



HAL
open science

Intensités vibratoire et acoustique dans les tuyaux

Kresimir Trdak

► **To cite this version:**

Kresimir Trdak. Intensités vibratoire et acoustique dans les tuyaux. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 1995. Français. NNT: . tel-00424848

HAL Id: tel-00424848

<https://theses.hal.science/tel-00424848>

Submitted on 6 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Technologie de Compiègne

**INTENSITES VIBRATOIRE ET ACOUSTIQUE
DANS LES TUYAUX**

par

Kresimir TRDAK

**Thèse présentée pour obtenir le grade de
Docteur
de
l'Université de Technologie de Compiègne
Spécialité: Mécanique Appliquée, Acoustique et Matériaux**

**Membres de jury: J.-L. GUYADER (Président, Rapporteur)
L. JEZEKEL (Rapporteur)
G. LALLEMENT
E. LUZZATO
P. ORSERO
G. PAVIC
P. WAGSTAFF**

AVANT PROPOS

Je tiens d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur **Peter Wagstaff** pour avoir suivi mes travaux avec beaucoup de patience et d'amitié en tant que directeur de thèse,

Mes plus vifs remerciements vont aussi à Monsieur le Professeur **Louis Jézequel** qui a bien voulu accepter le rôle de rapporteur sur ce travail. Les observations qu'il m'a communiquées me furent précieuses.

Merci également à Monsieur le Professeur **Jean - Louis Guyadeur** qui a accepté de juger ces travaux en tant que rapporteur.

J'exprime mes remerciements aux membres de jury qui ont bien voulu d'examiner ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur **Goran Pavic** sans qui rien n'aurait été réalisé. Il a su, par ses multiples compétences, diriger cette étude avec patience, compréhension et amitié.

Merci également à mon collègue **Léon Gavric** pour m'avoir offert aide et amitié tout au long de ces travaux.

Je tiens à remercier aussi pour sa patience mon collègue **Michel Besombes** qui a accepté de lire et relire ce mémoire et de corriger les innombrables fautes de style et d'orthographe que j'étais capable de produire.

Les travaux dont les résultats suivent ont été réalisés au Département Acoustique Industrielle du CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques). Mes remerciements vont donc également à Monsieur **Jean Tourret** le chef de département, pour avoir accepté ma présence et avoir encouragé mes travaux au coeur du département.

Merci enfin à tout les membres du personnel du Département Acoustique et surtout à Monsieur **Jean - Claude Pascal** pour leur aide et leur sympathie.

TABLE DES MATIERES

1 INTRODUCTION.....	8
1.1 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	10
2 THEORIE DES COQUES	11
2.1 CONSTRUCTION D'UNE THEORIE DES COQUES.....	11
2.1.1 Gradient du vecteur de déplacement.....	13
2.1.2 Tenseur des déformations	15
2.1.3 Equations d'équilibre.....	16
2.1.4 Loi de comportement.....	19
2.2 THEORIE D'ORDRE SUPERIEUR	20
2.3 COQUES CYLINDRIQUES	22
2.3.1 Théorie de Flügge	23
2.3.2 Théorie de Donnell	24
2.3.3 Théorie de Flügge-Timoshenko.....	25
2.4 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	27
3 ONDES ELASTIQUES ET ACOUSTIQUES DANS LES TUYAUX	28
3.1 RELATION DE DISPERSION	29
3.2 TUYAUX VIDES	33
3.2.1 Mode respiratoire.....	33
3.2.2 Mode de flexion.....	35
3.2.3 Mode lobaires	36
3.2.4 Basses fréquences	37
3.3 TUYAUX REMPLIS D'UN FLUIDE LEGER	40
3.4 TUYAUX REMPLIS D'UN FLUIDE LOURD	42
3.4.1 Mode respiratoire.....	42
3.4.2 Mode de flexion.....	43
3.4.3 Basses fréquences	44
3.5 CAS DES FREQUENCES ELEVEES	46
3.6 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	48
4 PROPAGATION DE L'ENERGIE ACOUSTIQUE ET VIBRATOIRE DANS LES TUYAUX.....	49
4.1 BILAN DES PUISSANCES NETTES POUR UN TUYAU.....	50
4.2 EXPRESSIONS POUR LES INTENSITES VIBRATOIRE ET ACOUSTIQUE.....	52
4.3 EXPRESSIONS POUR LE FLUX D'ENERGIE, APPLICABLES A LA MESURE.....	54
4.4 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	62
5 TECHNIQUES DE MESURE	63
5.1 DECOMPOSITION EN MODES CIRCONFERENCELS	63
5.2 DECOMPOSITION AXIALE	66
5.2.1 Méthode des matrices interspectrales	66
5.2.2 Méthode des fonctions de réponse fréquentielle	70
5.3 ANALYSE DES ERREURS	71
5.5 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	75
6 MESURES DU FLUX DE PUISSANCE.....	76

6.1 MESURES SUR UN TUYAU REMPLI D'UN FLUIDE LEGER	76
6.1.1 Essai axial.....	77
6.1.2 Essai de flexion.....	81
6.1.3 Essai combiné.....	84
6.2 MESURES SUR UNE BOUCLE FRIGORIFIQUE.....	88
6.2.1 Dispositif de mesure.....	88
6.2.2 Résultats de mesure.....	88
6.3 MESURES SUR UN TUYAU REMPLI D'HUILE.....	93
6.3.1 Essai axial.....	94
6.3.2 Essai de flexion.....	99
6.4 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	105
7 CONCLUSIONS ET COMMENTAIRES	106
BIBLIOGRAPHIE.....	108
ANNEXE 1.....	110
1 OPERATEUR DE GRADIENT, SURFACE GENERALE	110
1.1 Cas particulier, surface cylindrique	111
2 DERIVATION DES CONDITIONS AUX LIMITES	111
3 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	113
ANNEXE 2.....	114
1 RELATION DE DISPERSION POUR LA THEORIE DE FLÜGGE-TIMOSHENKO	114
2 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	116
ANNEXE 3.....	117
1 INTENSITE VIBRATOIRE DANS LES COQUES GENERALES	117
2 ANALYSE DE L'INTERACTION ENTRE LES ONDES SE PROPAGEANT DANS LES SENS AXIAUX OPPOSES	120
3 CAS DE THEORIE DE FLUGGE-TIMOSHENKO.....	123
ANNEXE 4.....	124
1 TECHNIQUE DE MESURE POUR LE NOMBRE D'ONDES	124
ANNEXE 5.....	126
1 MESURE DU NOMBRE D'ONDES	126
2 RESULTATS DE LA VALIDATION EXPERIMENTALE, TUYAU VIDE.....	128
3 RESULTATS DE LA VALIDATION EXPERIMENTALE, TUYAU REMPLI DE L'HUILE	130

TABLE DES FIGURES

Figure 2.1: Coque générale.....	12
Figure 2.2: Coque cylindrique.....	22
Figure 3.1: Déformation de la section droite pour le mode respiratoire.....	33
Figure 3.2: Courbe de dispersion pour le mode respiratoire, tuyau vide en aluminium	34
Figure 3.3: Déformation de la section droite pour le mode de flexion	35
Figure 3.4: Courbe de dispersion pour le mode de flexion, tuyau vide en aluminium	36
Figure 3.5: Déformation de la section droite pour le mode lobaire 2	36
Figure 3.6: Courbe de dispersion pour le mode lobaire 2, tuyau vide en aluminium	37
Figure 3.7: Courbe de dispersion des ondes libres aux basses fréquences: mode respiratoire, branche P_1 (trait mixte), branche P_2 (trait interrompu); mode de flexion, branche P_1 (trait continu).....	38
Figure 3.8: Courbes de dispersion: branche P_1 du mode de flexion pour le tuyau vide (trait continu), ondes de flexion selon la théorie des poutres (trait interrompu)	38
Figure 3.9: Rapports entre les déplacements u et w (trait interrompu) et les déplacement v et w (trait continue) dans le tuyau vide pour le mode de flexion	39
Figure 3.10: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en aluminium rempli d'air	40
Figure 3.11: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en aluminium rempli d'air, basses fréquences	41
Figure 3.12: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en aluminium rempli d'eau	42
Figure 3.13: Courbe de dispersion, mode de flexion, tuyau en aluminium rempli d'eau	44
Figure 3.14: Courbe de dispersion des ondes acoustiques planes dans l'eau (trait interrompu), la branche F_1 (trait continu).....	44
Figure 3.15: Branches P_2 du mode respiratoire: tuyau vide (trait interrompu), rempli d'eau (trait continu).....	45
Figure 3.16: Branches P_1 du mode de flexion, tuyau vide (trait interrompu), rempli d'eau (trait continu).....	45
Figure 3.17: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en acier, vide	46
Figure 4.1: Angles de polarisation	54
Figure 4.2: Courbes du rapport Ψ : les branches F_1 (trait continu) et P_2 (trait interrompu) du mode respiratoire; la branche P_1 (trait mixte) du mode de flexion,.....	60
Figure 4.3: Intensité vibratoire, mode respiratoire	61
Figure 5.1: Antenne circumférentielle des capteurs	64
Figure 5.2: Antenne circumférentielle de capteurs pour $N=1$	65
Figure 5.3: Dispositif des 2 antennes circumférentielles.....	66
Figure 5.4: Dispositif des 4 antennes circumférentielles.....	69
Figure 5.5: Rapport entre l'élongation axiale et circumférentielle, ondes de type paroi (trait interrompu), ondes de type fluide (trait continu), ondes libres du mode de flexion (trait mixte).....	72
Figure 5.6: Rapport entre l'accélération normale et axiale, ondes de type paroi (trait interrompu), ondes de type fluide (trait continu).....	72
Figure 5.7: Longueur d'ondes de type paroi (trait interrompu), de type fluide (trait continu) et d'ondes libres du mode de flexion (trait mixte)	74
Figure 6.1: Dispositif de mesure, essai axial.....	77
Figure 6.2: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu).....	77
Figure 6.3: Nombre d'ondes théorique (trait interrompu), mesuré (trait continu).....	78

Figure 6.4: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu).....	79
Figure 6.5: Indice de propagation: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes (trait interrompu) en bleu, antennes 2 et 3 (trait continu)	79
Figure 6.6: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1 et 2 (trait continu)	80
Figure 6.7: Dispositif de mesure, essai de flexion	81
Figure 6.8: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu).....	81
Figure 6.9: Nombre d'ondes théorique (trait interrompu), mesuré (trait continu).....	82
Figure 6.10: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu).....	82
Figure 6.11: Indice de propagation: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu)	83
Figure 6.12: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1 et 2 (trait continu)	84
Figure 6.13: Dispositif de mesure, essai combiné.....	84
Figure 6.14: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu).....	85
Figure 6.15: Flux de puissance, mode respiratoire , antennes 1r, 2r	85
Figure 6.16: Indice de propagation, mode respiratoire.....	86
Figure 6.17: Flux de puissance, mode de flexion , antennes 1f, 2f	86
Figure 6.18: Indice de propagation, mode de flexion.....	87
Figure 6.19: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), total (trait continu)	87
Figure 6.20: Dispositif de mesure	88
Figure 6.21: Flux de puissances acoustiques dans le tuyau de refoulement et d'aspiration	89
Figure 6.22: Indice de propagation acoustique dans le tuyau de refoulement et d'aspiration.....	89
Figure 6.23: Flux de puissance vibratoire dans le tuyau de refoulement	90
Figure 6.24: Indice de propagation vibratoire dans le tuyau de refoulement	91
Figure 6.25: Flux de puissance vibratoire dans le tuyau d'aspiration	91
Figure 6.26: Indice de propagation vibratoire dans le tuyau de l'aspiration	92
Figure 6.27: Flux de puissance acoustique et vibratoire dans le tuyau de refoulement,	92
Figure 6.28: Flux de puissance acoustique et vibratoire dans le tuyau d'aspiration	93
Figure 6.29: Dispositif de mesure, essai axial.....	94
Figure 6.30: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu).....	95
Figure 6.31: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1, 2, 4, 6 (trait interrompu), antennes 3, 4, 5, 6 (trait continu).....	95
Figure 6.32: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1, 2, 4 et 6 (trait continu)	96
Figure 6.33: Courbes de $\det(\hat{\underline{\underline{A}}})$ pour la combinaison des antennes 1, 2, 4, et 6. En haut: sa valeur absolue en dB avec comme référence 1; en bas: sa phase	96
Figure 6.34: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 2, 3, 4 et 5 (trait continu)	97
Figure 6.35: Courbes de $\det(\hat{\underline{\underline{A}}})$ pour la combinaison des antennes 2, 3, 4, et 5. En haut: sa valeur absolue en dB avec comme référence 1; en bas: sa phase	97

Figure 6.36: Flux de puissance mesuré par les antennes 2, 3, 4 et 5. En haut: partie vibratoire; en bas: partie acoustique.....	98
Figure 6.36: Flux de puissance mesuré par les antennes 1, 2, 4 et 6. En haut: partie vibratoire; en bas: partie acoustique.....	99
Figure 6.37: Dispositif de mesure, essai de flexion	99
Figure 6.38: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu).....	100
Figure 6.39: Nombre d'ondes théorique (trait interrompu), mesuré (trait continu).....	100
Figure 6.40: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu).....	101
Figure 6.41: Indice de propagation: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu)	101
Figure 6.42: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1 et 2 (trait continu)	102
Figure 6.43: Flux de puissance: antennes de jauges (trait interrompu); antennes d'accéléromètres (trait continu)	102
Figure 6.44: Indice de propagation: antennes de jauges (trait interrompu); antennes d'accéléromètres (trait continu)	103
Figure 6.45: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes de jauges (trait continu)	104
Figure 6.46: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes d'accéléromètres (trait continu)	104
Figure A4.1: Répartition axiale des points de mesure	124
Figure A5.1: Courbe de dispersion pour les ondes longitudinales (tuyau rempli d'air, mode respiratoire): théorique (trait bleu), mesurée (trait rouge)	126
Figure A5.2: Courbe de dispersion pour les ondes de quasi-flexion (tuyau rempli d'air, mode de flexion): théorique (trait bleu), mesurée (trait rouge)	127
Figure A5.3: Courbe de dispersion pour les ondes longitudinales (tuyau rempli d'huile, mode de flexion): théorique (trait bleu), mesurée (trait rouge)	127
Figure A5.4: Tuyau vide, essai axial, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 1400 - 2500 [Hz].....	128
Figure A5.5: Tuyau vide, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 100 [Hz].....	128
Figure A5.6: Tuyau vide, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 400 - 1200 [Hz]	129
Figure A5.7: Tuyau vide, essai combiné, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 100 [Hz].....	129
Figure A5.8: Tuyau vide, essai combiné, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 1200 - 1600 [Hz].....	130
Figure A5.9: Tuyau rempli d'huile, essai axial, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 200 [Hz]	130
Figure A5.10: Tuyau rempli d'huile, essai axial, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 200 - 600 [Hz]	131
Figure A5.11: Tuyau rempli d'huile, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 100 [Hz]	131
Figure A5.12: Tuyau rempli d'huile, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 400 - 900 [Hz]	132
Figure A5.13: Tuyau rempli d'huile, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes d'accéléromètres (trait rouge), 30 - 100 [Hz].....	132

1 INTRODUCTION

Dans le langage de la vibroacoustique actuelle, la signification du terme « *intensité vibratoire* » dépasse largement sa définition physique. En effet, ce terme désigne une nouvelle approche de l'analyse des vibrations, l'approche ayant pour base le bilan de l'énergie vibratoire nette dans une structure. Les éléments suivants interviennent dans le bilan:

- l'énergie vibratoire nette injectée dans la structure par des « *sources* », c'est à dire par les forces excitatrices;
- l'énergie vibratoire nette éjectée de la structure dans son environnement, celui-ci étant une autre structure, le milieu acoustique ambiant ou les supports de la structure analysée;
- la répartition et le sens de parcours de l'énergie vibratoire nette dans la structure.

C'est justement le dernier élément du bilan qui est décrit par le vecteur de l'intensité vibratoire. Il suffit donc de déterminer celui-ci par calcul ou par mesure pour connaître le débit de l'énergie vibratoire nette dans une structure.

L'approche de l'intensité vibratoire trouve des applications diverses:

- localisation et caractérisation des sources. A condition de connaître la distribution spatiale du vecteur de l'intensité vibratoire dans une structure, il est possible de localiser les positions des forces excitatrices (sources) et de caractériser chacune d'elles par son énergie vibratoire nette injectée dans la structure;
- caractérisation des conditions aux limites. Dans l'analyse des vibrations on utilise le plus souvent 3 modèles de conditions aux limites: libre, encastré ou appuyé simple. Ces modèles sont tous conservatifs au sens du transfert de l'énergie vibratoire entre la structure et ses supports. Ceci n'est pas toujours le cas dans la réalité. A l'aide de l'approche de l'intensité vibratoire, il est possible de décrire les conditions aux limites en leur attribuant les coefficients de réflexion et de transmission au niveau de l'énergie vibratoire nette;
- contrôle actif des vibrations. Le contrôle actif d'un phénomène consiste à minimiser une grandeur relative à celui-ci par le biais des éléments actifs rajoutés au système. Lorsque la grandeur à minimiser est l'énergie vibratoire nette injectée dans une structure, le choix optimal des positions des actionneurs ainsi que de leurs paramètres est réalisé en utilisant l'approche de l'intensité vibratoire.

Il convient de donner un court historique du développement de l'approche de l'intensité vibratoire. Les premières publications datent des années 70 (Noiseux [1] et Pavic [2]). Les auteurs traitent l'intensité vibratoire sous l'aspect de mesure. Dans la deuxième moitié des années 80 et au tout début des années 90, les travaux de recherche atteignent leur apogée. Des nombreuses publications paraissent dans les revues scientifiques de l'acoustique et des vibrations (Journal of Acoustical Society of America, Journal of Sound and Vibration). Plusieurs congrès sur l'intensimétrie, d'abord acoustique puis vibratoire, se déroulent en France (tous organisés par le CETIM à Senlis). C'est l'époque de la recherche fondamentale: définition de l'intensité vibratoire dans des structures différentes (barres, poutres, plaques et coques); proposition des techniques de mesure; développement de l'approche numérique, liaison avec l'analyse modale. Bien que la recherche dans le domaine de l'intensité vibratoire représente la suite à la fois logique et chronologique des travaux dans le domaine de l'intensité acoustique, rares sont les chercheurs actifs dans les deux domaines. Parmi ceux-ci, citons les travaux de Pascal [3, 4] qui développe la technique de holographie acoustique pour déterminer la distribution spatiale du vecteur de l'intensité vibratoire dans une plaque. L'un des importants résultats obtenus à cette époque est l'avènement du calcul de vecteur de l'intensité vibratoire à l'aide de la méthode des éléments finis. Deux auteurs s'illustrent dans ce domaine: Hambric [5] et notamment Gavric [6,

7] qui réalise ces calculs en utilisant l'expansion modale. A l'heure actuelle, la recherche fondamentale marque le pas. Les travaux sont orientés vers l'application aux cas réels.

Il est possible de répartir les travaux de recherche selon le type de structure: barres, poutres, plaques et coques. Dans le domaine des coques cylindriques, plusieurs chercheurs s'illustrent par leurs travaux. L'apport scientifique de Fuller [8, 9, 10] est plus que considérable: la solution de la relation de dispersion pour une coque cylindrique vide ou remplie d'un fluide acoustique, l'analyse de la réflexion et de la transmission des ondes élastiques sur la connexion des coques cylindriques d'épaisseurs différentes, le calcul de la mobilité d'une coque cylindrique rempli d'un fluide acoustique et l'analyse des effets d'écoulement du fluide interne sur la propagation des ondes élastiques et acoustiques (avec Brévar). Dans ces travaux qui sont de nature théorique, l'attention de l'auteur est tournée vers l'explication des phénomènes physiques. Les travaux de Pavic [11, 12, 13] sont orientés vers l'analyse de la propagation des énergies vibratoire et acoustique dans les tuyaux. Il répartit le flux de l'énergie vibratoire dans une coque cylindrique en trois composantes de membrane, de flexion et de courbure, simplifie la relation de dispersion et étudie les rapports entre les dites contributions. Son résultat le plus important sur le plan applicatif est la transcription des expressions pour l'intensité vibratoire en forme particulière, celle-ci permettant la mesure par le biais des techniques de décomposition ondulatoire. Enfin, il ne faut surtout pas oublier les travaux de Williams et Romano [14, 15, 16]. Ce premier fait la démonstration rigoureuse de la définition du vecteur de l'intensité vibratoire dans une coque cylindrique. Dans cette démonstration, il établit le bilan énergétique du système couplé (c'est à dire la coque cylindrique avec le fluide externe) où il révèle la nature du couplage entre l'intensité vibratoire dans la coque cylindrique et l'intensité acoustique dans le fluide externe. Romano travaille sur la formulation du vecteur de Poynting dans plaques et coques. Il applique cette formulation à la détermination de l'intensité vibratoire par calcul et par mesure.

Le travail reporté dans cette étude a pour objectif le développement d'une technique de mesure du flux des énergies nettes vibratoire et acoustique dans un tuyau. La tâche est accomplie en plusieurs étapes, chacune d'elles étant le sujet d'un chapitre de cet exposé:

- chapitre 2: la modélisation du comportement vibratoire des coques générales et cylindriques
- chapitre 3: l'analyse de la propagation des ondes élastiques dans les coques cylindriques, le couplage entre la paroi du tuyau et le fluide interne
- chapitre 4: l'analyse de la propagation des énergies nettes vibratoire et acoustique dans un tuyau
- chapitre 5: le développement des techniques de mesure
- chapitre 6: les résultats de mesure

Durant ce projet qui s'étale de 1991 à 1994, il y a eu plusieurs publications sur le même sujet. Nous citons notamment les travaux de Bourget et Fahy [17] et de Jong et Verheij [18]. Cependant, la validation expérimentale des techniques de mesure employées n'est pas présentée dans ces publications. Dans cette étude, chaque technique de mesure est validée expérimentalement sur un banc d'essai conçu exclusivement dans ce but. Nous espérons modestement que les quelques résultats de ce mémoire seront utiles aux chercheurs et utilisateurs de l'approche de l'intensité vibratoire dans les tuyaux.

1.1 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **D. U. Noiseux:** "Measurement of power flow in uniform beams and plates", JASA Volume 47 Number 1 (Part 2) 1970
2. **G. Pavic:** "Measurement of structure borne wave intensity, Part 1: Formulation of the methods", JSV (1976) 49 (2), 221 - 230
3. **J.-C. Pascal:** "Chapitre 10: Caractérisation expérimentale du champ rayonné. Intensimétrie et antennes acoustique" dans **C. Leseur et al.:** "Rayonnement acoustique des structures", 1988 Editions Eyrolles
4. **J.-C. Pascal, T. Loyau, J. A. Mann III:** "Structural intensity from spatial Fourier transformation and BAHIM acoustical holography method", Proceedings of the 3rd International congress on intensity techniques, Senlis - France 1990
5. **S. A. Hambric:** "Influence of different wave motion types on finite element power flow calculations", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
6. **L. Gavric, G. Pavic:** "A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach", JSV (1993) 164(1), 29 - 43
7. **L. Gavric, X. Carniel:** "Structure-borne intensity fields in plates, beams and plate-beam assemblies", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
8. **C. R. Fuller:** "The effects of wall discontinuities on the propagation of flexural waves in cylindrical shells", JSV (1981) 75 (2), 207 - 228
9. **C. R. Fuller, F. J. Fahy:** "Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid", JSV (1982) 81 (4), 501 - 518
10. **C. R. Fuller:** "The input mobility of an infinite circular cylindrical elastic shell filled with fluid", JSV (1983) 87 (3), 409 - 427
11. **G. Pavic:** "Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells", JSV (1990) 142 (2), 293 - 310
12. **G. Pavic:** "Energy flow through straight pipes", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
13. **G. Pavic:** "Vibroacoustical energy flow through straight pipes", JSV (1992) 154(3), 411 - 429
14. **A. J. Romano, P. B. Abraham, E. G. Williams:** "A Poynting vector formulation for thin shells and plates, and its application to structural intensity analysis and source localization. Part I: Theory", JASA 87 (3) March 1990
15. **A. J. Romano, E. G. Williams:** "On the theoretical and experimental applications of a Poynting vector formulation for thin shells and plates", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
16. **E. G. Williams:** "Structural intensity in thin cylindrical shells", JASA 89 (4) Pt. 1, April 1991
17. **S. Bourget, F. J. Fahy:** "Vibrational power flow measurement along thin cylindrical pipe", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
18. **C. A. F. de Jong, J. W. Verheij:** "Measurement of vibrational energy flow in straight fluid-filled pipes: a study of the effect of fluid-structure interaction", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993

2 THEORIE DES COQUES

Selon Flügge, « une coque est la réalisation d'une surface courbée dans l'espace ». Pour décrire son comportement mécanique, il est nécessaire de disposer d'un modèle mathématique que l'on appelle théorie des coques. La complexité des formes géométriques qu'une coque peut revêtir implique un certain nombre d'hypothèses selon lesquelles une théorie de coque est développée. Ces hypothèses ne sont pas forcément toutes identiques et, par conséquent, il y existe toute une variété de théories des coques. Citons quelques-uns de leurs créateurs: Love, Timoshenko, Flügge, Novozhilov, Donnell, Sanders. Aujourd'hui, le travail de recherche dans le domaine des coques est orienté plutôt vers la mise en oeuvre numérique des théories des coques existantes que vers la création de nouvelles théories.

Dans cette étude, nous utilisons les théories des coques déjà existantes. Toutefois, il a été jugé opportun de refaire le développement de certaines théories afin de mieux comprendre leurs limitations. Ceci est donc le sujet de ce chapitre. Les théories des coques, présentées ici, sont écrites en notation tensorielle. La méthode de construction des théories des coques est présentée dans le paragraphe 2.1 avec les étapes correspondantes. La théorie des coques d'ordre supérieur est présentée dans le paragraphe 2.2. Ces théories sont appliquées au cas particulier que représentent les coques cylindriques dans le paragraphe 2.3. On y trouvera trois différentes théories des coques cylindriques: les théories de Flügge, Donnell et Flügge-Timoshenko.

2.1 CONSTRUCTION D'UNE THEORIE DES COQUES

La démarche de construction d'une théorie des coques, appliquée ici, est celle employée par la mécanique des milieux continus. Elle consiste en 4 étapes:

- calcul du gradient du vecteur de déplacement
- calcul du tenseur des déformations
- application du principe des puissances virtuelles afin d'obtenir les équations d'équilibre
- application de la loi de comportement pour lier le tenseur des déformations avec le tenseur des contraintes

Evidemment il existe d'autres méthodes. Le point de départ de Flügge, par exemple, est l'équation d'équilibre au niveau de l'élément différentiel de la coque.

Le repère dans lequel nous observons une coque générale est un repère curviligne tridimensionnel. Soit T un point quelconque de la coque, il est repéré par son vecteur rayon \vec{R}_T (voir figure 2.1). Celui-ci peut être exprimé en fonction du vecteur rayon \vec{r} de la surface médiane et du vecteur normal \vec{n} à cette dernière [1]:

$$\vec{R}_T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{r}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \vec{n}(\xi_1, \xi_2).$$

Les vecteurs \vec{r} , \vec{n} sont fonctions des coordonnées curvilignes ξ_1 , ξ_2 parcourant les lignes des courbures principales de la surface médiane. La coordonnée ξ_3 suit le sens normal à celles-ci.

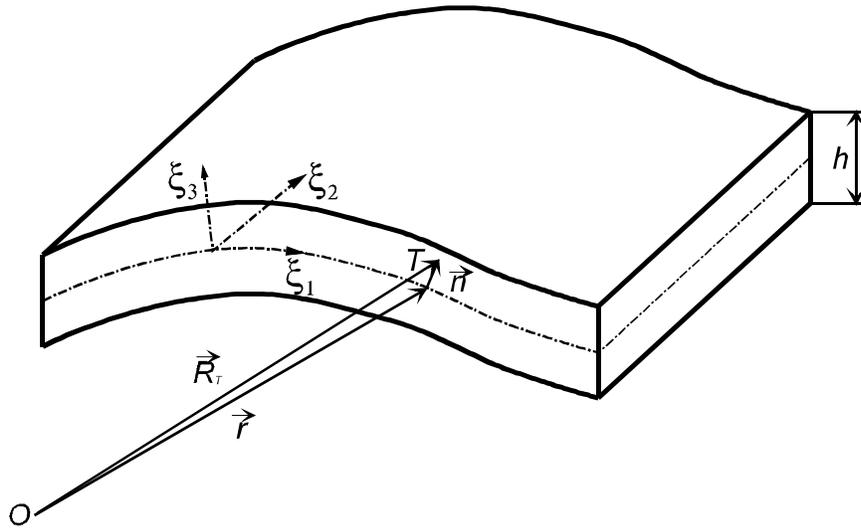


Figure 2.1: Coque générale

Le vecteur de déplacement du point T est donné par la somme vectorielle entre le vecteur de déplacement dans le plan tangentiel à la surface médiane \vec{U}_t et le vecteur de déplacement dans le sens normal à cette même surface \vec{U}_n :

$$\vec{U} = \vec{U}_t + \vec{U}_n ,$$

où

$$\vec{U}_t = U_i \vec{g}_i \quad i = 1, 2 \quad \vec{U}_n = U_3 \vec{g}_3 \quad \vec{g}_3 = \vec{n} .$$

Les vecteurs \vec{g}_1 , \vec{g}_2 sont unitaires et tangentiels aux lignes des courbures principales. Les composantes du vecteur de déplacement sont fonctions des trois coordonnées curvilignes. A condition que la coque soit mince (c'est à dire lorsque les rapports entre l'épaisseur h de la coque et les rayons principaux R_1 et R_2 de sa surface médiane sont très inférieurs à 1):

$$\frac{h}{R_1}, \frac{h}{R_2} \ll 1 ,$$

le vecteur de déplacement tangentiel \vec{U}_t peut être développé en série de Taylor autour de la surface médiane en se limitant aux deux premiers termes:

$$\vec{U}_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{u}_t(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \vec{\beta}(\xi_1, \xi_2) + \vec{O}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) . \quad (2.1.1)$$

Le premier terme de la série désigne le vecteur de déplacement, tangent à la surface médiane:

$$\vec{u}_t(\xi_1, \xi_2) = \vec{U}_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{\xi_3=0} = \begin{Bmatrix} U_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ U_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{Bmatrix}_{\xi_3=0} . \quad (2.1.2)$$

Dans le deuxième terme, le vecteur:

$$\vec{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_1(\xi_1, \xi_2) \\ \beta_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi_3} \begin{Bmatrix} U_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ U_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{Bmatrix}_{\xi_3=0} , \quad (2.1.3)$$

désigne le vecteur des angles de rotations des sections droites de la coque.

Le reste des termes dans la série de Taylor est noté:

$$\bar{O}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{n \geq 2} \frac{\xi_3^n}{n!} \frac{\partial^n \bar{U}_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{\xi_3=0}}{\partial \xi_3^n} . \quad (2.1.4)$$

Dans le cadre des théories d'ordre inférieur, ces termes sont négligés ce qui correspond à l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love.

Le déplacement normal, à cause de la faible épaisseur de la coque, ne varie pas considérablement le long de cette direction. Par conséquent, il s'écrit:

$$\bar{U}_n = u_3(\xi_1, \xi_2) \bar{g}_3 . \quad (2.1.5)$$

Le vecteur de déplacement s'écrit finalement sous la forme suivante:

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i + \xi_3 \bar{\beta} \\ u_3 \end{Bmatrix} , \quad (2.1.6)$$

où la première ligne donne le vecteur de déplacement dans le plan tangent à la surface médiane, tandis que la deuxième ligne contient la composante normale. Par l'équation (2.1.6) le déplacement de la coque est donné en fonction des grandeurs définies dans sa surface médiane. En raison de la faible épaisseur de la coque, l'idée de modéliser le comportement d'une coque mince au travers de sa surface médiane s'impose naturellement. Le développement du vecteur de déplacement en série de Taylor est le premier pas dans la réalisation de cette idée. D'un autre côté, la décomposition du vecteur de déplacement en composantes tangentielle et normale permet d'avoir un meilleur aperçu physique sur les grandeurs dites « *dans le plan* » et « *hors du plan* ».

2.1.1 Gradient du vecteur de déplacement

Le gradient du vecteur de déplacement est un tenseur dont les composantes peuvent être calculées en utilisant les résultats de la théorie des surfaces [1]. Les composantes du tenseur de gradient pour le vecteur de déplacement, dans un repère curviligne, sont données par les expressions suivantes [1]:

$$\nabla_3 \bar{U} = [\nabla_3 \bar{U}]_{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1.1.1)$$

$$[\nabla_3 \bar{U}]_{11} = \frac{1}{A_1(1 + \xi_3/R_1)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + U_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \quad (2.1.1.2)$$

$$[\nabla_3 \bar{U}]_{12} = \frac{1}{A_1(1 + \xi_3/R_1)} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} - \frac{U_1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \right) \quad (2.1.1.3)$$

$$[\nabla_3 \bar{U}]_{13} = \frac{1}{A_1(1 + \xi_3/R_1)} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \xi_1} - U_1 \frac{A_1}{R_1} \right) \quad (2.1.1.4)$$

$$[\nabla_3 \bar{U}]_{21} = \frac{1}{A_2(1 + \xi_3/R_2)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi_2} - \frac{U_2}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \right) \quad (2.1.1.5)$$

$$[\nabla_3 \vec{U}]_{22} = \frac{1}{A_2(1 + \xi_3 / R_2)} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + U_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \quad (2.1.1.6)$$

$$[\nabla_3 \vec{U}]_{23} = \frac{1}{A_2(1 + \xi_3 / R_2)} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \xi_2} - U_2 \frac{A_2}{R_2} \right) \quad (2.1.1.7)$$

$$[\nabla_3 \vec{U}]_{31} = \frac{\partial U_1}{\partial \xi_3} \quad (2.1.1.8)$$

$$[\nabla_3 \vec{U}]_{32} = \frac{\partial U_2}{\partial \xi_3} \quad (2.1.1.9)$$

$$[\nabla_3 \vec{U}]_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial \xi_3} \quad (2.1.1.10)$$

Les grandeurs A_1, A_2 désignent les métriques de la surface médiane, R_1, R_2 les rayons des courbures principales de celle-ci. L'opérateur de gradient ∇_3 , appliqué au vecteur de déplacement \vec{U} , est défini dans l'espace tridimensionnel (3D) ce qui est indiqué par son indice. Une telle notation est introduite car, dans la suite de l'exposé, on utilise l'opérateur de gradient dans le plan tangentiel à la surface médiane, celui-ci étant défini dans l'espace bidimensionnel (2D). Par conséquent, il est noté par ∇_2 (voir annexe 1). Le rôle des indices à coté de ∇ est de différencier les opérateurs de gradient en fonction de l'espace dans lequel ils agissent (3D ou 2D). L'application de (2.1.1.1 - 10) à (2.1.6) donne l'expression suivante pour le gradient du vecteur de déplacement dans l'espace 3D:

$$\nabla_3 \vec{U} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}}^T & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \nabla_2 \vec{u}_t + \underline{\underline{K}} u_3 & \nabla_2 u_3 - \underline{\underline{K}} \cdot \vec{u}_t \\ \vec{\beta}^T & 0 \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} \nabla_2 \vec{\beta} & -\underline{\underline{K}} \cdot \vec{\beta} \\ \underline{\underline{0}}^T & 0 \end{bmatrix} \right), \quad (2.1.1.11)$$

où le tenseur:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \xi_3 / R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \xi_3 / R_2} \end{bmatrix}, \quad (2.1.1.12)$$

contient les corrections des métriques A_1, A_2 hors de la surface médiane. La métrique dans le sens normal, étant égale à 1, ne subit aucune correction.

Le tenseur:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}, \quad (2.1.1.13)$$

est le tenseur des courbures principales de la surface médiane. L'exposant T dans (2.1.1.11) désigne « *transposé* ». Le vecteur

$$\underline{\underline{0}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

désigne le vecteur nul.

La notation de (2.1.1.11) paraît quelque peu compliquée mais elle a deux avantages. Tout d'abord, elle est plus courte que si la même équation avait été écrite en termes de dérivées partielles, ensuite, les influences de courbure de la surface médiane sont ici plus visibles grâce au tenseur $\underline{\underline{K}}$.

2.1.2 Tenseur des déformations

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, ce qui est retenu ici, le tenseur des déformations est défini par [2]:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla_3 \vec{U} + \nabla_3^T \vec{U}) . \quad (2.1.2.1)$$

C'est un tenseur défini dans l'espace 3D qui, pour une coque mince, peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}_t & \underline{\underline{\varepsilon}}_n \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_n^T & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.1.2.2)$$

Le tenseur:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{E}} \cdot \nabla_2 \vec{u}_t + \nabla_2^T \vec{u}_t \cdot \underline{\underline{E}} + 2 \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{K}} u_3 + \xi_3 \left(\underline{\underline{E}} \cdot \nabla_2 \vec{\beta} + \nabla_2^T \vec{\beta} \cdot \underline{\underline{E}} \right) \right] , \quad (2.1.2.3)$$

est le tenseur des déformations dans le plan tangentiel à la surface médiane. Pour une coque générale, le déplacement normal crée des elongations le long des lignes des courbures principales. Ceci marque une différence par rapport à la plaque pour laquelle le déplacement normal n'est cause d'aucune déformation (le tenseur $\underline{\underline{K}}$ étant nul). L'elongation dans le sens normal est dite nulle, cf: l'expression (2.1.2.2). En effet, celle-ci est négligeable devant d'autres déformations à cause de la faible épaisseur de la coque.

Le vecteur:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_n = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{E}} \cdot \left(\nabla_2 u_3 - \underline{\underline{K}} \cdot \left(\vec{u}_t + \xi_3 \vec{\beta} \right) \right) + \vec{\beta} \right] , \quad (2.1.2.4)$$

contient les composantes du tenseur des déformations dans le sens normal. Il est évident que celles-ci disparaissent dans la surface médiane, d'où l'expression pour le vecteur des angles de rotations des sections droites:

$$\vec{\beta} = \underline{\underline{K}} \cdot \vec{u}_t - \nabla_2 u_3 . \quad (2.1.2.5)$$

Selon (2.1.2.5), les rotations des sections droites sont créées par le déplacement normal de la surface médiane et par les déplacements tangentiels. Les rotations sont constantes le long de l'épaisseur de la coque. Par conséquent, le tenseur des déformations dans la coque est complètement défini par les déformations dans la surface médiane:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t = \underline{\underline{\varepsilon}}_t^0 + \xi_3 \underline{\underline{\varepsilon}}_t^1 , \quad (2.1.2.6)$$

où le tenseur:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t^0 = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{E}} \cdot \nabla_2 \vec{u}_t + \nabla_2^T \vec{u}_t \cdot \underline{\underline{E}} + 2 \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{K}} u_3 \right) , \quad (2.1.2.7)$$

contient les déformations dites « *de membrane* », tandis que le tenseur:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t^1 = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{E}} \cdot \nabla_2 \bar{\underline{\beta}} + \nabla_2^T \bar{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{E}} \right) , \quad (2.1.2.8)$$

multiplié par $\underline{\underline{\xi}}_3$ contient les déformations dites « *de flexion* ».

2.1.3 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre résultent de l'application du principe des puissances virtuelles au niveau global de la coque. Ce principe s'écrit sous la forme suivante:

$$P_i + P_e = P_a ,$$

où P_i désigne les puissances virtuelles des efforts internes, P_e désigne les puissances virtuelles des sollicitations et P_a désigne les puissances virtuelles des forces d'inertie que l'on appelle aussi quantité d'accélération. Les puissances virtuelles des efforts internes sont données par:

$$P_i = - \int_{s=-h/2}^{h/2} \int \left(\underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_t + 2 \underline{\underline{\sigma}}_n \cdot \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_n \right) J_3 d\underline{\underline{\xi}}_3 dS ,$$

avec

$$J_3 = \det(\underline{\underline{E}}^{-1}) \quad dS = A_1 A_2 d\underline{\underline{\xi}}_1 d\underline{\underline{\xi}}_2 .$$

Le symbole « $\cdot \cdot$ » désigne la double contraction des indices:

$$\underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \cdot \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}_t = \sigma_{ij} \varepsilon_{tji} .$$

Le tenseur:

$$\underline{\underline{\sigma}}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} ,$$

contient des contraintes dans la surface médiane.

Le vecteur:

$$\underline{\underline{\sigma}}_n = \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} ,$$

contient les contraintes dans le sens normal à la surface médiane. Le tenseur et le vecteur des vitesses des déformations proviennent du vecteur de déplacement virtuel, celui-ci donné par:

$$\vec{\underline{U}} = \begin{Bmatrix} \vec{\hat{u}} + \underline{\underline{\xi}}_3 \bar{\underline{\beta}} \\ \vec{\hat{u}}_3 \end{Bmatrix} .$$

A l'aide des expressions (2.1.2.3 - 4), les puissances virtuelles des efforts internes s'écrivent sous la forme suivante, après intégration par partie:

$$P_i = \int_s \left[(\nabla_2 \cdot \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{Q}}) \cdot \vec{\hat{u}}_t + (\nabla_2 \cdot \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{Q}}) \cdot \vec{\hat{\beta}} + (\nabla_2 \cdot \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{N}}) \hat{u}_3 \right] dS - \int_{\partial S} \left[(\underline{\underline{N}} \cdot \vec{\hat{n}}) \cdot \vec{\hat{u}}_t + (\underline{\underline{M}} \cdot \vec{\hat{n}}) \cdot \vec{\hat{\beta}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{\hat{n}} \hat{u}_3 \right] d\Gamma \quad (2.1.3.1)$$

avec

$$\underline{\underline{N}} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_t J_3 d\xi_3 \quad (2.1.3.2)$$

$$\underline{\underline{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_t \xi_3 J_3 d\xi_3 \quad (2.1.3.3)$$

$$\underline{\underline{Q}} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_n d\xi_3 \quad (2.1.3.4)$$

désignant respectivement les tenseurs des efforts de tension, de moments et le vecteur des efforts tranchants.

Les puissances virtuelles des sollicitations peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$P_e = \int_S q_3 \hat{u}_3 dS + \int_{\partial S} \left(\underline{T}^\Gamma \cdot \hat{\underline{u}}_t^\Gamma + \underline{P}^\Gamma \cdot \hat{\underline{\beta}}^\Gamma + V^\Gamma \hat{u}_3 \right) d\Gamma \quad (2.1.3.5)$$

où q_3 est la sollicitation surfacique normale à la surface médiane, donnée en fonction des sollicitations surfaciques normales q_i et q_e agissant respectivement sur les surfaces $\xi_3 = \pm h/2$ dans le sens du vecteur normal:

$$q_3 = \left(1 - \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_2}\right) q_i + \left(1 + \frac{h}{2R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) q_e \quad (2.1.3.6)$$

Pour les théories d'ordre inférieur:

$$q_3 = q_i + q_e \quad (2.1.3.7)$$

Les vecteurs \underline{T}^Γ , \underline{P}^Γ désignent respectivement les vecteurs des forces de tension et des moments de flexion, linéiques, appliqués au bord ∂S (noté aussi par Γ) de la surface médiane. V^Γ représente la force normale externe, agissant sur le bord. Les vecteurs \underline{T}^Γ , \underline{P}^Γ sont donnés dans la base locale $\{\hat{n}^\Gamma, \hat{t}^\Gamma\}$ de la frontière Γ , où le premier élément de la base est le vecteur unitaire normal à la frontière Γ et le deuxième est tangentiel à celle dernière.

La quantité d'accélération P_a est donnée par l'expression suivante:

$$P_a = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial t^2} + \xi_3 \frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial t^2} \right) \left(\hat{\underline{u}}_t + \xi_3 \hat{\underline{\beta}} \right) J_3 d\xi_3 dS \quad (2.1.3.8)$$

Après avoir fait la somme par rapport à la coordonnée normale ξ_3 , la même grandeur s'écrit:

$$P_a = \int_S \left(\underline{F}_{u_t}^i \cdot \hat{\underline{u}}_t + F_{u_3}^i \hat{u}_3 + \underline{M}_\beta^i \hat{\underline{\beta}} \right) dS \quad (2.1.3.8)$$

où $\underline{F}_{u_t}^i$, $F_{u_3}^i$, \underline{M}_β^i désignent respectivement les densités des forces d'inertie dans le plan, de la force d'inertie hors du plan et des moments d'inertie:

$$\underline{F}_{u_t}^i = \left[\left(1 + \frac{h^2}{12R_1R_2}\right) \frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \bar{\beta}}{\partial t^2} \right] \rho h \quad (2.1.3.9)$$

$$F_{u_3}^i = \left(1 + \frac{h^2}{12R_1R_2}\right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \rho h \quad (2.1.3.10)$$

$$\underline{M}_\beta^i = \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{3h^2}{20R_1R_2}\right) \frac{\partial^2 \vec{\beta}}{\partial t^2} \right] \frac{\rho h^3}{12} . \quad (2.1.3.11)$$

Les densités des forces d'inertie se composent des termes en h , h^3 et h^5 . Dans le cadre des théories d'ordre inférieur, le terme en h est le seul retenu, ce qui entraîne la disparition des moments d'inertie et nous permet d'écrire:

$$\underline{F}_{u_t}^i = \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} \quad (2.1.3.12)$$

$$F_{u_3}^i = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (2.1.3.13)$$

$$\underline{M}_\beta^i = \underline{0} . \quad (2.1.3.14)$$

Les équations d'équilibre découlent des équations (2.1.3.1), (2.1.3.5) et (2.1.3.8). Celles valides pour les théories d'ordre inférieur sont notées de la manière suivante:

$$\nabla_2 \cdot \underline{N} + \underline{K} \cdot \underline{Q} = \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} \quad (2.1.3.15)$$

$$\nabla_2 \cdot \underline{Q} - \underline{K} \cdot \underline{N} + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (2.1.3.16)$$

$$\nabla_2 \cdot \underline{M} - \underline{Q} = \underline{0} \quad (2.1.3.17)$$

Portant (2.1.3.17) dans (2.1.3.15 - 16), on obtient le système d'équations réduit:

$$\nabla_2 \cdot \underline{N} + \underline{K} \cdot (\nabla_2 \cdot \underline{M}) = \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} \quad (2.1.3.18)$$

$$\nabla_2 \cdot (\nabla_2 \cdot \underline{M}) - \underline{K} \cdot \underline{N} + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (2.1.3.19)$$

Les conditions aux limites sur la frontière Γ se déduisent à partir des (2.1.3.1) et (2.1.3.5):

$$\vec{u}_t^\Gamma \mapsto \underline{T}^\Gamma = \underline{\Theta} \cdot \underline{N} \cdot \vec{n}^\Gamma \quad (2.1.3.20)$$

$$\vec{\beta}^\Gamma \mapsto \underline{P}^\Gamma = \underline{\Theta} \cdot \underline{M} \cdot \vec{n}^\Gamma \quad (2.1.3.21)$$

$$u_3 \mapsto V^\Gamma = \underline{Q} \cdot \vec{n}^\Gamma . \quad (2.1.3.22)$$

où $\underline{\Theta}$ désigne la matrice de transformation de la base $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ en base $\{\vec{n}^\Gamma, \vec{t}^\Gamma\}$:

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} n_1^\Gamma & n_2^\Gamma \\ -n_2^\Gamma & n_1^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} . \quad (2.1.3.23)$$

L'angle θ est l'angle entre les vecteurs \vec{g}_1 et \vec{n}^Γ . Le développement des expressions (2.1.3.20 - 22) est donné dans l'annexe 1.

2.1.4 Loi de comportement

Afin de se donner une loi de comportement, il faut faire une hypothèse sur le matériau constituant la coque. Il est supposé que celui-ci est un matériau élastique et isotrope. Nous appliquons donc la loi de Hooke pour l'état des contraintes planes, qui s'écrit [3]:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda^* \underline{\underline{\mathbf{I}}} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad (2.1.4.1)$$

où la grandeur λ^* peut s'exprimer en fonction des constantes de Lamé [3]:

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \quad .$$

Il est aussi possible d'exprimer les constantes λ^*, μ en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν ce qui est donné par les expressions suivantes [3]:

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad .$$

Pour une coque mince, la loi de Hooke s'écrit:

$$\underline{\underline{\sigma}}_t = \lambda^* \underline{\underline{\mathbf{I}}} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t) + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_t \quad . \quad (2.1.4.2)$$

Portant (2.1.4.2) dans (2.1.3.2 - 4), nous obtenons la loi de Hooke pour les tenseurs des efforts de tension et de moments:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{N}} = h\lambda^* & \left[\underline{\underline{\mathbf{I}}} \text{tr}(\nabla_2 \underline{\underline{u}}_t + \underline{\underline{K}}u_3) + \underline{\underline{\text{diag}}} \left(\underline{\underline{H}}^0 \cdot (\nabla_2 \underline{\underline{u}}_t + \underline{\underline{K}}u_3) + \frac{h^2}{12} \underline{\underline{H}}^1 \cdot \nabla_2 \underline{\underline{\beta}} \right) \right] + \\ & + h\mu \left[\nabla_2 \underline{\underline{u}}_t + \nabla_2^T \underline{\underline{u}}_t + 2\underline{\underline{K}}u_3 + \underline{\underline{H}}^0 \cdot (\nabla_2 \underline{\underline{u}}_t + 2\underline{\underline{K}}u_3) + \underline{\underline{\text{diag}}}(\underline{\underline{H}}^0 \cdot \nabla_2 \underline{\underline{u}}_t) \right] + \\ & + \frac{h^3}{12} \mu \left[\underline{\underline{H}}^1 \cdot \nabla_2 \underline{\underline{\beta}} + \underline{\underline{\text{diag}}}(\underline{\underline{H}}^1 \cdot \nabla_2 \underline{\underline{\beta}}) \right] \end{aligned} \quad (2.1.4.3)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} = \frac{h^3}{12} & \left\{ \lambda^* \left[\underline{\underline{\mathbf{I}}} \text{tr}(\nabla_2 \underline{\underline{\beta}}) + \underline{\underline{\text{diag}}}(\underline{\underline{H}}^1 \cdot \nabla_2 \underline{\underline{u}}_t) \right] + \mu (\nabla_2 \underline{\underline{\beta}} + \nabla_2^T \underline{\underline{\beta}}) \right\} + \\ & + \frac{h^3}{12} \mu \left[\underline{\underline{H}}^1 \cdot (\nabla_2 \underline{\underline{u}}_t + 2\underline{\underline{K}}u_3) + \underline{\underline{\text{diag}}}(\underline{\underline{H}}^1 \cdot \nabla_2 \underline{\underline{u}}_t) \right] \quad , \end{aligned} \quad (2.1.4.4)$$

avec

$$\underline{\underline{\text{diag}}}(\underline{\underline{A}}) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}^0 = \frac{h^2}{12} \begin{bmatrix} R_1^{-1}(R_1^{-1} - R_2^{-1}) & 0 \\ 0 & R_2^{-1}(R_2^{-1} - R_1^{-1}) \end{bmatrix} \quad (2.1.4.5)$$

$$\underline{\underline{H}}^1 = \begin{bmatrix} R_2^{-1} - R_1^{-1} & 0 \\ 0 & R_1^{-1} - R_2^{-1} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.1.4.6)$$

Les tenseurs \underline{H}^0 , \underline{H}^1 sont les tenseurs de correction dus aux courbure et épaisseur de la coque. Les expressions (2.1.4.3 - 4) démontrent que les tenseurs des efforts internes sont liés à la fois avec les déformations dites de tension et celles dites de flexion. De surcroît, les tenseurs des efforts de tension et de moments ne sont pas symétriques. Il convient de remarquer que ceci ne se produit pas dans une plaque. Pour celle-ci, lesdits tenseurs sont symétriques, les déplacements dans le plan sont liés avec le tenseur des efforts de tension et le tenseur des efforts de moments est dû uniquement au déplacement normal.

Vu la complexité des expressions (2.1.4.3 - 4), nous sommes tentés de les simplifier. Etant donné que pour les coques minces:

$$\frac{h^2}{12R_i R_j} \ll 1 \quad i, j = 1, 2 \quad ,$$

ces termes peuvent être négligés. La loi de Hooke pour les efforts internes s'écrit alors:

$$\underline{N} = h[\lambda^* \underline{\mathbf{I}} \text{tr}(\nabla_2 \underline{u}_i + \underline{K}u_3) + \mu(\nabla_2 \underline{u}_i + \nabla_2^T \underline{u}_i + 2\underline{K}u_3)] \quad (2.1.4.7)$$

$$\underline{M} = \frac{h^3}{12} \{ \lambda^* \underline{\mathbf{I}} \text{tr}(\nabla_2 \vec{\beta}) + \mu(\nabla_2 \vec{\beta} + \nabla_2^T \vec{\beta}) \}, \quad (2.1.4.8)$$

que nous appelons loi de Hooke « simplifiée ». Pour celle-ci, le tenseur des efforts de tension \underline{N} et celui de moments \underline{M} sont symétriques.

En écrivant la loi de Hooke, la théorie des coques, présentée ici, est complétée. En effet, toute théorie des coques, complète, est donnée par

- le vecteur de déplacement, dans le cas présent celui-ci est donné par l'expression (2.1.6)
- le tenseur des déformations, donné ici par (2.1.2.2), (2.1.2.6 - 8)
- la définition des angles de rotations, éq. (2.1.2.5)
- les équations d'équilibre (2.1.3.15 - 19)
- la loi de Hooke, il s'agit des expressions (2.1.4.3 - 4) pour la théorie des coques dite « exacte » où des expressions (2.1.4.7 - 8) pour la théorie des coques dite simplifiée

« L'exactitude » d'une théorie des coques est jugée selon le critère d'existence des efforts lorsque un mouvement de corps rigide est appliqué à la coque. Dym, dans [1] a démontré que les efforts s'annulent dans le cas de la théorie des coques dite exacte. Au contraire, la composante M_{12} ne s'annule pas pour la théorie dite simplifiée.

2.2 THEORIE D'ORDRE SUPERIEUR

Dans le cadre des théories d'ordre supérieur, le vecteur de déplacement de la coque est supposé sous la forme suivante:

$$\bar{U}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_i(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \bar{\theta}(\xi_1, \xi_2) \\ u_3(\xi_1, \xi_2) \end{array} \right\}, \quad (2.2.1)$$

où

$$\bar{\theta}(\xi_1, \xi_2) = \bar{\beta}(\xi_1, \xi_2) + \bar{\varphi}(\xi_1, \xi_2) \quad (2.2.2)$$

désigne le vecteur des angles de rotations des sections droites. Le vecteur $\bar{\beta}(\xi_1, \xi_2)$ est défini par (2.1.2.5). Le vecteur supplémentaire $\bar{\varphi}(\xi_1, \xi_2)$ tient compte des termes supérieurs de la série de Taylor (2.1.1) en modélisant leurs effets par un vecteur des angles de rotations des sections

droites particulier, noté ici par $\vec{\varphi}$. Par conséquent, les sections droites restent planes lorsque la coque est déformée mais elles ne sont plus normales aux lignes des courbures principales. L'idée d'une telle hypothèse cinématique vient de Timoshenko qui l'a appliqué aux poutres. Mindlin, à son tour, l'a appliqué aux plaques [4].

Le tenseur des déformations est, ici aussi, donné par:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}_t & \underline{\underline{\varepsilon}}_n \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_n^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Le tenseur des déformations dans le plan s'écrit:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{E}} \cdot \nabla_2 \vec{u}_t + \nabla_2^T \vec{u}_t \cdot \underline{\underline{E}} + 2 \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{K}} u_3 + \xi_3 \left(\underline{\underline{E}} \cdot \nabla_2 \vec{\theta} + \nabla_2^T \vec{\theta} \cdot \underline{\underline{E}} \right) \right], \quad (2.2.4)$$

La différence majeure entre cette théorie et celles d'ordre inférieur consiste en fait que le vecteur des déformations dans le sens normal n'est plus nul:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_n = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} \cdot \vec{\varphi}. \quad (2.2.5)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\nabla_2 \cdot \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{F}}_{u_t}^i \quad (2.2.6)$$

$$\nabla_2 \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{N}} + q_3 = \underline{\underline{F}}_{u_3}^i \quad (2.2.7)$$

$$\nabla_2 \cdot \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{M}}_{\beta}^i. \quad (2.2.8)$$

Les forces et les moments d'inertie sont donnés par les expressions suivantes:

$$\underline{\underline{F}}_{u_t}^i = \left[\left(1 + \frac{h^2}{12R_1R_2} \right) \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \vec{\theta}}{\partial t^2} \right] \rho h \quad (2.2.9)$$

$$\underline{\underline{F}}_{u_3}^i = \left(1 + \frac{h^2}{12R_1R_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \rho h \quad (2.2.10)$$

$$\underline{\underline{M}}_{\beta}^i = \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{3h^2}{20R_1R_2} \right) \frac{\partial^2 \vec{\theta}}{\partial t^2} \right] \frac{\rho h^3}{12}. \quad (2.2.11)$$

Les expressions de la loi de Hooke pour les tenseurs d'efforts $\underline{\underline{N}}$ et $\underline{\underline{M}}$ sont respectivement données par (2.1.4.3 - 4). La loi de Hooke pour le vecteur des efforts tranchants s'écrit:

$$\underline{\underline{Q}} = \frac{1}{2} h \mu (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}}^0) \cdot \underline{\underline{\Xi}} \cdot \vec{\varphi}. \quad (2.2.12)$$

Le vecteur des efforts tranchants peut s'exprimer en termes de déformations dans le cadre de cette théorie, ce qui est la conséquence directe de (2.2.5). La matrice:

$$\underline{\underline{\Xi}} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{bmatrix},$$

contient les facteurs de correction. En effet, les relations de la loi de Hooke écrites ci-dessus signifient que les efforts tranchants provoquent une déformation de la section droite ce qui n'est

pas le cas pour les théories d'ordre inférieur. Ceci est donc une amélioration par rapport à ces dernières. Cependant, la déformation ainsi décrite est constante le long de l'épaisseur de la coque ce qui en réalité n'est pas le cas. Les facteurs de correction figurent dans (2.2.12) afin que l'énergie de déformation due aux efforts \underline{Q} soit égale à celle de la véritable distribution de $\underline{\sigma}_n$ le long de l'épaisseur de la coque.

2.3 COQUES CYLINDRIQUES

Les coques cylindriques représentent un cas particulier des coques générales. Une coque cylindrique est esquissée dans la figure 2.2.

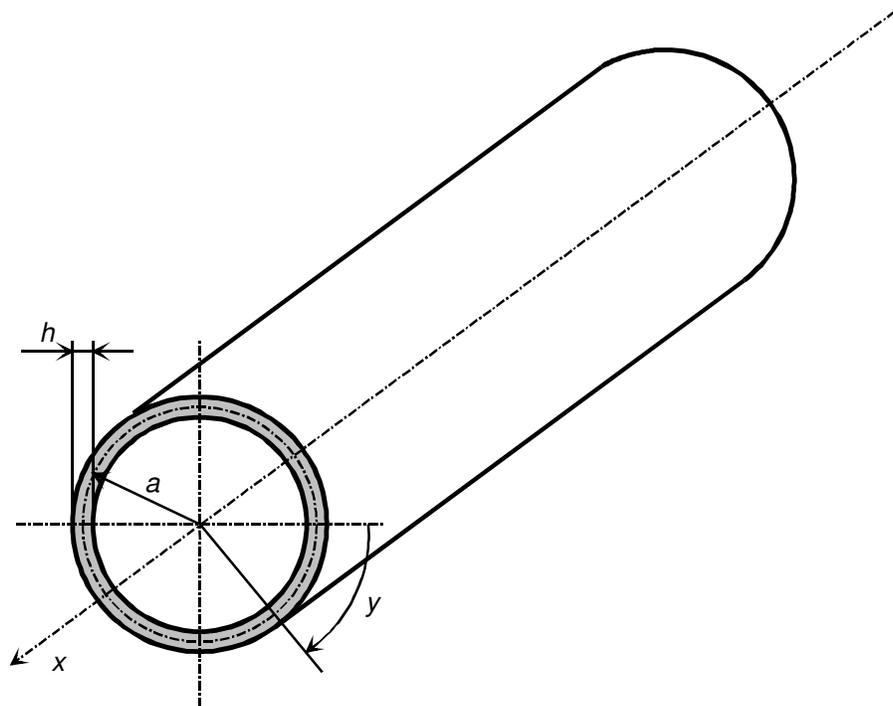


Figure 2.2: Coque cylindrique

Appliquons la notation classique des coques cylindriques. Celle employée pour les coques générales se transforme en:

$$i, j = 1, 2, 3 \rightarrow i, j = x, y, z$$

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \rightarrow x, y, z$$

$$\bar{u}(\xi_1, \xi_2) = \begin{Bmatrix} u_1(\xi_1, \xi_2) \\ u_2(\xi_1, \xi_2) \\ u_3(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} \rightarrow \bar{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} .$$

Les métriques de la surface médiane pour une coque cylindrique deviennent unitaires:

$$A_1 \rightarrow A_x = 1$$

$$A_2 \rightarrow A_y = 1 \quad .$$

Les rayons des courbures principales:

$$R_1 \rightarrow R_x = \infty$$

$$R_2 \rightarrow R_y = a \quad .$$

Nous introduisons aussi les coordonnées non-dimensionnelles ξ, η définies par:

$$\xi = \frac{x}{a}$$

$$\eta = \frac{y}{a} \quad .$$

L'opérateur de dérivation partielle devient ainsi:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{1}{a^{n+m}} \frac{\partial^{n+m}}{\partial \xi^n \partial \eta^m} \quad .$$

2.3.1 Théorie de Flügge

La théorie de Flügge [5] correspond à la théorie des coques générales exacte. Puisque cette dernière est donnée dans le paragraphe 2.2, il est inutile de réécrire les mêmes équations. Nous écrivons uniquement les équations d'équilibre mais en termes de déplacements (il est habituel de les écrire sous une telle forme lorsqu'il s'agit d'une théorie des coques cylindriques). Celles-ci sont données sous forme matricielle:

$$\underline{\underline{D}}^* \vec{u} = \vec{R} \quad , \quad (2.3.1.1)$$

où $\underline{\underline{D}}^*$ désigne la matrice des opérateurs différentiels, appelée aussi opérateur de Navier, agissant sur le vecteur des déplacement de la surface médiane:

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad .$$

Le vecteur \vec{R} contient les sollicitations surfaciques:

$$\vec{R} = \frac{a^2}{C} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_z \end{Bmatrix} \quad . \quad (2.3.1.2)$$

Les composantes de l'opérateur de Navier sont données par les expressions suivantes:

$$D_{11}^* = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} (1+\beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.3.1.3)$$

$$D_{12}^* = D_{21}^* = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (2.3.1.4)$$

$$D_{13}^* = D_{31}^* = \nu \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta^2 \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) \quad (2.3.1.5)$$

$$D_{22}^* = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2} (1+3\beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (2.3.1.6)$$

$$D_{23}^* = D_{32}^* = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{3-\nu}{2} \beta^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} . \quad (2.3.1.7)$$

$$D_{33}^* = 1 + \beta^2 + 2\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) + \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} . \quad (2.3.1.8)$$

Dans les équations précédentes, deux nouvelles grandeurs sont introduites. La première est la rigidité de tension C défini par:

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} , \quad (2.3.1.9)$$

où E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. Le facteur β^2 mesure le rapport entre l'épaisseur et le rayon médian de la coque cylindrique. Il est défini par:

$$\beta^2 = \frac{D}{a^2 C} = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 , \quad (2.3.1.10)$$

où D désigne la rigidité de flexion:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} . \quad (2.3.1.11)$$

2.3.2 Théorie de Donnell

La théorie de Donnell correspond à la théorie des coques générales dite simplifiée avec une hypothèse supplémentaire. Celle-ci consiste à définir le vecteur des rotations des sections droites par l'expression suivante:

$$\vec{\beta} = -\nabla_2 w , \quad (2.3.2.1)$$

ce qui veut dire que l'influence de la courbure est négligée. Les composantes de Navier s'écrivent alors [6]:

$$D_{11}^* = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (2.3.2.2)$$

$$D_{12}^* = D_{21}^* = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (2.3.2.3)$$

$$D_{13}^* = D_{31}^* = \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.3.2.4)$$

$$D_{22}^* = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.3.2.5)$$

$$D_{23}^* = D_{32}^* = \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.3.2.6)$$

$$D_{33}^* = 1 + \beta^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) + \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \quad (2.3.2.7)$$

2.3.3 Théorie de Flügge-Timoshenko

La théorie de Flügge-Timoshenko correspond à la théorie des coques générales d'ordre supérieur. Les équations d'équilibre en termes de déplacements sont donnée sous forme matricielle:

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}}^* = \underline{\underline{R}}^* ,$$

où $\underline{\underline{u}}^*$, $\underline{\underline{R}}^*$ s'écrivent:

$$\underline{\underline{u}}^* = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ r \\ s \end{Bmatrix} \quad \underline{\underline{R}}^* = \frac{a^2}{C} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

Les r et s désignent les déplacements résultant des rotations θ_x et θ_y :

$$r = a\theta_x \quad s = a\theta_y .$$

L'opérateur de Navier est donné par les expressions suivantes:

$$D_{11}^* = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} (1 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.3.3.1)$$

$$D_{12}^* = D_{21}^* = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (2.3.3.2)$$

$$D_{13}^* = D_{31}^* = \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.3.3.3)$$

$$D_{14}^* = D_{41}^* = \beta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \quad (2.3.3.4)$$

$$D_{15}^* = D_{51}^* = 0 \quad (2.3.3.5)$$

$$D_{22}^* = (1 + \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \zeta \frac{1-\nu}{2} (1 + \beta^2) - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.3.3.6)$$

$$D_{23}^* = D_{32}^* = \left[1 + \beta^2 + \zeta \frac{1-\nu}{2} (1 + \beta^2) \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.3.3.7)$$

$$D_{24}^* = D_{42}^* = 0 \quad (2.3.3.8)$$

$$D_{25}^* = D_{52}^* = \beta^2 \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \zeta \frac{1-\nu}{2} (1+\beta^2) - \beta^2 \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \quad (2.3.3.9)$$

$$D_{33}^* = 1 + \beta^2 - \zeta \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1+\beta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \quad (2.3.3.10)$$

$$D_{34}^* = D_{43}^* = -\zeta \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.3.3.11)$$

$$D_{35}^* = D_{53}^* = - \left[\beta^2 + \zeta \frac{1-\nu}{2} (1+\beta^2) \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.3.3.12)$$

$$D_{44}^* = \beta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) - \zeta \frac{1-\nu}{2} \quad (2.3.3.13)$$

$$D_{45}^* = D_{54}^* = \beta^2 \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (2.3.3.14)$$

$$D_{55}^* = \beta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \rho h \frac{a^2}{C} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) - \zeta \frac{1-\nu}{2} (1+\beta^2) . \quad (2.3.3.15)$$

Le facteur de correction:

$$\zeta = \frac{5}{6} ,$$

est obtenu en appliquant la théorie de Donnell. Puisque celle-ci ne prend pas en compte les effets de courbure au niveau des angles de rotations (vecteur $\vec{\beta}$), le facteur de correction est le même que celui pour les plaques.

2.4 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **C. L. Dym:** “Introduction to the theory of shells”, 1974 Pergamon Press
2. **L. E. Malvern:** “Introduction to the mechanics of a continuous medium”, 1969 Prentice-Hall, Inc.
3. **V. Z. Parton, P. I. Perlin:** “Mathematical methods of the theory of elasticity, Volume 1”, 1984 English translation, MIR Publishers
4. **R. D. Mindlin:** “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates”, Journal of Applied Mechanics, March 1951
5. **W. Flügge:** “Stresses in shells”, 1973 Springer-Verlag New York
6. **A. W. Leissa:** “Vibration of shells”, 1973 NASA SP-288

3 ONDES ELASTIQUES ET ACOUSTIQUES DANS LES TUYAUX

Deux types d'ondes se propagent dans un tuyau: des ondes élastiques dans la paroi et acoustiques dans le fluide à l'intérieur. Au début, ces phénomènes étaient étudiés séparément. Ainsi, la propagation des ondes acoustiques dans une conduite à section circulaire représente un problème classique de l'acoustique physique traité dans de nombreux ouvrages. Nous en citons deux: le livre classique de Morse et Ingard [1], en langue de Shakespeare et celui de Bruneau en langue de Molière [2]. Dans les deux références citées, la propagation des ondes acoustiques est essentiellement traitée dans l'hypothèse où la paroi est considérée rigide. Cependant, Morse et Ingard [1] commentent le cas d'une paroi non-rigide, modélisée par une impédance a priori inconnue.

Les vibrations des coques cylindriques vides sont traitées dans plusieurs ouvrages. Celui de Leissa [3] est une référence classique dans le domaine. Leissa passe en revue plusieurs théories des coques cylindriques en donnant pour chacune son opérateur différentiel \underline{D}^* . Cependant, il n'évoque pas de méthodes pour le calcul. Ceci est fait par Soedel [4] qui expose tout un ensemble de méthodes pour le calcul: méthodes analytiques, des éléments finis, fonction de Green. Leur démonstration est faite sur un nombre de théories des coques assez restreint. Pourtant, ni l'un ni l'autre ne traite d'une manière explicite le problème de la propagation des ondes élastiques dans les coques cylindriques. Fuller [5] le fait pour une coque cylindrique vide. Il se sert de la théorie de Donnell pour étudier l'influence des discontinuités de la paroi sur la propagation des ondes de flexion. Fuller et Fahy [6] étudient le problème couplé (coque cylindrique rempli d'un fluide acoustique) en utilisant la théorie de Flügge. Ils supposent que le fluide à l'intérieur de la coque cylindrique est au repos. L'influence de l'écoulement du fluide dans le tuyau est prise en compte par Brévar et Fuller [7]. Pour les fluides lourds, d'après [7], l'effet de l'écoulement est négligeable lorsque sa vitesse est basse (c'est à dire pour le nombre de Mach inférieur à 0.01).

Des connaissances approfondies sur la propagation des ondes élastiques et acoustiques dans un tuyau sont nécessaires pour atteindre l'objectif de cette étude. Ce chapitre présente l'étude de ce phénomène. Les aspects mathématiques (établissement de la relation de dispersion et sa solution) sont présentés dans le paragraphe 3.1. Les paragraphes 3.2, 3.3 et 3.4 contiennent les discussions des résultats de la relation de dispersion pour les cas de figure suivants:

- tuyau vide
- tuyau rempli d'un fluide léger
- tuyau rempli d'un fluide lourd.

Ces résultats sont obtenus en utilisant la théorie de Flügge. Le problème de la propagation des ondes élastiques aux fréquences élevées tout en prenant en compte les effets d'inertie rotationnelle et de cisaillement, ce qui représente une certaine nouveauté, est présenté dans le paragraphe 3.5.

Il convient de remarquer que les aspects énergétiques de la propagation des ondes élastiques et acoustiques dans le tuyau ne sont pas traités dans ce chapitre. Ce sera le sujet du chapitre suivant.

3.1 RELATION DE DISPERSION

Dans l'hypothèse où les ondes élastiques se propagent dans le sens axial du tuyau, le vecteur de déplacement ondulatoire \vec{u} de la surface médiane de la paroi de tuyau s'écrit [5]:

$$\vec{u}(\xi, \eta, t) = \begin{cases} \hat{u} \cos(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha t - \pi/2)} \\ \hat{v} \sin(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha t)} \\ \hat{w} \cos(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha t)} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les grandeurs \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} désignent les amplitudes complexes des déplacements ondulatoires de la paroi; χ désigne le nombre d'onde non-dimensionnel donné par l'expression suivante:

$$\chi = k_c a ,$$

où k_c , et a désignent respectivement le nombre d'onde et le rayon médian de tuyau; par ω est notée la pulsation. Etant donné que la section droite de tuyau a la forme d'un cercle, le vecteur de déplacement \vec{u} est une fonction périodique de η dont la période est de 2π . Celui-ci admet le développement en série de Fourier dont les harmoniques sont notées par n . Dans l'analyse vibratoire des coque cylindriques, il est habituel d'employer le terme « *mode circonférentiel* » pour une harmonique n , ce qui est retenu dans cette étude.

L'application de l'opérateur $\underline{\underline{D}}^*$ de Flügge, éq. (2.3.1.3 - 8), au vecteur de déplacement \vec{u} donne l'équation algébrique matricielle suivante pour le cas d'un tuyau vide en absence de sources:

$$\underline{\underline{L}} \cdot \hat{u} = \underline{0} , \quad (3.1.1)$$

où \hat{u} désigne le vecteur des amplitudes complexes de déplacements:

$$\hat{u} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} . \quad (3.1.2)$$

La matrice $\underline{\underline{L}}$ dite « *matrice du nombre d'onde* » contient les composantes suivantes lorsqu'il s'agit de la théorie de Flügge [6]:

$$L_{11} = \chi^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+\beta^2)n^2 - \Omega^2 \quad (3.1.3)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2}n\chi \quad (3.1.4)$$

$$L_{13} = L_{31} = \nu\chi - \beta^2 \left(\frac{1-\nu}{2}n^2 - \chi^2 \right) \chi \quad (3.1.5)$$

$$L_{22} = n^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+3\beta^2)\chi^2 - \Omega^2 \quad (3.1.6)$$

$$L_{23} = L_{32} = n + \frac{3-\nu}{2}\beta^2 n \chi^2 \quad (3.1.7)$$

$$L_{33} = 1 + \beta^2 - 2\beta^2 n^2 + \beta^2 (n^2 + \chi^2)^2 - \Omega^2 . \quad (3.1.8)$$

Pour la théorie de Donnell, les composantes de \underline{L} prennent la forme suivante [5]:

$$L_{11} = \chi^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - \Omega^2 \quad (3.1.9)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} n\chi \quad (3.1.10)$$

$$L_{13} = L_{31} = \nu\chi \quad (3.1.11)$$

$$L_{22} = n^2 + \frac{1-\nu}{2} \chi^2 - \Omega^2 \quad (3.1.12)$$

$$L_{23} = L_{32} = n \quad (3.1.13)$$

$$L_{33} = 1 + \beta^2 (n^2 + \chi^2)^2 - \Omega^2 \quad (3.1.14)$$

Dans les expressions précédentes, Ω désigne la pulsation non-dimensionnelle définie par l'expression suivante:

$$\Omega = a \frac{\omega}{c_L} = a \frac{\omega}{\sqrt{\frac{E}{\rho_c(1-\nu^2)}}} \quad (3.1.15)$$

où la grandeur c_L dénote la célérité des ondes longitudinales dans la plaque [8]. La condition pour la solution non-triviale de (3.1.1):

$$\det(\underline{L}) = P_4(\chi^2) = 0 \quad (3.1.16)$$

représente en fait la relation de dispersion des ondes élastiques dans la paroi de tuyau. Dans ce cas précis (c'est à dire pour le tuyau vide) c'est un polynôme d'ordre 4 en χ^2 . Une fois que la relation de dispersion (3.1.16) est résolue pour χ , il est possible de calculer les rapports entre les amplitudes complexes de déplacements, définis comme:

$$\Gamma^u = \frac{\hat{u}}{\hat{w}} \quad (3.1.17)$$

$$\Gamma^v = \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \quad (3.1.18)$$

à partir de l'équation suivante:

$$\begin{bmatrix} L_{11}(\chi, n, \Omega) & L_{12}(\chi, n, \Omega) \\ L_{21}(\chi, n, \Omega) & L_{22}(\chi, n, \Omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma^u \\ \Gamma^v \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} L_{13}(\chi, n, \Omega) \\ L_{23}(\chi, n, \Omega) \end{Bmatrix} \quad (3.1.19)$$

Le nombre d'ondes χ obtenu par la solution de (3.1.16) est, dans le cas général, un nombre complexe. Il est donc utile de connaître les fréquences de coupure. Celles-ci peuvent être déterminées à partir de l'équation suivante:

$$\det(\underline{\Lambda}) = 0, \quad (3.1.20)$$

où la matrice $\underline{\Lambda}$ dite « *matrice de la pulsation non-dimensionnelle* », est donnée par l'identité suivante:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{L}}|_{x=0}. \quad (3.1.21)$$

Les composantes de $\underline{\underline{\Lambda}}$ sont données en fonction de la théorie choisie. Celles valides pour la théorie de Flügge s'écrivent:

$$\Lambda_{11} = \frac{1-\nu}{2}(1+\beta^2)n^2 - \Omega^2 \quad (3.1.22)$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \Lambda_{13} = \Lambda_{31} = 0 \quad (3.1.23)$$

$$\Lambda_{22} = n^2 - \Omega^2 \quad (3.1.24)$$

$$\Lambda_{23} = \Lambda_{32} = n \quad (3.1.25)$$

$$\Lambda_{33} = 1 + \beta^2 - 2\beta^2 n^2 + \beta^2 n^4 - \Omega^2. \quad (3.1.26)$$

La théorie de Donnell donne les expressions suivantes:

$$\Lambda_{11} = \frac{1-\nu}{2}n^2 - \Omega^2 \quad (3.1.27)$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \Lambda_{13} = \Lambda_{31} = 0 \quad (3.1.28)$$

$$\Lambda_{22} = n^2 - \Omega^2 \quad (3.1.29)$$

$$\Lambda_{23} = \Lambda_{32} = n \quad (3.1.30)$$

$$\Lambda_{33} = 1 + \beta^2 n^4 - \Omega^2. \quad (3.1.31)$$

Lorsque un fluide acoustique remplit l'intérieur du tuyau, le repère dans lequel les phénomènes acoustiques sont étudiés s'impose lui-même. Il s'agit du repère tridimensionnel parcouru par les coordonnées cylindriques: r , la coordonnée radiale; η celle angulaire; x , celle axiale. L'équation d'ondes acoustiques en termes de pression, dans l'hypothèse où il n'y a ni de sources ni d'écoulement dans le tuyau, s'écrit [1]:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_f} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1.32)$$

où c_f désigne la célérité des ondes acoustiques dans le fluide. La vitesse des particules de fluide est liée avec la pression acoustique par l'équation suivante [1]:

$$\rho_f \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} = -\nabla p, \quad (3.1.33)$$

ρ_f désignant la densité du fluide. La pression acoustique dans le tuyau, satisfaisant (3.1.32), s'écrit [1]:

$$p(r, \eta, x) = \hat{p} J_n(k_f^r r) \cos(n\eta) e^{i(k_f^x x + \omega t)}, \quad (3.1.34)$$

où \hat{p} désigne l'amplitude complexe de la pression; J_n désigne la fonction de Bessel d'ordre n ; k_f^r , k_f^x désignent respectivement le nombre d'onde radial et axial. La relation de dispersion pour le fluide relie k_f^r avec k_f^x de la manière suivante [1]:

$$\sqrt{k_f^{r^2} + k_f^{x^2}} = \frac{\omega}{c_f} . \quad (3.1.35)$$

La modélisation du couplage entre le fluide et la paroi à pour base la condition d'imperméabilité. Celle-ci impose que la vitesse radiale dans le fluide soit égale à la vitesse normale de la paroi au point de leur contact:

$$i\omega w(\xi, \eta, t) = v_f^r(r, \eta, x, t) \Big|_{r=a-\frac{h}{2}} . \quad (3.1.36)$$

Il s'ensuit que les ondes acoustiques dans le fluide et élastiques dans la paroi doivent se propager à la même vitesse de phase. Leurs nombres d'ondes axiaux sont donc identiques:

$$k_c = k_f^x .$$

A partir des (3.1.33) et (3.1.36), il est possible de relier les amplitudes de la pression acoustique à celles du déplacement normal de la paroi. La relation correspondante s'écrit:

$$\hat{p} = i\omega Z_a \hat{w} , \quad (3.1.37)$$

avec l'impédance de la paroi Z_a donnée par:

$$Z_a = -i \frac{a\omega\rho_f J_n'(\kappa)}{\kappa J_n(\kappa)} , \quad \kappa = k_f^r a . \quad (3.1.38)$$

Lorsque le tuyau est rempli d'un fluide acoustique, le vecteur des sollicitations surfaciques n'est plus nul comme c'est le cas pour un tuyau vide. La pression acoustique représente une sollicitation interne sur la paroi. Du fait que cette pression peut s'exprimer à l'aide du déplacement normal w , la composante L_{33} de la matrice du nombre d'onde subit la modification suivante:

$$L_{33}^f = L_{33} - F_{cp} , \quad (3.1.39)$$

où F_{cp} désigne le terme de la charge de fluide [6]:

$$F_{cp} = \Omega^2 \frac{\rho_f}{\rho_c} \frac{a}{h} \frac{1}{\kappa} \frac{J_n'(\kappa)}{J_n(\kappa)} . \quad (3.1.40)$$

Equation (3.1.35) peut aussi être écrite sous la forme suivante [6]:

$$\sqrt{\chi^2 + \kappa^2} = \Omega \frac{c_L}{c_f} . \quad (3.1.41)$$

Evidemment, la composante Λ_{33} de la matrice de la pulsation non-dimensionnelle est aussi modifiée:

$$\Lambda_{33}^f = \Lambda_{33} - G_{cp} , \quad (3.1.42)$$

où le terme de la charge de fluide G_{cp} s'écrit:

$$G_{cp} = \Omega^2 \frac{\rho_f}{\rho_c} \frac{a}{h} \frac{1}{\kappa_0} \frac{J_n'(\kappa_0)}{J_n(\kappa_0)} , \quad \kappa_0 = \Omega \frac{c_L}{c_f} . \quad (3.1.43)$$

Pour trouver les racines complexes de la relation de dispersion d'un tuyau vide (éq. (3.1.16)), la méthode de Bairstowe [9] est utilisée dans cette étude. La relation de dispersion pour le problème couplé (tuyau rempli d'un fluide acoustique) est donnée par (3.1.16) et (3.1.41) avec la

modification de la composante L_{33} selon (3.1.39). Dans ce cas-là, les racines sont trouvées en utilisant une méthode d'intégration dans le plan complexe [10].

Toutes les relations données dans ce paragraphe, portent sur le cas des théories des coques cylindriques d'ordre inférieur, en l'occurrence les théories de Flugge et Donnell. La théorie de Flugge-Timoshenko est traitée dans l'annexe 2.

3.2 TUYAUX VIDES

Les commentaires sur la propagation des ondes élastiques, donnés dans ce paragraphe, portent sur la théorie de Flugge parce que celle-ci modélise mieux l'influence de courbure que la théorie de Donnell. Etant donné que la théorie de Flugge appartient à la famille des théories d'ordre inférieur, ses défauts seront mis en évidence.

Dans un tuyau vide, pour chaque mode circonférentiel, il n'y a que quatre paires d'ondes se propageant dans le sens axial. Ces ondes peuvent être réparties en trois groupes:

- les ondes dites « *libres* » (leurs nombres d'ondes sont réels)
- les ondes dites « *évanescentes* » (leurs nombres d'ondes sont purement imaginaires)
- les ondes dites « *atténuées* » (leurs nombres d'ondes sont complexes)

L'évolution des nombres d'ondes en fonction de la fréquence est illustrée par les courbes de dispersion. Celles-ci sont tracées pour un tuyau en aluminium dont le diamètre externe est de 60 [mm] et l'épaisseur de 2 [mm]. Chaque courbe de dispersion, valide pour le mode circonférentiel donné, est donc composée de quatre branches dont chacune est associée à une onde élastique se propageant dans le sens axial positif.

3.2.1 Mode respiratoire

Le mode circonférentiel fondamental ($n = 0$) est appelé « *mode respiratoire* ». Il représente un cas particulier parce que le déplacement v n'est pas couplé avec u et w . La déformation de la section droite de tuyau est esquissée dans la figure 3.1. La trace de la courbe de dispersion en fonction de la pulsation non-dimensionnelle Ω est donnée dans la figure 3.2.

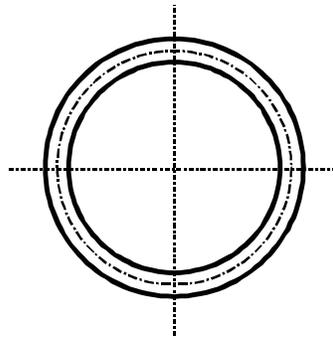


Figure 3.1: Déformation de la section droite pour le mode respiratoire

La branche P_1 , réelle de la fréquence zéro, est associée aux ondes de torsion. Elle croit d'une manière linéaire en fonction de la fréquence, ce qui signifie que le tuyau est un milieu non-dispersif pour ce type d'ondes.

La branche P_2 , réelle aussi dès la fréquence zéro, est associée aux ondes dites « *quasi-longitudinales* ». Aux basses fréquences, elle croit d'une manière quasiment linéaire. Sa pente y est faible, par conséquent il s'agit des ondes dont la célérité de groupe est forte, nous disons qu'il s'agit des ondes « *rapides* ». Il est possible de les assimiler aux ondes élastiques longitudinales

dans une barre d'autant plus que le déplacement axial u est très supérieur au déplacement normal w . La branche croit brutalement autour de $\Omega \approx 0.9$, ce qui indique le passage par la fréquence d'anneau. Aux fréquences supérieures, la pente de la branche se stabilise. Le déplacement w devient prépondérant, les ondes associées à la branche étant plus « lentes ».

Les branches P_3 et P_4 sont complexes aux basses fréquences, leur partie imaginaire étant grande. Elles créent un champ proche de très courte portée axiale et sont associées aux ondes atténuées. Autour de $\Omega \approx 0.9$ ces branches deviennent purement imaginaires. Ceci signifie qu'elles sont associées aux ondes évanescentes. La branche P_3 reste imaginaire dans un intervalle fréquentiel étroit parce qu'elle coupe l'axe des fréquences autour de $\Omega \approx 1$, devenant ainsi réelle. Dans le plan des nombres d'ondes réels, sa pente est quasiment constante. Le déplacement u domine largement le déplacement w . Dans sa section réelle, la branche P_3 s'approche asymptotiquement de la courbe de dispersion pour les ondes longitudinales dans une barre. Cette particularité nécessite une explication plus détaillée. On est intuitivement tenté de rapprocher le comportement vibratoire du mode respiratoire aux vibrations axiales d'une barre. La courbe de dispersion de ce mode nous enseigne que ceci est effectivement possible dans toute la gamme fréquentielle sauf dans l'intervalle autour de la fréquence d'anneau. Pour les fréquences inférieures à celle-ci, le rapprochement est possible grâce à la branche P_2 , pour celles supérieures grâce à la branche P_3 . Cependant, autour de la fréquence d'anneau, le comportement vibratoire d'une coque cylindrique et d'une barre est profondément différent.

Une fois imaginaire, la branche P_4 reste ainsi pour toutes les fréquences supérieures. Ceci illustre le défaut des théories d'ordre inférieur car il n'y a aucune raison physique pour un tel comportement. Par intuition, on s'attend à ce que toute branche devienne propagatrice aux fréquences élevées. Ce défaut est dû à l'hypothèse selon laquelle l'inertie de rotation et les effets de cisaillement dont les influences sont importantes aux hautes fréquences, peuvent être négligées.

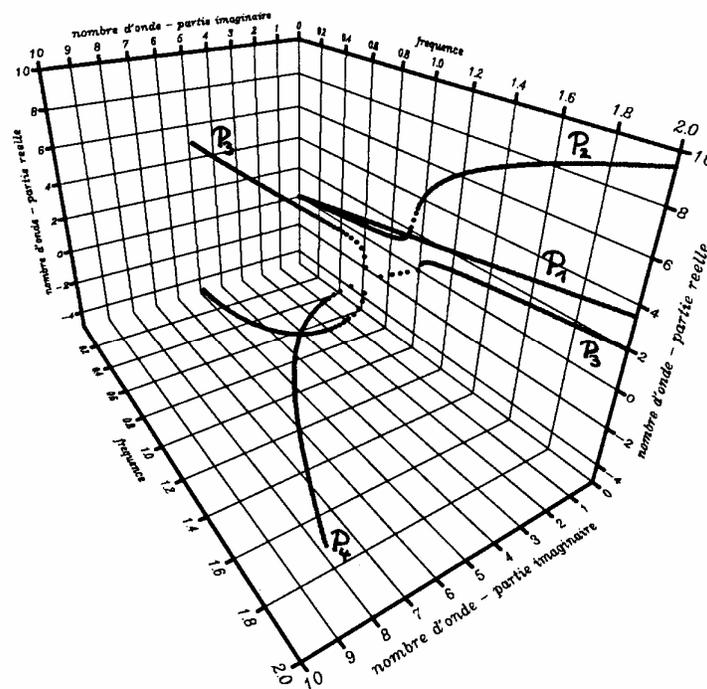


Figure 3.2: Courbe de dispersion pour le mode respiratoire, tuyau vide en aluminium

Il convient de remarquer que les ondes atténuées (associées aux branches P_3 et P_4 lorsque celles-ci sont complexes) créent ensemble une onde stationnaire évanescente. Ceci sera démontré dans le chapitre suivant où nous traitons l'aspect énergétique de la propagation des ondes élastiques dans le tuyau.

3.2.2 Mode de flexion

Le mode circonférentiel d'ordre 1 ($n = 1$) est appelé « *mode de flexion* ». La déformation de la section droite de tuyau, associée à ce mode, est esquissée dans la figure 3.3. La trace de la courbe de dispersion en fonction de la pulsation non-dimensionnelle, est donnée dans la figure 3.4.

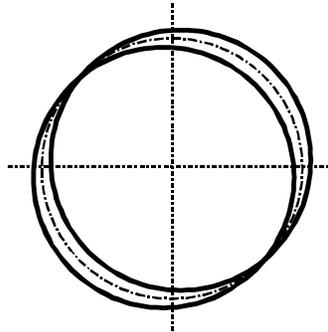


Figure 3.3: Déformation de la section droite pour le mode de flexion

La branche P_1 , réelle de la fréquence zéro, est associée aux ondes de « *quasi-flexion* ». Aux basses fréquences, elle peut être assimilée à la courbe de dispersion des ondes libres de flexion dans une poutre. Pour cette partie de la branche, les déplacements v et w sont de la même importance, tandis que u leur est inférieur. Pour $\Omega = [0.7, 1.1]$, la branche P_1 croît rapidement pour se stabiliser ensuite. Dans cet intervalle, le déplacement u change de signe tout en restant très inférieur à w . Le rapport entre v et w s'approche de zéro, le déplacement w devient prédominant.

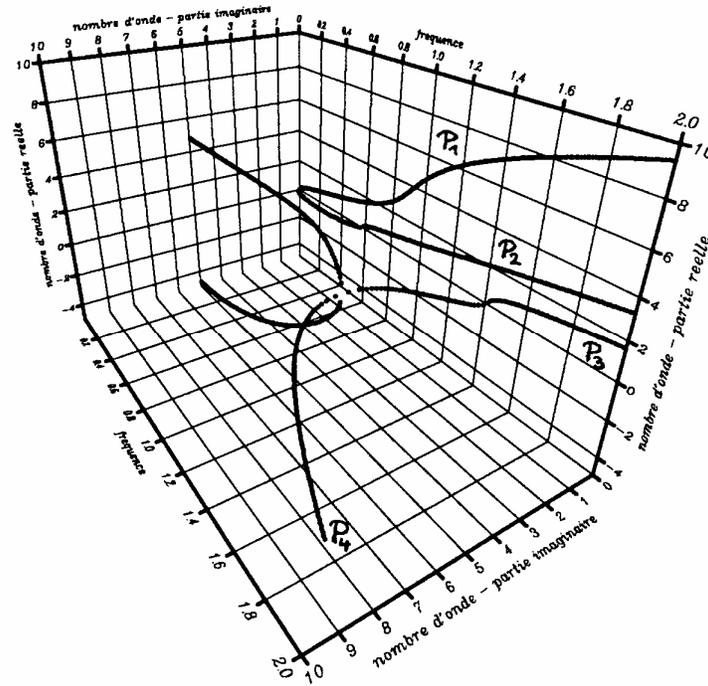


Figure 3.4: Courbe de dispersion pour le mode de flexion, tuyau vide en aluminium

La branche P_2 est imaginaire aux basses fréquences. Là, elle peut être assimilée aux ondes évanescentes de flexion dans une poutre. La branche coupe l'axe des fréquences pour $\Omega \approx 0.6$ puis croît modérément dans le plan des nombres d'ondes réels, les déplacements dans le plan u et v étant très supérieur à w .

Les branches P_3 et P_4 , complexes aux basses fréquences, créent là un champ proche de courte portée axiale. Leur comportement pour les fréquences élevées est similaire à celui des mêmes branches du mode respiratoire.

3.2.3 Mode lobaires

Les modes circonférentiels d'ordre égal ou supérieur à deux ($n \geq 2$) sont appelés « modes lobaires ». Nous allons commenter leur comportement sur l'exemple du mode lobaire 2. La déformation de la section droite pour celui-ci est esquissée dans la figure 3.5.

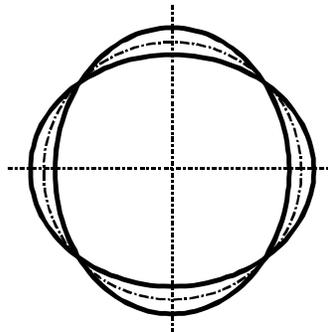


Figure 3.5: Déformation de la section droite pour le mode lobaire 2

La courbe de dispersion pour le mode lobaire 2 est donnée dans la figure 3.6.

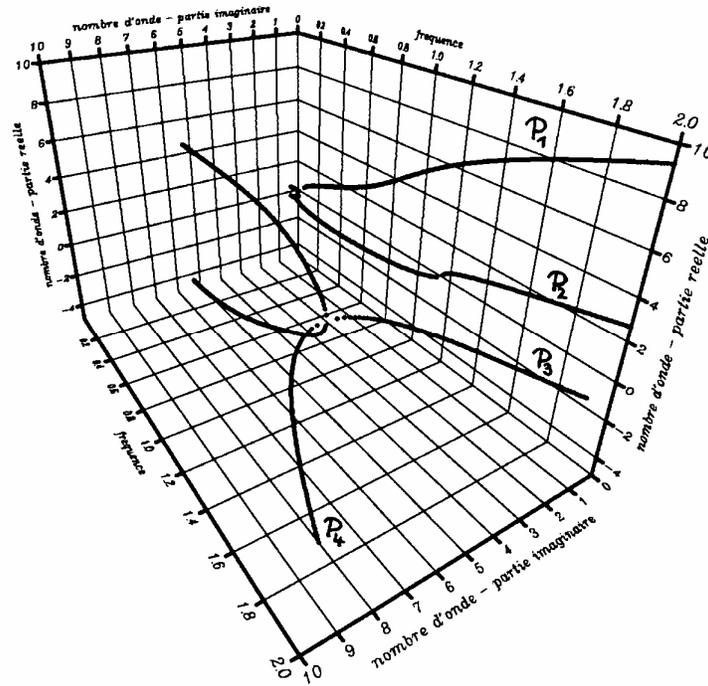


Figure 3.6: Courbe de dispersion pour le mode lobaire 2, tuyau vide en aluminium

Les branches P_1 et P_2 sont d'abord complexes aux très basses fréquences pour devenir ensuite imaginaires. La branche P_1 , reste imaginaire dans un intervalle fréquentiel extrêmement étroit et devient réelle. Dans le plan des nombres d'ondes réels, la branche affiche un comportement plus régulier que la branche P_1 du mode de flexion.

La branche P_2 est, dans sa partie imaginaire, associée aux ondes évanescentes. Une fois réelle (pour les fréquences supérieure à $\Omega \approx 1.1$), sa pente reste inférieure à celle de la branche P_1 . Il s'ensuit que la branche P_2 est associée aux ondes plus rapides que celles associées à la branche P_1 . Ceci est confirmé par les rapports entre les déplacements. Pour la branche P_2 les déplacements dans le plan, u et v , sont supérieurs au déplacement normal w . En ce qui concerne la branche P_1 , le déplacement w est prépondérant aux fréquences élevées, par conséquent les ondes associées deviennent plus lentes. Les branches P_3 et P_4 affichent le comportement similaire à celui des mêmes branches du mode de flexion.

3.2.4 Basses fréquences

Dans la figure 3.7 sont présentées les branches des ondes libres des premiers deux modes circonférentiels en fonction de la fréquence physique (en [Hz]). L'indication $kx0$ sur l'axe des ordonnées porte sur le nombre d'onde non-dimensionnel. Les courbes sont données pour les fréquences inférieures à la première fréquence de coupure du mode lobaire 2.

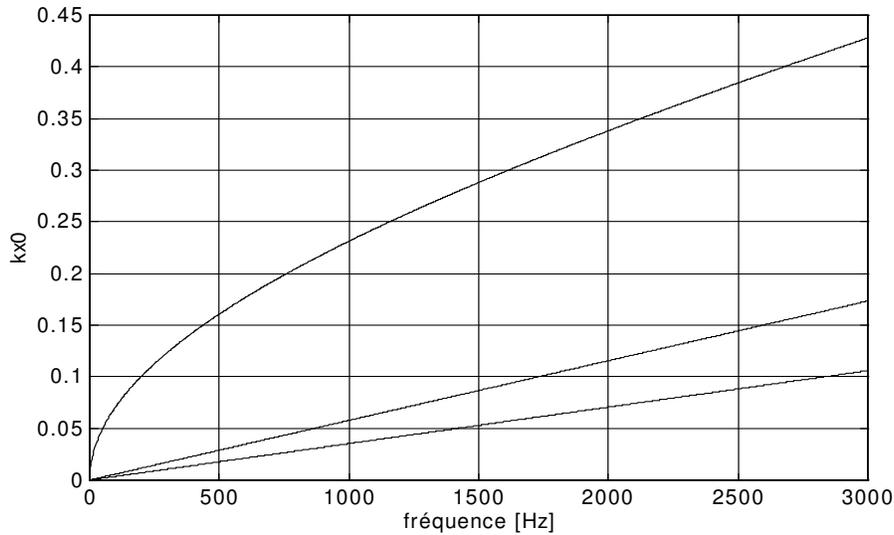


Figure 3.7: Courbe de dispersion des ondes libres aux basses fréquences: mode respiratoire, branche P₁ (trait mixte), branche P₂ (trait interrompu); mode de flexion, branche P₁ (trait continu)

Les courbes de dispersion pour les ondes libres de quasi-flexion (mode de flexion, branche P₁) et pour celles de flexion de type poutre sont présentées dans la figure 3.8 (l'indication $kx0$ sur l'axe des ordonnées porte sur le nombre d'onde non-dimensionnel). La dérive de la courbe relative à la poutre est due au fait que l'équation d'ondes de flexion (obtenue en l'occurrence par la théorie de Bernoulli) ne couple pas le déplacement axial u aux déplacements transversaux v , w . En conséquence, la théorie des poutres appliquée à un tuyau rend celui-ci plus rigide qu'il ne l'est réellement. Les graphiques pour les rapports entre les déplacements tangentiels u et v et le déplacement normal w sont présentés dans la figure 3.9.

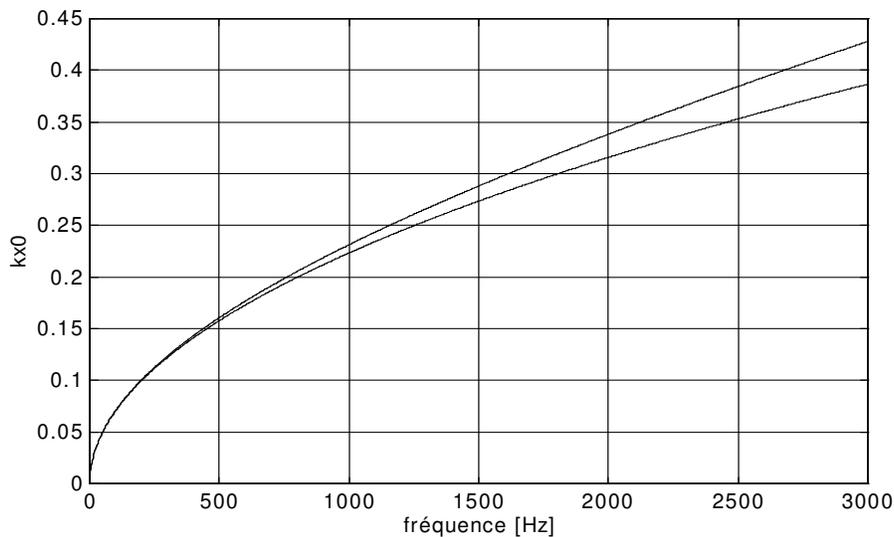


Figure 3.8: Courbes de dispersion: branche P₁ du mode de flexion pour le tuyau vide (trait continu), ondes de flexion selon la théorie des poutres (trait interrompu)

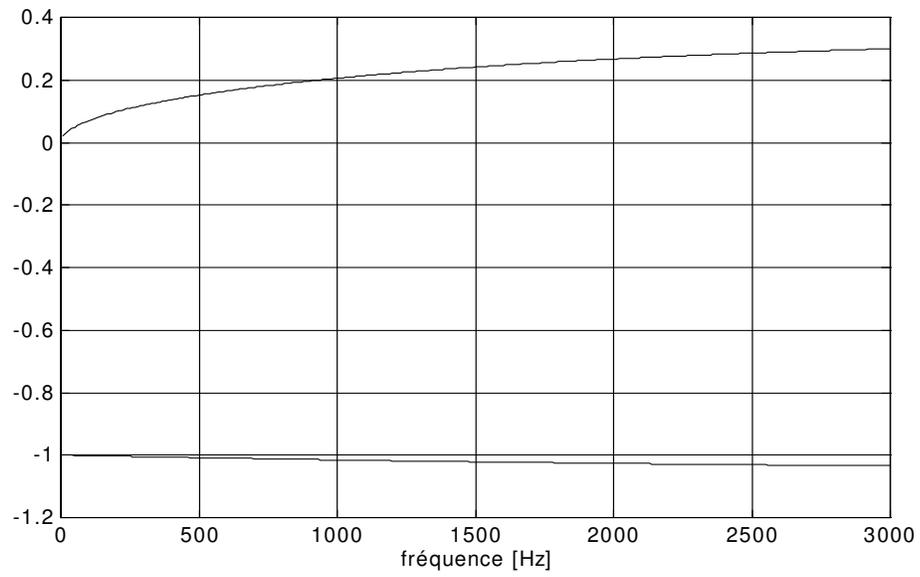


Figure 3.9: *Rapports entre les déplacements u et w (trait interrompu) et les déplacement v et w (trait continu) dans le tuyau vide pour le mode de flexion*

3.3 TUYAUX REMPLIS D'UN FLUIDE LEGER

Dans la pratique, les tuyaux ne sont jamais vides car il servent à véhiculer des fluides. Le fluide véhiculé peut être classifié comme étant lourd ou léger. Cette classification est fondée sur le rapport $\rho_f a / \rho_c h$ (voir (3.1.40)). Un fluide est dénommé léger si ce rapport est très inférieur à 1. Les gaz appartiennent à cette catégorie de fluides. Dans le cas contraire, le fluide est dénommé lourd. Les liquides (par exemple l'eau ou l'huile) dont la densité est presque du même ordre de grandeur que celle de la paroi appartiennent à la famille des fluides lourds.

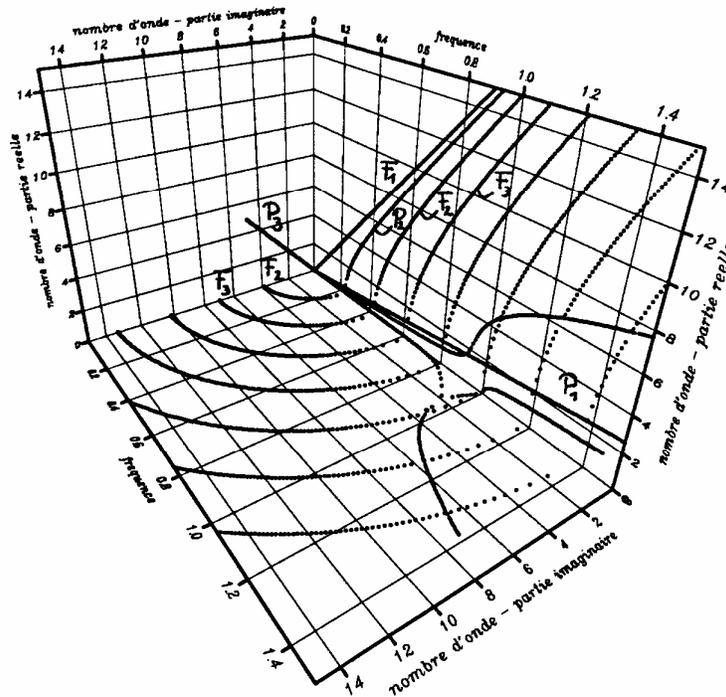


Figure 3.10: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en aluminium rempli d'air

Le tuyau, rempli d'un fluide acoustique, représente un système couplé. Celui-ci se compose de deux milieux: l'un élastique (la paroi du tuyau), l'autre acoustique (le fluide à l'intérieur du tuyau). A chaque onde élastique, se propageant dans la paroi, correspond une onde acoustique, les deux ayant le même nombre d'ondes axial. Les branches des courbes de dispersion présentées dans la suite de l'exposé sont séparées en deux groupes. Le premier rassemble les branches qui seraient associées aux ondes élastiques dans la paroi si le tuyau restait vide. Ces branches sont désignées par « P ». Le deuxième groupe est composé des branches qui seraient associées aux ondes acoustiques si la paroi était rigide (on les dénote par « F »).

Lorsque le tuyau est rempli d'un fluide léger, le couplage entre le fluide et la paroi est très faible. Nous démontrons ceci sur l'exemple d'un tuyau en aluminium rempli d'air (les courbes tracées sont calculées pour le tuyau de diamètre externe de 60 [mm] et de l'épaisseur de paroi de 2 [mm]).

La courbe de dispersion pour le mode respiratoire est tracée dans la figure 3.10. La branche F_1 , réelle dès la fréquence zéro, est assimilable aux ondes acoustiques planes dans une conduite à paroi rigide. Pour cette branche, l'effet de couplage se manifeste de telle façon que l'amplitude de pression augmente légèrement en s'approchant de la paroi (le nombre d'ondes radial k_r^f est

imaginaire pour cette branche). Aux basses fréquences, les ondes associées à la branche F_1 sont quasiment planes, k_r^f étant très petit.

La branche P_1 , associée aux ondes de torsion, ne possède aucun correspondant au niveau des ondes acoustiques. Le comportement de la branche P_2 , réelle dès la fréquence zéro, est plus complexe que dans le cas d'un tuyau vide. D'abord, elle suit l'allure de la branche P_2 d'un tuyau vide (voir figure 3.11) ensuite, vers $\Omega \approx 0.23$, elle s'écarte brusquement de la branche F_2 .

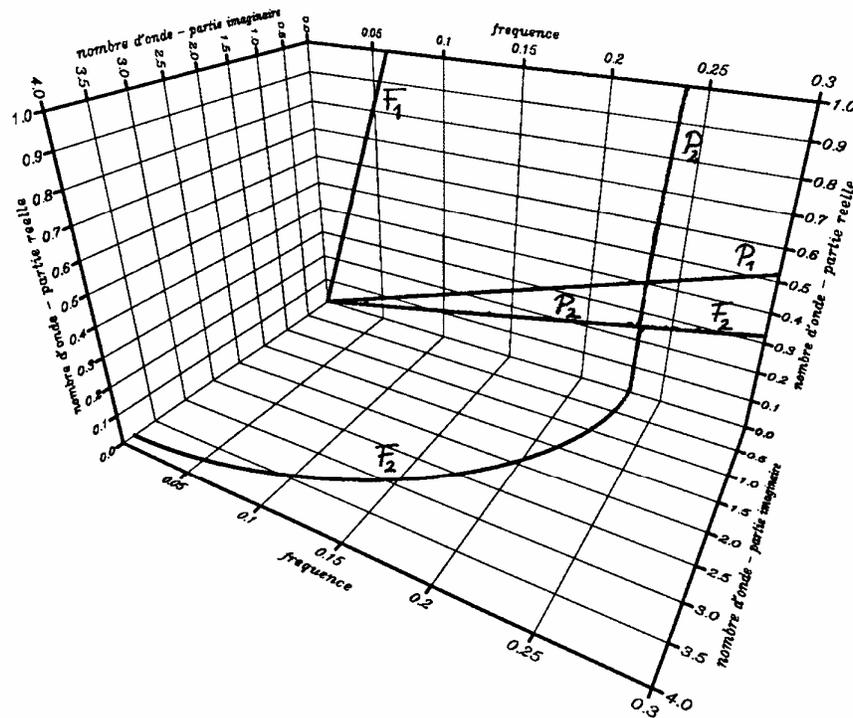


Figure 3.11: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en aluminium rempli d'air, basses fréquences

Les branches P_2 et F_2 ne se coupent pas dans le plan des nombres d'ondes réels bien que la figure 3.11 laisse une telle impression (en fait la résolution fréquentielle du graphique est insuffisamment fine). Les branches se rapprochent très près l'une de l'autre avant de s'écarter. La branche P_2 croit ensuite rapidement (ondes lentes) tandis que la branche F_2 suit asymptotiquement la branche associée aux ondes élastiques quasi-longitudinales dans un tuyau vide. Le même phénomène de rapprochement sans intersection dans le plan des nombres d'ondes réels se produit entre les branches F_2 et F_3 . Ainsi, la branche des ondes quasi-longitudinales est constituée par sections car les branches P_i , $i > 1$ et F_j , $j > 1$ ne se coupent jamais dans le plan des nombres d'ondes réels.

A titre qualitatif, la courbe de dispersion du tuyau rempli d'un fluide léger peut être assimilée à la superposition entre la courbe de dispersion du tuyau vide (ondes élastiques) et la courbe de dispersion des ondes acoustiques dans une conduite à section circulaire. Les effets de couplage entre la paroi et le fluide se manifestent à deux niveaux:

- les valeurs des nombres d'ondes sont légèrement modifiées car le couplage est faible;
- les branches P et F ne se coupent pas, la branche de torsion P_1 mise à part parce que celle-ci coupe les branches P_2 , P_3 et toutes les branches F.

3.4 TUYAUX REMPLIS D'UN FLUIDE LOURD

Lorsque le tuyau est rempli d'un fluide lourd, l'interaction entre le fluide et la paroi est beaucoup plus importante que dans le cas d'un fluide léger. La courbe de dispersion se compose, comme dans le cas d'un fluide léger, de quatre branches P et d'une multitude des branches F. Dans cette étude, nous présentons les courbes de dispersion d'un tuyau en aluminium rempli d'eau. Les caractéristiques géométriques de tuyau sont les mêmes que celles du tuyau traité dans le paragraphe précédent.

3.4.1 Mode respiratoire

La courbe de dispersion en fonction de la pulsation non-dimensionnelle est donnée dans la figure (3.12).

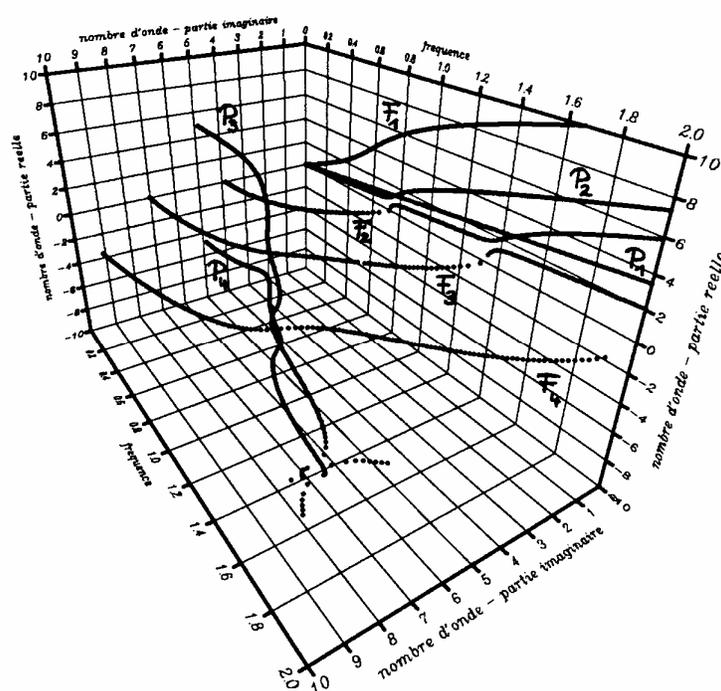


Figure 3.12: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en aluminium rempli d'eau

La branche P_1 est associée aux ondes de torsion, qui, par rapport au cas du tuyau vide, ne changent point leur comportement. Elle n'a pas de correspondant au niveau des ondes acoustiques parce que le fluide est modélisé comme étant non-visqueux. L'allure de la branche P_2 est assimilable à celle du tuyau vide. La comparaison entre les branches P_2 pour les tuyaux vide et rempli d'eau, aux très basses fréquences, est donnée ci-après. En ce qui concerne la comparaison entre ces branches dans le reste de la gamme fréquentielle affichée, les faits suivants sont observés:

- le passage par la fréquence d'anneau est moins prononcé. Ceci est la conséquence du couplage entre la paroi et le fluide parce que, dans cette zone fréquentielle, le déplacement w est largement prépondérant;
- après le passage par la fréquence d'anneau, la branche croit vite. Malgré cela, les ondes élastiques associées sont plus lentes que celles dans un tuyau vide en raison du couplage entre la paroi et le fluide.

Les branches de la courbe de dispersion sont aussi caractérisées par leur nombre d'onde radial k_f^r , celui-ci intervenant dans la distribution spatiale de la pression à l'intérieur du tuyau.

La distribution spatiale de la pression dans le plan de la section droite du tuyau s'écrit sous la forme suivante (pour $x = 0$):

$$p(r, x)|_{x=0} = \hat{p} J_0(k_f^r r) .$$

Cette distribution est gouvernée par la fonction de Bessel. Il y a trois cas de figure possibles:

- k_f^r est réel. La distribution spatiale de la pression est telle que la pression maximale se trouve toujours sur l'axe du tuyau. La pression baisse en allant vers la paroi. Pour les grands k_f^r la surface décrite par la pression peut posséder une ou plusieurs lignes « *nodales* » (la pression y est nulle). Toutes les ondes acoustiques associées aux branches F ont k_f^r réel sauf celles associées à la branche F₁. Les k_f^r des ondes acoustiques associées à la branche P₂ est aussi réel.
- k_f^r est imaginaire. Dans ce cas-là, c'est la pression minimale qui se trouve toujours sur l'axe du tuyau. La pression croît de la façon monotone dans la direction radiale, celle maximale se trouve sur la paroi. La surface décrite par la pression n'a aucune ligne nodale et ressemble à un dôme sphérique. Les ondes acoustiques associées à la branche F₁ possèdent un tel k_f^r mais uniquement aux basses fréquences. Ceci représente une des conséquences du couplage entre la paroi et le fluide car la branche F₁ correspondrait aux ondes acoustiques planes si la paroi de tuyau était rigide.
- k_f^r est complexe. La surface décrite par la pression est assimilable aux mode complexes d'une plaque circulaire, les points de cette surface oscillant dans le temps avec des phases différentes. C'est le cas des branches P₃ et P₄ lorsqu'elles sont complexes.

Les branches F₂, F₃ et F₄ ont un comportement similaire. Au départ, elles sont imaginaires puis elles coupent l'axe des fréquences. Une fois réelles, chacune d'elle croît modérément, change de pente et commence à croître rapidement, les ondes leur associées devenant ainsi plus lentes.

3.4.2 Mode de flexion

La branche P₁ est réelle dès la fréquence zéro (voir figure 3.13). Elle est ralentie par rapport à celle dans un tuyau vide. Son nombre d'ondes radial est imaginaire.

La branche P₂, imaginaire aux basses fréquences, s'approche de la branche F₁, ensuite elle devient complexe. Elle se rapproche de la branche F₁, redevient imaginaire et coupe l'axe des fréquences en $\Omega \approx 0.7$. Une fois réelle, elle croît modérément jusqu'à $\Omega \approx 1.8$ où elle change de pente. Son nombre d'ondes radial est soit réel soit complexe.

Le comportement des branches P₃ et P₄ est analogue à celui des mêmes branches pour le mode respiratoire.

La fréquence de coupure pour la branche F₁ est très inférieure à celle qui est obtenue pour la branche P₂. Une fois réelle, les ondes libres qui sont associées à cette première sont plus lentes que celles associées à la branche P₂.

Les branches F₂ et F₃ se comportent d'une manière similaire. Elles sont imaginaires aux basses fréquences, pour devenir réelles après le passage par leurs fréquences de coupure respectives. Une fois réelle, la branche F₂ change de pente à la fréquence de coupure pour la branche F₃. Les nombres d'ondes radiaux des branches F₂ et F₃ sont toujours réels.

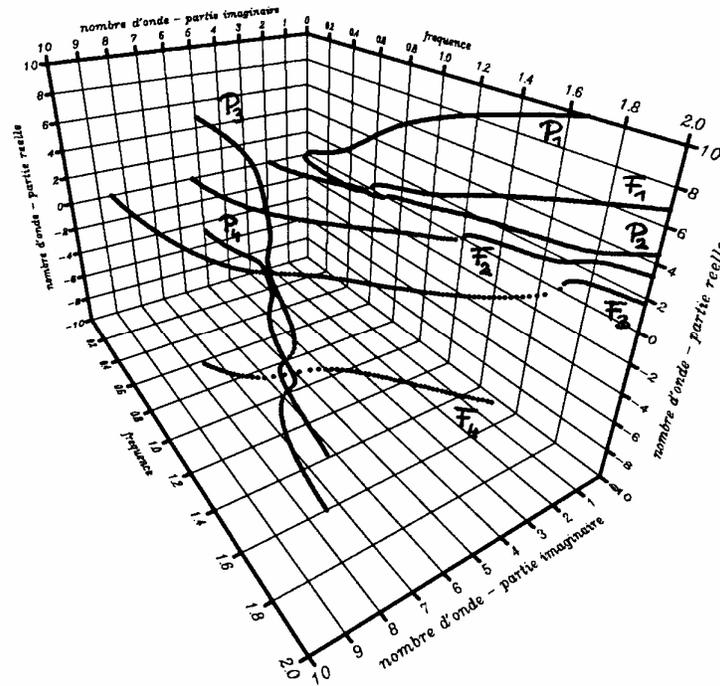


Figure 3.13: Courbe de dispersion, mode de flexion, tuyau en aluminium rempli d'eau

3.4.3 Basses fréquences

Pour les basses fréquences, il y a 3 paires d'ondes libres se propageant à la fois dans le fluide et dans la paroi: les branches P_2 , F_1 pour le mode respiratoire; la branche P_1 pour le mode de flexion. Les ondes associées à la branche F_1 sont assimilables aux ondes acoustiques planes. Il est intéressant de comparer la courbe de dispersion de celles-ci avec la branche F_1 afin de visualiser les effets du couplage. Ceci est fait dans la figure 3.14.

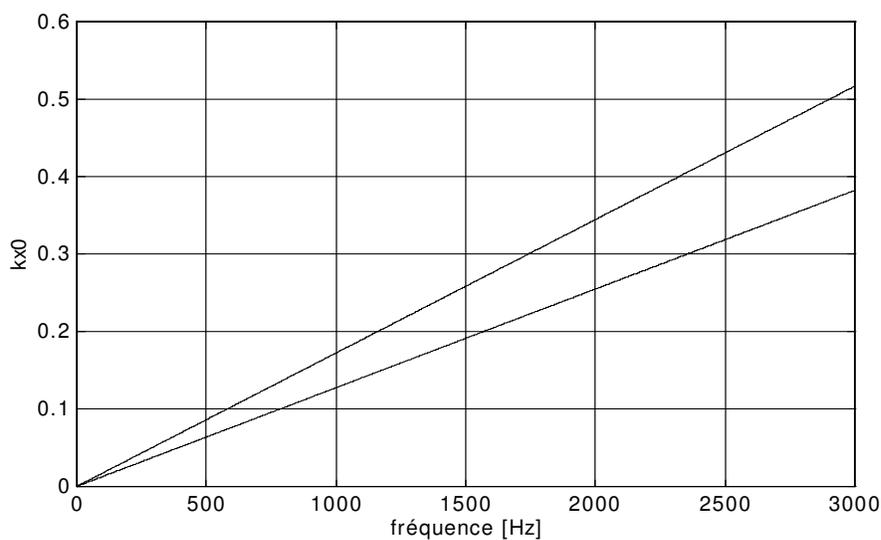


Figure 3.14: Courbe de dispersion des ondes acoustiques planes dans l'eau (trait interrompu), la branche F_1 (trait continu)

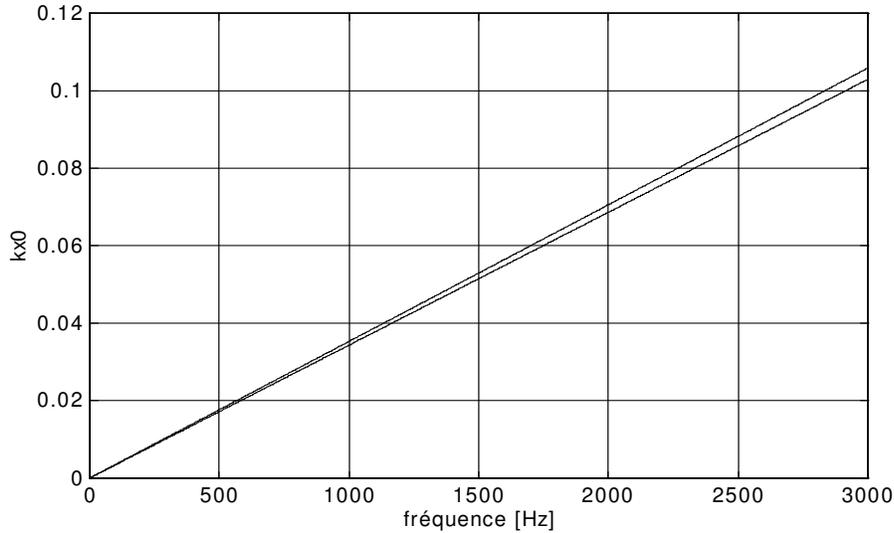


Figure 3.15: Branches P_2 du mode respiratoire: tuyau vide (trait interrompu), rempli d'eau (trait continu)

Les ondes associées à la branche F_1 sont plus lentes que les ondes acoustiques planes en raison de l'élasticité de la paroi.

Les branches P_2 du mode respiratoire pour un tuyau vide et rempli d'eau (figure 3.15) ne diffèrent guère à cause du faible couplage entre la paroi et le fluide (dans cette zone fréquentielle, le déplacement u est prépondérant, c'est pourquoi le couplage est faible).

En ce qui concerne le mode de flexion, les branches P_1 pour le tuyau vide et rempli d'eau sont tracées dans la figure 3.16. L'effet de ralentissement est encore présent dans le tuyau rempli d'eau, cet effet étant la conséquence du couplage.

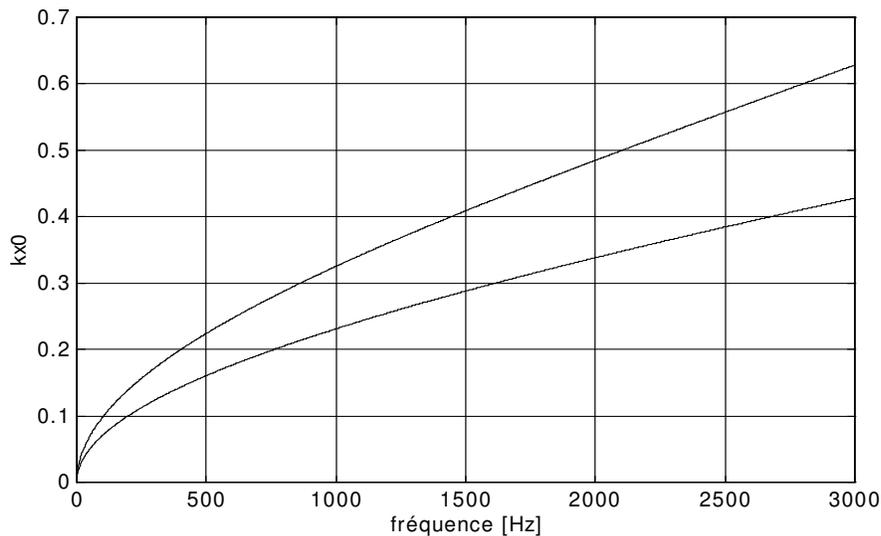


Figure 3.16: Branches P_1 du mode de flexion, tuyau vide (trait interrompu), rempli d'eau (trait continu)

3.5 CAS DES FREQUENCES ELEVEES

Le domaine fréquentiel d'application des théories d'ordre inférieur est borné vers le haut par une fréquence limite. Dans le cas des plaques, la fréquence limite est celle pour laquelle la longueur d'ondes de flexion est équivalente à l'épaisseur de la plaque. Pour les coques cylindriques, il est difficile de donner un critère général. En ce qui concerne une coque cylindrique vide, la fréquence limite peut être définie comme telle pour laquelle la longueur d'ondes devient équivalente au rayon médian de la coque cylindrique. Afin d'illustrer ce fait, les nombres d'ondes obtenus au moyen des théories de Flügge et Flügge-Timoshenko sont comparés dans le tableau 3.1. Les données présentées dans le tableau portent sur un tuyau vide en acier dont le rapport entre l'épaisseur et le rayon médian est de 1/10 et sont calculées pour la fréquence où la longueur d'ondes correspondante λ est équivalente au rayon médian du tuyau a .

La courbe de dispersion, pour le mode respiratoire (selon la théorie de Flügge-Timoshenko), est tracée dans la figure 3.17. Elle se compose de cinq branches, chaque branche ayant sa propre fréquence de coupure. Le fait étonnant de la présence d'une branche toujours imaginaire, caractéristique pour les théories d'ordre inférieur, est ainsi enlevé.

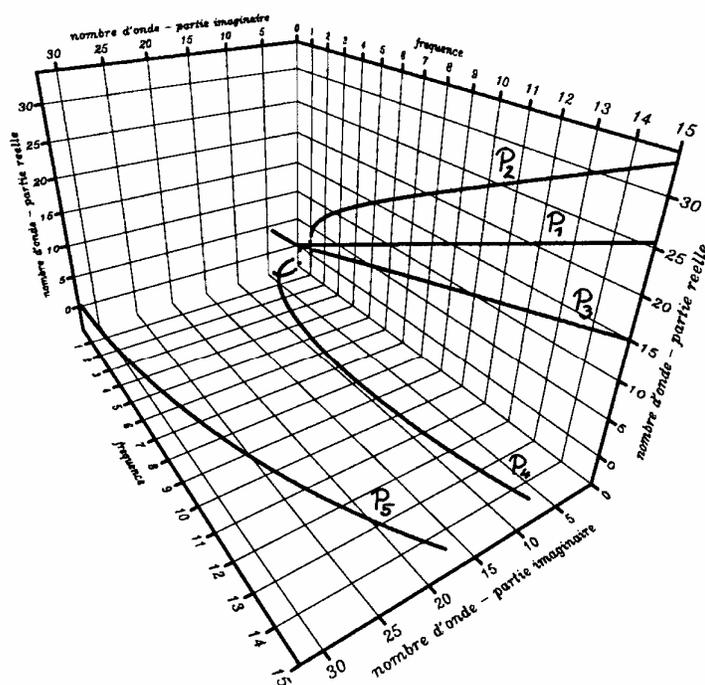


Figure 3.17: Courbe de dispersion, mode respiratoire, tuyau en acier, vide

Tableau 3.1

mode, branche	Flügge	Flügge-Timoshenko	écart [%]
0, P ₂	5.5631	6.2845	11.59
1, P ₁	5.5159	6.1657	11.78
2, P ₁	5.3505	6.0225	12.56

Nombres d'ondes axiaux, non-dimensionnels, $\lambda \approx a$

La comparaison entre les nombres d'ondes axiaux pour le même tuyau, cette fois-ci rempli d'eau, est présentée dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2

mode, branche	Flügge	Flügge-Timoshenko	écart [%]
0, F ₁	6.2026	6.2845	1.32
0, P ₂	5.1818	5.4035	4.28
1, P ₁	5.9857	6.1131	2.13
1, F ₁	4.7476	5.0409	6.18
2, P ₁	5.5752	6.1131	2.13
2, F ₁	4.3750	4.6285	5.8

Nombres d'ondes axiaux, non-dimensionnels, $\lambda \approx a$

Par rapport au tuyau vide, les différences entre les deux théories ne sont pas aussi grandes. Ce n'est pas le cas pour les nombres d'ondes radiaux, dont la comparaison est donnée dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3

mode, branche	Flügge	Flügge-Timoshenko	écart [%]
0, F ₁	0 + i1.0867	0 + i1.4847	36.62
0, P ₂	3.2311	2.8448	-11.96
1, P ₁	1.2093	0 + i0.2812	—
1, F ₁	3.8407	3.4468	-10.26
2, P ₁	2.4916	1.9534	-21.61
2, F ₁	4.2603	3.9835	-6.5

Nombres d'ondes radiaux, non-dimensionnels, $\lambda \approx a$

En tout cas, les comparaisons données ici confirment la limite d'applicabilité des théories d'ordre inférieur. Pour les tuyaux de petit diamètre, la fréquence limite n'est jamais atteinte dans la pratique. La théorie de Flügge-Timoshenko n'est utile que pour les coques cylindriques de grand diamètre, car le domaine des hautes fréquences au sens de la pulsation non-dimensionnelle est alors décalé vers des fréquences physiques (en [Hz]) plus basses.

3.6 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **P. M. Morse, K. U. Ingard:** “Theoretical Acoustics”, 1968 McGraw Hill, New York
2. **M. Bruneau:** “Introduction aux théories de d’acoustique”, 1983 Université de Maine, Editeur
3. **W. Leissa:** “Vibration of shells”, 1973 NASA SP-288
4. **W. Soedel:** “Vibrations of shells and plates”, 1981 Marcel Dekker, Inc.
5. **C. R. Fuller:** “The effects of wall discontinuities on the propagation of flexural waves in cylindrical shells”, JSV (1981) 75 (2), 207 - 228
6. **C. R. Fuller, F. J. Fahy:** “Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid”, JSV (1982) 81 (4), 501 - 518
7. **B. J. Brévert, C. R. Fuller:** “Effect of an internal flow on the distribution of vibrational energy in an infinite fluid-filled thin cylindrical elastic shell”, JSV (1993) 167 (1), 149 - 163
8. **L. Cremer, M. Heckl, E. E. Ungar:** “Structure-borne sound”, 1977 Springer-Verlag New York
9. **J. P. Nougier:** “Méthodes de calcul numérique”, 1989 Masson Paris
10. **P. R. Brazier-Smith, J. F. M. Scott:** “On the determination of the roots of dispersion equations by use of winding number integrals”, Letter to the editor JSV (1991) 145 (3), 503 - 510

4 PROPAGATION DE L'ENERGIE ACOUSTIQUE ET VIBRATOIRE DANS LES TUYAUX

Les études sur la propagation de l'énergie vibratoire dans les coques cylindriques élastiques commencent par les travaux de Fuller [1] relatifs aux coques cylindriques vides. Fuller et Fahy [2] traitent le problème couplé, c'est à dire la coque cylindrique rempli d'un fluide acoustique. Les auteurs présentent les expressions pour les puissances nettes vibratoire (dans la paroi) et acoustique (dans le fluide) transférées par les ondes libres et analysent leur rapport en fonction de la fréquence.

Williams seul [3] et avec Romano [4] apporte une contribution majeure à l'étude de ce problème. Cette contribution consiste en la manière dont il définit le vecteur de l'intensité vibratoire. Il établit d'abord le bilan des énergies mécaniques potentielle et cinétique dans une coque cylindrique. Le vecteur de Poynting, qui apparaît dans le bilan, est alors exprimé directement en termes de grandeurs dans la surface médiane (efforts et vitesses). Ensuite, le vecteur de l'intensité vibratoire est défini comme le vecteur de Poynting moyenné dans le temps. De surcroît, dans la référence [3], il relie l'intensité vibratoire dans la coque cylindrique avec l'intensité acoustique dans le fluide acoustique entourant la coque. L'application numérique et expérimentale du concept de vecteur de Poynting est présentée par Romano et Williams [5] sur l'exemple de détermination de la distribution de l'intensité vibratoire dans une coque cylindrique.

Les travaux de Pavic sont de grande importance. Dans [6], il donne la définition du vecteur de l'intensité vibratoire dans une coque cylindrique à partir du vecteur de Poynting défini pour un corps élastique tri-dimensionnel (défini donc comme le produit scalaire entre le tenseur des contraintes et le vecteur des vitesses), puis il dérive les expressions particulières pour l'intensité vibratoire dans les coques cylindriques en termes des contributions de tension, de flexion et de courbure. Il se sert de moyennage spatial afin de découpler les interactions des ondes différentes et démontre que chaque contribution est importante pour la détermination de la puissance nette propagée dans la coque. Le concept des contributions de tension, de flexion et de courbure est appliqué au cas des coques générales [7]. Dans [8], il traite le problème couplé (tuyau rempli d'un fluide acoustique) avec une attention particulière pour le domaine des basses fréquences.

Le sujet de ce chapitre est le développement de telles expressions pour le flux de puissance nette dans le tuyau qui peuvent être appliquées à la mesure. Dans le paragraphe 4.1, le bilan des puissances nettes dans un tuyau rempli et entouré par des fluides acoustiques est énoncé. La matière présentée dans ce paragraphe s'appuie sur l'annexe 3 où est établi le bilan des puissances nettes pour une coque générale. Les effets des forces et des moments agissant sur les limites sont ainsi inclus dans le bilan ce qui représente une certaine nouveauté. Les expressions pour les composantes axiales des vecteurs de l'intensité vibratoire et acoustique sont présentées dans le paragraphe 4.2. Le développement des expressions pour le flux des puissances nettes acoustique et vibratoire dans le tuyau, applicables à la mesure, est démontré dans le paragraphe 4.3.

4.1 BILAN DES PUISSANCES NETTES POUR UN TUYAU

Le bilan des puissances nettes vibratoires dans la paroi de tuyau:

$$\overline{\Pi}_q^v - \overline{\Pi}_\Gamma^v = \int_S \nabla_2 \cdot \vec{I} dS , \quad (4.1.1)$$

stipule que la différence entre la puissance nette vibratoire totale d'excitations (notée par $\overline{\Pi}_q^v$) et celle traversant la frontière Γ de la paroi (notée par $\overline{\Pi}_\Gamma^v$) est égale à l'intégrale de la divergence du vecteur de l'intensité vibratoire \vec{I} dans la surface médiane S de la paroi de tuyau. Dans l'expression ci-dessus, l'exposant « v » indique qu'il s'agit des puissances vibratoires. La puissance nette totale d'excitations est défini par l'expression suivante:

$$\overline{\Pi}_q^v = \overline{\Pi}_q^m + \overline{\Pi}_i^f + \overline{\Pi}_e^f = \int_Q \vec{q} \cdot \vec{u} dS + \int_S \left(1 - \frac{h}{2a}\right) \overline{p_i \dot{w}} dS - \int_S \left(1 + \frac{h}{2a}\right) \overline{p_e \dot{w}} dS . \quad (4.1.2)$$

Elle se compose de trois termes: le premier inclut les excitations mécaniques, le deuxième tient compte de l'interaction entre la paroi et le fluide intérieur (indice « i »); le troisième est dû à l'interaction entre la paroi et le fluide extérieur (indice « e »). Le domaine Q où se manifestent les excitations mécaniques n'est pas forcément identique à la section du tuyau S pour laquelle nous établissons le bilan. La composition de la puissance nette vibratoire traversant la frontière Γ est donnée dans l'annexe 3.

Le bilan des puissances nettes acoustiques totales dans le fluide à l'intérieur du tuyau s'écrit:

$$\overline{\Pi}_{q_i}^a - \overline{\Pi}_{\partial\Omega}^a = \int_\Omega \nabla_3 \cdot \vec{J}_i d\Omega . \quad (4.1.3)$$

La notation de (4.1.3) est semblable à celle de (4.1.1). L'exposant « a » indique qu'il s'agit des grandeurs acoustiques et l'indice « i » que le bilan est établi dans le fluide intérieur, celui-ci occupant le volume Ω . Dans le membre de droite se trouve l'intégrale de la divergence du vecteur de l'intensité acoustique \vec{J}_i dans Ω . Etant donné que le domaine Ω est borné par la paroi du tuyau dans le sens radial et par les surfaces des sections droites dans le sens axial, la puissance nette totale traversant la frontière $\partial\Omega$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\overline{\Pi}_{\partial\Omega}^a = \overline{\Pi}_{\Sigma_i}^a + \overline{\Pi}_{S_i}^a , \quad \overline{\Pi}_{S_i}^a = \int_S \left(1 - \frac{h}{2a}\right) \overline{p_i \dot{w}} dS , \quad (4.1.4)$$

où $\overline{\Pi}_{\Sigma_i}^a$ désigne la puissance nette totale traversant la frontière Σ (la section droite de tuyau).

$\overline{\Pi}_{S_i}^a$ désigne la puissance nette totale sortant du fluide et entrant dans la paroi, cette puissance étant égale au terme $\overline{\Pi}_i^f$ de l'équation (4.1.2).

Le bilan des puissances nettes acoustiques totales dans le fluide extérieur, s'écrivant de la manière suivante:

$$\overline{\Pi}_{q_e}^a - \overline{\Pi}_{S_e}^a = \int_\Phi \nabla_3 \cdot \vec{J}_e d\Phi , \quad (4.1.5)$$

est établi pour le volume externe Φ . Par $\overline{\Pi}_{S_e}^a$ est notée la puissance nette totale sortant du fluide et entrant dans la paroi, cette puissance étant égale au terme $\overline{\Pi}_e^f$ de l'équation (4.1.2).

Le bilan complet des puissances nettes totales pour le tuyau est égal à l'addition des équations (4.1.1), (4.1.3) et (4.1.5):

$$\overline{\Pi}_q^m + \overline{\Pi}_{q_i}^a + \overline{\Pi}_{q_e}^a - \overline{\Pi}_{\Sigma_i}^a - \overline{\Pi}_\Gamma^v = \int_S \nabla_2 \cdot \vec{I} dS + \int_\Omega \nabla_3 \cdot \vec{J}_i d\Omega + \int_\Phi \nabla_3 \cdot \vec{J}_e d\Phi . \quad (4.1.6)$$

Le bilan complet stipule que *la différence entre toutes les puissances nettes totales des excitations et celles traversant les frontières Γ et Σ est égale à la somme des intégrales des divergences des intensités acoustiques et vibratoire dans les domaines correspondants.*

A ce stade, nous pouvons faire les hypothèses suivantes:

- il n'y pas de sources acoustiques dans le fluide extérieur
- la puissance émise par le tuyau dans le fluide extérieur (donnée par le troisième terme dans le membre de droite) est négligeable devant les autres termes dans (4.1.6).

Nous rappelons aussi que la paroi aussi bien que le fluide intérieur sont supposés non-dissipatifs. En conséquence, toute la puissance nette des excitations est éjectée à travers les frontières Γ et Σ :

$$\overline{\Pi}_q^m + \overline{\Pi}_{q_i}^a - \overline{\Pi}_{\Sigma_i}^a - \overline{\Pi}_\Gamma^v = 0 , \quad (4.1.7)$$

ce qui entraîne:

$$\int_S \nabla_2 \cdot \vec{I} dS + \int_\Omega \nabla_3 \cdot \vec{J} d\Omega = 0 . \quad (4.1.8)$$

où, par abus de notation, le vecteur de l'intensité acoustique dans le fluide interne est noté sans l'indice « i ». La puissance nette totale des excitations peut donc être exprimée par l'équation suivante:

$$\overline{\Pi}_q^m + \overline{\Pi}_{q_i}^a = \int_l \vec{I} \cdot \vec{n}_l dl + \int_A \vec{J} \cdot \vec{n}_A dA , \quad (4.1.9)$$

où l et A désignent respectivement les frontières du domaine contenant les excitations mais ce domaine n'inclut ni Γ ni Σ . Par \vec{n}_l et \vec{n}_A sont notées les normales sortantes dudit domaine.

Un bon choix pour l et A représentent le périmètre et l'aire de la section droite de tuyau. Dans l'hypothèse où les excitations se trouvent sur une terminaison de tuyau, la puissance nette totale $\overline{\Pi}$ propagée dans celui-ci (égale à la somme des puissances nettes des excitations) est donnée comme:

$$\overline{\Pi} = \overline{\Pi}_q^m + \overline{\Pi}_{q_i}^a = \int_0^{2\pi} I_x a d\eta + \int_0^a \int_0^{2\pi} J_x r dr d\eta , \quad (4.1.10)$$

où I_x et J_x sont respectivement les composantes axiales des vecteurs de l'intensité vibratoire et acoustique. L'équation (4.1.10) porte sur un cas particulier (toutes les excitations se trouvent sur une terminaison de tuyau). Or nous pouvons l'appliquer aussi au cas général pour lequel les excitations sont distribuées le long d'une partie de tuyau. Il suffit de trouver deux sections droites se trouvant respectivement à gauche et à droite de la zone des excitations et d'appliquer (4.1.10).

4.2 EXPRESSIONS POUR LES INTENSITES VIBRATOIRE ET ACOUSTIQUE

Le vecteur de l'intensité vibratoire, dans une coque cylindrique, s'écrit sous la forme suivante:

$$\vec{I} = -\left(\overline{\underline{N} \cdot \vec{u}_t} + \overline{\underline{M} \cdot \vec{\beta}} + \overline{Q\dot{u}_3} \right). \quad (4.2.1)$$

La composante axiale de celui-ci est donnée par [3]:

$$I_x = -\left(\overline{N_{xx}\dot{u}} + \overline{N_{xy}\dot{v}} + \overline{M_{xx}\dot{\beta}_x} + \overline{M_{xy}\dot{\beta}_y} + \overline{Q_x\dot{w}} \right). \quad (4.2.2)$$

Il convient d'utiliser cette expression pour le calcul de l'intensité vibratoire à l'aide de la méthode des éléments finies [9]. Cependant, l'expression telle quelle est donnée par (4.2.2) n'est pas applicable pour l'estimation de l'intensité vibratoire par la mesure. La raison pour cela est que les grandeurs cinématiques telles que déplacements, vitesses, accélérations ou déformations sont les seules mesurables avec des capteurs actuellement disponibles. Nous sommes donc amenés de remplacer les efforts dans (4.2.2) par leurs expressions respectives définies par la loi de Hooke. En faisant cela, différentes théories des coques cylindriques donneront différentes expressions pour l'intensité vibratoire.

Ainsi pour la théorie de Donnell, l'expression pour la composante axiale du vecteur de l'intensité vibratoire s'écrit sous la forme suivante:

$$I_x = \frac{C}{a} (\Lambda^m + \Lambda^f). \quad (4.2.3)$$

Pour la théorie de Flügge [7]:

$$I_x = \frac{C}{a} (\Lambda^m + \Lambda^f + \Lambda^c). \quad (4.2.4)$$

Dans les expressions (4.2.3 - 4), Λ^m , Λ^f et Λ^c désignent respectivement les contributions dites « *de membrane* », « *de flexion* » et « *de courbure* ». La contribution de membrane donne cette partie de l'intensité vibratoire qui existerait dans la paroi de tuyau si celle-ci était modélisée comme une coque cylindrique membraneuse (sans effets de flexion). La contribution de flexion prend en compte les effets de flexion sans couplage entre les déplacements dans le plan u , v et le déplacement normal w . Les effets de ce couplage dû à la courbure sont rassemblés dans la contribution de courbure qui n'existe pas pour la théorie de Donnell.

Les expressions pour les contributions de membrane et de flexion, identiques pour les théories de Flügge et de Donnell, s'écrivent [10]:

$$\Lambda^m = -\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + w \right) \right] \dot{u} - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \dot{v} \quad (4.2.5)$$

$$\Lambda^f = \beta^2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \dot{w} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial \xi} - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \eta} \right] \quad (4.2.6)$$

$$\Lambda^c = \beta^2 \left[\overline{\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \dot{u}} - \frac{3}{2} (1-\nu) \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}} \right) \dot{v} - \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \dot{w}} + \frac{1-\nu}{2} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \dot{w}} \right] + \beta^2 \left[-\frac{1+\nu}{2} \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \dot{w}} + \overline{\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \xi}} + \nu \overline{\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \xi}} + (1-\nu) \overline{\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \eta}} \right] \quad (4.2.7)$$

L'expression (4.2.4) est aussi valide pour la théorie de Flügge-Timoshenko. Pour celle-ci, la contribution de membrane est aussi donnée par (4.2.5) mais les contributions de flexion et de courbure s'écrivent sous la forme suivante [11]:

$$\Lambda^f = -\beta^2 \left[\overline{\left(\frac{\partial r}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \dot{r}} + \frac{1-\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \dot{s}} + \zeta \frac{1-\nu}{2} \overline{r \dot{w}} \right] \quad (4.2.8)$$

$$\Lambda^c = -\beta^2 \left[\overline{\frac{\partial r}{\partial \xi} \dot{u}} + \overline{\frac{\partial u}{\partial \xi} \dot{r}} + \frac{1-\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial s}{\partial \xi} \dot{v} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \dot{s} + \zeta \frac{\partial w}{\partial \xi} \dot{w} \right)} \right] \quad (4.2.9)$$

La composante axiale de l'intensité acoustique dans le fluide à l'intérieur du tuyau s'écrit:

$$J_x = \overline{p v_x} \quad (4.2.10)$$

p , v_x désignant respectivement la pression et la composante axiale de la vitesse dans le fluide. De même que pour la partie vibratoire, nous essayons d'écrire (4.2.10) sous une forme adaptée à la mesure. La grandeur mesurable dans un fluide est la pression. Il convient donc d'écrire (4.2.10) en termes de pression:

$$J_x = i \frac{1}{\rho_f \omega} \overline{(\nabla p)_x p} = i \frac{1}{\rho_f \omega \alpha} \overline{\frac{\partial p}{\partial \xi} p} \quad (4.2.11)$$

L'applicabilité des expressions écrites ci-dessus à la mesure est discutable. Celles portant sur l'intensité vibratoire (4.2.5 - 9) s'y prêtent difficilement à cause des dérivées partielles qui y figurent. Il est possible d'estimer ces dernières au moyen de la méthode des différences finies mais l'erreur d'estimation risque de devenir forte particulièrement dans le cas des dérivées partielles mixtes.

D'un autre côté, la méthode des différences finies est un outil bien adapté pour l'estimation de l'intensité acoustique dans le fluide intérieur. Or, toute implantation des capteurs de pression dans le tuyau représente une modification locale de la masse et de la rigidité de la paroi. Lorsque le couplage entre le fluide interne et la paroi est faible (cas des fluides légers), ceci n'influence guère la propagation des ondes acoustiques. Ce n'est pas le cas lorsque ledit couplage est fort (cas des fluides lourds). Il convient donc de réécrire les expressions pour le flux de puissance en termes d'une seule grandeur mesurable, de préférence une grandeur cinématique sur la paroi.

4.3 EXPRESSIONS POUR LE FLUX D'ENERGIE, APPLICABLES A LA MESURE

Les dérivées partielles des déplacements u , v , et w peuvent être calculées analytiquement. Soit le vecteur de déplacement \vec{u} donné sous la forme suivante:

$$\vec{u} = \left\{ \begin{array}{l} -i \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 1} \hat{u}_{n;l}^+ e^{-i\chi_{n;l} \xi} \cos(n\eta - \eta_{n;l}^+) + \hat{u}_{n;l}^- e^{i\chi_{n;l} \xi} \cos(n\eta - \eta_{n;l}^-) \\ \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 1} \hat{v}_{n;l}^+ e^{-i\chi_{n;l} \xi} \sin(n\eta - \eta_{n;l}^+) + \hat{v}_{n;l}^- e^{i\chi_{n;l} \xi} \sin(n\eta - \eta_{n;l}^-) \\ \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 1} \hat{w}_{n;l}^+ e^{-i\chi_{n;l} \xi} \cos(n\eta - \eta_{n;l}^+) + \hat{w}_{n;l}^- e^{i\chi_{n;l} \xi} \cos(n\eta - \eta_{n;l}^-) \end{array} \right\} e^{i\alpha x}, \quad (4.3.1)$$

où par l'exposant « + » sont désignées les grandeurs liées avec la propagation des ondes dans le sens dit positif et inversement pour l'exposant « - ». Les déplacements u , v , et w sont donnés en termes de la double sommation, la première sur le mode circonférentiel n et la deuxième sur la branche l d'un mode circonférentiel donné. Les angles $\eta_{n;l}^+$, $\eta_{n;l}^-$ désignent respectivement les angles de polarisation dans deux sens de propagation qui, dans le cas général, peuvent être différentes (voir figure 4.1).

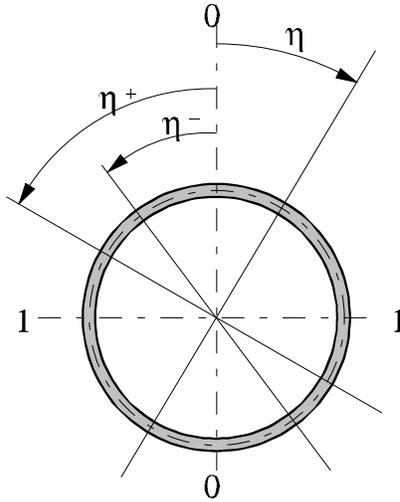


Figure 4.1: Angles de polarisation

Le vecteur de déplacement, donné ci-dessus, peut aussi être écrit sous la forme suivante:

$$\vec{u} = \left\{ \begin{array}{l} -i \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 1} \sum_{m=0}^1 \hat{S}_{n;l;m}^u(\xi) \cos\left(n\eta - m \frac{\pi}{2}\right) \\ \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 1} \sum_{m=0}^1 \hat{S}_{n;l;m}^v(\xi) \sin\left(n\eta - m \frac{\pi}{2}\right) \\ \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 1} \sum_{m=0}^1 \hat{S}_{n;l;m}^w(\xi) \cos\left(n\eta - m \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} e^{i\alpha x}, \quad (4.3.2)$$

où les valeurs de l'indice « m » sont les entiers correspondant aux plans 0 - 0 ($m = 0$) et 1 - 1 ($m = 1$) de la figure 4.1.

Par (4.3.2), le vecteur de déplacement \vec{u} est donné en termes des projections de ses amplitudes sur les plans 0 - 0 et 1 - 1.

Les grandeurs \hat{S} , définies comme:

$$\hat{S}_{n;l;m}^u(\xi) = \hat{u}_{n;l;m}^+ e^{-i\chi_{n,l} \xi} + \hat{u}_{n;l;m}^- e^{i\chi_{n,l} \xi}$$

$$\hat{S}_{n;l;m}^v(\xi) = \hat{v}_{n;l;m}^+ e^{-i\chi_{n,l} \xi} + \hat{v}_{n;l;m}^- e^{i\chi_{n,l} \xi}$$

$$\hat{S}_{n;l;m}^w(\xi) = \hat{w}_{n;l;m}^+ e^{-i\chi_{n,l} \xi} + \hat{w}_{n;l;m}^- e^{i\chi_{n,l} \xi} ,$$

notent respectivement les distributions axiales des déplacements u , v et w .

A l'aide des rapports entre les amplitudes Γ qui, pour les sens de propagation opposés, jouissent des propriétés suivantes:

$$\Gamma_{n;l}^u = \frac{\hat{u}_{n;l}^-}{\hat{w}_{n;l}^-} = -\frac{\hat{u}_{n;l}^+}{\hat{w}_{n;l}^+}$$

$$\Gamma_{n;l}^v = \frac{\hat{v}_{n;l}^+}{\hat{w}_{n;l}^+} = \frac{\hat{v}_{n;l}^-}{\hat{w}_{n;l}^-} ;$$

le vecteur de déplacement peut être exprimé uniquement en termes du déplacement normal w :

$$\vec{u} = \left\{ \begin{array}{l} i \sum_{l \geq 2} \Gamma_{0;l}^u \hat{D}_{0;l}^w(\xi) \\ \hat{S}_{0;1}^v(\xi) \\ \sum_{l \geq 2} \hat{S}_{0;l}^w(\xi) \end{array} \right\} e^{i\alpha} + \left\{ \begin{array}{l} i \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} \sum_{m=0}^1 \Gamma_{n;l}^u \hat{D}_{n;l}^w(\xi) \cos\left(n\eta - m\frac{\pi}{2}\right) \\ \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} \sum_{m=0}^1 \Gamma_{n;l}^v \hat{S}_{n;l}^w(\xi) \sin\left(n\eta - m\frac{\pi}{2}\right) \\ \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} \sum_{m=0}^1 \hat{S}_{n;l}^w(\xi) \cos\left(n\eta - m\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} e^{i\alpha} , \quad (4.3.3)$$

où

$$\hat{D}_{n;l;m}^w(\xi) = \hat{w}_{n;l;m}^+ e^{-i\chi_{n,l} \xi} - \hat{w}_{n;l;m}^- e^{i\chi_{n,l} \xi} .$$

Le mode respiratoire ($n=0$) représente le cas particulier parce que le déplacement v est découplé des u et w . C'est la raison pour laquelle la partie du vecteur de déplacement, propre au mode respiratoire, est notée par le premier terme du membre de droite dans (4.3.3).

Portant le vecteur de déplacement donné ci-dessus dans les expressions pour les contributions (4.2.5 - 7), on obtient les expressions algébriques pour les contributions. Il y a trois types d'interactions entre les ondes qui se mettent en évidence durant cette démarche:

- 1) l'interaction entre les ondes ayant le même nombre d'ondes, se propageant dans les sens axiaux opposés;
- 2) l'interaction entre les ondes propres à un mode circonférentiel donné, avec les nombres d'ondes différents;
- 3) l'interaction entre les ondes propres à deux modes circonférentiels différents.

L'apport de l'interaction de type 3 au flux de puissance vibratoire nette dans le tuyau est nul parce que, pour les deux modes circonférentiels k et l :

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\eta) \cos(l\eta) d\eta = \int_0^{2\pi} \cos(k\eta) \sin(l\eta) d\eta = 0 \quad k \neq l .$$

L'effet de l'interaction de type 2 sur le flux de puissance vibratoire nette est aussi nul. Nous pouvons expliquer ce fait par le raisonnement suivant. Soit k et l les indices des deux branches distinctes propres à la courbe de dispersion du mode circonférentiel n . Le terme de l'interaction T entre toutes les branches k , l distinctes, pour le mode n , peut s'écrire sous forme de double sommation:

$$T = \Re \left\{ \sum_k \sum_{l \neq k} \hat{C}_{kl} e^{i(\pm\chi_k \pm \chi_l)\xi} \right\} ,$$

où \Re désigne la partie réelle du terme entre les accolades et \hat{C}_{kl} désigne une constante à valeur complexe. Le terme de l'interaction T est donc une fonction de la coordonnée axiale ξ de type harmonique (χ_k, χ_l réels), exponentiel (χ_k, χ_l imaginaires) ou mixte. Par conséquent, la puissance nette transférée dans le tuyau varierait tout au long de celui-ci sans qu'aucune source d'énergie et aucun mécanisme de dissipation soient la cause de ces variations. Or, ceci est en contradiction avec (4.1.10). Il s'ensuit que le terme de l'interaction T ne transfère pas d'énergie vibratoire nette dans le tuyau.

Reste à étudier l'interaction de type 1. L'interaction entre deux ondes, l'une dans le plan $0 - 0$ et l'autre dans le plan $1 - 1$, n'a pas d'effet sur le flux de puissance vibratoire nette parce que pour un mode circonférentiel n :

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\eta) \cos\left(n\eta - \frac{\pi}{2}\right) d\eta = \int_0^{2\pi} \sin(n\eta) \sin\left(n\eta - \frac{\pi}{2}\right) d\eta = 0 .$$

Par conséquent, la puissance vibratoire nette propagée dans le tuyau est la superposition des puissances partielles se propageant dans les plans $0 - 0$ et $1 - 1$. Chacune est réalisée par l'interaction entre les ondes ayant le même nombre d'ondes et se propageant dans les sens opposés.

Jusqu'ici, nous n'avons pas encore mis en question la nature des branches des courbes de dispersion. Une branche peut être:

- réelle, associée aux ondes libres;
- purement imaginaire, associée aux ondes évanescentes;
- complexe, associée aux ondes atténuées.

Il s'avère que l'interaction entre les ondes atténuées n'a aucun effet sur le flux de puissance vibratoire nette parce que ces ondes créent ensemble des ondes stationnaires évanescentes. Nous tirons cette conclusion à partir de l'analyse présentée dans l'annexe 3.

Ceci permet d'écrire la puissance vibratoire nette propagée dans le tuyau sous la forme suivante:

$$\overline{\Pi}_v = 2\pi a (\langle I_x \rangle + \langle I_x^t \rangle) , \quad (4.3.4)$$

où $\langle I_x \rangle$ désigne cette partie de I_x qui effectivement transporte l'énergie. Par $\langle I_x^t \rangle$ est notée la partie effective de l'intensité des ondes de torsion (la branche P_1 du mode respiratoire).

Les expressions pour $\langle I_x \rangle$ s'écrivent sous la forme suivante:

$$\langle I_x \rangle = \frac{C}{a} \omega \sum_n \left(\sum_l (Y_{n;l}^m + Y_{n;l}^f + Y_{n;l}^c) D_{n;l}^{w^2} + \sum_j (Z_{n;j}^m + Z_{n;j}^f + Z_{n;j}^c) P_{n;j}^w \right) , \quad (4.3.5)$$

où les indices l et j dénombrent respectivement les branches réelles (ondes libres) et celles imaginaires (ondes évanescentes) pour le mode circonférentiel n . La grandeur

$$D_{n;l}^{w^2} = \sum_{m=0}^1 |\hat{w}_{n;l;m}^+|^2 - |\hat{w}_{n;l;m}^-|^2 , \quad (4.3.6)$$

désigne la superposition des différences entre les carrés des amplitudes du déplacement normal w pour les ondes libres dans les plans $0 - 0$ ($m = 0$) et $1 - 1$ ($m = 1$).

La grandeur

$$P_{n;j}^w = \sum_{m=0}^1 \mathfrak{S} \left\{ \left(\hat{w}_{n;j;m}^+ \right)^* \hat{w}_{n;j;m}^- \right\} , \quad (4.3.7)$$

désigne la superposition des parties imaginaires des produits entre les amplitudes du déplacement normal w pour les ondes évanescentes se propageant dans les sens opposés, dans les plans $0-0$ ($m=0$) et $1-1$ ($m=1$).

Par Y et Z sont respectivement notées les contributions non-dimensionnelles (de membrane, de flexion et de courbure) pour les ondes libres et évanescentes. Ainsi, pour les ondes libres celles-ci sont données par les expressions suivantes:

$$Y_{n;l}^m = \frac{1}{4} \left[\left(\chi_{n;l} \Gamma_{n;l}^u + \nu \right) \Gamma_{n;l}^u + \left(\frac{1+\nu}{2} n \Gamma_{n;l}^u + \frac{1-\nu}{2} \chi_{n;l} \Gamma_{n;l}^v \right) \Gamma_{n;l}^v \right] \quad n \geq 1 \quad (4.3.8)$$

$$Y_{n;l}^f = \frac{\beta^2}{2} (\chi_{n;l}^2 + n^2) \chi_{n;l} \quad n \geq 1 \quad (4.3.9)$$

$$Y_{n;l}^c = \frac{\beta^2}{4} \left[\left(3\chi_{n;l}^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \Gamma_{n;l}^u + \left(\frac{3(1-\nu)}{2} \Gamma_{n;l}^v + (3-\nu)n \right) \chi_{n;l} \Gamma_{n;l}^v \right] \quad n \geq 1 , \quad (4.3.10)$$

les expressions étant valides pour tous les modes circonférentiels sauf pour celui respiratoire. Pour celui-ci, (les ondes de torsion omises), les mêmes contributions s'écrivent sous la forme suivante:

$$Y_{0;l}^m = \frac{1}{2} \left[\left(\chi_{0;l} \Gamma_{0;l}^u + \nu \right) \Gamma_{0;l}^u \right] \quad (4.3.11)$$

$$Y_{0;l}^f = \beta^2 \chi_{0;l}^3 \quad (4.3.12)$$

$$Y_{0;l}^c = \frac{3}{2} \beta^2 \chi_{0;l}^2 \Gamma_{0;l}^u . \quad (4.3.13)$$

Les contributions non-dimensionnelles pour les ondes évanescentes, sont données par les expressions suivantes:

- pour tous les modes circonférentiels sauf pour celui respiratoire:

$$Z_{n;j}^m = \frac{1}{2} \left[\left(\chi_{n;j} \Gamma_{n;j}^u + \nu \right) \Gamma_{n;j}^u + \left(\frac{1+\nu}{2} n \Gamma_{n;j}^u - \frac{1-\nu}{2} \chi_{n;j} \Gamma_{n;j}^v \right) \Gamma_{n;j}^v \right] \quad n \geq 1 \quad (4.3.14)$$

$$Z_{n;j}^f = \beta^2 (\chi_{n;j}^2 - n^2) \chi_{n;j} \quad n \geq 1 \quad (4.3.15)$$

$$Z_{n;l}^c = \frac{\beta^2}{2} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} n^2 - 3\chi_{n;l}^2 \right) \Gamma_{n;l}^u + \left(\frac{3}{2} (1-\nu) \Gamma_{n;l}^v - 2\nu n \right) \chi_{n;l} \Gamma_{n;l}^v \right] \quad n \geq 1 , \quad (4.3.16)$$

- pour le mode respiratoire:

$$Z_{0;j}^m = \left(\chi_{0;j} \Gamma_{0;j}^u + \nu \right) \Gamma_{0;j}^u \quad (4.3.17)$$

$$Z_{0;j}^f = 2\beta^2 \chi_{0;j}^3 \quad (4.3.18)$$

$$Z_{0;l}^c = -3\beta^2 \chi_{0;l}^2 \Gamma_{0;l}^u . \quad (4.3.19)$$

Dans les expressions (4.3.14 - 19) par $\Gamma_{n,j}^u$ est notée la partie imaginaire du rapport entre les amplitudes u et w . Pour les ondes évanescentes, ce rapport est un nombre purement imaginaire tandis que le rapport Γ^v est un nombre réel (voir éq.(3.1.19)).

La partie effective de l'intensité de torsion s'écrit:

$$\langle I_x^t \rangle = \frac{C}{a} \omega (Y_t^m + Y_t^c) D_t^{v^2} , \quad (4.3.20)$$

avec

$$D_t^{v^2} = |\hat{v}_t^+|^2 - |\hat{v}_t^-|^2 \quad (4.3.21)$$

$$Y_t^m = \frac{1-\nu}{4} \chi_t \quad (4.3.22)$$

$$Y_t^c = \frac{3(1-\nu)}{4} \beta^2 \chi_t . \quad (4.3.23)$$

Les expressions données ci-dessus sont valides dans le cadre des théories d'ordre inférieur (Flügge, Donnell). Les expressions correspondantes pour la théorie de Flügge-Timoshenko sont données dans l'annexe 3.

Le principe de projection sur les plans $0 - 0$ et $1 - 1$ est aussi appliqué à la pression, que nous écrivons sous la forme suivante:

$$p = \sum_n \sum_l \sum_{m=0}^1 \hat{S}_{n;l;m}^p(\xi) J_n(k_{f_{n;l}}^r r) \cos\left(n\eta - m\frac{\pi}{2}\right) e^{i\alpha x}$$

avec

$$\hat{S}_{n;l;m}^p(\xi) = \hat{p}_{n;l;m}^+ e^{-i\chi_{n;l} \xi} + \hat{p}_{n;l;m}^- e^{i\chi_{n;l} \xi} .$$

La vitesse axiale, exprimée en termes de pression, est donnée par l'expression suivante:

$$v_x = \frac{1}{\rho_f \omega a} \sum_n \sum_l \sum_{m=0}^1 \chi_{n;l} \hat{D}_{n;l}^p(\xi) J_n(k_{f_{n;l}}^r r) \cos\left(n\eta - m\frac{\pi}{2}\right) e^{i\alpha x} ,$$

avec

$$\hat{D}_{n;l}^p(\xi) = \hat{p}_{n;l;m}^+ e^{-i\chi_{n;l} \xi} - \hat{p}_{n;l;m}^- e^{i\chi_{n;l} \xi} .$$

Portant les expressions ci-dessus dans (4.2.10), l'expression suivante pour la puissance acoustique nette s'obtient:

$$\overline{\Pi^a} = \frac{1}{\alpha} \frac{\pi}{\rho_f \omega a} \sum_n \left(\sum_l \chi_{n;l} D_{n;l}^{p^2} \int_0^a J_n^2(k_{f_{n;l}}^r r) r dr - 2 \sum_j \chi_{n;j} P_{n;j}^p \int_0^a J_n^2(k_{f_{n;j}}^r r) \right) \quad (4.3.23)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} ,$$

où les indice l et j dénombrent respectivement les branches réelles (ondes libres) et celles imaginaires (ondes évanescentes) pour le mode circonférentiel n .

De même que pour la partie vibratoire:

$$D_{n;l}^{p^2} = \sum_{m=0}^1 |\hat{p}_{n;l;m}^+|^2 - |\hat{p}_{n;l;m}^-|^2 \quad (4.3.24)$$

$$P_{n;j}^p = \sum_{m=0}^1 \Im \left\{ (\hat{p}_{n;j;m}^+)^* \hat{p}_{n;j;m}^- \right\} . \quad (4.3.25)$$

L'intégrale figurant dans (4.3.23) est appelée intégrale de Lommel dont la solution s'écrit [2]:

$$\int_0^a J_n^2(k_{f;n;l}^r r) r dr = \frac{a^2}{2} \left\{ \left[J_n'(\kappa_{n;l}) \right]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_{n;l}^2} \right) J_n^2(\kappa_{n;l}) \right\} . \quad (4.3.26)$$

La pression p peut s'écrire en termes de déplacement normal de la paroi w (voir éq. (3.1.37)). Ceci permet d'écrire le rapport entre les puissances nettes acoustiques et vibratoires. Pour le mode n et la branche réelle l (associée aux ondes libres), celui-ci s'écrit [2]:

$$\Psi_{n;l} = \frac{\overline{\Pi_{n;l}^a}}{\overline{\Pi_{n;l}^v}} = \frac{1}{4\alpha} \Omega^2 \frac{a}{h} \frac{\rho_f}{\rho_c} \frac{\chi_{n;l}}{\kappa_{n;l}^2} \frac{E_{n;l}^a}{E_{n;l}^v} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} , \quad (4.3.27)$$

où le terme acoustique est donné par l'expression suivante:

$$E_{n;l}^a = 1 + \left(1 - \frac{n^2}{\kappa_{n;l}^2} \right) \frac{J_n^2(\kappa_{n;l})}{\left[J_n'(\kappa_{n;l}) \right]^2} . \quad (4.3.28)$$

Le terme vibratoire est fonction de la théorie des coques cylindriques choisie. Ainsi, pour les théories de Flügge et Flügge-Timoshenko, le terme vibratoire s'écrit sous la forme suivante:

$$E_{n;l}^v = Y_{n;l}^m + Y_{n;l}^f + Y_{n;l}^c , \quad (4.3.29)$$

et pour la théorie de Donnell:

$$E_{n;l}^v = Y_{n;l}^m + Y_{n;l}^f . \quad (4.3.30)$$

Le même rapport pour la branche imaginaire j du mode n est donné par:

$$\Sigma_{n;j} = \frac{\overline{\Pi_{n;j}^a}}{\overline{\Pi_{n;j}^v}} = -\frac{1}{2\alpha} \Omega^2 \frac{a}{h} \frac{\rho_f}{\rho_c} \frac{\chi_{n;j}}{\kappa_{n;j}^2} \frac{H_{n;j}^a}{H_{n;j}^v} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} , \quad (4.3.31)$$

où le terme acoustique H^a est donné par (4.3.28) avec κ correspondant à la branche imaginaire j . Pour les théories de Flügge et Flügge-Timoshenko, le terme vibratoire s'écrit sous la forme suivante:

$$H_{n;l}^v = Z_{n;l}^m + Z_{n;l}^f + Z_{n;l}^c , \quad (4.3.32)$$

et pour la théorie de Donnell:

$$H_{n;l}^v = Z_{n;l}^m + Z_{n;l}^f . \quad (4.3.33)$$

Les expressions (4.3.27 - 33) sont très importantes. En fait, le rapport entre les puissances acoustiques et vibratoires, pour un mode n et la branche l donnés, est donné en fonction des propriétés géométriques de tuyau, de celles matérielles de la paroi et du fluide et des résultats de la relation de dispersion.

La puissance nette totale transférée dans le tuyau peut donc être écrite comme:

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}^v + \bar{\Pi}^a = 2\pi \left\{ C\omega \sum_n \left[\sum_l (1 + \Psi_{n;l}) E_{n;l}^v D_{n;l}^{w^2} + \sum_j (1 + \Sigma_{n;j}) H_{n;j}^v P_{n;j}^w \right] + a \langle I_x^t \rangle \right\}. \quad (4.3.34)$$

D'après (4.3.34) et (4.3.20), les seules grandeurs devant être obtenus par la mesure sont:

- les différences $D_{n;l}^{w^2}$ entre les carrés des amplitudes du déplacement normal w pour les ondes libres, définies par (4.3.6);
- les parties imaginaires des produits $P_{n;j}^w$ entre les amplitudes du déplacement normal w pour les ondes évanescentes se propageant dans les sens opposés, définies par (4.3.7);
- les différences $D_i^{v^2}$ entre les carrés des amplitudes du déplacement circonférentiel v pour les ondes de torsion, définies par (4.3.21).

Par conséquent, il est possible de déterminer les puissances nettes totales transférées à la fois dans le fluide et la paroi en mesurant uniquement des grandeurs cinématiques sur la paroi (les déformations ou les accélérations).

Les traces des rapports Ψ en fonction de la fréquence pour les branches réelles du mode respiratoire et du mode de flexion sont présentées dans la figure 4.2. Les rapports sont calculés pour un tuyau en aluminium rempli d'eau, le diamètre du tuyau étant de 60 [mm] et l'épaisseur étant de 2 [mm]. Pour la branche P_2 du mode respiratoire et la branche P_1 du mode de flexion, la puissance acoustique nette est insignifiante devant la puissance vibratoire. Le cas contraire se produit pour la branche F_1 du mode respiratoire.

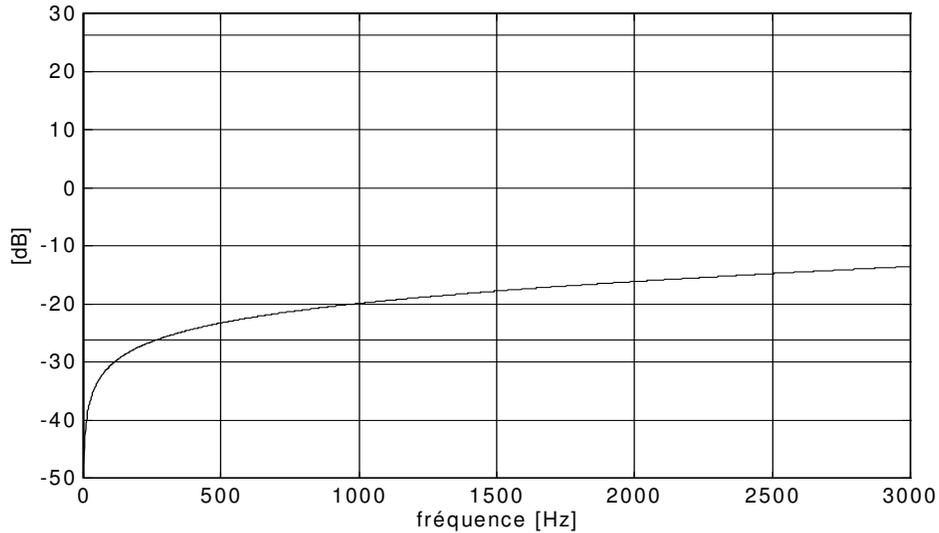


Figure 4.2: Courbes du rapport Ψ : les branches F_1 (trait continu) et P_2 (trait interrompu) du mode respiratoire; la branche P_1 (trait mixte) du mode de flexion,

En ce qui concerne les contributions non-dimensionnelles de membrane, de flexion et de courbure, il est intéressant de connaître leurs importances dans $\langle I_x \rangle$. Pavic, dans [6] a réalisé cette analyse. Etant donné que les contributions définies dans cette étude diffèrent seulement en quelques détails de celles définies dans [6], les résultats publiés sont applicables au cas présent. Selon Pavic, la contribution de membrane est celle primordiale en basses fréquences, quel que soit le mode circonférentiel.

Dans le chapitre 3, il a été démontré que l'application des théories d'ordre inférieur (Flügge, Donnell) est limitée à la gamme des basses et moyennes fréquences, la fréquence limite étant

celle pour laquelle la longueur d'ondes λ est équivalente au rayon médian du tuyau a . Le critère pour cette limitation est la comparaison entre les nombres d'ondes calculés respectivement pour les théories de Flügge et Flügge-Timoshenko. Nous pouvons maintenant comparer les termes vibratoires (4.3.29) obtenus par ces théories. Il s'avère, [11], que le critère de comparaison des termes vibratoires est plus sévère que la comparaison des nombres d'ondes. Pour un tuyau vide en acier, il ressort qu'à la fréquence pour laquelle la longueur d'ondes est proche du rayon de tuyau ($\lambda \approx a$), le terme vibratoire de Flügge est le double de celui de Flügge-Timoshenko. Une aussi grande différence est due à l'omission des influences d'inertie de rotation et de cisaillement dans la théorie de Flügge. Par conséquent, il est préférable de donner la fréquence limite selon le critère de comparaison des termes vibratoires. Le critère consiste à trouver la fréquence maximum (dite « *fréquence limite* ») pour laquelle la différence entre les termes vibratoires est encore inférieure ou égale à 5%. Dans ce cas, la fréquence limite peut être déterminée comme celle pour laquelle $\lambda \approx 5a$.

Nous donnons ici la trace de l'intensité vibratoire pour le mode respiratoire (voir figure 4.3) d'un tuyau vide en fonction de la pulsation non-dimensionnelle Ω . Les courbes sont tracées séparément pour chaque branche réelle de la courbe de dispersion en supposant que $D_{0;l}^{w^2} = 1$. Le tuyau en question est un tuyau vide en aluminium, avec le diamètre externe de 60 [mm] et l'épaisseur de 2 [mm]. La fréquence d'anneau est très clairement indiquée par la baisse brutale de la puissance vibratoire nette associée à la branche P_2 .

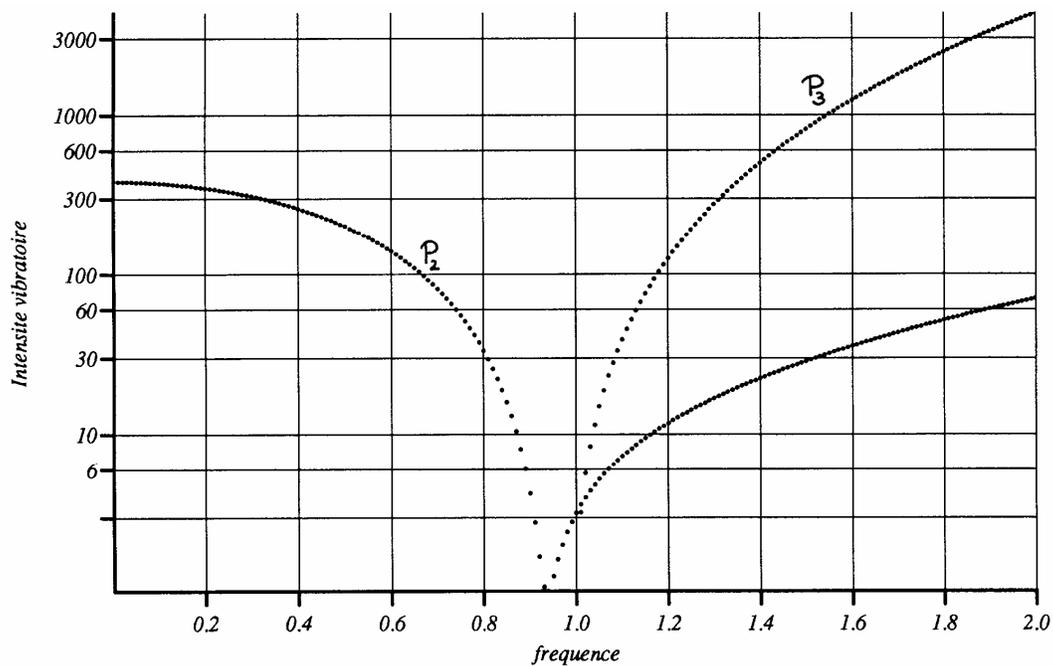


Figure 4.3: Intensité vibratoire, mode respiratoire

4.4 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **C. R. Fuller:** “The effects of wall discontinuities on the propagation of flexural waves in cylindrical shells”, JSV (1981) 75 (2), 207 - 228
2. **C. R. Fuller, F. J. Fahy:** “Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid”, JSV (1982) 81 (4), 501 - 518
3. **E. G. Williams:** “Structural intensity in thin cylindrical shells”, JASA 89 (4) Pt. 1, April 1991
4. **E. G. Williams, A. J. Romano:** “Structural intensity in thin cylindrical shells”, Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
5. **A. J. Romano, E. G. Williams:** “On the theoretical and experimental applications of a Poynting vector formulation for thin shells and plates”, Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
6. **G. Pavic:** “Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells”, JSV (1990) 142 (2), 293 - 310
7. **G. Pavic:** “Vibrational energy flow in thin-walled shells”, Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
8. **G. Pavic:** “Vibroacoustical energy flow through straight pipes”, JSV (1992) 154(3), 411 - 429
9. **L. Gavric, G. Pavic:** “A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach”, JSV (1993) 164 (1), 29 - 43
10. **K. Trdak:** “Intensité vibratoire dans les coques cylindriques vides”, Rapport de DEA, 1991 UTC
11. **K. Trdak:** “Flux d'énergie acoustique dans les coques cylindriques à paroi mince en fréquences élevées”, Rapport d'étude CETIM N° 181950, décembre 1992

5 TECHNIQUES DE MESURE

Les premières mesures du flux de puissance dans les structures sont décrites dans le légendaire article de Noiseux [1] où sont présentées les techniques de mesure pour les poutres et les plaques. A cette époque (années 70 et 80), l'intérêt des chercheurs porte sur les structures de types poutre et plaque. Les premières publications sur la mesure dans les tuyaux apparaissent au début des années 90. Deux contributions de Pavic [2] sont importantes:

- 1) développement des expressions approchées pour les nombres d'ondes des ondes libres en basses fréquences ce qui facilite la procédure de la mesure vu la complexité des méthodes numériques employées pour le calcul complet de la relation de dispersion
- 2) proposition d'une technique de mesure pour l'intensité vibratoire, cette technique ayant pour base la décomposition circonférentielle et axiale des ondes élastiques se propageant dans le tuyau.

C'est au 4^e Congrès international sur l'intensimétrie (Senlis 1993) qu'un bon nombre des résultats de mesure pour les tuyaux est présenté. Citons le travail fait par de Jong et Verheij [3] qui y décrivent la mesure du flux de puissance dans les tuyaux remplis d'un fluide lourd. L'intérêt principal des auteurs porte sur le mode respiratoire. Bourget et Fahy [4], présentent les résultats de mesure de l'intensité vibratoire pour les modes supérieurs d'un tuyau rempli d'un fluide léger. Dans les deux références citées, seuls les résultats pour le flux de puissance sont publiés sans aucun résultat supplémentaire ou intermédiaire qui confirmerait formellement la validité des techniques employées.

Au même congrès, Pavic [5] présente une étude sur la précision de la technique de mesure basée sur la décomposition des ondes. D'après lui, la mesure du flux de puissance dans les tuyaux nécessite une préparation minutieuse parce que les résultats de mesure peuvent être affectés considérablement par diverses erreurs.

Dans ce chapitre, les techniques de mesure permettant l'estimation de la puissance nette vibratoire et acoustique transmise par le tuyau sont présentées en deux étapes. La première, étant le sujet du paragraphe 5.1, contient une méthode pour la décomposition du mouvement vibratoire de tuyau en modes circonférentiels. La deuxième étape est présentée dans le paragraphe 5.2 ayant comme sujet des méthodes de décomposition axiale du mouvement vibratoire de tuyau pour un mode circonférentiel donné. Dans le paragraphe 5.3, une analyse des erreurs de mesure est présentée.

5.1 DECOMPOSITION EN MODES CIRCONFÉRENTIELS

Le déplacement normal w de la paroi du tuyau peut être écrit comme:

$$w = \sum_{n=0}^N \sum_l \sum_{m=0}^1 \hat{S}_{n;l;m}^w(\xi) \cos\left(n\eta - m\frac{\pi}{2}\right) e^{i\alpha}, \quad \hat{S}_{n;l;m}^w(\xi) = \hat{w}_{n;l;m}^+ e^{-i\chi\xi} + \hat{w}_{n;l;m}^- e^{i\chi\xi},$$

c'est à dire en termes de la triple sommation: sur le mode circonférentiel n , sur la branche l et sur l'indice de plan m où celui-ci correspond aux plans $0 - 0$ ($m = 0$) et $1 - 1$ ($m = 1$) de la figure 4.1.

Le but de la décomposition en modes circonférentiels est de déterminer les distributions axiales $\sum_l \hat{S}_{n;l;m}^w(\xi)$ propres aux mode n et plan m en supposant que w est connu tout au long du périmètre de tuyau. Le déplacement w écrit sous la forme donnée ci-dessus n'est qu'une somme

de deux séries de Fourier (l'une pour $m = 0$, l'autre pour $m = 1$). Les coefficients de ces séries de Fourier sont les distributions axiales recherchées que l'on obtient par l'expression suivante:

$$\sum_l \hat{S}_{n;l;m}^w = \frac{1}{\alpha \pi} \int_0^{2\pi} w(\xi, \eta, t) \cos\left(n\eta - m\frac{\pi}{2}\right) d\eta \quad (5.1.1)$$

$$\begin{matrix} n = 0, \dots, N \\ m = 0, 1 \end{matrix}, \quad \alpha = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'inconvénient de (5.1.1) est qu'il faut connaître w au long du périmètre de tuyau. Dans un cas pratique, on peut connaître ses valeurs discrètes aux points k , prélevées par des capteurs quelconques répartis de manière uniforme sur le périmètre (voir figure 5.1). Dans la suite de l'exposé, nous appelons un tel dispositif de capteurs sur le périmètre du tuyau « *antenne circconférentielle des capteurs* ».

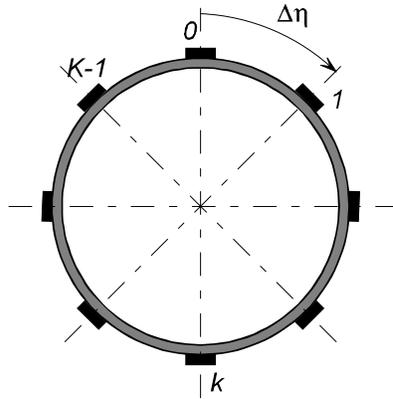


Figure 5.1: Antenne circconférentielle des capteurs

L'intégrale dans (5.1.1) devient donc une somme qui s'écrit:

$$\sum_l \hat{S}_{n;l;m}^w = \frac{2}{\alpha K} \sum_{k=0}^{K-1} w\left(\xi, \frac{k}{K} 2\pi, t\right) \cos\left[\left(2n \frac{k}{K} - \frac{m}{2}\right)\pi\right] \quad (5.1.2)$$

$$\begin{matrix} n = 0, \dots, N \\ m = 0, 1 \end{matrix}, \quad \alpha = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La condition pour qu'il n'y ait pas d'erreur de repliement dans (5.1.2) est donnée par:

$$K \geq 2N .$$

Cette condition est remplie pour $m = 0$. Essayons d'extraire la distribution axiale $\sum_l \hat{S}_{n;l;m}^w(\xi)$ pour $n = N$ et $m = 1$:

$$\sum_l \hat{S}_{N;l;1}^w = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N} w\left(\xi, \frac{k}{N} \pi, t\right) \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\right] \quad (5.1.3)$$

Or, nous obtenons que $\sum_l \hat{S}_{N;l;1}^w(\xi) = 0$ parce que $\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi = 0$.

La condition pour le nombre K des capteurs dans une antenne circonférentielle, nécessaire pour l'extraction complète des distributions axiales $\sum_l \hat{S}_{n;l:m}^w(\xi)$ jusqu'au mode N sans erreur de repliement, s'écrit donc:

$$K \geq 2(N + 1) . \quad (5.1.4)$$

Il reste à déterminer la valeur de N au delà de laquelle on ne fait plus d'extraction. La partie principale du flux d'énergie est due à l'interaction entre les ondes libres. A condition d'installer l'antenne circonférentielle dans le champ lointain, il suffit de pousser l'extraction jusqu'à cet N pour lequel il y a au moins une branche réelle dans l'intervalle fréquentiel d'intérêt.

La configuration de l'antenne circonférentielle convenable à l'extraction des distributions axiales $\sum_l \hat{S}_{n;l:m}^w(\xi)$ propres au mode respiratoire et celui de flexion est présentée dans la figure 5.2.

L'avantage d'une telle configuration est que les résultats ainsi obtenus ne contiennent pas d'erreurs de repliement même lorsqu'il y a une branche réelle pour le mode lobaire d'ordre 2 dans l'intervalle fréquentiel d'intérêt. Par conséquent, une telle configuration permet la mesure du mode respiratoire et celui de flexion jusqu'à la première fréquence de coupure pour le mode lobaire d'ordre 3.

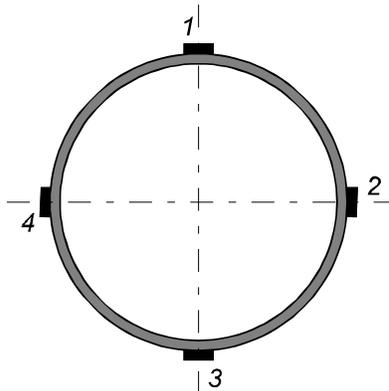


Figure 5.2: Antenne circonférentielle de capteurs pour $N=1$

Nous sommes aussi amenés de faire les remarques suivantes:

- Les expressions ci-dessus, données en termes des distributions axiales du déplacement normal w , sont aussi applicables aux fonctions de réponse fréquentielle (FRF) d'une distribution axiale quelconque (celle d'une accélération ou d'une déformation, par exemple). Lorsque toutes les excitations sur le tuyau sont parfaitement corrélées, il suffit d'estimer les FRF par rapport à une référence quelconque. Dans le cas contraire, il est nécessaire d'estimer les FRF pour chaque capteur dans l'antenne circonférentielle par rapport aux parties non-corrélées des excitations (en appliquant par exemple la technique des cohérences partielles [7]);
- Hormis l'erreur de repliement, inhérente à la démarche de décomposition, les erreurs de positionnement de capteurs aussi bien que les erreurs statistiques de l'estimation des FRF viennent s'ajouter pour influencer la précision de la décomposition circonférentielle. Il est assez difficile de quantifier les erreurs de positionnement de capteurs. Les erreurs statistiques des FRF sont un peu moins difficiles à quantifier. Selon [7], elles sont fonction du nombre des moyennes et de la fonction de cohérence. Plus cette dernière est « bonne » (c'est à dire proche de 1), plus faibles sont les erreurs statistiques.

5.2 DECOMPOSITION AXIALE

Avant de commencer ce paragraphe, nous allons définir le cadre dans lequel les méthodes pour la décomposition axiale, présentées dans la suite de l'exposé, sont applicables. Ce cadre est défini par les hypothèses suivantes.

- Hypothèse 1 dite « de basses fréquences »:
Le domaine de basses fréquences, dont la limite supérieure est la première fréquence de coupure pour le mode lobaire d'ordre 3.
- Hypothèse 2 dite « de champ lointain »:
La partie du tuyau où les ondes évanescentes et atténuées ne sont plus « perceptibles » en comparaison avec les ondes libres.
- Hypothèse 3 dite « de nombre d'onde »:
Il est supposé que les nombres d'ondes sont connus pour toutes les ondes présentes dans le champ lointain soit en résolvant la relation de dispersion, soit par la mesure.

Par conséquent, les distributions axiales de la grandeur mesurée q , connues après décomposition en modes circonférentiels, s'écrivent:

$$q_0(\xi, t) = [\hat{S}_{0,p}^q(\xi) + \hat{S}_{0,f}^q(\xi)] e^{i\alpha t}$$

$$q_{n,m}(\xi, t) = \hat{S}_{n,m}^q(\xi) e^{i\alpha t} \quad \begin{cases} n = 1, 2 \\ m = 0, 1 \end{cases} .$$

Les indices p et f , utilisés dans la première expression, portent respectivement sur les ondes libres associées aux branches P_2 et F_1 de la courbe de dispersion pour le mode respiratoire. Dans la suite de l'exposé, ces ondes sont respectivement dénommées ondes « de type paroi » et « de type fluide ». Lorsque le tuyau est rempli d'un fluide léger, le terme $\hat{S}_{0,f}^q(\xi)$ peut être négligé parce que l'interaction entre la paroi et le fluide est faible. La distribution axiale de la grandeur mesurée est alors notée:

$$q_0(\xi, t) = \hat{S}_0^q(\xi) e^{i\alpha t} .$$

La conséquence de l'hypothèse 2 est que seulement cette partie du flux de puissance nette transférée par l'interaction entre des ondes libres peut être déterminée par mesure.

5.2.1 Méthode des matrices interspectrales

Le dispositif présenté dans la figure 5.3 permet l'estimation du flux de puissance nette lorsqu'il n'y a qu'une paire d'ondes libres se propageant dans les sens axiaux opposés.

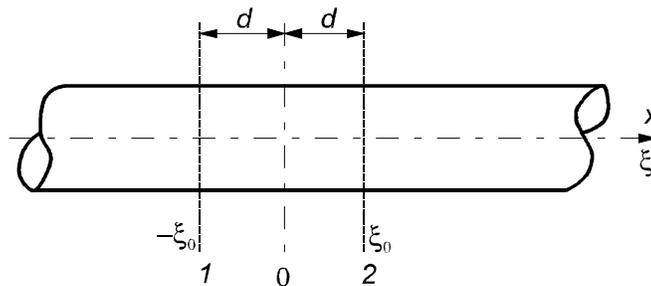


Figure 5.3: Dispositif des 2 antennes circonférentielles

Il s'agit des cas suivants:

- mode de flexion pour un tuyau vide ou rempli d'un fluide quelconque,
- mode lobaire d'ordre 2 pour un tuyau vide ou rempli d'un fluide quelconque,
- mode respiratoire pour un tuyau vide ou rempli d'un fluide léger.

A condition de connaître la matrice interspectrale:

$$\underline{\underline{\Phi}}_n = \begin{bmatrix} [\Phi_n]_{11} & [\Phi_n]_{12} \\ [\Phi_n]_{21} & [\Phi_n]_{22} \end{bmatrix} \quad n = 0, 1, 2 ,$$

il est possible de déterminer les différences entre les carrés d'amplitudes $D_n^{w^2}$, nécessaires pour le calcul du flux total de puissance ainsi que l'indice de propagation γ_n défini de la manière suivante:

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 - R_n & \text{si } R_n \leq 1 \\ R_n^{-1} - 1 & \text{si } R_n > 1 \end{cases} . \quad (5.2.1.1)$$

Le rapport R_n désigne le rapport entre les carrés d'amplitudes de la grandeur mesurée q :

$$R_n = \frac{|\hat{q}_n^-|^2}{|\hat{q}_n^+|^2} . \quad (5.2.1.2)$$

La propriété de l'indice de propagation est d'être bornée:

$$-1 \leq \gamma_n \leq 1 .$$

Lorsque γ_n est positif, le flux de puissance nette est orienté de l'antenne 1 vers l'antenne 2 (voir figure 5.3) et inversement. Trois cas extrêmes sont possibles:

- $\gamma_n = 1 \rightarrow$ cas d'une seule onde dans le tuyau, celle-ci se propageant dans le sens positif. Les conditions aux limites sont telles que le tuyau peut être considéré semi-infini à droite pour le sens de propagation donné dans la figure 5.3
- $\gamma_n = -1 \rightarrow$ cas d'une seule onde dans le tuyau, celle-ci se propageant dans le sens négatif. Les conditions aux limites sont telles que le tuyau peut être considéré semi-infini à gauche pour le sens de propagation donné dans la figure 5.3
- $\gamma_n = 0 \rightarrow$ cas réverbérant. Le flux de puissance nette dans le tuyau est nul.

Les différences entre les carrés d'amplitudes $D_n^{w^2}$ sont données par les expressions suivantes:

$$D_0^{w^2} = - \frac{\Im\{[\Phi_0]_{12}\}}{K_0 \sin(2\chi_0 \xi_0)} , \quad (5.2.1.3)$$

$$D_n^{w^2} = - \frac{\sum_{m=0}^1 \Im\{[\Phi_{n;m}]_{12}\}}{K_n \sin(2\chi_n \xi_0)} \quad n = 1, 2 , \quad (5.2.1.4)$$

où \Im dénote la partie imaginaire de l'interspectre Φ_{12} , celui-ci étant définis par l'expression suivante [7]:

$$\Phi_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[Q^*(-\xi_0, f, T) Q(\xi_0, f, T)] ,$$

où E désigne l'opération de l'espérance mathématique; par f est notée la fréquence; Q désigne la transformée de Fourier de la grandeur mesurée q sur un intervalle fini de temps T ; n désigne le mode circonférentiel; l'exposant « * » désigne qu'il s'agit de valeur complexe conjuguée.

Dans (5.2.1.3 - 4), K désigne la constante de transformation de la grandeur mesurée q (l'accélération ou la déformation) en déplacement normal w .

Si la grandeur mesurée est l'élongation axiale ε_{xx} :

$$K_n = \left[\frac{\chi_n}{a} \left(\Gamma_n^u + \frac{h}{2a} \chi_n \right) \right]^2 \quad n = 0, 1, 2 ,$$

si c'est l'accélération normale:

$$K = \omega^4 .$$

Les expressions (5.2.1.3, 4) deviennent singulières lorsque:

$$2\chi_n \xi_0 = k\pi \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Cette singularité conditionne l'écart d entre les antennes. Ainsi, si l'on veut éviter que (5.2.1.3, 4) deviennent singulières dans une bande fréquentielle $[f_m, f_M]$, l'écart $2d$ entre les antennes doit satisfaire la condition suivante:

$$(k-1) \frac{\lambda_n(f_m)}{2} < 2d < k \frac{\lambda_n(f_M)}{2} \quad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

où λ_n désigne la longueur d'ondes (du mode circonférentiel n) en fonction des fréquences minimale f_m , et maximale f_M de la bande fréquentielle mesurée.

Pour le mode respiratoire, le rapport R est donné par:

$$R_0 = \frac{[\Phi_0]_{11} + [\Phi_0]_{22} - 2\Re\{[\Phi_0]_{12} e^{i2\chi_n \xi_0}\}}{[\Phi_0]_{11} + [\Phi_0]_{22} - 2\Re\{[\Phi_0]_{12} e^{-i2\chi_n \xi_0}\}} . \quad (5.2.1.5)$$

Pour les mode supérieurs:

$$R_n = \frac{\sum_{m=0}^1 \left[[\Phi_{n;m}]_{11} + [\Phi_{n;m}]_{22} - 2\Re\{[\Phi_{n;m}]_{12} e^{i2\chi_n \xi_0} \} \right]}{\sum_{m=0}^1 \left[[\Phi_{n;m}]_{11} + [\Phi_{n;m}]_{22} - 2\Re\{[\Phi_{n;m}]_{12} e^{-i2\chi_n \xi_0} \} \right]} \quad n = 1, 2 \quad (5.2.1.6)$$

Lorsque le tuyau est rempli d'un fluide lourd, la démarche pour la décomposition axiale, présentée ci-dessus, n'est plus applicable au cas de figure du mode respiratoire. Dans un tel cas, une paire d'ondes de type fluide et une autre paire d'ondes de type paroi se propagent simultanément dans le tuyau.

La décomposition axiale peut être réalisée en utilisant un dispositif des 4 antennes circonférentielles, réparties le long de tuyau de la façon présentée dans la figure 5.4.

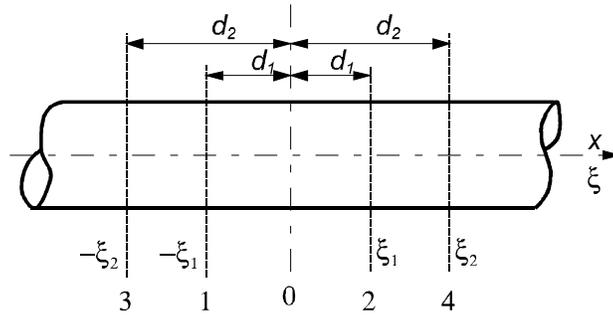


Figure 5.4: Dispositif des 4 antennes circonférentielles

Afin de simplifier la démonstration, supposons que les signaux soient déterministes. Dans ce cas, l'interspectre $[\Phi_0]_{12}$ s'écrit:

$$[\Phi_0]_{12} = Q^*(-\xi_1, f)Q(\xi_1, f) = \left[\hat{S}_{0;p}^q(-\xi_1) + \hat{S}_{0;f}^q(-\xi_1) \right]^* \left[\hat{S}_{0;p}^q(\xi_1) + \hat{S}_{0;f}^q(\xi_1) \right] . \quad (5.2.1.7)$$

Etant donné que

$$\hat{S}_{0;j}^q(\xi) = \hat{q}_{0;j}^+ e^{-i\chi_{0;j}\xi} + \hat{q}_{0;j}^- e^{i\chi_{0;j}\xi} \quad j = p, f ,$$

l'expression (5.2.1.7) représente une équation de 16 inconnues qui se présentent sous forme des produits $\left[q_{0;p(f)}^{+(-)} \right]^* q_{0;p(f)}^{+(-)}$. Pour trouver ces inconnues, il est nécessaire d'établir un système de 16 équations. Celui-ci est mis en place à condition de connaître la matrice interspectrale $\underline{\underline{\Phi}}_0$:

$$\underline{\underline{\Phi}}_0 = \begin{bmatrix} [\Phi_0]_{11} & \cdots & [\Phi_0]_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\Phi_0]_{41} & \cdots & [\Phi_0]_{44} \end{bmatrix}$$

et il peut être noté sous forme matricielle:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} . \quad (5.2.1.8)$$

Dans (5.2.1.8), les composantes de la matrice $\underline{\underline{A}}$ se présentent sous forme des exponentiels complexes, le vecteur $\underline{\underline{X}}$ contient les inconnues $\left[q_{0;p(f)}^{+(-)} \right]^* q_{0;p(f)}^{+(-)}$ et le vecteur $\underline{\underline{B}}$ contient les composantes de la matrice interspectrale.

Une fois $\left[q_{0;p(f)}^{+(-)} \right]^* q_{0;p(f)}^{+(-)}$ connues, les différences $D_{0;p}^{w^2}$, $D_{0;f}^{w^2}$, nécessaires pour la détermination du flux de puissance nette dans le tuyau, s'obtiennent par:

$$D_{0;j}^{w^2} = \frac{\left[q_{0;j}^+ \right]^* q_{0;j}^+ - \left[q_{0;j}^- \right]^* q_{0;j}^-}{K_{0;j}} \quad j = p, f .$$

La constante de transformation K est donnée en fonction de la grandeur mesurée q . Lorsque toutes les antennes circonférentielles mesurent l'élongation axiale ε_{xx} , la constante K s'écrit:

$$K_{0;j} = \left[\frac{\chi_{0;j}}{a} \left(\Gamma_{0;j}^u + \frac{h}{2a} \chi_{0;j} \right) \right]^2 \quad j = p, f ,$$

L'équation (5.2.1.8) devient singulière aux fréquences pour lesquelles:

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 0 .$$

Nous les appelons « *fréquences singulières* ».

5.2.2 Méthode des fonctions de réponse fréquentielle

Lorsque toutes les excitations sur le tuyau sont parfaitement corrélées, il est possible de travailler avec les fonctions de réponse fréquentielle. Ceci convient particulièrement au cas du mode respiratoire du tuyau rempli d'un fluide lourd. Le dispositif des 4 antennes présenté dans la figure 5.4 est approprié à la tâche.

Pour le mode respiratoire, la fonction de réponse fréquentielle H d'une grandeur q par rapport à la référence X peut s'écrire sous la forme suivante:

$$H(\xi, f) = K_{0;p}^+(\xi) \hat{h}_{0;p}^+ e^{-i\chi_{0;p}\xi} + K_{0;p}^-(\xi) \hat{h}_{0;p}^- e^{i\chi_{0;p}\xi} + K_{0;f}^+(\xi) \hat{h}_{0;f}^+ e^{-i\chi_{0;f}\xi} + K_{0;f}^-(\xi) \hat{h}_{0;f}^- e^{i\chi_{0;f}\xi}$$

avec

$$\hat{h}_{0;p}^+ = \frac{\hat{w}_{0;p}^+(f)}{X(f)} \quad \hat{h}_{0;p}^- = \frac{\hat{w}_{0;p}^-(f)}{X(f)} \quad \hat{h}_{0;f}^+ = \frac{\hat{w}_{0;f}^+(f)}{X(f)} \quad \hat{h}_{0;f}^- = \frac{\hat{w}_{0;f}^-(f)}{X(f)} .$$

L'expression pour H est écrite en supposant que l'on se trouve dans le champ lointain. Par K sont notées les constantes de transformation de la grandeur mesurée à la position ξ (accélération ou déformation) en déplacement normal. Ces constantes sont données par les expressions suivantes:

- pour l'élongation axiale:

$$K_{0;j}^+ = K_{0;j}^- = \frac{\chi_{0;s}}{a} \left(\frac{h}{2a} \chi_{0;j} + \Gamma_{0;j}^u \right) \quad j = p, f$$

- pour l'élongation circonférentielle:

$$K_{0;j}^+ = K_{0;j}^- = \frac{2}{2a + h} \quad j = p, f .$$

- pour l'accélération axiale:

$$K_{0;j}^+ = K_{0;j}^- = -i\omega^2 \left(\Gamma_{0;j}^u + \frac{h}{2a} \chi_{0;j} \right) \quad j = p, f .$$

Les inconnues $\hat{h}_{0;p}^+$, $\hat{h}_{0;p}^-$, $\hat{h}_{0;f}^+$, $\hat{h}_{0;f}^-$ peuvent être déterminées à partir de l'équation suivante:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{h}} = \underline{\underline{H}} , \quad (5.2.2.1)$$

où

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} K_{0;p}^+(-\xi_1) e^{i\chi_{0;p}\xi_1} & K_{0;p}^-(-\xi_1) e^{-i\chi_{0;p}\xi_1} & K_{0;f}^+(-\xi_1) e^{i\chi_{0;f}\xi_1} & K_{0;f}^-(-\xi_1) e^{-i\chi_{0;f}\xi_1} \\ K_{0;p}^+(\xi_1) e^{-i\chi_{0;p}\xi_1} & K_{0;p}^-(\xi_1) e^{i\chi_{0;p}\xi_1} & K_{0;f}^+(\xi_1) e^{-i\chi_{0;f}\xi_1} & K_{0;f}^-(\xi_1) e^{i\chi_{0;f}\xi_1} \\ K_{0;p}^+(-\xi_2) e^{i\chi_{0;p}\xi_2} & K_{0;p}^-(-\xi_2) e^{-i\chi_{0;p}\xi_2} & K_{0;f}^+(-\xi_2) e^{i\chi_{0;f}\xi_2} & K_{0;f}^-(-\xi_2) e^{-i\chi_{0;f}\xi_2} \\ K_{0;p}^+(\xi_2) e^{-i\chi_{0;p}\xi_2} & K_{0;p}^-(\xi_2) e^{i\chi_{0;p}\xi_2} & K_{0;f}^+(\xi_2) e^{-i\chi_{0;f}\xi_2} & K_{0;f}^-(\xi_2) e^{i\chi_{0;f}\xi_2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{h}} = \begin{bmatrix} \hat{h}_{0;p}^+ \\ \hat{h}_{0;p}^- \\ \hat{h}_{0;f}^+ \\ \hat{h}_{0;f}^- \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} H(-\xi_1, f_1) \\ H(\xi_1, f_1) \\ H(-\xi_2, f_1) \\ H(\xi_2, f_1) \end{bmatrix} .$$

Les termes dans l'équation (5.2.2.1) correspondent aux positions des antennes circonférentielles 1, 2, 3 et 4 dans la figure 5.4. Les carrés entre les amplitudes du déplacement normal sont donnés par l'équation suivante:

$$\begin{Bmatrix} |\hat{w}_{0;p}^+|^2 \\ |\hat{w}_{0;p}^-|^2 \\ |\hat{w}_{0;f}^+|^2 \\ |\hat{w}_{0;f}^-|^2 \end{Bmatrix} = \Phi_{XX} \begin{Bmatrix} |\hat{h}_{0;p}^+|^2 \\ |\hat{h}_{0;p}^-|^2 \\ |\hat{h}_{0;f}^+|^2 \\ |\hat{h}_{0;f}^-|^2 \end{Bmatrix}, \quad (5.2.2.2)$$

où Φ_{XX} est l'autospectre de la référence X .

L'équation (5.2.2.1) possède aussi bien que éq. (5.2.1.8) des fréquences singulières, pour lesquelles:

$$\det(\underline{\underline{A}}) = 0 .$$

L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode des interspectres est que l'équation (5.2.2.1) est moins lourde à résoudre que l'équation (5.2.1.8)

Il convient de remarquer que Halkyard et Mace [6] utilisent la même technique pour séparer les ondes de flexion évanescentes de celles libres dans une poutre.

5.3 ANALYSE DES ERREURS

Comme toute méthode expérimentale, les méthodes présentées ci-dessus sont exposées aux erreurs. Les origines de ces erreurs peuvent être différentes:

- imprécision du positionnement de capteurs,
- estimation imprécise des fonctions de réponse fréquentielle,
- sensibilité transversale des capteurs,
- une ou plusieurs antennes se trouvent dans le champ proche.

A cause de la complexité du mouvement vibratoire d'un tuyau, ces erreurs peuvent diminuer considérablement la précision des méthodes de décomposition ondulatoire. Il convient d'étudier ces erreurs, cas par cas, afin de les réduire au minimum.

Dans le but d'éviter les erreurs dues à la sensibilité transversale des capteurs, il faut soulever la question du choix des capteurs voire le choix de la grandeur à mesurer. Sur un tuyau, nous pouvons mesurer accélérations et déformations (élongations). Les rapports entre l'élongation axiale ε_{xx} et circonférentielle ε_{yy} pour les modes respiratoire et de flexion sont présentés dans la figure 5.5. Les courbes sont tracées pour le tuyau en aluminium (diamètre 60 [mm], épaisseur 2 [mm]) rempli d'eau, l'échelle de l'axe des ordonnées étant en décibels (la valeur de 0 [dB] correspond au rapport unitaire).

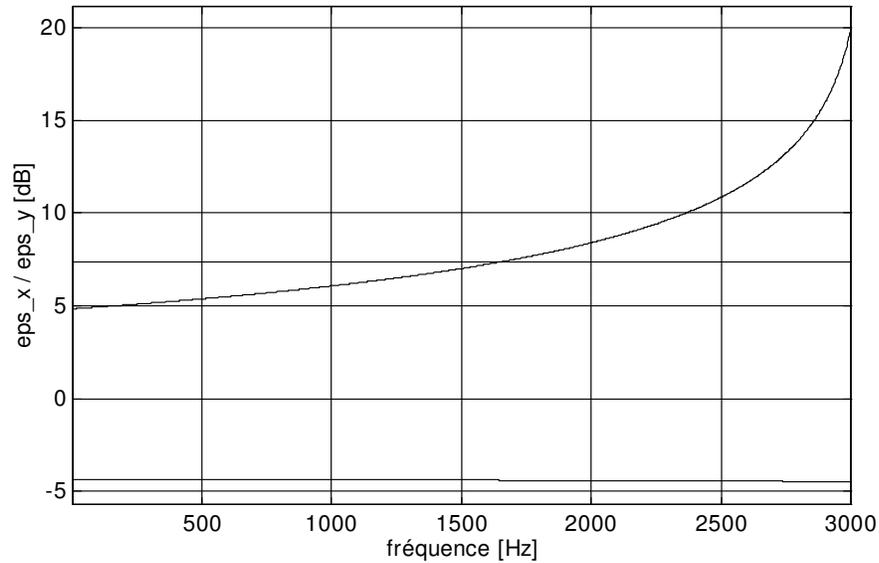


Figure 5.5: Rapport entre l'élongation axiale et circonférentielle, ondes de type paroi (trait interrompu), ondes de type fluide (trait continu), ondes libres du mode de flexion (trait mixte)

Pour le mode respiratoire, les ondes de type paroi provoquent les élongations axiales supérieures à celles circonférentielles et vice versa pour les ondes de type fluide. Il faut donc mesurer les deux afin d'augmenter la précision de la méthode de décomposition axiale. En ce qui concerne le mode de flexion, l'élongation axiale est un meilleur choix que l'élongation circonférentielle. La figure 5.6 présente le rapport entre l'accélération normale et axiale pour les ondes de type paroi et de type fluide. L'échelle de l'axe des ordonnées est en décibels, les courbes sont tracées pour le tuyau en aluminium (diamètre 60 [mm], épaisseur 2 [mm]) rempli d'eau.

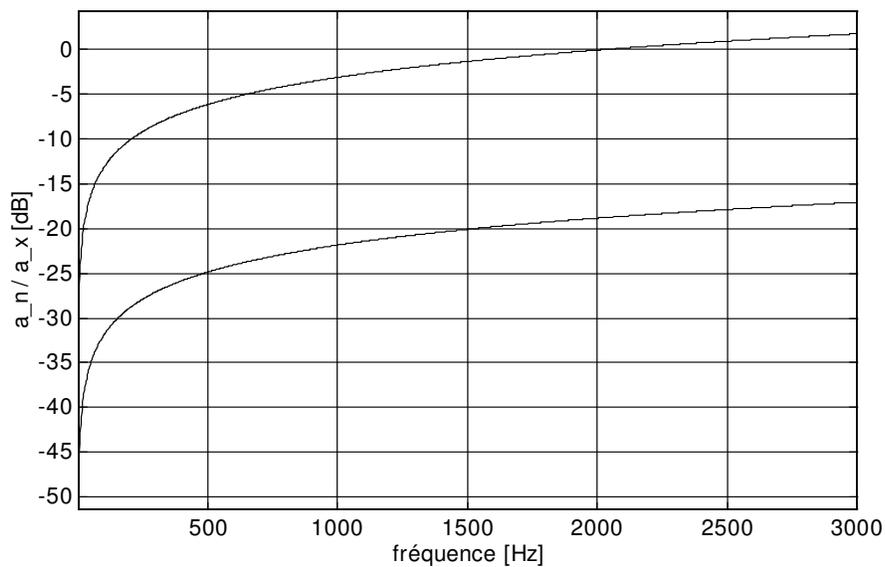


Figure 5.6: Rapport entre l'accélération normale et axiale, ondes de type paroi (trait interrompu), ondes de type fluide (trait continu)

Dans la gamme fréquentielle affichée par le diagramme, ce rapport est toujours très inférieur à 1 pour les ondes de type paroi. Etant donné que la sensibilité transversale pour la plupart des accéléromètres est inférieure à 5%, toute mesure des accélérations normales du mode respiratoire est erronée. En conclusion, mesurer les accélérations normales du mode respiratoire représente un très mauvais choix. Au contraire, la mesure des accélérations normales se présente comme un très bon choix pour le mode de flexion.

Les erreurs provoquées par le champ proche représentent un moindre problème. Pour le mode respiratoire, aux basses fréquences, le champ proche est de très courte portée. Par conséquent, les antennes circonférentielles peuvent être positionnées assez près des discontinuités. Ceci n'est pas le cas lorsqu'il s'agit du mode de flexion. Pour celui-ci, la portée du champ proche baisse avec la croissance de la fréquence (en fait ceci n'est vrai que dans le domaine des basses fréquences car, pour les fréquences supérieures, la branche P_2 baisse en s'approchant de sa fréquence de coupure, voir les figures 3.4 et 3.11). Il en va de même pour le mode lobaire d'ordre 2. Les antennes doivent être situées le plus loin possible des discontinuités si l'on veut éviter le champ proche.

Les erreurs d'estimation des fonctions de réponse fréquentielle (FRF) dépendent de plusieurs facteurs:

- choix de l'estimateur des FRF (estimateur H_1 , H_2 , etc.),
- rapport signal/bruit,
- nombre des moyennes,
- résolution fréquentielle dans la bande d'analyse; type de fenêtre (Hanning, Hamming).

Ces erreurs sont commentées dans plusieurs ouvrages [7, 8, 9,] et ne sont pas évoquées dans cette étude. Il convient de remarquer que leur influence sur la précision des mesures peut être très importante surtout lorsque le déphasage entre les signaux fournis par les deux antennes différentes devient faible.

Dans la figure 5.7 sont présentées les longueurs d'ondes λ de type paroi, de type fluide et d'ondes libres du mode de flexion. Les courbes sont tracées pour le cas de tuyau en aluminium (diamètre 60 [mm], épaisseur 2 [mm]) rempli de l'eau, l'échelle de l'axe des ordonnées est en décibels (0 dB correspond à la longueur d'ondes de 1 [m]). La longueur d'ondes de type paroi est considérable en basses fréquences, par exemple, λ est de 10 [m] pour la fréquence de 500 [Hz]. D'après la figure 5.7, la mesure d'ondes de type paroi nécessite les écarts entre les antennes supérieurs aux écarts utilisés pour la mesure d'autres ondes (de type fluide, mode de flexion).

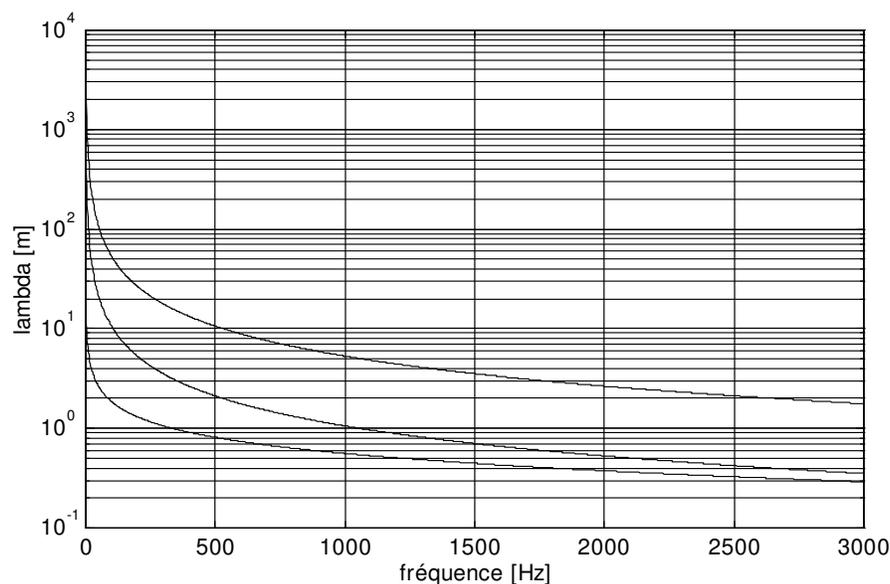


Figure 5.7: *Longueur d'ondes de type paroi (trait interrompu), de type fluide (trait continu) et d'ondes libres du mode de flexion (trait mixte)*

Les erreurs de positionnement sont assez difficiles à quantifier. Pavic, dans [5] le fait dans l'hypothèse où les écarts (axiaux et circonférentiels) suivent une distribution de Gauss. Selon cette étude, les erreurs de positionnement peuvent facilement dépasser 100% en proximité des fréquences singulières.

5.5 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **D. U. Noiseux:** "Measurement of power flow in uniform beams and plates", JASA Volume 47 Number 1 (Part 2) 1970
2. **G. Pavic:** "Vibroacoustical energy flow through straight pipes", JSV (1992) 154(3), 411 - 429
3. **C. A. F. de Jong, J. W. Verheij:** "Measurement of vibrational energy flow in straight fluid-filled pipes: a study of the effect of fluid-structure interaction", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993,
4. **S. Bourget, F. J. Fahy:** "Vibrational power flow measurement along thin cylindrical pipe", 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
5. **G. Pavic:** "Accuracy of energy flow measurement in pipes using the wave decomposition technique", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
6. **C. R. Halkyard, B. R. Mace:** "A wave component approach to structural intensity in beams", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
7. **J. S. Bendat, A. G. Piersol:** "Engineering applications of correlation and spectral analysis", 1980 John Wiley & Sons, Inc.
8. **F. de Coulon:** "Théorie et traitement des signaux", Traité d'Electricité, d'Electronique et d'Electrotechnique - Volume VI, 1984 Dunod
9. **M. Kunt:** "Traitement numérique des signaux", Traité d'Electricité, d'Electronique et d'Electrotechnique - Volume VI, 1984 Dunod

6 MESURES DU FLUX DE PUISSANCE

Dans ce chapitre sont décrites les mesures du flux des puissances vibratoire et acoustique. Le chapitre est divisé en 3 paragraphes, chacun d'eux relatif à une expérience particulière.

Le procédé de vérification expérimentale des techniques de mesure pour le tuyau rempli d'air est le sujet du paragraphe 6.1. L'application à un cas industriel (mesure sur la tuyauterie d'un compresseur frigorifique) est présentée dans le paragraphe 6.2. Le paragraphe 6.3 décrit le procédé de vérification expérimentale pour le tuyau rempli d'un fluide lourd. D'autres résultats de mesure concernant la vérification expérimentale sont présentés dans l'annexe 5.

6.1 MESURES SUR UN TUYAU REMPLI D'UN FLUIDE LEGER

Les techniques de mesure présentées dans le chapitre 5, avant d'être appliquées aux situations réelles, doivent être examinées sur une configuration de laboratoire. L'objectif de tels essais est de mettre en évidence la précision des techniques de mesure proposées par un procédé de vérification convenable. Etant donné que notre but est de déterminer le flux de puissance nette dans le tuyau, le meilleur procédé de vérification est l'examen expérimental de la relation (4.1.10). Le procédé de vérification se ramène donc à la comparaison de la puissance injectée dans le tuyau à celle transférée dans celui-ci, les deux déterminées par mesure. Ceci implique que la mesure de la puissance injectée doit être la plus précise possible.

Afin de réaliser le procédé de vérification, un banc d'essai est mis en place. Celui-ci se compose d'un tuyau en aluminium et de deux excitateurs connectés sur les terminaisons du tuyau. Le rôle des excitateurs est de fournir trois types d'excitations du tuyau:

- excitation de type axial
- excitation de type flexion
- excitation de type combinée (à la fois des types axial et flexion)

Pour chaque type d'excitation, les adaptateurs spéciaux sont montés sur les terminaisons du tuyau. Leur rôle est double:

- réalisation de la connexion entre le tuyau et l'excitateur
- montage d'un capteur de force et d'un accéléromètre sur le même axe, celui-ci étant dans le sens du mouvement de l'excitateur

La puissance fournie ou prise par un excitateur est alors donnée par l'expression suivante:

$$P = \frac{1}{2\omega} \Im(\hat{\Phi}_{Fa}), \quad (6.1.1)$$

où ω désigne la pulsation et $\hat{\Phi}_{Fa}$ désigne l'interspectre entre la force et l'accélération. Par \Im est notée la partie imaginaire.

Les antennes circonférentielles réparties le long du tuyau sont constituées des jauges de contraintes. Le tuyau est 3 [m] de long, son diamètre externe est de 60 [mm] et l'épaisseur de la paroi est de 2 [mm]. Il est rempli d'air et repose sur deux morceaux de mousse ce qui permet de réaliser des conditions aux limites de type libre - libre.

Les excitateurs sont pilotés par un générateur de signaux, celui-ci leur fournissant un signal aléatoire large bande. On impose un déphasage entre les signaux qui pilotent les excitateurs de la manière suivante:

- l'un des excitateurs est connecté directement sur le générateur des signaux

- l'autre excitateur est connecté sur le générateur au travers d'un circuit électronique, le rôle de celui-ci étant de créer le déphasage

Ce déphasage aide à la création du flux d'énergie vibratoire dans le tuyau.

6.1.1 Essai axial

Le banc d'essai est présenté dans la figure 6.1. Le sens supposé de propagation de l'énergie vibratoire est de l'excitateur A vers l'excitateur B. Les antennes périmétriques sont constituées des jauges mesurant l'élongation axiale. L'écart d entre les antennes est de 900 [mm].

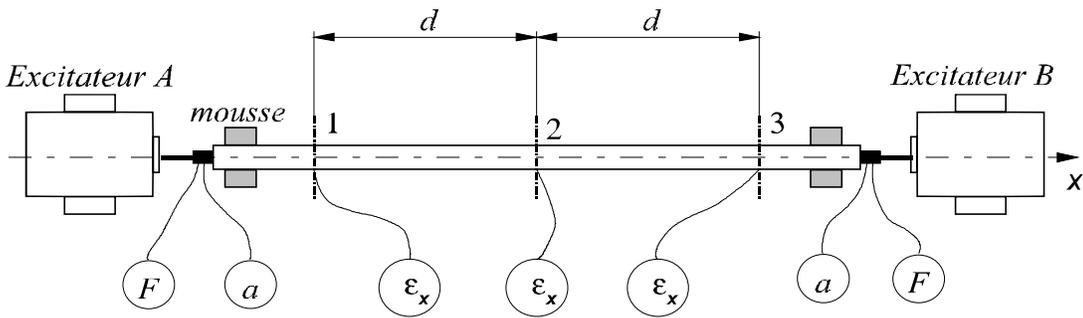


Figure 6.1: Dispositif de mesure, essai axial

Pendant l'essai, l'excitateur A est actif servant d'émetteur d'énergie vibratoire tandis que l'excitateur B reste passif ayant le rôle de récepteur d'énergie vibratoire. Le flux de la puissance vibratoire nette est orienté de l'excitateur A vers celui B, donc positif.

Les puissances mesurées aux terminaisons sont présentés dans la figure 6.2 (la référence de l'échelle des décibels est de 1 [mW]).

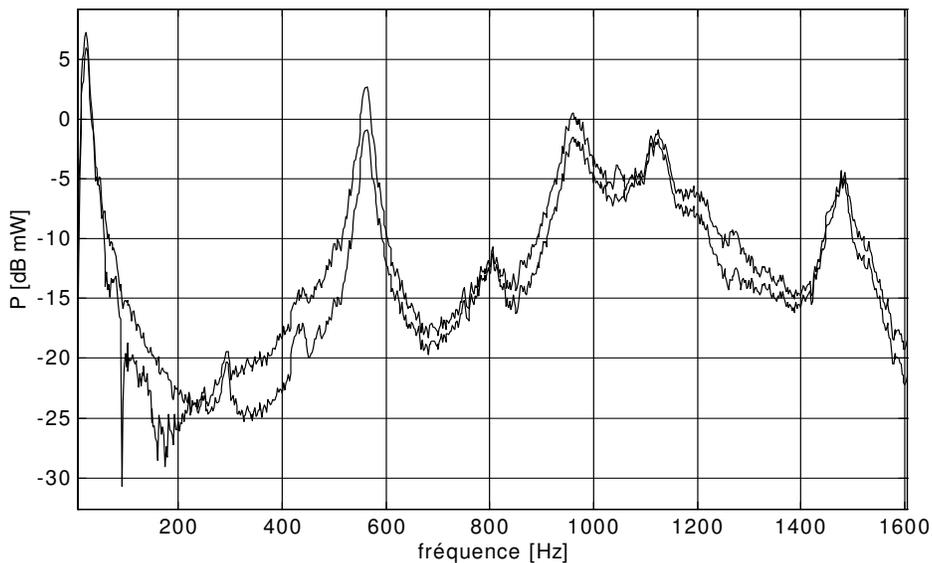


Figure 6.2: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu)

Dans la figure 6.3 sont présentés les évolutions du nombre d'ondes non-dimensionnel (noté par k_0) mesuré et du nombre d'ondes quasi-longitudinales (branche P_2 du mode respiratoire) calculé

dans le cadre de la théorie de Flügge. La technique de mesure pour le nombre d'ondes est présentée dans l'annexe 4.

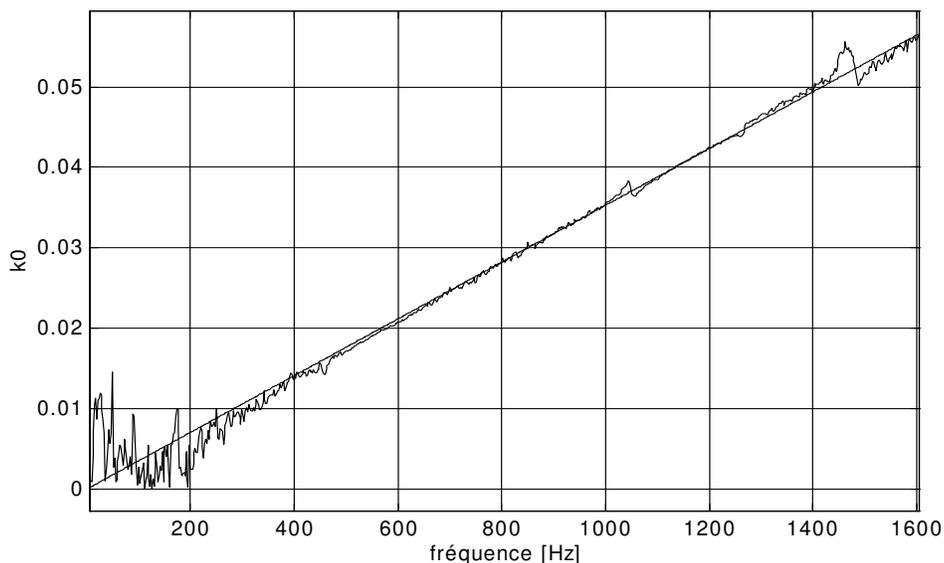


Figure 6.3: Nombre d'ondes théorique (trait interrompu), mesuré (trait continu)

La concordance entre la courbe théorique et mesurée est assez bonne pour les fréquences supérieures à 400 [Hz]. Aux basses fréquences, il y a une discordance qui est due aux mauvaises conditions de mesure (champ très réverbérant, mauvais rapport signal/bruit).

Dans les figures 6.4 et 6.5 sont respectivement présentées les flux de puissance vibratoire et l'indice de propagation déterminés à l'aide des antennes 1, 2 et 3. Sachant que deux antennes sont nécessaires pour la détermination du flux vibratoire (de même que pour l'indice de propagation), trois combinaisons des antennes sont possibles:

- antennes 1 et 2
- antennes 1 et 3
- antennes 2 et 3

Ainsi, dans les figures 6.4 et 6.5, trois courbes sont tracées. Théoriquement (pour les matériaux très peu dissipatifs), la technique de décomposition axiale, hormis pour les fréquences singulières, n'est pas sensible au positionnement des antennes à condition que celles-ci se trouvent dans le champ lointain. La figure 6.4 confirme cette hypothèse. Dans la même figure, on peut observer l'erreur de mesure pour la combinaison des antennes 1 et 3 due à sa fréquence singulière (la fréquence est située au voisinage de 1400 [Hz]). Son étendue fréquentielle est un intervalle de 350 [Hz] situé entre 1250 et 1600 [Hz]. Il est donc nécessaire de soigneusement déterminer l'écart entre les antennes en fonction de la gamme des fréquences que l'on veut analyser.

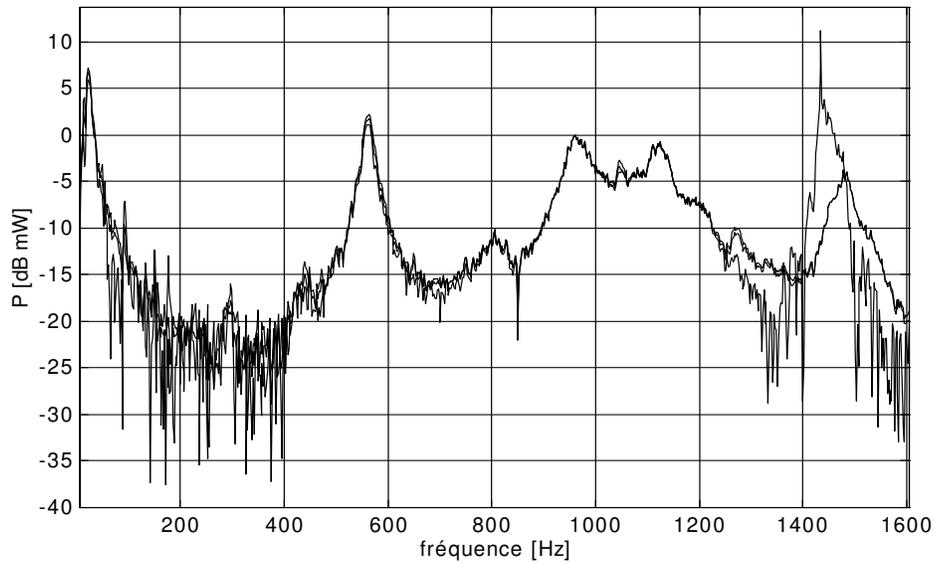


Figure 6.4: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu)

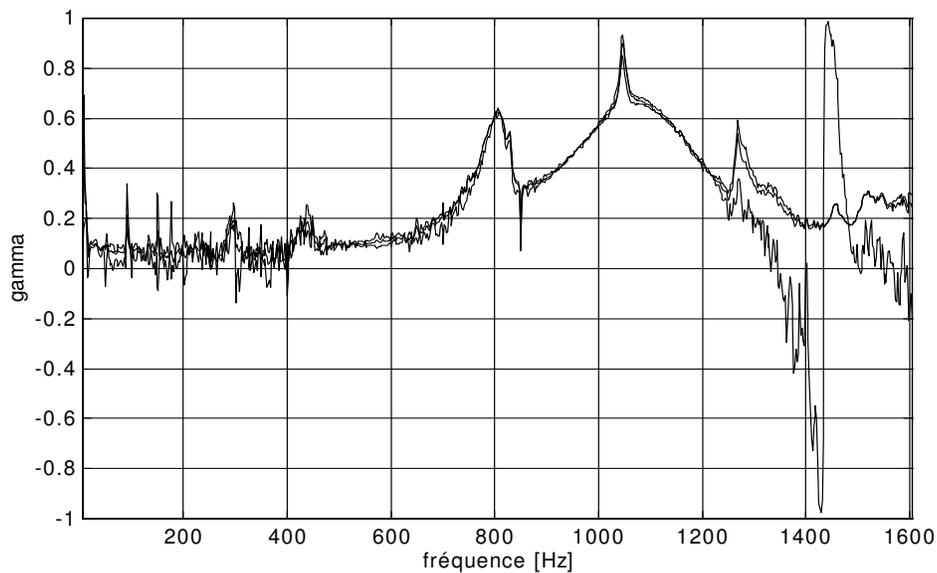


Figure 6.5: Indice de propagation: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes (trait interrompu) en bleu, antennes 2 et 3 (trait continu)

Les courbes de l'indice de propagation se superposent plus ou moins bien jusqu'à la fréquence de 1250 [Hz]. Les fortes variations au dessous de 400 [Hz] s'expliquent par de très faibles élongations mesurées par les antennes de jauges. L'erreur de mesure due à la fréquence singulière se manifeste aussi au niveau de l'indice de propagation. L'étendue fréquentielle de cette erreur reste le même que celui des flux de puissance. Il est intéressant d'observer qu'un haut indice de propagation (proche de 1) ne correspond pas forcément à un fort flux de puissance.

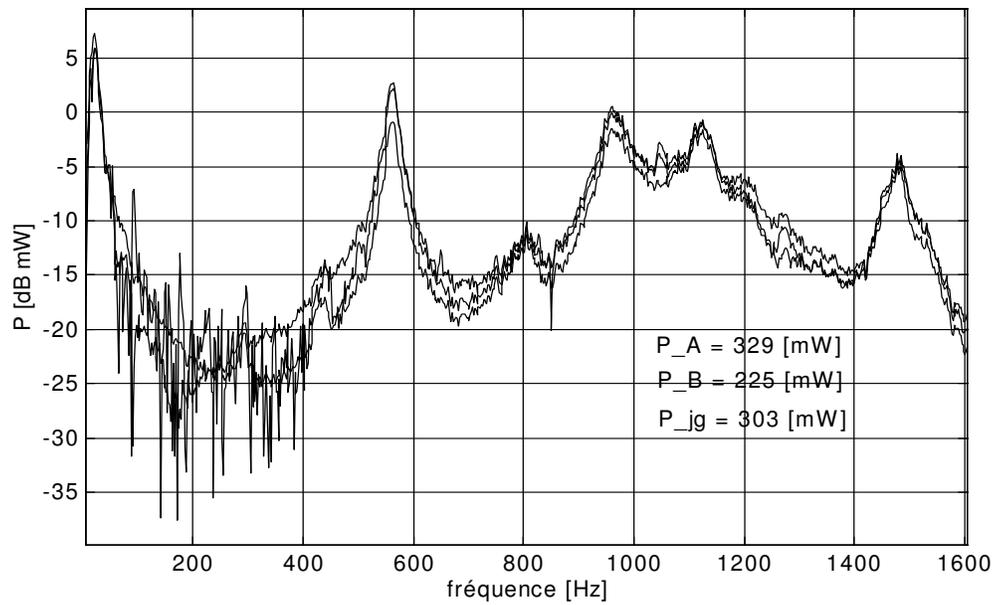


Figure 6.6: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1 et 2 (trait continu)

La dernière étape du procédé de vérification expérimentale est présentée par la figure 6.6. Trois courbes sont tracées:

- puissance à l'entrée (excitateur A)
- puissance à la sortie (excitateur B)
- puissance propagée déterminée par les antennes 1 et 2

Dans la figure 6.6 sont aussi affichées les valeurs pour la puissance injectée totale (dénotée par P_A), celle mesurée sur l'excitateur B (dénotée par P_B) et celle mesurée par les antennes de jauges (P_{jg}). L'écart entre P_A et P_{jg} est de -7.9 %. Cet écart est dû aux faits suivants:

- une partie du flux de puissance vibratoire nette est dissipée dans la mousse qui se trouve entre les antennes et l'excitateur A,
- la précision de la mesure est probablement affectée par les erreurs de mesure évoquées dans le chapitre 4 malgré tous les efforts entrepris afin de les réduire au minimum.

Vu la bonne concordance entre les courbes de la puissance injectée et celle mesurée par les antennes de jauges, d'une part et la bonne concordance entre les courbes dans les figures 6.4 et 6.5, les résultats du procédé de vérification sont jugés satisfaisants.

Il reste à expliquer pourquoi il y a un tel écart entre les puissances mesurées aux terminaisons A et B. Nous pensons qu'une partie considérable du flux de puissance vibratoire nette est dissipée dans la mousse située à côté de l'excitateur B.

6.1.2 Essai de flexion

Le banc d'essai est présenté dans la figure 6.7.

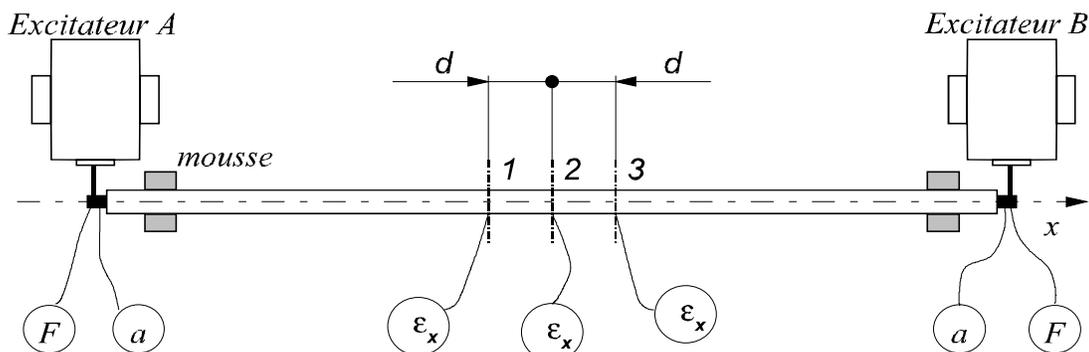


Figure 6.7: Dispositif de mesure, essai de flexion

Le sens supposé de propagation de l'énergie vibratoire est de l'excitateur A vers l'excitateur B. Les antennes circonférentielles sont constituées des jauges mesurant l'élongation axiale. L'écart d entre les antennes est de 300 [mm].

Pendant l'expérience l'excitateur A est actif, tandis que l'excitateur B reste passif. Le flux de puissance ainsi créé est positif dans toute la gamme fréquentielle. Les puissances mesurées aux terminaisons sont présentées dans la figure 6.8 en échelle des décibels.

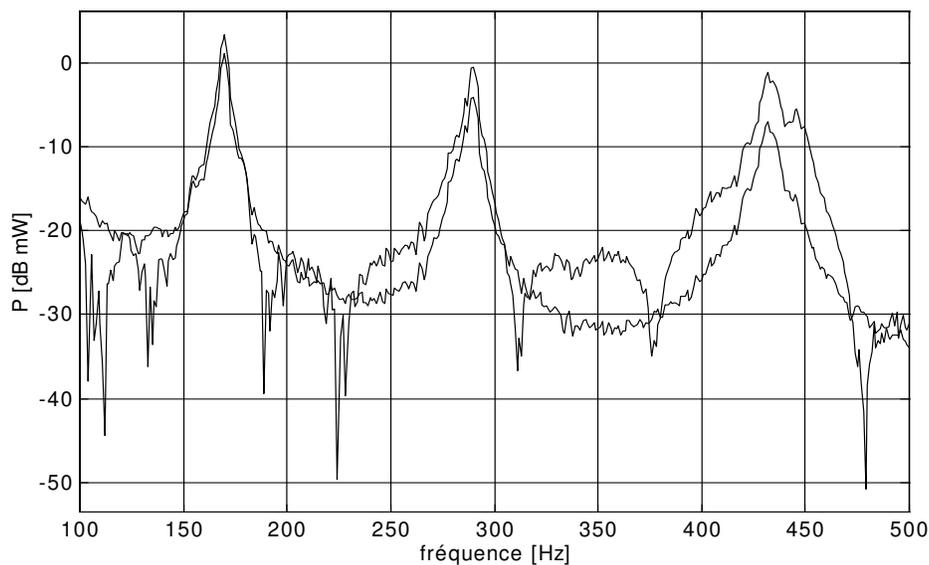


Figure 6.8: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu)

Le nombre d'ondes mesuré est comparé avec celui calculé selon la théorie de Flügge dans la figure 6.9.

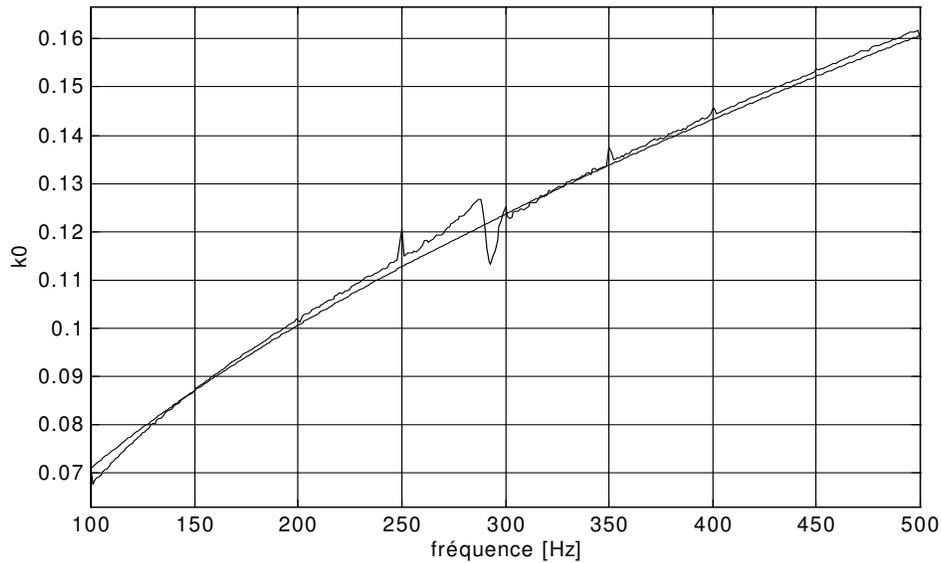


Figure 6.9: Nombre d'ondes théorique (trait interrompu), mesuré (trait continu)

Les courbes de la puissance propagée sont tracées dans la figure 6.10.

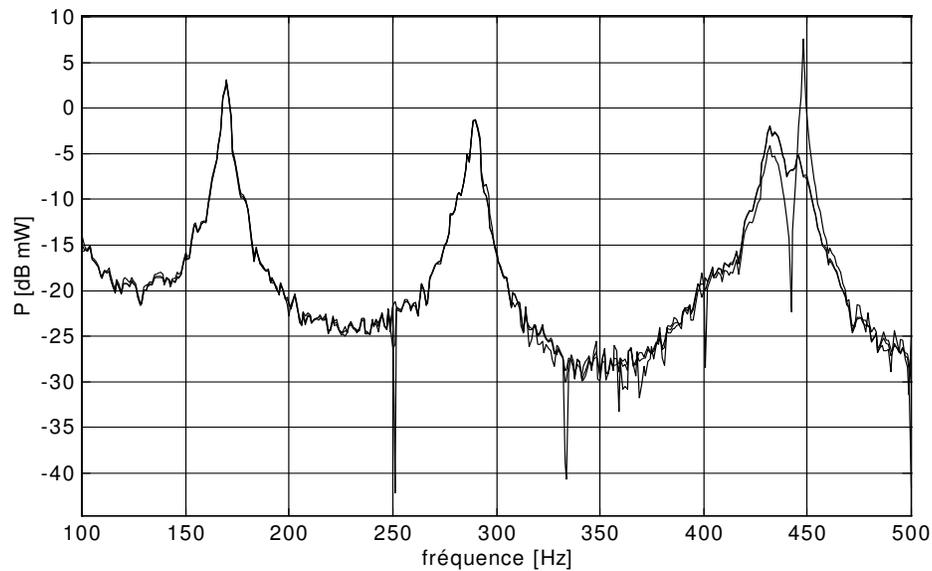


Figure 6.10: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu)

La puissance vibratoire propagée dans le tuyau est calculée à l'aide des combinaisons d'antennes suivantes:

- antennes 1 et 2
- antennes 1 et 3
- antennes 2 et 3

La fréquence singulière pour la combinaison d'antennes 1 et 3 apparaît à environ 450 [Hz]. Hormis dans l'intervalle entre 425 [Hz] et 475 [Hz], les courbes se superposent très bien. L'indice de propagation pour les combinaisons des antennes évoquées est tracé dans la figure 6.11. Les variations de l'indice déterminé par les antennes 1 et 3 sont facilement observables. Par contre, les courbes de l'indice déterminé par les antennes 1 et 2 puis 2 et 3 se concordent beaucoup mieux. La raison principale des déviations de l'indice pour les antennes 1 et 3 est dans l'écart entre celles-ci (600 [mm]) qui fait que la fréquence singulière pour cette combinaison d'antennes se trouve autour de 450 [Hz].

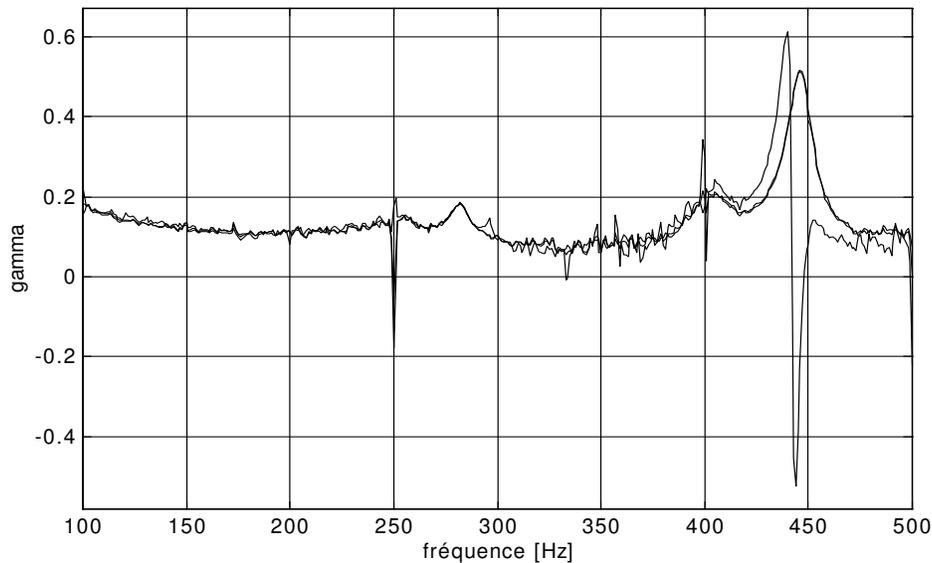


Figure 6.11: Indice de propagation: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu)

Le bilan des puissances est présenté dans la figure 6.12. Comme pour l'essai axial, trois courbes figurent dans le diagramme:

- courbe de la puissance à l'entrée (excitateur A)
- courbe de la puissance à la sortie (excitateur B)
- courbe de la puissance propagée dans le tuyau, déterminée par les antennes 1 et 2.

Ici, l'écart entre P_A et P_{jg} est de -2.6 %. Pour les mêmes raisons que dans le cas de l'essai axial (voir le paragraphe précédent), les résultats du procédé de vérification sont jugés satisfaisants.

Si nous imaginons le tuyau vide en flexion comme un filtre pour le flux de puissance vibratoire, le comportement de ce filtre est analogue à celui d'un filtre passe-bande (avec une bande passante très étroite). Les fréquences pour lesquelles le flux de puissance atteint ces maxima locaux correspondent aux fréquences pour lesquelles le spectre de la force mesurée à l'entrée (excitateur A) atteint les siens. Ces fréquences précèdent de peu les fréquences propres de tuyau en flexion.

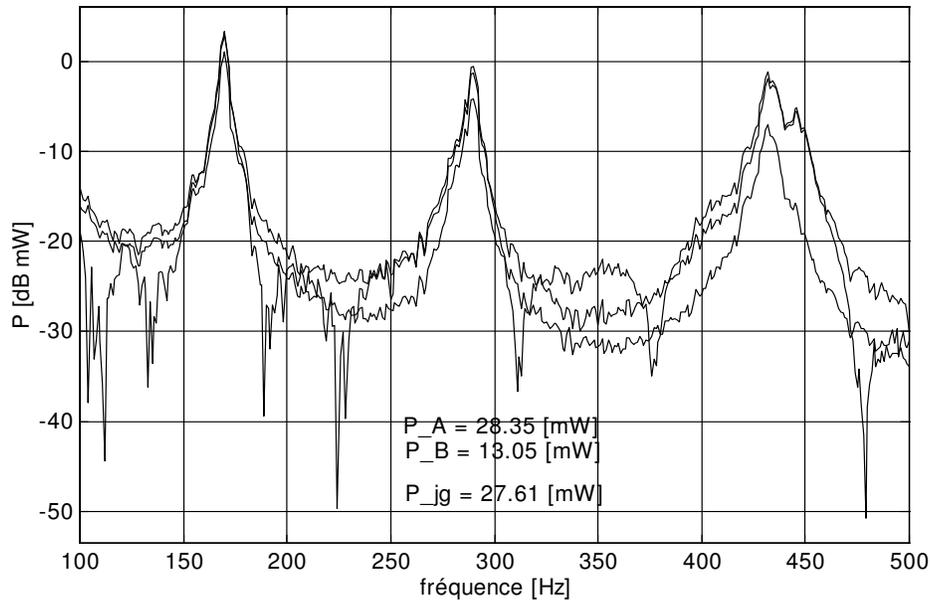


Figure 6.12: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1 et 2 (trait continu)

6.1.3 Essai combiné

Le banc d'essai est présenté dans la figure 6.13. Le sens supposé de propagation de l'énergie vibratoire est de l'excitateur A vers l'excitateur B. Les antennes circumférentielles sont constituées des jauges mesurant l'élongation axiale. Les écarts d_f et d_r sont respectivement de 300 [mm] et de 900 [mm].

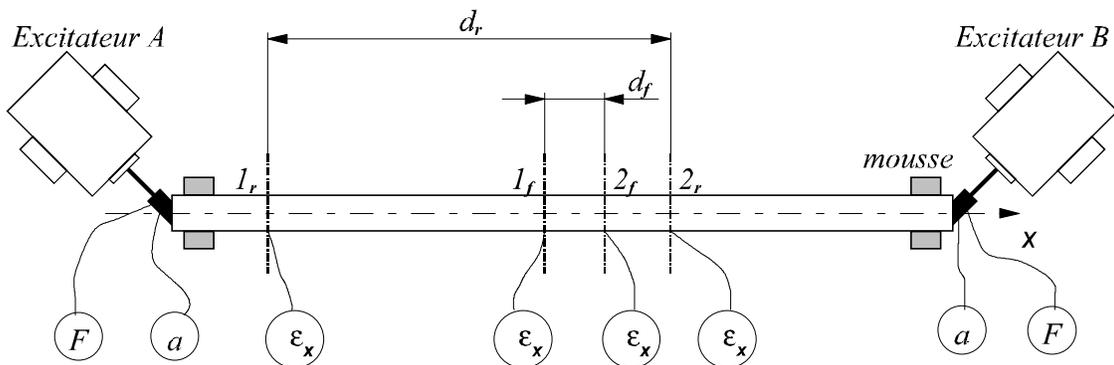


Figure 6.13: Dispositif de mesure, essai combiné

Les courbes des flux de puissance à l'entrée (excitateur A) et à la sortie (excitateur B) sont affiché dans la figure 6.14. Pendant l'essai, l'excitateur A est actif, tandis que l'excitateur B reste passif. Le flux de puissance ainsi créé est positif dans toute la gamme fréquentielle. Les puissances mesurées aux terminaisons sont présentées dans la figure 6.14 en échelle des décibels.

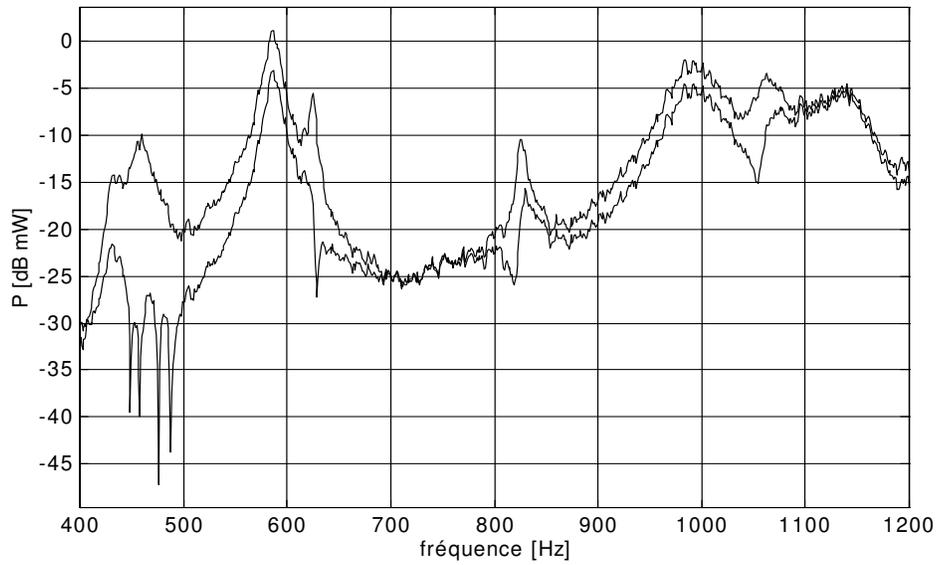


Figure 6.14: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: exciteur A (trait interrompu), exciteur B (trait continu)

Le flux de puissance propagé par le mode respiratoire est présenté dans la figure 6.15.

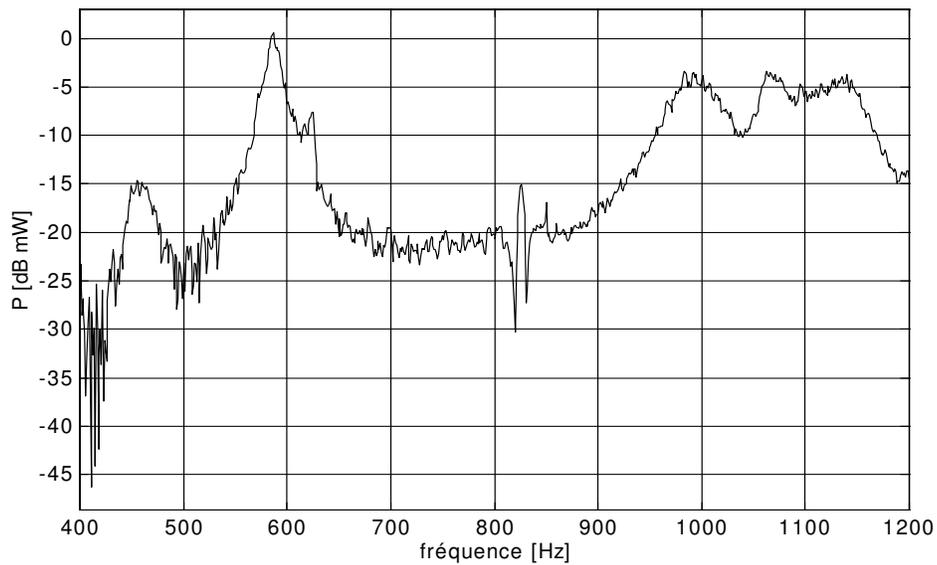


Figure 6.15: Flux de puissance, mode respiratoire, antennes 1r, 2r

L'indice de propagation pour le mode respiratoire est affiché dans la figure 6.16.

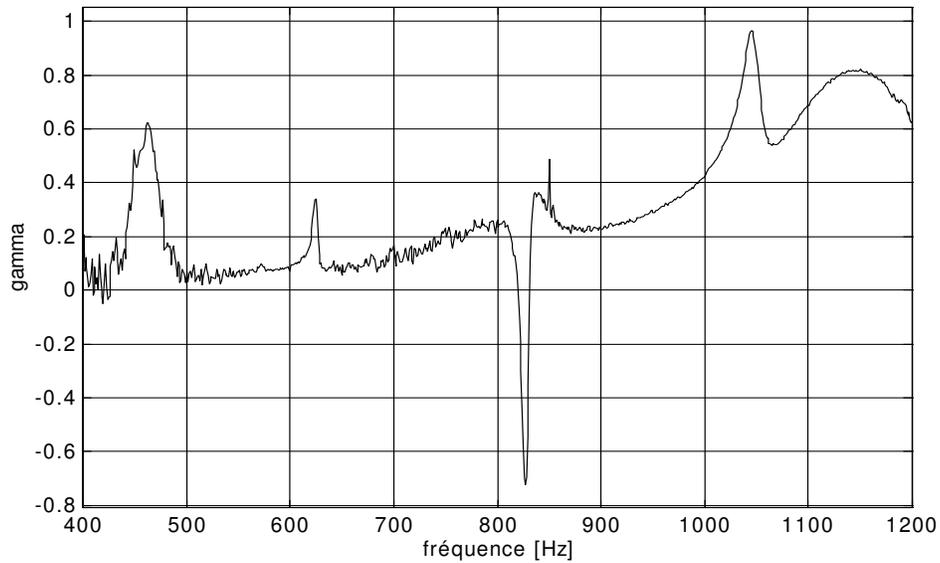


Figure 6.16: *Indice de propagation, mode respiratoire*

A partir de ces graphiques, nous pouvons conclure que les capteurs situés sur la terminaison à laquelle est connecté l'excitateur B sont sensibles en grande partie au mouvement axial du tuyau.

Le flux de puissance pour le mode de flexion est présenté dans la figure 6.17.

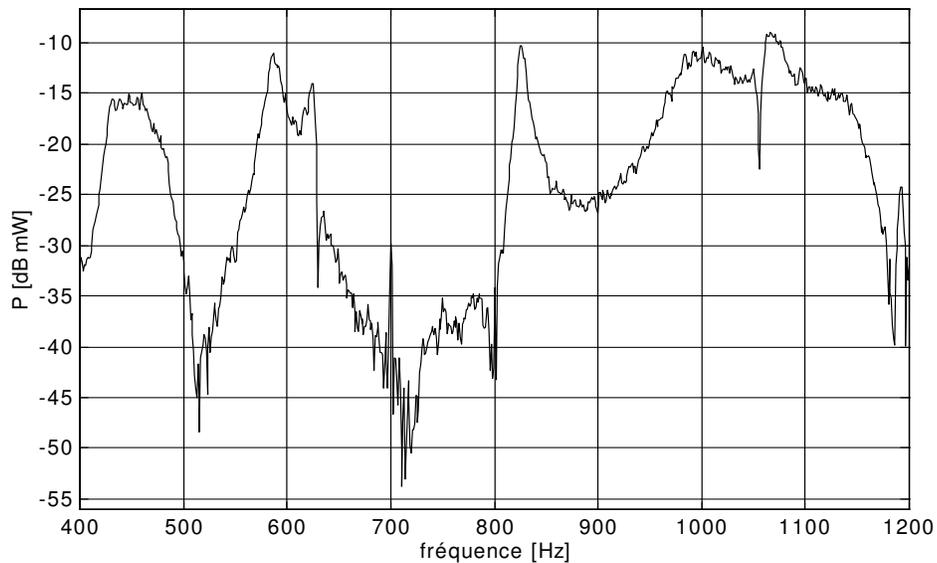


Figure 6.17: *Flux de puissance, mode de flexion, antennes 1f, 2f*

L'indice de propagation pour le mode de flexion est affiché dans la figure 6.18.

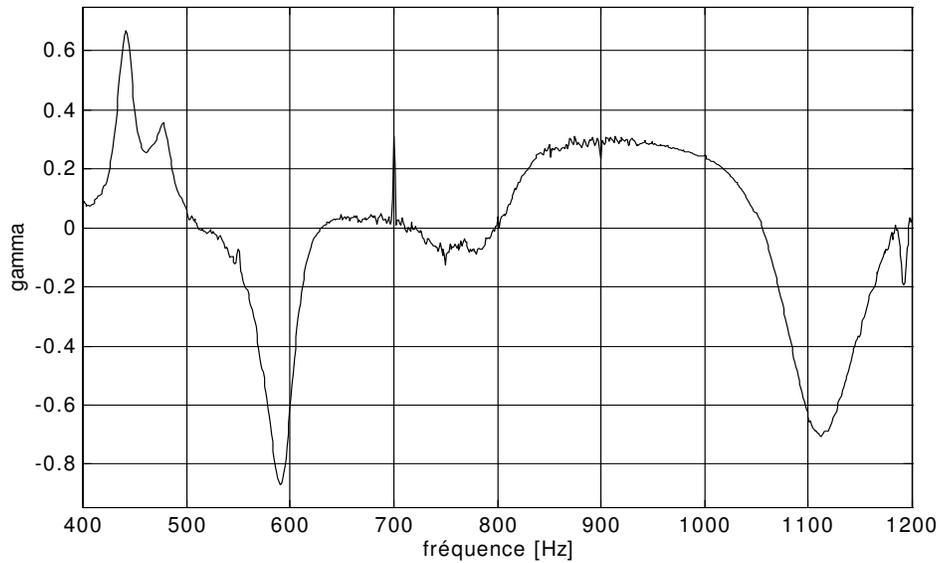


Figure 6.18: Indice de propagation, mode de flexion

Les courbes des puissances mesurées à l'entrée (excitateur A), à la sortie (excitateur B) et de la puissance propagée dans le tuyau sont présentées dans la figure 6.19.

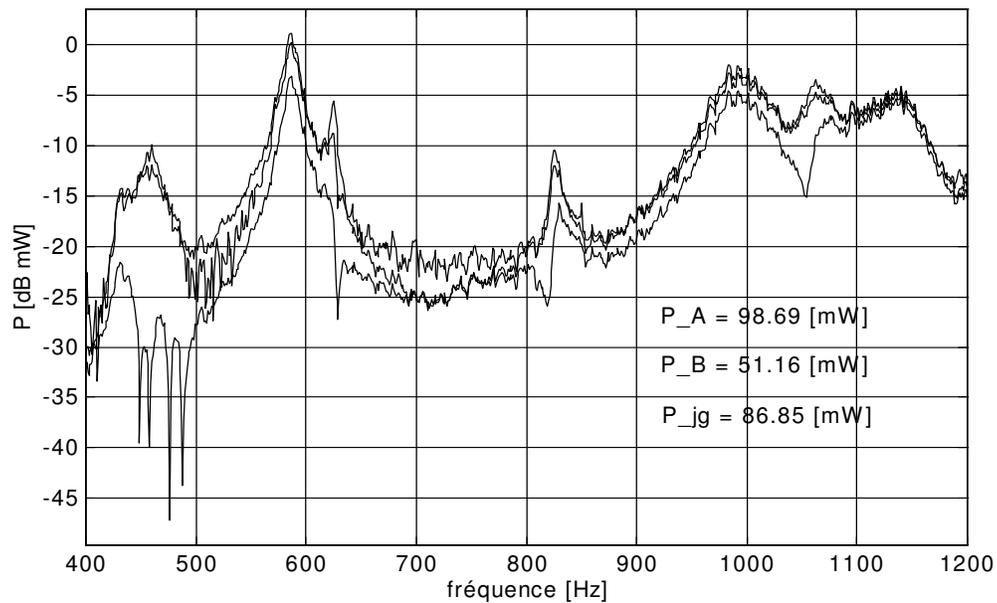


Figure 6.19: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), total (trait continu)

L'écart entre P_A et P_{jg} est de -12 %. La courbe de puissance propagée se situe toujours entre les courbes des puissances mesurées à l'entrée et à la sortie, il n'y a ni surestimation ni sous-estimation de la puissance propagée dans le tuyau. La concordance entre les courbes est suffisamment bonne pour que le bilan des puissances puisse être considéré comme vérifié

expérimentalement. Ainsi, la décomposition en modes circonférentiels s'est, dans le cas présent, avérée efficace.

6.2 MESURES SUR UNE BOUCLE FRIGORIFIQUE

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de la mesure du flux de puissance sur un dispositif industriel. Les flux de puissance acoustique et vibratoire sont mesurés sur la tuyauterie d'une boucle frigorifique. Les capteurs sont situés dans cette partie de tuyauterie où le fluide frigorigène est dans l'état gazeux, ce qui représente le cas d'un tuyau rempli d'un fluide léger. Ceci étant, la composante vibratoire du flux de puissance dans la tuyauterie est mesurée par des capteurs de vibrations (en l'occurrence par des accéléromètres) et la composante acoustique du flux de puissance est mesurée par des capteurs de pression.

6.2.1 Dispositif de mesure

Le banc de mesure est présenté sur la figure 6.20. Il se compose d'un compresseur connecté par les tuyaux de refoulement et d'aspiration à une boucle frigorifique. Les tuyaux de refoulement et d'aspiration sont en cuivre avec les diamètres et les épaisseurs suivants:

- Refoulement: $d_{ext}=3/4'$; $h=0.8\text{ mm}$
- Aspiration: $d_{ext}=7/8'$; $h=1\text{ mm}$.

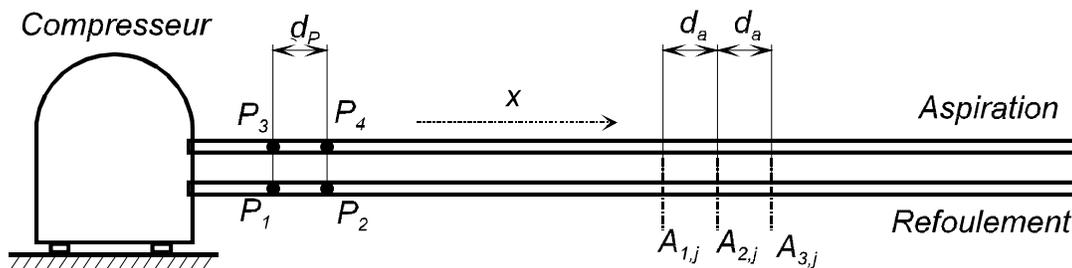


Figure 6.20: Dispositif de mesure

Dans la figure 6.20, par P_i sont dénotées les capteurs de pression. La distance entre les deux capteurs d_P est de 70 mm pour chaque tuyau. Les positions axiales des antennes périmétriques d'accéléromètres sont notées par A_i avec une distance de 100 mm entre les deux antennes. Chaque antenne circonférentielle est composée de 4 accéléromètres. Les accéléromètres sont collés sur le tuyau de façon à mesurer la composante normale de l'accélération de la paroi.

La boucle frigorifique est remplie du fluide frigorigène de type R22. Les essais sont réalisés pour le régime stabilisé dont les paramètres sont:

- Pression au refoulement: $P_R=21\text{ bar}$
- Pression à l'aspiration: $P_A=6.25\text{ bar}$
- Température au refoulement: $t_R=107\text{ °C}$
- Température à l'aspiration: $t_A=18.2\text{ °C}$

6.2.2 Résultats de mesure

Les résultats de mesure sont présentés par des graphiques. Chaque graphique montre l'évolution d'une grandeur étudiée en fonction des harmoniques. Le fondamental se situe autour de 47.5 [Hz].

La figure 6.21 présente les valeurs absolues des flux de puissance acoustique dans les tuyaux de refoulement et d'aspiration. L'axe des ordonnées est affichée en échelle des décibels avec la référence de 1 [mW]. Le flux de puissance acoustique dans le tuyau de refoulement est supérieure à celui dans le tuyau d'aspiration. Les harmoniques significatives sont H_1 , H_2 , H_3 , H_4 , H_5 , H_8 , H_9 , H_{11} et H_{12} pour le tuyau de refoulement. Pour le tuyau d'aspiration, ce sont les harmoniques H_1 et H_5 . La figure 6.22 présente l'indice de propagation acoustique dans les tuyaux de refoulement et d'aspiration.

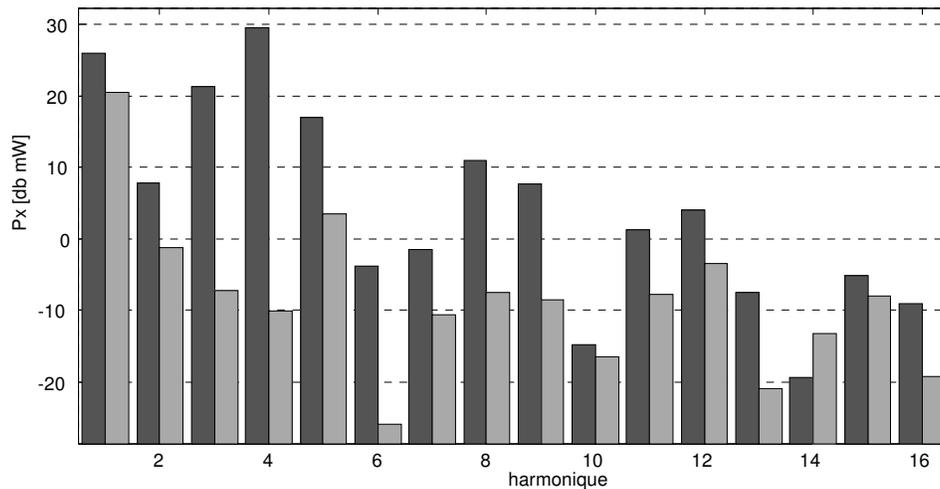


Figure 6.21: Flux de puissances acoustiques dans le tuyau de refoulement et d'aspiration

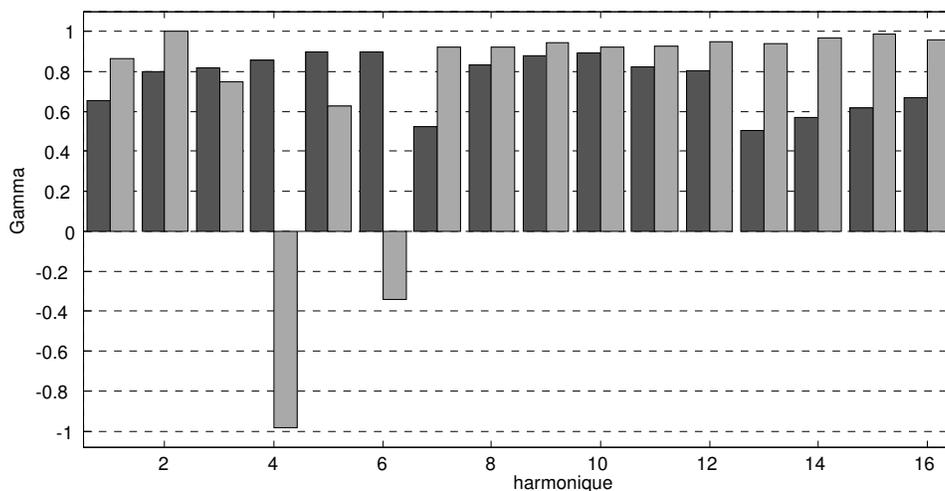


Figure 6.22: Indice de propagation acoustique dans le tuyau de refoulement et d'aspiration

Pour l'indice de propagation positif, le flux de puissance acoustique est orienté du compresseur vers le reste de la boucle. Dans le tuyau de refoulement, l'indice est positif en chaque harmonique ce qui est la confirmation expérimentale que la source de perturbations acoustique se trouve dans le compresseur Il en va de même pour le tuyau d'aspiration, à l'exception des harmoniques H_4 et H_6 . Le fait que l'indice soit négatif pour le harmonique H_6 peut être expliqué par le très faible niveau du flux de puissance correspondant (inférieur à -20 [dB mW]). Dans de

telles conditions, les résultats pour l'indice de propagation ne sont pas fiables. Cependant, vu le faible niveau du flux de puissance pour le même harmonique, les résultats correspondants peuvent être négligés.

Il est plus difficile de trouver la raison pour laquelle l'indice est négatif pour le harmonique H_4 . A condition qu'il ne soit pas erroné, ceci signifierait que la source de perturbations acoustique se trouve non pas dans le compresseur mais dans la boucle.

Les flux de puissance vibratoire du mode de flexion pour le tuyau de refoulement sont présentées sur la planche 9 en échelle des décibels (référence 1 [mW]). Les résultats sont donnés pour chaque couple d'antennes:

- 1^{ère} colonne: les antennes A_1 et A_2
- 2^{ème} colonne: les antennes A_1 et A_3
- 3^{ème} colonne: les antennes A_2 et A_3

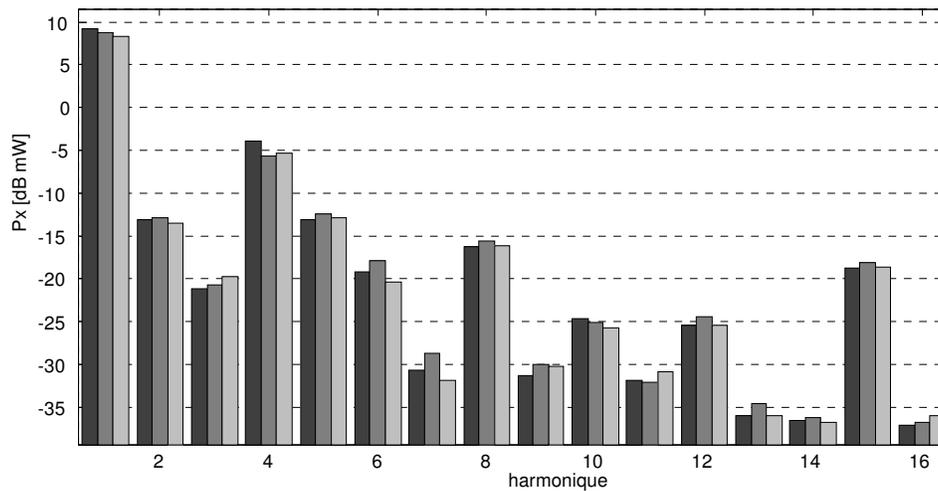


Figure 6.23: Flux de puissance vibratoire dans le tuyau de refoulement

Les flux de puissance vibratoire sont estimés à partir des trois antennes circonférentielles pour être comparés. Pour le tuyau de refoulement seuls le fondamental et l'harmonique H_4 sont importants. La dispersion des flux de puissance vibratoire, pour ces harmoniques, est faible. L'indice de propagation (voire figure 6.24) est positif en ces mêmes harmoniques avec une dispersion qui n'est pas excessive. Ceci signifie que la source de perturbations vibratoires se trouve dans le compresseur. Les résultats pour les autres harmoniques ne sont pas intéressants car les flux de puissance vibratoire sont pratiquement négligeables.

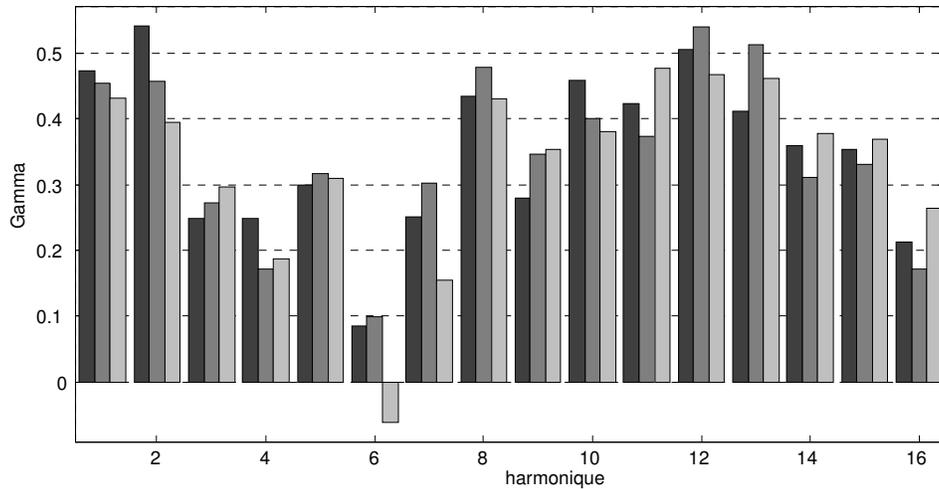


Figure 6.24: Indice de propagation vibratoire dans le tuyau de refoulement

Le flux de puissance vibratoire dans le tuyau d'aspiration est présentée dans la figure 6.25.

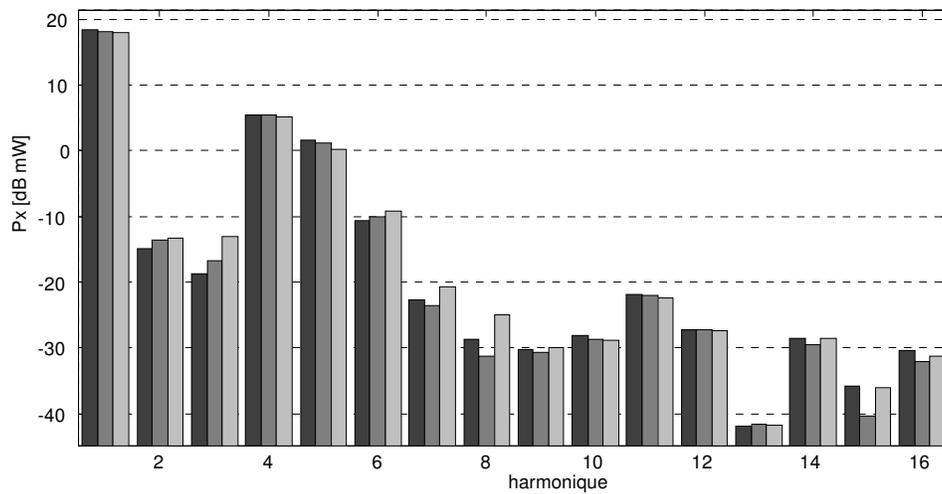


Figure 6.25: Flux de puissance vibratoire dans le tuyau d'aspiration

Les harmoniques importants sont H_1 , H_4 et H_5 . La dispersion des flux de puissance en ces harmoniques H_1 et H_4 est faible. L'indice de propagation (figure 6.26) est positif pour les harmoniques H_1 et H_4 . Pour l'harmonique 5, l'indice de propagation est négatif, ce qui est vraisemblablement dû à l'erreur d'estimation.

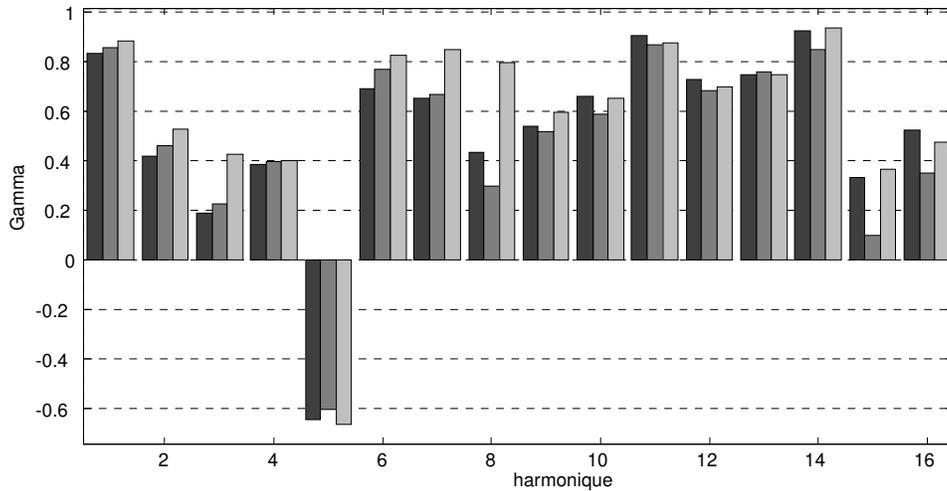


Figure 6.26: *Indice de propagation vibratoire dans le tuyau de l'aspiration*

Les figures 6.27 et 6.28 affichent respectivement les flux de puissance acoustique et vibratoire dans tuyau de refoulement et tuyau d'aspiration.

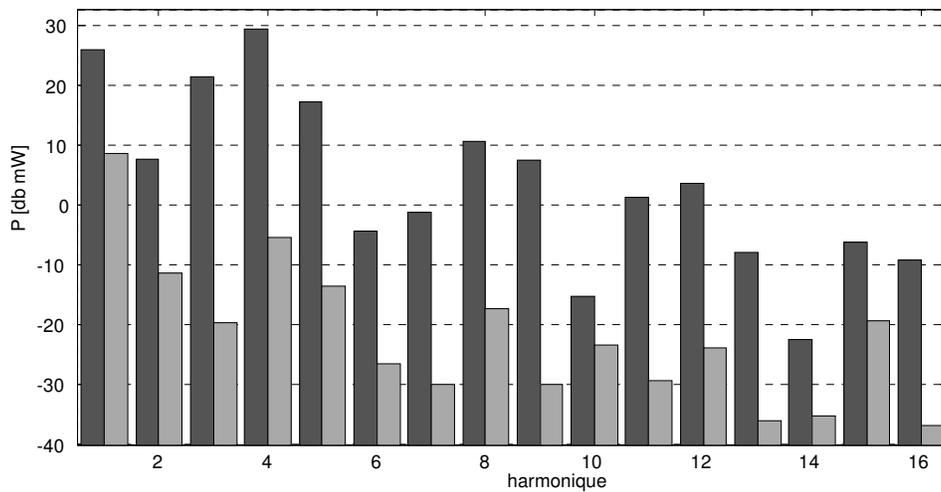


Figure 6.27: *Flux de puissance acoustique et vibratoire dans le tuyau de refoulement,*

Pour le tuyau de refoulement, le flux de puissance acoustique dépasse largement celui de puissance vibratoire. Pour le tuyau d'aspiration, les flux sont de même importance.

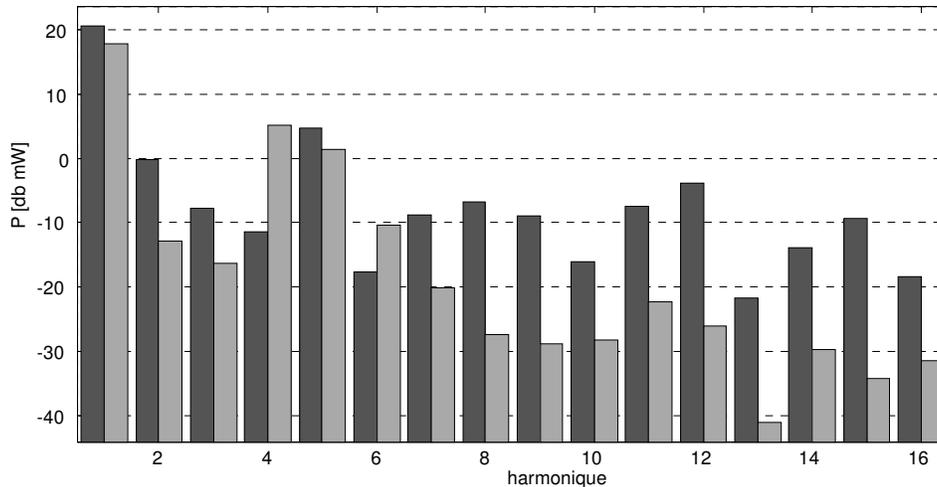


Figure 6.28: Flux de puissance acoustique et vibratoire dans le tuyau d'aspiration

6.3 MESURES SUR UN TUYAU REMPLI D'HUILE

Les techniques de mesure pour un tuyau rempli d'un fluide lourd doivent être valides expérimentalement au même titre que celles pour un tuyau rempli d'un fluide léger. Ceci est d'autant plus important pour la méthode des fonctions de réponse fréquentielle pour la décomposition axiale (mode respiratoire). Le procédé de validation consiste encore à vérifier expérimentalement l'équation (4.1.10).

Le banc d'essai mis en place dans ce but reste essentiellement le même que pour les mesures sur un tuyau vide. Un problème s'impose tout de même: comment créer la propagation d'ondes acoustiques dans le tuyau. Pour que le bilan des puissances soit établi, il est obligatoire de mesurer les puissances qui sont injectées dans le tuyau à ses terminaisons. Ceci est facilement réalisable si les perturbations mécaniques aussi bien que acoustiques proviennent d'un exciteur. Dans ce cas, il suffit de mesurer la force que le pot vibrant exerce sur le tuyau et l'accélération au point de connexion. La puissance transférée dans le tuyau peut alors être calculée à l'aide de l'expression (6.1.1). Il reste à concevoir un système d'excitation des ondes acoustiques. Trois systèmes étaient analysés lors de conception du banc d'essai:

- **Piston:** le système avec un piston consiste à placer celui-ci à l'intérieur de tuyau et de le connecter avec l'excitateur. En raison de problème d'étanchéité, ce système n'a jamais été mis en place.
- **Membrane:** le système consiste à attacher une membrane sur la bride se situant à la terminaison du tuyau et d'exciter celle-ci. Le problème d'étanchéité est ainsi résolu. Le système a été mis en place mais son comportement fut décevant. Lors des mesures de la puissance fournie par l'excitateur (selon (6.1.1)), la fonction de cohérence entre les signaux de force et d'accélération fut très mauvaise. De surcroît, le comportement de ce système ne fut pas stable. Par conséquent, le système fut rejeté.
- **Bouchon:** le système consiste de mettre un bouchon sur la terminaison du tuyau. Les problèmes d'étanchéité et de stabilité ne se manifestent pas avec ce système. Son défaut est que la création des ondes acoustiques ne peut pas être contrôlée. Il est évident que il y a interaction entre la paroi et le fluide mais on ne sait pas s'il y a création d'ondes acoustiques. Au contraire, la mesure de la puissance fournie par l'excitateur est très fiable surtout sur

l'excitateur actif lors d'essai. C'est le système retenu pour le procédé de vérification expérimentale.

Le deuxième problème à résoudre lors de conception de l'essai est le choix du fluide avec lequel le tuyau est rempli. Après un essai avec de l'eau, il s'avère que la quantité d'air dissoute dans l'eau est telle que le phénomène physique n'est plus celui modélisé (il faudrait tenir compte des bulles d'air dans l'eau). D'après [1] et [2], le contenu d'air est beaucoup plus faible dans l'huile. C'est donc l'huile qui sera utilisée lors des essais. La célérité des ondes planes dans l'huile fut déterminée par la mesure [3] et c'est cette donnée qui est introduite dans le calcul de la relation de dispersion. Les caractéristiques de l'huile sont:

- producteur ELF, type ELF OLNA 46,
- célérité moyenne des ondes acoustiques [3]: 1380 [m/s],
- densité: 900 [kg/m³].

Pour le reste, le banc d'essai correspond exactement à celui utilisé pour les mesures sur le tuyau vide. Les puissances transférées dans le tuyau par les excitateurs sont calculées selon [6.1.1], les capteurs de force et d'accélération étant montés sur les adaptateurs décrit dans le paragraphe 6.1.

6.3.1 Essai axial

Le banc d'essai est présenté dans la figure 6.29. Il y a au total 6 antennes circumférentielles réparties le long de tuyau. Les antennes 1, 3 et 6 sont constituées des jauges mesurant l'élongation axiale alors que les antennes 2, 4 et 5 se composent des jauges mesurant l'élongation dans le sens circumférentiel du tuyau. Pour la mesure du flux de puissance dans le tuyau, deux combinaisons d'antennes sont utilisées:

- configuration 1, antennes 1, 2, 4, 6
- configuration 2, antennes 2, 3, 4, 5

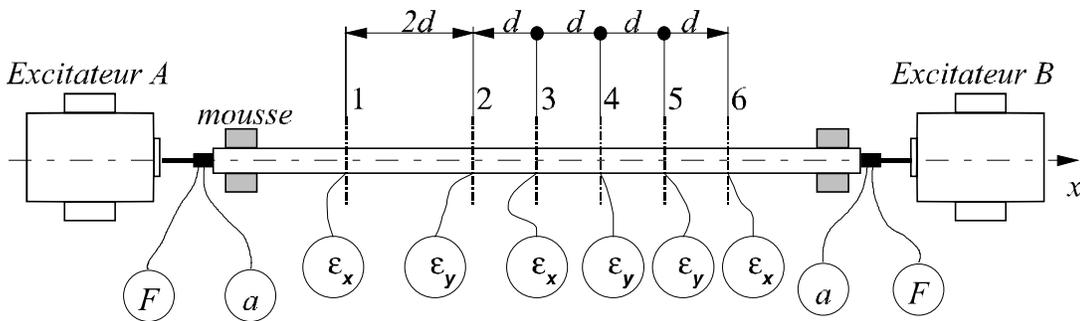


Figure 6.29: Dispositif de mesure, essai axial

Pendant l'essai, l'excitateur A est le seul actif, le flux d'énergie créé est donc orienté de l'excitateur A vers l'excitateur B. Les puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau sont présentées dans la figure 6.30 en échelle des décibels.

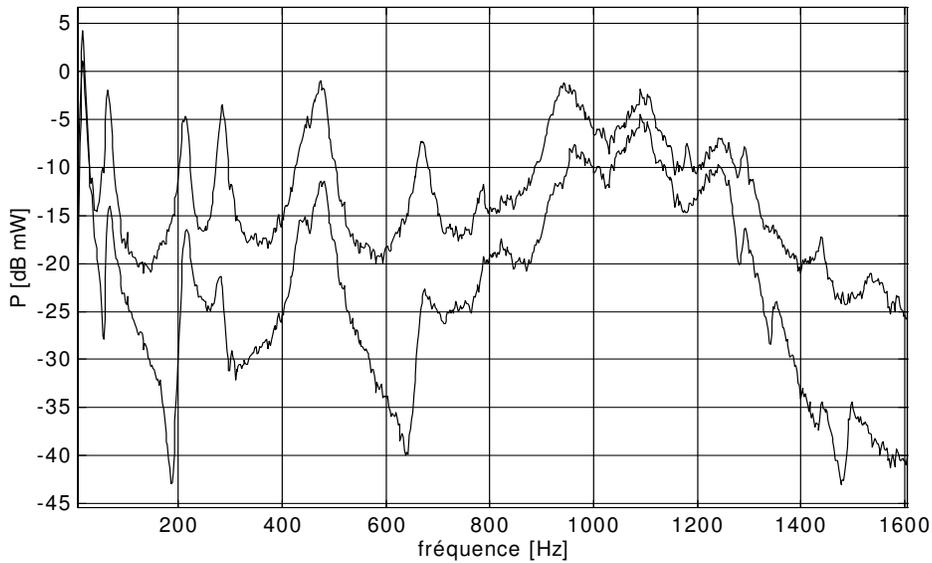


Figure 6.30: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: excitateur A (trait interrompu), excitateur B (trait continu)

Les flux de puissance totale (vibratoire et acoustique) mesurés par les deux configurations d'antennes sont présentés dans la figure 6.31

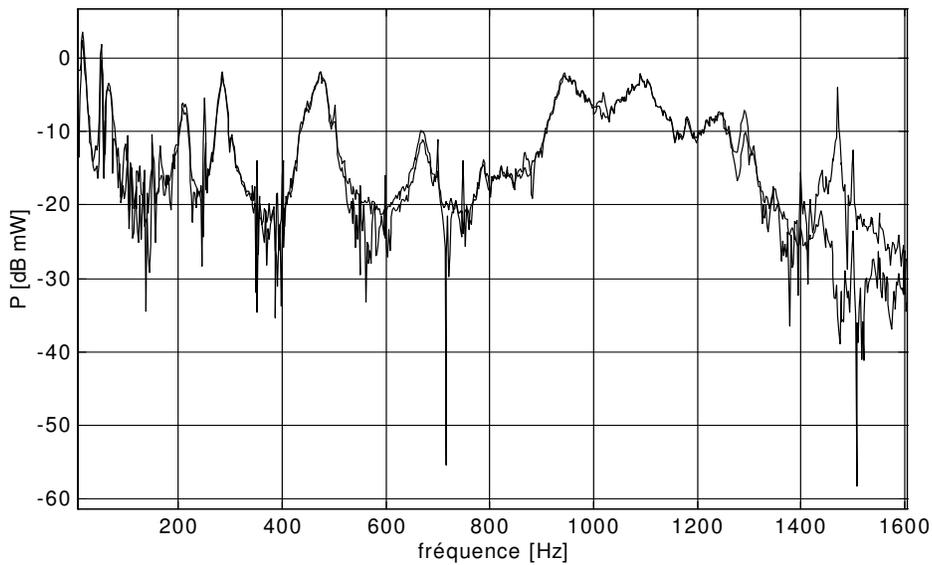


Figure 6.31: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1, 2, 4, 6 (trait interrompu), antennes 3, 4, 5, 6 (trait continu)

La concordance entre les courbes est bonne pour les fréquences inférieures à 1400 [Hz] celle-ci étant une des deux fréquences singulières pour la combinaison des antennes 1, 2, 4 et 6. La deuxième fréquence singulière n'est pas visible sur les graphiques présentés dans la figure 6.31. Les courbes des flux de puissances mesurées sur les terminaisons et du flux de puissance totale (vibratoire et acoustique) mesuré par les antennes 1, 2, 4, 6 sont présentées dans la figure 6.32. La courbe du flux de puissance totale (antennes 1, 2, 4, 6) est plus proche de la courbe de

puissance mesurée sur la terminaison A. Les fréquences de 900 et 1500 [Hz] sont les fréquences singulières pour cette combinaison d'antennes parce que la valeur de $\det(\hat{\underline{A}})$ y baisse d'une manière importante (voir figure 6.33).

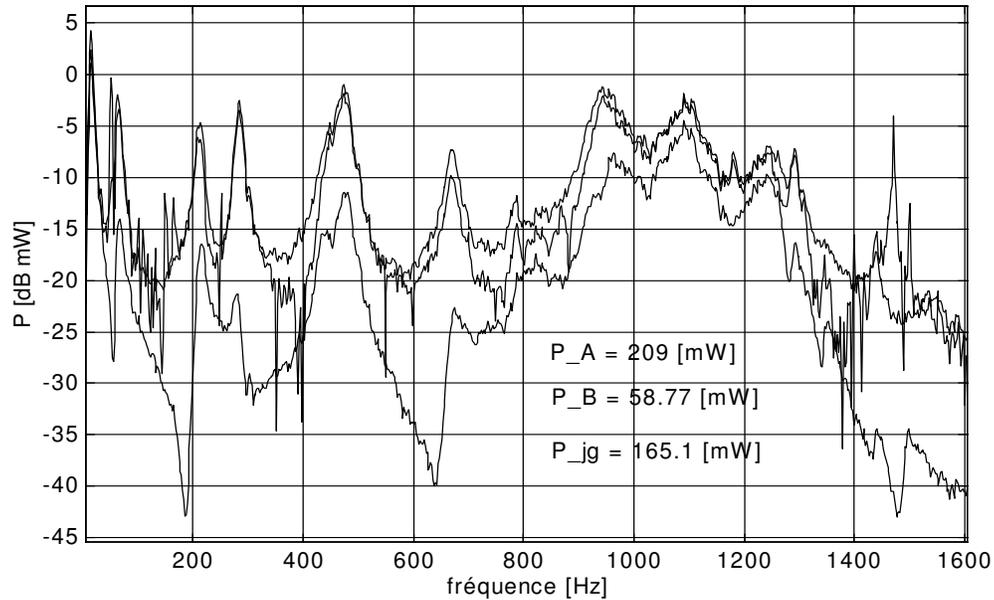


Figure 6.32: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1, 2, 4 et 6 (trait continu)

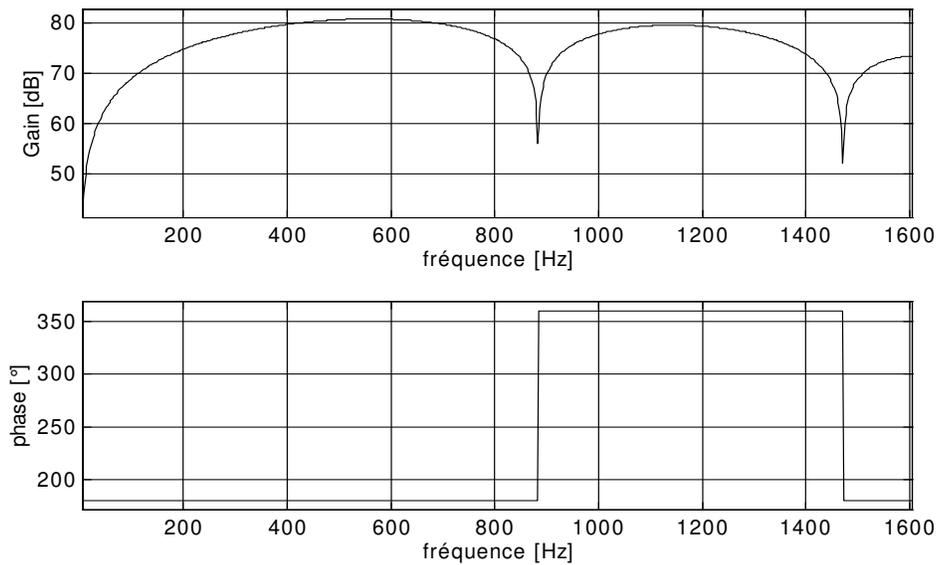


Figure 6.33: Courbes de $\det(\hat{\underline{A}})$ pour la combinaison des antennes 1, 2, 4, et 6. En haut: sa valeur absolue en dB avec comme référence 1; en bas: sa phase

L'écart entre la puissance totale injectée, P_A , et celle mesurée par les jauges, P_{jg} , est de -21.4 % pour la combinaison d'antennes évoquée.

Dans les figures 6.34 et 6.35 se trouvent les graphiques correspondants pour la combinaison des antennes 3, 4, 5 et 6. Cette combinaison n'a pas de fréquence singulière dans la gamme fréquentielle de mesure (voir figure 6.35).

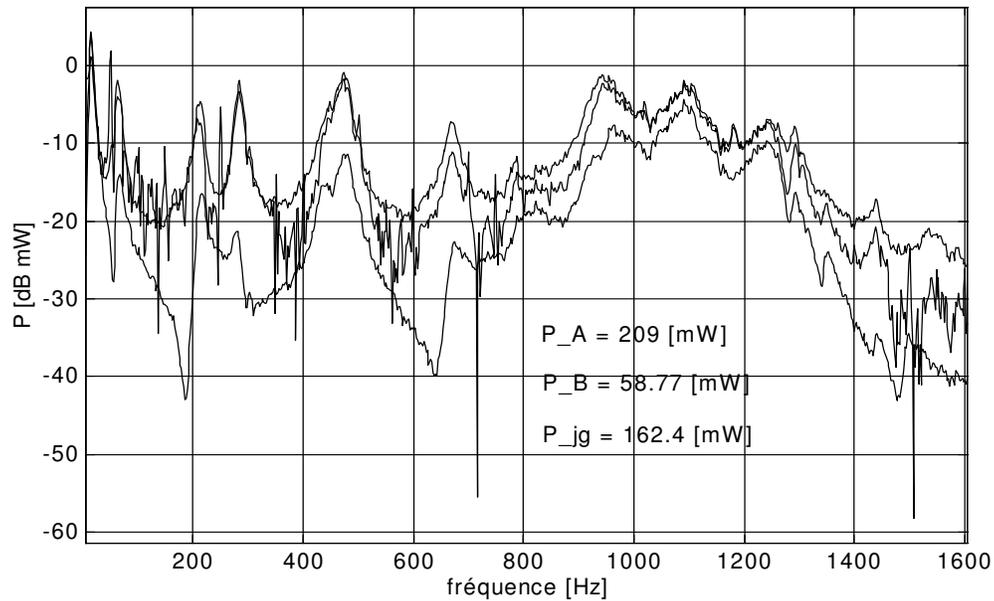


Figure 6.34: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 2, 3, 4 et 5 (trait continu)

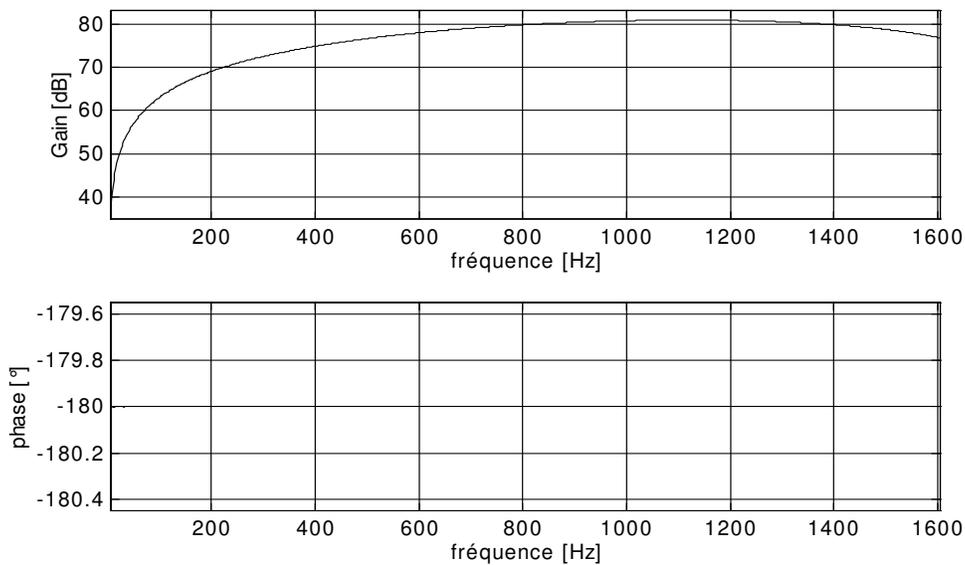


Figure 6.35: Courbes de $\det(\hat{A})$ pour la combinaison des antennes 2, 3, 4, et 5. En haut: sa valeur absolue en dB avec comme référence 1; en bas: sa phase

L'écart entre P_A et P_{jg} pour la combinaison des antennes 2, 3, 4 et 5 est de -22.3 %. Le fait que les fréquences singulières pour les antennes 1, 2, 4 et 6 se trouvent dans les bandes fréquentielles où le flux de puissance est faible est en raison d'aussi faibles variations des écarts entre P_A et P_{jg} .

Nous pensons que le procédé de vérification donne les résultats satisfaisants. Les éléments suivants permettent de tirer une telle conclusion:

- une bonne superposition entre les flux de puissance mesurés par les combinaisons d'antennes évoquées (figure 6.31),
- une bonne superposition entre le flux de puissance injecté et celui mesuré par les antennes 2, 3, 4 et 5 (figure 6.34),
- il y a effectivement un grand écart entre P_A et P_{jg} (environ -20 %) dû à la dissipation dans la mousse située à côté de l'excitateur A, d'une part et à la viscosité d'huile d'autre part.

Les parties vibratoire et acoustique du flux de puissance totale dans le tuyau sont présentées dans la figure 6.36. La comparaison visuelle de la partie vibratoire (figure 6.36) au flux mesuré dans le tuyau rempli d'air (figure 6.2) met en évidence les effets du couplage entre la paroi et le fluide dans le tuyau. Entre 50 et 400 [Hz] il y a trois bandes fréquentielles supplémentaires pour la propagation de l'énergie lorsque le tuyau est rempli d'huile. Il faut leur ajouter encore la bande entre 600 et 800 [Hz] et celle entre 1200 et 1400 [Hz]. Le tuyau se comporte comme un filtre à plusieurs bandes passantes. Par rapport à un tuyau rempli d'un fluide léger, un tuyau rempli d'un fluide lourd contient plus de bandes passantes et il est possible de le considérer « plus propagateur ».

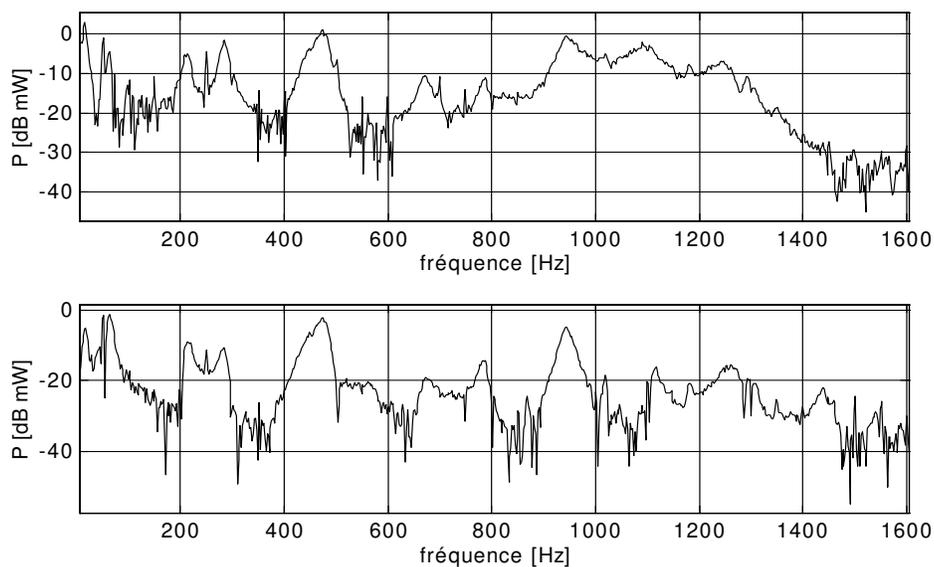


Figure 6.36: Flux de puissance mesuré par les antennes 2, 3, 4 et 5. En haut: partie vibratoire; en bas: partie acoustique

Dans la figure 6.37 sont présentées les parties vibratoire et acoustique du flux de puissance, mesurées par les antennes 1, 2, 4 et 6. Les courbes sont données en échelle linéaire.

La partie vibratoire est positive dans toute la gamme fréquentielle. Il n'en est pas de même pour la partie acoustique. Le fait que le flux de puissance acoustique soit négatif là où le flux de puissance vibratoire est positif peut être expliqué par la nature de l'excitation qui, pour le fluide, est de type inertiel (les bouchons sur les terminaisons sont rigides). Les erreurs de singularité, observées dans la figure 6.32, se répartissent entre la partie vibratoire et acoustique du flux total:

celle qui apparait en environ 1500 [Hz] est liée à la partie vibratoire tandis que celle se manifestant à environ 900 [Hz] est liée à la partie acoustique.

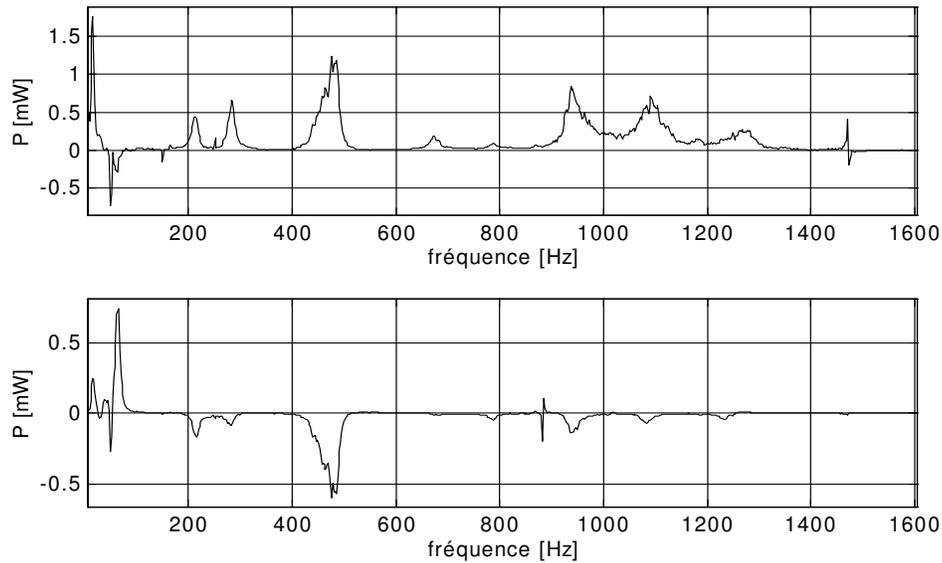


Figure 6.36: Flux de puissance mesuré par les antennes 1, 2, 4 et 6. En haut: partie vibratoire; en bas: partie acoustique

6.3.2 Essai de flexion

Le banc d'essai est présenté dans la figure 6.37. Les terminaisons du tuyau sont bouchées, l'excitation en flexion étant réalisée à l'aide d'adaptateurs coudés. L'excitation du fluide est, dans ce cas aussi, de type inertiel. Il y a 5 antennes circumférentielles réparties le long du tuyau dont 3 sont constituées de jauges mesurant l'élongation axiale (elles sont désignées par l'indice « j » dans la figure 6.37). Deux antennes se composent d'accéléromètres mesurant l'accélération normale de la paroi du tuyau. L'écart d entre les antennes de même type est de 300 [mm]. Quant à l'écart entre les antennes 2_j et 2_a , il est de 150 [mm]. Pendant l'essai, l'excitateur A est actif, l'excitateur B passif, le flux de l'énergie est donc orienté de l'excitateur A vers B.

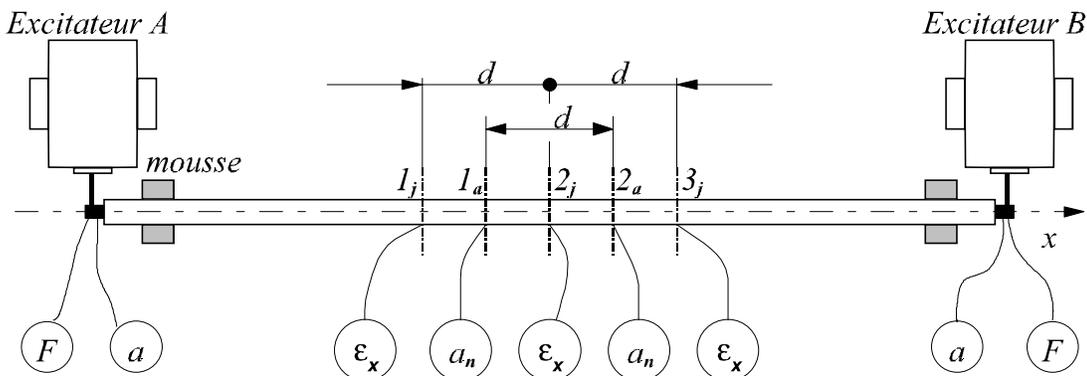


Figure 6.37: Dispositif de mesure, essai de flexion

Les puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau sont présentées dans la figure 6.38.

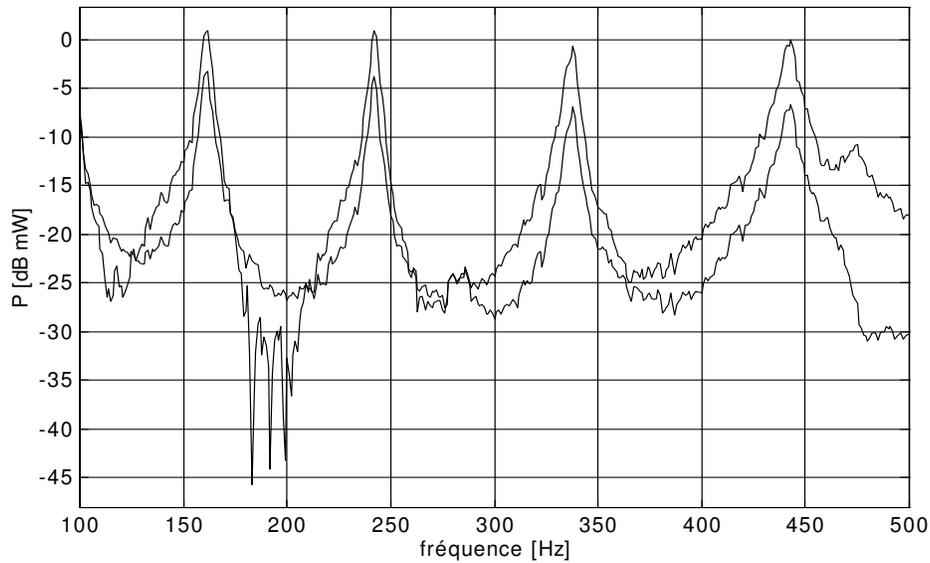


Figure 6.38: Puissances mesurées sur les terminaisons du tuyau: exciteur A (trait interrompu), exciteur B (trait continu)

Les courbes du nombre d'ondes mesuré par les antennes de jauges et du nombre d'ondes théorique pour les ondes de quasi-flexion (calculé selon la théorie de Flügge) sont tracées dans la figure 6.39.

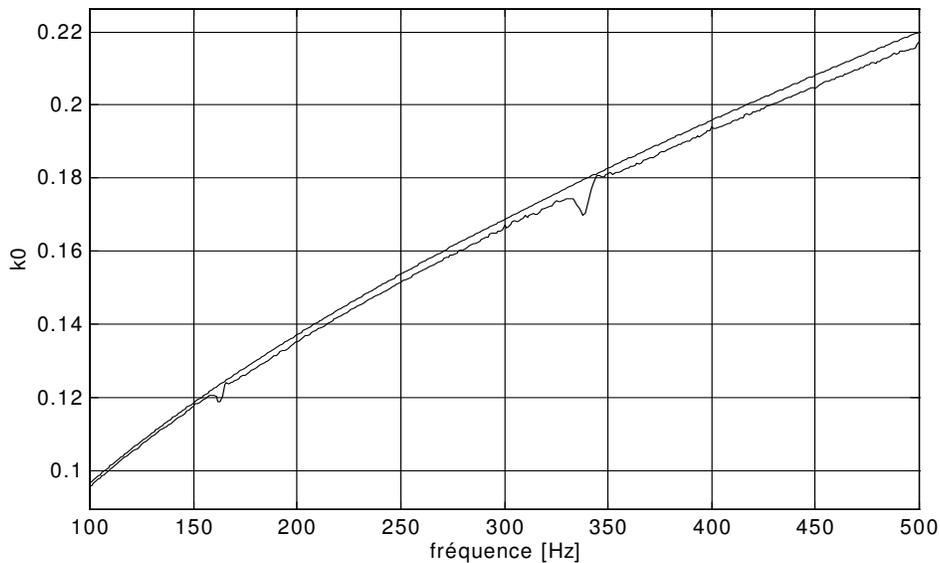


Figure 6.39: Nombre d'ondes théorique (trait interrompu), mesuré (trait continu)

Les courbes du flux de puissance total mesuré par les différentes combinaisons d'antennes de jauges sont présentées dans la figure 6.40. La fréquence singulière se manifeste pour la combinaison des antennes I_j et 3_j à environ 240 [Hz]. Mise à part la bande fréquentielle où se manifeste l'erreur due à la fréquence singulière, la concordance entre les courbes est bonne.

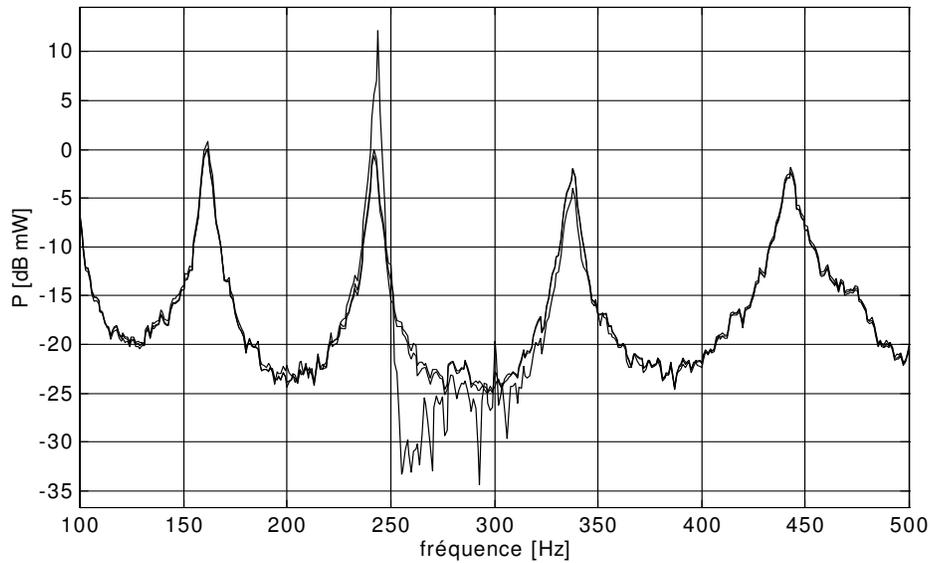


Figure 6.40: Flux de puissance mesuré par les antennes des jauges: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu)

Une aussi bonne concordance peut être observée dans la figure 6.41 où sont tracées les courbes de l'indice de propagation pour les différentes combinaisons d'antennes de jauges.

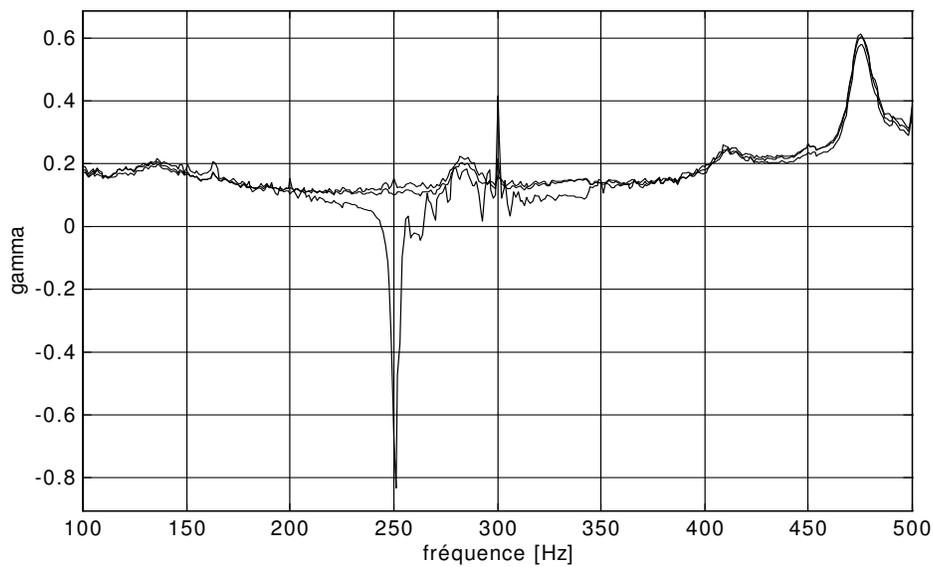


Figure 6.41: Indice de propagation: antennes 1 et 2 (trait mixte), antennes 1 et 3 (trait interrompu), antennes 2 et 3 (trait continu)

Les courbes des flux de puissance totale mesurées sur les terminaisons et par la combinaison des antennes I_j et 2_j sont tracées dans la figure 6.42. L'écart entre P_A et P_{jg} est de -23.7 %. La raison probable d'un aussi important écart est la forte dissipation dans la mousse située entre l'excitateur A et les antennes circonférentielles, puisque les résultats obtenus en faisant le même type d'essai avec le tuyau rempli d'air sont très satisfaisants.

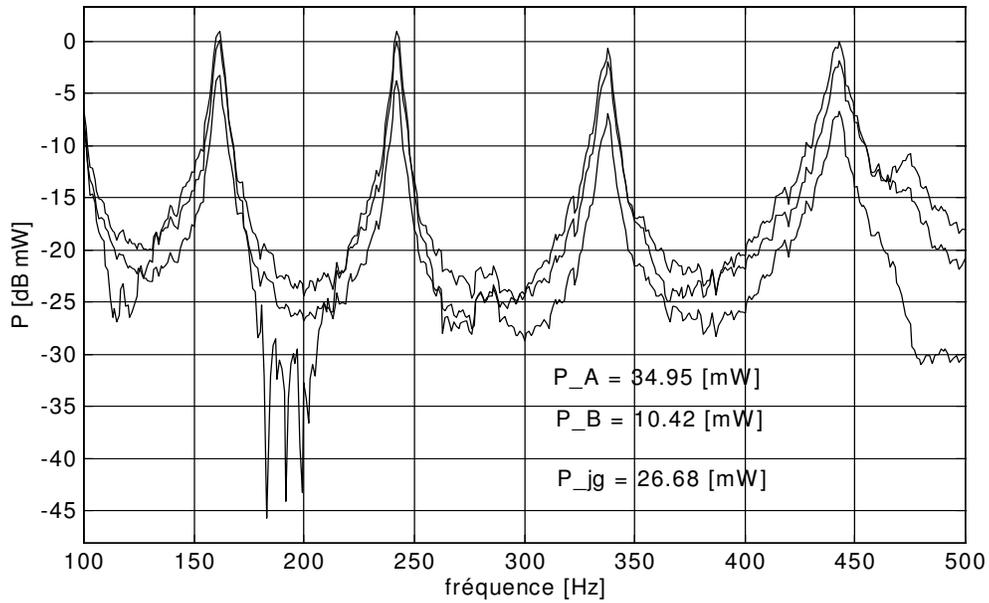


Figure 6.42: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes 1 et 2 (trait continu)

Les flux de puissance totale mesurés par les antennes de jauges et d'accéléromètres sont présentés dans la figure 6.43.

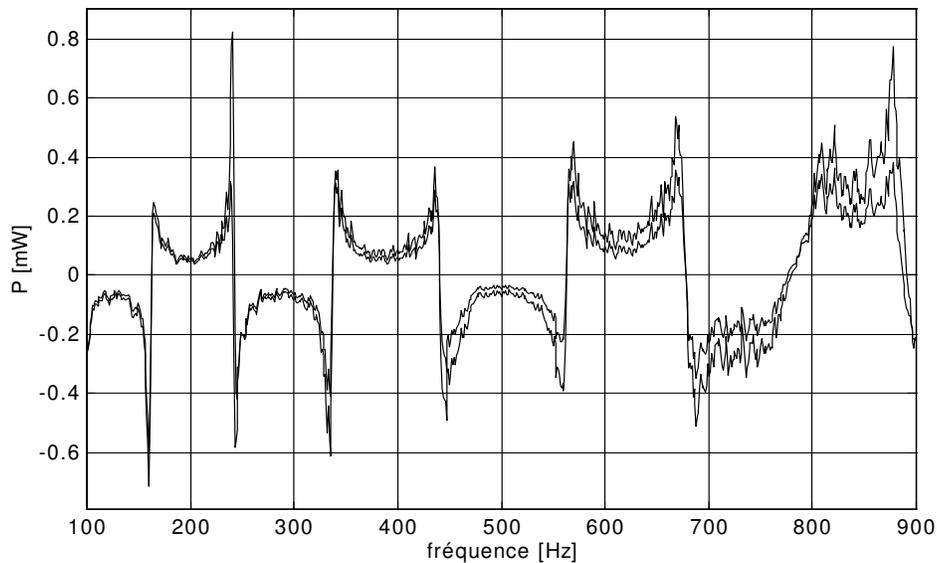


Figure 6.43: Flux de puissance: antennes de jauges (trait interrompu); antennes d'accéléromètres (trait continu)

Ces résultats sont obtenus par un deuxième essai durant lequel deux excitateurs sont actifs. Le flux de l'énergie change de sens en fonction de la fréquence, le sens supposé de la propagation allant de l'excitateur A vers B. Le flux de puissance est mesuré par les combinaisons d'antennes suivantes:

- antennes I_j et 2_j (jauges)
- antennes I_a et 2_a (accéléromètres)

L'essai est entrepris afin de comparer le comportement de capteurs tels que jauges et accéléromètres. Dans la figure 6.43, il est possible d'observer que le flux obtenu par les accéléromètres est sous-estimé par rapport à celui obtenu par les jauges. L'écart entre les courbes augmente avec l'accroissement de la fréquence.

Les courbes de l'indice de propagation correspondantes sont tracées dans la figure 6.44. Les fréquences pour lesquelles le flux mesuré par les antennes change de direction sont quasiment les mêmes quelque soit le type de capteur.

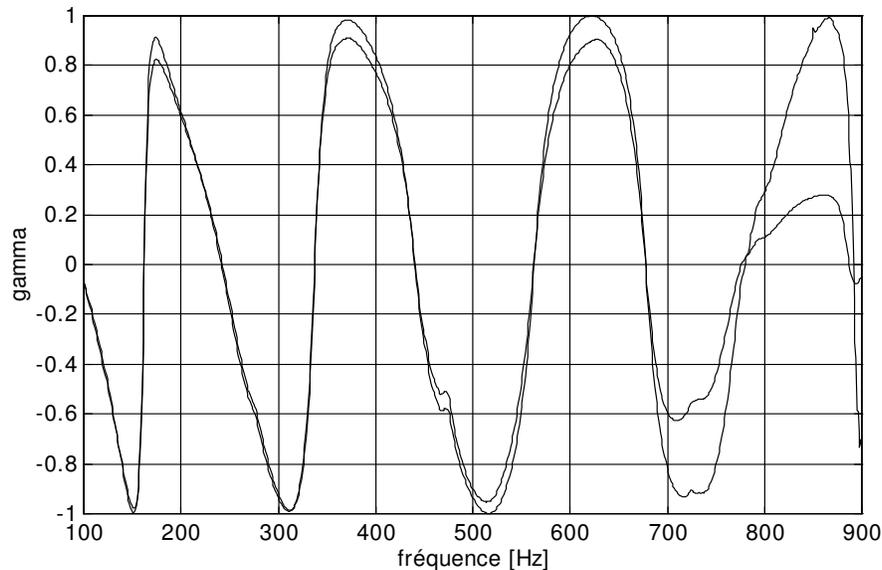


Figure 6.44: Indice de propagation: antennes de jauges (trait interrompu); antennes d'accéléromètres (trait continu)

Les figures 6.45 et 6.46 présentent les flux de puissance mesurés sur les terminaisons et le flux de puissance totale mesuré respectivement par les antennes de jauges et d'accéléromètres. Dans la figure 6.45 il y a surestimation du flux de puissance mesuré par les antennes de jauges dans la bande fréquentielle entre 850 et 900 [Hz]. Ailleurs dans la bande fréquentielle affichée, la courbe du flux de puissance totale mesuré par les jauges colle mieux avec la courbe de flux de puissance mesuré sur cette terminaison où l'énergie est effectivement injectée dans le tuyau.

La situation est inverse en ce qui concerne le flux de puissance totale mesuré par les antennes d'accéléromètres avec la différence qu'il n'y a pas de surestimation dans la bande fréquentielle évoquée précédemment.

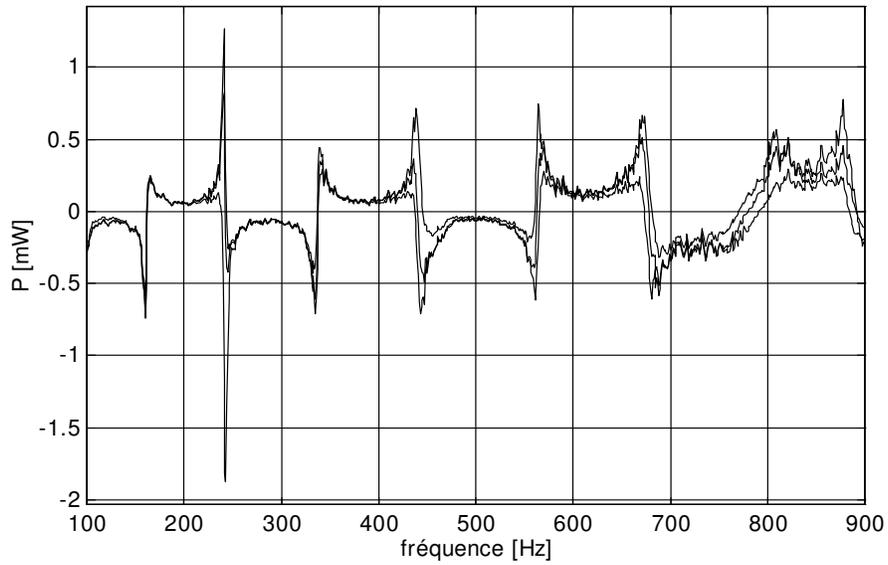


Figure 6.45: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes de jauges (trait continu)

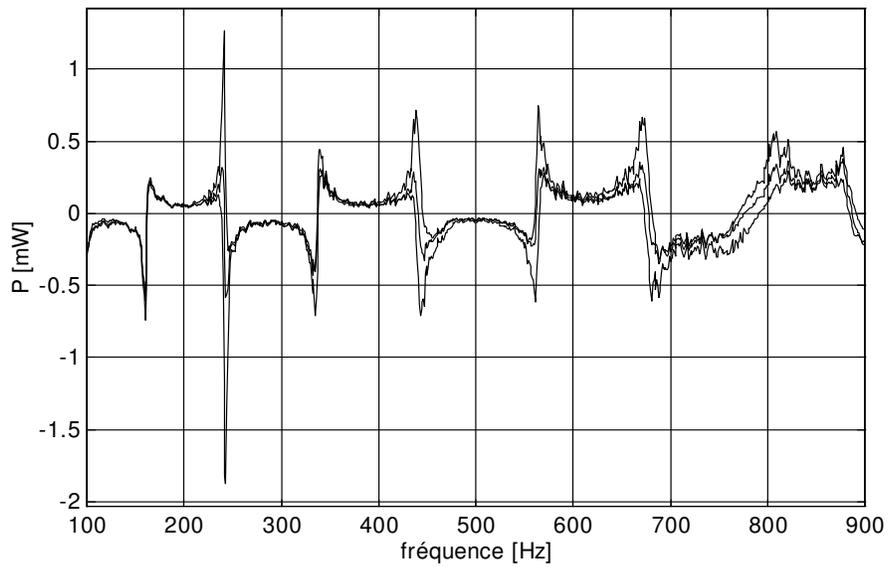


Figure 6.46: Flux de puissance: excitateur A (trait mixte), excitateur B (trait interrompu), antennes d'accéléromètres (trait continu)

D'après les résultats obtenus, la précision de mesure par des antennes de jauges et d'accéléromètres est comparable et acceptable dans la gamme fréquentielle affichée

6.4 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **G. Pavic:** Communication interne, CETIM 1993
2. **A. Badie-Cassagnet:** Communication interne, CETIM 1993
3. **A. Badie-Cassagnet:** “Étude de faisabilité d’une Terminaison Anéchoïque pour Liquide (T.A.L.) haute pression de petit diamètre basée sur l’utilisation de tuyauteries flexibles”, Etude CETIM, 1990

7 CONCLUSIONS ET COMMENTAIRES

Il nous paraît convenable de commencer ce dernier chapitre par un commentaire sur la structure de cette étude. Celle-ci peut être divisée en deux parties majeures. La première, composée des chapitres 2 et 3, est la phase de préparation. Grâce aux résultats qui y sont obtenus, il est possible d'étudier le véritable sujet de ce travail: la propagation des énergies vibratoire et acoustique dans un tuyau. Ce sujet est traité dans la deuxième partie de cette étude, considérée comme principale et présentée dans les chapitres 4, 5 et 6. Nous allons d'abord commenter les résultats obtenus dans la partie principale.

Il est possible d'affirmer que l'objectif affiché au début de cette étude (c'est à dire le développement d'une technique de mesure pour les puissances acoustique et vibratoire se propageant dans un tuyau) est atteint. Dans le raisonnement qui nous mène vers ce but, deux éléments sont décisifs. Le premier est la transcription des expressions pour le flux des énergies acoustique et vibratoire en termes de produits entre les amplitudes des déplacements normaux de la paroi du tuyau. En conséquence, les seules grandeurs qui doivent être déterminées par mesure sont lesdits produits. Le deuxième élément est la construction des techniques de mesure ayant pour base la décomposition ondulatoire. Il est possible de considérer que le deuxième élément est directement conditionné par ce premier. Nous sommes aussi amenés à faire les remarques suivantes:

- Les techniques de mesure sont vérifiées expérimentalement pour le mode respiratoire et pour celui de flexion. Il y a une forte probabilité que les résultats semblables auraient été obtenus pour des modes supérieurs si les mesures adéquates avaient été réalisées.
- L'efficacité de la technique de décomposition en modes circonférentiels est démontrée par l'essai combiné sur un tuyau vide.
- Le véritable défi expérimental était la préparation et la réalisation des essais sur un tuyau rempli d'huile, surtout en ce qui concerne le mode respiratoire. La méthode des fonctions de réponse fréquentielle a pu ainsi être vérifiée. Celle-ci a été employée dans le cas de deux ondes différentes (ondes de type paroi et de type fluide) se propageant dans le tuyau. En principe, on peut s'en servir lorsqu'il y a davantage d'ondes libres et évanescences de types différents. La qualité des résultats dépendra alors des écarts entre les antennes circonférentielles de capteurs.
- Nous avons comparé les performances de deux types de capteurs (jauges de contraintes et accéléromètres) sur l'exemple de l'essai de flexion sur le tuyau rempli d'huile. Les résultats de mesure démontrent que ces performances sont comparables. Il est impossible de faire le même type de comparaison pour le mode respiratoire parce que les accéléromètres ne correspondent guère à cette tâche.

Les expressions pour les puissances acoustique et vibratoire ainsi que les techniques de mesure développées dans cette étude sont applicables dans le champ lointain. Dans le cas général, le résultat que l'on obtient en les utilisant représente une estimation partielle du flux des énergies acoustique et vibratoire complet parce que les contributions d'énergie des ondes évanescences n'y sont pas inclus. Cette estimation est d'autant plus précise que la section du tuyau sur laquelle on mesure est longue. La détermination par mesure des contributions des ondes évanescences représente une des suites possibles que ce travail peut éventuellement engendrer. Une autre perspective qui s'ouvre est l'emploi de capteurs autres que les jauges de contraintes pour la mesure du mode respiratoire. Dans des laboratoires à l'étranger (Grande Bretagne), un capteur piézo-électrique en forme de fils est ainsi en cours de développement.

Nous allons commenter les chapitres de la partie préparatoire séparément parce que le lien entre ceux-ci n'est pas aussi évident que pour les chapitres de la partie principale.

L'élément important dans le deuxième chapitre est la notation tensorielle. Grâce à celle-ci, nous espérons développer une méthode numérique de type équations intégrales pour la solution des vibrations des coques cylindriques. La détermination des facteurs de correction en tenant compte de la courbure représente une perspective dans le cadre des théories des coques cylindrique d'ordre supérieur.

En ce qui concerne le chapitre 3, la conclusion la plus importante est la suivante:

- il est impossible de faire équivalence entre les ondes longitudinales ou de flexion dans une coque cylindrique d'une part et les ondes correspondantes dans une barre ou une poutre d'autre part. Cela en raison du couplage entre les déplacements dans et hors du plan présent dans une coque cylindrique (le couplage est dû à la courbure de cette dernière).

Nous faisons aussi les remarques suivantes:

- Lorsqu'on définit l'intervalle des basses fréquences comme celui dont la borne supérieure est la fréquence du coupure de la première branche réelle du mode lobaire d'ordre 3, l'étendue de cet intervalle est d'autant plus longue que le diamètre du tuyau est petit.
- La comparaison entre les théories de Flügge et Flügge-Timoshenko montre que la limite fréquentielle de cette première se trouve là où la longueur d'ondes est égale au diamètre du tuyau. En général, ceci se passe dans la zone des pulsations non-dimensionnelles Ω élevées. Etant donné que la pulsation non-dimensionnelle Ω est inversement proportionnelle au diamètre du tuyau, l'emploi de la théorie de Flügge-Timoshenko pour les tuyaux de petit diamètre n'apporte aucune amélioration significative par rapport à la théorie de Flügge.
- Pour un tuyau rempli d'un fluide acoustique, le mode circonférentiel de loin le plus important est le mode respiratoire. L'effet du couplage entre le fluide intérieur et la paroi se traduit par la séparation des ondes acoustiques planes (qui se propageraient si le tuyau était rigide) en ondes de type fluide et de type paroi. La différence entre les célérités de ces ondes est considérable, les ondes de type fluide étant largement plus lentes que celles de type paroi. Lorsque le fluide intérieur est de type lourd, le couplage entre celui-ci et la paroi du tuyau est suffisamment important pour qu'il soit possible de déterminer la pression dans le fluide en mesurant les déformations sur la surface externe de la paroi.

Le comportement des branches réelles de la courbe de dispersion a été commenté avec beaucoup d'attention dans cette étude. Il n'en était pas ainsi avec les branches complexes et imaginaires.

Il est maintenant possible et important, à notre avis, de porter une attention particulière aux branches complexes et imaginaires en considérant en premier lieu les phénomènes qui surviennent lorsqu'une branche change de nature (de complexe en imaginaire) et lorsqu'une branche passe par la fréquence de coupure. Une telle analyse peut être considérée comme une perspective dans l'étude de la propagation des ondes élastiques dans les coques cylindriques.

BIBLIOGRAPHIE

1. **J. S. Bendat, A. G. Piersol:** "Engineering applications of correlation and spectral analysis", 1980 John Wiley & Sons, Inc.
2. **Bobrovnikskii Y. I.:** "On the energy flow in evanescent waves", Letter to the editor JSV (1992) 152(1), 175 - 176
3. **S. Bourget, F. J. Fahy:** "Vibrational power flow measurement along thin cylindrical pipe", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
4. **P. R. Brazier-Smith, J. F. M. Scott:** "On the determination of the roots of dispersion equations by use of winding number integrals", Letter to the editor JSV (1991) 145 (3), 503 - 510
5. **B. J. Brévar, C. R. Fuller:** "Effect of an internal flow on the distribution of vibrational energy in an infinite fluid-filled thin cylindrical elastic shell", JSV (1993) 167 (1), 149 - 163
6. **M. Bruneau:** "Introduction aux théories de d'acoustique", 1983 Université de Maine, Editeur
7. **F. de Coulon:** "Théorie et traitement des signaux", Traité d'Electricité, d'Electronique et d'Electrotechnique - Volume VI, 1984 Dunod
8. **L. Cremer, M. Heckl, E. E. Ungar:** "Structure-borne sound", 1977 Springer-Verlag New York
9. **C. L. Dym:** "Introduction to the theory of shells", 1974 Pergamon Press
10. **W. Flügge:** "Stresses in shells", 1973 Springer-Verlag New York
11. **C. R. Fuller:** "The effects of wall discontinuities on the propagation of flexural waves in cylindrical shells", JSV (1981) 75 (2), 207 - 228
12. **C. R. Fuller, F. J. Fahy:** "Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid", JSV (1982) 81 (4), 501 - 518
13. **C. R. Fuller:** "The input mobility of an infinite circular cylindrical elastic shell filled with fluid", JSV (1983) 87 (3), 409 - 427
14. **C. R. Halkyard, B. R. Mace:** "A wave component approach to structural intensity in beams", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
15. **C. A. F. de Jong, J. W. Verheij:** "Measurement of vibrational energy flow in straight fluid-filled pipes: a study of the effect of fluid-structure interaction", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
16. **M. Kunt:** "Traitement numérique des signaux", Traité d'Electricité, d'Electronique et d'Electrotechnique - Volume VI, 1984 Dunod
17. **L. Gavric, G. Pavic:** "A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach", JSV (1993) 164(1), 29 - 43
18. **A. W. Leissa:** "Vibration of shells", 1973 NASA SP-288
19. **L. E. Malvern:** "Introduction to the mechanics of a continuous medium", 1969 Prentice-Hall, Inc.
20. **R. D. Mindlin:** "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", Journal of Applied Mechanics, March 1951
21. **P. M. Morse, K. U. Ingard:** "Theoretical Acoustics", 1986 Princetown University Press
22. **D. U. Noiseux:** "Measurement of power flow in uniform beams and plates", JASA Volume 47 Number 1 (Part 2) 1970
23. **J. P. Nougier:** "Méthodes de calcul numérique", 1989 MASSON Paris

24. **V. Z. Parton, P. I. Perlin:** "Mathematical methods of the theory of elasticity, Volume 1", 1984 English translation, MIR Publishers
25. **G. Pavic:** "Measurement of structure borne wave intensity, Part 1: Formulation of the methods", JSV (1976) 49 (2), 221 - 230
26. **G. Pavic:** "Vibrational energy flow in elastic circular cylindrical shells", JSV (1990) 142 (2), 293 - 310
27. **G. Pavic:** "Vibrational energy flow in thin-walled shells", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
28. **G. Pavic:** "Energy flow through straight pipes", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
29. **G. Pavic:** "Vibroacoustical energy flow through straight pipes", JSV (1992) 154(3), 411 - 429
30. **G. Pavic:** "Accuracy of energy flow measurement in pipes using the wave decomposition technique", Proceedings of the 4th International congress on intensity techniques, Senlis - France 1993
31. **R. Petit:** "L'outil mathématique", 1983 MASSON Paris
32. **A. D. Pierce:** "Structural intensity and vibrational energy flow on inhomogeneous shells of arbitrary shape", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
33. **A. J. Romano, P. B. Abraham, E. G. Williams:** "A Poynting vector formulation for thin shells and plates, and its application to structural intensity analysis and source localization. Part I: Theory", JASA 87 (3) March 1990
34. **A. J. Romano, E. G. Williams:** "On the theoretical and experimental applications of a Poynting vector formulation for thin shells and plates", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
35. **L. Schwartz:** "Méthodes mathématiques pour les sciences physiques", 1987 Hermann Paris
36. **K. Shirakawa:** "Effects of shear deformations and rotatory inertia on vibration and buckling of cylindrical shells", JSV (1983) 91 (3), 425 - 437
37. **J. G. Simmonds:** "A brief on tensor analysis", 1994 Springer-Verlag New York, Inc.
38. **W. Soedel:** "On the vibration of shells with Timoshenko-Mindlin type shear deflections and rotatory inertia", JSV (1982) 83 (1), 67 - 79
39. **W. Soedel:** "Vibrations of shells and plates", 1981 Marcel Dekker, Inc.
40. **E. G. Williams:** "Structural intensity in thin cylindrical shells", JASA 89 (4) Pt. 1, April 1991
41. **E. G. Williams, A. J. Romano:** "Structural intensity in thin cylindrical shells", Proceedings of the 3rd International Congress on Intensity techniques, Senlis - France 1990
42. **K. Trdak:** "Intensité vibratoire dans les coques cylindriques vides", Rapport de DEA, 1991 UTC
43. **K. Trdak:** "Flux d'énergie acoustique dans les coques cylindriques à paroi mince en fréquences élevées", Rapport d'étude CETIM N° 181950, décembre 1992

ANNEXE 1

1 OPERATEUR DE GRADIENT, SURFACE GENERALE

L'opérateur de gradient dans le plan est un vecteur donné par l'expression suivante [1]:

$$\nabla_2 = \bar{g}_i \nabla_{2_i} = \bar{g}_i \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad i=1,2 . \quad (\text{A1.1.1})$$

Cet opérateur agit dans un espace vectoriel 2D dont la base $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$ est orthonormale. La base réciproque $\{\bar{g}^1, \bar{g}^2\}$ est orthonormale, elle aussi. Il s'ensuit que [1]:

$$\bar{g}_i \cdot \bar{g}^j = \bar{g}_i \cdot \bar{g}_j = \bar{g}^i \cdot \bar{g}^j = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} ,$$

alors:

$$\bar{g}_i = \bar{g}^i .$$

Par conséquent, les composantes covariantes et contrevariantes des vecteurs et tenseurs sont identiques:

$$\vec{r} = r^i \bar{g}_i = r_i \bar{g}^i \Rightarrow r^i = r_i$$

$$\underline{\underline{T}} = T^{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j = T_{ij} \bar{g}^i \bar{g}^j \Rightarrow T^{ij} = T_{ij} .$$

Ceci permet de définir les grandeurs suivantes dans le plan:

- gradient de scalaire:

$$\nabla_2 \lambda = \nabla_{2_i} \lambda = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i} \bar{g}_i \quad (\text{A1.1.2})$$

- gradient de vecteur:

$$\nabla_2 \vec{r} = \bar{g}_j \nabla_{2_j} (r^i \bar{g}_i) = \frac{1}{A_j} \frac{\partial r^i}{\partial \xi_j} \bar{g}_i \bar{g}_j + \frac{r^i}{A_j} \bar{g}_j \cdot \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \xi_j} \quad (\text{A1.1.3})$$

- divergence de vecteur:

$$\nabla_2 \cdot \vec{r} = \bar{g}_j \cdot \nabla_{2_j} (r^i \bar{g}_i) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial r^i}{\partial \xi_i} + \frac{r^i}{A_j} \bar{g}_j \cdot \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \xi_j} \quad (\text{A1.1.4})$$

- divergence de tenseur:

$$\nabla_2 \cdot \underline{\underline{T}} = \bar{g}_k \cdot \nabla_{2_k} (T^{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial T^{ij}}{\partial \xi_i} \bar{g}_j + \frac{T^{ij}}{A_k} \left(\bar{g}_k \cdot \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \xi_k} \right) \bar{g}_j + \frac{T^{ij}}{A_i} \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \xi_i} \quad (\text{A1.1.5})$$

- dérivées partielles des vecteurs de base:

$$\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \bar{g}_2 \quad (\text{A1.1.6})$$

$$\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \bar{g}_1 \quad (\text{A1.1.7})$$

$$\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \bar{g}_1 \quad (\text{A1.1.8})$$

$$\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \bar{g}_1 \quad (\text{A1.1.9})$$

Portant (A1.6 - 9) dans (A1.3 - 4) nous obtenons l'identité suivante:

$$\nabla_2 \cdot \vec{r} = \text{tr}(\nabla_2 \vec{r}) . \quad (\text{A1.1.10})$$

1.1 Cas particulier, surface cylindrique

Surface cylindrique représente un cas particulier des surfaces générales. Pour celle-ci, les identités suivantes sont vérifiées:

$$A_1 = A_x = A_2 = A_y = 1 .$$

Par conséquent:

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \xi_j} = 0 .$$

Les expressions pour gradient et divergence deviennent de telle manière moins compliquées:

- gradient de vecteur:

$$\nabla_2 \vec{r} = \bar{g}_j \nabla_{2j} (r^i \bar{g}_i) = \frac{\partial r^i}{\partial \xi_j} \bar{g}_i \bar{g}_j \quad (\text{A1.1.1.1})$$

- divergence de vecteur:

$$\nabla_2 \cdot \vec{r} = \bar{g}_j \cdot \nabla_{2j} (r^i \bar{g}_i) = \frac{\partial r^i}{\partial \xi_i} \quad (\text{A1.1.1.2})$$

- divergence de tenseur:

$$\nabla_2 \cdot \underline{T} = \bar{g}_k \cdot \nabla_{2k} (T^{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial \xi_i} \bar{g}_j \quad (\text{A1.1.1.3})$$

2 DERIVATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Le bilan des puissances virtuelles au niveau de la frontière Γ s'écrit:

$$\int_{\Gamma} \left[(\underline{N} \cdot \vec{n}^\Gamma) \cdot \hat{\vec{u}}_t + (\underline{M} \cdot \vec{n}^\Gamma) \cdot \hat{\vec{\beta}} + \underline{Q} \cdot \vec{n}^\Gamma \hat{u}_3 \right] d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(\underline{T}^\Gamma \cdot \hat{\vec{u}}_t^\Gamma + \underline{P}^\Gamma \cdot \hat{\vec{\beta}}^\Gamma + V^\Gamma \hat{u}_3 \right) d\Gamma , \quad (\text{a})$$

où \underline{N} , \underline{M} , \underline{Q} sont donnés dans la base $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$ tandis que \underline{T}^Γ , \underline{P}^Γ , V^Γ sont exprimés dans la base $\{\vec{n}^\Gamma, \vec{t}^\Gamma\}$. Afin d'obtenir les conditions aux limites, il est nécessaire d'exprimer ces

groupes de grandeurs dans la même base. Le tenseur de transformation de la base $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ en base $\{\vec{n}^\Gamma, \vec{t}^\Gamma\}$ est donné ci-dessous:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} n_1^\Gamma & n_2^\Gamma \\ -n_2^\Gamma & n_1^\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A1.2.1})$$

où

$$\begin{aligned} \vec{n}^\Gamma &= n_1^\Gamma \vec{g}_1 + n_2^\Gamma \vec{g}_2 \\ \vec{t}^\Gamma &= -n_2^\Gamma \vec{g}_1 + n_1^\Gamma \vec{g}_2. \end{aligned}$$

L'angle θ désigne l'angle entre les vecteurs \vec{g}_1 et \vec{n}^Γ sur la frontière Γ . Le tenseur de transformation $\underline{\underline{\Theta}}$ est défini de la manière suivante:

$$\begin{Bmatrix} \vec{n}^\Gamma \\ \vec{t}^\Gamma \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \end{Bmatrix},$$

avec les propriétés:

$$\underline{\underline{\Theta}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\Theta}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}^{-1} = \underline{\underline{\Theta}}^T$$

$$\det(\underline{\underline{\Theta}}) = \det(\underline{\underline{\Theta}}^{-1}) = 1.$$

A partir des développements précédents, il s'ensuit que les conditions aux limites, dans la base $\{\vec{n}^\Gamma, \vec{t}^\Gamma\}$, sont données par:

$$\vec{u}_t^\Gamma \mapsto \underline{\underline{T}}^\Gamma = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \vec{n}^\Gamma = \underline{\underline{N}}^\Gamma \quad (\text{A1.2.2})$$

$$\vec{\beta}^\Gamma \mapsto \underline{\underline{P}}^\Gamma = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n}^\Gamma = \underline{\underline{M}}^\Gamma \quad (\text{A1.2.3})$$

$$u_3 \mapsto V^\Gamma = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{n}^\Gamma = \underline{\underline{Q}}^\Gamma \quad (\text{A1.2.4})$$

Dans la base $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ les mêmes conditions aux limites s'écrivent:

$$\vec{u}_t \mapsto \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\Theta}}^T \cdot \underline{\underline{T}}^\Gamma = \underline{\underline{N}} \cdot \vec{n}^\Gamma \quad (\text{A1.2.5})$$

$$\vec{\beta} \mapsto \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\Theta}}^T \cdot \underline{\underline{P}}^\Gamma = \underline{\underline{M}} \cdot \vec{n}^\Gamma \quad (\text{A1.2.6})$$

$$u_3 \mapsto V = V^\Gamma = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{n}^\Gamma. \quad (\text{A1.2.7})$$

Les équations (A1.2.2 - 7) sont valides pour les théories de l'ordre supérieur et inférieur à la fois. Lorsqu'il s'agit de théories de l'ordre inférieur, les conditions aux limites de type Kirchhoff peuvent être déduites. Pour ceci, il faut définir le vecteur des rotations des sections droites dans la base $\{\vec{n}^\Gamma, \vec{t}^\Gamma\}$. Celui-ci est donné par

$$\vec{\beta}^\Gamma = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \vec{\beta} = \underline{\underline{\Theta}} \cdot (\underline{\underline{K}} \cdot \vec{u}_t - \nabla_2 u_3) = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}^T \cdot \underline{\underline{\Theta}} \cdot \vec{u}_t - \underline{\underline{\Theta}} \cdot \nabla_2 u_3.$$

A partir de cette équation, nous pouvons définir le tenseur de courbure dans la base $\{\vec{n}^\Gamma, \vec{t}^\Gamma\}$:

$$\underline{\underline{K}}^\Gamma = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}^T \quad (\text{A1.2.8})$$

et l'opérateur de dérivation dans les sens des vecteurs de base $\{\bar{n}^\Gamma, \bar{t}^\Gamma\}$:

$$\nabla_2^\Gamma = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \nabla_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} . \quad (\text{A1.2.9})$$

A l'aide de (A1.2.8 - 9) nous obtenons:

$$\vec{\beta}^\Gamma = \underline{\underline{K}}^\Gamma \cdot \vec{u}^\Gamma - \nabla_2^\Gamma u_3 . \quad (\text{A1.2.10})$$

Les puissances virtuelles des forces et moments linéiques externes, de type Kirchhoff sont données par l'expression suivante:

$$\int_\Gamma \left(T \hat{u}_n^\Gamma + S \hat{u}_t^\Gamma + R \hat{u}_3 + P \hat{\beta}_n^\Gamma \right) d\Gamma , \quad (\text{b})$$

où T, S, R sont respectivement les forces de Kirchhoff agissant dans les sens de $\bar{n}^\Gamma, \bar{t}^\Gamma$ et \bar{n} . La grandeur P désigne le moment de flexion de Kirchhoff. Afin d'obtenir les conditions aux limites de type Kirchhoff, il faut mettre le membre de droite de (a) sous la forme de (b). En faisant ainsi, les conditions aux limites de type Kirchhoff sont données par les expressions suivantes dans l'hypothèse où la frontière Γ est lisse partout:

$$u_n^\Gamma \mapsto N_n^\Gamma = T \quad (\text{A1.2.11})$$

$$u_t^\Gamma \mapsto N_t^\Gamma + \frac{M_t^\Gamma}{R_t^\Gamma} = S \quad (\text{A1.2.12})$$

$$u_3 \mapsto Q^\Gamma + \frac{\partial M_t^\Gamma}{\partial t} = R \quad (\text{A1.2.13})$$

$$\beta_n^\Gamma \mapsto M_n^\Gamma = P . \quad (\text{A1.2.14})$$

3 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **J. G. Simmonds:** "A brief on tensor analysis", 1994 Springer-Verlag New York, Inc.

ANNEXE 2

1 RELATION DE DISPERSION POUR LA THEORIE DE FLÜGGE-TIMOSHENKO

Vecteur des déplacements ondulatoires [1]:

$$\vec{u}(\xi, \eta, t) = \begin{Bmatrix} \hat{u} \cos(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha - \pi/2)} \\ \hat{v} \sin(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha)} \\ \hat{w} \cos(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha)} \\ \hat{r} \cos(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha - \pi/2)} \\ \hat{s} \sin(n\eta) e^{i(\chi\xi + \alpha)} \end{Bmatrix}$$

Equation d'équilibre:

$$\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\hat{u}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{A2.1.1})$$

Vecteur des amplitudes des déplacements:

$$\underline{\hat{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{r} \\ \hat{s} \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.1.2})$$

Composantes de la matrice de nombre d'onde [1]:

$$L_{11} = \chi^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+\beta^2)n^2 - \Omega^2 \quad (\text{A2.1.3})$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2}n\chi \quad (\text{A2.1.4})$$

$$L_{13} = L_{31} = \nu\chi - \beta^2 \left(\frac{1-\nu}{2}n^2 - \chi^2 \right) \chi \quad (\text{A2.1.5})$$

$$L_{14} = L_{41} = \beta^2 \left(\chi^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2 - \Omega^2 \right) \quad (\text{A2.1.6})$$

$$L_{15} = L_{51} \quad (\text{A2.1.7})$$

$$L_{22} = \frac{1-\nu}{2} \left[\chi^2 + \zeta(1+\beta^2) \right] + (1+\beta^2)n^2 - \Omega^2 \quad (\text{A2.1.8})$$

$$L_{23} = L_{32} = n \left[1 + \beta^2 + \zeta \frac{1-\nu}{2}(1+\beta^2) \right] \quad (\text{A2.1.9})$$

$$L_{24} = L_{42} = 0 \quad (\text{A2.1.10})$$

$$L_{25} = L_{52} = \beta^2 \left(\frac{1-\nu}{2} \chi^2 - n^2 - \Omega^2 \right) - \varsigma \frac{1-\nu}{2} (1 + \beta^2) \quad (\text{A2.1.11})$$

$$L_{33} = 1 + \beta^2 + \varsigma \frac{1-\nu}{2} \left[\chi^2 + (1 + \beta^2) n^2 \right] - \Omega^2 \quad (\text{A2.1.12})$$

$$L_{34} = L_{43} = -\varsigma \frac{1-\nu}{2} \chi \quad (\text{A2.1.13})$$

$$L_{35} = L_{53} = - \left[\beta^2 + \varsigma \frac{1-\nu}{2} (1 + \beta^2) \right] n \quad (\text{A2.1.14})$$

$$L_{44} = \beta^2 \left(\chi^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - \Omega^2 \right) + \varsigma \frac{1-\nu}{2} \quad (\text{A2.1.15})$$

$$L_{45} = L_{54} = \beta^2 \frac{1-\nu}{2} n \chi \quad (\text{A2.1.16})$$

$$L_{55} = \beta^2 \left(n^2 + \frac{1-\nu}{2} \chi^2 - \Omega^2 \right) + \varsigma \frac{1-\nu}{2} (1 + \beta^2) \quad (\text{A2.1.17})$$

Relation de dispersion:

$$\det(\underline{L}) = 0 \quad (\text{A2.1.18})$$

Rapports entre les amplitudes:

$$\Gamma^u = \frac{\hat{u}}{\hat{w}} \quad (\text{A2.1.19})$$

$$\Gamma^v = \frac{\hat{v}}{\hat{w}} \quad (\text{A2.1.20})$$

$$\Gamma^r = \frac{\hat{r}}{\hat{w}} \quad (\text{A2.1.21})$$

$$\Gamma^s = \frac{\hat{s}}{\hat{w}} \quad (\text{A2.1.22})$$

Equation pour les rapports entre les amplitudes:

$$\begin{bmatrix} L_{11}(\chi, n, \Omega) & L_{12}(\chi, n, \Omega) & L_{14}(\chi, n, \Omega) & 0 \\ L_{21}(\chi, n, \Omega) & L_{22}(\chi, n, \Omega) & 0 & L_{25}(\chi, n, \Omega) \\ L_{41}(\chi, n, \Omega) & 0 & L_{44}(\chi, n, \Omega) & L_{45}(\chi, n, \Omega) \\ 0 & L_{52}(\chi, n, \Omega) & L_{54}(\chi, n, \Omega) & L_{55}(\chi, n, \Omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Gamma^u \\ \Gamma^v \\ \Gamma^r \\ \Gamma^s \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} L_{13}(\chi, n, \Omega) \\ L_{23}(\chi, n, \Omega) \\ L_{43}(\chi, n, \Omega) \\ L_{53}(\chi, n, \Omega) \end{Bmatrix} \quad (\text{A2.1.23})$$

Composante L_{33} pour le tuyau rempli d'un fluide acoustique:

$$L_{33}^f = L_{33} - \left(1 - \frac{h}{2a} \right) F_{cp} \quad (\text{A2.1.24})$$

2 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **K. Trdak:** “Flux d’énergie acoustique dans les coques cylindriques à paroi mince en fréquences élevées”, Rapport d’étude CETIM N° 181950, décembre 1992

ANNEXE 3

1 INTENSITE VIBRATOIRE DANS LES COQUES GENERALES

La démonstration du développement des expressions pour l'intensité vibratoire dans les coques générales, ce qui est le sujet de cette annexe, passe par les étapes suivantes:

- 1) écriture des équations d'équilibre au sens des distributions
- 2) établissement du bilan des puissances nettes

Nous passons ainsi à la première étape. Les équations d'équilibre pour une coque générale s'écrivent sous la forme suivante:

$$\nabla_2 \cdot \underline{N} + \underline{K} \cdot \underline{Q} = \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2}$$

$$\nabla_2 \cdot \underline{Q} - \underline{K} \cdot \underline{N} + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

$$\nabla_2 \cdot \underline{M} - \underline{Q} = \underline{0} .$$

Les conditions aux limites sur la frontière Γ de la surface médiane S de la coque générale sont définies par les expressions suivantes:

$$\vec{u}_t \mapsto \underline{T} = \underline{N} \cdot \vec{n}^\Gamma$$

$$\vec{\beta} \mapsto \underline{P} = \underline{M} \cdot \vec{n}^\Gamma$$

$$u_3 \mapsto V = \underline{Q} \cdot \vec{n}^\Gamma .$$

Au sens des distributions, il est possible d'écrire les équations d'équilibre comme suit:

$$\nabla_2 \cdot (\underline{N} H_s) + \underline{K} \cdot (\underline{Q} H_s) = \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} H_s \quad (\text{A3.1.1})$$

$$\nabla_2 \cdot (\underline{Q} H_s) - \underline{K} \cdot (\underline{N} H_s) + q_3 H_q = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} H_s \quad (\text{A3.1.2})$$

$$\nabla_2 \cdot (\underline{M} H_s) - \underline{Q} H_s = \underline{0} . \quad (\text{A3.1.3})$$

Les distributions particulières H_s , H_q sont définies de la manière suivante:

$$\int_{R \times R} H_s f(\xi_1, \xi_2) dS = \int_S f(\xi_1, \xi_2) dS$$

$$\int_{R \times R} H_q f(\xi_1, \xi_2) dS = \int_{S_q} f(\xi_1, \xi_2) dS .$$

Ce sont les distributions de Heaviside spatiales, à valeur 1 dans le domaine d'intérêt et nulles hors celui-ci. En introduisant H_q , mêmes les forces concentrées peuvent être incluses dans les

équations d'équilibre, H_q devenant alors la distribution de Dirac. Grâce à ces distributions, les équations (A3.1.1 - 3) sont valides dans $R \times R$. Nous calculons maintenant les divergences des termes entre les parenthèses dans les équations (A3.1.1 - 3). L'identité suivante est utilisée dans ce but:

$$\nabla_2 \cdot (\underline{T} H_S) = (\nabla_2 \cdot \underline{T}) H_S - [\underline{T}]^\Gamma \cdot \vec{n}^\Gamma \delta^\Gamma ,$$

où

$$[\underline{T}]^\Gamma = \underline{T}(\Gamma^+) - \underline{T}(\Gamma^-) ,$$

désigne le saut du tenseur \underline{T} sur la frontière Γ ; \vec{n}^Γ désigne le vecteur de normale sortant de la surface médiane S ; δ^Γ désigne la distribution de Dirac dont le support est la frontière Γ . A l'aide de ce résultat, les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme:

$$H_S \left(\nabla_2 \cdot \underline{N} + \underline{K} \cdot \underline{Q} - \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} \right) = [\underline{N}]^\Gamma \cdot \vec{n}^\Gamma \delta^\Gamma \quad (\text{A3.1.4})$$

$$H_S \left(\nabla_2 \cdot \underline{Q} - \underline{K} \cdot \underline{N} + q_3 H_q - \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) = [\underline{Q}]^\Gamma \cdot \vec{n}^\Gamma \delta^\Gamma \quad (\text{A3.1.5})$$

$$H_S (\nabla_2 \cdot \underline{M} - \underline{Q}) = [\underline{M}]^\Gamma \cdot \vec{n}^\Gamma \delta^\Gamma . \quad (\text{A3.1.6})$$

Les termes des membres de droite dans les équations précédentes peuvent être exprimés à l'aide des forces et des moments agissant sur la frontière Γ (voire annexe 1, eq. (A1.2.5 - 7)):

$$\underline{T} = [\underline{N}]^\Gamma \cdot \vec{n}^\Gamma \quad (\text{A3.1.7})$$

$$\underline{P} = [\underline{M}]^\Gamma \cdot \vec{n}^\Gamma \quad (\text{A3.1.8})$$

$$V = [\underline{Q}]^\Gamma \cdot \vec{n}^\Gamma . \quad (\text{A3.1.9})$$

Ici se termine la première étape de la démonstration et commence la deuxième, l'établissement du bilan des puissances.

Portant (A3.1.7 - 9) dans (A3.1.4 - 6)) et multipliant ces dernières avec les vecteurs des vitesses \vec{u}_t , \dot{u}_3 et $\vec{\beta}$, le bilan des densités de puissances est obtenu. Celui-ci s'écrit:

$$H_S \left(\nabla_2 \cdot \underline{N} + \underline{K} \cdot \underline{Q} - \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} \right) \cdot \vec{u}_t = \underline{T} \cdot \vec{u}_t \delta^\Gamma$$

$$H_S \left(\nabla_2 \cdot \underline{Q} - \underline{K} \cdot \underline{N} + q_3 H_q - \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) \cdot \dot{u}_3 = V \dot{u}_3 \delta^\Gamma .$$

$$H_S (\nabla_2 \cdot \underline{M} - \underline{Q}) \cdot \vec{\beta} = \underline{P} \cdot \vec{\beta} \delta^\Gamma .$$

A l'aide de l'identité:

$$\nabla_2 (\underline{T} \cdot \vec{a}) = (\nabla_2 \cdot \underline{T}) \cdot \vec{a} + \underline{T} \cdot \nabla_2 \vec{a} ,$$

où \underline{T} , \vec{a} désignent respectivement un tenseur et un vecteur quelconques, le bilan des densités de

puissances prend la forme suivante:

$$H_s \left(-\underline{N} \cdot \nabla_2 \vec{u}_t + \underline{Q} \cdot \underline{K} \cdot \vec{u}_t - \rho h \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} \cdot \vec{u}_t \right) = \underline{T} \cdot \vec{u}_t \delta^\Gamma - H_s \nabla_2 \cdot (\underline{N} \cdot \vec{u}_t)$$

$$H_s \left(-\underline{Q} \cdot \nabla_2 \dot{u}_3 - \underline{K} \cdot \underline{N} \dot{u}_3 + q_3 H_q \dot{u}_3 - \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \dot{u}_3 \right) = V \dot{u}_3 \delta^\Gamma - H_s \nabla_2 (\underline{Q} \dot{u}_3)$$

$$H_s \left(-\underline{M} \cdot \nabla_2 \vec{\beta} - \underline{Q} \cdot \vec{\beta} \right) = \underline{P} \cdot \vec{\beta} \delta^\Gamma - H_s \nabla_2 (\underline{M} \cdot \vec{\beta}) .$$

Les équations ci-dessus sont scalaires. Il est donc possible de les additionner. En faisant cela, le bilan des densités de puissances est obtenu sous sa forme finale:

$$H_s \frac{\partial}{\partial t} (e_p - e_c) = \delta^\Gamma \pi^\Gamma - H_q \pi_q + H_s \nabla_2 \cdot \vec{P}_i \quad . \quad (\text{A3.1.10})$$

où:

- e_p désigne la densité surfacique d'énergie potentielle:

$$e_p = -\frac{1}{2} \left[\underline{N} \cdot (\nabla_2 \vec{u}_t + \underline{K} u_3) + \underline{M} \cdot \nabla_2 \vec{\beta} \right] , \quad (\text{A3.1.11})$$

- e_c désigne la densité surfacique d'énergie cinétique:

$$e_c = \frac{1}{2} \rho h \left(\frac{\partial \vec{u}_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{u}_t}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (\text{A3.1.12})$$

- π^Γ désigne la densité linéique de puissance instantanée traversant la frontière Γ :

$$\pi^\Gamma = \underline{T} \cdot \vec{u}_t + V \dot{u}_3 + \underline{P} \cdot \vec{\beta} \quad (\text{A3.1.13})$$

- π_q désigne la densité surfacique de puissance instantanée des excitations:

$$\pi_q = q_3 \dot{u}_3 \quad (\text{A3.1.14})$$

- \vec{P}_i désigne le vecteur de Poynting:

$$\vec{P}_i = - \left(\underline{N} \cdot \vec{u}_t + \underline{M} \cdot \vec{\beta} + \underline{Q} \dot{u}_3 \right) . \quad (\text{A3.1.15})$$

La moyenne temporelle de (A3.1.10) donne le bilan des densités de puissances nettes dans le domaine, le bilan s'écrivant sous la forme suivante:

$$H_q \overline{\pi_q} - \delta^\Gamma \overline{\pi^\Gamma} = H_s \nabla_2 \cdot \vec{I} \quad , \quad (\text{A3.1.16})$$

où \vec{I} désigne le vecteur de l'intensité vibratoire défini par:

$$\vec{I} = \overline{\vec{P}_i} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \vec{P}_i dt \quad . \quad (\text{A3.1.17})$$

L'équation (A3.1.16) est écrite au sens des distributions. Afin de lui donner un sens physique, il faut faire l'intégration sur $R \times R$. En faisant ainsi, le bilan des puissances nettes totales dans la coque générale est obtenu.

Celui-ci s'écrit:

$$\overline{\Pi}_q - \overline{\Pi}^\Gamma = \int_S \nabla_2 \cdot \vec{I} dS \quad (\text{A3.1.18})$$

où la puissance nette totale des excitations est donnée par:

$$\overline{\Pi}_q = \int_{S_q} \overline{\pi}_q dS \quad (\text{A3.1.19})$$

et celle traversant la frontière

$$\overline{\Pi}^\Gamma = \int_\Gamma \overline{\pi}^\Gamma d\Gamma . \quad (\text{A3.1.20})$$

L'équation (A3.1.18) stipule que la différence entre la puissance nette totale des excitations et la puissance nette totale traversant la frontière est égale à l'intégrale de la divergence du vecteur de l'intensité vibratoire dans la surface médiane S .

2 ANALYSE DE L'INTERACTION ENTRE LES ONDES SE PROPAGEANT DANS LES SENS AXIAUX OPPOSÉS

Supposons qu'il y a deux ondes élastiques dans le tuyau, ayant le même nombre d'ondes, qui se propagent dans les sens axiaux opposés. Le vecteur de déplacement peut alors être écrit sous la forme suivante:

$$\vec{u}(x, t) = \begin{Bmatrix} i\Gamma_u \hat{D}_w(x) \\ \Gamma_v \hat{S}_w(x) \\ \hat{S}_w(x) \end{Bmatrix} e^{i\omega t} ,$$

avec

$$\hat{S}_w(x) = \hat{w}_+ e^{-ikx} + \hat{w}_- e^{ikx}$$

$$\hat{D}_w(x) = \hat{w}_+ e^{-ikx} - \hat{w}_- e^{ikx} .$$

Le nombre d'onde k est, dans le cas général, complexe:

$$k = k^{\Re} - ik^{\Im} \quad k^{\Re}, k^{\Im} \geq 0 .$$

Calculons maintenant la composante $-\overline{vw\dot{u}}$ de la contribution de membrane:

$$X = -\overline{vw\dot{u}} = \frac{1}{2} v\omega \Re \{ \Gamma_u \hat{S}_w^*(x) \hat{D}_w(x) \} .$$

D'une manière générale, chaque terme figurant dans les expressions pour les contributions de membrane, de flexion et de courbure peut être ramené sous la forme suivante:

$$X = \Re \{ C \hat{S}_w^*(x) \hat{D}_w(x) \} ,$$

où C est une constante complexe:

$$C = C^{\Re} + iC^{\Im} .$$

Calculons d'abord $\hat{S}_w^*(x)\hat{D}_w(x)$:

$$\hat{S}_w^*(x)\hat{D}_w(x) = |\hat{w}_+|^2 e^{-2k^{\Re}x} - |\hat{w}_-|^2 e^{2k^{\Im}x} - 2i \left[(\hat{w}_+^* \hat{w}_-)^{\Re} \sin(2k^{\Re}x) + (\hat{w}_+^* \hat{w}_-)^{\Im} \cos(2k^{\Re}x) \right] .$$

Dans l'expression ci-dessus, les exposants \Re , \Im désignent respectivement la partie réelle ou imaginaire. Il y a 4 cas possibles:

- **cas 1, ondes libres:**

Dans ce cas, k , Γ_u et C sont tous réels:

$$k = k^{\Re} \quad \Gamma_u = \Gamma_u^{\Re} \quad C = C^{\Re} .$$

Par conséquent, la composante $-\overline{vw\dot{u}}$ devient:

$$X = -\overline{vw\dot{u}} = \frac{1}{2} v\omega \Gamma_u^{\Re} (|\hat{w}_+|^2 - |\hat{w}_-|^2) ,$$

ou d'une manière générale:

$$X = C^{\Re} (|\hat{w}_+|^2 - |\hat{w}_-|^2) .$$

Dans le cas de l'interaction entre les ondes libres, le flux de puissance vibratoire nette est donc égal à la différence des flux partiels dans les sens opposés.

- **cas 2, ondes évanescentes:**

Dans ce cas, k , Γ_u et C sont tous imaginaires:

$$k = -ik^{\Im} \quad \Gamma_u = i\Gamma_u^{\Im} \quad C = iC^{\Im} .$$

Par conséquent, la composante $-\overline{vw\dot{u}}$ devient:

$$X = -\overline{vw\dot{u}} = v\omega \Gamma_u^{\Im} (\hat{w}_+^* \hat{w}_-)^{\Im} ,$$

ou d'une manière générale:

$$X = C^{\Im} (\hat{w}_+^* \hat{w}_-)^{\Im} .$$

Pour que une partie du flux de puissance vibratoire nette soit transférée par l'interaction entre les ondes évanescentes, il est nécessaire que:

$$(\hat{w}_+^* \hat{w}_-)^{\Im} \neq 0 .$$

Par conséquent, les ondes évanescentes ne transfèrent la puissance vibratoire nette ni dans un tuyau infini ni dans un tuyau semi-infini.

- **cas 3, ondes atténuées:**

Dans ce cas, il y a toujours deux paires d'ondes qui se propagent dans le tuyau. Leurs \hat{k} , $\hat{\Gamma}_u$ s'écrivent:

$$k_1 = -k_2^* = k^{\Re} - ik^{\Im} \quad \Gamma_{u1} = -\Gamma_{u2}^* = \Gamma_u^{\Re} + i\Gamma_u^{\Im}$$

et le vecteur de déplacement s'écrit:

$$\vec{u}(x,t) = \sum_{l=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} i\Gamma_{ul} \hat{D}_{wl}(x) \\ \Gamma_{vl} \hat{S}_{wl}(x) \\ \hat{S}_{wl}(x) \end{array} \right\} e^{-i\alpha x} .$$

La composante $-\overline{vw\dot{u}}$ devient:

$$\begin{aligned} X = -\overline{vw\dot{u}} = v\omega \left\{ \Gamma_u^{\Re} \left[e^{-2k^{\Im}x} (|\hat{w}_{1+}|^2 - |\hat{w}_{2+}|^2) - e^{2k^{\Im}x} (|\hat{w}_{1-}|^2 - |\hat{w}_{2-}|^2) \right] - \right. \\ \left. - \Gamma_u^{\Im} \sin(2k^{\Re}x) \left[(\hat{w}_{1+} \hat{w}_{1-}^*)^{\Re} - (\hat{w}_{2+} \hat{w}_{2-}^*)^{\Re} \right] + \right. \\ \left. + \Gamma_u^{\Im} \cos(2k^{\Re}x) \left[(\hat{w}_{1+}^* \hat{w}_{1-})^{\Im} + (\hat{w}_{2+}^* \hat{w}_{2-})^{\Im} \right] \right\} \end{aligned}$$

Pour que X ne soit pas en contradiction avec éq. (4.1.10), il est nécessaire que $X = 0$. Cette condition est satisfaite lorsque:

$$\begin{aligned} \hat{w}_+ = \hat{w}_{1+} = \pm \hat{w}_{2+}^* \\ \hat{w}_- = \hat{w}_{1-} = \pm \hat{w}_{2-}^* \end{aligned}$$

Portant ces relations entre les amplitudes du déplacement normal dans l'expression pour le vecteur de déplacement \vec{u} et sachant que

$$\Gamma_v = \Gamma_{v1} = \Gamma_{v2}^* ,$$

celui-ci peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \vec{u} = 2 \left(\left\{ \begin{array}{l} -(\Gamma_u w_+)^{\Im} \\ (\Gamma_v w_+)^{\Re} \\ w_+^{\Re} \end{array} \right\} \cos(k^{\Re}x) + \left\{ \begin{array}{l} (\Gamma_u w_+)^{\Re} \\ (\Gamma_v w_+)^{\Im} \\ w_+^{\Im} \end{array} \right\} \sin(k^{\Re}x) \right) e^{-k^{\Im}x} + \\ + 2 \left(\left\{ \begin{array}{l} (\Gamma_u w_-)^{\Im} \\ (\Gamma_v w_-)^{\Re} \\ w_-^{\Re} \end{array} \right\} \cos(k^{\Re}x) - \left\{ \begin{array}{l} -(\Gamma_u w_-)^{\Re} \\ (\Gamma_v w_-)^{\Im} \\ w_-^{\Im} \end{array} \right\} \sin(k^{\Re}x) \right) e^{k^{\Im}x} \end{aligned}$$

Ceci signifie que les ondes atténuées, associées aux branches complexes de la courbe de dispersion, agissent mutuellement de telle façon qu'elles créent des ondes à la fois stationnaires et évanescentes.

3 CAS DE THEORIE DE FLUGGE-TIMOSHENKO

Les expressions pour les contributions non-dimensionnelles de flexion et de courbure pour les ondes libres s'écrivent:

$$Y_{n;l}^f = \frac{\beta^2}{4} \left[\left(\varsigma \frac{1-\nu}{2} + \chi_{n;l} \Gamma_{n;l}^r \right) \Gamma_{n;l}^r + \left(\frac{1+\nu}{2} n \Gamma_{n;l}^r + \frac{1-\nu}{2} \chi_{n;l} \Gamma_{n;l}^s \right) \Gamma_{n;l}^s \right] \quad n \geq 1 \quad (\text{A3.3.1})$$

$$Y_{n;l}^c = \frac{\beta^2}{2} \chi_{n;l} \left(\Gamma_{n;l}^u \Gamma_{n;l}^r + \frac{1-\nu}{2} \Gamma_{n;l}^v \Gamma_{n;l}^s + \varsigma \frac{1-\nu}{4} \right) \quad n \geq 1 \quad (\text{A3.3.2})$$

$$Y_{0;l}^f = \frac{\beta^2}{2} \left(\varsigma \frac{1-\nu}{2} + \chi_{0;l} \Gamma_{0;l}^r \right) \Gamma_{0;l}^r \quad n = 0 \quad (\text{A3.3.3})$$

$$Y_{0;l}^c = \beta^2 \chi_{n;l} \left(\Gamma_{0;l}^u \Gamma_{0;l}^r + \varsigma \frac{1-\nu}{4} \right) \quad n = 0 \quad (\text{A3.3.4})$$

ANNEXE 4

1 TECHNIQUE DE MESURE POUR LE NOMBRE D'ONDES

Supposons que dans un milieu unidimensionnel quelconque il y a deux ondes libres se propageant dans les sens opposés. Soit une grandeur q caractéristique pour ces ondes définie en chaque point x par l'expression suivante:

$$q(x,t) = (\hat{q}_+ e^{-ikx} + \hat{q}_- e^{ikx}) e^{i\omega t} ,$$

où k , ω désignent respectivement le nombre d'ondes et la pulsation. Il est alors possible de calculer le nombre d'ondes k par l'expression suivante:

$$k = \frac{1}{\delta} \operatorname{acos} \left[\frac{\hat{q}(-\delta,t) + \hat{q}(\delta,t)}{2\hat{q}(0,t)} \right] ,$$

où par δ est désigné la distance entre les points où les valeurs de la grandeur q sont successivement prélevées. En d'autres mots, il est possible d'estimer le nombre d'ondes k par la voie expérimentale en mesurant la grandeur q en trois points écartés l'un de l'autre de δ (voir figure A4.1).

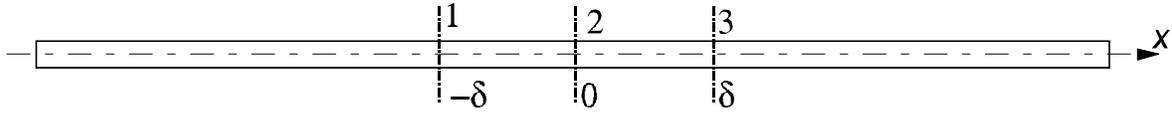


Figure A4.1: Répartition axiale des points de mesure

L'évolution du nombre d'ondes en fonction de la fréquence f est donnée par l'expression suivante:

$$k = \frac{1}{\delta} \operatorname{acos} \left[\frac{Q(-\delta, f) + Q(\delta, f)}{2Q(0, f)} \right] ,$$

où $Q(x, f)$ désigne la transformé de Fourier de $q(x, t)$. Il est aussi possible d'exprimer k en termes des interspectres par la formule suivante:

$$k = \frac{1}{\delta} \operatorname{acos} \left(\frac{\Phi_{21} + \Phi_{23}}{2\Phi_{22}} \right) \quad (\text{A4.1.1})$$

Lorsqu'il s'agit des tuyaux, cette formule peut être appliquée aux cas des ondes de type paroi dans un tuyau rempli d'un fluide léger.

Dans ce cas-là, l'expression (A4.1.1), en respectant la notation du chapitre 5, s'écrit sous la forme suivante:

$$k = \frac{1}{\delta} \operatorname{acos} \left(\frac{[\Phi_0]_{21} + [\Phi_0]_{23}}{2[\Phi_0]_{22}} \right) \quad (\text{A4.1.2})$$

Au cas de figure des ondes de flexion et de celles lobaires ($n = 1, 2$), leurs nombres d'ondes sont estimés avec une meilleure précision en utilisant la formule suivante:

$$k = \frac{1}{\delta} \operatorname{acos} \left(\frac{\sum_{m=0}^1 [\Phi_{n;m}]_{21} + [\Phi_{n;m}]_{23}}{2 \sum_{m=0}^1 [\Phi_{n;m}]_{22}} \right) \quad n = 1, 2 \quad (\text{A4.1.3})$$

Les conditions qui doivent être remplies pour que le nombre d'ondes soit estimé avec une précision satisfaisante sont les suivantes:

- il n'y a qu'une paire d'ondes libres se propageant dans le tuyau dans la gamme des fréquences analysée
- les capteurs sont situés suffisamment loin des terminaisons du tuyau pour que les influences du champ proche (créé par les ondes évanescentes et atténuées) deviennent négligeables.

ANNEXE 5

1 MESURE DU NOMBRE D'ONDES

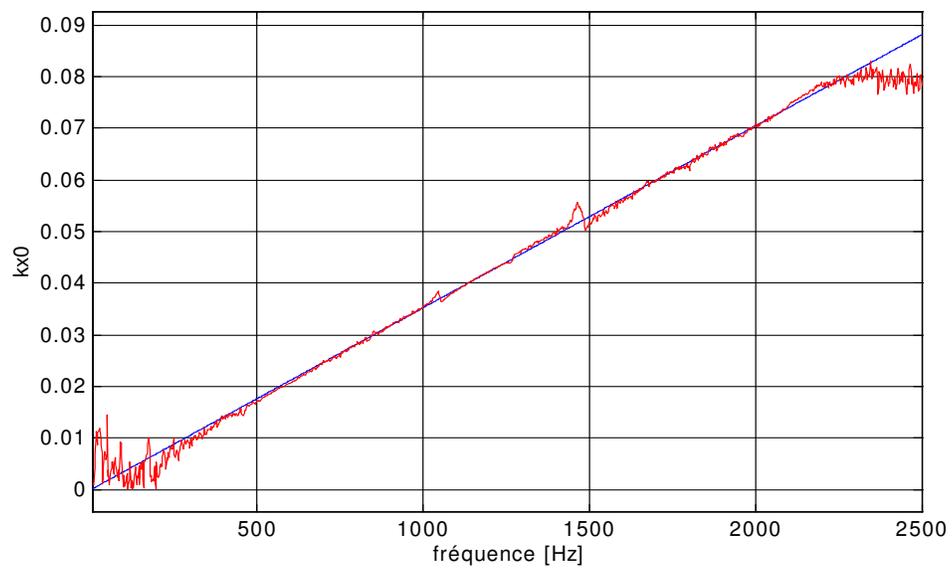


Figure A5.1: Courbe de dispersion pour les ondes longitudinales (tuyau rempli d'air, mode respiratoire): théorique (trait bleu), mesurée (trait rouge)

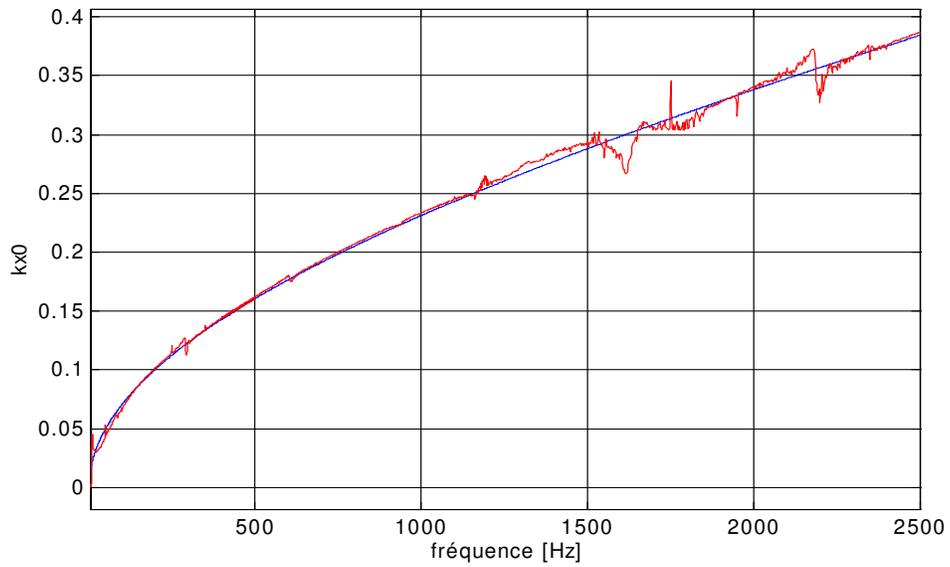


Figure A5.2: Courbe de dispersion pour les ondes de quasi-flexion (tuyau rempli d'air, mode de flexion): théorique (trait bleu), mesurée (trait rouge)

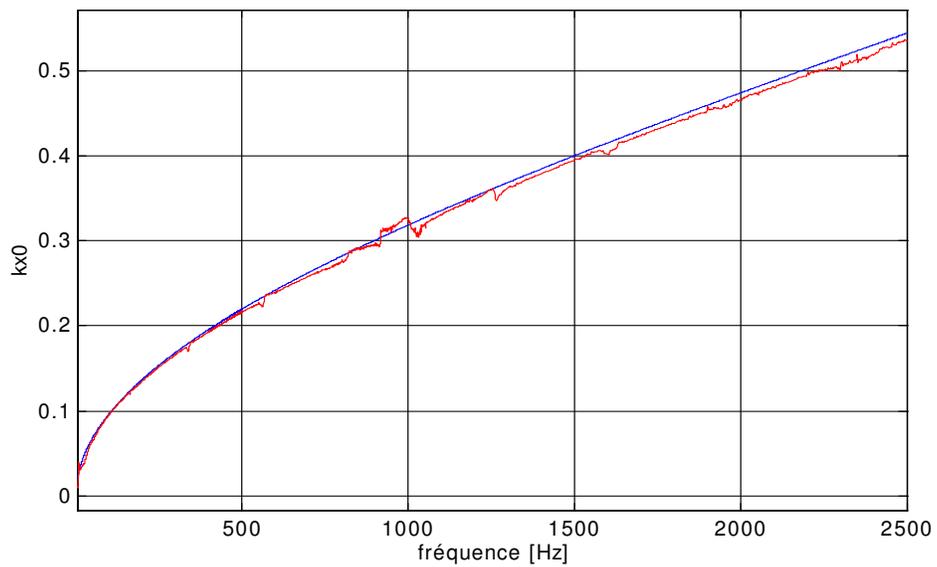


Figure A5.3: Courbe de dispersion pour les ondes longitudinales (tuyau rempli d'huile, mode de flexion): théorique (trait bleu), mesurée (trait rouge)

2 RESULTATS DE LA VALIDATION EXPERIMENTALE, TUYAU VIDE

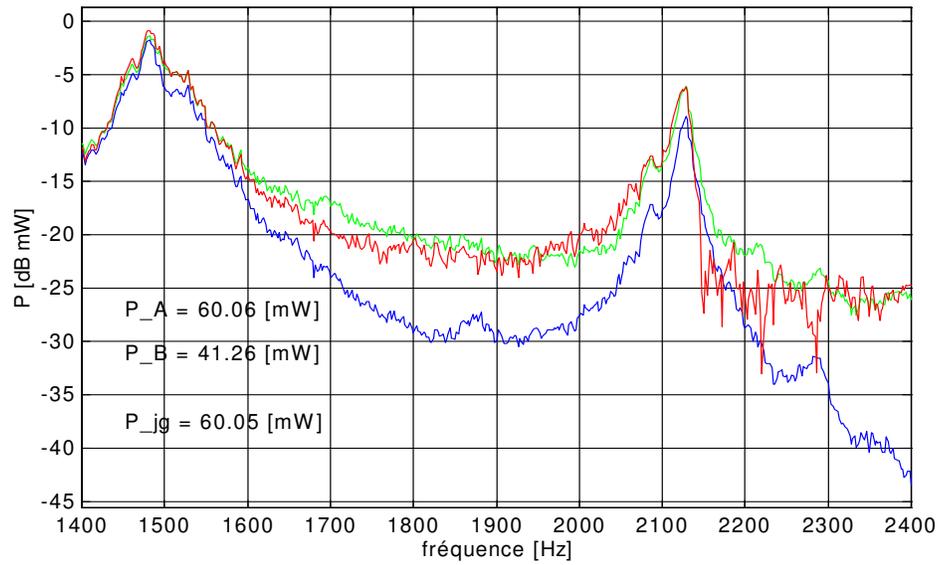


Figure A5.4: Tuyau vide, essai axial, flux de puissance: exciteur A (trait vert), exciteur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 1400 - 2500 [Hz]

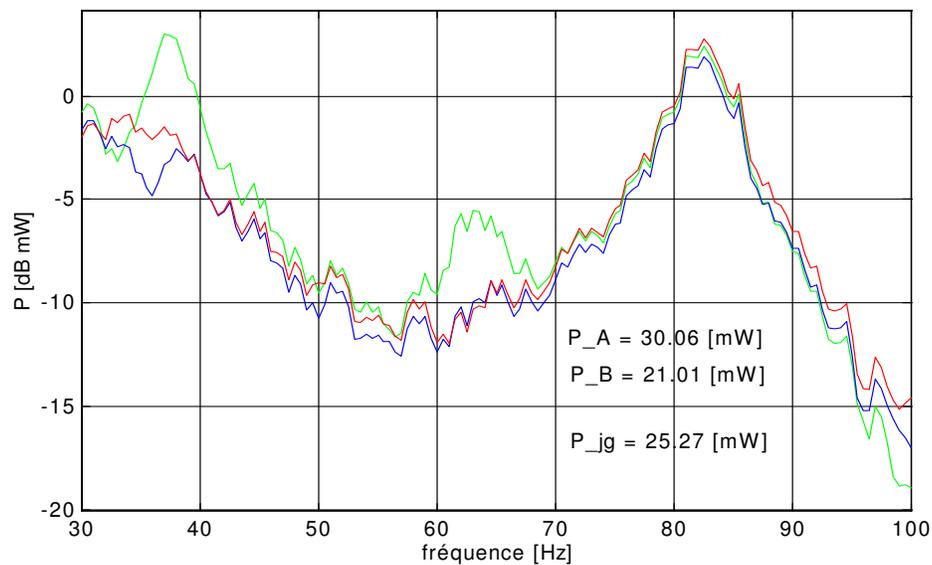


Figure A5.5: Tuyau vide, essai de flexion, flux de puissance: exciteur A (trait vert), exciteur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 100 [Hz]

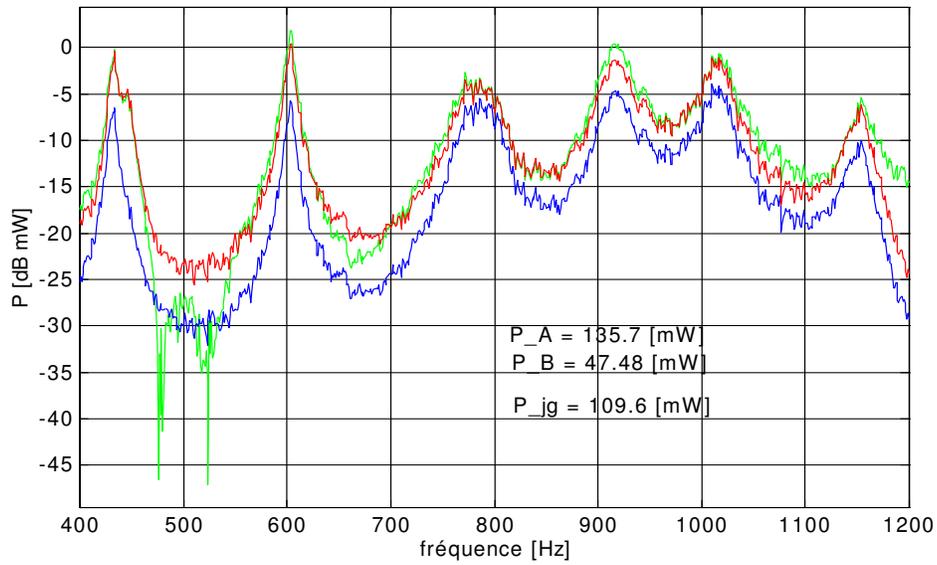


Figure A5.6: Tuyau vide, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 400 - 1200 [Hz]

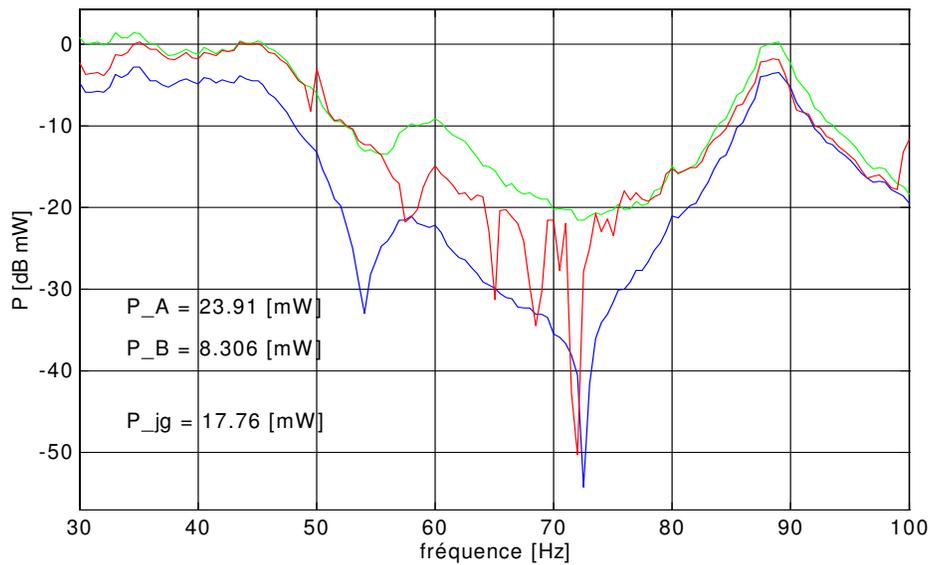


Figure A5.7: Tuyau vide, essai combiné, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 100 [Hz]

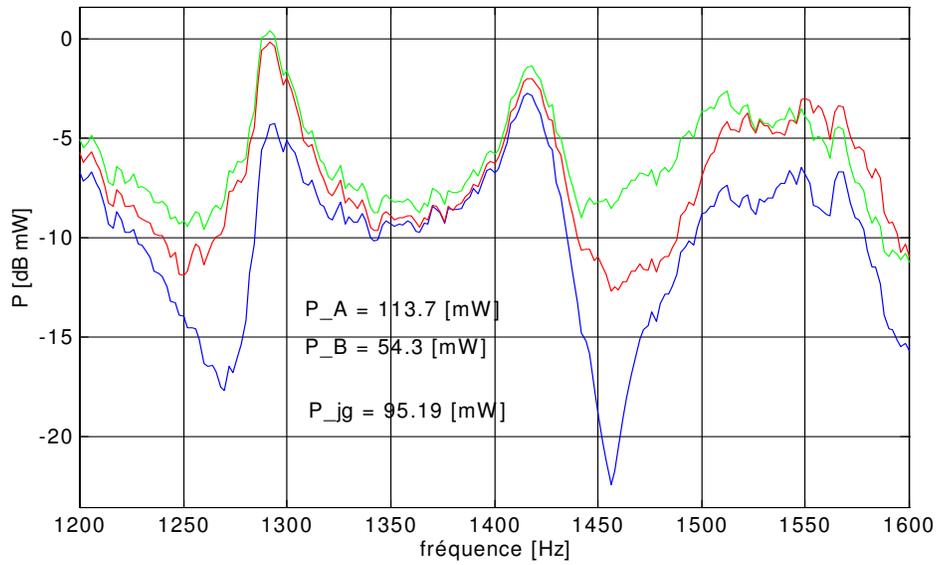


Figure A5.8: Tuyau vide, essai combiné, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 1200 - 1600 [Hz]

3 RESULTATS DE LA VALIDATION EXPERIMENTALE, TUYAU REMPLI DE L'HUILE

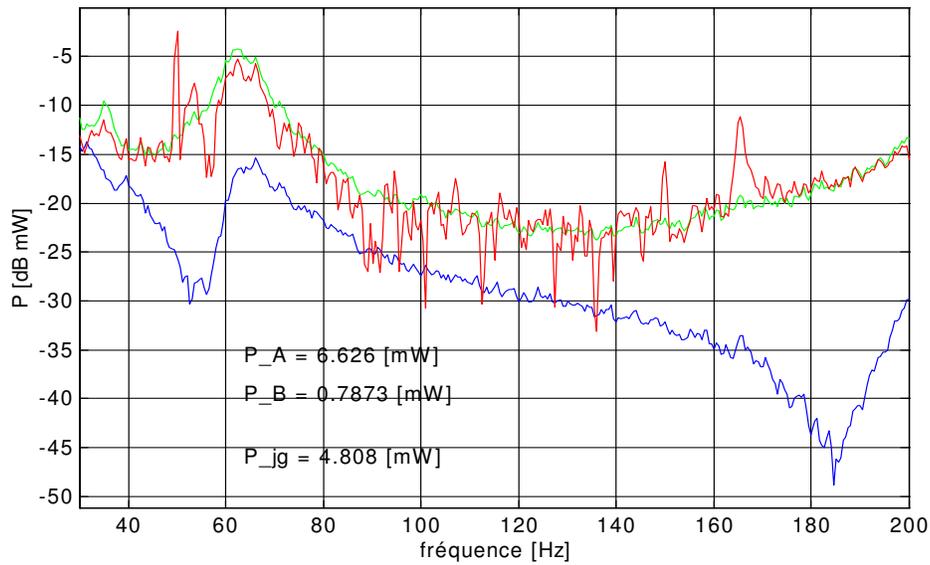


Figure A5.9: Tuyau rempli d'huile, essai axial, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 200 [Hz]

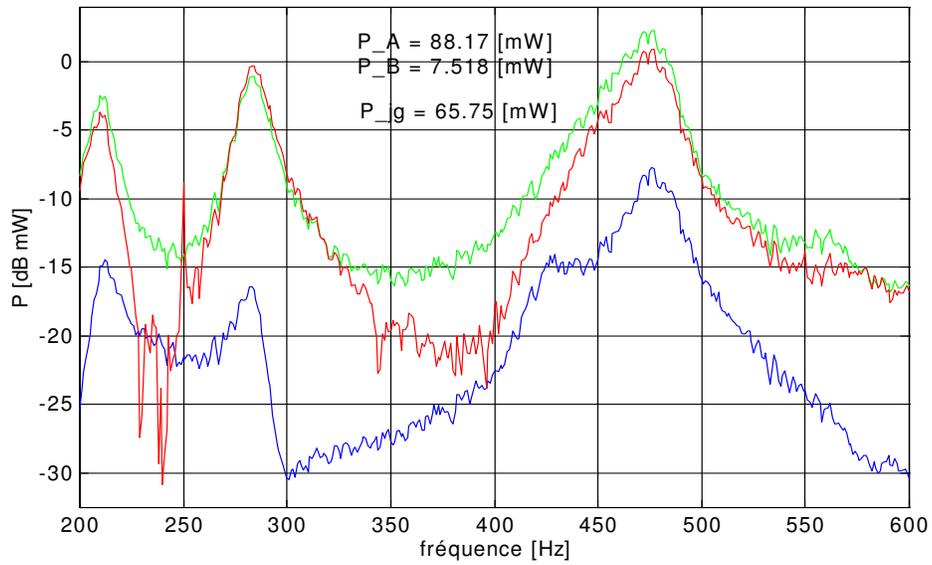


Figure A5.10: Tuyau rempli d'huile, essai axial, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 200 - 600 [Hz]

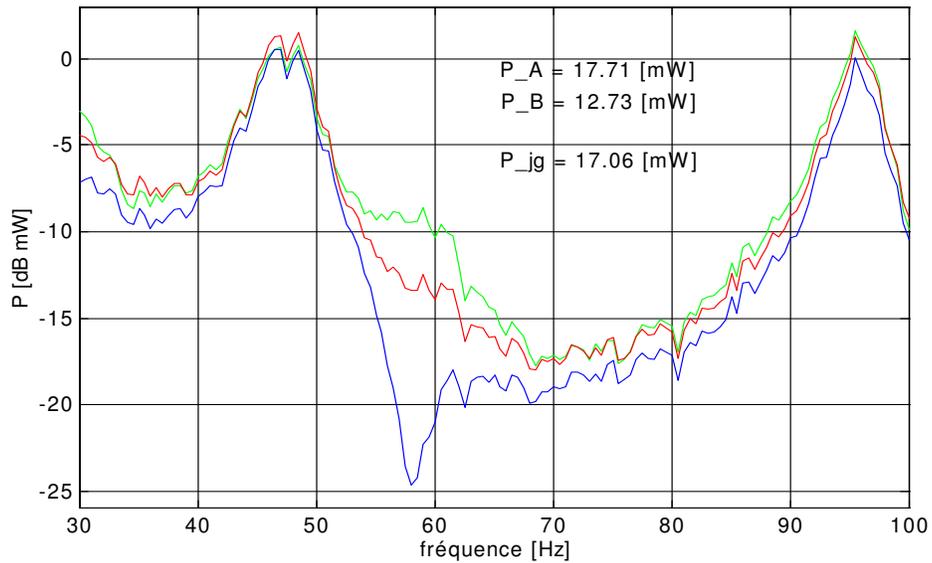


Figure A5.11: Tuyau rempli d'huile, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 30 - 100 [Hz]

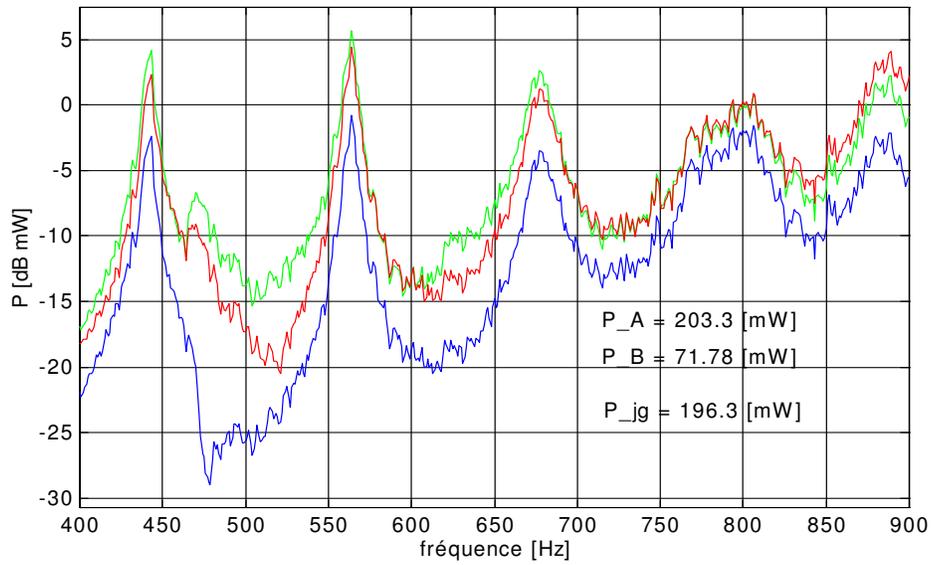


Figure A5.12: Tuyau rempli d'huile, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes de jauges (trait rouge), 400 - 900 [Hz]

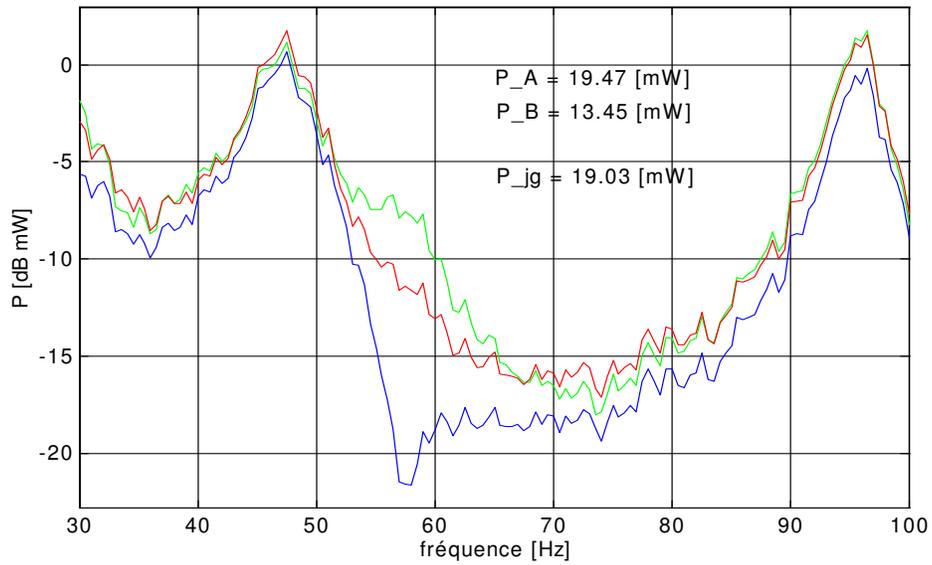


Figure A5.13: Tuyau rempli d'huile, essai de flexion, flux de puissance: excitateur A (trait vert), excitateur B (trait bleu), antennes d'accéléromètres (trait rouge), 30 - 100 [Hz]