



HAL
open science

Problèmes Combinatoires et Modèles Multi-Niveaux pour la Conception Optimale des Machines Électriques

Tuan Vu Tran

► **To cite this version:**

Tuan Vu Tran. Problèmes Combinatoires et Modèles Multi-Niveaux pour la Conception Optimale des Machines Électriques. Energie électrique. Ecole Centrale de Lille, 2009. Français. NNT: . tel-00425590v2

HAL Id: tel-00425590

<https://theses.hal.science/tel-00425590v2>

Submitted on 31 Jan 2010 (v2), last revised 22 Mar 2011 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 99

ÉCOLE CENTRALE DE LILLE

THESE

présentée en vue
d'obtenir le grade de

DOCTEUR

en

Spécialité : Génie Électrique

par

Tuấn Vũ TRẦN

DOCTORAT DELIVRE PAR L'ÉCOLE CENTRALE DE LILLE

Titre de la thèse :

**Problèmes Combinatoires et Modèles Multi-Niveaux
pour la Conception Optimale des Machines Électriques**

Soutenue le 18 juin 2009 devant le jury d'examen :

Rapporteur	H. Ben Ahmed	MdC, HDR	SATIE – ENS Cachan, Bretagne
Rapporteur	F. Wurtz	CR-CNRS, HDR	G2ELAB – INP Grenoble
Examineur	D. Lahaye	MdC	EWI – Université de Delft
Examineur	L. Krähenbühl	DR-CNRS	AMPERE – Ecole Centrale de Lyon
Examineur	A. Miraoui	Professeur	SET – Université de Belfort
Examineur	A. Rezzoug	Professeur	GREEN – Université de Nancy
Directeur de thèse	P. Brochet	Professeur	L2EP – Ecole Centrale de Lille
Co-directeur	S. Brisset	MdC, HDR	L2EP – Ecole Centrale de Lille

Thèse préparée dans le Laboratoire L2EP à l'École Centrale de Lille

École Doctorale SPI 072

Problèmes Combinatoires et Modèles Multi-Niveaux pour la Conception Optimale des Machines Électriques

MOTS CLES :

- Conception optimale
- Optimisation discrète
- Optimisation multi-objectif
- Modèles multi-niveaux,
- Benchmark,
- Transformateur
- Eco-conception
- Éléments finis 3D.

RESUME

La conception des machines électriques a une longue tradition et l'approche « *business as usual* » est un processus itératif d'essais et d'erreur, certes convergent mais nécessairement stoppé prématurément, car trop coûteux. Un perfectionnement récent a consisté à remplacer les prototypes et les maquettes par des prototypes virtuels, entièrement numériques, comme ceux fournis par la méthode des éléments finis. Néanmoins, le procédé s'arrête toujours sur une frustration car le concepteur n'est jamais sûr d'avoir exploré complètement l'espace de conception qui s'offre à lui.

La démarche de conception optimale se propose d'améliorer ce processus en le guidant, c'est-à-dire en proposant une méthodologie, et en l'automatisant, c'est-à-dire en proposant des outils logiciels. Mais dans cette démarche apparaissent de nombreuses difficultés.

Ainsi, les objectifs généraux de cette thèse sont multiples. Il s'agit de définir des problèmes d'optimisation spécifiques représentatifs des choix structurels et d'élaborer des benchmarks de référence : discret, multiphysique, multidisciplinaire, multi-objectif et multi-niveaux. Ensuite, il faut rechercher, adapter et qualifier les méthodes d'optimisation les mieux à même de résoudre ces problèmes. Enfin, les différentes méthodes d'optimisation proposées sont implantées et testées de façon à prouver leur efficacité et leur adaptation. Un objectif secondaire mais important est de les capitaliser et diffuser les connaissances élaborées.

Combinatorial Problems and Multi-Level Models for the Optimal Design of Electrical Machines

KEY WORDS :

- Optimal design
- Discrete optimization
- Multi-objective optimization
- Multi-level models
- Benchmark
- Transformer
- Eco-design
- 3D finite elements.

ABSTRACT

The design of electrical machinery has a long tradition and the business as usual approach is a tries and errors iterative process, certainly converging but necessarily stopped prematurely as too expensive. A recent upgrade has been to replace the prototypes and models by virtual prototypes, fully numerical, such as those provided by the finite element method. Nevertheless, the process stops always on a frustration, because the designer is never sure to have completely explored the design space that offers to him.

The optimal design approach proposes to improve this process by guiding it, i.e. by proposing a methodology and by equipping it, i.e. by providing software tools. But in this approach many difficulties appear.

Thus, the general objectives of this thesis are multiple. It is to define specific representative optimization problems of the structural choices and develop reference benchmarks of optimization: discrete, multi-physics, multidisciplinary, multi-objective and multi-level. Then, it must seek, adapt and describe the best optimization methods able to solve these problems. These methods are implemented and tested in order to prove their efficiency and adaptation. A secondary but important objective is to capitalize and disseminate the developed knowledge.

Remerciements

Mes plus profonds remerciements vont à toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement et à l'aboutissement de ce travail, et au plaisir que j'ai ressenti durant cette thèse au sein du Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille (L2EP), à l'Ecole Centrale de Lille.

Tout d'abord, je voudrais adresser ma vive reconnaissance à mes deux directeurs de thèse Messieurs Pascal BROCHET et Stéphane BRISSET pour m'avoir accueilli dans l'équipe d'Optimisation, pour leurs encouragements réguliers, leurs critiques constructives et leurs qualités tant professionnelles qu'humaines. Vous avez toujours su me motiver quand cela devenait difficile.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, en commençant par Monsieur Abderrezak REZZOUG qui m'a fait honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie les rapporteurs, Messieurs Frédéric WURTZ et Abdel-Hamid BEN AHMED. Nos différents entretiens ont contribué à la bonne lisibilité scientifique de ce mémoire.

Je remercie Messieurs Laurent KRÄHENBÜHL, Abdellatif MIRAOUI, Domenico LAHAYE qui ont accepté la charge d'examineurs.

Je voudrais remercier Monsieur Francis PIRIOU, directeur du L2EP, ayant retenu ma candidature externe, qui m'a accueilli au sein du laboratoire.

J'aimerais également remercier Messieurs Frédéric GILLON, Michel HECQUET, Bruno FRANÇOIS, pour leurs discussions et conseils précieux sur les activités de recherche et d'enseignement.

Je souhaite exprimer mes sincères remerciements à tous mes collègues avec lesquels j'ai partagé la vie de tous les jours au département Génie électrique à l'Ecole Centrale de Lille durant mes quatre années. En particulier, mes compagnons de ma promo : Arnaud (qui m'a toujours accompagné pour les pots), Sangkla (le copain asiatique non-alcoolique), Jean (le collègue de bureau qui m'a supporté le plus long temps) et Fouzia (la co-autrice) ; Xavier C., Simon et Christophe (qui ont assuré le bon fonctionnement de la salle de TP) ; Le bureau CI23/CI25 comprenant David (le colloc de Doctoral), François (mon binôme régulier de chargé de TP), Gautier, Petar, Corentin et Ling ; les anciens et « grands » collègues : Victor, Darius, Luc, Yann et Aurélie ; Guillaume (le vrai nordiste qui m'a beaucoup appris des saveurs des bières du Nord) ; Tao et Souleymane (grâce à eux j'ai eu l'occasion pour goûter les spécialités chinoises et la vraie vodka Putinka) ; Alex, Nicolas, Martin, Mathieu, Ramzi et Jinlin (les nouveaux « passionnés » de la recherche) ; sans oublier Xavier M., le principal animateur de la salle de café dans laquelle l'on faisait souvent des « RAT - réunions d'avancement de travail » ; et bien d'autres que j'oublie probablement mais sans mauvaise intention.

Merci à tous mes amis de la communauté vietnamienne de Lille avec lesquels j'ai passé de bons moments tous les weekends pendant quatre ans.

J'en viens à ma famille très lointaine, notamment mes parents, pour m'avoir toujours encouragé. Je leur en suis très reconnaissant et souhaite que l'achèvement de cette thèse représente pour eux une récompense de leurs efforts. Con xin cảm ơn Bố Mẹ.

Enfin, je voudrais témoigner ici de tout mon amour pour celle qui a soutenu mon choix, qui m'a toujours attendu et épaulé malgré l'éloignement.

À ma femme, Minh Thi

Cảm ơn Em thật nhiều.

Table des matières

Chapitre 1 Introduction Générale	1
Chapitre 2 État de l'Art et Nouveaux Enjeux dans la Conception Optimale des MEs	5
2.1 Introduction	7
2.2 État de l'Art de la Conception Optimale des Machines Électriques	7
2.2.1 Conception conventionnelle versus conception optimale	7
2.2.2 Démarche de la conception optimale des machines électriques	8
2.2.2.1 Analyse du cahier des charges	9
2.2.2.2 Formulation du problème d'optimisation	9
2.2.2.3 Modélisation du dispositif	10
2.2.2.4 Résolution du problème d'optimisation	11
2.2.2.5 Exploitation et analyse des résultats	12
2.2.3 Formulation du problème d'optimisation en mathématique	13
2.2.3.1 Problème d'optimisation continue sans contraintes	13
2.2.3.2 Problème d'optimisation continue avec contraintes	13
2.2.3.3 Problème d'optimisation discrète sans contraintes	14
2.2.3.4 Problème d'optimisation discrète ou mixte avec contraintes	15
2.2.3.5 Problème multi-objectif	15
2.2.4 Modélisation des machines électriques	16
2.2.5 Classification des méthodes d'optimisation	17
2.2.5.1 Méthodes déterministes mono-objectifs	18
2.2.5.2 Méthodes stochastiques mono-objectifs	21
2.2.5.3 Méthodes multi-objectifs	22
2.3 Exemples de Cahiers des Charges en Électrotechnique	25
2.3.1 Moteur à courant continu sans balais	25
2.3.1.1 Cahier des charges	25
2.3.1.2 Choix technologiques et structurels	25
2.3.1.3 Modélisation du moteur	26
2.3.1.4 Problème d'optimisation à 5 variables de conception	27

2.3.2	Transformateur de sécurité	28
2.3.2.1	Cahier des charges	28
2.3.2.2	Choix technologiques et structurels	30
2.3.2.3	Modélisation du transformateur de sécurité	31
2.3.2.4	Problème d'optimisation à 5 variables discrètes de conception	31
2.3.2.5	Problème d'optimisation à 7 variables discrètes de conception	32
2.4	Nouveaux Enjeux dans la Conception Optimale en Génie Électrique	34
2.4.1	Approche combinatoire	34
2.4.2	Approche multi-objectif	36
2.4.3	Approche multi-niveaux	38
2.4.4	Approche combinatoire multi-objectif multi-niveaux	40
2.4.5	Éco-conception	40
2.5	Conclusion	43
 Chapitre 3 Méthodes d'Optimisation Discrète, Multi-Objectif et Multi-Niveaux		45
3.1	Introduction	47
3.2	Méthode globale Branch-and-Bound	48
3.2.1	Technique d'énumération exhaustive avec calcul parallèle	49
3.2.2	Méthode SQP et technique de recherche au voisinage	51
3.2.2.1	Méthode SQP	51
3.2.2.2	Méthode de recherche au voisinage	56
3.2.3	Méthode Branch-and-Bound spécifique	57
3.2.3.1	Principe de séparation	59
3.2.3.2	Principe d'évaluation	59
3.2.3.3	Stratégie de développement de l'arborescence	60
3.2.3.4	Implémentation de l'algorithme BB	63
3.2.3.5	Application aux problèmes à variables mixtes	64
3.2.4	Conclusion sur les méthodes d'optimisation discrète	64
3.3	Méthodes d'Optimisation Discrète Multi-Objectif	66
3.3.1	Problème d'optimisation discrète multi-objectif	66
3.3.2	Solutions au sens de Pareto du problème discret multi-objectif	67
3.3.2.1	Notions de dominances et d'optimalité	67
3.3.2.2	Dominance au sens de Geoffrion	69
3.3.2.3	Caractérisation du front de Pareto dans le cas de problème discret	69
3.3.3	Combinaison de la méthode d'agrégation pondérée et la méthode Branch-and-Bound (WS-BB)	70
3.3.3.1	Méthode d'agrégation pondérée	70

3.3.3.2	WS-BB appliqué au problème test	71
3.3.4	Combinaison de la méthode de ϵ -contraintes et la méthode Branch-and-Bound (ϵ -contraintes-BB)	73
3.3.4.1	Méthode de ϵ -contraintes	73
3.3.4.2	ϵ -contraintes-BB appliqué au problème test	74
3.3.5	Comparaison des fronts de Pareto discret et continu	76
3.3.6	Conclusion sur les méthodes d'optimisation discrète multi-objectif	78
3.4	Technique du Space-Mapping	79
3.4.1	Concept général	79
3.4.2	Agressive Space-Mapping	82
3.4.2.1	Space-Mapping versus Agressive Space-Mapping	82
3.4.2.2	Mise à jour de la matrice de Broyden	83
3.4.2.3	Implémentation de l'algorithme ASM	84
3.4.3	Agressive Space-Mapping appliqué aux problèmes contraints	84
3.4.4	Sensibilité de l'extraction de paramètres	86
3.4.5	Output Space-Mapping	88
3.4.5.1	Space-Mapping versus Output-Space-Mapping	88
3.4.5.2	Implémentation de l'algorithme OSM	89
3.4.6	Manifold-Mapping	90
3.4.6.1	Space-Mapping versus Manifold-Mapping	90
3.4.6.2	Implémentation de l'algorithme MM	91
3.4.7	Combinaison de Space-Mapping et Branch-and-Bound	92
3.4.7.1	Algorithme OSM-BB	92
3.4.7.2	Algorithme MM-BB	94
3.4.8	Accélération de la construction du front de Pareto par la technique de SM	95
3.4.8.1	Fonctions correctives de type splines	96
3.4.8.2	Algorithme SM-MO	97
3.4.9	Conclusion sur la technique du Space-Mapping	98
3.5	Conclusion	100
Chapitre 4 Application au Benchmark d'un Transformateur de Sécurité		101
4.1	Introduction	103
4.2	Modélisation d'un Transformateur de Sécurité	103
4.2.1	Modèle thermo-magnéto-électrique analytique avec l'hypothèse de Kapp	104
4.2.1.1	Modèle thermique nodal	104
4.2.1.2	Modèle magnéto-électrique avec l'hypothèse de Kapp	105
4.2.1.3	Ordonnancement du système d'équations	105
4.2.2	Modèle thermo-magnéto-électrique analytique sans l'hypothèse de Kapp	106

4.2.3	Modèle EF magnétodynamique complexe 2D avec couplage faible à un modèle EF thermique statique 2D	108
4.2.4	Modèle EF magnétodynamique complexe 3D avec couplage faible à un modèle EF thermique statique 3D	109
4.2.4.1	Couplage faible magnéto-thermique	110
4.2.5	Comparaison des modèles	111
4.3	Validations Expérimentales	113
4.4	Approches pour l'Éco-conception	115
4.4.1	Analyse du cycle de vie	116
4.4.2	Onze impacts environnementaux	117
4.4.3	ACV et l'optimisation	118
4.4.4	Modèle d'impact pour l'optimisation multi-objectif	119
4.4.4.1	Modèle d'impact	119
4.4.4.2	Formulation multi-objectif pour l'éco-conception	121
4.5	Comparaison des Méthodes d'Optimisations Discrète, Multi-Objectif et Multi-Niveaux	124
4.5.1	Optimisation discrète	124
4.5.1.1	Problème d'optimisation mono-objectif à variables discrètes	124
4.5.1.2	Application de l'algorithme BB	124
4.5.1.3	Résultats d'optimisation discrète	128
4.5.2	Optimisation continue multi-objectif	130
4.5.2.1	Problème d'optimisation multi-objectif à variables continues	130
4.5.2.2	Fronts de Pareto	130
4.5.3	Optimisation discrète multi-objectif	132
4.5.3.1	Problème d'optimisation multi-objectif à variables discrètes	132
4.5.3.2	Fronts de Pareto discrets	132
4.5.4	Optimisation pour l'éco-conception	134
4.5.4.1	ACV du transformateur et optimisation	134
4.5.4.2	Optimisation multi-objectif d'éco-conception	137
4.5.5	Optimisation multi-niveaux continue	140
4.5.5.1	Problème d'optimisation multi-niveaux à variables continues	140
4.5.5.2	Résultats d'optimisation	140
4.5.6	Optimisation multi-niveaux discrète	143
4.5.6.1	Problème d'optimisation multi-niveaux à variables discrètes	143
4.5.6.2	Résultats d'optimisation	144
4.5.7	Optimisation multi-niveaux multi-objectif	145
4.5.7.1	Problème d'optimisation multi-niveaux multi-objectif à variables continues	146
4.5.7.2	Dilemme du concepteur	146

4.5.7.3	Fronts de Pareto approximés	147
4.6	Site Internet pour le Benchmark du Transformateur de Sécurité	150
4.6.1	Modèles disponibles	151
4.6.2	Capitalisation des connaissance	152
4.7	Conclusion	153
Chapitre 5 Conclusion Générale		155
Bibliographie		159

Table des figures

2.1	Conception conventionnelle (a) et conception optimale (b)	8
2.2	Démarche de conception optimale des machines électriques	9
2.3	Approches possibles de modélisation de machines électriques sous forme du front de Pareto	16
2.4	Méthodes d'optimisation mono-objectif déterministes	18
2.5	Méthodes d'optimisation mono-objectif stochastiques	21
2.6	Méthodes d'optimisation multi-objectif	23
2.7	Structures possibles des moteurs	26
2.8	(a) Prototype du moteur roue. (b) Simulation statique à vide en 2D	27
2.9	(a) Transformateur de sécurité. (b) Tôles E-I, carcasse, fils émaillés. Assemblage du circuit magnétique	29
2.10	(a) Simulation magnétique en 3D du transformateur. (b) Catalogue standard de tôle E-I	30
3.1	Solution graphique du problème test 3.1	49
3.2	Calcul distribué et parallèle	50
3.3	Recherche au voisinage à partir de l'optimum continu sur un graphique réduit	56
3.4	Première décomposition arborescente de BB, obtenir un optimum local . . .	61
3.5	Deuxième décomposition arborescente de BB, obtenir l'optimum global . . .	62
3.6	Décomposition arborescente de BB pour le problème test à variables mixtes	64
3.7	Solution graphique du problème test discret bi-objectif	67
3.8	Illustration d'un front optimal de Pareto	68
3.9	Fronts de Pareto convexe ou/et concave	68
3.10	Solutions Pareto supportées et solutions Pareto non-supportées	70
3.11	Illustration de l'obtention des solutions Pareto supportées par l'algorithme WS-BB	71
3.12	Solutions Pareto optimales supportées trouvées par l'algorithme WS-BB dans le plan (f_1, f_2) (gauche) et et dans le plan (x_1, x_2) (droite)	72
3.13	Illustration de l'obtention des solutions Pareto supportées et non-supportées par l'algorithme ϵ -contraintes-BB	74

3.14	Solutions Pareto optimales supportées et non-supportées trouvées par l'algorithme ϵ -contraintes-BB dans le plan (f_1, f_2) (gauche) et dans le plan (x_1, x_2) (droite)	75
3.15	Solutions de Pareto globales continues et discrètes (gauche) et convergences globales des variables discrètes et continues (droite)	76
3.16	Concept général de la technique du Space-Mapping	79
3.17	Fonctions fine et simple (gauche) et la transformation de SM pour $x_f = 0$ (droite)	81
3.18	Organigramme de l'algorithme ASM appliqué au problème sous contraintes	85
3.19	Non-unicité de la solution trouvée dans EP sur le problème test à une variable	86
3.20	Modèles fin $f(x_1, x_2)$ et simple $c(x_1, x_2)$ à deux variables	87
3.21	Alignement entre les deux modèles par la technique MM [ECH-07]	90
3.22	Organigramme simplifié de l'algorithme OSM-BB	93
3.23	Organigramme simplifié de l'algorithme MM-BB	94
3.24	Illustration de deux fronts de Pareto de différentes précisions	95
4.1	(a) Géométrie du transformateur par la simulation en 3D avec une coupe du huitième. (b) Circuit magnétique standard de tôle E-I.	103
4.2	Schéma équivalent du modèle thermique nodal	104
4.3	Schéma équivalent du modèle avec l'hypothèse de Kapp	105
4.4	Système d'équations avant et après l'ordonnancement	106
4.5	Schéma équivalent du modèle sans l'hypothèse de Kapp	107
4.6	Système d'équations après l'ordonnancement	107
4.7	Simulations EF 2D magnétique (gauche) et thermique (droite) sur le quart du transformateur	109
4.8	Maillage du 8 ^{ième} transformateur	109
4.9	Simulations EF 3D magnétique (gauche) et thermique (droite) sur le 8 ^{ième} du transformateur	110
4.10	Couplage "faible" magnéto-thermique en EF 3D	110
4.11	Courbe $B(H)$ avec les paramètres $\chi = 2.12 \cdot 10^{-4}$; $\alpha = 7.358$; $T = 1.18 \cdot 10^6$.	112
4.12	Courbes $B(H)$ expérimentale et interpolée utilisée dans les modèles	113
4.13	Mesures expérimentales	114
4.14	Cycle de vie d'un dispositif [EIM]	116
4.15	Évaluation des étapes du cycle de vie d'un dispositif	119
4.16	Modèle multi-disciplinaire dédié à l'éco-conception du transformateur	121
4.17	Synoptique de l'optimisation multi-objectif pour l'écoconception	123
4.18	Problème d'optimisation discrète mono-objectif sous contraintes du transformateur	124

4.19	Arborescence de la première descente de l'algorithme BB. [] et {} indiquent respectivement les variables continues et discrètes. Le successeur de chaque niveau est désigné par M_m^n ($ ^n$ est le nombre de branches ; $ _m$ est le niveau de l'arbre).	126
4.20	Arborescence de la deuxième descente de BB	127
4.21	Conceptions optimales du transformateur obtenues par les différentes méthodes	129
4.22	Problème d'optimisation continue multi-objectif du transformateur	130
4.23	Fronts de Pareto du problème d'optimisation multi-objectif continue obtenus par les algorithmes WS-SQP, ϵ -contraintes-SQP et NSGA-II	131
4.24	Problème d'optimisation multi-objectif discrète du transformateur	132
4.25	Solutions discrètes de Pareto supportées et non-supportées obtenues par les méthodes WS-BB, ϵ -contraintes-BB et NSGA-II	133
4.26	Évaluation des impacts du cycle de vie d'un transformateur de sécurité	134
4.27	Comparaison de 11 impacts environnementaux pour le transformateur existant et les deux éco-conçus	136
4.28	Front de Pareto du transformateur éco-conçu	137
4.29	Transformateur éco-conçu 1, minimisation de la masse	138
4.30	Transformateur éco-conçu 2, minimisation de la masse et des impacts	138
4.31	Transformateur éco-conçu 3, minimisation des impacts	139
4.32	Problème d'optimisation multi-niveaux continue du transformateur	140
4.33	Convergence de l'algorithme ASM avec différentes régions de confiance	142
4.34	Convergence des algorithmes ASM, MM et OSM	142
4.35	Convergences des variables (gauche) et des correcteurs (droite) de l'algorithme OSM. La dernière itération donne les valeurs du vecteur de 5 correcteurs : [1.119302 ; 1.047225 ; 0.995254 ; 0.803946 ; 1.149029]	143
4.36	Problème d'optimisation multi-niveaux discrète du transformateur	144
4.37	Convergence des deux algorithmes OSM-BB et MM-BB	145
4.38	Problème d'optimisation continue multi-niveaux multi-objectif du transformateur de sécurité	146
4.39	Fronts de Pareto construits avec les modèles EF 3D et analytique	147
4.40	Fronts de Pareto obtenus par l'algorithme proposé SM-MO	148
4.41	Fonctions correctives splines pour le correcteur de rendement du transformateur θ_3 . Les points choisis par la méthode de dichotomie indiquent les simulations réalisées par le modèle fin EF 3D. Les fonctions splines construites à la 1 ^{ère} , 2 ^{ième} , 3 ^{ième} , 4 ^{ième} , 5 ^{ième} itérations sont tracées.	149
4.42	Page de l'introduction du site internet du benchmark	150
4.43	Modèles disponibles sur le site internet	151
4.44	Quelques résultats du benchmark disponibles sur le site	152

Liste des tableaux

3.1	Solutions de toutes les combinaisons possibles	50
3.2	Solutions optimales de chaque niveau de la première décomposition de BB .	62
3.3	Solutions optimales de chaque niveau de la deuxième décomposition de BB .	63
3.4	Tableau récapitulatif obtenu par la méthode de pondération des objectifs-BB	72
3.5	Tableau récapitulatif obtenu par la méthode ϵ -contraintes-BB	75
3.6	L'ensemble global des solutions de Pareto discrètes trouvé par la méthode ϵ -contraintes-BB	77
3.7	Convergence de la solution trouvée par ASM sur le problème test	88
4.1	Comparison des 4 modèles	112
4.2	Validation du modèle simple et modèle fin en mesures expérimentales	115
4.3	Récapitulatif de 11 indicateurs d'impact environnemental définis par EIME	117
4.4	Cinq facteurs du modèle d'impact du transformateur	120
4.5	11 réponses du modèle d'impact du transformateur	120
4.6	Comparaison entre le modèle d'impact et la simulation EIME®	121
4.7	Solutions optimales de chaque niveau de la première descente BB	125
4.8	Solutions optimales de chaque niveau de la dernière descente BB	128
4.9	Résultats d'optimisation discrète obtenus par BB, GA, EE et Pro@Design .	129
4.10	Résultats d'optimisation pour l'éco-conception du transformateur	135
4.11	Comparaison des 11 indicateurs entre les solutions actuelle et optimales . .	136
4.12	Comparaison des résultats d'optimisation continue multi-niveaux	141
4.13	Résultats d'optimisation discrète basés sur le modèle EF 3D	144

Chapitre 1

Introduction Générale

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre générale de la conception des machines électrique. Il a pour ambition de contribuer à l'innovation et à la créativité dans ce domaine en proposant des méthodes et des outils pour la conception optimale des machines électriques.

La conception de machine a une longue tradition et l'approche "*bussiness as usual*" est un processus itératif d'essais et d'erreur, certes convergent mais nécessairement stoppé prématurément, car trop coûteux. Un perfectionnement récent a consisté à remplacer les prototypes et les maquettes par des prototypes virtuels, entièrement numériques, comme ceux fournis par la méthode des éléments finis. Néanmoins, le procédé s'arrête toujours sur une frustration car le concepteur n'est jamais sûr d'avoir exploré complètement l'espace de conception qui s'offre à lui.

La démarche de *conception optimale* se propose d'améliorer ce processus en le guidant, c'est-à-dire en proposant une méthodologie, et en l'automatisant, c'est-à-dire en proposant des outils logiciels. Mais dans cette démarche apparaissent de nombreuses difficultés et nous nous sommes fixé de répondre à trois enjeux.

Concevoir, c'est bien souvent choisir et, malheureusement, choisir c'est renoncer ! Il importe donc de retarder le plus possible les choix, notamment structurels et de matériaux, de façon à en explorer d'abord toutes les conséquences. Le problème de conception, et plus tard, celui d'optimisation, s'exprime alors en termes de variables discrètes et de catégorie. C'est là le premier enjeu auquel nous avons souhaité répondre.

L'optimalité est un concept flou difficilement formalisable, relatif et rarement unifié. Il suffit pour s'en convaincre d'examiner le choix d'un produit par le consommateur. Chaque consommateur choisit ce qu'il considère comme le meilleur et pourtant les choix opérés sont tous différents. Le fait est que, bien souvent, l'optimum est un arbitrage entre des objectifs multiples et conflictuels sous de nombreuses contraintes. Un problème d'optimisation bien posé ne peut donc être que multi-objectif sous contraintes. C'est le deuxième enjeu auquel

nous souhaitons répondre : l'optimisation multi-physique, multi-disciplinaire, multi-objectif et sous contraintes.

Le temps est une réalité impérieuse de la vie de l'entreprise. Le temps alloué à l'étape de conception est un coût supplémentaire qu'il faut répercuter sur le prix du produit.

A l'heure actuelle, la méthode des éléments finis (MEF) est couramment choisie pour modéliser les dispositifs magnéto-électriques. Mais, si on tient compte des couplages multiphysiques 2D ou en 3D, et ils sont obligatoires, ces modèles nécessitent un temps de calcul trop important qui rend impossible l'application directe des méthodes d'optimisation. L'accélération de la convergence des processus d'optimisation en génie électrique est donc le troisième enjeu que nous relevons.

Enfin, il est impossible d'échapper au paradigme du développement durable. La population mondiale s'accroît de jour en jour. Nous sommes 6 milliards d'humains sur la planète en 2009 et nous serons 9 milliards en 2050 ! Le contexte géopolitique de la mondialisation permet l'accès au marché à des populations nombreuses qui en étaient autrefois écartées, que ce soit en tant que producteur ou en tant que consommateur. Ainsi le Vietnam, soit 86 millions d'habitants, a rejoint l'OMC en 2007. L'impact sur les ressources de la planète est fort ainsi que sur la pollution de l'air et de l'eau. L'avenir de l'humanité semble ainsi menacé. La réponse n'est pas que politique ou sociale, elle est également technologique et la minimisation de la trace environnementale d'un produit à concevoir est une donnée nouvelle à prendre en compte. Nous verrons que cet enjeu rejoint celui de l'optimisation multi-objectif sous contraintes.

Ainsi, les objectifs généraux de cette thèse sont multiples. Il s'agit de définir des problèmes d'optimisation spécifiques représentatifs des choix structurels et d'élaborer des benchmarks de référence d'optimisation : discrète, multi-physique, multi-disciplinaire, multi-objectif et multi-niveaux. Ensuite, il faut rechercher, adapter et qualifier les méthodes d'optimisation les mieux à même de résoudre ces problèmes. Enfin, les différentes méthodes d'optimisation proposées sont implantées et testées de façon à prouver leur efficacité et leur adaptation. Un objectif secondaire mais important est de les capitaliser et diffuser les connaissances élaborées.

Ce document de thèse se divise en cinq chapitres :

Le premier chapitre est dédié à l'introduction générale.

Le deuxième chapitre consiste à présenter un état de l'art de la méthodologie de conception optimale des machines électriques. Elle soulève de nouveaux enjeux dans le processus d'optimisation. Il s'agit des choix structurels, donc des problèmes combinatoires dans les

machines électriques ; du compromis entre le temps de calculs et la précision de la solution obtenue ; du problème multi-objectif (environnemental-technique-économique) et la combinaison de ces trois difficultés. Deux exemples : un moteur roue à courant continu sans balais et un transformateur de sécurité sont présentés afin d'illustrer ce propos.

Le troisième chapitre se concentre sur des méthodes d'optimisation. Nous avons choisi pour le cas combinatoire une méthode d'optimisation déterministe car elle permet de se combiner avec d'autres techniques d'optimisation multi-niveaux et multi-objectif. La méthode globale Branch-and-Bound spécifique est développée parce qu'elle est très efficace pour les problèmes d'optimisation discrète ou mixte de petite et moyenne dimensions.

Pour le cas multi-objectif, des méthodes exactes telles que la méthode de pondération, la méthode ϵ -contrainte sont détaillées. Elles sont combinées avec l'algorithme Sequential Quadratic Programming (SQP) pour résoudre des problèmes à variables continues et avec l'algorithme Branch-and-Bound pour traiter des problèmes à variables discrètes ou mixtes.

Les techniques appelées "Space-Mapping" (SM) qui alignent un modèle fin et un modèle simple pour accélérer l'optimisation, sont présentées. Différents algorithmes SM récents : Agressive Space-Mapping, Output Space-Mapping et Manifold-Mapping sont testés et développés. Afin de résoudre le problème d'optimisation discrète basé sur des modèles d'éléments finis très coûteux en temps d'évaluation, une nouvelle méthode combinant l'algorithme Branch-and-Bound et les techniques Space-Mapping est proposée. Une nouvelle approche capable de traiter le problème d'optimisation multi-objectif avec des modèles d'éléments finis est également proposée. Elle combine un algorithme SM avec une technique d'optimisation multi-objectif scalaire.

Le quatrième chapitre est consacré à un benchmark, un transformateur de sécurité, pour tester ces différentes approches d'optimisation. Notre choix s'est porté sur le transformateur de sécurité en raison de sa large diffusion et de la proximité géographique avec une PME les fabricants en très petite série ou à l'unité. D'abord, des phénomènes électrique, magnétique et thermique du transformateur sont modélisés par deux modèles analytiques avec et sans l'hypothèse de Kapp, et deux modèles éléments finis 2D et 3D avec un couplage faible magnéto-thermique. Un modèle des impacts environnementaux est également construit dans une optique d'éco-conception. Les problèmes d'optimisation proposés sont mono-objectif ou multi-objectif sous contraintes à variables discrètes ou continues. Une base de données des valeurs discrètes est établie à partir de catalogues commerciaux : type de tôles E-I, type de support de carcasses, type de fils émaillés.

Ces benchmarks sont utilisés pour comparer et développer des algorithmes combinatoires, multi-niveaux, multi-objectif et les combiner entre eux comme mentionné dans le troisième chapitre. Un site internet a également été construit. Il rassemble les informations utiles en vue d'utiliser le benchmark et quelques résultats d'optimisation y sont présentés.

Il propose à la communauté scientifique de capitaliser leurs résultats et de comparer les méthodes d'optimisation.

Le cinquième chapitre est la conclusion générale de ces travaux qui souligne les contributions originales apportées à la conception optimale en génie électrique : que ce soit en éco-conception, à la résolution de problèmes discrets ou mixtes ou à l'utilisation de modèles très précis et très coûteux en temps de calcul.

Chapitre 2

État de l'Art et Nouveaux Enjeux dans la Conception Optimale des Machines Électriques

Sommaire

2.1 Introduction	7
2.2 État de l'Art de la Conception Optimale des Machines Électriques	7
2.2.1 Conception conventionnelle versus conception optimale	7
2.2.2 Démarche de la conception optimale des machines électriques	8
2.2.3 Formulation du problème d'optimisation en mathématique	13
2.2.4 Modélisation des machines électriques	16
2.2.5 Classification des méthodes d'optimisation	17
2.3 Exemples de Cahiers des Charges en Électrotechnique	25
2.3.1 Moteur à courant continu sans balais	25
2.3.2 Transformateur de sécurité	28
2.4 Nouveaux Enjeux dans la Conception Optimale en Génie Électrique	34
2.4.1 Approche combinatoire	34
2.4.2 Approche multi-objectif	36
2.4.3 Approche multi-niveaux	38
2.4.4 Approche combinatoire multi-objectif multi-niveaux	40
2.4.5 Éco-conception	40
2.5 Conclusion	43

2.1 Introduction

La conception des systèmes de l'ingénierie est un processus complexe. Beaucoup d'hypothèses simplificatrices doivent être introduites pour développer des modèles qui sont utilisées lors de l'analyse des problèmes. Ces modèles doivent être validés par l'expérimentation. De même, de nombreux facteurs de conception et de nombreuses spécifications doivent être considérés durant cette phase de formulation.

Dans la plupart des domaines (aérospatial, automobile, civil, chimique, industrielle, électrique, mécanique, hydraulique et de transport), la conception des systèmes s'appuie sur l'expérience, l'intuition, l'ingéniosité et le savoir-faire des concepteurs. Elle nécessite un processus itératif. L'itération d'essais et d'erreur comporte l'analyse, l'étude de quelques prédimensionnements intuitifs les uns après les autres jusqu'à l'obtention d'un concept acceptable. Durant ce processus de conception, les concepteurs font appel constamment à leurs connaissances du système basés surtout sur l'expérience et quelques analyses mathématiques. Une approche alternative est la conception optimale.

Ce premier chapitre est consacré à la présentation de la méthodologie de conception optimale des machines électriques. Les nouveaux enjeux du processus d'optimisation sont détaillés. Il s'agit des choix structurels, donc des problèmes combinatoires dans les machines électriques; du compromis à faire entre le temps de calcul et la précision de la solution obtenue; de l'approche multi-objectif (écologique-technique-économique) et de la combinaison de ces trois difficultés. Deux exemples : un moteur roue à courant continu sans balais et un transformateur de sécurité sont proposés afin de leur servir d'illustration. Le transformateur de sécurité est développé dans le but d'établir un cas test (*benchmark*) qui permet d'approfondir, tester et comparer ces nouvelles approches d'optimisation.

2.2 État de l'Art de la Conception Optimale des Machines Électriques

2.2.1 Conception conventionnelle versus conception optimale

La conception conventionnelle dépend toujours de l'expérience, l'intuition et le savoir-faire des concepteurs. La présence de la composante humaine peut parfois mener à des résultats erronés. La figure 2.1.a présente un organigramme de la conception conventionnelle. Elle nécessite l'utilisation de données de prédimensionnement issues de l'expérience et de l'intuition du concepteur. Cette procédure peut mener à un concept non-économique et peut nécessiter beaucoup de temps.

Aujourd'hui, la nécessité d'avoir une bonne productivité dans un monde compétitif force les ingénieurs à faire preuve d'innovations. La Conception Optimale Assistée par Ordinateur (COAO) peut y aider. La figure 2.1.b montre le processus de conception optimale.

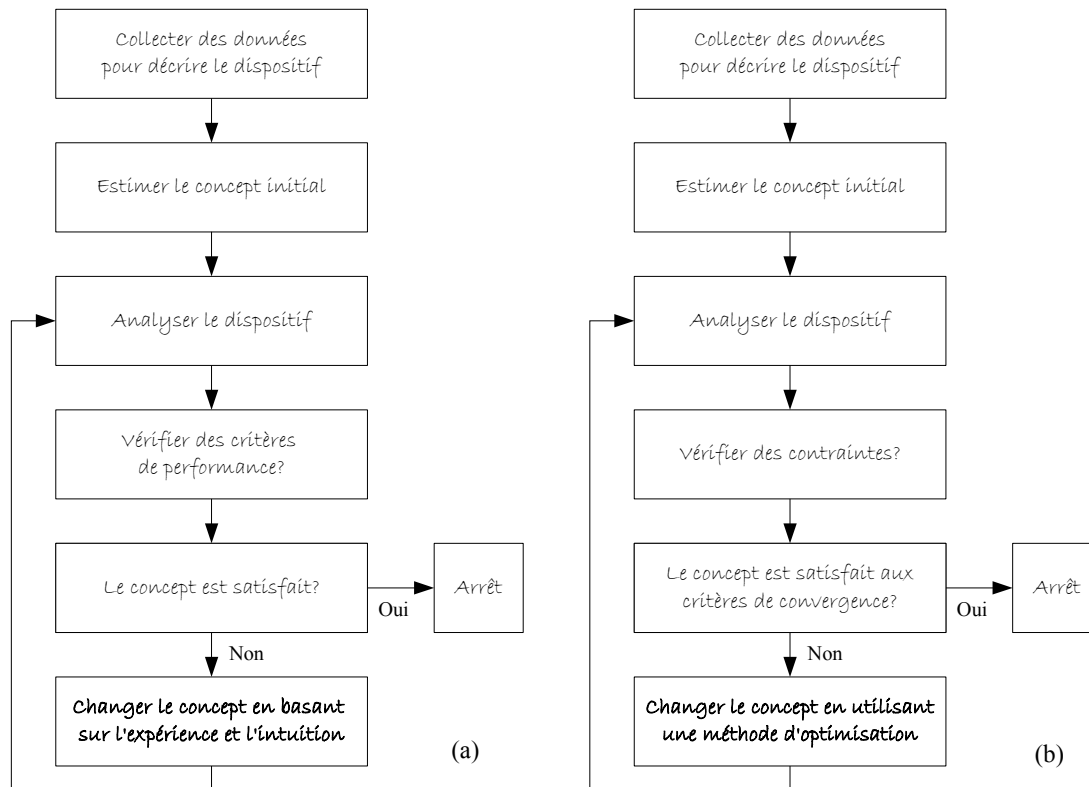


FIG. 2.1 – Conception conventionnelle (a) et conception optimale (b)

Les concepteurs doivent définir explicitement les variables de conception, une fonction objectif à optimiser et les contraintes du système. Cette formulation rigoureuse du problème de conception les aide à mieux comprendre et appréhender le problème. Une formulation mathématique correcte est un atout pour atteindre une “bonne” solution.

Les deux processus de conception ci-dessus peuvent être utilisés à différents niveaux de l'évolution de système. La distinction entre ces deux approches montre que la conception conventionnelle est moins formelle. Une fonction objectif mesurant la performance du dispositif n'est pas encore identifiée. L'information itérative du dispositif n'est pas calculée pour prendre la décision d'amélioration du système. La majorité des décisions est prise en se basant sur l'expérience et l'intuition du concepteur. Contrairement à la conception conventionnelle, la conception optimale est meilleure et plus formelle qui utilise un algorithme pour prendre une décision. Le processus d'optimisation peut également profiter de l'expérience, l'intuition des concepteurs durant la phase de formulation et d'identification des critères des contraintes.

2.2.2 Démarche de la conception optimale des machines électriques

La démarche de conception des machines électriques peut comporter les cinq phases principales récapitulées dans la figure 2.2. Les phases s'enchaînent séquentiellement mais

les itérations et les retours sont souvent indispensables.

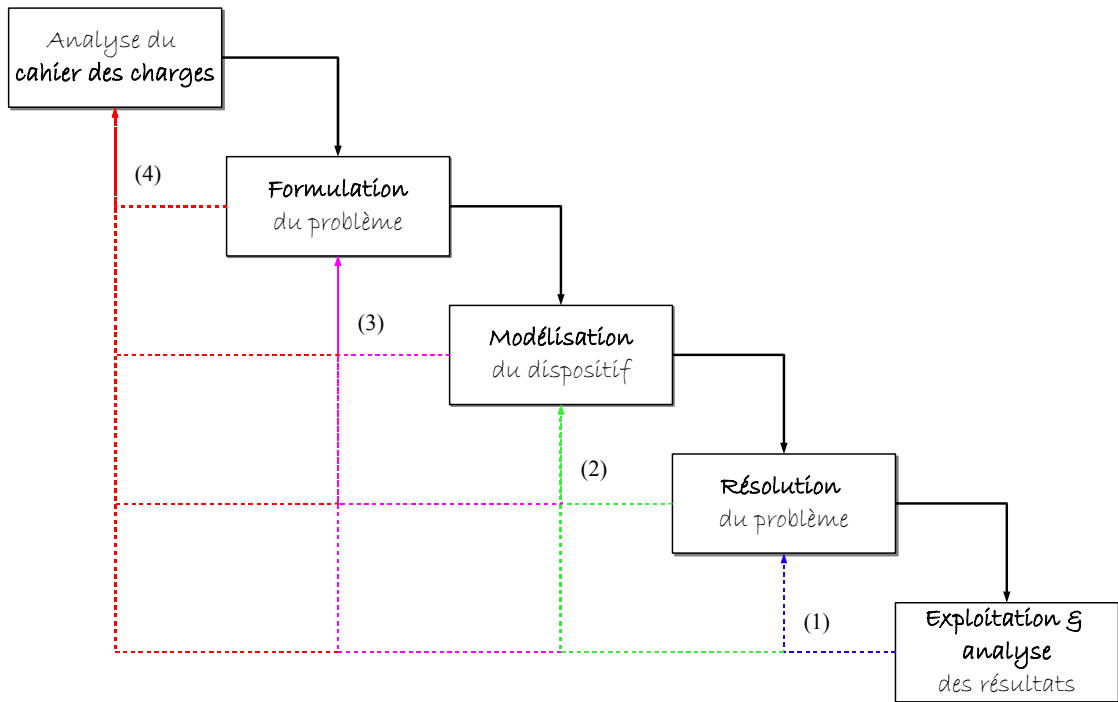


FIG. 2.2 – Démarche de conception optimale des machines électriques

2.2.2.1 Analyse du cahier des charges

Le cahier des charges d'un dispositif électromagnétique à concevoir est défini en amont par les fabricants. Il exprime les spécifications de base, de norme d'un dispositif, autrement dit les besoins des utilisateurs en terme de fonctionnement et contraintes à respecter. Des exemples de cahier des charges pour deux dispositifs électrotechniques sont présentés au paragraphe 2.3 : un moteur à courant continu sans balai et un transformateur de sécurité.

Par exemple, des indications seront fournies sur la puissance nominale, le couple, la vitesse, le rendement, l'encombrement, les aimants permanents, la commutation électronique, le bobinage concentré du moteur à courant continu. On peut préciser également la puissance, les tensions primaire et secondaire, la fréquence de fonctionnement, la classe d'échauffement, le facteur de puissance, etc. du transformateur.

2.2.2.2 Formulation du problème d'optimisation

Cette phase consiste à traduire le problème de conception optimale, décrit par le cahier des charges en un problème mathématique équivalent. C'est l'étape la plus délicate du processus de conception car la formulation d'un problème n'est jamais unique, en particulier la définition des fonctions caractérisant les performances du système. Elle doit définir de façon précise :

- i. La ou les fonctions objectifs ;
- ii. Les variables de conception ;
- iii. Les éventuelles contraintes liées à la fabrication ou à l'utilisation du dispositif exprimées dans le cahier des charges ;
- iv. Les contraintes ajoutées par le concepteur.

La fonction objectif ou les fonctions objectifs sont un ou plusieurs des critères du dispositif qui définissent le but à atteindre. Elles peuvent être un coût à minimiser (coût de fabrication, consommation électrique, ...), des impacts environnementaux à minimiser (épuiement de ressources naturelles, émission de gaz, effet de serre, ...) ou une performance à maximiser (rendement, facteur de puissance, ...).

Les variables ou paramètres de conception sont des entrées qui influencent les performances. Ils devront être changés durant les itérations du processus de conception optimale. Ils peuvent être de natures diverses : dimensions géométriques, propriétés des matériaux, choix structurel, etc. Ces derniers peuvent être quantitatifs ou qualitatifs, continus ou discrets. Le choix et le nombre des variables conditionnent également la définition du problème d'optimisation. Il peut être intéressant de faire varier un grand nombre des variables de conception afin d'augmenter l'espace de recherche mais le processus d'optimisation sera donc plus long et bien plus difficile à résoudre.

Des contraintes liées à la fabrication et à l'utilisation sont exprimées dans le cahier des charges. Par exemple, la température de bobinage ne peut pas être supérieure à une certaine température dépendant de la classe d'échauffement du fil émaillé ; le rendement d'un transformateur doit être élevé pour améliorer l'efficacité énergétique ; le courant magnétisant doit être inférieur à 50% du courant primaire d'une machine asynchrone, ou inférieur à 10% du courant primaire d'un transformateur, etc.

De même, durant le processus d'optimisation, le concepteur peut ajouter d'autres contraintes non formulées dans le cahier des charges mais tacites pour les experts. Par exemple une contrainte de remplissage est ajoutée pour que les bobines ne dépassent pas la fenêtre d'un circuit magnétique, ou bien lors qu'un paramètre est calculé en une équation du second degré dont le discriminant doit être supérieur ou égal à zéro. Ces contraintes ajoutées s'assurent de la validité de la modélisation retenue et du bon fonctionnement du processus d'optimisation.

2.2.2.3 Modélisation du dispositif

Une fois que le problème de conception est transformé en problème mathématique, la modélisation du dispositif sert à calculer les réponses du problème (la fonction objectif, les contraintes). Les phénomènes : électrique, magnétique, thermique, mécanique, acoustique peuvent être modélisés par des équations empiriques, analytiques ou au moyen de la méthode des éléments finis. Des connaissances d'expert sur le dispositif du concepteur sont

indispensables afin d'avoir des modèles de bonne précision. Cette phase permet également au concepteur de comprendre davantage les phénomènes physiques au sein du dispositif électromagnétique, notamment avec l'aide des outils de modélisation par la méthode des éléments finis (MEF). Le concepteur peut ainsi observer les lignes de flux circulant dans le circuit magnétique, les gradients de température, etc.

La phase de formulation du problème d'optimisation et de modélisation du dispositif est fondamentale dans le processus de conception optimale des machines électriques parce qu'elle conditionne le succès des étapes suivantes. Elles sont complémentaires. La formulation du problème n'est pas facile à aborder car le choix des variables de conception n'est jamais unique et les moyens de calcul actuels ne peuvent en gérer qu'un nombre limité. Un modèle précis et robuste est un atout pour des algorithmes d'optimisation.

2.2.2.4 Résolution du problème d'optimisation

La recherche de la solution optimale d'un problème est réalisée au moyen des méthodes d'optimisation qui sont récapitulées au paragraphe 2.2.5 et dont certaines sont détaillées au chapitre 3. Le choix des méthodes d'optimisation appliquées sur la formulation mathématique ci-dessus dépend de la nature du problème (taille du problème, problème sans ou avec contraintes, problème à variables continues ou discrètes, problème mono-objectif ou multi-objectif, etc). Il dépend également de la modélisation du dispositif (modèles analytiques, modèles semi-analytiques, modèles éléments finis) pour éviter d'avoir un temps d'optimisation excessif. Généralement, il existe deux grandes familles des méthodes d'optimisation : les *méthodes déterministes* et les *méthodes stochastiques*.

Les méthodes d'optimisation dites déterministes conduisent, pour une solution initiale donnée toujours au même résultat final. Pour trouver l'optimum, elles s'appuient sur une direction de recherche qui peut être fournie par les dérivées de la fonction objectif. Ces méthodes convergent rapidement. Elles ont la réputation d'être efficaces lorsque la solution initiale est proche de l'optimum recherché. Lorsque le problème possède plusieurs optimums, les méthodes déterministes peuvent, converger vers une solution locale.

Les méthodes stochastiques, comme leurs noms l'indique, s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires qui explorent intelligemment l'espace de recherche et peuvent converger vers l'optimum global. Elles ne nécessitent ni point de départ, ni la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Leur nature aléatoire implique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes conduisent à des résultats différents pour une même initialisation du problème d'optimisation. En plus, elles demandent un nombre important d'évaluation de la fonction objectif, donc un temps de calcul important en comparaison avec les méthodes déterministes.

2.2.2.5 Exploitation et analyse des résultats

Une fois le problème résolu, il est impératif d'exploiter des résultats et d'évaluer la qualité de la solution obtenue. En cas d'échec, il est indispensable de s'interroger sur les choix adoptés lors des phases précédentes (figure 2.2).

La boucle (1) dans la figure 2.2 est un retour sur la phase de résolution du problème. Elle peut être motivée par un problème de convergence de l'algorithme signalé par un arrêt de la procédure suite à un temps de calcul excessif, ou par l'obtention d'un optimum local ou d'une solution mauvaise. Il est alors possible de modifier les paramètres de réglage de l'algorithme lorsqu'il s'agit des méthodes stochastiques ou du point initial pour les méthodes déterministes. Parfois, il arrive que l'algorithme utilisé ne soit pas ou peu adapté au problème traité, donc il convient de changer de méthode d'optimisation ou de modifier le problème pour en faciliter la résolution.

Lorsque la résolution du problème conduit à une solution non-réalisable ou aberrante, la boucle (2) s'interroge sur la phase de modélisation du dispositif. Il est nécessaire de vérifier qu'il n'y a pas d'erreur de calcul et que les équations décrites des phénomènes physiques ont pris des hypothèses raisonnables, donc les réponses sont bien calculées.

De même, si les résultats ne changent pas, la boucle (3) est indispensable. Elle est un retour sur la formulation du problème d'optimisation. Dans ce cas, la démarche permet au concepteur d'affiner son expérience par une série d'essais/erreurs au cours de laquelle il en apprend davantage sur les limites des modèles utilisés et sur la façon de formuler le problème d'optimisation pour atteindre des solutions pertinentes. Il convient alors d'ajouter des contraintes pour éviter des solutions non fiables ou aberrantes, ainsi que d'autres contraintes pour empêcher à l'algorithme d'optimisation d'aller dans les zones d'imprécision ou d'erreurs fatales des modèles.

La boucle la plus longue (4) consiste à revenir à l'analyse du cahier des charges lorsque la solution est non faisable, ou qu'il n'y a pas de solution à cause de contraintes trop sévères ou parce que la fonction objectif n'est pas pertinente. Il peut se produire que la démarche de conception aboutisse à la conclusion qu'il n'existe pas de solution au cahier des charges exprimé. Dans ce cas, le concepteur relâche des contraintes pour aboutir à une solution faisable en dialoguant avec le client pour décider des choix possibles.

Les différentes phases de la démarche de conception optimale des machines électriques ont été présentées. Deux illustrations des machines électriques avec cahier des charges seront montrées dans le paragraphe 2.3. La formulation du problème d'optimisation en mathématique et la modélisation des machines électriques, à partir de l'analyse du cahier des charges, sont décrites dans les paragraphes suivants. De nouveaux enjeux de la conception optimale se trouvent dans la phase de résolution du problème et seront abordés au

paragraphe 2.4. Ainsi, la résolution du problème par de nouveaux algorithmes d'optimisation sera développée et détaillée dans le chapitre 3. Dans le chapitre 4, l'exploitation et l'analyse des résultats d'un benchmark d'un transformateur de sécurité seront présentées et commentées.

2.2.3 Formulation du problème d'optimisation en mathématique

La première étape d'un processus d'optimisation consiste à formuler, en termes mathématiques, le problème de conception. Au cours de ce paragraphe, certains concepts de base liés à la formulation d'un problème d'optimisation seront détaillés selon un ordre croissant de complexité.

2.2.3.1 Problème d'optimisation continue sans contraintes

Un problème d'optimisation à variables continues sans contraintes peut se formuler par :

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimiser } f(X) \\ \text{avec } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\ x_i^{lb} \leq x_i \leq x_i^{ub}, \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (2.1)$$

La première formulation comprend une fonction objectif f à minimiser. Elle peut être un coût de fabrication en tenant compte du prix d'une tôle magnétique, d'un aimant, etc, ou le poids de la structure, ou un critère physique (force électromotrice, induction, puissance, etc,) à optimiser. Par défaut, la fonction objectif est à minimiser. Dans le cas de la maximisation d'une performance par exemple le rendement, la fonction objectif vaudra l'opposé de la performance.

Les composantes $(x_i, i = 1, \dots, n)$ du vecteur X qui appartiennent à un espace de recherche ou espace des solutions S , sont connues sous le nom de variables ou paramètres de conception. En électrotechnique, celles-ci peuvent être les dimensions géométriques ou les propriétés physiques (densité de courant, induction magnétique, pertes spécifiques, perméabilité...) d'un dispositif.

Les variables continues sont toujours bornées pour limiter l'espace de recherche. Les limites de variation de chaque paramètre sont notées respectivement avec x_i^{lb} et x_i^{ub} .

2.2.3.2 Problème d'optimisation continue avec contraintes

Un problème d'optimisation avec contraintes est normalement beaucoup plus difficile qu'un problème sans contraintes. Généralement, un problème d'optimisation à variables

continues avec contraintes peut s'écrire de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimiser } f(X) \\ \text{avec } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\ x_i^{lb} \leq x_i \leq x_i^{ub}, \quad i = 1, \dots, n \\ \text{soumis à} \\ g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \\ h_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Les fonctions $g_j(X)$ avec $j=1, \dots, l$ et $h_k(X)$ avec $k=1, \dots, m$ dénotent respectivement les contraintes d'inégalités et d'égalités associées à la faisabilité du dispositif et à son adaptation au cahier des charges. Par exemple, elles représentent les limites imposées au problème (limitation des températures de bobinage, de l'induction magnétique ; limitation du courant magnétisant ; limitation de la chute de tension, etc.). Elles peuvent également représenter des relations entre les paramètres qui sont ajoutées par le concepteur pour garantir le bon conditionnement du problème, par exemple, une forme géométrique convenable, une hypothèse de modélisation acceptable, etc.

2.2.3.3 Problème d'optimisation discrète sans contraintes

Un problème d'optimisation dite discrète lorsque les variables de conception ne sont pas continues. Elles dépendent donc de l'ensemble des valeurs pré-établies auparavant D_i . Le problème d'optimisation discrète sans contraintes est exprimé comme suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimiser } f(X) \\ \text{avec } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\ x_i \in D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq}\}, \quad i = 1, \dots, n_d \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où n_d est le nombre de variables discrètes de conception. D_i dénote l'ensemble des valeurs discrètes pour la $i^{\text{ième}}$ variable ; q_i est le nombre de valeurs discrètes admissibles ; d_{ik} est la $k^{\text{ième}}$ valeur discrète possible pour la $i^{\text{ième}}$ variable. En fait, les variables discrètes s'apparaissent souvent dans la conception des machines électriques. Elles peuvent être classables ou qualitatives ou entières. Par exemple, les types de tôle, les types de fils émaillé pour les transformateurs et les machines tournantes sont des variables de catégorie ; le nombre d'encoques pour les machines tournantes, le nombre de spires primaires et secondaire pour le transformateur, pour le rotor et stator de la machine sont les variables entières. Il est également possible que les variables discrètes ne soient pas ordonnables et qualitatives comme par exemple pour des matériaux différents (tôles magnétiques, aimants, isolants...) ; "rotor intérieur", "rotor extérieur", "flux axial" représentant la structure d'une machine tournante.

2.2.3.4 Problème d'optimisation discrète ou mixte avec contraintes

Généralement, la conception des machines électriques est souvent un problème d'optimisation mixte avec contraintes qui comprend des variables discrètes et continus. Sa formulation s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{minimiser } f(X) \\
 \text{avec } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\
 x_i \in D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq}\}, \quad i = 1, \dots, n_d \\
 \text{et } x_i^{lb} \leq x_i \leq x_i^{ub}, \quad i = n_d, \dots, n \\
 \text{soumis à} \\
 g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \\
 h_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, m
 \end{array} \right\} \quad (2.4)
 \end{array}$$

L'ensemble des régions de l'espace de recherche où les contraintes de conception sont vérifiées est appelé espace réalisable ou domaine de faisabilité. Inversement, l'espace irréalisable ou domaine interdit, désigne l'ensemble des zones de l'espace où au moins une des contraintes n'est pas respectée.

La solution optimale du problème que nous venons de formuler est obtenue lorsque le minimum de la fonction objectif $f(X)$ est atteint tout en respectant les contraintes.

La fonction objectif $f(X)$ et les fonctions de contraintes $g(X)$ et $h(X)$ peuvent être linéaires, non linéaires, continues ou discontinues. De ce fait, une solution optimale du problème sera déduite à partir d'une méthode d'optimisation adéquate comme détaillé au chapitre 3.

2.2.3.5 Problème multi-objectif

Cependant, de nombreux problèmes de conception sont multi-critères. Par exemple, nous voulons simultanément : minimiser le coût de fabrication, minimiser le bruit du moteur, minimiser les impacts environnementaux mais aussi maximiser la performance de la machine. C'est-à-dire ils comportent plusieurs objectifs conflictuels ou non-conflictuels. Un tel problème d'optimisation est appelé multi-objectif et s'exprime sous la forme générale suivante :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{minimiser } F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_p(X)) \\
 \text{avec } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\
 x_i \in D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq}\}, \quad i = 1, \dots, n_d \\
 x_i^{lb} \leq x_i \leq x_i^{ub}, \quad i = n_d, \dots, n \\
 \text{soumis à} \\
 g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \\
 h_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, m
 \end{array} \right\} \quad (2.5)
 \end{array}$$

où $F(X)$ désigne le vecteur des p objectifs à minimiser. Le problème d'optimisation multi-objectif peut être à variables continues, discrètes ou mixtes, et sans contraintes ou avec contraintes.

2.2.4 Modélisation des machines électriques

Le choix du modèle est un problème ouvert. Les problèmes de conception en électrotechnique sont souvent multi-physiques et comporte des incertitudes, notamment sur les propriétés des matériaux. Ainsi, on remarque que les problèmes comprennent environ une dizaine de paramètres à optimiser, une ou plusieurs dizaine de contraintes souvent non linéaires, une ou plusieurs fonctions objectif non linéaires. Il est fréquent que les fonctions soient continues et que chaque variable de conception soit réelle et bornée. Les problèmes de conception proposés récemment font intervenir des paramètres discrets et qualitatifs [FIT-04] ou exploitent deux modèles de précisions différentes d'un même dispositif [BAN-04], [ENC-07], [ECH-07] ou s'intéressent à l'éco-conception [DEB-07].

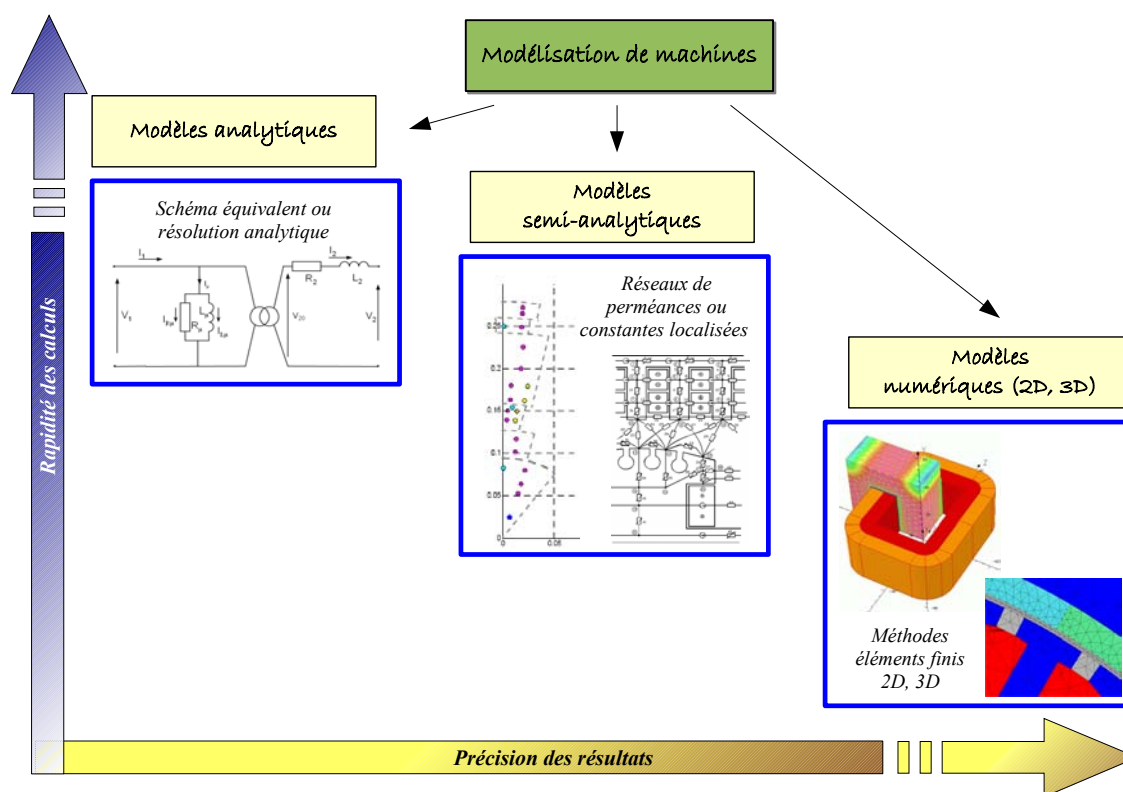


FIG. 2.3 – Approches possibles de modélisation de machines électriques sous forme du front de Pareto

La formulation en problème d'optimisation discrète, continue ou mixte d'un problème de conception nécessite d'abord de modéliser les phénomènes physiques au sein du dispositif ou du système étudié. La modélisation du dispositif a pour but de calculer la fonction objectif, les contraintes d'égalité et d'inégalité du problème d'optimisation. Il existe trois types de modélisation de machines électriques comme présentés dans la figure 2.3 :

- modèles analytiques comportant quelques dizaines à quelques centaines d'équations linéaire et/ou non linéaire dont certaines sont implicites ;
- modèles semi-analytiques tels que les réseaux de perméances, les modèles thermiques nodaux, les réseaux de Kirchoff, etc ;
- modèles numériques tels que les méthodes des volumes finis ou des éléments finis avec les différentes formulations possibles (statique, dynamique, transitoire, couplage multi-physiques, etc).

Les modèles analytiques sont rapides, facile à comprendre, mais ils nécessitent des connaissances à priori et des hypothèses simplificatrices. Bien évidemment, les approches numériques considérées comme prototype virtuel permettent d'obtenir les résultats les plus précis mais leurs calculs sont aussi les plus lourds par rapport aux autres approches. Le concepteur lui, recherche un bon compromis entre rapidité, précision et malléabilité. Le temps de calculs des modèles conditionne le choix des algorithmes d'optimisation et des formulations mathématiques associées.

Il faut cependant préciser qu'en général un problème d'optimisation de structure en électrotechnique, ou dans n'importe quelle autre discipline, ne peut être résolu avec suffisamment de cohérence sans une bonne connaissance du dispositif à traiter. En effet, les méthodes d'optimisation ne sont pas des outils magiques, mais doivent être considérées comme des outils d'aide à la recherche de solutions.

2.2.5 Classification des méthodes d'optimisation

Le choix de la méthode d'optimisation dépend fortement de la formulation du problème à variables continues, discrètes ou mixtes, sans ou avec contraintes, mono-objectif ou multi-objectif. En fait, les méthodes d'optimisation de problèmes continus ne peuvent pas résoudre efficacement les problèmes discrets. De même, les méthodes d'optimisation pour les problèmes sans contraintes ne sont pas directement applicables aux problèmes avec contraintes. Le choix de la méthode d'optimisation dépend également du type de modélisation de la machine. Par exemple, pour les modélisations élément finis, l'application de méthodes de type gradient n'est pas possible en un temps raisonnable. Ainsi, l'existence d'une méthode d'optimisation ne suffit pas pour résoudre en pratique des problèmes d'optimisation d'une telle difficulté. L'hybridation de méthodes existantes est une voie intéressante à explorer pour les traiter efficacement.

Il n'existe pas d'algorithme efficace pour tous les problèmes (théorème du "No Free Lunch" [WOL-97]) : quand un algorithme progresse sur une classe de fonctions, il régresse sur une autre. Les méthodes d'optimisation fréquemment utilisées pour la conception des machines électriques peuvent se classer, selon le mode de recherche de l'optimum et la nature du problème d'optimisation mono-objectif ou multi-objectif en trois grands groupes :

les méthodes déterministes mono-objectifs, les méthodes stochastiques mono-objectif et les méthodes multi-objectifs. Elles sont présentées brièvement ci-dessous.

2.2.5.1 Méthodes déterministes mono-objectifs

Ces méthodes peuvent être subdivisées en plusieurs sous classes comme illustrées en figure 2.4. En les classant selon leur capacité à trouver la solution, deux classes principales se dégagent : les méthodes locales et les méthodes globales. Les méthodes d'optimisation déterministes supposent que la fonction objectif et le domaine de recherche sont convexes. Alors, il y a un minimum unique qui est trouvé par amélioration d'une solution initiale. Les méthodes déterministes globales fournissent la solution globale, mais l'usage de ces méthodes est restreint principalement en raison du nombre important d'évaluations des fonctions objectif et contraintes qu'elles nécessitent.

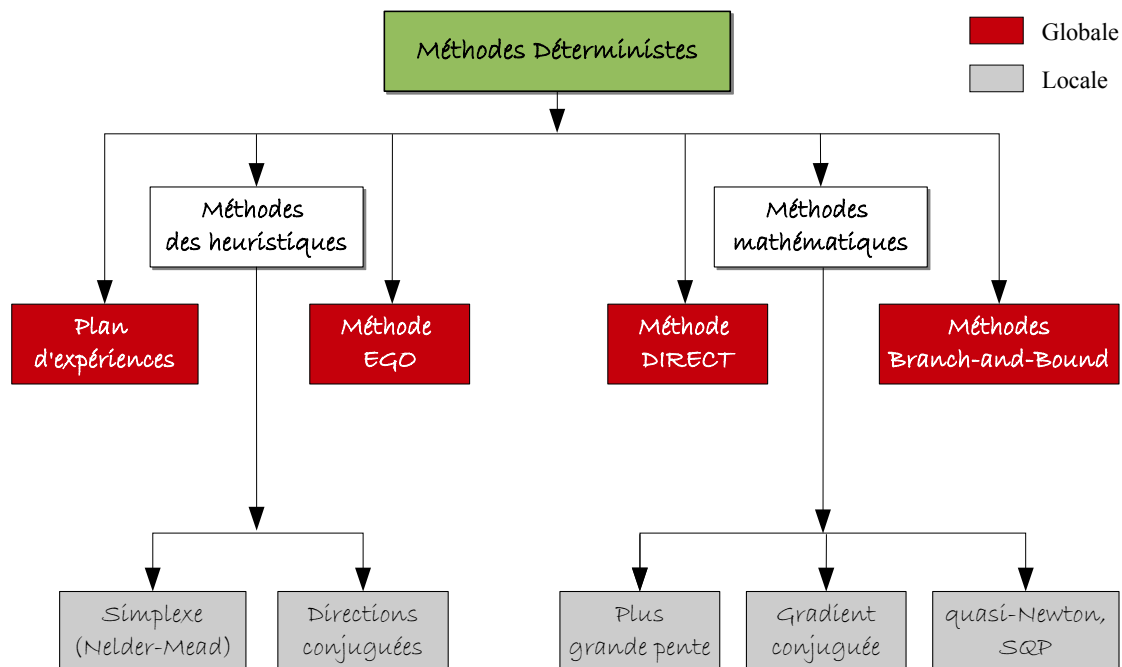


FIG. 2.4 – Méthodes d'optimisation mono-objectif déterministes

La méthode du simplexe

La méthode de Nelder-Mead [LAG-98] utilise un simplexe qui est un polytope de $n+1$ sommets dans un espace à n dimensions. Cette méthode n'utilise pas de dérivée. A chaque itération, le point du simplexe le plus mauvais est éliminé et le centre de gravité des autres est calculé. Quelques points sont testés dans la direction de recherche allant du point éliminé au centre de gravité et le meilleur remplace le point éliminé. L'algorithme s'arrête lorsque la taille du simplexe est suffisamment petite. Cette méthode est simple, efficace et très utilisée dans l'industrie.

La méthode des directions conjuguées

La méthode des directions conjuguées de Powell [MIN-83] n'utilise pas non plus de dérivée. Elle effectue une recherche linéaire suivant des directions orthogonales. Ces directions sont initialement les axes des variables d'optimisation mais un test est réalisé à chaque itération pour déterminer s'il est judicieux d'en changer.

Les méthodes mathématiques

Parmi les méthodes utilisant la dérivée première, celles du gradient conjugué et quasi-Newton sont fréquemment utilisées. Pour ces méthodes, une recherche linéaire est effectuée à chaque itération. Ce qui diffère est la façon de calculer la direction de recherche. **La méthode de la plus grande pente** a le défaut bien connu de converger lentement car ses directions de recherche sont l'opposé du gradient et donc orthogonale d'une itération à la suivante. En comparaison, **la méthode du gradient conjugué** pondère l'opposé du gradient avec la direction de recherche à l'itération précédente pour converger plus rapidement.

Les méthodes quasi-Newton consistent à imiter la méthode de Newton où l'optimisation d'une fonction est obtenue à partir de minimisations successives de son approximation au second ordre. Elles ne calculent pas le Hessien (dérivée secondaire) mais elles utilisent une approximation définie positive du Hessien qui peut être obtenue soit par l'expression proposée par Davidon-Fletcher-Powell (DFP) [MIN-83], soit par celle proposée par Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [MIN-83].

Toutes les méthodes présentées sont faites pour des problèmes sans contraintes et avec un objectif unique. Elles peuvent aussi s'appliquer aux problèmes avec contraintes et/ou plusieurs objectifs en employant les techniques de transformation comme les pénalités extérieures, intérieures, ou encore les multiplicateurs de Lagrange.

La méthode de programmation quadratique séquentielle (*sequential quadratic programming, SQP*) [NOC-99] correspond à une méthode quasi-Newton pour laquelle la fonction objectif est remplacée par le Lagrangien pour prendre en compte les contraintes. Elle est réputée comme étant une des plus efficaces pour résoudre les problèmes à variables continues de petite et moyenne taille. Cette méthode sera détaillée au paragraphe 3.2.2.1.

Les stratégies à base de plans d'expériences

Récemment, les développements se sont concentrés sur la mise au point de stratégies d'optimisation utilisant une suite de plans d'expérience. Ces méthodes sont bien adaptées aux problèmes d'électrotechniques pour lesquels la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser le dispositif [CAL-01],[VIV-02]. Elles sont habituellement employées lorsque le nombre de paramètres est faible, en tous cas inférieur à 10. Cette méthode n'utilise pas de dérivée, ce qui la rend bien adaptée aux modèles de type boîte noire et/ou bruités.

La méthode EGO

La méthode appelée EGO (*Efficient Global Optimization*) [JON-98] construit une surface de réponse de type Kriging progressivement, tout en minimisant la fonction objectif.

L'intensification est utilisée pour exploiter les meilleures solutions connues alors que la diversification permet d'exploiter les zones de l'espace de recherche dans lesquelles l'erreur d'approximation de la fonction objectif est la plus importante.

Cependant ces méthodes basées sur la construction de surfaces de réponses ont besoin quand même d'un nombre important d'évaluations du modèle. Elles n'entrent donc pas dans le cadre de ce travail de thèse car elles sont concurrencées par d'autres techniques d'optimisation appelées Space-Mapping qui seront détaillées et développées dans le chapitre 3.

La méthode DIRECT

La méthode DIRECT (*D*ividing *R*ECTangles) [PER-93] est également faite pour les modèles de type boîte noire et se contente d'un point par hyper-rectangle. Le modèle utilisé est lipchitzien, ce qui revient à considérer que la fonction objectif est minorée par une fonction linéaire par partie.

Les méthodes Branch-and-Bound

Les méthodes dites Branch-and-Bound trouvent l'optimum global des problèmes d'optimisation à variables discrètes ou mixtes. Cette méthode a été premièrement proposé par [LAN-60] pour la programmation linéaire. Comme la dérivation ne peut pas s'appliquer directement à ces types de problèmes d'optimisation combinatoires, elle se base sur la décomposition par séparations et évaluations.

[MES-97] a proposé un algorithme Branch-and-Bound spécifique associé avec l'arithmétique des intervalles qui permet de calculer l'intervalle de variation d'une fonction explicite tout en connaissant les intervalles de variation des variables qui la composent. Il est alors possible de comparer les sous-ensembles de l'espace de recherche pour éliminer ceux qui ne peuvent pas contenir l'optimum global et affiner les autres. Cette méthode est appliquée au dimensionnement de moteurs électromagnétiques à variables mixtes avec des modèles analytiques. À cause des calculs d'arithmétique d'intervalle portant sur toutes les variables, cet algorithme nécessite un temps d'optimisation relativement important.

Une autre version de l'algorithme Branch-and-Bound spécifique est développée dans le cadre de ce travail de thèse et est détaillé dans le chapitre 3, au paragraphe 3.2. L'idée de cette méthode est de décomposer un problème discret en sous-problèmes continus et d'utiliser le principe de séparations et d'évaluations au moyen d'un arbre dont les noeuds présentent des solutions partielles. De plus, cette méthode est capable de se combiner avec d'autres techniques d'optimisation pour résoudre des problèmes discrets ou mixtes modélisés par des éléments finis comme présentés dans le paragraphe 3.4.7 ou résoudre des problèmes multi-objectif présentés dans le paragraphe 3.3.

2.2.5.2 Méthodes stochastiques mono-objectifs

Les méthodes d'optimisation stochastiques s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires. Cette caractéristique indique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation. Due à la nature des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires, les méthodes d'optimisation stochastiques peuvent également traiter les problèmes à variables discrètes ou mixtes.

Ces méthodes ont une grande possibilité de trouver l'optimum global du problème. Contrairement à la plupart des méthodes déterministes, elles ne nécessitent ni point de départ, ni la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif. La figure 2.5 présente les méthodes stochastiques les plus utilisées.

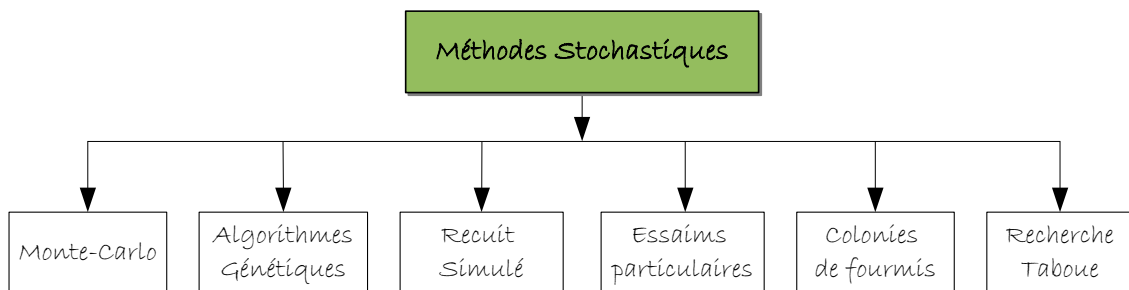


FIG. 2.5 – Méthodes d'optimisation mono-objectif stochastiques

Les méthodes Monte-Carlo

C'est la plus simple des méthodes stochastiques [FIS-97]. Elle consiste à tirer une solution au hasard à chaque itération. La fonction objectif est évaluée en ce point. Si elle est meilleure que l'optimum courant, cette valeur est enregistrée, ainsi que la solution correspondante et le processus continue jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient vérifiées. Il s'agit donc d'un processus d'exploration. Les méthodes Monte-Carlo peuvent être utilisées, en première approche, pour avoir des renseignements utiles sur la forme de la fonction. Elles permettent par exemple de choisir de façon plus appropriée le point de départ d'un algorithme de recherche locale. Toutefois, cette association ne garantit pas la localisation de l'optimum global.

Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques reposent sur une analogie avec la théorie de l'évolution naturelle des espèces de Darwin selon laquelle, les individus les mieux adaptés à leur environnement survivent et peuvent se reproduire pour donner des enfants encore mieux adaptés de génération en génération. Comme dans les mécanismes naturels, les principaux opérateurs de reproduction d'un chromosome sont le croisement et la mutation. La sélection des individus pour la reproduction se fait toujours de manière à favoriser les individus qui

ont la meilleure performance. Un mécanisme d'élitiste conserve les meilleurs individus d'une génération à la suivante pour assurer la convergence de l'algorithme [SAR-00], [CHE-01].

La méthode du recuit simulé

La méthode du recuit simulé est issue d'une analogie avec le phénomène physique de refroidissement lent d'un corps en fusion, qui le conduit à l'état solide, de basse énergie [KIR-83]. Dans le contexte de l'optimisation, la fonction objectif à minimiser est l'énergie qui doit être la plus basse possible, ce qui correspond à une structure cristalline. La température est un facteur de contrôle de l'algorithme qui agit sur la probabilité de Boltzmann.

La méthode par essais particuliers

L'optimisation par essais particuliers a été développée par [KEN-95], en s'inspirant du comportement social des individus qui ont tendance à imiter les comportements réussis qu'ils observent dans leur entourage tout en y apportant leur variations personnelles, ce qui offre un caractère adaptatif à la méthode. De ce fait, cette technique est fondée sur la notion de coopération entre agents qui peuvent être vus comme des animaux peu intelligents ayant peu de mémoire et de facultés de raisonnement.

La méthode par colonie de fourmis

La méthode a d'ailleurs des similarités avec les algorithmes par essais particuliers en s'inspirant du comportement collectif des fourmis [DOR-92]. Bien que les fourmis aient individuellement des capacités cognitives très réduites, elles sont capables collectivement de résoudre le problème de la découverte du plus court chemin allant de leur colonie vers une source de nourriture. Pour ce fait, les fourmis utilisent l'environnement comme support de communication : elles échangent indirectement de l'information en déposant des phéromones.

La recherche taboue

La recherche taboue est une méthode de recherche bien adaptée aux problèmes combinatoires. Elle est basée sur l'utilisation d'une mémoire flexible qui joue un rôle essentiel dans le processus de recherche et permet d'exploiter son histoire en évitant de se faire piéger dans les optimums locaux et de revenir à des solutions déjà visitées [GLO-93]. Une liste dite taboue sert à stocker l'historique de la recherche. Sa structure a donc une grande importance pour les performances de l'algorithme.

2.2.5.3 Méthodes multi-objectifs

Les résultats principaux de l'approche multi-objectif sont dits le front optimal de Pareto (les solutions optimales de Pareto) qui est le meilleur compromis entre les objectifs. En général, les méthodes d'optimisation multi-objectif peuvent se décomposer en deux grandes catégories : les approches scalaires et les approches de Pareto. La figure 2.6 montre quelques méthodes multi-objectifs les plus utilisées en génie électrique. Le principe des méthodes

multi-objectifs scalaires est de transformer le problème multi-objectif en un problème mono-objectif. Les méthodes multi-objectif de Pareto quant à elles gardent séparément des éléments du vecteur d'objectifs durant la procédure d'optimisation et utilisent typiquement un concept de dominance pour distinguer des solutions dominées ou non-dominées.

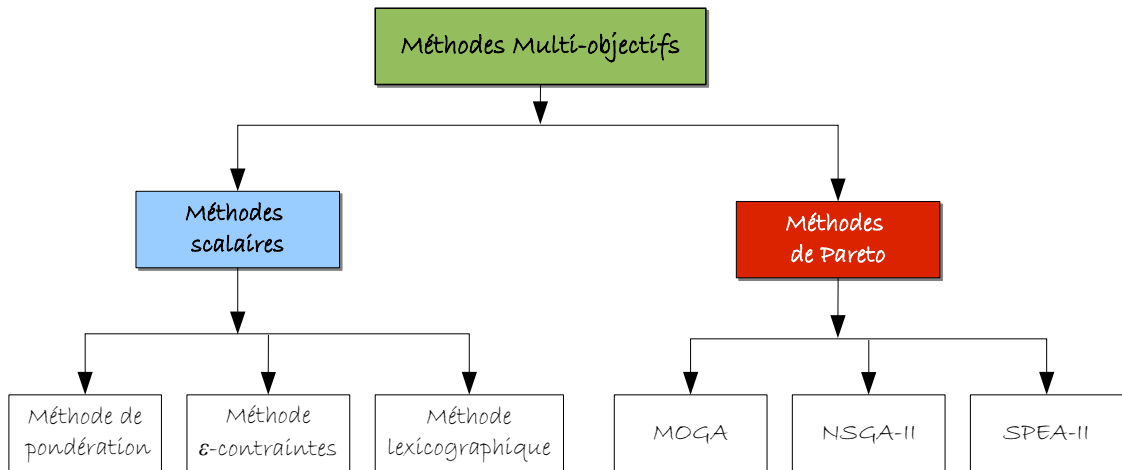


FIG. 2.6 – Méthodes d'optimisation multi-objectif

La méthode d'agrégation pondérée

La méthode multi-objectif la plus populaire appartient au type des méthodes scalaires, appelée la méthode d'agrégation pondérée (Weighted Sum method en terme anglais) [COL-02]. La méthode consiste à transformer le problème multi-objectif en un problème mono-objectif en combinant linéairement les objectifs par les coefficients de pondération. Cette méthode est simple et facile à implémenter, mais elle possède cependant deux défauts : la distribution non-uniforme des points du front de Pareto et l'incapacité de traiter un problème non-convexe. Elle est détaillée dans le chapitre 3, au paragraphe 3.3.3.

La méthode ϵ – contraintes

La méthode ϵ -contraintes transforme le problème multi-objectif en un problème mono-objectif comportant quelques contraintes supplémentaires [COL-02]. Une fonction objectif parmi des objectifs est à priori gardée, les autres sont transformées en contraintes d'inégalité. Cette méthode est détaillée au paragraphe 3.3.4.

La méthode lexicographique

Cette méthode consiste à minimiser séquentiellement les différents objectifs d'un problème multi-objectif [COL-02]. L'ordre de minimisation des objectifs est fixé par l'utilisateur qui garde, à tout instant du processus, et en fonction des résultats obtenus, la possibilité de privilégier un critère plutôt qu'un autre.

La méthode MOGA

La méthode MOGA (Multiple Objective Genetic Algorithm) [COE-04] est le premier algorithme qui utilise la notion de dominance directement pour évaluer la performance

des individus. Cependant, cette méthode ne permet pas, dans certains cas, d'obtenir une représentation complète du front de Pareto.

La méthode NSGA-II

La méthode NSGA-II (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II) [DEB-02] est une des méthodes multi-objectifs les plus utilisées. Cette méthode est la version améliorée de la méthode NSGA qui a utilisé pour la première fois le concept de classement par dominance. Dans cette méthode NSGA-II, les parents et les enfants sont classés selon le rang de dominance. Lorsque plus de la moitié des parents et des enfants confondus sont dominants, une mesure de densité des solutions est utilisée. Cette méthode NSGA-II ne dépend d'aucun paramètre de contrôle.

La méthode SPEA-II

La méthode dite SPEA-II (Strength Pareto Evolutionary Algorithm II) [COE-04] range les solutions non dominées dans une population externe entre la taille de l'archive et celle de la population courante. Cette méthode diffère de son prédécesseur (SPEA) qui est sensible à l'équilibre entre la taille de l'archive et celle de la population courante, par une taille de l'archive fixe et un calcul de la performance des individus plus raffiné.

2.3 Exemples de Cahiers des Charges en Électrotechnique et de Formulations Mathématiques

Nous avons choisi deux dispositifs typiques du génie électrique afin d'illustrer les différents cahiers des charges et leurs différentes formulations en problème d'optimisation.

2.3.1 Moteur à courant continu sans balais

La conception d'un moteur roue à courant continu, aimant permanent, bobinage concentré et commutation électronique pour la propulsion en compétition d'un véhicule solaire [BRI-05] est un problème complexe qui possède de nombreux degrés de liberté. Une approche rationnelle est de le formuler comme un problème d'optimisation.

2.3.1.1 Cahier des charges

Le moteur doit produire un couple permanent de 20 N.m du démarrage jusqu'à la vitesse nominale, i.e. 700 tr/min. La vitesse du moteur peut dépasser 1000 tr/min. La puissance fournie par les panneaux solaires dépendant de l'ensoleillement, le rendement doit être élevé pour des vitesses comprises entre 500 tr/min et 700 tr/min. La puissance utile nominale du moteur est 1500 W, ce qui est supérieur à la puissance fournie par les panneaux solaires car des batteries chargées avant chaque départ apportent un surplus temporaire de puissance.

Pour faciliter le montage et la maintenance du moteur et de la jante, le moteur roue est fixé sur un bras oscillant et non une fourche. L'encombrement axial du moteur doit donc être réduit. Le diamètre extérieur du moteur doit également être limité pour qu'il puisse prendre place dans la jante de la roue.

Finalement, le moteur opère dans un environnement hostile pendant la course. Il est proche de la route et subit des chocs ainsi que le poids du véhicule. Il est également nécessaire de le protéger contre les poussières. Proche du sol, la température extérieure est environ 50°C. Toute la course se déroule sur un terrain plat excepté une dizaine de kilomètres avec une montée à 7 %. Durant les freinages, l'énergie cinétique du véhicule est renvoyée aux batteries.

Le but est de concevoir un moteur avec le meilleur rendement tout en répondant à des contraintes techniques.

2.3.1.2 Choix technologiques et structurels

Le moteur à concevoir est un moteur roue qui propulse un véhicule solaire lors d'une compétition. Le contexte d'utilisation conditionne les choix technologiques et structurels. En effet, le prix des matériaux et de la fabrication n'est pas primordial alors que le rendement et l'encombrement axial sont des critères essentiels.

Un moteur à courant continu est écarté car son collecteur augmente l'encombrement axial du moteur et est sensible aux chocs ainsi qu'aux poussières. Le moteur asynchrone est rejeté car sa puissance massique est faible pour des petites puissances et faibles vitesses. Il en est de même pour le moteur à réluctance variable. Le moteur synchrone à aimant pose le problème du capteur de position. Lorsque la forme du courant est rectangulaire, des capteurs à effet Hall de très petite taille suffisent. Ils sont collés sur le stator du moteur et leur montage est aisé. On désigne souvent les moteurs synchrones à aimants permanents et courant rectangle par le terme anglo-saxon "*brushless DC*".

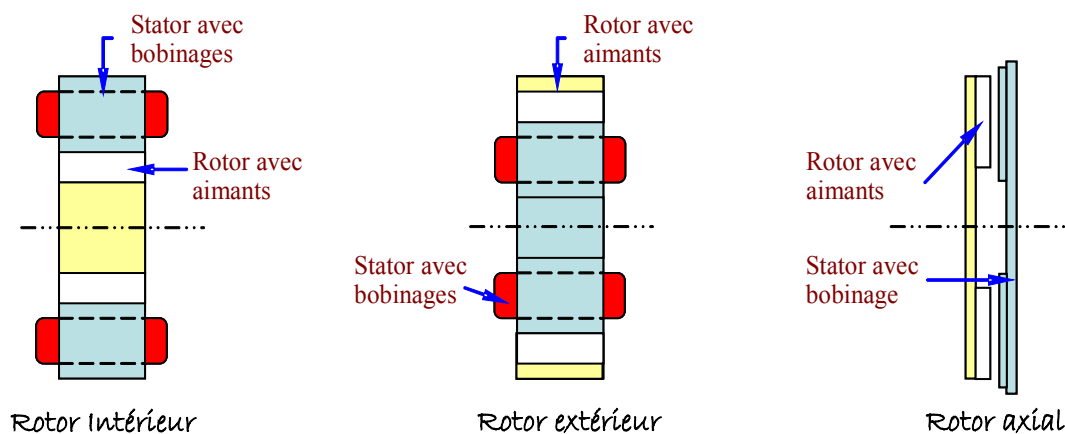


FIG. 2.7 – Structures possibles des moteurs

En ce qui concerne le choix structurels, il est possible de choisir entre les structures à rotor intérieur, rotor extérieur et flux axial comme illustrées dans la figure 2.7. La structure à flux axial n'était pas la plus intéressante malgré les contraintes d'intégration dans la roue du cycle et c'est bien la structure à rotor extérieur qui s'imposait. Un autre avantage du rotor extérieur est de faciliter le support des aimants permanents. La jante de la roue est directement fixée sur le rotor.

Ainsi, un moteur à courant continu, aimants SmCo montés en surface, bobinages concentrés, flux radial, rotor extérieur et commutation électronique est choisi. Un onduleur triphasé régulé en courant assure le pilotage du moteur à partir des informations de trois capteurs à effet Hall.

2.3.1.3 Modélisation du moteur

Un modèle analytique, basé sur un ensemble d'équations analytiques décrivant le fonctionnement du moteur, est construit. Ces équations sont décrites en [BRI-05]. Elles sont rapides à résoudre et prennent en compte des phénomènes physiques de nature différente, i.e. thermique, mécanique, magnétique, électrique. Les modèles éléments finis ne sont pas retenus car le temps nécessaire à une simulation du moteur à pleine charge sur une période électrique est de quelques heures qu'il faut multiplier par le grand nombre de simulations

nécessaires pour l'optimisation. Toutefois, un modèle éléments finis est utilisé pour simuler finement le moteur optimal et valider le dimensionnement (figure 2.8.b).

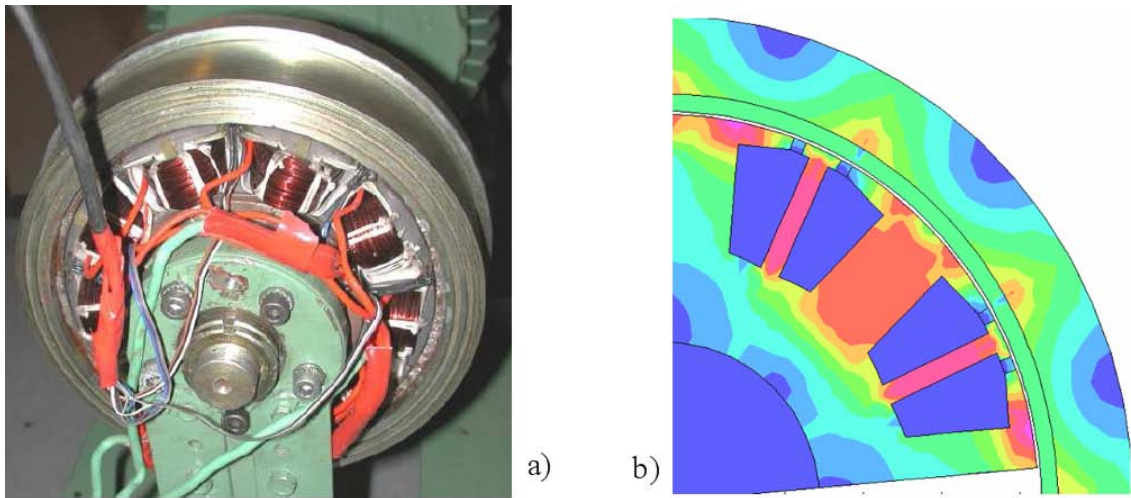


FIG. 2.8 – (a) Prototype du moteur roue. (b) Simulation statique à vide en 2D

Toutes les équations sont réécrites de telle sorte que les paramètres d'entrée du modèle proviennent soit du cahier des charges, soit des propriétés des matériaux. Le diamètre extérieur du stator et la longueur du paquet de tôles sont les seules données géométriques utilisées. Les paramètres provenant des propriétés des matériaux sont la densité de courant dans les bobines et les inductions magnétiques dans l'entrefer, les dents et la culasse du stator. Les valeurs minimales et maximales de ces paramètres sont connues, varient peu avec la taille et l'application du moteur et sont directement interprétables pour un constructeur de machines électriques.

Le modèle analytique comporte 78 équations [BRI-05] :

- 25 pour les phénomènes électriques et magnétiques,
- 3 pour la thermique,
- 15 pour les relations géométriques,
- 22 pour les propriétés des matériaux et la configuration retenue,
- 3 pour le cahier des charges, et
- 10 pour les paramètres ou variables d'optimisation.

2.3.1.4 Problème d'optimisation à 5 variables de conception

Le prototype présenté en figure 2.8.a a été réalisé suite à une optimisation avec 5 des 10 paramètres :

- la densité de courant dans les bobines σ ,
- l'induction magnétique dans les dents B_d , la culasse statorique B_{cs} et l'entrefer B_e ,
- le diamètre du stator D_s .

Les 5 autres paramètres sont fixés arbitrairement ou par l'application :

- tension de bus continu de 120 V,

- longueur fer de 45 mm, longueur d'aimant 10% supérieure,
- entrefer de 0.8 mm, et
- induction magnétique dans la cullasse rotorique de 1.2 T.

Donc, le problème de conception comporte 5 variables continus. Il est exprimé comme l'équation (2.6) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } 1 - \eta(X) \\ X = \{\sigma, B_d, B_{cs}, B_e, D_s\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\ 2 \leq \sigma \leq 5 \quad (A/mm^2) \\ 0.9 \leq B_d \leq 1.8 \quad (T) \\ 0.6 \leq B_{cs} \leq 1.6 \quad (T) \\ 0.5 \leq B_e \leq 0.76 \quad (T) \\ 150 \leq D_s \leq 330 \quad (mm) \\ \text{soumis à} \\ M_{tot} - 15 \leq 0 \quad (kg) \\ D_{ext} - 340 \leq 0 \quad (mm) \\ 76 - D_{int} \leq 0 \quad (mm) \\ 125 - I_{max} \leq 0 \quad (A) \\ -discr(\sigma, B_d, B_e, D_s) \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Les contraintes techniques imposées sont les suivantes : la masse totale M_{tot} ne doit pas excéder 15 kg. Le diamètre extérieur D_{ext} doit être inférieur à 340 mm pour que le moteur s'insère dans la jante. Le diamètre intérieur D_{int} doit être supérieur à 76 mm pour des raisons mécaniques. Enfin, les aimants doivent supporter un courant dans les phases I_{max} de 125 A sans risque de désaimantation. Puisque la hauteur d'encoche est calculée en une équation du second degré dont le discriminant $discr(\sigma, B_d, B_e, D_s)$ est être supérieur ou égal à 0. L'objectif est de maximiser le rendement du moteur η .

2.3.2 Transformateur de sécurité

Le transformateur de sécurité est un des dispositifs électriques les plus utilisés grâce à la multiplicité de ses applications diverses et à sa fabrication facile. Le choix de ce dispositif est dû au fait que sa conception est représentative de l'électrotechnique car elle se pose en termes d'optimisation discrète ou mixte.

2.3.2.1 Cahier des charges

Les transformateurs de sécurité sont utilisés dans de nombreuses applications et dans des domaines différents :

- Appareils médecins : dispositif de défibrillation, technologie dentaire et rein artificiel machines,...

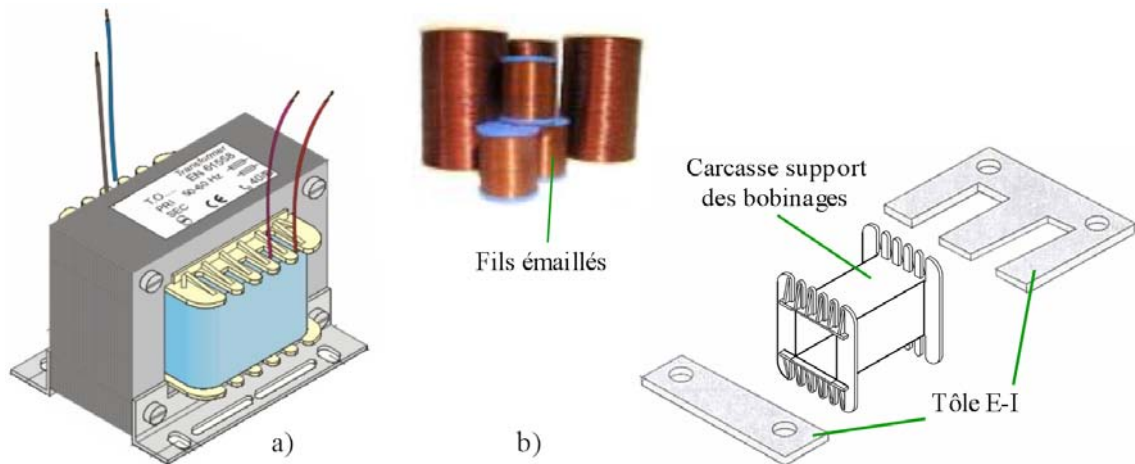


FIG. 2.9 – (a) Transformateur de sécurité. (b) Tôles E-I, carcasse, fils émaillés. Assemblage du circuit magnétique

- Transport : technologie ferroviaire, ingénierie automobile, aérospatiale, signalisation,... ;
- Éclairage, solaire, automatique... ;
- Dans des appareils domestiques, matériels de bureau grâce à une production en grande quantité ;
- Ils sont aussi présents dans des armoires de commande ;
- Ils sont également appropriés pour des alimentations électriques des dispositifs industriels comme les machines textiles ou dans l'industrie du papier.

Le transformateur de sécurité (figure 2.9.a) est un transformateur monophasé abaisseur à 50/60 Hz. Son fonctionnement est réversible. La puissance varie de quelques dizaines de volt-ampères à quelques kilos volt-ampères. La tension du côté primaire peut être 230 V, 400 V ou au maximum 690 V, et celle du côté secondaire peut être 24 V ou 12 V. Le transformateur choisi est un transformateur de faible puissance.

Pour réduire les pertes par courant de Foucault, le circuit magnétique est feuilleté et constitué de tôles minces à cristaux non-orientées empilées les une sur les autres. L'acier de ces tôles est un alliage ferromagnétique de fer silicium, de nickel ou de molybdène. Ces dernières permettent de travailler à une induction maximale élevée jusqu'à 2.35 T), à fréquence faible. L'épaisseur d'un feuille de tôle est 0.33 mm, 0.5 mm ou 0.65 mm. Les pertes totales dans le fer sont calculées en utilisant les pertes spécifiques données par le fabricant. Ces pertes s'expriment en watts par kilogramme pour une induction d'amplitude égale à 1 Tesla variant sinusoïdalement à la fréquence de 50 Hz. Les pertes spécifiques des tôles pour le transformateur de sécurité varient de 1 à 3 W/kg.

Le transformateur de sécurité respecte la classe d'échauffement E : les enroulements primaire et secondaire peuvent supporter des températures allant jusqu'à 120°C.

2.3.2.2 Choix technologiques et structurels

Il existe deux types de circuits magnétiques. Le premier est un circuit magnétique *cuirassé* en forme de E-I dont les deux enroulements sont montés autour du noyau central. Le deuxième est un circuit magnétique normal en forme de U-I ou à *deux noyaux bobinés*, chaque bobine étant montée autour d'un noyau. Pour des impératifs de fabrication et d'efficacité, la disposition technologique habituelle est celle d'un regroupement des enroulements (bobinages concentriques) sur la même colonne centrale du circuit magnétique E-I. Ainsi le circuit magnétique feuilleté du transformateur est fabriqué par des tôles minces empilées en forme de E et de I en alternant les deux types de couches (figure 2.9.b). L'ensemble des tôles forme un bloc cohérent quand cet ensemble est collé ou par serrage grâce aux systèmes vis écrous qui prennent place dans les trous. Les plans des tôles sont isolés entre eux par l'oxydation naturelle ou par un vernis. Ainsi, les pertes par courant Foucault sont limitées.

Les deux bobines de conducteurs isolés utilisent des fils émaillés et se montent concentriquement : l'une, de n_1 spires, est reliée à la source et constitue le primaire ; l'autre, de n_2 spires, est reliée au récepteur et constitue le secondaire. Cette convention correspond au sens du transfert d'énergie, mais un transformateur est réversible. Ces deux enroulements sont bobinés sur le support qui entoure le noyau central (figure 2.9).

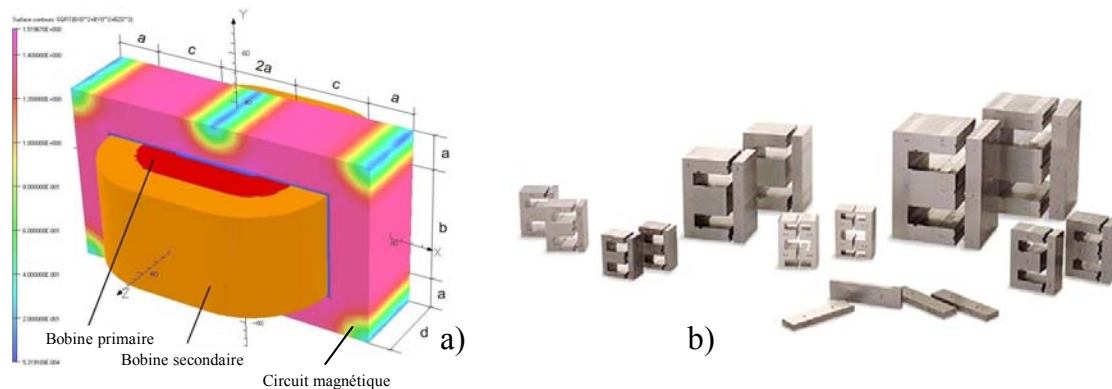


FIG. 2.10 – (a) Simulation magnétique en 3D du transformateur. (b) Catalogue standard de tôle E-I

Le métier d'une entreprise de petite taille est en fait un processus de fabrication-assemblage-commercialisation. En fait, il existe des fabricants de matériaux : tôles magnétiques, aimants, fils émaillés, conducteurs de courant fort, isolants, carcasses, boîte de couverture, etc. qui fournissent des composants aux ateliers de montage qui assemblent des moteurs, des transformateurs, etc. Ainsi, les tôles E-I, les carcasses et les fils émaillés appartiennent aux catalogues standards des fournisseurs de tôles, de carcasses et de fils (figure 2.10.b).

2.3.2.3 Modélisation du transformateur de sécurité

Les phénomènes électrique, magnétique et thermique au sein du transformateur ont été modélisés par deux modèles analytiques et deux modèles éléments finis.

Ainsi, les quatre modèles du transformateur sont :

- modèle magnétothermique analytique avec hypothèse de Kapp qui néglige la chute de tension liée au courant magnétisant,
- modèle magnétothermique analytique sans hypothèse de Kapp,
- modèle éléments finis magnétodynamique complexe bidimensionnel avec couplage faible à un modèle éléments finis thermique statique bidimensionnel,
- modèle éléments finis magnétodynamique complexe tridimensionnel avec couplage faible à un modèle éléments finis thermique statique tridimensionnel

Pour les modèles analytiques, l'utilisation des techniques de triangularisation [DUF-78a]-[DUF-78b] permet de réduire la taille du système implicite dont les équations sont résolues simultanément. Les autres équations sont résolues séquentiellement. Le modèle avec l'hypothèse de Kapp comprend un système implicite de 8 équations sur 50 équations au total. Tandis que le modèle sans l'hypothèse de Kapp comporte 58 équations au total dont un système implicite de 21 équations (ou 16 équations en complexe).

Tous les modèles abordés ci-dessus seront détaillés au chapitre 4.

2.3.2.4 Problème d'optimisation à 5 variables discrètes de conception

La formulation du premier problème d'optimisation à 5 variables est donnée en (2.7). Ce problème comprend 5 variables discrètes de conception : 4 variables de catégorie, 1 variable entière. Trois variables $\{a, b, c\}$ désignent la géométrie de la tôle E-I. $\{d\}$ dénote la profondeur de la carcasse, donc la profondeur du circuit magnétique (figure 2.9). $\{n_1\}$ est le nombre de spires au primaire. Il y a 62 configurations possibles pour l'association des 4 variables $\{a, b, c, d\}$. Leurs valeurs sont issues des catalogues standards de tôle et carcasse [BOU-05]-[ISO-95]. Pour le nombre de spires primaires, 1000 valeurs sont permises. La fonction objectif est la masse totale active du transformateur M_{tot} qui est corrélée avec le coût.

Le rendement élevé du transformateur permet d'augmenter son efficacité énergétique et aussi de diminuer sa contribution à l'émission de gaz à l'effet de serre. Arbitrairement, le rendement du transformateur η doit être supérieur à 80%. C'est la première contrainte. La mise à disposition d'une tension correcte est essentielle au bon usage et à la qualité de service de l'électricité. Ainsi, la chute de tension admise ΔV_2 pour le transformateur est inférieure à 10% de la tension secondaire V_2 . C'est la deuxième contrainte électrique. Une autre contrainte électromagnétique concerne le courant magnétisant consommé en partie par les pertes fer et en partie par magnétisation du circuit magnétique. En fait, pour contraindre les pertes fer et limiter l'induction magnétique, on impose au courant

magnétisant I_μ d'être inférieur à 10% du courant primaire I_1 . En ce qui concerne les contraintes thermiques, comme le transformateur dépend de la classe d'échauffement E, la température maximale admise du cuivre (deux bobinages) T_{cu} est 120°C, et la température du fer (circuit magnétique) T_{fe} est imposée inférieure à 100°C.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } M_{tot}(X) \\ X = \{a, b, c, d, n_1\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\ \{a, b, c, d\} \in 62 \text{ configurations} = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}, \quad i = 1, \dots, 62 \\ n_1 \in \{1, \dots, 1000\} \\ \text{soumis à} \\ T_{cu} - 120 \leq 0 \quad (^\circ C) \\ T_{fe} - 100 \leq 0 \quad (^\circ C) \\ 0.8 - \eta \leq 0 \quad (-) \\ I_\mu/I_1 - 0.1 \leq 0 \quad (-) \\ \Delta V_2/V_2 - 0.1 \leq 0 \quad (-) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

2.3.2.5 Problème d'optimisation à 7 variables discrètes de conception

Dans le deuxième problème d'optimisation, on ajoute 2 variables discrètes de conception. Ce sont les sections du fil primaire $\{S_1\}$ et secondaire $\{S_2\}$. Leurs valeurs sont extraites d'un catalogue standard de fil émaillé [INV]. Il y a ainsi 62 configurations pour chaque conducteur. Le problème combinatoire mène alors à 246 078 000 combinaisons possibles au total. Ces deux variables d'entrée sont soumises à deux contraintes géométriques f_1 et f_2 . En fait, la largeur de chaque bobine ne peut pas dépasser sa fenêtre dans le circuit magnétique (figure 2.10). Donc les paramètres f_1 et f_2 calculant la largeur de la fenêtre doivent être inférieurs à un facteur de remplissage estimé à 0.5. La formulation du problème d'optimisation mono-objectif à 7 variables discrètes est donnée en (2.8).

Les 7 variables discrètes peuvent être transformées en variables continues en prenant des valeurs minimale et maximale de chaque paramètre dans les catalogues comme limites de variation de ces variables. Ainsi, on aura un problème d'optimisation continue mono-objectif.

Il est également possible que ce problème d'optimisation mono-objectif soit transformé en problème multi-objectif, en retirant la contrainte de rendement η , ou en intégrant une ou plusieurs contraintes d'éco-conception et en les mettant comme la deuxième fonction objectif. Ainsi, on obtiendra un problème d'optimisation multi-objectif à variables discrètes ou à variables continues à deux objectifs conflictuels : minimiser la masse M_{tot} et maximiser

le rendement η , ou minimiser la masse M_{tot} et minimiser des impacts environnementaux.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{minimiser } M_{tot}(X) \\
 X = \{a, b, c, d, S_1, S_2, n_1\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\
 \{a, b, c, d\} \in 62 \text{ configurations} = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}, \quad i = 1, \dots, 62 \\
 S_1 \in 62 \text{ sections possibles} = \{S_{1j}\}, \quad j = 1, \dots, 62 \\
 S_2 \in 62 \text{ sections possibles} = \{S_{2k}\}, \quad k = 1, \dots, 62 \\
 n_1 \in \{1, \dots, 1000\} \\
 \text{soumis à} \\
 T_{cu} - 120 \leq 0 \quad (^\circ\text{C}) \\
 T_{fe} - 100 \leq 0 \quad (^\circ\text{C}) \\
 0.8 - \eta \leq 0 \quad (-) \\
 I_\mu/I_1 - 0.1 \leq 0 \quad (-) \\
 \Delta V_2/V_2 - 0.1 \leq 0 \quad (-) \\
 f_1 - 0.1 \leq 0 \quad (-) \\
 f_2 - 0.1 \leq 0 \quad (-)
 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Toutes les approches proposées ci-dessus seront traitées au moyen des algorithmes d'optimisation détaillés dans le chapitre 3. Leurs résultats seront montrés au chapitre 4.

2.4 Nouveaux Enjeux dans la Conception Optimale en Génie Électrique

Dans le domaine du génie électrique, la conception optimale est une activité relativement récente. De nombreuses difficultés sont rencontrées, notamment dans le processus de résolution du problème d'optimisation. Nous en abordons un certain nombre présenté ci-dessous.

2.4.1 Approche combinatoire

Les problèmes combinatoires (ou problèmes "discrets") représentent des difficultés réelles. Des exemples de problèmes classiques bien connus sont :

- *Le problème du sac à dos* qui traite du remplissage d'un sac à dos. Ne pouvant supporter qu'une certaine masse, avec un ensemble d'objets ayant chacun une certaine masse et une valeur. Les objets mis dans le sac à dos doivent maximiser la valeur totale, sans dépasser la masse maximale ;
- *Le problème du voyageur de commerce* consiste à trouver le plus court chemin qui relie toutes les villes étant donné un ensemble de villes séparées par des distances données.
- *Le problème de tournées de véhicules* représente typiquement des problèmes combinatoires de transport. Le décideur possède une flotte de véhicules et souhaite livrer à moindre coût une liste de clients. Des contraintes pratiques comme la capacité des véhicules ou des heures de visite fixées chez les clients peuvent être ajoutées ; etc.

Dans l'ingénierie, la communauté de l'optimisation discrète aborde des problèmes combinatoires dans de nombreux domaines : problèmes génétiques, de logistique, de transport, de management, recherche opérationnelle, etc. Ces applications se caractérisent souvent par des modèles linéaires. Pour la conception des machines électriques, les problèmes sont essentiellement non-linéaires et les variables discrètes dépendent souvent de la structure de la machine. Par exemple, les calculs de l'induction, du couple, des températures sont non-linéaire. Le choix structurel de la machine (rotor intérieur ou extérieur ou flux axial) est discret. Les types de tôle, les types de fils émaillés, les types de matériaux sont des variables discrètes, et leurs valeurs sont issues de standards de catalogues. Le nombre de spires, le nombre d'encoches pour les machines et transformateurs sont des entiers.

Nous constatons un manque d'outils de décision pour la première partie du processus de conception lorsque le choix de la structure et des matériaux est fait. Le terme anglais désignant cette partie est *embodiment design*. A ce stade de la conception, les paramètres sont majoritairement discrets et non classables. De même, les productions unitaires ou en très petites séries pratiquées par certaines PME s'appuient sur des standards. Il s'agit donc de choisir parmi un nombre fini de solutions plutôt que d'optimiser finement une

géométrie. Ainsi l'exemple du transformateur de sécurité présenté au paragraphe 2.3.2 est typiquement de ce processus.

Les méthodes de résolution des problèmes combinatoires relèvent de concepts différents des méthodes d'optimisation conventionnelle continue. Dérivées et recherche linéaire ne peuvent pas s'appliquer directement aux problèmes à variables discrètes.

La technique d'optimisation combinatoire la plus simple est l'énumération exhaustive. Il s'agit de calculer toutes les combinaisons possibles. Parmi les solutions faisables, l'optimum est le minimum de celles-ci. Cette approche garantit la solution globale. Cependant, le temps de résolution est très long et elle ne s'applique pas aux problèmes à variables mixtes. Une autre approche pratique pour traiter des variables discrètes est de résoudre l'optimisation continue correspondante et d'ajuster ensuite la solution obtenue aux valeurs discrètes les plus proches [PRO-05]. Cette technique ne s'applique cependant pas aux variables de catégories. De plus, il y a aucune garantie que la solution trouvée soit globale, ni qu'elle soit faisable, c'est à dire respectant toutes les contraintes. Cette approche est réservée au cas où le nombre de variables discrètes est faible et où chaque variable discrète possède seulement quelques valeurs.

Grâce à la nature probabiliste et aléatoire de leurs mécanismes de transition, les méthodes stochastiques telles que les algorithmes génétiques ou la recherche taboue s'adaptent bien aux problèmes combinatoires. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations de la fonction objectif, donc un temps de calcul important par comparaison aux méthodes déterministes.

Parmi les méthodes utilisées pour les problèmes d'optimisation combinatoires, les méthodes dites Branch-and-Bound (BB) permettent d'obtenir l'optimum global de manière exacte sur des problèmes d'optimisation à variables discrètes ou mixtes. Cependant, il est difficile d'appliquer ces méthodes à des problèmes dont l'espace de recherche est de taille trop importante. Comme la dérivation ne peut pas s'appliquer directement à ces types de problèmes d'optimisation combinatoires, les méthodes BB se basent sur la décomposition par séparations et évaluations. Les algorithmes BB utilisent un arbre dont les noeuds représentent des solutions partielles.

- [MES-97] a proposé un algorithme Branch-and-Bound associé à l'arithmétique des intervalles (IBBA) et l'a utilisé pour dimensionner des moteurs électriques à variables mixtes. Cette méthode a également été appliquée plus récemment à un problème de dimensionnement d'actionneurs à variables mixtes. Elle montre son efficacité pour des problèmes d'optimisation de petite et moyenne taille mais n'est utilisable qu'avec des modèles analytiques explicites.
- Dans [FIT-04]-[FON-07] des problèmes inverses à variables mixtes de synthèse d'un accouplement magnétique ont été proposés et résolus avec la méthode IBBA en utilisant également des modèles analytiques. Dans [FON-07], le calcul numérique du

couple électromagnétique par un modèle EF 2D a été également inséré dans la phase d'optimisation.

- Dans [AMO-07], le coût minimal des transformateurs de puissance à variables mixtes a été optimisé par une méthode BB. Un modèle analytique est utilisé, et les solutions obtenues sont ensuite validées par un modèle EF 2D.
- La méthode BB est donc très utilisée pour ce type de problèmes cependant les méthodes évolutionnistes sont également applicables. Dans [HEM-07] un aimant supraconducteur comportant des variables mixtes a été dimensionné. Un modèle approché construit à partir d'un modèle EF 2D magnétique statique a été réalisé. Trois méthodes évolutionnistes ont été appliquées.

Un autre algorithme Branch-and-Bound spécifique est développé dans le cadre de nos travaux. Il sera détaillé au paragraphe 3.2. Dans cette approche de décomposition, chaque sous-problème est résolu par relaxation au moyen des méthodes d'optimisation continue. À l'aide d'une stratégie de comparaison et d'évaluation, ce nouvel algorithme BB assure l'optimum global sous certaines conditions. Il a été appliqué avec succès à la résolution du problème d'optimisation discrète du transformateur de sécurité décrit au paragraphe 2.3.2.

2.4.2 Approche multi-objectif

Le but de la conception optimale est de chercher les variables de conception qui minimisent la fonction objectif tout en satisfaisant des contraintes. Dans des applications pratiques en ingénierie, les variables de conception peuvent être continues, discrètes ou mixtes, tandis que les contraintes peuvent être linéaires et/ou non-linéaires, égalité et/ou inégalité. Dans la conception optimale, on a une fonction objectif à minimiser, ou bien souvent on a besoin de réduire simultanément plusieurs objectifs. Par exemple, on veut non seulement réduire le coût de fabrication, donc la masse totale, mais aussi augmenter la performance du dispositif, avoir moins de pertes, donc augmenter le rendement. Cela pose un problème d'optimisation bi-objectif. Si on souhaite encore diminuer le bruit du moteur, réduire des impacts environnementaux, alors on a un problème multi-objectif.

L'optimisation multi-objectif est un sujet qui concerne de très nombreux domaines scientifiques comme en témoigne le nombre important d'articles publiés au cours de ces quinze dernières années. Il existe deux grandes familles de méthodes d'optimisation multi-objectif : les méthodes scalaires et les méthodes approximatives. De plus amples informations peuvent être trouvées dans [COL-02] et [COE-04].

Quelques applications des méthodes multi-objectif en électrotechnique sont citées ci-dessous :

- [DEB-02] a proposé un algorithme évolutionniste nommé NSGA-II (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm) qui permet de résoudre les problèmes multi-objectif à variables continues et/ou discrets sous contraintes. Cet algorithme est largement

- appliqué dans notre domaine [DIA-02], [REG-05], [LEB-07], etc.
- Dans [DIA-02], la méthode NSGA a été comparée avec la méthode d'agrégation pondérée et trois algorithmes multi-objectif évolutionnistes : VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm), MOGA (Multiple Objective Genetic Algorithm) et NPGA (Niche Pareto Genetic Algorithm). L'algorithme NSGA a été ensuite appliqué au problème de benchmark n° 22 (un dispositif de stockage d'énergie magnétique par anneaux supraconducteur) [TEA-22] qui a été modélisé par un modèle EF 2D statique.
 - Dans [REG-05], la méthode NSGA II a été appliquée à un système électromécanique simple d'une chaîne de conversion statique continu-alternatif comportant une source de tension continue, un onduleur de tension IGBT, un moteur synchrone à aimants permanents, un réducteur mécanique et une charge de puissance constante basé sur un modèle analytique. Le problème à variables mixtes comporte deux objectives : minimiser les pertes et la masse totale du système.
 - Dans [LEB-07], un problème multi-objectif (bruit, rendement et coût des matériaux) d'un moteur asynchrone a été résolu par l'algorithme modifié NSGA-II qui s'adapte au problème sous contraintes et à variables mixtes. Des modèles analytiques (électromagnétique, mécanique et acoustique) ont été employés.
 - [KIM-06] a proposé une amélioration de la méthode d'agrégation pondérée, la plus simple parmi des méthodes scalaires, appelée Adaptive Weighted-Sum (AWS). Cet algorithme permet d'améliorer deux défauts de la méthode conventionnelle. Elle est donc capable de résoudre des problèmes non-convexes et d'obtenir un front Pareto ayant une bonne distribution des points.
 - Dans [MUR-08], la méthode scalaire ϵ -contraintes a été utilisée pour résoudre le problème multi-objectif non-convexes à variables continues d'un modulateur électro-optique. Dans ces travaux, la méthode de pondération des objectifs n'a pas pu obtenir un bon front Pareto pour ce problème.

Pour des problèmes multi-objectif discrets ou mixtes en électrotechnique, seule la méthode NSGA-II a été appliquée. Pour notre part, nous avons combiné la méthode BB avec des techniques scalaires telles que l'agrégation pondérée, ϵ -contraintes pour proposer une routine d'optimisation multi-objectif déterministe, nommée méthode EXBB. Elle sera abordée au paragraphe 3.3.

De plus, les modèles utilisés ci-dessus (fonctions de test, modèles analytiques, modèles EF statique) sont souvent économes en temps de calcul. Comme toutes les méthodes stochastiques, la méthode NSGA-II a besoin de nombreuses évaluations du modèle. Pour des problèmes utilisés les modèles multi-physiques comme EF 3D, l'application de ces méthodes demandent un temps calcul trop important qui rend l'usage de ces méthodes stochastiques impossibles. L'intégration des méthodes d'optimisation multi-objectif et des technique du multi-niveaux, abordés ci-dessous, peut traiter ces types de problèmes.

Le benchmark du transformateur de sécurité est utilisé pour tester ces nouvelles approches. Nous avons obtenu des résultats très encourageants qui sont présentés dans le chapitre 4.

2.4.3 Approche multi-niveaux

Actuellement, la méthode éléments finis (MEF) est couramment utilisée pour modéliser finement les machines électriques. Les modèles éléments finis bidimensionnel et tridimensionnel (EF 2D, 3D) “fins” sont considérés comme des prototypes virtuels. Cependant, ces modèles ont besoin souvent un temps de calcul important. Ainsi, l'application directe des méthodes d'optimisation sur ces modèles peut mener à un temps de calcul excessif : des jours, des semaines, voire des mois. Remplacer dans l'optimisation directe les modèles fins par des modèles simples qui les approximent semble une stratégie intéressante. Il existe deux types différents d'approximation. Si aucune information n'est à priori disponible, des approximations peuvent être obtenues par exemple par la méthode des plans d'expériences [CAL-01], [VIV-02]. Le modèle approché (surrogate) est alors une surface de réponse. Le deuxième type d'approximation nécessite l'utilisation simultanée d'un modèle simple en utilisant la technique de l'optimisation *multi-niveaux* appelée Space-Mapping (SM) [BAN-04]. Cette approche est d'autant plus pertinente que le modèle fin est très coûteux en temps de calcul comme par exemple, des modèles EF tridimensionnels, ou multi-physiques couplés. Elle a besoin des modèles “simple” mais très rapides. Ces modèles peuvent être des modèles analytiques utilisant des circuits équivalents, des modèles empiriques, des modèles éléments finis 2D avec un maillage très grossier, etc.

L'idée de la technique SM est d'aligner le modèle fin et le modèle simple afin d'accélérer le processus d'optimisation tout en conservant l'exactitude de la solution trouvée. Ainsi, le modèle fin n'est utilisé que pour améliorer itérativement le modèle simple. L'algorithme d'optimisation peut être de type déterministe ou stochastique puisqu'il utilise le modèle simple. Seules quelques évaluations du modèle fin sont faites pour atteindre l'optimum avec précision, ce qui permet de réduire nettement le temps d'optimisation. Un autre avantage de cette approche est de réduire l'influence du bruit numérique lié au changement de maillage. La convergence des algorithmes est ainsi améliorée.

- La technique d'optimisation “Space-Mapping” (SM) a été en premier proposée par [BAN-94] dans le domaine des hyperfréquences.
- L'algorithme le plus populaire, dit Aggressive Space-Mapping (ASM) proposé par [BAN-95] évite les simulations exigées dans [BAN-94] en exploitant chaque itération appelant le modèle fin. Chaque solution intermédiaire est trouvée par la méthode quasi-Newton.
- Une stratégie de région de confiance a été introduite dans l'algorithme ASM par [SON-99], afin d'améliorer la convergence de l'algorithme.

- [CHO-01] a appliqué en premier la technique SM (l’algorithme ASM) pour dimensionner des dispositifs électromagnétiques : un aimant avec entrefer et un moteur à aimant permanent intérieur en utilisant un modèle simple de circuit magnétique équivalent et un modèle fin EF 2D magnéto-statique.
- Dans [LEA-01], un principe de transformation pour des problèmes d’optimisation sous contraintes a été introduit dans l’algorithme ASM.
- [ENC-06] a proposé l’approche Output Polynomial Mapping (OPM) pour dimensionner un actionneur tubulaire à aimant permanent en alignant un modèle analytique fait par des circuits équivalents magnétique, thermique et un modèle fin EF 2D magnéto-thermique.
- Dans [ENC-07] un actionneur électromagnétique cylindrique de type voice-coil a été dimensionné en utilisant une variante de l’algorithme ASM appliqué au problème d’optimisation sous contraintes de [LEA-01]. Un modèle de type de circuit magnétique équivalent et un modèle fin EF 2D magnétique ont été utilisés.
- La thèse de [ECH-07] a examiné la méthode Space-Mapping et développé une nouvelle technique SM appelée Manifold-Mapping (MM) basée sur des méthodes de correction de défauts. Ces algorithmes d’optimisation sont appliqués au circuit magnétique avec entrefer, à un actionneur électromagnétique cylindrique de type voice-coil, à un actionneur sans noyau, etc.

Dans le cadre de ce travail de thèse, l’algorithme Agressive Space-Mapping avec la région de confiance appliqué au problème sous contraintes (TRASM) a été étudié en premier. Ensuite, nous avons développé un nouvel algorithme de type Output Space-Mapping (OSM) [BAN-03]. Cette approche consiste à créer une transformation alignant les réponses de deux modèles simple et fin au moyen des coefficients correctifs introduits dans le modèle simple.

Un travail en collaboration [TRA-07c] a également été mené afin de comparer et d’échanger des connaissances sur l’algorithme MM développé par [ECH-07] et le nôtre. Une comparaison de ces trois algorithmes : ASM, MM et OSM a été effectuée à l’aide du benchmark du transformateur de sécurité. Deux modèles thermo-magnéto-électriques modélisés du transformateur sont utilisés pour l’optimisation multi-niveaux : le modèle simple analytique avec l’hypothèse de Kapp et le modèle fin EF 3D avec le couplage faible magnéto-thermique. Les résultats trouvés sont intéressants. Ces algorithmes d’optimisation SM sont détaillés au paragraphe 3.4.

Cependant, les travaux de recherche actuels sur SM se restreignent aux problèmes d’optimisation à variables continues. De ce fait, nous proposons une nouvelle méthode qui combine l’algorithme BB avec les techniques SM qui permet de résoudre les problèmes discrets ou mixtes en utilisant des modèles éléments finis [TRA-09]. Les algorithmes sont présentés au paragraphe 3.4.7.

De même, un algorithme proposé combinant une méthode multi-objectif scalaire et une technique Space-Mapping (SM-MO) est détaillé au paragraphe 3.4.8 pour traiter les problèmes multi-objectif basés sur un modèle très lourd en temps de calcul.

2.4.4 Approche combinatoire multi-objectif multi-niveaux

À notre sens, l'enjeu de la conception optimale des machines électriques est de pouvoir résoudre des problèmes d'optimisation *multi-objectif* à variables *discrètes* ou *mixtes* sous *contraintes* basés sur des modèles multi-physiques *fins* et donc très coûteux en temps de calcul. Les méthodes proposées pour chacune de ces trois approches doivent pouvoir se combiner en algorithmes capables de résoudre efficacement un problème comportant toutes les difficultés mentionnées ci-dessus.

2.4.5 Éco-conception

Le développement durable est un des enjeux majeurs du 21^{ème} siècle, qui nécessite vraiment de revoir nos modes de production et de consommation, notamment la conception, le nouveau paradigme. Le respect de l'environnement s'impose à tous et se traduit de plus en plus comme sous forme de contraintes réglementaires. Le fait est que l'industrie est considérée comme un acteur clé à la résolution de ces problèmes. Les pressions sociétales et médiatiques sont telles que les entreprises se doivent désormais d'intégrer la composante environnementale dans leurs produits. Elle peut même s'avérer être un argument de vente.

Ainsi, les industriels électriques et électroniques sont concernés par trois directives européennes :

1. Directive RoHS 2002/95/CE (Restrictive of the use of Hazardous Substances) : restreint l'utilisation de 6 substances dangereuses dans les équipements électriques et électroniques (EEEs). Les substances concernées sont :
 - Le Plomb (Pb) : il est principalement utilisé dans les accumulateurs électriques (batteries) mais on le trouve aussi dans des plaques métalliques ou dans du verre pour protéger contre les rayons X.
 - Le Mercure (Hg) : il est notamment utilisé dans les lampes fluorescentes à vapeur de mercure ou dans des piles.
 - Le Cadmium (Cd) : on le trouve dans les accumulateurs électriques Ni-Cd ou comme revêtement de rivets, vis...
 - Le Chrome hexavalent
 - Les polybromobiphényles (PBB)
 - Les polybromodiphényléthers (PBDE)
2. Directive WEEE 2002/96/CE (Waste Electrical Electronic Equipment) : favorise le recyclage des EEEs et encourage les concepteurs à créer des produits facilement recyclables. Cette directive impose aux fabricants et aux importateurs d'EEEs de

prendre en charge les coûts de ramassage et de traitement des déchets d'équipement électriques et électroniques.

3. Directive EuP 2005/32/CE (Energy using Product) : adoptée par l'Union Européenne, les états membres ont obligation de transposer cette directive en loi nationale dans un délai de 2 ans. L'objectif de la directive est d'apporter des améliorations dans l'efficacité énergétique des produits consommant de l'énergie, d'un bout à l'autre de leur cycle de vie. Certains produits sont déjà visés mais la liste pourrait s'étendre.

Ces réglementations ne sont que le début d'une série qui s'inscrit dans une logique de sécurisation de notre développement qui se veut durable, s'efforçant "de répondre aux besoins présents, sans compromettre la capacité des générations futures".

Le principe de l'éco-conception consiste à intégrer cette composante "*environnement*" dès la phase de conception et de développement des produits, qu'il s'agisse de biens, de services ou de procédés. L'objectif de l'éco-conception est de réduire des impacts environnementaux négatifs des produits au long de leur cycle de vie, tout en préservant la qualité d'usage du produit ou en l'améliorant. Cette intégration repose sur une approche globale et multicritère de l'environnement et est fondée sur la prise en compte de toutes les étapes de l'Analyse du Cycle de Vie (ACV) des produits. L'ACV est une méthodologie rigoureuse réglementée par la norme ISO 14040 [ISO-06] qui évalue tous les impacts environnementaux.

Elle part du constat que tout produit est source d'impact. Aucun produit ne parcourt son cycle de vie sans :

- *Consommer* : par exemple, pour obtenir les matériaux, on consomme des ressources minérales, végétales ou animales, énergétiques, et/ou
- *Polluer* : on rejette par exemple des substances dans l'eau, l'air ou les sols : eaux usées, gaz d'échappements.

Ces rejets sont sources d'impacts sur l'environnement : épuisement des ressources naturelles, pollution de l'eau, de l'air, production de déchets...

L'éco-conception constitue un axe majeur de prévention ou de réduction à la source des impacts environnementaux. La force de ce domaine est la pluralité de son approche. La vision multi-critères considère toutes les étapes de l'ACV du produit (fabrication, distribution, utilisation, valorisation finale) de manière à éviter les déplacements de pollutions inhérents à telle ou telle alternative de conception, car toute modification des caractéristiques d'un produit a des répercussions sur l'ensemble de son ACV. L'éco-conception permet en outre de rechercher un compromis entre les contraintes techniques (faisabilité...), économiques (maîtrise des coûts...) et environnementales (impacts...), qui sont parfois plus inter-dépendantes qu'on peut le supposer. Ainsi, l'utilisation de telle matière va peut-être

réduire les coûts de prise en charge en fin de vie tout en minimisant l'impact sur l'environnement et conserver les caractéristiques techniques majeures. Nous nous sommes bien appropriés la notion de qualité, il semble possible de faire de même avec l'environnement.

Il existe plusieurs axes stratégiques en matière d'éco-conception :

- Choix de matériaux peu impactant
- Réduction de l'emploi de matières
- Emploi de techniques propres de production
- Optimisation du système de distribution
- Réduction des impacts de la phase d'utilisation
- Accroissement de la durée de vie du produit
- Optimisation des traitements de fin de vie
- Optimisation des fonctions de produits

Ces axes permettent de trouver des solutions visant à minimiser l'impact global d'un produit sur l'environnement. Ils sont ensuite à mettre en regard des contraintes techniques et économiques.

- Une synthèse complète sur des méthodes et des outils de la démarche d'éco-conception en entreprise a été réalisée dans la thèse de [JAN-00].
- [DEB-07] a proposé une approche pour l'éco-conception des machines électriques consistant à évaluer le cycle de vie global qui est la somme de l'ACV d'énergie (proportionnel à la masse des matériaux) et les pertes (dépendantes du profil de charges). Cette approche a été appliquée à un transformateur électrique monophasé dans [DEB-07], ensuite à une machine asynchrone rotor à cage dans [DEB-08]. Cependant, cette approche ne permet pas d'évaluer et d'afficher tous les impacts environnementaux de l'ACV d'un produit.
- [LAR-08] représente la démarche d'intégration de l'éco-conception dans le département de transport et distribution électrique d'Areva. Cette démarche se base également sur la méthodologie de l'ACV. Les 16 impacts environnementaux du cycle de vie d'un dispositif électrique sont évalués par des bases de données du logiciel SimaPro®. À partir de l'analyse des impacts, une action est mise afin de reconcevoir le dispositif éco-conçu. Un exemple du poste électrique à isolation gazeuse de 220 kV est montré dans [LAR-08].

Dans cette thèse, nous proposons deux approches d'éco-conception intégrées dans la démarche de conception optimale de machines électriques. Ces deux approches sont inversées. La première consiste à évaluer tous les impacts environnementaux du cycle de vie d'un dispositif électrique, ensuite dégager le critère électromagnétique le plus lié aux impacts et optimiser ce critère. Cette approche est classique, et très utilisée en industrie. La deuxième est de construire un modèle multidisciplinaire comportant un modèle d'impact

et des modèles électrique, magnétique, thermique et de les intégrer dans l'optimisation multi-objectif. Certains objectifs sont liés au critère économique et les autres se rapportent aux impacts environnementaux ou aux contraintes techniques. Les 11 indicateurs d'impact sont basés sur la méthodologie de l'ACV définis par le logiciel EIME® [EIM]. Ces deux approches sont représentées au paragraphe 4.4, dans le chapitre 4. Elles sont appliquées au benchmark du transformateur de sécurité au paragraphe 4.5.4.

2.5 Conclusion

Cette première partie a permis de poser la problématique de la conception optimale des dispositifs électromagnétiques. Dans l'optique d'améliorer la qualité et la productivité de l'activité de conception, une démarche systématique et générale est proposée. Elle est composée de quatre grandes étapes dont les deux premières ont été détaillées : l'analyse du cahier des charges et la formulation d'un problème d'optimisation. Deux exemples de dispositif électromagnétique les ont illustrés. A l'issue des deux premières étapes, une formulation mathématique est élaborée selon l'expertise du concepteur, les outils de modélisation et les techniques d'optimisation employées. Les méthodes d'optimisation intervenant dans l'étape de résolution du problème ont été présentées et commentées.

Deux dispositifs représentatifs du domaine du génie électrique sont retenus pour illustrer les problèmes de conception rencontrés en électrotechnique. Il s'agit du choix structurel du dispositif électromagnétique, du problème combinatoire qui se pose lorsque les variables de conception sont issues des standards de catalogues industrielles et du niveau de modélisation des dispositifs requis par les algorithmes d'optimisation.

Le premier dispositif étudié est un moteur à courant continu, aimant permanent, commutation électronique et bobinage concentré utilisé pour propulser un véhicule solaire. Il s'agit d'en maximiser le rendement tout en respectant les contraintes sur le poids, l'encombrement et le courant démagnétisant.

Le deuxième dispositif est un transformateur de sécurité. Le problème étudié est à variables discrètes dont les combinaisons forment 246 078 000 configurations possibles. Le problème mono-objectif est de minimiser la masse des matériaux actifs : cuivre et fer. Le problème multi-objectif a deux objectifs conflictuels : minimiser la masse et maximiser le rendement du transformateur ou minimiser la masse et minimiser des impacts environnementaux. Plusieurs modélisations multi-physiques de ce dispositif avec des niveaux de précisions différents comme l'un *simple* (analytique) et l'autre *fin* (EF 3D) sont considérées.

En dernier lieu, de nouveaux enjeux dans la conception optimale ont été abordés. Il s'agit de difficultés dans l'étape de résolution du problème dans laquelle des méthodes d'optimisation choisies dépendent forcément de la nature du problème de conception : combinatoire, multi-objectif, modélisation des machines très coûteux en temps de calcul. Il

s'agit également de la nécessité d'intégration l'éco-conception dans le processus de conception des machines électriques. Il est difficile d'avoir une méthode qui est capable de résoudre tous les types de problème de conception. Un outil d'aide à conception comportant plusieurs méthodes et techniques d'optimisation et leurs combinaisons permettrait d'atteindre ces enjeux.

Le chapitre suivant se propose de répondre à la question "Quelles sont-elle les méthodes d'optimisation capables de résoudre ces enjeux en électromagnétique?". Il détaille les méthodes d'optimisation pour chaque type de problème.

Chapitre 3

Méthodes d'Optimisation Discrète, Multi-Objectif et Multi-Niveaux

Sommaire

3.1 Introduction	47
3.2 Méthode globale Branch-and-Bound	48
3.2.1 Technique d'énumération exhaustive avec calcul parallèle	49
3.2.2 Méthode SQP et technique de recherche au voisinage	51
3.2.3 Méthode Branch-and-Bound spécifique	57
3.2.4 Conclusion sur les méthodes d'optimisation discrète	64
3.3 Méthodes d'Optimisation Discrète Multi-Objectif	66
3.3.1 Problème d'optimisation discrète multi-objectif	66
3.3.2 Solutions au sens de Pareto du problème discret multi-objectif	67
3.3.3 Combinaison de la méthode d'agrégation pondérée et la méthode Branch-and-Bound (WS-BB)	70
3.3.4 Combinaison de la méthode de ϵ -contraintes et la méthode Branch- and-Bound (ϵ -contraintes-BB)	73
3.3.5 Comparaison des fronts de Pareto discret et continu	76
3.3.6 Conclusion sur les méthodes d'optimisation discrète multi-objectif	78
3.4 Technique du Space-Mapping	79
3.4.1 Concept général	79
3.4.2 Agressive Space-Mapping	82
3.4.3 Agressive Space-Mapping appliqué aux problèmes contraints	84
3.4.4 Sensibilité de l'extraction de paramètres	86
3.4.5 Output Space-Mapping	88
3.4.6 Manifold-Mapping	90
3.4.7 Combinaison de Space-Mapping et Branch-and-Bound	92
3.4.8 Accélération de la construction du front de Pareto par la technique de SM	95
3.4.9 Conclusion sur la technique du Space-Mapping	98
3.5 Conclusion	100

3.1 Introduction

Dans la première partie, la démarche de conception optimale des machines électriques a été exposée. Elle comprend quatre étapes : analyse du cahier des charges, formulation et modélisation du problème, résolution du problème et exploitation des résultats. Les nouveaux enjeux ont été explicités au cours de ces quatre étapes. Deux exemples représentatifs ont été présentés. Des méthodes originales et bien adaptées à ces nouveaux enjeux sont maintenant abordées, mises en oeuvre et illustrées sur des cas analytiques simples.

La méthode globale exacte Branch-and-Bound est développée et comparée avec d'autres méthodes telles que la technique d'énumération exhaustive, méthode de recherche voisinée pour *l'approche discrète et/ou mixte*. Le choix de la méthode déterministe Branch-and-Bound par rapport aux méthodes stochastiques est dû à la nature exacte de celle-ci qui permet d'obtenir l'optimum global exact en un temps de calculs raisonnable. Ceci permet de combiner cette méthode avec d'autres techniques d'optimisation pour traiter les problèmes multidisciplinaires. Un problème test simple comportant une fonction objectif, deux contraintes, deux variables discrètes, chacune ayant 5 valeurs est utilisé pour montrer clairement le fonctionnement de l'algorithme Branch-and-Bound.

Pour *l'approche multi-objectif discrète*, les deux techniques scalaires les plus connues sont choisies : la méthode d'agrégation pondérée et la méthode ϵ -contraintes. Elles sont combinées à la méthode Branch-and-Bound pour résoudre les problèmes à variables discrètes et/ou mixtes afin de fournir les fronts optimaux au sens de Pareto. L'ajout d'une fonction objectif dans le problème test précédent fournit un problème multi-objectif à variables continues et/ou discrètes.

En ce qui concerne *l'approche multi-niveaux*, la technique conventionnelle Space-Mapping est d'abord abordée pour souligner son intérêt. Ensuite trois algorithmes différents "Aggressive Space-Mapping", "Output Space-Mapping" et "Manifold-Mapping" sont présentés en détail. Ces algorithmes permettent l'application des techniques d'optimisation en utilisant des modèles précis, par exemple les modèles EF.

Pour résoudre des problèmes discrets avec un modèle fin, très lourd en temps de calcul (modèles EF 3D, et/ou avec couplage multi-physique), de nouveaux algorithmes combinant la technique Space-Mapping et la méthode Branch-and-Bound sont proposés.

Concernant l'approche multi-objectif avec le modèle fin, une méthode adaptant la technique Space-Mapping à la construction du front de Pareto est proposée.

Toutes ces méthodes originales d'optimisation présentées dans ce chapitre sont ensuite utilisées et comparées sur le benchmark du transformateur de sécurité dans le chapitre 4 pour montrer leurs efficacités.

3.2 Méthode globale Branch-and-Bound

Dans la conception des machines électriques, notamment lors du choix structurel et de matériaux, les paramètres sont majoritairement discrets et parfois non classables. Il en est de même du choix des dimensions du circuit magnétique dans des standards. Les problèmes de conception des machines électriques sont donc généralement à variables mixtes, discrètes et continues. Le courant d'alimentation, l'induction acceptable, les dimensions géométriques, etc. constituent des variables continues.

Les méthodes de résolution des problèmes combinatoires ont besoin d'un concept différent par rapport aux méthodes d'optimisation conventionnelle continue. Dérivées et recherche linéaire ne peuvent pas s'appliquer directement aux problèmes à variables discrètes et mixtes. Ainsi, le temps de calculs de l'optimisation discrète et mixte est beaucoup plus important que celui de l'optimisation continue.

Parmi les méthodes utilisées, la méthode appelée Branch-and-Bound (BB) est une des plus efficaces pour des problèmes à variables discrètes ou mixtes. Cela est dû à sa nature exacte qui permet d'obtenir l'optimum global en un temps de calculs raisonnable.

Avant d'étudier en détail la méthode globale Branch-and-Bound, discutons d'abord des deux techniques combinatoires les plus connues. La première est la technique d'évaluation exhaustive. La deuxième est la méthode de recherche au voisinage. Un problème test a été créé pour bien illustrer ces trois approches. Il comprend une fonction objectif quadratique f , deux variables discrètes x_1, x_2 , une contrainte non-linéaire g_1 et une contrainte linéaire g_2 . Chaque variable peut prendre 5 valeurs discrètes qui mènent à 25 combinaisons possibles. Le problème est exprimé comme :

Problème test :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \text{avec} \quad X = \{x_1, x_2\} \in S \subset \mathbb{R}^2 \\ \quad \quad x_1 = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\} \\ \quad \quad x_2 = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\} \\ \text{soumis à} \\ g_1(x_1, x_2) : 10x_1 + 9x_2^3 - 27 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) : 2x_1 + 5x_2 - 8.3 \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La figure 3.1 représente graphiquement le problème. Les 25 carrés sur le graphique représentent les 25 combinaisons possibles entre les deux variables discrètes. Les cercles de centre (3, 3) représentent les isovaleurs de la fonction objectif quadratique f . L'intersection de deux fonctions contraintes $g_1 \cap g_2$ donne deux espaces de recherche distincts faisable et non-faisable.

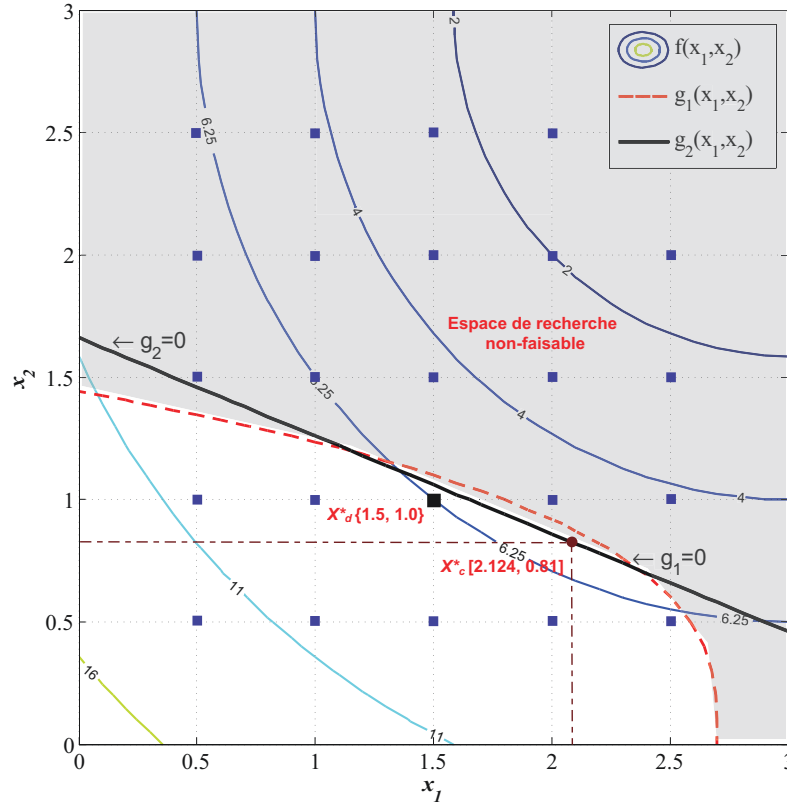


FIG. 3.1 – Solution graphique du problème test 3.1

3.2.1 Technique d'énumération exhaustive avec calcul parallèle

La première méthode d'optimisation combinatoire la plus simple est la technique d'énumération exhaustive. Comme son nom l'indique, cette méthode calcule toutes les combinaisons possibles du problème combinatoire. Le nombre total d'évaluations n_e est :

$$n_e = \prod_{i=1}^{n_d} p_i \quad (3.2)$$

où n_d est le nombre de variables, p_i est le nombre de valeurs discrètes pour la $i^{\text{ième}}$ variable.

En appliquant la technique d'évaluation exhaustive au problème test 3.1, l'ensemble des solutions des 25 combinaisons possibles sont présentées en tableau 3.1. Il y a 17 solutions non-faisables c'est-à-dire comportant une ou deux contraintes non respectées. Après avoir triées les 8 solutions faisables, l'optimum global en est déduit au point $X_d^* = X_d^g = \{1.5, 1.0\}$ avec $f^* = f^g = 6.25$. Les deux contraintes sont satisfaites (voir la figure 3.1 et le tableau 3.1).

La méthode est facile à programmer. Elle assure de trouver l'optimum global, mais le temps de calculs peut être rédhibitoire lorsque le problème comporte de nombreuses variables discrètes, ayant elles-mêmes de nombreuses valeurs possibles ou lorsque le modèle utilisé a besoin d'un temps d'évaluation important, comme par exemple, les modèles EF.

Pour réduire le temps de calculs prohibitif de cette approche, le calcul distribué sur plusieurs ordinateurs peut être utilisé. En effet, tous les calculs étant indépendant, le

TAB. 3.1 – Solutions de toutes les combinaisons possibles

Variables discrètes	$\{x_2\}$				
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
0.5	$f = 12.5$	$f = 10.25$	non-faisable	non-faisable	non-faisable
	$g_1 < 0$	$g_1 < 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$
	$g_2 < 0$	$g_2 < 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$
1.0	$f = 10.25$	$f = 8.0$	non-faisable	non-faisable	non-faisable
	$g_1 < 0$	$g_1 < 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$
	$g_2 < 0$	$g_2 < 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$
$\{x_1\}$ 1.5	$f = 8.5$	$f^* = 6.25$	non-faisable	non-faisable	non-faisable
	$g_1 < 0$	$g_1 < 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$
	$g_2 < 0$	$g_2 < 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$
2.0	$f = 7.25$	non-faisable	non-faisable	non-faisable	non-faisable
	$g_1 < 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$
	$g_2 < 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$
2.5	$f = 6.5$	non-faisable	non-faisable	non-faisable	non-faisable
	$g_1 < 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$	$g_1 > 0$
	$g_2 < 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$

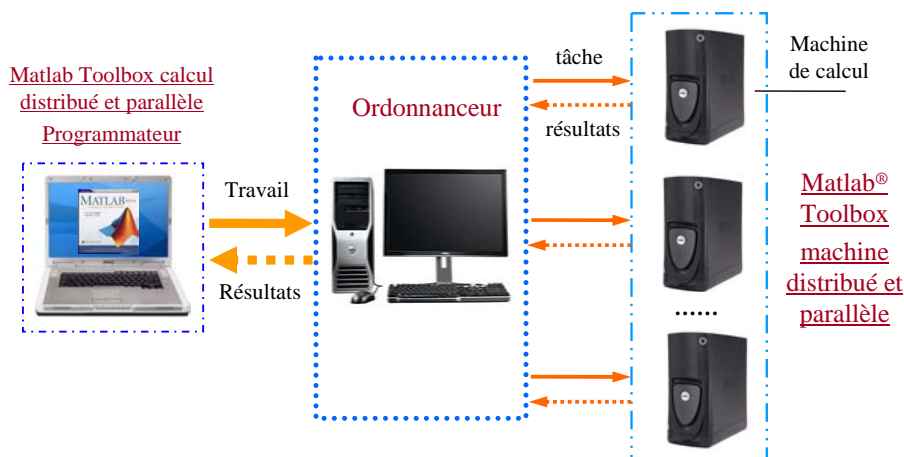


FIG. 3.2 – Calcul distribué et parallèle

temps de calcul est alors divisé par le nombre de processeurs utilisés. La figure 3.2 montre l'utilisation de “Matlab distributed computing toolbox” pour la programmation et des “schedulers” associés à plusieurs “workers” (noyau de calcul) en réseau pour effectuer les calculs et rapatrier les résultats.

3.2.2 Méthode SQP et technique de recherche au voisinage

Une méthode typique pour les problèmes combinatoires appelée “*méthode de recherche au voisinage*” est de résoudre en premier lieu le problème d’optimisation en considérant les variables continues. À partir de cet optimum, la solution discrète est déterminée en calculant et comparant toutes les configurations permises voisines de ce point. Cette approche est utilisable seulement lorsque le nombre de variables discrètes est faible car seulement deux solutions par variables sont calculées, c’est-à-dire 2^n solutions au total. De plus, il n’y a aucune assurance que cette approche peut atteindre la solution globale, surtout pour les problèmes d’optimisation sous contraintes.

Au paragraphe 2.2.5, nous avons présenté brièvement les méthodes d’optimisation les mieux adaptées au problèmes en électrotechnique. Parmi ces méthodes d’optimisation continues, la méthode SQP (Sequential Quadratic Programming) est réputée comme une des plus efficaces pour les problèmes sous contraintes non-linéaires. Elle est détaillée ci-dessous.

3.2.2.1 Méthode SQP

En général, il existe deux types de méthodes pour traiter des problèmes avec contraintes : *indirectes* et *directes*. Les méthodes *indirectes* consistent à transformer un problème d’optimisation avec contraintes en un problème sans contraintes en utilisant des fonctions de pénalités extérieur et intérieur. Ces méthodes de pénalités sont souvent insuffisantes et peuvent être avantageusement remplacées par des méthodes *directes* plus performantes. Celles-ci consistent à prendre en compte les contraintes lors de la vérification de la condition de Kuhn-Tucker (KT) en minimisant la fonction Lagrangienne associée.

La méthode de programmation quadratique successive SQP (Sequential Quadratic Programming) [NOC-99]-[VEN-02] est une méthode directe. Pour atteindre l’optimum, le principe de l’algorithme est de déterminer la direction de recherche $R^{(q)}$ nécessaire à chaque itération et le coefficient d’ajustement de pas α_q afin de générer une nouvelle itération :

$$X^{(q+1)} = X^{(q)} + \alpha_q \cdot R^{(q)} \quad (3.3)$$

où $X^{(q)}$ est le vecteur des variables d’optimisation au point q . Pour trouver le vecteur de direction de recherche $R^{(q)}$, l’algorithme SQP doit à chaque itération, résoudre un problème quadratique qui dérive du développement en séries de Taylor au second ordre de la fonction

objectif :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{minimiser } \tilde{f}(R^{(a)}) = f(X^{(a)}) + \nabla f(X^{(a)})^T \cdot R^{(a)} + \frac{1}{2}(R^{(a)})^T \cdot \nabla^2 f(X^{(a)}) \cdot R^{(a)} \\
 \text{avec } R^{(a)} = \{\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\
 \varsigma_i^{lb} \leq \varsigma_i \leq \varsigma_i^{ub} \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{array} \right\} \\
 \text{soumis à} \\
 \tilde{g}_j(R^{(a)}) : g_j(X^{(a)}) + \nabla g_j(X^{(a)})^T \cdot R^{(a)} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \\
 \tilde{h}_k(R^{(a)}) : h_k(X^{(a)}) + \nabla h_k(X^{(a)})^T \cdot R^{(a)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m
 \end{array} \quad (3.4)$$

où f , g et h sont respectivement la fonction objectif, les contraintes d'inégalité et les contraintes d'égalités comme exposé en 2.2.3.2. $\nabla f(X^{(a)})^T$, $\nabla g_j(X^{(a)})^T$ et $\nabla h_k(X^{(a)})^T$ représentent la transposée du gradient de la fonction objectif et des contraintes au point $X^{(a)}$. $\nabla^2 f(X^{(a)})$ est une matrice de dimension $n \times n$, dérivée seconde de la fonction objectif au point $X^{(a)}$, appelée également la matrice Hessienne :

$$H = \nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Il faut alors résoudre le problème quadratique contraint en utilisant la fonction Lagrangienne :

$$\mathfrak{L}(R^{(a)}, \lambda_1, \dots, \lambda_l, \beta_1, \dots, \beta_m) = \tilde{f}(R^{(a)}) + \sum_{j=1}^l \lambda_j \cdot \tilde{g}_j(R^{(a)}) + \sum_{k=1}^m \beta_k \cdot \tilde{h}_k(R^{(a)}) \quad (3.6)$$

où λ_j , $j = 1, \dots, l$ et β_k , $k = 1, \dots, m$ sont les multiplicateurs Lagrangiens. Ces multiplicateurs et les composantes du vecteur de direction de recherche sont calculés en résolvant les $n + l + m$ équations de Kuhn-Tucker :

$$\nabla \tilde{f}(R^{(a)}) + \sum_{j=1}^l \lambda_j \cdot \nabla \tilde{g}_j(R^{(a)}) + \sum_{k=1}^m \beta_k \cdot \nabla \tilde{h}_k(R^{(a)}) = 0 \quad (3.7a)$$

$$\lambda_j \cdot \tilde{g}_j(R^{(a)}) = 0 \quad (3.7b)$$

$$\tilde{h}_k(R^{(a)}) = 0 \quad (3.7c)$$

Les n équations sont issues de la dérivation de la fonction Lagrangienne en (3.7a). Les l équations sont trouvées en examinant les 2^l cas possibles de l'équation (3.7b). Enfin, les m équations sont directement obtenues par les contraintes d'égalité en (3.7c).

Une fois que la direction de recherche $R^{(q)}$ est déterminée, il est nécessaire de calculer le pas d'avancement α_q (de l'équation (3.3)). Il est obtenu par une méthode de recherche linéaire afin d'obtenir une diminution suffisante de la fonction mérite [VEN-02] :

$$\text{Minimiser } \phi(X^{(q+1)}) = f(X^{(q+1)}) + \sum_{j=1}^l \lambda_j^{(q)} \cdot \max[g_j(X^{(q+1)}), 0] + \sum_{k=1}^m |\beta_k^{(q)} \cdot h_k(X^{(q+1)})| \quad (3.8)$$

Le calcul de la matrice Hessienne est lourd et parfois difficile pour un problème complexe comportant plusieurs variables. Le calcul direct de la matrice Hessienne peut être remplacé par la métrique d'approximation de la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [NOC-99]. La métrique p est déterminée en se basant sur la fonction Lagrangienne :

$$p = \nabla f(X^{(q+1)}) + \sum_{j=1}^l \lambda_j^{(q)} \cdot \nabla g_j(X^{(q+1)}) + \sum_{k=1}^m \beta_k^{(q)} \cdot \nabla h_k(X^{(q+1)}) - \left(\nabla f(X^{(q)}) + \sum_{j=1}^l \lambda_j^{(q)} \cdot \nabla g_j(X^{(q)}) + \sum_{k=1}^m \beta_k^{(q)} \cdot \nabla h_k(X^{(q)}) \right) \quad (3.9)$$

La matrice Hessienne est alors approximée par :

$$[H^{(q+1)}] = [H^{(q)}] + \frac{p \cdot p^T}{p^T \cdot \Delta X^{(q)}} - \frac{[H^{(q)}]^T \cdot [H^{(q)}]}{(\Delta X^{(q)})^T \cdot [H^{(q)}] \cdot \Delta X^{(q)}} \quad (3.10)$$

La méthode SQP est performante à condition que le problème ne soit pas trop grand, que les fonctions et les gradients puissent être évalués avec une précision suffisamment élevée et que le problème soit lisse et mis à l'échelle. En effet, les variables d'optimisation et les contraintes dans les problèmes de conception des machines électriques ont souvent des ordres de grandeurs très différents. Par exemple, les sections des fils émaillés sont très petites (en 10^{-6}), tandis que l'impact environnemental "effet de serre" est très grand (en 10^6). Si ces variables ne sont pas réduites à la même échelle, la variation de la variable la plus grande n'aura aucun effet sur la réponse, donc celle-ci sera ignorée dans le processus d'optimisation. Il est donc indispensable de faire une mise à l'échelle des variables et fonctions pour que les algorithmes d'optimisation puissent se dérouler efficacement.

Pour les variables d'entrées x , la mise à l'échelle es fait avec $\tilde{x} \in [0 \ 1]$:

$$\tilde{x} = \frac{x - x^{lb}}{x^{ub} - x^{lb}} \quad (3.11)$$

Pour les contraintes et les fonctions objectif en cas multi-objectif, la mise à l'échelle se fait avec $\tilde{f} \in [-\infty \ 1]$:

$$\tilde{f} = \frac{f}{f^{ub}} \quad (3.12)$$

Lorsque les espaces de recherche du problème sont très grands, il est nécessaire d'introduire une région de confiance dans l'algorithme afin de renforcer la robustesse de la méthode SQP [NOC-99]. Puisque la méthode SQP se base sur les calculs de gradients, elle dépend évidemment des points initiaux choisis. Cet inconvénient peut être contourné en testant plusieurs points initiaux au hasard afin d'augmenter la probabilité d'obtention d'un optimum global.

Application au problème test (3.1) à variables continues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \text{avec} \quad X = \{x_1, x_2\} \in S \subset \mathbb{R}^2 \\ \quad \quad \quad 0.5 \leq x_1 \leq 2.5 \\ \quad \quad \quad 0.5 \leq x_2 \leq 2.5 \\ \text{soumis à} \\ g_1(x_1, x_2) : 10x_1 + 9x_2^3 - 27 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) : 2x_1 + 5x_2 - 8.3 \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

De par la simplicité du problème, la matrice Hessienne est directement calculée. Les deux variables ont les mêmes ordres de grandeurs. Ainsi, elles ne nécessitent pas de mise à l'échelle. Le critère d'arrêt pour la variation des variables et le respect des contraintes est mis à 10^{-3} .

Itération 1 : Donner les valeurs initiales $X^{(1)} = [0.5, 0.5]$

$$\begin{aligned} f(X^{(1)}) &= 12.5; & \nabla f(X^{(1)}) &= \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}; & H^{(1)} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ g_1(X^{(1)}) &= -20.875; & \nabla g_1(X^{(1)}) &= \begin{bmatrix} 10.00 \\ 6.75 \end{bmatrix}; & g_2(X^{(1)}) &= -4.8; & \nabla g_2(X^{(1)}) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculer la direction de recherche en transformant ce problème sous forme quadratique selon les équations (3.4) :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varsigma_1, \varsigma_2) &= 12.50 - 5\varsigma_1 - 5\varsigma_2 + \varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 \\ \tilde{g}_1(\varsigma_1, \varsigma_2) &= 6.125 + 10\varsigma_1 + 6.75\varsigma_2 \\ \tilde{g}_2(\varsigma_1, \varsigma_2) &= -4.8 + 2\varsigma_1 + 5\varsigma_2 \end{aligned}$$

En utilisant la fonction Lagrangienne en (3.6) pour traiter les contraintes et en appliquant ensuite la condition Kuhn-Tucker en (3.7), les composantes du vecteur de direction de recherche et les multiplicateurs Lagrangiens sont obtenus en résolvant le système d'équa-

tions linéaires suivant :

$$\begin{aligned} -5 + 2\varsigma_1 + 10\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -5 + 2\varsigma_2 + 6.75\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1.(6.125 + 10\varsigma_1 + 6.75\varsigma_2) &= 0 \\ \lambda_2.(-4.8 + 2\varsigma_1 + 5\varsigma_2) &= 0 \end{aligned}$$

Il y a $2^2 = 4$ cas possibles pour les deux dernières équations ($\lambda_j.g_j = 0$). Parmi ces 4 cas, seul le cas où $\lambda_1 = 0, g_1 < 0; \lambda_2 > 0, g_2 = 0$ a une solution, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= 1.624; \quad \varsigma_2 = 0.31; \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0.876 \\ \tilde{g}_1(\varsigma_1, \varsigma_2) &= -0.977; \quad \tilde{g}_2(\varsigma_1, \varsigma_2) = -2.10^{-3} \end{aligned}$$

Le pas de recherche est trouvé selon (3.8) en minimisant la fonction :

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_1) &= (-2.5 + 1.624.\alpha_1)^2 + (-2.5 + 0.31.\alpha_1)^2 - 4.2048 + 4.203048.\alpha_1 \\ \Leftrightarrow \frac{d\phi(\alpha_1)}{d\alpha_1} &= -5.466952 + 5.466952.\alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = 1$. Nous trouvons une solution selon (3.3) :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{x}_1 &= 2.124; \quad \tilde{x}_2 = 0.81; \quad \Rightarrow X^{(2)} = [2.124, 0.81] \\ f(X^{(2)}) &= 5.563; \quad g_1(X^{(2)}) = -0.977; \quad g_2(X^{(2)}) = -2.10^{-3} \end{aligned}$$

Itération 2 : Mettre à jour $X^{(2)} = [2.124, 0.81]$

$$\begin{aligned} f(X^{(2)}) &= 5.563; \quad \nabla f(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} -1.752 \\ -4.380 \end{bmatrix}; \quad H^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ g_1(X^{(2)}) &= -0.977; \quad \nabla g_1(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 10.000 \\ 17.715 \end{bmatrix}; \quad g_2(X^{(2)}) = -2.10^{-3}; \quad \nabla g_2(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De la même façon qu'à l'itération 1, on trouve :

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= 1.379.10^{-4}; \quad \varsigma_2 = 3.448.10^{-4}; \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0.876 \\ \tilde{g}_1(\varsigma_1, \varsigma_2) &= -0.977; \quad \tilde{g}_2(\varsigma_1, \varsigma_2) = -2.10^{-7}; \quad \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, la nouvelle solution est :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= 2.124137; \quad \tilde{x}_2 = 0.810344; \quad \Rightarrow X^{(3)} = [2.124137, 0.810344] \\ f(X^{(3)}) &= 5.562; \quad g_1(X^{(3)}) = -0.977; \quad g_2(X^{(3)}) = -2.10^{-7} \end{aligned}$$

La solution de la 3^{ième} itération ne change pas par rapport à celle de la 2^{ième} itération ($\Delta X < 10^{-3}$). En outre, la deuxième contrainte d'inégalité est active ($g_2 = -2.10^{-7}$).

Ainsi, la solution trouvée $X^* = X^{(3)} = [2.124137, 0.810344]$ est l'optimum global (voir la figure 3.3) avec la fonction objectif $f^* = 5.562$ et la contrainte g_2 active. Bien que le point initial choisi soit loin de l'optimum, l'algorithme SQP converge très rapidement car le problème est quadratique. Deux itérations sont seulement nécessaires pour atteindre la solution optimale en raison de la simplicité du problème et l'efficacité de cette méthode.

3.2.2.2 Méthode de recherche au voisinage

L'idée de la méthode de recherche au voisinage est d'ajuster la solution optimale continue aux valeurs discrètes les plus proches pour trouver l'optimum discret. La figure 3.3 montre graphiquement le déroulement de cette technique combinatoire.

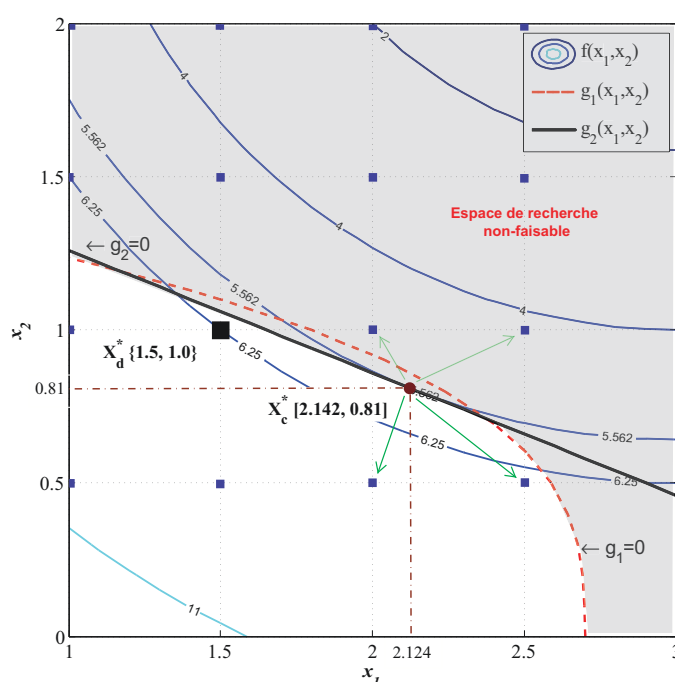


FIG. 3.3 – Recherche au voisinage à partir de l'optimum continu sur un graphique réduit

L'optimum continu est obtenu par la méthode SQP, au point $X_c^* = [2.124, 0.81]$ avec $f_c^* = 5.562$ et la contrainte g_2 est active. Autour de ce point, il y a $2^2 = 4$ possibilités : $\{2.0, 0.5\}$, $\{2.0, 1.0\}$, $\{2.5, 0.5\}$, $\{2.5, 1.0\}$. Cependant, en raison des contraintes, seulement deux points sont faisables : $\{2.0, 0.5\}$ et $\{2.5, 0.5\}$ en figure 3.3. Le tableau 3.1 donne respectivement les solutions $f = 7.25$ et $f = 6.5$. Selon la méthode de recherche au voisinage, la solution discrète est donc obtenue à $X_d^* = \{2.5, 0.5\}$ avec $f^* = 6.5$. Ce point est éloigné de la solution globale ($X_d^g = \{1.5, 1.0\}$ avec $f_d^g = 6.25$) trouvée par la technique d'énumération exhaustive en tableau 3.1. Il est sous-optimum.

La distance euclidienne entre les deux solutions optimales est calculée par :

$$\xi = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i^c - v_i^d)^2} \quad (3.14)$$

où v désigne la valeur de chaque variable, n est le nombre de variables. Les exposants c et d désignent respectivement les valeurs continues et discrètes optimales.

La distance euclidienne entre l'optimum continu [2.214, 0.81] et l'optimum discret {1.5, 1.0} est grande, égale à 23% de la diagonale de l'espace de recherche, ce qui explique la raison pour laquelle l'approche de recherche au voisinage ne trouve pas l'optimum vrai. C'est l'inconvénient majeur de cette méthode. Lorsque l'optimum continu est loin de l'optimum discret, la méthode de recherche au voisinage est dupée. En outre, elle a besoin d'un nombre d'évaluations important lorsque le problème comporte de nombreuses variables.

Les deux précédentes approches sont simples. L'une est capable d'obtenir l'optimum global, mais le temps de calculs varie exponentiellement avec le nombre de variables. L'autre est plus rapide, mais pas fiable. Ainsi, la méthode appelée Branch-and-Bound détaillée ci-dessous est préférable.

3.2.3 Méthode Branch-and-Bound spécifique

L'énumération exhaustive ou complète n'est utile que pour les problèmes à variables discrètes comportant un faible nombre de valeurs car le temps de calculs est alors raisonnable. Utiliser l'énumération *partielle* ou *sélectionnée* pour arriver à la solution optimale des problèmes combinatoires pourrait apporter des avantages nécessaires et intéressants pour traiter des problèmes de grande taille. La méthode exacte, appelée Branch-and-Bound (BB) est un des algorithmes qui utilisent l'énumération implicite par séparation et évaluation progressive. Elle a été développée en premier pour les problèmes combinatoires linéaires par [LAN-60]. La méthode BB consiste d'abord à décomposer le problème en plusieurs sous-problèmes et ensuite à énumérer des solutions de manière intelligente, c'est à dire en utilisant certaines propriétés du problème détaillées par la suite. Cette technique permet d'éliminer des solutions partielles qui ne mènent pas à la solution optimale. De ce fait, on arrive souvent à obtenir la solution recherchée avec des temps de calculs jugés satisfaisants.

L'algorithme BB utilise une exploration de l'arbre représentant les solutions partielles des sous-problèmes. La structure arborescente utilise des noeuds et des branches pour représenter le chemin vers la solution optimisée. Afin d'expliquer la méthode BB, les termes suivants doivent être définis.

Sous-problèmes représentés par les noeuds

Un sous-problème consiste à fixer certaines variables discrètes tandis que les autres variables sont considérées continues et libres à déterminer. Chaque variable continue prend ses valeurs dans un intervalle. Un sous-problème à variables continues est résolu par une méthode d'optimisation continue, comme par exemple la méthode SQP ou une autre méthode présentée dans la section 2.2.5.

Solutions partielles faisables ou noeuds actifs

Une solution partielle est trouvée en résolvant le sous-problème correspondant par une méthode d'optimisation continue. Elle est représentée par un noeud de l'arbre. Une solution faisable ou noeud actif peut être un optimum global ou local.

Solutions partielles non-faisables ou noeuds non-actifs

Un sous-problème est un noeud non-actif s'il n'a pas de solution faisable ou si l'algorithme ne converge pas.

Noeud racine

L'algorithme BB procède par une analyse descendante le long de l'arborescence. Il commence au noeud racine où toutes les variables sont continues. Ce noeud est donc une solution optimale continue, donc a priori, la valeur de la fonction objectif la plus petite connue.

Niveaux de l'arborescence

Un niveau de l'arborescence correspond uniquement à des sous-problèmes où une même variable discrète prend toutes ses valeurs possibles tandis que les autres variables sont libres. On considère que le noeud racine est le niveau 0. Ainsi, le nombre de niveaux d'un problème combinatoire est égal au nombre de variables discrètes + 1 (le niveau 0 du noeud racine).

- Niveau 0 (noeud racine) : toutes variables sont continues (n variables).
- Niveau 1 : la première variable discrète prend toutes les valeurs dans son ensemble fini. Les autres variables sont continues ($n - 1$ variables).
- Niveau 2 : la première variable discrète est fixée et la seconde prend toutes les valeurs dans son ensemble fini. Les autres variables sont continues ($n - 2$ variables).
- Niveau t : les $t - 1$ premières variables discrètes sont fixées et la $t^{\text{ième}}$ variable discrète prend toutes les valeurs dans son ensemble fini. Les autres variables sont continues ($n - t$ variables).
- Niveau n (dernier niveau de l'arborescence) : toutes les variables sont discrètes. La dernière prend toutes les valeurs dans son ensemble fini et les autres sont fixées.

Un sous-problème peut donc être également l'ensemble des solutions des valeurs discrètes pour le dernier niveau n de l'arborescence.

Bien évidemment, les valeurs de la fonction objectif d'un niveau de l'arborescence sont toujours plus grandes ou égales à celle du niveau précédent puisque l'on restreint l'espace de recherche en passant du niveau t au niveau $t + 1$. Le dernier niveau de l'arborescence contient uniquement les solutions discrètes du vecteur d'optimisation.

Branches de l'arborescence

Une branche connecte deux noeuds de deux niveaux différents.

Successeurs ou noeuds promoteurs

Le successeur est un noeud qui poursuit la décomposition de l'arborescence. Un noeud successeur est une solution partielle, qui a priori est le minimum de l'ensemble des noeuds

du même niveau. Il peut être remplacé lorsque le successeur du niveau suivant est moins intéressant qu'une ou plusieurs autres solutions partielles de son niveau. Dans ce cas, il existe une ou des solutions potentielles.

Solutions potentielles ou noeuds potentiels

Une solution potentielle est une solution partielle qui est plus intéressante qu'un successeur du niveau inférieur. Selon la nature du problème, l'arborescence de la méthode BB peut présenter une ou plusieurs solutions potentielles. Une de ces solutions potentielles au moins deviendra donc un successeur à explorer, tant que l'évaluation n'est parvenue au niveau n .

Solutions discrètes

Une solution discrète est une combinaison de valeurs discrètes du dernier niveau n de l'arborescence. Une solution discrète est faisable ou non-faisable si elle ne satisfait pas toutes les contraintes.

L'algorithme BB fonctionne en se basant sur les trois principes essentiels :

- un principe de séparation,
- un principe d'évaluation,
- une stratégie de développement de l'arborescence.

3.2.3.1 Principe de séparation

Considérons le problème d'optimisation combinatoire simplifié :

$$\min_{X \in D} f(X) \quad (3.15)$$

avec D , un ensemble fini.

Le principe de séparation consiste à décomposer l'ensemble fini D en k sous-ensembles D_1, \dots, D_k auxquels un sous-problème d'optimisation peut être associé et tels que :

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k \quad (3.16)$$

Ainsi, résoudre le problème d'optimisation combinatoire sur l'ensemble D revient à résoudre les k problèmes d'optimisation sur des ensembles plus petits où la solution peut et doit être trouvée plus rapidement.

3.2.3.2 Principe d'évaluation

Il y a deux situations d'évaluation d'un sous-problème. La première consiste à résoudre un sous-problème où une ou plusieurs variables discrètes sont fixées et les autres sont continues et à déterminer. Le noeud racine et les noeuds partiels correspondent à cette situation. Les méthodes d'optimisation continue sont utilisables pour trouver les solutions

de ces sous-problèmes. La deuxième situation se résume à évaluer des sous-problèmes dont toutes les variables sont discrètes au dernier niveau de l'arborescence.

3.2.3.3 Stratégie de développement de l'arborescence

Pour atteindre la solution optimale recherchée, l'algorithme BB construit une arborescence qui représente les solutions partielles, les successeurs, les solutions discrètes, etc. au moyen de noeuds et branches.

L'algorithme commence au noeud racine. Il décompose les premiers sous-problèmes à partir de ce noeud racine. Ces noeuds appartiennent au deuxième niveau. Un successeur à ce niveau sera déterminé en comparant les solutions partielles de ces noeuds. Il est utilisé pour poursuivre la décomposition de l'arborescence pour le niveau suivant. Cette procédure de séparation et d'évaluation est répétée jusqu'au dernier niveau où toutes les solutions sont discrètes. Un optimum est alors proposé.

Pour garantir son unicité, une stratégie de développement de l'arborescence est introduite dans l'algorithme BB. C'est-à-dire que cet optimum obtenu doit être comparé aux autres solutions partielles des niveaux supérieurs :

- S'il existe une solution potentielle, le noeud correspondant est désigné comme un successeur pour redécomposer l'arborescence qui trouvera un nouvel optimum au dernier niveau.
- S'il existe plusieurs solutions potentielles d'un même niveau, une comparaison entre ces solutions potentielles sera réalisée pour déterminer un nouveau successeur qui explorera l'arbre pour atteindre la solution recherchée discrète. Les autres solutions potentielles sont gardées. Elles sont utilisées pour comparer à la solution trouvée afin de vérifier leur état potentiel. Cette procédure est répétée jusqu'à l'épuisement de toutes les solutions potentielles.
- S'il existe plusieurs solutions potentielles sur des niveaux différents, le niveau supérieur est prioritaire pour la décomposition de l'arborescence.

Le temps d'optimisation est donc plus long en raison de l'augmentation du nombre de décomposition des sous-problèmes, donc l'augmentation du nombre d'évaluations. Cependant, cette stratégie de développement de l'arborescence de la méthode BB évite de perdre les solutions potentielles et ainsi assure toujours l'obtention de la solution globale exacte.

Application de la méthode BB au problème test

Pour illustrer le déroulement de l'algorithme BB, il est appliqué au problème test 3.1 à 2 variables discrètes dont chacune possède 5 valeurs. Puisque le problème a deux variables, l'arborescence possède trois niveaux. Chaque sous-problème à variables continues est résolu par la méthode SQP. Les noeuds sont numérotés selon l'ordre de décomposition de l'arborescence.

La figure 3.4 représente la première décomposition arborescente de l'algorithme BB sur le problème test. Les informations affichées sur chaque noeud sont respectivement les résultats de la solution optimale, de la fonction objectif, et des contraintes correspondantes.

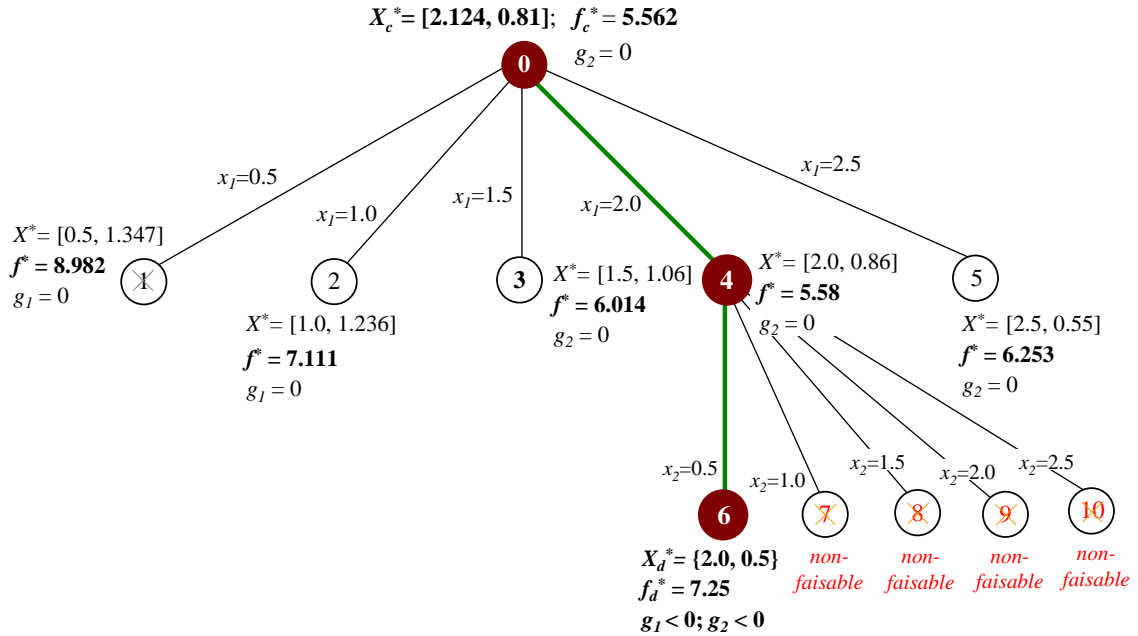


FIG. 3.4 – Première décomposition arborescente de BB, obtenir un optimum local

L'algorithme BB démarre par le noeud racine 0 où les variables x_1 et x_2 sont considérées comme continues. La solution optimale trouvée par l'algorithme SQP est $X_c^* = [2.124, 0.81]$ avec $f^* = 5.562$. La contrainte g_2 est active.

À partir du noeud racine, on génère autant de sous-problèmes qu'il y a de valeurs possibles pour la variable $x_1 \in \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\}$, la variable $x_2 \in [0.5, 2.5]$ étant relaxée, i.e. prise comme continue. Ainsi le deuxième niveau se décompose en cinq noeuds partiels, numérotés de 1 à 5. Leurs solutions optimales partielles sont affichées aux 5 noeuds en figure 3.4. Le successeur est donc le noeud 4 qui est le minimum : $X^* = [2.0, 0.86]$ avec $f^* = 5.58$ et la contrainte g_2 est active. À partir de ce noeud, la discrétisation de la variable discrète $x_2 \in \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\}$ conduit à 5 nouveaux sous-problèmes dont les solutions discrètes sont directement calculées.

Nous sommes au dernier niveau possible. Seule la solution discrète au noeud 6 est faisable, les autres noeuds sont non-faisables et donc supprimés irrévocablement parce qu'ils se trouvent dans l'espace de recherche non-faisable (figure 3.1). La solution trouvée est $X_d^* = \{2.0, 0.5\}$ avec $f_d^* = 7.25$ après 11 évaluations. Cependant, cette solution n'est pas l'optimum global exact parce qu'il existe des solutions potentielles : les noeuds 2, 3, 5 du premier niveau. Le noeud 1 est définitivement abandonné puisque la valeur de la fonction objectif est supérieure à celle du noeud 6. Le tableau 3.2 montre les solutions optimales de chaque niveau de l'arbre pour la première décomposition de l'algorithme.

TAB. 3.2 – Solutions optimales de chaque niveau de la première décomposition de BB

Niveaux	Noeud	x_1	x_2	f^*	g_1	g_2
Niveau 0	0	[2.124]	[0.810]	5.562	0.970	0.0
Niveau 1	4	{2.000}	[0.860]	5.580	-1.275	0.0
Niveau 2	6	{2.000}	{0.500}	7.250	-5.875	-1.8

Maintenant l'algorithme BB revient au niveau 1, un nouveau successeur est désigné au noeud 3 car la valeur de la fonction objectif y est plus petite que celles des noeuds 2 et 5. L'algorithme reprend alors la décomposition de l'arborescence à partir de ce successeur. La figure 3.5 représente la deuxième décomposition arborescente de l'algorithme BB.

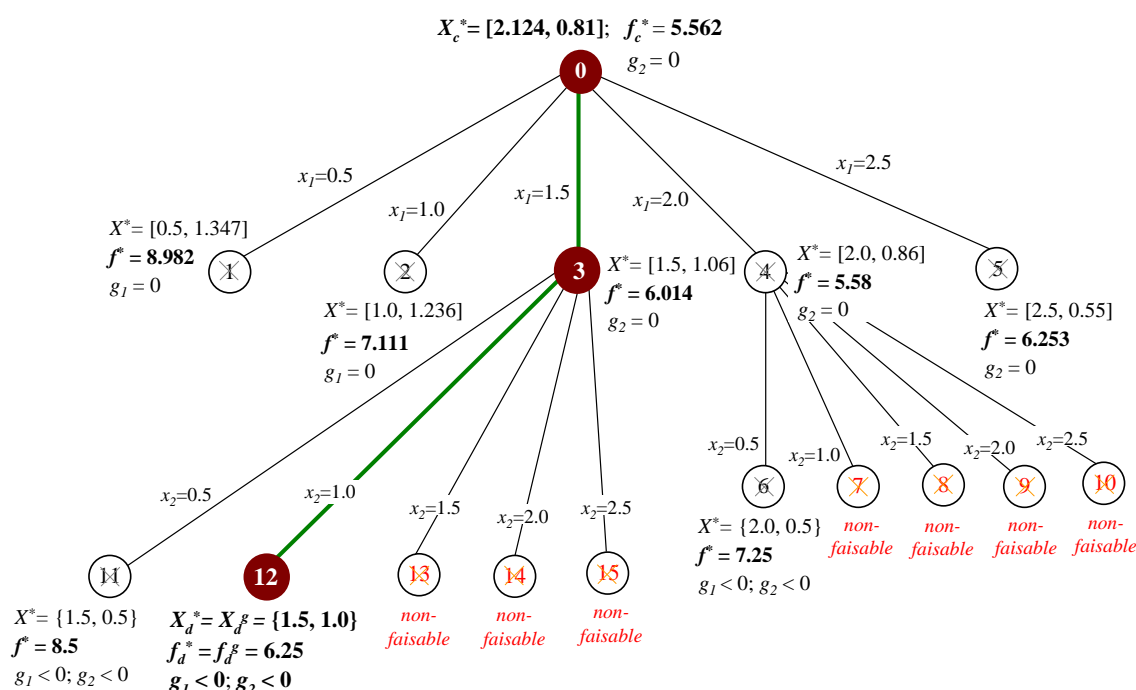


FIG. 3.5 – Deuxième décomposition arborescente de BB, obtenir l'optimum global

Il y a aussi 5 noeuds explorés issus de ce noeud 3 dont seuls 2 noeuds, 11 et 12, sont faisables. Les autres noeuds sont non-faisable et sont donc supprimés. Parmi les deux noeuds faisables, seule la solution au noeud 12 est retenue $X_d^* = \{1.5, 1.0\}$ avec $f_d^* = 6.25$. Le noeud terminal 11 est également éliminé. Cette solution est plus intéressante que la solution discrète au noeud 6 issu du successeur 4. Alors, les noeuds 6, 4 sont éliminés. Puisque la solution discrète du noeud 12 est meilleure que celles des noeuds potentiels 2, et 5, les noeuds 2 et 5 sont donc abandonnés. L'algorithme BB s'arrête car il n'existe plus de solutions potentielles. La solution optimale globale exacte du problème est donc atteinte. Elle est identique à celle trouvée par la technique d'énumération exhaustive.

16 sous-problèmes ont été évalués pour arriver à la solution globale recherchée en raison

TAB. 3.3 – Solutions optimales de chaque niveau de la deuxième décomposition de BB

Niveaux	Noeud	x_1	x_2	f^*	g_1	g_2
Niveau 0	0	[2.124]	[0.810]	5.562	0.970	0.0
Niveau 1	4	{2.000}	{0.860}	5.580	-1.275	0.0
Niveau 1	3	{1.500}	[1.060]	6.104	-1.281	0.0
Niveau 2	12	{1.500}	{1.000}	6.250	-3.000	-0.3

de la propriété du problème test (car il existe plusieurs solutions potentielles). Lorsque le nombre de variables discrètes est grand et que chaque variable possède de nombreuses valeurs, l'algorithme BB accroît son avantage en terme de temps de calcul tout en conservant la solution globale exacte.

3.2.3.4 Implémentation de l'algorithme BB

Algorithme Branch-and-Bound

1. Établir et résoudre le problème du noeud racine où toutes les variables sont continues.
 2. Au niveau 1, développer l'arborescence par la décomposition du problème combinatoire en sous-problèmes en parcourant toutes les valeurs possibles de la variable discrète x_1 dans son ensemble fini $x_1 \in \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$.
Résoudre les sous-problèmes. Supprimer les solutions non-faisables.
Déterminer le successeur de ce niveau pour continuer l'arborescence.
 3. Pour la variable x_i , répéter l'étape 2 jusqu'au dernier niveau n de l'arborescence où toutes les variables sont discrètes.
Calculer ces solutions discrètes pour en déduire une solution optimale.
 4. Vérifier l'unicité de la solution trouvée en recherchant des solutions potentielles à tous les niveaux, en commençant par le niveau le plus élevé.
S'il existe des solutions potentielles, déterminer à nouveau un successeur de ce niveau et redécomposer l'arborescence.
Lorsqu'il n'existe plus de solutions potentielles, éliminer toutes les solutions partielles.
La solution trouvée est alors l'optimum global exact.
-

3.2.3.5 Application aux problèmes à variables mixtes

Puisque la méthode Branch-and-Bound fonctionne en se basant sur le principe de séparation et d'évaluation, elle est donc tout autant capable de traiter les problèmes d'optimisation à variables mixtes (continues et discrètes). De fait, le problème test 3.1 est à variables mixtes, si l'on considère que la deuxième variable x_2 est continue dans l'intervalle $[0.5, 2.5]$.

En appliquant la méthode Branch-and-Bound, une seule décomposition arborescente suffit comme montrée en figure 3.6. L'algorithme obtient l'optimum au noeud 4 avec $x_1 = 2.0$, $x_2 = 0.86$, $f^* = 5.58$ et la contrainte g_2 est active. Le problème comporte seulement une variable discrète, et l'arborescence ne possède que deux niveaux.

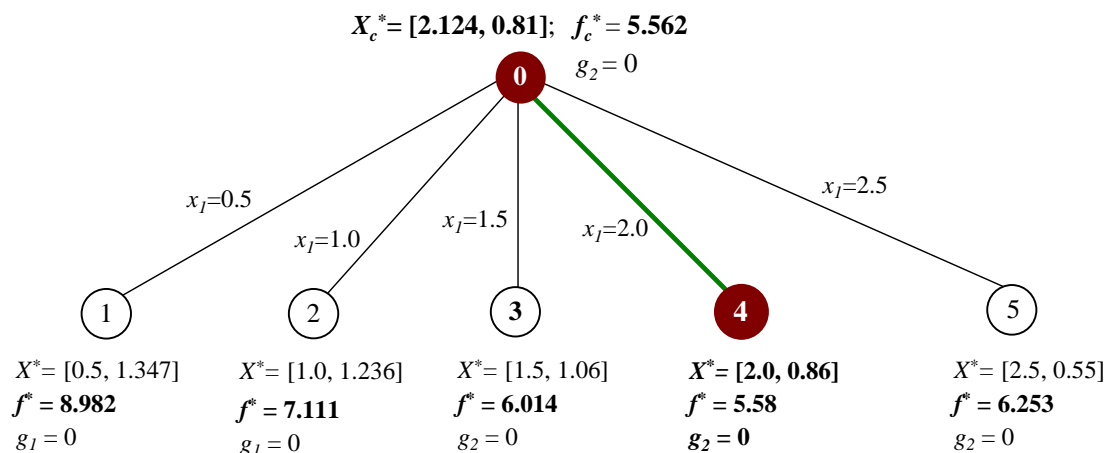


FIG. 3.6 – Décomposition arborescente de BB pour le problème test à variables mixtes

3.2.4 Conclusion sur les méthodes d'optimisation discrète

Parmi les approches déterministes d'optimisation discrète, la méthode Branch-and-Bound se distingue par sa capacité à obtenir l'optimum global exact en un temps de calcul raisonnable. Elle a été expliquée en détaillant le problème test 3.1. Le principe de l'algorithme se base sur la séparation, l'évaluation et le développement de l'arborescence de de façon à arriver à la solution optimale recherchée. Il est déterministe et fournit l'optimum global exact à condition que toutes les solutions partielles actives de l'arborescence soient globales. Ces dernières peuvent être résolues par de nombreuses méthodes efficaces telles que : la méthodes SQP, la méthode simplexe, les algorithmes génétiques, les algorithmes méta-heuristiques, etc. L'algorithme déterministe SQP est très efficace pour des problèmes de petite et moyenne tailles. Cependant, cette méthode dépend des points initiaux, donc parfois tombe dans un l'optimum local. Afin de garantir au mieux le caractère global de la solution obtenue, il est intéressant de lancer l'algorithme avec des points initiaux de départ multiples.

L'algorithme BB sera appliqué au problème d'optimisation combinatoire d'un transformateur de sécurité présenté en section 2.3.2, les résultats seront détaillés au chapitre 4, à la section 4.5.1.

Puisque l'évaluation des sous-problèmes se fait en considérant les variables locales comme continues, cette approche peut également traiter les problèmes à variables mixtes (discrètes, de catégorie et continues), rencontrés dans la conception des machines électriques, comme par exemple le problème de conception d'un moteur à courant continu sans balais, illustré à la section 2.3.1.

3.3 Méthodes d'Optimisation Discrète Multi-Objectif

Les problèmes d'optimisation discrète issus du travail de conception sont souvent multi-objectif car soumis aux critères antagonistes. Résoudre de tels problèmes est le but de l'optimisation discrète multi-objectif.

3.3.1 Problème d'optimisation discrète multi-objectif

Un problème d'optimisation multi-objectif à variables discrètes est généralement exprimé comme suit :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{minimiser } F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_p(X)) \\
 \text{avec } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\
 \quad \quad \quad x_i \in D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq}\}, \quad i = 1, \dots, n_d \\
 \text{soumis à} \\
 \quad \quad \quad g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \\
 \quad \quad \quad h_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, m
 \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

où $F(X)$ désigne le vecteur des p objectifs ($p \geq 2$) à minimiser. n_d est le nombre de variables discrètes. D_i dénote l'ensemble fini des valeurs discrètes pour $i^{\text{ième}}$ variable ; i_q est le nombre de valeurs discrètes admissibles ; d_{ik} est la $k^{\text{ième}}$ valeur discrète possible pour la $i^{\text{ième}}$ variable.

Puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{R}^p , contrairement à l'optimisation mono-objectif, un problème multi-objectif n'a pas de solution unique, un concept proposé est l'optimalité au sens de *Pareto*.

Pour l'illustrer, un cas test simple est explicité ci-dessous. Ce problème test comprend deux fonctions objectif quadratiques f_1, f_2 ; deux contraintes d'inégalité linéaires g_1, g_2 et deux variables discrètes x_1, x_2 dont les ensembles finis de valeurs possibles sont comme le problème test discret mono-objectif (3.1).

La figure 3.7 donne la solution graphique de ce problème test. Elle est tracée dans le plan des deux variables d'optimisation x_1, x_2 . Seulement 20 solutions discrètes sont faisables, les 5 autres ne respectent pas les contraintes. L'optimum pour le problème mono-objectif avec f_1 est le point $X^* = \{2.5, 2.5\}$ où $f_1 = 0.25$ et $f_2 = 10.25$. L'optimum pour le problème mono-objectif avec f_2 est le point $X^* = \{0.5, 1.0\}$ où $f_2 = 0.5$ et $f_1 = 8.5$. Ce problème test multi-objectif sera également résolu dans le cas continu pour tester et comparer les méthodes d'optimisation multi-objectif.

Problème test discret multi-objectif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad F(X) = (f_1(X), f_2(X)) \\ \text{avec} \quad f_1(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2.5)^2 \\ \quad \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 0.5)^2 \\ \text{et} \quad X = \{x_1, x_2\} \in S \subset \mathbb{R}^2 \\ \quad \quad x_1 = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\} \\ \quad \quad x_2 = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\} \\ \\ \text{soumis à} \\ g_1(x_1, x_2) : -x_1 - 3x_2 + 3 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) : -4x_1 + x_2 + 8 \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

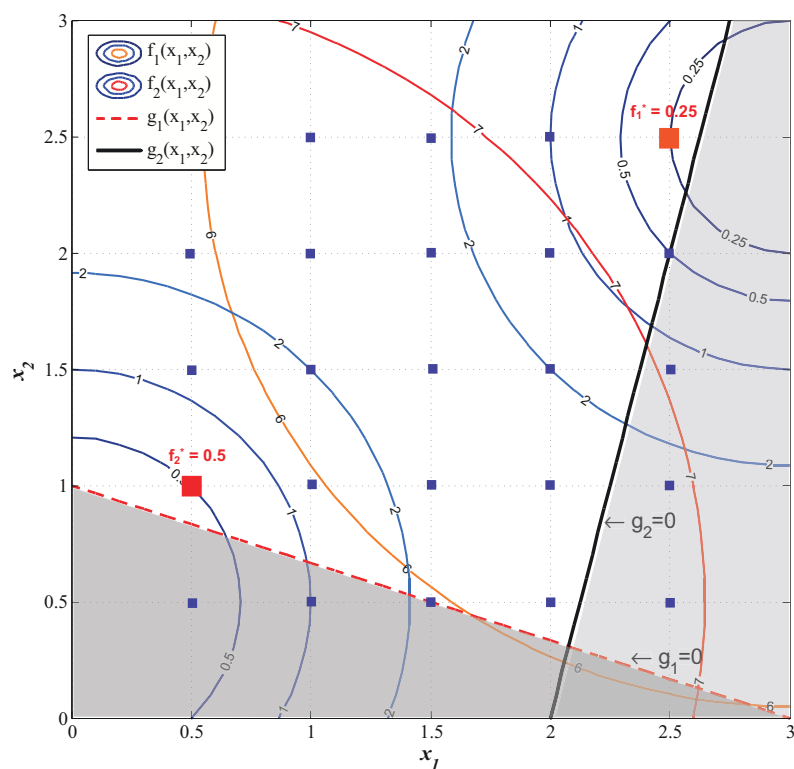


FIG. 3.7 – Solution graphique du problème test discret bi-objectif

3.3.2 Solutions au sens de Pareto du problème discret multi-objectif

3.3.2.1 Notions de dominances et d'optimalité

Soit le problème multi-objectif (3.17), alors on introduit les définitions suivantes :

Dominance :

Un vecteur de solution X_1 domine un vecteur de solution X_2 (ou $X_1 \succ X_2$ en notation

sympolique) si et seulement si :

$$\forall k \in [1, p] \Rightarrow f_k(X_1) \leq f_k(X_2) \text{ et } \exists j \in [1, p] \Rightarrow f_j(X_1) < f_j(X_2) \quad (3.19)$$

Solution Pareto optimale :

Un vecteur de solution réalisable $X^* \in S$ est Pareto optimale si et seulement s'il n'existe pas de vecteur de solution $X \in S$ telle que X domine X^* .

L'ensemble des solutions Pareto optimales forme le *front de Pareto*, aucune amélioration ne peut être faite sur un objectif sans dégrader l'autre objectif, comme illustré en figure 3.8.

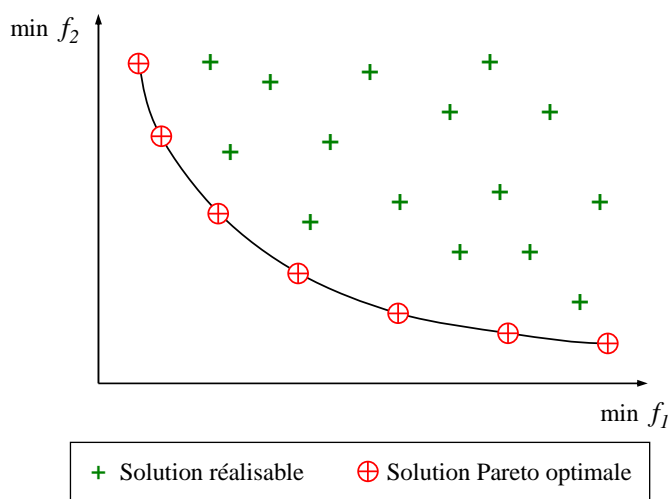


FIG. 3.8 – Illustration d'un front optimal de Pareto

Front de Pareto convexe/concave

Un front de Pareto peut, en cas extrêmes, avoir la frontière totalement convexe ou concave (figure 3.9 gauche et milieu). Dans les problèmes pratiques, un front de Pareto contient également des régions convexes et concaves comme illustrée la figure 3.9 droite.

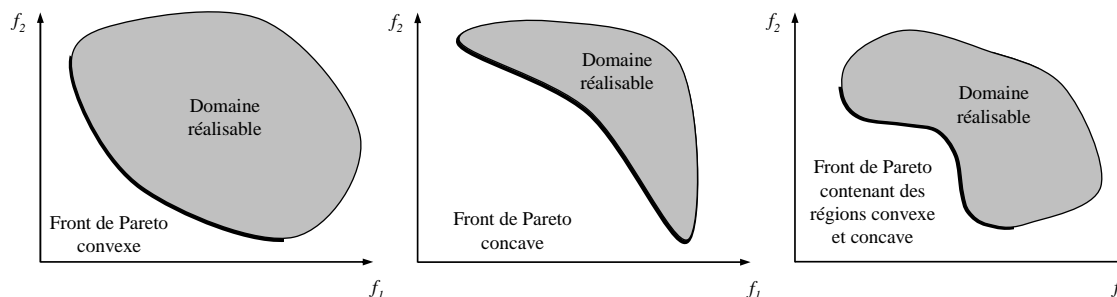


FIG. 3.9 – Fronts de Pareto convexe ou/et concave

3.3.2.2 Dominance au sens de Geoffrion

Les problèmes d'optimisation discrète présentent des difficultés particulières qui ont amenées à la notion de dominance au sens de Geoffrion [EHR-05]. Les solutions optimales obtenues par ce type de dominance sont nommées les solutions Pareto optimales supportées. La dominance au sens de Geoffrion est définie comme suivante.

Définition : la dominance au sens de Geoffrion

Une solution $X^* \in S$ est appelée solution Pareto optimale supportée si :

- elle est Pareto optimale,
- il existe un nombre $M > 0$ tel que $\forall i$ et $\forall x \in S$ vérifiant $f_i(X) < f_i(X^*)$, il existe un index j tel que $f_j(X^*) < f_j(X)$ et :

$$\frac{f_i(X^*) - f_i(X)}{f_j(X) - f_j(X^*)} \leq M$$

Ainsi, un théorème relatif à la méthode de pondération des fonctions objectifs utilisant cette notion de dominance permet d'obtenir des solutions Pareto supportées.

Théorème de Geoffrion (1968) [EHR-05] :

Soit la méthode d'agrégation des fonctions objectif suivantes :

$$f_{eq}(X) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot f_i(X)$$

Supposons $\forall i = 1, \dots, p, \lambda_i \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

Si X^* est une solution optimale obtenue en utilisant la méthode d'agrégation ci-dessus, alors cette solution est aussi Pareto optimale supportée.

3.3.2.3 Caractérisation du front de Pareto dans le cas de problème discret

Solutions supportées/non-supportées

Pour les problèmes à variables discrètes, un front de Pareto optimal comporte plusieurs solutions de meilleurs compromis. Ces solutions composant ce front de Pareto sont caractérisées selon deux différents types : les solutions supportées et les solutions non-supportées.

- Les solutions supportées se trouvent sur l'enveloppe convexe en figure 3.10. Selon le théorème de Geoffrion, chacune de ces solutions peut être obtenue en optimisant une pondération linéaire des fonctions objectifs.
- Les solutions non-supportées sont les solutions Pareto optimales, mais elles ne se trouvent pas sur l'enveloppe convexe. Aucune de ces solutions ne peut être trouvée en optimisant une pondération linéaire des objectifs selon le corollaire du théorème de Geoffrion.

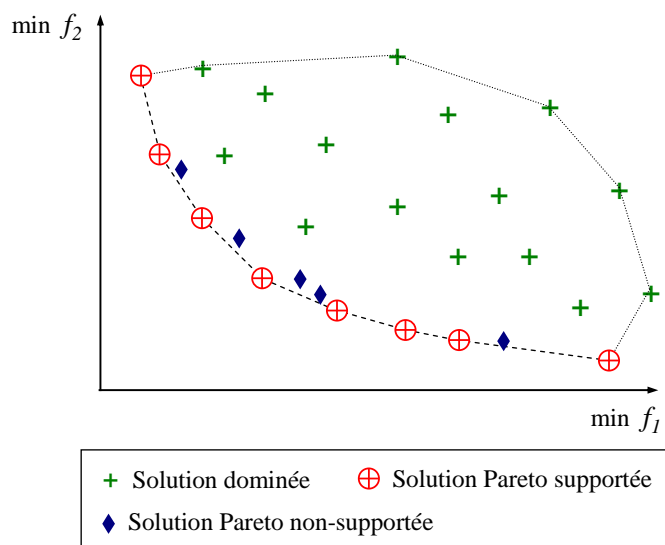


FIG. 3.10 – Solutions Pareto supportées et solutions Pareto non-supportées

Jusqu'à l'heure actuelle, seule la méthode stochastique Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm-II (NSGA-II) développé par [DEB-02] a été appliquée au domaine de conception optimale des machines électriques pour traiter les problèmes multi-objectif à variables discrètes ou mixtes [REG-05], [LEB-07]. Mais NSGA-II est une approche stochastique. Elle ne fournit pas le front de Pareto avec certitude. Comme la méthode Branch-and-Bound, proposée au paragraphe 3.2, est capable de trouver un optimum global exact, il est intéressant de l'employer aussi à la résolution de problème multi-objectif discret de façon à obtenir une méthodologie de résolution déterministe. Les méthodes scalaires de calcul de front de Pareto comme la méthode d'agrégation pondérée [EHR-05] et la méthode ϵ -contraintes [EHR-03], sont particulièrement attractives pour être combinées à l'algorithme BB.

3.3.3 Combinaison de la méthode d'agrégation pondérée et la méthode Branch-and-Bound (WS-BB)

3.3.3.1 Méthode d'agrégation pondérée

La méthode d'agrégation pondérée WS (Weighted Sum) [EHR-05] consiste à transformer le problème d'optimisation multi-objectif en un problème mono-objectif en combinant linéairement les différents objectifs.

$$\text{Minimiser } f_{eq}(X) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot \frac{f_i(X)}{nf_i} \quad (3.20)$$

où p est le nombre de fonctions objectif, nf_i désigne le facteur de normalisation correspondant à la fonction objectif $f_i(x)$. Les coefficients de pondération respectent la relation

suivante $\lambda_i \geq 0$ pour tous les $i \in \{1, \dots, p\}$ et :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad (3.21)$$

Pour chaque valeur du coefficient de pondération λ_i , le problème d'optimisation discrète est résolu par la méthode Branch-and-Bound. La figure 3.11 illustre la démarche de l'obtention des solutions Pareto supportées pour un problème bi-objectif par l'algorithme WS-BB.

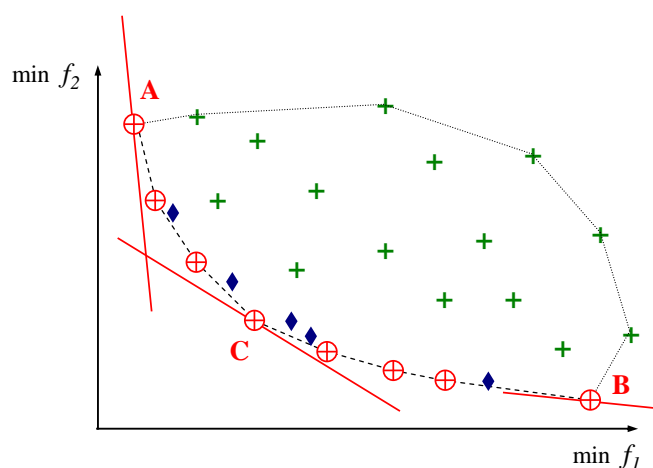


FIG. 3.11 – Illustration de l'obtention des solutions Pareto supportées par l'algorithme WS-BB

3.3.3.2 WS-BB appliqué au problème test

En appliquant cette méthode au problème test (3.18) qui comporte deux fonctions objectif, le problème bi-objectif deviendra le problème mono-objectif suivant :

$$\text{Minimiser } f_{eq}(X) = \lambda \cdot f_1(X) + (1 - \lambda) \cdot f_2(X)$$

Puisque les ordres de grandeur des deux fonctions objectifs f_1 et f_2 sont identiques, il n'est pas nécessaire de les normaliser. Minimiser la fonction objectif à variables discrètes en satisfaisant les contraintes revient à chercher une valeur de constante C , la plus petite possible dans l'expression :

$$f_2(X) = -\frac{\lambda}{(1 - \lambda)} \cdot f_1(X) + C$$

Cette expression en fonction du coefficient de pondération λ équivaut donc à une droite dans le plan f_1, f_2 (figure 3.11). En variant la valeur de ce coefficient de pondération

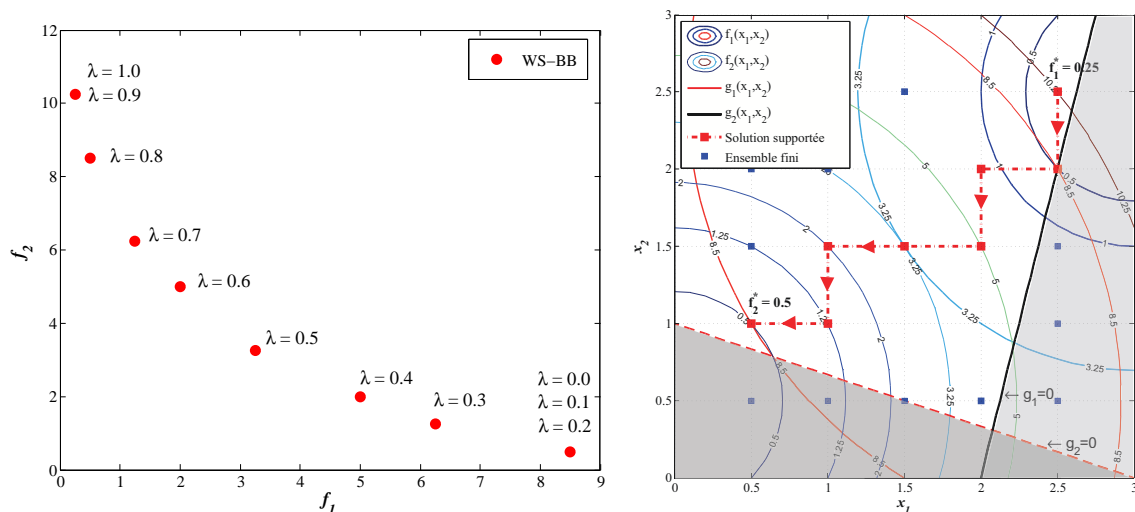


FIG. 3.12 – Solutions Pareto optimales supportées trouvées par l'algorithme WS-BB dans le plan (f_1, f_2) (gauche) et dans le plan (x_1, x_2) (droite)

$\lambda \in \{0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0\}$, un front de Pareto comportant les solutions supportées est obtenu en figure 3.12 gauche.

Ces solutions Pareto supportées dans le plan des deux variables discrètes x_1, x_2 sont représentées en figure 3.12 droite. Puisque c'est un problème discret, le front de Pareto n'est pas continu.

Les valeurs des variables optimales X^* , de deux fonctions objectif $f_1(X^*)$, $f_2(X^*)$ et de la fonction mono-objectif équivalente $f_{eq}(X^*)$ pour chaque valeur du coefficient de pondération λ sont récapitulées dans le tableau 3.4.

TAB. 3.4 – Tableau récapitulatif obtenu par la méthode de pondération des objectifs-BB

λ	X^*	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$	$f_{eq}(X^*)$
1.0	{2.5, 2.5}	0.25	10.25	0.25
0.9	{2.5, 2.5}	0.25	10.25	1.25
0.8	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	2.25
0.7	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	2.75
0.6	{2.0, 1.5}	2.00	5.00	3.20
0.5	{1.5, 1.5}	3.25	3.25	3.25
0.4	{1.0, 1.5}	5.00	2.00	3.20
0.3	{1.0, 1.0}	6.25	1.25	2.75
0.2	{0.5, 1.0}	8.50	0.50	2.10
0.1	{0.5, 1.0}	8.50	0.50	1.30
0.0	{0.5, 1.0}	8.50	0.50	0.50

La méthode d'agrégation pondérée est simple, elle permet de déterminer facilement les deux extrémités du front de Pareto qui correspondent à $\lambda = 1.0$ ($f_1 = 0.25$ minimale, $f_2 = 10.25$ maximale) et $\lambda = 0.0$ ($f_2 = 0.5$ minimale, $f_1 = 8.5$ maximale) comme montré en figure 3.12. Cependant, cette méthode obtient un front de Pareto incomplet, autrement dit, elle n'aboutit qu'aux solutions Pareto optimales supportées. Elles sont tracées dans le plan des deux fonctions objectifs f_1, f_2 en figure 3.12 gauche. 8 solutions supportées sur 11 points de calcul choisis sont obtenues car il y a des solutions redondantes pour les valeurs $\lambda = \{1.0, 0.9\}$ et $\lambda = \{0.2, 0.1, 0.0\}$. C'est un inconvénient de cette approche.

3.3.4 Combinaison de la méthode de ϵ -contraintes et la méthode Branch-and-Bound (ϵ -contraintes-BB)

3.3.4.1 Méthode de ϵ -contraintes

Afin d'obtenir les solutions non-supportées du front de Pareto d'un problème discret multi-objectif, une autre méthode scalaire appelée ϵ -contraintes est possible. L'idée de cette méthode est de transformer un problème multi-objectif en un problème mono-objectif comportant quelques contraintes supplémentaires.

Parmi les objectifs, une fonction objectif est choisie a priori (par exemple f_1), souvent la moins coûteuse en temps de calcul, les autres sont transformées en contraintes d'inégalité (f_2, \dots, f_p). Le choix de la fonction objectif à garder et du vecteur des valeurs maximales admissibles conditionnent la rapidité et la performance de cette méthode. En fait, ce choix dépend des connaissances sur le problème étudié. On aboutit aussi au nouveau problème suivant :

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{l}
 \text{minimiser } f_1(X) \\
 \text{avec } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in S \subset \mathbb{R}^n \\
 \quad \quad \quad x_i \in D_i = \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq}\}, \quad i = 1, \dots, n_d \\
 \text{soumis à} \\
 \quad \quad \quad g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l \\
 \quad \quad \quad h_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, m \\
 \quad \quad \quad f_2(X) - \epsilon_2 \leq 0 \\
 \quad \quad \quad \dots \\
 \quad \quad \quad f_p(X) - \epsilon_p \leq 0
 \end{array} \right. \quad (3.22)
 \end{array}$$

où un vecteur des valeurs maximales admissibles $\epsilon_l, l \in \{2, \dots, p\}, \epsilon_l \geq 0$ est choisi convenablement.

La figure 3.13 montre le processus de l'obtention des solutions Pareto supportées et non-supportées pour un problème bi-objectif par l'algorithme ϵ -contraintes-BB.

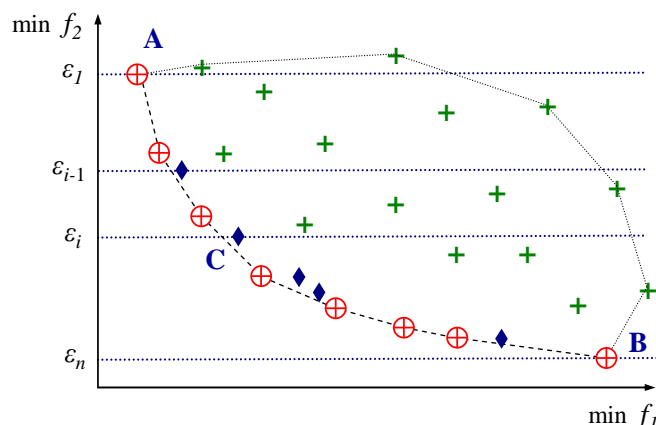


FIG. 3.13 – Illustration de l'obtention des solutions Pareto supportées et non-supportées par l'algorithme ϵ -contraintes-BB

3.3.4.2 ϵ -contraintes-BB appliqué au problème test

Pour le problème test (3.18), entre les deux fonctions objectifs, aucune n'est prioritaire, alors nous choisissons arbitrairement de conserver l'objectif f_1 et de transformer la deuxième fonction f_2 en une contrainte d'inégalité, nommée g_3 . Ce problème multi-objectif devient un problème mono-objectif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser} \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2.5)^2 \\ \text{et} \quad X = \{x_1, x_2\} \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ \quad \quad x_1 = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\} \\ \quad \quad x_2 = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\} \\ \text{soumis à} \\ g_1(x_1, x_2) : -x_1 - 3x_2 + 3 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) : -4x_1 + x_2 + 8 \leq 0 \\ g_3(x_1, x_2) : x_1^2 + (x_2 - 0.5)^2 - \epsilon \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Pour déterminer l'intervalle de variation de ϵ , il est préférable de lancer deux optimisation mono-objectif correspondant aux deux extrémités du front de Pareto. La première consiste à minimiser f_1 et laisser libre f_2 . La deuxième est de minimiser f_2 et laisser libre f_1 . Cela revient en fait à la méthode d'optimisation multi-objectif de pondération avec $\lambda \in \{1.0, 0.0\}$. Ainsi, l'intervalle de variation du coefficient de contrainte ϵ est déterminé $\epsilon \in [0.5, 10.25]$. Faire parcourir ϵ à cet intervalle par pas de 1.0 permet d'obtenir un front de Pareto qui comporte les solutions supportées et non-supportées (figure 3.14 gauche).

Les solutions obtenues sont récapitulées dans le tableau 3.5. Elles sont également représentées dans le plan des deux variables discrètes x_1, x_2 en figure 3.14 droite.

Comme la méthode de pondération des objectifs, la méthode ϵ -contraintes peut avoir un temps de calcul important s'il existe des solutions rédundantes. 8 solutions Pareto

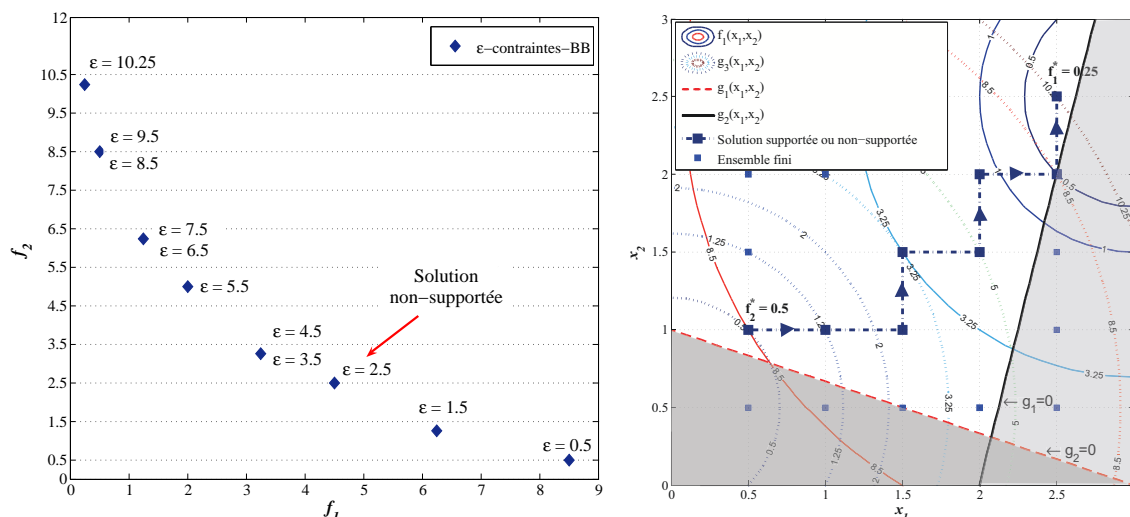


FIG. 3.14 – Solutions Pareto optimales supportées et non-supportées trouvées par l'algorithme ϵ -contraintes-BB dans le plan (f_1, f_2) (gauche) et dans le plan (x_1, x_2) (droite)

TAB. 3.5 – Tableau récapitulatif obtenu par la méthode ϵ -contraintes-BB

ϵ	X^*	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$	$g_3(X^*)$
0.5	{0.5, 1.0}	8.50	0.50	= 0
1.5	{1.0, 1.0}	6.25	1.25	< 0
2.5	{1.5, 1.0}	4.50	2.50	= 0
3.5	{1.5, 1.5}	3.25	3.25	< 0
4.5	{1.5, 1.5}	3.25	3.25	< 0
5.5	{2.0, 1.5}	2.00	5.00	< 0
6.5	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0
7.5	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0
8.5	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	= 0
9.5	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	< 0
10.25	{2.5, 2.5}	0.25	10.25	= 0

optimales sur 11 points de calcul sont trouvées dont 3 sont redondantes $\epsilon = (3.5, 4.5)$; $(6.5, 7.5)$; $(8.5, 9.5)$. Parmi ces 8 solutions, 7 solutions supportées sont trouvées identiques à celles obtenues par l'algorithme WS-BB et une solution non-supportée est obtenue avec $\epsilon = 2.5$.

L'algorithme ϵ -contraintes-BB est capable non seulement d'obtenir les solutions Pareto supportées, mais aussi de retrouver les solutions Pareto non-supportées formant un front complet.

3.3.5 Comparaison des fronts de Pareto discret et continu

Il est intéressant d'augmenter le nombre de valeurs des coefficients de pondération λ ou de valeurs admissibles ϵ afin de pouvoir tracer un front Pareto plus finement discrétisé. Ainsi, λ varie avec un pas de 0.05 dans l'intervalle $\lambda \in [0, 1]$ et ϵ varie avec un pas de 0.25 dans l'intervalle $\epsilon \in [0.5, 10.25]$. Le front de Pareto du problème 3.18 à variables continues ($x_1, x_2 \in [0.5, 2.5]$) est également tracé en combinant ces deux méthodes avec la méthode SQP pour comparaison.

La figure 3.15 gauche montre les fronts de Pareto du problème continu et du problème discret trouvés par les quatre méthodes multi-objectif. Pour le problème à variables continues, les deux méthodes WS-SQP et ϵ -contraintes-SQP obtiennent le même front de Pareto (la ligne continue). Bien évidemment, le front de Pareto continu est trouvé très rapidement. La figure 3.15 droite représente les fronts de Pareto correspondant à toutes les solutions et continues (ligne continue) et à toutes les solutions discrètes supportées et non-supportées (ligne discontinue) trouvées dans le plan (x_1, x_2) .

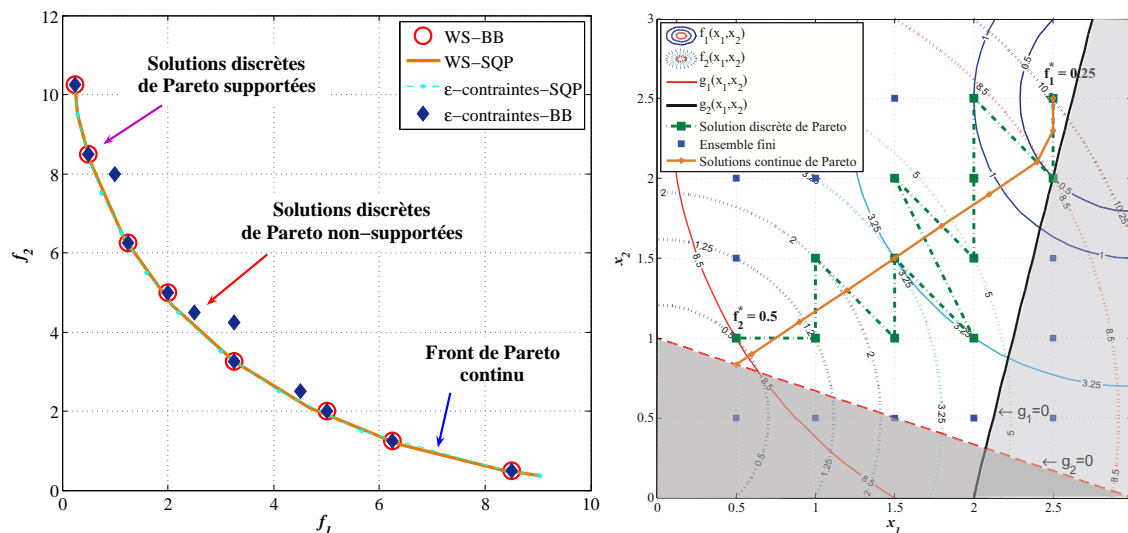


FIG. 3.15 – Solutions de Pareto globales continues et discrètes (gauche) et convergences globales des variables discrètes et continues (droite)

Au total, 12 points du front de Pareto discret dont 8 solutions supportées et 4 solutions non-supportées sur 20 points d'essai sont trouvés par l'algorithme ϵ -contraintes-BB (tableau 3.6). L'algorithme WS-BB obtient également 8 solutions supportées, mais aucune solution non-supportée. Bien que les fronts de Pareto discret et continu soient proches, cela ne veut pas dire que l'on puisse déduire les solutions Pareto optimales discrètes à partir du front de Pareto continu. Il est difficile, voire impossible de trouver un logique de déduction en observant ces deux fronts de Pareto dans le plan des variables d'optimisation (figure 3.15 droite).

TAB. 3.6 – L'ensemble global des solutions de Pareto discrètes trouvé par la méthode ϵ -contraintes-BB

ϵ	X^*	$f_1(X^*)$	$f_2(X^*)$	$g_3(X^*)$	Solutions de Pareto
0.50	{0.5, 1.0}	8.50	0.50	= 0	supportée
0.75	{0.5, 1.0}	8.50	0.50	< 0	supportée
1.00	{0.5, 1.0}	8.50	0.50	< 0	supportée
1.25	{1.0, 1.0}	6.25	1.25	= 0	supportée
1.50	{1.0, 1.0}	6.25	1.25	< 0	supportée
1.75	{1.0, 1.0}	6.25	1.25	< 0	supportée
2.00	{1.0, 1.5}	5.00	2.00	= 0	supportée
2.25	{1.0, 1.5}	5.00	2.00	< 0	supportée
2.50	{1.5, 1.0}	4.50	2.50	= 0	non-supportée
2.75	{1.5, 1.0}	4.50	2.50	< 0	non-supportée
3.00	{1.5, 1.0}	4.50	2.50	< 0	non-supportée
3.25	{1.5, 1.5}	3.25	3.25	= 0	supportée
3.50	{1.5, 1.5}	3.25	3.25	< 0	supportée
3.75	{1.5, 1.5}	3.25	3.25	< 0	supportée
4.00	{1.5, 1.5}	3.25	3.25	< 0	supportée
4.25	{2.0, 1.0}	3.25	4.25	= 0	non-supportée
4.50	{1.5, 2.0}	2.50	4.50	= 0	non-supportée
4.75	{1.5, 2.0}	2.50	4.50	< 0	non-supportée
5.00	{2.0, 1.5}	2.00	5.00	= 0	supportée
5.25	{2.0, 1.5}	2.00	5.00	< 0	supportée
5.50	{2.0, 1.5}	2.00	5.00	< 0	supportée
5.75	{2.0, 1.5}	2.00	5.00	< 0	supportée
6.00	{2.0, 1.5}	2.00	5.00	< 0	supportée
6.25	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	= 0	supportée
6.50	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0	supportée
6.75	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0	supportée
7.00	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0	supportée
7.25	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0	supportée
7.50	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0	supportée
7.75	{2.0, 2.0}	1.25	6.25	< 0	supportée
8.00	{2.0, 2.5}	1.00	8.00	= 0	non-supportée
8.25	{2.0, 2.5}	1.00	8.00	= 0	non-supportée
8.50	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	= 0	supportée
8.75	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	< 0	supportée
9.00	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	< 0	supportée
9.25	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	< 0	supportée
9.50	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	< 0	supportée
9.75	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	< 0	supportée
10.00	{2.5, 2.0}	0.50	8.50	< 0	supportée
10.25	{2.5, 2.5}	0.25	10.25	= 0	supportée

3.3.6 Conclusion sur les méthodes d'optimisation discrète multi-objectif

Les deux nouvelles méthodes proposées en combinant les techniques scalaires, pondération des objectifs et ϵ -contraintes, avec l'algorithme BB spécifique sont de nature globale exacte pour résoudre les problèmes multi-objectif à variables discrètes ou mixtes.

La première WS-BB ne permet que de trouver l'ensemble des solutions Pareto supportées.

La deuxième ϵ -contraintes-BB est capable d'atteindre les solutions Pareto supportées et les solutions Pareto non-supportées formant un front de Pareto complet.

Ces deux méthodes d'optimisation déterministes seront appliquées au benchmark d'un transformateur de sécurité au chapitre 4. Elles seront également comparées à la méthode stochastique NSGA-II en termes de temps de calcul et de précision.

3.4 Technique du Space-Mapping

La méthode de projection d'espace proposée par [BAN-94] sous le nom de “*technique du Space-Mapping*” (SM) est utilisée pour l'optimisation avec des modèles qui sont très coûteux en temps de calcul, typiquement éléments finis. Elle a été appliquée avec succès dans le domaine de l'hyperfréquence [BAN-04]. La méthode repose sur l'utilisation conjointe de deux modèles de différents niveaux de précision. Il s'agit alors de combiner la rapidité d'évaluation du modèle “simple” avec la précision du modèle “fin” en alignant à chaque itération ces deux modèles de façon de conserver cette précision sur la solution recherchée. [CHO-01], [ECH-05], [ENC-07] ont appliqué une variante de cette approche, appelée Agressive Space-Mapping (ASM) [BAN-95] pour le dimensionnement des dispositifs électromagnétiques modélisés par la méthode éléments finis (MEF). Dans [ECH-07], l'approche Manifold-Mapping (MM) a été proposée. Elle permet d'éviter certains inconvénients de l'approche SM et de faciliter la programmation de l'algorithme.

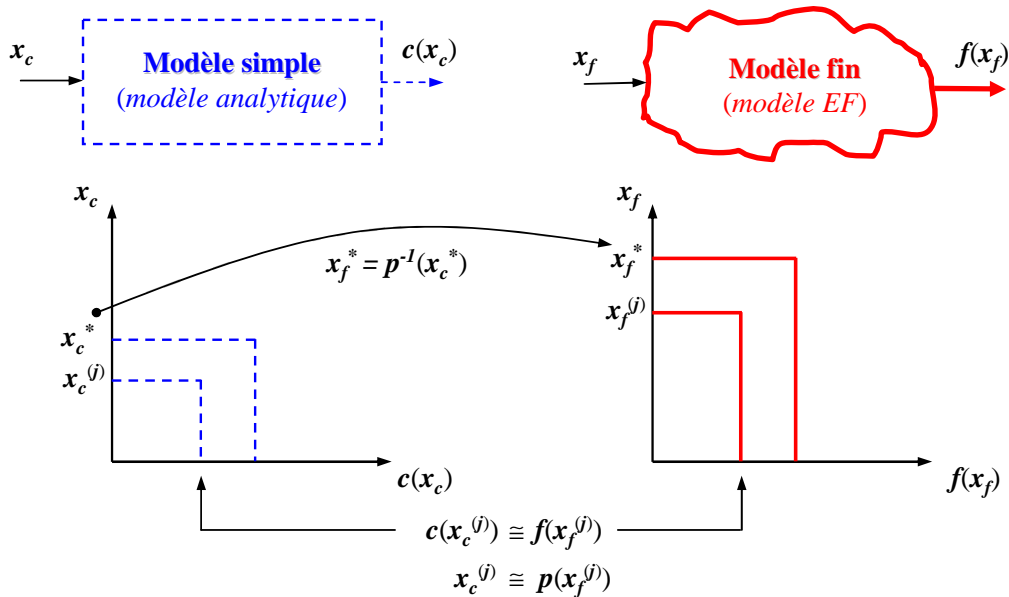


FIG. 3.16 – Concept général de la technique du Space-Mapping

3.4.1 Concept général

Un problème d'optimisation est formulé à l'aide d'un vecteur de variables de conception x_f appartenant à l'espace de recherche $X_f \subset \mathbb{R}^n$ et d'un cahier des charges $y \in \mathbb{R}^m$. La précision de modélisation des dispositifs électromagnétiques est obtenue au prix d'un temps de calcul très long comme par exemple les modèles EF. Le vecteur des réponses du modèle fin est désigné par $f(x_f) \in \mathbb{R}^m$. Ces réponses sont la ou les fonctions objectifs et les

contraintes. Le problème d'optimisation s'exprime par :

$$\text{chercher } x_f^* \in X_f \text{ tel que } x_f^* = \underset{x_f \in X_f}{\operatorname{argmin}} \|f(x_f) - y\| \quad (3.24)$$

où argmin est l'argument de minimisation et le symbole $\|\cdot\|$ indique une norme vectorielle.

Un deuxième modèle moins précis, mais plus rapide en temps de calcul, le modèle simple, par exemple analytique, ou même empirique, etc. est caractérisé par un espace de recherche X_c . Les deux espaces de recherche peuvent éventuellement coïncider $X_c \equiv X_f \subset \mathbb{R}^n$. Le vecteur de réponses du modèle simple est noté $c(x_c) \in \mathbb{R}^m$. Ainsi, un problème d'optimisation auxiliaire peut être formulé :

$$\text{chercher } x_c^* \in X_c \text{ tel que } x_c^* = \underset{x_c \in X_c}{\operatorname{argmin}} \|c(x_c) - y\| \quad (3.25)$$

La fonction de projection (la fonction du Space-Mapping), nommée d'extraction de paramètres (EP) $p : X_f \mapsto X_c$ projete x_f sur $p(x_f) = x_c$. Elle minimise l'écart entre les réponses du modèle fin et du modèle simple :

$$\text{projeter } x_f \rightarrow p(x_f) = x_c^* = \underset{x_c \in X_c}{\operatorname{argmin}} \|c(x_c) - f(x_f)\| \quad (3.26)$$

Le choix de cette fonction de projection est la clé de la méthode SM. Cette fonction permet d'obtenir une approximation $c(p(x_f))$ de $f(x_f)$ pour tout x_f . Alors, la méthode SM consiste à remplacer le problème (3.24) par le problème moins coûteux en temps de calcul :

Ainsi, la solution du Space-Mapping est déterminée par l'utilisation de cette approximation comme suit :

$$\text{chercher } x_f^* \in X_f \text{ tel que } x_f^* = \underset{x_f \in X_f}{\operatorname{argmin}} \|c(p(x_f)) - y\| \quad (3.27)$$

L'extraction de paramètres (3.26) est souvent obtenue en utilisant la formulation des moindres carrés. Si de plus p est bijective alors la transformation inverse fournit une solution fine x_f à partir de x_c^* :

$$x_f = p^{-1}(x_c^*) \quad (3.28)$$

Ce dernier point est le point faible de cette approche conventionnelle.

Chercher $p(x_f)$ est un processus itératif qui commence par le choix d'un ensemble de m points dans l'espace de recherche du modèle fin $E_f = \{x_f^{(1)}, x_f^{(2)}, \dots, x_f^{(m)}\}$. Ces m points initiaux sont choisis au voisinage de la solution du modèle fin. Par exemple, E_f peut être formé avec $x_f^{(1)} = x_c^*$ l'optimum du modèle simple et ses voisins. Une fois que E_f est pris,

les réponses du modèle fin $f(x_f^{(i)}), i = 1, 2, \dots, m$ sont évaluées. Ensuite, l'ensemble des points de l'espace de recherche du modèle simple $E_c = \{x_c^{(1)}, x_c^{(2)}, \dots, x_c^{(m)}\}$ solution du problème (3.26) est calculé (projection). On obtient donc $E_c = \{x_c, x_c = p(x_f), x_f \in E_f\}$. La solution optimale SM est alors obtenue en résolvant l'équation (3.27). Pour cela, il faut calculer $c(E_c), \min c(E_c)$ puis $\operatorname{argmin}_{x_f \in E_f} c(E_c) = \operatorname{argmin}_{x_f \in E_f} p(x_f)$.

Regardons un exemple afin d'illustrer la technique du SM. Soient deux fonctions analytiques à variable réelle : la première est un polynôme d'ordre 3 considéré comme le modèle fin et la seconde est une fonction quadratique considérée comme le modèle simple :

$$f(x_f) = x_f^3 - x_f^2 - x_f + 2 \quad \text{avec } x_f \in [0, 5]$$

Son optimum est $x_f^* = 1$ et $f(x_f^*) = 1$.

$$c(x_c) = x_c^2 - 4x_c + 2 \quad \text{avec } x_c \equiv x_f \in [0, 5]$$

Son optimum est $x_c^* = 2$ et $c(x_c^*) = -2$.

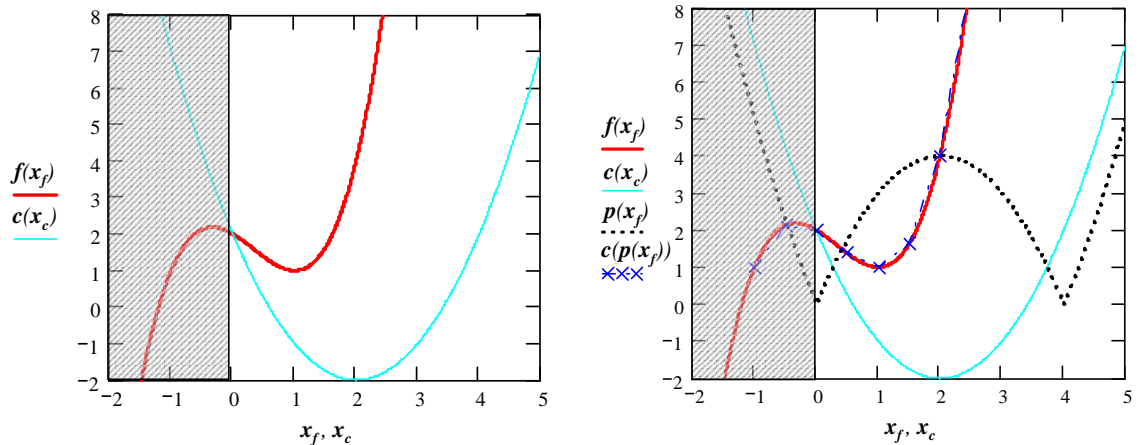


FIG. 3.17 – Fonctions fine et simple (gauche) et la transformation de SM pour $x_f = 0$ (droite)

La figure 3.17 gauche représente les deux fonctions fine $f(x_f)$ et simple $c(x_c)$.

Six points ont été choisis autour de l'optimum simple $x_c^* = 2$ pour former un ensemble E_f :

$$E_f = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.0 \\ 1.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

La projection de ces points par la résolution de l'équation (3.26) donne :

$$x_c = p(x_f) = \begin{bmatrix} 5.298 \\ 4.449 \\ 3.904 \\ 3.732 \\ 3.837 \\ 4.000 \end{bmatrix}$$

En ces points, le modèle simple prend les valeurs :

$$c(p(x_f)) = \begin{bmatrix} 8.877 \\ 3.998 \\ 1.625 \\ 1.000 \\ 1.375 \\ 2.000 \end{bmatrix}$$

En appliquant l'équation (3.27), une solution SM est donc $c(p(x_f))^* = 1.000$ dont l'argument est $x_f^* = 1$. En ce point l'optimum proposé du modèle fin est $f(x_f^*) = 1.0$. La figure 3.17 droite montre une fonction de mapping $p(x_f)$ à $x_f = 0.0$ et les points de la fonction corrigée $c(p(x_f))$.

On voit donc que cette approche nécessite un nombre important d'évaluations du modèle fin ce qui nuit à son efficacité. L'algorithme Aggressive Space-Mapping (ASM) peut éviter de cet inconvénient en intégrant la méthode quasi-Newton [BAN-95].

3.4.2 Agressive Space-Mapping

3.4.2.1 Space-Mapping versus Agressive Space-Mapping

L'algorithme Agressive Space-Mapping (ASM) [BAN-95] résout le système non-linéaire :

$$r(x_f) = 0 \tag{3.29a}$$

$$r(x_f) = p(x_f) - x_c^* \tag{3.29b}$$

$$\Leftrightarrow 0 = x_c - x_c^* \tag{3.29c}$$

où $r(x_f)$ est le vecteur résiduel de la transformation p . L'approximation du développement en série de Taylor au premier ordre est :

$$p(x_f) \approx p(x_f^{(j)}) + J_p(x_f^{(j)})(x_f - x_f^{(j)}) \tag{3.30}$$

Selon l'équation (3.26), cette équation peut être écrite :

$$x_c \approx x_c^{(j)} + J_p(x_f^{(j)})(x_f - x_f^{(j)}) \Big|_{\text{à travers de l'EP}} \quad (3.31)$$

où la matrice Jacobienne de $p(x_f)$ à l'itération j s'exprime par :

$$J_p(x_f^{(j)}) = \left(\frac{\partial P^T}{\partial x_f} \right)_{x_f=x_f^{(j)}}^T \quad (3.32)$$

Cette matrice Jacobienne de EP est souvent indisponible ou difficile à calculer. On désigne donc une approximation du Jacobien J_p par une matrice carrée $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$B \approx J_p(x_f) \quad (3.33)$$

L'équation (3.31) illustre la non-linéarité de la transformation p dans laquelle $x_c^{(j)}$ est connectée à $x_f^{(j)}$ à travers le processus EP qui est un problème non-linéaire.

À partir des équations (3.29), (3.31) et (3.33), nous pouvons formuler le système comme suit :

$$(x_c^{(j)} - x_c^*) + B^{(j)}(x_f^{(j+1)} - x_f^{(j)}) = 0 \quad (3.34)$$

Cette équation peut être simplifiée :

$$B^{(j)}.h^{(j)} = -r^{(j)} \quad (3.35)$$

Résoudre l'équation (3.35) pour $h^{(j)}$, le pas de quasi-Newton fournit l'itération suivante $x_f^{(j+1)}$:

$$x_f^{(j+1)} = x_f^{(j)} + h^{(j)} \quad (3.36)$$

3.4.2.2 Mise à jour de la matrice de Broyden

La matrice B est mise à jour en utilisant la formule de Broyden [BRO-65]. Une valeur initiale de B peut être la matrice d'identité : $B^{(0)} = I$.

En appliquant la formule de Broyden de rang 1 [BRO-65], $B^{(j)}$ est mise à jour comme suit :

$$B^{(j+1)} = B^{(j)} + \frac{r^{(j+1)} - r^{(j)} - B^{(j)}.h^{(j)}}{h^{(j)T}.h^{(j)}}.h^{(j)T} \quad (3.37)$$

Puisque $h^{(j)}$ est le pas de quasi-Newton, l'équation (3.37) peut être simplifiée en utilisant l'équation (3.35) :

$$B^{(j+1)} = B^{(j)} + \frac{r^{(j+1)}}{h^{(j)T}.h^{(j)}}.h^{(j)T} \quad (3.38)$$

3.4.2.3 Implémentation de l'algorithme ASM

L'algorithme ASM comprend 6 étapes suivantes :

- Étape 1 : Résoudre le problème avec le modèle simple (3.25), obtenir x_c^* .
Initialiser $j = 0$, $x_f^{(j)} = x_c^*$, $B^{(j)} = I$
- Étape 2 : Évaluer $p(x_f^{(j)})$ par le processus de EP (3.26)
Calculer $r^{(j)} = p(x_f^{(j)}) - x_c^*$
- Étape 3 : Arrêter si $\|r^{(j)}\| \leq \epsilon$, une petite constant positive.
Sinon, aller à l'étape suivante.
- Étape 4 : Calculer $h^{(j)}$ selon $B^{(j)}.h^{(j)} = -r^{(j)}$
- Étape 5 : Calculer $x_f^{(j+1)} = x_f^{(j)} + h^{(j)}$
- Étape 6 : Mettre à jour $B^{(j)}$ à $B^{(j+1)}$ selon la formule Broyden (3.38).
Mettre $j = j + 1$. Revenir à l'étape 2.

3.4.3 Aggressive Space-Mapping appliqué aux problèmes contraints

En pratique, pour les problèmes de conception en génie électrique, la fonction objectif du modèle fin peut très bien coïncider avec celle du modèle simple. Par exemple, le problème de minimisation de la masse, du prix, du volume d'un dispositif électromagnétique est caractérisé par un seul modèle de fonction objectif, mais des contraintes précises et simples sont différentes. Alors, on distingue les réponses par la fonction objectif $f(x_f), c(x_c)$ et les contraintes $k_f(x_f), k_c(x_c)$ correspondant respectivement au modèle fin et au modèle simple. Ainsi un problème d'optimisation des machines électriques peut avoir $f(x_f) = c(x_c), \forall x_c \equiv x_f \in X$ et $k_f(x_f) \neq k_c(x_c)$.

Une stratégie adaptée à cette particularité fréquente [LEA-01] a été proposée et permet d'introduire une fonction de transformation pour la prise en compte des contraintes dans l'algorithme ASM [ENC-07]. La figure 3.18 montre l'organigramme de cet algorithme.

L'algorithme démarre avec l'optimisation sous contraintes du modèle simple qui obtient l'optimum simple x_c^* . La matrice de Broyden $B^{(j)}$ et la région de confiance $\delta^{(j)}$ sont initialisées : $B^{(0)} = I$, $\delta^{(0)} = \delta$, qui est une constante positive.

Ensuite, une évaluation du modèle fin avec $x_f^{(0)} = x_c^*$ est réalisée pour calculer les contraintes fines $k_f(x_f^{(0)})$. Ces dernières sont souvent violées, l'algorithme passe à l'étape d'extraction de paramètre. C'est la clé de cet algorithme dans lequel une transformation p_k alignant les deux contraintes grossières $k_c(x_c)$ et fines $k_f(x_f)$ est faite :

$$x_c \rightarrow p_k(x_f) = \underset{x_c \in X}{\operatorname{argmin}} \|c(x_c) - f(x_f)\| \quad \text{tel que} \quad k_c(x_c) = k_f(x_f) \quad (3.39)$$

Ce problème sous contraintes (3.39) peut être résolu par la méthode SQP ce qui permet de calculer le vecteur résidu $r^{(j)}$ et la transformation $p_k^{(j)}(x)$.

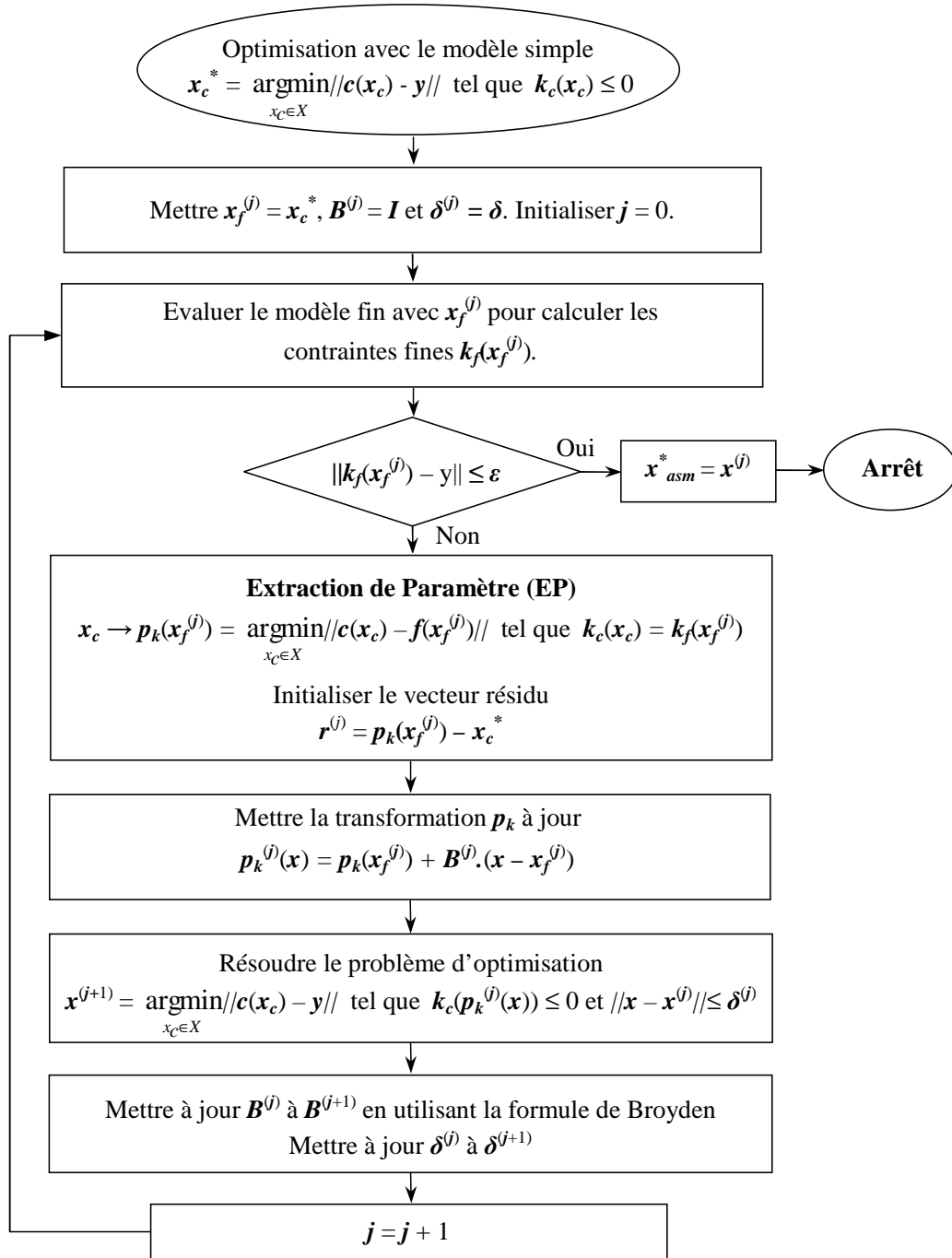


FIG. 3.18 – Organigramme de l'algorithme ASM appliqué au problème sous contraintes

La solution fine $x^{(j+1)}$ est alors obtenue en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes intégrant cette transformation $k_c(p_k^{(j)}(x_f))$ (figure 3.18) :

$$x^{(j+1)} = \operatorname{argmin}_{x_c \in X} \|c(x_c) - y\| \quad \text{tel que } k_c(p_k^{(j)}(x)) \leq 0 \text{ et } \|x - x^{(j)}\| \leq \delta^{(j)} \quad (3.40)$$

Les étapes suivantes consistent à mettre à jour la matrice Broyden $B^{(j+1)}$ selon (3.37), le critère de région de confiance $\delta^{(j+1)}$ et à revenir à l'étape de l'évaluation du modèle fin

avec la solution fine trouvée $x_f^{(j+1)}$.

La région de confiance [SON-99] a été introduite afin d'améliorer la convergence de cet algorithme. Elle est définie par la boule : $\|x - x^{(j)}\| \leq \delta^{(j)}$. Où le critère $\delta^{(j)}$ est mis à jour à chaque itération. Il peut être augmenté, diminué ou rester identique selon les cas suivants :

$$\Delta F = f(x^{(j)}) - f(x^{(j+1)}) \quad (3.41a)$$

$$\Delta C = c(p_k(x^{(j)})) - c(p_k(x^{(j+1)})) \quad (3.41b)$$

$$\delta^{(j+1)} = \begin{cases} 2\delta^{(j)} & \text{si } \Delta F \geq 0.75\Delta C \\ \frac{\delta^{(j)}}{3} & \text{si } \Delta F \leq 0.25\Delta C \\ \delta^{(j)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.41c)$$

Cet algorithme est appliqué au problème d'optimisation du benchmark d'un transformateur de sécurité au chapitre 4. L'objectif de ce problème est de minimiser la masse des matériaux de fer et de cuivre, donc la fonction objectif du modèle simple (un modèle analytique) est identique à celle du modèle fin (un modèle EF). Cependant, les contraintes entre ces deux modèles (températures du bobinage, du circuit magnétique, rendement, courant magnétisant et chute de tensions) sont, elles, bien différentes.

3.4.4 Sensibilité de l'extraction de paramètres

Le processus de l'extraction de paramètre est un point délicat dans la méthodologie de SM [BAN-04]. La figure 3.19 montre la non-unicité de la solution obtenue dans le processus de EP pour le problème d'optimisation test à une variable.

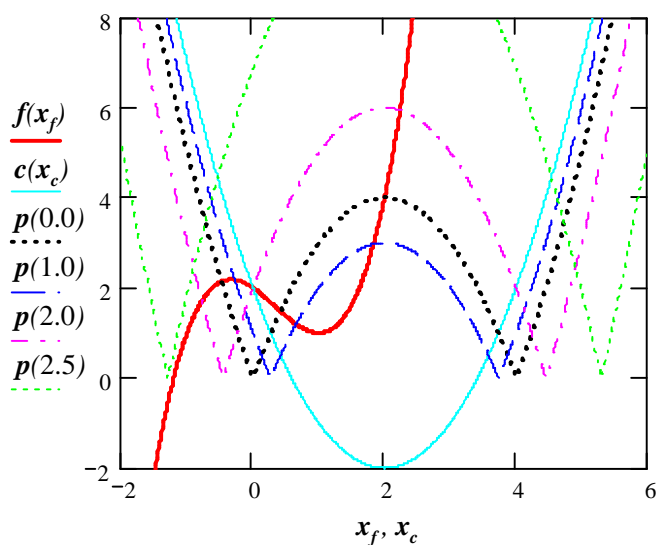


FIG. 3.19 – Non-unicité de la solution trouvée dans EP sur le problème test à une variable

Pour la fonction test simple quadratique $c(x_c)$, il y a toujours deux optimums dans le processus de la transformation p . Le nombre d'optimums dans EP sera alors encore augmenté lorsque le modèle simple a un ordre plus élevé. Ainsi la non-unicité de la solution dans EP est un défaut de la technique SM. Quelques travaux : l'extraction de paramètre avec des points multiples [BAK-99], les gradients de EP [BAN-02], etc. se sont penchés sur cet aspect. L'approche la plus récente, les gradients de EP, consiste à aligner non seulement les réponses des deux modèles mais aussi leurs dérivées. Elle a montré son efficacité sur le problème de Rosenbrock [BAN-02] qui possède plusieurs solutions locales. L'équation de transformation par EP (3.26) devient :

$$x_c \rightarrow p(x_f) = \underset{x_c \in X}{\operatorname{argmin}} \{ (1 - \lambda) \|c(x_c) - f(x_f)\| + \lambda \|c'(x_c) - f'(x_f)\| \} \quad (3.42)$$

où λ est un facteur de pondération, $0 \leq \lambda \leq 1$. $c'(x_c)$ et $f'(x_f)$ sont respectivement les dérivées des fonctions fine et simple.

Il est intéressant de regarder fonctionner l'algorithme ASM avec gradients de EP sur un problème test vectoriel. Ce problème comprend deux fonctions à deux variables : l'une considérée comme fine et l'autre simple. La figure 3.20 montre leurs solutions graphiques respectives dans le plan (x_1, x_2) .

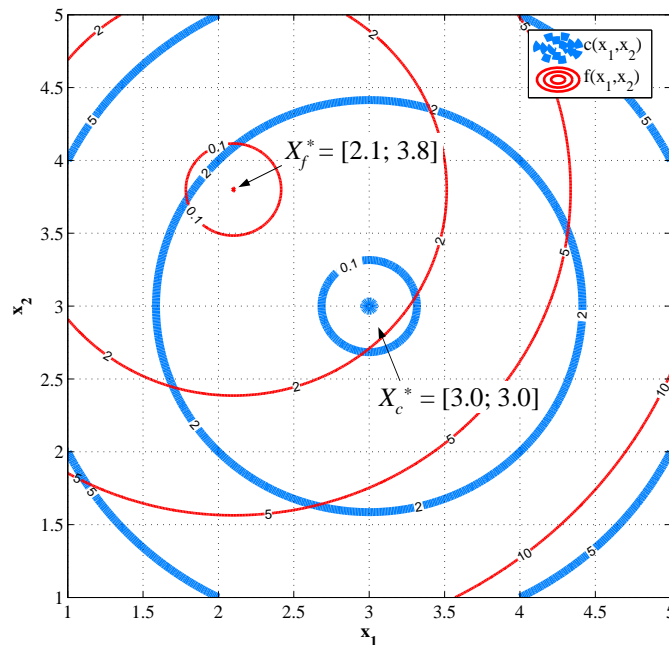


FIG. 3.20 – Modèles fin $f(x_1, x_2)$ et simple $c(x_1, x_2)$ à deux variables

Le modèle fin est :

$$f(x_1, x_2) = [(x_1 + 0.9) - 3]^2 + [(x_2 - 0.8) - 3]^2 \quad \text{avec } x_1, x_2 \in [1, 5]$$

Son optimum est $X_f^* = [2.1; 3.8]$ et $f(X_f^*) = 0$.

Le modèle simple est :

$$c(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \quad \text{avec } x_1, x_2 \in [1, 5]$$

Son optimum est $X_c^* = [3; 3]$ et $c(X_c^*) = 0$.

Le tableau 3.7 montre des résultats de l'algorithme ASM à chaque itération. L'algorithme s'arrête lorsque le vecteur résiduel est suffisamment petit ($r^{(j)} \leq 10^{-3}$). La solution SM converge rapidement après 3 itérations (c'est-à-dire 4 évaluations du modèle fin) avec $f(X_f^*) = 5.9e - 13$.

TAB. 3.7 – Convergence de la solution trouvée par ASM sur le problème test

j	$X_c^{(j)}$	$r^{(j)}$	$B^{(j)}$	$h^{(j)}$	$X_f^{(j+1)}$	$f(X_f^{(j+1)})$
0	$\begin{bmatrix} 3.0 \\ 3.0 \end{bmatrix}$	—	—	—	$\begin{bmatrix} 3.0 \\ 3.0 \end{bmatrix}$	1.450
1	$\begin{bmatrix} 3.880 \\ 2.178 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.880 \\ -0.822 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.880 \\ 0.822 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.120 \\ 3.822 \end{bmatrix}$	$8.9e - 4$
2	$\begin{bmatrix} 3.020 \\ 3.022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.020 \\ 0.022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.988 & 0.011 \\ -0.013 & 1.013 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.020 \\ -0.022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.099 \\ 3.800 \end{bmatrix}$	$1.7e - 9$
3	$\begin{bmatrix} 3.000 \\ 3.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4.2e - 5 \\ 1.9e - 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.989 & 0.012 \\ -0.014 & 1.013 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.3e - 5 \\ -1.3e - 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.100 \\ 3.800 \end{bmatrix}$	$5.9e - 13$

Cette approche nécessite de connaître la dérivée du modèle fin, qui n'est pas toujours évident à calculer ou non disponible, comme par exemple pour les modèles éléments finis. Elle n'est donc pas bien adaptée aux problèmes rencontrés en génie électrique. Cela nous conduit à développer et étudier d'autres approches SM : Output Space-Mapping et Manifold-Mapping. Elles sont détaillées ci-dessous.

3.4.5 Output Space-Mapping

3.4.5.1 Space-Mapping versus Output-Space-Mapping

Une variante de la technique du Space-Mapping nommée Output-Space-Mapping (OSM) [BAN-03], [TRA-07c] consiste à modifier le modèle simple en utilisant des correcteurs $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ afin d'aligner les réponses du modèle simple à celles du modèle fin. Ces correcteurs sont mis à jour à chaque itération pour minimiser l'écart entre les deux modèles. Ils sont introduits dans le modèle simple pour rechercher la solution x_{osm}^* à l'itération suivante. La transformation entre les réponses des deux modèles est en fait due à ces correcteurs. Le

modèle simple est mis à jour à chaque itération qui est utilisé lors de l'optimisation. Ainsi, le problème original (3.24) est transformé comme suit :

$$x_{osm}^* = \underset{x_f \in X}{\operatorname{argmin}} \|c(p(x_f), \theta) - y\| \quad (3.43)$$

Les correcteurs sont mis à jour par la méthode du simplexe de Nelder-Mead (NMS) [LAG-98] à chaque itération en utilisant une minimisation de la différence entre les réponses des modèles simple et fin :

$$\theta^{(j+1)} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \|c(x_c^*, \theta) - f(x_f^{(j)})\|_2^2 \quad (3.44)$$

À la première itération, le vecteur des correcteurs est initialisé à 1.

Cette méthode du simplexe n'utilise pas de gradient et est très efficace pour les problèmes d'optimisation sans contraintes. Selon l'équation (3.44), la détermination de θ conduit toujours à l'obtention d'une solution unique. La nouvelle solution output space-mapping est alors trouvée par :

$$x_{osm}^{(j+1)*} = \underset{x_f \in X}{\operatorname{argmin}} \|c(p(x_f), \theta^{(j+1)}) - y\| \quad (3.45)$$

Par construction :

$$x_{osm}^* = x_f^* \quad (3.46)$$

3.4.5.2 Implémentation de l'algorithme OSM

L'algorithme OSM comprend les 5 étapes suivantes :

- Étape 1 : Initialiser des correcteurs :
 $\theta^{(j)} = [\theta_1, \dots, \theta_m] = 1$ et $[c(x_c, \theta^{(j)})] = \operatorname{Diag}(\theta^{(j)}) \cdot [c(x_c)]$
Mettre $j = 0$.
- Étape 2 : Résoudre le problème d'optimisation avec le modèle simple :
 $x_f^{(j)} = x_c^* = \underset{x_c \in X}{\operatorname{argmin}} \|c(x_c, \theta^{(j)}) - y\|$
- Étape 3 : Évaluer les réponses du modèle fin : $f(x_f^{(j)})$.
Arrêter si le critère d'arrêt est satisfait : $\|c(x_c^{(j)}, \theta^{(j)}) - f(x_f^{(j)})\| \leq \epsilon$
Sinon, aller à l'étape suivante.
- Étape 4 : Mettre à jour les correcteurs en utilisant la méthode du simplexe de NMS :
 $\theta^{(j+1)} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \|c(x_c^*, \theta) - f(x_f^{(j)})\|$
- Étape 5 : Mettre $j = j + 1$. Revenir à l'étape 2.

3.4.6 Manifold-Mapping

3.4.6.1 Space-Mapping versus Manifold-Mapping

La technique appelée Manifold-Mapping (MM) [ECH-06], [ECH-07] est l'approche la plus récente. Elle exploite mieux les informations tirées du modèle simple et définit aussi un problème d'optimisation simple pour laquelle la solution trouvée est proche de x_f^* . La clé de l'algorithme est la fonction de transformation manifold-mapping entre les réponses des modèles simple et fin : $c(X) \subset \mathbb{R}^m$ et $f(X) \subset \mathbb{R}^m$. Elle utilise une fonction de correction de défauts (figure 3.21) $S : c(X) \rightarrow f(X)$ qui connecte les points $c(x_c^*)$ à $f(x_f^*)$ et superpose la tangente de $c(X)$ au point x_c^* à la tangente de $f(X)$ au point x_f^* . Le modèle simple est alors $S(c(p(x)))$ et la solution manifold-mapping d'être définis comme suit :

$$x_{mm}^* = \operatorname{argmin}_{x_f \in X} \|S(c(p(x_f))) - y\| \quad (3.47)$$

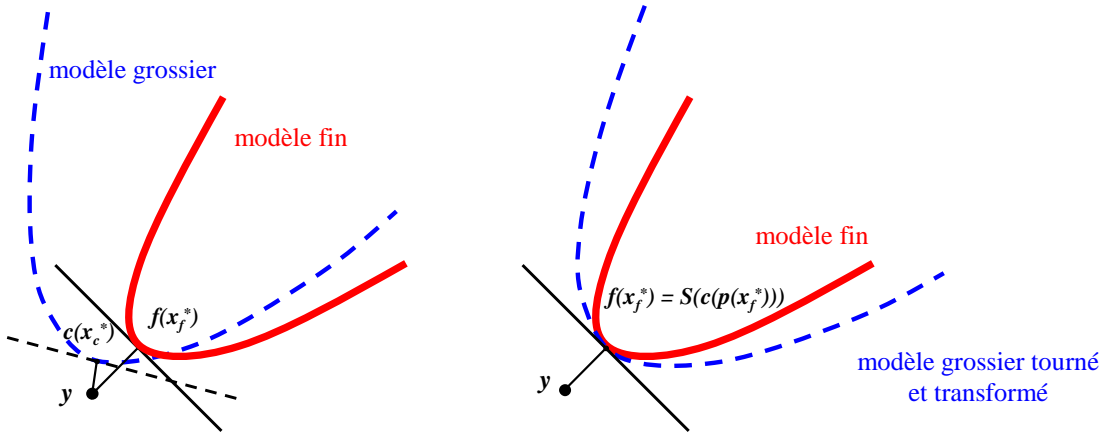


FIG. 3.21 – Aligement entre les deux modèles par la technique MM [ECH-07]

La fonction manifold-mapping $S(c(p(x)))$ est approximée par une séquence $\{S^{(j)}(c(p(x)))\}_{j>1}$ qui rend la succession d'itération $\{x_{mm}^{(j)*}\}_{j>1}$ convergente vers x_{mm}^* . Les itérations successives sont les solutions d'une optimisation avec le modèle simple :

$$x_{mm}^{(j)*} = \operatorname{argmin}_{x_f \in X} \|S^{(j)}(c(p(x_f))) - y\| \quad (3.48)$$

À chaque itération j , la construction de $S^{(j)}$ a besoin de la décomposition en valeurs singulières des matrices $\Delta C^{(j)}$ et $\Delta F^{(j)}$ de taille $m \times \min(j, n)$ dont les colonnes établissent les tangentes des modèles simple et fin, à l'itération courante. Les décompositions en valeurs singulières sont faites par :

$$\Delta C^{(j)} = U_c^{(j)} \sum_c^{(j)} V_c^{(j)T} \quad \text{et} \quad \Delta F^{(j)} = U_f^{(j)} \sum_f^{(j)} V_f^{(j)T} \quad (3.49)$$

La mise à jour des valeurs cibles est introduite :

$$y^{(j)} = c(x^{(j)}) - [\Delta C^{(j)} \Delta F^{(j)\psi} + (I - U_c^{(j)} U_c^{(j)T})] \cdot (f(x^{(j)}) - y) \quad (3.50)$$

où l'exposant ψ désigne la pseudo-inverse. Avec cette notion, le problème (3.48) est remplacé par le problème asymptotiquement équivalent :

$$x_{mm}^{(j)*} = \operatorname{argmin}_{x_f \in X} \|c(p(x_f)) - y^{(j)}\| \quad (3.51)$$

Par construction :

$$x_{mm}^* = x_f^* \quad (3.52)$$

3.4.6.2 Implémentation de l'algorithme MM

L'algorithme MM comprend les 5 étapes suivantes :

- Étape 1 : Initialiser le cahier des charges : $y^{(j)} = y$
Mettre $j = 0$; $S^{(j)} = I$.
- Étape 2 : Résoudre le problème d'optimisation :
$$x_f^{(j)} = x_c^* = \operatorname{argmin}_{x_c \in X} \|c(x_c) - y^{(j)}\|$$
- Étape 3 : Évaluer les réponses du modèle fin : $f(x_f^{(j)})$.
Arrêter si le critère d'arrêt est satisfait : $\|f(x_f^{(j)}) - y^{(j)}\| \leq \epsilon$
- Étape 4 : Mettre à jour les valeurs cibles :
 - Si $j > 0$:
avec $\Delta c^{(i)} = c(p(x_f^{(j-i)})) - c(p(x_f^{(j)}))$ et $\Delta f^{(i)} = f(x_f^{(j-i)}) - f(x_f^{(j)})$,
 $i = 1, \dots, \min(n, j)$. On définit ΔC et ΔF qui sont les matrices de
taille $m \times \min(n, j)$, avec $\Delta c^{(i)}$ et $\Delta f^{(i)}$ comme colonnes.
Leurs décompositions en valeurs singulières sont respectivement :
$$\Delta C^{(j)} = U_c^{(j)} \sum_c^{(j)} V_c^{(j)T} \text{ et } \Delta F^{(j)} = U_f^{(j)} \sum_f^{(j)} V_f^{(j)T}$$
 - L'approximation de transformation affine est :
$$S^{(j)}v = f(x_f^{(j)}) + S^{(j)}(v - c(p(x_f^{(j)}))) \quad \forall v \in Y$$

où $S^{(j)}$ est une matrice inversible $m \times m$:
$$S^{(j)} = \Delta C \Delta F^\psi + (I - U_f U_f^T)((I - U_c U_c^T).$$
 - Calculer :
$$y^{(j+1)} = c(x_f^{(j)}) - [\Delta C^{(j)} \Delta F^{(j)\psi} + (I - U_c^{(j)} U_c^{(j)T})] \cdot (f(x_f^{(j)}) - y)$$
- Étape 5 : Mettre $j = j + 1$, revenir à l'étape 2.

La matrice $S^{(j)}$ satisfait :

$$S^{(j)}(c(p(x^{(l)})) - c(p(x^{(j)}))) = f(x^{(l)}) - f(x^{(j)})$$

pour $j > 1$ et $l = \max(1, j - n), \dots, j - 1$, et donc dans la limite, les propriétés désirées de la transformation manifold-mapping S sont remplies.

Les algorithmes Output-Space-Mapping et Manifold-Mapping évitent le processus d'extraction de paramètres qui est délicat dans la technique conventionnelle SM. Ces algorithmes sont donc plus robustes et plus facile à implémenter. Ils sont appliqués au benchmark d'un transformateur de sécurité au chapitre 4.

3.4.7 Combinaison de Space-Mapping et Branch-and-Bound

Pour les problèmes discrets avec les modèles très lourds en temps de calcul (par exemple, des modèles EF multi-physique, des modèles EF en trois dimensions, ...), deux nouveaux algorithmes qui combinent la technique de Space-Mapping et la méthode Branch-and-Bound sont proposés.

Comme nous l'avons abordé au paragraphe 3.2, l'optimisation discrète repose sur un concept différent par rapport à l'optimisation continue. Des méthodes de type gradient ne peuvent pas directement s'appliquer aux problèmes combinatoires. Le nombre d'évaluations du modèle lors d'une optimisation discrète est ainsi beaucoup plus important que lors d'une optimisation continue.

À l'heure actuelle, la méthode des éléments finis est couramment utilisée pour modéliser les dispositifs électromagnétiques. Ces modèles EF sont précis, ils sont considérés comme des modèles fins par rapport aux modèles analytiques. Cependant, le temps d'évaluation de ce type de modèle est souvent long : de quelques minutes jusqu'à quelques jours, voire semaines selon la géométrie, la modélisation en 2D ou en 3D et aussi les couplages multi-physique. Or, il n'existe pas encore jusqu'à maintenant, une méthode efficace qui peut résoudre le problème d'optimisation combinatoire en un temps abordable sur une station de travail. Les techniques du Space-Mapping qui substituent souvent l'évaluation d'un modèle simple à un modèle coûteux sont donc potentiellement intéressantes pour traiter ce genre de problème. Nous proposons donc deux nouveaux algorithmes qui combinent Space-Mapping et Branch-and-Bound [TRA-09].

3.4.7.1 Algorithme OSM-BB

Le premier algorithme combine Output-Space-Mapping et Branch-and-Bound (OSM-BB). La figure 3.22 représente l'organigramme simplifié de cet algorithme. Il démarre en initialisant des correcteurs identifiés avant l'exploration partielle de l'arbre des solutions discrète et en optimisant le problème d'optimisation avec le modèle simple par la méthode BB. Une première solution simplifiée est ainsi obtenue x_c^* . Ensuite, le modèle fin est évalué

avec cette solution $x_f^{(0)} = x_c^*$ pour calculer les réponses précises $f(x_f^{(0)})$ qui regroupent à la fois la fonction objectif et les contraintes. Le critère d'arrêt est la différence entre les réponses du modèle simple et du modèle fin qui doit être aussi petite que possible : $\|c(x_c^{(j)}, \theta^{(j)}) - f(x_f^{(j)})\| \leq \epsilon$.

Le processus d'alignement des deux modèles est obtenu par la mise à jour des correcteurs $\theta^{(j+1)}$ qui sont trouvés par la méthode NMS. Ces derniers sont introduits dans le modèle simple dont l'optimisation est réalisée au moyen de l'algorithme BB pour atteindre une solution discrète. Ce processus est répété jusqu'à la satisfaction du critère d'arrêt pour lequel $x_f^* = x_f^{(j+1)}$ (figure 3.22).

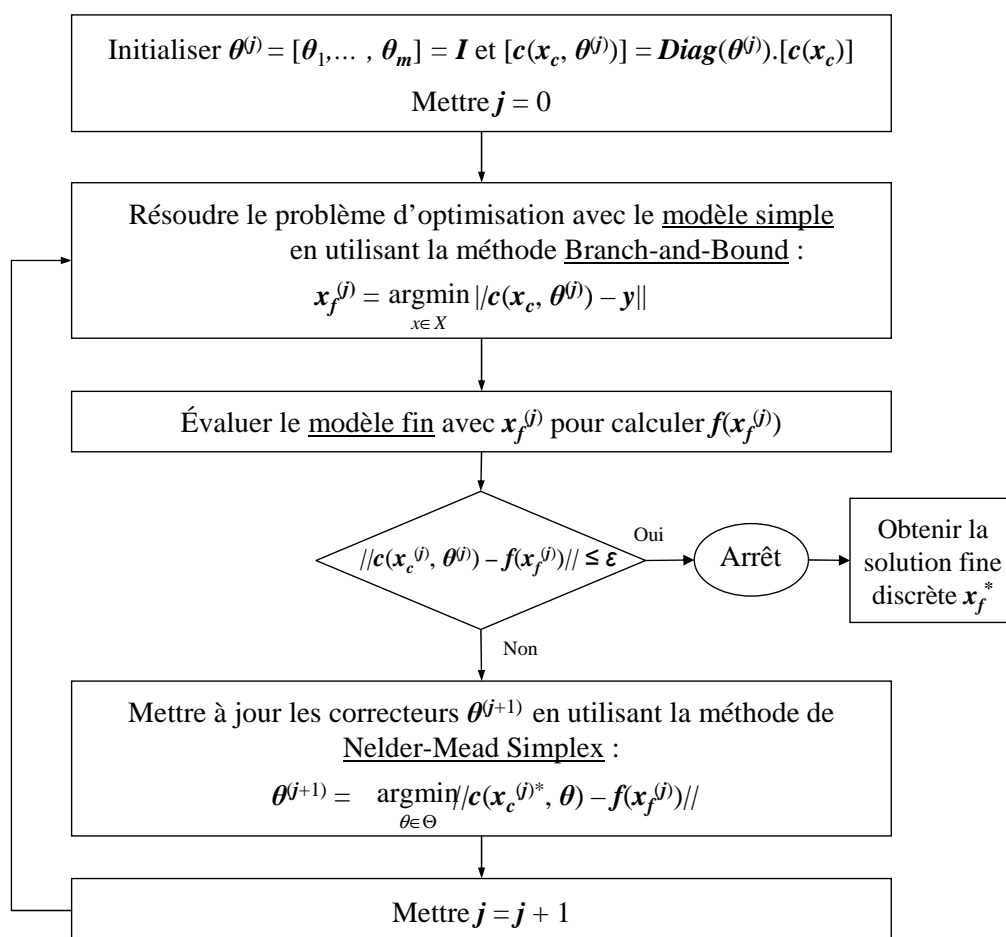


FIG. 3.22 – Organigramme simplifié de l'algorithme OSM-BB

Au total, un nombre d'évaluations important du modèle simple est effectué par la méthode BB pour obtenir une solution à chaque itération. Le modèle fin est juste évalué pour calculer les correcteurs.

3.4.7.2 Algorithme MM-BB

Le deuxième algorithme pour l'optimisation discrète avec le modèle fin est de combiner Manifold-Mapping et Branch-and-Bound (MM-BB). La figure 3.23 représente l'organigramme simplifié de cet algorithme.

Les deux premières étapes sont identiques à l'algorithme OSM-BB précédent. L'algorithme MM-BB démarre par l'optimisation avec le modèle simple pour obtenir x_c^* . Cette solution $x_f^{(0)} = x_c^*$ est introduite dans le modèle fin pour évaluer ses réponses $f(x_f^{(0)})$. Le critère d'arrêt de cet algorithme est la différence entre les réponses du modèle fin et les valeurs cibles qui doit suffisamment petit : $\|f(x_f^{(j)}) - y^{(j)}\| \leq \epsilon$.

En alignant les deux modèles, les valeurs cibles sont ensuite mises à jour selon la théorie de correction de défauts exposée plus haut. Enfin, l'optimisation avec le modèle simple avec les nouvelles valeurs cibles est faite par la méthode BB, on obtient l'optimum discret $x_f^* = x_f^{(j+1)}$ ayant les réponses fines qui satisfont au problème d'optimisation (figure 3.23).

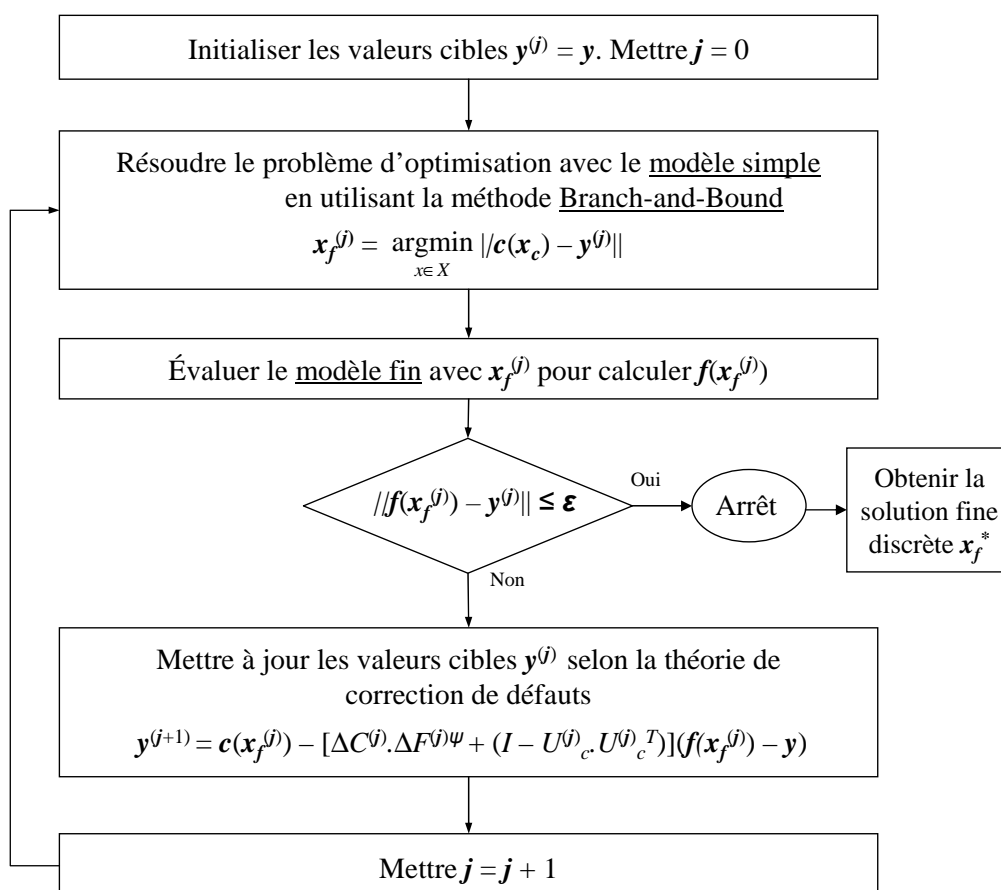


FIG. 3.23 – Organigramme simplifié de l'algorithme MM-BB

Ces deux algorithmes SM-BB sont appliqués au problème d'optimisation discrète d'un transformateur de sécurité au chapitre 4.

3.4.8 Accélération de la construction du front de Pareto par la technique de SM

Cette partie consiste à développer une méthodologie pour traiter le problème d'optimisation multi-objectif avec un modèle fin, coûteux en temps de calcul, typiquement des modèles EF 3D et/ou avec couplage multi-physique. L'application directe des méthodes d'optimisation multi-objectif à ce modèle nécessite de construire un front de Pareto constitué de nombreuses solutions Pareto optimales, ce qui réclame un temps de calcul extrêmement long. La aussi, la technique de Space-Mapping présente un potentiel intéressant et nous nous proposons de la combiner avec une méthode d'optimisation multi-objectif. L'algorithme est nommé SM-MO.

Comme nous l'avons montré au paragraphe 3.3, la méthode multi-objectif ϵ -contraintes peut trouver les régions convexe et non-convexe du front de Pareto. Elle produit aussi une meilleure distribution des solutions Pareto optimales par rapport à la méthode de pondération. Cette méthode est intégrée à l'algorithme SM afin de résoudre les problèmes multi-objectif basés sur un modèle multiphysique fin comme EF 3D.

La figure 3.24 illustre cette problématique. Le front de Pareto obtenu avec le modèle fin est très coûteux en temps de calcul mais il est précis. Tandis que le front de Pareto trouvé avec le modèle simple est loin de celui obtenu avec le modèle fin, mais son temps de calcul est faible.

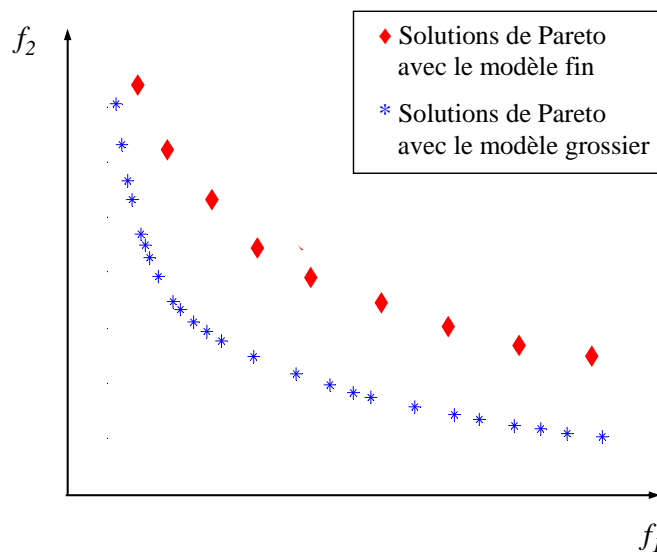


FIG. 3.24 – Illustration de deux fronts de Pareto de différentes précisions

Une approche possible consiste à intégrer des fonctions d'interpolation dans l'algorithme SM-MO pour rapprocher le front de Pareto vers le front de Pareto précis. Un grand nombre de solutions Pareto optimales constituant le front complet de Pareto serait ainsi obtenu avec un coût réduit.

3.4.8.1 Fonctions correctives de type splines

Parmi des techniques d'interpolation, les fonctions splines cubiques sont connues pour éviter les oscillations de la fonction polynomiale. Pour cette raison, nous l'utilisons dans l'algorithme SM-MO.

En pratique, l'espace de recherche de chaque modèle est identique $x_f \in X_f \subset \mathbb{R}^n \equiv x_c \in X_c \subset \mathbb{R}^n$. On sépare maintenant les réponses de chaque modèle en fonction objectif et fonctions contraintes. $f(x)$ et $c(x)$ désignent les fonctions objectif fine et simple. $k_f(x)$ et $k_c(x)$ désignent les contraintes fines et simples.

Dans le cas d'une optimisation mono-objectif, seul l'ensemble des m correcteurs scalaires θ (m est le nombre de réponses calculées par le modèle fin) est mis à jour à chaque itération par la méthode NMS dans l'algorithme Output-Space-Mapping pour minimiser l'écart entre les deux modèles :

$$\theta^{(j+1)} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \left\| \begin{bmatrix} c(x^{(j)}, \theta_1) \\ k_c(x^{(j)}, \theta_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(x^{(j)}) \\ k_f(x^{(j)}) \end{bmatrix} \right\| \quad (3.53)$$

où $k = 2, \dots, m$.

À chaque objectif et à chaque contrainte, un coefficient correctif est ajouté comme suit :

$$\begin{bmatrix} c(x, \theta_1) \\ k_c(x, \theta_k) \end{bmatrix} = \operatorname{Diag}(\theta_i) \cdot \begin{bmatrix} c(x) \\ k_c(x) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

où $i = 1, \dots, m$. $\operatorname{Diag}(\theta_i)$ est la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont les θ_i .

Pour calculer la solution optimale, l'objectif et les contraintes étant corrigés, le problème d'optimisation est alors résolu :

$$x^{(j+1)} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \left\| c(x, \theta_1^{(j+1)}) - y \right\| \text{ tel que } k_c(x, \theta_k^{(j+1)}) \leq 0 \quad (3.55)$$

Les réponses $f(x^{(j+1)})$ et $k_f(x^{(j+1)})$ sont calculées en ce point $x^{(j+1)}$. L'algorithme s'arrête lorsque l'écart des réponses entre les deux modèles est suffisamment petit.

Dans le cas d'une optimisation multi-objectif résolu par la méthode ϵ -contraintes, pour chaque valeur du coefficient de contrainte $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$, les valeurs de ces m correcteurs doivent être changées pour chaque solution Pareto optimale. Les m correcteurs θ peuvent être donc remplacés par m fonctions splines cubiques $\theta(\epsilon)$:

$$\begin{bmatrix} c(x, \theta_1(\epsilon)) \\ k_c(x, \theta_k(\epsilon)) \end{bmatrix} = \operatorname{Diag}(\theta_i(\epsilon)) \cdot \begin{bmatrix} c(x) \\ k_c(x) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Étant donnés $(n + 1)$ points (ϵ_i, θ_i) , la fonction spline cubique $\theta(\epsilon)$ est définie par :

$$\theta(\epsilon) = \begin{cases} s_0(\epsilon) & \text{si } \epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1 \\ s_1(\epsilon) & \text{si } \epsilon_1 \leq \epsilon \leq \epsilon_2 \\ \cdot & \\ s_{n-1}(\epsilon) & \text{si } \epsilon_{n-1} \leq \epsilon \leq \epsilon_n \end{cases} \quad (3.57)$$

où ϵ_0, ϵ_n sont respectivement $\epsilon_{min}, \epsilon_{max}$. s_l est un polynôme de degré 3 comme suit :

$$s_l(\epsilon) = a_l(\epsilon - \epsilon_l)^3 + b_l(\epsilon - \epsilon_l)^2 + c_l(\epsilon - \epsilon_l) + d_l \quad \epsilon \in [\epsilon_l, \epsilon_{l+1}] \quad (3.58)$$

où $l = 0, \dots, n - 1$. Et ce polynôme est soumis aux conditions :

$$s_l(\epsilon_l) = \theta_l \quad (3.59a)$$

$$s_l(\epsilon_{l+1}) = s_{l+1}(\epsilon_{l+1}) \quad (3.59b)$$

$$s'_l(\epsilon_{l+1}) = s'_{l+1}(\epsilon_{l+1}) \quad (3.59c)$$

$$s''_l(\epsilon_{l+1}) = s''_{l+1}(\epsilon_{l+1}) \quad (3.59d)$$

L'équation (3.59) exprime l'interpolation de (ϵ_l, θ_l) . L'équation (3.59b) exprime la continuité de l'interpolateur, l'équation (3.59c) celle des dérivées premières, l'équation (3.59d) celle des dérivées secondes.

Pour chaque $s_l(\epsilon)$, il y a quatre coefficients (a_l, b_l, c_l, d_l) à calculer par les 4 équations (3.59). Pour $l = 0$ et $l = n$, les conditions de raccordement sont alors remplacées de manière arbitraire par :

$$s''_l(\epsilon_0) = 0 \quad (3.60a)$$

$$s''_l(\epsilon_n) = 0 \quad (3.60b)$$

Une fois que les fonctions correctives sont définies, les valeurs de chaque correcteur peuvent être calculées pour chaque point du front de Pareto. Le paragraphe suivant présente l'algorithme proposé (SM-MO) qui combine l'algorithme OSM et la technique d'optimisation multi-objectif ϵ -contraintes.

3.4.8.2 Algorithme SM-MO

L'algorithme SM-MO comprend des étapes principales suivantes :

- Étape 1 : Construire un front de Pareto en utilisant la méthode ϵ -contraintes avec le modèle simple.
Initialiser $j = 0$.
- Étape 2 : Choisir $2^j + 1$ points sur le front de Pareto (commencer avec les deux extrémités du front).
Évaluer le modèle fin en ces points choisis pour calculer $f(x_f)$, $k_f(x_f)$.
- Étape 3 : Mettre à jour les m fonctions correctives splines $\theta^{(j)}(\epsilon)$.
- Étape 4 : Construire un front de Pareto approché par la méthode ϵ -contraintes.
- Étape 5 : Arrêter si le critère d'arrêt (3.61) est satisfait.
Sinon, aller à l'étape suivante.
- Étape 6 : Mettre $j = j + 1$ et revenir à l'étape 2.

Les $2^j + 1$ points choisis pour les simulations EF correspondants au coefficient de contrainte sont uniformément répartis dans l'intervalle $[\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$ selon la méthode de dichotomie afin de construire les fonctions correctives splines le plus rapidement possible.

L'algorithme s'arrête lors que deux fronts de Pareto consécutifs sont suffisamment proches comme suit :

$$\left\| \begin{bmatrix} c(x, \theta_1^{(j+1)}(\epsilon)) \\ k_c(x, \theta_k^{(j+1)}(\epsilon)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c(x, \theta_1^{(j)}(\epsilon)) \\ k_c(x, \theta_k^{(j)}(\epsilon)) \end{bmatrix} \right\| \leq \tau \quad (3.61)$$

Cette démarche est appliquée au benchmark du transformateur de sécurité en employant un modèle 3D EF décrit dans le chapitre suivant.

3.4.9 Conclusion sur la technique du Space-Mapping

La technique du Space-Mapping permet de traiter des problèmes d'optimisation dont les modèles sont précis mais très coûteux en temps de calcul. Elle nécessite un deuxième modèle, rapide mais moins précis. Ce dernier peut être un modèle analytique, un modèle empirique, ou un modèle EF avec un maillage grossier. L'optimisation n'est pas directement faite avec le modèle fin, mais avec le modèle simple. Le modèle fin fournit les informations qui sont utilisées par le processus d'optimisation pour accroître la précision des solutions.

Plusieurs approches de Space-Mapping ont été abordées. Les deux approches plus récentes : Output Space-Mapping et Manifold-Mapping semblent plus intéressantes et efficaces car elles ne font pas appel au processus d'extraction de paramètre qui est délicat dans la technique conventionnelle du Space-Mapping. Output Space-Mapping aligne itérativement les deux modèles en ajoutant les correcteurs au modèle simple. Manifold-Mapping modifie les valeurs cibles à chaque itération par la méthode de correction de défauts. Ces valeurs cibles sont utilisées lors de l'optimisation avec le modèle simple.

Ces deux méthodes sont combinées avec la méthode Branch-and-Bound pour mettre au point deux algorithmes originaux OSM-BB et MM-BB qui permettent de résoudre des problèmes d'optimisation à variables discrètes ou mixtes avec des modèles fins comme les modèles EF.

Pour construire un front de Pareto précis avec le modèle EF, l'algorithme SM-MO qui combine la méthode OSM et la technique scalaire ϵ -contraintes est proposé. Cette approche permet non seulement d'accélérer la construction du front de Pareto mais aussi de trouver des régions non-convexe sur un front de Pareto.

3.5 Conclusion

Ce chapitre a détaillé les méthodes d'optimisation pour les différentes approches abordées dans le chapitre 2 : discrète, multi-objectif, multi-niveaux et leurs combinaison.

Pour l'approche combinatoire, la méthode déterministe Branch-and-Bound a été développée et comparée avec les techniques d'énumération exhaustive et de recherche au voisinage. Elle permet d'atteindre la solution globale dans un temps raisonnable.

Concernant l'approche multi-objectif discrète, deux nouveaux algorithmes ont été proposés en combinant deux techniques multi-objectif scalaires : pondération des objectives ou ϵ -contraintes avec la méthode Branch-and-Bound.

Pour obtenir la solution précise basée sur un modèle fin mais qui est lourd en temps de calcul, l'approche multi-niveaux comme les techniques du Space-Mapping a été étudiée et développée. Cette approche a aussi besoin d'un modèle simple mais rapide. Trois algorithmes Agressive Space-Mapping, Output-Space-Mapping et Manifold-Mapping ont été détaillés.

Ces deux derniers sont combinés avec la méthode Branch-and-Bound pour traiter le problème d'optimisation discrète. Deux algorithmes originaux, OSM-BB et MM-BB, ont ainsi été proposés.

La technique du Space-Mapping a été également couplée avec une méthode d'optimisation multi-objectif afin de calculer un front de Pareto précis en un temps raisonnable. Un algorithme original nommé SM-MO est présenté.

Toutes ces méthodes d'optimisation sont appliquées et comparées sur le benchmark d'un transformateur de sécurité exposé au chapitre 4.

Chapitre 4

Application au Benchmark d'un Transformateur de Sécurité

Sommaire

4.1 Introduction	103
4.2 Modélisation d'un Transformateur de Sécurité	103
4.2.1 Modèle thermo-magnéto-électrique analytique avec l'hypothèse de Kapp	104
4.2.2 Modèle thermo-magnéto-électrique analytique sans l'hypothèse de Kapp	106
4.2.3 Modèle EF magnétodynamique complexe 2D avec couplage faible à un modèle EF thermique statique 2D	108
4.2.4 Modèle EF magnétodynamique complexe 3D avec couplage faible à un modèle EF thermique statique 3D	109
4.2.5 Comparaison des modèles	111
4.3 Validations Expérimentales	113
4.4 Approches pour l'Éco-conception	115
4.4.1 Analyse du cycle de vie	116
4.4.2 Onze impacts environnementaux	117
4.4.3 ACV et l'optimisation	118
4.4.4 Modèle d'impact pour l'optimisation multi-objectif	119
4.5 Comparaison des Méthodes d'Optimisations Discrète, Multi-Objectif et Multi-Niveaux	124
4.5.1 Optimisation discrète	124
4.5.2 Optimisation continue multi-objectif	130
4.5.3 Optimisation discrète multi-objectif	132
4.5.4 Optimisation pour l'éco-conception	134
4.5.5 Optimisation multi-niveaux continue	140
4.5.6 Optimisation multi-niveaux discrète	143
4.5.7 Optimisation multi-niveaux multi-objectif	145
4.6 Site Internet pour le Benchmark du Transformateur de Sécurité .	150
4.6.1 Modèles disponibles	151
4.6.2 Capitalisation des connaissances	152
4.7 Conclusion	153

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, les méthodes d'optimisation présentées au chapitre 3 sont testées sur le problème de la conception optimale d'un transformateur de sécurité qui a été présenté au chapitre 2.

Différentes façons de prendre en compte des phénomènes électriques, magnétiques et thermiques au sein du transformateur aboutissent à 4 modèles thermo-magnéto-électriques. Deux modèles analytiques avec et sans l'hypothèse de Kapp et deux modèles EF 2D et 3D sont détaillés. Ces 4 modèles sont comparés et un modèle simple et un modèle précis sont choisis pour l'optimisation. Ces deux modèles sont ensuite validés par comparaison avec les mesures expérimentales. Un modèle disciplinaire concernant l'impact environnemental est également introduit.

Plusieurs problèmes d'optimisation sont proposés pour traiter le problème de conception optimale du transformateur. Un premier problème d'optimisation discrète est résolu par la méthode Branch-and-Bound. Ses résultats sont comparés avec les autres méthodes : Énumération Exhaustive, Algorithme Génétique et le logiciel Pro@Design.

Ensuite, plusieurs problèmes de conception sont formulés en termes d'optimisation multi-objectif et les méthodes proposées précédemment sont testées.

Enfin, les problèmes de conception sont posés en termes d'optimisation multi-niveaux avec des applications particulières aux cas continu, discret et multi-objectif.

4.2 Modélisation d'un Transformateur de Sécurité

Le choix et la description du transformateur de sécurité ont été détaillés chapitre 2, paragraphe 2.3.2. Le transformateur de sécurité est un transformateur monophasé abaisseur 50 Hz. Il est réversible. La figure 4.1 montre sa géométrie.

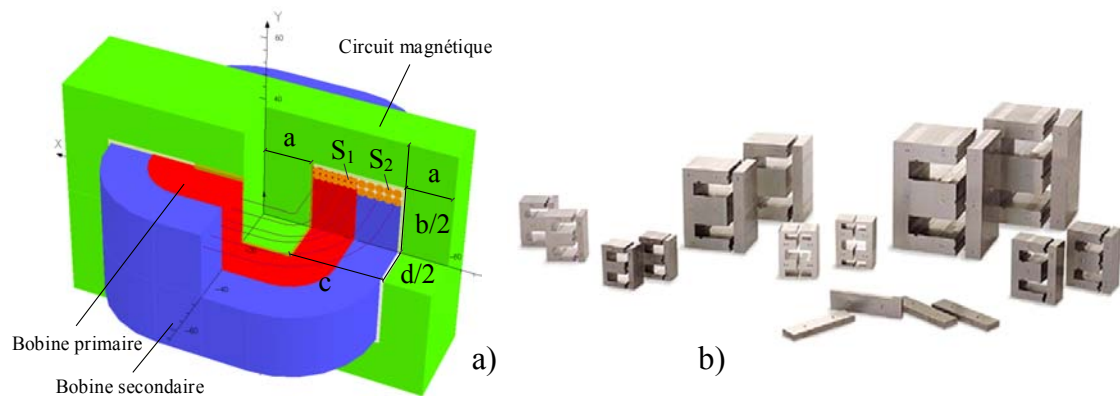


FIG. 4.1 – (a) Géométrie du transformateur par la simulation en 3D avec une coupe du huitième. (b) Circuit magnétique standard de tôle E-I.

Le transformateur se compose de deux enroulements primaire et secondaire bobinés sur le noyau central d'un circuit magnétique E-I. Ce dernier est feuilleté et constitué de tôles minces à cristaux non-orientées empilées les unes aux autres. Les pertes spécifiques des tôles de ce transformateur modélisé sont 1 (W/kg) pour 1 Tesla.

Les phénomènes thermiques, magnétiques, électriques du transformateur de sécurité sont modélisés par deux modèles analytiques avec et sans l'hypothèse de Kapp et deux modèles éléments finis EF 2D et 3D [TRA-07a].

4.2.1 Modèle thermo-magnéto-électrique analytique avec l'hypothèse de Kapp

4.2.1.1 Modèle thermique nodal

Les hypothèses associées sont :

- les échanges thermiques entre le noyau central et les bobines sont de type uniquement conductif ;
- il n'y a pas d'échange thermique entre la bobine secondaire et le circuit magnétique ;
- à l'exception du noyau central, il n'y a pas d'échange thermique entre la bobine primaire et le circuit magnétique ;
- le contact entre les deux bobines est parfait ;
- toutes les surfaces ont le même coefficient de convection ;
- les températures dans les parties cuivre et fer sont uniformes.

Le modèle thermique initial qui en dérive est donné en figure 4.2 gauche. La transformation de Kennelly aboutit alors au modèle en figure 4.2 droite.

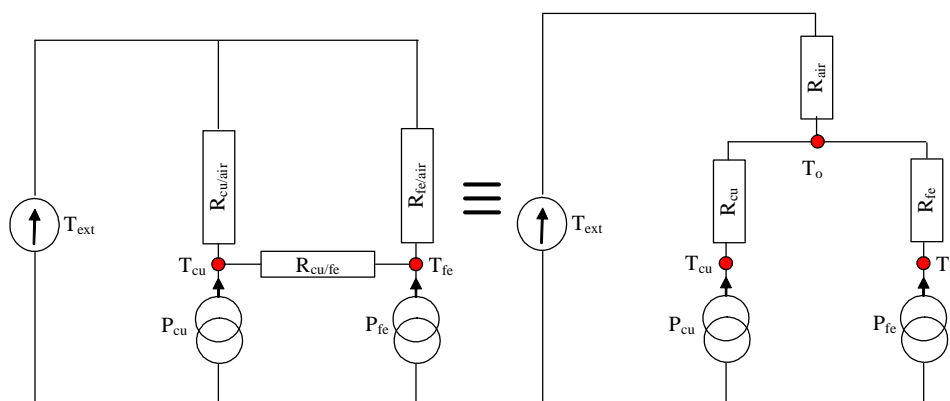


FIG. 4.2 – Schéma équivalent du modèle thermique nodal

À partir du modèle transformé, on peut en déduire la température cuivre des bobines et la température fer du circuit magnétique :

$$T_{cu} = T_{ext} + \frac{R_{fe/air} \cdot P_{cu} + R_{fe/air} \cdot P_{fe} + R_{cu/fe} \cdot P_{cu}}{R_{fe/air} + R_{cu/air} + R_{cu/fe}} \cdot R_{cu/air} \quad (4.1)$$

$$T_{fe} = T_{ext} + \frac{R_{cu/air} \cdot P_{cu} + R_{cu/air} \cdot P_{fe} + R_{cu/fe} \cdot P_{fe}}{R_{fe/air} + R_{cu/air} + R_{cu/fe}} \cdot R_{fe/air} \quad (4.2)$$

- où T_{cu}, T_{fe}, T_{ext} - températures cuivre, fer et extérieure
 $R_{cu/air}, R_{fe/air}, R_{cu/fe}$ - résistances thermiques entre le cuivre et l'air, entre le fer et l'air, entre le cuivre et le fer
 P_{cu}, P_{fe} - pertes Joule et pertes fer

4.2.1.2 Modèle magnéto-électrique avec l'hypothèse de Kapp

Le premier modèle analytique est construit avec l'hypothèse de Kapp [SEG-94]. Les hypothèses associées à ce modèle sont la distribution uniforme de l'induction dans le circuit magnétique, et l'absence de chute de tension due au courant magnétisant (hypothèse de Kapp). Le schéma équivalent est donné dans la figure 4.3.

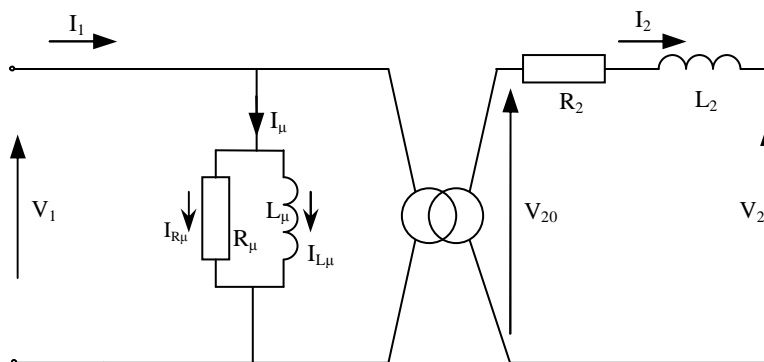


FIG. 4.3 – Schéma équivalent du modèle avec l'hypothèse de Kapp

L'induction maximale B_m est calculée :

$$B_m = \frac{1}{4\pi} \cdot V_1 \frac{\sqrt{2}}{n_1 \cdot a \cdot d \cdot f} \quad (4.3)$$

- où I_1, I_2, I_μ - courants primaire, secondaire et magnétisant
 V_1, V_2, V_{20} - tensions primaire, secondaire et à vide
 R_μ, R_2 - résistances magnétisante et totale ramenée au secondaire
 L_μ, L_2 - inductances magnétisante et totale ramenée au secondaire
 n_1 - nombre de spires primaires
 a, d - paramètres géométriques du circuit magnétique
 f - fréquence de fonctionnement

4.2.1.3 Ordonnancement du système d'équations

Les phénomènes physiques dans le transformateur sont électriques, magnétiques et thermiques. Ils sont exprimés par un système d'équations qui est ordonné en utilisant un algorithme spécifique [DUF-78a], [DUF-78b]. L'ordonnancement des équations facilite leur

résolution en mettant en évidence un ensemble d'équation qu'il est possible de résoudre séquentiellement et un système implicite minimal qui nécessite un traitement particulier. La matrice d'incidence de ce système d'équation est donnée en figure 4.4. Chaque ligne est associée à une équation et chaque colonne à un paramètre. Le coefficient a_{ij} de la matrice est 1 si le paramètre x_j apparaît dans l'équation $g_i(x_1, \dots, x_n)$ et 0 autrement. Les colonnes surlignées représentent les variables de conception. Le modèle mène à un système implicite de 8 équations (figure 4.6 droite) et les autres 42 équations sont résolues séquentiellement. Ce système implicite non-linéaire est résolu en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquardt disponible dans l'Optimization Toolbox de Matlab® [OPT-99]. Les résultats ne dépendent pas des valeurs initiales.

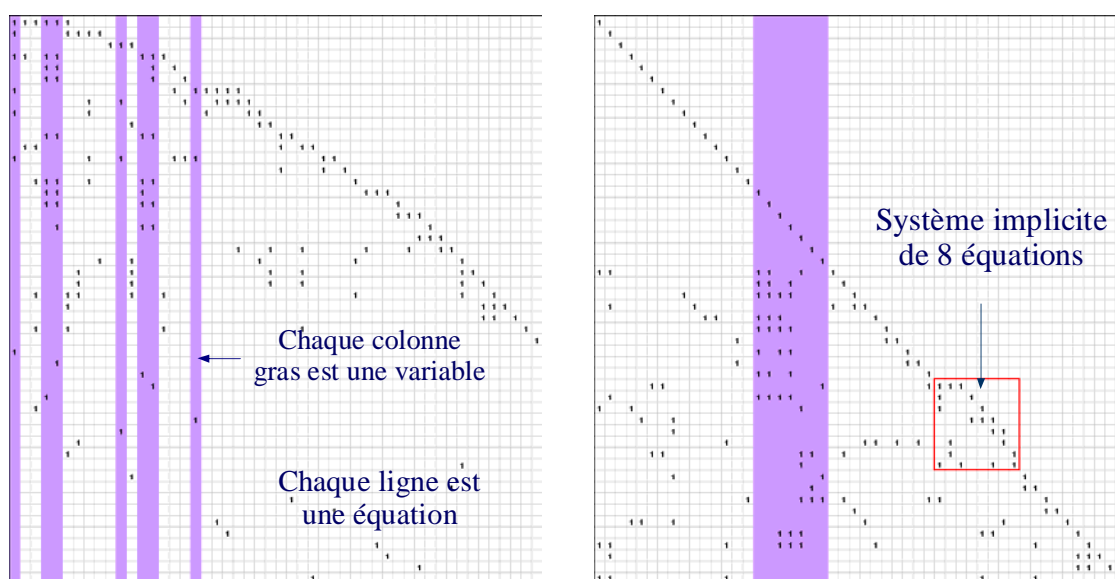


FIG. 4.4 – Système d'équations avant et après l'ordonnancement

Une description complète de ce modèle entièrement analytique est disponible dans [TRA-07b] (fichiers pdf, Matlab, Mathcad, et Pro@Design [PRO-05]).

4.2.2 Modèle thermo-magnéto-électrique analytique sans l'hypothèse de Kapp

Un second modèle thermo-magnéto-électrique analytique est obtenu en tenant en compte de la chute de tension due au passage du courant magnétisant dans la résistance primaire. Le modèle magnéto-électrique est donné en figure 4.5. La conservation des Ampère-tours s'écrit :

$$n_1 \cdot \bar{I}_\mu = n_1 \cdot \bar{I}_1 - n_2 \cdot \bar{I}_2 \quad (4.4)$$

où n_1, n_2 - nombre de spires primaires et secondaires

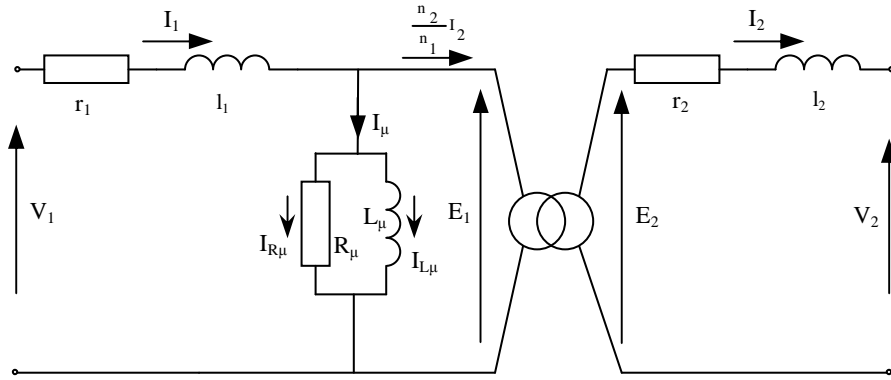


FIG. 4.5 – Schéma équivalent du modèle sans l'hypothèse de Kapp

- où E_1, E_2 - forces électromotrices du primaire et secondaire
 r_1, r_2 - résistances primaire et secondaire
 l_1, l_2 - inductances de fuite primaire et secondaire

L'induction maximale est maintenant :

$$B_m = \frac{1}{4\pi} \cdot E_1 \frac{\sqrt{2}}{n_1 \cdot a \cdot d \cdot f} \quad (4.5)$$

En utilisant la même technique d'ordonnancement du système d'équations, ce modèle mène à un système implicite de 21 équations (ou bien 16 équations en complexe). Cependant, la résolution numérique de ce système nécessite une initialisation délicate sous peine de divergence. Cette difficulté est levée en utilisant la résolution du modèle précédent comme valeur initiale. La figure 4.6 représente cette procédure de résolution.

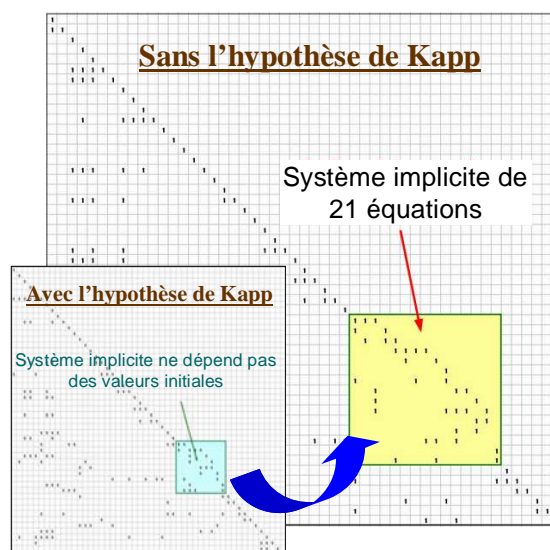


FIG. 4.6 – Système d'équations après l'ordonnancement

4.2.3 Modèle EF magnétodynamique complexe 2D avec couplage faible à un modèle EF thermique statique 2D

Après avoir construit deux modèles “simple” analytiques, deux modèles “fins” éléments finis (EF 2D et EF 3D) sont ensuite construits en utilisant le logiciel Opera® [OPE-04]. Ils prennent en compte des phénomènes magnétiques et thermiques dans ce dispositif et de plus permettent de valider les modèles analytiques et de les comparer.

Les circuits électriques extérieurs comprennent une source de tension, des résistances et une force électromotrice tenant compte du nombre de spires. Le primaire et le secondaire possèdent chacun un circuit extérieur. Deux simulations en charge et à vide sont faites pour déterminer toutes les caractéristiques de ce transformateur.

Dans la simulation magnétique EF, le solveur magnétique AC sinusoïdal est pris. Les pertes fer sont calculées par la formule de Steinmetz :

$$P_{fe} = q \cdot m_v \cdot \int_{\Omega} B^2 \cdot d\Omega \quad (4.6)$$

- où q - pertes spécifiques de la tôle
 m_v - masse volumique du circuit magnétique
 B^2 - carré du module de l'induction moyenne dans un élément
 Ω - domaine du fer

Les inductances de fuites sont calculées par la méthode énergétique :

$$l_{bb}^f = 2 \cdot \frac{W_{bb}}{I_{bb}^2} \quad (4.7)$$

- où l_{bb}^f - inductance de fuite de la bobine primaire ou secondaire
 W_{bb} - énergie emmagasinée dans le domaine de la bobine primaire ou secondaire
 I_{bb} - courant primaire ou secondaire

Dans la modélisation EF thermique, toutes les hypothèses associées aux modèles analytiques sont retenues à l'exception de l'uniformité de la température. Les sources de chaleurs sont les pertes fer et Joule calculées par le modèle EF magnétique et réparties uniformément dans les matériaux afin de faciliter la modélisation.

Le transformateur est symétrique. Il suffit de simuler le quart du transformateur en EF 2D. La figure 4.7 présente les phénomènes magnétiques et thermiques dans ce transformateur de sécurité. L'induction est faible aux extrémités ce qui permet en réalité d'y placer le système de serrage des tôles sans dégrader les performances du transformateur. Contrairement à l'hypothèse utilisée dans le modèle analytique, la distribution thermique en EF 2D est non-uniforme. Il y a des gradients thermiques faible dans le circuit magnétique et fort dans les bobines.

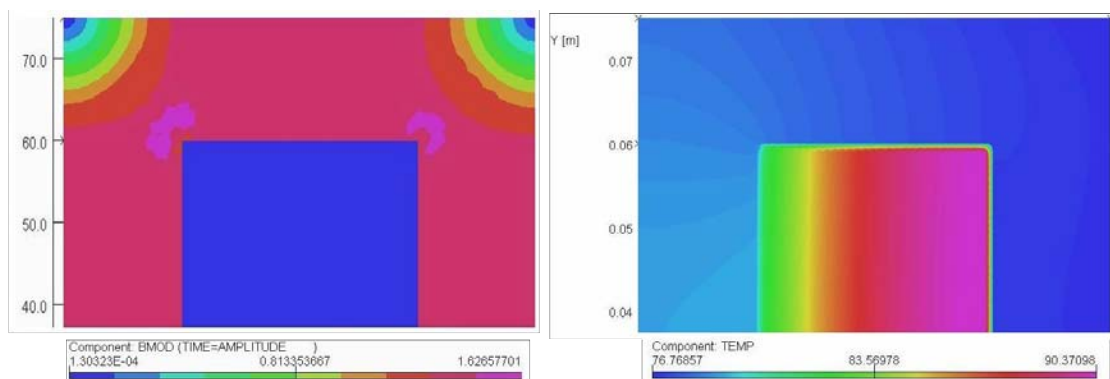


FIG. 4.7 – Simulations EF 2D magnétique (gauche) et thermique (droite) sur le quart du transformateur

4.2.4 Modèle EF magnétodynamique complexe 3D avec couplage faible à un modèle EF thermique statique 3D

Comme le dispositif est symétrique, le modèle EF 3D comprend le 8^{ième} du transformateur (figures 4.8 et 4.9).

La figure 4.8 montre les maillages dans le circuit magnétique, l'isolation, l'entrefer, le support et les directions opposées du courant dans les bobinages primaire et secondaire. Il y a 43 000 noeuds et 290 000 éléments dans le maillage.

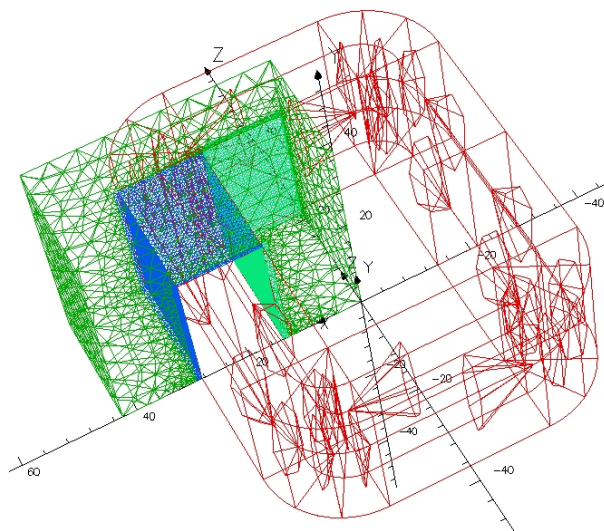


FIG. 4.8 – Maillage du 8^{ième} transformateur

Pour la modélisation magnéto-électrique, toutes les quantités magnétiques et électriques sont supposées sinusoïdales. Deux simulations en charge et à vide sont aussi faites pour déterminer toutes les caractéristiques. Les pertes fer sont calculées par la formule de Steinmetz (4.6). Les inductances de fuites sont calculées par la méthode énergétique. L'induction dans le circuit magnétique peut être observée sur le 8^{ième} du transformateur dans la figure

4.9 gauche. Le flux créé par les bobines est principalement dans le fer mais il existe un flux de fuite dans l'air et les bobines. Ce champ de fuite est maximum entre les deux bobines.

Les températures observées (figure 4.9 droite) dans le circuit magnétique ne sont pas uniformes, et il apparaît que le cuivre sous le fer est le plus chaud, ce qui est conforme à la physique.

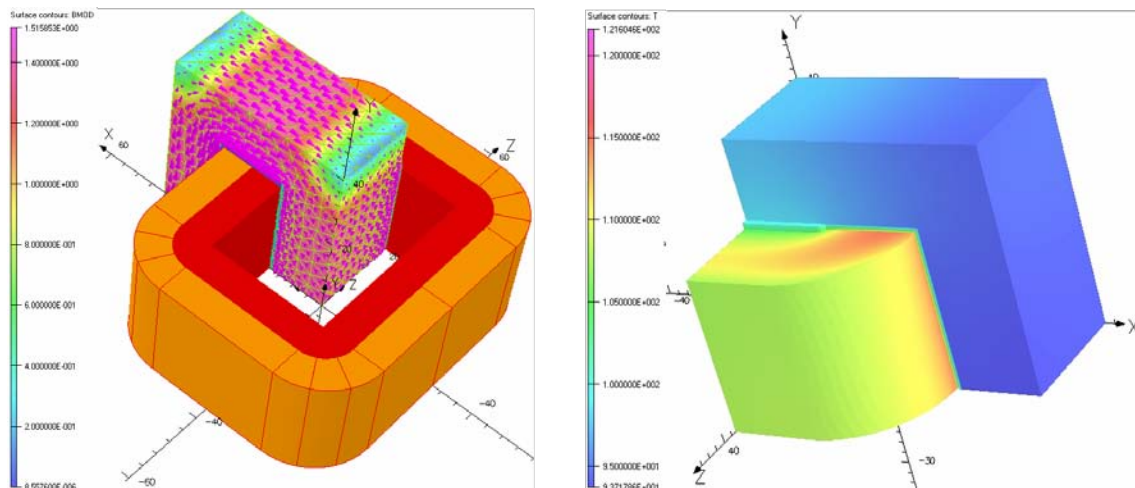


FIG. 4.9 – Simulations EF 3D magnétique (gauche) et thermique (droite) sur le 8^{ième} du transformateur

4.2.4.1 Couplage faible magnéto-thermique

Un couplage faible magnéto-thermique est aussi considéré (figure 4.10).

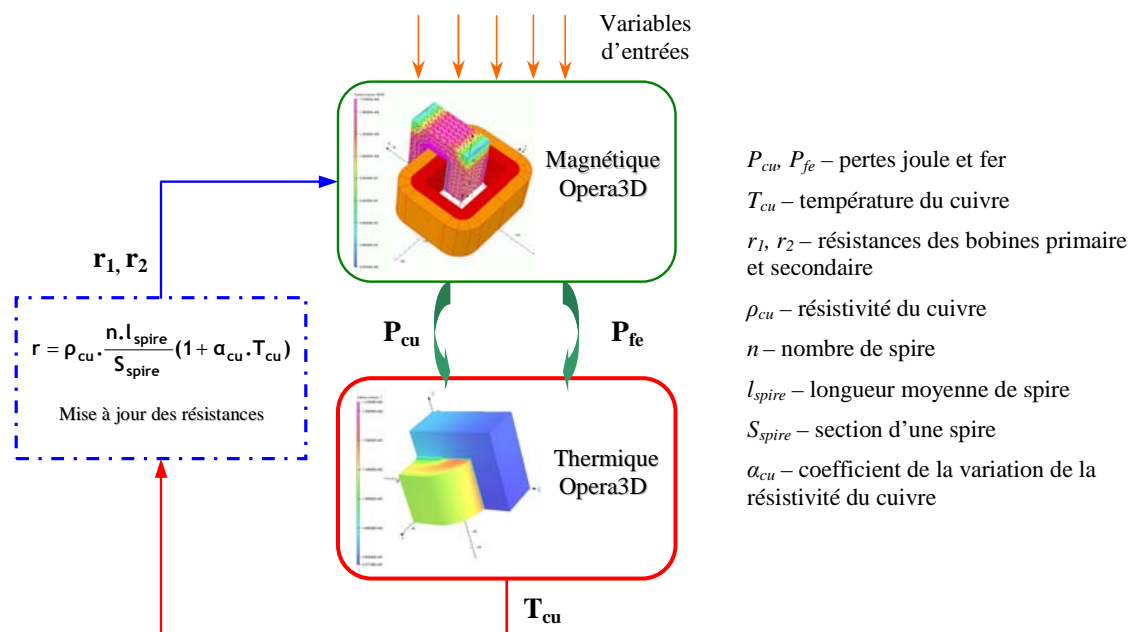


FIG. 4.10 – Couplage "faible" magnéto-thermique en EF 3D

Les solveurs Opera magnétique et thermique sont pilotés depuis Matlab. Les pertes Joule et fer P_{cu} , P_{fe} calculées par le solveur magnétique complexe sont introduites dans le solveur thermique statique comme des sources de chaleur. Ensuite Opera3D thermique calcule la température moyenne du cuivre T_{cu} qui sert à calculer des résistances primaire et secondaire r_1 , r_2 . Celles-ci sont rebouclées dans Opera3D magnétique jusqu'à la convergence de la température du cuivre. Le temps de simulation EF en tenant compte du couplage magnéto-thermique et des essais en charge et à vide est donc très long (environ 2 heures).

Les scripts Matlab et les fichiers de commande Opera3D sont disponibles dans [\[TRA-07b\]](#).

4.2.5 Comparaison des modèles

Une configuration donnée de transformateur a été choisie pour comparer les 4 modèles : puissance 192 (VA) ; tension primaire 230 (V) ; tension secondaire 24 (V) ; facteur de puissance 0.8 ; pertes spécifiques de tôles 1 (W.kg^{-1}) pour 1 Tesla ; résistivité du cuivre $1.72.10^{-8}$ ($\Omega.\text{m}$) ; coefficient de variation de la résistivité du cuivre $3.8.10^{-3}$ (C^{-1}) ; coefficient du transfert de chaleur par convection 10 ($\text{W.m}^{-2}.\text{C}^{-1}$) ; conductivité thermique du matériel isolant 0.15 ($\text{W.m}^{-1}.\text{C}^{-1}$). La perméabilité relative des tôles utilisée pour les modèles utilise l'expression suivante [\[MAR-90\]](#) :

$$\mu_r(B) = \frac{1}{\chi + \frac{(1 - \chi) \cdot B^{2 \cdot \alpha}}{B^{2 \cdot \alpha} + T}} \quad (4.8)$$

où μ_r - perméabilité relative des tôles
 χ , α , T - constantes positives qui dépendent du milieu considéré

Ainsi, la caractéristique de la courbe hystérésis $B(H)$ peut être déterminée selon :

$$H(B) = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r(B)} \quad (4.9)$$

où H - Champ magnétique du circuit magnétique
 μ_0 - perméabilité du vide, $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ (H/m)

La figure 4.11 donne la courbe $B(H)$ résultante avec :

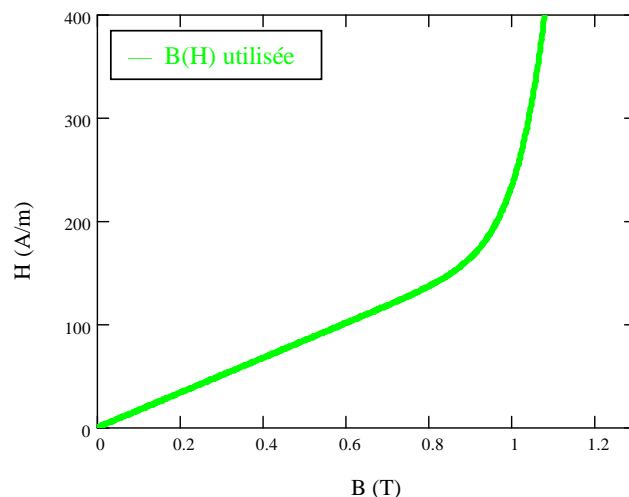
$$\chi = 2.12.10^{-4}$$

$$\alpha = 7.358$$

$$T = 1.18.10^6$$

La configuration du transformateur est :

- la tôle EI et la carcasse : $a = 15$ mm ; $b = 45$ mm ; $c = 30$ mm ; $d = 30$ mm ;
- bobine primaire : $n_1 = 800$ spires ; $S_1 = 0.422$ mm² ;
- bobine secondaire : $n_2 = 92$ spires ; $S_2 = 3.661$ mm² ;


 FIG. 4.11 – Courbe $B(H)$ avec les paramètres $\chi = 2.12 \cdot 10^{-4}$; $\alpha = 7.358$; $T = 1.18 \cdot 10^6$

TAB. 4.1 – Comparaison des 4 modèles

Résultats	Nota.	Unité	Modèles analytiques		Modèles EF	
			avec Kapp	sans Kapp	2D	3D
Résistance primaire	r_1	Ω	7.676	7.730	7.210	7.670
Résistance secondaire	r_2	Ω	0.158	0.161	0.150	0.159
Inductance de fuite prim.	l_1	mH	17.04	17.04	4.995	13.594
Inductance de fuite secon.	l_2	mH	0.281	0.282	0.073	0.221
Courant primaire	I_1	A	0.981	0.971	0.995	0.954
Courant magnétisant	I_μ	mA	83.817	64.522	80.117	67.715
Inductance magnétisante	L_μ	H	8.846	11.12	9.336	9.943
Induction maximale	B_m	T	1.438	1.381	1.308	1.284
Pertes fer	P_{fe}	W	3.048	2.812	2.593	3.346
Pertes Joule	P_{cu}	W	16.625	17.555	17.254	16.952
Chute de tension	ΔV_2	V	2.469	2.499	1.849	2.687
Rendement	η	%	88.4	88.1	89.1	87.4
Température du fer	T_{fe}	$^\circ\text{C}$	96.2	98.0	74.2	98.28
Température du cuivre	T_{cu}	$^\circ\text{C}$	107.4	110.0	84.9	128.72
Temps de calcul	t	s	$6 \cdot 10^{-2}$	0.5	76	6942.6

Le tableau 4.1 compare les résultats des 4 modèles. Il est montré que les résultats trouvés par le modèle analytique avec l'hypothèse de Kapp sont très proches ceux du modèle analytique sans l'hypothèse de Kapp. Cela justifie l'utilisation de l'hypothèse de Kapp. En plus, le système implicite de 8 équations qui apparaît dans le modèle avec l'hypothèse de Kapp est facile à résoudre et le résultat ne dépend pas des valeurs initiales. Il est donc plus robuste. Les résultats du modèle EF 2D sont mauvais pour les inductances

de fuite, la chute de tension et les températures du circuit magnétique et des bobinages. Dans le modèle EF 2D, les valeurs des inductances de fuite sont trois fois plus petites que celles des autres modèles car les têtes de bobine sont négligées. En outre, le modèle thermique EF 2D ne tient pas en compte de la convection sur les faces non perpendiculaires au plan de coupe.

Le modèle EF 3D est le plus précis, mais il a besoin d'un temps calcul très important. Les résultats du modèle analytique sont assez proches de ceux du modèle EF 3D. Le point faible des modèles analytiques est la thermique (distribution thermique uniforme dans le circuit magnétique et le bobinage). En conclusion, le modèle "simple" analytique avec l'hypothèse de Kapp et le modèle "fin" EF 3D sont retenus pour mener plusieurs optimisations séparément ou conjointement. Ils sont confrontés aux mesures expérimentales dans le paragraphe suivant.

4.3 Validations Expérimentales

Un transformateur industriel [LEU] a été fourni pour la validation et la comparaison des modèles. Ses caractéristiques sont : puissance 96 (VA) ; tension primaire 230 (V) ; tension secondaire 12 (V) ; facteur de puissance 0.88 ; température ambiante 22 (°C) ; pertes spécifiques des tôles 2.3 (W.kg⁻¹) pour 1 Tesla. Le coefficient du transfert de chaleur par convection est pris à 10 (W.m⁻².C⁻¹). La perméabilité des tôles utilisée pour les modèles est comparée avec celle de la mesure expérimentale. La courbe $B(H)$ est ainsi interpolée comme montré en figure 4.12.

La caractéristique expérimentale ferromagnétique $B(H)$ est déterminée points par points lors de l'essai à vide. La méthode de simplexe NMS [LAG-98] est appliquée pour déterminer les 3 coefficients dans la formule (4.8) : $\chi = 1.7895.10^{-4}$; $\alpha = 2.5713$; $T = 1.6668.10^4$.

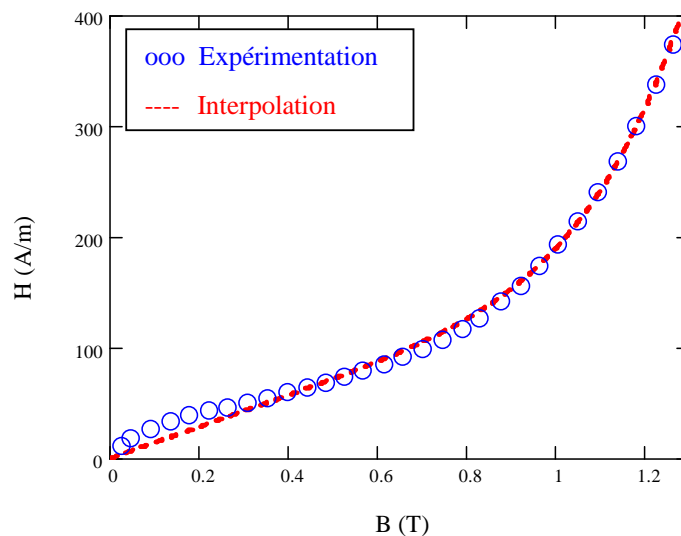


FIG. 4.12 – Courbes $B(H)$ expérimentale et interpolée utilisée dans les modèles

Les variables de conception du transformateur réalisé sont :

- la tôle EI et la carcasse : $a = 14 \text{ mm}$; $b = 42 \text{ mm}$; $c = 14 \text{ mm}$; $d = 40 \text{ mm}$;
- bobine primaire : $n_1 = 920 \text{ spires}$; $S_1 = 0.09898 \text{ mm}^2$;
- bobine secondaire : $n_2 = 52 \text{ spires}$; $S_2 = 1.7672 \text{ mm}^2$;

Pour imposer le facteur de puissance égal à 0.88, deux inductances de 1 (mH) et un rhéostat de 6 (Ω) sont utilisés. Afin d'estimer les pertes, deux wattmètres numériques LEM, côté primaire et côté secondaire, sont utilisés pour mesurer la puissance entrante et sortante du transformateur. La figure 4.13 représente tous les dispositifs et les appareils de mesure. Après 3 heures en charge, les résistances de deux bobines primaire et secondaire sont mesurées, on en déduit la température du bobinage.

Pour déterminer l'induction maximale dans le circuit magnétique, une bobine auxiliaire de 100 spires utilisant un fil très fin est bobinée autour du noyau central. La mesure de la tension aux bornes de cette bobine permet de déduire l'induction maximale dans le circuit magnétique.



FIG. 4.13 – Mesures expérimentales

Les résultats des deux modèles et des mesures expérimentales sont présentés dans le tableau 4.2. Le modèle EF 3D est plus précis mais il a besoin d'un temps de calcul très long à cause du couplage magnéto-thermique. Les résultats du modèle analytique sont assez proches de EF 3D. Les différences de résistance obtenues par les deux modèles sont dues à la différence de température du cuivre. En effet, les températures dans le bobinage et dans le circuit magnétique du transformateur ne sont pas uniformes (voir la simulation EF 3D thermique dans la figure 4.9), ce qui est contraire à l'hypothèse thermique du modèle analytique. Le point faible du modèle analytique est donc l'hypothèse d'une température uniforme dans le cuivre et dans le fer.

TAB. 4.2 – Validation du modèle simple et modèle fin en mesures expérimentales

Résultats	Nota.	Unité	Modèle analy. avec Kapp	Modèle EF 3D	Mesures expérimenten.
Résistance primaire	r_1	Ω	35.90	37.15	33.70
Résistance secondaire	r_2	Ω	0.145	0.150	0.162
Inductance total de fuite ramenée au secondaire	L_2	mH	0.068	0.075	0.057
Courant primaire	I_1	A	0.460	0.459	0.479
Courant magnétisant	I_μ	mA	26.46	19.78	35.34
Inductance magnétisante	L_μ	H	29.49	24.64	19.08
Induction maximale	B_m	T	1.005	0.917	0.940
Pertes fer	P_{fe}	W	3.41	2.96	3.21
Pertes Joule	P_{cu}	W	16.64	17.42	18.24
Chute de tension	ΔV_2	V	1.92	2.09	2.07
Rendement	η	%	79.20	79.41	78.28
Température du cuivre	T_{cu}	°C	109.49	123.71	120.38
Temps de calcul	t	s	6.10^{-2}	7200	10800

4.4 Approches pour l'Éco-conception

L'éco-conception consiste à intégrer les aspects environnementaux dès les phases de conception et de développement des produits. Le but de l'éco-conception est de réduire les impacts environnementaux négatifs des produits durant leur cycle de vie, tout en préservant la qualité de fonctionnement du produit ou en l'améliorant. En général, le cycle de vie d'un produit comprend les 4 étapes suivantes (figure 4.14) :

- L'extraction des ressources naturelles et la fabrication du produit,
- La distribution du produit,
- L'utilisation du produit,
- La valorisation finale du produit.

L'éco-conception constitue un axe majeur de prévention ou de réduction à la source des impacts environnementaux. La force de ce domaine est la pluralité de son approche. La vision multi-critères considère toutes les étapes de du cycle de vie du produit (fabrication, distribution, utilisation, valorisation finale) de manière à éviter les déplacements de pollutions inhérents à telle ou telle alternative de conception, car toute la modification des caractéristiques d'un produit a des répercussions sur l'ensemble de son cycle de vie. L'éco-conception permet en outre de rechercher un compromis entre les contraintes techniques

(faisabilité, ...), économiques (maîtrise des coûts, ...) et environnementales (impacts, ...), qui sont parfois plus inter-dépendantes qu'on peut le supposer. Ainsi, l'utilisation de telle matière va peut-être réduire les coûts de prise en charge en fin de vie tout en minimisant l'impact sur l'environnement et conserver les caractéristiques techniques majeures.

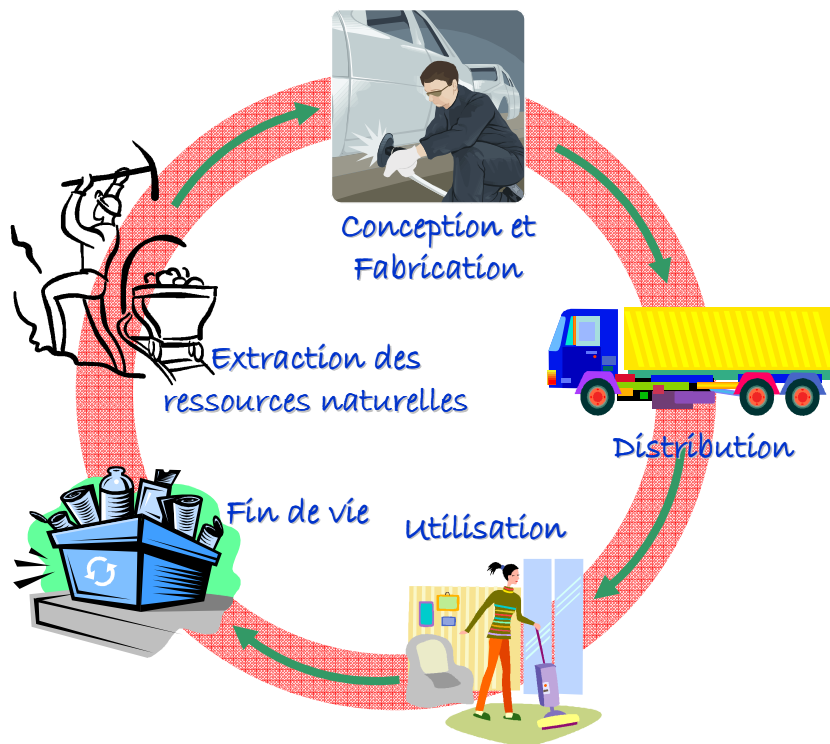


FIG. 4.14 – Cycle de vie d'un dispositif [EIM]

4.4.1 Analyse du cycle de vie

La méthode la plus complète, l'Analyse du Cycle de Vie (ACV) est une méthodologie rigoureuse réglementée par la norme ISO 14040 [ISO-06] qui évalue tous les impacts environnementaux. L'ACV prend en compte de toutes les phases du cycle de vie d'un produit. L'ACV repose sur une démarche en 4 phases :

- Définir les objectifs et le champ d'étude du produit à concevoir,
- Établir l'inventaire du cycle de vie : collection des données concernant les limites du système, la consommation d'énergie et de matériaux, les pollutions de l'air et de l'eau, etc.,
- Évaluer les impacts du cycle de vie : analyse de l'inventaire du cycle de vie pour évaluer l'impact du produit en se basant sur les indicateurs environnementaux,
- Interpréter le cycle de vie : analyse de ces indicateurs d'impact, le but, la possibilité ; conclusion sur la qualité.

4.4.2 Onze impacts environnementaux

Le tableau 4.3 représente un récapitulatif des 11 indicateurs d'impact basés sur l'approche ACV définis dans le logiciel EIME® [EIM]. Une brève description de ces 11 impacts est présentée ci-dessous.

TAB. 4.3 – Récapitulatif de 11 indicateurs d'impact environnemental définis par EIME

N°	Indicateurs d'impact	Abréviation	Unité
1	Raw Material Depletion	RMD	%/an
2	Energy Depletion	ED	MJ
3	Water Depletion	WD	dm ³
4	Global Warming	GW	g ~ CO ₂
5	Ozone Depletion	OD	g ~ CFC – 11
6	Air Toxicity	AT	dm ³
7	Photochemical Ozone Creation	POC	g ~ C ₂ H ₄
8	Air Acidification	AA	g ~ H ⁺
9	Water Toxicity	WT	dm ³
10	Water Eutrophication	WE	g ~ PO ₄ ³⁻
11	Hazardous Waste Production	HWP	kg

L'indicateur **RMD** (épuisement de ressources naturelles) est défini comme la décroissance de la disponibilité des ressources naturelles. Ces ressources (matières premières, ...) peuvent être d'origines fossile et minérale, à l'exclusion des ressources biotiques. L'indicateur associé est calculé en pourcentage d'épuisement de la réserve par an (%/an).

L'indicateur **ED** (consommation d'énergie quelque soit son origine) est défini soit comme la combustion de matières, fossiles ou non (nucléaire), soit comme la l'emploi d'autres sources telles que l'hydroélectricité, le solaire, l'éolien, ... L'indicateur associé est calculé en MJ.

L'indicateur **WD** (consommation d'eau) est défini comme la consommation de toutes sortes d'eau, quelle que soit sa qualité (potable ou pas, ...). L'indicateur associé est calculé en dm³.

L'indicateur **GW** (effet de serre) est défini par la contribution au réchauffement global de l'atmosphérique à cause des émissions de gaz. Il est calculé en grammes de CO₂ équivalent.

L'indicateur **OD** (diminution de la couche d'ozone) calcule la contribution de chacun des gaz à la diminution de la couche d'ozone stratosphérique. Il est calculé en grammes de CFC-11 équivalent.

L'indicateur **AT** (toxicité de l'air) calcule le volume émis d'air toxique à hauteur d'homme. Il est calculé en dm^3 .

L'indicateur **POC** (création d'ozone photochimique) calcule le potentiel de création d'ozone photochimique du au relâchement des gaz qui deviennent oxydants dans la basse atmosphère sous l'action du soleil. Il est calculé en grammes d'éthylène (C_2H_4) équivalent.

L'indicateur **AA** (acidification de l'air) calcule le potentiel d'acidité de l'air suite au relâchement de substances, qui sont principalement le dioxyde de soufre (SO_2), provenant de la combustion du charbon et du fuel résiduel, c'est-à-dire les combustibles utilisés dans les centrales électriques ou dans l'industrie ; les oxydes d'azote (NO_2 , NO_3), émis par les véhicules à moteur et l'ammoniac (NH_4), provenant des activités agricoles. Il est calculé en grammes de H^+ équivalent.

L'indicateur **WT** (toxicité de l'eau) comme l'indicateur AT calcule le volume d'eau toxique rejeté dans la nature. Il est calculé en dm^3 .

L'indicateur **WE** (eutrophisation) calcule l'enrichissement en substances nutritives des lacs et eaux marines. Il est calculé en grammes de PO_4^{3-} équivalent.

L'indicateur **HWP** (production de déchets dangereux) calcule la quantité de déchets dangereux générés pour un produit donné. Il est calculé en kg.

4.4.3 ACV et l'optimisation

Nous proposons deux approches pour intégrer l'éco-conception dans le processus d'optimisation [TRA-08b].

L'idée de la première approche est d'évaluer les 11 impacts environnementaux sur les quatre étapes (fabrication, distribution, utilisation et valorisation) de l'ACV d'un dispositif électromagnétique. La comparaison des impacts à chaque étape fournit des cibles prioritaires pour la réduction de l'impact global.

Par exemple, la figure 4.15 montre l'évaluation des 11 impacts à chaque étape de l'ACV d'un produit. On peut observer que l'étape de fabrication de ce produit est plus impactante que les autres. Optimiser les procédures de fabrication est donc prioritaire pour réduire les impacts environnementaux du produit. Par exemple, il peut être possible de choisir un matériau moins impactant, ou de réduire l'emploi de matières, ou d'employer des techniques de production plus propres, etc. Cette approche est utilisée dans l'industrie. Elle repose sur la mise en oeuvre de méthodologie et la mise au point de procédures et sur la négociation entre les différents acteurs en charge du produit.

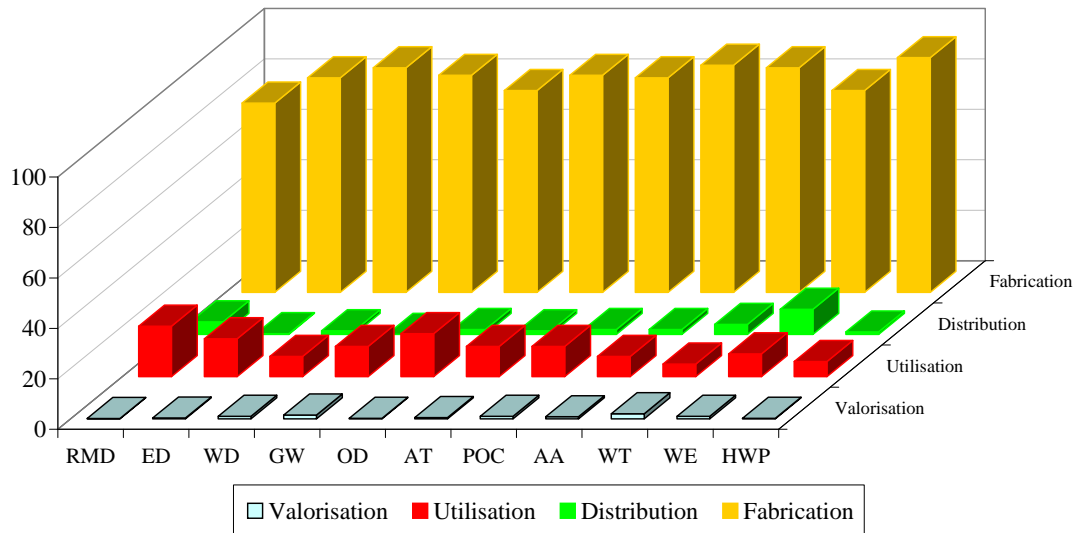


FIG. 4.15 – Évaluation des étapes du cycle de vie d'un dispositif

4.4.4 Modèle d'impact pour l'optimisation multi-objectif

Une deuxième approche globale de l'éco-conception est possible car elle s'intéresse non seulement aux critères environnementaux, mais aussi aux critères économiques (prix), et techniques (faisabilités, etc.). Cette approche consiste à formuler le problème d'éco-conception comme un problème d'optimisation multi-objectif. Elle a donc besoin d'un modèle multi-disciplinaire qui comprend un modèle d'impact et un modèle thermo-magnéto-électrique.

4.4.4.1 Modèle d'impact

Le modèle d'impact est réalisé par l'utilisation conjointe du logiciel EIME® [EIM] et de la méthode des plans d'expériences [VIV-02]. Il est utilisé simultanément avec un modèle thermo-magnéto-électrique pour l'optimisation multi-objectif.

Un plan factoriel complet à 2 niveaux a été retenu pour établir le modèle d'impact. Pour le transformateur, cinq facteurs sont retenus et 11 réponses, les 11 indicateurs d'impact, sont modélisées comme indiqué en tableaux 4.4 et 4.5. Dans ce modèle, les interactions d'ordre supérieur à 2 sont négligées.

Chaque facteur est affecté d'un niveau bas (-1) et d'un niveau haut (+1) qui permet de couvrir la plage de variation du facteur. Ainsi, chaque facteur prendra son niveau haut ou bas ce qui donne lieu à 32 (2^5) expériences à réaliser.

Pour chaque état, des facteurs d'entrées correspondent à une variation des réponses mesurée en sortie du système. Chaque facteur a donc un "effet" sur la réponse. Ces effets

sont les coefficients d'un modèle, soient x_1 et x_2 deux facteurs et y une réponse :

$$y = a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_{12}.x_{12} + \bar{y} \quad (4.10)$$

où a_1 et a_2 sont l'effet du facteur x_1 et x_2 . a_{12} quantifie l'interaction entre x_1 et x_2 . \bar{y} est la moyenne des valeurs de la réponse.

TAB. 4.4 – Cinq facteurs du modèle d'impact du transformateur

		Niveaux	Variations effectives
Paramètres d'entrée	Masse de tôle (A)	1	2.28
		-1	0.28
	Masse de cuivre (B)	1	1.035
		-1	0.063
	Masse de nylon (C)	1	0.100
		-1	0.005
	Puissance phase active (D)	1	20.0
		-1	1.0
	Puissance à vide (E)	1	10.0
		-1	1.0

TAB. 4.5 – 11 réponses du modèle d'impact du transformateur

Paramètres de sortie	RMD
	ED
	WD
	GW
	OD
	AT
	POC
	AA
	WT
	WE
	HWP

Le coefficient de détermination R^2 est presque toujours égal à 1 ce qui montre que le modèle a une bonne précision.

Le modèle d'impact est donc bien validé et sa comparaison avec les calculs sous EIME® pour une configuration nouvelle est très bonne (tableau 4.6). La différence maximale entre résultats obtenus par le modèle surrogate d'impact et ceux de la simulation EIME® est de 7.28% qui est acceptable.

TAB. 4.6 – Comparaison entre le modèle d'impact et la simulation EIME®

N°	Indicateurs d'impact	Unité	Simulation EIME	Modèle d'impact
1	RMD	%/an	2.6e-14	2.51e-14
2	ED	MJ	30478	28342
3	WD	dm ³	5890.1	5526.2
4	GW	g ~ CO ₂	327390	305170
5	OD	g ~ CFC – 11	0.027607	0.025779
6	AT	dm ³	70251000	65497000
7	POC	g ~ C ₂ H ₄	130.28	120.79
8	AA	g ~ H ⁺	58.879	54.930
9	WT	dm ³	39973	37209
10	WE	g ~ PO ₄ ³⁻	3.563	3.327
11	HWP	kg	4.052	3.767

4.4.4.2 Formulation multi-objectif pour l'éco-conception

Une fois que le modèle d'impact est établi, le modèle multi-disciplinaire comprenant ce modèle d'impact et un modèle thermo-magnéto-électrique est utilisé pour l'optimisation multi-objectif. Le modèle thermo-magnéto-électrique calcule les masses de fer, de cuivre et de nylon, également les pertes fer et Joule. Elles sont fournies au modèle d'impact pour calculer les 11 indicateurs (figure 4.16). Cette procédure est itérative. La figure 4.16 présente ce modèle multi-disciplinaire dédié à l'éco-conception.

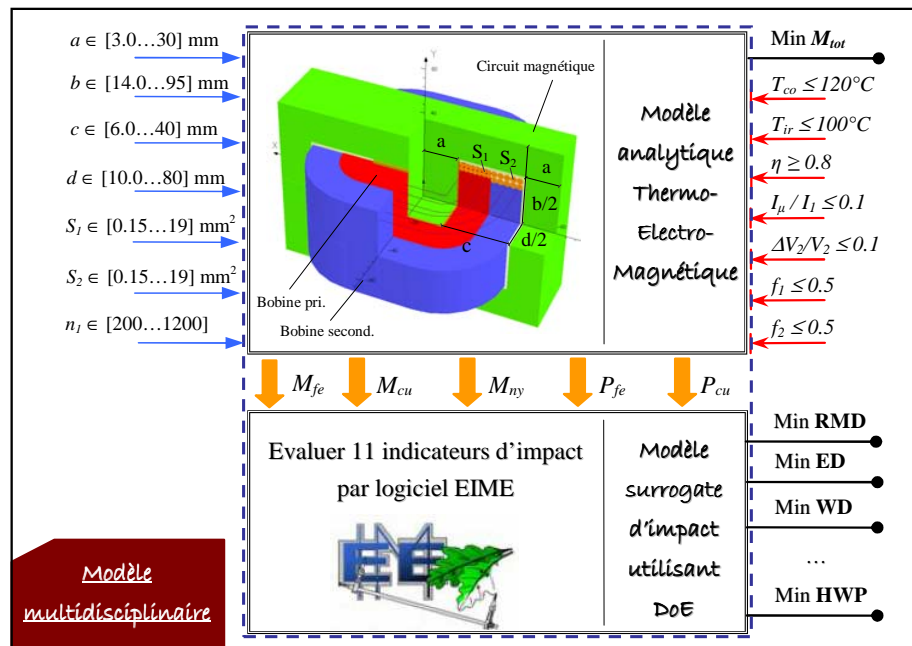


FIG. 4.16 – Modèle multi-disciplinaire dédié à l'éco-conception du transformateur

Deux problèmes d'optimisation sont proposés pour minimiser le coût du produit (la masse) et réduire les impacts environnementaux. Le premier comprend 12 fonctions objectifs (4.11a) et le deuxième comprend seulement deux objectifs (4.11b) : l'une est liée au critère économique et l'autre est liée au critère écologique.

$$\min F(X) = (\text{coût}, RMD, ED, WD, GW, OD, AT, POC, AA, WT, WE, HWP) \quad (4.11a)$$

$$\text{ou } \min F(X) = (\text{coût}, IMPACT) \quad (4.11b)$$

où $F(x)$ est un vecteur de 12 fonctions objectifs ; RMD, ED, \dots, HWP désignent respectivement les 11 indicateurs d'impact ; X est un vecteur des variables de conception. Les composantes de ce vecteur peuvent être continues, discrètes ou mixtes.

Dans la seconde approche (4.11b), les 11 indicateurs d'impact sont fusionnés en un seul objectif d'impact comme suit :

$$IMPACT = \frac{RMD}{RMD_0} + \frac{ED}{ED_0} + \frac{WD}{WD_0} + \frac{GW}{GW_0} + \frac{OD}{OD_0} + \frac{AT}{AT_0} + \frac{POC}{POC_0} + \frac{AA}{AA_0} + \frac{WT}{WT_0} + \frac{WE}{WE_0} + \frac{HWP}{HWP_0} \quad (4.12)$$

où $RMD_0, ED_0, \dots, HWP_0$ sont les facteurs d'impact du transformateur de référence, actuellement proposé par le constructeur.

La figure 4.17 représente la synoptique de l'optimisation multi-objectif pour l'éco-conception. Elle contient 3 modules principaux. Le premier module comprend le problème d'optimisation et le modèle multi-disciplinaire. Le deuxième module contient une des méthodes d'optimisation multi-objectif (NSGA-II, WS-SQP, WS-BB, ϵ -contraintes-BB, etc.) selon que le problème est à variables continues, discrètes ou mixtes. Le troisième module est dédié à l'interprétation des résultats d'optimisation. Les fronts de Pareto peuvent y être tracés en 2D ou 3D. En choisissant un point du front de Pareto, les 12 objectifs peuvent être représentés sous forme de radar (figure 4.17).

Les résultats de l'éco-conception du transformateur de sécurité obtenus par ces deux approches sont présentés au paragraphe suivant.

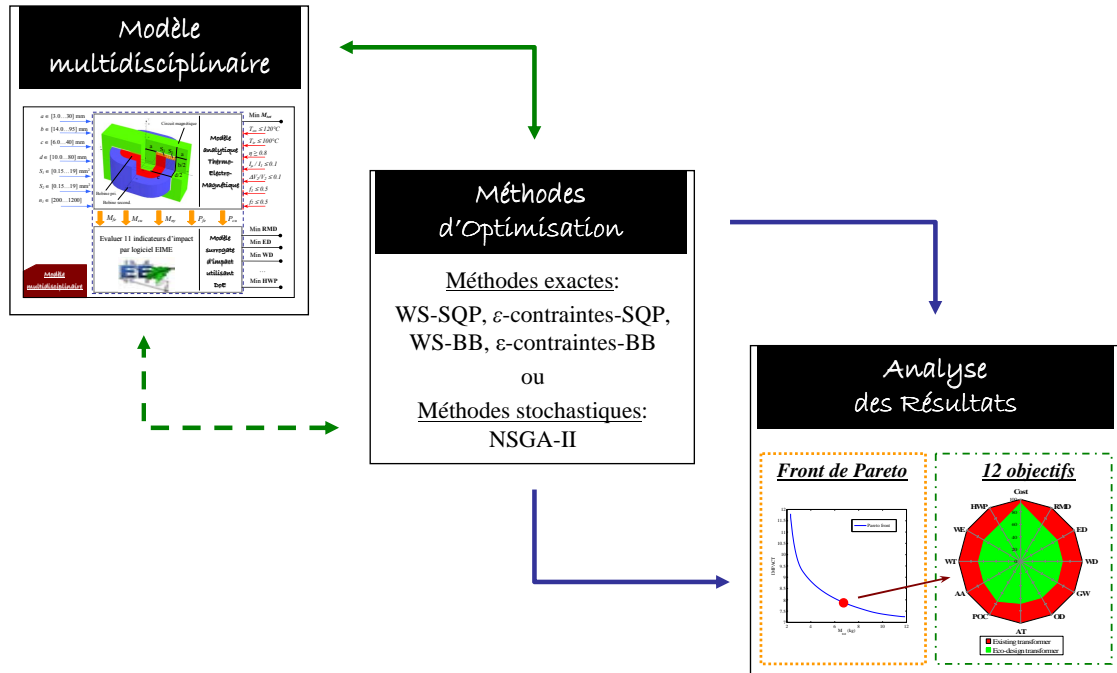


FIG. 4.17 – Synoptique de l'optimisation multi-objectif pour l'écoconception

4.5 Comparaison des Méthodes d'Optimisations Discrète, Multi-Objectif et Multi-Niveaux

4.5.1 Optimisation discrète

4.5.1.1 Problème d'optimisation mono-objectif à variables discrètes

Le problème d'optimisation discrète a été présenté au paragraphe 2.3.2.5 et comporte 7 variables discrètes de conception : trois paramètres $\{a, b, c\}$ pour les tôles (E-I), un $\{d\}$ pour le support (S), deux $\{S_1, S_2\}$ pour les sections des fils (F) primaire et secondaire et un $\{n_1\}$ pour le nombre de spires primaires. Il y a 24 types de tôles dans le catalogue r.bourgeois[®] [BOU-05], 62 types de support dans le catalogue isoelectra-martin[®] [ISO-95], et 62 types de fils émaillés dans le catalogue invex[®] [INV]. Le nombre de spires primaires n_1 est entier mais seulement 1000 valeurs sont permises. Ceci mène à 246 078 000 combinaisons. Toutes ces valeurs sont données dans [TRA-07b].

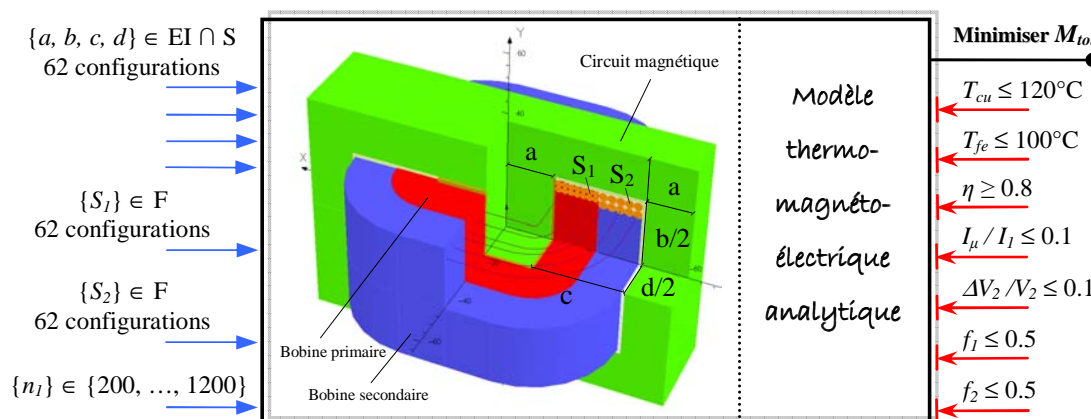


FIG. 4.18 – Problème d'optimisation discrète mono-objectif sous contraintes du transformateur

Il y a 7 contraintes non-linéaires d'inégalité pour ce problème. Les températures du cuivre et du fer T_{cu} , T_{fe} doivent être respectivement plus petites que 120°C et 100°C . Le rendement η doit être supérieur à 80%. Le courant magnétisant I_μ / I_1 et la chute de tension $\Delta V_2 / V_2$ doivent être inférieurs à 10%. Enfin, les facteurs de remplissage des deux bobinages f_1 , f_2 doivent être inférieurs à 0.5 (figure 4.18).

L'objectif est de minimiser la masse totale M_{tot} des matériaux cuivre et fer.

4.5.1.2 Application de l'algorithme BB

L'algorithme BB, détaillé au paragraphe 3.2.3 est appliqué à ce problème d'optimisation discrète. L'objectif et les contraintes sont calculés au moyen du modèle analytique avec l'hypothèse de Kapp. L'algorithme BB démarre en optimisant le problème relaxé à variables continues correspondant au noeud racine. Ensuite, l'algorithme développe l'arborescence à

partir ce noeud racine. Le premier niveau est établi en considérant tous les états possibles des quatre variables discrètes $\{a, b, c, d\}$, les autres variables $[S_1, S_2, n_1]$ étant considérées continues. Il y a donc 62 branches qui connectent le noeud racine aux 62 noeuds de ce niveau. Les solutions partielles sont obtenues par la méthode SQP. Par comparaison des solutions partielles de même niveau, un noeud successeur est déterminé pour continuer l'arborescence. Cette procédure se répète jusqu'à ce que toutes les variables soient discrètes. Ainsi, cinq niveaux de l'arborescence sont explorés (figure 4.19 et tableau 4.7) :

- Niveau 0 : toutes les variables sont continues ;
- Niveau 1 : 4 variables $\{a, b, c, d\}$ sont considérées discrètes, les trois autres $[S_1, S_2, n_1]$ sont continues ;
- Niveau 2 : 5 variables $\{a, b, c, d\}$ et $\{S_1\}$ sont considérées discrètes, les deux autres $[S_2, n_1]$ sont continues ;
- Niveau 3 : 6 variables $\{a, b, c, d, S_1\}$ et $\{S_2\}$ sont discrètes, $[n_1]$ est continue ;
- Niveau 4 : 7 variables $\{a, b, c, d, S_1, S_2\}$ et $\{n_1\}$ sont discrètes.

L'algorithme obtient une solution candidate avec toutes les variables discrètes.

1. Première descente de l'algorithme BB

Pour la première descente de l'algorithme BB, l'optimum de chaque niveau est désigné comme un successeur et les autres solutions partielles sont supprimées. Ce successeur est utilisé pour explorer l'arborescence. La procédure d'optimisation est faite verticalement jusqu'à l'obtention de la solution finale. La figure 4.19 et le tableau 4.7 représentent cette procédure et toutes les valeurs des successeurs. En figure 4.19, la valeur de chaque noeud est la valeur de la fonction objectif (la masse totale du transformateur) à condition que cette optimisation continue satisfasse aux contraintes. Le successeur de chaque niveau est désigné M_m^* où m est le niveau correspondant.

TAB. 4.7 – Solutions optimales de chaque niveau de la première descente BB

Niveaux de l'arbre	M_{tot} (kg)	$\{a; b; c; d\}$ (mm)	$\{S_1\}$ (mm ²)	$\{S_2\}$ (mm ²)	$\{n_1\}$ (-)
Niveau 0	2.3112	[12.92 ; 50.12 ; 16.61 ; 43.26]	[0.3250	2.912	640.77]
Niveau 1	2.3385	{16 ; 48 ; 16 ; 35.8}	{0.3030	2.707	629.36]
Niveau 1	2.5885	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	[0.2650	2.348	609.79]
Niveau 2	2.5886	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	{0.2642}	[2.355	609.79]
Niveau 3	2.6133	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	{0.2642}	{2.545}	[610.10]
Niveau 4	2.6142	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	{0.2642}	{2.545}	{611.00}

Le successeur du niveau 1 est le 36^{ième} noeud, celui du niveau 2 est le 19^{ième} noeud, celui du niveau 3 est le 44^{ième} noeud et celui du dernier niveau est le 411^{ième} noeud. Le tableau 4.7 donne les solutions des successeurs pour chaque niveau de l'arborescence.

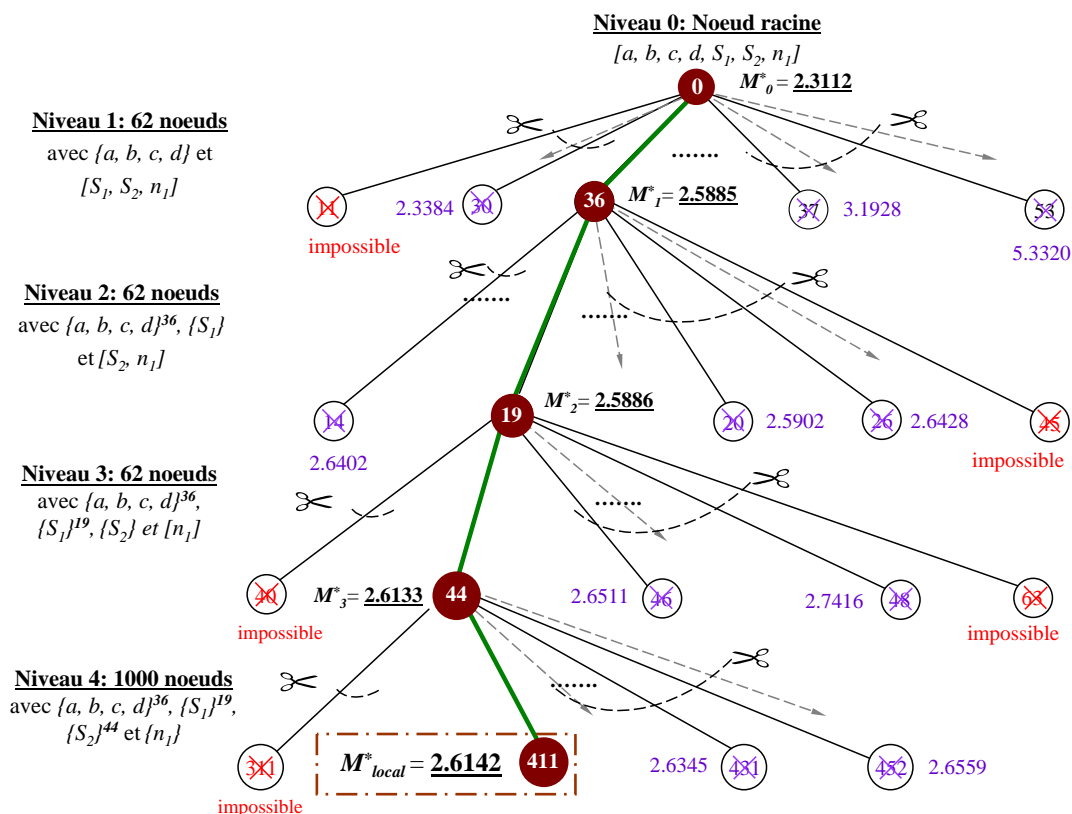


FIG. 4.19 – Arborescence de la première descente de l'algorithme BB. $[]$ et $\{ \}$ indiquent respectivement les variables continues et discrètes. Le successeur de chaque niveau est désigné par M_m^n ($|^n$ est le nombre de branches ; $|_m$ est le niveau de l'arbre).

Puisque le problème discret possède des contraintes non-linéaire, il existe des nœuds qui ne sont pas des solutions faisables. Autrement dit, ce sont des configurations impossibles, par exemple le 11^{ème} nœud du niveau 1, le 40^{ème} nœud du niveau 3, etc. Il se peut également qu'un successeur ne se connecte qu'aux nœuds non-faisables du niveau suivant. Par exemple, le successeur du niveau 1 est le 30^{ème} nœud (2.3385 kg). Cependant, dans le niveau 2, pour cette configuration discrète, aucune solution partielle faisable n'est trouvée. Donc, ce successeur est éliminé. L'algorithme revient au niveau 1 et désigne un nouveau successeur, le 36^{ème} nœud (2.5885 kg) qui est le minimum parmi les solutions partielles restantes. Ce successeur permet d'explorer le niveau 2 de l'arborescence. La solution partielle optimale du niveau 2 est le 19^{ème} nœud (2.5886 kg). La solution partielle optimale du niveau 3 est le 44^{ème} nœud (2.6133 kg). Le niveau 4 contient 1000 valeurs de n_1 . La masse minimale dans l'espace discret faisable est $M_4^{411} = 2.6142$ kg au 411^{ème} nœud. C'est aussi la solution finale M_{tot}^* .

La solution trouvée est un optimum local comparé avec la solution globale atteinte par la méthode EE. Il faut donc appliquer la stratégie de développement de l'arborescence présentée au paragraphe 3.2.3.3 pour s'assurer de la globalité de la solution obtenue.

2. Dernière descente de l'algorithme BB

La stratégie de développement de l'arborescence consiste à comparer la solution finale trouvée par la première descente avec toutes les solutions partielles de chaque niveau lorsque le problème comporte des solutions potentielles. Ainsi, à chaque niveau, toutes les solutions faisables ne sont pas encore supprimées. Cependant, après les avoir comparées avec cette solution finale, elles seront utilisées pour décomposer davantage l'arborescence ou seront éliminées.

La figure 4.20 montre la deuxième et dernière descente de l'arborescence de l'algorithme BB. La solution finale obtenue par la première descente est 2.614 kg. Comme toutes les solutions partielles au niveau 1 sauf le successeur ($M_1^{36} = 2.5885$ kg) sont plus grandes que celle-là, elles sont définitivement éliminées. Cependant, au niveau 2, cette solution finale est plus grande que les solutions partielles au 18^{ième} noeud (2.5910 kg), au 20^{ième} noeud (2.5902 kg), au 21^{ième} noeud (2.5983 kg), etc. Ainsi, ces noeuds doivent être décomposés.

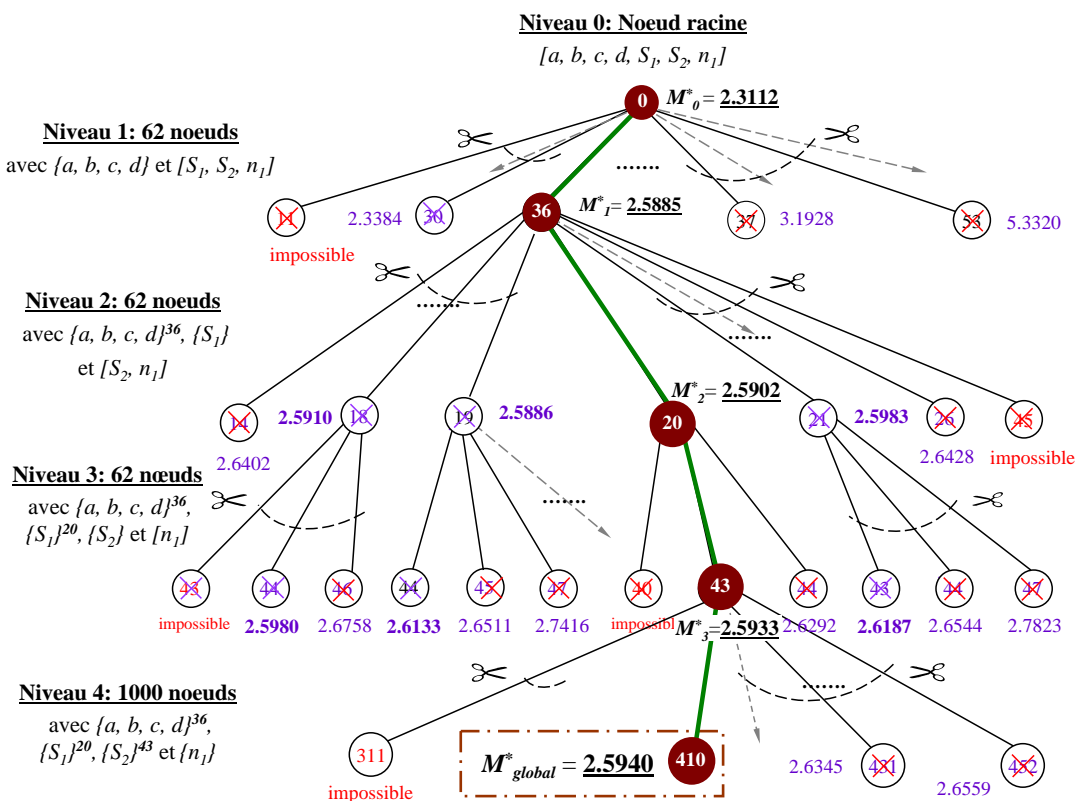


FIG. 4.20 – Arborescence de la deuxième descente de BB

Parmi les solutions partielles du niveau 3 correspondant à ces noeuds, la solution de la 43^{ième} branche dont l'origine est le 20^{ième} noeud du niveau 2 est la plus petite. Ainsi, le 20^{ième} noeud du niveau 2 remplace le successeur au 19^{ième} noeud. Pareillement pour le niveau 3, le 43^{ième} noeud remplace le successeur au 44^{ième} noeud. Ils sont utilisés pour explorer l'arborescence. Une telle procédure mène à l'obtention d'un optimum global avec une masse de 2.594 kg (figure 4.20 et tableau 4.8).

TAB. 4.8 – Solutions optimales de chaque niveau de la dernière descente BB

Niveaux de l'arbre	M_{tot} (kg)	$\{a; b; c; d\}$ (mm)	$\{S_1\}$ (mm ²)	$\{S_2\}$ (mm ²)	$\{n_1\}$ (-)
Niveau 0	2.3112	[12.92 ; 50.12 ; 16.61 ; 43.26]	[0.3250	2.912	640.77]
Niveau 1	2.3385	{16 ; 48 ; 16 ; 35.8}	{0.3030	2.707	629.36}
Niveau 1	2.5885	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	[0.2650	2.348	609.79]
Niveau 2	2.5886	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	{0.2642}	{2.355	609.79}
Niveau 2	2.5902	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	{0.2827}	[2.245	609.79]
Niveau 3	2.5933	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	{0.2827}	{2.270}	[609.83]
Niveau 4	2.5940	{18 ; 54 ; 18 ; 33.5}	{0.2827}	{2.270}	{610.00}

Selon la nature du problème d'optimisation discrète, il existe une ou plusieurs solutions potentielles et, dans ce cas, le temps de calcul de l'algorithme BB est plus important que celui de la première descente.

4.5.1.3 Résultats d'optimisation discrète

Le tableau 4.13 donne les résultats d'optimisation discrète obtenus par l'algorithme BB comparés avec ceux trouvés par la méthode d'Énumération Exhaustive, un algorithme génétique spécifique et l'algorithme de recherche au voisinage du logiciel Pro@Design®.

Une optimisation à variables continues résolue par la méthode SQP est également lancée pour montrer que l'optimum discret ne se déduit pas de l'optimum continu par un simple arrondi. En effet, si on compare les résultats discrets et continus, on observe une distance égale à 29% du diamètre de l'espace de recherche, ce qui est considérable. Quatre contraintes sont actives dans l'optimisation continue (température du fer T_{fe} , courant magnétisant I_μ et les deux facteurs de remplissage f_1, f_2).

Notre méthode BB obtient la même solution globale (2.594 kg) que la technique EE. Cependant, la technique EE a besoin d'un temps de calcul considérable : 23 jours malgré l'utilisation 8 PC en calculs parallèles) comparé aux 25 minutes utilisées par notre algorithme BB sur un seul PC.

Le résultat d'optimisation obtenu par un algorithme génétique avec un codage spécifique (2.633 kg) [TRA-08a] est assez proche de la solution globale, mais le temps d'optimisation est environ deux fois plus grand que celui de l'algorithme BB et ne fournit pas la solution globale. Quelques statistiques sont faites. Le pourcentage de convergence vers la meilleure solution trouvée avec une distance euclidienne inférieure à 10^{-4} dans l'espace normé des variables est de 81 %. Le nombre moyen d'évaluations est 6000, soit 100 générations de 60 individus.

TAB. 4.9 – Résultats d'optimisation discrète obtenus par BB, GA, EE et Pro@Design

Paramètres	Unité	Opt.	Optimisations discrètes			
		continue	Pro@Design [®]	EE	GA	BB
a	mm	12.92	18	18	18	18
b	mm	50.12	54	54	54	54
c	mm	16.61	18	18	18	18
d	mm	43.26	33.5	33.5	33.5	33.5
S_1	mm ²	0.325	0.3318	0.2827	0.2376	0.2827
S_2	mm ²	2.912	2.835	2.270	2.835	2.270
n_1	-	640.77	722	610	614	610
M_{tot}	kg	2.311	2.840	2.594	2.633	2.594
Temps de calcul	s	4	38	1.8.10 ⁶	3.10 ³	1.7.10 ³
T_{cu}	°C	108.80	103.60	109.20	106.25	109.20
T_{fe}	°C	100.00	94.19	99.58	97.13	99.58
η	%	89.55	88.54	87.60	88.04	87.60
I_μ/I_1	%	10.00	4.90	9.98	9.58	9.98
$\Delta V_2/V_2$	%	6.91	8.20	8.20	7.86	8.20
f_1	%	50.00	49.29	35.50	30.20	35.50
f_2	%	50.00	47.56	32.20	37.98	32.20

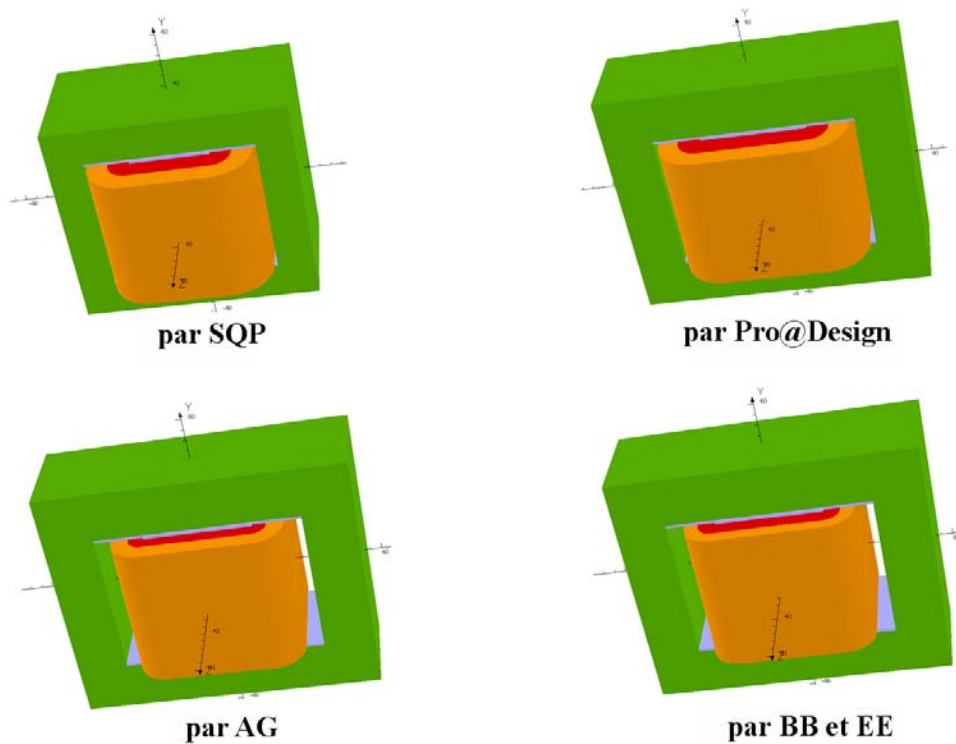


FIG. 4.21 – Conceptions optimales du transformateur obtenues par les différentes méthodes

Le logiciel Pro@Design[®] qui utilise une technique de recherche de solution discrète au voisinage de l'optimum continu trouvé demande un temps de calcul très faible mais la solution est sub-optimale avec une masse totale de 2.840 kg, soit 9.5% plus grande que celle de l'optimum global.

La figure 4.21 montre les géométries du transformateur de sécurité en trois dimensions obtenues par les différentes méthodes. Pour l'optimisation à variables discrètes de ce transformateur, BB, EE, GA et Pro@Design[®] obtiennent le même circuit magnétique. La seule différence est dans la conception des bobines primaire et secondaire.

Parmi les méthodes d'optimisation discrète, notre algorithme BB utilisé ici montre sa performance en fournissant l'optimum global avec le temps de calcul le plus faible.

4.5.2 Optimisation continue multi-objectif

4.5.2.1 Problème d'optimisation multi-objectif à variables continues

Il est possible de changer des contraintes en objectif. Par exemple, le rendement est un objectif conflictuel avec la masse ce qui conduit à un problème d'optimisation multi-objectif : minimiser la masse totale M_{tot} et maximiser le rendement η .

Le problème multi-objectif à variables continues est présenté en figure 4.22. En prenant comme valeurs minimales et maximales celles des valeurs discrètes, les butées des 7 variables continues sont déterminées et données en figure 4.22. Le modèle thermo-magnéto-électrique analytique avec l'hypothèse de Kapp est utilisé afin de construire le front de Pareto pour cette optimisation.

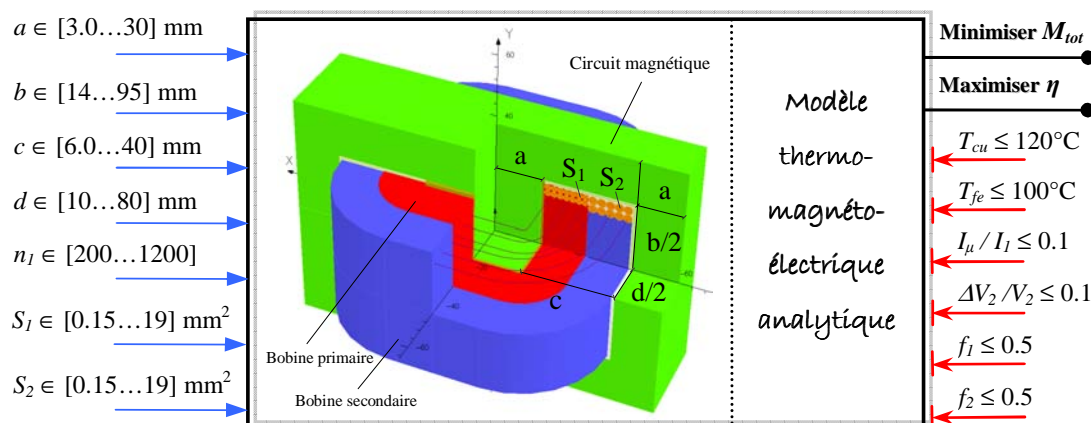


FIG. 4.22 – Problème d'optimisation continue multi-objectif du transformateur

4.5.2.2 Fronts de Pareto

Deux algorithmes déterministes combinant les techniques scalaires présentées aux paragraphes 3.3.3.1, 3.3.4.1 et la méthode SQP : WS-SQP, ϵ -contraintes-SQP sont appliqués

sur ce problème d'optimisation continue. Ils sont comparés avec la méthode stochastique Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II) [DEB-02] qui est très utilisée pour ce type de problème.

Pour l'algorithme WS-SQP, les deux objectifs sont pondérés avec le coefficient $\lambda \in [0, 1]$. La fonction objectif est donc normalisée :

$$C(X) = \lambda \cdot \frac{M_{tot}(X)}{nf_1} + (1 - \lambda) \cdot \frac{1 - \eta(X)}{nf_2} \quad (4.13)$$

où nf_1 et nf_2 indiquent les facteurs de normalisation des fonctions objectifs. $nf_1 = 6$ et $nf_2 = 0.05$.

Pour l'algorithme ϵ -contraintes-SQP, la fonction objectif de masse totale M_{tot} est gardée, l'autre (le rendement η) est choisie d'être transformée en une contrainte d'inégalité. Deux optimisations, l'une avec la minimisation de la masse et l'autre avec la maximisation du rendement s'est faites pour déterminer l'intervalle de variation du coefficient de contrainte $\epsilon \in [0.0418, 0.1241]$.

Pour la méthode NSGA-II, les paramètres de réglage sont : 100 générations, population de 100 individus, probabilité de croisement bimodal de 0.9, probabilité de mutation polynomiale de 0.1.

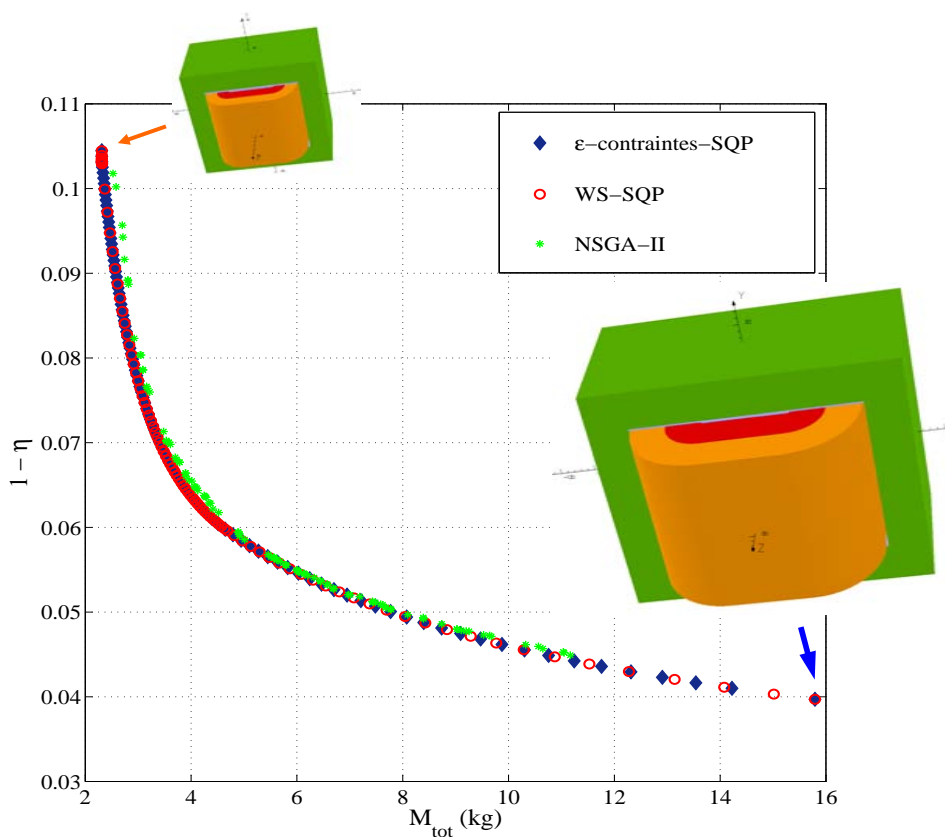


FIG. 4.23 – Fronts de Pareto du problème d'optimisation multi-objectif continue obtenus par les algorithmes WS-SQP, ϵ -contraintes-SQP et NSGA-II

La figure 4.23 présente 100 points appartenants aux fronts de Pareto obtenus par ces deux algorithmes déterministes comparés avec la méthode stochastique NSGA-II.

Le front de Pareto du problème d'optimisation de transformateur est convexe. Sur les fronts de Pareto, la masse totale varie entre 2 kg et 16 kg tandis que le rendement varie entre 89% et 97%. Les fronts obtenus par les deux méthodes déterministes WS-SQP et ϵ -contraintes-SQP sont très proches. Ils sont légèrement meilleurs que celui trouvé par NSGA-II. De plus, l'algorithme NSGA-II n'atteint pas toutes les solutions Pareto optimales (les deux extrémités et lorsque la masse M_{tot} varie entre 12 et 16 kg). Les temps de calcul de ces trois algorithmes sont approximativement les mêmes car chaque point trouvé par les méthodes déterministes exige en moyenne de 112 évaluations du modèle pour WS-SQP et de 128 pour ϵ -contraintes-SQP.

4.5.3 Optimisation discrète multi-objectif

4.5.3.1 Problème d'optimisation multi-objectif à variables discrètes

Le problème d'optimisation multi-objectif à variables discrètes sous contraintes est donné en figure 4.24. Il comprend deux objectifs conflictuels : maximiser le rendement η et minimiser la masse totale M_{tot} , 7 variables discrètes de conception $\{a, b, c, d, S_1, S_2, n_1\}$ et 6 contraintes non-linéaires d'inégalité $T_{cu}; T_{fe}; I_{\mu}/I_1; \Delta V_2/V_2; f_1; f_2$.

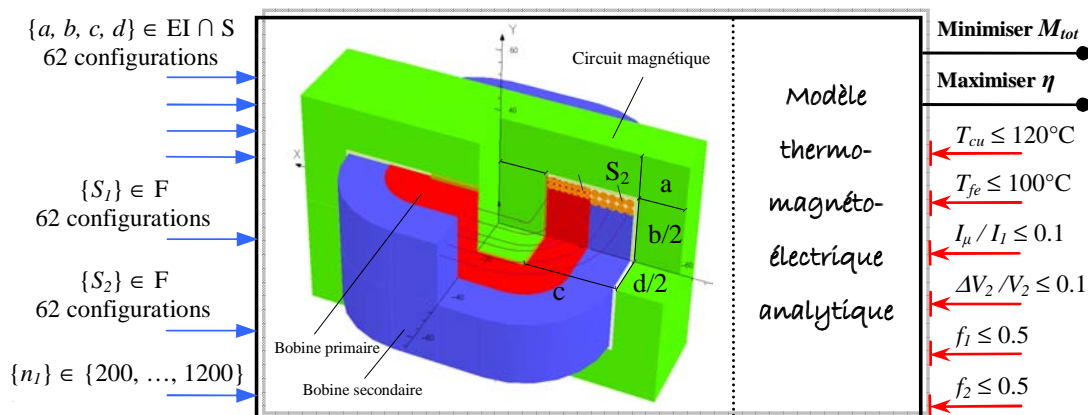


FIG. 4.24 – Problème d'optimisation multi-objectif discrète du transformateur

4.5.3.2 Fronts de Pareto discrets

Les deux algorithmes d'optimisation discrète multi-objectif exacte WS-BB et ϵ -contraintes-BB proposés aux paragraphes 3.3.3 et 3.3.4 sont appliqués au benchmark du transformateur. Leurs fronts de Pareto discrets sont comparés avec celui obtenu par la méthode stochastique NSGA-II [TRA-08c]. Le modèle analytique avec l'hypothèse de Kapp est utilisé pour cette approche.

Les paramètres de réglage de l'algorithme NSGA-II sont :

- nombre de génération : 10000
- taux de croisement bimodal discret : 0.9
- relation d'ordre non-dominée utilisée pour traiter les contraintes

Une première optimisation par NSGA-II est faite avec une population de 20 individus. Une deuxième optimisation est lancée avec 100 individus. Les deux fronts de Pareto discrets obtenus par NSGA-II sont superposés aux fronts trouvés par les méthodes exactes WS-BB et ϵ -contrainte-BB en figure 4.25 pour comparaison.

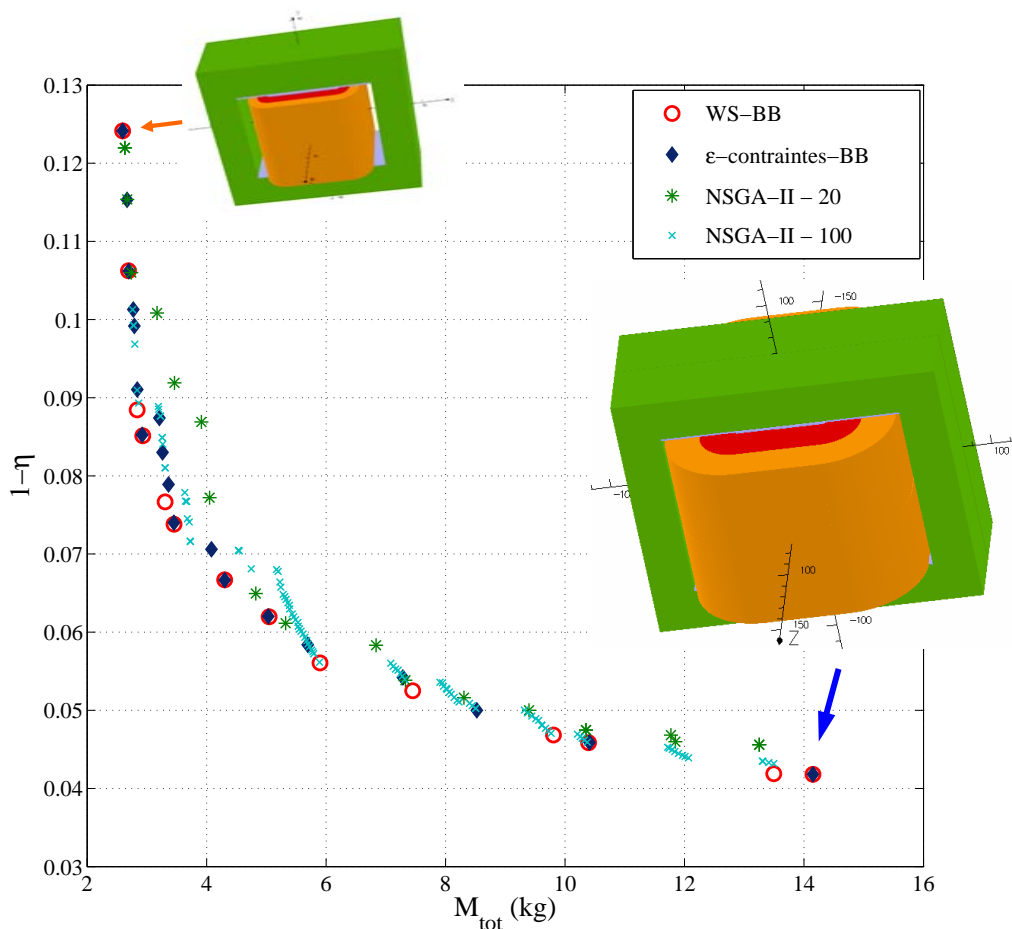


FIG. 4.25 – Solutions discrètes de Pareto supportées et non-supportées obtenues par les méthodes WS-BB, ϵ -contraintes-BB et NSGA-II

Pour ce type de problème, l'algorithme NSGA-II n'a pas atteint les deux extrémités du front de Pareto. Les solutions de Pareto trouvées par NSGA-II avec une population de 20 individus sont mauvaises. Les solutions de Pareto supportées et non-supportées obtenues par les méthodes exactes WS-BB et ϵ -contrainte-BB sont plus précises que celles trouvées par la méthode stochastique NSGA-II avec une population de 100 individus. L'algorithme ϵ -contrainte-BB peut trouver toutes les solutions supportées et non-supportées, mais le temps de calcul est important puisque une même solution peut être trouvée avec plusieurs valeurs du coefficient ϵ .

4.5.4 Optimisation pour l'éco-conception

Pour l'approche d'éco-conception, un transformateur industriel [LEU] a été utilisé pour comparaison : puissance 100 (VA) ; tension primaire 400 (V) ; tension secondaire 24 (V) ; facteur de puissance 0.8.

Les deux approches proposées au paragraphe 4.4 sont appliquées à ce transformateur de sécurité [TRA-08b].

4.5.4.1 ACV du transformateur et optimisation

La première approche consiste à évaluer tous les indicateurs d'impact environnemental pour chaque étape de l'ACV avant de prendre une décision. Dans le cas du transformateur, la dernière étape de l'ACV, la valorisation (démontage) est intégrée dans l'étape de fabrication. La figure 4.26 représente les 11 indicateurs d'impact évalués dans les trois phases (fabrication, distribution et utilisation). Les valeurs sont exprimées en pourcentage des valeurs obtenues pour tout le cycle de vie du transformateur.

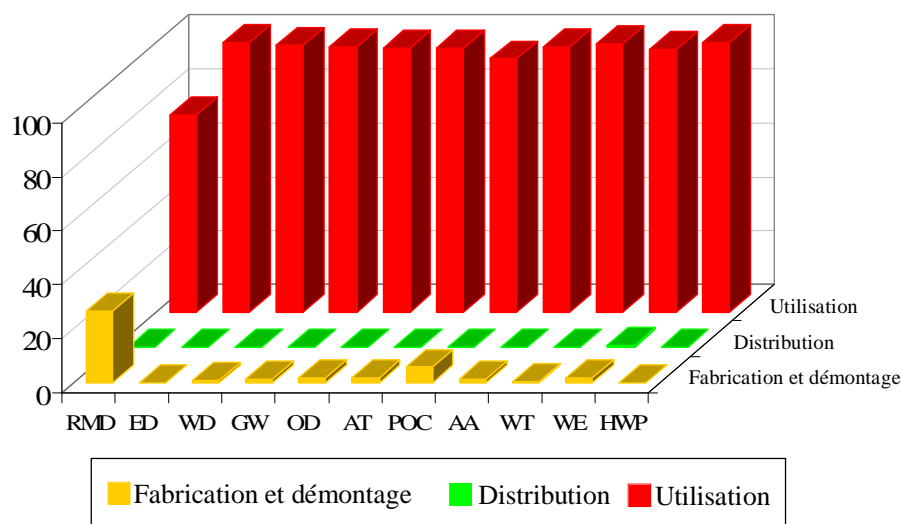


FIG. 4.26 – Évaluation des impacts du cycle de vie d'un transformateur de sécurité

Les impacts environnementaux de la phase d'utilisation sont nettement plus importants que ceux des autres phases comme indiqué en figure 4.26. Les impacts de la phase de distribution peuvent être négligés. Le seul impact non négligeable durant la phase de fabrication et de démontage est l'épuisement des ressources naturelles (RMD). Tous les impacts durant la phase d'utilisation sont liés à la consommation d'énergie, et donc aux pertes dans le transformateur. Ainsi, maximiser le rendement du transformateur peut réduire largement tous les impacts environnementaux.

Ainsi un problème d'optimisation mono-objectif est proposé : maximiser le rendement du transformateur sous 6 contraintes thermiques, magnéto-électriques, géométriques (températures du cuivre, du fer, courant magnétisant, chute de tension, facteurs de remplissage).

Le tableau 4.10 donne les valeurs optimales des variables de conception et de la fonction objectif pour deux optimisations du transformateur.

TAB. 4.10 – Résultats d'optimisation pour l'éco-conception du transformateur

Paramètres	Unité	Solution existante	1 ^{ère} optimisation	2 ^{ième} optimisation
Variables de conception				
a	(mm)	14	14	14
b	(mm)	42	42	42
c	(mm)	14	14	14
d	(mm)	40	40	57.87
S_1	(mm ²)	0.078	0.1213	0.1657
S_2	(mm ²)	0.7854	1.9375	2.5563
n_1	(-)	1540	1212	933
Masse totale et rendement (fonction objectif)				
M_{tot}	(kg)	1.804	1.953	2.706
η	(%)	80.40	90.93	92.36

Dans la première optimisation, le circuit magnétique est figé, les bobines sont reconçues pour maximiser le rendement. Dans la deuxième optimisation, la profondeur du circuit magnétique est libéré, et une contrainte sur la masse totale est ajoutée. Les caractéristiques du transformateur existant sont également données pour comparaison.

La solution trouvée par la première optimisation a un rendement de 10% plus élevé par rapport au transformateur actuel. Cependant, la masse totale est augmentée de 7.6%. Dans cette première optimisation, maximiser le rendement mène en fait à minimiser les pertes Joules. Pour la deuxième optimisation, en réduisant toutes les pertes (pertes Joule et pertes fer) le rendement atteint 92%. Un rendement plus élevé aurait pu être atteint, mais la contrainte ajoutée limite la masse du transformateur à 150% de sa valeur actuelle.

Le tableau 4.11 et la figure 4.27 représentent les valeurs des 11 indicateurs d'impact pour les trois transformateurs.

La figure 4.27 montre un graphe en radar des 11 indicateurs d'impact. Chaque indicateur est un axe du graphe et la valeur est exprimée en pourcentage de la valeur du transformateur existant. Le cercle extérieur est donc la solution actuelle. Pour comparaison, les transformateurs obtenus par les 2 démarches d'éco-conception sont également superposés sur ce graphe. Leurs surfaces sont à l'intérieur du cercle extérieur. Tous les impacts sont fortement réduits (environs 40%, à l'exception de l'impact RMD). L'impact

TAB. 4.11 – Comparaison des 11 indicateurs entre les solutions actuelle et optimales

Impacts	Unité	Solution existante	1 ^{ère} optimisation	2 ^{ième} optimisation
RMD	%/an	3.43E-14	2.68E-14	2.72E-14
ED	MJ	60656	30478	26943
WD	dm ³	11609	5890	5261
GW	g ~ CO ₂	640730	327390	294270
OD	g ~ CFC – 11	0.053007	0.027607	0.0248
AT	dm ³	13.6E+7	7.1E+7	6.3E+7
POC	g ~ C ₂ H ₄	244.63	130.28	117.59
AA	g ~ H ⁺	114.10	58.879	52.89
WT	dm ³	78884	39973	35429
WE	g ~ PO ₄ ³⁻	6.858	3.563	3.189
HWP	kg	8.085	4.052	3.572

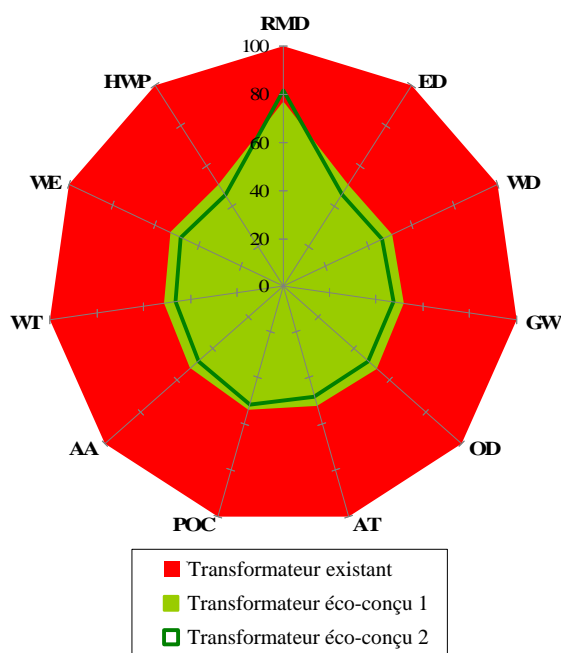


FIG. 4.27 – Comparaison de 11 impacts environnementaux pour le transformateur existant et les deux éco-conçus

d'épuisement de ressources naturelles (RMD) est moins réduit car la fabrication du transformateur a besoin d'une plus grande quantité de tôle et de cuivre. Les impacts obtenus par la deuxième optimisation sont un peu plus réduits par rapport à ceux de la première l'optimisation (figure 4.27), mais la masse totale, elle, est à 150% de la valeur initiale, ce qui est la valeur maximale autorisée. On voit donc que la masse autorisée est un facteur dimensionnant ce qui amène à la question de savoir comment fixer sa valeur maximale.

4.5.4.2 Optimisation multi-objectif d'éco-conception

Pour pallier cet inconvénient, la deuxième approche possible est de formuler le problème d'éco-conception comme un problème d'optimisation multi-objectif où la masse est un des objectifs. On peut d'ailleurs remarquer qu'à travers les coûts de matière et les coûts de mise en oeuvre, la masse est un critère économique. L'autre objectif se rapporte aux impacts environnementaux et les agrège dans le critère *IMPACT*.

En utilisant la structure d'optimisation multi-objectif pour l'éco-conception du transformateur décrite au paragraphe 4.4.4.2, le front de Pareto montré en figure 4.28 est obtenu. L'algorithme d'optimisation multi-objectif utilisé (WS-SQP) est la méthode de pondération combinée avec la méthode SQP. Le transformateur industriel existant et les deux transformateurs d'éco-conception obtenus par la première approche sont également représentés en figure 4.28 pour comparaison.

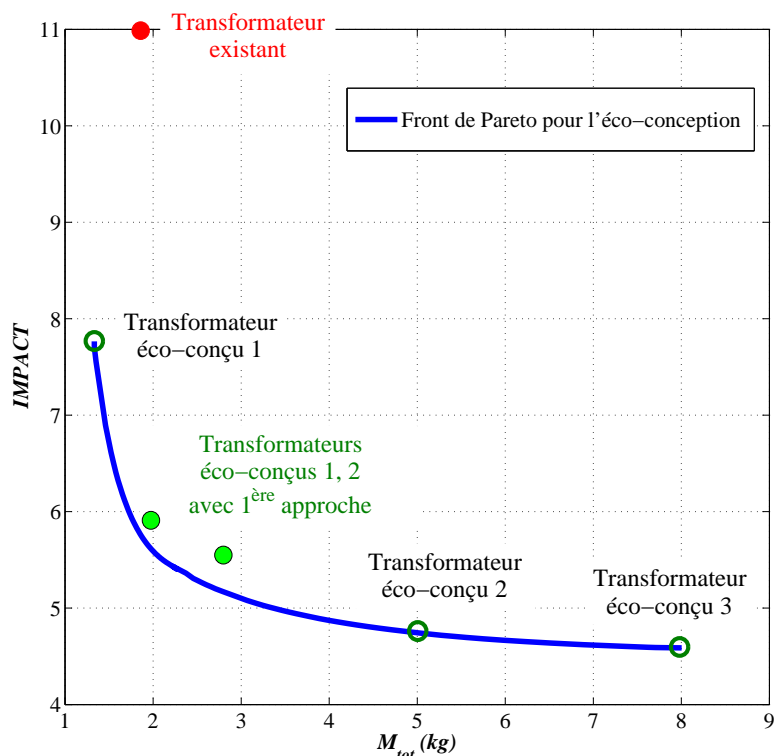


FIG. 4.28 – Front de Pareto du transformateur éco-conçu

Les facteurs de normalisation des objectifs d'impact sont les valeurs du transformateur existant. Donc, l'objectif *IMPACT* du transformateur actuel est égal à 11. Ce point initial ($M_{tot} = 1.804$ kg ; $IMPACT = 11$) est très loin du front de Pareto trouvé.

Les deux transformateurs trouvés par la première approche ($M_{tot}^1 = 1.953$ kg ; $IMPACT^1 = 5.91$ et $M_{tot}^2 = 2.706$ kg ; $IMPACT^2 = 5.55$) ne se trouvent pas exactement sur ce front optimal de Pareto. En fait, la première approche n'a pas minimisé la masse totale et

maximiser le rendement n'est pas suffisant pour réduire l'ensemble des impacts environnementaux. Ainsi, la première approche n'a pas donné des solutions optimales pour tous les indicateurs d'impact. Cette approche n'apporte d'ailleurs pas une vision globale de différents impacts de la solution optimale ni des compromis offerts au concepteur.

Trois points sur le front de Pareto (deux extrémités et un intermédiaire) sont sélectionnés pour tracer les 12 objectifs sous forme d'un radar. Pour le premier point à gauche du front de Pareto (transformateur éco-conçu 1 en figure 4.29) où uniquement la masse totale est minimisée et *IMPACT* est libre, les 12 objectifs sont réduits par rapport à ceux du transformateur existant. Chaque objectif est réduit d'environ 30% (figure 4.29) grâce à une faible consommation d'énergie. La masse et l'indicateur d'épuisement de ressources naturelles (RMD) sont moins réduits.

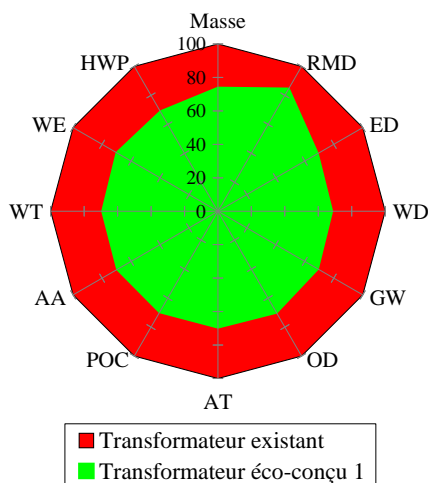


FIG. 4.29 – Transformateur éco-conçu 1, minimisation de la masse

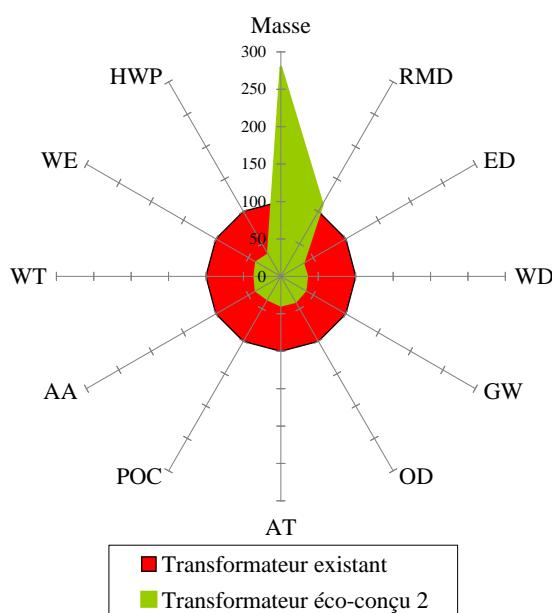


FIG. 4.30 – Transformateur éco-conçu 2, minimisation de la masse et des impacts

La figure 4.30 montre les 12 objectifs pour un point pris à une position intermédiaire du front de Pareto (transformateur éco-conçu 2 en figure 4.30).

La figure 4.31 montre les 12 objectifs pour le point à l'extrémité droite du front de Pareto (transformateur éco-conçu 3 en figure 4.31). La masse et l'impact RMD sont fortement augmentés, mais les 10 autres impacts sont largement réduits.

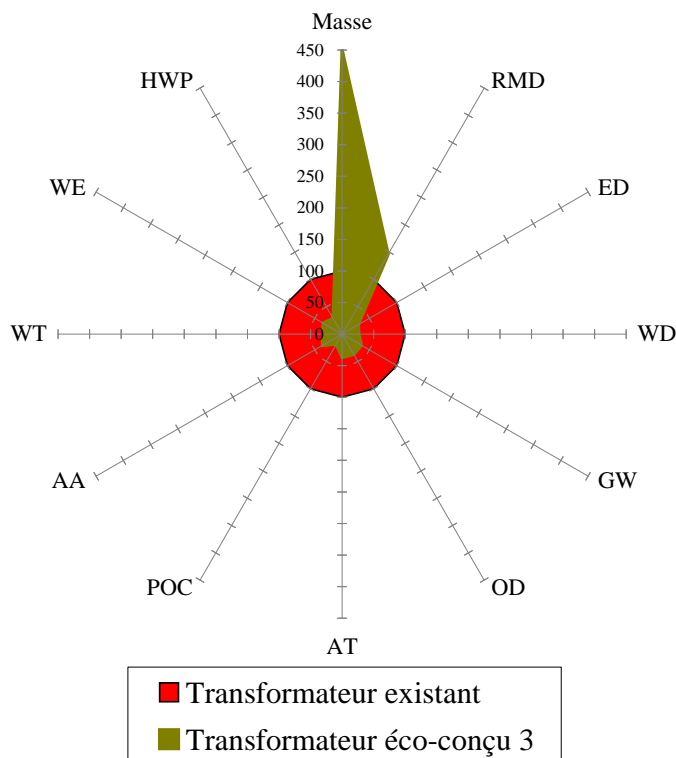


FIG. 4.31 – Transformateur éco-conçu 3, minimisation des impacts

À partir du front de Pareto pour l'éco-conception, les concepteurs peuvent prendre une décision pour le transformateur qui tienne compte à la fois des critères économiques et écologiques.

En conclusion, deux approches ont été proposées pour l'éco-conception des dispositifs électromagnétiques et testées sur le problème de la reconception d'un transformateur de sécurité. La première approche est la plus utilisée en génie électrique et comprend deux étapes : identifier le critère électromagnétique le plus lié aux indicateurs d'impact dans l'ACV et minimiser ce critère. La deuxième approche est d'établir un modèle multidisciplinaire comprenant le modèle d'impact environnemental et de l'utiliser dans une optimisation multi-objectif. Quelques objectifs sont liés aux critères économiques et les autres se rapportent aux impacts environnementaux. Les résultats du benchmark du transformateur montre que la deuxième approche offre une vision plus globale qui comprend aussi la solution trouvée par la première approche.

4.5.5 Optimisation multi-niveaux continue

4.5.5.1 Problème d'optimisation multi-niveaux à variables continues

La figure 4.32 présente le problème d'optimisation mono-objectif multi-niveaux à variables continues. Deux modèles de différentes précisions sont utilisés pour cette optimisation : un modèle simple analytique et un modèle fin EF 3D. Le modèle thermo-magnéto-électrique simple est utilisé pour accélérer l'optimisation.

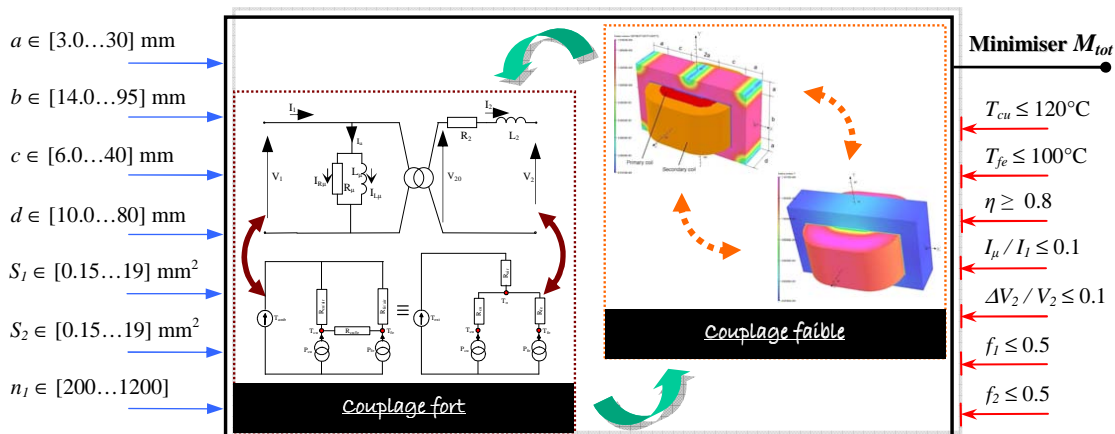


FIG. 4.32 – Problème d'optimisation multi-niveaux continue du transformateur

4.5.5.2 Résultats d'optimisation

Différentes techniques de SM telles que Aggressive Space Mapping (ASM) détaillée au paragraphe 3.4.3, Output Space Mapping (OM) au paragraphe 3.4.5, Manifold-Mapping (MM) au paragraphe 3.4.6 sont appliquées à ce benchmark [TRA-07c]. Les résultats du problème d'optimisation continue sont montrés dans le tableau 4.12.

Tout d'abord, une première optimisation mono-niveau qui utilise le modèle simple et la méthode SQP aboutit à une solution après 108 évaluations du modèle analytique. Le modèle EF 3D est alors évalué au point optimal trouvé. Il apparaît que quelques contraintes ne sont pas satisfaites (tableau 4.12).

Une deuxième optimisation mono-niveau est ensuite faite avec le modèle EF et la méthode SQP, une solution est obtenue après 44 évaluations, soit 6 jours de calcul. Cette solution est meilleure que la précédente mais la convergence est imparfaite et quelques contraintes sont légèrement violées.

Trois algorithmes de SM sont alors testés. ASM, MM et OSM réduisent la contrainte maximale à 99,54 %, 100,09 % et 100,00 % respectivement après seulement 2, 3 et 6 appels du modèle EF. Cependant la masse totale atteinte par ASM n'est pas intéressante.

TAB. 4.12 – Comparaison des résultats d'optimisation continue multi-niveaux

Paramètres	Unité	SQP		Opt. directe	Opt. multi-niveaux		
		Analyti.	FE 3D	SQP	ASM	MM	OSM
a	(mm)	12.92		14.94	12.99	12.98	12.98
b	(mm)	50.12		48.43	51.32	50.35	50.37
c	(mm)	16.61		15.64	16.71	16.57	16.55
d	(mm)	43.26		38.27	44.26	42.81	42.71
S_1	(mm ²)	0.325		0.310	0.3302	0.3304	0.3080
S_2	(mm ²)	2.912		2.787	2.962	2.969	2.976
n_1	(-)	640.77		611.78	645.67	631.48	629.89
M_{tot}	(kg)	2.311		2.294	2.410	2.306	2.301
# évaluations de EF 3D	(-)	108	1	44	2	3	6
T_{cu}	°C	108.82	121.72	120.65	118.17	119.26	119.05
T_{fe}	°C	100.00	101.60	100.44	98.97	100.09	100.00
η	%	89.55	89.15	89.24	89.30	89.42	89.45
I_μ/I_1	%	10.00	8.59	10.09	7.23	9.75	10.00
$\Delta V_2/V_2$	%	6.91	7.94	7.60	7.79	7.58	7.52
f_1	%	50.00	50.00	50.06	49.73	50.00	50.00
f_2	%	50.00	50.00	50.09	49.77	50.00	50.00
Contrainte maximale	%	100.00	101.62	100.90	99.54	100.09	100.00

Dans le cas de l'application de ASM, l'optimum dépend fortement de la région de confiance. Une analyse de la convergence pour les différentes valeurs du rayon de la région de confiance ($r.c.$) est faite en figure 4.33. Dans la figure 4.33, la contrainte maximale est tracée en ligne et sa valeur peut être observée sur l'axe de droite. La masse totale (fonction objectif) est tracée sous forme d'histogramme et sa valeur peut être observée sur l'axe de gauche. Parmi les rayons de la région de confiance choisis dans l'espace des variables de conception normées, $r.c. = 0.015$ avec seulement 2 évaluations du modèle EF donne la meilleure solution avec une fonction objectif minimale et toutes les contraintes sont satisfaites (contrainte maximale de 99.54%). L'algorithme ASM avec $r.c. = 0.02$ ne converge pas. L'algorithme ASM avec $r.c. = 0.0067$ obtient une solution avec une évaluation de EF 3D en plus et la masse totale est plus grande que celle avec $r.c. = 0.015$.

Alors, la meilleure solution de l'algorithme ASM ($r.c. = 0.015$) est prise pour comparaison avec celles des algorithmes MM et OSM dans le tableau 4.12.

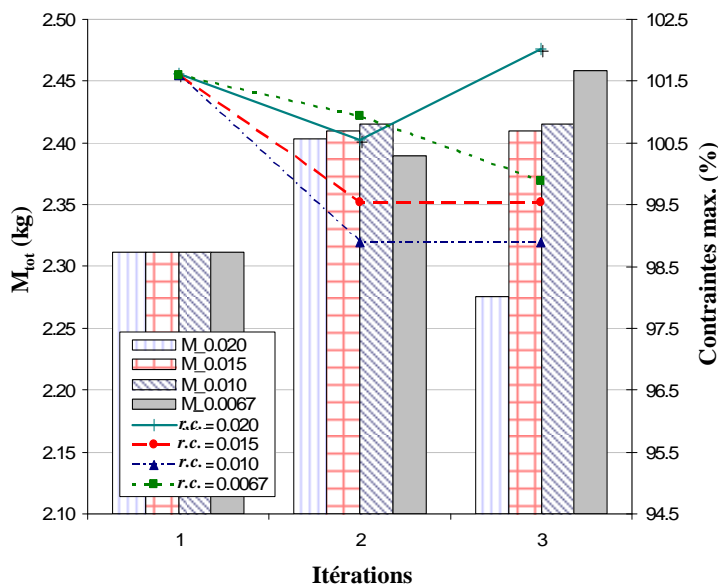


FIG. 4.33 – Convergence de l'algorithme ASM avec différentes régions de confiance

La figure 4.34 représente les convergences de trois algorithmes ASM, MM et OSM après 3 itérations. Elle montre que la convergence de MM et OSM est rapide et les masses totales diminuent légèrement. ASM avec $r.c. = 0.015$ converge plus rapide que MM et OSM. Cependant la masse totale est supérieure à celles trouvées par MM et OSM.

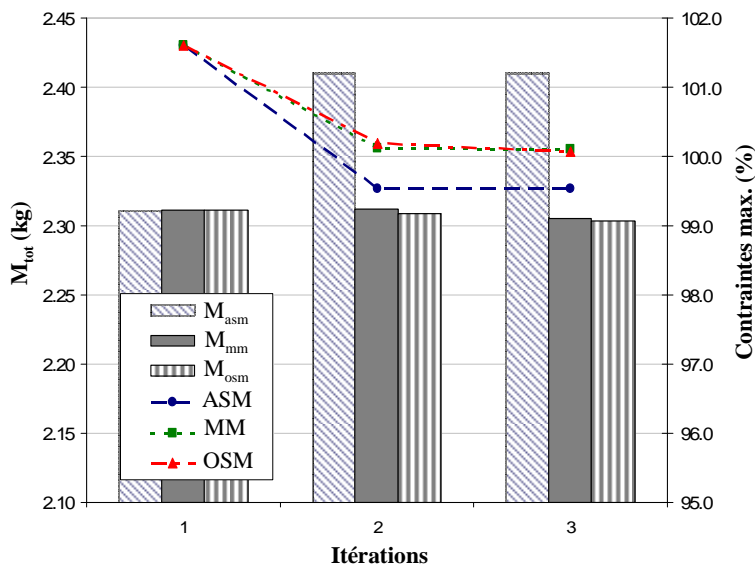


FIG. 4.34 – Convergence des algorithmes ASM, MM et OSM

L'algorithme OSM converge avec une tolérance de 10^{-6} en utilisant 6 appels au modèle EF 3D. La solution optimale possède une masse totale minimale et 4 contraintes sont actives (température du fer T_{fe} , courant magnétisant I_{μ} et les facteurs de remplissage f_1, f_2). La figure 4.35 montre les convergences de cet algorithme.

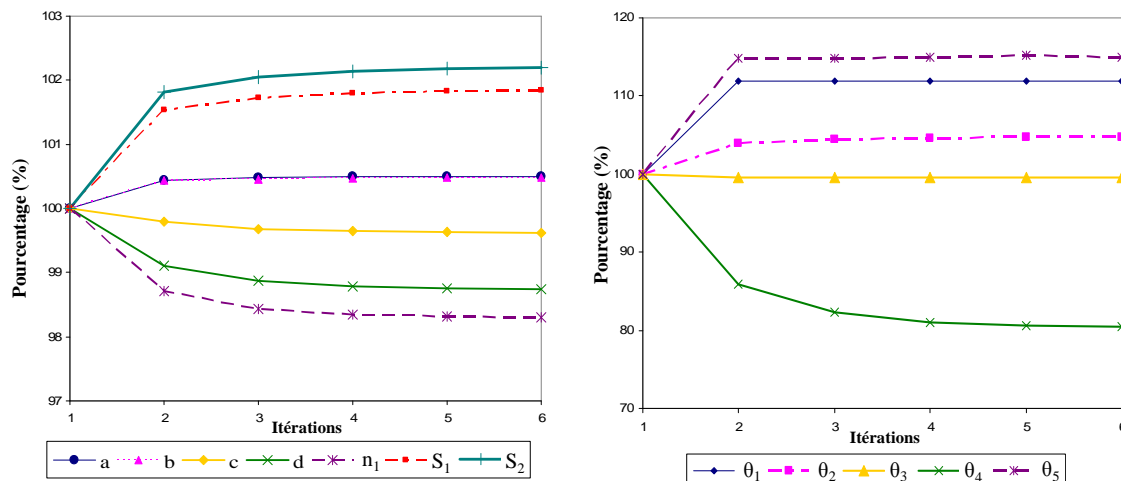


FIG. 4.35 – Convergences des variables (gauche) et des correcteurs (droite) de l'algorithme OSM. La dernière itération donne les valeurs du vecteur de 5 correcteurs : $[1.119302 ; 1.047225 ; 0.995254 ; 0.803946 ; 1.149029]$

En conclusion, en ce qui concerne l'optimisation multi-niveaux à variables continues du transformateur, les résultats montrent que les algorithmes Space-Mapping utilisant conjointement un modèle fin et un modèle simple sont beaucoup plus performants qu'un algorithme d'optimisation utilisant uniquement le modèle EF 3D puisque le temps de calcul est 10 fois plus faible. Parmi les algorithmes de SM, l'algorithme OSM fournit les meilleurs résultats en termes d'objectif et de contraintes actives.

4.5.6 Optimisation multi-niveaux discrète

Cette partie présente les résultats d'optimisation obtenus par les méthodes multi-niveaux sur le problème d'optimisation discrète du transformateur.

Les deux nouveaux algorithmes proposés qui combinent les techniques de Space-Mapping et la méthode Branch-and-Bound (OSM-BB et MM-BB) détaillés aux paragraphes 3.4.7.1 et 3.4.7.2 sont appliqués pour résoudre ce problème d'optimisation à variables discrètes basé sur un modèle très coûteux en temps de calcul (modèle EF 3D) [TRA-09]. Le modèle analytique simple rapide est utilisé pour accélérer l'optimisation.

4.5.6.1 Problème d'optimisation multi-niveaux à variables discrètes

La figure 4.36 représente le problème d'optimisation multi-niveaux à variables discrètes du transformateur de sécurité.

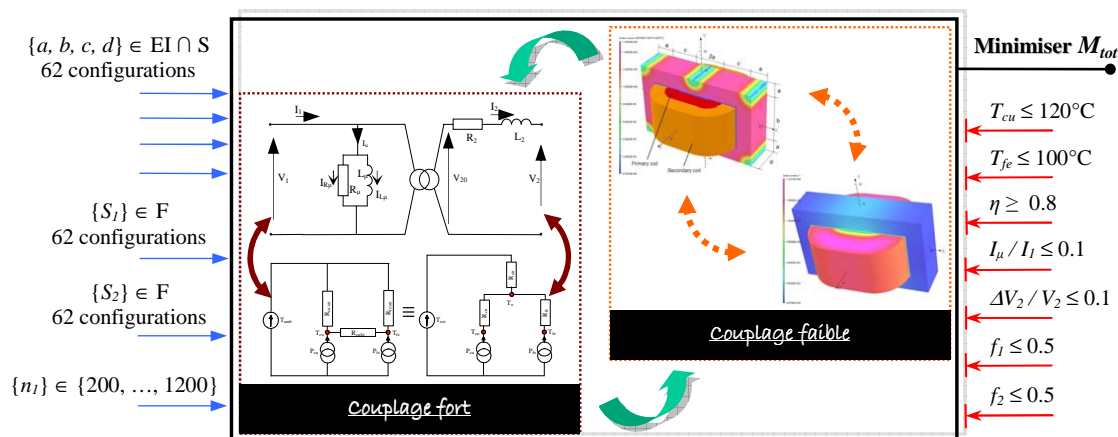


FIG. 4.36 – Problème d'optimisation multi-niveaux discrète du transformateur

4.5.6.2 Résultats d'optimisation

Le tableau 4.13 montre des résultats numériques obtenus par ces deux algorithmes. Les deux solutions optimales sont très proches. Toutes les contraintes sont respectées. La contrainte maximale est 99.7% pour le courant magnétisant I_μ/I_1 .

TAB. 4.13 – Résultats d'optimisation discrète basés sur le modèle EF 3D

Paramètres	Unité	OSM-BB	MM-BB
a	(mm)	18	18
b	(mm)	54	54
c	(mm)	18	18
d	(mm)	33.5	33.5
S_1	(mm ²)	0.2642	0.2642
S_2	(mm ²)	2.545	2.545
n_1	(-)	596	597
M_{tot}	(kg)	2.5991	2.6001
# évaluations du modèle analytique	(-)	209 784	127 852
# évaluations du modèle EF 3D	(-)	4	3
T_{co}	°C	118.648	118.711
T_{ir}	°C	97.353	97.378
η	%	87.71	87.70
I_μ/I_1	%	9.87	9.77
$\Delta V_2/V_2$	%	8.63	8.65
f_1	%	31.40	32.45
f_2	%	35.04	35.11

Les deux algorithmes convergent avec très peu d'évaluations du modèle EF 3D (4 évaluations par OSM-BB et 3 évaluations par MM-BB), mais ils ont besoin d'un nombre très important d'évaluations du modèle simple analytique (tableau 4.13). Sans les techniques de Space-Mapping, une telle optimisation globale utilisant le modèle EF n'est pas abordable en terme de temps de calcul.

La figure 4.37 montre la convergence de ces deux algorithmes pour trois variables discrètes $\{S_1\}$, $\{S_2\}$ et $\{n_1\}$. Les valeurs sur les axes sont celles des variables discrètes. L'algorithme MM-BB (3 évaluations du modèle EF) converge un peu plus rapidement que l'algorithme OSM-BB (4 évaluations du modèle EF).

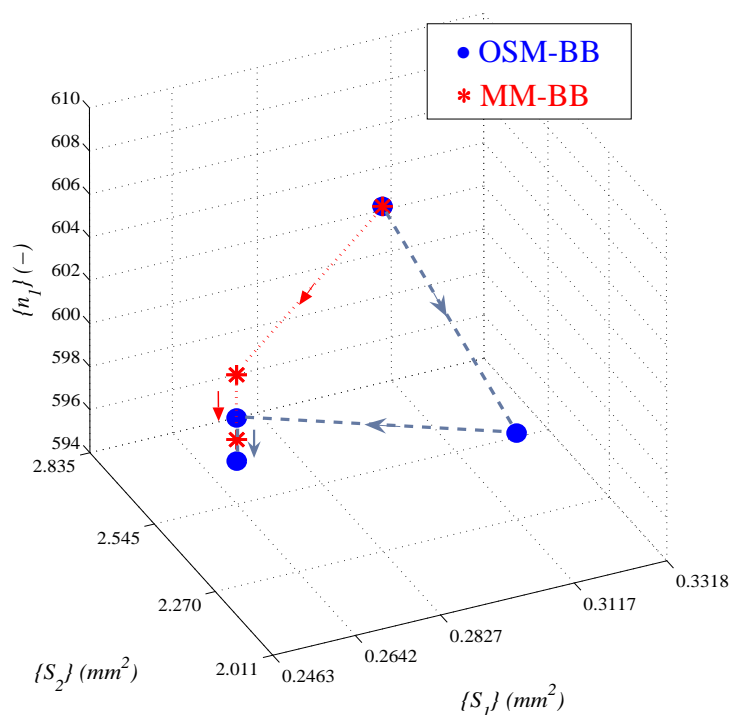


FIG. 4.37 – Convergence des deux algorithmes OSM-BB et MM-BB

Ainsi, les algorithmes utilisant les techniques de SM se combinent efficacement avec la méthode BB pour fournir une solution discrète en un nombre d'évaluations du modèle EF 3D similaire à celui d'une optimisation continue. Le nombre d'évaluations du modèle simple est cependant très élevé mais n'entraîne pas un temps de calcul important.

4.5.7 Optimisation multi-niveaux multi-objectif

Cette partie s'intéresse à montrer un front de Pareto précis construit à partir du modèle fin EF 3D.

4.5.7.1 Problème d'optimisation multi-niveaux multi-objectif à variables continues

Le problème d'optimisation continue multi-niveaux multi-objectif à deux objectifs : la masse totale M_{tot} et le rendement η , basé sur deux modèles de niveaux de précision différente est résolu en utilisant l'algorithme SM-MO proposé au paragraphe 3.4.8. La figure 4.38 représente ce problème. Le modèle fin utilisé au cours de l'optimisation est le modèle EF 3D et le modèle simple est le modèle analytique avec l'hypothèse de Kapp.

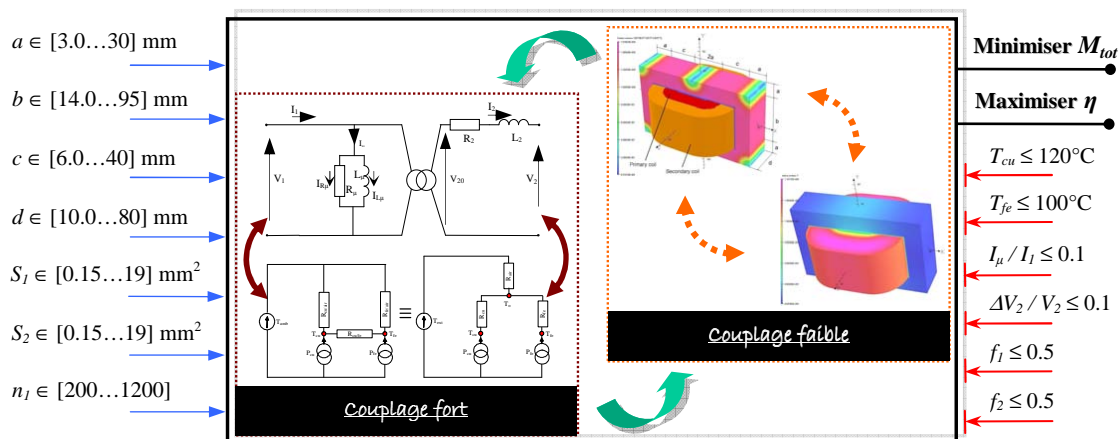


FIG. 4.38 – Problème d'optimisation continue multi-niveaux multi-objectif du transformateur de sécurité

4.5.7.2 Dilemme du concepteur

Pour générer 100 solutions optimales sur le front de Pareto, 10 000 h sont nécessaires avec le modèle EF 3D, tandis que seulement 5 minutes suffisent avec le modèle analytique. Puisque, la résolution du problème multi-objectif avec le modèle EF 3D est très coûteuse en temps de calcul, uniquement 6 points du front de Pareto sont calculés avec la méthode ϵ -contraintes et l'algorithme OSM et reportés sur la figure 4.39. Ils sont considérés comme des points de référence. Le modèle analytique est utilisé pour construire un front de Pareto étendu en un temps de calcul faible. Malheureusement, ce dernier est bien loin de l'ensemble de référence (figure 4.39). Comment obtenir un front de Pareto précis en un temps de calcul acceptable ?

Une solution pour résoudre ce dilemme est l'algorithme SM-MO détaillé au paragraphe 3.4.8. Il combine la technique OSM et la méthode d'optimisation multi-objectif ϵ -contraintes et est capable d'aligner le modèle simple sur le modèle fin non plus pour un point unique mais pour un ensemble de points. Il est alors envisageable de trouver un front de Pareto précis étendu en une centaine d'heures.

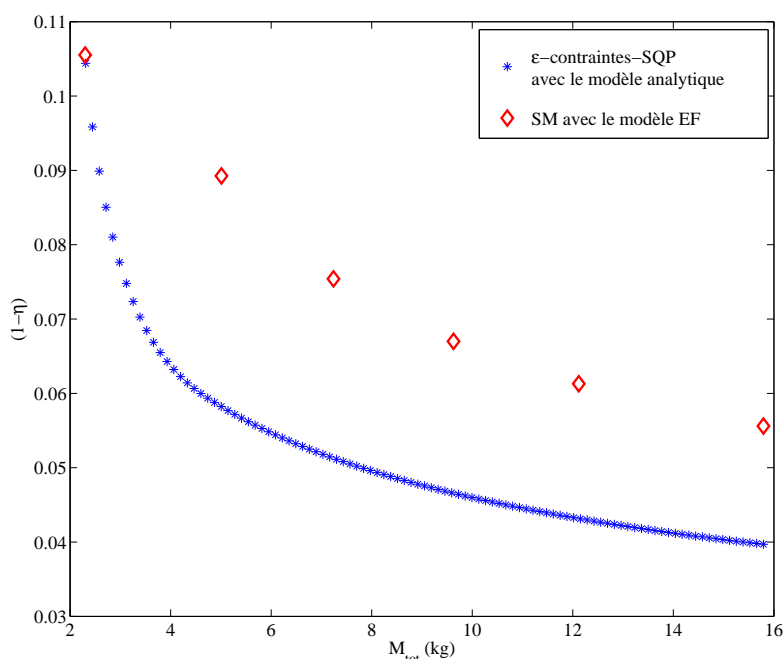


FIG. 4.39 – Fronts de Pareto construits avec les modèles EF 3D et analytique

4.5.7.3 Fronts de Pareto approximés

Pour ce problème d'optimisation du transformateur, deux contraintes (facteurs de remplissage f_1 , f_2) parmi les six contraintes et un objectif (la masse totale M_{tot}) n'ont pas besoin d'être évalués par le modèle EF 3D. En effet, ils sont calculés analytiquement. Autrement dit, les calculs du modèle EF 3D sont identiques à ceux du modèle analytique. Ainsi, cinq réponses T_{cu} , T_{fe} , η , I_μ/I_1 et $\Delta V_2/V_2$ nécessitent les calculs EF 3D pour élaborer les fonctions d'interpolation spline des cinq correcteurs correspondants $\Theta = [\theta_1; \theta_2; \theta_3; \theta_4; \theta_5]$ en fonction du coefficient de contrainte $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$. Ici, la fonction objectif sur le rendement η est gardée et la masse totale M_{tot} est convertie en une contrainte.

À l'initialisation, en appliquant la méthode ϵ -contrainte-SQP, le premier front initial, appelé $LM^{(0)}$ est obtenu avec 30 points (figure 4.40).

À la première itération ($j = 0$), deux simulations EF sont lancées avec deux points aux extrémités du front de Pareto. Les fonctions d'interpolation à cette itération sont donc déterminées avec ces 2 points (figure 4.41). Un front de Pareto $LM^{(1)}$ avec 30 points est construit par la méthode ϵ -contrainte-SQP. Ce front est encore très loin du front initial (figure 4.40) et l'algorithme passe à l'itération suivante.

À la deuxième itération ($j = 1$), une simulation EF est faite en un point ajouté correspondant à $\epsilon_3 = \frac{\epsilon_{max} - \epsilon_{min}}{2}$. Les fonctions d'interpolation sont donc déterminées avec 3

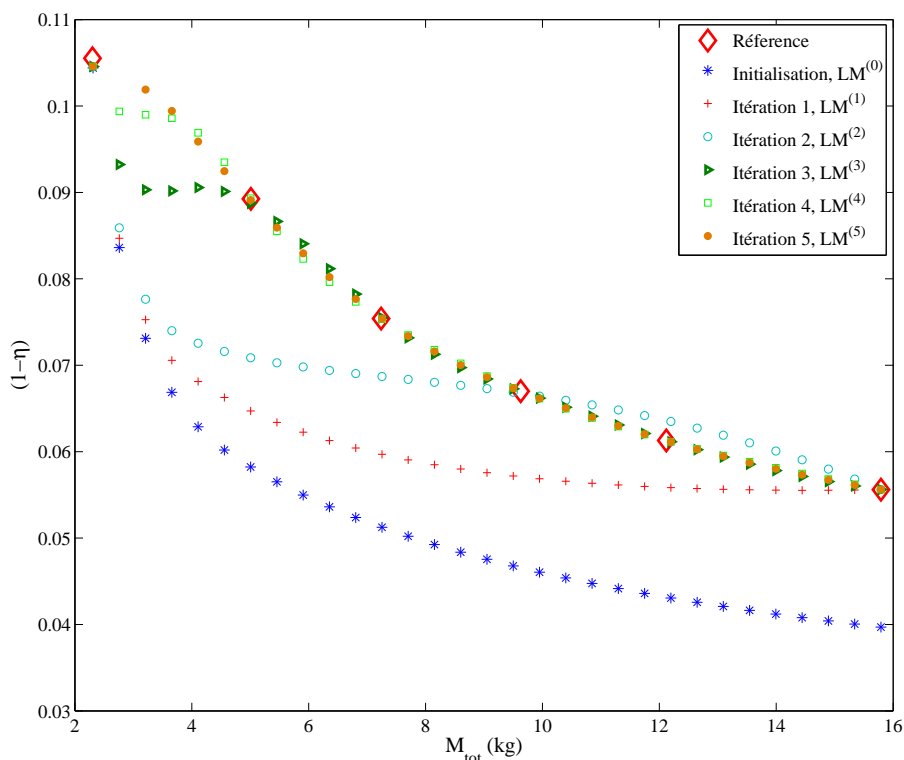


FIG. 4.40 – Fronts de Pareto obtenus par l'algorithme proposé SM-MO

points ($2^1 + 1$ points) comme montré en figure 4.41. 30 solutions Pareto optimales constituant le front de Pareto rapproché $LM^{(2)}$ sont ainsi obtenues par la méthode ϵ -contrainte (figure 4.40). Il est très écarté du front de Pareto précédent $LM^{(1)}$. Alors l'algorithme continue.

À la troisième itération ($j = 2$), deux simulations EF sont réalisées en deux nouveaux points correspondant à $\epsilon_4 = \frac{\epsilon_{max} - \epsilon_2}{2}$ et à $\epsilon_5 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_{min}}{2}$. L'interpolation spline pour chaque correcteur utilise alors avec 5 points ($2^2 + 1$ points) (figure 4.41). Le front de Pareto rapproché $LM^{(3)}$ est calculé par la méthode ϵ -contrainte, toujours avec 30 points. Il est encore écarté du front $LM^{(2)}$. Alors l'algorithme passe l'itération suivante.

Ce processus continue jusqu'à la cinquième itération ($j = 4$). Donc 17 points ($2^4 + 1$) sont utilisés pour construire les fonctions correctives splines (figure 4.41). Un front de Pareto $LM^{(5)}$ est trouvé. Ce front de Pareto optimal est proche du front $LM^{(4)}$, l'algorithme s'arrête. Le front de Pareto précis $LM^{(5)}$ est donc déterminé avec 17 simulations EF 3D. Il est très proche du front de Pareto de référence (figure 4.40).

Le temps de calcul de l'algorithme proposé est de 34 heures pour un PC Intel Pentium M 2.13 GHz. L'ensemble des 6 solutions Pareto optimales de référence qui donne la forme du front de Pareto nécessite 60 heures (3 jours) sur la même machine. Pour avoir un front

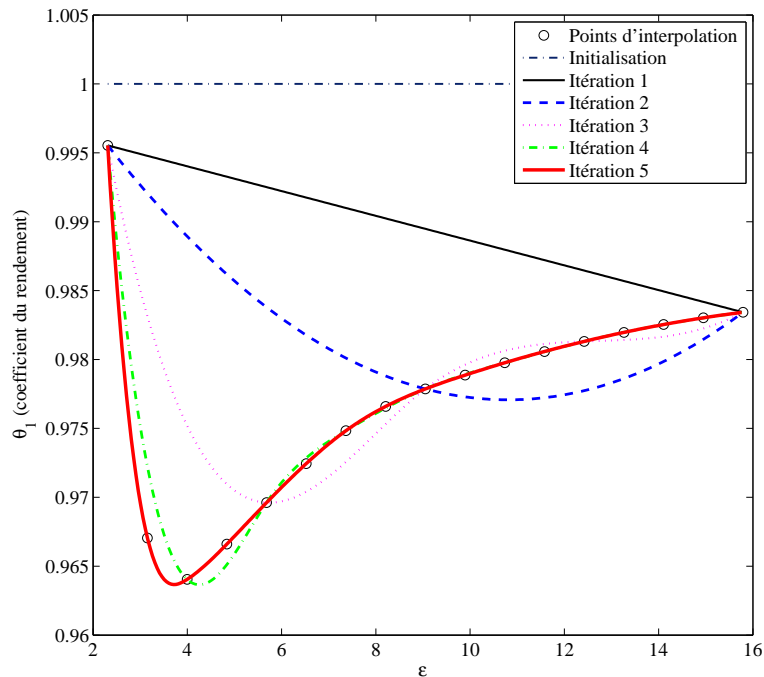


FIG. 4.41 – Fonctions correctives splines pour le correcteur de rendement du transformateur θ_3 . Les points choisis par la méthode de dichotomie indiquent les simulations réalisées par le modèle fin EF 3D. Les fonctions splines construites à la 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} itérations sont tracées.

précis de Pareto en utilisant uniquement le modèle EF 3D, 10 000 heures (14 mois) seraient nécessaires.

Ainsi, la technique de SM est une solution pratique qui permet de construire un front de Pareto précis pour résoudre un problème d'optimisation multi-objectif avec un modèle magnéto-électro-thermique fin EF 3D (très coûteux, 2 h par évaluation) en un temps de calcul tout à fait raisonnable. L'interpolation spline est appliquée pour prédire les valeurs des coefficients correctifs. En utilisant ces fonctions correctives, l'algorithme d'optimisation multi-objectif ϵ -contrainte obtient un front de Pareto précis et étendu en moins de 40 heures.

4.6 Site Internet pour le Benchmark du Transformateur de Sécurité

Un site internet, montré en figure 4.42, a été réalisé [TRA-07b]. Il est actuellement disponible sur le lien :

<http://l2ep.univ-lille1.fr/come/benchmark-transformer.htm>

Ce site reprend la description du benchmark pour les optimisations multi-objectif, multi-niveaux et combinatoire. On peut également y télécharger les bases de données pour les variables de conception discrètes (figure 4.42), les scripts Matlab du modèle analytique, et les fichiers de commande Opera3D pour le modèle EF avec le couplage magnéto-thermique. Quelques résultats d'optimisation et la description des méthodes d'optimisation multi-objectif, multi-niveaux et combinatoire y sont détaillés. Les utilisateurs peuvent aussi poster directement leurs résultats sur le site internet.

The screenshot shows the website's introduction page. It includes a navigation menu on the left with categories like 'Introduction', 'Optimization Problems', 'Models', 'Comparison of Models', 'Combinatorial Opt.', 'Multi-Level Opt.', 'Multi-Objective Opt.', and 'Your results'. The main content area features an 'Introduction' section with text about electromagnetic device design optimization. To the right, there is a diagram of a transformer and a table titled 'Database of types of lamination EI and types of frame F for the safety isolating transformer'. A handwritten note 'Base de données pour E-I' is written next to the table.

n	Types of lamination and frame	a	b	c	d	Code	Note
1	EI 15	0.002	0.006	0.0038	0.0063	AD1103	
		0.0024	0.011	0.0048	0.0053	AD1105	
2	EI 18.2	0.0024	0.011	0.0048	0.0053	AD1108	
3	EI 25.6	0.0023	0.0125	0.0048	0.0060	AD1116	
		0.006	0.015	0.006	0.0195	AD1127	
4	EI 30	0.006	0.015	0.006	0.016	AD1130	
		0.006	0.015	0.006	0.0075	AD1133	
		0.006	0.015	0.006	0.0052	AD1136	
		0.0045	0.019	0.007	0.0082	AD1139	
5	EI 32	0.0045	0.019	0.007	0.014	AD1142	
		0.0045	0.019	0.007	0.0135	AD1151	
6	EI 38	0.0064	0.0192	0.0064	0.0136	B00545	
7	EI 42	0.007	0.021	0.007	0.0145	B00549	
8	EI 44	0.007	0.022	0.008	0.015	AD1166	

FIG. 4.42 – Page de l'introduction du site internet du benchmark

4.6.1 Modèles disponibles

Le modèle analytique avec l'hypothèse de Kapp et le modèle du couplage faible EF 3D magnéto-thermique y sont disponibles sur le site internet dans le topic "Models" (figure 4.43). Des scripts en Mathcad, Matlab, @ProDesign et un fichier pdf téléchargeables sont élaborés pour le modèle analytique. Un fichier *.zip contenant des fichiers de commande de Opera3D et des scripts en Matlab est à télécharger pour le modèle EF 3D avec le couplage faible. Le fichier *.zip contient :

- un fichier de commande Opera3D *.comi pour la simulation magnétodynamique en essai en charge du transformateur,
- un fichier de commande Opera3D *.comi pour la simulation thermostatique du transformateur,
- un fichier de commande Opera3D *.comi pour la simulation magnétodynamique en essai à vide du transformateur,
- des scripts de pilote *.m pour coupler les deux logiciels Matlab-Opera pour le couplage faible magnéto-thermique,
- des fichiers *.txt pour échanger les données entre Matlab et Opera.

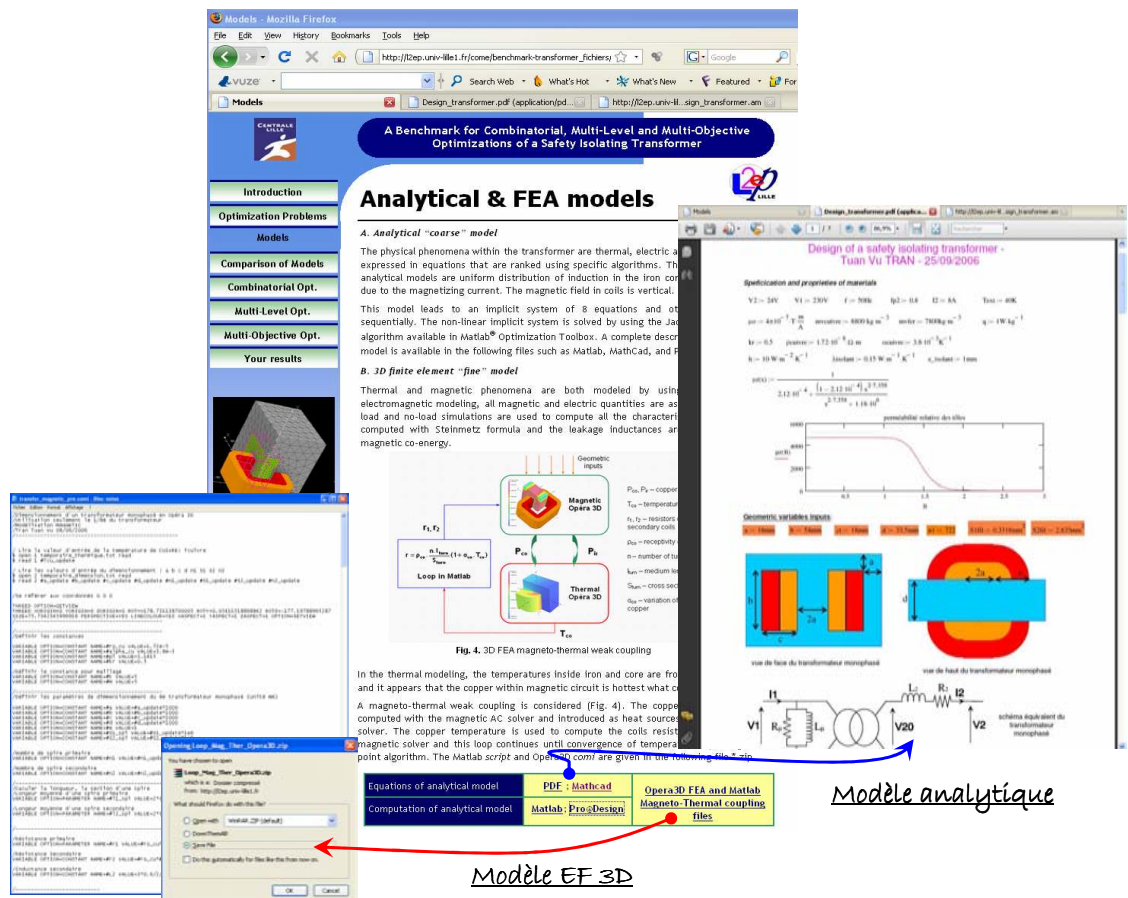


FIG. 4.43 – Modèles disponibles sur le site internet

4.6.2 Capitalisation des connaissances

Les résultats numériques des optimisations discrète, multi-objectif et multi-niveaux y sont également représentés comme montré figure 4.44. Pour la facilité d'utilisation, une description de chaque méthode d'optimisation et des références associées peuvent être directement accédées par un simple clic (figure 4.44). De même, les détails de ces résultats sont facilement accessibles.

Combinatorial Optimization

Four combinatorial optimization methods are examined. The first one, a commercial software, **ProDesign** is based on reducing spaces of discrete variables. The second one is Exhaustive Enumeration (EE) method solved by Matlab® distributed computing toolbox. This simplest method assures the global solution with a huge computational time. The third one is a stochastic method, **Genetic Algorithm** based on Darwin theory of evolution. The fourth one is **Branch-and-Bound** method that obtains the same global solution as EE method with a smallest CPU time. The continuous optimization using **SQP** is also performed and taken as reference.

Table II shows numerical results and computational time of these combinatorial optimization methods. Clicking on the name of the method, a description of the method appears with the authors name and associated references.

Parameters	Continuous optimization	Combinatorial optimizations			
		ProDesign	EE	GA	BB
a	mm	12.92	18	18	18
b	mm	50.12	54	54	54
c	mm	16.61	18	18	18
d	mm	42.26	33.5	33.5	33.5
S ₁	mm ²	0.325	0.3318	0.2827	0.2827
S ₂	mm ²	2.912	2.835	2.27	2.835
n ₂	-	640.77	722	610	614
		2.311	2.840	2.594	2.633
		4	38	14*10 ⁶	3*10 ⁵
		108.80	103.60	109.20	106.25
		100.00	94.19	99.58	97.13
		89.55	88.54	87.60	88.04
		10.00	4.90	9.90	9.90
		6.91	8.20	8.20	7.86
		50.00	49.29	51.50	51.20
		50.00	47.56	52.20	51.98

Multi-Level Optimization

Optimization results reached by different multi-level algorithms are given in Table III (methods, optimal values of design variables, total mass, number of evaluations of both models and maximal obtained constraint). Clicking on the name of the method, a description of this method appears with the authors name and associated references. Clicking on the value of the maximal constraint, the value of each constraint is given.

Fig 5 shows the convergence histories of **ASM** comparing with **MM** and **OM** algorithms. In Fig 5, the maximal constraint is plotted with lines and values can be read from the right axis. The total mass is plotted using histograms and the values can be read from the left axis.

Methods	a ₁ mm	b ₁ mm	c ₁ mm	d ₁ mm	n ₁	S ₁ mm ²	S ₂ mm ²	Mtot kg	Model	Evals	Max. constraint
SQP	12.92	50.12	16.61	42.26	640.77	0.325	2.912	2.311	Analytical	108	0.0 %
ASM	12.84	51.39	16.90	42.98	653.80	0.323	3.020	2.343	FEA	1	1.6 %
Output mapping	12.98	50.37	16.55	42.71	629.89	0.331	2.976	2.301	FEA	6	0.0 %
SQP	14.94	48.40	15.64	38.27	611.78	0.310	2.787	2.294	FEA	44	0.9 %
MM	12.98	50.35	16.57	42.81	631.48	0.330	2.969	2.306	FEA	3	0.1 %

Output mapping

T _{co} , °C	T _{ir} , °C	η, %	I _p / I ₁ , %	DV ₂ / V ₂ , %	f ₁ , %	f ₂ , %
119.05	100.00	89.45	10.00	7.52	50.0	50.0

Description de la méthode d'optimisation

Détail du résultat

FIG. 4.44 – Quelques résultats du benchmark disponibles sur le site

4.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté des optimisations variées faites sur le benchmark d'un transformateur de sécurité qui est un dispositif magnéto-électrique le plus utilisé dans l'ingénierie industrielle. Quatre modèles de différents niveaux de précision (deux modèles analytiques, deux modèles EF 2D, 3D) sont construits, comparés et validés par des mesures expérimentales. Le modèle simple avec l'hypothèse de Kapp et le modèle fin EF 3D sont retenus pour la mise au point des algorithmes d'optimisation par différentes approches.

Pour la première approche, l'optimisation combinatoire du transformateur basée sur le modèle analytique est résolue par la méthode Branch-and-Bound proposée. Ses résultats sont comparés avec d'autres méthodes : Enumération Exhaustive, Algorithme Génétique et le logiciel Pro@Design. Ces comparaisons montrent l'efficacité de cet algorithme qui obtient la solution globale avec un temps de calcul raisonnable.

La deuxième approche concernant l'optimisation multi-objectif à variables continues est réalisée par les méthodes exactes WS-SQP, ϵ -contrainte-SQP et une méthode stochastique NSGA-II. Les fronts de Pareto obtenus montrent que le problème est convexe, et que les méthodes exactes sont, très logiquement, les meilleures.

Concernant l'optimisation multi-objectif à variables discrètes, les fronts de Pareto trouvés par les deux algorithmes proposés combinant les techniques scalaires et la méthode BB sont comparés avec celui de la méthode stochastique NSGA-II. Cette dernière ne peut pas déterminer les deux extrémités du front de Pareto, et ses solutions supportées et non-supportées obtenues sont moins précises que celles trouvées par la méthode ϵ -contraintes-BB proposée.

La quatrième approche consiste à intégrer les impacts environnementaux dans l'optimisation du transformateur. La première solution est d'analyser d'abord le cycle de vie du transformateur et de prendre ensuite une décision. La deuxième solution est d'établir un modèle d'impact environnemental qui est utilisé dans une optimisation multi-objectif (technico-écono-écologique). Les résultats de ces deux solutions réduisent les impacts environnementaux du transformateur mais la deuxième solution offre une vision plus globale aussi bien des différents impacts que des compromis possibles.

La cinquième approche est l'optimisation multi-niveaux pour laquelle les deux modèles simple et fin sont conjointement utilisés. Les résultats trouvés par différentes techniques de Space-Mapping (ASM, OSM, MM) sont comparés. Il apparaît que les algorithmes MM et OSM proposé sont plus robustes et efficaces.

En ce qui concerne l'optimisation discrète basée sur un modèle très coûteux en temps de calcul (modèle EF 3D), les deux algorithmes proposés combinant la technique SM et la méthode BB sont testés sur le benchmark du transformateur de sécurité. Les résultats

montrent l'efficacité de cette nouvelle méthode qui permet d'obtenir la solution globale avec seulement quelques évaluations du modèle EF 3D.

Enfin, l'approche multi-objectif basée sur le modèle EF 3D est traitée au moyen d'un algorithme proposé combinant la technique SM et une méthode multi-objectif. Un temps de calcul très important est gagné en utilisant cet algorithme : seulement 34 évaluations du modèle fin EF 3D suffisent pour obtenir un front de Pareto précis.

Toutes les approches d'optimisation menées sur le transformateur de sécurité ont été résolues au moyen des algorithmes d'optimisation détaillés au chapitre 3. Leurs résultats par rapport aux approches existantes confirment leur intérêt.

Enfin, un site internet du benchmark rassemblant toutes les informations du transformateur de sécurité est mis en disposition. Il permet de partager et capitaliser les connaissances sur les méthodes d'optimisation.

Chapitre 5

Conclusion Générale

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du développement d'algorithmes d'optimisation adaptés aux enjeux de la conception optimale des dispositifs électromagnétiques.

Un premier enjeu est le *choix structurel* des machines électriques pour lequel les variables de conception sont souvent discrètes ou non-classables (les types de tôle pour circuit magnétique, les types de fil émaillé, le nombre d'aimants, le nombre de spires, etc.).

Le deuxième enjeu est *le temps* donc la recherche d'algorithme capable de tirer parti de la disponibilité de modèles ayant des niveaux d'hypothèse et donc des temps de calculs très différents. Il s'agit donc d'accélérer la convergence des processus d'optimisation utilisant les modèles les plus précis.

Le dernier enjeu est l'intégration des *impacts environnementaux* dans le processus d'optimisation des machines électriques. Cette problématique récente est celle de l'éco-conception dont l'acceptabilité peut largement être facilitée par l'optimisation multi-objectif et il semble qu'aucune démarche d'éco-conception optimale ne se soit imposée.

Bien évidemment ces 3 enjeux peuvent se retrouver mêlés au sein d'un même problème de conception.

Dans le premier chapitre, l'état de l'art de la démarche de conception optimale des machines électrique a été présenté. Cette démarche se compose de cinq grandes étapes successives : analyse du cahier des charges ; formulation du problème de conception en un problème d'optimisation au sens mathématique ; modélisation du dispositif ; résolution du problème ; exploitation et analyse des résultats. Un retour vers les étapes précédentes permet de corriger le processus d'optimisation en cas d'insatisfaction du concepteur qui reste le maître du processus de conception.

Deux problèmes de conception en génie électrique ont été exposés afin d'illustrer les enjeux. Le premier dispositif est un moteur roue à courant continu et aimant permanent.

Le deuxième dispositif est un transformateur de sécurité dont plusieurs modèles ont été élaborés.

Dans le deuxième chapitre, des algorithmes d'optimisation qui sont capables de vaincre les difficultés exposées au chapitre 2 sont présentées.

La méthode déterministe *Branch-and-Bound* est développée pour traiter les problèmes d'optimisation combinatoire. Elle est comparée avec la méthode d'Énumération Exhaustive, et à la technique de recherche au voisinage sur un problème test simple. Elle montre sa capacité à atteindre la solution globale avec un nombre d'évaluations du modèle raisonnable.

Deux nouveaux algorithmes *WS-BB* et ϵ -*contraintes-BB* combinant des méthodes multi-objectif exactes, méthode de pondération et méthode ϵ -contraintes, avec la méthode Branch-and-Bound sont proposés pour résoudre le problème d'optimisation multi-objectif à variables discrètes. L'algorithme ϵ -contraintes-BB est capable d'obtenir toutes les solutions de Pareto supportées et non-supportées.

Concernant l'optimisation basée sur un modèle précis mais trop lourd en temps de calcul, les techniques *Space-Mapping* qui s'appuient sur un second modèle simple mais rapide pour accélérer la convergence du processus d'optimisation sont étudiées et développées. D'abord, l'algorithme Agressive Space-Mapping qui est le plus courant est modifié. Nous proposons l'algorithme *Output-Space-Mapping*, en collaboration avec les chercheurs inventeurs du récent algorithme Manifold-Mapping.

Deux nouveaux algorithmes *OSM-BB* et *MM-BB* combinant les deux méthodes OSM et MM avec la méthode Branch-and-Bound sont proposés pour la première fois pour résoudre un problème d'optimisation discrète utilisant un modèle très coûteux en temps de calcul.

En ce qui concerne l'optimisation multi-objectif avec un modèle fin, mais long à calculer, un algorithme *SM-MO* combinant la technique Space-Mapping avec une méthode multi-objectif est également proposé. Cette technique consiste à rapprocher le front de Pareto trouvé par le modèle simple du front de Pareto fin en utilisant seulement quelques évaluations du modèle fin.

Le troisième chapitre détaille le *benchmark d'un transformateur de sécurité* présenté au chapitre 2.

La modélisation du transformateur par quatre modèles thermo-magnéto-électrique : deux modèles analytiques avec et sans l'hypothèse de Kapp, deux modèles éléments finis en 2D et 3D sont présentés. Ils sont comparés et validés par des mesures expérimentales. Ainsi, le *modèle analytique* avec l'hypothèse de Kapp mais rapide (50 ms par évaluation)

et le *modèle EF 3D*, mais long (2 h par évaluation avec le couplage magnéto-thermique) sont retenus pour les optimisations.

Un *modèle d'impact* environnemental est construit par la méthode des plans d'expériences et un logiciel d'analyse du cycle de vie. Il est couplé avec le modèle thermo-magnéto-électrique pour l'éco-conception du transformateur au moyen d'une optimisation multi-objectif.

Plusieurs problèmes d'optimisation sur le benchmark du transformateur sont obtenus afin de mettre en oeuvre et tester les algorithmes proposés au chapitre 3.

Le premier est un problème d'optimisation *mono-objectif à variables discrètes*. Les résultats d'optimisation discrète du transformateur obtenus par la méthode Branch-and-Bound sont comparés avec ceux trouvés par la méthode d'Énumération Exhaustive en faisant appel au calcul parallèle, un algorithme génétique avec un codage spécifique, et le logiciel Pro@Design. Ils montrent que la méthode Branch-and-Bound est efficace et fournit l'optimum global avec un temps de calcul très raisonnable par rapport aux autres méthodes.

Le deuxième problème est *multi-objectif à variables continues*. Il est résolu par deux algorithmes déterministes combinant la méthode de pondération et la méthode ϵ -contraintes avec la méthode SQP et comparée à la méthode stochastique NSGA-II. Le front de Pareto montre que le problème d'optimisation contenant deux objectifs conflictuels (minimiser la masse et maximiser le rendement) est convexe. Les fronts de Pareto trouvés par ces algorithmes déterministes WS-SQP, ϵ -contraintes-SQP sont très proches. Ils sont meilleurs que celui fourni par NSGA-II.

Le troisième problème est *multi-objectif à variables discrètes*. Les fronts de Pareto trouvés par les deux algorithmes exacts WS-BB et ϵ -contraintes-BB sont également comparés avec celui de NSGA-II. La méthode NSGA-II est incapable de trouver les deux extrémités du front de Pareto. L'algorithme WS-BB ne peut que fournir les solutions de Pareto supportées dans les régions convexes. L'algorithme ϵ -contraintes-BB permet lui d'obtenir toutes les solutions de Pareto supportées et non-supportées non seulement dans les régions convexes mais aussi dans les régions non-convexes sur le front de Pareto.

Le quatrième problème concerne *l'éco-conception* du transformateur. Deux solutions ont été proposées. La première est d'analyser tous les impacts environnementaux des 3 étapes de son cycle de vie (fabrication-démontage, distribution et utilisation) et de retenir la grandeur électrique ou magnétique la plus corrélée aux impacts comme critère d'optimisation. La deuxième est globale. Elle consiste à établir un modèle d'impact environnemental et formuler le problème d'éco-conception comme un problème d'optimisation multi-objectif. Les résultats montrent que les impacts environnementaux sont réduits avec les deux approches. La seconde offre un ensemble de solutions et écarte le risque d'un report des pollutions.

Le cinquième problème qui est un problème *multi-niveaux à variables continues*. Il est traité par les techniques de Space-Mapping. Un modèle éléments finis 3D et un modèle analytique sont utilisés au cours de cette optimisation. Leurs résultats montrent que les algorithmes OSM et MM sont plus robustes et efficaces que l'ASM. L'algorithme OSM est le plus performant et trouve une solution précise après seulement 6 évaluations du modèle EF 3D avec une tolérance de 10^{-6} .

Le sixième problème est mono-objectif à variables *discrètes* et utilise un *modèle très lourd* en temps de calcul (modèle EF 3D). Les résultats numériques obtenus par les deux algorithmes proposés OSM-BB et MM-BB montrent que ces méthodes sont très efficaces. Sans les techniques de SM, un tel problème d'optimisation ne peut pas être résolu, alors que quelques évaluations du modèle fin EF 3D (4 pour OSM-BB et 3 pour MM-BB) suffisent.

Le dernier problème est *multi-objectif* basée sur le *modèle EF 3D*. Seules 34 heures sont exigées par l'algorithme proposé SM-MO pour trouver le front de Pareto de référence (6 points en 60 heures). Alors que la construction du front de Pareto avec la l'algorithme WS-SQP et le modèle EF 3D demanderait 14 mois.

Un *site internet* a également été construit. Il rassemble les informations utiles en vue de tester le benchmark ainsi que les premiers résultats d'optimisation présentés dans ces travaux de recherche. Il propose à la communauté scientifique de capitaliser leurs résultats et de comparer les méthodes d'optimisation.

En ce qui concerne les perspectives, les méthodes Branch-and-Bound et les techniques Space-Mapping pourront être utilisés pour résoudre les problèmes discrets ou mixtes qui apparaissent en conception optimale des systèmes. Dans ces approches, il s'agit d'optimiser simultanément les composants et le système qui les emploie. Le cahier des charges imposé au système se propage jusqu'au niveau composant. À tous les niveaux de l'arborescence, les modèles peuvent être plus ou moins complexe et il s'agit de trouver à la fois les modèles qui conviennent et les algorithmes adaptés à cette nouvelle situation. Cette démarche ouvre la voie à la synthèse automatique de composant.

Bibliographie

- [AMO-07] Amoiralis, E. I., Tsili, M. A., Georgilakis, P. S., Kladas, A. G., and Souflaris, A. T., "*A Parallel Mixed Integer Programming-Finite Element Method Technique for Global Design Optimization of Power Transformer*", selected papers from COMPUMAG 2007, IEEE Transaction on Magnetics, vol. 44, no. 6, pp. 1022-1025, June 2008.
- [BAN-94] Bandler, J. W., Biernacki, R. M., Chen, S. H., Grobelny P. A., and Hemmers, R. H., "*Space Mapping Technique for Electromagnetic Optimization*", IEEE Transactions on Microwave theory and techniques, vol. 42, no. 12, pp. 2536-2544, 1994.
- [BAN-95] Bandler, J. W., Biernacki, R. M., Chen, S. H., Hemmers, R. H. and Madsen, K., "*Electromagnetic Optimization Exploiting Aggressive Space Mapping*", IEEE Transactions on Microwave theory and techniques, vol. 43, no. 12, pp. 2874-2882, 1995.
- [BAN-02] Bandler, J. W., Mohamed, A. S., Bark, M. H., Madsen, K., and Sondergaard, J., "*EM-Based Optimization Exploiting Partial Space Mapping and Exact Sensitivities*", IEEE Transactions on Microwave theory and techniques, vol. 50, no. 12, pp. 2741-2750, 2002.
- [BAN-03] Bandler, J. W., Cheng, Q. S., Gebre-Mariam, D. H., Madsen, K., Pedersen, F., and Søndergaard, J., "*EM-based surrogate modelling and design exploiting implicit, frequency and output space mappings*", IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest, pp. 1003-1006, 2003.
- [BAN-04] Bandler, J.W., Cheng, Q.S., Dakroury, S.A., Mohamed, A.S., Bakr, M.H., Madsen, K., and Sondergaard, J., "*Space Mapping : The State of the Art*", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 52(1) : 337 - 361, 2004.
- [BAK-98] Bakr, M. H. , Bandler, J. W., Miernacki, R. M., Chen, S. H., Madsen, K., "*A Trust Region Aggressive Space Mapping Algorithm for EM Optimization*", IEEE Transactions on Microwave theory and techniques, vol. 46, no. 12, pp. 2412-2425, 1998.
- [BAK-99] Bakr, M. H. , Bandler, J. W., Natalie, G., "*An Aggressive Approach to Parameter*

- Extraction*", IEEE Transactions on Microwave theory and techniques, vol. 47, no. 12, pp. 2428-2439, 1999.
- [BOU-05] Catalogue standard de tôles magnétiques <http://www.rbourgeois.com>
- [BRI-05] Brisset, S. and Brochet, P., "*Analytical model for the optimal design of a brushless DS wheel motor*", COMPEL, vol. 24, no. 3, pp. 829-848, 2005.
- [BRO-65] Broyden, C.G., "*A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations*", Mathematics of Computation, vol. 19, no. 92, pp. 577-593, 1965.
- [CAL-01] Caldora Costa, M., "*Optimisation des dispositifs électromagnétiques dans un contexte d'analyse par la méthodes des éléments finis*", thèse doctorat - INPG - LEG, 2001.
- [CHE-01] Chen, X., Qian, J., Ni, G., Yang, S., and Zhang, M., "*An Improwed Genetic Algorithm for Global Optimization of Electromagnetic Problems*", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 37, no. 5, pp. 3579-3583, 2001.
- [CHO-01] Choi, H., Kim, D., Park, I., and Hahn, S., "*A new design technique of magnetic systems using space mapping algorithm*", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 37, no. 5, pp. 3627-3630, 2001.
- [COE-04] Coello Coello, C. A., and Lamont, G. B., *Application of Multi-Objective Evolutionary Algorithms, Advances in Natural Computation - Vol. 1*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004. <http://delta.cs.cinvestav.mx/~ccoello/EM00/>
- [COL-02] Collette, Y., and Siarry, P., *Optimisation multiobjectif*, Edition Eyrolles, 2002.
- [DEB-02] Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A. and Meyarivan, T., "*A fast elitist nondominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization : NSGA-II*", IEEE Trans. on Evol. Comp., vol. 6, no. 2, 2002.
- [DEB-07] Debusschere, V., Ben Ahmed, H., and Multon, B., "*Eco-design of Electromagnetic Energy Converters : The case of the electrical transformer*", proceedings of IEMDC'07 : Electric Machines & Drives Conference, IEEE International, vol. 2, pp. 1599-1604, May 2007.
- [DEB-08] Debusschere, V., Multon, B., and Ben Ahmed, H., "*Eco-design of Electro-Mechanical Energy Converters : The case of the Three-Phase Squirrel-cage Induction Machine*", proceedings of IREED'08 (International conference on Renewable Energy and Eco-Design in Electrical Engineering), Montpellier, France, December 2008.
- [DHA-84] Dhatt, G., Touzot, G., *Une présentation de la méthodes des éléments finis*, Ed. Maloine S.A. Editeur Paris. Collection Université de Compiègne, 2è édition, 1984.
- [DIA-02] Dias, A. H. F., and de Vasconcelos, J. A., *Multiobjective Genetic Algorithms Applied to Solve Optimization Problems*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 38, no. 2, pp. 1133-1136, 2002.

-
- [DOR-92] Dorigo, M., *"Optimization, Learning and Natural Algorithms"*, PhD thesis, Politecnico di Milano, Italy, 1992.
- [DUF-78a] Duff, I.S., and Reid, J.K., *"An implementation of Tarjan's Algorithm for the Block Triangularization of a Matrix"*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol 4, no. 2, pp. 137-147, June 1978.
- [DUF-78b] Duff, I.S., and Reid, J.K., *"Algorithm 529 - Permutations to Block Triangular Form [F1]"*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol 4, no. 2, pp. 189-192, June 1978.
- [EBN-98] Ebner, Th., Magele, Ch., Brandstatter, B.R. and Richeter K. R., *"Utilizing Feed Forward Neural Networks for Acceleration of Global Optimisation Procedures"*, IEEE Trans. Magn., vol. 34, no. 5, pp. 2928-2931, 1998.
- [ECH-05] Echeverria, D., Lahaye, D., Encia, L., Lomonova, E. A., Hemker, P. W., *"Optimisation in Electromagnetic with the Space-Mapping Technique"*, COMPEL, vol. 24, no. 3, pp. 952-966, 2005.
- [ECH-06] Echeverria, D., Lahaye, D., Encia, L., Lomonova, E. A., Hemker, P. W., and Vandenput, A. J. A., *"Manifold-Mapping Optimization Applied to Linear Actuator Design"*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 42, no 4, pp. 1183-1186, 2006.
- [ECH-07] Echeverria, D., *"Multi-Level Optimization, Space Mapping and Manifold Mapping"*, PhD. thesis, University of Amsterdam, 2007.
- [EHR-03] Ehrgott, M., Gandibleux, X., *Multiple Criteria Optimization, State of the Art Annotated Bibliographic Surveys*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [EHR-05] Ehrgott, M., *Multicriteria Optimization*, 2nd edition, Springer, 2005.
- [EIM] EIME, indicator manual v1.9, <http://www.codde.fr>
- [ENC-06] Encica, L., Paulides, J. J. H., Lomonova, E. A., Vandenput, A. J. A., *"Electromagnetic and Thermal Design of a Linear Actuator Using Output Polynomial Mapping"*, 41st IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2006 IEEE, 2006.
- [ENC-07] Encica, L., Echeverría, D., Lomonova, E., Vandenput, A. J. A., Hemker, P. W., and Lahaye, D., *"Efficient optimal design of electromagnetic actuators using space-mapping"*, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 33, no. 6, pp. 481-491, 2007.
- [FIS-97] Fishman, G. S., *Monte Carlo, concepts, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [FIT-04] Fitán, E., Messine, F. and Nogarède, B., *"The Electromagnetic Actuator Design Problem : A General and Rational Approach"*, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 40, no. 3, pp. 1579-1590, 2004.

- [FON-07] Fontchastagner, J., "*Résolution du problème inverse de conception d'actionneurs électromagnétiques par association de méthodes déterministes d'optimisation globale avec des modèles analytiques et numériques*", thèse de doctorat - INPT - Laplace, décembre 2007.
- [ISO-95] Catalogue standard des types de carcasse et types de tôle pour des transformateur monophasé : <http://www.isolectra-martin.com>
- [ISO-06] ISO 14040 : Environmental Management - Life Cycle Assessment - Principles and Framework, 2006.
- [INV] Catalogue standard de fils émaillés : <http://www.invex.it>
- [JAN-08] Jancovici, J. M., Conférence sur Réchauffement climatique à Ecole Centrale de Lille, 2008. <http://www.manicore.com/>
- [JAN-00] Janin, M., "*Démarche d'éco-conception en entreprise. Un enjeu : Construire la cohérence entre outils et processus*", thèse de doctorat - Chambéry : ENSAM, Institut Conception, Mécanique et Environnement, 2000.
- [JEA-99] Jean, P., Coulon, R., and Timmons, D., "*Building an EcoDesign toolkit for the electronics industry*", proceedings of EcoDesign '99 : First International Symposium on Environmentally Conscious Design and Inverse Manufacturing, pp. 701-706, Feb. 1999.
- [JON-98] Jones, D. R., Schonlau, M. and Welch, W. J., "*Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions*", Journal of Global Optimization, vol. 13, no. 4, pp. 455-492, 1998.
- [JON-05] Jones, P. and Palutikof, J., *Global Temperature Record*, online : <http://www.cru.uea.ac.uk/cru/info/warming/>, Climatic Research Unit, School of Environmental Sciences, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom.
- [GLO-93] Glover, F., and Laguna, M., *Tabu Search*, Collin R. Reeves Edition, Modern Heuristic Techniques for combinatorial problems, Blackwell Scientific Publication, Oxford, pp. 70-150, 1993.
- [HAD-98] Hadj Amor, Poloujadoff, A., M., and Salon, S. J., "*Optimum Design of Electromagnetic Devices by the State Variable Methode : Application to transformer*", Optimization of Electrical and Electronic Equipments, OPTIM '98. Proceedings of the 6th International Conference on vol. 1, pp. 271 - 277, 1998.
- [HAJ-03] Hajji, O., "*Contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques. Application à la conception des dispositifs électrotechniques*", thèse de doctorat - USTL - L2EP, décembre 2003.
- [HAR-04] Harlow, J. H., *Power transformer engineering*, CRC Press LLC, Boca Raton, Florida 33431, 2004.

-
- [HEM-07] Hemker, T., Stryk, O. v., Gersem, H. D., and Weiland, T., "*Mixed-Integer Non-linear Design Optimization of a Superconductive Magnet with Surrogate Functions*", selected papers from COMPUMAG 2007, IEEE Transaction on Magnetics, vol. 44, no. 6, pp. 1110-1113, June 2008.
- [KEN-95] Kennedy, J., and Eberhat, R. C., "*Particle swarm optimization*", proceedings of the IEEE Conference on Neural Network, vol. 4, pp. 1942-1948, Piscataway 1995
- [KIM-06] Kim, I., Y., and Weck, O., L., "*Adaptive weighted sum method for multi-objective optimization : a new method for Pareto front generation*", Structural Multidisciplinary Optimization, vol. 31, pp. 105-116, 2006.
- [KIR-83] Kirkpatrick, S., Galatt, C. D., and Vecchi, Jr. M. P., "*Optimization by Simulated Annealing*", Science, vol. 220, no. 4598, pp. 671-680, 1983.
- [KRE-07] Kreuawan, S., Gillon, F., and Brochet, P., "*Efficient global optimization : An efficient tool for optimal design*", in Proc. COMPUMAG 2007, Aachen, pp. 803-804, June 2007.
- [LAG-98] Lagarias, J.C., Reeds, J. A., Wright, M. H., and Wright, P. E., "*Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*", SIAM Journal of Optimization, vol. 9, no. 1, pp. 112-147, 1998.
- [LAR-08] Laruelle, E., Chuniaud, O., Ficheux, A., "Deployment of the eco-design approach within a reseach departement of AREVA T&D", proceedings of IREED'08 (International conference on Renewable Energy and Eco-Design in Electrical Engineering), Montpellier, France, December 2008.
- [LAN-60] Land, A. H. and Doig, A. G., "*An automatic method for solving discrete programming problems*", Eco nometrica 28, pp. 497-520, 1960.
- [LEA-01] Leary, S. J., Bhaskar, A., and Keane, A. J., "A constraint mapping approach to the structural optimization of an expensive model using surrogates", Optimization and Engineering, vol. 2, no. 4, pp. 385-398, 2001.
- [LEB-07] Le Besnerais, J., Lanfranchi, V., Hecquet, M., and Brochet, P., "*Multi-objective optimization of induction machines including mixed variables and noise minimization*", selected papers from COMPUMAG 2007, IEEE Transaction on Magnetics, vol. 44, no. 6, pp. 1102-1105, June 2008.
- [LEU] Fabricant des transformateurs, la société Leurent-Sion (et les établissements Transfos Leroy). <http://www.leurent-sion.fr/>
- [MAR-90] Marrocco, A., Hecht, F., "*A finite element simulation of an alternator connected to an non linear external circuit*", IEEE Trans. Magn. Vol. 26, n° 2, pp 964-967, March 1990.

- [MES-97] Messine, F., "Méthodes d'Optimisation Globale basées sur l'Analyse d'Intervalle pour la Résolution des Problèmes avec Contraintes", thèse de doctorat - INPT - LEEI, Septembre 1997.
- [MES-07] Mester, V., "*Conception Optimale Systémique des Composants des Chaînes de Traction Électrique*", thèse de doctorat - EC Lille - L2EP, Mai 2007.
- [MIN-83] Minoux, M., *Programmation Mathématique, théorie et algorithmes, tome 1*, Dunod Edition, 1983
- [MOU-07] Mossouni, F., Brisset, S. and Brochet, P., "*Some results on the design of brushless DC wheel motor using SQP and GA*", IJAEM, vol 26, no. 3-4, pp. 233-241, 2007.
- [MUR-08] Murano, A., Passaro, A., Abe, N. M., Preto, A. J., Stephany, S., "*Multiobjective Optimization of Electrooptic Modulators by Using the ϵ -constraint Method*", proceedings of CEFC 2008 : the 13th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, pp. 479, May, 2008.
- [NOC-99] Nocedal, J., and Wright, S. J., *Numerical Optimization*, Springer in Operations Research, Springer, Berlin, 1999.
- [OPE-04] Opera-2d, Opera-3d, *User's Guides*, November 2004
- [OPT-99] Optimization Toolbox, Computation - Visualization - Programming, *User's Guide version 2*.
- [PER-93] Perttunen, C. D., Jones, D. R. and Stuckman, B. E., "*Lipschitzian optimization without the lipschitz constant*", Journal of Optimization Theory and Application, vol. 79, no. 1, pp. 157-181, 1993.
- [PRO-05] Pro@Design-Expert, *Manuel Utilisateur*, 2005, <http://www.designprocessing.com>
- [REG-05] Régnier, J., Sareni, B., and Roboam, X., "*System optimization by multiobjective genetic algorithms and analysis of the coupling between variables, constraints and objectives*", COMPEL, vol. 24, no. 3, pp. 805-820, 2005.
- [SAK-84] Sakarovitch, M., *Optimisation combinatoire - Méthodes mathématiques et algorithmiques - Programmation discrète*, Hermann, Editeurs des sciences et des arts, Paris, 1984.
- [SAR-00] Sareni, B., Krähenbühl, L., and Nicolas, A., "*Efficient Genetic Algorithms for Solving Hard Constrained Optimization Problems*", IEEE Trans. on Magn., vol. 36, no. 4, pp. 1027-1030, 2000.
- [SCH-77] Schilling et Al., IEA, *Observatoire de l'Énergie*, 1977.
- [SEG-94] Segulier, G., and Notelet, F., *Electrotechnique Industrielle*, Editions TEC & DOC, Paris, 1994.

-
- [SON-99] Sondergaard, J., *Non-linear Optimization Using Space Mapping*, Tech. Rep. IMM-EKS-1999-23, Danish Technical University, Lyngby, 1999.
- [TEA-22] TEAM Workshop Problem 22 : SMES Optimization Benchmark, <http://www.igte.tugraz.at/team22>
- [TI-D3460] Bertin, Y., "*Refroidissement des machines électriques tournantes*", Techniques d'Ingénieur, traité Génie électrique, D 3460.
- [TRA-07a] Tran, T. V., Brisset, S., and Brochet, P., "*Combinatorial and Multi-level optimization of a safety isolating transformer*", International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics (IJAEM), vol. 26, nos. 3, 4, pp. 201-208, 2007.
- [TRA-07b] Tran, T. V., Brisset S., and Brochet, P., "*A Benchmark for Multi-Objective, Multi-Level and Combinatorial Optimizations of a Safety Isolating Transformer*", proceedings of COMPUMAG : 16th International Conference on Computation of Electromagnetic Fields, pp. 167-168, June, 2007, Aachen, Germany. <http://l2ep.univ-lille1.fr/come/benchmark-transformer.htm>
- [TRA-07c] Tran, T. V., Brisset, S., Echeverria, D., Lahaye, D., and Brochet, P., "*Space-Mapping Techniques applied to the Optimization of a Safety Isolating Transformer*", proceedings of ISEF 2007 : The 13th International Symposium on the Electromagnetic Fields, September, 2007, Prague, Czech.
- [TRA-08a] Tran, T. V., Moussouni, F., Brisset S., and Brochet, P., "*Global Constrained Optimization of a Safety Transformer using Branch-and-Bound method*", proceedings of CO 2008 : International Symposium on Combinatorial Optimization, pp. 81-82, March, 2008, Coventry, England.
- [TRA-08b] Tran, T. V., Brisset S., and Brochet, P., "*Apport de l'optimisation multi-objectif en éco-conception de systèmes électrotechniques, exemple d'un transformateur de sécurité*", présenté à International Conference on Renewable Energy and Eco-Design in Electrical Engineering (iREED), Montpellier, France, décembre 2008. L'article complet a été retenu pour une publication dans la Revue d'Electricité et d'Electronique (REE).
- [TRA-08c] Tran, T. V., Brisset S., and Brochet, P., "*Multi-Objective Combinatorial Optimization of a Safety Transformer using combined Exact Methods and Branch-and-Bound algorithm*", X-th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism, September 14 - 17, 2008, Ilmenau, Germany.
- [TRA-09] Tran, T. V., Brisset S., and Brochet, P., "*A New Efficient Method for Global Discrete Multi-Level Optimization combining Branch-and-Bound and Space-Mapping*", IEEE Transactions on Magnetics., Vol. 45, N°. 3, pp. 1590-1593, 3-2009.

- [VEN-02] Venkataraman, P., *Applied Optimization with Matlab Programming*, A Wiley - Interscience publication, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [VIV-02] Vivier, S., "*Stratégie d'optimisation par la méthode des plan d'expériences et Application aux dispositifs électrotechniques modélisés par éléments finis*", thèse de doctorat - EC-Lille - USTL - L2EP, Juillet, 2002.
- [WOL-97] Wolpert, D. H. and Macready, W. G., "*No Free Lunch for Optimization*", IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 1, no. 1, pp. 67-82, 1997.

Problèmes Combinatoires et Modèles Multi-Niveaux pour la Conception Optimale des Machines Électriques

RESUME

La conception des machines électriques a une longue tradition et l'approche « *business as usual* » est un processus itératif d'essais et d'erreur, certes convergent mais nécessairement stoppé prématurément, car trop coûteux. Un perfectionnement récent a consisté à remplacer les prototypes et les maquettes par des prototypes virtuels, entièrement numériques, comme ceux fournis par la méthode des éléments finis. Néanmoins, le procédé s'arrête toujours sur une frustration car le concepteur n'est jamais sûr d'avoir exploré complètement l'espace de conception qui s'offre à lui.

La démarche de conception optimale se propose d'améliorer ce processus en le guidant, c'est-à-dire en proposant une méthodologie, et en l'automatisant, c'est-à-dire en proposant des outils logiciels. Mais dans cette démarche apparaissent de nombreuses difficultés.

Ainsi, les objectifs généraux de cette thèse sont multiples. Il s'agit de définir des problèmes d'optimisation spécifiques représentatifs des choix structurels et d'élaborer des benchmarks de référence : discret, multiphysique, multidisciplinaire, multi-objectif et multi-niveaux. Ensuite, il faut rechercher, adapter et qualifier les méthodes d'optimisation les mieux à même de résoudre ces problèmes. Enfin, les différentes méthodes d'optimisation proposées sont implantées et testées de façon à prouver leur efficacité et leur adaptation. Un objectif secondaire mais important est de les capitaliser et diffuser les connaissances élaborées.

***MOTS CLES :** Conception optimale, Optimisation discrète, Optimisation multi-objectif, Modèles multi-niveaux, Benchmark, Transformateur, Eco-conception, Éléments finis 3D.*

Combinatorial Problems and Multi-Level Models for the Optimal Design of Electrical Machines

ABSTRACT

The design of electrical machinery has a long tradition and the business as usual approach is a tries and errors iterative process, certainly converging but necessarily stopped prematurely as too expensive. A recent upgrade has been to replace the prototypes and models by virtual prototypes, fully numerical, such as those provided by the finite element method. Nevertheless, the process stops always on a frustration, because the designer is never sure to have completely explored the design space that offers to him.

The optimal design approach proposes to improve this process by guiding it, i.e. by proposing a methodology and by equipping it, i.e. by providing software tools. But in this approach many difficulties appear.

Thus, the general objectives of this thesis are multiple. It is to define specific representative optimization problems of the structural choices and develop reference benchmarks of optimization: discrete, multi-physics, multidisciplinary, multi-objective and multi-level. Then, it must seek, adapt and describe the best optimization methods able to solve these problems. These methods are implemented and tested in order to prove their efficiency and adaptation. A secondary but important objective is to capitalize and disseminate the developed knowledge.

***KEY WORDS :** Optimal design, Discrete optimization, Multi-objective optimization, Multi-level models, Benchmark, Transformer, Eco-design, 3D finite elements.*