexe - ATX

Produit tensorielle complexe

Le produit tensoriel complexe est un opérateur matriciel. Le *produit tensoriel complexe* défini par $C = A \otimes B$.

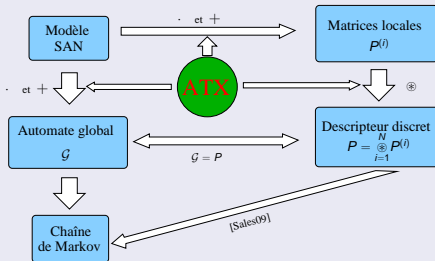
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} & a_{11} * b_{12} & a_{12} * b_{11} & a_{12} * b_{12} & a_{13} * b_{11} & a_{13} * b_{12} \\ a_{11} * b_{21} & a_{11} * b_{22} & a_{12} * b_{21} & a_{12} * b_{22} & a_{13} * b_{21} & a_{13} * b_{22} \\ a_{21} * b_{11} & a_{21} * b_{12} & a_{22} * b_{11} & a_{22} * b_{12} & a_{23} * b_{11} & a_{23} * b_{12} \\ a_{21} * b_{21} & a_{21} * b_{22} & a_{22} * b_{21} & a_{22} * b_{22} & a_{23} * b_{21} & a_{23} * b_{22} \\ a_{31} * b_{11} & a_{31} * b_{12} & a_{32} * b_{11} & a_{32} * b_{12} & a_{33} * b_{11} & a_{33} * b_{12} \\ a_{31} * b_{21} & a_{31} * b_{22} & a_{32} * b_{21} & a_{32} * b_{22} & a_{33} * b_{21} & a_{33} * b_{22} \end{pmatrix}$$

Les éléments des matrices A , B et C sont des expressions de “.”, “+” et “*”.

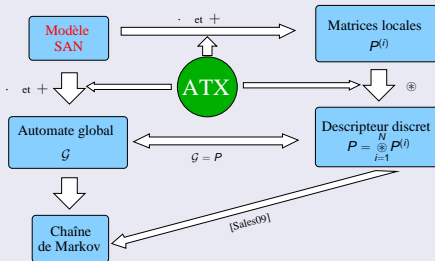
SAN à temps discret

Schéma de représentation



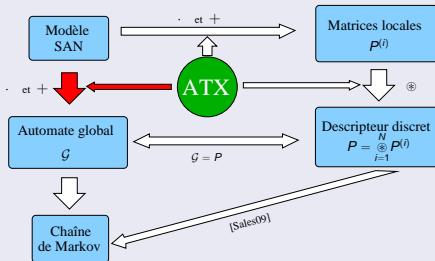
SAN à temps discret

Schéma de représentation



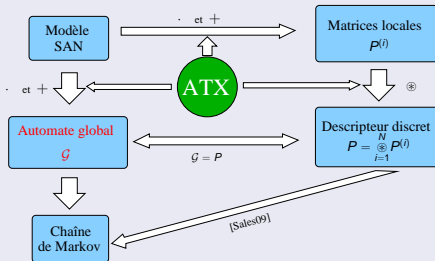
SAN à temps discret

Schéma de représentation



SAN à temps discret

Schéma de représentation



Automate global

Définit le comportement global du système par la composition de sous-système (automates).

Étapes d'obtention de l'automate global \mathcal{G} :

- 1 Réseau d'automates complétés ;
 - Événement complémentaire \bar{e} : non-occurrence de l'événement e ;
 - Probabilité d'occurrence : $1 - \rho_e$.
- 2 Chaînes de transition globale $(\tilde{x}, \tilde{y}, e, \Pi_e(\tilde{x}, \tilde{y}))$;
 - État global de départ \tilde{x} ;
 - État global d'arrivée \tilde{y} ;
 - Événement e ;
 - Probabilité de routage globale : $\Pi_e(\tilde{x}, \tilde{y}) = \prod_{i \in \mathcal{O}_e} \pi_e(x^{(i)}, y^{(i)})$
- 3 Construction de chaînes de transitions globales.

Automate global

Chaînes de transitions globales

Occurrence d'une suite d'événements dans **une unité de temps**.

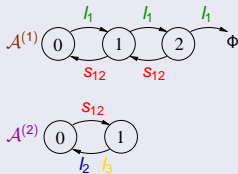
Construction des chaînes

- Composées de chaînons transition globale ;
- Ordre de priorité des événements ;
- L'enchaînement des chaînons transition globale ;
- La maximalité de la chaîne.

Automate global

Exemple - Chaîne de transitions globales

- État global de départ : 20
- État global d'arrivée : 21
- Événements possibles : s_{12} et h_1



Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	s_{12}	ρ_{12}	1
loc	h_1	ρ_1	2
loc	b_2	ρ_2	3
loc	b_3	ρ_3	4

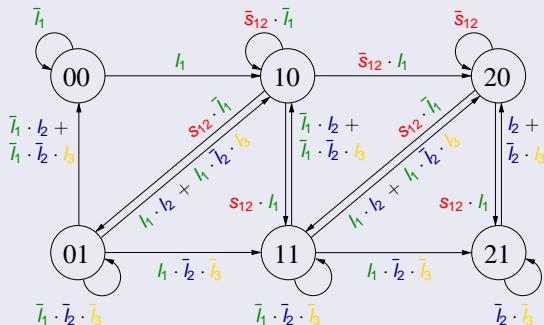
Chaîne de transitions globales

$$g = (20, 11, s_{12}, \Pi_{s_{12}}(20, 11)) \cdot (11, 21, h_1, \Pi_{h_1}(11, 21))$$

Notation simplifiée

$$g = s_{12} \cdot h_1$$

Exemple - Automate global

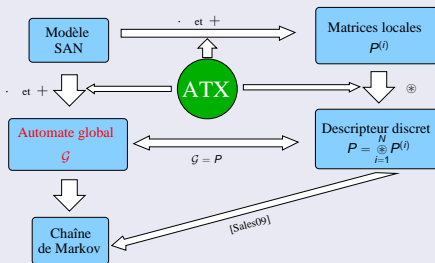


Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	S_{12}	ρ_{12}	1
loc	h	ρ_1	2
loc	b	ρ_2	3
loc	b	ρ_3	4

Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	\bar{S}_{12}	$(1 - \rho_{12})$	1
loc	\bar{h}_1	$(1 - \rho_1)$	2
loc	\bar{b}_2	$(1 - \rho_2)$	3
loc	\bar{b}_3	$(1 - \rho_3)$	4

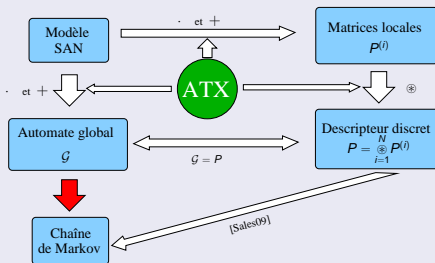
Automate global

Schéma de représentation



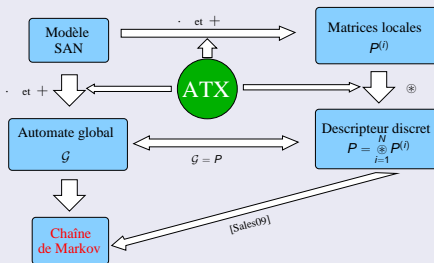
Automate global

Schéma de représentation



Automate global

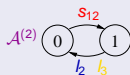
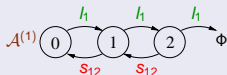
Schéma de représentation



Chaîne de Markov

Obtention de la matrice de transition

- Une transition = chaîne de transitions globales ;
- Probabilité d'occurrence d'une transition :
 - Probabilité d'occurrence des événements ;
 - Probabilité de routage des chaînons de transition globale.



Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	s_{12}	ρ_{12}	1
loc	h_1	ρ_1	2
loc	b_2	ρ_2	3
loc	b_3	ρ_3	4

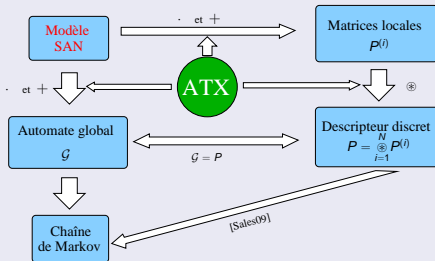
Exemple - 20 \rightarrow 21

$$g = s_{12} \cdot h_1$$

$$\Pi(g) = (\rho_{12} \times \Pi_{s_{12}}(20, 11)) \times (\rho_1 \times \Pi_{h_1}(11, 21))$$

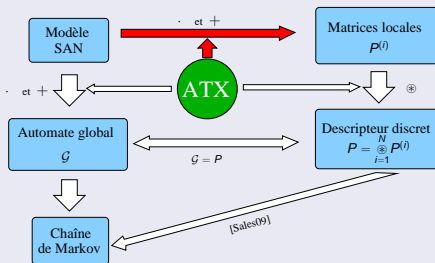
Descripteur discret

Schéma de représentation



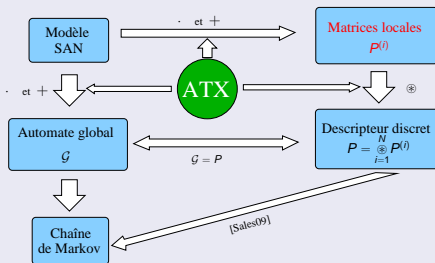
Descripteur discret

Schéma de représentation



Descripteur discret

Schéma de représentation



Matrices locales d'événements

Représentent la dynamique locale d'un composant du système :

- Composées de chaînes de transitions locales.

Chaînes de transitions locales

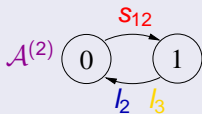
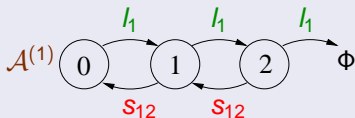
- Occurrence d'événements simultanés dans **une unité de temps** dans seul automate ;
- Même principe de construction que les chaînes de transitions globales.

Attention

Les chaînes de transitions locales sont des **produits de simultanéité** ou des **sommes de produits de simultanéité**.

Matrices locales d'événements

Modèle SAN à temps discret



Type	Even.	Prob.	Prio.
syn	s_{12}	ρ_{12}	1
loc	l_1	ρ_1	2
loc	l_2	ρ_2	3
loc	l_3	ρ_3	4

Matrices d'événements de l'automate $\mathcal{A}^{(1)}$

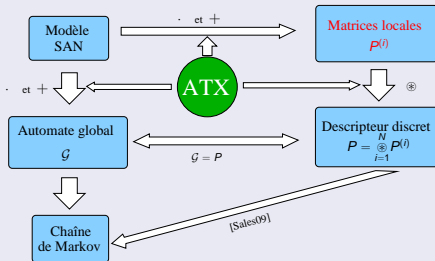
$$\begin{pmatrix} \bar{l}_1 & l_1 & O_{\bar{t}} \\ s_{12} \cdot \bar{l}_1 & \bar{s}_{12} \cdot \bar{l}_1 + s_{12} \cdot l_1 & \bar{s}_{12} \cdot l_1 \\ O_{\bar{t}} & s_{12} \cdot \bar{l}_1 & \bar{s}_{12} + s_{12} \cdot l_1 \end{pmatrix}$$

Matrices d'événements de l'automate $\mathcal{A}^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_{12} & s_{12} \\ l_2 + \bar{l}_2 \cdot l_3 & \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3 \end{pmatrix}$$

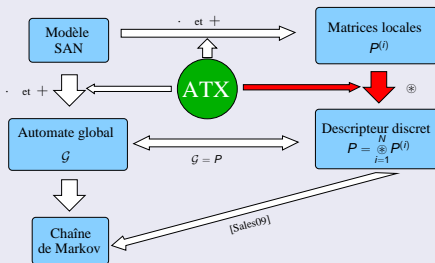
Descripteur discret

Schéma de représentation



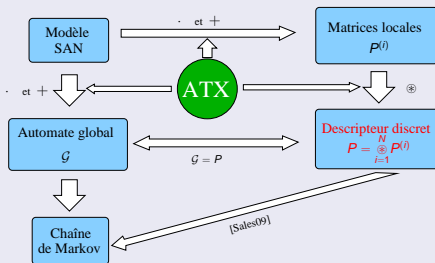
Descripteur discret

Schéma de représentation



Descripteur discret

Schéma de représentation



Descripteur discret

Théorème

Étant donné un SAN et pour chaque automate sa matrice locale d'événements, alors le descripteur discret P est défini par la formule tensorielle complexe :

$$P = \bigotimes_{i=1}^N P^{(i)}$$

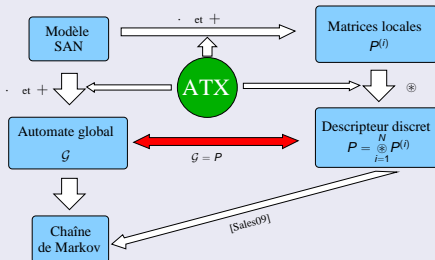
Ce descripteur est égal à la matrice de transition \mathcal{G} de l'automate global.

Descripteur discret

Égalité du descripteur et de l'automate global

On a montré que le descripteur discret est égal à l'automate global du modèle.

Schéma de représentation



Descripteur discret

Lemma 1

Soient les états locaux d'un modèle SAN et des chaînes de transitions locales $I^{(i)}$, si $\prod_{i=1}^N I^{(i)} \neq O_{\mathcal{I}}$ alors $g = \prod_{i=1}^N I^{(i)}$ est une chaîne de transitions globales.

Factorisation de chaînes de transitions locales

$$SAN \rightarrow \mathcal{A}^{(i)} \rightarrow P^{(i)} \rightarrow I^{(i)} \rightarrow \prod_{i=1}^N I^{(i)} = g$$

Descripteur discret

Lemma 2

Soient les états globaux d'un modèle SAN, si la chaîne de transitions globales $g \neq O_{\mathcal{T}}$, alors $\exists ! l^{(1)}, \dots, \exists ! l^{(N)}$ tel que $g = \prod_{i=1}^N l^{(i)}$.

Factorisation de chaînes de transitions locales

$$SAN \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow g = \prod_{i=1}^N l^{(i)}$$

SAN à temps discret

Synthèse

On a défini une représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN à temps discret.

Simultanéité et cas de conflit

- Chaînes de transitions
 - Globales : automate global ;
 - Locales : matrices locales d'événements.

Algèbre tensorielle complexe

- Descripteur discret ;
- Égalité avec l'automate global ;
- Calcul directement sur le descripteur [Sales09].

Plan

- Contexte
- Analyse Transitoire
- SAN à temps discret
- **Conclusions et perspectives**
 - Conclusions
 - Logiciel PEPS
 - Perspectives

Conclusion

Analyse Transitoire

- Adaptation des méthodes de détection de la stationnarité à l'algèbre tensorielle généralisé ;
 - Nécessaire à la résolution de grands modèles décrits par le formalisme SAN.
- Comparaison de l'efficacité des méthodes de détection de la stationnarité sur de grands modèles ;
 - Méthodes testées sur des petits modèles.
- Problème de fausse détection de la stationnarité :
 - Erreur dans le calcul de la disponibilité ponctuelle.

Conclusion

SAN à temps discret

- Modélisation simples ;
- La résolution de conflit et l'occurrence simultanée des événements est automatique et transparente à l'utilisateur ;
- Représentation compacte de la matrice de transition d'un modèle SAN ;
- Algèbre tensorielle complexe (ATX).
 - **Puissante** : opérateurs sur des événements et sur de matrices ;
 - **Très compacte** : un seul terme tensoriel ;
 - Calcul directement sur le descripteur [Sales09].

Conclusion

Logiciel PEPS

Outil de calcul académique basé sur le formalisme SAN.

Description de modèles SAN

- Langage de description compact ;
- Spécialement adapté au modèle à composants répliqués

Résolution de modèles SAN

- Analyse stationnaire : Puissance, GMRES, Arnoldi ;
- Analyse transitoire : Uniformisation, Disponibilité ponctuelle.

SAN à temps discret - Bientôt Disponible

- Langage adapté aux modèles en temps discret ;
- Méthodes de multiplication adaptée à l'ATX.

Perspectives

Analyse transitoire

- Adaptation d'autres méthodes d'analyse transitoires à la représentation tensorielle.

SAN à temps discret

- Comparaison avec d'autres formalismes ;
- Adaptation de méthodes utilisées pour SAN à temps continu :
 - Méthode de multiplication :
 - *Shuffle* déjà en cours [Sales09] ;
 - Génération à la volée [Buchholz *et al* 00] ;
 - Méthode d'agrégation :
 - Algébrique [Fernandes98] ;
 - Sémantique (composants répliqués) [Benoit03].
 - Méthode de simulation
 - Simulation parfaite [Webber09].

Je vous remercie de votre attention.