



**HAL**  
open science

## Reconstruction Tomographique Mojette

Myriam Servières

► **To cite this version:**

Myriam Servières. Reconstruction Tomographique Mojette. Géométrie algorithmique [cs.CG]. Université de Nantes; Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2005. Français. NNT : . tel-00426920

**HAL Id: tel-00426920**

**<https://theses.hal.science/tel-00426920v1>**

Submitted on 28 Oct 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

École Centrale de Nantes

Université de Nantes

École des Mines de Nantes

**ÉCOLE DOCTORALE**  
**SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX**

Année 2005

**Thèse de Doctorat**

pour l'obtention du Diplôme de  
**Docteur de l'École Centrale de Nantes et de l'Université de Nantes**  
Spécialité : *Automatique et Informatique Appliquée*

Présentée et soutenue publiquement par :

**Myriam SERVIÈRES**

le 07 décembre 2005

à l'École polytechnique de l'université de Nantes

**Reconstruction Tomographique Mojette**

**JURY**

|                   |               |  |
|-------------------|---------------|--|
| Rapporteurs       | A. MONTANVERT | <i>Professeur, UPMF-IUT2 de Grenoble</i>                                   |
|                   | F. PEYRIN     | <i>Directeur de recherche, HDR, CREATIS de Lyon</i>                        |
| Président du jury | O. DÉFORGES   | <i>Professeur, INSA de Rennes</i>  |
| Examineurs        | Y. BIZAIS     | <i>Professeur de biophysique, faculté de médecine de Brest</i>             |
|                   | JP. GUÉDON    | <i>Professeur, École polytechnique de l'université de Nantes</i>           |
|                   | N. NORMAND    | <i>Maître de conférence, École polytechnique de l'université de Nantes</i> |

---

**Directeur de thèse : JP. Guédon**

Laboratoire / Composante : IRCCyN / École polytechnique de l'université de Nantes

**Co-encadrant : N. Normand**

Laboratoire / Composante : IRCCyN / École polytechnique de l'université de Nantes

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

N ° ED : 366 – 238



# Remerciements

Je remercie les membres du jury et tout particulièrement mes rapporteurs qui par leurs remarques nombreuses et pertinentes ont permis de bien améliorer la qualité de ce manuscrit.

Evidement une thèse n'est pas possible sans un bon encadrement. Je remercie donc mon directeur de thèse JeanPierre Guédon et mon co-directeur de thèse Nicolas Normand. C'est grâce à leur soutien, aux nombreuses réunions que nous avons fait pendant trois ans et à leur corrections que cette thèse a pu avoir lieu.

Enfin, pour m'avoir soutenue dans tous les hauts et les bas qui composent une thèse, je tiens à remercier tous d'abord mes collègues et amis qui étaient toujours là, mes proches pour leur support et mes voisins, qui par leur chaleur et joie de vivre m'ont souvent changé les idées.



# Table des matières

|   |          |
|---|----------|
| Remerciements   | i        |
| Résumé  | xv       |
| Abstract  | xvii     |
| Introduction  | 1        |
| <b>I La reconstruction tomographique :<br/>introduction et position du problème</b> | <b>5</b> |
| <b>1 Systèmes d'acquisition tomographique</b>                                       | <b>9</b> |
| 1.1 Introduction  | 10       |
| 1.2 Qu'est-ce que la tomographie?   | 11       |
| 1.3 Tomographie de transmission   | 12       |
| 1.3.1 Scanner   | 12       |
| 1.3.1.1 Principes physiques   | 12       |
| 1.3.1.2 Des générations de scanners   | 14       |
| 1.3.1.3 Qualité des images : artefacts et performances                              | 16       |
| 1.3.1.4 Conclusion  | 18       |
| 1.3.2 IRM   | 18       |
| 1.3.2.1 Principes physiques   | 18       |
| 1.3.2.2 Appareil  | 19       |
| 1.3.2.3 Images et artefacts   | 19       |
| 1.3.2.4 Conclusion  | 21       |
| 1.3.3 Ultrasons   | 22       |
| 1.3.3.1 Principes physiques   | 22       |
| 1.3.3.2 Appareil  | 23       |
| 1.3.3.3 Forme des données   | 23       |
| 1.3.3.4 Conclusion  | 25       |
| 1.4 Tomographie d'émission  | 25       |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 1.4.1     | Tomographie par émission de positons (TEP) . . . . .                      | 25        |
| 1.4.1.1   | Principes physiques . . . . .   | 25        |
| 1.4.1.2   | Appareil . . . . .  | 26        |
| 1.4.1.3   | Données - artefacts et performances . . . . .                             | 27        |
| 1.4.1.3.1 | Forme des données . . . . .   | 27        |
| 1.4.1.3.2 | Facteurs de dégradation de l'image . . . . .                              | 29        |
| 1.4.1.4   | Conclusion . . . . .  | 32        |
| 1.4.2     | TEPS . . . . .  | 32        |
| 1.4.2.1   | Principes physiques . . . . .   | 32        |
| 1.4.2.2   | Appareil . . . . .  | 32        |
| 1.4.2.3   | Données et erreurs . . . . .  | 34        |
| 1.4.2.4   | Conclusion . . . . .  | 34        |
| 1.5       | Nouvelles voies de la tomographie . . . . .                               | 34        |
| 1.5.1     | Tomosynthèse (Radiologie tridimensionnelle) . . . . .                     | 34        |
| 1.5.1.1   | Appareil . . . . .  | 34        |
| 1.5.1.2   | Acquisition et images . . . . .   | 35        |
| 1.5.1.3   | Conclusion . . . . .  | 36        |
| 1.5.2     | Appareillages multimodalités . . . . .                                    | 36        |
| 1.6       | Conclusion . . . . .  | 37        |
| <b>2</b>  | <b>Géométrie d'acquisition</b>  | <b>39</b> |
| 2.1       | Introduction . . . . .  | 39        |
| 2.2       | Géométrie d'acquisition 2D . . . . .                                      | 40        |
| 2.2.1     | Géométrie parallèle . . . . .   | 40        |
| 2.2.2     | Géométrie en éventail ( <i>Fan Beam</i> ) . . . . .                       | 40        |
| 2.3       | Géométrie d'acquisition 3D . . . . .                                      | 46        |
| 2.3.1     | Géométrie parallèle . . . . .   | 46        |
| 2.3.2     | Géométrie <i>Cone Beam</i> . . . . .                                      | 46        |
| 2.3.3     | Géométrie hélicoïdale . . . . .   | 48        |
| 2.4       | Conclusion . . . . .  | 49        |
| <b>3</b>  | <b>Mathématiques en Tomographie</b>                                       | <b>51</b> |
| 3.1       | La reconstruction tomographique : un problème mal posé . . . . .          | 52        |
| 3.2       | Méthodes fondées sur une représentation continue de l'espace . . . . .    | 53        |
| 3.2.1     | Le théorème de la tranche centrale . . . . .                              | 54        |
| 3.2.1.1   | Dimension 2 . . . . .   | 54        |
| 3.2.1.2   | Dimension 3 . . . . .   | 55        |
| 3.2.2     | Transformation de Fourier . . . . .                                       | 56        |
| 3.2.3     | Transformation de Hankel . . . . .  | 57        |
| 3.2.4     | Rétroprojection Filtrée (FBP : <i>Filtered Backprojection</i> ) . . . . . | 59        |

---

|                                    |  |           |
|------------------------------------|--|-----------|
| 3.2.4.1                            | Formulation . . . . .  | 59        |
| 3.2.4.2                            | Algorithme . . . . .   | 60        |
| 3.2.4.3                            | Le filtre rampe . . . . .  | 61        |
| 3.3                                | Méthodes fondées sur une représentation discrète de l'espace . . . . .                             | 61        |
| 3.3.1                              | ART - MART . . . . .   | 64        |
| 3.3.1.1                            | ART . . . . .  | 64        |
| 3.3.1.2                            | MART . . . . .   | 64        |
| 3.3.2                              | Information a priori . . . . .   | 65        |
| 3.3.2.1                            | EM - OSEM . . . . .  | 65        |
| 3.3.2.1.1                          | EM - <i>Expectation Maximisation</i> . . . . .   | 65        |
| 3.3.2.1.2                          | OSEM - <i>Ordered Subset Expectation Maximisation</i> . . . . .                                    | 65        |
| 3.3.2.2                            | MAP/Bayésien . . . . .   | 66        |
| 3.3.2.3                            | Gradient Conjugué . . . . .  | 66        |
| 3.3.3                              | Autres méthodes discrètes . . . . .  | 67        |
| 3.3.3.1                            | $R(t, m)$ . . . . .  | 67        |
| 3.3.3.2                            | $R(k, \theta)$ . . . . .   | 67        |
| 3.3.3.3                            | Reconstruction d'image . . . . .   | 68        |
| 3.4                                | Conclusion . . . . .   | 68        |
| <br>                               |  |           |
| <b>II</b>                          | <b>Tomographie et géométrie discrète</b>   | <b>71</b> |
| <br>                               |  |           |
| <b>4</b>                           | <b>Tomographie discrète Mojette</b>  | <b>75</b> |
| 4.1                                | Introduction . . . . .   | 76        |
| 4.2                                | Géométrie Mojette et rebinnage . . . . .   | 76        |
| 4.2.1                              | Géométrie Mojette de projection . . . . .  | 76        |
| 4.2.1.1                            | De Radon à la Mojette . . . . .  | 76        |
| 4.2.1.2                            | Obtention des projections Mojette Dirac . . . . .  | 79        |
| 4.2.1.2.1                          | Projections en 2D . . . . .  | 79        |
| 4.2.1.2.2                          | Projections en 3D . . . . .  | 79        |
| 4.2.1.3                            | Obtention de l'ensemble des directions de projection . . . . .                                     | 80        |
| 4.2.1.3.1                          | Suites de Farey en 1D . . . . .  | 80        |
| 4.2.1.3.2                          | Suites de Farey en 2D . . . . .  | 81        |
| 4.2.1.4                            | Obtention d'une base d'un hyperplan de dimension $n - 1$ dans un espace de dimension $n$ . . . . . | 82        |
| Premier vecteur de base . . . . .  |  | 83        |
| Le $k^e$ vecteur de base . . . . . |  | 84        |
| 4.2.2                              | Reconstruction Mojette exacte . . . . .  | 84        |
| 4.2.3                              | Rétroprojection Mojette . . . . .  | 85        |
| 4.3                                | Algorithme de rétroprojection filtrée discrète exacte . . . . .                                    | 86        |
| 4.3.1                              | Algorithme . . . . .   | 86        |

---



|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 4.3.2     | Résultats . . . . .   | 88        |
| 4.4       | Approximations . . . . .  | 89        |
| 4.4.1     | Utilisation d'un nombre réduit de projections . . . . .   | 89        |
| 4.4.2     | Obtention de projections par interpolation angulaire . . . . .  | 89        |
| 4.4.2.1   | Principe de l'interpolation . . . . .   | 89        |
| 4.4.2.2   | Résultats . . . . .   | 92        |
| 4.5       | Algorithme du Gradient Conjugué Mojette . . . . .   | 93        |
| 4.5.1     | Propriétés de $M^*M$ . . . . .  | 93        |
| 4.5.1.1   | Expression de $M^*M$ . . . . .  | 94        |
| 4.5.1.2   | $M^*M$ est une matrice Toeplitz Bloc Toeplitz . . . . .   | 95        |
| 4.5.2     | Conditionnement de $M^*M$ . . . . .   | 96        |
| 4.5.3     | Algorithme du gradient conjugué . . . . .   | 96        |
| 4.5.4     | Résultats de reconstruction . . . . .   | 97        |
| 4.6       | Conclusion . . . . .  | 97        |
| <b>5</b>  | <b>Application de la tomographie Mojette discrète aux algorithmes standards de la tomographie</b> . . . . . | <b>99</b> |
| 5.1       | Modèle de pixel . . . . .   | 100       |
| 5.1.1     | Modèle de pixel général . . . . .   | 100       |
| 5.1.2     | Modèle de pixel Dirac . . . . .   | 100       |
| 5.1.3     | Modèle de pixel spline . . . . .  | 101       |
| 5.1.4     | Théorème général d'échantillonnage d'Unser-Aldroubi . . . . .   | 102       |
| 5.2       | Opérateur Mojette . . . . .   | 103       |
| 5.2.1     | Transformation Mojette généralisée . . . . .  | 103       |
| 5.2.1.1   | Projection Mojette . . . . .  | 103       |
| 5.2.1.2   | Rétroprojection Mojette . . . . .   | 104       |
| 5.2.2     | Transformation Mojette Dirac . . . . .  | 105       |
| 5.2.3     | Transformation Mojette spline . . . . .   | 105       |
| 5.3       | Rétroprojection filtrée Mojette . . . . .   | 106       |
| 5.3.1     | Algorithme . . . . .  | 106       |
| 5.3.2     | Filtres . . . . .   | 106       |
| 5.3.2.1   | Le filtre de RamLak . . . . .   | 106       |
| 5.3.2.2   | Le filtre $k_0$ . . . . .   | 107       |
| 5.3.2.2.1 | Cas continu . . . . .   | 107       |
| 5.3.2.2.2 | Discrétisation . . . . .  | 109       |
| 5.3.2.3   | Le filtre $k_1$ . . . . .   | 112       |
| 5.3.2.3.1 | Cas continu . . . . .   | 112       |
| 5.3.2.3.2 | Discrétisation . . . . .  | 112       |
| 5.3.2.4   | Le filtre $K_n$ . . . . .   | 113       |
| 5.3.3     | Equivalence continu-discret . . . . .   | 113       |

TABLE DES MATIÈRES

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.3.3.1  | A l'ordre 0 . . . . .  | 113        |
| 5.3.3.2  | Ordre $n$ . . . . .  | 114        |
| 5.3.4    | Comparaison de la rétroprojection filtrée Mojette Dirac et spline 0 . . . . .  | 114        |
| 5.3.5    | Étude de l'espace nul lors d'une reconstruction $M_\delta^* K_0 M_0$ . . . . .   | 115        |
| 5.4      | Conclusion . . . . .   | 117        |
| <b>6</b> | <b>Validation</b> . . . . .  | <b>121</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .   | 122        |
| 6.2      | Évaluation de la qualité des images . . . . .  | 122        |
| 6.2.1    | Les objets reconstruits . . . . .  | 123        |
| 6.2.2    | Détermination des tâches servant de références pour la mesure de la qualité d'une image . . . . .                              | 124        |
| 6.2.3    | Métriques significatives de mesure de la qualité . . . . .   | 124        |
| 6.2.4    | Courbe ROC . . . . .   | 125        |
| 6.3      | Choix des directions de projection . . . . .   | 127        |
| 6.3.1    | Directions de projections données selon une suite de Farey $F_n$ . . . . .   | 127        |
| 6.3.2    | Projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$ . . . . .  | 127        |
| 6.3.3    | Projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$ avec minimisation du nombre de bins . . . . .                                | 128        |
| 6.3.4    | Comparaison des reconstructions selon le choix des angles. . . . .   | 129        |
| 6.4      | Comparaison de la rétroprojection filtrée discrète exacte avec la rétroprojection filtrée Mojette . . . . .                    | 130        |
| 6.5      | Comparaison de la rétroprojection filtrée Mojette et de la rétroprojection filtrée classique . . . . .                         | 131        |
| 6.5.1    | Mise en œuvre de la rétroprojection filtrée classique . . . . .  | 131        |
| 6.5.2    | Reconstruction sans filtrage et sans bruit . . . . .   | 133        |
| 6.5.3    | Rétroprojections filtrées en absence de bruit . . . . .  | 135        |
| 6.5.3.1  | Comparaison des reconstructions avec les filtres de RamLak et $k_0$ . . . . .  | 135        |
| 6.5.3.2  | Comparaison des reconstructions avec des fantômes à fond non nul . . . . .   | 135        |
| 6.5.4    | Rétroprojections filtrées bruitées . . . . .   | 139        |
| 6.5.5    | Discussion . . . . .   | 140        |
| 6.6      | Comparaison de la reconstruction gradient conjugué Mojette avec la rétroprojection filtrée Mojette . . . . .                   | 140        |
| 6.7      | Conclusion . . . . .   | 144        |
|          | <b>Conclusion</b> . . . . .  | <b>145</b> |
|          | <b>Perspectives</b> . . . . .  | <b>147</b> |
| <b>A</b> | <b>Exemple pour l'obtention d'une base sur un hyperplan de projection [65] en 3D</b> . . . . .                                 | <b>149</b> |
| A.1      | Détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 1D lors d'une projection Mojette 2D . . . . . | 150        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| A.2      | Détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 2D<br>lors d'une projection Mojette 3D . . . . . | 151        |
| A.2.1    | Calcul de la projection des vecteurs de base . . . . .  | 151        |
| A.2.2    | Obtention des vecteurs de base de la maille 2D . . . . .  | 152        |
| A.3      | Matrice de passage entre la base du volume et la maille de la projection . . . . .  | 156        |
| A.3.1    | Obtention de la matrice $P_{3 \rightarrow 2}$ . . . . .   | 156        |
| A.3.2    | Correspondance bin/pixel . . . . .  | 157        |
| <b>B</b> | <b>Calcul de la transformée de Fourier inverse du filtre de RamLak</b>  | <b>159</b> |
| <b>C</b> | <b>Filtre <math>k_1</math></b>  | <b>161</b> |
| C.1      | Calcul de $k_1$ spatial . . . . .   | 161        |
| C.1.1    | Cas $\theta \in ]0, \pi/4[$ . . . . .   | 161        |
| C.1.2    | Cas $\theta = 0$ . . . . .  | 165        |
| C.2      | Discrétisation de $k_1$ en géométrie Mojette . . . . .  | 166        |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>167</b> |
|          | <b>Publications</b>   | <b>173</b> |

# Table des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Projection tomographique selon un angle $\theta$ .  | 11 |
| 1.2  | Scanner Sommaton Sensation de Siemens Medical [Siemens AG].   | 13 |
| 1.3  | Traversée d'un corps d'épaisseur $x$ par un faisceau de rayon X.  | 13 |
| 1.4  | Géométrie des différentes générations de scanners [3, p35].   | 14 |
| 1.5  | Géométrie hélicoïdale d'acquisition [3, p 36].  | 15 |
| 1.6  | Tomographe multicoupes [3, p37].  | 16 |
| 1.7  | (a) Effet photoélectrique, (b) Effet Compton.   | 17 |
| 1.8  | Scanner d'un crâne avec un SOMATON 64 de Siemens [Siemens AG].  | 18 |
| 1.9  | IRM MAGNETOM Trio de Siemens, aimant de 3 Tesla [Siemens AG].   | 20 |
| 1.10 | (a) Temps de relaxation $T1$ dans un champ magnétique de 1 Tesla, (b) temps de relaxation $T2$ dans un champ magnétique de 1 Tesla. | 20 |
| 1.11 | Antenne radiofréquence placée sur le patient lors d'une acquisition d'images de la tête.  | 21 |
| 1.12 | Balayage radiaux de l'espace réciproque [34].   | 21 |
| 1.13 | IRM d'un crâne avec un MAGNETOM Trio de Siemens [Siemens AG].   | 22 |
| 1.14 | Appareil à ultrasons ACUSON Sequoia Echo 256 Images de Siemens [Siemens AG].  | 24 |
| 1.15 | Image par ultrasons d'un coeur avec un ACUSON Sequoia Echo 256 Images de Siemens [Siemens AG].                                      | 24 |
| 1.16 | Coïncidence détectée dans un TEP par un anneau de détecteurs [84].  | 26 |
| 1.17 | TEP ACCEL de Siemens [Siemens AG].  | 27 |
| 1.18 | Différents modes d'acquisition d'un TEP multi-anneaux [84].   | 28 |
| 1.19 | Sinogramme [84].  | 29 |
| 1.20 | Coïncidence de deux photons à 511keV.   | 30 |
| 1.21 | Examen TEP d'une femme de 31 ans avec un cancer du sein [Siemens AG].   | 31 |
| 1.22 | TEPS e.cam Fixed 180 de Siemens [Siemens AG].   | 33 |
| 1.23 | Collimateurs (a) parallèle (b) en éventail (c) conique [18].  | 33 |
| 1.24 | Vue d'ensemble du système d'acquisition table BACCARA + capteur PALADIO [12].   | 35 |
| 1.25 | (a) Tomosynthèse linéaire, (b) Tomosynthèse circulaire.   | 35 |
| 1.26 | Image reconstruite à partir d'un algorithme M-ART après acquisition par tomosynthèse [12, p129].                                    | 36 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 2.1  | Projection de Radon de l'image $f(x, y)$ selon la direction $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ [47, p50].  | 41  |
| 2.2  | Exemples de projections en éventail . . . . .   | 42  |
| 2.3  | Géométrie en éventail pour des angles équi-répartis [47, p80]. . . . .  | 44  |
| 2.4  | Géométrie en éventail pour des détecteurs équi-répartis [47, p86]. . . . .  | 45  |
| 2.5  | Pour simplifier la reconstruction en géométrie conique, le système de coordonnées est tourné selon l'angle de la source pour donner les axes $s$ et $t$ [47]. . . . .   | 47  |
| 2.6  | Géométrie <i>cone beam</i> [47]. . . . .  | 48  |
| 3.1  | Représentation du théorème de la tranche centrale. . . . .  | 54  |
| 3.2  | Passage d'une grille polaire à une grille cartésienne. . . . .  | 56  |
| 3.3  | Géométrie de projection 3D. . . . .   | 57  |
| 3.4  | Reconstruction par transformée de Fourier. . . . .  | 58  |
| 3.5  | Reconstruction par rétroprojection filtrée. . . . .   | 61  |
| 3.6  | Filtre Rampe, fenêtre de Hamming . . . . .  | 62  |
| 3.7  | Schéma général des méthodes itératives . . . . .  | 63  |
| 3.8  | (a) Schéma d'une projection de Radon discrète $R(t, m)$ pour $t = 0, m = 9$ et $p = 29$ . Les pixels sommés sur une ligne intégrale sont marqués par $\bullet$ , (b) schéma d'échantillonnage pour $R(k, \theta)$ . . . . . | 68  |
| 4.1  | Transformation de Radon selon $\theta$ . . . . .  | 77  |
| 4.2  | Projection d'un support $4 \times 4$ dans la direction $(2, 1)$ pour un interpolateur Dirac. . . . .  | 78  |
| 4.3  | Transformation Mojette Dirac d'une image $4 \times 4$ . . . . .   | 79  |
| 4.4  | Représentation angulaire d'une suite de Farey d'ordre 10 et de ses symétries. . . . .   | 81  |
| 4.5  | (a) Un sous-espace $\mathbb{S}$ et (b) sa représentation en utilisant la projection $\pi$ [70]. . . . .   | 82  |
| 4.6  | Exemple de projection de grilles 3D sur un plan de projection pour les angles $(1, 0, 0)$ , $(-2, -1, 1)$ et $(1, 1, 2)$ . . . . .  | 83  |
| 4.7  | Bins-pixels en correspondance univoque. . . . .   | 85  |
| 4.8  | Exemple de rétroprojection Mojette pour un bin d'une projection $(2, 1)$ . . . . .  | 86  |
| 4.9  | (a) Interpolation sur la projection pour rétroprojeter dans le centre du pixel, (b) Rétroprojection Mojette Exacte. . . . .   | 87  |
| 4.10 | Fantôme carré $65 \times 65$ . . . . .  | 89  |
| 4.11 | Rétroprojection filtrée discrète exacte avec un nombre réduit de projections. . . . .   | 90  |
| 4.12 | Principe de l'interpolation angulaire des projections Mojette. . . . .  | 91  |
| 4.13 | Interpolation linéaire entre deux bins de valeurs connues pour obtenir la valeur de $t_1$ . . . . .   | 91  |
| 4.14 | Rétroprojection filtrée discrète exacte avec des projections interpolées. . . . .   | 92  |
| 4.15 | Exemple de projection Mojette pour une image $2 \times 2$ . . . . .   | 93  |
| 4.16 | Expression de $M^*M$ pour la direction $(1, 2)$ pour une image $3 \times 3$ . . . . .   | 95  |
| 4.17 | Images de test. . . . .   | 98  |
| 5.1  | B-spline de degrés 0 à 3 [85]. . . . .  | 101 |
| 5.2  | Schéma général d'échantillonnage. . . . .   | 103 |

TABLE DES FIGURES

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.3  | Représentation fréquentielle du filtre rampe ( $\nu_\beta = 0, 5$ ). . . . .  | 107 |
| 5.4  | Projection du modèle de pixel spline 0. . . . .   | 108 |
| 5.5  | Représentation de $W_0(\nu, \theta)$ [38] . . . . .   | 108 |
| 5.6  | (a)Représentation de $k_0(n\Delta/2, \theta)$ , (b) Représentation de $k_0(n\Delta/4, \theta)$ [38]. . . . .  | 110 |
| 5.7  | Filtre $k_0$ dans la direction (1, 3) et la projection trapézoïdale du modèle de pixel spline 0 correspondante. . . . .   | 111 |
| 5.8  | Équivalence entre les schémas continu et discret. . . . .   | 113 |
| 5.9  | Équivalence continue/discrète généralisée en utilisant un modèle de pixel spline et des filtres fondés sur les splines. . . . .   | 114 |
| 5.10 | Ligne d'une image Dirac reconstruite avec une rétroprojection filtrée Mojette. . . . .  | 116 |
| 5.11 | Fantôme carré de taille $128 \times 128$ . . . . .  | 117 |
| 5.12 | Reconstruction d'une image Dirac avec un schéma $M_\delta^* K_0 M_0$ . . . . .  | 117 |
| 5.13 | Reconstruction du fantôme carré avec un schéma $M_\delta^* K_0 M_0$ . (a) Image originale. (b) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 64 projections (facteur de normalisation $\frac{1}{0.098}$ ). (c) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 128 projections (facteur de normalisation $\frac{1}{0.070}$ ). (d) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 256 projections (facteur de normalisation $\frac{1}{0.050}$ ). . . . . | 118 |
| 5.14 | Ligne de l'image reconstruite passant par le milieu du carré de l'image reconstruite normalisée. (a) 64 projections. (b) 128 projections. (c) 256 projections. . . . .  | 119 |
| 6.1  | Diagramme décrivant les bases de la théorie de décision. . . . .  | 126 |
| 6.2  | Courbe ROC [16] . . . . .   | 126 |
| 6.3  | Série de Farey d'ordre 10, 128 projections . . . . .  | 128 |
| 6.4  | 128 directions de projections $(p, q)$ issues de $F_{128}$ uniformément réparties sur $[0, \pi[$ . . . . .  | 128 |
| 6.5  | 128 directions de projections $(p, q)$ issues de $F_{128}$ uniformément réparties sur $[0, \pi[$ en minimisant le nombre de bins des projections résultantes. . . . .   | 129 |
| 6.6  | Reconstruction FBP . . . . .  | 130 |
| 6.7  | Reconstruction avec 128 angles (série de Farey d'ordre 10) avec convolution des projections par le filtre $k_0$ et une rétroprojection Mojette. . . . .   | 131 |
| 6.8  | Projection Classique . . . . .  | 133 |
| 6.9  | Image reconstruite avec 128 angles uniformément répartis dans une géométrie classique après une étape de projection/rétroprojection. . . . .  | 134 |
| 6.10 | Image reconstruite avec 128 angles uniformément répartis sur $[0, \pi[$ , sans filtrage des projections et avec un rétroprojecteur Mojette. . . . .   | 134 |
| 6.11 | Images de test . . . . .  | 139 |
| A.1  | Projection de la base $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$ de l'espace 2D de départ dans la direction $(p, q)$ . . . . .  | 150 |
| A.2  | Projection de la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace 3D de départ dans la direction $(p, q, r)$ . . . . .   | 151 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| A.3 | Maille $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$ du plan de projection . . . . . | 153 |
| A.4 | Projection de $\vec{k}'$ sur $\vec{i}'_2$ . . . . .             | 154 |

# Liste des tableaux

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Tableau comparatif de quelques modalités d'imagerie tomographique [33]. . . . .  | 12  |
| 1.2 | Quelques isotopes communément utilisés pour la TEP [84]. . . . .   | 26  |
| 4.1 | Comparaison du conditionnement exact et approximé de $M^*M$ . . . . .  | 97  |
| 4.2 | Nombre d'itérations pour une reconstruction exacte par gradient conjugué Mojette sans bruit. . . . .   | 98  |
| 6.1 | Comparaison de la reconstruction filtrée exacte Mojette et de la rétroprojection filtrée Mojette $M_\delta^*K_0M_0$ sur un fantôme carré $64 \times 64$ avec des directions de projections données par les suites de Farey d'ordre 16, 32 et 64. . . . . | 132 |
| 6.2 | Rétroprojection filtrée avec le filtre de RamLak. Les rétroprojections sont mises en œuvre avec 16, 32, 64 et 128 projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$ . . . . .  | 136 |
| 6.3 | Rétroprojection filtrée avec le filtre $k_0$ . Les rétroprojections sont mises en œuvre avec 16, 32, 64 et 128 projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$ . . . . .   | 137 |
| 6.4 | Rétroprojection filtrée avec une projection Mojette spline 0, un filtrage $k_0$ et une rétroprojection Mojette Dirac. Les rétroprojections sont mises en œuvre avec 16, 32, 64 et 128 projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$ . . . . .        | 138 |
| 6.5 | Reconstruction du fantôme carré avec des projections bruitées par un bruit Poissonnien, les images reconstruites sont normalisées sur $[0,1$ . . . . .   | 141 |
| 6.6 | Reconstruction du fantôme rond avec des projections bruitées par un bruit Poissonnien, les images reconstruites sont normalisées sur $[0,1$ . . . . .  | 142 |
| 6.7 | Reconstruction avec l'algorithme du gradient conjugué des fantômes carré et rond avec des projections bruitées par un bruit Poissonnien, les images reconstruites sont normalisées sur $[0,1$ . . . . .  | 143 |





# Résumé

Une des thématiques abordée par l'équipe Image et Vidéo-Communication est la reconstruction tomographique discrète à l'aide de la transformée Mojette. Ma thèse s'inscrit dans le cadre de la reconstruction tomographique médicale. La transformée Mojette est une version discrète exacte de la transformée de Radon qui est l'outil mathématique permettant la reconstruction tomographique. Pour évaluer la qualité des reconstructions, nous avons utilisé des fantômes numériques 2D simples (objet carré, rond) en absence puis en présence de bruit. Le cœur de mon travail de thèse est la reconstruction d'un objet à l'aide d'un algorithme de rétroprojection filtrée exacte Mojette en absence de bruit s'appuyant sur la géométrie discrète. Pour un nombre fini de projections dépendant de la taille de l'objet à reconstruire la reconstruction est exacte. La majorité des tomographes industriels utilisent l'algorithme de rétroprojection de projections filtrées (*Filtered Back Projection* ou FBP) pour reconstruire la région d'intérêt. Cet algorithme possède deux défauts théoriques, un au niveau du filtre utilisé, l'autre au niveau de la rétroprojection elle-même. Nous avons pu mettre au point un algorithme de Mojette FBP. Cet algorithme fait partie des méthodes directes de reconstruction. Il a aussi été testé avec succès en présence de bruit. Cet algorithme permet une équivalence continu-discret lors de la reconstruction. L'étape de projection/rétroprojection Mojette présente la particularité intéressante de pouvoir être décrit par une matrice Toeplitz bloc Toeplitz. Pour utiliser cette propriété nous avons mis en œuvre un algorithme de gradient conjugué.



# Abstract

One of the research fields in the Image and Videocommunication team is the discrete tomographic reconstruction. My PhD is in the field of the medical tomographic reconstruction. The Mojette transform is a discrete exact version of the Radon transform. The Radon transform is the mathematical tool that allows to perform a tomographic reconstruction. To evaluate the reconstruction quality we have used 2D simple numeric phantoms (round and square shape) without and with noise. The main point of my work is an object reconstruction with a backprojection exact filtered Mojette algorithm without noise, using the discrete geometry. For a finite number of projections according to the object size, the reconstruction is exact. Most of industrial tomographs are using the FBP algorithm (Filtered Backprojection) to reconstruct the region of interest. We could implement a FBP Mojette algorithm. This algorithm is a part of the reconstruction algorithm methods. It was successfully tested in the presence of noise. This algorithm allows a continuous/discrete equivalence. The projection/backprojection Mojette has the property to be described by a Toeplitz block Toeplitz matrix. To use this property we have implemented a conjugate gradient algorithm.



# Introduction

Voir à l'intérieur du corps humain est recherché par les Hommes depuis des siècles. L'imagerie médicale, depuis la mise en œuvre de l'imagerie par rayons X par W.C. Roentgen en 1895 permet à l'Homme de voir de manière non invasive dans le corps humain in-vivo. Cette découverte a ouvert la voie à une nouvelle ère qui a permis la mise en œuvre de nombreuses théories et techniques pour voir toujours plus précisément l'intérieur et le fonctionnement du corps.

Pour étudier l'anatomie du corps, différentes modalités d'imagerie médicale ont été créées. Elles répondent à des besoins spécifiques. Elles se répartissent en trois catégories : l'imagerie "topographique" qui représente la surface du corps, l'image par projection qui montre l'interaction de radiations selon des directions connues dans le corps humain et l'imagerie tomographique qui est une image de la distribution spatiale de l'interaction locale de radiation avec des tissus dans une coupe fine du corps humain [71].

Dans les années 70, la mise au point du scanner (tomodensitométrie) est une autre avancée fondamentale de l'imagerie médicale. Il permet de mesurer les propriétés des tissus en tout point du corps. Dans les années 80, l'imagerie par résonance magnétique nucléaire est mise au point. Elle permet de mesurer les propriétés magnétiques des tissus. D'autres modalités se développent comme les ultra-sons, la tomographie par émission de positons (TEP ou PET : *Positon Emission Tomography*) ou la tomographie par émission de photons simples (TEPS ou SPECT : *Single Photon Emission Computed Tomography*). Ces modalités sont décrites dans le chapitre 1. Chacune de ces modalités a sa spécificité mais toutes font l'acquisition d'une projection du corps humain qu'il va ensuite falloir reconstruire.

La géométrie d'acquisition des projections a évolué avec les générations d'appareils. Une des principales préoccupations était d'acquérir les projections le plus vite possible. Les premiers scanners ne possédaient que des capteurs linéiques qui devaient être animés à la fois d'un mouvement de translation et de rotation. L'acquisition était lente et les artefacts dus aux mouvements du patient nombreux. Les générations suivantes changent de géométrie d'acquisition pour arriver à une géométrie conique puis hélicoïdale. Le chapitre 2 décrit ces différentes géométries d'acquisition.

L'obtention d'images à partir de projections du corps humain nécessite une étape de reconstruction. Les méthodes de reconstruction en tomographie sont fondées sur la transformée de Radon [69]. C'est une transformée mathématique qui permet la reconstruction exacte d'un objet avec une infinité de projections. Les méthodes de reconstruction peuvent s'appuyer sur une représentation continue de l'espace (tranche centrale, transformation de Fourier, transformation de Hankel, rétroprojection filtrée) mais certaines comme les méthodes itératives s'appuient sur une représentation discrète de l'espace. Ces méthodes sont décrites chapitre 3.

Cet état de l'art nous permet d'avancer la présentation des outils généralement usités pour la reconstruction tomographique médicale. Toutefois la discrétisation de l'opérateur de Radon inverse est une tâche délicate.

Le cœur de ce manuscrit est de s'appuyer sur une transformation de Radon déjà discrète, la transformée Mojette, et de l'utiliser en tomographie médicale. Il est à souligner ici que même si cette transformée date de dix ans et qu'auparavant un des auteurs avait travaillé en imagerie médicale, aucun lien n'a été réalisé avant cette thèse.

La seconde partie du document nous permet de présenter notre contribution qui se fonde sur une nouvelle formule d'inversion de la transformation Mojette. De prime abord, cette formule semble inutilisable en l'état car demande l'acquisition de très nombreuses données vis-à-vis de méthodes standards aussi bien en termes de nombre de projections que de nombre d'éléments, dénotés bins, sur chacune de ces projections. Cependant, ce très grand nombre de données est fini au regard d'une taille d'image également finie en nombre de pixels. Cette différence se révèle colossale pour la suite de ce manuscrit car elle permet une mise en œuvre stable et robuste sans dénaturer les propriétés mathématiques intrinsèques de cet opérateur.

Le chapitre 4 expose tout d'abord la géométrie d'acquisition Mojette qui permet d'obtenir quasiment immédiatement la formule d'inversion discrète exacte [73]. Un autre travail relatif à cette géométrie d'acquisition est l'obtention de la grille discrète dans l'espace projeté [65] à partir de la grille originale dans un espace de dimension  $n$ . Ces deux travaux de nature différente sont aisément réunis ici car leur association forme le centrage de notre travail entre la tomographie discrète appliquée et la géométrie discrète. En effet, l'esprit initial de ce travail était bien de faire un lien entre les avancées en reconstruction tomographique d'une part (mais en privilégiant les aspects de bonne discrétisation) et les nouveaux outils de géométrie discrète comme la morphologie mathématique ou la description des angles par suite de Farey.

La suite du chapitre 4 est relativement aisée une fois cette double présentation fondatrice effectuée car la notion d'un filtre discret exact étant devenue explicite, il peut être mise en œuvre soit dans un algorithme de rétroprojection filtrée, soit dans un algorithme itératif qui doit converger (en l'absence de bruit) en un nombre fini d'itérations. Toutefois une première inspection visuelle de l'espace nul

engendré par un nombre insuffisant de projections est réalisée.

Le chapitre 5 permet d'exposer comment les deux principes novateurs présentés dans le chapitre 4 peuvent être ensuite naturellement déclinés pour la mise en œuvre des algorithmes de reconstruction tomographique avec des modèles d'intensité de pixel différents. En suivant la ligne des travaux de la décennie précédente sur la consolidation des travaux de Schoenberg par Unser et Aldroubi sur les fonctions et espaces splines et sur leur utilité dans la mise en œuvre de problèmes mal posés [36, 2] nous pouvons nous servir des résultats obtenus en géométrie discrète dans un contexte de base de Dirac pour les généraliser aux espaces splines qui sont quand même sans doute plus proches de l'idée que l'on se fait de l'intérieur du corps humain. Ce lien entre visions continue et discrète permettra d'avoir d'autres types d'opérateurs que la reconstruction tomographique dans la même boîte à outils comme par exemple l'analyse par ondelettes faite dans l'espace spline du même ordre que celui ayant servi à la reconstruction. Il est d'ailleurs à noter qu'une étude en ce sens a été menée (même si elle n'est pas présentée ici) pour l'utilisation d'une multirésolution Mojette.

Pour valider l'ensemble des résultats, le chapitre 6 permet des comparaisons croisées entre des méthodes standards et les méthodes présentées, ce qui a demandé des efforts de programmation conséquents puisque nous sommes repartis de zéro.

La méthodologie aujourd'hui dominante pour la validation de la qualité des images médicales est celle des observateurs [1] : un stage d'un mois au FDA à Washington avec Robert Wagner et Kyle Myers nous a permis de l'apprendre. Cependant par faute de temps (dédié à la programmation) nous avons réduit cette méthodologie de manière à obtenir plutôt une première impression globale des nouveaux algorithmes plutôt qu'une analyse fine qui devrait prendre en compte les défauts du capteur (flou, non linéarité...) et les caractéristiques de la tâche de détection ainsi que celle de l'observateur. Ainsi l'acquisition sera dégradée par du bruit et la tâche de détection sera "focalisée" par une région centrale de l'image dans laquelle se trouve le fantôme. Nous avons en quelque sorte une évaluation entre la méthodologie propre mais complexe à mettre entièrement en œuvre et le simple calcul "aveugle" d'une différence aux moindres carrés.

Les perspectives de ce travail sont importantes si l'on en juge à la fois par les premiers résultats et par l'ampleur de ce qui reste à faire pour la validation tenant compte de capteurs réels.





## Première partie

# La reconstruction tomographique : introduction et position du problème



---

Les trois premiers chapitres rappellent les bases théoriques de la reconstruction tomographique au niveau de la géométrie d'acquisition et des algorithmes. Ils permettent aussi de poser le cadre futur d'applications de la reconstruction tomographique Mojetta en présentant quelques modalités de l'imagerie médicale qui utilisent la reconstruction tomographique.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques modalités de l'imagerie médicale, les géométries associées et les méthodes mathématiques utilisées pour effectuer une reconstruction d'image.

Elles ont évolué dans les dernières décennies avec l'utilisation de nouvelles géométries d'acquisition. Ces géométries d'acquisition sont décrites dans le deuxième chapitre. Pour la reconstruction d'image, elles sont souvent ramenées à une géométrie parallèle.

Le troisième chapitre donne des méthodes mathématiques de reconstruction fondées sur la géométrie d'acquisition parallèle. Nous avons choisi de décrire principalement cette géométrie puisque nous allons l'utiliser pour la reconstruction tomographique Mojetta. Nous décrivons tout d'abord les méthodes fondées sur une représentation continue de l'espace puis quelques méthodes fondées sur une représentation discrète de l'espace.

---

# Chapitre 1

## Systemes d'acquisition tomographique

### Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Introduction</b>                            | <b>10</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Qu'est-ce que la tomographie ?</b>          | <b>11</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Tomographie de transmission</b>             | <b>12</b> |
| 1.3.1      | Scanner  | 12        |
| 1.3.1.1    | Principes physiques                            | 12        |
| 1.3.1.2    | Des générations de scanners                    | 14        |
| 1.3.1.3    | Qualité des images : artefacts et performances | 16        |
| 1.3.1.4    | Conclusion                                     | 18        |
| 1.3.2      | IRM  | 18        |
| 1.3.2.1    | Principes physiques                            | 18        |
| 1.3.2.2    | Appareil                                       | 19        |
| 1.3.2.3    | Images et artefacts                            | 19        |
| 1.3.2.4    | Conclusion                                     | 21        |
| 1.3.3      | Ultrasons                                      | 22        |
| 1.3.3.1    | Principes physiques                            | 22        |
| 1.3.3.2    | Appareil                                       | 23        |
| 1.3.3.3    | Forme des données                              | 23        |
| 1.3.3.4    | Conclusion                                     | 25        |
| <b>1.4</b> | <b>Tomographie d'émission</b>                  | <b>25</b> |
| 1.4.1      | Tomographie par émission de positons (TEP)     | 25        |
| 1.4.1.1    | Principes physiques                            | 25        |
| 1.4.1.2    | Appareil                                       | 26        |
| 1.4.1.3    | Données - artefacts et performances            | 27        |

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| 1.4.1.3.1  | Forme des données . . . . .                           | 27        |
| 1.4.1.3.2  | Facteurs de dégradation de l'image . . . . .          | 29        |
| 1.4.1.4    | Conclusion . . . . .                                  | 32        |
| 1.4.2      | TEPS . . . . .  | 32        |
| 1.4.2.1    | Principes physiques . . . . .                         | 32        |
| 1.4.2.2    | Appareil . . . . .                                    | 32        |
| 1.4.2.3    | Données et erreurs . . . . .                          | 34        |
| 1.4.2.4    | Conclusion . . . . .                                  | 34        |
| <b>1.5</b> | <b>Nouvelles voies de la tomographie . . . . .</b>    | <b>34</b> |
| 1.5.1      | Tomosynthèse (Radiologie tridimensionnelle) . . . . . | 34        |
| 1.5.1.1    | Appareil . . . . .                                    | 34        |
| 1.5.1.2    | Acquisition et images . . . . .                       | 35        |
| 1.5.1.3    | Conclusion . . . . .                                  | 36        |
| 1.5.2      | Appareillages multimodalités . . . . .                | 36        |
| <b>1.6</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>                           | <b>37</b> |

---

## 1.1 Introduction

Il existe de très nombreuses modalités en imagerie tomographique dont quelques-unes sont listées dans la table 1.1. Ces modalités ont évolué depuis la découverte des rayons X par Roentgen en 1895.

Le but de ce chapitre est de présenter certaines de ces modalités qui utilisent l'acquisition tomographique. Ces modalités se différencient par les phénomènes physiques qui sont utilisés pour obtenir les images. Les capteurs détectent des ondes acoustiques, des ondes électromagnétiques ou bien des rayonnements photoniques. Selon la modalité utilisée, le contraste dans l'image obtenue change et les régions sont mises en valeur différemment.

Nous allons voir les principes physiques de certaines de ces modalités, les méthodes d'acquisition et leurs applications.

La sortie d'un système d'imagerie tomographique fournit des images bi ou tri-dimensionnelles. Elles sont échantillonnées sur des grilles de pixels ou de voxels. Dans la suite du document, nous utiliserons le néologisme de JP. Guédon pour qualifier indépendamment de la dimension un élément d'information par ixel (ce qui donne pixel en dimension deux et voxel en dimension trois). La taille de ces ixels définit la résolution spatiale de la modalité. Si le système d'acquisition est dynamique, on peut aussi définir une résolution temporelle du système.

Les rayonnements utilisés traversent la totalité de l'objet à représenter. Ils fournissent une information globale, intégrant l'ensemble des contributions des régions traversées.

Nous allons tout d'abord rappeler brièvement ce qu'est la tomographie, puis nous allons présenter des appareils d'acquisition tomographique selon deux volets principaux, la tomographie de transmission et la tomographie d'émission. Les systèmes d'acquisition tomographiques permettent l'obtention de données soit par transmission de rayon X par exemple à travers le corps humain soit directement

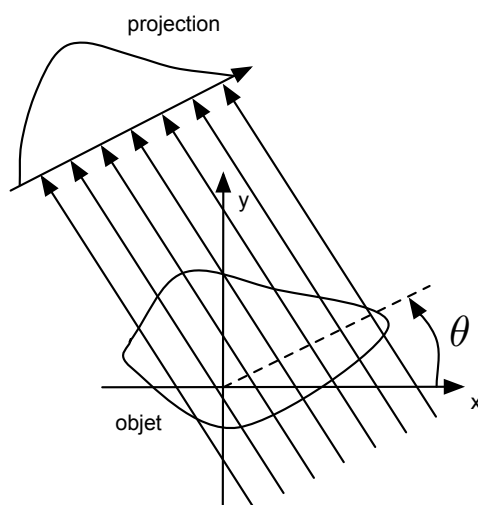


FIG. 1.1 – Projection tomographique selon un angle  $\theta$ .

par émission de photons à partir, par exemple, de la désintégration d'un corps radioactif dans le corps humain.

## 1.2 Qu'est-ce que la tomographie ?

La tomographie est une technique de création d'image par section. Ce mot vient de deux racines grecques : *tomos* morceau coupé et *graphein* écrire. Elle consiste à reconstruire une vision en trois dimensions d'un objet à partir d'une série d'images en deux dimensions. On peut donc avoir une vision de la structure interne d'un objet sans découper matériellement cet objet.

La tomographie est utilisée en médecine, en géologie ou encore pour le contrôle de la qualité des pièces manufacturées.

Un objet est reconstruit à partir de l'acquisition d'un nombre fini de ses projections (figure 1.1). La figure 1.1 peut être considérée comme une figure générique donnant la projection 1D à l'angle  $\theta$  de l'objet 2D. La tomographie consiste à acquérir un ensemble de projections d'angles  $\theta$  différents puis à reconstruire une approximation de l'objet 2D.

| Modalité d'imagerie tomographique                  | Contraste                                     | Résolution spatiale                                     | Résolution temporelle                                       |
|--|---|---|---|
| Tomographie X médicale (appelée Tomodensitométrie) | coefficient d'atténuation, densité de matière | axiale $\approx 0,5$ mm, transaxiale $\approx 1$ à 5 mm | 0,5 s à 5 s par ensemble de coupes associées à une rotation |



|   |  |                          |  |
|---|--|--------------------------|--|
| Radiologie X tridimensionnelle                          | coefficient d'atténuation, densité de matière                                    | $\approx 0,25$ mm        | 3 à 6 s par acquisition volumique (demi-tour)      |
| Tomographie RMN   | amplitude de l'aimantation transversale  | $\approx 1$ mm           | 0,1 à 10 s   |
| Tomographie d'émission monophotonique (TEPS)            | concentration de traceur, paramètres physiologiques ou biologiques associés      | 10 à 20 mm               | 600 à 3600 s par acquisition                       |
| Tomographie d'émission par positons (TEP)               | concentration de traceur, paramètres physiologiques ou biologiques associés      | 3 à 10 mm                | 300 à 600 s par acquisition                        |
| Tomographie RMN fonctionnelle                           | amplitude de l'aimantation transversale, concentration de l'oxydésoxyhémoglobine | $\approx 1$ mm           | 0,1 s  |
| Tomographie en microscopie électronique en transmission | coefficient d'atténuation  | $10^{-6}$ mm             | quelques 100 s en fonction de la taille de l'image |
| Tomographie synchrotron                                 | coefficient d'atténuation, densité de matière                                    | $10^{-3}$ à $10^{-2}$ mm | 800 à 3600 s par acquisition (demi-tour)           |

TAB. 1.1 – Tableau comparatif de quelques modalités d'imagerie tomographique [33].

### 1.3 Tomographie de transmission

Dans cette partie la (figure 1.1) est instanciée de la façon suivante : les traits parallèles irradiant l'objet 2D proviennent d'une source extérieure, c'est la tomographie de transmission. Nous allons présenter quelques types d'appareils utilisant les rayons X, la résonance magnétique nucléaire et les ultrasons.

#### 1.3.1 Scanner

Le scanner X ou tomodensitométrie (TDM ou *Computed Tomography*) est une modalité d'imagerie médicale qui permet d'obtenir un plan de coupe de la distribution des tissus humains. Ces coupes sont reconstruites à partir de la mesure de l'atténuation du faisceau de rayon X dans le volume étudié. Le premier prototype industriel a été réalisé par Allan M. Cormack et Godfrey N. Hounsfield qui ont reçu le prix Nobel de médecine pour leurs travaux en 1979 [20].

##### 1.3.1.1 Principes physiques

L'atténuation spatiale du faisceau de rayons X due à la traversée d'un corps absorbant permet d'obtenir la distribution de la densité du plan de coupe.



FIG. 1.2 – Scanner Sommaton Sensation de Siemens Medical [Siemens AG].

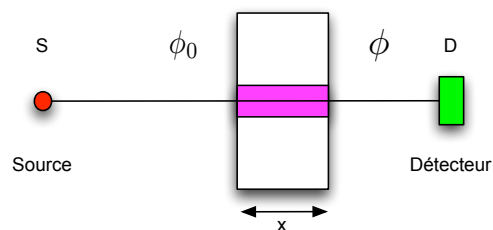


FIG. 1.3 – Traversée d'un corps d'épaisseur  $x$  par un faisceau de rayon X.

Sous l'hypothèse d'un rayonnement monochromatique d'énergie  $E$  et d'un flux incident  $\phi_0$ , le flux de photon X transmis  $\phi$  est donné par la loi de Beer-Lambert :

$$\phi = \phi_0 e^{-\int_S^D \mu_E(x,y) dl}, \quad (1.1)$$

où  $\mu$  est le coefficient d'atténuation linéaire des tissus [3]. On peut obtenir un faisceau monochromatique à la sortie du tube à rayons X en utilisant des filtres.

Si  $S$  est la source et  $D$  un détecteur, la mesure

$$-\ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) = \int_S^D \mu_E(x,y) dl \quad (1.2)$$

est l'intégrale du coefficient d'atténuation linéique total à l'énergie  $E$  entre la source et le détecteur. L'ensemble des mesures intégrales pour un objet pour divers angles permet de reconstruire l'image de  $\mu_E(x,y)$ .

Après reconstruction, les images sont normalisées en unités de Hounsfield :

$$H = 1000 \frac{\mu - \mu_{eau}}{\mu_{eau}}, \quad (1.3)$$

où  $\mu$  est le coefficient d'atténuation du tissu considéré et  $\mu_{eau}$  celui de l'eau. Par exemple  $\mu_{air} = -1000$ ,  $\mu_{graisse} = -60$  à  $-120$  et  $\mu_{os} = 1000$ .

### 1.3.1.2 Des générations de scanners

Depuis les années 1970, les scanners ont évolué et plusieurs générations de machines se sont succédées.

Généralement, l'ensemble générateur/détecteur de rayons X est solidarisé par un montage mécanique rigide qui définit un plan de coupe. L'objet à étudier est placé dans le faisceau et on mesure à l'aide de détecteurs linéiques ou en couronne, l'atténuation du rayonnement due à l'objet traversé, situé dans ce plan. La source tourne autour de l'objet pour acquérir différents plans de coupe et ensuite permettre la reconstruction (figure 1.4).

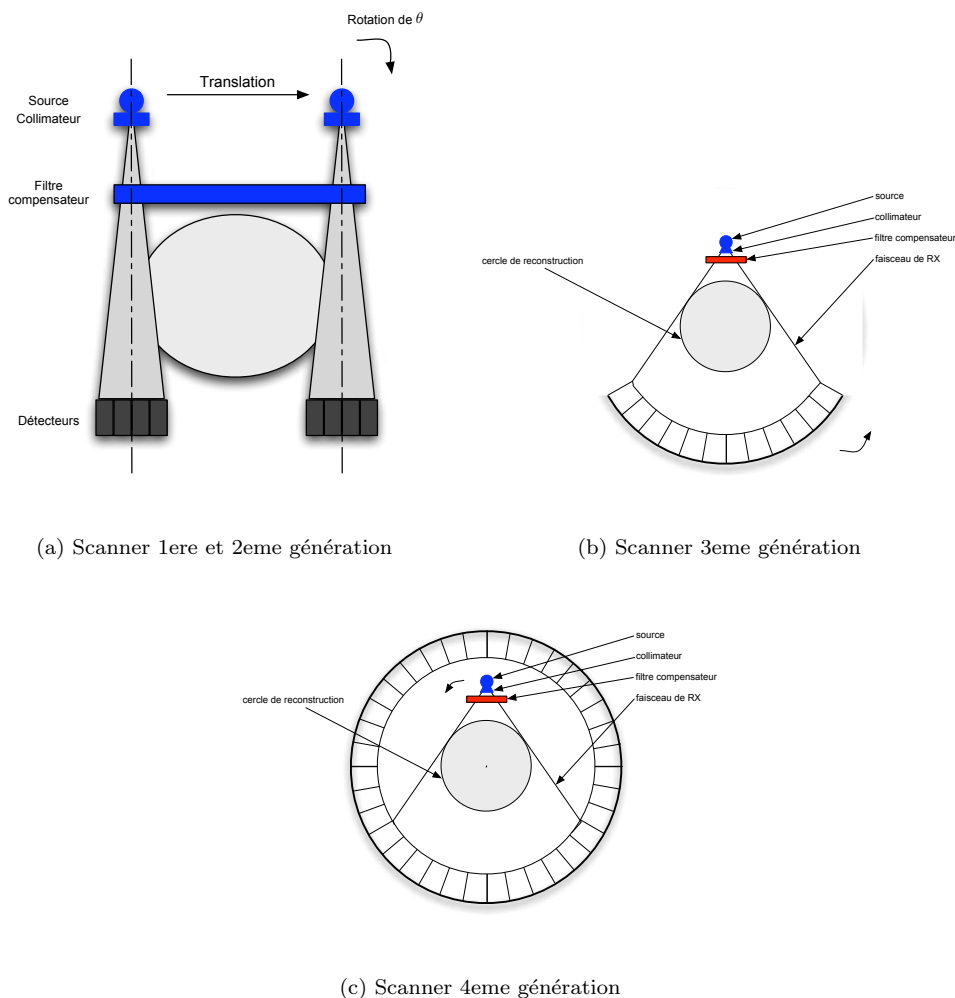


FIG. 1.4 – Géométrie des différentes générations de scanners [3, p35].

Les détecteurs étaient constitués de cristaux à scintillation ou de chambres d'ionisation permettant de quantifier l'atténuation du faisceau de rayons X. Actuellement, les détecteurs à semi-

conducteurs (scintillateurs associés à des photodiodes) donnent une meilleure réponse et ont pris le dessus dans la technologie des détecteurs des scanners hélicoïdaux. Pour des détecteurs à semi-conducteur, plus de 90% de l'information est restituée contre 50 à 90 % pour des détecteurs à gaz (chambre d'ionisation au Xe).

Les contraintes principales que doivent supporter les détecteurs des scanners sont [3] :

- une bonne efficacité de détection (> 70 %),
- une grande dynamique ( $2 \cdot 10^5$ ),
- une décroissance rapide du signal après coupure du faisceau.

Les scanners de première et deuxième génération effectuaient des translations et des rotations de l'ensemble source/détecteurs autour de l'objet étudié (figure 1.4.a). Les rotations de l'ensemble source/détecteurs étaient égales à l'angle d'ouverture du faisceau. Pour décrire tout l'objet, l'ensemble source-détecteur devait traduire. La première génération ne comportait que deux détecteurs séparés permettant d'obtenir deux coupes simultanément avec un temps d'acquisition de plusieurs minutes.

Pour la troisième génération de scanner, l'objet est entièrement dans le faisceau de rayons X. Les détecteurs sont placés en arc de cercle (géométrie "en éventail" cf. section 2.2.2) et ils voient toujours la source sous la même incidence (figure 1.4.b). Les détecteurs sont courbes et comportent environ 1000 détecteurs unitaires. L'ensemble source/détecteurs se déplace d'un mouvement de rotation autour du patient.

La quatrième génération de scanner est constituée d'une couronne de détecteurs fixes et seule la source est mobile autour du patient à l'intérieur de cette couronne (figure 1.4.c). Le faisceau de rayon X est là aussi divergent et irradie tout le patient comme pour les scanners de troisième génération. La source est plus près du patient et la résolution spatiale est dégradée. L'ouverture du faisceau doit être plus importante. Les couronnes de détecteurs doivent contenir de 2000 à 4800 détecteurs pour que l'appareil ait de bonnes performances.

Les scanners de troisième et quatrième génération ont permis de réduire le temps d'acquisition des données et donc les artefacts dus aux mouvements involontaires ou physiologiques des patients.

Au début des années 1990 sont apparus des tomographes à rotation continue. Ils permettent d'acquérir en continu des données en déplaçant uniformément le lit du patient à travers l'anneau de détecteurs tout en faisant tourner la source autour de lui. La géométrie d'acquisition devient hélicoïdale par rapport au patient (figure 1.5).

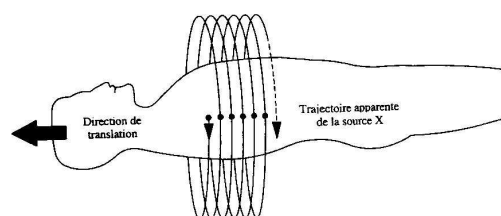


FIG. 1.5 – Géométrie hélicoïdale d'acquisition [3, p 36].

Dans un temps donné, un scanner hélicoïdal peut acquérir cinq à vingt fois plus de données que

les tomographes des années 1980. Une acquisition hélicoïdale de 30 secondes, avec une translation du lit du patient à 10 mm/s permet d'acquérir un volume de 300 mm de hauteur (rotation d'une seconde par tour, épaisseur de coupe de 10 mm et un pas (*pitch*) de 1)[34, p36].

Les tomographes multicoupes apparaissent vers la fin des années 1990. Ils permettent d'acquérir plusieurs coupes en une seule rotation. Leurs capteurs sont des détecteurs matriciels qui peuvent être constitués de lignes de détecteurs de hauteurs égales ou variables (figure 1.6). Le rayonnement est de géométrie conique et non plus en éventail.

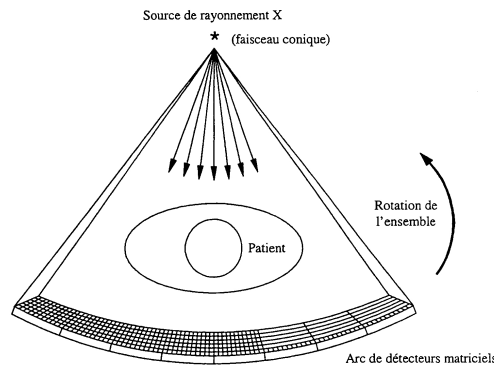


FIG. 1.6 – Tomographe multicoupes [3, p37].

Le temps d'acquisition est réduit et pour un temps d'acquisition égal, la zone couverte est plus importante que celle acquise avec un scanner classique. En revanche, le rayonnement traversant le patient est plus diffusé et perturbe plus la mesure. Le bruit sur les coupes augmente et la résolution spatiale longitudinale diminue.

Les deux paramètres principaux en tomographie hélicoïdale sont :

- la largeur de la collimation (en mm),
- la vitesse de translation du lit (en  $s$ ).

Les tomographes hélicoïdaux avec acquisition en continu ont permis d'obtenir de meilleurs résultats qu'avec des scanners séquentiels, notamment les images du thorax sont de meilleure qualité.

Le nombre de coupes pouvant être acquises en apnée (pour limiter les mouvements du patient) a augmenté ce qui réduit les problèmes de recalage dus à la respiration. De plus, la quantité de produit de contraste injecté pour détecter des tumeurs en cas d'utilisation en transmission est diminuée. Mais le mode d'acquisition hélicoïdal diminue la résolution spatiale longitudinale en raison de l'élargissement du profil de coupe et de l'augmentation du bruit dans l'image [34].

### 1.3.1.3 Qualité des images : artefacts et performances

L'image des coupes pour un scanner récent est représentée par une matrice variant entre  $512 \times 512$  et  $1024 \times 1024$  pixels [13]. Les pixels ont une taille jusqu'à 0,2 mm et l'épaisseur de coupe varie entre 1 et 10 mm selon les régions à traiter [3].

L'atténuation est déterminée par la composition du matériau traversé et par son épaisseur mais dans la gamme d'énergie utilisée pour le diagnostic, l'atténuation est principalement déterminée par l'effet photoélectrique et l'effet Compton [30, p527].

L'effet photoélectrique a été découvert par Albert Einstein en 1905. Lors d'une interaction photoélectrique, le rayon X incident interagit avec le matériau. Il est totalement absorbé et toute son énergie est transférée à un électron (figure 1.7.a) [13, p19]. Si  $E_0$  est l'énergie du rayon X incident, l'électron émis aura une énergie cinétique de  $E_0 - E_{el}$  où  $E_{el}$  est l'énergie de liaison entre l'électron et le noyau de l'atome.

L'effet Compton est une interaction des rayons X avec un électron de la couche électronique externe de l'atome. L'électron est émis et le rayon X est dévié selon un angle  $\theta$  qui dépend de l'énergie perdue lors de l'interaction avec l'électron (figure 1.7.b) [13, p21].

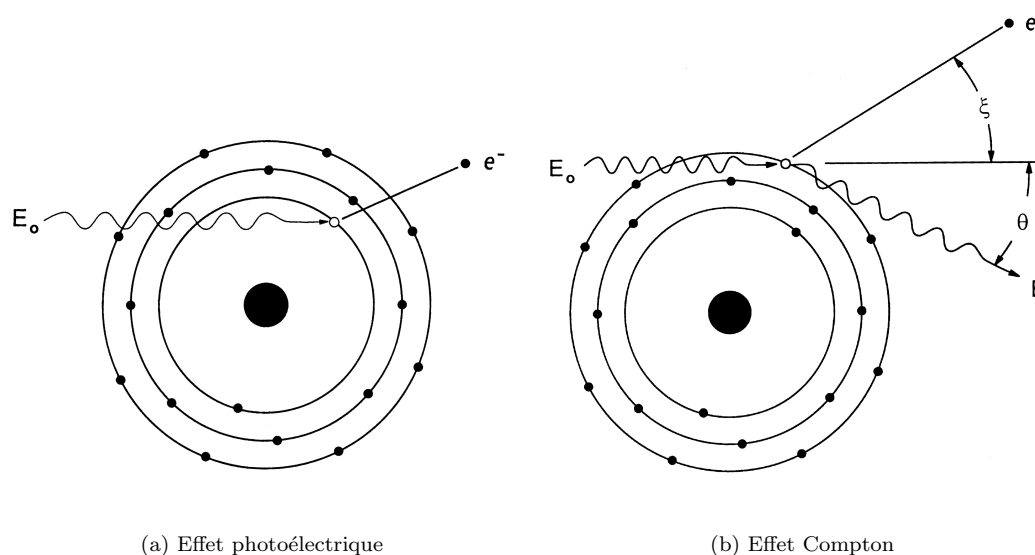


FIG. 1.7 – (a) Effet photoélectrique : un rayon X d'énergie  $E_0$  est absorbé par un électron lié à un atome qui est émis. (b) Effet Compton : un rayon X d'énergie  $E_0$  interagit avec un électron de la couche électronique externe qui est émis et le rayon X est dévié d'un angle  $\theta$  [13].

Il existe de nombreux autres facteurs influants sur la qualité des images acquises par un scanner comme par exemple la dose injectée au patient. La résolution spatiale de l'image va dépendre de la taille des détecteurs, de la géométrie de l'acquisition, de la taille des pixels mais aussi des algorithmes de reconstruction. L'alignement mécanique du tube à rayon X et des détecteurs, les mouvements du patient, une variation dans la génération des rayons X ou une instabilité des détecteurs sont sources d'artefacts à l'acquisition. La sensibilité et la finesse des coupes va dépendre de la collimation des rayons X, de la largeur des détecteurs, du nombre de coupes, du pas entre les coupes mais aussi des méthodes de reconstruction et d'interpolation choisies [30, p534 Table 8.2].

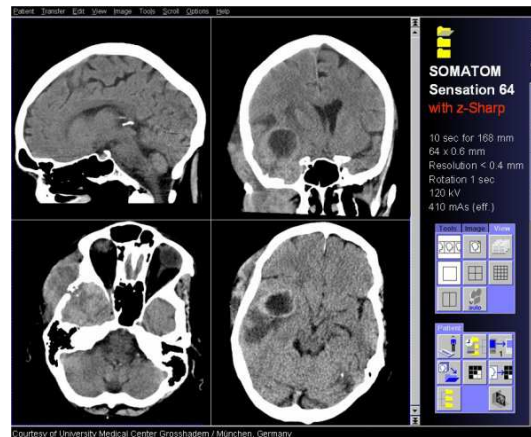


FIG. 1.8 – Scanner d'un crâne avec un SOMATOM 64 de Siemens [Siemens AG].

#### 1.3.1.4 Conclusion

Les tomodensitomètres sont une des modalités d'imagerie morphologique qui permettent d'acquérir des coupes du corps humain [3]. Deux de ses caractéristiques principales sont la restitution sans distorsion de l'anatomie en coupes axiales transverses et l'étude des densités des structures traversées, exprimées sur l'échelle de Hounsfield.

La tomodensitométrie est utilisée pour des applications abdominales (foie, rein), thoraciques (poumon, bronches) et vasculaires (avec produit de contraste) mais aussi pour obtenir des images du cerveau (figure 1.8).

L'utilisation depuis les années 90 de scanner hélicoïdaux a représenté une avancée importante dans cette modalité d'acquisition. Il permet d'acquérir un objet plus rapidement avec une même qualité d'image.

### 1.3.2 IRM

L'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) est une modalité d'imagerie médicale dont l'importance s'est accrue durant ces vingt dernières années. Cette modalité est fondée sur les propriétés magnétiques du noyau atomique. Elle permet aux médecins d'obtenir des images de pathologies différentes de celles obtenues avec d'autres modalités et qui sont souvent complémentaires.

#### 1.3.2.1 Principes physiques

À l'équilibre thermodynamique dans un champ magnétique il existe des moments magnétiques microscopiques associés au moment angulaire des noyaux (ou spin).

La polarisation en présence d'un champ thermique est très faible et les aimantations d'origine nucléaire ne peuvent être mesurées par des méthodes directes mais par résonance du noyau conditionné par le mouvement de précession du champ magnétique statique et par l'existence du

phénomène de relaxation [15].

Un moment magnétique microscopique placé dans un champ magnétique extérieur peut avoir deux niveaux d'énergies. La résonance magnétique consiste à faire passer le moment magnétique nucléaire du niveau de plus basse énergie à celui de plus grande énergie. Un noyau de l'atome considéré absorbe les rayonnements électromagnétiques d'une fréquence spécifique en présence d'un fort champ magnétique. Plus le champ magnétique appliqué est important, plus la différence d'énergie entre les deux niveaux est grande.

Tous les atomes n'ont pas un spin nucléaire non nul. Par exemple les atomes de carbone 12 et d'oxygène 18 ont un spin nul. En revanche l'hydrogène n'a qu'un proton, son moment magnétique nucléaire est non nul. La résonance magnétique du proton est la plus utilisée. Dans un champ magnétique, la moitié des atomes d'hydrogène sont dans le sens du champ et l'autre moitié dans le sens opposé au champ. L'énergie amenée par une onde radio adéquate fait passer les atomes d'un niveau d'énergie à l'autre. Ce phénomène ne dure que quelques milli-secondes mais le temps de relaxation n'est pas le même selon les tissus.

Lorsque les noyaux alignés reçoivent un apport d'énergie sous la forme d'une onde électromagnétique dont la fréquence est égale à la fréquence de résonance du noyau (fréquence de Larmor), ils entrent en résonance et basculent du sens parallèle au sens antiparallèle, c'est-à-dire de l'état fondamental de basse énergie au niveau de haute énergie.

À l'arrêt de l'impulsion radiofréquence, le retour à l'état d'équilibre s'accompagne d'une part de la restauration de la magnétisation longitudinale (au cours de cette remagnétisation, il y a des échanges d'énergie importants avec les molécules avoisinantes), d'autre part de la décroissance de la magnétisation transversale (qui correspond au déphasage des spins). Le temps de relaxation correspondant à la relaxation spin/milieu, c'est-à-dire le temps nécessaire à la restauration de la magnétisation longitudinale, est noté  $T_1$ , le temps de relaxation spin/spin correspondant à la diminution de l'aimantation transversale est noté  $T_2$ . Les temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$  caractérisent la structure chimique et la composition du matériau (figure 1.10). Le temps de relaxation  $T_1$  des tissus biologiques est environ 10 fois plus long que le temps de relaxation  $T_2$ .

### 1.3.2.2 Appareil

L'appareil est constitué d'un aimant (généralement 3 Tesla). Les aimants de moins de 0,5 Tesla peuvent être réalisés avec des aimants permanents ; pour des aimants plus puissants des supraconducteurs sont utilisés. Selon la partie du corps à acquérir, une antenne émettrice/réceptrice de forme adaptée est placée sur le patient (figure 1.11).

### 1.3.2.3 Images et artefacts

Toute différence de la valeur du champ magnétique statique observée entre deux éléments de volume d'échantillon situés à des emplacements différents de l'espace se manifeste par un décalage de la phase des signaux issus de ces éléments [15, p83].

Si on applique séquentiellement trois gradients  $G_x$ ,  $G_y$  et  $G_z$  pendant les temps  $t_x$ ,  $t_y$  et  $t_z$ , le





FIG. 1.9 – IRM MAGNETOM Trio de Siemens, aimant de 3 Tesla [Siemens AG].

|                   |        |                   |        |
|-------------------|--------|-------------------|--------|
| Graisse           | 240 ms | Graisse           | 84 ms  |
| Muscle            | 730 ms | Muscle            | 47 ms  |
| Substance blanche | 680 ms | Substance blanche | 92 ms  |
| Substance grise   | 809 ms | Substance grise   | 101 ms |

(a) (b)

FIG. 1.10 – (a) Temps de relaxation  $T_1$  dans un champ magnétique de 1 Tesla, (b) temps de relaxation  $T_2$  dans un champ magnétique de 1 Tesla.

signal tridimensionnel recueilli apparaît comme la transformée de Fourier inverse de la densité locale d'aimantation. Une transformation de Fourier directe du signal permet de reconstruire l'image.

L'IRM est tridimensionnelle dans son principe et permet d'extraire des coupes dans toutes les orientations de l'espace. Pour reconstruire l'image, une transformée de Fourier discrète du signal acquis dans l'espace réciproque doit être faite. Si le découpage de l'espace réciproque n'est pas cartésien, les données seront interpolées. Il existe plusieurs méthodes de balayage de l'espace réciproque selon les gradients choisis (figure 1.12). Ces méthodes circulaires sont rapides.

Les images acquises par cette modalité peuvent comporter des artefacts. Ils peuvent provenir de mouvements involontaires du patient dans la machine qui provoquent des changements soudains et rapides dans l'intensité du signal. Une variation dans le champ magnétique peut causer un déplacement du contraste dans l'image. Les méthodes de reconstruction considèrent que le champ magnétique est homogène. Un effet de gradient est supposé être linéaire, constant dans le temps et avoir une amplitude fixée. Une modification de l'amplitude va provoquer un changement de la taille des voxels aux bord de la zone d'intérêt. Il existe d'autres sources d'artefacts au niveau de la reconstruction comme



FIG. 1.11 – Antenne radiofréquence placée sur le patient lors d'une acquisition d'images de la tête.

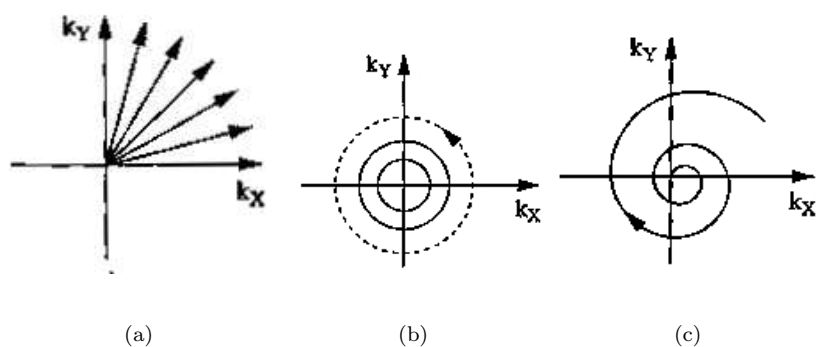


FIG. 1.12 – Balayage radiaux de l'espace réciproque (a) selon la direction de rayons, gradient réorienté puis maintenu fixe, (b) selon des cercles concentriques, gradient variant de façon sinusoïdale et en quadrature, (c) selon des trajectoires spirales, gradient d'amplitude croissante oscillant.  $k_x$  et  $k_y$  sont les fréquences spatiales selon  $x$  et  $y$  [34].

le phénomène de Gibbs, l'aliasing ou l'effet de volume partiel [68, p419–427].

#### 1.3.2.4 Conclusion

L'IRM permet grâce à l'excitation des atomes d'hydrogène présents dans le corps d'obtenir des images anatomiques du corps humain.

Des avancées récentes en IRM fonctionnelle permettent de distinguer les zones de l'encéphale activées par des stimuli [10]. La micro IRM ( $\mu$ -IRM) permet de réaliser de biopsies virtuelles des os [88] et ainsi caractériser des maladies osseuses.

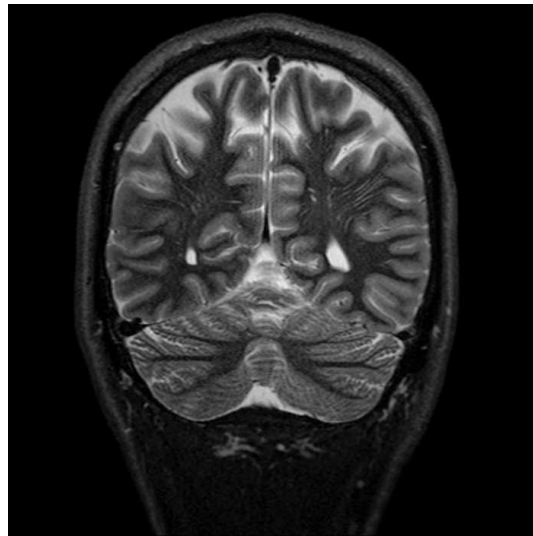


FIG. 1.13 – ]

IRM d'un crâne avec un MAGNETOM Trio de Siemens [Head, TIRM coronal, PAT 2 TR 5980 ms, TE 47 ms, TI 180 ms, TA 2 min, SL 3 mm, slices 38, matrix 384, FoV 219 mm, mode Triple, coil HE, PAT 2] [Siemens AG].

### 1.3.3 Ultrasons

L'imagerie par ultrasons est bien plus récente que l'imagerie par rayons X. C'est une modalité d'imagerie relativement peu coûteuse. L'imagerie par ultrasons est fondée sur la vibration d'un cristal de céramique (PZT), situé dans une sonde, qui, soumis à des impulsions électriques, vibre et émet des ultrasons.

Les avantages principaux de cette modalité sont :

- le capteur à ultrasons est TEPit et facilement manipulable et permet la génération d'images en temps réel aux orientations et positions choisies par l'utilisateur,
- la résolution (0,2 mm à 2,0 mm) est suffisante pour montrer les détails de beaucoup de structures du corps,
- les systèmes d'imagerie par ultrasons sont peu chers, compacts et mobiles,
- ils peuvent donner des images en temps réel de la vitesse et de l'écoulement du sang dans les veines (en utilisant l'effet Doppler) [25, p465].

#### 1.3.3.1 Principes physiques

Les ultrasons se propagent à une vitesse qui sera fonction de la nature du milieu. Dans l'organisme, les ultrasons vont se propager à une vitesse proche de 1500 m/s selon la nature des organes qu'ils traversent.

La pénétration relativement aisée des ultrasons dans les tissus mous permet l'exploration de la

plupart des organes à l'exception du squelette et des poumons. Des images échographiques morphologiques sont obtenues en analysant les échos réfléchis par les tissus. L'analyse des tissus en mouvement en utilisant l'effet Doppler permet de réaliser une imagerie fonctionnelle de l'appareil cardiovasculaire et une évaluation des écoulements du sang dans les vaisseaux.

La résolution des images est plus fine lorsque la fréquence des ondes ultrasonores augmente. Néanmoins, plus la fréquence des ondes augmente, plus la pénétration des tissus biologiques par ces ondes décroît. Les appareils d'imagerie par ultrasons utilisent des fréquences entre 2 et 15 MHz.

La réflexion et la diffusion des ultrasons par des cibles sont à l'origine de la formation de l'image échographique. Les interfaces entre les objets macroscopiques contenus dans le corps humain (organe, tumeur) sont à l'origine de la réflexion de l'onde incidente. Les inhomogénéités locales de l'objet à étudier si elles sont de petite taille par rapport à la longueur d'onde de l'onde incidente vont provoquer une diffusion du signal.

### 1.3.3.2 Appareil

Contrairement à d'autres méthodes d'imagerie, il n'est pas nécessaire d'entourer l'objet à acquérir avec des émetteurs et des récepteurs, la transmission et la réception sont faites du même côté à l'aide de la même sonde.

Le capteur est composé d'une barrette multi-éléments constituée d'une rangée d'éléments piézo-électrique de petite taille (typiquement 64 à 128 éléments de largeur 100 à 500  $\mu\text{m}$ ). Plusieurs éléments piézo-électriques de la barrette fonctionnent ensemble pour produire un front d'ondes convergent. Les éléments sont excités avec des décalages temporels qui correspondent à la courbure de l'onde que l'on désire émettre. Les éléments latéraux les plus éloignés du centre de courbure de l'onde convergente émettent les premiers, l'élément central émet le dernier. Le même principe est utilisé pour la focalisation à la réception. Une correction de retard est appliquée à chaque élément. Cette loi de retard compense les différences de temps de vol liées à la courbure de l'onde reçue et permet de remettre en phase tous les signaux issus d'une cible à une profondeur donnée.

### 1.3.3.3 Forme des données

Pour les ultrasons, les erreurs sur les données mesurées proviennent principalement du fait que les ondes sonores ne traversent quasiment jamais un objet en ligne droite. Les données mesurées ont pu avoir un chemin courbe à travers l'objet. Ce chemin peut être approximé par des lignes droites pour les applications principales de cette méthode [47].

Les méthodes de focalisation des données supposent que la vitesse du son dans le corps est constante. Cependant, les fluctuations de la vitesse du son observées lorsque l'on passe d'un tissu à l'autre (graisse : 1450 m/s ; muscle : 1570 m/s) ou à l'intérieur d'un même organe sont responsables de distorsions du faisceau ultrasonore, appelées aberrations de phase et d'amplitude, qui dégradent la qualité de la focalisation.

L'inter-corrélation des signaux issus de deux éléments voisins de la barrette permet de déterminer le décalage temporel à appliquer pour corriger les aberrations introduites par le milieu et remettre



FIG. 1.14 – Appareil à ultrasons ACUSON Sequoia Echo 256 Images de Siemens [Siemens AG].

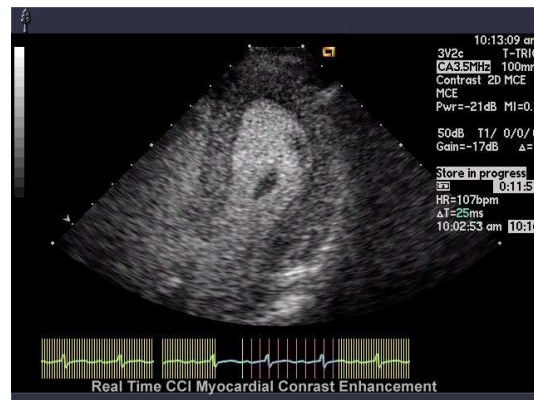


FIG. 1.15 – Image par ultrasons d'un coeur avec un ACUSON Sequoia Echo 256 Images de Siemens [Siemens AG].

les signaux en phase. Cependant, les aberrations pour des ondes qui se sont propagées dans le corps humain comportent des modifications de la phase et de l'amplitude, car chaque composante spectrale des signaux subit un déphasage qui lui est propre. Les fluctuations d'absorption dans le milieu de propagation contribuent également au phénomène d'aberration d'onde. De simples décalages temporels des signaux sont insuffisants dans le cas le plus général pour corriger totalement les défauts de la focalisation.

### 1.3.3.4 Conclusion

L'imagerie ultrasonore est utilisée pour obtenir des images d'un fœtus à l'intérieur du ventre de sa mère, mais est aussi utilisée pour la détection des troubles d'organes internes. Associée à un Doppler, une information sur le flux sanguin est aussi collectée. L'imagerie ultrasonore 3D est en plein développement, par exemple pour voir un fœtus en 3D.

## 1.4 Tomographie d'émission

Après avoir balayé quelques modalités d'imagerie par transmission, nous allons nous intéresser à des modalités d'imagerie par émission.

Parmi ces techniques d'imagerie, nous allons nous focaliser sur la TEP (*Positron Emission Tomography* - Tomographie par Émission de Positons) et la TEPS (*Single Photon Emission Computed Tomography* - Tomographie d'Émission de Photons Simples) qui sont deux modalités d'imagerie nucléaire.

Le but de la médecine nucléaire, y compris pour les TEP et TEPS, est de fournir une information sur la répartition d'une molécule donnée dans le corps humain, que ce soit dans l'espace ou dans le temps [56]. Pour des molécules bien choisies, cette répartition dans le corps entier ou dans un organe donne des informations sur le fonctionnement de cet organe. Cela permet de détecter des déformations comme des tumeurs cancéreuses et ainsi permettre un diagnostic médical et un suivi du traitement.

L'information fonctionnelle obtenue par TEPS et TEP est essentiellement fonctionnelle et donc complémentaire de l'information anatomique obtenue par d'autres méthodes d'imagerie comme les rayons-X, le scanner ou l'imagerie par résonance magnétique.

### 1.4.1 Tomographie par émission de positons (TEP)

La TEP est un outil très important pour détecter les tumeurs et évaluer leur malignité. Son fonctionnement est fondé sur les différences biochimiques et métaboliques entre les tumeurs et les tissus sains environnants.

#### 1.4.1.1 Principes physiques

En médecine nucléaire, certaines molécules sont marquées avec un isotope radioactif (table 1.2). Ces isotopes instables sont produits à l'aide d'un cyclotron. Ils sont introduits dans le corps du patient et se désintègrent de façon aléatoire. Une des principales caractéristiques de ces isotopes est une demi-vie courte. Le résultat d'une désintégration est un nouveau corps avec un proton en moins et un neutron supplémentaire. Lors de la désintégration il y a aussi émission d'un neutrino et d'un positon :



où  $e^+$  est le positon et  $\nu$  le neutrino.

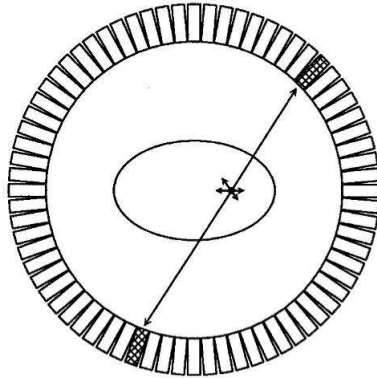


FIG. 1.16 – Coïncidence détectée dans un TEP par un anneau de détecteurs [84].

| Isotope         | Demi-vie |
|-----------------|----------|
| $^{11}\text{C}$ | 20,3 min |
| $^{13}\text{N}$ | 9,97 min |
| $^{15}\text{O}$ | 124 sec  |
| $^{18}\text{F}$ | 110 min  |

TAB. 1.2 – Quelques isotopes communément utilisés pour la TEP [84].

Après la désintégration, les positons se déplacent sur une distance d'environ 1 mm, ils interagissent avec la matière environnante. Ensuite ils s'annihilent par collision avec un électron :



Cette collision provoque l'émission de deux photons  $\gamma$  d'énergie 511 keV émis à 180 degrés l'un de l'autre. Cette émission simultanée de deux photons dans des directions opposées est la base de l'imagerie par coïncidence.

Les photons utiles sont ceux qui n'interagissent pas avec le corps humain et dont la paire est interceptée par le détecteur. Quand deux photons sont détectés quasiment au même moment, c'est-à-dire dans une fenêtre de 6-12 ns, les photons sont dits "en coïncidence" et les coordonnées des deux photons sont enregistrées. On fait l'hypothèse que ces photons proviennent d'une désintégration sur la ligne de coïncidence qui est appelée *ligne of response* (LOR) (figure 1.16).

Le lieu d'annihilation entre le positon et l'électron et le lieu d'émission des photons ne sont pas confondus. Ceci limite la résolution spatiale intrinsèque de la méthode d'imagerie TEP [17].

#### 1.4.1.2 Appareil

Les systèmes d'acquisition TEP peuvent être 2D ou 3D. Pour les TEP 2D, un collimateur annulaire est souvent placé entre les anneaux de détecteurs pour réduire la diffusion inter plan des photons.



FIG. 1.17 – TEP ACCEL de Siemens [Siemens AG].

Ces collimateurs, d'épaisseur environ 1 mm, sont en plomb ou en tungstène. Le diamètre des anneaux du TEP est d'environ 80-100 cm pour une épaisseur par anneau de 10-20 cm. Le diamètre extérieur des collimateurs est égal au diamètre de l'anneau de détecteur du TEP et la différence entre les diamètres intérieurs et extérieurs du collimateur varie de 7 à 10 cm [23]. L'utilisation de collimateurs annulaires limite le nombre de photons diffusés de 30-40 % à 10-15%. En revanche, si on n'utilise pas les collimateurs, la sensibilité du TEP est augmentée d'un facteur 4 à 6 et la méthode de reconstruction doit être purement 3D [23].

L'utilisation de plusieurs anneaux de détecteurs augmente le champ de vue axial tout en conservant la résolution axiale (figure 1.18).

Les détecteurs sont composés de cristaux d'iodure de sodium couplés à des tubes photomultiplicateurs. Quand un photon interagit avec le cristal, il échange soit une partie de son énergie par un ou plusieurs effets Compton, soit toute son énergie par effet photoélectrique ou par un ou plusieurs effets Compton avec les électrons du cristal [9]. Les électrons sont déplacés d'une couche d'énergie à une autre. Quand ils reviennent à un état stable, ils émettent de la lumière. Les TEPs les plus courants utilisent des cristaux de bismuth-germanate qui génèrent environ 2500 photons de lumière pour un photon à 511keV reçu. De tels cristaux sont de taille 3,3 mm dans le plan transversal, 6,25 mm dans la dimension axiale et de 30 mm de profondeur [66].

Les tubes photomultiplicateurs collectent les photons de scintillation et déterminent quel détecteur a détecté l'événement [23].

### 1.4.1.3 Données - artefacts et performances

**1.4.1.3.1 Forme des données** Pour un anneau de  $n$  détecteurs, il y a  $\frac{n^2}{2}$  manières d'appairer les détecteurs ce qui sont autant de LOR différentes détectables. Le système pendant l'acquisition compte le nombre de photons détectés en coïncidence par des paires de détecteurs [84]. Les données acquises sont représentées sous forme de sinogramme qui permet de grouper les LOR (figure 1.19).

Dans un sinogramme sont représentées côte à côte les projections parallèles équivalentes aux



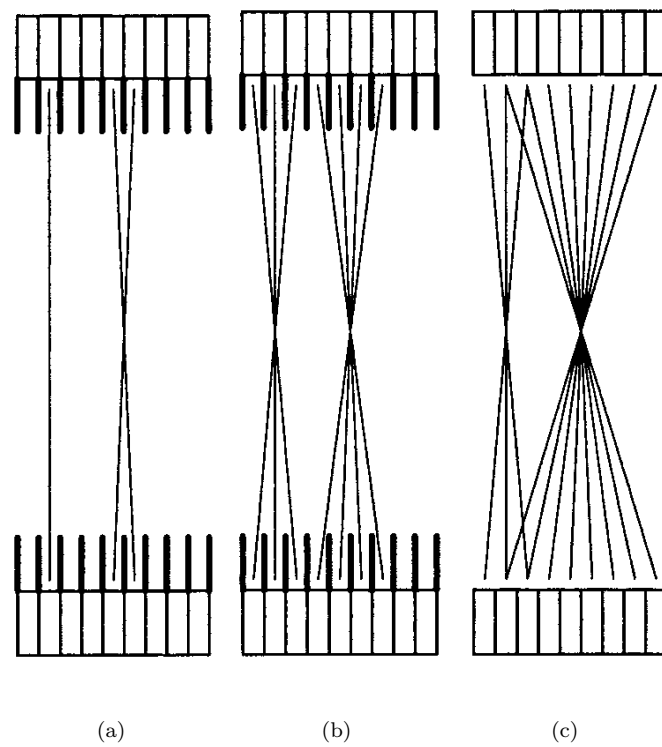


FIG. 1.18 – Différents modes d'acquisition d'un TEP multi-anneaux. (a) TEP 2D avec acquisition directe et entre anneaux voisins, (b) TEP 2D avec acquisition directe et acquisition étendue entre anneaux voisins pour augmenter l'efficacité, (c) TEP 3D. [84]

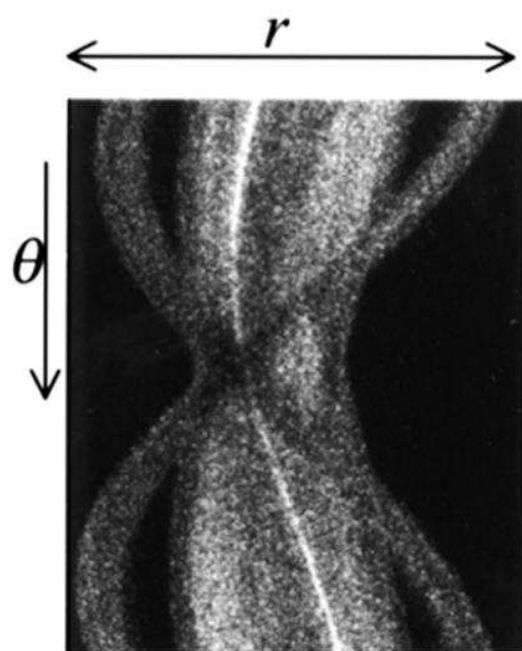


FIG. 1.19 – Sinogramme [84].

données acquises pour un nombre de bins (échantillonnage sur la projection) fixé pour tous les angles. Pour chaque détection de coïncidence, la LOR est déterminée et le pixel dans le sinogramme associé avec cette LOR est localisé et incrémenté. Dans le sinogramme final, la valeur de chaque pixel représente le nombre de coïncidences détectées par la paire de détecteurs associée à cette LOR. Un sinogramme est acquis par coupe et représente les données acquises pour cette coupe pour tous les angles de projection [23].

Pour augmenter l'échantillonnage axial et la sensibilité des coupes, les détecteurs peuvent être utilisés en coïncidence avec des détecteurs dans des anneaux voisins. L'acquisition de coïncidences directes et croisées entre anneaux de détecteurs voisins donne un échantillonnage axial qui est égal à la moitié de la largeur du détecteur. De nombreux appareils utilisent des capteurs avec des détecteurs de faible épaisseur pour obtenir un échantillonnage axial fin. Mais d'autre part, des détecteurs de faible largeur donnent une faible sensibilité intra-coupe et ainsi des images bruitées [23].

Pour la TEP 2D, les données acquises sont organisées en une série de coupes parallèles qui peuvent être reconstruites indépendamment. Les données d'un TEP 3D doivent être réarrangées en données 2D pour reconstruire les images, ou un algorithme de reconstruction 3D doit être utilisé [23].

**1.4.1.3.2 Facteurs de dégradation de l'image** Pour la modalité TEP, il existe de nombreux facteurs de dégradation de l'image. Certains d'entre eux peuvent être corrigés.

Les cas dits de "vraie coïncidence" sont les cas où les deux photons provenant de la même annihilation n'ont pas interagi avec le corps humain et sont détectés pendant la fenêtre de détection

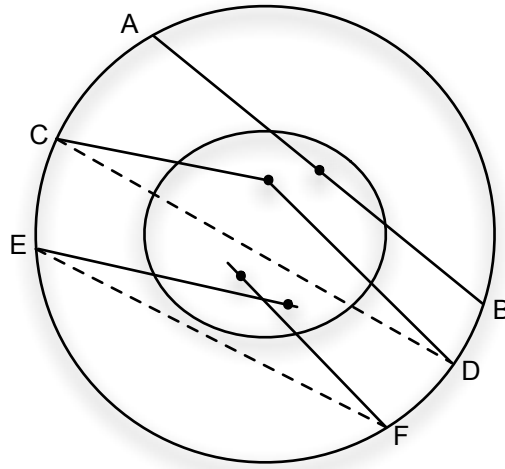


FIG. 1.20 – [AB] vraie coïncidence de deux photons à 511keV, [CD] coïncidence diffusée, [EF] coïncidence fortuite. Les lieux d'annihilation des positons sont les points •. Dans le cas de fausses coïncidences, l'annihilation est localisée à tort sur les droites pointillées. D'après [22].

par des détecteurs alignés et opposés. Si un des photons n'est pas détecté pendant la fenêtre de détection, on ne détectera qu'un photon et ses coordonnées ne seront pas prises en compte. La même situation peut se produire pour un autre photon quasiment au même moment et cela va conduire à la détection d'une "coïncidence accidentelle" (figure 1.20). Ces "accidents" de détection provoquent des erreurs dans les données. Les coïncidences fortuites ajoutent un fond à l'image [84].

Une autre source d'erreur dans les données provient de l'interaction d'un ou des deux photons avec le corps humain qui sont alors déviés. Cela provoque une atténuation, c'est-à-dire moins de photons comptés pour la ligne de coïncidence. Si ces photons déviés sont détectés et acceptés, on parle de coïncidence diffusée. Selon la résolution en énergie des détecteurs, le taux d'acceptation des événements diffusés change. Pour éviter aux détecteurs de recevoir des photons diffusés d'autres coupes, les anneaux de détecteurs sont munis de collimateurs annulaires (*septa*) entre les couronnes pour bloquer les photons dont l'origine est à l'extérieur de la zone étudiée (*field of view*). Un des photons change de direction en interagissant avec un électron et en transférant une partie de son énergie dans le processus (section 1.3.1.3).

L'atténuation est la perte de vraies coïncidences due à la diffusion et à l'absorption. Un des deux photons produits par la désintégration est perdu. Les effets de l'atténuation sont plus gênants en TEP qu'en TEPS. En effet, en TEP, les deux photons en coïncidence doivent être détectés pour être comptés. En TEPS, un seul photon est détecté et la probabilité qu'il soit atténué est plus faible [84].

L'atténuation, du fait du nombre de paires de photons comptées, augmente le bruit et diminue la précision de la détermination de la répartition de la radioactivité dans le corps. Ce dernier effet

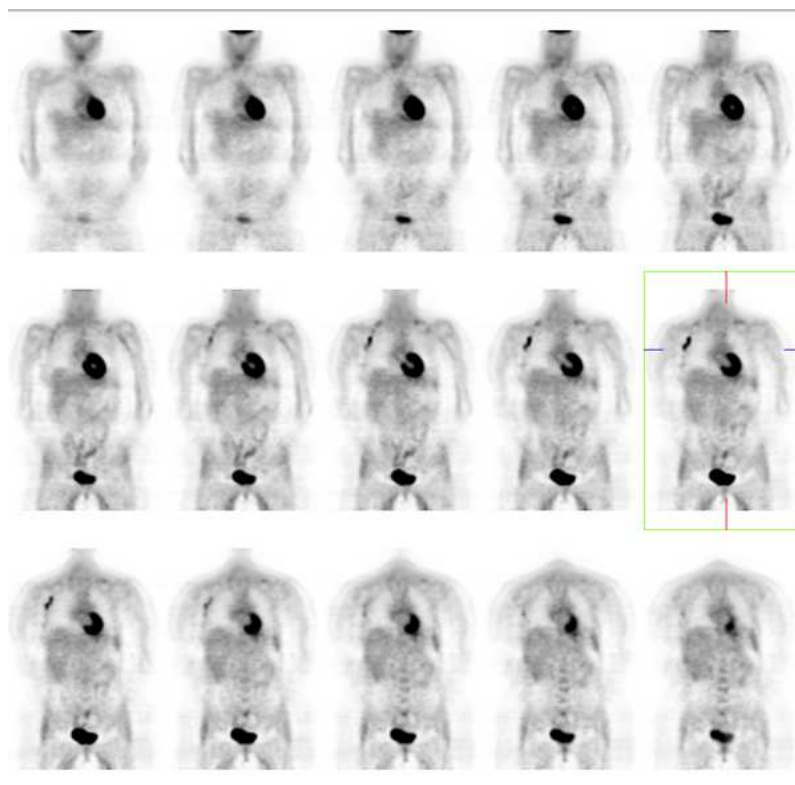


FIG. 1.21 – Examen TEP d'une femme de 31 ans avec un cancer du sein [Siemens AG].

devrait être compensé par une correction de l'atténuation. La correction de l'atténuation peut être soit calculée, soit mesurée. Pour calculer la correction de l'atténuation, le contour extérieur du corps doit être connu et les propriétés d'atténuation sont considérées comme constantes à l'intérieur de ce contour. La correction d'atténuation mesurée est obtenue à l'aide d'une acquisition supplémentaire. Une acquisition de référence (blanche) est faite sans le patient puis à nouveau avec le patient. Le ratio entre le nombre de coups avec et sans patient donne un facteur de correction pour chaque LOR [84].

Un autre problème vient des détecteurs eux-mêmes. Après une détection, il existe un temps mort pendant lequel le détecteur ne détecte pas d'autres événements. Il peut y avoir des événements manqués. Ces pertes sont minimisées dans des systèmes avec de nombreux détecteurs indépendants ou avec des scintillateurs rapides.

Un facteur important en médecine nucléaire est le bruit. Le bruit dans les images diminue avec un nombre de coups plus important. Pour acquérir plus de coups, le temps d'acquisition doit être plus long ou on doit injecter au patient plus de traceur radioactif ou encore augmenter la sensibilité du scanner à détecter les événements.

#### 1.4.1.4 Conclusion

La TEP est la technique d'imagerie clinique in vivo utilisée chez l'homme pour obtenir la cartographie tridimensionnelle au sein des organes d'un paramètre physiologique comme le métabolisme du glucose, le débit sanguin, ou la densité de récepteurs d'un système de transmission neuronale. L'application clinique la plus importante aujourd'hui se situe en oncologie [22]. Une nouvelle application d'imagerie in-vivo de l'expression des gènes est en train de voir le jour [72].

### 1.4.2 TEPS

La TEPS peut être utilisée pour étudier le débit sanguin dans les parois musculaires du cœur mais aussi pour obtenir des images du cerveau, des reins ou du squelette en cas de tumeur.

En TEPS, les images tomographiques sont reconstruites à partir de l'acquisition de multiples projections par une gamma-caméra en rotation autour du patient.

#### 1.4.2.1 Principes physiques

Les traceurs radioactifs utilisés en TEPS sont des émetteurs de photons gamma. Leur énergie est comprises entre 80 keV pour le thallium-201 et 360 keV pour l'iode-131. Le marqueur le plus utilisé est le technétium-99m. Il émet des photons gamma d'énergie 140 keV bien adaptés à la détection par les gamma-caméras [18].

#### 1.4.2.2 Appareil

Le détecteur utilisé en TEPS est une gamma-caméra composée d'une ou plusieurs têtes de détections fixées à un portique (figure 1.22). Les gamma-caméras sont caractérisées par leur résolution spatiale, leur sensibilité et leur résolution en énergie.

Les détecteurs plans TEPS sont composés d'un cristal scintillant d'iodure de sodium dopé au thallium d'environ 1 cm d'épaisseur. La dimension de ce cristal détermine la taille du champ de vue de la caméra, généralement  $60 \times 40$  cm. Des tubes photomultiplicateurs sont disposés derrière le cristal.

Comme pour la TEP, la détection par scintillation se fait en deux étapes. Tout d'abord une conversion des photons gamma en lumière visible et suivie par une conversion de la lumière visible en signal électrique.

Chaque élément du détecteur reçoit des photons d'un cône étroit défini par l'ouverture du collimateur. L'angle solide défini par le collimateur autour d'une direction donnée est très limité. Les collimateurs sont constitués d'un réseau de canaux d'environ 4 cm de long et de faible diamètre (1 à 2 mm), séparés par une fine paroi de plomb. Les collimateurs peuvent être parallèles, en éventail ou coniques (figure 1.23).

Pour extraire les photons provenant d'une interaction Compton, une fenêtre d'énergie centrée sur la valeur théorique d'énergie d'émission du photon est mise en place.



FIG. 1.22 – TEPS e.cam Fixed 180 de Siemens [Siemens AG].

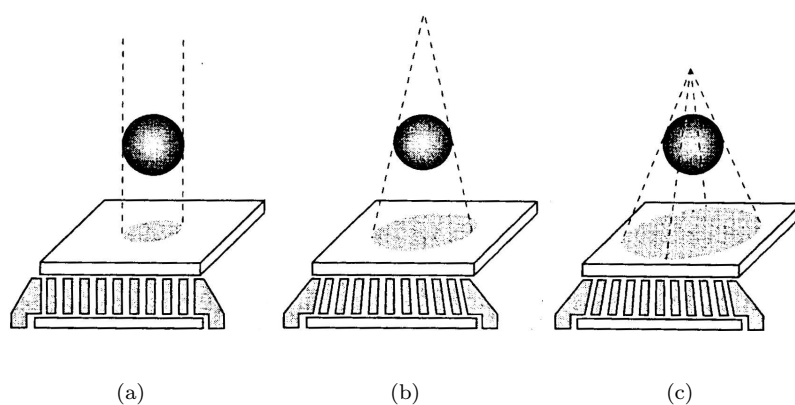


FIG. 1.23 – Collimateurs (a) parallèle (b) en éventail (c) conique [18].

### 1.4.2.3 Données et erreurs

En TEPS comme en TEP, le système de détection accumule des coups pour des lignes de l'espace. Les problèmes principaux en TEPS affectant les données sont le bruit de comptage, les phénomènes d'atténuation, de diffusion et de résolution spatiale variable du détecteur [34].

À part ces sources d'erreur, le total des coups par ligne indique le nombre total de désintégrations sur cette ligne mais pas la localisation de ces désintégrations sur la ligne. La reconstruction d'image permet à partir de ce comptage imparfait d'un grand nombre de données (millions de lignes et millions de photons détectés) de reconstruire une image montrant la répartition spatiale des atomes marqués.

### 1.4.2.4 Conclusion

La dose en TEPS est très faiblement ionisante pour le patient. Cette modalité nous permet d'avoir accès à une information fonctionnelle cruciale plus facilement qu'en TEP, mais la résolution des images n'est pas très bonne.

## 1.5 Nouvelles voies de la tomographie

Des nouvelles voies sont explorées pour obtenir des images du corps humain, soit en cherchant à mettre au point de nouvelles modalités d'imagerie, soit en combinant des modalités existantes.

### 1.5.1 Tomosynthèse (Radiologie tridimensionnelle)

La tomosynthèse est une nouvelle modalité de l'imagerie médicale, encore à l'état de prototype, qui s'appuie sur les mêmes principes physiques que l'imagerie par scanner. Mais contrairement au scanner il n'y a pas de rotation de la source et des capteurs autour du patient mais simplement une translation de l'un par rapport à l'autre. C'est une technique d'acquisition qui permet de reconstruire un volume 3D à partir d'une table de radiologie classique. Les premières acquisitions étaient faites sur film mais actuellement des capteurs numériques sont utilisés. Les images obtenues donnent une densité des tissus traversés par les rayons X.

#### 1.5.1.1 Appareil

Le système d'acquisition est constitué d'une source de rayons X et d'un détecteur plan. Contrairement au scanner, la coupe à reconstruire ne se trouve pas sur la trajectoire de l'ensemble source/détecteur. Une autre différence avec la modalité décrite précédemment est la forme des détecteurs. En effet, les détecteurs utilisés en radiographie tridimensionnelle sont plans et non pas linéaires (figure 1.24).

Les détecteurs sont des tubes intensificateurs d'imagerie radiologique [34]. La résolution de ces détecteurs est plus grande que celle des détecteurs de scanner. Le champ d'acquisition est plus large et la résolution spatiale est meilleure. Mais la vitesse de rotation du système d'acquisition est plus faible donc la précision en densité des volumes reconstruits n'est pas très bonne.



FIG. 1.24 – Vue d'ensemble du système d'acquisition table BACCARA + capteur PALADIO [12].

### 1.5.1.2 Acquisition et images

Selon le déplacement de la source, on peut distinguer la tomosynthèse linéaire (figure 1.25.a) ou la tomosynthèse circulaire (figure 1.25.b) [12].

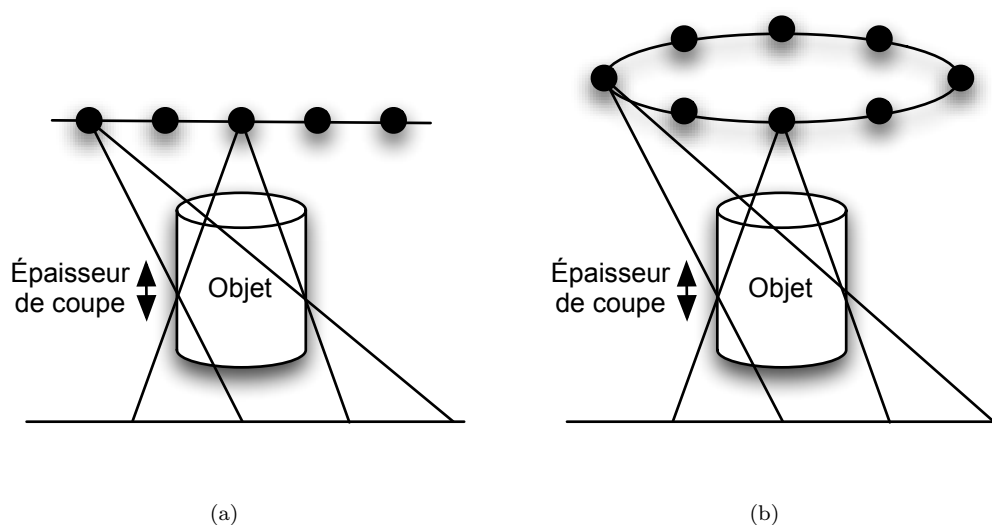


FIG. 1.25 – (a) Tomosynthèse linéaire, (b) Tomosynthèse circulaire.

Pour chaque acquisition, la source est décentrée par rapport au détecteur sur un secteur angulaire limité. En combinant les projections acquises avec différents angles de vue, le volume projeté peut être reconstruit en 3D. La région 3D de reconstruction correspond au volume défini par l'intersection des toutes les projections acquises. Plus l'angle de vue est grand, plus la zone de reconstruction sera petite.



La dose délivrée au patient ne doit pas être plus importante que celle délivrée pour une radiographie classique. Pour  $N$  projections, la dose sera  $\frac{1}{N}$  fois celle d'une radiographie classique.



FIG. 1.26 – Image reconstruite à partir d'un algorithme M-ART après acquisition par tomosynthèse [12, p129].

Différents artefacts existent sur les images, dus à la méthode d'acquisition. Les données peuvent être tronquées à cause d'une acquisition suivant l'axe principal de l'objet. Avec un grand angle de projection, certains rayons peuvent se projeter hors du détecteur et créent des artefacts lors de la reconstruction. Pour corriger ces artefacts, plusieurs solutions existent comme le prolongement des projections [12, p86]. Les corps métalliques, comme des prothèses dentaires ou orthopédiques, génèrent des artefacts très importants car peu de photons traversent le métal.

### 1.5.1.3 Conclusion

Cette modalité est utilisée pour des applications où les images ont un fort contraste comme en imagerie osseuse ou en angiographie et est peu adapté à la reconstruction de tissus mous. La tomosynthèse peut aussi être utilisée en chirurgie assistée par ordinateur.

## 1.5.2 Appareillages multimodalités

Il est parfois difficile de détecter exactement une anomalie avec une seule modalité. Par exemple la TEP donne une information sur la présence d'une tumeur mais sa localisation précise reste problématique. En combinant un TEP avec une modalité d'imagerie avec une bonne résolution anatomique comme un scanner, le problème de localisation est résolu, sous réserve d'avoir une bonne mise en correspondance des deux modalités. Cette étape est simplifiée si les deux modalités sont regroupées dans le même appareil avec la possibilité d'acquérir les deux types d'images pendant la

même session. Le premier prototype de scanner/TEP date de 6 ans [83].

Le "PET-scan" est un autre exemple d'appareil multimodalité. C'est une gamma-caméra couplée avec une source gamma externe pour que le détecteur soit utilisé à la fois en émission et en transmission. Il est utilisé lors des protocoles cliniques en oncologie.

## 1.6 Conclusion

Nous venons de parcourir les caractéristiques de quelques modalités d'imagerie médicale. Quelle que soit la modalité considérée, l'acquisition des données s'effectue toujours à l'aide de capteurs discrets. Ces données correspondent à des intégrales le long de lignes de réponse. Il existe des angles où ces données sont manquantes et elles sont entachées de bruit de diverses sources. Le contraste, la résolution et le bruit sur les images dépendent de la modalité utilisée.

Elles sont toutes caractérisées par leur géométrie d'acquisition que nous allons étudier plus en détail dans le chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Géométrie d'acquisition

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction</b>                       | <b>39</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Géométrie d'acquisition 2D</b>         | <b>40</b> |
| 2.2.1      | Géométrie parallèle                       | 40        |
| 2.2.2      | Géométrie en éventail ( <i>Fan Beam</i> ) | 40        |
| <b>2.3</b> | <b>Géométrie d'acquisition 3D</b>         | <b>46</b> |
| 2.3.1      | Géométrie parallèle                       | 46        |
| 2.3.2      | Géométrie <i>Cone Beam</i>                | 46        |
| 2.3.3      | Géométrie hélicoïdale                     | 48        |
| <b>2.4</b> | <b>Conclusion</b>                         | <b>49</b> |

---

## 2.1 Introduction

Les systèmes d'acquisition décrits précédemment sont caractérisés par leur géométrie d'acquisition des données. Ces géométries peuvent être diverses mais l'obtention des données se fonde toujours sur la transformée de Radon.

En 1917, Johann Radon définit la transformée qui porte son nom [69]. La transformée directe de Radon décrit la projection d'un objet selon des lignes intégrales. La transformée inverse décrit la reconstruction de cet objet à partir d'une infinité de projections.

Cette transformation est fondamentale en tomographie et peut être décrite dans plusieurs géométries d'acquisition.

Nous allons tout d'abord présenter la transformation de Radon en deux dimensions avec des géométries d'acquisition parallèles puis en éventail. Nous verrons ensuite une version 3D de la transformée de Radon. Les géométries d'acquisition en trois dimensions sont plus diverses. Nous verrons la géométrie parallèle et la géométrie conique qui étendent celles qui existent en 2D au cas 3D puis la géométrie hélicoïdale.

## 2.2 Géométrie d'acquisition 2D

La transformation de Radon en deux dimensions projette un objet  $f(x, y)$  sur des projections  $proj(\theta, t)$ . Les valeurs des projections dépendent de l'intégrale des valeurs de l'objet selon la ligne intégrale de direction  $\theta$ .

Nous nous intéressons tout d'abord au cas où les rayons sont parallèles entre eux puis nous étudierons le cas de rayons divergents.

### 2.2.1 Géométrie parallèle

On utilise le système de coordonnées défini par la figure 2.2.1 pour décrire les lignes intégrales et les projections. La projection de Radon se fait selon la direction :

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta. \quad (2.1)$$

La ligne intégrale se définit alors selon l'équation de la transformée de Radon :

$$\text{proj}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy, \quad (2.2)$$

où  $0 \leq \theta \leq \pi$  est l'angle de la projection avec l'axe  $\vec{x}$  et  $-\infty \leq t \leq +\infty$  est la coordonnée curviligne sur la projection prise par rapport à la projection de l'origine du repère.  $proj(t, \theta)$  est la transformée de Radon de la fonction  $f(x, y)$ . L'équation 2.2 peut se réécrire sous forme d'opérateur :

$$\text{proj}(t, \theta) = \mathbf{R}_2(f(x, y)), \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{R}_2$  est la transformée de Radon 2D.

Une projection parallèle est formée d'un ensemble de lignes intégrales.

L'équation 2.2 peut s'écrire plus généralement :

$$\text{proj}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) \delta(\vec{r}\vec{n} - t) d^2\vec{r}, \quad (2.4)$$

où  $\vec{r}\vec{n} = t$  est la ligne intégrale avec  $\vec{n}$  un vecteur unitaire faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $\vec{x}$  et  $\vec{r}$  est un vecteur 2D en coordonnées cartésiennes.

La transformation de Radon est une transformation linéaire et invariante par translation. Les méthodes de reconstruction des objets à partir de leurs projections en géométrie parallèle seront développées dans le chapitre 3. Cette géométrie permet un calcul simple des objets à reconstruire à l'aide de la transformation de Radon.

### 2.2.2 Géométrie en éventail (*Fan Beam*)

Une autre géométrie de projection est la géométrie en éventail ou *fan beam*. Une source unique est placée dans une position fixe par rapport à un détecteur ligne. Cette géométrie permet une acquisition plus rapide des données [47](p75). En effet, pour générer directement des projections parallèles pour

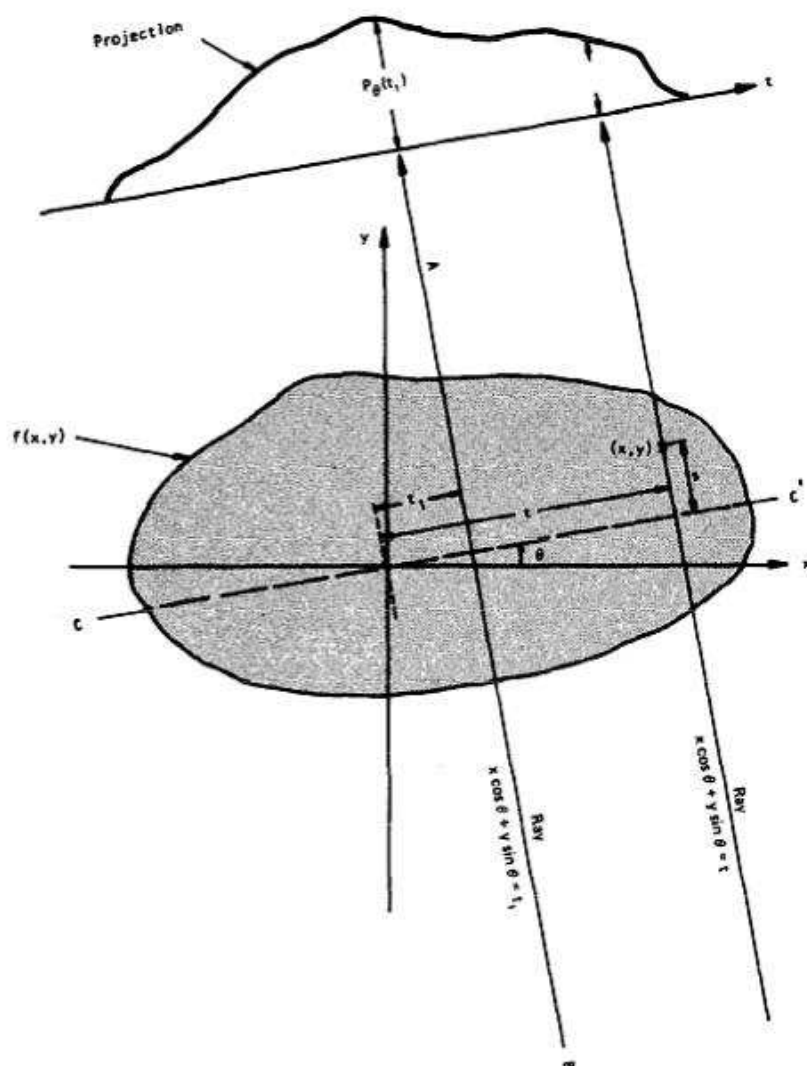


FIG. 2.1 – Projection de Radon de l'image  $f(x, y)$  selon la direction  $t = x \cos \theta + y \sin \theta$  [47, p50].

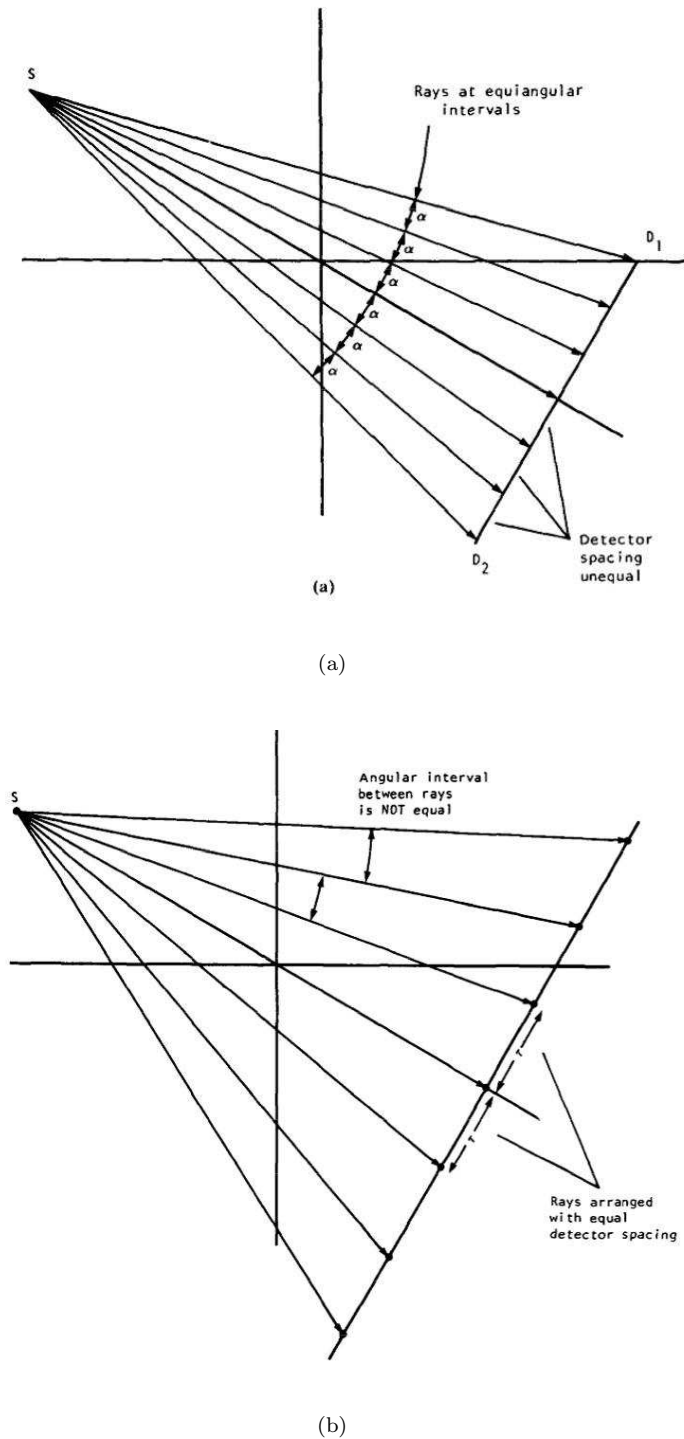


FIG. 2.2 – Exemples de projections en éventail : (a) l'angle entre les lignes intégrales est constant mais les détecteurs ne sont pas équirépartis, (b) les détecteurs sont équirépartis mais l'angle entre chaque projection n'est plus constant [47, p78-79].

les scanners de 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> génération (section 1.3.1.2), l'ensemble source-détecteur devait parcourir la totalité de la longueur de la projection puis être tourné d'un angle fixé et recommencer l'acquisition pour chaque projection. Cette méthode d'acquisition est longue, l'acquisition en éventail permet de faire l'économie du déplacement linéaire de l'ensemble source-détecteur pour ne garder que le déplacement angulaire (3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> générations de scanner).

Il existe deux types de projections en éventail : les projections sont soit échantillonnées selon des angles réguliers et le pas sur la droite de projection est variable (figure 2.2.a), soit elles sont échantillonnées avec un pas constant sur la droite de projection (figure 2.2.b).

Pour des projections échantillonnées selon des angles réguliers, la reconstruction de l'objet  $f(x, y)$  s'écrit en coordonnées polaires [47, p80] :

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta, \quad (2.5)$$

avec  $R_\beta(\gamma)$  une projection en éventail comme décrit par la (figure 2.3) où  $\beta$  est l'angle que la source  $S$  fait avec l'axe de référence  $\vec{y}$ ,  $\gamma$  l'angle entre un rayon quelconque et le rayon passant par l'origine,  $\beta$  est l'angle que fait la source avec un des axes de référence,  $\theta$  l'angle de la projection parallèle correspondante pour la ligne intégrale considérée,  $D$  la distance de la source à l'origine. La fonction  $h$  est la transformée de Fourier inverse du filtre rampe qui sera défini dans le chapitre 3.

Pour des projections échantillonnées selon un pas régulier, la reconstruction de l'objet  $f(x, y)$  s'écrit en coordonnées polaires [47, p88] :

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-S_m}^{S_m} R_\beta(s) h(r \cos(\beta + \tan^{-1} \frac{s}{D} - \phi) - \frac{Ds}{\sqrt{D^2 + s^2}}) \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta, \quad (2.6)$$

ou  $R_\beta(s)$  est une projection comme défini par la (figure 2.4),  $s$  est la coordonnée curviligne sur la projection avec comme origine le bin correspondant à la ligne intégrale passant par l'origine,  $S_m$  est la coordonnée maximale sur la projection.

Pour une géométrie en éventail la reconstruction peut être effectuée de manière directe par l'équation 2.5 ou les données peuvent être réarrangées en géométrie parallèle.

Pour rééchantillonner les projections en éventail en géométrie parallèle, chaque rayon de la projection en éventail est considéré comme un rayon d'une projection parallèle. La projection parallèle correspondante n'est pas échantillonnée uniformément et les données doivent être rééchantillonnées pour pouvoir ensuite utiliser des algorithmes classiques de reconstruction en géométrie parallèle.

Selon la figure 2.3, la coordonnée curviligne  $t$  sur la projection parallèle est donnée par :

$$t = D \sin \gamma, \quad (2.7)$$

et  $\theta$  l'angle de la projection parallèle équivalente est donné par :

$$\theta = \beta + \gamma. \quad (2.8)$$

Donc on peut écrire :

$$R_\beta(\gamma) = P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma) \quad (2.9)$$



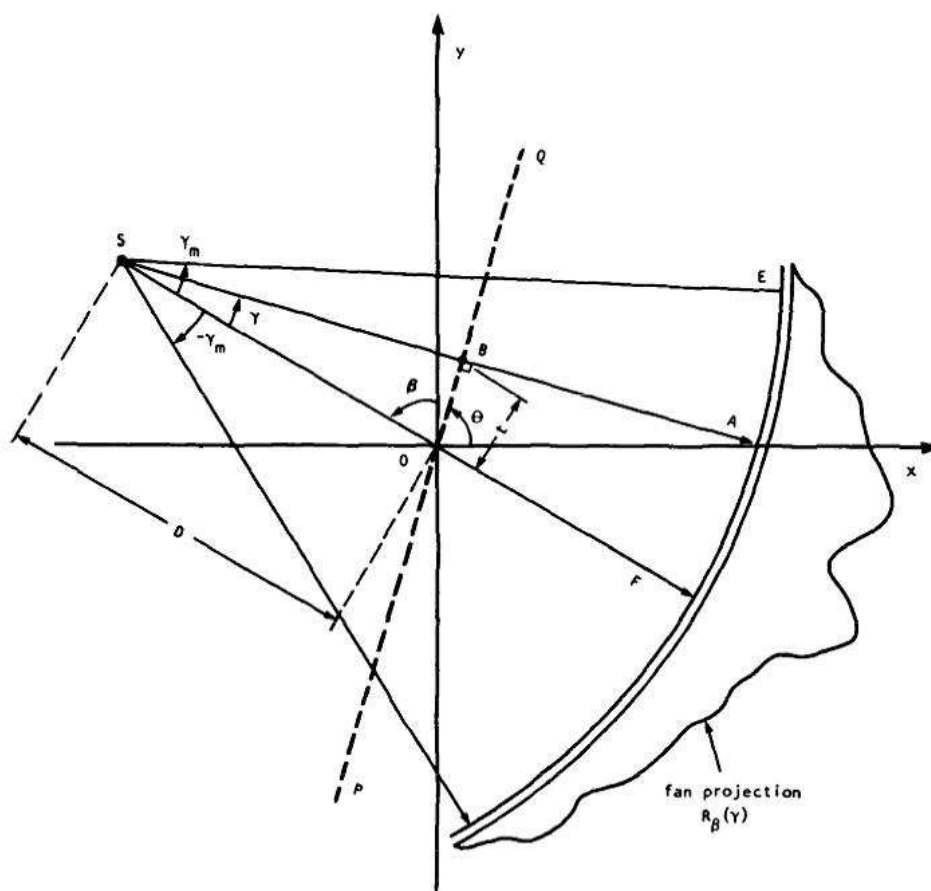


FIG. 2.3 – Géométrie en éventail pour des angles équi-répartis [47, p80].

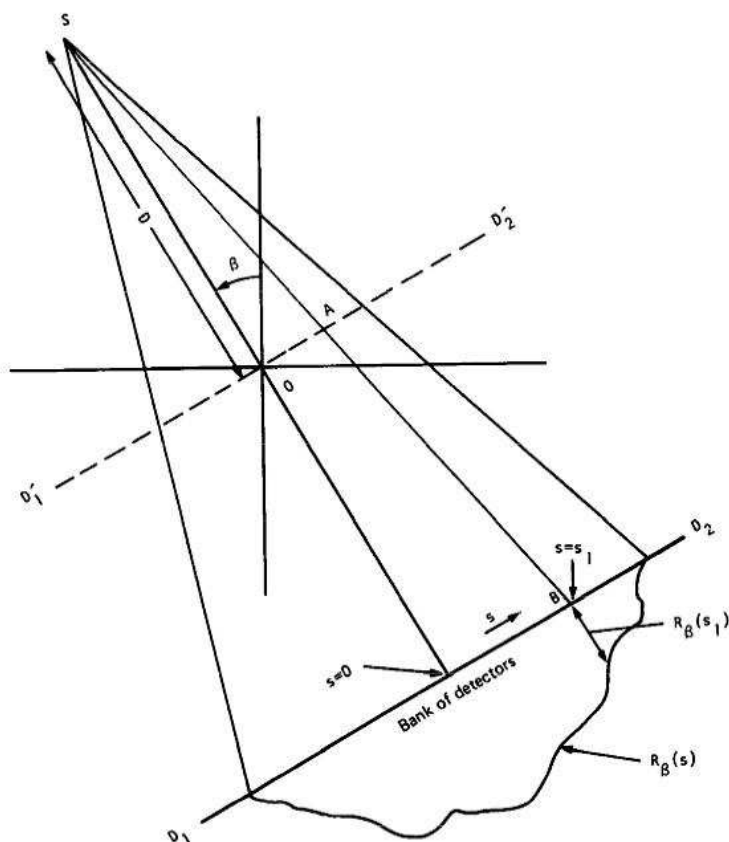


FIG. 2.4 – Géométrie en éventail pour des détecteurs équi-répartis [47, p86].

où  $R_\beta(\gamma)$  est une projection *fan beam* prise à l'angle  $\beta$  et  $P_\theta(t)$  une projection parallèle prise à l'angle  $\theta$ . Pour reconstruire des images à partir de données acquises en géométrie *fan beam*, les données sont rééchantillonnées puis la reconstruction est effectuée en géométrie parallèle. Si l'on considère que les incréments successifs de  $\beta$  et de  $\gamma$  sont égaux à  $\alpha$  (cas échantillonnage angulaire uniforme), on peut écrire :

$$\beta = m\alpha \text{ et } \gamma = n\alpha, \quad (2.10)$$

pour  $m$  et  $n$  des indices entiers.

L'équation 2.9 s'écrit alors [47, p93] :

$$R_{m\alpha}(n\alpha) = P_{(m+n)\alpha}(D \sin n\alpha). \quad (2.11)$$

L'équation 2.11 signifie que le  $n^{\text{ième}}$  rayon de la projection *fan beam* numéro  $m$  est le rayon  $(m+n)^{\text{ième}}$  de la projection parallèle. L'échantillonnage  $\sin n\alpha$  sur la projection parallèle n'est pas uniforme.

Les données sur les projections parallèles vont être interpolées pour donner des projections uniformes. Selon [42], on va estimer  $P_{v\Gamma}(uh)$  à partir de  $P_{\theta_{n,m}}(l_n)$  avec  $0 \leq v \leq V - 1$  et  $V\Gamma = \pi$ ,  $-U \leq u \leq U$  et  $h$  la distance entre deux détecteurs. Considérons une projection composée de  $2U + 1$  bins,  $\theta_{n,m} = (m + n)\alpha$  et  $l_n = \sin n\alpha$ . Ce réarrangement de données s'effectue en deux étapes :

- Pour chaque  $n$ ,  $-N \leq n \leq N$ , considérons  $n$  fixé et estimons  $P_{v\Gamma}(l_n)$  à partir de  $P_{\theta_{n,m}}(l_n)$ . Cette étape peut être faite par exemple par interpolation linéaire et donne des rayons parallèles irrégulièrement espacés.
- Ensuite pour chaque  $v$ ,  $0 \leq v \leq V - 1$ , considérons  $v$  fixé et estimons  $P_{v\Gamma}(uh)$  à partir des valeurs de  $P_{v\Gamma}(l_n)$ . Cette étape peut être faite par interpolation linéaire sur  $l_n$  et donne des rayons parallèles régulièrement espacés.

## 2.3 Géométrie d'acquisition 3D

Une manière d'obtenir des données 3D est de concaténer des coupes 2D. Mais les données peuvent être acquises directement en 3D.

Nous avons vu (section 1) que les systèmes d'acquisition actuels faisaient l'acquisition des données directement en 3D (PET 3D, Tomosynthèse, SPECT).

La géométrie d'acquisition 3D permet une acquisition plus rapide des données, mais la reconstruction est plus complexe car l'objet ne peut plus forcément être séparé en coupes 2D. D'autre part, les photons diffusés augmentent le bruit de fond.

### 2.3.1 Géométrie parallèle

La transformation de Radon peut se généraliser en dimension  $n$ . À partir de l'Équation (2.4), on peut écrire :

$$[\mathbf{R}_n \mathbf{f}](t, \vec{n}) = \int_{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(\vec{r}\vec{n} - t) d^n \vec{r}, \quad (2.12)$$

où  $t = \vec{r}\vec{n}$  est l'équation générale d'un hyperplan de dimension  $(n - 1)$  dans un espace de dimension  $n$ . En 3D la transformée de Radon peut s'interpréter comme l'intégrale d'une fonction 3D sur des plans 2D [7, p210].

### 2.3.2 Géométrie *Cone Beam*

Une autre géométrie d'acquisition 3D est une généralisation de l'approche *fan beam*. Au lieu d'acquérir uniquement une coupe de l'objet à reconstruire, tout l'objet est acquis à partir d'une source ponctuelle de rayons X sur un détecteur plan [21, p76]. Cette géométrie est appelée *cone beam*.

Les données projetées  $R_\beta(t, r)$  sont maintenant fonction de l'angle de la source  $\beta$  et des positions horizontales  $t$  et verticales  $r$  sur le détecteur plan [25].

Une ligne intégrale dans une projection 3D est décrite par l'intersection de deux plans :

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.13)$$

et

$$r = -(-x \sin \theta + y \cos \theta) \sin \gamma + z \cos \gamma. \quad (2.14)$$

Un nouveau système de coordonnées  $(t, s, r)$  est donné par deux rotations de la base  $(x, y, z)$ . La première est faite autour de l'axe  $z$  de l'angle  $\theta$  et donne la base  $(t, s, z)$ , la seconde d'angle  $\gamma$  est faite autour de l'axe  $t$  (figure 2.5).

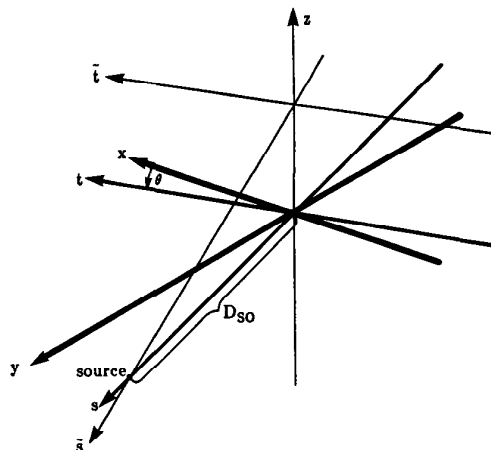


FIG. 2.5 – Pour simplifier la reconstruction en géométrie conique, le système de coordonnées est tourné selon l'angle de la source pour donner les axes  $s$  et  $t$  [47].

Quatre variables sont utilisées pour préciser la position d'une ligne intégrale,  $(t, \theta)$  spécifie la distance et l'angle dans le plan  $x - y$  et  $(r, \gamma)$  dans le plan  $s - z$  [47].

Dans un système à géométrie conique, la source est tournée d'un angle  $\beta$  (figure 2.6). Les lignes intégrales sont mesurées sur le détecteur plan. Les projections vont être décrite par  $R_\beta(p', \zeta')$ .

Pour trouver la projection parallèle, nous définissons d'abord :

$$p = \frac{p' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \text{ et } \zeta = \frac{\zeta' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \quad (2.15)$$

où  $D_{SO}$  indique la distance du centre de rotation à la source et  $D_{DE}$  indique la distance du centre de rotation au détecteur. Pour un rayon dans la géométrie conique  $R_\beta(p, \zeta)$ , le rayon en géométrie parallèle est donné par :

$$t = p \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + p^2}} \quad (2.16)$$

et

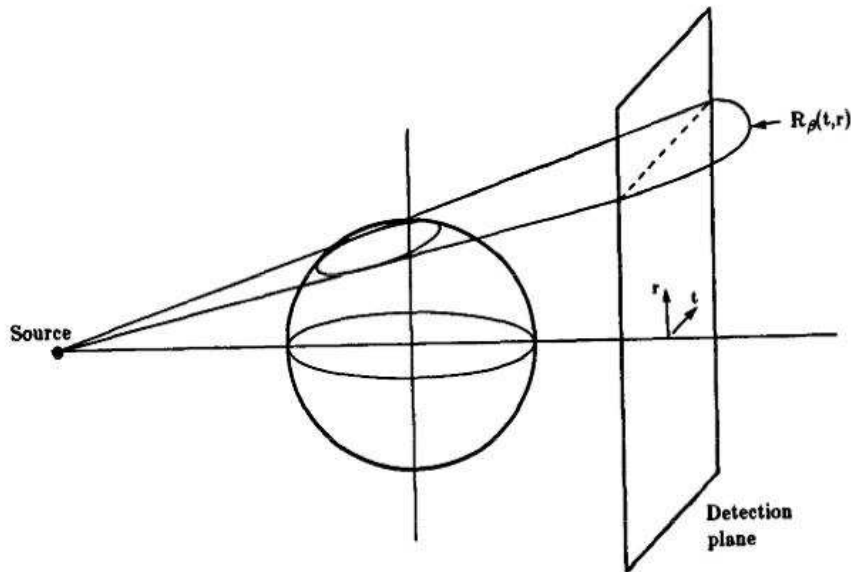
$$\theta = \beta + \tan^{-1}(p/D_{SO}). \quad (2.17)$$

où  $t$  et  $\theta$  localise une ligne intégrale dans un plan incliné. De même :

$$r = \gamma \frac{D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2 + \gamma^2}} \quad (2.18)$$

et

$$\gamma = \tan^{-1}(\gamma/D_{SO}) \quad (2.19)$$

FIG. 2.6 – Géométrie *cone beam* [47].

où  $r$  et  $\gamma$  précisent la position de ce plan incliné [47].

Les données en géométrie conique peuvent être reconstruites directement si la condition de Tuy sur la trajectoire de la source est respectée : "Tout plan coupant l'objet à reconstruire doit couper en au moins un point la trajectoire de la source" [12]. Pour reconstruire des images à partir de ces données, l'algorithme de Feldkamp est souvent utilisé. Le principe fondamental de l'algorithme de Feldkamp [24] est d'étendre à la géométrie conique l'algorithme fondamental de filtrage-rétroprojection utilisée pour la géométrie en éventail [53]. Les projections 2D de différents angles sont filtrées et rétroprojetées sur les voxels selon la direction de projection. La valeur finale de chaque voxel est la somme de toutes les contributions des projections *fan beam* inclinées passant à travers le voxel.

Les algorithmes existants de reconstruction en géométrie conique peuvent être divisés en deux classes : analytiques et algébriques. Les méthodes algébriques nécessitent plus de ressources que les méthodes analytiques. La rapidité de calcul est importante donc les algorithmes analytiques sont préférés en pratique [87]. Actuellement, la puissance de calcul augmentant, les algorithmes algébriques sont plus utilisés.

### 2.3.3 Géométrie hélicoïdale

La géométrie hélicoïdale a été introduite pour les scanners en 1989 comme méthode d'acquisition continue [29]. Pendant l'acquisition, le point focal décrit une hélice par rapport au patient.

Dans un scanner hélicoïdal, la distance entre la source et le détecteur est généralement d'un mètre. L'épaisseur des coupes est de 1 mm. Les coupes peuvent être considérées comme parallèles

entre elles pour des détecteurs qui font l'acquisition jusqu'à quatre coupes simultanément. Là les outils 2D peuvent être utilisés [29].

Les scanners hélicoïdaux actuels peuvent acquérir jusqu'à 16 coupes simultanément. L'approximation de coupes parallèles ne peut plus être faite.

Pour reconstruire une coupe en 2D il est nécessaire de connaître la distribution intégrale de l'objet selon toutes les lignes intégrales qui passent par le point à reconstruire. En 3D ce sont tous les plans 2D qui doivent être connus. La mesure de toutes les données de façon analogue au cas 2D n'est pas possible. Pour faire face à ce problème, des études récentes utilisent des combinaisons de données pour synthétiser les projections tronquées et calculer les projections de Radon complètes. Une méthode exacte de reconstruction a été proposée [48].

Les projections nécessaires à la reconstruction peuvent aussi être obtenues par interpolation linéaire sur 360 degrés [34]. Les projections sur 360 degrés sont générées à partir de projections mesurées sur 720 degrés. Une estimée de la projection choisie à l'angle  $\theta$  est obtenue à partir d'une combinaison linéaire entre les deux projections les plus proches de même angle. Utiliser des données acquises sur un temps plus long pour reconstruire une coupe réduit le bruit dans l'image mais réduit aussi la résolution longitudinale [34].

## 2.4 Conclusion

Les objets acquis peuvent être reconstruits soit en 2D, soit en 3D par concaténation de coupes 2D.

Les acquisitions 3D vont donner des projections 2D qui vont être reconstruites à l'aide d'algorithmes intégrant la géométrie 3D. Mais que la géométrie d'acquisition soit hélicoïdale, conique ou en 2D *fan beam*, elles sont ramenées à des géométries parallèles. Ces reconstructions se ramènent à une reconstruction à l'aide de la transformée de Radon en rayons parallèles.

Nous allons maintenant décrire quelques-uns des algorithmes utilisés pour reconstruire un objet à partir de ses projections.



# Chapitre 3

## Mathématiques en Tomographie

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>La reconstruction tomographique : un problème mal posé . . . . .</b>       | <b>52</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Méthodes fondées sur une représentation continue de l'espace . . . . .</b> | <b>53</b> |
| 3.2.1      | Le théorème de la tranche centrale . . . . .                                  | 54        |
| 3.2.1.1    | Dimension 2 . . . . .   | 54        |
| 3.2.1.2    | Dimension 3 . . . . .   | 55        |
| 3.2.2      | Transformation de Fourier . . . . .   | 56        |
| 3.2.3      | Transformation de Hankel . . . . .  | 57        |
| 3.2.4      | Rétroprojection Filtrée (FBP : <i>Filtered Backprojection</i> ) . . . . .     | 59        |
| 3.2.4.1    | Formulation . . . . .   | 59        |
| 3.2.4.2    | Algorithme . . . . .  | 60        |
| 3.2.4.3    | Le filtre rampe . . . . .   | 61        |
| <b>3.3</b> | <b>Méthodes fondées sur une représentation discrète de l'espace . . . . .</b> | <b>61</b> |
| 3.3.1      | ART - MART . . . . .  | 64        |
| 3.3.1.1    | ART . . . . .   | 64        |
| 3.3.1.2    | MART . . . . .  | 64        |
| 3.3.2      | Information a priori . . . . .  | 65        |
| 3.3.2.1    | EM - OSEM . . . . .   | 65        |
| 3.3.2.1.1  | EM - <i>Expectation Maximisation</i> . . . . .                                | 65        |
| 3.3.2.1.2  | OSEM - <i>Ordered Subset Expectation Maximisation</i> . . . . .               | 65        |
| 3.3.2.2    | MAP/Bayésien . . . . .  | 66        |
| 3.3.2.3    | Gradient Conjugué . . . . .   | 66        |
| 3.3.3      | Autres méthodes discrètes . . . . .   | 67        |
| 3.3.3.1    | $R(t, m)$ . . . . .   | 67        |
| 3.3.3.2    | $R(k, \theta)$ . . . . .  | 67        |
| 3.3.3.3    | Reconstruction d'image . . . . .  | 68        |



La reconstruction tomographique fait partie des problèmes inverses. La reconstruction d'image fait partie des problèmes inverses mal posés au sens d'Hadamard.

Nous voulons reconstruire des sections ou des volumes du corps humain. Cette reconstruction revient à décrire la distribution d'isotope radioactif dans le corps humain pour de la tomographie en émission. Pour de la tomographie en émission cela revient à obtenir la distribution de la densité du plan de coupe (section 1.3.1). Les isotopes radioactifs sont caractérisés par l'émission de photons gammas produits lors de leur désintégration. La concentration d'un isotope évolue avec le temps à cause de la désintégration et des phénomènes bio-chimiques du corps. L'acquisition des données doit être rapide comparée avec le temps de désintégration des marqueurs radioactifs. Pour de la tomographie en transmission, la dose de rayons X délivrée au patient doit être la plus faible possible.

La tomographie par rayons X permet aussi de faire de l'imagerie fonctionnelle. En effet, en utilisant des images acquises à des temps différents, pour la même section du corps humain, on peut déterminer l'état fonctionnel de différents organes.

Dans une situation idéale, les valeurs des données sur les projections sont des intégrales des données traversées. Les lignes intégrales sont les lignes droites qui traversent l'objet et qui interceptent un détecteur. Un des outils les plus importants pour la reconstruction tomographique est le théorème de la tranche centrale qui fait le lien entre les projections mesurées et la transformée de Fourier 2D de la section à reconstruire.

Lors de l'acquisition, les images numérisées sont de taille  $N \times N$ . La taille  $N$  est un compromis entre la résolution choisie et la statistique de comptage (bruit de Poisson). Sur 360 degrés on choisit un nombre de projections  $N$  identique à la taille de la matrice pour que la résolution angulaire soit égale à la résolution spatiale.

Nous allons voir tout d'abord pourquoi la reconstruction tomographique est un problème mal posé puis nous étudierons des méthodes de reconstruction fondées sur des données continues puis sur des données discrètes.

### 3.1 La reconstruction tomographique : un problème mal posé

Pour résoudre un problème de reconstruction tomographique, on cherche à reconstruire un objet  $f$  à partir des données acquises. En se fondant sur la physique, on suppose  $f$  à support borné et infiniment différentiable;  $f$  et les projections  $p_\theta$  sont considérés comme continus.

Si les ixels, éléments de base de discrétisation de l'objet [37], à reconstruire sont les inconnues du problème et les projections sont les mesures, l'ensemble des mesures réalisées constitue le problème direct reliant les inconnues aux données. Ici les pixels de l'image sont les ixels. Obtenir une image revient à résoudre un système d'équation, c'est-à-dire mettre en œuvre le problème inverse. Les mesures fournissent des équations intégrales sur les inconnues. Les opérations de reconstruction mettent souvent en œuvre des opérations de différenciation instables numériquement [35, p40].

La reconstruction tomographique est un problème inverse mal posé au sens de Hadamard. C'est-à-dire qu'il possède l'une de ces propriétés :

- il ne possède pas de solution,
- sa solution n'est pas unique,
- sa solution ne dépend pas continûment des données.

Un problème est dit bien posé si pour tout ensemble de données il existe une solution unique qui dépend continûment des données [36, p15]. Dans ce cas une erreur faible de mesure sur les données doit produire une erreur faible sur la solution reconstruite. Au contraire, dans le cas où la solution ne dépend pas continûment des données, un bruit sur les projections rend instable le calcul de la solution. En cas de non continuité des données, il ne sera pas possible d'approcher de manière satisfaisante la solution du problème inverse.

Le système d'acquisition peut être complet ou incomplet selon que les mesures couvrent tout le domaine support de la transformée modélisant le système [35, p41].

Les problèmes de reconstruction tomographique n'ont souvent que des solutions approchées à cause du bruit. La non unicité de la résolution impose de choisir entre les solutions possibles et pour cela, de disposer d'une information a priori.

La résolution de ces problèmes inverses nécessite une régularisation. La reconstruction tomographique est régularisée en imposant des contraintes sur la solution. Les techniques de régularisation imposent de choisir un compromis entre adéquation aux données et contraintes sur la solution. Cela implique une relation d'incertitude entre la localisation et la quantification sur les images. Les principales techniques de régularisation sont [35, p41] :

- réduire le nombre d'inconnues (par exemple en utilisant un ixel plus grossier pour la reconstruction),
- introduire des contraintes de régularité sur l'image reconstruite,
- éliminer de l'opérateur inverse les faibles valeurs du spectre ou de la décomposition en valeur singulière de l'opérateur direct.

Il existe plusieurs méthodes de reconstruction tomographique. On distingue d'une part les méthodes déterministes des méthodes probabilistes, et parmi les méthodes déterministes, les approches analytiques (ou directes) des approches itératives (ou discrètes). Nous allons décrire le principe et quelques exemples des méthodes de reconstruction continues et discrètes.

## 3.2 Méthodes fondées sur une représentation continue de l'espace

Le problème direct est décrit par un opérateur sur un ensemble de fonctions. Les projections sont liées aux données par une convolution, par une transformée de Fourier ou par une transformée de Radon. Des formules explicites permettent de calculer l'objet directement. Le problème est régularisé par lissage (des projections ou de l'image), sans connaissance a priori de la solution [33].

Bracewell en 1956 a démontré un théorème reliant la transformée de Radon à celle de Fourier et

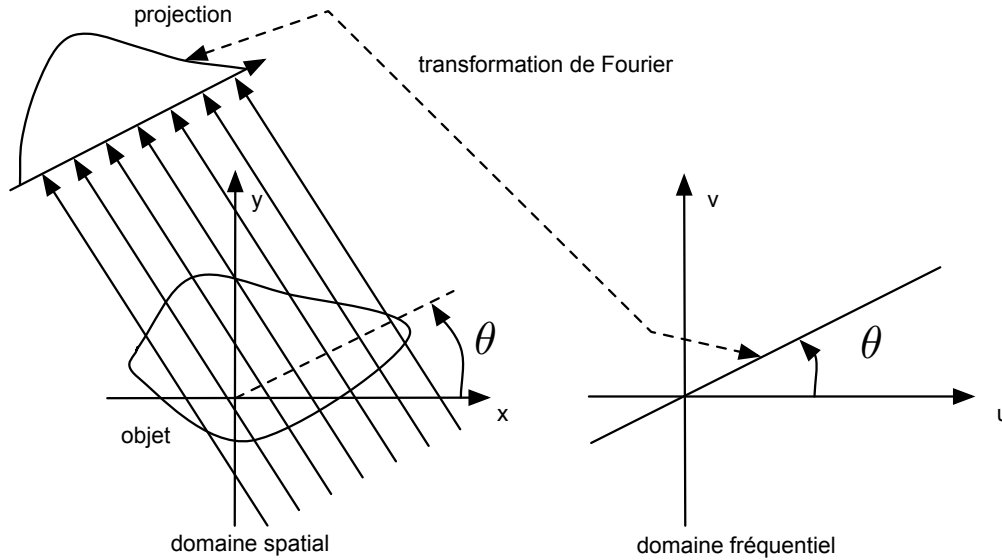


FIG. 3.1 – Représentation du théorème de la tranche centrale.

de Hankel ; ceci est présenté maintenant.

### 3.2.1 Le théorème de la tranche centrale

#### 3.2.1.1 Dimension 2

Pour obtenir le théorème de la tranche centrale, il faut remarquer que la transformée de Fourier à une dimension d'une projection parallèle est égale à une tranche de la transformée de Fourier à deux dimensions de l'objet de départ (figure 3.1).

Cela signifie qu'avec un ensemble de projections parallèles, on peut estimer l'objet de départ par transformation de Fourier inverse 2D.

Soit  $p(t, \theta)$  les projections de la fonction  $f$  définie pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in [0, \pi[$  par :

$$\text{proj}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy. \quad (3.1)$$

que l'on note avec les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (3.2)$$

dans le plan de la fonction :

$$\begin{aligned} p(t, \theta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r, \varphi) \delta(r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta - t) |r| d\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r, \varphi) \delta(r \cos(\varphi - \theta) - t) |r| d\varphi dr. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si l'on prend la transformée de Fourier 1D de l'équation 3.3 sur la variable  $t$  :

$$\begin{aligned}
 P(\nu, \theta) &= \mathcal{F}(p(t, \theta)) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t, \theta) e^{-2i\pi t\nu} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r, \varphi) \delta(t + r \sin(\varphi - \theta)) |r| e^{-2i\pi t\nu} d\varphi dr \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r, \varphi) |r| e^{2i\pi\nu r \sin(\varphi - \theta)} d\varphi dr.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

On obtient le théorème de la tranche centrale en écrivant la transformée de Fourier 2D de la fonction de départ dans un repère cartésien :

$$\begin{aligned}
 F(U, V) &= \mathcal{F}(f(x, y)) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(xU+yV)} dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si l'on effectue le passage en coordonnées polaires à la fois dans le domaine spatial et dans le domaine de Fourier avec :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U = \nu \cos \psi \\ V = \nu \sin \psi \end{cases}, \tag{3.6}$$

on obtient dans l'équation 3.5 :

$$\begin{aligned}
 F(U, V) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r, \varphi) e^{-2i\pi r\nu(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi)} |r| dr d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r, \varphi) e^{-2i\pi r\nu \cos(\varphi - \psi)} |r| dr d\varphi.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

On obtient alors :

$$\mathcal{F}({}_{1D}p(t, \theta)) = \mathcal{F}({}_{2D}f(r, \psi))_{\psi=\theta}. \tag{3.8}$$

La reconstruction d'image à partir du théorème de la tranche centrale n'est théoriquement possible que pour une infinité de projections. Pour des données réelles, nous n'avons qu'un nombre fini de projections. Dans ce cas, la fonction  $F(U, V)$  est connue uniquement le long de la ligne radiale. Le nombre d'échantillons est le même quelle que soit la direction de projection. Dans le domaine de Fourier, l'échantillonnage est aussi constant quelle que soit la direction de projection.

Pour pouvoir néanmoins reconstruire la fonction de départ, ces points doivent être interpolés d'un repère polaire dans un repère cartésien (figure 3.2). Généralement, cette interpolation s'effectue en prenant le plus proche voisin ou en faisant une interpolation linéaire entre les points connus. La densité des points dans le repère polaire du domaine des fréquences devient plus faible à mesure que l'on s'éloigne des basses fréquences. Donc l'erreur d'interpolation est plus grande dans les hautes fréquences que dans les basses fréquences, ce qui dégrade les détails de l'image.

### 3.2.1.2 Dimension 3

La transformée de Radon s'écrit en dimension 3 :

$$[Rf](t, \vec{n}) = \sum_{\infty} f(r) \delta(r\vec{n} - t) d^3r \tag{3.9}$$

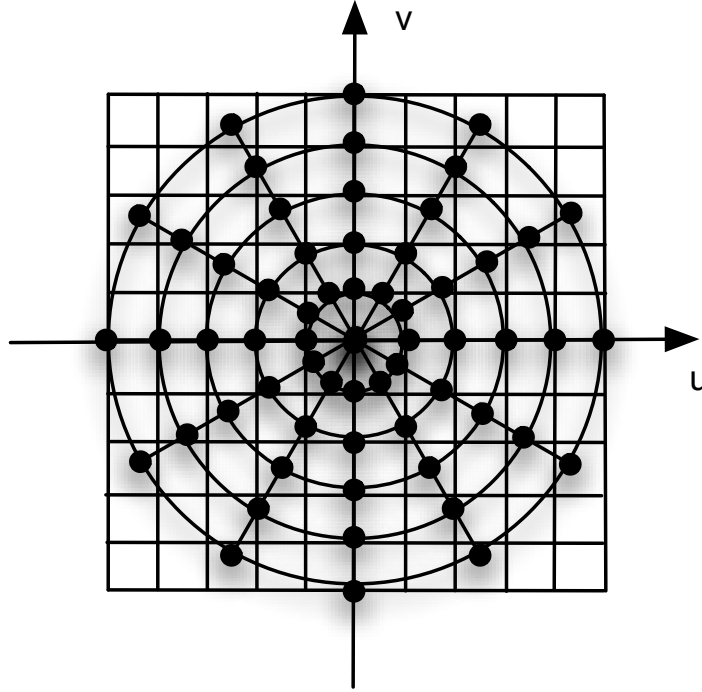


FIG. 3.2 – Passage d'une grille polaire à une grille cartésienne.

où  $t = r\vec{n}$  est un hyperplan de dimension 2.

En suivant la géométrie de projection décrite par (figure 3.3), la projection de Radon 3D s'écrit aussi :

$$[Rf](t, \theta, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta - t) f(x, y, z) dx dy dz. \quad (3.10)$$

Le théorème de la tranche centrale en 3D s'écrit alors :

$$\mathcal{F}([Rf(t, \theta, \phi)]) = \mathcal{F}(f(\xi \sin \theta \cos \phi, \xi \sin \theta \sin \phi, \xi \cos \theta)), \quad (3.11)$$

où la transformée de Fourier 3D de  $f$  s'écrit :

$$\mathcal{F}(f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2i\pi(x\xi_1 + y\xi_2 + z\xi_3)} dx dy dz \quad (3.12)$$

et

$$\mathcal{F}([Rf(\xi, \theta, \phi)]) = \int_{-\infty}^{\infty} Rf(t, \theta, \phi) e^{2i\pi\xi t} dt \quad (3.13)$$

est la transformée de Fourier 2D de la transformée de Radon 3D de  $f$  par rapport à  $t$ .

### 3.2.2 Transformation de Fourier

À partir du théorème de la tranche centrale (équation 3.8), on peut reconstruire l'image de départ en passant par le plan de Fourier (figure 3.4).

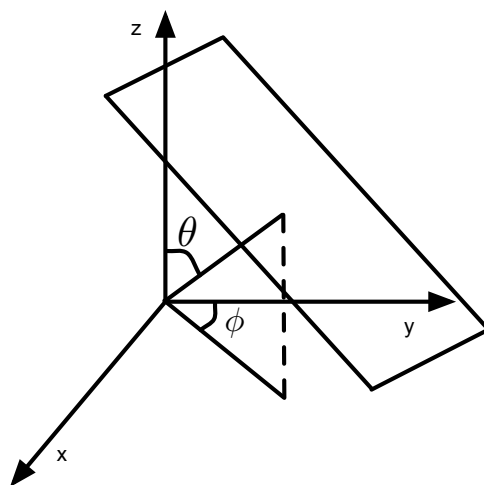


FIG. 3.3 – Géométrie de projection 3D.

La première étape est d'obtenir les projections de Radon. Ensuite en utilisant le théorème de la tranche centrale, le plan de Fourier est rempli angle par angle. Après une étape d'interpolation pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, l'objet de départ est reconstruit par transformée de Fourier inverse 2D.

Cet algorithme n'est valable que pour un nombre infini d'angles. Pour un nombre fini d'angles la reconstruction n'est pas exacte.

### 3.2.3 Transformation de Hankel

La transformée de Hankel relie la méthode de Fourier et la décomposition en intégrale de Fourier. La transformée de Fourier 2D et la transformée de Hankel d'objets invariants par rotation sont égales. En géométrie polaire, la transformée de Hankel s'exprime comme :

$$F(r) = \mathcal{H}_n[f(\rho)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f(\rho) J_n(r\rho) \rho d\rho, \quad (3.14)$$

avec  $J_n$  la fonction de Bessel du premier ordre d'indice  $n$  :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}. \quad (3.15)$$

On peut remarquer que  $\mathcal{H}_n^{-1} = \mathcal{H}_n$ , donc  $f(\rho)$  peut se calculer par transformée de Hankel inverse :

$$f(\rho) = \mathcal{H}_n^{-1}[F(r)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F(r) J_n(r\rho) r dr. \quad (3.16)$$

Pour reconstruire un objet avec cette méthode [36], il faut tout d'abord prendre la transformée de Fourier des projections de l'objet :

$$P(\nu, \theta) = F(\nu, \theta). \quad (3.17)$$

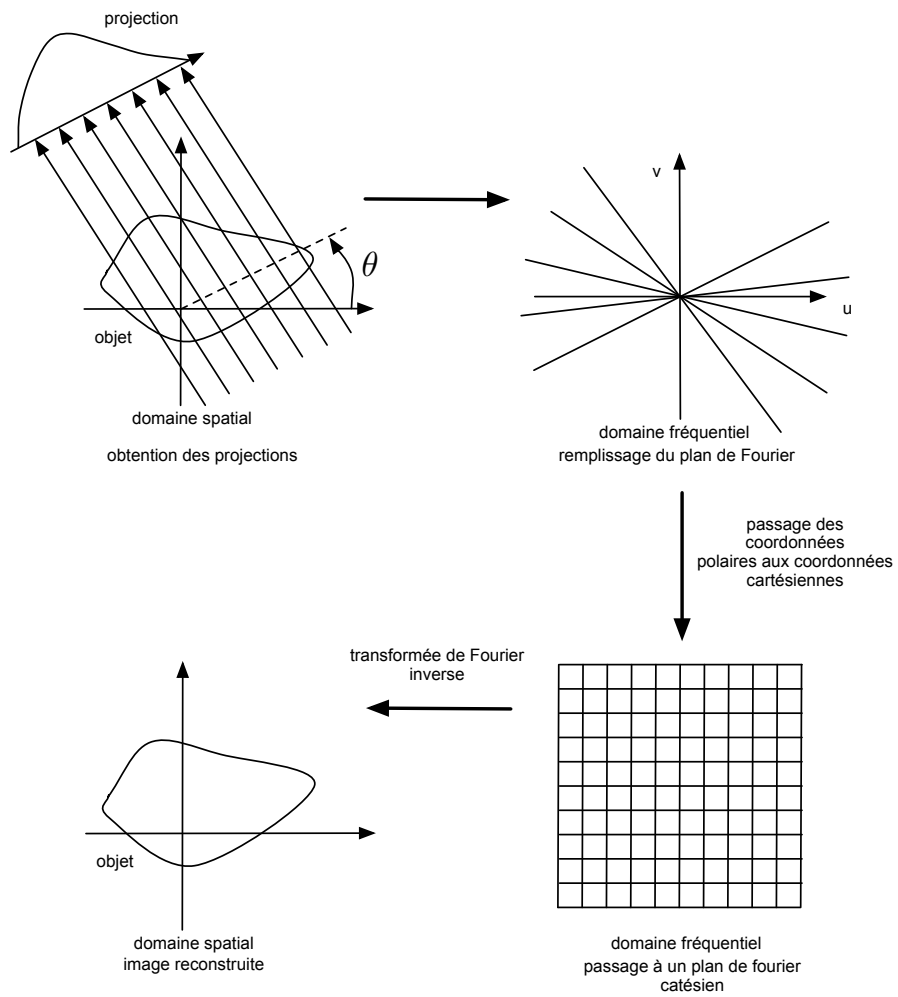


FIG. 3.4 – Reconstruction par transformée de Fourier.

Ensuite les projections  $F(\nu, \theta)$  dans le domaine de Fourier vont être décomposées en séries de Fourier sur  $\theta$  et donner les coefficients  $F_n(\nu)$ . Les coefficients  $f_n(r)$  sont donnés par :

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F_n(\nu) J_n(\nu r) \nu d\nu = \mathcal{H}_n[F_n(\nu)]. \quad (3.18)$$

Pour finir, pour chaque angle du plan entre 0 et  $\pi$ , la tranche du plan dans la direction  $\varphi$  est remplie par :

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(r) e^{in(\pi/2-\varphi)}. \quad (3.19)$$

### 3.2.4 Rétroprojection Filtrée (FBP : *Filtered Backprojection*)

La rétroprojection filtrée est la méthode directe de reconstruction la plus utilisée. Elle est notamment implantée dans les scanners, PET et SPECT commerciaux.

#### 3.2.4.1 Formulation

Pour une fonction  $f$  à décroissance rapide, infiniment dérivable, dont toutes les dérivées appartiennent au même espace et définie sur un support compact, l'opérateur de Radon est défini comme :

$$\text{proj}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy. \quad (3.20)$$

On peut écrire l'objet reconstruit  $g(x, y)$  à partir de la transformée de Fourier inverse de  $F(\lambda, \mu)$  comme :

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda, \mu) \exp(2i\pi(\lambda x + \mu y)) dx dy. \quad (3.21)$$

Si on utilise le théorème de la tranche centrale :

$$P(\nu, \theta) = F(\lambda, \mu) \quad (3.22)$$

on obtient pour  $g(x, y)$  :

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\nu) \exp(2i\pi(\lambda x + \mu y)) dx dy. \quad (3.23)$$

Effectuons un changement de variable pour passer dans un système de coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \lambda = \nu \cos \theta \\ \mu = \nu \sin \theta \end{cases}, \quad (3.24)$$

cela donne :

$$g(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} P(\nu, \theta) \exp(2i\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)) |\nu| d\nu d\theta. \quad (3.25)$$

En prenant en compte le fait que :

$$p(t, \theta) = p(-t, \theta + \pi) = p(t, \theta + 2\pi), \quad (3.26)$$



et en décomposant l'équation 3.25 sur  $[0, \pi]$  et  $[\pi, 2\pi]$ , l'objet reconstruit s'écrit :

$$g(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\nu) \exp(2i\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)) |\nu| d\nu d\theta. \quad (3.27)$$

En posant  $t = x \cos \theta + y \sin \theta$  on obtient :

$$g(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\nu) \exp(2i\pi\nu t) |\nu| d\nu d\theta. \quad (3.28)$$

Le terme  $|\nu|$  de cette équation est à l'origine de la notion de filtrage des projections par le filtre rampe.

Si on pose :

$$Q_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\nu) |\nu| e^{2i\pi\nu t} d\nu, \quad (3.29)$$

on obtient :

$$g(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(t) d\theta. \quad (3.30)$$

Lors de la rétroprojection, chaque projection est rétroprojetée sur l'image. La grandeur  $\nu$  a la dimension d'une fréquence spatiale. Son intégration dans l'équation 3.29 doit avoir lieu pour toutes les fréquences. En pratique, l'énergie contenue dans la transformée de Fourier au dessus d'une certaine fréquence est négligeable. Pour des raisons pratiques les projections sont le plus souvent considérées comme étant à bande limitée.

Les équations 3.29 et 3.30 peuvent être vues comme deux étapes de la rétroprojection filtrée. Dans l'équation 3.29, un opérateur de filtrage est associé à chaque projection  $p_\theta(t)$  et donne une projection filtrée :

$$\tilde{p}_\theta(t) = p_\theta(t) * k(t), \quad (3.31)$$

avec

$$k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu| \exp(2i\pi\nu t) d\nu. \quad (3.32)$$

L'équation 3.30 est l'étape de rétroprojection, opérateur dual de l'opérateur de Radon :

$$g(x, y) = R^* \tilde{p}_\theta(t) = \int_0^\pi \tilde{p}_\theta(t) d\theta. \quad (3.33)$$

### 3.2.4.2 Algorithme

Cet algorithme se sépare en trois étapes principales (figure 3.5) :

1. projection de l'objet de départ  $f(x, y)$  ;
2. filtrage (dans le domaine spatial ou fréquentiel) ;
3. rétroprojection des projections filtrées pour reconstruire l'image de départ  $g(x, y)$ .

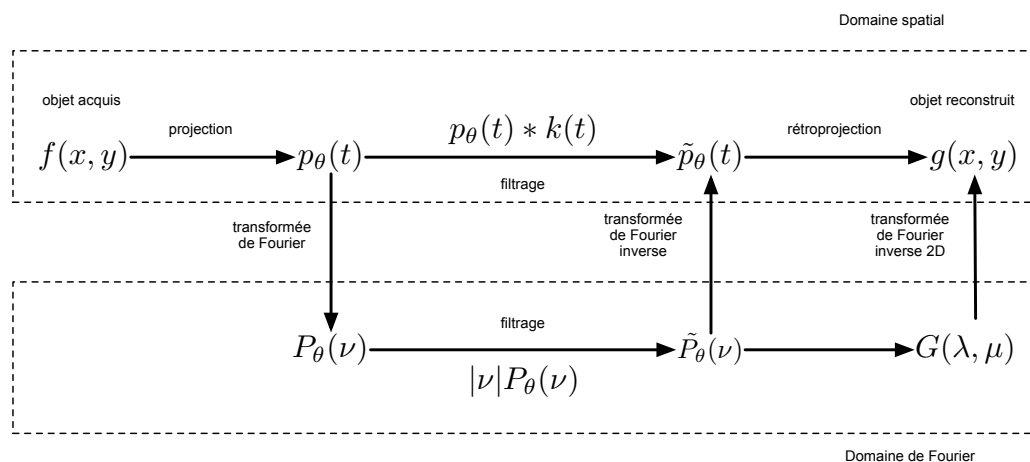


FIG. 3.5 – Reconstruction par rétroprojection filtrée.

### 3.2.4.3 Le filtre rampe

Si les projections sont calculées dans le domaine de Fourier, elles sont multipliées par le filtre rampe  $|\nu|$  lors de l'opération de filtrage. Ce filtre met à zéro la composante continue dans le domaine de Fourier et donc introduit des valeurs négatives.

Le filtre rampe a un support non borné. D'une part il amplifie les hautes fréquences pour lesquelles le rapport signal à bruit est le plus faible. D'autre part, le pas d'échantillonnage sur les projections  $\tau$  limite la fréquence maximale accessible à la fréquence de Nyquist  $\nu_{Nyquist} = \frac{1}{2\tau}$  [33, p59]. Les valeurs négatives introduites autour de l'objet filtré le sont pour compenser les artefacts de la rétroprojection.

Le filtre rampe  $|\nu|$  peut être alors limité à la fréquence  $\nu_{Nyquist}$  (figure 3.6). Ce filtre est appelé le filtre Ram-Lak (d'après le nom de ses inventeurs Ramachandran et Lakshminarayanan). Généralement les fréquences au dessus de  $\nu_{Nyquist}$  sont entachées d'erreur à cause de l'aliasing et du bruit. L'utilisation d'une fenêtre de lissage comme Hanning, Hamming ou Shepp-Logan supprime les plus hautes fréquences spatiales et réduit ces artefacts. Par exemple la fenêtre s'écrit :

$$H(\nu) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{\pi\nu}{\nu_{Nyquist}} & \text{pour } |\nu| < \nu_{Nyquist} \\ 0 & \text{pour } |\nu| \geq \nu_{Nyquist} \end{cases} . \quad (3.34)$$

Si  $\alpha = 0,54$  on obtient la fenêtre de Hamming et si  $\alpha = 0,5$  on obtient la fenêtre de Hanning [58].

## 3.3 Méthodes fondées sur une représentation discrète de l'espace

Une compétition a toujours existé entre méthodes de reconstruction directes et itératives. La tomographie a pu voir le jour grâce au travail théorique de Radon, Bracewell et Cormack sur les transformations intégrales, néanmoins c'est un algorithme itératif développé par Hounsfield qui a été

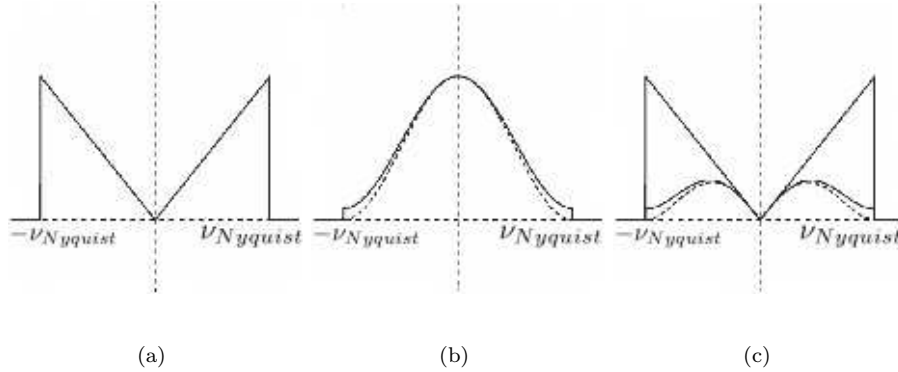


FIG. 3.6 – (a) Filtre rampe coupé à la fréquence  $\nu_{Nyquist}$ , (b) fenêtre de Hamming (traits pleins), fenêtre de Hanning (pointillés), (c) produit d'un filtre rampe avec une fenêtre de Hamming (traits pleins) et de Hanning (pointillés) [58].

mis en œuvre dans le premier scanner commercial. Cormack et Hounsfield ont partagé le prix Nobel de médecine en 1979 pour le développement de la tomographie assistée par ordinateur.

Ces méthodes sont différentes des méthodes décrites précédemment. Le problème est directement formulé dans un espace discret. L'espace doit être discrétisé en choisissant un modèle de pixel  $pm$ . L'objet  $f(x, y)$  peut alors s'écrire comme :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} f(k, l) pm(x - k, y - l). \quad (3.35)$$

Une fois cette discrétisation effectuée, les données et l'objet peuvent être représentées sous forme de vecteurs. Ce sont deux ensembles finis discrets de valeurs échantillonnées. Si le système est linéaire, la relation entre le vecteur de mesure et le vecteur objet est décrit par une matrice, la matrice définissant le système d'acquisition. Le problème de reconstruction tomographique se résume à l'inversion d'un système d'équations linéaires de grande taille.

La projection des données peut s'écrire :

$$proj = Rf, \quad (3.36)$$

où  $R$  est la projection de Radon,  $proj$  l'ensemble des bins rangés sous forme de vecteur et  $f$  l'objet de départ rangé sous forme de vecteur.

On pourra écrire aussi :

$$p_j = r_j f, \quad (3.37)$$

où  $r_j$  définit la mesure  $p_j$  en fonction de l'objet  $f$  et de la  $j^{eme}$  ligne de la matrice  $R$ .

Si les fonctions de base de l'objet sont des pixels, le coefficient  $r_{ji}$  représente la longueur de l'intersection du  $j^{eme}$  rayon avec le pixel  $i$  en tomographie par rayons X. En tomographie par émission,  $r_{ji}$  correspond à la probabilité qu'un photon émis par l'ixel  $i$  de l'objet dans la direction du détecteur soit détecté sur le bin  $j$  de ce détecteur [8].

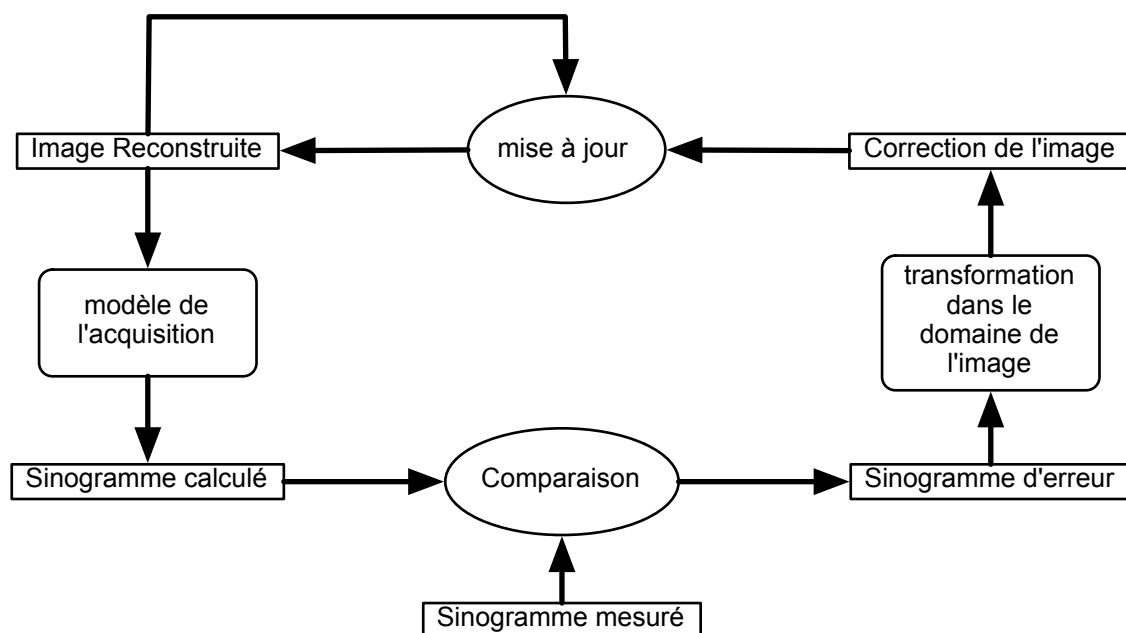


FIG. 3.7 – Schéma général des méthodes itératives. La reconstruction est mise à jour à chaque étape pour réduire l'erreur sur le sinogramme.

Le système à résoudre peut être très grand. Si l'objet de départ est de taille  $512 \times 512$  avec 512 projections, le système est de l'ordre de 250000 équations à 250000 inconnues. Mais ce système est aussi très creux. Si, de plus, les acquisitions sont bruitées, le système peut être inconsistant, il n'admettra pas de solutions. Une solution approchée selon un critère sera choisie.

En présence de bruit, un terme pourra être ajouté à l'équation 3.36 qui s'écrira alors :

$$proj = Rf + e, \quad (3.38)$$

où  $e$  traduit le bruit global du système (bruit photonique, de conversion, de détection...).

Le problème inverse en tomographie est de déterminer l'image  $f$  en connaissant les mesures  $proj$  et le modèle de projection  $R$ . Pour résoudre ce problème on peut aussi avoir des informations sur le bruit et l'image [33].

Même si une reconstruction directe est possible, les méthodes itératives sont préférées pour leur souplesse et leur facilité à prendre en compte les contraintes et le bruit.

Les méthodes itératives sont décrites par le schéma général (figure 3.7).

### 3.3.1 ART - MART

#### 3.3.1.1 ART

La méthode ART (pour *Algebraic Reconstruction Technique*, méthodes de reconstruction algébrique) est une méthode itérative développée par Gabor Herman dans les années 1970 [43, 31]. Elle fait partie des méthodes algébriques par optimisation sous contrainte. Elle est utilisée en cas de sous-détermination des données, lorsque le nombre de mesures est limité.

Le principe de cette méthode est de partir d'une image initiale  $f^{(0)}$  et de la modifier à chaque itération. L'image au pas d'itération  $k + 1$  ne dépend que de l'image calculée au pas d'itération  $k$ . Le calcul consiste à comparer la projection de l'image  $f^{(k)}$  et les projections mesurées pour chaque angle. L'écart mesuré sert à corriger l'image  $f^{(k)}$  pour obtenir l'image  $f^{(k+1)}$ . L'algorithme ART se traduit par l'expression :

$$\begin{aligned} & \text{initialisation de } f^{(0)} \\ f_i^{(k+1)} &= f_i^{(k)} + \frac{p_j - r_i f^{(k)}}{\|r_i\|^2} R_{ij}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

pour  $i = 0..nombre \text{ de pixels}$  et  $j = k(\text{modulo nombre de projections}) + 1$ . Une itération est complète lorsque l'algorithme a balayé tous les rayons de projection. On calcule la convergence en mesurant les écarts entre les images obtenues entre deux itérations.

Pour accélérer la convergence, on peut modifier l'algorithme en incluant un paramètre de relaxation  $\lambda_k \in ]0, 2[$ . L'algorithme devient donc, exprimé sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \text{initialisation de } f^{(0)} \\ f^{(k+1)} &= f^{(k)} + \lambda_k \frac{p_j - r_i f^{(k)}}{\|r_i\|^2} r_j^T, \end{aligned} \quad (3.40)$$

où  $r_j^T$  est le transposé du vecteur  $r_j$ .

Cet algorithme est populaire en tomographie car il converge rapidement. Mais comme il converge vers une solution des moindres carrés, il peut ne pas converger en présence de bruit. Pour éviter cette instabilité, les itérations peuvent être arrêtées avant détérioration de la solution [8].

#### 3.3.1.2 MART

L'algorithme MART (*Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique*) converge vers une solution qui minimise l'entropie :

$$E(f) = - \sum_{k=1}^M f_k \log f_k. \quad (3.41)$$

Nous ne cherchons que les solutions positives de l'équation 3.36.

Cet algorithme s'écrit comme :

$$\begin{aligned} & \text{initialisation de } f^{(0)} \\ f_i^{(k)} &= f_{i-1,l}^{(k)} \left( \frac{proj_i}{r_i^T f_{i-1}^{(k)}} \right)^{r_{il}} \quad i = 1, \dots, M \\ f^{(k+1)} &= f_M^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.3.2 Information a priori

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à régulariser la solution par ajout d'information a priori sur la solution. Mais un modèle à priori n'est pas adapté pour une reconstruction par FBP.

#### 3.3.2.1 EM - OSEM

**3.3.2.1.1 EM - *Expectation Maximisation*** L'algorithme EM est une méthode générale pour trouver l'évaluation du maximum de vraisemblance de la distribution régissant un ensemble de données quand les données sont incomplètes ou quand il y a des données manquantes [11].

L'algorithme EM pour résoudre un système linéaire tel que  $proj = Rf$  s'écrit :

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} R^* \frac{proj}{Rf^{(k)}}. \quad (3.43)$$

Les opérations sont effectuées élément par élément. Le but est de calculer un minimum du logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$l(f) = \sum_i (proj_i \log (Rf)_i - (Rf)_i). \quad (3.44)$$

La méthode EM donne des images avec beaucoup trop de détails. Pour faire face à ce problème, il existe plusieurs solutions. La première est de stopper les itérations tôt, généralement après 12 étapes [60].

Une autre méthode est d'ajouter un terme de pénalité  $B(f)$  pour minimizer [60] :

$$l(f) - B(f). \quad (3.45)$$

Généralement :

$$B(f) = (f - \bar{f})^T B (f - \bar{f}), \quad (3.46)$$

avec  $B$  une matrice positive et  $\bar{f}$  une image de référence.

**3.3.2.1.2 OSEM - *Ordered Subset Expectation Maximisation*** La méthode OSEM a été introduite en 1994 par Hudson et Larkin [45]. Elle diminue le temps de reconstruction de la méthode EM. Cette modification de l'algorithme EM utilise  $B$  sous-échantillons de données pour chaque étape. L'image est mise à jour pour chaque sous-itération et une itération complète aura  $B$  mises à jour d'images. S'il n'y a qu'un sous-échantillon, les algorithmes EM et OSEM sont les mêmes.

Dans leur article Hudson et Larkin différencient :

- les sous-échantillons sans recouvrement,
- les sous-échantillons emboîtés,
- l'échantillon standard qui est en fait la totalité des mesures et qui revient à utiliser l'algorithme EM.

### 3.3.2.2 MAP/Bayésien

Pour l'utilisation de méthodes statistiques bayésiennes, nous allons considérer les données et l'objet comme la réalisation d'un processus aléatoire. Ces méthodes tentent d'augmenter la qualité de l'image reconstruite. Nous allons utiliser la connaissance de l'objet  $f$  à partir d'une loi de probabilité a priori  $p(f)$ . Si  $proj$  sont les données, la règle de Bayes s'écrit :

$$p(f|proj) = p(proj|f) \frac{p(proj)}{p(f)}, \quad (3.47)$$

avec  $p(f|proj)$  la loi a posteriori,  $p(proj|f)$  la vraisemblance et  $p(proj)$  et  $p(f)$  les lois a priori sur la distribution des données et sur l'objet respectivement.

L'objet  $f$  peut être estimé par la minimisation d'une fonctionnelle intégrant une fonction de coût  $c(f, g)$  entre la solution exacte  $g$  et celle estimée  $f$  [33, p121]. Ce qui donne :

$$f_{solution} = arg \min_f \int c(f, g) p(f = g|proj) dg. \quad (3.48)$$

Le critère pour le maximum a posteriori est donné par la la fonction de coût  $c(f, g) = 1 - \delta(f, g)$  dans l'équation 3.48 où  $\delta$  est la distribution de Dirac au point  $f$ . La solution est alors :

$$f_{solution} = arg \max_f p(f|proj). \quad (3.49)$$

### 3.3.2.3 Gradient Conjugué

Dans le cas de surdétermination des données, la solution recherchée est la minimisation d'une fonctionnelle quadratique [27, 19]. De façon courante, c'est l'erreur quadratique qui est minimisée :

$$J(f) = ||proj - Rf||^2. \quad (3.50)$$

La minimisation de cette fonctionnelle conduit à la solution des moindres carrés donnés par la résolution du système :

$$R^T Rf = R^T proj, \quad (3.51)$$

où  $R^T$  est la transposée de  $R$ .

Dans la méthode du gradient conjugué, le résidu est orthogonal par rapport à  $R^T R$  et l'algorithme s'écrit :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= f^{(n)} + \alpha_n p_n \\ r_n &= R^T (proj - Rf^{(n)}) \\ p_1 &= r_0 \text{ et si } n > 1 \text{ } p_{n+1} = r_n - \beta_n p_n \\ \text{avec } &< p_{n+1}, r_n \rangle = 0 \text{ et } < p_{n+1}, R^T R p_n \rangle = 0 \\ \alpha_n &= \frac{p_n^T p_n}{(R p_n)^T (R p_n)} \\ \beta_n &= \frac{(R r_{n-1})^T (R p_{n-1})}{(R p_{n-1})^T (R p_{n-1})}. \end{aligned}$$

### 3.3.3 Autres méthodes discrètes

La tomographie discrète reste un champ de recherche actif [41, 52, 26]. Il existe d'autres méthodes de reconstruction fondées sur la géométrie discrète ou sur la transformée de Radon discrète. Elles mettent en œuvre des multiplications de matrices de structure bloc-circulante avec un vecteur de données. Il existe deux classes d'algorithmes pour inverser les versions discrètes de la transformée de Radon : les techniques de reconstruction algébriques et les algorithmes de rétroprojection fondés sur des discrétisations différentes de la formule d'inversion de Radon. Le problème inverse est traité comme un problème d'algèbre linéaire qui se réduit à résoudre un système d'équations linéaire avec une matrice bloc circulante.

#### 3.3.3.1 $R(t, m)$

La transformée de Radon discrète décrite par Matus et Flusser [28] est définie sur un tableau  $p \times p$  où  $p$  est premier. L'intégrale continue de la transformée de Radon est remplacée par une somme discrète sur les lignes  $k = ml + t \text{ mod } p$  pour tous les points d'intersection  $0 \leq t \leq p$ , pour une pente de la droite  $m$  telle que  $0 \leq m \leq p$ .

Cette transformation considère l'espace de l'image comme torique. Les lignes de projection "entourent" l'image (figure 3.8.a).

Sur une image  $f(k, l)$  elle s'écrit :

$$R(t, m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{p-1} f(i, t) & \text{si } m = 0 \\ \sum_{j=0}^{p-1} f((mj + t)_{\text{mod } p}, j) & \text{si } 0 < m \leq p \end{cases} . \quad (3.52)$$

#### 3.3.3.2 $R(k, \theta)$

Une autre définition de la transformée de Radon discrète est décrite par Kingston et Svalbe [51, 50]. Elle suit la même géométrie que  $R(t, m)$  mais les lignes intégrales modulo  $p$  sont séparées en lignes intégrales individuelles :  $k_{j_m}, k_{j_m} \pm p, k_{j_m} \pm 2p, \dots$ . Les lignes intégrales de l'espace torique ont été séparées en lignes intégrales simples (figure 3.8.b). Pour une image  $f(i, j)$  cette transformée s'écrit :

$$R(k, \theta) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} f(i, j) \delta(k - ij_m + ji_m), \quad (3.53)$$

$$\text{avec } \delta(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ 1 & \text{si } i = 0 \end{cases} .$$

Contrairement à la transformation précédente, le nombre de bins  $N_m$  sur une projection n'est pas constant :

$$N_m = p(|i| + j), \quad (3.54)$$

avec  $0 \leq i \leq p$  et  $0 \leq j \leq p$ .



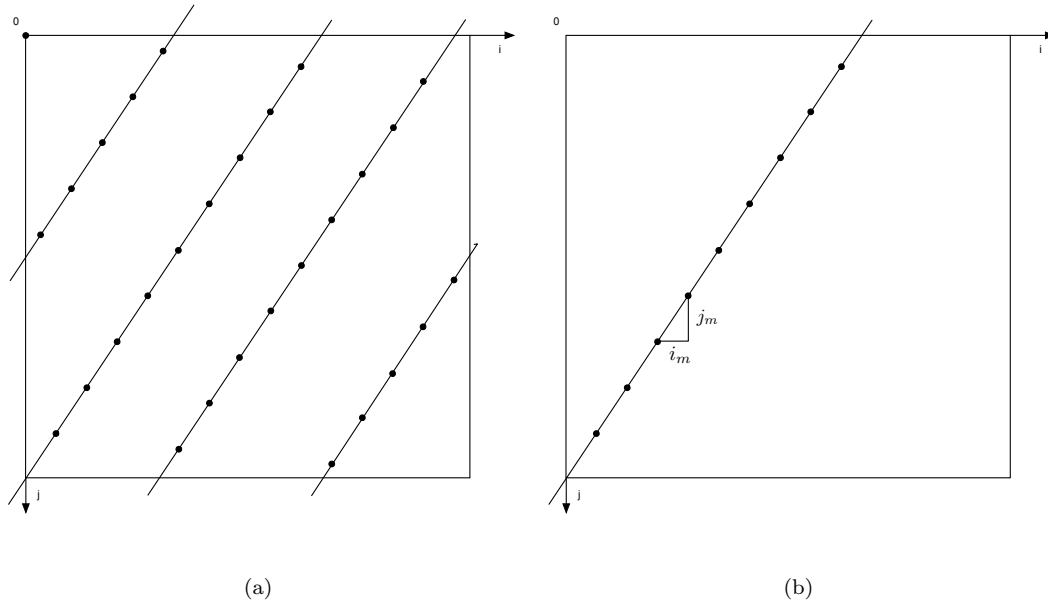


FIG. 3.8 – (a) Schéma d'une projection de Radon discrète  $R(t, m)$  pour  $t = 0, m = 9$  et  $p = 29$ . Les pixels sommés sur une ligne intégrale sont marqués par  $\bullet$ , (b) schéma d'échantillonnage pour  $R(k, \theta)$ .

### 3.3.3.3 Reconstruction d'image

Il est possible de calculer des sinogrammes pour les projections discrètes  $R(k, \theta)$  [51].

La reconstruction d'images à partir de projections continues en utilisant la transformée de Radon discrète nécessite une mise en correspondance inverse de celle obtenue pour le sinogramme  $R(k, \theta)$ . Cela peut être fait par mise en correspondance des transformées de Fourier discrètes et continues des données. Pour cela toutes les données obtenues par transformée de Fourier discrète de toutes les projections sont utilisées pour obtenir les fréquences de chaque projection discrète. L'erreur d'interpolation est plus grande à haute fréquence. L'utilisation dans le domaine de Fourier de projections proches de  $\theta + \frac{\pi}{2}$  permet une meilleure approximation de l'image à l'angle  $\theta$ .

## 3.4 Conclusion

Nous venons de décrire les algorithmes généraux de la reconstruction tomographique. Ces algorithmes se fondent sur une représentation soit continue, soit discrète des données.

Nous allons utiliser cette représentation discrète des données pour dériver de nouveaux algorithmes de reconstruction. Ces algorithmes vont mettre en œuvre tout d'abord une approche totalement discrète du problème de reconstruction tomographique dans le Chapitre 4. Cette mise en œuvre a des points communs avec la reconstruction décrite par Kingston et Svalbe [51]. Puis nous allons utiliser une géométrie et une représentation discrète pour revisiter les algorithmes traditionnels de

### 3.4 Conclusion

---

la tomographie dans le Chapitre 5.



Deuxième partie

Tomographie et géométrie discrète



---

Énormément de travaux ont été réalisés pour la mise en place d'algorithmes performants pour la reconstruction d'images et de volumes comme nous l'avons décrit dans la première partie. Il existe plusieurs géométries, plusieurs types de capteurs, plusieurs dimensions suivant lesquelles aborder le problème, et aussi d'algorithmes incorporant ces contraintes. Dans ce mémoire de thèse, nous allons nous concentrer sur l'utilisation d'une géométrie particulière d'acquisition angulaire avec une discrétisation idoine donnée par la géométrie de la transformée Mojette. Cette version de la transformée de Radon est discrète et exacte pour un nombre fini d'angles. Par contre, l'ajout de bruit dans les données conduit à un problème mal posé n'ayant pas de solutions évidentes. En fait, cette dernière propriété a été utilisée pour faire du tatouage dans les images [5]. Le but de ce travail de doctorat est donc de poser les fondations pour rechercher des solutions algorithmiques évitant le problème mal posé de la géométrie Mojette. Pour cela, nous allons montrer dans le chapitre quatre comment obtenir une solution exacte en augmentant tout d'abord le nombre d'angles discrets (vis-à-vis de la solution Mojette inverse classique) avant de réduire ce nombre tout en essayant de contrôler les fantômes de l'espace nul. Cette nouvelle formulation possède des caractéristiques mathématiques intéressantes lorsque l'on exprime les choses sous forme matricielle puisque l'on voit apparaître des matrices Toeplitz bloc Toeplitz lorsque l'on insère cette nouvelle formule dans un algorithme de gradient conjugué. Dans le chapitre 5, nous revisiterons les algorithmes de rétroprojections de projections filtrées utilisant la géométrie Mojette pour exprimer les angles acquis. Nous éluciderons alors les liens entre l'opérateur Mojette et les deux versions du filtre : celle obtenue dans le chapitre 4 et celle obtenue par dérivation du modèle continu-discret de pixel [38] dans le cas d'angles Mojette. Ces schémas seront validés par des tests sur des fantômes numériques dans le chapitre six afin de donner une vue objective de la qualité des algorithmes développés mais aussi afin de pouvoir dessiner les grands traits de futures expérimentations réelles basées sur des acquisitions tomographiques véritables.

---

# Chapitre 4

## Tomographie discrète Mojette

### Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>76</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Géométrie Mojette et rebinnage</b>  | <b>76</b> |
| 4.2.1      | Géométrie Mojette de projection  | 76        |
| 4.2.1.1    | De Radon à la Mojette  | 76        |
| 4.2.1.2    | Obtention des projections Mojette Dirac  | 79        |
| 4.2.1.2.1  | Projections en 2D  | 79        |
| 4.2.1.2.2  | Projections en 3D  | 79        |
| 4.2.1.3    | Obtention de l'ensemble des directions de projection                                     | 80        |
| 4.2.1.3.1  | Suites de Farey en 1D  | 80        |
| 4.2.1.3.2  | Suites de Farey en 2D  | 81        |
| 4.2.1.4    | Obtention d'une base d'un hyperplan de dimension $n - 1$ dans un espace de dimension $n$ | 82        |
| 4.2.2      | Reconstruction Mojette exacte  | 84        |
| 4.2.3      | Rétroprojection Mojette  | 85        |
| <b>4.3</b> | <b>Algorithme de rétroprojection filtrée discrète exacte</b>                             | <b>86</b> |
| 4.3.1      | Algorithme   | 86        |
| 4.3.2      | Résultats  | 88        |
| <b>4.4</b> | <b>Approximations</b>  | <b>89</b> |
| 4.4.1      | Utilisation d'un nombre réduit de projections  | 89        |
| 4.4.2      | Obtention de projections par interpolation angulaire                                     | 89        |
| 4.4.2.1    | Principe de l'interpolation  | 89        |
| 4.4.2.2    | Résultats  | 92        |
| <b>4.5</b> | <b>Algorithme du Gradient Conjugué Mojette</b>   | <b>93</b> |
| 4.5.1      | Propriétés de $M^*M$   | 93        |
| 4.5.1.1    | Expression de $M^*M$   | 94        |
| 4.5.1.2    | $M^*M$ est une matrice Toeplitz Bloc Toeplitz  | 95        |



---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| 4.5.2      | Conditionnement de $M^*M$ . . . . .       | 96        |
| 4.5.3      | Algorithme du gradient conjugué . . . . . | 96        |
| 4.5.4      | Résultats de reconstruction . . . . .     | 97        |
| <b>4.6</b> | <b>Conclusion</b> . . . . .               | <b>97</b> |

---

## 4.1 Introduction

Il existe des méthodes de reconstruction tomographique discrète qui s'appuient sur la transformée de Radon discrète (section 3.3.3). Nous allons présenter une autre transformation de Radon discrète, la transformation Mojette. Elle a été mise au point dans l'équipe IVC (Image et Vidéo-Communication) du laboratoire IRCCyN en 1995 par JeanPierre Guédon [40] et a déjà trouvé des applications en géométrie discrète [63], en réseaux [39] et en protection des images médicales [5, 6].

Du fait de sa forte relation avec la transformée de Radon, nous avons appliqué cette transformation à la tomographie. Nous allons d'abord rappeler les propriétés de la Mojette, puis nous allons dériver un nouveau schéma de reconstruction tomographique discret exact à partir de cette transformation et nous l'évaluerons.

Les propriétés de la transformée Mojette nous permettent aussi de dériver un schéma de reconstruction par gradient conjugué.

## 4.2 Géométrie Mojette et rebinnage

### 4.2.1 Géométrie Mojette de projection

La géométrie Mojette se dérive de la projection de Radon par discrétisation. Nous allons présenter les différentes étapes qui permettent de passer de la transformation de Radon à la transformation Mojette.

#### 4.2.1.1 De Radon à la Mojette

La transformation Mojette est une version discrète exacte de la transformation de Radon (équation 2.2). Mais contrairement à cette dernière, elle permet la projection de données discrètes sur un hyperplan discret. Considérons une grille cartésienne avec un modèle de pixels Dirac ; un objet continu  $f(x, y)$  sur cette grille sera décrit par :

$$f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \delta(x - \Delta_p k) \delta(y - \Delta_p l), \quad (4.1)$$

où  $f(k, l)$  est la valeur de l'objet au point de coordonnées entières  $(k, l)$  sur la grille avec :

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (4.2)$$

et  $\Delta_p$  la taille du pixel.

La transformation de Radon selon l'angle  $\theta$  qui ici définit la direction de projection (figure 4.1) s'écrit :

$$\text{proj}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(t + x \sin \theta - y \cos \theta) dx dy. \quad (4.3)$$

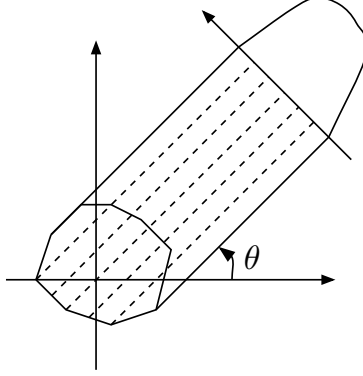


FIG. 4.1 – Transformation de Radon selon  $\theta$ .

Si on écrit la transformation de Radon pour l'objet  $f(x, y)$  avec un modèle de pixel Dirac, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{proj}_\delta(t, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(t + x \sin \theta - y \cos \theta) dx dy \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \Delta_p k) \delta(y - \Delta_p l) \delta(t + x \sin \theta - y \cos \theta) dx dy \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \delta(t + \Delta_p k \sin \theta - \Delta_p l \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.4)$$

On choisit un angle discret pour définir la direction de projection, avec  $p$  un déplacement en pixels selon  $\vec{x}$  et  $q$  un déplacement en pixels selon  $\vec{y}$ . L'angle de projection discret  $(p, q)$  définit la direction de projection.

Le modèle de pixel Dirac choisi pour interpoler les données induit un échantillonnage régulier sur les projections pour un angle discret fixé. En effet, seuls les bins correspondants à des lignes intégrales passant par les centres de pixel sont non nuls ce qui implique un échantillonnage régulier dépendant de l'angle discret choisi (figure 4.2).

L'expression  $k \sin \theta - l \cos \theta$  est généralement réelle et de forme elliptique. Il ne peut exister de pas d'échantillonnage sauf pour  $\tan \theta = \frac{q}{p}$ . Un tel angle  $\theta$  donne :

$$\cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad (4.5)$$

avec  $p$  le déplacement en pixels selon l'axe des abscisses,  $q$  le déplacement en pixels selon l'axe des ordonnées et  $\Delta_p$  la taille du pixel. Tous les vecteurs dans la direction  $(np, nq)$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  appar-

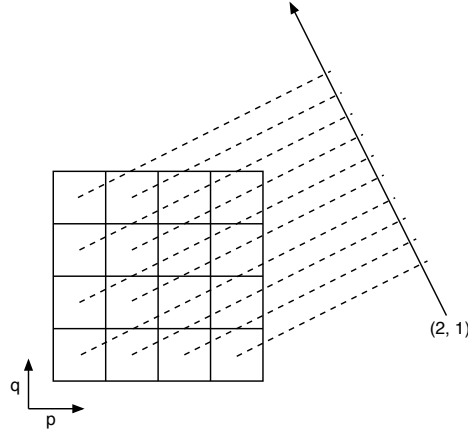


FIG. 4.2 – Projection d'un support  $4 \times 4$  dans la direction  $(2, 1)$  pour un interpolateur Dirac.

tiennent à la même classe d'équivalence. Pour supprimer toute ambiguïté, le plus petit représentant la classe et tel que  $\text{PGCD}(p, q) = 1$  est choisi dans la classe d'équivalence [37]. Cela permet de ne pas avoir des projections identiques comme  $(2, 2)$  et  $(1, 1)$ . De plus les projections  $(p, q)$  et  $(-p, -q)$  sont égales donc les angles  $\theta$  sont choisis uniquement sur  $[0, \pi[$ .

Avec ces notations, l'équation 4.4 s'écrit [62, 37, 64] :

$$\text{proj}_\delta(t, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \delta(t\sqrt{p^2 + q^2} + kq\Delta_p - pl\Delta_p). \quad (4.6)$$

Sur la projection, le pas d'échantillonnage est défini par :

$$t = \frac{b\Delta_p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad (4.7)$$

où  $b$  est l'indice du bin sur la projection.

Le choix de  $p$  et  $q$  entiers et premiers entre eux implique que seules les valeurs entières de  $b$  sont en correspondance avec des pixels ( $k$  et  $l$  entiers). Ce choix implique aussi que toutes ces valeurs correspondent à des pixels, car  $b = -qk + pl$  admet une infinité de solutions entières de  $k$  et  $l$  pour  $b$  donné entier et  $p, q$  entiers premiers entre eux selon le théorème de Bezout.

Ce qui donne l'expression de la projection Mojette Dirac :

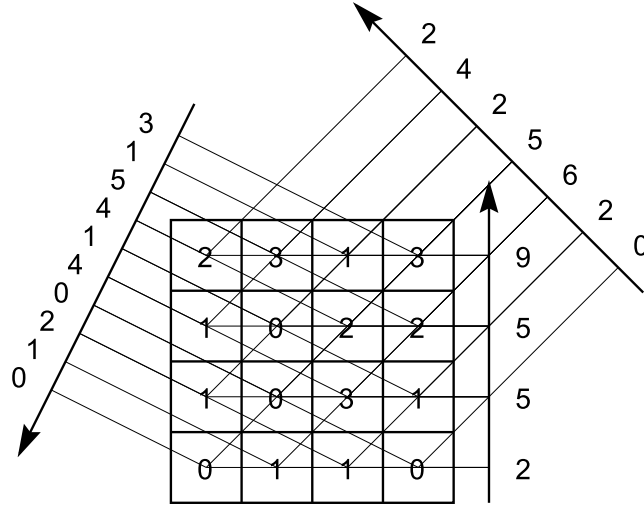
$$[M_\delta f](b, p, q) = \text{proj}_\delta(b, p, q) \quad (4.8)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \Delta(b + kq - pl), \quad (4.9)$$

$$\text{avec } \Delta(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } (b, p, q) \in \mathbb{Z}^3.$$

La figure 4.3 donne un exemple simple de projection Mojette Dirac suivant l'algorithme de transformation directe.

La transformation Mojette conserve la linéarité et l'invariance par translation.


 FIG. 4.3 – Transformation Mojette Dirac d’une image  $4 \times 4$ .

#### 4.2.1.2 Obtention des projections Mojette Dirac

**4.2.1.2.1 Projections en 2D** Lors d’une projection Mojette Dirac, les projections sont échantillonnées uniformément pour un angle donné et le nombre de bins sur la projection dépend de la direction  $(p, q)$  de projection,  $(p, q)$  premiers entre eux. Pour un objet de taille  $P \times Q$  le nombre de bins sur la projection  $(p, q)$  est donné par [62, 40] :

$$\#bins_{p,q,P,Q} = (P - 1) |p| + (Q - 1) |q| + 1. \quad (4.10)$$

L’algorithme de projection Mojette Dirac est défini dans [62]. Pour chaque direction de projection, tous les pixels de l’image sont parcourus séquentiellement et leurs valeurs sont ajoutées aux bins correspondants. Pour un pixel  $(k, l)$  projeté dans la direction  $(p, q)$ , le bin correspondant est

$b = -qk + pl$ . Le pixel  $(0, 0)$  se projette sur le bin 0.

Cet algorithme a une complexité en  $O(NI)$  où  $N$  est le nombre de pixels de l’image et  $I$  le nombre de directions de projection.

**4.2.1.2.2 Projections en 3D** Nous pouvons réécrire l’équation 4.8) [55] en considérant la matrice  $P_{2 \rightarrow 1}$  de projection sur le plan 2D selon la direction  $(p, q)$  :

$$[M_\delta f](b, p, q) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \Delta \left( b - P_{2 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \right), \quad (4.11)$$

avec  $P_{2 \rightarrow 1} = (-q \ p)$ .

Cette notation s’étend à la dimension 3 pour une direction de projection  $(p, q, r)$  suivant les axes  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  définissant une maille de l’espace de départ. Les angles  $(p, q, r)$  sont aussi choisis comme étant les plus petits représentant d’une classe d’équivalence avec  $\text{PGCD}(p, q, r) = 1$ . Si on dénote

---

Algorithme 1 – Algorithme de projection Mojette Dirac [62]

```

pour indice_projection ← 1 à I faire
  //Parcours de l'image
  pour l ← 1 à Q faire
    pour k ← 1 à P faire
      //Calcul de l'indice du bin
      b ← pl - qk
      //incrémentatation de la valeur du bin
      bin(b,p,q) ← bin(b,p,q) + f(k,l)
    fin pour
  fin pour
fin pour

```

---

par  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  les coordonnées des bins sur le plan de projection, on peut étendre l'équation précédente (équation 4.11) à la dimension 3 :

$$[M_\delta f](B, p, q, r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(k, l, m) \Delta \left( B - P_{3 \rightarrow 2} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \right) \quad (4.12)$$

$$\text{avec } P_{3 \rightarrow 2} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{p}{r} \\ 0 & 1 & -\frac{q}{r} \end{bmatrix} & \text{si } r \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & -\frac{p}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } r = 0 \text{ et } q \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } r = 0 \text{ et } q = 0 \end{cases} .$$

#### 4.2.1.3 Obtention de l'ensemble des directions de projection

Si l'on désire avoir l'ensemble des angles discrets possibles issus de l'origine et passant par le centre d'un pixel d'un ensemble fermé, il nous faut utiliser les suites de Farey.

**4.2.1.3.1 Suites de Farey en 1D** En géométrie Mojette, les angles de projection sont des angles discrets de la forme  $(p, q)$  avec  $p \neq 0$ ,  $q > 0$  ou  $q = 0$  et  $p = 1$ . Les angles sont calculés dans le secteur angulaire  $[0, \frac{\pi}{4}]$  et un découpage de  $[0, \pi]$  est obtenu par symétrie par rapport à la première bissectrice et à l'axe des ordonnées.

Le calcul des angles discrets sur  $[0, \frac{\pi}{4}[$  est donné par les suites de Farey [82, 32]. La suite de Farey d'ordre  $N$ ,  $F_N$ , est l'ensemble de toutes les fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, ordonnées par ordre croissant et dont le dénominateur n'excède pas  $N$  [32]. Par exemple  $F_4$  est composé de  $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ . Pour obtenir  $F_{N+1}$  à partir de  $F_N$ , entre chaque fraction  $\frac{m_0}{n_0}$  et  $\frac{m_1}{n_1}$  de  $F_N$  on

insère le cas échéant la fraction médiane  $\frac{m_2}{n_2}$  telle que  $m_2 = m_0 + m_1$  et  $n_2 = n_0 + n_1$  si  $m_2 < N + 1$  et  $n_2 < N + 1$ .

Les suites de Farey donnent des angles discrets  $(p, q)$  avec les fractions irréductibles de la forme  $\frac{q}{p}$ . En ajoutant les symétries décrites précédemment, on obtient des angles répartis sur  $[0, \pi[$  comme décrit par (figure 4.4) pour une suite de Farey d'ordre 10.

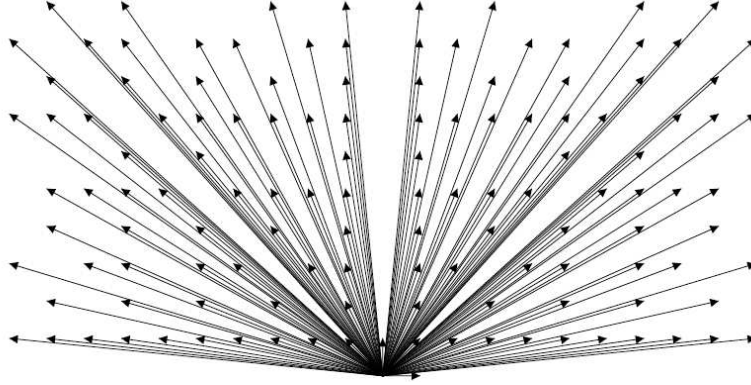


FIG. 4.4 – Représentation angulaire d'une suite de Farey d'ordre 10 et de ses symétries.

**4.2.1.3.2 Suites de Farey en 2D** L'espace 3D de travail est découpé par une grille 3D régulière associée à une base orthonormée  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . En utilisant les symétries par rapport aux plans des axes et des bissectrices, on peut découper l'espace  $\mathbb{Z}^3$  en 48 sous-espaces (48-symétrie) [70]. En notant  $\mathbb{S}$  un de ces sous-espaces, on obtient :

$$\mathbb{S} = \{0 \leq z \leq y \leq x, (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\} \quad (4.13)$$

Ce sous-espace peut aussi être représenté par la projection  $\pi$  :

$$\pi : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad (4.14)$$

Pour découper l'espace, nous allons utiliser un ensemble de Farey 2D dans chaque sous-espace  $\mathbb{S}$  puis utiliser des symétries pour remplir l'espace.

**Définition 4.2.1.1** Soit un ensemble de Farey de dimension 2 et d'ordre  $n$ ,  $\hat{F}_n$  est l'ensemble de points  $(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$  tels que  $\text{PGCD}(x, y, z) = 1$ , entre  $[0, 0]$  et  $[1, 1]$  dont le dénominateur n'excède pas  $n$ .

Soient  $A_1(\frac{y_1}{x_1}, \frac{z_1}{x_1})$  et  $A_2(\frac{y_2}{x_2}, \frac{z_2}{x_2})$  deux points de l'ensemble de Farey d'ordre  $n - 1$  tels que  $x_1 + x_2 = n$ . Le point médian entre  $A_1$  et  $A_2$  est le point de coordonnées  $(\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}, \frac{z_1 + z_2}{x_1 + x_2})$ .

Donc on a  $(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \in \hat{F}_n$  si  $x \leq n$ ,  $0 \leq y \leq x$ ,  $0 \leq z \leq x$  et si  $\text{PGCD}(x, y, z) = 1$ .

Par exemple un ensemble de Farey 2D d'ordre 3 est composé des angles :

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0) (1, 1, 0) (1, 1, 1) (2, 1, 0) (2, 1, 1) (2, 2, 1) \\ &(3, 1, 0) (3, 1, 1) (3, 2, 0) (3, 2, 1) (3, 2, 2) (3, 3, 1) (3, 3, 2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

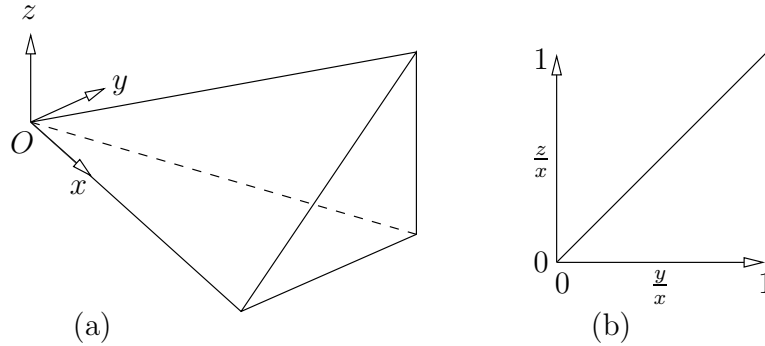


FIG. 4.5 – (a) Un sous-espace  $\mathbb{S}$  et (b) sa représentation en utilisant la projection  $\pi$  [70].

Nous avons donc un moyen de calculer tous les angles de projection discrets pour un objet.

#### 4.2.1.4 Obtention d'une base d'un hyperplan de dimension $n - 1$ dans un espace de dimension $n$

Lors d'une projection Mojette, l'espace de départ de dimension  $n$  est projeté sur un hyperplan de dimension  $n - 1$ . Nous allons décrire comment obtenir une base de l'hyperplan de projection à partir de la projection de la base de l'espace de départ.

L'espace de départ  $\mathcal{L}$  est une grille de l'espace euclidien. Cet espace à  $n$  dimensions peut être vu comme l'échantillonnage discret régulier d'un espace continu à  $n$  dimensions découpé par une grille régulière  $i_1, \dots, i_n$ . Chaque point  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$  dans l'espace discret correspond à un point  $b_1 \times i_1 + \dots + b_n \times i_n$  dans l'espace continu, avec  $b = \{b_1, \dots, b_n\}$  un vecteur de dimensions  $n$  décrit par ses coordonnées dans la base  $\{i_1, \dots, i_n\}$ .

Après avoir choisi une direction de projection  $(v_1, \dots, v_n)$  Mojette, *i.e.*  $\text{PGCD}(v_1, \dots, v_n) = 1$ , la projection de l'espace initial  $\mathcal{L}$  donne un hyperplan. La projection de l'espace de départ engendre un maillage régulier sur l'hyperplan de projection.

La base  $(i_1, \dots, i_n)$  de  $\mathcal{L}$  est projetée sur  $(i'_1, \dots, i'_n)$  qui engendre une grille de l'hyperplan mais pas une base. La projection de  $\mathcal{L}$  sur l'hyperplan  $\mathcal{L}'$  est une grille régulière (figure 4.6).

Les vecteurs  $\{i'_1, \dots, i'_n\}$  projections de  $\{i_1, \dots, i_n\}$  le long de  $(v_1, \dots, v_n)$  sont liés par la relation :

$$v_1 \times i'_1 + \dots + v_n \times i'_n = 0. \quad (4.16)$$

$\{i'_1, \dots, i'_n\}$  sont linéairement dépendants et ne peuvent pas former une base. Nous allons supposer dans la suite que  $\{i'_1, \dots, i'_{n-1}\}$  est une base de l'hyperplan et donc  $i'_n$  est une combinaison linéaire de ces vecteurs. Cette hypothèse est vraie sauf si la dernière composante de la direction de projection  $v_n$  est nulle. La direction de projection possède au moins une composante non nulle  $v_m$ . L'hypothèse précédente sera alors assurée en permutant l'ordre des vecteurs deux fois : une fois pour placer  $i'_m$  à la fin de la liste et une deuxième fois pour remettre les vecteurs dans leur ordre initial.

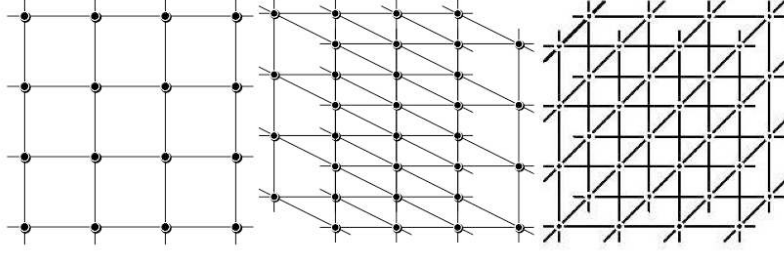


FIG. 4.6 – Exemple de projection de grilles 3D sur un plan de projection pour les angles  $(1, 0, 0)$ ,  $(-2, -1, 1)$  et  $(1, 1, 2)$ .

Il existe une infinité de bases qui engendrent la même grille sur l'hyperplan de projection. Nous allons en choisir une arbitrairement.

**Premier vecteur de base** Le premier vecteur de base de l'hyperplan,  $j_1$ , est choisi en suivant la direction de  $i'_1$  à partir du bin  $O$ , projection du pixel  $(0, 0, 0)$ . L'extrémité de  $j_1$  est le point le plus proche de  $O$  selon la direction  $i'_1$ . Comme  $\dim(i'_1, \dots, i'_n) = n - 1$ , il y a exactement deux manières linéairement indépendantes de suivre cette direction, soit selon  $i'_1$ , projeté du point  $(1, 0 \dots 0)$  de l'espace discret initial, soit avec une combinaison linéaire de  $\{i'_2, \dots, i'_n\}$  selon (4.16) :

$$v_1 \times i'_1 = -v_2 \times i'_2 - \dots - v_n \times i'_n. \quad (4.17)$$

Cette équation peut se réécrire comme :

$$\frac{v_1}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)} \times i'_1 = -\frac{v_2 \times i'_2 + \dots + v_n \times i'_n}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)}. \quad (4.18)$$

Le terme de droite est une combinaison linéaire à coefficients entiers de  $\{i'_2, \dots, i'_n\}$ . Il correspond donc à la projection du point  $(0, \frac{v_2}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)}, \dots, \frac{v_n}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)})$  de l'espace discret initial.

Toutes les combinaisons linéaires de  $i'_1$  et de  $\frac{v_1}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)} \times i'_1$  sont colinéaires à  $i'_1$  et tous les points sur l'axe  $Oi'_1$  sont obtenus par combinaison linéaire à coefficients entiers de  $i'_1$  et  $\frac{v_1}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)} i'_1$ . Le point le plus proche de  $O$  dans la direction  $i'_1$  est donné par la combinaison linéaire minimale avec des coefficients entiers.  $\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)$  et  $v_1$  sont des entiers premiers entre eux. Selon le théorème de Bezout, il existe  $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \text{PGCD}(v_2, \dots, v_n) + \beta_1 v_1 &= \underbrace{\text{PGCD}(v_1, \dots, v_n)}_1 \\ \alpha_1 + \beta_1 \frac{v_1}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)} &= \frac{1}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

La combinaison linéaire minimale donne donc comme premier vecteur de base :

$$j_1 = \frac{1}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)} i'_1. \quad (4.20)$$

Les points qui se projettent sur  $(1, 0, \dots, 0)$  sont de la forme  $(\alpha_1, \frac{-\beta_1 v_2}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)}, \dots, \frac{-\beta_1 v_n}{\text{PGCD}(v_2, \dots, v_n)})$ .



**Le  $k^e$  vecteur de base** Si on suppose avoir déjà trouvé les  $k - 1$  premiers vecteurs de base  $j_1, \dots, j_{k-1}$ . Le vecteur  $i'_k$  introduit une nouvelle dimension car  $i'_1, \dots, i'_{k-1}$  sont linéairement indépendants.  $j_k$  doit avoir la plus petite composante non nulle dans la direction  $i'_k$ . Il y a deux manières indépendantes de se déplacer, en suivant  $i'_k$  lui-même ou en suivant une combinaison linéaire de  $i'_{k+1}, \dots, i'_n$  selon l'équation 4.16 :

$$\frac{v_1 i'_1 + \dots + v_k i'_k}{\text{PGCD}(v_{k+1}, \dots, v_n)} = - \frac{v_{k+1} i'_{k+1} + \dots + v_n i'_n}{\text{PGCD}(v_{k+1}, \dots, v_n)}. \quad (4.21)$$

La proximité des hyperplans à l'origine est mesurée par la projection sur  $i'_k$  et donne respectivement 1 et  $\frac{v_k}{\text{PGCD}(v_{k+1}, \dots, v_n)}$ . La combinaison minimale est à nouveau donnée par le théorème de Bezout et il existe  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$\alpha_k + \beta_k \frac{v_k}{\text{PGCD}(v_{k+1}, \dots, v_n)} = \frac{\text{PGCD}(v_k, \dots, v_n)}{\text{PGCD}(v_{k+1}, \dots, v_n)} \quad (4.22)$$

Donc le nouveau vecteur de base  $j_k$  est donné par :

$$j_k = \alpha_k i'_k + \beta_k \frac{v_1 i'_1 + \dots + v_k i'_k}{\text{PGCD}(v_{k+1}, \dots, v_n)} \quad (4.23)$$

L'annexe A donne un exemple d'obtention de base sur l'hyperplan de projection lors d'une projection Mojette 2D vers 1D et 3D vers 2D.

## 4.2.2 Reconstruction Mojette exacte

La transformation Mojette possède une transformation inverse exacte en l'absence de bruit sur les projections. Si le nombre de projections est suffisamment élevé, c'est-à-dire si le rang de la matrice de projection est suffisant, la reconstruction Mojette inverse est toujours possible, mais la méthode décrite ci-dessous développée par Nicolas Normand [62] permet une optimisation de la reconstruction.

Le principe de cette reconstruction est de reconstruire les pixels en correspondance univoque (figure 4.7) avec un bin et de mettre à jour les projections à chaque étape. L'image est reconstructible à chaque étape si on peut au moins trouver un pixel reconstructible à chaque étape. Une image convexe de taille  $P \times Q$  est reconstructible par un ensemble de projections  $S_I = \{(p_i, q_i), i \in \{1 \dots I\}\}$  que l'on peut déterminer par le critère de Katz [49] :

$$\sum_{i=1}^I |p_i| \geq P \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^I |q_i| \geq Q \quad (4.24)$$

où  $(p_i, q_i)$  sont des directions de projection.

Les liens entre la reconstruction Mojette et la morphologie mathématique ont été étudiés dans [62]. Une application de la transformée Mojette à la description de l'information a été mise en œuvre [67]. Elle a aussi été utilisée pour tatouer des images [4]. Enfin la transformation Mojette a été étendue aux dimensions supérieures [86].

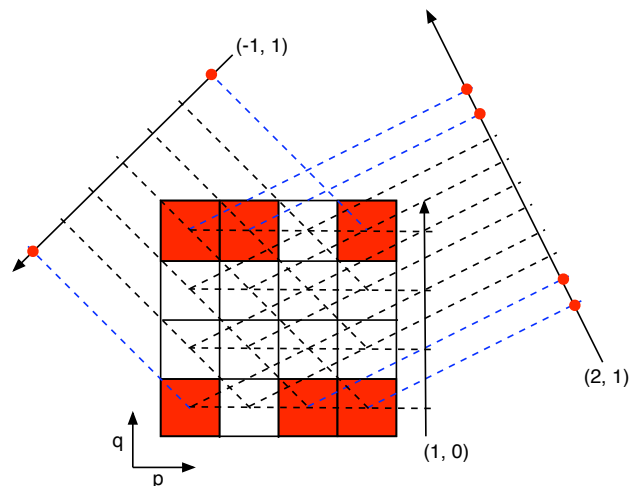


FIG. 4.7 – Bins-pixels en correspondance univoque.

---

Algorithme 2 – Algorithme de reconstruction Mojette Dirac [62].

//Mise à jour des projections par suppression des contributions des bins reconstruits.

**tant que** il existe au moins un bin restructurable **faire**

    chercher un bin restructurable

    chercher le pixel  $(k, l)$  correspondant

**pour**  $i = 0$  à  $I$  **faire**

$$b = -q_i \times k + p_i \times l$$

$$proj_i(b) \leftarrow proj_i(b) - f(k, l)$$

**fin pour**

**fin tant que**

---

### 4.2.3 Rétroprojection Mojette

La rétroprojection Mojette est l'opération duale de la projection Mojette. Pour tous les bins des projections, la rétroprojection Mojette Dirac ajoute la valeur du bin courant aux pixels alignés dans la direction  $(p, q)$  (figure 4.8).

Avec un modèle de pixel Dirac, la rétroprojection Mojette s'écrit [73] pour une projection  $(p, q)$  :

$$[M^*proj](k, l) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(k-i)\delta(l-j) \sum_{b=-\infty}^{+\infty} proj(b, p, q)\Delta(b+qi-pj) \quad (4.25)$$

Pour une projection  $(p, q)$ ,  $f_{p,q}(k, l) = [M^*_\delta proj](b, p, q)$ , l'opérateur Mojette dual  $M^*$  correspond à un opérateur de rétroprojection discret exact dans le sens où  $M^*$  permet de rétroprojeter la valeur

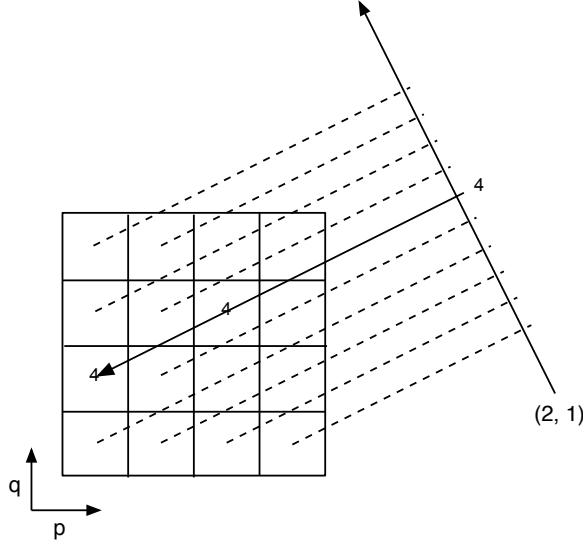


FIG. 4.8 – Exemple de rétroprojection Mojette pour un bin d'une projection (2, 1).

des bins directement au centre des pixels sans interpolation sur les projections contrairement à la rétroprojection en géométrie classique (figure 4.9).

### 4.3 Algorithme de rétroprojection filtrée discrète exacte

Cette partie constitue le cœur de notre travail de thèse. Elle montre qu'une reconstruction tomographique discrète exacte peut être faite sur une image avec un nombre fini de projections [76].

#### 4.3.1 Algorithme

Dans le cas de l'utilisation d'un modèle de pixel Dirac, on peut écrire un algorithme de rétroprojection filtré Mojette exacte. En effet, en l'absence de bruit, pour un nombre fini mais complet de projections, une image peut être reconstruite par rétroprojection puis être filtrée.

À partir des opérateurs de projection et rétroprojection Mojette Dirac, la valeur du pixel  $(k, l)$  dans l'image reconstruite obtenue à partir de la rétroprojection de la projection  $i$  dans la direction  $(p_i, q_i)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(k, l) &= M_i^* M_i f \\ &= \sum_{k'} \sum_{l'} f(k', l') \Delta(q_i k - p_i l - q_i k' + p_i l'). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Lors de cette rétroprojection, le pixel  $(k, l)$  va recevoir la somme de tous les pixels alignés avec lui dans la direction  $(p_i, q_i)$ .

Algorithme 3 – Algorithme de rétroprojection Mojette Dirac.

```

//I : nombre total de projections
pour  $i = 1$  à  $I$  faire
  pour  $b = 1$  à nombre_de_bin $_i$  faire
    //Recherche des pixels alignés avec le bin courant dans la direction de projection courante
    Chercher les pixels  $(k_m, l_m)$   $m = 1 \dots M$  tels que  $b = p_i l_m - q_i k_m$ 
    pour  $m = 1$  à  $M$  faire
       $f(k_m, l_m) \leftarrow f(k_m, l_m) + \text{valeur\_bin}(b, p_i, q_i)$ 
    fin pour
  fin pour
fin pour
pour  $k = 1$  à  $P$  faire
  pour  $l = 1$  à  $Q$  faire
     $f(k, l) \leftarrow \frac{f(k, l)}{I}$ 
  fin pour
fin pour

```

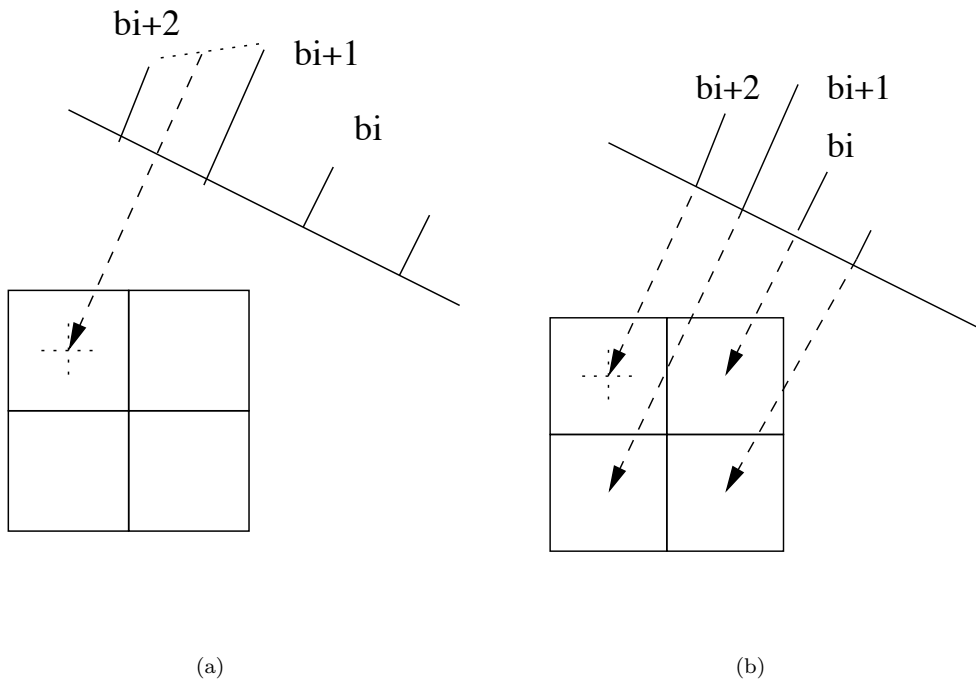


FIG. 4.9 – (a) Interpolation sur la projection pour rétroprojeter dans le centre du pixel, (b) Rétroprojection Mojette Exacte.

Pour un ensemble de  $I$  projections, la valeur rétroprojetée dans le pixel  $(k, l)$  devient :

$$g(k, l) = If(k, l) + \sum_{k' \neq k} \sum_{l' \neq l} f(k', l') \Delta(q_i k - p_i l - q_i k' + p_i l'). \quad (4.27)$$

En considérant uniquement les étapes de projection/rétroprojection, les valeurs des pixels de l'image reconstruite ne dépendent que du nombre total de projections  $I$ .

Mais ce nombre de projections, bien que grand, est fini à cause de la taille finie de l'image et de l'utilisation de la géométrie discrète (section 4.2.1.3.1). Pour une image de taille  $N \times N$ , l'ensemble des directions discrètes dans cette image sont données par une série de Farey d'ordre  $n - 1$  et ses symétries par rapport à la première bissectrice et par rapport à l'axe des ordonnées.

Nous utilisons la linéarité de la transformée Mojette pour obtenir l'algorithme final. En utilisant un modèle de pixel Dirac tel que  $f(k, l) = \Delta(k)\Delta(l)$ , l'image résultante d'une projection suivie d'une rétroprojection donne :

$$g(k, l) = (I - 1)f(k, l) + \sum_{k'=1}^N \sum_{l'=1}^N f(k', l'). \quad (4.28)$$

Or, la somme de tous les pixels  $S$  se retrouve dans la somme de tous les bins sur chaque projection :

$$\sum_{k'=1}^N \sum_{l'=1}^N f(k', l') = \frac{1}{I} \sum_i \sum_b \text{proj}(b, p_i, q_i) = S \quad (4.29)$$

La valeur  $S$  est constante lorsqu'il n'y a pas de bruit et peut être estimée par moyennage sur l'ensemble des projections dans le cas contraire.

La reconstruction exacte s'écrit alors :

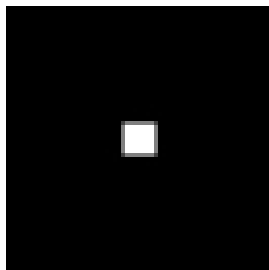
$$\boxed{f(k, l) = \frac{1}{I - 1} [g(k, l) - S]} \quad (4.30)$$

Cette expression permet une reconstruction exacte en l'absence de bruit d'un objet avec un nombre fini de projections, en utilisant toutes les directions qui permettent de joindre deux à deux tous les pixels de l'image.

### 4.3.2 Résultats

Nous allons reconstruire une image de taille  $65 \times 65$ . L'image à reconstruire est constituée d'un fond à 0, d'un carré central de taille  $9 \times 9$  avec une bordure d'un pixel de valeur 0,5, des coins à 0,25 et un centre à 1 :

Pour reconstruire ce fantôme par rétroprojection filtrée discrète exacte Mojette, on calcule ses projections selon les directions données par la série de Farey d'ordre 64 et ses symétries (section 4.2.1.3.1) ce qui donne 5040 projections. L'image reconstruite est exacte (figure 4.11.a). Une reconstruction exacte peut donc être obtenue avec un nombre fini de projections.

FIG. 4.10 – Fantôme carré  $65 \times 65$ .

## 4.4 Approximations

L'équation 4.30 décrit l'équivalent de la rétroprojection filtrée mais en tomographie discrète avec un nombre fini (même si important) d'angles. Dans cette section, on visualise l'espace nul de deux façons. D'abord en réduisant le nombre de projections (c'est-à-dire mise à zéro des autres) puis en interpolant les autres.

### 4.4.1 Utilisation d'un nombre réduit de projections

Cette reconstruction peut aussi être exécutée avec un nombre de projections inférieur au nombre nécessaire qui est issu de  $F_{64}$ . La même reconstruction est exécutée avec  $F_{32}$ ,  $F_{16}$ ,  $F_{10}$  et  $F_5$  (voir figure 4.11).

Plus le nombre de projections diminue, plus l'erreur totale de reconstruction augmente. Pour  $F_{32}$ , l'erreur est sur la bordure de l'image. À mesure que le nombre de projections diminue, l'erreur de reconstruction devient plus importante vers le centre de l'image. La partie de l'image reconstruite exactement est dépendante du nombre d'angles choisis. Par exemple avec les angles issus de  $F_{32}$  et de ses symétries une zone  $33 \times 33$  centrée au centre de l'image  $65 \times 65$  est parfaitement reconstruite.

### 4.4.2 Obtention de projections par interpolation angulaire

On remarque dans les résultats précédents que pour 1296 projections, l'erreur de reconstruction sur l'objet est faible pour un nombre de projections plus de trois fois inférieur au nombre de projections nécessaires à la reconstruction exacte. Nous allons interpoler les projections obtenues par  $F_5$ ,  $F_{10}$  et  $F_{16}$  (et leurs symétries) pour obtenir les projections données par  $F_{32}$  et leurs symétries.

#### 4.4.2.1 Principe de l'interpolation

Le principe de l'interpolation est le suivant. Supposons que nous connaissons les projections  $P_1$  ( $p_1, q_1$ ) et  $P_2$  ( $p_2, q_2$ ) et nous voulons obtenir la projection  $P_3$  ( $p_3, q_3$ ) telle que  $\theta_1 \leq \theta_3 \leq \theta_2$ . On trace la droite  $\mathcal{D}$  parallèle à la projection 3 passant par le centre de l'image ( $C_x, C_y$ ). Les points appartenant à cette droite peuvent s'écrire comme :

$$\mathcal{D} : \{(C_x - q_3 t, C_y + p_3 t) | t \in \mathbb{R}\}, \quad (4.31)$$

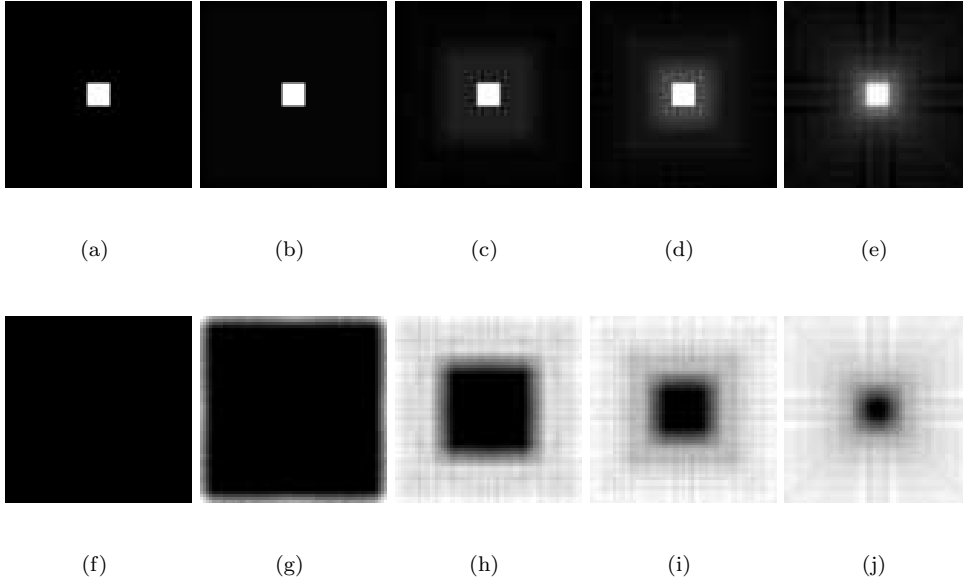


FIG. 4.11 – Rétroprojection filtrée discrète exacte avec un nombre réduit de projections. (a)(b)(c)(d)(e) Images Reconstruites, (f)(g)(h)(i)(j) Images d'erreur

|                         | (a)  | (b)     | (c)     | (d)     | (e)     |
|-------------------------|------|---------|---------|---------|---------|
| MSE (sur toute l'image) | 0    | 0,00002 | 0,01113 | 0,11738 | 1,76863 |
| # proj                  | 5040 | 1296    | 320     | 128     | 40      |

où  $t$  est l'abscisse curviligne sur  $\mathcal{D}$ .

Un point de  $\mathcal{D}$  se projette sur la projection  $P_3$  tel que :

$$(x, y) \in \mathcal{D} \rightarrow -q_3x + p_3y. \quad (4.32)$$

Donc la projection d'un point d'abscisse  $t$  de  $\mathcal{D}$  sur la projection  $P_3$  donne le point  $t_3$  :

$$t_3 = -q_3C_x + q_3^2t + p_3C_y + p_3^2t. \quad (4.33)$$

De même, les projections de  $t$  sur la projection  $P_1$  et la projection  $P_2$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} t_1 &= -q_1C_x + q_1q_3t + p_1C_y + p_1p_3t \\ t_2 &= -q_2C_x + q_2q_3t + p_2C_y + p_2p_3t \end{aligned} \quad (4.34)$$

On cherche la valeur des bins sur la projection Mojette 3. Dans le cas de (figure 4.12), la valeur au bin  $b_3$  doit correspondre à la somme de la ligne intégrale alignée avec  $b_3$  dans la direction  $(p_3, q_3)$ . Pour approximer cette valeur, on calcule l'abscisse curviligne du point  $A$  de la droite  $\mathcal{D}$  qui se projette sur  $b_3$ . Ce point  $A$  se projette en  $t_1$  sur la projection  $P_1$  et en  $t_2$  sur la projection  $P_2$ .

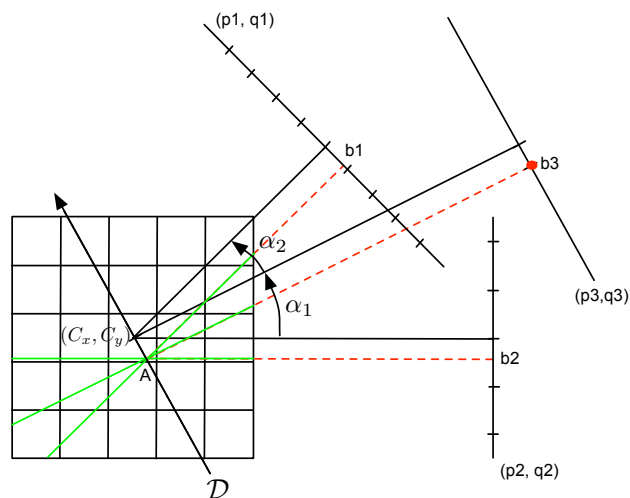


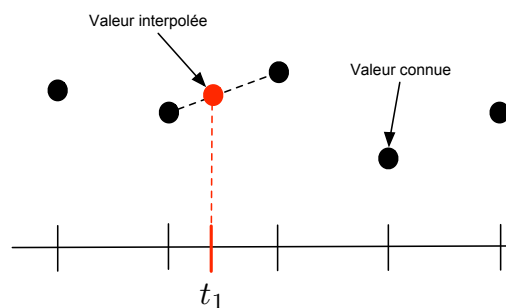
FIG. 4.12 – Principe de l'interpolation angulaire des projections Mojette.

Les équations précédentes (4.33, 4.34) se réécrivent en tenant compte de  $b_3$  et des constantes :

$$\begin{aligned} t_1 - t_{1c} &= (q_1 q_3 + p_1 p_3)t, \\ t_2 - t_{2c} &= (q_2 q_3 + p_2 p_3)t, \\ b_3 - b_{3c} &= (q_3^2 + p_3^2)t, \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec  $t_{1c} = -q_1 C_x + p_1 C_y$ ,  $t_{2c} = -q_2 C_x + p_2 C_y$  et  $b_{3c} = -q_3 C_x + p_3 C_y$ .

Les valeurs  $t_1$  et  $t_2$ , qui ne correspondent généralement pas à des positions de bins Mojette, sont calculées par interpolation linéaire entre deux bins (figure 4.13).

FIG. 4.13 – Interpolation linéaire entre deux bins de valeurs connues pour obtenir la valeur de  $t_1$ .

La contribution  $t_{1_{b3}}$  de  $t_1$  à  $b_3$  va s'écrire en utilisant l'équation 4.35 :

$$t_{1_{b3}} = b_{3c} + (p_3^2 + q_3^2) \frac{b_1 - b_{1c}}{p_1 p_3 + q_1 q_3}. \quad (4.36)$$



De même, on peut écrire la contribution  $t_{2b_3}$  de  $t_2$  à  $b_3$  :

$$t_{2b_3} = b_{3c} + (p_3^2 + q_3^2) \frac{b_2 - b_{2c}}{p_2 p_3 + q_2 q_3}. \quad (4.37)$$

La valeur de  $b_3$  est ensuite calculée en fonction de  $t_{1b_3}$ ,  $t_{2b_3}$  et des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que :

$$b_3 = \frac{\alpha_1 t_{1b_3} + \alpha_2 t_{2b_3}}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (4.38)$$

Cette opération est répétée pour tous les bins de la projection  $P_3$ . On calcule ainsi des projections à partir des projections connues.

#### 4.4.2.2 Résultats

Le fantôme utilisé est le même que dans la partie 4.3.2. Les projections  $F_5$ ,  $F_{10}$  et  $F_{16}$  (et leurs symétriques) sont interpolées selon la méthode précédente pour obtenir les projections correspondant à  $F_{32}$  et leurs symétriques (1296 projections).

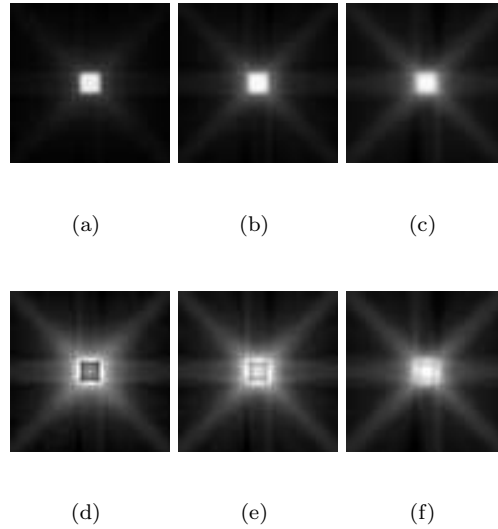


FIG. 4.14 – Rétroprojection filtrée discrète exacte avec des projections interpolées. (a)(b)(c) Images Reconstruites, (d)(e)(f) Images d'erreur

|                         | (a)     | (b)     | (c)     |
|-------------------------|---------|---------|---------|
| MSE (sur toute l'image) | 0,01152 | 0,05180 | 0,20691 |
| # proj interpolées      | 320     | 128     | 40      |

Les images reconstruites à partir des projections interpolées ont des MSE (*Mean Square Error*) bien plus faibles que pour les images reconstruites avec les projections sans interpolation (section 4.4.1), pour  $F_5$  et  $F_{10}$  au moins. En revanche, les images reconstruites montrent bien mieux l'objet avec les projections interpolées que sans interpolation.

Les reconstructions faites avec un ensemble d'angles insuffisant vis-à-vis de la taille de l'image montrent bien le type d'artefact auquel on peut s'attendre dans un cas concret. L'interpolation angulaire, quoique simple, montre une amélioration importante dans le cas de la reconstruction de la zone centrale de l'image.

## 4.5 Algorithme du Gradient Conjugué Mojette

L'autre façon de voir l'équation 4.30 est une vision matricielle du filtre de reconstruction de manière à le mettre en œuvre dans une méthode itérative d'inversion. Les propriétés de  $M^*M$  exposées dans la section suivante induisent un choix naturel pour la méthode du gradient conjugué qui est ensuite présentée.

### 4.5.1 Propriétés de $M^*M$

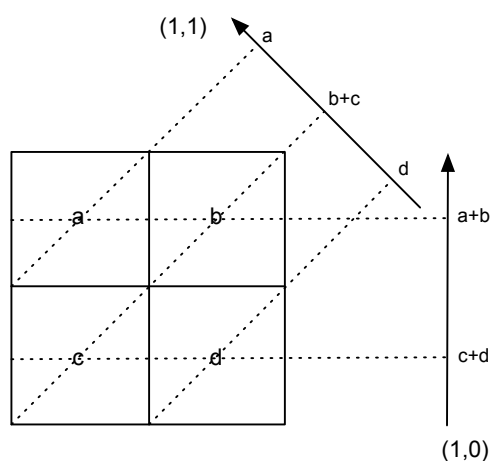


FIG. 4.15 – Exemple de projection Mojette pour une image  $2 \times 2$ .

L'opérateur de projection Mojette est noté  $M$  et le rétroprojecteur Mojette  $M^*$ . Ces opérations peuvent aussi se décrire sous forme de matrices qui s'appliquent sur l'image de départ. Dans ce cas, les pixels sont rangés dans un vecteur selon l'ordre lexicographique. La projection Mojette du vecteur de pixels donne un vecteur de bins. Par exemple pour l'image de (figure 4.5.1), la projection Mojette va s'écrire :

$$M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + d \\ a + b \\ d \\ b + c \\ a \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

La rétroprojection de cette image donne :

$$M^* \begin{bmatrix} c+d \\ a+b \\ d \\ b+c \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b \\ a+2b+c \\ b+2c+d \\ c+2d \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

La matrice  $M^*M$  est le point principal du schéma itératif mis en œuvre quand nous cherchons à minimiser  $|M^*Mproj - M^*bin|$ . Nous allons d'abord donner une formule générale de  $M^*M$  et ses principales caractéristiques.

#### 4.5.1.1 Expression de $M^*M$

Lorsqu'un pixel  $(k, l)$  d'une image  $N \times N$  est projeté dans la direction  $(p, q)$  sur un bin  $b$  de la projection Mojette, les indices du bin et du pixel sont liés par la relation :

$$b + qk - pl = 0 \quad (4.41)$$

La matrice  $M^*M$  agit sur les pixels de l'image après les avoir rangés dans un vecteur dans l'ordre lexicographique. L'indice  $i$  dans le vecteur de pixels correspond au pixel  $(k_1, l_1)$  dans l'image avec :

$$i = k_1 + l_1 \times N \quad (4.42)$$

où  $N$  est la largeur en pixel de l'image de départ.

Dans la matrice  $M^*M$  pour une seule direction de projection  $(p, q)$ , le coefficient à l'indice  $(i, j)$  est mis à 1 si les pixels  $i$  et  $j$  sont projetés sur le même bin dans la direction  $(p, q)$ .

Les indices dans la matrice  $M^*M$  peuvent être définis à partir des indices de l'image de départ.

$$\begin{cases} i = k_1 + l_1 \times N \\ j = k_2 + l_2 \times N \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} l_1 = \lfloor \frac{i}{N} \rfloor \\ l_2 = \lfloor \frac{j}{N} \rfloor \end{cases} \quad (4.43)$$

où  $\lfloor x \rfloor$  est la partie entière de  $x$ .

Si les pixels  $(k_1, l_1)$  et  $(k_2, l_2)$  sont projetés dans la même direction, on obtient :

$$\begin{cases} b_1 = -qk_1 + pl_1 \\ b_2 = -qk_2 + pl_2 \end{cases}. \quad (4.44)$$

L'indice  $(i, j)$  de la matrice  $M^*M$  est mis à 1 si les deux pixels se projettent sur le même bin, c'est-à-dire si

$$b_1 - b_2 = 0, \quad (4.45)$$

soit

$$-q(k_1 - k_2) + p(l_1 - l_2) = 0. \quad (4.46)$$

Cela nous donne l'expression de  $M^*M$  pour une direction de projection  $(p, q)$  :

$$M^*M_{(k_1, l_1), (k_2, l_2)} = \sum_{\#(p, q)} \Delta(b_1 - b_2), \quad (4.47)$$

où  $\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$ . L'équation 4.47 peut aussi être réécrite avec les indices  $(i, j)$  comme une somme dans toutes les directions de projection :

$$M^*M_{(i,j)} = \sum_{\#(p,q)} \Delta \left[ -q(i-j) + (qN+p)(\lfloor \frac{i}{N} \rfloor - \lfloor \frac{j}{N} \rfloor) \right]. \quad (4.48)$$

Avec cette expression, nous pouvons écrire aisément la matrice  $M^*M$  (équation 4.16)

$$M^*M = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

FIG. 4.16 – Expression de  $M^*M$  pour la direction  $(1, 2)$  pour une image  $3 \times 3$ .

Avec le formalisme décrit dans [14], la matrice peut être réécrite comme :

$$M^*M = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} f(0,0) & f(1,0) & f(2,0) & f(0,1) & f(1,1) & f(2,1) & f(0,2) & f(1,2) & f(2,2) \\ f(-1,0) & & & f(-1,1) & & & f(-1,2) & & \\ f(-2,0) & & & f(-2,1) & & & f(-2,2) & & \\ \hline f(0,-1) & f(1,-1) & f(2,-1) & f(0,0) & f(1,0) & f(2,0) & f(0,1) & f(1,1) & f(2,1) \\ f(-1,-1) & & & f(-1,0) & & & f(-1,1) & & \\ f(-2,-1) & & & f(-2,0) & & & f(-2,1) & & \\ \hline f(0,-2) & f(1,-2) & f(2,-2) & f(0,-1) & f(1,-1) & f(2,-1) & f(0,0) & f(1,0) & f(2,0) \\ f(-1,-2) & & & f(-1,-1) & & & f(-1,0) & & \\ f(-2,-2) & & & f(-2,-1) & & & f(-2,0) & & \end{array}$$

avec

$$f(a, b) = \sum_{p,q} \Delta [-qa + pb] .$$

#### 4.5.1.2 $M^*M$ est une matrice Toeplitz Bloc Toeplitz

Si on considère deux pixels sur la même ligne dans l'image de départ translattés d'une ligne, leur coefficient dans la matrice  $M^*M$  sera translatté de  $N$  lignes et  $N$  colonnes dans  $M^*M$ . Si ces deux pixels alignés sont translattés d'une colonne dans l'image de départ, leur coefficient sera translatté d'une ligne et une colonne dans  $M^*M$ .

Si  $(i, j)$  et  $(i + 1, j + 1)$  appartiennent au même bloc *i.e.* si  $\lfloor \frac{i+1}{N} \rfloor = \lfloor \frac{i}{N} \rfloor$  et  $\lfloor \frac{j+1}{N} \rfloor = \lfloor \frac{j}{N} \rfloor$  alors :

$$\begin{aligned} -q \left( i + 1 - N \left\lfloor \frac{i+1}{N} \right\rfloor \right) + q \left( j + 1 - N \left\lfloor \frac{j+1}{N} \right\rfloor \right) + p \left\lfloor \frac{i+1}{N} \right\rfloor - p \left\lfloor \frac{j+1}{N} \right\rfloor = \\ -q \left( i - N \left\lfloor \frac{i}{N} \right\rfloor \right) + q \left( j - N \left\lfloor \frac{j}{N} \right\rfloor \right) + p \left\lfloor \frac{i}{N} \right\rfloor - p \left\lfloor \frac{j}{N} \right\rfloor , \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{M^* M_{(i+1, j+1)} = M^* M_{(i, j)}} \quad (4.49)$$

et  $M^* M$  est composée de blocs Toeplitz.

De plus,

$$\begin{aligned} -q \left( i + N - N \left\lfloor \frac{i+N}{N} \right\rfloor \right) + q \left( j + N - N \left\lfloor \frac{j+N}{N} \right\rfloor \right) + p \left\lfloor \frac{i+N}{N} \right\rfloor - p \left\lfloor \frac{j+N}{N} \right\rfloor = \\ -q \left( i - N \left\lfloor \frac{i}{N} \right\rfloor \right) + q \left( j - N \left\lfloor \frac{j}{N} \right\rfloor \right) + p \left\lfloor \frac{i}{N} \right\rfloor - p \left\lfloor \frac{j}{N} \right\rfloor , \end{aligned}$$

nous déduisons donc que

$$\boxed{M^* M_{(i+N, j+N)} = M^* M_{(i, j)}} \quad (4.50)$$

et nous pouvons conclure que  $M^* M$  est Toeplitz bloc Toeplitz.

### 4.5.2 Conditionnement de $M^* M$

Comme  $M^* M$  est une matrice carrée inversible, son conditionnement est donné par :

$$\text{cond}(M^* M) = \|M^* M\| \cdot \|(M^* M)^{-1}\| \quad (4.51)$$

Cette expression donne comme résultat, quand elle est calculée avec la norme  $L_2$  :

$$C_2 = \text{cond}_2(M^* M) = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|} , \quad (4.52)$$

où  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $M^* M$ .

Pour une matrice Toeplitz bloc Toeplitz, les valeurs propres asymptotiques peuvent être calculées comme décrit dans [14] en travaillant dans le domaine de Fourier.

Pour une image  $16 \times 16$ , la Table 4.1 donne le conditionnement exact de la matrice  $M^* M$  et ses approximations avec différents nombres d'angles.

### 4.5.3 Algorithme du gradient conjugué

L'algorithme du gradient conjugué est un algorithme bien connu pour résoudre les problèmes inverses fondés sur la minimisation d'un critère [27, 19]. Nous définissons une solution estimée, notée  $pix$ , comme l'image qui minimise le critère des moindres carrés :

$$J(pix) = \|bin - Mpix\|^2, \quad (4.53)$$

TAB. 4.1 – Comparaison du conditionnement exact et approximé de  $M^*M$ .

| angles | exact $C_\infty$ | approximé $C_2$ |
|--------|------------------|-----------------|
| 32     | 18.04            | 28.96           |
| 64     | 8.13             | 8.22            |
| 128    | 3.83             | 4.74            |
| 256    | 2.34             | 2.72            |

où  $pix$  est la matrice de pixels et  $bin$  le vecteur des bins projetés. De manière équivalente  $pix$  annule le gradient de  $J$ , c'est-à-dire

$$M^*Mpix = M^*bin. \quad (4.54)$$

Dans notre cas, nous avons utilisé la forme standard du gradient conjugué décrite dans [61, p. 111] :

$$\left\{ \begin{array}{l} pix_0 \text{ donné} \\ r_0 = M^*bin - M^*Mpix_0 \\ d_0 = r_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots \\ \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T M^* M d_k} \\ pix_{k+1} = pix_k + \alpha_k d_k \\ r_{k+1} = r_k - \alpha_k M^* M d_k \\ \beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k} \\ d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} d_k \end{array} \right.$$

où  $r_k = -\nabla J(pix_k)/2 = M^*bin - M^*Mpix_k$  et  $\alpha_k, d_k$  sont les valeurs courantes du pas et de la direction de descente.

#### 4.5.4 Résultats de reconstruction

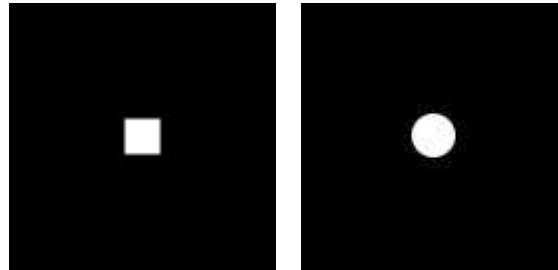
La première image de test est une image  $128 \times 128$  avec un carré central de taille  $17 \times 17$  avec 1 en son centre de taille  $15 \times 15$ , le fond est de  $\frac{1}{4}$ , les bords de  $\frac{5}{8}$  ( $\frac{5}{8} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4})$ ) et les coins du carré à  $\frac{7}{16}$  ( $\frac{7}{16} = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ ) (figure 6.11a). La seconde image de test est un disque de diamètre 21 pixels. La valeur des pixels sur les bords du disque dépend de la surface interceptée par le disque sur le pixel (figure 6.11b).

Les projections sont obtenues par projection Mojette Dirac et sont prises uniformément réparties sur  $[0, \pi[$  (pour le choix des angles, se référer à la section 6.3).

En l'absence de bruit sur les projections, les images sont parfaitement reconstruites pour un nombre d'itérations faible dès que le nombre de projections atteint la taille de l'image (Table 4.2) [46].

## 4.6 Conclusion

Nous venons de présenter une version discrète de la transformée de Radon et quelques-unes de ses propriétés. En exploitant ces propriétés et les liens avec la géométrie discrète, nous avons mis au



(a) fantôme carré  
128 × 128

(b) fantôme rond  
128 × 128

FIG. 4.17 – Images de test.

TAB. 4.2 – Nombre d'itérations pour une reconstruction exacte par gradient conjugué Mojette sans bruit.

| fantôme | 32 projections | 64 projections | 128 projections | 256 projections | 512 projections |
|---------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| carré   | 1366           | 82             | 31              | 22              | 14              |
| rond    | 2785           | 147            | 35              | 24              | 16              |

point une nouvelle méthode de reconstruction tomographique totalement discrète. Cette méthode permet en plus une reconstruction même si le nombre d'angles requis pour la reconstruction n'est pas atteint. Nous avons montré que la reconstruction était possible avec cette méthode en interpolant un petit nombre de projections.

L'opérateur Mojette de projection combiné à l'opérateur de rétroprojection présente une structure Toeplitz bloc Toeplitz. Il se prête bien à la mise en œuvre de l'algorithme de gradient conjugué.

Le chapitre suivant va consolider cette approche en revisitant l'algorithme standard existant en méthode directe, c'est-à-dire la rétroprojection de projections filtrées appelé FBP (*Filtered Backprojection*).

## Chapitre 5

# Application de la tomographie Mojette discrète aux algorithmes standards de la tomographie

### Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Modèle de pixel</b>                              | <b>100</b> |
| 5.1.1      | Modèle de pixel général                             | 100        |
| 5.1.2      | Modèle de pixel Dirac                               | 100        |
| 5.1.3      | Modèle de pixel spline                              | 101        |
| 5.1.4      | Théorème général d'échantillonnage d'Unser-Aldroubi | 102        |
| <b>5.2</b> | <b>Opérateur Mojette</b>                            | <b>103</b> |
| 5.2.1      | Transformation Mojette généralisée                  | 103        |
| 5.2.1.1    | Projection Mojette                                  | 103        |
| 5.2.1.2    | Rétroprojection Mojette                             | 104        |
| 5.2.2      | Transformation Mojette Dirac                        | 105        |
| 5.2.3      | Transformation Mojette spline                       | 105        |
| <b>5.3</b> | <b>Rétroprojection filtrée Mojette</b>              | <b>106</b> |
| 5.3.1      | Algorithme  | 106        |
| 5.3.2      | Filtres   | 106        |
| 5.3.2.1    | Le filtre de RamLak                                 | 106        |
| 5.3.2.2    | Le filtre $k_0$                                     | 107        |
| 5.3.2.2.1  | Cas continu   | 107        |
| 5.3.2.2.2  | Discrétisation                                      | 109        |
| 5.3.2.3    | Le filtre $k_1$                                     | 112        |
| 5.3.2.3.1  | Cas continu   | 112        |
| 5.3.2.3.2  | Discrétisation                                      | 112        |



|            |  |            |
|------------|--|------------|
| 5.3.2.4    | Le filtre $K_n$ . . . . .  | 113        |
| 5.3.3      | Equivalence continu-discret . . . . .  | 113        |
| 5.3.3.1    | A l'ordre 0 . . . . .  | 113        |
| 5.3.3.2    | Ordre $n$ . . . . .  | 114        |
| 5.3.4      | Comparaison de la rétroprojection filtrée Mojette Dirac et spline 0 . . . . .  | 114        |
| 5.3.5      | Étude de l'espace nul lors d'une reconstruction $M_\delta^* K_0 M_0$ . . . . . | 115        |
| <b>5.4</b> | <b>Conclusion</b> . . . . .  | <b>117</b> |

---

Après la reconstruction tomographique fondée sur des méthodes purement discrètes, nous avons mis en place une version Mojette des algorithmes traditionnellement développés en tomographie.

Pour pouvoir utiliser ces algorithmes, les objets vont être discrétisés dans des bases de fonctions. Le choix d'une base judicieuse va permettre d'obtenir une équivalence continue/discrète pour toutes les étapes de la reconstruction de l'objet.

Nous avons utilisé le filtre RamLak et un filtre défini par Guédon et Bizais [38] fondé sur le modèle de pixel spline 0. La discrétisation de ces filtres nous a permis de dériver un schéma de rétroprojection filtrée Mojette et une équivalence continue/discrète de manière récurrente sur l'ordre de spline du modèle de pixel utilisé.

Nous avons étendu la définition de l'opérateur Mojette en fonction du modèle de pixel choisi. Une fois l'opérateur fixé, le choix du filtre va permettre une reconstruction par rétroprojection filtrée.

## 5.1 Modèle de pixel

### 5.1.1 Modèle de pixel général

L'utilisation d'un modèle de pixel  $pm$  permet de décrire un objet  $f(x, y)$  dans différentes bases. Avec un modèle de pixel quelconque  $\{pm(x - k, y - l), k, l \in \mathbb{Z}\}$ , l'objet  $f(x, y)$  va s'écrire :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} f(k, l) pm(x - k, y - l). \quad (5.1)$$

### 5.1.2 Modèle de pixel Dirac

L'objet peut être décrit sur une base Dirac si  $pm(x) = \delta(x)$  où  $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ .

La base de Dirac est séparable :  $\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$ , donc la discrétisation de l'objet s'écrit :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} f(k, l) \delta(x - k) \delta(y - l). \quad (5.2)$$

Ce modèle simple pour l'échantillonnage n'est pas riche en terme d'interpolation.

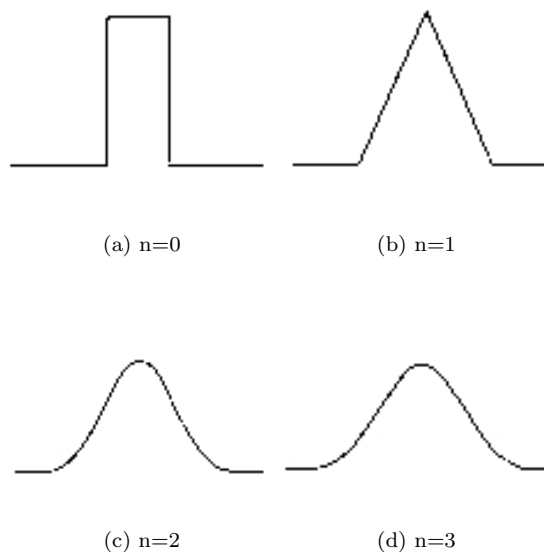


FIG. 5.1 – B-spline de degrés 0 à 3 [85].

### 5.1.3 Modèle de pixel spline

L'objet peut aussi être décrit par un modèle de pixel spline. Les splines forment une base de Riesz.

Une base de Riesz  $\{\psi_k\}_k$  est une famille de fonctions dans un espace de Hilbert telles que :

$$A \sum_i |c_i|^2 \leq \left\| \sum_i c_i \psi_i \right\|^2 \leq B \sum_i |c_i|^2 \quad (5.3)$$

avec  $0 < A \leq B < \infty$  pour des  $c_i$  quelconques.

De plus les splines sont séparables :  $\beta_n(x, y) = \beta_n(x)\beta_n(y)$ .

Les ordres de spline sont reliés par une relation de récurrence :

$$\beta_n(x) = \underbrace{\beta_0 * \beta_0 * \dots * \beta_0(x)}_{(n+1) \text{ fois}} \quad (5.4)$$

où  $\beta_0$  est la fonction porte de longueur unitaire :

$$\beta_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.5)$$

Différents ordres de splines sont représentés sur la Figure 5.1.3.

La discrétisation d'une fonction continue  $f(x, y)$  va alors s'écrire [2] :

$$f_0(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \beta_n(x - k) \beta_n(y - l). \quad (5.6)$$

### 5.1.4 Théorème général d'échantillonnage d'Unser-Aldroubi

Pour obtenir un signal discret, une infinité de fonctions d'interpolation peuvent être choisies.

Définir une fonction d'interpolation  $\varphi$  revient à projeter la fonction continue de départ  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  dans le sous-espace  $V$  de  $L_2$  généré par la fonction  $\varphi$ . Trouver l'approximation d'erreur minimale sur  $V$  de  $f$  selon la norme  $L_2$  :

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle, \quad (5.7)$$

revient à trouver la projection orthogonale de  $f(x)$  sur  $V$ .

$L_2(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des fonctions  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  mesurables, de carré intégrable. C'est un espace de Hilbert dont la norme  $L_2$  est définie à partir du produit vectoriel :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x) dx. \quad (5.8)$$

Un opérateur de convolution inversible est une série  $b^{-1}(k)$  telle que :

$$b^{-1} * b(k) = \delta_{k,0}, \text{ avec } \delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}. \quad (5.9)$$

Dans ce cas de figure Unser et Aldroubi ont montré [2] :

**Théorème 1** *L'espace  $V = \{f_\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(k)\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}, d \in L_2\}$  est un sous-espace clos de  $L_2$  avec  $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  comme base de Riesz-Schauder si et seulement si  $b(k) = \langle \varphi(x), \varphi(x-k) \rangle$  est un opérateur de convolution inversible de  $L_2$ . De plus, la projection orthogonale d'une fonction  $f$  dans  $L_2$  est donnée par*

$$f_\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f(x), \overset{\circ}{\varphi}(x-k) \rangle \varphi(x-k),$$

où la fonction duale  $\overset{\circ}{\varphi}(x)$  appartient à  $L_2(\mathbb{R})$  et est donné par :

$$\overset{\circ}{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (b)^{-1}(k)\varphi(x-k).$$

**Théorème 2** *Une séquence  $a(k)$  dans  $l_2$  définit un opérateur de convolution inversible de  $l_2$  dans lui-même si et seulement si il existe deux constantes  $m$  et  $M$  telles que :*

$$0 < m \leq M \text{ et } m \leq A(\nu) \leq M, \text{ ou } A(\nu) \text{ est la transformation de Fourier de } a(k)$$

Le théorème 1 peut être vu comme une extension de la théorie d'échantillonnage de Shannon [2].

Le schéma général d'échantillonnage est décrit sur la figure 5.2. Il se décompose en trois étapes : préfiltrage, échantillonnage et post-filtrage. Le filtrage consiste à projeter la fonction dans le sous-espace  $V$  où elle sera ensuite échantillonnée et donnera les coefficients  $f(k,l)$ . Pour obtenir une approximation du signal de départ, il faudra interpoler les valeurs échantillonnées à l'aide de  $\varphi$ .

Dans les cas particuliers d'une fonction génératrice  $\varphi = \text{sinc}$  ou de la fonction spline 0, on obtient  $\overset{\circ}{\varphi} = \varphi$ .

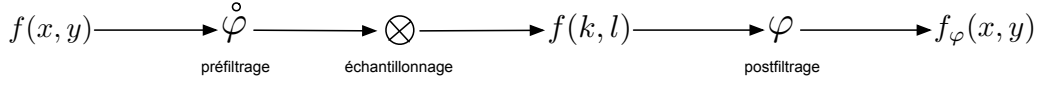


FIG. 5.2 – Schéma général d'échantillonnage.

## 5.2 Opérateur Mojette

Un des points principaux de la définition de la transformation Mojette est le choix du modèle de pixel utilisé pour discrétiser l'objet continu. Le choix du modèle de pixel définit l'opérateur Mojette.

### 5.2.1 Transformation Mojette généralisée

#### 5.2.1.1 Projection Mojette

À partir d'un modèle de pixel général (équation 5.1), on peut définir un opérateur Mojette générique à partir de la transformée de Radon (équation 4.3) :

$$proj(t, \theta) = \sum_k \sum_l f(k, l) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} pm(x - k, y - l) \delta(t + x \sin \theta - y \cos \theta) dx dy. \quad (5.10)$$

Les projections sont discrétisées avec un échantillonnage Mojette selon l'équation 4.7 :

$$proj(b, p, q) = \sum_k \sum_l f(k, l) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} pm(x - k, y - l) \delta(b + qx - py) dx dy. \quad (5.11)$$

En considérant une image avec seulement un pixel en son centre, la projection du modèle de pixel  $pm$  dans une direction  $(p, q)$  est :

$$pmp(b, p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} pm(x, y) \delta(b + qx - py) dx dy. \quad (5.12)$$

En effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} x' = x - k \\ y' = y - l \end{cases}, \quad (5.13)$$

dans l'équation 5.11, on a :

$$\begin{aligned} proj(b, p, q) &= \sum_k \sum_l f(k, l) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} pm(x', y') \delta(b + q(x' + k) - p(y' + l)) dx' dy' \\ &= \sum_k \sum_l f(k, l) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} pm(x', y') \delta(b' + qx' - py') dx' dy', \end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $b' = b + qk - pl$ .

D'où avec l'équation 5.12 dans l'équation 5.14, on obtient finalement :

$$proj(b, p, q) = \sum_k \sum_l f(k, l) pmp(b + qk - pl, p, q). \quad (5.15)$$

De l'équation 5.15 on peut déduire :

$$\begin{aligned} proj(b, p, q) &= \sum_k \sum_l f(k, l) pmp(b + qk - pl, p, q) \\ &= \sum_m \sum_k \sum_l f(k, l) \Delta(m + qk - pl) pmp(b - m, p, q) \\ &= \sum_m proj_\delta(m, p, q) pmp(b - m, p, q). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Donc :

$$proj(b, p, q) = proj_\delta(b, p, q) *_b pmp(b + qk - pl, p, q), \quad (5.17)$$

où  $*_b$  indique la convolution discrète sur  $b$ .

**En conclusion, quel que soit le modèle de pixel, la projection Mojette peut s'écrire comme la convolution de la projection Dirac par la projection du modèle de pixel utilisé.**

### 5.2.1.2 Rétroprojection Mojette

La rétroprojection Mojette est l'opération duale de la projection Mojette. Dans le cas général elle s'écrit :

$$\tilde{f}(k, l) = \sum_{p,q} \sum_b proj(b, p, q) \int_x \int_y pm(x - k, y - l) \delta(b + qx - py) dx dy. \quad (5.18)$$

Avec le changement de variables (5.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k, l) &= \sum_{p,q} \sum_b proj(b, p, q) \int_x \int_y pm(x', y') \delta(b + q(x' + k) - p(y' + l)) dx' dy' \\ &= \sum_{p,q} \sum_b proj(b, p, q) \int_x \int_y pm(x', y') \delta(b' + qx' - py') dx' dy' \end{aligned} \quad (5.19)$$

où  $b' = b + qk - pl$ .

D'où avec l'équation 5.12 dans l'équation 5.19 :

$$\tilde{f}(k, l) = \sum_{p,q} \sum_b proj(b, p, q) pmp(b + qk - pl, p, q). \quad (5.20)$$

De l'équation 5.20 on peut déduire :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k, l) &= \sum_{p,q} \sum_b proj(b, p, q) pmp(b + qk - pl, p, q) \\ &= \sum_{p,q} \sum_b \sum_m proj(b, p, q) \Delta(m + qk - pl) pmp(-(m - b), p, q) \\ &= \sum_{p,q} \sum_m \sum_b proj(b, p, q) pmp(-(m - b), p, q) \Delta(m + qk - pl) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Donc :

$$\tilde{f}(k, l) = \sum_{p, q} \sum_m \text{proj}(m, p, q) \star_b p m p(-m, p, q) \Delta(m + qk - pl). \quad (5.22)$$

**Quel que soit le modèle de pixel, la rétroprojection Mojette peut s'écrire comme la rétroprojection Dirac de la projection convoluée par le symétrique du projeté du modèle de pixel.**

### 5.2.2 Transformation Mojette Dirac

La première transformation Mojette écrite est celle présentée dans la section 4.2.1.1 (équation 4.8). Elle correspond à la transformation Mojette généralisée utilisée avec un modèle de pixel Dirac :

$$[M_\delta f](b, p, q) = \text{proj}_\delta(b, p, q) \quad (5.23)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \Delta(b + kq - pl), \quad (5.24)$$

$$\text{avec } \Delta(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

### 5.2.3 Transformation Mojette spline

En utilisant le modèle de pixel spline (équation 5.6) dans (équation 5.10), nous obtenons une nouvelle version de l'opérateur Mojette :

$$M_n f(k, l) = \text{proj}_n(b, p, q) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) \text{noyau}_n(k, l, b, p, q), \quad (5.25)$$

avec

$$\text{noyau}_n(k, l, b, p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(x - k) \beta_n(y - l) \delta(b + qx - py) dx dy. \quad (5.26)$$

Si nous nous plaçons dans le cas des spline 0, l'expression  $\text{noyau}_0$  correspond à un filtre trapézoïdal discret. Ce filtre est défini dans [64] comme une convolution discrète de deux suites de valeurs unitaires de longueur respective  $p$  et  $q$  :

$$\text{noyau}_0(b, p, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \text{ ou } q = 0, \\ \frac{1}{pq} \underbrace{(1..1)}_p * \underbrace{(1..1)}_q & \text{si } p \text{ et } q \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2pq} * (11) * \underbrace{(1..1)}_p * \underbrace{(1..1)}_q & \text{et } p \text{ ou } q \text{ sont pairs.} \end{cases} \quad (5.27)$$

L'expression de  $\text{noyau}_0(b, p, q)$  correspond à la projection du modèle de pixel spline 0 sur la géométrie Mojette dans la direction  $(p, q)$  [64]. Cela nous permet de relier les expressions des transformations Mojette spline 0 et Dirac :

$$\text{proj}_0(b, p, q) = \text{proj}_\delta(b, p, q) * \text{noyau}_0(b, p, q). \quad (5.28)$$

Cette expression s'écrit à l'ordre  $n$  comme :

$$proj_0(b, p, q) = proj_\delta(b, p, q) * \underbrace{noyau_0(b, p, q) * noyau_0(b, p, q) * \cdots * noyau_0(b, p, q)}_{n+1}. \quad (5.29)$$

La mise en œuvre du filtre  $noyau_0$  se fait par simples additions et décalages comme décrit dans [64].

## 5.3 Rétroprojection filtrée Mojette

La rétroprojection filtrée Mojette (ou MFBP *Mojette Filtered Backprojection*) est une adaptation en géométrie Mojette de l'algorithme de FBP (section 3.2.4) [75].

### 5.3.1 Algorithme

L'algorithme de reconstruction MFBP suit les étapes de l'algorithme de FBP classique. Il se compose de :

1. choix du modèle de pixel,
2. projection Mojette,
3. filtrage,
4. rétroprojection Mojette.

Le choix du modèle de pixel fixe le projecteur Mojette utilisé. Une fois les projections obtenues, elles sont filtrées. L'étape de filtrage des projections peut être effectuée dans le domaine spatial ou dans le domaine de Fourier. Avant d'être utilisé, le filtre doit être échantillonné en géométrie Mojette.

Les filtres utilisés sont le filtre de RamLak et le filtre  $k_0$  défini par Guédon et Bizais dans [38].

La rétroprojection est donnée par la rétroprojection Mojette Dirac.

### 5.3.2 Filtres

#### 5.3.2.1 Le filtre de RamLak

Le filtre de Ramachandran et Lacksminarayanan (RamLak) est un filtre très connu en reconstruction filtrée. Dans le domaine de Fourier, son expression est :

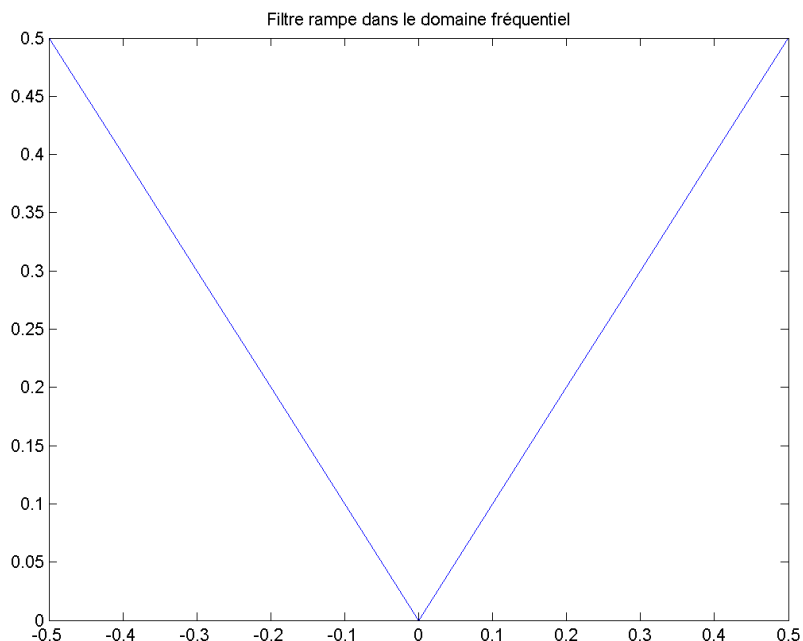
$$\mathcal{F}([k(t)]) = K(\nu) = |\nu| \text{rect}_{\nu_\beta}(\nu). \quad (5.30)$$

Ce filtre a la forme d'une rampe tronquée dans le domaine fréquentiel.

Dans le domaine spatial, il a pour expression :

$$k(t) = \frac{1}{2} \left( \nu_\beta^2 \frac{\sin(2\pi\nu_\beta t)}{2\pi\nu_\beta t} - \frac{\nu_\beta^2}{2} \left[ \frac{\sin(\pi\nu_\beta t)}{\pi\nu_\beta t} \right]^2 \right) \quad (5.31)$$

Le détail des calculs est donné dans l'annexe B


 FIG. 5.3 – Représentation fréquentielle du filtre rampe ( $\nu_\beta = 0, 5$ ).

En respectant la condition de Shannon avec  $k = \frac{1}{2\nu_\beta}$ , l'équation 5.31 est discrétisée en fonction du pas d'échantillonnage  $\tau$  [47][p72] :

$$k(n\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4\tau^2} & \text{si } n = 0, \\ \frac{-1}{n^2\pi^2\tau^2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \quad (5.32)$$

Ce filtre (équation 5.32) se discrétise facilement en géométrie Mojette avec  $\tau = \frac{\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}}$  le pas d'échantillonnage sur la projection dans la direction  $(p, q)$  pour un objet dont la taille de pixel est  $\Delta$ .

### 5.3.2.2 Le filtre $k_0$

Dans cette section la notation  $k_0$  indique le filtre  $k_0$  dans le domaine spatial et la notation  $K_0$  indique le même filtre mais dans le domaine de Fourier.

**5.3.2.2.1 Cas continu** Le filtre  $k_0$  a été défini dans [38] à partir de la projection du modèle de pixel spline 0. Le pixel spline 0 est un pixel d'intensité constante sur toute la surface du pixel. Utiliser un modèle de pixel spline 0 revient à effectuer une sommation continue sur la ligne d'intégration. La projection du modèle de pixel spline 0 est trapézoïdale (Figure 5.4).



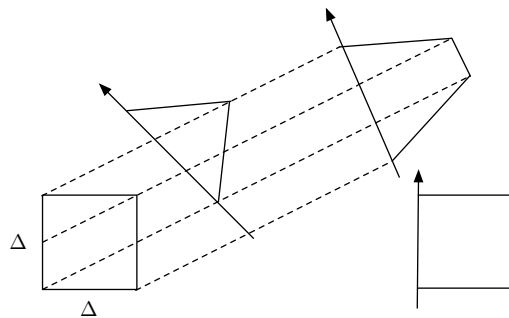


FIG. 5.4 – Projection du modèle de pixel spline 0. Pour un angle de projection  $\theta = 0$ , la projection est un carré de mêmes caractéristiques que le pixel, pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  la projection est de forme trapézoïdale et pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  la projection est un triangle isocèle.

Si on écrit le modèle de pixel spline 0 de façon dépendante de la taille du pixel  $\Delta$  [38], on obtient :

$$\beta_{0,\Delta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t| = \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (5.33)$$

En utilisant cette formulation, la projection du modèle de pixel spline 0 dans la direction  $\theta$  s'écrit [38] :

$$w_0(t, \theta) = \beta_{0,\Delta \cos \theta}(t) * \beta_{0,\Delta \sin \theta}(t), \quad (5.34)$$

ce qui donne dans le domaine de Fourier :

$$W_0(\nu, \theta) = \Delta^2 \text{sinc}(\nu \cos \theta) \text{sinc}(\nu \sin \theta). \quad (5.35)$$

$W_0(\nu, \theta)$  oscille pour des  $\theta$  multiples de  $\frac{\pi}{2}$  mais s'adoucit pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (Figure 5.5).

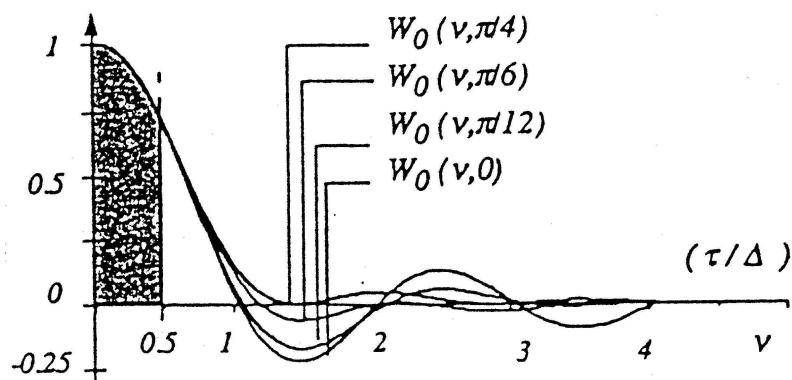


FIG. 5.5 – Représentation de  $W_0(\nu, \theta)$ [38]

En ajoutant une étape de filtrage par le filtre rampe à l'expression précédente l'équation 5.35, le filtre  $K_0$  dans le domaine de Fourier va s'écrire :

$$K_0(\nu, \theta) = \Delta^2 \pi |\nu| \operatorname{sinc}(\nu \Delta \cos \theta) \operatorname{sinc}(\nu \Delta \sin \theta). \quad (5.36)$$

Dans le domaine spatial, le filtre  $k_0$  s'écrit [36] :

$$k_0(t, \theta) = \frac{1}{\pi \sin 2\theta} \left( \ln \left| t^2 - \frac{\Delta^2}{4} (1 + \sin 2\theta) \right| - \ln \left| t^2 - \frac{\Delta^2}{4} (1 - \sin 2\theta) \right| \right), \quad (5.37)$$

pour  $\theta \in ]0, \pi/4[$ .

**5.3.2.2.2 Discrétisation** Le filtre  $k_0$  va ensuite être discrétisé en géométrie Mojette avec  $t = \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}}$  et  $\tan \theta = \frac{q}{p}$ , pour  $p, q \notin \{0,1\}$ . Nous obtenons dans le cas général :

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{(p+q)^2}{p^2 + q^2} - 1 = -\frac{(p-q)^2}{p^2 + q^2} + 1 \quad (5.38)$$

D'où

$$k_0(b, p, q) = \frac{p^2 + q^2}{2\pi pq} \ln \left| \frac{b^2 - (\frac{p+q}{2})^2}{b^2 - (\frac{p-q}{2})^2} \right| \quad (5.39)$$

Si  $\theta = 0$ , c'est-à-dire pour  $q=0$  et  $p=1$ , on obtient :

$$K_0(\nu, 0) = \pi \Delta |\nu| \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} = \Delta \operatorname{sign}(\nu) \sin(\pi \nu) \quad (5.40)$$

D'après [54] :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\operatorname{sign}(x) \sin 2\pi b x) &= -\frac{1}{\pi} \frac{b}{\nu^2 - b^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(x) \sin(2\pi b x) e^{-2\pi i x \nu} dx. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{F}^{-1}(\operatorname{sign}(\nu) \sin 2\pi b \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(\nu) \sin(2\pi b \nu) e^{2\pi i \nu x} d\nu$$

En faisant le changement de variable  $\nu \rightarrow -\xi$

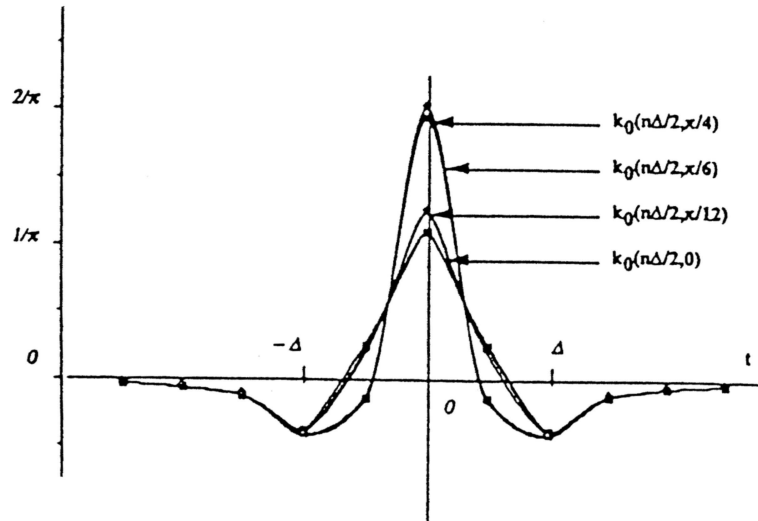
$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(\xi) \sin(2\pi b \xi) e^{-2\pi i \xi x} d\nu \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{b}{x^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Donc pour  $K_0(t, 0)$  par transformation inverse de Fourier :

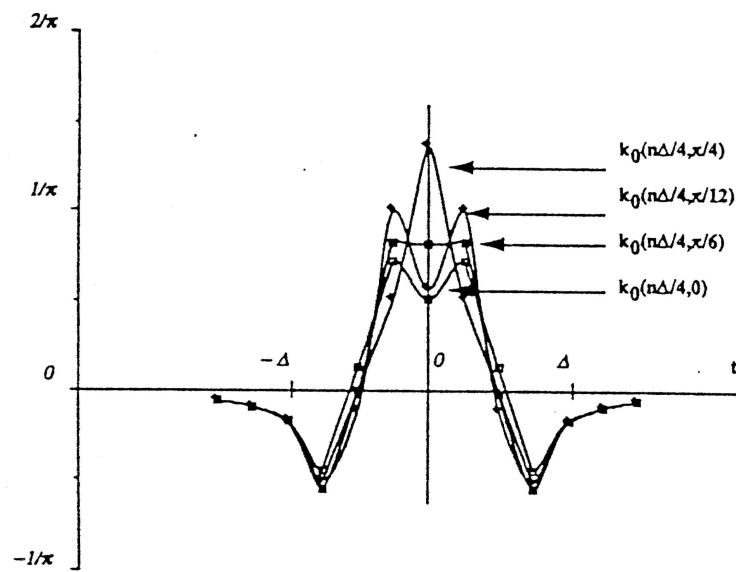
$$k_0(t, 0) = -\frac{1}{\pi} \frac{2\Delta}{4t^2 - 1}. \quad (5.41)$$

D'où en discrétisant avec  $t = b\Delta$  ( $p = 1, q = 0$ ) :

$$k_0(b, 1, 0) = -\frac{\Delta}{\pi} \frac{2}{4b^2\Delta^2 - 1}. \quad (5.42)$$



(a)



(b)

FIG. 5.6 – (a) Représentation de  $k_0(n\Delta/2, \theta)$ , (b) Représentation de  $k_0(n\Delta/4, \theta)$  [38].

Si  $b = 0$ , dans le cas général on obtient :

$$k_0(0, p, q) = \frac{p^2 + q^2}{\pi pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|. \quad (5.43)$$

### 5.3 Rétroprojection filtrée Mojette

---

Cette formule est valable pour  $\theta \neq 0$  et  $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ .

Si  $\theta = 0$ , c'est-à-dire si  $q = 0$ , l'expression de  $k_0$  est :

$$k_0(b, 1, 0) = -\frac{2\Delta}{\pi(4b^2\Delta^2 - 1)} \quad (5.44)$$

d'où

$$k_0(0, 1, 0) = \frac{2\Delta}{\pi}. \quad (5.45)$$

Il subsiste néanmoins des problèmes de discontinuité.

Dans le cas où  $b = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (i.e.  $p = 1, q = 1$ ), on obtient :

$$k_0(0, 1, 1) \rightarrow +\infty$$

Un autre cas beaucoup plus fréquent de discontinuité est lorsque  $b = \frac{p+q}{2}$  ou  $b = \frac{p-q}{2}$ .

Si  $p = 2k + 1$  et  $q = 2l + 1$ , on obtient  $b = k + l + 1$  ou  $b = k - l$  qui correspondent à des points échantillonnés. Si  $p = 2k + 1$  et  $q = 2l$ , on obtient  $b = k + l + \frac{1}{2}$  ou  $b = k - l + \frac{1}{2}$  et on n'est pas sur un point échantillonné, de même pour  $p = 2k$  et  $q = 2l + 1$ . Le cas  $p$  et  $q$  tous les deux pairs est absent car  $PGCD(p, q) = 1$ . Donc si  $p$  et  $q$  sont tous deux impairs, il existe deux points de discontinuité. Ils apparaissent car le filtre rampe agit comme un dérivateur.

Pour résoudre le problème, nous allons utiliser une condition de Dirichlet. Pour chaque point de discontinuité  $b$  la valeur du filtre sera la moyenne des valeurs calculées à  $b + 0.5$  et  $b - 0.5$ .

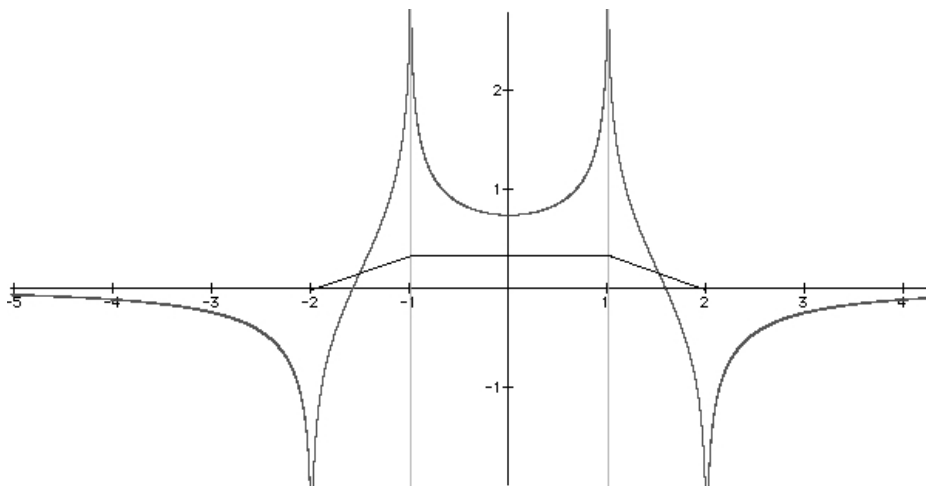


FIG. 5.7 – Filtre  $k_0$  dans la direction  $(1, 3)$  et la projection trapézoïdale du modèle de pixel spline 0 correspondante.

Ce filtre donne un algorithme de rétroprojection filtrée exact s'il est utilisé avec une infinité de projections.

### 5.3.2.3 Le filtre $k_1$

**5.3.2.3.1 Cas continu** Pour obtenir le filtre  $k_1$ , on peut suivre le même raisonnement que précédemment avec un modèle de pixel spline 1.

Le modèle de pixel spline 1,  $\beta_1$ , s'écrit comme :

$$\beta_{1,\Delta}(t) = \beta_{0,\Delta} * \beta_{0,\Delta}(t). \quad (5.46)$$

La projection de ce modèle de pixel dans la direction  $\theta$  va donc s'écrire comme  $w_0(t, \theta) * w_0(t, \theta)$ .

Cela va donner pour  $K_1(\nu, \theta)$  dans le domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} K_1(\nu, \theta) &= \pi |\nu| \Delta^4 \text{sinc}(\nu \Delta \cos \theta)^2 \text{sinc}(\nu \Delta \sin \theta)^2 \\ &= K_0(\nu, \theta) \times W_0(\nu, \theta). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Après calculs, le filtre  $k_1$  donne dans le cas continu, dans le domaine spatial (voir Annexe C.1) :

$$k_1(t, \theta) = \frac{1}{2\pi \sin^2 2\theta} \times \begin{bmatrix} 8t^2 \ln |t| \\ -4(t - \Delta \sin \theta)^2 \ln |t - \Delta \sin \theta| \\ -4(t + \Delta \sin \theta)^2 \ln |t + \Delta \sin \theta| \\ -4(t - \Delta \cos \theta)^2 \ln |t - \Delta \cos \theta| \\ -4(t + \Delta \cos \theta)^2 \ln |t + \Delta \cos \theta| \\ +2(t + \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta)^2 \ln |t + \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta| \\ +2(t + \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta)^2 \ln |t + \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta| \\ +2(t - \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta)^2 \ln |t - \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta| \\ +2(t - \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta)^2 \ln |t - \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta| \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

Dans le cas particulier où  $\theta = 0$ ,  $k_1$  s'écrit (Annexe C.1.2) :

$$k_1(t, 0) = -\frac{\Delta}{2\pi} \left[ 2 \ln |t| - \ln |t + \Delta| - \ln |t - \Delta| \right] \quad (5.49)$$

**5.3.2.3.2 Discrétisation** Comme le filtre  $k_0$ , le filtre  $k_1$  va ensuite être discrétisé en géométrie Mojette avec  $t = \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}}$  et  $\tan \theta = \frac{q}{p}$ , pour  $p, q \notin \{0,1\}$ . Nous obtenons dans le cas général (Annexe C.2) :

$$k_1(b, p, q) = \frac{\Delta^2(p^2+q^2)}{8\pi p^2 q^2} \times \begin{bmatrix} 8b^2 \ln |b| \\ -4(b-q)^2 \ln |b-q| \\ -4(b+q)^2 \ln |b+q| \\ -4(b-p)^2 \ln |b-p| \\ -4(b+p)^2 \ln |b+p| \\ +2(b+p+q)^2 \ln |b+p+q| \\ +2(b+p-q)^2 \ln |b+p-q| \\ +2(b-p+q)^2 \ln |b-p+q| \\ +2(b-p-q)^2 \ln |b-p-q| \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Pour des points comme  $b = \pm p$ ,  $b = \pm q$ ,  $b = 0$  nous utilisons  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x \rightarrow 0$ . Il reste une singularité pour l'angle (1, 1) et nous allons utiliser une interpolation.

### 5.3.2.4 Le filtre $K_n$

Pour obtenir le filtre  $K_n$  il suffit d'utiliser la relation de récurrence entre les différents ordres du filtre :

$$\begin{aligned} K_1(\nu, \theta) &= K_{n-1}(\nu, \theta) \times W_0(\nu, \theta) \\ &= K_0(\nu, \theta) \times W_0(\nu, \theta). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Le filtre  $K_n$  va s'écrire comme :

$$K_n(\nu, \theta) = K_0(\nu, \theta) \times \underbrace{W_0(\nu, \theta) \times \dots \times W_0(\nu, \theta)}_{n \text{ fois}}, \quad (5.52)$$

ce qui peut aussi s'exprimer comme :

$$K_n(\nu, \theta) = \pi |\nu| \Delta^{2(n+1)} \text{sinc}(\nu \Delta \cos \theta)^{n+1} \text{sinc}(\nu \Delta \sin \theta)^{n+1}. \quad (5.53)$$

Ce filtre n'a pas été calculé dans le domaine spatial ni discrétisé en géométrie Mojette. Pour les simulations qui suivent dans ce manuscrit, nous nous sommes limités à l'ordre 0 puis 1 du filtre  $k_n$ .

### 5.3.3 Equivalence continu-discret

Dans cette section, nous allons démontrer l'équivalence entre le schéma de reconstruction par rétroprojection filtrée Mojette et le schéma continu classique de rétroprojection filtrée. Cette équivalence sera d'abord décrite pour une projection Mojette spline 0 en utilisant un filtre  $k_1$ , puis elle sera étendue à l'ordre  $n$ , en utilisant une Mojette spline  $n$  et un filtre  $k_n$ .

#### 5.3.3.1 A l'ordre 0

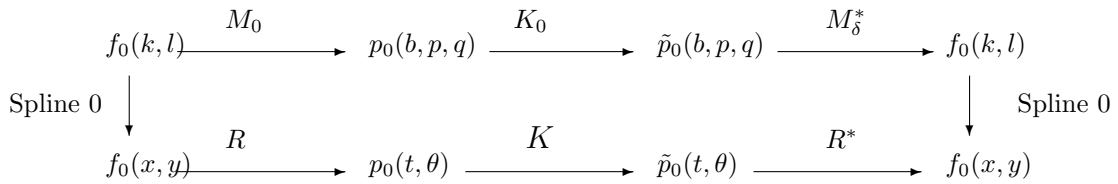


FIG. 5.8 – Équivalence entre les schémas continu et discret.

L'expression dans le domaine de Fourier de  $K_0$  (équation 5.36) est divisée en deux parties : un filtre rampe parfait et la transformée de Fourier d'un trapèze. Ce trapèze est la projection du modèle de pixel spline 0. L'objet s'écrit alors :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} f(k, l) \beta_0(x - k) \beta_0(y - l), \quad (5.54)$$

et le produit tensoriel de  $\beta_0$  correspond à une base de Riesz 2D.

En utilisant l'algorithme de rétroprojection filtrée Mojette, l'objet  $f(k, l)$  est projeté en utilisant la projection Mojette spline 0. Dans le domaine spatial, les projections sont ensuite convoluées avec le filtre  $k_0$ , ce qui revient à les convoluer avec le filtre rampe puis avec un trapèze. La dernière étape est la rétroprojection Mojette Dirac. En utilisant l'équation 5.22, ces étapes sont équivalentes à une projection spline 0 Mojette, une étape de filtrage avec un filtre rampe et à une étape de rétroprojection spline 0 Mojette. L'objet obtenu est une image de coefficients discrets. Donc pour revenir à l'objet continu, nous devons utiliser la fonction  $\overset{\circ}{\beta}(x)$ , or pour les splines 0  $\overset{\circ}{\beta}(x) = \beta(x)$ .

Ce schéma assure une équivalence continue/discrète à chaque étape de l'algorithme (Figure 5.8) en utilisant comme opérateur de préfiltrage et de post-filtrage les splines 0 [77].

Le schéma mis en œuvre sera alors constitué d'un opérateur de projection utilisant l'échantillonnage Mojette, un filtre rampe spline 0 et d'un opérateur de rétroprojection Mojette [78] :  $M_\delta^* K_0 M_0 = \text{Id}_0$ .

### 5.3.3.2 Ordre $n$

Cette équivalence peut être étendue à l'ordre  $n$  de spline (Figure 5.9).

|                   |                           |             |                          |                |                       |                        |                            |             |  |             |
|-------------------|---------------------------|-------------|--------------------------|----------------|-----------------------|------------------------|----------------------------|-------------|--|-------------|
| $f(x, y) \in L_2$ | $\xrightarrow{* \beta_0}$ | $f_0(k, l)$ | $\xrightarrow{M_\delta}$ | $p_0(b, p, q)$ | $\xrightarrow{* k_0}$ | $\tilde{p}_0(b, p, q)$ | $\xrightarrow{M_\delta^*}$ | $f_0(k, l)$ | $\xrightarrow{\overset{\circ}{\beta}_0}$ | $f_0(x, y)$ |
|                   | $\xrightarrow{* \beta_1}$ | $f_1(k, l)$ | $\xrightarrow{M_\delta}$ | $p_1(b, p, q)$ | $\xrightarrow{* k_1}$ | $\tilde{p}_1(b, p, q)$ | $\xrightarrow{M_\delta^*}$ | $c_1(k, l)$ | $\xrightarrow{\overset{\circ}{\beta}_1}$ | $f_1(x, y)$ |
|                   | $\vdots$                  | $\vdots$    | $\vdots$                 | $\vdots$       | $\vdots$              | $\vdots$               | $\vdots$                   | $\vdots$    | $\vdots$                                 | $\vdots$    |
|                   | $\xrightarrow{* \beta_n}$ | $f_n(k, l)$ | $\xrightarrow{M_\delta}$ | $p_n(b, p, q)$ | $\xrightarrow{* k_n}$ | $\tilde{p}_n(b, p, q)$ | $\xrightarrow{M_\delta^*}$ | $c_n(k, l)$ | $\xrightarrow{\overset{\circ}{\beta}_n}$ | $f_n(x, y)$ |

FIG. 5.9 – Équivalence continue/discrète généralisée en utilisant un modèle de pixel spline et des filtres fondés sur les splines.

En utilisant une interpolation spline  $n$  pour l'objet, l'équivalence entre l'objet continu  $f(x, y)$  et sa version discrète  $f(k, l)$  est assurée. Le filtre  $k_n$  est mis en œuvre comme une étape de filtrage par le filtre rampe, suivi de  $n$  convolutions avec  $w_0$ . L'étape de rétroprojection Mojette Dirac suit. Si on considère les deux parties du filtrage comme étant deux étapes distinctes, les  $n$  convolutions avec  $w_0$  suivies de l'étape de rétroprojection sont équivalentes à une étape de rétroprojection spline  $n$ .

L'objet reconstruit  $c_n(k, l)$  est en fait une image de coefficients, pour revenir à l'objet continu, nous devons utiliser la fonction duale de l'interpolateur spline, c'est l'étape de post-filtrage.

### 5.3.4 Comparaison de la rétroprojection filtrée Mojette Dirac et spline 0

Nous utilisons des directions de projection uniformément réparties sur  $[0, \pi[$  en minimisant le nombre de bins pour comparer les deux reconstructions. Nous expliquerons dans la section 6.3 pourquoi nous avons choisi cette répartition angulaire. Nous allons reconstruire une image Dirac de taille  $128 \times 128$  (Figure 5.12(a)) avec une projection Mojette Dirac, suivie d'un filtrage  $k_0$  et d'une rétroprojection Mojette Dirac d'une part et avec une projection Mojette spline 0 suivi d'un filtrage

$k_0$  et d'une rétroprojection Mojette Dirac d'autre part. L'image reconstruite est normalisée et la ligne contenant le Dirac est extraite (Fig.5.10).

Nous pouvons observer les différences de reconstruction sur l'image Dirac avec ces projections convoluées avec un ou deux trapèzes. Avec le schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$ , les projections restent dans l'espace de Sobolev grâce au modèle de pixel spline 0 (section 5.3.3.1). Avec le schéma  $M_\delta^* K_0 M_\delta$ , il n'y a qu'une convolution par un trapèze lors du filtrage par  $k_0$ . Les projections filtrées ne sont pas dans l'espace de Sobolev, l'équivalence continue/discret n'est pas assurée.

L'utilisation du schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$  permet de lisser les projections avec un trapèze de plus et l'image reconstruite est de meilleure qualité, que ce soit pour 64, 128 ou 256 projections (Fig.5.10.b, Fig.5.10.d et Fig.5.10.f).

Avec le schéma  $M_\delta^* K_0 M_\delta$ , il y a des irrégularités dans l'image reconstruite autour du Dirac (Fig.5.10.a, Fig.5.10.c et Fig.5.10.e), autrement dit on visualise la non application du théorème d'Unser/Aldroubi dans ce cas.

Dans les deux cas, plus le nombre de projections augmente, meilleure est la reconstruction.

L'algorithme de rétroprojection filtrée Mojette fondé sur le modèle de pixel spline 0 peut facilement s'étendre à l'ordre  $n$ . L'opérateur Mojette  $M_\delta$  et son dual  $M_\delta^*$  permettent de se projeter dans l'espace des projections et de revenir dans le domaine de l'image sans perte d'information car il n'y a pas d'interpolation sur les projections du fait de la géométrie Mojette.

Le filtre résultant peut être calculé presque partout, sauf aux points où le trapèze n'est pas dérivable; en ces points, sa valeur est approximée. Ces singularités n'avaient pas été mises en relief dans [38] avec un échantillonnage et une projection conventionnels.

#### 5.3.5 Étude de l'espace nul lors d'une reconstruction $M_\delta^* K_0 M_0$

Pour obtenir une représentation de l'espace nul, nous effectuons une rétroprojection tomographique Mojette spline 0 sur deux fantômes numériques simples. Le premier est une image Dirac et le deuxième est une image de taille  $128 \times 128$  avec un carré de taille  $17 \times 17$  centré dans l'image. Le fond de l'image est à 0. Nous avons utilisé une condition de Dirichlet sur les bords du carré [36]. La partie centrale du carré de taille  $15 \times 15$  est à 1, les bords ont la valeur  $\frac{1}{2}$  et les coins ont la valeur  $\frac{1}{4}$  (Figure 5.11). Les images reconstruites sont normalisées. La valeur maximum est ramenée à 1 à l'aide d'un facteur de normalisation, le zéro n'est pas modifié et les autres valeurs sont obtenues par interpolation linéaire.

Nous allons étudier l'espace nul de la rétroprojection filtrée Mojette spline 0 en calculant les différences entre les images originales et reconstruites.

Les deux fantômes sont testés avec 64, 128 et 256 projections et la figure 5.12 montre les résultats pour le fantôme Dirac et la figure 5.13 pour le fantôme carré.

Comme montré par les images de différence, dès que le nombre de projections est égal à la taille de l'image, les dégradations de l'image se réduisent.



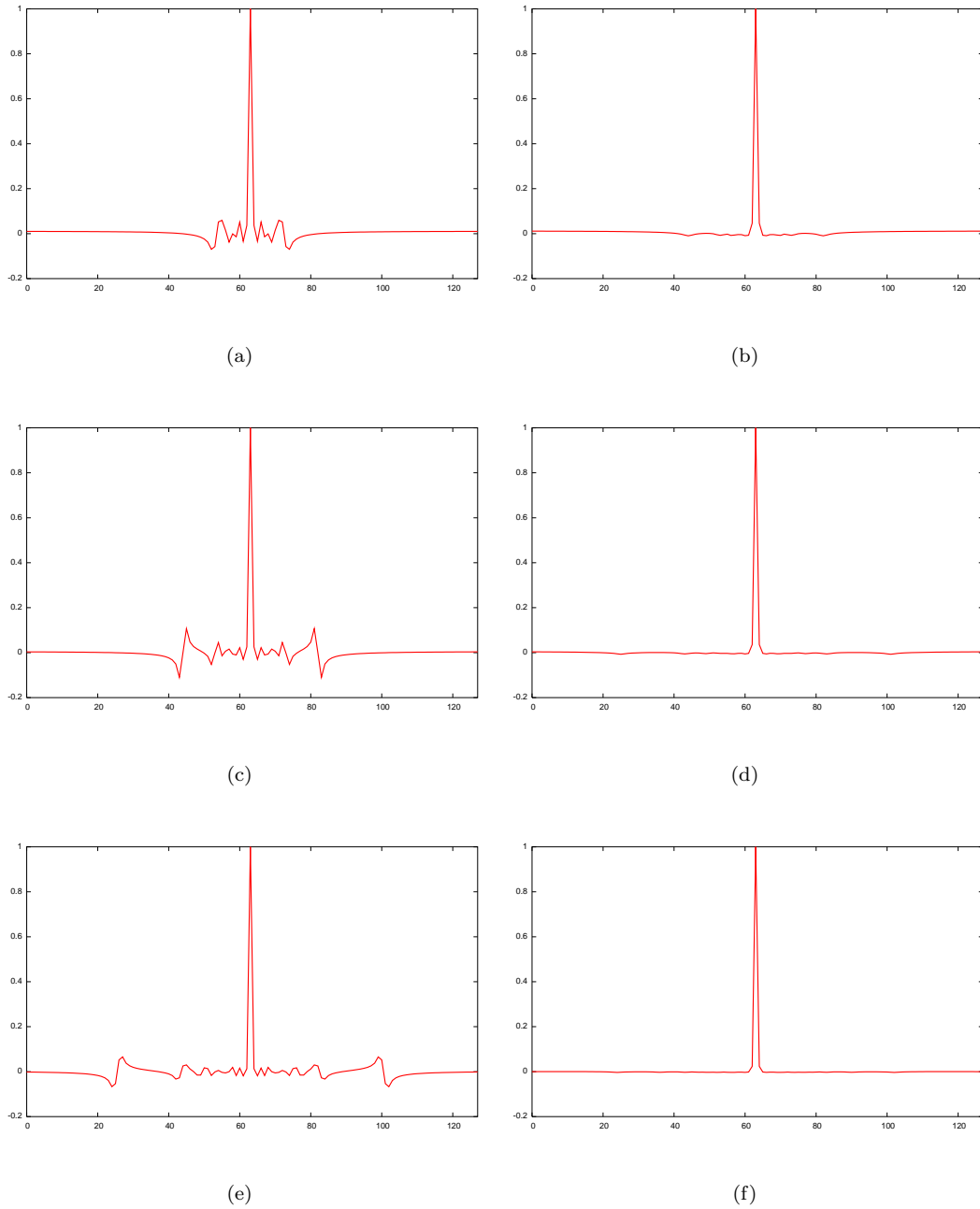


FIG. 5.10 – Ligne d’une image Dirac reconstruite avec une rétroprojection filtrée Mojette. (a) Image reconstruite avec 64 projections et un schéma  $M_\delta^* K_0 M_\delta$ . (b) Image reconstruite avec 64 projections et un schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$ . (c) Image reconstruite avec 128 projections et un schéma  $M_\delta^* K_0 M_\delta$ . (d) Image reconstruite avec 128 projections et un schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$ . (e) Image reconstruite avec 256 projections et un schéma  $M_\delta^* K_0 M_\delta$ . (f) Image reconstruite avec 256 projections et un schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$ .

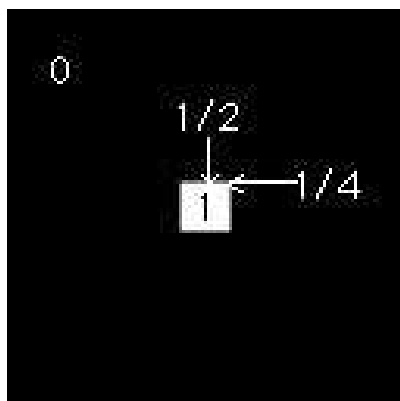
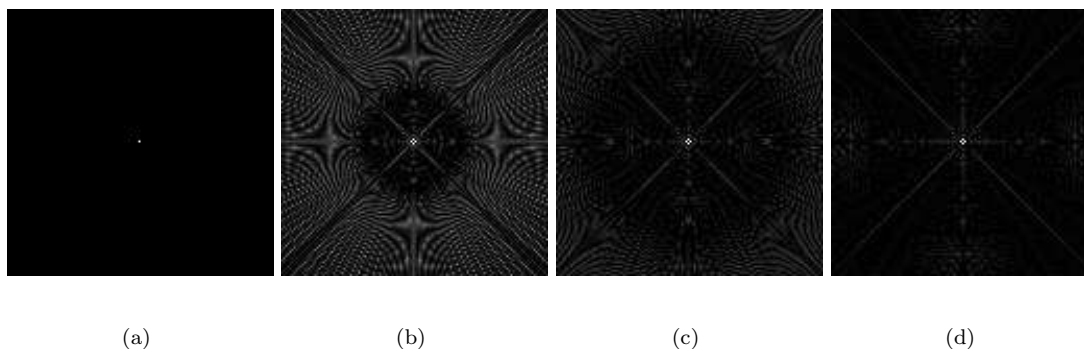
FIG. 5.11 – Fantôme carré de taille  $128 \times 128$ .

FIG. 5.12 – Reconstruction d'une image Dirac avec un schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$ . (a) Image originale. (b) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 64 projections (facteur de normalisation  $\frac{1}{0.046}$ ). (c) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 128 projections (facteur de normalisation  $\frac{1}{0.036}$ ). (d) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 256 projections (facteur de normalisation  $\frac{1}{0.023}$ ).

L'intérêt du deuxième fantôme est de montrer les dégradations sur les bordures. La figure 5.14 représente une coupe du fantôme carré reconstruit. Plus le nombre de projections est grand, meilleure est la reconstruction des bords du carré.

## 5.4 Conclusion

Nous avons défini dans ce chapitre un opérateur Mojette généralisé dépendant d'un modèle de pixel. À l'aide de ces opérateurs et de filtres dépendants de la géométrie du problème, nous avons réécrit en géométrie discrète Mojette un algorithme de reconstruction tomographique classique, l'algorithme de rétroprojection filtrée.

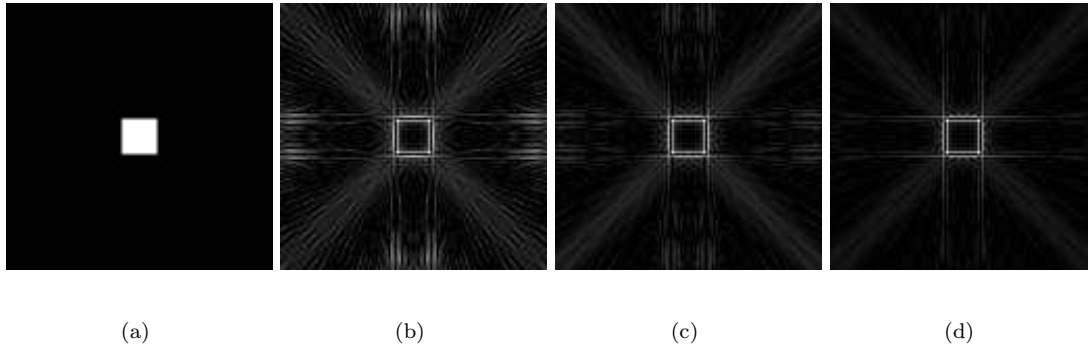
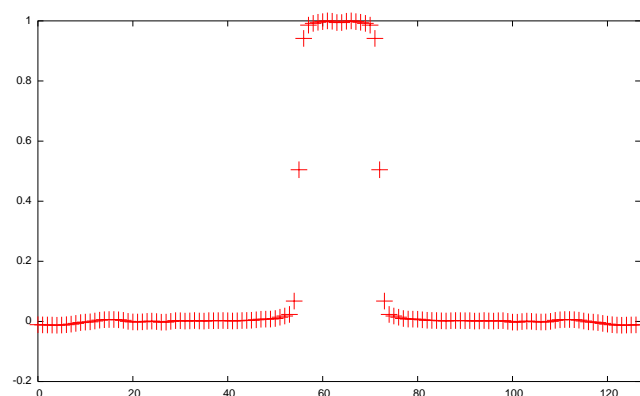


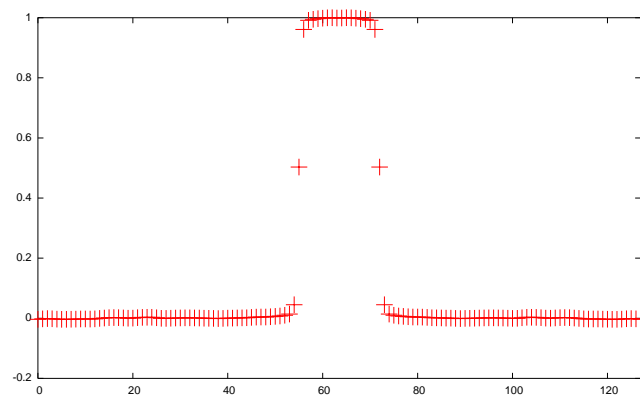
FIG. 5.13 – Reconstruction du fantôme carré avec un schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$ . (a) Image originale. (b) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 64 projections (facteur de normalisation  $\frac{1}{0.098}$ ). (c) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 128 projections (facteur de normalisation  $\frac{1}{0.070}$ ). (d) Différence normalisée entre l'image reconstruite et l'image originale pour 256 projections (facteur de normalisation  $\frac{1}{0.050}$ ).

L'utilisation de modèles de pixel qui sont des bases de Riesz et qui répondent aux critères des filtres utilisés dans la théorie générale d'échantillonnage d'Unser/Aldroubi nous permet de dériver un schéma de reconstruction où l'équivalence entre les modèles continu et discret est assurée à chaque étape.

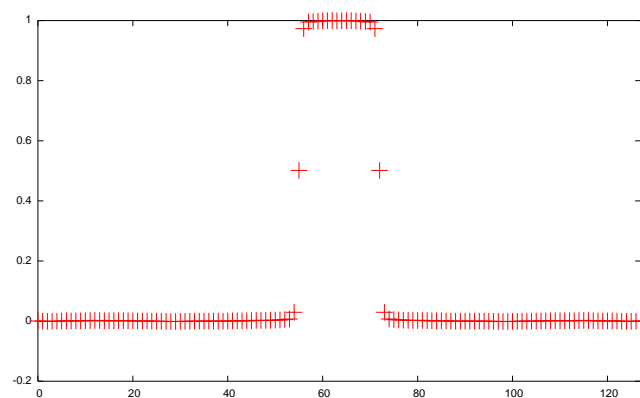
Cet algorithme donne une bonne reconstruction sans bruit et avec un schéma  $M_\delta^* K_0 M_0$ . Nous allons le comparer à une reconstruction classique et voir son comportement sur d'autres fantômes sans ou avec bruit sur les projections.



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.14 – Ligne de l'image reconstruite passant par le milieu du carré de l'image reconstruite normalisée. (a) 64 projections. (b) 128 projections. (c) 256 projections.



# Chapitre 6

## Validation

### Sommaire

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>6.1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>122</b> |
| <b>6.2</b> | <b>Évaluation de la qualité des images</b>  | <b>122</b> |
| 6.2.1      | Les objets reconstruits   | 123        |
| 6.2.2      | Détermination des tâches servant de références pour la mesure de la qualité d'une image                   | 124        |
| 6.2.3      | Métriques significatives de mesure de la qualité  | 124        |
| 6.2.4      | Courbe ROC  | 125        |
| <b>6.3</b> | <b>Choix des directions de projection</b>   | <b>127</b> |
| 6.3.1      | Directions de projections données selon une suite de Farey $F_n$  | 127        |
| 6.3.2      | Projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$   | 127        |
| 6.3.3      | Projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$ avec minimisation du nombre de bins                     | 128        |
| 6.3.4      | Comparaison des reconstructions selon le choix des angles.  | 129        |
| <b>6.4</b> | <b>Comparaison de la rétroprojection filtrée discrète exacte avec la rétroprojection filtrée Mojette</b>  | <b>130</b> |
| <b>6.5</b> | <b>Comparaison de la rétroprojection filtrée Mojette et de la rétroprojection filtrée classique</b>       | <b>131</b> |
| 6.5.1      | Mise en œuvre de la rétroprojection filtrée classique   | 131        |
| 6.5.2      | Reconstruction sans filtrage et sans bruit  | 133        |
| 6.5.3      | Rétroprojections filtrées en absence de bruit   | 135        |
| 6.5.3.1    | Comparaison des reconstructions avec les filtres de RamLak et $k_0$                                       | 135        |
| 6.5.3.2    | Comparaison des reconstructions avec des fantômes à fond non nul  | 135        |
| 6.5.4      | Rétroprojections filtrées bruitées  | 139        |
| 6.5.5      | Discussion  | 140        |
| <b>6.6</b> | <b>Comparaison de la reconstruction gradient conjugué Mojette avec la rétroprojection filtrée Mojette</b> | <b>140</b> |

## 6.1 Introduction

Pour évaluer l'algorithme de reconstruction de rétroprojection filtrée Mojette nous l'avons mis en œuvre sur des fantômes numériques simples.

Nous rappelons tout d'abord la méthode de référence d'évaluation de la qualité des images médicales et les critères d'évaluation de la qualité. Nous avons utilisé une méthode un peu simplifiée pour l'évaluation de la qualité de nos images simulées car le type de validation que nous recherchons est un peu en amont d'un changement de caractéristiques dans un algorithme : ici c'est la nature de l'algorithme que l'on teste pour savoir si la tomographie discrète peut égaler grossièrement les méthodes usuelles.

Pour utiliser les méthodes de reconstruction Mojette, une première étape a été de choisir les angles de projection. Ces angles choisis, nous comparons les méthodes de reconstruction Mojette purement discrètes puis continues-discrètes. Ensuite nous avons comparé notre méthode de rétroprojection filtrée Mojette à une méthode classique de reconstruction sans et avec bruit sur les projections et avec différents fantômes.

Pour finir nous comparons la méthode de rétroprojection filtrée Mojette à la reconstruction par gradient conjugué pour comprendre la meilleure adéquation logicielle de la tomographie discrète.

## 6.2 Évaluation de la qualité des images

Le problème pour mesurer la qualité d'une image est de trouver une métrique qui ait du sens et utiliser un observateur idéal qui connaît toutes les informations de l'image. La principale préoccupation est de mettre en correspondance des données cliniques et celles acquises en laboratoire avec les études d'images de fantôme avec les performances des systèmes d'imagerie au niveau clinique.

L'évaluation des systèmes d'imagerie dépend de la tâche pour lequel le système a été construit. Ses performances sont mesurées en deux étapes [1].

Premièrement, la performance du système par rapport à la tâche qui lui a été assignée peut être mesurée en évaluant comment un observateur bayésien idéal accomplirait la tâche en utilisant seulement les données saisies, c'est-à-dire avant qu'elles ne soient présentées comme une image à un observateur humain. Cela peut être fait pour certaines tâches bien définies et cela conduit à une description de la qualité des données saisies en termes de rapport signal/bruit pour un observateur idéal.

La deuxième étape comporte la mesure de la performance par rapport à l'exécution de la tâche par des observateurs en utilisant des données d'affichage. Dans ce cas, l'évaluation est faite en termes de courbe caractéristique du fonctionnement du récepteur (ROC : *Receiver Operating Characteristic*) et la qualité des données affichées peut être indiquée par le rapport signal sur bruit.

Ces deux étapes d'évaluation de la qualité sont complémentaires. L'analyse des données saisies a l'avantage de permettre l'étude de l'évolution des performances du système d'imagerie en modifiant divers paramètres. Dans certaines circonstances, cette approche peut permettre le calcul du meilleur rapport signal sur bruit réalisable, mais il ne permet pas de prévoir le comportement de l'observateur humain. Cette approche nécessite également des données acquises en laboratoire et des informations sur le système d'imagerie tels que la MTF (*Modulation Transfert Function*) et la puissance du bruit ou le spectre de Wiener. Les courbes ROC fournissent une évaluation complète de la qualité des données affichées qui tient compte du comportement de l'observateur, mais elles nécessitent du temps et des ressources pour être calculées.

Le cadre proposé dans ce rapport relie les mesures purement objectives de la performance du système avec l'évaluation subjective de la qualité de l'image.

### 6.2.1 Les objets reconstruits

Pour un système d'imagerie médicale, les données se présentent comme un ensemble de  $N$  mesures discrètes  $\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$  où  $g_N$  représente la  $n$ ème mesure. Les données peuvent être rangées en vecteurs colonnes  $\mathbf{g}$  de dimension  $N$ .  $\mathbf{g}$  peut représenter par exemple les pixels d'une image reconstruite. L'espace des données est considéré comme étant de Hilbert  $\mathcal{L}_2$ , ce qui permet d'utiliser les définitions usuelles du produit scalaire et de sa norme [59][p562]. L'objet peut être considéré comme une fonction  $f(\mathbf{r})$  continue de dimension 2 ou 3 qui peut aussi dépendre du temps.

L'opérateur d'imagerie décrit une correspondance entre l'espace de l'objet et l'espace des données. Il peut s'écrire comme :

$$\mathbf{b} = \mathcal{H}\mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (6.1)$$

où l'opérateur  $\mathcal{H}$  est l'opérateur d'imagerie qui décrit la correspondance image de départ  $\mathbf{f}$  données  $\mathbf{g}$ . C'est un opérateur intégral défini comme :

$$g_m = \int f(\mathbf{r})h_m(\mathbf{r})d^2r + n_m, m = 1, \dots, M, \quad (6.2)$$

et  $h_m(\mathbf{r})$ , appelé la sensibilité de la fonction, donne la contribution de la  $m$ ème mesure de l'objet au point  $\mathbf{r}$ . Le vecteur  $\mathbf{n}$  représente le bruit. Le bruit ne peut être qu'additif. En général le bruit est la différence entre les données attendues en l'absence de bruit et les données réelles :

$$\mathbf{n} = \langle \mathbf{g} \rangle - \mathbf{g}, \quad (6.3)$$

où  $\langle \mathbf{g} \rangle$  est la moyenne de  $\mathbf{g}$ . Dans le cas d'imagerie médicale, le bruit peut être un bruit photonique.

Pour un état  $j$  qui peut être soit l'état signal présent, soit l'état signal absent, la moyenne sur les données est :

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \mathcal{H} \langle \mathbf{f} \rangle_j = \mathcal{H}\bar{\mathbf{f}}_j \quad (6.4)$$

où  $\bar{\mathbf{f}}_j$  est l'objet moyen dans la classe  $j$ .

Pour écrire le processus d'imagerie comme (équation 6.1), la seule hypothèse nécessaire est qu'il soit linéaire [59][p562]. La fonction de sensibilité est étroitement liée à la matrice d'interférence qui



décrit comment des coefficients de Fourier particuliers de l'objet peuvent être obtenus à partir d'un ensemble discret de mesures.

Pour des tâches de classification, chaque état, appelé hypothèse, représente un objet ou une classe d'objets selon que l'on se place dans le cas d'un signal aléatoire ou non.

Quand le nombre de coups pour chaque détecteur est supérieur à 10, on peut faire une approximation gaussienne du bruit poissonnien [44].

### 6.2.2 Détermination des tâches servant de références pour la mesure de la qualité d'une image

Pour évaluer un système d'imagerie, il faut au préalable connaître [7] :

1. quelle est la tâche affectée au système (quelle va être l'utilisation des images) ;
2. quel est le type de l'observateur qui va accomplir cette tâche ;
3. avoir une connaissance complète des propriétés statistiques de l'objet à reconstruire et des images résultantes [57, 1].

En imagerie médicale les tâches sont généralement de deux ordres, elle peuvent être de classification ou d'estimation.

### 6.2.3 Métriques significatives de mesure de la qualité

Les métriques pour être significatives doivent utiliser le transfert en niveau de gris, la *MTF* (*Modulation Transfert Function*) pour connaître la résolution du système, la *NPS*( $\nu$ ) (*Noise Power Spectrum*) pour connaître le bruit et le coût en dose  $Q$  pour les données d'entrées. Elle doivent avoir un fondement en théorie de décision statistique (dépendre d'une tâche) et utiliser sous certaines hypothèses la *DQE* (*Detector Quantum Efficiency*).

La *DQE* est un résumé des métriques, dans le domaine temps-fréquence elle s'exprime comme :

$$DQE(\nu) = \frac{SNR_{out}^2(\nu)}{SNR_{in}^2(\nu)}.$$

Cette valeur est toujours inférieure à 1. Le *SNR* (*Signal to Noise Ratio*) est calculé pour une tâche en particulier. Un coefficient de *DQE* de 0.7 est considéré comme bon.

Une autre métrique est le *NQE* (*Noise Quanta Equivalent*) :

$$NQE(\nu) = G^2 \frac{MTF^2(\nu)}{NPS(\nu)},$$

où  $G$  est le transfert en niveau de gris.

Ces métriques caractérisent le système d'imagerie.

Le *NEQ* prend en compte le gain du système, la fonction de transfert du système et le *NPS* (*Power Spectrum of the Noise*).

Le *SNR* regroupe les informations provenant du *NEQ*, de la différence de signal et de la performance de l'observateur.

Dans un contexte de radiologie ou plus généralement d'imagerie médicale, la qualité d'une image est jugée par rapport à son utilité pour un diagnostic. La qualité d'une image est, pour des mesures plus objectives, reliée à son contraste, au bruit qu'elle contient et à sa résolution spatiale.

### 6.2.4 Courbe ROC

Pour évaluer la capacité d'une classe d'image à révéler un certain type de pathologie, on utilise souvent des mesures plus subjectives que les métriques décrites précédemment. Ce type d'analyse implique l'utilisation d'observateurs qui vont dire si ils voient quelque chose d'anormal dans l'image, et avec quel seuil de confiance dans un grand panel d'images. Bien que plus subjective, la courbe ROC [16] (*Receiving Operator Characteristic*) donne une mesure plus directe des performances du système d'imagerie ou de la méthode évaluée. L'utilisation de la ROC est particulièrement utile pour comparer deux procédés.

Pour effectuer une analyse ROC sur un système d'imagerie, il faut créer ou acquérir un ensemble d'images qui contient à la fois des cas normaux et anormaux. Une série d'images est acquises. Dans cette série, une pathologie est présente la moitié du temps et les images qui la présentent sont connues. L'observateur regarde séquentiellement chaque image et doit les classer dans différentes catégories selon son observation. Il existe cinq catégories selon qu'il pense que la tumeur est absente, sûrement absente, probablement absente, incertaine, probablement présente, présente (échelle de 1 à 5). Ces intervalles de confiance présentent différents seuils de décision. Le choix du seuil de décision détermine la différence entre sensibilité et spécificité.

Les réponses de cette classification se présentent sous forme de deux histogrammes (figure 6.1). Parce que les images sont bruitées, il y a un certain recouvrement des distributions. Ce recouvrement conduit à des faux positifs et des faux négatifs. Le seuil de décision peut être modifié. Si il est déplacé vers la gauche, le nombre de faux négatifs diminue et la détection de vraies tumeurs est améliorée (sensibilité) mais le nombre de faux positifs augmente et la non détection de tumeurs non réellement présentes va être diminuée (spécificité).

À chaque seuil de décision la sensibilité et la spécificité sont calculées. La sensibilité est la capacité à détecter une lésion quand elle est réellement présente alors que la spécificité est la capacité de dire si la lésion est absente quand elle est vraiment absente. La ROC est un graphe de la fraction de vrais positifs par rapport aux faux positifs pour chaque seuil de décision. Pour chaque seuil on peut déterminer les TP (*true positive*), TN (*true negative*), FP (*false positive*) et FN (*false negative*). Avec ces valeurs, on peut calculer la fraction de faux positifs ( $FP/(FP+TN)$ ) et la fraction de vrais positifs ( $TP/(TP+FN)$ ). En prenant plusieurs seuils, on trace la courbe ROC (figure 6.2). Un système ayant 100% de sensibilité et de spécificité est représenté par la ligne à gauche et en haut du graphe. Si on fait une estimation au hasard, c'est une courbe à 45 degrés que l'on obtient. Plus un système a sa courbe ROC qui se rapproche de celle à 100%, meilleur il est.

Comme la courbe ROC dépend de la sélection d'objets tests, elle était d'abord utilisée pour comparer deux systèmes d'imagerie. Mais elle peut aussi être utilisée pour comparer deux observateurs.

Les courbes ROC sont un résumé des performances d'un système d'imagerie pour la qualité des

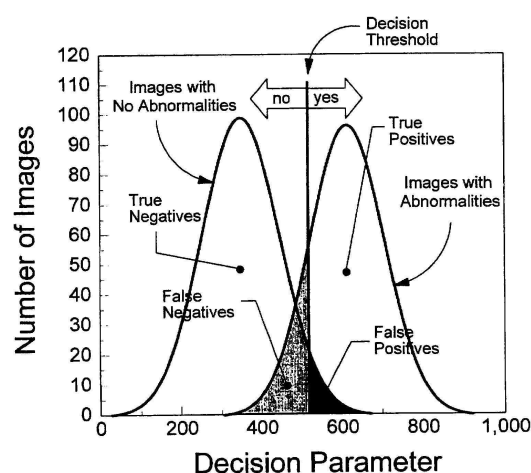


FIG. 6.1 – Diagramme décrivant les bases de la théorie de décision. Les images sans lésions sont représentées par l'histogramme de gauche, les images avec lésion sont représentées à droite. [16]

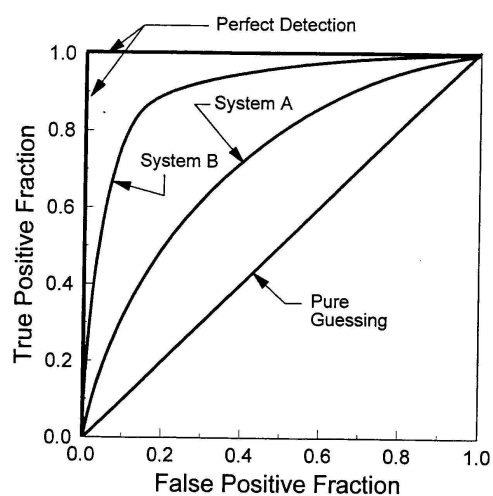


FIG. 6.2 – Courbe ROC [16]

images par rapport à une tâche donnée.

Les courbes ROC permettent d'évaluer un système d'imagerie dans son ensemble. Nous ne nous sommes pas attachés à évaluer les performances de l'observateur. Comme nous disposons des images originales lors de nos simulations, nous avons préféré évaluer les capacités de reconstruction de nos algorithmes par rapport à cette image initiale en utilisant une MSE sur toute l'image ou juste sur une partie du fantôme.

## 6.3 Choix des directions de projection

Une première étude est à effectuer pour choisir les angles les plus appropriés à la reconstruction. Pour choisir la meilleure méthode de reconstruction nous utilisons la MSE.

Le choix des angles de projection pour l'algorithme de rétroprojection filtré Mojette peut se faire de façons diverses [80].

Pour les algorithmes rétroprojection filtrée en continu, les projections sont réparties de manière uniforme sur  $[0, \pi[$ . En effet, un tomographe classique est constitué de capteurs animés d'un mouvement de rotation lors de l'acquisition des données.

Dans notre cas, l'algorithme de reconstruction nécessite des angles discrets de la forme  $\theta = \arctan(\frac{p}{q})$  avec  $\text{PGCD}(p, q) = 1$ . Une méthode d'obtention de ces angles a été décrite dans la section 4.2.1.3 avec l'utilisation des suites de Farey. Les méthodes étudiées dans le cadre de ce manuscrit pour choisir les angles de projection sont toutes fondées sur les suites de Farey alors que pour les autres applications de la transformation Mojette l'optimisation angulaire conduisait à une répartition angulaire compacte.

Pour comparer ces reconstructions, nous avons mis en œuvre l'algorithme de rétroprojection filtré Mojette sur le fantôme carré. Une partie de ce travail spécifique a été réalisé avec la collaboration de Peggy Subirats alors en stage de DEA.

### 6.3.1 Directions de projections données selon une suite de Farey $F_n$

Si pour choisir les directions de projection, on se fonde sur les suites de Farey, la suite de Farey  $F_{128}$  va nous donner toutes les directions discrètes possibles dans une image de taille  $129 \times 129$ , c'est-à-dire 20088 directions de projection. Pour reconstruire le fantôme carré, nous pouvons utiliser toutes ces projections, mais il est très grand et nécessite le calcul d'un grand nombre de bins (16384 bins pour la projection (1, 128) pour une image ( $128 \times 128$ )).

Une autre solution est d'utiliser un ordre de la suite de Farey qui donne un nombre de projections équivalent à un nombre de projections classique. Pour le fantôme carré, nous pouvons prendre la suite de Farey  $F_{10}$  qui est composée de 128 projections (figure 6.3).

Nous pouvons remarquer qu'en choisissant un découpage de l'espace avec des suites de Farey, les angles ne sont pas uniformément répartis sur  $[0, \pi[$ . Si le nombre de projections n'est pas trop grand, comme dans  $F_{10}$ , on remarque que certains secteurs angulaires sont moins finement échantillonnés que d'autres, notamment près de l'horizontale, de la verticale et des première et deuxième bissectrices du plan. Cet échantillonnage va donner des erreurs de reconstruction sur les détails, en particulier les bords du carré.

### 6.3.2 Projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$

Pour se rapprocher du choix des angles qui est effectué en continu et éviter ce sous-échantillonnage de certains secteurs angulaires, nous allons choisir des projections uniformément réparties sur  $[0, \pi[$ .

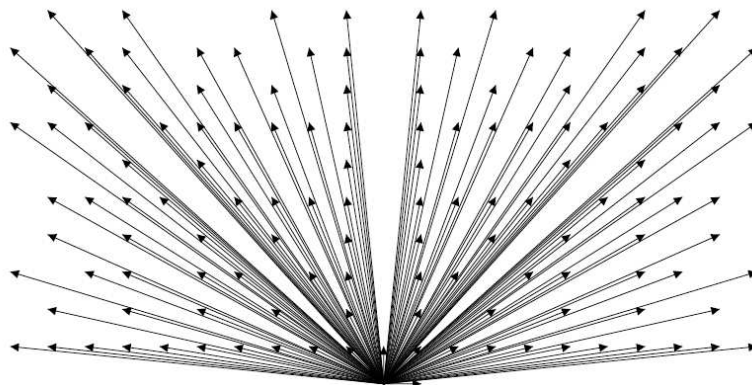


FIG. 6.3 – Série de Farey d'ordre 10, 128 projections

Pour le fantôme carré, nous choisissons 128 directions de projection discrètes parmi les 20088 ( $F_{128}$ ) qui angulairement s'approchent le plus de la répartition uniforme (figure 6.4).

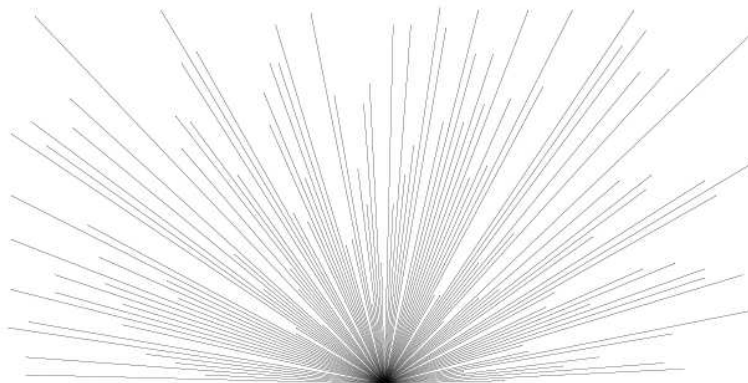


FIG. 6.4 – 128 directions de projections  $(p, q)$  issues de  $F_{128}$  uniformément réparties sur  $[0, \pi[$ .

### 6.3.3 Projections uniformément réparties sur $[0, \pi[$ avec minimisation du nombre de bins

Les projections uniformément réparties ont encore pour certaines un nombre de bins très élevé. Ce nombre de bins élevé pose des problèmes pour le temps de calcul et pour le bruit. La solution choisie pour contourner ce problème est de choisir des directions de projection les plus uniformément réparties possible tout en minimisant le nombre de bins sur les projections [79]. Pour cela, autour de chaque angle de la forme  $\frac{k\pi}{128}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , un angle de tolérance est choisi et parmi les directions de projection discrètes qui se trouvent dans ce secteur angulaire, celle qui donne la projection avec le moins de bins est choisie (figure 6.5).

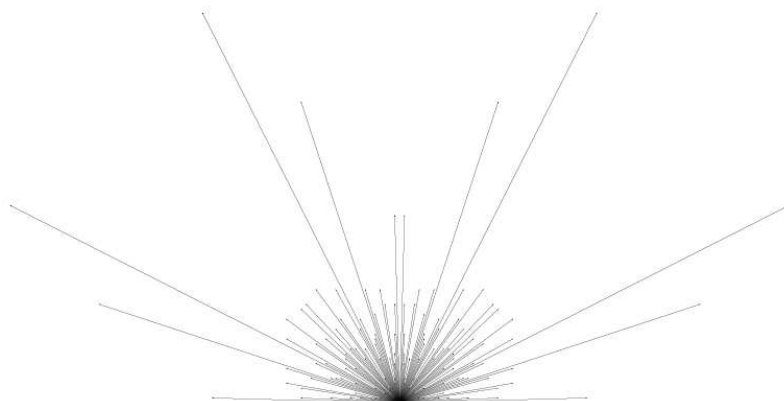


FIG. 6.5 – 128 directions de projections  $(p, q)$  issues de  $F_{128}$  uniformément réparties sur  $[0, \pi[$  en minimisant le nombre de bins des projections résultantes.

#### 6.3.4 Comparaison des reconstructions selon le choix des angles.

Pour comparer les reconstructions, nous allons utiliser la MSE calculée sur une zone de taille  $23 \times 23$  centrée sur le carré de sorte à avoir un compromis entre le calcul de l'observateur qui se focalise sur cette région d'intérêt et la MSE globale qui n'a pas d'intérêt sémantique. Les images reconstruites sont normalisées entre 0 et 1.

La reconstruction avec les 20088 angles donne de bons résultats mais est très longue à calculer et n'est pas réaliste en termes de nombre de projections par rapport à une géométrie d'acquisition continue.

Si on choisit 128 directions de projections issues de  $F_{10}$ , on remarque effectivement sur l'image de reconstruction (figure 6.7(b)) possède des défauts de reconstruction dans les directions horizontale, verticale et obliques, ce qui montre que le défaut d'échantillonnage dans ces directions donne des erreurs de reconstruction. Ces défauts de reconstruction se voient d'autant mieux sur l'image d'erreur (figure 6.7(c)).

Les reconstructions avec 128 angles discrets répartis uniformément permettent une reconstruction sans les défauts de reconstruction obtenus avec 128 projections issues de  $F_{10}$ . La MSE autour de l'objet est plus faible si les angles sont uniformément répartis sans optimisation du nombre de bins. Mais la différence entre les deux méthodes reste faible. La méthode de choix d'angles avec optimisation du nombre de bins permet un calcul plus rapide des images résultats [81]. Elle a été utilisée dans la suite des simulations.

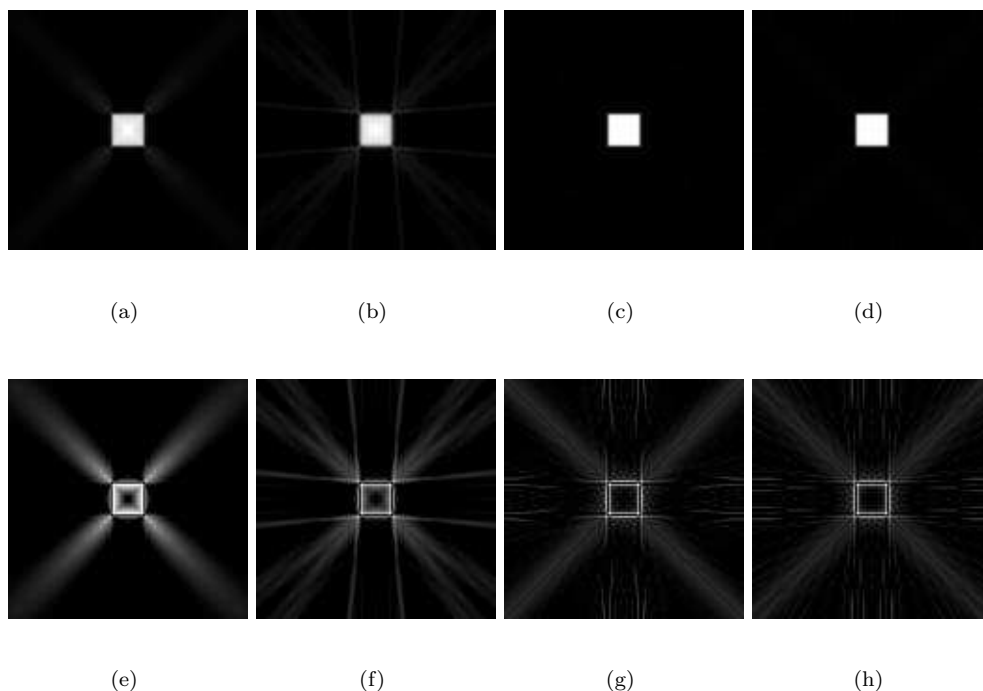


FIG. 6.6 – (a) Reconstruction avec 20088 angles ( $F_{128}$ ),  $MSE = 0,00798$ , (b) Reconstruction avec 128 angles ( $F_{10}$ ),  $MSE = 0,13467$ , (c) Reconstruction avec 128 angles uniformément répartis sur  $[0, \pi[$ ,  $MSE = 0,00033$ , (d) Reconstruction avec 128 angles uniformément répartis sur  $[0, \pi[$  et minimisation du nombre de bins,  $MSE = 0,00051$ , (e) Image d'erreur entre l'image originale et l'image reconstruite (a), (f) Image d'erreur entre l'image originale et l'image reconstruite (b), (g) Image d'erreur entre l'image originale et l'image reconstruite (c), (h) Image d'erreur entre l'image originale et l'image reconstruite (d).

## 6.4 Comparaison de la rétroprojection filtrée discrète exacte avec la rétroprojection filtrée Mojette

Nous allons comparer notre méthode de reconstruction tomographique Mojette discrète exacte avec la rétroprojection tomographique filtrée Mojette qui est fondée sur un schéma continu-discret. Cette comparaison s'effectue sur un fantôme carré de taille  $64 \times 64$  avec un carré  $9 \times 9$  de valeur 1 en son centre, les bords du carré sont fixés à  $\frac{1}{2}$  et les coins à  $\frac{1}{4}$ . Les directions de projections sont données par les suites de Farey  $F_{16}$  (320 projections),  $F_{32}$  (1296 projections) et  $F_{64}$  (5040 projections) (Table 6.1).

La suite de Farey  $F_{64}$  donne plus de directions de projections que nécessaire pour reconstruire exactement le fantôme  $64 \times 64$  avec la méthode de reconstruction filtrée exacte Mojette car elle peut être obtenue avec les directions de projection de  $F_{63}$  (section 4.3). Les images reconstruites sont

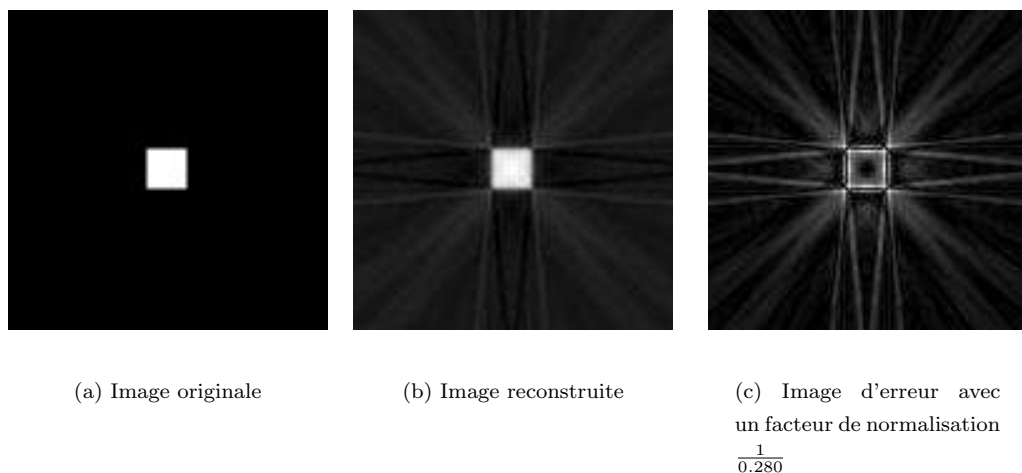


FIG. 6.7 – Reconstruction avec 128 angles (série de Farey d'ordre 10) avec convolution des projections par le filtre  $k_0$  et une rétroprojection Mojette.

normalisées. La MSE est calculée sur toute l'image.

Pour un nombre d'angles très insuffisant pour la reconstruction exacte discrète Mojette  $F_{16}$ , la rétroprojection Mojette filtrée donne de meilleurs résultats en l'absence de bruit. Avec un nombre d'angles plus important ( $F_{32}$ ,  $F_{64}$ ) les résultats de reconstruction de la rétroprojection filtrée Mojette évoluent peu. En revanche la reconstruction Mojette exacte donne de très bons résultats de reconstruction en terme de MSE.

## 6.5 Comparaison de la rétroprojection filtré Mojette et de la rétroprojection filtrée classique

### 6.5.1 Mise en œuvre de la rétroprojection filtrée classique

Pour pouvoir évaluer notre méthode de reconstruction, nous l'avons comparée à une méthode de rétroprojection filtrée classique. Cette méthode a été mise en œuvre comme il suit.

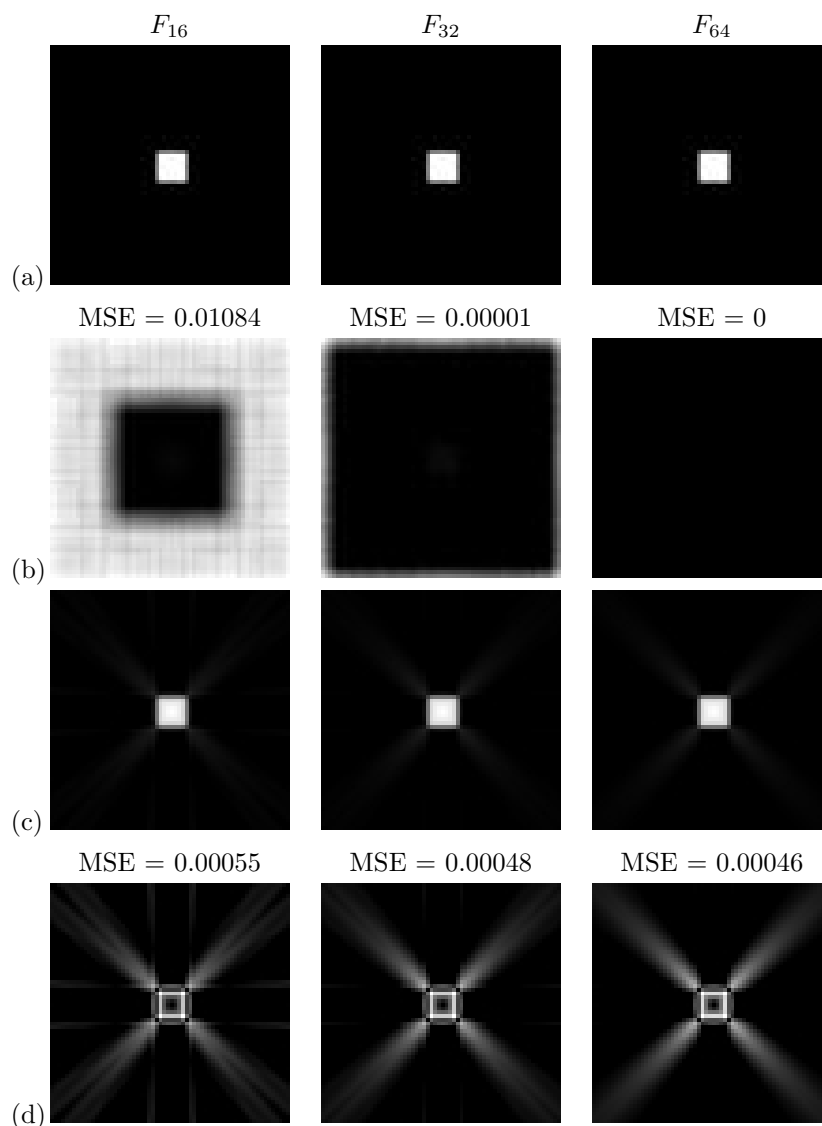
Le nombre de bins sur chaque projection est fixé quelle que soit la direction de projection. Lors de la projection d'un pixel de l'image, ce pixel ne se projette généralement pas sur un bin mais entre deux bins (figure 6.8).

La valeur affectée aux bins  $b_r$  et  $b_g$  dépend de  $A_g$  et  $A_d$  avec  $b_g = \text{valeur à } t \times A_g$  et  $b_d = \text{valeur à } t \times A_d$ .

L'étape de rétroprojection a été mise en œuvre comme suit. Pour chaque projection de centre de pixel sur une projection, la valeur rétroprojetée dans le pixel est calculée par interpolation linéaire entre les valeurs des deux bins les plus proches. La valeur rétroprojetée sera *valeur du pixel* =  $b_g \times A_g + b_d \times A_d$ .



TAB. 6.1 – Comparaison de la reconstruction filtrée exacte Mojette et de la rétroprojection filtrée Mojette  $M_\delta^* K_0 M_0$  sur un fantôme carré  $64 \times 64$  avec des directions de projections données par les suites de Farey d'ordre 16, 32 et 64. (a) Images reconstruites par reconstruction filtrée discrète exacte Mojette, (b) Images d'erreurs entre les images reconstruites par reconstruction filtrée discrète exacte Mojette et l'image originale, (c) Images reconstruites par rétroprojection filtrée Mojette, l'objet est projeté par un projecteur Mojette spline 0, filtré par un filtre  $k_0$  et rétroprojeté par rétroprojecteur Mojette. (d) Images d'erreurs entre les images reconstruites par rétroprojection filtrée Mojette et l'image originale



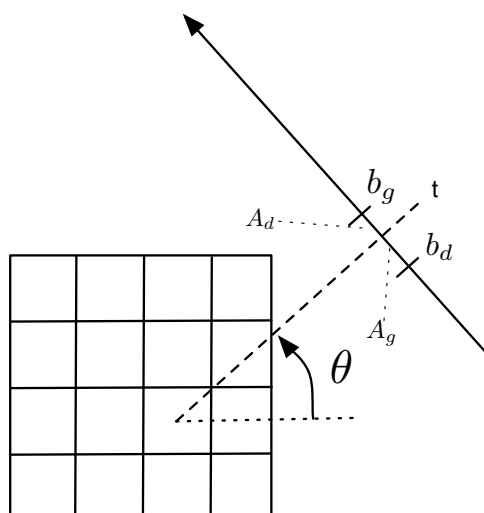


FIG. 6.8 – Projection Classique

Avec cette mise en œuvre, seul le cercle circonscrit au carré de l'image est reconstruit.

Pour effectuer des comparaisons de reconstruction, nous avons travaillé sur la reconstruction du fantôme carré  $128 \times 128$  avec un fond nul et sur la reconstruction du fantôme rond  $128 \times 128$  avec un fond nul. Quelques reconstructions ont aussi été simulées sur des fantômes à fond non nul.

### 6.5.2 Reconstruction sans filtrage et sans bruit

Nous effectuons une reconstruction sans filtrage pour montrer les structures qui apparaissent après l'étape de projection/rétroprojection pour un choix d'angle classique (figure 6.9) ou Mojette (figure 6.10) de sorte à comprendre visuellement les artefacts structurels des filtres ensuite.

La figure 6.9.a montre l'image originale, la figure 6.9.b montre la reconstruction avec 128 angles uniformément répartis et la figure 6.9.c montre la différence en valeur absolue entre l'image reconstruite et l'image originale qui met en valeur les artefacts de l'espace nul.

L'image reconstruite est normalisée. La valeur maximum est ramenée à 1, le zéro n'est pas modifié et les autres valeurs sont obtenues par interpolation linéaire. L'image de différence est aussi normalisée.

La figure 6.10 montre la même image en utilisant un projecteur et un rétroprojecteur Mojette. Les directions de projection choisies sont 128 angles discrets uniformément répartis sur  $[0, \pi[$ , choisis dans  $F_{128}$  avec minimisation du nombre de bins (cf. section 6.3).

À l'extérieur de l'objet carré, selon la méthode de reconstruction choisie, la reconstruction est isotropique (figure 6.9.c) ou anisotropique (figure 6.10) selon l'échantillonnage angulaire choisi.

L'intérieur de l'objet est mieux reconstruit avec le schéma Mojette d'après les images d'erreur. Cela est particulièrement visible sur les bords et les coins du carré.

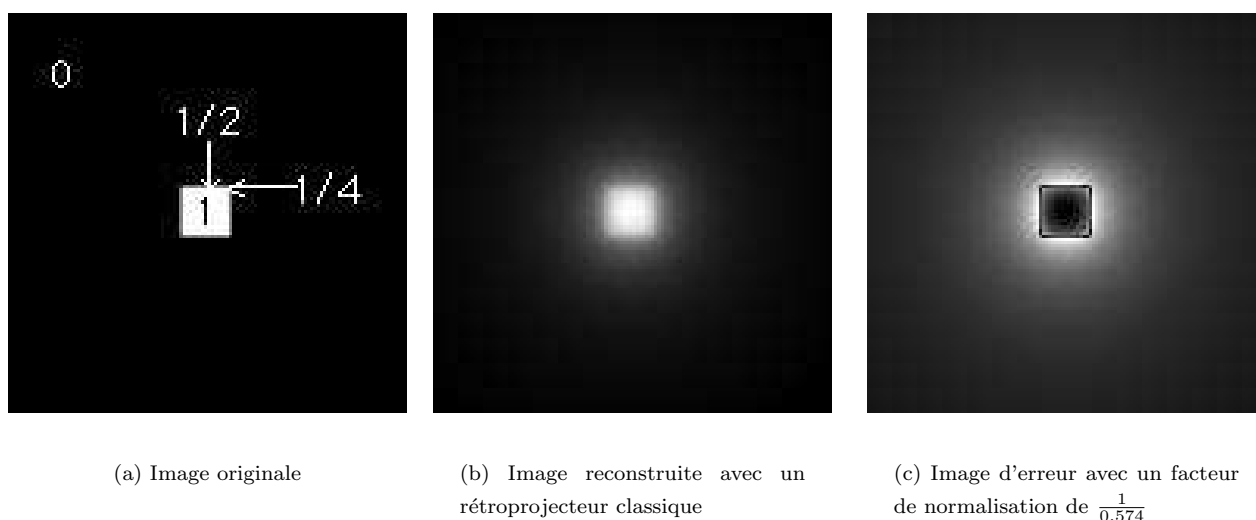


FIG. 6.9 – Image reconstruite avec 128 angles uniformément répartis dans une géométrie classique après une étape de projection/rétroprojection.

Le flou introduit par l'absence d'étape de filtrage est très différent pour les deux méthodes. Il est là aussi isotropique pour la géométrie classique et anisotropique pour la géométrie Mojette.

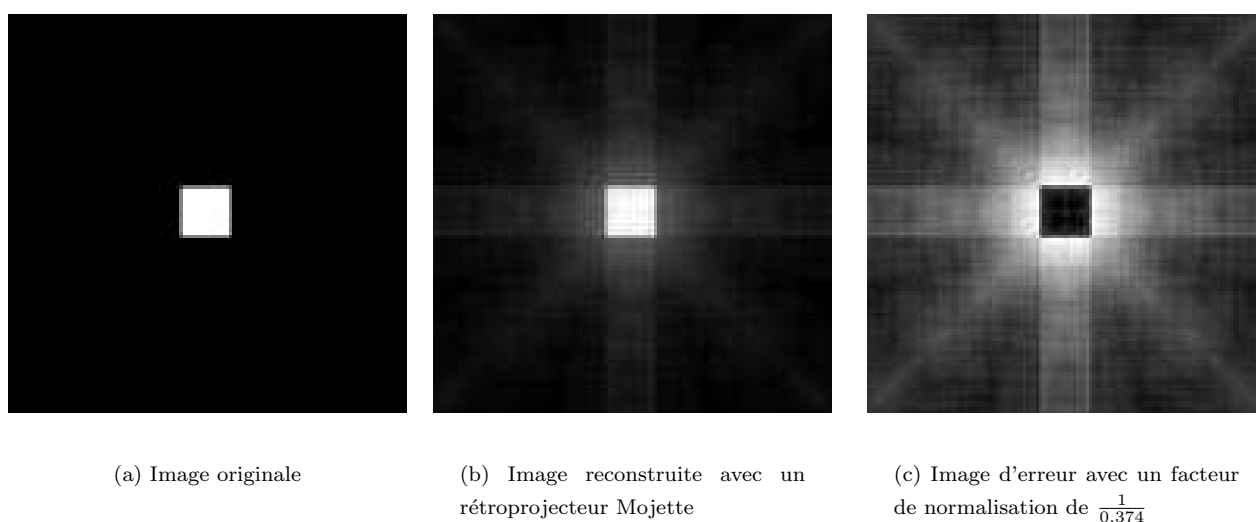


FIG. 6.10 – Image reconstruite avec 128 angles uniformément répartis sur  $[0, \pi[$ , sans filtrage des projections et avec un rétroprojecteur Mojette.

### 6.5.3 Rétroprojections filtrées en absence de bruit

#### 6.5.3.1 Comparaison des reconstructions avec les filtres de RamLak et $k_0$

Nous allons comparer les rétroprojections filtrées en absence de bruit pour une géométrie Mojette et une géométrie classique en utilisant les filtres de RamLak (Table 6.2) et  $k_0$  (Table 6.3). Pour le cas Mojette, le projecteur est le projecteur spline 0.

Le fantôme reconstruit est le fantôme carré  $128 \times 128$  avec un fond nul. Les images reconstruites sont normalisées, ainsi que les images d'erreur. La MSE est calculée sur toute l'image.

Les images reconstruites sont de meilleure qualité en terme de MSE avec le schéma Mojette que ce soit pour un filtrage RamLak ou un filtrage  $k_0$ . Il n'y a pas de différence notable en terme de MSE lorsqu'on compare les images reconstruites avec le filtre  $k_0$  ou le filtre RamLak.

L'utilisation de filtres dans le cas Mojette permet d'ôter l'anisotropie de la reconstruction à l'extérieur de l'objet comme c'était le cas sans filtre (figure 6.10).

Pour la reconstruction en géométrie classique, les projections sont de 128 bins. Les bords du carré ne sont pas bien reconstruits car la condition de Dirichlet n'est pas satisfaite sans suréchantillonnage sur les projections [38].

Ce problème de non suréchantillonnage est le même en géométrie Mojette pour les projections  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . Ces projections n'ont que 128 bins, la condition de Dirichlet n'est pas satisfaite et il y a des artefacts en dehors de l'objet dans ces directions.

#### 6.5.3.2 Comparaison des reconstructions avec des fantômes à fond non nul

Nous nous sommes intéressé à la reconstruction de fantômes à fond non nul pour mettre en évidence d'autres types d'artefacts dus au fond.

La première image de test est à nouveau un fantôme carré  $128 \times 128$  avec un objet  $17 \times 17$  en son centre. La partie centrale  $15 \times 15$  du carré est à la valeur 1, les bords sont à la valeur  $\frac{5}{8}$  et les coins à  $\frac{7}{16}$  (figure 6.11a). Le fond est fixé à  $\frac{1}{4}$ . Ce fantôme respecte une condition de Dirichlet.

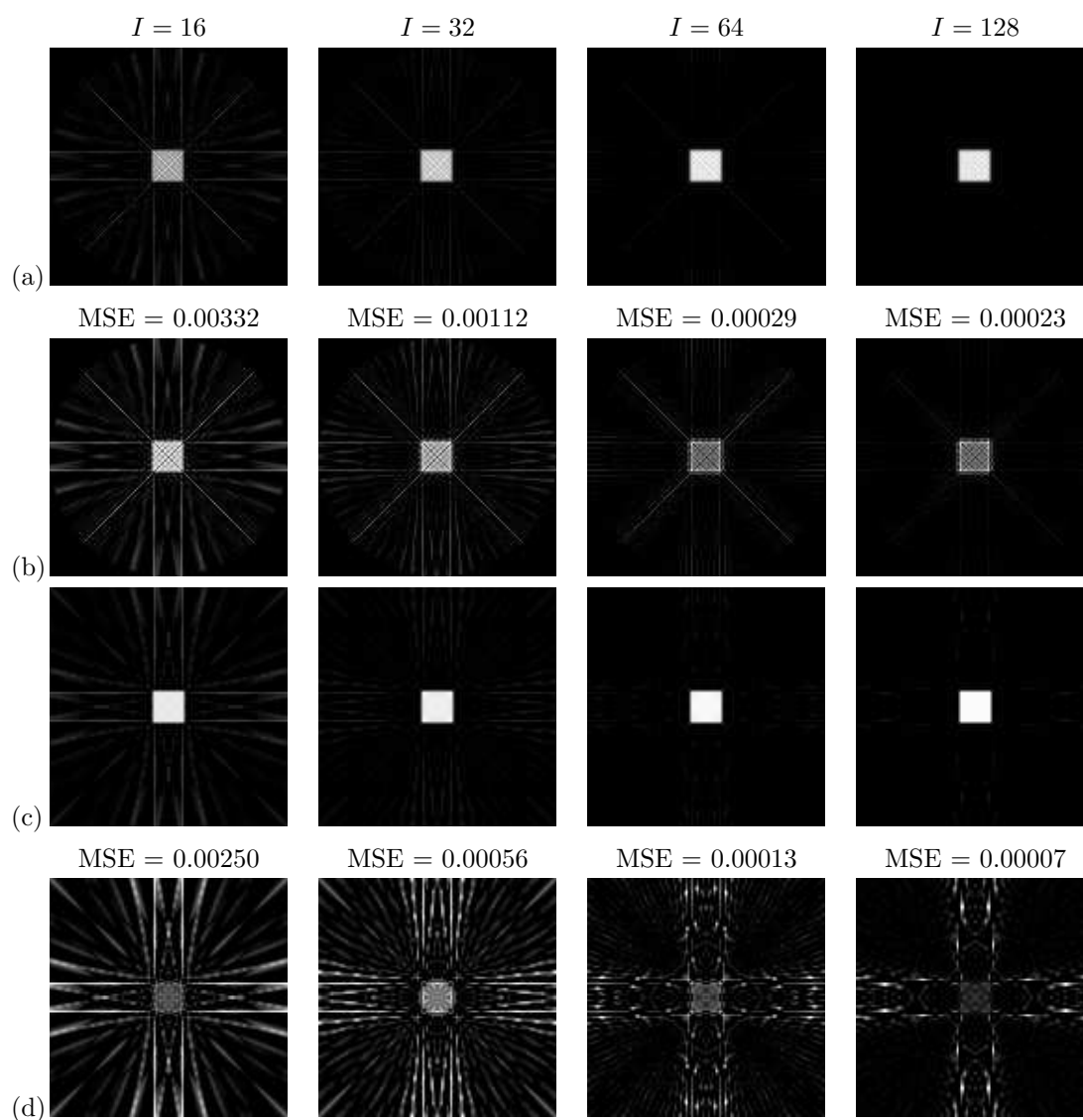
Le second fantôme est un disque de 21 pixels de diamètre et la valeur des pixels sur les bords dépend de la surface interceptée entre le pixel et le disque. Les pixels entièrement compris dans le disque sont fixés à 1 et le fond est fixé à  $\frac{1}{4}$  (figure 6.11b).

Les coins du carré sont des objets plutôt rares dans des images médicales, même si ce genre de forme peut apparaître avec des os, mais ils provoquent des hautes fréquences dans le domaine de Fourier. C'est utile pour tester la linéarité et l'invariance par translation de l'algorithme.

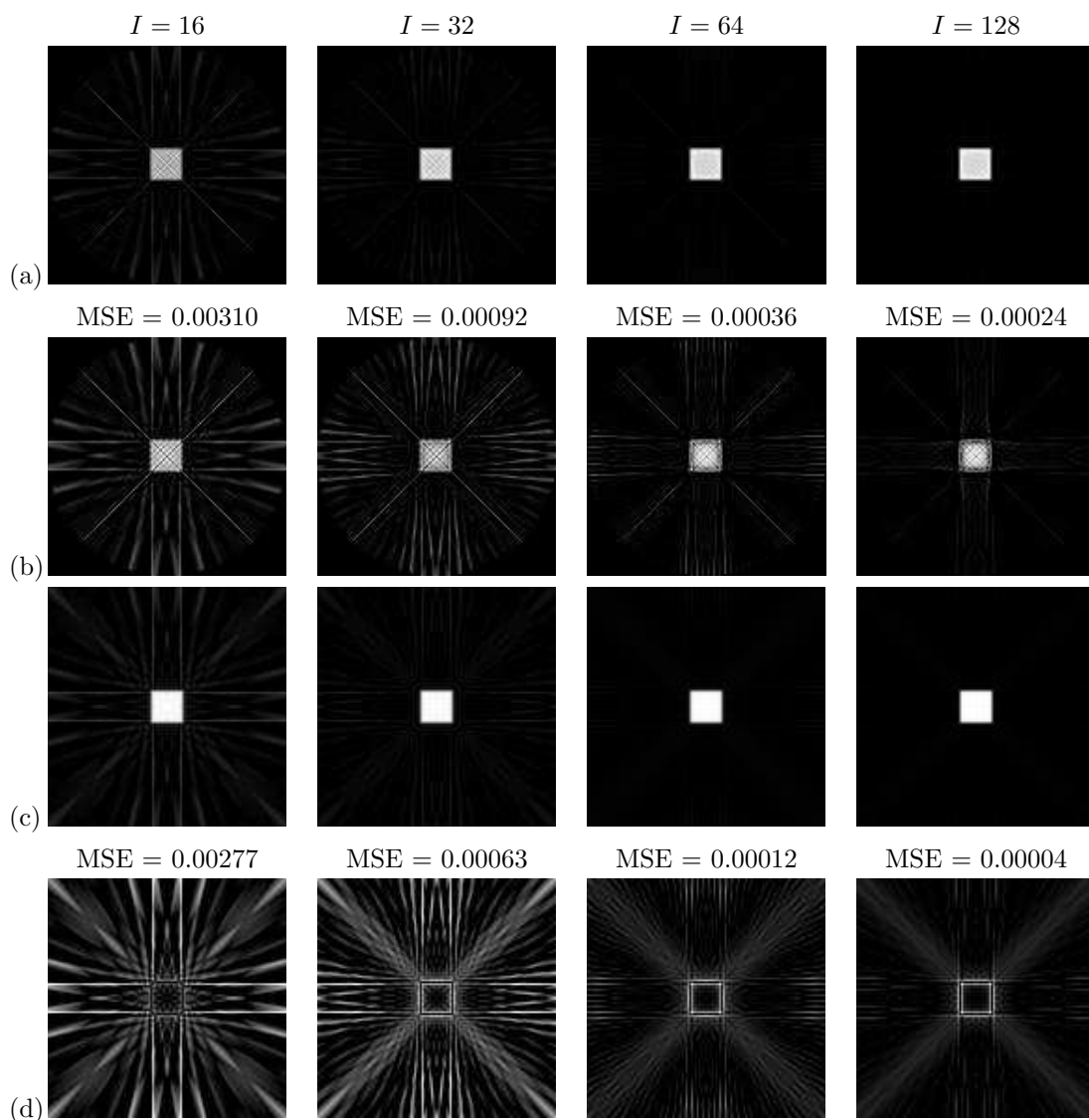
Les artefacts de reconstruction avec un fond non nul sont différents sur le fantôme carré de ceux obtenus sur le fantôme à fond nul. Ils sont beaucoup moins marqués dans les directions  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$  mais on les voit apparaître pour d'autres directions de projection, notamment sur les images d'erreur. Néanmoins, ce sont toujours des artefacts en strie que nous retrouvons pour les deux fantômes.

Sur le fantôme rond, les artefacts de reconstruction sont isotropes contrairement au fantôme carré. La géométrie du fantôme n'induit pas d'artefacts particuliers dans les directions obliques.

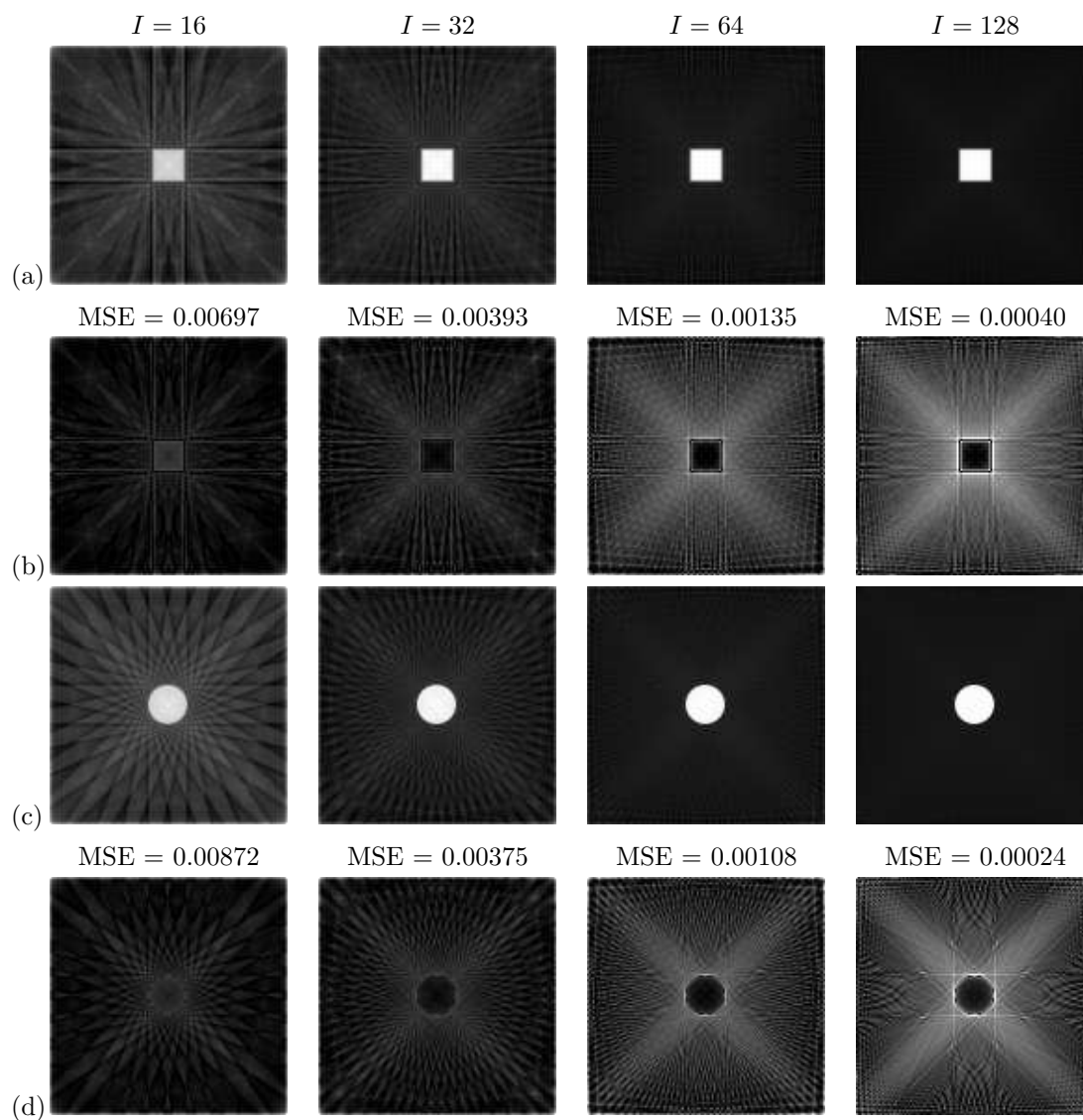
TAB. 6.2 – Rétroprojection filtrée avec le filtre de RamLak. Les rétroprojections sont mises en œuvre avec 16, 32, 64 et 128 projections uniformément réparties sur  $[0, \pi[$ . (a) Images résultats de rétroprojection filtrée classique avec un filtrage RamLak, (b) Images d'erreur entre le résultat de la rétroprojection filtrée classique et l'image originale, (c) Images résultats de rétroprojection filtrée Mojette avec un filtrage RamLak, (d) Images d'erreur entre le résultat de la rétroprojection filtrée Mojette et l'image originale



TAB. 6.3 – Rétroprojection filtrée avec le filtre  $k_0$ . Les rétroprojections sont mises en œuvre avec 16, 32, 64 et 128 projections uniformément réparties sur  $[0, \pi[$ . (a) Images résultats de rétroprojection filtrée classique avec un filtrage  $k_0$ , (b) Images d'erreur entre le résultat de la rétroprojection filtrée classique et l'image originale, (c) Images résultats de rétroprojection filtrée Mojette avec un filtrage  $k_0$ , (d) Images d'erreur entre le résultat de la rétroprojection filtrée Mojette et l'image originale



TAB. 6.4 – Rétroprojection filtrée avec une projection Mojette spline 0, un filtrage  $k_0$  et une rétroprojection Mojette Dirac. Les rétroprojections sont mises en œuvre avec 16, 32, 64 et 128 projections uniformément réparties sur  $[0, \pi[$ . (a) Images résultats de rétroprojection filtrée Mojette avec un filtrage  $k_0$  sur le fantôme carré avec un fond à 0, 25, (b) Images d'erreur entre le résultat de la rétroprojection filtrée classique et l'image originale, (c) Images résultats de rétroprojection filtrée Mojette avec un filtrage  $k_0$  sur le fantôme rond avec un fond à 0, 25, (d) Images d'erreur entre le résultat de la rétroprojection filtrée Mojette et l'image originale.





(a) Fantôme carré  
128 × 128

(b) Fantôme rond  
128 × 128

FIG. 6.11 – Images de test

#### 6.5.4 Rétroprojections filtrées bruitées

Pour simuler une acquisition tomographique, la rétroprojection filtrée Mojette est mise en œuvre sur des données bruitées pour un nombre de projections différent mais avec le même nombre de photons total [74].

Si  $T$  est le nombre de photons total,  $S$  la somme totale des densités des pixels et  $I$  le nombre de projections, nous avons :

$$a \times S \times I = T, \quad (6.5)$$

où  $a$  est un facteur multiplicatif.

Avant l'ajout de bruit, la somme des bins sur chaque projection est égale à  $aS$ . Le nombre de coups sur les projections est modifié avec  $a$  pour toujours correspondre au même nombre de photons total, quel que soit le nombre de projections.

Nous avons ajouté un bruit poissonnien sur les projections.

Les reconstructions sont comparées pour une distribution angulaire classique et Mojette. Même si le nombre de bins par projection est fixé pour la rétroprojection filtrée classique et varie pour la géométrie Mojette, ce qui donne des comportements très différents par bins, le résultat pour les deux algorithmes est proche (Table 6.5, Table 6.6). Toutes les images reconstruites sont normalisées entre 0 et 1. La rétroprojection filtrée est mise en œuvre sur des images 128 × 128 pour 16, 32, 64, 128 et 256 projections. Les rétroprojections filtrées Mojette et classique sont utilisées avec le filtre  $k_0$  puis avec le filtre  $k_1$ . Pour le schéma Mojette, nous utilisons tout d'abord la projection Mojette spline 0 suivi d'un filtrage par  $k_0$  et d'une rétroprojection Mojette Dirac. Ensuite nous faisons une projection Mojette spline 1, suivi d'un filtrage par un filtre  $k_1$  et d'une rétroprojection Mojette Dirac et nous obtiendrons une image à partir des coefficients reconstruits avec la fonction duale de la fonction spline 1 comme expliqué précédemment.

Nos simulations sont faites avec un nombre de coup total  $T = 1000000$  et une somme de pixels  $S = 4312,75$  pour le fantôme carré à fond non nul et  $S = 4355,77$  pour le fantôme rond à fond non nul.



La MSE est calculée sur un carré de taille  $17 \times 17$  centré sur l'objet pour le fantôme carré et sur un carré de taille  $24 \times 24$  sur le fantôme rond.

### 6.5.5 Discussion

La mise en œuvre du filtre  $k_0$  pose des problèmes pour des points non différentiables, il y a des discontinuités dans le filtre où les points sont interpolés (section 5.3.2.2.2). Pour le filtre  $k_1$  la seule singularité est pour l'angle  $(1, 1)$  aux bins  $b = 0$  et  $b = p - q$ . Pour des ordres supérieurs de spline, il n'y aura plus de problème de différentiation.

L'équivalence continu/discret nous permet d'avoir à la fois les coefficients spline de l'image et leur version échantillonnée en utilisant l'étape de post-filtrage décrite dans Unser/Aldroubi [2].

La première conclusion visuelle sur les reconstructions bruitées à des ordres de spline différents est que les comportements sont très proches comme déjà remarqué avec la reconstruction classique.

Avec ou sans bruit, il n'y a pas de différences entre la forme générale des artefacts de reconstruction obtenus sur le carré ou le disque.

Le bruit simulé a la même structure dans les images reconstruites avec l'algorithme classique et avec l'algorithme Mojette. C'est un fait à noter car la distribution du bruit a été faite de façon très différente dans les deux méthodes. La rétroprojection filtrée Mojette est aussi valide pour des reconstructions de projections bruitées. Ce résultat n'était pas évident car toutes les propriétés de l'opérateur Mojette sont fondées sur les projections alors que le bruit n'agit que sur les bins. Le seul lien entre les projections et les bins est la conservation de l'information totale à travers un nombre de coups constant.

La manière de répartir l'information bruitée initiale de manière dépendante du nombre de projections est aussi importante. Même si la MSE calculée sur l'objet et une évaluation visuelle ne sont pas des mesures objectives de la qualité, on peut toutefois remarquer que la qualité de la reconstruction à la fois pour l'algorithme classique et pour l'algorithme Mojette augmente lorsque le nombre d'angles de projection augmente. Lorsque le nombre de bins est grand, l'information contenue dans chaque bin est faible, ce qui donne un faible rapport signal à bruit par bin.

Ces images montrent la validité de notre algorithme dans un cas de reconstruction tomographique bruitée.

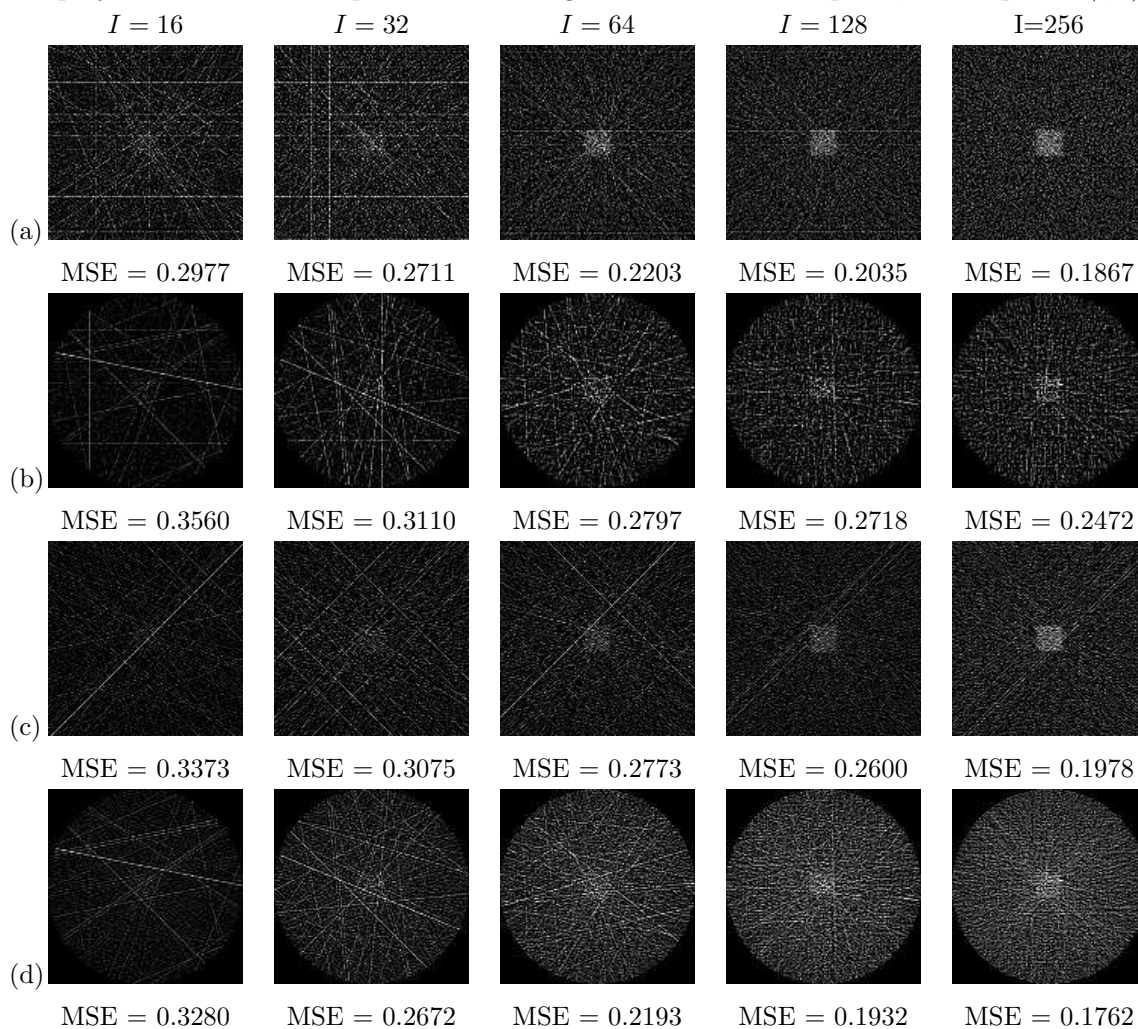
## 6.6 Comparaison de la reconstruction gradient conjugué Mojette avec la rétroprojection filtrée Mojette

Nous avons déjà vu la reconstruction par gradient conjugué Mojette en l'absence de bruit (section 4.5.4) qui donne une reconstruction exacte. Nous allons comparer ces reconstructions dans le cas de reconstruction de projections bruitées par un bruit poissonnien.

L'algorithme du gradient conjugué Mojette avec une condition d'arrêt par minimisation d'un critère des moindres carrés est mis en œuvre sur les fantômes carré et rond (Table 6.7).

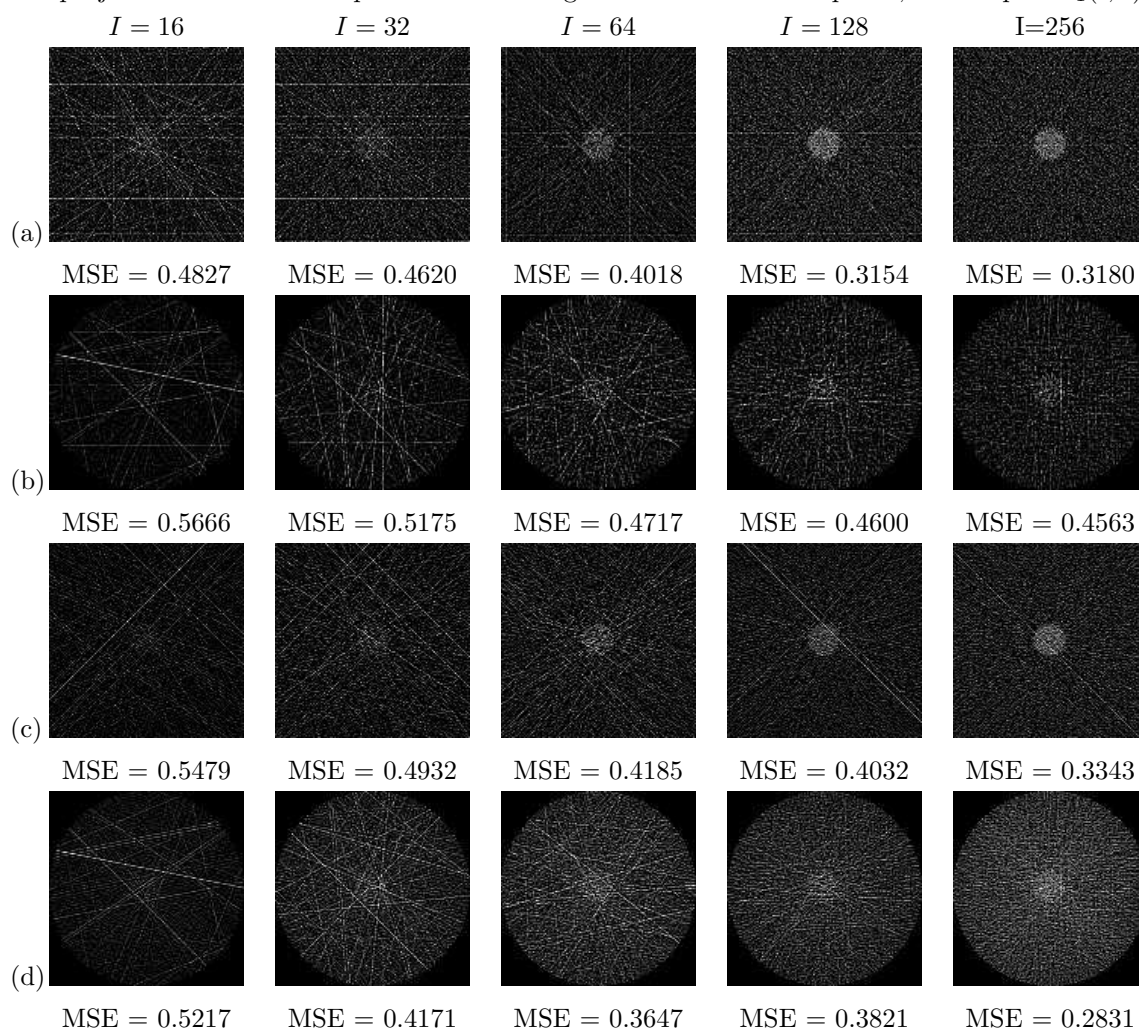
TAB. 6.5 - .

]Reconstruction du fantôme carré avec des projections bruitées par un bruit Poissonnien, les images reconstruites sont normalisées sur  $[0,1]$ . (a) Rétroprojection filtrée Mojette spline 0 avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_0(b,p,q)$ , (b) Rétroprojection filtrée classique avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_0(t,\theta)$ , (c) Rétroprojection filtrée Mojette spline 1 avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_1(b,p,q)$ , (d) Rétroprojection filtrée classique avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_1(t,\theta)$ .



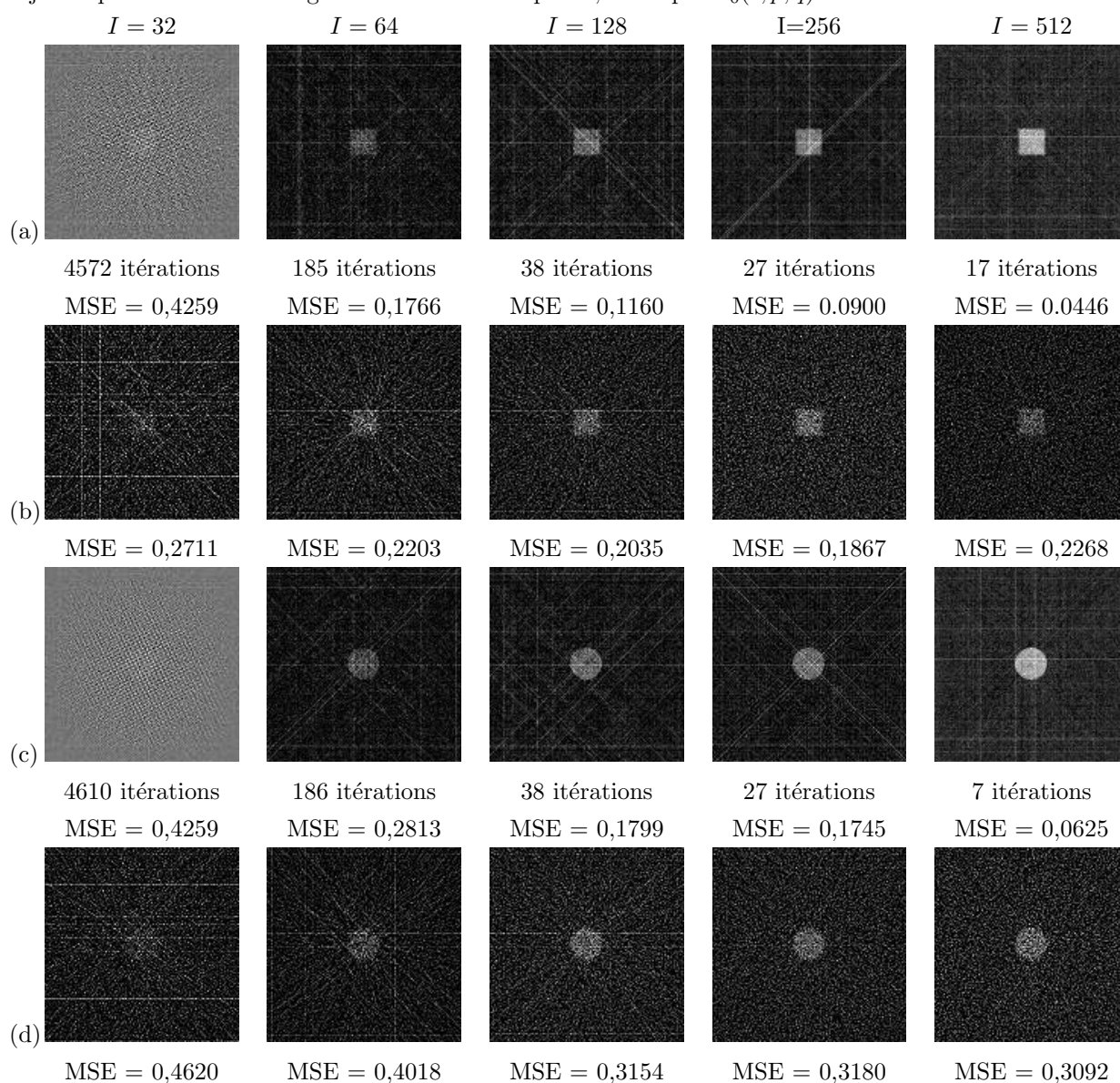
TAB. 6.6 - .

]Reconstruction du fantôme rond avec des projections bruitées par un bruit Poissonnien, les images reconstruites sont normalisées sur  $[0,1]$ . (a) Rétroprojection filtrée Mojette spline 0 avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_0(b,p,q)$ , (b) Rétroprojection filtrée classique avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_0(t,\theta)$ , (c) Rétroprojection filtrée Mojette spline 1 avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_1(b,p,q)$ , (d) Rétroprojection filtrée classique avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_1(t,\theta)$ .



TAB. 6.7 - .

]Reconstruction avec l'algorithme du gradient conjugué des fantômes carré et rond avec des projections bruitées par un bruit Poissonnien, les images reconstruites sont normalisées sur  $[0,1]$ . (a) Reconstruction par gradient conjugué Mojette avec des angles uniformément répartis, sur le fantôme carré, (b) Rétroprojection filtrée Mojette spline 0 avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_0(b,p,q)$  sur le fantôme carré, (c) Reconstruction par gradient conjugué Mojette avec des angles uniformément répartis, sur le fantôme rond, (d) Rétroprojection filtrée Mojette spline 0 avec des angles uniformément répartis, filtré par  $k_0(b,p,q)$  sur le fantôme rond.



La rétroprojection filtrée Mojette est plus bruitée que la reconstruction par gradient conjugué Mojette pour le même bruit sur les projections.

Pour un faible nombre de projections, l'algorithme du gradient conjugué Mojette donne de très bon résultats. Dès que le nombre de projections est suffisant (c'est-à-dire 64 projections) par rapport à la taille de l'image, cet algorithme donne des images reconstruites de meilleure qualité que la rétroprojection filtrée Mojette. Il pourrait de plus tirer avantage de l'augmentation du conditionnement de la matrice  $M^*M$  en utilisant l'information a priori sur la scène et le bruit.

## 6.7 Conclusion

Nous avons, dans ce chapitre, montré la mise en œuvre d'algorithmes classiques revisités grâce à la géométrie Mojette.

Un premier point a été de choisir les directions discrètes de projection qui respectent la géométrie Mojette mais aussi qui permettent une reconstruction de la meilleure qualité possible.

En l'absence de bruit, sur des fantômes simples nous pouvons reconstruire par rétroprojection filtrée Mojette ou par gradient conjugué Mojette. Il est intéressant de remarquer que nous pouvons reconstruire ces mêmes fantômes à partir de projections bruitées. Cela valide nos algorithmes et permet d'envisager des reconstructions d'images à partir de projections réelles et non plus simulées.

# Conclusion

Dans ce travail nous avons tout d'abord rappelé les principes de quelques modalités de l'imagerie médicale fondée sur la tomographie. Nous avons ensuite balayé les géométries d'acquisition de ces modalités en insistant sur l'utilisation de la géométrie parallèle à laquelle toutes les géométries peuvent être ramenées.

Nous avons ensuite rappelé les algorithmes classiques de la reconstruction tomographique que nous avons ensuite dérivés en géométrie Mojette. Nous avons rappelé l'existence de méthodes de reconstruction tomographique discrètes qui se rapprochent de la méthode de reconstruction Mojette.

L'opérateur Mojette est dépendant d'une grille discrète. Nous l'avons utilisé pour dériver un nouvel opérateur de reconstruction filtrée Mojette discrète exacte. Cet opérateur permet une reconstruction parfaite en l'absence de bruit avec un nombre de projections grand mais fini. La reconstruction est toujours possible en diminuant le nombre de projections ou en les interpolant, mais la qualité de reconstruction est moindre.

Nous avons généralisé l'opérateur Mojette en définissant un opérateur de projection dépendant d'un modèle de pixel quelconque. Nous avons de plus écrit les liens entre les opérateurs de projection et de rétroprojection Mojette Dirac et les opérateurs fondés sur un modèle de pixel quelconque.

L'utilisation de la géométrie discrète et de la rétroprojection Mojette exacte nous a permis de définir un algorithme de gradient conjugué Mojette.

L'utilisation d'un modèle de pixel spline couplé avec la théorie générale d'échantillonnage d'Unser-Aldroubi nous a permis de définir un schéma de reconstruction qui respecte l'équivalence continu-discret à chaque étape de la reconstruction. Ce schéma de reconstruction associé à un filtre dépendant du modèle de pixel spline utilisé,  $k_n$ , nous a permis de mettre en œuvre un algorithme de rétroprojection filtrée Mojette.

Tous ces algorithmes ont ensuite été testés sur des fantômes numériques simples en absence et présence de bruit et ces reconstructions montrent de bons résultats.

Nous avons dans ce manuscrit exploré des pistes pour faire de la reconstruction tomographie Mojette. Il reste de nombreuses voies à étudier.

La méthode de reconstruction discrète exacte Mojette doit être testée en présence de bruit et nous devons étudier son espace nul. Le choix des angles de projection uniformément répartis peut aussi être fait d'une autre façon qu'en choisissant des angles dans une suite de Farey. Finalement, nous allons aussi tester ces algorithmes de reconstruction sur des fantômes plus complexes et des

images réelles et en dimension 3. Cette méthode pourra être utilisée pour reconstruire des données PET 3D car la géométrie d'acquisition PET se prête bien à la reconstruction Mojette.

# Perspectives

Revenons tout d'abord aux deux fondements énoncés dans le chapitre 4, c'est-à-dire l'algorithme de reconstruction discret exact d'une part et la définition automatique de la maille obtenue par projection d'une maille. Il est clair que pour l'algorithme discret exact, il nous manque une analyse approfondie de la structure de l'espace nul correspondant aux suites de Farey plus petites. Il semble clair que cette structure peut être reliée à une analyse multirésolution Mojette qui nous fait toujours défaut (depuis la première tentative d'Olivier Philippé dans sa thèse). Il reste également des éclaircissements pratiques à apporter dans les relations entre le nombre de projections correspondant à la suite de Farey et la résolution finie de l'image avec les approximations trouvées sur le nombre d'angles "suffisant en pratique" mais aussi avec le nombre d'angles et de bins obtenus par l'algorithme de Mojette inverse de N. Normand. Les relations entre ces diverses pièces devraient apporter une meilleure compréhension de l'équivalence du filtre Rampe non infini utilisé ensuite dans la rétroprojection filtrée Mojette.

L'algorithme d'obtention automatique de la maille projetée à partir de la maille originale semble aujourd'hui également prometteur et des relations se sont nouées avec l'équipe du LIRMM de Montpellier et celle de SIC à Poitiers pour utiliser ce résultat (en dimension  $n$ ) dans d'autres domaines de la géométrie discrète. Il semble par exemple y avoir des applications dans des secteurs comme la cryptographie utilisant les courbes elliptiques ou bien des codes correcteurs à trous. Toujours dans le chapitre 4 nous n'avons pas aujourd'hui une vision suffisante des propriétés mathématiques globales de l'opérateur  $M^*M$  et de l'implication à la fois pour l'algorithme itératif du gradient conjugué et pour le filtre Rampe dans la FBP. Pour le gradient conjugué, le travail entrepris avec Jérôme Idier de l'IRC-CyN doit être poursuivi pour être en mesure d'utiliser pleinement ces possibilités mathématiques de structure Toeplitz-BlocToeplitz pour l'initialisation adéquate et le conditionnement du gradient conjugué.

Le chapitre 5 permet de rebondir et de généraliser la problématique de l'algorithme utilisé : méthode itérative avec le gradient conjugué Mojette ou bien méthode directe avec la rétroprojection de projections filtrées Mojette. Dans les deux cas de figure, le problème générique de la transformée Mojette, c'est-à-dire du nombre d'angles et de leur orientation n'est pas encore résolu de façon satisfaisante. En effet, le nombre d'angles est généralement fixé et l'on obtient ensuite par homothétie sur la projection (après l'avoir rendue continue par un mécanisme qui est exact) les valeurs des bins. En fait cela revient à inventer par une sorte de lissage la valeur des bins manquants vis-à-vis de



l'information totale dont on dispose à la fin de l'acquisition. Une autre manière de faire qui est sous étude maintenant est de faire ce lissage globalement dans le domaine Mojette. La nature du bruit associé à la mesure doit également être prise en compte à ce stade. Le fait de disposer d'un exemple où l'on acquiert directement dans l'espace Mojette en 3D doit être analysé. Il s'agit en l'occurrence de travailler les données d'acquisition de TEP 3D pour les entrer dans les plans de projections Mojette en forçant une pseudo-acquisition Mojette : chaque paire de photons issus de positon est "acquis" sur une ligne orientée en géométrie discrète avec un angle  $(p,q,r)$  correspondant. L'autre grand chantier que l'on doit maintenant aborder est la reconstruction d'exams réels et l'évaluation cohérente des résultats. Cela veut dire qu'il faut commencer par l'acquisition de fantômes physiques spécifiquement dessinés pour permettre une tâche spécifique de décision une fois l'image (ou la région) reconstruite. Les travaux réalisés dans le laboratoire du FDA depuis vingt ans serviront de fil conducteur à ce travail qui est devenu obligatoire en priorité pour les industriels désirant mettre des appareillages tomographiques sur le marché de la santé américain. Il est à noter que l'évaluation des algorithmes dans les bonnes revues semble suivre la même voie depuis un an et abandonner doucement le rapport signal à bruit standard.

Enfin, cette thèse a permis de réaliser le pont entre tomographie classique et tomographie discrète. Ce chantier, déjà commencé depuis dix ans avec la transformée Mojette, reste en cours et devra être alimenté avec d'autres résultats.

## Annexe A

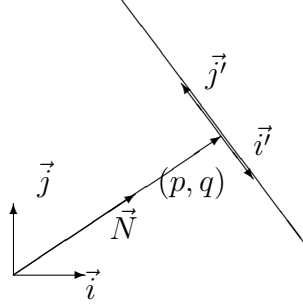
# Exemple pour l'obtention d'une base sur un hyperplan de projection [65] en 3D

Lors de la projection Mojette d'un plan, la projection obtenue est à une dimension. Les pixels de l'image se projettent sur les bins de cette projection. Il est facile de la caractériser à l'aide de sa direction et de son échantillonnage.

Lors d'une projection Mojette 3D, on obtient un plan de projection. Les voxels se projettent sur des bins dans ce plan. Les bins forment un échantillonnage régulier du plan. Pour caractériser ces lieux, nous devons trouver une base du plan de projection. Cette base doit être en plus une maille du plan, c'est à dire que en suivant les vecteurs de maille, à partir d'un bin du plan de projection, on doit pouvoir atteindre tous les autres.

Le choix de la maille du plan de projection n'est pas unique. Nous présentons une méthode d'obtention de cette maille telle que la matrice de passage entre la base du volume et la maille du plan soit à coefficients entiers. Nous partons d'une base orthogonale décrivant l'espace de départ.

Nous allons d'abord décrire une méthode permettant de définir automatiquement une maille sur le plan de projection à partir de combinaisons linéaires des projections des vecteurs de la base initiale en 2D puis en 3D. Puis, nous calculerons la matrice de passage entre la base du volume de départ et la maille du plan de projection.


 FIG. A.1 – Projection de la base  $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$  de l'espace 2D de départ dans la direction  $(p, q)$ 

## A.1 Détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 1D lors d'une projection Mojette 2D

Nous considérons l'espace de départ à deux dimensions muni d'une base  $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$ . Nous allons commencer par projeter les vecteurs de la base de départ sur la ligne de projection, puis de ces vecteurs projetés nous déduirons une base de la ligne de projection (Figure A.1).

Les vecteurs  $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$  se projettent en  $(\vec{i}'_1, \vec{i}'_2)$ . Comme ces vecteurs  $(\vec{i}'_1, \vec{i}'_2)$  appartiennent à la projection, on a :

$$p\vec{i}'_1 + q\vec{i}'_2 = \vec{0}, \quad (\text{A.1})$$

d'où

$$-\frac{p}{q}\vec{i}'_1 = \vec{i}'_2. \quad (\text{A.2})$$

Donc toute combinaison linéaire de  $\vec{i}'_1$  et de  $-\frac{p}{q}\vec{i}'_1$  est colinéaire à  $\vec{i}'_1$ .

On peut obtenir les points sur  $\vec{i}'_1$  soit en avançant de  $\alpha$  soit de  $\beta\frac{p}{q}$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . Le vecteur de base est

$$\vec{j}_1 = (\alpha + \beta\frac{p}{q})\vec{i}'_1. \quad (\text{A.3})$$

On veut néanmoins  $\alpha - \beta\frac{p}{q}$  le plus petit possible. Or, selon le théorème de Bezout, avec  $\text{PGCD}(p, q) = 1$ , il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$q\alpha - \beta p = \text{PGCD}(p, q), \quad (\text{A.4})$$

d'où on peut trouver  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\alpha - \beta\frac{p}{q} = \frac{\text{PGCD}(p, q)}{q} = \frac{1}{q}. \quad (\text{A.5})$$

Donc on obtient comme vecteur de base :

$$\vec{j}_1 = \frac{1}{q}\vec{i}'_1. \quad (\text{A.6})$$

Nous allons réutiliser cette méthode pour obtenir les vecteurs de base pour un plan de projection lors d'une projection Mojette 3D.

## A.2 Détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 2D lors d'une projection Mojette 3D

Nous considérons l'espace de départ à trois dimensions muni d'une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Nous allons commencer par projeter les vecteurs de la base de départ sur le plan de projection, puis de ces vecteurs projetés nous déduirons une maille du plan de projection.

### A.2.1 Calcul de la projection des vecteurs de base

Soit une projection Mojette dirac 3D  $M(x, y, z)$  suivant la direction  $(p, q, r)$ , avec  $\text{PGCD}(p, q, r) = 1$ . Calculons la matrice de projection sur le plan perpendiculaire au vecteur  $\vec{j}_2 = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$  avec  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base orthonormale de l'espace de départ et  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  la projection de cette base sur le plan de projection (Figure A.2). Le voxel  $(0, 0, 0)$  se projette sur le bin  $(0, 0)$ .

Soit  $A(x, y, z)$  un point de l'espace, il se projette en  $A'(x', y', z')$  sur le plan de projection. On a donc  $A' \in \vec{j}_2^\perp$

$$px' + qy' + rz' = 0. \quad (\text{A.7})$$

De plus, on doit avoir  $A\vec{A}' \cdot \vec{j}_2 = \vec{0}$ . D'où

$$\begin{cases} x' - x = \alpha p \\ y' - y = \alpha q \\ z' - z = \alpha r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha p + x \\ y' = \alpha q + y \\ z' = \alpha r + z \end{cases}. \quad (\text{A.8})$$

En reportant dans Eq. A.7,  $\alpha$  s'exprime comme :

$$\alpha = -\frac{px + qy + zr}{p^2 + q^2 + r^2}, \quad (\text{A.9})$$

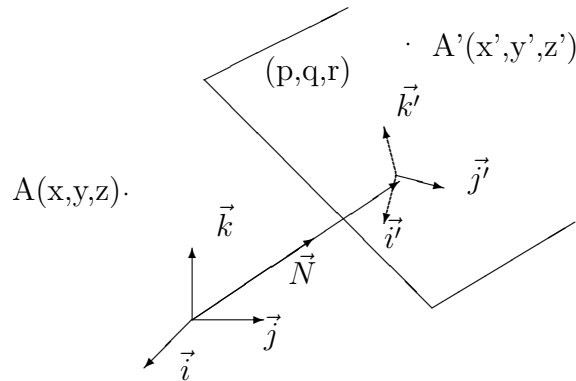


FIG. A.2 – Projection de la base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace 3D de départ dans la direction  $(p, q, r)$

d'où

$$\begin{cases} x' = \frac{(q^2+r^2)x-pqy-prz}{p^2+q^2+r^2} \\ y' = \frac{-pqx+(p^2+r^2)x-qrz}{p^2+q^2+r^2} \\ z' = \frac{-rpx-rqy+(p^2+q^2)z}{p^2+q^2+r^2} \end{cases} . \quad (\text{A.10})$$

La matrice de projection de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dans  $(\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{k}')$  est donc :

$$M = \frac{1}{p^2 + q^2 + r^2} \begin{pmatrix} q^2 + r^2 & -pq & -pr \\ -pq & p^2 + r^2 & -qr \\ -pr & -qr & p^2 + q^2 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.11})$$

Les vecteurs  $(\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{k}')$ , projections de  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  s'expriment comme :

$$\begin{cases} \vec{i}'_1 = \frac{1}{p^2+q^2+r^2}((q^2+r^2)\vec{i} - pq\vec{j} - pr\vec{k}) \\ \vec{i}'_2 = \frac{1}{p^2+q^2+r^2}(-pq\vec{i} + (p^2+r^2)\vec{j} - qr\vec{k}) \\ \vec{k}' = \frac{1}{p^2+q^2+r^2}(-pr\vec{i} - qr\vec{j} + (p^2+q^2)\vec{k}) \end{cases} . \quad (\text{A.12})$$

Nous avons obtenu  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  la projection des vecteurs de la base de départ dans le plan de projection. De ces vecteurs projetés, nous pouvons en déduire des vecteurs de maille.

## A.2.2 Obtention des vecteurs de base de la maille 2D

Si on connaît  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  tel que  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  forment une maille, à partir d'un point du plan de projection on peut atteindre tous les autres points du plan. Il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$ad - bc = 1, \quad (\text{A.13})$$

et si  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  forment une maille, alors on peut atteindre tous les bins du plan avec des vecteurs  $\vec{m}'$  et  $\vec{n}'$  tels que

$$\begin{aligned} \vec{m}' &= a\vec{j}_1 + b\vec{j}_2 \\ \vec{n}' &= c\vec{j}_1 + d\vec{j}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Pour chercher le premier vecteur de maille, nous choisissons la direction de  $\vec{i}'_1$ . Á partir de l'origine du plan de projection (i.e. le bin projection du voxel  $(0, 0, 0)$ ), on cherche le point "le plus proche" du point d'origine que l'on prendra comme extrémité du premier vecteur. Pour trouver le second vecteur, on prend la droite parallèle à  $\vec{i}'_1$  passant par un point de la grille et on prend le point "le plus proche" comme extrémité du deuxième vecteur de la maille (Figure A.3).

– Obtention du premier vecteur de maille  $\vec{j}'_1$  :

Les vecteurs  $\vec{i}'_1, \vec{i}'_2, \vec{k}'$  appartiennent au plan de projection. On a alors :

$$pi'_1 + qi'_2 + rk' = \vec{0}, \quad (\text{A.15})$$

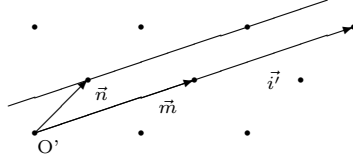


FIG. A.3 – Maille  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  du plan de projection

d'où

$$\vec{i}_1 = -\frac{q}{p}\vec{i}_2 - \frac{r}{p}\vec{k}', \quad (\text{A.16})$$

et

$$-\frac{p}{\text{PGCD}(q,r)}\vec{i}_1 = \frac{q}{\text{PGCD}(q,r)}\vec{i}_2 + \frac{r}{\text{PGCD}(q,r)}\vec{k}'. \quad (\text{A.17})$$

Donc toute combinaison linéaire de  $\vec{i}_1$  et de  $\frac{q}{\text{PGCD}(q,r)}\vec{i}_2 + \frac{r}{\text{PGCD}(q,r)}\vec{k}'$  est colinéaire à  $\vec{i}_1$ .

On peut obtenir les points sur  $\vec{i}_1$  soit en avançant de  $\alpha$  soit de  $-\beta\frac{p}{\text{PGCD}(q,r)}$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . Le premier vecteur de la maille est

$$\vec{j}_1 = (\alpha - \beta\frac{p}{\text{PGCD}(q,r)})\vec{i}_1. \quad (\text{A.18})$$

On veut néanmoins  $\alpha - \beta\frac{p}{\text{PGCD}(q,r)}$  le plus petit possible. Or, selon le théorème de Bezout, avec  $\text{PGCD}(p, \text{PGCD}(q,r))=1$  (soit  $\text{PGCD}(p,q,r)=1$ ), il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$\text{PGCD}(q,r)\alpha - \beta p = 1, \quad (\text{A.19})$$

d'où on peut trouver  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\alpha - \beta\frac{p}{\text{PGCD}(q,r)} = \frac{1}{\text{PGCD}(q,r)}. \quad (\text{A.20})$$

Donc on obtient comme premier vecteur de maille :

$$\vec{j}_1 = \frac{1}{\text{PGCD}(q,r)}\vec{i}_1. \quad (\text{A.21})$$

– Obtention du deuxième vecteur de maille  $\vec{j}_2$  :

Pour avoir le deuxième vecteur de la maille, on cherche une combinaison linéaire de  $\vec{i}_2$  et  $\vec{k}'$  qui donne le point "le plus proche" du point origine. Le point le plus proche peut être donné par  $\vec{i}_2$  ou par la projection de  $\vec{k}'$  sur  $\vec{i}_2$  (Figure A.4).

On exprime sur  $\vec{k}'$  en fonction de  $(\vec{i}_1, \vec{i}_2)$  :

$$\vec{k}' = -\frac{p}{r}\vec{i}_1 - \frac{q}{r}\vec{i}_2. \quad (\text{A.22})$$

La projection de  $\vec{k}'$  sur  $\vec{i}_2$  est proportionnelle à  $\frac{q}{r}$  ( $\frac{q}{r}$  n'est pas forcément une fraction irréductible) donc proportionnelle à

$$\frac{\frac{q}{\text{PGCD}(q,r)}}{\frac{r}{\text{PGCD}(q,r)}} = A * \frac{\text{PGCD}(q,r)}{r}, \quad (\text{A.23})$$

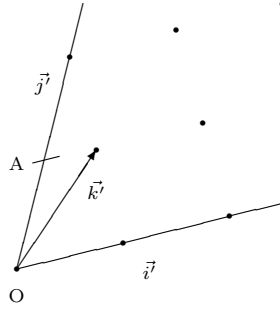


FIG. A.4 – Projection de  $\vec{k}'$  sur  $\vec{i}'_2$

avec A entier.

La projection du deuxième vecteur de maille  $\vec{j}'_2$  sur  $\vec{i}'_2$  est au moins de  $\frac{PGCD(q,r)}{r}$ .  
 On cherche a et b tels que  $\vec{j}'_2 = a\vec{i}'_2 + b\vec{k}'$ . Si on projette  $\vec{j}'_2$  sur  $\vec{i}'_2$  on a

$$a - \frac{bq}{r} = \frac{PGCD(q,r)}{r}, \tag{A.24}$$

d'où

$$ar - bq = PGCD(q,r). \tag{A.25}$$

Selon l'identité de Bezout, on peut trouver un couple (a, b) non unique qui remplit les conditions ci dessus.

On calcule (a, b) à l'aide de l'algorithme d'euclide étendu :

$$\begin{aligned} ar - bq &= PGCD(q,r) \\ r &= qu_1 + v_1 \\ q &= v_1u_2 + v_2 \\ v_1 &= v_2u_3 + v_3 \\ &\dots \\ v_{n-2} &= v_{n-1}u_n + v_n \\ v_{n-1} &= v_nu_{n+1} + 0 \end{aligned} \tag{A.26}$$

On a  $v_n = PGCD(q,r)$ . En notant  $r = v_{-1}$  et  $q = v_0$ , on voit que chaque reste d'ordre k (avec  $k > 1$ ) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de  $v_{k-1}$  et  $v_{k-2}$  :

$$v_n = v_{n-2} - v_{n-1}u_n, \tag{A.27}$$

et

$$v_{n-1} = v_{n-3} - v_{n-2}u_{n-1}. \tag{A.28}$$

## A.2 Détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 2D lors d'une projection Mojette 3D

---

Ainsi  $v_n$  est une combinaison linéaire de  $v_{n-1}$  et de  $v_{n-2}$  et, comme  $v_{n-1}$  est une combinaison linéaire de  $v_{n-2}$  et  $v_{n-3}$ , on peut exprimer à son tour  $v_n$  comme une combinaison linéaire de  $v_{n-2}$  et  $v_{n-3}$  :

$$v_n = (1 + u_n u_{n-1})v_{n-2} - u_n v_{n-3}. \quad (\text{A.29})$$

En procédant ainsi avec les restes successifs, on trouve explicitement  $v_n$  comme combinaison linéaire de  $v_{-1}$  et  $v_0$ , les coefficients étant des sommes et produits des quotients successifs.

Et on réitère le processus jusqu'à trouver  $v_n$  comme combinaison linéaire de  $v_{n-1} = r$  et de  $v_0 = q$ , c'est-à-dire  $ar - bq = \text{PGCD}(q, r)$ . On détermine ainsi  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  pour obtenir l'expression de  $\vec{j}_2$ .

Pour vérifier si les vecteurs  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  forment bien une maille, on calcule le volume attaché à la surface décrite par  $\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2$ . Pour obtenir la surface de la maille définie par  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ , on calcule  $\|\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2\|$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$\begin{aligned} \vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2 &= \frac{\vec{i}_1'}{\text{PGCD}(q, r)} \wedge (a\vec{i}_2' + b\vec{k}') \\ &= \frac{1}{\text{PGCD}(q, r)(p^2 + q^2 + r^2)^2} \\ &\quad \left[ \begin{pmatrix} q^2 + r^2 \\ -pq \\ -pr \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -apq - bpr \\ a(p^2 + r^2) - bqr \\ -aqr + b(p^2 + q^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{p^2 + q^2 + r^2} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

On obtient alors

$$\|\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2\| = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \quad (\text{A.31})$$

Si  $\vec{j}_2$  est le vecteur donnant la direction de projection  $(p, q, r)$ , le volume décrit par  $(\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2) \cdot \vec{j}_2$  est unitaire.

$$\begin{aligned} (\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_2) \cdot \vec{j}_2 &= \frac{1}{p^2 + q^2 + r^2} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

On a bien obtenu par le calcul de  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  une base du plan de projection.

Cette méthode permet la détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 2D lors d'une projection Mojette 3D.



### A.3 Matrice de passage entre la base du volume et la maille de la projection

Maintenant que nous avons les vecteurs de maille du plan de projection dans la direction  $(p, q, r)$ , nous pouvons calculer la matrice de passage de la base de départ  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dans la maille  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$ . La projection Mojette 3D s'écrit :

$$M_{23}f(B, p, q, r) = \sum_k \sum_l \sum_m f(k, l, m) \Delta \left( B - P_{3 \rightarrow 2} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \right), \quad (\text{A.33})$$

avec  $B^T = (b_1, b_2)$  sur la maille définissant le plan de projection de direction  $(p, q, r)$  avec  $\text{PGCD}(p, q, r) = 1$ .

Il faut déterminer la matrice de passage  $P_{3 \rightarrow 2}$ .

#### A.3.1 Obtention de la matrice $P_{3 \rightarrow 2}$

On suppose connaître les vecteurs de base du plan de projection dans la direction  $(p, q, r)$  (section A.2.2).

$$\vec{j}_1 = \frac{\vec{i}_1'}{\text{PGCD}(q, r)} \quad (\text{A.34})$$

$$\vec{j}_2 = a\vec{i}_2' + b\vec{k}' \quad (\text{A.35})$$

Lors de la projection les vecteurs de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont projetés sur  $(\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{k}')$ , les valeurs des coordonnées restent inchangées.

Dans le plan de projection, le vecteur  $\vec{k}'$  peut s'exprimer en fonction de  $\vec{i}_1'$  et  $\vec{i}_2'$  si  $r \neq 0$  :

$$\vec{k}' = \frac{-p}{r}\vec{i}_1' - \frac{q}{r}\vec{i}_2'. \quad (\text{A.36})$$

La matrice de passage de  $(\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{k}')$  à  $(\vec{i}_1', \vec{i}_2')$  est :

$$A_{(\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{k}') \rightarrow (\vec{i}_1', \vec{i}_2')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p/r \\ 0 & 1 & -q/r \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Ensuite ces vecteurs projetés sont utilisés pour définir la maille  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$ . La matrice de passage de la base  $(\vec{i}_1', \vec{i}_2')$  à  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  est (section A.2.2) :

$$A_{(\vec{i}_1', \vec{i}_2') \rightarrow (\vec{j}_1, \vec{j}_2)} = \begin{pmatrix} \text{PGCD}(q, r) & \frac{bp\text{PGCD}(q, r)}{ar-bq} \\ 0 & \frac{r}{ar-bq} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

La matrice de passage de  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  est donc

$$P_{3 \rightarrow 2} = A_{(\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{k}') \rightarrow (\vec{i}_1', \vec{i}_2')} * A_{(\vec{i}_1', \vec{i}_2') \rightarrow (\vec{j}_1, \vec{j}_2)} \quad (\text{A.39})$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \text{PGCD}(q, r) & bp & -ap \\ 0 & \frac{r}{\text{PGCD}(q, r)} & \frac{-q}{\text{PGCD}(q, r)} \end{pmatrix} & \text{si } (q, r) \neq (0, 0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } (q, r) = (0, 0). \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

### A.3.2 Correspondance bin/pixel

La description du plan de projection par la maille  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  est une description "sans trou", c'est à dire que l'on obtient bien un bin en face de chaque voxel projeté et que chaque voxel correspond à la rétroprojection d'un bin.

L'obtention de la matrice  $P_{3 \rightarrow 2}$  montre que pour toute coordonnée entière d'un voxel on obtient des coordonnées entières dans la base définie par la maille  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  car la matrice de passage  $P_{3 \rightarrow 2}$  ne contient que des coefficients entier. Donc un voxel se projette toujours sur un bin.

Réciproquement, tout bin du plan que l'on peut attendre par une combinaison linéaire des vecteurs de base  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$  correspond à au moins un voxel. Par construction le pixel  $(0, 0, 0)$  se projette sur le bin  $(0, 0)$ .

Si on considère le voxel  $(1, 0, 0)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , il se projette en  $(\text{PGCD}(q, r), 0)$  dans la base  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$ . De plus, le voxel  $(0, \frac{q}{\text{PGCD}(q, r)}, \frac{r}{\text{PGCD}(q, r)})$  se projete sur le bin  $(-p, 0)$  dans  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2)$ . Comme  $\text{PGCD}(\text{PGCD}(q, r), p) = 1$ , selon le théorème de Bezout il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\alpha \text{PGCD}(q, r) - \beta p = 1. \quad (\text{A.41})$$

Comme on peut trouver  $\alpha$  et  $\beta$ , le voxel  $(\alpha, \beta q / \text{PGCD}(q, r), \beta r / \text{PGCD}(q, r))$  qui se projette en  $(1, 0)$  existe. Donc on trouve des voxels en face de toute la ligne de bin  $(1, 0)$ .

Si on considère le voxel  $(0, a, b)$ , il se projette en  $(0, 1)$ . On trouve donc des voxels en face de toute la ligne de bin  $(0, 1)$ .

En face chaque bin, on trouve un voxel et en face de chaque voxel se trouve un bin. La maille décrite précédemment permet de décrire le plan de projection sans trou et avec une matrice de passage à coefficients entiers. Elle permet de définir simplement la projection Mojette 3D.



## Annexe B

# Calcul de la transformée de Fourier inverse du filtre de RamLak

Dans cette annexe, nous rappelons comment inverser le filtre  $K(\nu) = |\nu|rect_{\nu\beta}(\nu)$  afin d'obtenir sa formule dans le domaine spatial [36, 47, 7].

$$k(t) = \mathcal{F}^{-1}[K(\nu)] \quad (\text{B.1})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.2})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu| rect_{\nu\beta}(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.3})$$

$$= \int_{-\nu\beta}^{+\nu\beta} |\nu| \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.4})$$

$$= \int_{-\nu\beta}^0 (-\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu + \int_0^{\nu\beta} (\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{B.6})$$

Changement de variable dans la première intégrale :  $\mu = -\nu$

$$k(t) = \int_{\nu\beta}^0 (-\mu) \exp(-2i\pi\mu t) d\mu + \int_0^{\nu\beta} \nu \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.7})$$

$$= \int_{\nu\beta}^0 (-\nu) \exp(-2i\pi\nu t) d\nu + \int_0^{\nu\beta} \nu \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.8})$$

$$= \int_0^{\nu\beta} \nu \exp(-2i\pi\nu t) d\nu + \int_0^{\nu\beta} \nu \exp(2i\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.9})$$

$$= \int_0^{\nu\beta} \nu [\exp(-2i\pi\nu t) + \exp(2i\pi\nu t)] d\nu \quad (\text{B.10})$$

$$= 2 \int_0^{\nu\beta} \nu \cos(2\pi\nu t) d\nu \quad (\text{B.11})$$

$$(\text{B.12})$$

Changement de variable :

$$\left| \begin{array}{l} u = \nu \\ u' = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v' = \cos(2\pi\nu t) \\ v = \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi t} \end{array} \right|$$

$$k(t) = 2 \left( \left[ \nu \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi t} \right]_0^{\nu_\beta} - \int_0^{\nu_\beta} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi t} d\nu \right) \quad (\text{B.13})$$

$$= 2 \left( \nu_\beta \frac{\sin(2\pi\nu_\beta t)}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t} \int_0^{\nu_\beta} \sin(2\pi\nu t) d\nu \right) \quad (\text{B.14})$$

$$= 2 \left( \nu_\beta \frac{\sin(2\pi\nu_\beta t)}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t} \left[ -\frac{\cos(2\pi\nu t)}{2\pi t} \right]_0^{\nu_\beta} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$= 2 \left( \nu_\beta \frac{\sin(2\pi\nu_\beta t)}{2\pi t} - \frac{1}{4\pi^2 t^2} [-\cos(2\pi\nu_\beta t) + 1] \right) \quad (\text{B.16})$$

Formule trigonométrique :  $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$  soit  $1 - \cos(2a) = 2\sin^2 a$

On obtient donc :

$$k(t) = 2 \left( \nu_\beta \frac{\sin(2\pi\nu_\beta t)}{2\pi t} - \frac{1}{4\pi^2 t^2} [2\sin^2(\pi\nu_\beta t)] \right) \quad (\text{B.17})$$

$$= 2 \left( \nu_\beta^2 \frac{\sin(2\pi\nu_\beta t)}{2\pi\nu_\beta t} - \frac{\nu_\beta^2 \sin^2(\pi\nu_\beta t)}{2\pi^2\nu_\beta^2 t^2} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\boxed{k(t) = 2 \left( \nu_\beta^2 \frac{\sin(2\pi\nu_\beta t)}{2\pi\nu_\beta t} - \frac{\nu_\beta^2}{2} \left[ \frac{\sin(\pi\nu_\beta t)}{\pi\nu_\beta t} \right]^2 \right)} \quad (\text{B.19})$$

# Annexe C

## Filtre $k_1$

Nous allons calculer ici le filtre  $k_1$  dans le domaine spatial. Pour cela nous allons utiliser la même méthodologie que celle décrite dans [38] pour le calcul de  $k_0$ .

### C.1 Calcul de $k_1$ spatial

#### C.1.1 Cas $\theta \in ]0, \pi/4[$

Le filtre  $K_1$  dans le domaine de Fourier s'écrit :

$$K_1(\nu, \theta) = \pi |\nu| \Delta^4 \text{sinc}(\nu \Delta \cos \theta)^2 \text{sinc}(\nu \Delta \sin \theta)^2 \quad (\text{C.1})$$

$$= K_0(\nu, \theta) \times W_0(\nu, \theta) \quad (\text{C.2})$$

avec  $W_0(\nu, \theta) = \Delta^2 \text{sinc}(\nu \Delta \cos \theta) \text{sinc}(\nu \Delta \sin \theta)$  qui correspond à la projection d'un pixel spline 0 dans la direction  $\theta$  dans le domaine de Fourier.

Donc on peut écrire :

$$k_1(t, \theta) = \mathcal{F}^{-1}(K_1(\nu, \theta)) \quad (\text{C.3})$$

$$= \mathcal{F}^{-1}(K_0(\nu, \theta)) * \mathcal{F}^{-1}(W_0(t, \theta)) \quad (\text{C.4})$$

$$= k_0(t, \theta) * \beta_{0, \Delta \cos \theta}(t) * \beta_{0, \Delta \sin \theta}(t). \quad (\text{C.5})$$

Nous allons faire le calcul en deux étapes en calculant tout d'abord :

$$\tilde{k}_1(t, \theta) = k_0(t, \theta) * \beta_{0, \Delta \sin \theta}(t) \quad (\text{C.6})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} k_0(u, \theta) \beta_{0, \Delta \sin \theta}(t - u, \theta) du, \quad (\text{C.7})$$

avec

$$\beta_{0, \Delta \sin \theta}(t - u, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t - u| > \frac{\Delta \sin \theta}{2} \\ \frac{1}{2 \sin \theta} & \text{si } |t - u| = \frac{\Delta \sin \theta}{2} \\ \frac{1}{\sin \theta} & \text{si } |t - u| < \frac{\Delta \sin \theta}{2}. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

On obtient alors :

$$\tilde{k}_1(t, \theta) = \int_{t - \frac{\Delta \sin \theta}{2}}^{t + \frac{\Delta \sin \theta}{2}} \frac{1}{\sin \theta} k_0(u, \theta) du. \quad (\text{C.9})$$

Or de :

$$\ln |t^2 - \alpha^2| = \frac{d}{dt} ((t - \alpha) \ln |t - \alpha| + (t + \alpha) \ln |t + \alpha|) - 2, \quad (\text{C.10})$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\Delta}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \\ \beta = \frac{\Delta}{2} (\cos \theta - \sin \theta), \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

on peut déduire :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1(t, \theta) &= \frac{1}{\pi \sin 2\theta \sin \theta} \\ &\times \left[ \begin{array}{l} (u - \alpha) \ln |u - \alpha| + (u + \alpha) \ln |u + \alpha| \\ -(u - \beta) \ln |u - \beta| - (u + \beta) \ln |u + \beta| \end{array} \right]_{t - \frac{\Delta \sin \theta}{2}}^{t + \frac{\Delta \sin \theta}{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

En posant :

$$a = \frac{\Delta \sin \theta}{2} \quad (\text{C.13})$$

on écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1(t, \theta) &= \frac{1}{\pi \sin 2\theta \sin \theta} \\ &\times \left[ \begin{array}{l} (t + a - \alpha) \ln |t + a - \alpha| + (t + a + \alpha) \ln |t + a + \alpha| \\ -(t + a - \beta) \ln |t + a - \beta| - (t + a + \beta) \ln |t + a + \beta| \\ -(t - a - \alpha) \ln |t - a - \alpha| - (t - a + \alpha) \ln |t - a + \alpha| \\ +(t - a - \beta) \ln |t - a - \beta| + (t - a + \beta) \ln |t - a + \beta| \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Nous arrivons à la deuxième partie du calcul :

$$\begin{aligned} k_1(t, \theta) &= \tilde{k}_1(t, \theta) * \beta_{0, \Delta \cos \theta}(t, \theta) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{k}_1(u, \theta) \beta_{0, \Delta \cos \theta}(t - u, \theta) du \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

avec

$$\beta_{0, \Delta \cos \theta}(t - u, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t - u| > \frac{\Delta \cos \theta}{2} \\ \frac{1}{2 \cos \theta} & \text{si } |t - u| = \frac{\Delta \cos \theta}{2} \\ \frac{1}{\cos \theta} & \text{si } |t - u| < \frac{\Delta \cos \theta}{2}, \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

donne

$$k_1(t, \theta) = \int_{t - \frac{\Delta \cos \theta}{2}}^{t + \frac{\Delta \cos \theta}{2}} \frac{1}{\cos \theta} \tilde{k}_1(u, \theta) du. \quad (\text{C.17})$$

Or de :

$$(u + C) \ln |u + C| = \frac{d}{du} \left( \frac{1}{4} (u + C)^2 [2 \ln |u + C| - 1] \right), \quad (\text{C.18})$$

où  $C$  est une constante, on déduit :

$$k_1(t, \theta) = \frac{1}{4\pi \sin 2\theta \sin \theta \cos \theta} \times \left[ \begin{array}{l} (u+a-\alpha)^2 [2 \ln |u+a-\alpha| - 1] \\ +(u+a+\alpha)^2 [2 \ln |u+a+\alpha| - 1] \\ -(u+a-\beta)^2 [2 \ln |u+a-\beta| - 1] \\ -(u+a+\beta)^2 [2 \ln |u+a+\beta| - 1] \\ -(u-a-\alpha)^2 [2 \ln |u-a-\alpha| - 1] \\ -(u-a+\alpha)^2 [2 \ln |u-a+\alpha| - 1] \\ +(u-a-\beta)^2 [2 \ln |u-a-\beta| - 1] \\ +(u-a+\beta)^2 [2 \ln |u-a+\beta| - 1] \end{array} \right]_{t-\frac{\Delta \cos \theta}{2}}^{t+\frac{\Delta \cos \theta}{2}} \quad (\text{C.19})$$

Ce qui donne avec

$$b = \frac{\Delta \cos \theta}{2} \quad (\text{C.20})$$

l'expression :

$$k_1(t, \theta) = \frac{1}{4\pi \sin 2\theta \sin \theta \cos \theta} \times \left[ \begin{array}{l} (t+b+a-\alpha)^2 [2 \ln |t+b+a-\alpha| - 1] + (t+b+a+\alpha)^2 [2 \ln |t+b+a+\alpha| - 1] \\ -(t+b+a-\beta)^2 [2 \ln |t+b+a-\beta| - 1] - (t+b+a+\beta)^2 [2 \ln |t+b+a+\beta| - 1] \\ -(t+b-a-\alpha)^2 [2 \ln |t+b-a-\alpha| - 1] - (t+b-a+\alpha)^2 [2 \ln |t+b-a+\alpha| - 1] \\ +(t+b-a-\beta)^2 [2 \ln |t+b-a-\beta| - 1] + (t+b-a+\beta)^2 [2 \ln |t+b-a+\beta| - 1] \\ -(t-b+a-\alpha)^2 [2 \ln |t-b+a-\alpha| - 1] - (t-b+a+\alpha)^2 [2 \ln |t-b+a+\alpha| - 1] \\ +(t-b+a-\beta)^2 [2 \ln |t-b+a-\beta| - 1] + (t-b+a+\beta)^2 [2 \ln |t-b+a+\beta| - 1] \\ +(t-b-a-\alpha)^2 [2 \ln |t-b-a-\alpha| - 1] + (t-b-a+\alpha)^2 [2 \ln |t-b-a+\alpha| - 1] \\ -(t-b-a-\beta)^2 [2 \ln |t-b-a-\beta| - 1] - (t-b-a+\beta)^2 [2 \ln |t-b-a+\beta| - 1] \end{array} \right] \quad (\text{C.21})$$

En remarquant que :

$$\begin{cases} \alpha = a + b \\ \beta = b - a, \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

on obtient pour l'expression précédente :



$$\begin{aligned}
k_1(t, \theta) &= \frac{1}{4\pi \sin 2\theta \sin \theta \cos \theta} \\
&\times \begin{bmatrix} 4t^2[2 \ln |t| - 1] \\ -2(t - 2a)^2[2 \ln |t - 2a| - 1] \\ -2(t + 2a)^2[2 \ln |t + 2a| - 1] \\ -2(t - 2b)^2[2 \ln |t - 2b| - 1] \\ -2(t + 2b)^2[2 \ln |t + 2b| - 1] \\ +(t + 2b + 2a)^2[2 \ln |t + 2b + 2a| - 1] \\ +(t + 2b - 2a)^2[2 \ln |t + 2b - 2a| - 1] \\ +(t - 2b + 2a)^2[2 \ln |t - 2b + 2a| - 1] \\ +(t - 2b - 2a)^2[2 \ln |t - 2b - 2a| - 1] \end{bmatrix} \quad (C.23)
\end{aligned}$$

Ce qui donne comme expression :

$$\begin{aligned}
k_1(t, \theta) &= \frac{1}{2\pi \sin^2 2\theta} \\
&\times \begin{bmatrix} 4t^2[2 \ln |t| - 1] \\ -2(t - \Delta \sin \theta)^2[2 \ln |t - \Delta \sin \theta| - 1] \\ -2(t + \Delta \sin \theta)^2[2 \ln |t + \Delta \sin \theta| - 1] \\ -2(t - \Delta \cos \theta)^2[2 \ln |t - \Delta \cos \theta| - 1] \\ -2(t + \Delta \cos \theta)^2[2 \ln |t + \Delta \cos \theta| - 1] \\ +(t + \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta)^2[2 \ln |t + \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta| - 1] \\ +(t + \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta)^2[2 \ln |t + \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta| - 1] \\ +(t - \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta)^2[2 \ln |t - \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta| - 1] \\ +(t - \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta)^2[2 \ln |t - \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta| - 1] \end{bmatrix} \quad (C.24)
\end{aligned}$$

En faisant le calcul de tous les facteurs multipliés par -1, on remarque qu'ils s'annulent, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
k_1(t, \theta) &= \frac{1}{2\pi \sin^2 2\theta} \\
&\times \begin{bmatrix} 8t^2 \ln |t| \\ -4(t - \Delta \sin \theta)^2 \ln |t - \Delta \sin \theta| \\ -4(t + \Delta \sin \theta)^2 \ln |t + \Delta \sin \theta| \\ -4(t - \Delta \cos \theta)^2 \ln |t - \Delta \cos \theta| \\ -4(t + \Delta \cos \theta)^2 \ln |t + \Delta \cos \theta| \\ +2(t + \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta)^2 \ln |t + \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta| \\ +2(t + \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta)^2 \ln |t + \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta| \\ +2(t - \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta)^2 \ln |t - \Delta \cos \theta + \Delta \sin \theta| \\ +2(t - \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta)^2 \ln |t - \Delta \cos \theta - \Delta \sin \theta| \end{bmatrix} \quad (C.25)
\end{aligned}$$

### C.1.2 Cas $\theta = 0$

Dans le cas où  $\theta = 0$ , l'expression de  $k_1$  devient :

$$k_1(t, 0) = k_0(t, 0) * \beta_{0,\Delta}(t), \quad (\text{C.26})$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} k_1(t, 0) &= -\frac{\Delta^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 - \frac{\Delta^2}{4}} \beta_{0,\Delta}(t-u) dt \\ &= -\frac{\Delta^2}{2\pi} \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{u^2 - \frac{\Delta^2}{4}} du, \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

car

$$\beta_{0,\Delta}(t-u, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t-u| > \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t-u| = \frac{\Delta}{2} \\ 1 & \text{si } |t-u| < \frac{\Delta}{2}. \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} k_1(t, 0) &= -\frac{\Delta^2}{2\pi} \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{u^2 - \frac{\Delta^2}{4}} du \\ &= -\frac{\Delta}{2\pi} \int_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{u - \frac{\Delta}{2}} - \frac{1}{u + \frac{\Delta}{2}} du \\ &= -\frac{\Delta}{2\pi} \left[ \ln \left| u - \frac{\Delta}{2} \right| - \ln \left| u + \frac{\Delta}{2} \right| \right]_{t-\frac{\Delta}{2}}^{t+\frac{\Delta}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

car

$$\frac{\Delta}{(u - \frac{\Delta}{2})(u + \frac{\Delta}{2})} = \frac{1}{u - \frac{\Delta}{2}} - \frac{1}{u + \frac{\Delta}{2}}. \quad (\text{C.30})$$

On obtient alors :

$$k_1(t, 0) = -\frac{\Delta}{2\pi} \left[ 2 \ln |t| - \ln |t + \Delta| - \ln |t - \Delta| \right] \quad (\text{C.31})$$

## C.2 Discrétisation de $k_1$ en géométrie Mojette

On discrétise en géométrie Mojette en prenant  $t = \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}}$  et  $\tan \theta = \frac{q}{p}$ , pour  $p, q \notin \{0..1\}$ . De plus on a  $\sin \theta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ ,  $\cos \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$  et  $\sin 2\theta = \frac{2pq}{p^2+q^2}$  ce qui donne pour  $k_1$  :

$$k_1(b, p, q) = \frac{(p^2+q^2)^2}{8\pi p^2 q^2} \times \left[ \begin{array}{l} 8 \frac{b^2 \Delta^2}{p^2+q^2} \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ -4 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ -4 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ -4 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ -4 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ +2 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ +2 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ +2 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} + \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \\ +2 \left( \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right)^2 \ln \left| \frac{b\Delta}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} - \Delta \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right| \end{array} \right] \quad (\text{C.32})$$

Ce qui donne après simplification :

$$k_1(b, p, q) = \frac{\Delta^2(p^2+q^2)}{8\pi p^2 q^2} \times \left[ \begin{array}{l} 8b^2 \ln |b| \\ -4(b-q)^2 \ln |b-q| \\ -4(b+q)^2 \ln |b+q| \\ -4(b-p)^2 \ln |b-p| \\ -4(b+p)^2 \ln |b+p| \\ +2(b+p+q)^2 \ln |b+p+q| \\ +2(b+p-q)^2 \ln |b+p-q| \\ +2(b-p+q)^2 \ln |b-p+q| \\ +2(b-p-q)^2 \ln |b-p-q| \end{array} \right] \quad (\text{C.33})$$

# Bibliographie

- [1] The assessment of image quality. Rapport technique, ICRU, Bethesda, MD : International Commission on Radiation Units and Measurements, 1996.
- [2] Akram ALDROUBI et Michael UNSER : Sampling procedures in function spaces and asymptotic equivalence with Shannon's sampling theory. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, 15:1–21, 1994.
- [3] Jean-Louis AMANS et Gilbert FERRETTI : *La tomographie médicale, imagerie morphologique et imagerie fonctionnelle*, chapitre 1, La tomographie X médicale, pages 33–56. Traitement du Signal et de l'Image. Pierre Grangeat, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [4] F. AUTRUSSEAU : *Modélisation psychovisuelle pour le tatouage des images*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Novembre 2002.
- [5] F. AUTRUSSEAU, JP. GUÉDON et Yves BIZAIS : Mojette cryptomarking algorithm for medical images. *In Medical Imaging 2003*, volume II, pages 958–965. SPIE, February 2003.
- [6] Florent AUTRUSSEAU et JeanPierre GUÉDON : Chiffrement mojette d'images médicales. *ISI, Ingénierie des Systèmes d'Information, numéro spécial sur les systèmes d'information médicale*, 8(1):113–134, 2003.
- [7] Harrison H. BARRETT et Kyle J. MYERS : *Foundation of Image Science*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2004.
- [8] Habib BENALI et Françoise PEYRIN : *La tomographie*, chapitre Les méthodes discrètes, pages 111–138. Traitement du Signal et de l'Image. Pierre Grangeat, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [9] B. BENDRIEM : Les détecteurs de positons : Caméra PET - caméra PET-SPECT. *ACOMEN*, 4(1):34–40, 1998.
- [10] Denis Le BIHAN : Bridging the gap between brain anatomy and function with diffusion MRI. *In ENSR03, Istanbul, Turkey*, 2003.
- [11] Jeff A. BILMES : A gentle tutorial of the EM algorithm and its applications to parameter estimation for gaussian mixture and hidden markov models. Rapport technique, International Computer Science Institute, 1998.
- [12] Pierre BLEUET : *Reconstruction 3D par Tomosynthèse Généralisée. Application à l'imagerie Médicale par Rayon X*. Thèse de doctorat, CREATIS, Octobre 2002.

- 
- [13] John M. BOONE : *Handbook of Medical Imaging*, volume 1 Physic and Psychophysics, chapitre X-ray Production, Interaction, and Detection in Diagnostic Imaging, pages 1–78. Jacob Beutel and Harold L. Kundel and Richard L. Van Metter, February 2000.
- [14] N. K. BOSE et K. J. BOO : Asymptotic eigenvalue distribution of block-toeplitz matrices. *IEEE Transaction on Information theory*, 44(2):858–861, March 1998.
- [15] André BRIGUET et Didier REVEL : *La tomographie médicale, imagerie morphologique et imagerie fonctionnelle*, chapitre 3, La tomographie par résonance magnétique nucléaire, pages 77–97. Traitement du Signal et de l’Image. Pierre Grangeat, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [16] J. T. BUSHBERG, J. A. SEIBERT, Jr. E. M. LEIDHOLDT et J. M. BOONE : *The Essential Physics of Medical imaging*. Lippincott Williams and Wilkins, November 1994.
- [17] Irène BUVAT : Les différents traceurs et leur production. Cours de DEA, 2001.
- [18] Irène BUVAT et Jacques DAR COURT : *La tomographie médicale, imagerie morphologique et imagerie fonctionnelle*, chapitre La tomographie d’émission monophotonique, pages 101–122. Traitement du Signal et de l’Image. Pierre Grangeat, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [19] Raymond H. CHAN et Michael K. NG : Conjugate gradient methods for Toeplitz systems. *SIAM Review*, 38(3):427–482, 1996.
- [20] Allan M. CORMACK : Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it, December 1979.
- [21] Michel DEFRISE et Pierre GREANGEAT : *La tomographie*, chapitre Les méthodes analytiques, pages 53–86. Traitement du Signal et de l’Image. Pierre Grangeat, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [22] Michel DEFRISE et Regine TREBOSSEN : *La tomographie médicale, imagerie morphologique et imagerie fonctionnelle*, chapitre La tomographie d’émission de positons, pages 123–147. Traitement du Signal et de l’Image. Pierre Grangeat, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [23] Frederic H. FAHEY : Data acquisition in PET imaging. *Journal of Nuclear Medicine Technology*, 30(2):39–49, June 2002.
- [24] L.A. FELDKAMP, L.C. DAVIS et J.W. KRESS : Practical cone-beam algorithm. *J. Opt. Soc. Am.*, 1 (A):612–619, 1984.
- [25] Aaron FENSTER et Donal B. DOWNEY : *Handbook of Medical Imaging*, volume 1 Physic and Psychophysics, chapitre Three-Dimensional Ultrasound Imaging, pages 463–509. Jacob Beutel and Harold L. Kundel and Richard L. Van Metter, February 2000.
- [26] Fabien FESCHET et Yan GÉRARD : Computerized tomography with digital lines and linear programming. *In DGCI*, pages 126–135, 2005.
- [27] Jeffrey A. FESSLER et Scott D. BOOTH : Conjugate-gradient preconditioning methods for shift-invariant pet image reconstruction. *IEEE Transaction on Image Processing*, 8(5):688–699, May 1999.

- [28] F.MATUS et J. FLUSSER : Image representations via a finite radon transform. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(10):996–1006, October 1993.
- [29] T.O.J. FUCHS, M. KACHELRIESS et W.A. KALENDER : Fast volume scanning approaches by x-ray-computed tomography. In C. ROUX et J.K. UDUPA, éditeurs : *Emerging Medical Imaging Technology*, pages 1492–1502. Proceedings of the IEEE, Oct 2003.
- [30] David J. GOODENOUGH : *Handbook of Medical Imaging*, volume 1 Physic and Psychophysics, chapitre Tomographic Imaging, pages 511–558. Jacob Beutel and Harold L. Kundel and Richard L. Van Metter, February 2000.
- [31] R. GORDON, R. BENDER et G.T. HERMAN : Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29:471–482, 1970.
- [32] Ronald L. GRAHAM, Donald E. KNUTH et Oren PATASHNIK : *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science (2nd Edition)*. Addison-Wesley, 1994.
- [33] Pierre GRANGEAT : *La Tomographie*. Traitement du Signal et de l'Image. librairie LAVOISIER, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [34] Pierre GRANGEAT : *La tomographie médicale, imagerie morphologique et imagerie fonctionnelle*. Traitement du Signal et de l'Image. Hermes, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [35] Pierre GREANGEAT : *La tomographie*, chapitre Introduction à la tomographie, pages 31–49. Traitement du Signal et de l'Image. Pierre Grangeat, Hermes science édition, Janvier 2002.
- [36] JeanPierre GUÉDON : *Les problèmes d'échantillonnages dans la reconstruction d'images à partir de projections*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Novembre 1990.
- [37] JeanPierre GUÉDON : L'Histoire de la transformée Mojette (la forme et la projection). Habilitation à diriger des recherches, 2001.
- [38] JeanPierre GUÉDON et Yves BIZAIS : Bandlimited and haar filtered back-projection reconstruction. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 13(3):430–440, September 1994.
- [39] JeanPierre GUÉDON, Benoit PARREIN et Nicolas NORMAND : Internet distributed image information system. pages 205–214. Integrated Computer-Aided Engineering, 2001.
- [40] JP. GUÉDON, D. BARBA et N. BURGER : Psychovisual image coding via an exact discrete Radon transform algorithm. In *VCIP95*, volume 2501 de *Proc. SPIE*, pages 562–572, 1995.
- [41] G HERMAN et A KUBA : *Discrete tomography, Foundations, algorithms and applications (Applied and numerical harmonics analysis series)*. Springer-Verlag, 1999.
- [42] Gabor T. HERMAN : *Image Reconstruction From Projections*, volume 32 de *Topics in applied physics*. Computer Science and Applied Mathematics, springer verlag édition, 1979.
- [43] G.T. HERMAN, A. LENT et S. ROWLAND : Art : Mathematics and applications. *Journal of Theoretical Biology*, 42:1–32, 1973.
- [44] Barrett HH et Swindell W. : *Radiological Imaging : The Theory of Image Formation, Detection, and Processing*. San Diego : Academic Press, 1996.

- 
- [45] H. Malcom HUDSON et Richard S. LARKIN : Accelerated image reconstruction using ordered subset of projection data. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 13(4):100–108, 1994.
- [46] Myriam Servières Jérôme IDIER, Nicolas NORMAND et JeanPierre GUÉDON : Conjugate gradient moquette reconstruction. In *Medical Imaging 2005 : Image Processing*, volume 5747, pages 2067–2074. J. Michael Fitzpatrick and Joseph M. Reinhardt, 2005.
- [47] A. C. KAK et Malcolm SLANEY : *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [48] Alexander KATSEVICH : A general inversion formula for cone beam ct. In *Fully 3D Reconstruction In Radiology and Nuclear Medicine*. Yves Bizais, 2003.
- [49] M. KATZ : *Questions of Uniqueness and Resolution in Reconstruction from projections*, volume 26 de *Lect. Notes Biomath.* Springer-Verlag, 1979.
- [50] Andrew KINGSTON et Imants SVALBE : A discrete modulo  $n$  projective Radon transform for  $n \times n$  images. In *DGCI05 proceedings*, pages 136–147, 2005.
- [51] Andrew KINGSTON et Imants D. SVALBE : Mapping between digital and continuous projections via the discrete radon transform in fourier space. In *DICTA*, pages 263–272, 2003.
- [52] Attila KUBA et Gerhard J. WOEGINGER : Two remarks on reconstructing binary vectors from their absorbed projections. In *DGCI*, pages 148–152, 2005.
- [53] I. LAURETTE, Ph. DESVIGNES, P.M. KOULIBALY, E. DEBREUVE et J. DARCOURT : Reconstruction 3D en géométrie conique : utilisation d’un collimateur sténopé pour l’exploration thyroïdienne. *ACOMEN*, 4(2):152–157, 1998.
- [54] J. LAVOINE : *Transformation de Fourier des Pseudos-Fonctions*. Monographie du CNRS, 1962.
- [55] Sandrine LECOQ : Moquette 3D. Mémoire de D.E.A., Ecole polytechnique de l’Université de Nantes, 1998.
- [56] Robert M. LEWITT et Samuel MATEJ : Overview of methods in emission computed tomography. In *Proceedings of the IEEE*, volume 10, pages 1588–1611, 2003.
- [57] Daniel P.K. LUN, T.C. HSUNG et T.W. SHEN : Orthogonal discrete periodic transform. part I : theory and realization. *Signal Processing*, 83(5):941–955, 2003.
- [58] Bruno DE MAN : *Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography*. Thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, may 2001.
- [59] Kyle J. MYERS : *Handbook of Medical Imaging*, volume 1 Physic and Psychophysics, chapitre Ideal Observer Models of Visual Signal Detection, pages 559–594. Jacob Beutel and Harold L. Kundel and Richard L. Van Metter, February 2000.
- [60] Frank NATTERER : Numerical methods in tomography. *Acta Numerica*, (8), 1999.
- [61] Jorge NOCEDAL et Stephen J. WRIGHT : *Numerical optimization*. Springer Texts in Operations Research. Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1999.
- [62] Nicolas NORMAND : *Représentation d’Images et Distances Discrètes Basées sur les Eléments Structurants à Deux Pixels*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Janvier 1997.

- [63] Nicolas NORMAND et Olivier DÉFORGES : Algorithme de transformation de distance généralisée en un balayage, mises en oeuvre séquentielle et vectorielle. *In GRETSI'03*, 2003.
- [64] Nicolas NORMAND et JeanPierre GUÉDON : Spline Mojette transform. Application in tomography and communication. *EUSIPCO*, II:407–410, 2002.
- [65] Nicolas NORMAND, Myriam SERVIÈRES et JeanPierre GUÉDON : How to obtain a lattice basis from a discrete projected space. *In DGCI05 proceedings*, pages 153–160, 2005.
- [66] John M. OLLINGER et Jeffrey A. FESSLER : Positron-emission tomography. *IEEE Signal Processing Magazine*, 14(1):43–55, January 1997.
- [67] B. PARREIN : *Description multiple de l'information par transformation Mojette*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Novembre 2001.
- [68] David PICKENS : *Handbook of Medical Imaging*, volume 1 Physic and Psychophysics, chapitre Magnetic Resonance Imaging, pages 373–461. Jacob Beutel and Harold L. Kundel and Richard L. Van Metter, February 2000.
- [69] J. RADON : Uber die bestimmung von functionen durch ihre integralwerte langs gewisser mannigfaltigkeiten. *Berichte Sashsische Akademie der Wissenschaften Leipzig, Math. - Phys Kl*, 69:262–277, 1917.
- [70] Eric REMY et Edouard THIEL : Optimizing 3D chamfer masks with norm constraints. *In 7th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, pages 39–56. R. Malgouyres, July 2000.
- [71] E.L. RITMAN : Evolution of medical tomographic imaging-as seen from a darwinian perspective. *In C. ROUX et J.K. UDUPA, éditeurs : Emerging Medical Imaging Technology*, pages 1483–1491. Proceedings of the IEEE, Oct 2003.
- [72] R. B. SCHULZ, J. RIPOLL et V. NTZIACHRISTOS : Experimental fluorescence tomography of tissues with noncontact measurement. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 23(4):492–500, April 2004.
- [73] Myriam SERVIÈRES, JeanPierre GUÉDON et Nicolas NORMAND : A discrete tomography approach to PET reconstruction. *In Yves BIZAIS, éditeur : Fully 3D Reconstruction In Radiology and Nuclear Medicine*, June 2003.
- [74] Myriam SERVIÈRES, Nicolas NORMAND, Yves BIZAIS et JeanPierre GUÉDON : Noise behavior for spline mojette fbp reconstruction. *In Medical Imaging 2005 : Image Processing*, volume 5747, pages 2100–2109. J. Michael Fitzpatrick and Joseph M. Reinhardt, 2005.
- [75] Myriam SERVIÈRES, Nicolas NORMAND et JeanPierre GUÉDON : A mojette transform approach to discrete medical tomography. *In First Malaysia-France Regional Workshop on Image Processing in Vision System and Multimedia Communication*, April 2003.
- [76] Myriam SERVIÈRES, Nicolas NORMAND, JeanPierre GUÉDON et Yves BIZAIS : The mojette transform : Discrete angles for tomography. *Electronic notes in discrete mathematics*, pages 587–606, July 2005.



- 
- [77] Myriam SERVIÈRES, Nicolas NORMAND, Peggy SUBIRATS et JeanPierre GUÉDON : Some links between continuous and discrete radon transform. *In Medical Imaging 2004 : Image Processing*, pages 1961–1971. SPIE, Feb. 2004.
- [78] Yoel SHKOLNISKY et Amir AVERBUCH : 3D Fourier based discrete Radon transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 15:33–69, 2003.
- [79] Peggy SUBIRATS : Rétroprojection tomojette médicale. Mémoire de D.E.A., EPUN, 2003.
- [80] Peggy SUBIRATS, Myriam SERVIÈRES, Nicolas NORMAND et JeanPierre GUÉDON : Angular assesement of the mojette filtered back projection. *In Medical Imaging 2004 : ImageProceding*, pages 1951–1960. SPIE, Feb. 2004.
- [81] Peggy SUBIRATS, Myriam SERVIÈRES, Nicolas NORMAND et JeanPierre GUÉDON : Angular assesement of the mojette filtered back projection. *In FITZPATRICK et SONKA, éditeurs : SPIE Medical Imaging Conference 2004 : Image Processings*, pages 1951–1960. SPIE, 2004.
- [82] Imants SVALBE et Andrew KINGSTON : Farey sequences and discrete radon transform projection angles. *In Alberto Del LUNGO, Vito Di GESÙ et Attila KUBA, éditeurs : Electronic Notes in Discrete Mathematics*, volume 12. Elsevier, 2003.
- [83] David W. TOWNSEND, Jonathan P.J. CARNEY, Jeffrey T. YAP et Nathan C. HALL : PET/CT today and tomorrow. *Journal of Nuclear Medicine*, 45(1):(Suppl) 4S–14S, January 2004.
- [84] Timothy G. TURKINGTON : Introduction to PET instrumentation. *Journal Of Nuclear Medicine Technology*, 29:4–11, 2001.
- [85] Michael UNSER : Spline a perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 22–38, November 1999.
- [86] P. VERBERT : *Sur la redondance des transformations Mojette en dimension n et en ligne*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Septembre 2004.
- [87] Ge WANG, Tein-Hsiang LIN, Ping chin CHENG et Douglas M. SHINOZAKI : A general cone-beam reconstruction algorithm. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 12(3):486–496, September 1993.
- [88] F.W. WEHRLI, P.K. SAHA, B.R. GOMBERG et Hee Kwon SONG : Noninvasive assesment of bone architecture by magnetic resonance micro-imaging-based virtual bone biopsy. *In C. ROUX et J.K. UDUPA, éditeurs : Emerging Medical Imaging Technology*, pages 1520–1542. Proceedings of the IEEE, Oct 2003.

# Publications

## Chapitre de livre

[1] Myriam Servières, Nicolas Normand, JeanPierre Guédon and Yves Bizais, **Discrete angles for tomography, a new discrete Radon transform** in : Gabor Herman and Attila Kuba, eds., *Advances in Discrete Tomography and its Applications*, Birkhauser, 2006. (*Accepté pour publication*).

## Revue

[2] Myriam Servières, Nicolas Normand, JeanPierre Guédon and Yves Bizais, **The Mojette transform : Discrete angles for tomography**, *Electronic notes in discrete mathematics*, pp. 587–606, 2005.

[3] W. Bourgeois, G. Gardey and M. Servières and R. M. Stuetz, **A chemical sensor array based system for protecting wastewater treatment plants**, *Sensors and Actuators B : Chemical*, vol. 91, pp. 109–116, 2003.

## Conférences Internationales avec comité de Lecture et publication des actes

[4] Myriam Servières, Nicolas Normand and JeanPierre Guédon, **Interpolations methods for Mojette transform**, *Proceeding of SPIE Medical Imaging 2006 : Image Processing*, 2006, (*Accepté pour publication*).

[5] Nicolas Normand, Myriam Servières and JeanPierre Guédon, **How to obtain a lattice basis from a discrete projected space** in : E. Andres, G. Damiand and P. Lienhart, eds., *Proceedings of DGCI 2005, LNCS 3429*, Springer, Lecture Notes in Computer Science, **3429** (Poitiers, France, 2005), pp. 136–147.

[6] Myriam Servières, Jérôme Idier, Nicolas Normand and JeanPierre Guédon, **Conjugate Gradient Mojette Reconstruction**, *Proceeding of SPIE Medical Imaging 2005 : Image Processing*, vol. 5747, pp. 2067–2074, 2005.

- [7] Myriam Servières, Nicolas Normand and Yves Bizais and JeanPierre Guédon, **Noise behavior for spline Mojette FBP reconstruction**, *Proceeding of SPIE Medical Imaging 2005 : Image Processing*, vol. 5747, pp. 2100–2109, 2005.
- [8] Jeanpierre Guédon, Stéphane Beaumont, Myriam Servières and Nicolas Normand, **The 3D Mojette Projector Applied to PET and Radiotherapy Imaging**, *Proceeding of IEEE ISBI*, 2004.
- [9] Peggy Subirats, Myriam Servières, Nicolas Normand and JeanPierre Guédon, **Angular Assessment of the Mojette Filtered Back Projection**, *Proceeding of SPIE Medical Imaging 2004 : ImageProcessing*, 2004, pp. 1951–1960.
- [10] Myriam Servières, Nicolas Normand, Peggy Subirats and JeanPierre Guédon, **Some links between continuous and discrete Radon Transform**, *Proceeding of SPIE Medical Imaging 2004 : Image Processing*, 2004, pp. 1961–1971.
- [11] Myriam Servières, JeanPierre Guédon and Nicolas Normand, **A Discrete Tomography Approach to PET Reconstruction**, in Yves Bizais, ed., *Proceedings of Fully 3D Reconstruction In Radiology and Nuclear Medicine*, 2003.
- [12] Myriam Servières, Nicolas Normand and JeanPierre Guédon, **A Mojette Transform Approach to Discrete Medical Tomography**, *Proceedings of First Malaysia-France Regional Workshop on Image Processing in Vision System and Multimedia Communication*, 2003.

## Résumé

*Une des thématiques abordée par l'équipe Image et Vidéo-Communication est la reconstruction tomographique discrète à l'aide de la transformée Mojette. Ma thèse s'inscrit dans le cadre de la reconstruction tomographique médicale. La transformée Mojette est une version discrète exacte de la transformée de Radon qui est l'outil mathématique permettant la reconstruction tomographique. Pour évaluer la qualité des reconstructions, nous avons utilisé des fantômes numériques 2D simples (objet carré, rond) en absence puis en présence de bruit. Le cœur de mon travail de thèse est la reconstruction d'un objet à l'aide d'un algorithme de rétroprojection filtrée exacte Mojette en absence de bruit s'appuyant sur la géométrie discrète. Pour un nombre fini de projections dépendant de la taille de l'objet à reconstruire la reconstruction est exacte. La majorité des tomographes industriels utilisent l'algorithme de rétroprojection de projections filtrées (Filtered Back Projection ou FBP) pour reconstruire la région d'intérêt. Cet algorithme possède deux défauts théoriques, un au niveau du filtre utilisé, l'autre au niveau de la rétroprojection elle-même. Nous avons pu mettre au point un algorithme de Mojette FBP. Cet algorithme fait partie des méthodes directes de reconstruction. Il a aussi été testé avec succès en présence de bruit. Cet algorithme permet une équivalence continu-discret lors de la reconstruction. L'étape de projection/rétroprojection Mojette présente la particularité intéressante de pouvoir être décrit par une matrice Toeplitz bloc Toeplitz. Pour utiliser cette propriété nous avons mis en œuvre un algorithme de gradient conjugué.*

## Mots-clés :

Mojette, Tomographie, Radon, Géométrie Discrète, angles discrets, rétroprojection filtrée, Gradient Conjugué.

## Abstract

*One of the research field of in the Image and Videocommunication team is the discrete tomographic reconstruction. My PhD is in the field of the medical tomographic reconstruction. The Mojette transform is a discrete exact version of the Radon transform. The Radon transform is the mathematic tool that allows to perform a tomographic reconstruction. To evaluate the reconstruction quality we have used 2D simple numeric phantoms (round and square shape) without and with noise. The main point of my work is an object reconstruction with a backprojection exact filtered Mojette algorithm without noise, using the discrete geometry. For a finite number of projections according to the object size, the reconstruction is exact. Most of industrial tomographs are using the FBP algorithm (Filtered Backprojection) to reconstruct the region of interest. We could implement a FBP Mojette algorithm. This algorithm is a part of the reconstruction algorithm methods. It was successfully tested in the presence of noise. This algorithm allows a continuous/discrete equivalence. The projection/backprojection Mojette has the property to be described by a Toeplitz bloc Toeplitz matrix. To use this property we have implemented a conjugate gradient algorithm.*

## Keywords:

Mojette, Tomography, Radon, Discrete Geometry, discrete angles, Filtered Backprojection, Conjugate Gradient.