



**HAL**  
open science

# Tolérancement Modal : De la Métrologie vers les Spécifications

Hugues Favreliere

► **To cite this version:**

Hugues Favreliere. Tolérancement Modal : De la Métrologie vers les Spécifications. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Savoie, 2009. Français. NNT : . tel-00426927

**HAL Id: tel-00426927**

**<https://theses.hal.science/tel-00426927v1>**

Submitted on 18 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

l'École Polytechnique Universitaire de l'Université de Savoie

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR** de l'**UNIVERSITÉ DE SAVOIE**

— Spécialité : Génie Mécanique —

par

**Hugues Favrelière**

---

---

## Tolérancement modal De la Métrologie vers les Spécifications

---

---

soutenue le 20 octobre 2009 devant la commission d'examen :

<b>Jean-Marc Luc</b>	<b>Linares Mathieu</b>	Rapporteur Rapporteur	Professeur des Universités, Université de la Méditerranée Professeur des Universités, Université Paris-Sud XI
<b>Jean-Pierre Thierry Jacques</b>	<b>Nadeau Coorevits Sappei</b>	Examinateur Examinateur Examinateur	Professeur des Universités, Arts & Métiers ParisTech Bordeaux Maître de conférences, Arts & Métiers ParisTech Lille Docteur en Science des matériaux, CTDEC
<b>Serge Max</b>	<b>Samper Giordano</b>	Directeur de thèse Co-directeur	Maître de conférences, HDR, Université de Savoie Professeur des Universités, Université de Savoie

Thèse préparée au sein du laboratoire **S**ystèmes et **M**atériaux pour la **ME**catronique d'Annecy et du **C**entre **T**echnique de l'industrie du **D**écolletage à Cluses.





## Remerciements

*Je tiens à remercier Luc Mahtieu, Professeur à l'Université Paris-Sud XI et Jean-Marc Linares, Professeur à l'Université de la Méditerranée d'avoir accepté de rapporter sur mes travaux de thèse. J'ai pu apprécier la pertinence de leurs questions et la qualité des échanges au cours de l'évaluation de ce manuscrit.*

*Je suis très reconnaissant envers Jean-Pierre Nadeau, Professeur aux Arts & Métiers ParisTech de Bordeaux qui a présidé ce jury de thèse. Je remercie également Messieurs Thierry Coorevits, Maître de conférences aux Arts & Métiers ParisTech de Lille et Jacques Sappei, Docteur en science des matériaux d'avoir accepté les rôles d'examineurs. Une pensée particulière à M. Sappei qui, dans ce projet, est à l'initiative de la collaboration avec le Centre Technique de l'industrie du Décolletage.*

*Toute ma gratitude va également à mes responsables de thèse. Je remercie Max Giordano, Professeur émérite de l'Université de Savoie de m'avoir accueilli, il y a quelques années, au sein du Lméca, et aussi pour sa rigueur et son intérêt lors de ces travaux. Mes remerciements vont également à Serge Samper, Maître de conférences à l'Université de Savoie. Qu'il trouve ici toute ma gratitude et mes sincères remerciements pour ses nombreux conseils, son soutien et sa confiance.*

*Je remercie Thierry Guillemain, Directeur général du CTDEC, pour son accueil et l'intérêt qu'il a su porter à ce projet. Une pensée particulière à l'équipe du laboratoire de métrologie puis celle du département R&D qui ont su rendre agréable mes séjours au CTDEC. Un grand merci à Yann Derickssen, Ingénieur métrologue pour sa curiosité et sa participation active au projet.*

*Je voudrais remercier l'ensemble des membres du laboratoire SYMME pour leur bonne humeur et leur passion lors des discussions scientifiques, en particulier Pascal Hernandez, Eric Pairel, Pierre-Antoine Adragna, Frédéric Germain, Ephraïm Goldschmidt et Dimitri Denimal. Je remercie également tous les doctorants et stagiaires qui ont grandement contribué à rendre ce travail vraiment agréable en alliant convivialité et hydratation. Je pense notamment au cercle footballistique du mercredi soir . . . Mais à tous les autres aussi . . .*

*Je pense également « aux anciens » devenus docteurs avec lesquels j'ai passé du bon temps. Je remercie particulièrement Romain Real pour la relecture minutieuse de ce manuscrit.*

*Je tiens à montrer toute ma reconnaissance à ma famille qui a permis l'aboutissement de mes longues années d'étude. Enfin, je tiens à remercier Emilie pour sa patience et son soutien inconditionnel.*





## Avant-propos

Ces travaux de recherche ont été réalisés dans le cadre d'une collaboration entre le laboratoire SYMME localisé à Annecy et l'entreprise CTDEC située à Cluses. Ce projet émerge dans le programme *Tolérance et Qualité Géométrique des Produits* du pôle de compétitivité « Arve-Industries Haute-Savoie Mont-Blanc ». Il est également soutenu par l'Assemblée des Pays de Savoie.

Créé en 2006, le laboratoire **SY**stèmes et **MA**tériaux pour la **ME**catronique est l'un des quatre laboratoires de l'**É**cole **P**olytechnique **U**niversitaire de l'Université de Savoie. Ce laboratoire réunit les compétences de 44 enseignants chercheurs avec pour buts la maîtrise des matériaux et l'introduction de l'intelligence dans des systèmes mécaniques pour en améliorer les potentialités et/ou les performances.

Le **C**entre **T**echnique de l'industrie du **D**écolletage (CTDEC) fut créé en 1962 à la demande du **S**yndicat **N**ational du **D**écolletage (SNDEC) et de la profession. Il se compose de 68 collaborateurs dont l'objectif est de promouvoir le progrès des techniques, contribuer à l'amélioration de la productivité et à l'innovation dans l'industrie du décolletage. Le CTDEC est un pilier essentiel du pôle de compétitivité « Arve-Industries Haute-Savoie Mont-Blanc », labellisé en 2005 par le gouvernement français.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Préambule . . . . .	1
Du concept à la réalisation . . . . .	2
L'objet des travaux . . . . .	3
<b>1 Comment décrire la forme géométrique d'un produit ?</b>	<b>5</b>
1.1 Relation entre mesure et caractéristiques . . . . .	5
1.1.1 Les concepts du langage GeoSpelling . . . . .	6
1.1.2 Le paramétrage de la géométrie . . . . .	8
1.1.2.1 Les caractéristiques intrinsèques des éléments idéaux . . . . .	8
1.1.2.2 Les caractéristiques de situation entre éléments idéaux . . . . .	9
1.1.2.3 Les caractéristiques de situation entre éléments idéaux et non idéaux	10
1.2 Proposition d'une classification des paramétrages de forme . . . . .	11
1.2.1 Proposition de taxinomie des paramétrages de forme . . . . .	12
1.2.2 Approche descriptive . . . . .	13
1.2.2.1 Paramétrage local . . . . .	13
1.2.2.2 Paramétrage global . . . . .	16
1.2.3 Approche par reconstruction . . . . .	28
1.2.3.1 Paramétrage local . . . . .	29
1.2.3.2 Paramétrage global . . . . .	33
1.3 Conclusion . . . . .	37
<b>2 La métrologie modale des surfaces MemoSurf<sup>®</sup></b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Principe de la Décomposition Modale Discrète . . . . .	40
2.2.1 Éléments de dynamique des systèmes discrets . . . . .	40
2.2.2 L'espace des descripteurs . . . . .	41
2.2.2.1 Les modes naturels . . . . .	41
2.2.2.2 Les modes technologiques . . . . .	44
2.2.3 La projection vectorielle modale . . . . .	46
2.3 Formalisation de la DMD en métrologie . . . . .	48
2.3.1 Les solutions d'expertise existantes . . . . .	48

2.3.2	Les six ordres de défauts . . . . .	50
2.3.3	Le contenu des dix étapes de MemoSurf <sup>®</sup> . . . . .	50
2.3.3.1	Étape 1 : Identification des surfaces fonctionnelles . . . . .	52
2.3.3.2	Étape 2 : Choix du niveau modal . . . . .	54
2.3.3.3	Étape 3 : Création du maillage . . . . .	55
2.3.3.4	Étape 4 : Construction de la base modale naturelle . . . . .	56
2.3.3.5	Étape 5 : Choix du moyen de mesure . . . . .	58
2.3.3.6	Étape 6 : Acquisition et exportation . . . . .	58
2.3.3.7	Étape 7 : Association . . . . .	59
2.3.3.8	Étape 8 : Décomposition (DMD) . . . . .	64
2.3.3.9	Étape 9 : Exploitation et visualisation . . . . .	66
2.3.3.10	Étape 10 : Interprétation (modale et fonctionnelle) . . . . .	73
2.3.4	Estimation de l'incertitude de la DMD . . . . .	73
2.4	Méthode d'analyse statistique . . . . .	74
2.4.1	Présentation des résultats des mesures . . . . .	74
2.4.2	La DMD d'un lot . . . . .	77
2.4.2.1	Représentation d'un lot par l'approche spectrale . . . . .	77
2.4.2.2	Approche spectrale statistique . . . . .	79
2.4.2.3	Écarts de forme géométriques moyens et écarts-types . . . . .	82
2.5	Application à des exemples industriels . . . . .	83
2.5.1	Étude d'une surface conique . . . . .	83
2.5.2	Étude d'un échantillon de surfaces cylindriques . . . . .	85
2.5.3	Étude d'une pré-série de pièces plastiques . . . . .	87
2.6	Conclusion . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Assemblage de surfaces avec défauts de forme</b> . . . . .	<b>91</b>
3.1	Modèle et outils de tolérancement 3D . . . . .	91
3.1.1	Mise en position sans défaut de forme . . . . .	92
3.1.2	Mise en position avec défaut de forme . . . . .	94
3.2	Étude d'un assemblage . . . . .	95
3.2.1	Assemblage en 2D . . . . .	96
3.2.1.1	Mise en position sans défauts de forme . . . . .	98
3.2.1.2	Mise en position avec défauts de forme . . . . .	100
3.2.2	Assemblage en 3D . . . . .	103
3.2.2.1	Mise en position sans défauts de forme . . . . .	105
3.2.2.2	Mise en position avec défauts de forme . . . . .	106
3.3	Étude d'un assemblage de lots . . . . .	108
3.3.1	Simulation d'un lot à partir des caractéristiques statistiques d'un échantillon pilote . . . . .	108
3.3.1.1	Génération des caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote . . . . .	109
3.3.1.2	Génération d'un lot à partir de ces caractéristiques statistiques . . . . .	110
3.3.2	Cas 2D . . . . .	111
3.3.3	Cas 3D . . . . .	112
3.4	Synthèse de la méthode . . . . .	114
3.5	Perspectives de la méthode . . . . .	114

<b>4</b>	<b>Vers les spécifications</b>	<b>117</b>
4.1	Expression du besoin de spécification . . . . .	117
4.2	Spécifications modales . . . . .	119
4.2.1	Approche spectrale . . . . .	120
4.2.2	Domaine modal . . . . .	123
4.2.2.1	Domaine modal d'une zone . . . . .	123
4.2.2.2	Domaine d'une spécification quelconque . . . . .	125
4.2.3	Conclusion sur les spécifications modales . . . . .	125
4.3	Vers la maîtrise des procédés : emboutissage . . . . .	126
4.3.1	Problématique . . . . .	126
4.3.2	Démarche . . . . .	128
4.3.2.1	Simulation numérique . . . . .	128
4.3.2.2	Validation du modèle numérique . . . . .	129
4.3.2.3	Réalisation de la simulation initiale . . . . .	129
4.3.2.4	Paramétrage modal des écarts de forme . . . . .	130
4.3.2.5	Choix des paramètres de pilotage . . . . .	132
4.3.3	Stratégie d'optimisation . . . . .	133
4.3.3.1	Détermination des domaines de variation des paramètres de pilotage	133
4.3.3.2	Choix du modèle et plan d'expériences . . . . .	133
4.3.3.3	Calcul des coefficients du modèle polynomial et analyse de leurs effets	134
4.3.3.4	Recherche de la configuration optimale des paramètres . . . . .	136
4.3.4	Conclusion et perspectives . . . . .	137
4.4	Vers la spécification d'un besoin : étanchéité . . . . .	138
4.4.1	Problématique . . . . .	138
4.4.2	Démarche . . . . .	140
4.4.2.1	Génération des défauts de forme . . . . .	140
4.4.2.2	Algorithme du calcul de débit de fuite . . . . .	143
4.4.3	Perspectives . . . . .	146
4.5	Conclusion . . . . .	146
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Les tolérances de forme selon ISO 1101</b>	<b>165</b>
A.1	Définition des tolérances géométriques liées à la forme . . . . .	165
A.1.1	Tolérance de rectitude . . . . .	165
A.1.2	Tolérance de planéité . . . . .	166
A.1.3	Tolérance de circularité . . . . .	166
A.1.4	Tolérance de cylindricité . . . . .	167
A.1.5	Tolérance de profil d'une ligne non rapportée à une référence spécifiée . . . . .	167
A.1.6	Tolérance de profil d'une ligne par rapport à un système de références spécifiées	167
A.1.7	Tolérance de profil d'une surface non rapportée à une référence spécifiée . . . . .	168
A.1.8	Tolérance de profil d'une surface par rapport à une référence spécifiée . . . . .	168
A.1.9	Spécifications restrictives . . . . .	169
A.2	Exemple d'extension à la norme . . . . .	169

<b>B La projection vectorielle</b>	<b>171</b>
B.1 Opération de projection vectorielle . . . . .	171
B.2 Minimisation des écarts quadratiques . . . . .	171
<b>C Développement informatique MATLAB<sup>®</sup></b>	<b>173</b>
<b>Publications associées à ces travaux</b>	<b>177</b>







## Introduction

*Tout est calculé de manière à produire le plus grand effet  
avec la dépense et les dimensions les plus petites possibles*

[ JEAN-BAPTISTE VAQUETTE DE GRIBEAUVAL ]

1715–1789

## Préambule

Le concept d'interchangeabilité des pièces mécaniques est l'un des fondements de l'industrie moderne. Jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle ce concept a été un vecteur d'innovation tant dans les domaines de l'usinage que dans l'organisation des ateliers. Les premières tentatives de fabrication de pièces interchangeables datent du début du XVIII<sup>e</sup> siècle avec la normalisation de l'artillerie. Les progrès les plus importants sont réalisés par Jean-Baptiste Vaquette de Gribeauval qui propose une nouvelle normalisation. Il invente notamment « l'étoile », appareil servant à mesurer avec exactitude la dimension intérieure d'un canon. Il réduit ainsi les tolérances et donc l'espace entre le boulet et le canon, ce qui améliore portée et précision. C'est en 1817 que l'américain John Hall réussit à livrer une centaine de fusils à pièces interchangeables. En effet, la précision des pièces produites a permis leur interchangeabilité. Pour atteindre cette qualité, il fallut modifier les méthodes de travail, introduire de nouveaux outils, construire de nouvelles machines et instituer des contrôles stricts. Les caractéristiques modernes de l'industrie se mirent ainsi en place à l'occasion de cette quête de l'interchangeabilité [PEAUCELLE, 05].

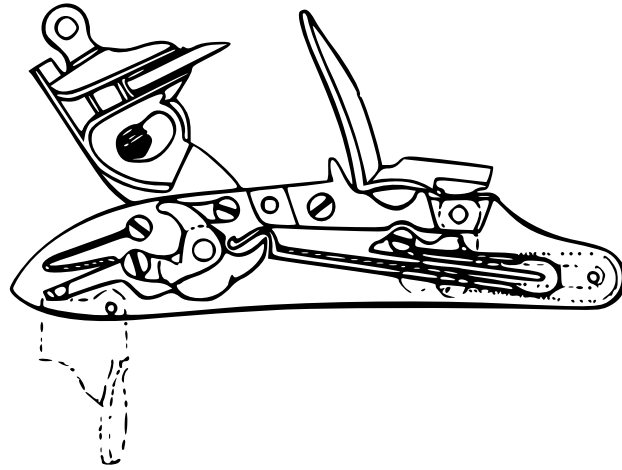


Figure 1 – Platine à silex de fusil

## Du concept à la réalisation

La définition d'un produit fait appel à l'utilisation d'un langage établi entre les acteurs intervenant dans le cycle de vie du produit : conception, fabrication et contrôle. Il peut s'agir d'un langage commun, c'est le cas des normes ISO, ou spécifique. Les normes internationales ISO, utilisées couramment par le concepteur, définissent la manière dont doivent être spécifiées une cote, la ou les tolérances ainsi que les défauts géométriques de forme, position et orientation qui lui sont associés. La géométrie cible du produit, définie en conception, n'étant pas réalisable en production, il est nécessaire de trouver un compromis entre le bureau d'études et les moyens de production permettant de garantir le bon fonctionnement du produit. La maîtrise des variations géométriques d'un produit tout au long de son cycle de vie est donc l'enjeu majeur du tolérancement géométrique.

Depuis quelques dizaines d'années, cet enjeu anime un nombre important de travaux de recherche en tolérancement. De plus, l'avènement de la simulation dans ce domaine a permis d'intégrer une vue plus réaliste dans les modèles de conception des produits et dans les processus de fabrication, d'assemblage et de contrôle. La maîtrise de la qualité géométrique des produits se décompose en six ordres de défauts, définis selon des critères technologiques et mathématiques [ISO-8785, 98]. Si l'on s'intéresse aux expressions des variations d'une géométrie, on doit considérer le modèle qui permet de la définir. Ces modèles de variations géométriques définissent alors des langages permettant d'échanger sur les limites admissibles par la géométrie observable par rapport à l'idéale. Les premiers ordres de défauts sur la position et la dimension des surfaces d'un produit sont traités par des modèles de variations issus principalement de la théorie des mécanismes. Ces modèles aboutissent à des méthodes d'analyse et de synthèse de tolérances de plus en plus utilisées dans l'industrie. A l'opposé de ces ordres, nous retrouvons la caractérisation des états de surfaces où les méthodes de traitement de signal donnent des résultats intéressants. Quant au défaut de forme, qui se situe entre ces ordres de défaut, il est le parent pauvre de ces modèles de variations.

Ces modèles s'appuient sur un paramétrage de la géométrie et de ses instances. Il doit permettre de décrire au mieux le réel observé. La capacité croissante des moyens de mesure a permis à de nouveaux paramétrages d'exprimer la géométrie mesurée avec une plus grande précision. L'émergence des moyens de mesure d'une part et la nécessité d'un modèle de variations des formes géométriques d'autre part nous ont poussés à définir un nouveau paramétrage. Introduit par des travaux de recherche sur la corrélation entre les vibrations sonores d'une cloche et ses défauts géométriques, le paramétrage modal permet de modéliser un élément géométrique dans un espace de formes

géométriques, issues de la mécanique vibratoire.

Au cœur du modèle de variations, ce paramétrage nous permet de définir le tolérancement modal. Le déploiement de ce modèle de tolérancement est l'objet des travaux qui seront présentés dans ce document. Introduit dans le domaine de la métrologie dans un premier temps, le paramétrage modal est utilisé pour visualiser les défauts géométriques des surfaces : c'est la **M**étrologie **M**odale des **S**urfaces (MemoSurf<sup>®</sup>). Au delà de la visualisation, la métrologie est également une étape de vérification des spécifications géométriques. La définition d'exigences fonctionnelles est donc indispensable à notre modèle de tolérancement. Nous essaierons donc de définir un langage de spécification à travers le paramétrage modal.

## L'objet des travaux

L'objectif global de ces travaux est de proposer un paramétrage des formes à partir duquel nous essayons de définir un modèle de tolérancement. Le domaine de prédilection du paramétrage modal étant le défaut de forme voire d'ondulation, les exigences fonctionnelles, que nous tentons de définir, s'appliquent à des pièces ou des mécanismes où la forme des surfaces fonctionnelles est essentielle à la fonctionnalité. Cependant pour pouvoir spécifier les surfaces fonctionnelles, il faut être en mesure de caractériser les défauts géométriques de ces surfaces. Une grande partie de ces travaux a donc été consacrée au développement d'un outil d'expertise métrologique de la forme des surfaces.

Le chapitre 1 présente un état de l'art des différents paramétrages de formes que nous avons pu recenser au cours de nos travaux. Ne pouvant pas être exhaustifs, nous proposons de classer les différentes approches selon qu'elles soient dans une démarche de description ou de reconstruction. Nous distinguons pour chaque approche le fait que le paramétrage caractérise globalement la surface ou au contraire nécessite une partition de la surface permettant de réaliser un paramétrage par morceaux, que l'on identifie comme étant un paramétrage local. Un paramétrage basé sur une approche descriptive caractérise la forme d'une surface dans un espace de paramètres de forme définis explicitement. Quant aux paramétrages basés sur des méthodes de reconstruction, ils s'attacheront davantage à la qualité de la modélisation de la surface qu'à la valeur des paramètres.

Le chapitre 2 introduit le paramétrage modal appliqué dans le domaine de la métrologie des surfaces. Ce paramétrage de type descriptif permet de caractériser des défauts géométriques de forme de la surface considérée. Il résulte d'une méthode de décomposition que l'on nomme Décomposition Modale Discrète (DMD). La DMD va décomposer la surface, connue de manière discrète, dans un espace de descripteurs qui dérivent du domaine de la mécanique vibratoire, d'où le terme « modale ». Une formalisation de l'application métrologique, dont a fait l'objet cette méthode de décomposition, est déployée à travers 10 étapes. L'expertise d'un lot de surfaces nous amène à définir un ensemble d'outils statistiques permettant ainsi de caractériser non seulement les défauts géométriques du lot mais aussi la signature du procédé de fabrication et/ou mesure.

Nous proposons dans le troisième chapitre d'étudier la prise en compte du défaut de forme dans un processus d'assemblage pour en évaluer sa précision. Nous présentons un bref état de l'art sur les différents modèles et outils du tolérancement 3D qui abordent la problématique d'assemblage sans jeux et à efforts imposés. Telles sont les hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons. Nous suggérons de compléter le paramétrage des surfaces associées par le paramétrage modal. La pertinence de la prise en compte des défauts de forme est alors présentée en évaluant la conformité d'un assemblage de deux pièces puis celle d'un lot d'assemblages.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous présentons nos avancées sur les spécifications fonctionnelles. De nos jours, nous constatons que les tolérances liées à ces exigences sont de plus en plus

serrées compte tenu des fonctionnalités à garantir. Or, le tolérancement par zone ne fait pas la distinction entre les ordres de défauts. Afin de spécifier au plus juste, nous introduisons deux approches construites à partir du paramétrage modal. La première va définir un ensemble de bilimites sur chaque paramètre ou groupe de paramètres modaux et la deuxième tiendra compte des combinaisons possibles de ces paramètres modaux. Nous présentons ensuite deux démarches sur des problèmes industriels qui nous permettront d'estimer des variations admissibles sur les paramètres modaux. L'une portera sur la maîtrise d'un procédé de fabrication et l'autre sur la spécification d'un besoin.

## Comment décrire la forme géométrique d'un produit ?

### *Objectif du chapitre*

*L'objectif est de présenter au lecteur un ensemble de paramétrages des formes géométriques. Tout d'abord, nous rappelons les concepts généraux d'un langage de spécification normalisée. A travers ce rappel, nous introduisons la pertinence de ces paramétrages dans la spécification géométrique des produits. Nous proposons, dans la suite, une classification de ces différents paramétrages extraits de la littérature scientifique. Sans vouloir être exhaustif, nous nous attacherons aux méthodes de paramétrage dont les applications peuvent être liées au tolérancement géométrique.*

### 1.1 Relation entre mesure et caractéristiques

Jusque dans les années 70, les dessinateurs disposaient d'un langage normalisé basé sur les longueurs et les angles avec une tolérance minimale et maximale. Ce langage était à l'image des moyens de mesure dimensionnels de l'époque. Par la suite, le concept de tolérancement géométrique, qui consiste à définir les limites des variations des éléments géométriques, s'est développé tant dans son utilisation que dans la production des normes. Face à ce langage normalisé, l'avènement des moyens de mesure par points nous a amené à constater que les difficultés rencontrées par les industriels apparaissent lors de l'étape de vérification de la qualité géométrique du produit. En effet, le métrologue soulève des interrogations dans la vérification du produit que ne se posaient pas le concepteur dans la spécification de celui-ci. Un langage univoque, appelé *GeoSpelling*, a ainsi été introduit par Mathieu pour la spécification et la vérification géométrique des pièces et des assemblages [MATHIEU et BALLU, 03]. En 2005, il fait l'objet d'un document normalisé intitulé « Spécification géométrique des produits (GPS) - Concepts généraux - Modèle pour la spécification et la vérification géométriques » [ISO/TS-17450-1, 05].

Nous présentons, dans le paragraphe suivant, les principaux concepts du langage *GeoSpelling*. Cette démarche univoque pour la spécification des produits ainsi que pour la vérification s'avère être un langage référence dans les concepts généraux de la spécification géométrique des produits.

Il nous paraît intéressant de situer nos travaux de recherche, qui s'attachent à maîtriser la qualité géométrique des produits, par rapport à cette approche unifiée et systématique.

### 1.1.1 Les concepts du langage GeoSpelling

Le langage Geospelling repose sur deux idées [BALLU *et al.*, 01]. La première idée définit un modèle de pièces avec défauts pour le concepteur, appelé « skin » modèle (figure 1.1). Le concepteur pourra ainsi simuler les variations de la surface au niveau conceptuel et optimiser les valeurs de limites maximales tolérées (les tolérances) pour lesquelles le besoin fonctionnel de la pièce est toujours assuré.

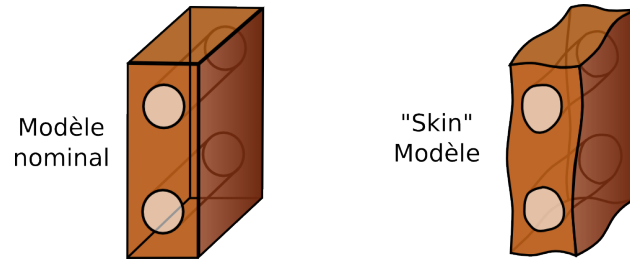


Figure 1.1 – Modèle nominal et « skin » modèle défini par [BALLU *et al.*, 01]

La deuxième idée établit un processus de déclaration des éléments géométriques pour décrire la dimension, que l'on souhaite spécifier ou vérifier. La définition suivante d'une spécification géométrique en émane : une spécification est une condition sur une dimension définie par une caractéristique. Cette caractéristique s'exprime sur un élément géométrique ou entre des éléments géométriques identifiés par des opérations à partir du « skin » modèle (figure 1.2).

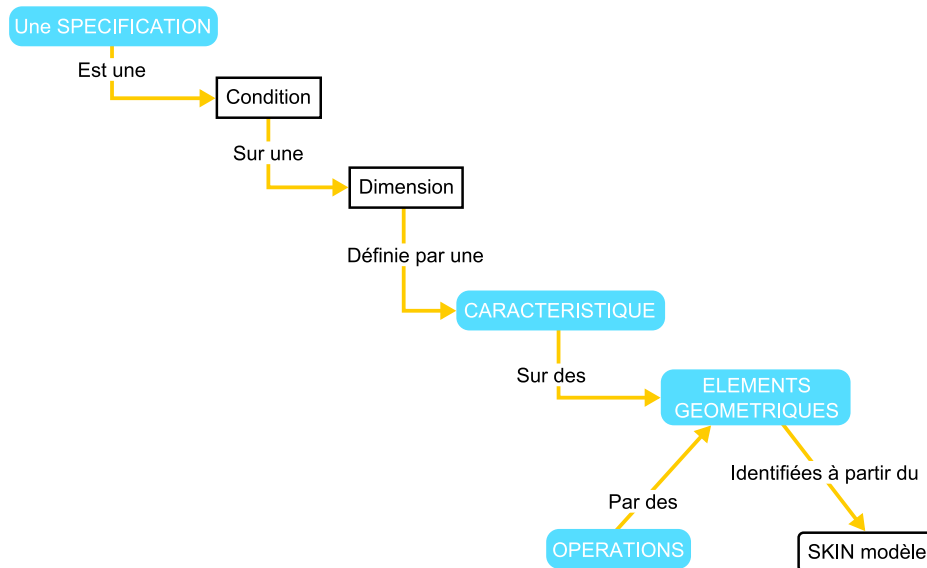


Figure 1.2 – Définition d'une spécification énoncée dans GeoSpelling [BALLU *et al.*, 01]

Dans les concepts du langage GeoSpelling, les caractéristiques font référence à des grandeurs dimensionnelles définies sur ou entre des éléments géométriques. Elles peuvent être de différentes natures, par exemple le diamètre d'un cercle est défini comme étant une caractéristique dite intrinsèque et la distance d'un point d'un élément par rapport à un autre élément définira une caractéristique de situation. Afin d'identifier les éléments géométriques sur lesquels sont définies ces caractéristiques, GeoSpelling propose six opérations nommées : partition, extraction, filtrage,

collection, association et construction (figure 1.3). La description de la géométrie des produits avec ou sans défauts géométriques sera basée sur ces six opérations.

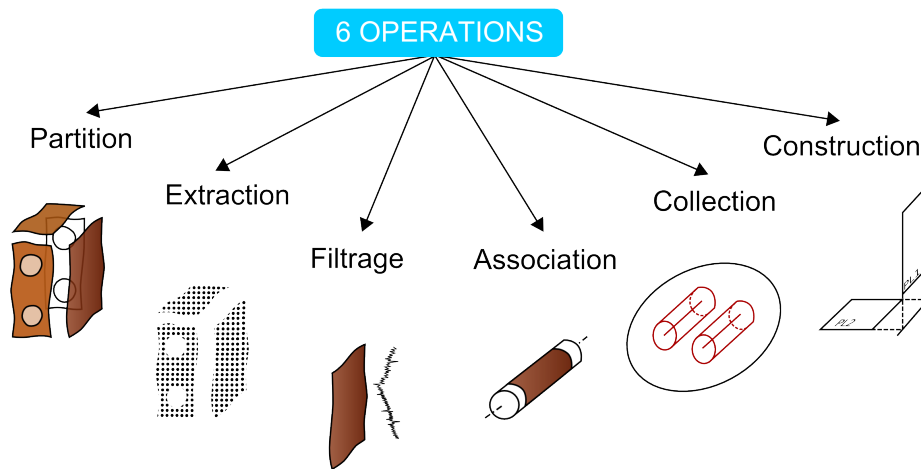


Figure 1.3 – Six opérations pour l'identification des éléments géométriques

En restant dans la généralité de ce processus de description,

- L'opération de **partition** est utilisée pour identifier des éléments géométriques non idéaux<sup>1</sup> et idéaux<sup>2</sup>.
- L'opération d'**extraction**, qui suit, permet d'identifier des points spécifiques à partir d'un élément géométrique, idéal ou non.
- Le **filtrage** permet de réduire le niveau d'information nécessaire à la définition d'un élément non idéal.
- Les éléments non idéaux sont ensuite ajustés selon différents critères d'**association** par des éléments idéaux.
- L'opération de **collection** identifie les groupes d'éléments idéaux ou non, conformément aux fonctions du produit.
- Enfin, la **construction** est l'opération utilisée pour construire un ou plusieurs éléments idéaux à partir d'autres éléments idéaux en respectant un ensemble de contraintes.

Une dernière opération d'**évaluation** permet d'identifier la valeur d'une caractéristique ou d'une fonction d'une caractéristique pour évaluer une condition de conformité par exemple.

Comme nous venons de l'exposer, l'utilisation de GeoSpelling est un concept général qui peut aussi décrire les processus de mesure. Les concepteurs et les métrologues disposent ainsi d'un langage commun pour, respectivement, spécifier et vérifier la qualité géométrique des produits (cf. figure 1.4).

1. un élément non idéal est un élément géométrique dont la définition dépend entièrement d'une pièce réalisée ou imaginée

2. un élément idéal fait référence à un élément géométrique entièrement défini à un nombre fini près de caractéristiques



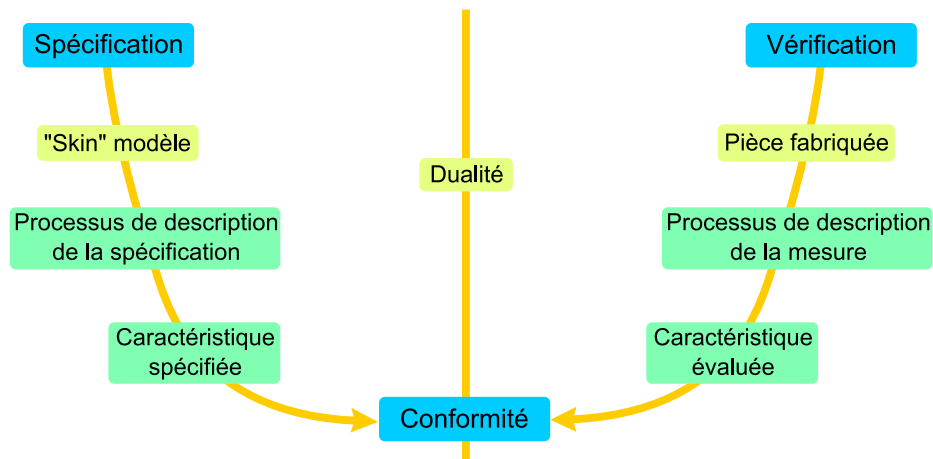


Figure 1.4 – Dualité entre la spécification et la vérification [ISO/TS-17450-1, 05]

### 1.1.2 Le paramétrage de la géométrie

La notion de paramétrage géométrique permet de déterminer les caractéristiques utilisées dans l'expression des spécifications. Soit elles caractérisent directement le défaut spécifié, soit elles sont utilisées comme contrainte dans une opération ou comme un objectif à optimiser. Les documents normatifs [ISO/TS-17450-1, 05], issus du langage conceptuel GeoSpelling, définissent trois types de caractéristiques :

- les caractéristiques intrinsèques définies sur des éléments géométriques idéaux (cf. §1.1.2.1),
- les caractéristiques de situation définies entre des éléments idéaux (cf. §1.1.2.2),
- les caractéristiques de situation définies entre des éléments idéaux et non idéaux (cf. §1.1.2.3).

#### 1.1.2.1 Les caractéristiques intrinsèques des éléments idéaux

Des exemples de caractéristiques intrinsèques sont donnés dans le tableau 1.1. Elles ont été classées selon la classe d'invariance de l'élément idéal. Les classes d'invariance sont définies par les degrés de liberté d'un élément qui le laissent géométriquement invariant. Par exemple, la rotation d'un cylindre autour de son axe laisse invariant sa géométrie, on dira alors que c'est un degré d'invariance [CLÉMENT *et al.*, 98].

Classe d'invariance	Type	Exemples de caractéristiques intrinsèques
<b>complexe</b>	courbe elliptique surface polaire ...	longueur du petit et du grand axe position relative des pôles ...
<b>prismatique</b>	prisme avec une base elliptique prisme avec une base en développante de cercle ...	longueur du petit et du grand axe rayon de la base ...
<b>de révolution</b>	cercle cône tore ...	diamètre angle au sommet diamètres de la génératrice et de la directrice ...
<b>hélicoïdale</b>	ligne hélicoïdale surface hélicoïdale avec une base en développante de cercle ...	pas de l'hélice et rayon angle d'hélice, angle de pression, rayon de la base ...
<b>cylindrique</b>	droite cylindre	aucune diamètre
<b>plane</b>	plan	aucune
<b>sphérique</b>	point sphère	aucune diamètre

Tableau 1.1 – Exemples de caractéristiques intrinsèques d'éléments idéaux [ISO/TS-17450-1, 05]

### 1.1.2.2 Les caractéristiques de situation entre éléments idéaux

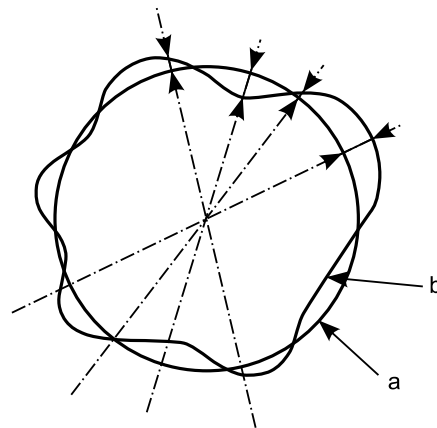
Les caractéristiques de situation définissent la situation relative entre deux éléments idéaux (position et orientation). Des éléments de situation sont définis pour situer les éléments idéaux dans l'espace (une matrice de rotation et un vecteur translation). Chaque élément étant situé par rapport à un repère global de l'espace, il est simple d'en déduire la position et l'orientation relative entre deux éléments. Les caractéristiques de situation entre éléments idéaux peuvent donc se séparer en caractéristiques de position et caractéristiques d'orientation (cf. tableau 1.2).

Caractéristiques de position	Caractéristiques d'orientation
distance point-point	angle droite-droite
distance point-droite	angle droite-plan
distance point-plan	angle plan-plan
distance droite-droite	
distance droite-plan	
distance plan-plan	

Tableau 1.2 – Caractéristiques de situation [ISO/TS-17450-1, 05]

### 1.1.2.3 Les caractéristiques de situation entre éléments idéaux et non idéaux

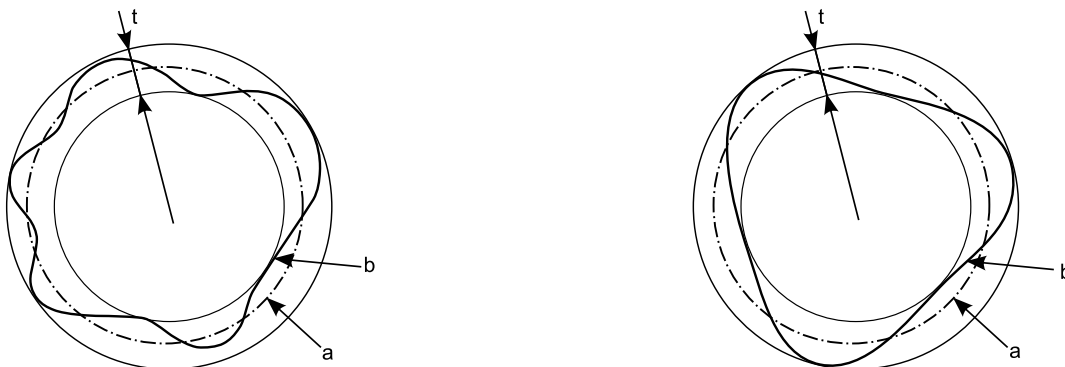
Les caractéristiques de situation définies entre éléments idéaux et non idéaux sont également utilisées pour situer les éléments idéaux et non idéaux entre eux. Elles sont définies par les distances ou des fonctions des distances, calculées entre chaque point de l'élément non idéal et l'élément idéal. La figure 1.5 montre un exemple de caractéristiques de situation entre un élément idéal (un cercle) et un élément non idéal (un cercle avec des erreurs de forme). Les fonctions généralement utilisées, sont le maximum, le minimum, la somme des carrés des distances.



a : élément idéal (cercle)  
b : élément non idéal ("cercle" ayant des erreurs de forme)

Figure 1.5 – Caractéristiques de situation entre éléments idéaux et non idéaux - Extrait de la norme [ISO/TS-17450-1, 05]

En reprenant l'exemple de la figure 1.5, on peut imaginer qu'un métrologue chercherait à évaluer la circularité telle qu'elle est décrite dans les normes sur le tolérancement géométrique [NF-ISO-1101, 06]. Dans ce cas, la circularité est définie par une zone de tolérance  $t$ , limitée par deux cercles concentriques situés dans la section droite considérée (cf. figure 1.6(a)). La valeur de circularité sera donnée par la différence des deux rayons des cercles. Dans cet exemple, la caractéristique de situation est la circularité définie par la différence des rayons des cercles (éléments de situation).



t : dimension de la zone de tolérance  
a : élément idéal (cercle)  
b : élément non idéal ("cercle" ayant des erreurs de forme)

(a)

(b)

Figure 1.6 – La circularité comme caractéristique de situation

La figure 1.6(b) nous présente l'évaluation de la circularité sur un autre élément non idéal. On constate que la zone de tolérance  $t$  peut avoir la même valeur, alors que l'élément non idéal est géométriquement différent. Il nous paraît donc nécessaire d'étendre l'expression de ces caractéristiques de situation pour différencier ces deux éléments.

La problématique, qui vient d'être soulevée, est justement le coeur des travaux de recherche qui vont être exposés dans ce document. Lorsqu'il s'agit de spécifier la forme géométrique d'un élément, la valeur de la zone de tolérance n'est pas une caractéristique de situation suffisante pour la différencier. Nous proposons l'idée d'introduire un paramétrage de la forme géométrique permettant ainsi de définir des caractéristiques, que l'on pourra utiliser dans l'expression des spécifications. Il existe un nombre important de paramétrages de forme, dont certains ont d'ailleurs fait l'objet de normes dans le domaine de la spécification géométrique des produits. Nous essaierons dans la section 1.2 suivante d'établir une classification de ces différents paramétrages de forme.

## 1.2 Proposition d'une classification des paramétrages de forme

Dans les concepts normalisés de la spécification géométrique des produits liés aux tolérances de forme, on peut identifier deux types de paramétrages de forme. On trouve, tout d'abord, un paramétrage par des composantes harmoniques (ondes sinus et/ou cosinus) provenant de la transformée de Fourier de la mesure [ISO/TS-12181-1, 03]. Nous détaillerons dans le §1.2.2.2 différentes applications de ce paramétrage. Le deuxième paramétrage a fait l'objet d'une norme spécifique dans le domaine de l'optique et des instruments d'optique [NF-ISO-10110-5, 08]. Il décrit la forme géométrique des éléments avec des combinaisons linéaires des polynômes de Zernike (cf. §1.2.2.2).

Outre ces aspects de spécifications géométriques des produits, il existe une multitude d'autres paramétrages de forme. En effet, durant ces dernières années, beaucoup de techniques de description et de représentation des formes ont été développées. Et, au fur et à mesure, ces techniques ont trouvé de plus en plus de domaines d'applications.

Parti du constat que, pour identifier, trier ou encore regrouper des images d'une collection ou d'une grande base de données, une description de la forme visuelle de celles-ci pourrait avoir un grand intérêt, Zhang présente un état de l'art de différentes techniques de représentation et de description des formes [ZHANG et LU, 04]. Il propose une classification de différentes méthodes pour décrire la forme des contours et des régions localisées sur les images. Ces techniques se généralisent sur des objets 3D et la grande majorité de ces méthodes de description font appel à des méthodes basées sur des modèles dits déformables. La notion de modèle déformable a été introduite par Kass dans les années 80 [KASS *et al.*, 88], avec des modèles 2D de contours actifs permettant la détection et le suivi de frontières sur des images numériques. Un modèle déformable est défini par :

- une représentation géométrique de la surface déformable, qui constitue le paramétrage de la surface,
- à laquelle on associe un modèle de déformation, permettant ainsi d'ajuster au mieux le paramétrage précédent à la surface déformée.

Pour des cas 3D, Terzopoulos et Metaxas proposent une représentation paramétrique des surfaces par des superquadriques, associées à un modèle dynamique 3D qui se déforme localement et globalement, qui sera développé dans la section 1.2.3.1 [TERZOPOULOS et METAXAS, 91].

McInerney et Terzopoulos dressent à ce propos un état de l'art sur les modèles déformables appliqués à l'imagerie médicale [MCINERNEY et TERZOPOULOS, 96]. En effet, ces modèles s'avèrent être très efficaces et robustes dans la segmentation, l'extraction et le suivi de contours et de surfaces. Montagnat *et al.* exposent une vision plus générale de ces modèles et leurs applications, en proposant une classification des différentes représentations géométriques des surfaces déformables

et un état de l'art des différents modèles de déformations [MONTAGNAT *et al.*, 01]. Cette classification fait la distinction entre les surfaces déformables ayant une représentation discrète et continue. Chacune des familles est divisée en sous catégories, les surfaces continues peuvent être paramétrées par des équations implicites ou explicites alors que les surfaces discrètes sont principalement représentées par des maillages discrets ou par des réseaux de particules. Sur des applications de reconnaissance de forme, Cheung *et al.* exposent une classification de type matriciel des modèles déformables [CHEUNG *et al.*, 02]. D'un côté, ils opposent les modèles déformables paramétrés avec des caractéristiques locales et ceux paramétrés avec des caractéristiques globales. De l'autre, ils font la distinction entre des modèles dit de description et des modèles basés sur des prototypes. Les modèles, dit de description, décrivent explicitement la forme et ensuite sont ajustés avec un modèle de déformation, modifiant ainsi l'espace des paramètres de forme. Les autres modèles vont chercher à paramétrer directement les déformations de l'objet en partant d'un prototype particulier qui le représente.

Le travail de synthèse, réalisé par les équipes de recherches citées précédemment, a permis de mettre en évidence un certain nombre de paramétrages et de groupes différents de paramétrages de forme. Tous regroupés par la notion de modèle déformable, les domaines d'applications, auxquels font référence les auteurs précédents, touchent principalement l'imagerie numérique 2D et 3D.

Nous proposons dans la suite d'établir une classification des différents paramétrages (cf. tableau 1.3), principalement inspirée par cette littérature sur l'imagerie numérique. Sans vouloir être exhaustif, nous énumérons et détaillons un certain nombre de paramétrages, qui nous paraissent suffisamment caractéristiques pour décrire la forme d'éléments géométriques. Nous illustrons également chaque paramétrage traité, par un bref état de l'art dont les travaux sont orientés dans le domaine de l'ingénierie mécanique.

### 1.2.1 Proposition de taxinomie des paramétrages de forme

Nous avons fait le choix d'un classement de type matriciel : paramétrage local *vs.* global et paramétrage descriptif *vs.* de reconstruction. Les méthodes de paramétrage local réalisent un découpage de l'élément géométrique à caractériser et modélisent la forme de chaque partie découpée avec des caractéristiques de forme, alors que les paramétrages globaux s'attachent à représenter la forme de l'élément géométrique complet. Les paramétrages basés sur une approche descriptive décrivent la forme dans un espace de paramètres de forme définis explicitement. Et d'un autre côté, les paramétrages basés sur des méthodes de reconstruction se concentrent davantage sur la qualité de la reconstruction que sur la pertinence des caractéristiques du paramétrage.

Cependant, on peut représenter ou identifier un élément géométrique autrement que par un paramétrage géométrique. Dans une revue bibliographique, Iyer *et al.* exposent un ensemble de techniques destinées à la recherche de forme 3D dans une base de données [IYER *et al.*, 05]. Ces techniques sont basées sur les différents paramétrages des formes. Ils répertorient ces paramétrages dans six catégories. On y retrouve les paramétrages de type géométriques ainsi que des représentations basées sur des graphes (graphes squelettes, graphes de Reeb, *etc.*) ou encore des histogrammes de distribution de points de mesure. Les techniques basées sur les graphes offrent effectivement une grande rapidité dans ce type d'application mais la conversion qui permet de représenter la géométrie en 3D est généralement limitée à des topologies d'éléments géométriques simples.

	Paramétrage Local	Paramétrage Global
Description	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Transformée en cosinus discrète (DCT) appliquée au JPEG</li> <li>– Décomposition sous structurale</li> </ul>	<p><b>Par des descripteurs <i>a priori</i> :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Décomposition de Fourier</li> <li>– Décomposition en cosinus</li> <li>– Harmoniques sphériques</li> <li>– Polynômes de Zernike</li> <li>– Polynômes de Chebyshev</li> <li>– Décomposition en Ondelettes</li> <li>– Décomposition modale</li> </ul> <p><b>Par des descripteurs <i>a posteriori</i> :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Analyse en Composantes Principales</li> <li>– Décomposition Modale Empirique</li> </ul>
Reconstruction	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Courbes et surfaces paramétrées</li> <li>– Modèles de contours actifs</li> <li>– Modèle local basé sur des superquadriques</li> <li>– Surfaces fractales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Surfaces de niveaux</li> <li>– Modèle basé sur des superquadriques</li> <li>– Enveloppe convexe</li> <li>– Construction de formes technologiques</li> </ul>

Tableau 1.3 – Classification des paramétrages de forme

## 1.2.2 Approche descriptive

Nous qualifions les paramétrages de descriptifs, lorsqu'ils nécessitent l'utilisation d'un ensemble de descripteurs. Nous définissons un descripteur comme étant un modèle de représentation des éléments géométriques. La forme de l'élément géométrique peut ainsi être décrite dans un espace de descripteurs. Les descripteurs sont définis explicitement, soit *a priori*, c'est-à-dire sans aucune prévision de la forme de l'élément géométrique, soit *a posteriori*, à ce moment-là les descripteurs sont estimés à partir d'un élément ou d'un lot d'éléments géométriques.

### 1.2.2.1 Paramétrage local

Dans la famille des paramétrages de type descriptifs, on distingue les paramétrages agissant localement sur les éléments géométriques de ceux qui caractérisent globalement les éléments. Cette méthode consiste à réaliser une partition de l'élément géométrique en plusieurs morceaux sur lesquels seront appliqués le paramétrage descriptif choisi. Par la synthèse de ces paramétrages locaux, on décrira la forme globale de l'élément géométrique.

Une application très répandue, qui utilise ce type de paramétrage, est la norme de compression JPEG [ISO/CEI-10918-1, 94] (acronyme de Joint Photographic Experts Group) employée en imagerie numérique. Cette norme, née d'un rassemblement de professionnels de l'industrie de l'image, est basée sur la DCT (Discrete Cosinus Transform). En résumé, le principe est le suivant, chaque image numérique est découpée en carreaux, généralement 64 (8×8) ou 256 (16×16) pixels (cd. figure 1.7). Ensuite, selon le type de codage des couleurs adopté, chaque « couleur » de chaque carreaux de pixels subit une transformation numérique. La transformation numérique appliquée est donc la DCT ou transformée discrète en cosinus en français. Cette transformation permet de décrire chaque bloc par un spectre de fréquences et d'amplitudes plutôt qu'en pixels et en couleurs. Une opération de quantification permet de compresser les données. La synthèse de chaque transformation permet de compresser l'image totale.

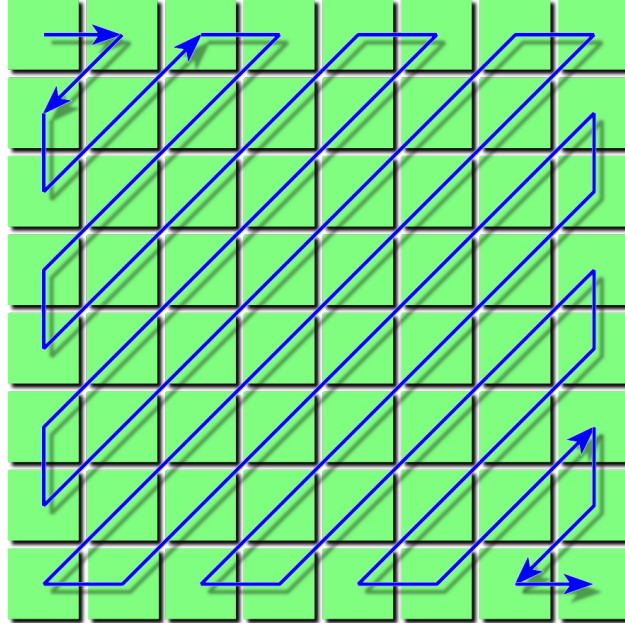


Figure 1.7 – Ordre de codage défini par la norme JPEG

Dans cette application, la transformée discrète en cosinus (cf. équation 1.1) réalise un paramétrage de chaque bloc de pixels, en décomposant l'information de « couleur » dans un espace de description défini par une base de fonctions (cf. figure 1.8). Dans le cas de la DCT, les fonctions sont des combinaisons d'harmoniques en cosinus.

$$C(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right) \quad (1.1)$$

pour  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . La transformation inverse est définie par l'équation 1.2 suivante,

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v)C(u, v) \cos\left(\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right) \quad (1.2)$$

pour  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$  et  $\alpha(u)$  et  $\alpha(v)$  sont définies par l'équation 1.3.

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{pour } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{pour } u \neq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Nous montrons sur la figure 1.8, la représentation de la base des fonctions cosinus pour  $N = 5$ . On observe une progression de la complexité de la base dans les directions horizontales et verticales, qui s'explique par l'accroissement de la fréquence des cosinus.

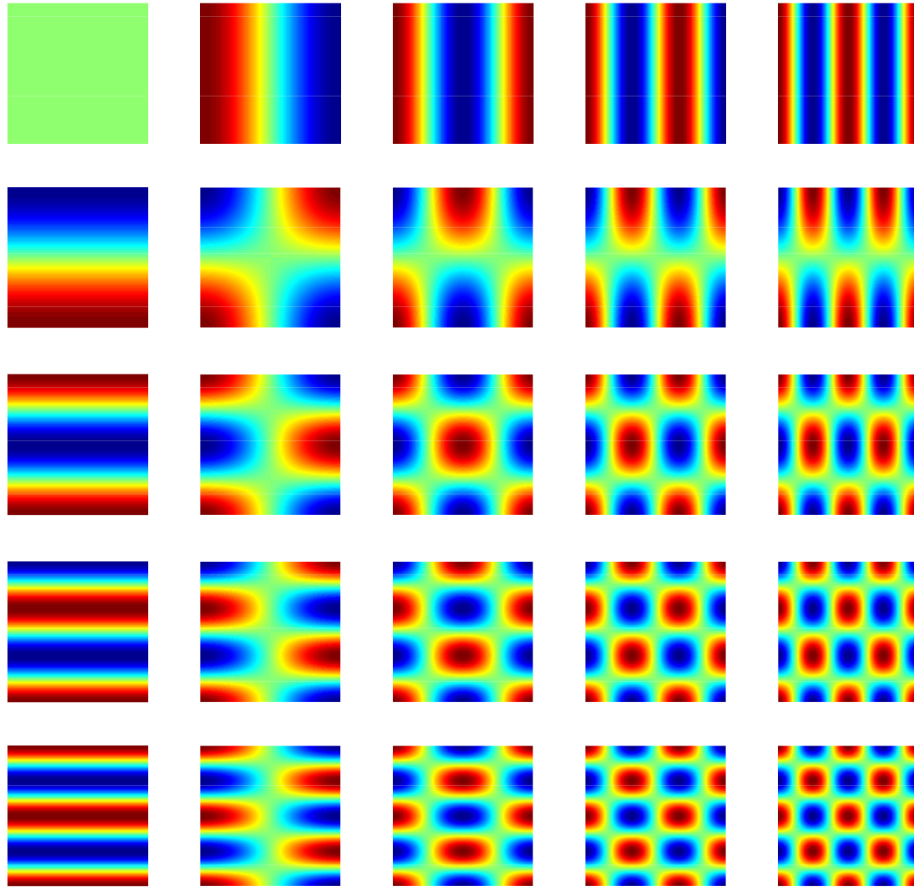


Figure 1.8 – Base des fonctions cosinus de la DCT. La couleur verte représente une amplitude nulle, le rouge représente les amplitudes positives et le bleu représente les amplitudes négatives

Il est intéressant de préciser que nous avons présenté la DCT bidimensionnelle, puisque les objets à décrire étaient bi-paramétrés, mais sa première utilisation est monodimensionnelle.

Ce type de paramétrage rejoint les méthodes de sous-structuration en dynamique des structures. En effet, ces méthodes permettent d'étudier le comportement d'une structure à travers plusieurs sous-structures. La principale différence est que la sous-structuration peut garantir des conditions de continuité (libre et/ou fixe) entre les sous-structures (cf. figure 1.9). On peut imaginer décrire la forme des éléments géométriques par un comportement mécanique donné et le paramétrer par les équations classiques de la mécanique. On retrouvera ce type de démarche dans des paramétrages orientés reconstruction (cf. §1.2.3) qui, par application de contraintes mécaniques à la structure, se conformera à la forme de l'élément géométrique.



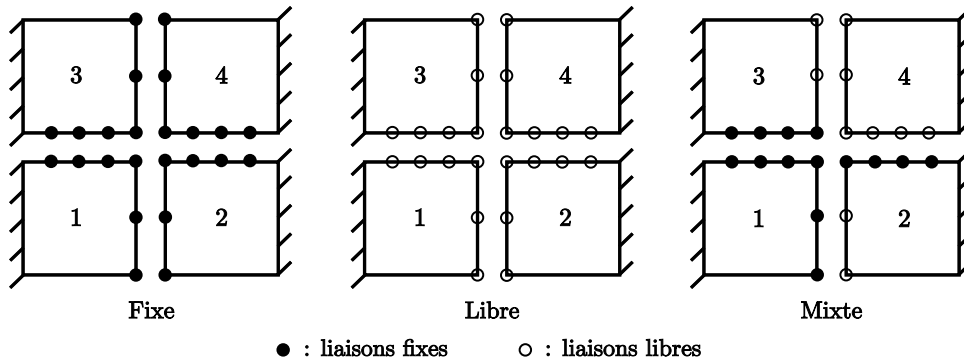


Figure 1.9 – Méthode de sous-structuration

En restant dans le domaine de la mécanique, on trouve dans la littérature des paramétrages issus des équations de la dynamique. La résolution de ces équations permet d'obtenir les modes naturels de vibration de la structure modélisée. Ainsi par une combinaison des formes particulières des modes, on dispose d'un paramétrage de la forme. Initié par des travaux sur les techniques de reconnaissance d'images, notamment par l'équipe américaine de Pentland [PENTLAND, 90] puis celle de Nastar à l'INRIA [NASTAR et AYACHE, 93], nous considérons ce paramétrage original comme un paramétrage descriptif dans notre classification. Pour en revenir à l'objet de ce paragraphe, ce paramétrage par comportement dynamique peut s'associer aux méthodes de sous-structuration pour définir des caractéristiques locales. Nous porterons une attention particulière à ce paramétrage dans la suite de ce manuscrit puisqu'il est à l'origine des travaux qui y seront développés.

### 1.2.2.2 Paramétrage global

Les paramétrages globaux, que nous qualifions de descriptifs, reposent sur une base de description. Nous verrons qu'il existe plusieurs méthodes pour générer ces bases. Le principe est simple, il s'agit d'identifier les descripteurs ou paramètres qui caractérisent au mieux la forme de l'élément géométrique. En réalité, cette opération d'identification se traduit par une décomposition de la forme dans l'espace des descripteurs définis par la base. Nous nous intéresserons moins aux différentes méthodes de décomposition qu'aux différentes bases existantes, qui ont fait l'objet d'applications concrètes. Nous avons choisi de séparer les bases de description définies *a priori*, qui sont complètement décorréées de la forme de la géométrie, des bases définies *a posteriori*, c'est-à-dire inhérentes à la forme de la géométrie.

- **Descripteurs définis *a priori***

(a) *Décomposition en cosinus*. Ce paramétrage est basé sur la transformée discrète en cosinus (DCT) décrite dans le paragraphe précédent 1.2.2.1. Contrairement à son utilisation locale pour la compression d'image, les paramètres résultants de la décomposition (cf. équation 1.1) caractérisent la forme globale de l'élément géométrique. Il permet d'avoir une description de la forme par une combinaison des harmoniques en cosinus. Ces harmoniques, appelées communément modes, forment une base orthogonale ce qui assure l'indépendance des paramètres. La transformée inverse (cf. équation 1.2) permet de reconstruire la forme de la géométrie à des écarts près, compte tenu du nombre de modes sélectionnés.

Dans la thématique du tolérancement géométrique, Huang et Ceglarek proposent justement de modéliser les écarts de forme d'une pièce avec une méthode de décomposition basée sur la DCT [HUANG et CEGLAREK, 02]. Selon les hypothèses de lissage, les écarts de forme mesurés  $f(x, y)$

peuvent être ajustés par le modèle suivant :

$$f(x, y) = c_0 + \sum_{u=1}^{I-1} \sum_{v=1}^{I-1} c_{u,v} \cos(ux\pi) \cos(vy\pi) + \epsilon(x, y) \quad (1.4)$$

où  $I$  représente le nombre de modes considérés dans le modèle avec  $I < N$ ,  $c_{u,v}$  les coefficients de la DCT et  $\epsilon(x, y)$  le résidu. Ils présentent une application industrielle de ce paramétrage sur une pièce emboutie. À partir de la mesure de la pièce emboutie, la décomposition par la DCT permet de calculer les coefficients associés à chaque mode. Leur valeur permet d'estimer la pertinence de chacun dans leur interprétation physique vis-à-vis du procédé de fabrication.

(b) *Décomposition en série de Fourier.* Ce paramétrage est construit à partir de la Transformée de Fourier Discrète (DFT). Le lecteur aura remarqué que nous parlons de transformée de Fourier discrète car dans la majorité des cas, la transformée de Fourier est appliquée à des objets discrets. Plus générale que la transformée en cosinus, la transformée de Fourier permet de décomposer la forme de la géométrie dans une base d'harmoniques en cosinus et sinus, ce qui permet d'obtenir un spectre des amplitudes associé à un spectre de phase. Elle est définie par l'équation 1.5 suivante :

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-2\pi j \frac{ux + vy}{N}\right) \quad (1.5)$$

L'opération de transformée inverse (cf. équation 1.6), comme pour la DCT, reconstruit la forme de la géométrie.

$$f(x, y) = \frac{1}{T^2} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left(2\pi j \frac{ux + vy}{N}\right) \quad (1.6)$$

Lorsque l'on applique la DFT à un objet discret quelconque, par exemple la mesure d'un élément géométrique, le nombre d'harmoniques maximum, qui peut la caractériser, est égal au nombre de points de mesure de l'élément. Avec un nombre d'harmoniques inférieur à  $N$ , on obtient obligatoirement un filtrage de l'objet, supplémentaire à celui déjà induit par la discrétisation. La quantité d'informations nécessaires à la définition de l'objet est alors réduite.

Raja et Radhakrishnan appliquent justement la décomposition en série de Fourier pour analyser des mesures de profils de rugosité [RAJA et RADHAKRISHNAN, 77]. L'objet de leurs travaux est d'obtenir une bonne approximation de la mesure en réduisant le nombre d'harmoniques. Pour cela, ils mettent en place un critère permettant de trouver ce nombre optimal pour garantir une précision suffisante. Leur étude montre qu'en fonction du type de profils (de forme, de surface tournée ou rectifiée), le nombre d'harmoniques utiles pour atteindre le même niveau d'approximation varie fortement. Bien évidemment, plus on va tendre vers la surface rectifiée (défauts principaux de très courtes longueurs d'ondes) plus le nombre d'harmoniques doit être important pour synthétiser et assurer une bonne reconstruction.

Les travaux de Chien [CHIEN, 82] en 1982 puis ceux de Cho et Tu [CHO et TU, 01] en 2001, proposent des modèles de prédiction pour paramétrer les profils de circularité des pièces tournées. Ils sont basés sur les séries de Fourier. Ces différents travaux montrent l'intérêt d'utiliser les séries de Fourier pour modéliser la relation entre les mouvements de la broche d'usinage et le profil de circularité de la pièce. En effet, les harmoniques en cosinus et sinus sont représentatifs des phénomènes de vibrations entre l'outil de coupe et la pièce.

Toujours dans cet objectif de relier le procédé d'usinage avec la forme de la géométrie des pièces, une équipe américaine [HENKE *et al.*, 99, SUMMERHAYS *et al.*, 01] propose deux types de modèles ou paramétrages pour caractériser la forme géométrique des pièces cylindriques. Le premier modèle

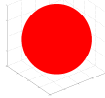
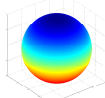
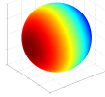
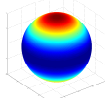
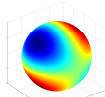
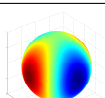
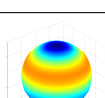
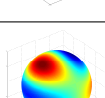
est analytique et modélise les défauts géométriques radiaux par des séries de Fourier alors que les défauts axiaux sont modélisés par des polynômes de Chebyshev, que l'on développera dans la suite de ce paragraphe. Le second modèle utilise l'analyse en composantes principales qui permet d'extraire une base de formes caractéristiques à partir des données géométriques mesurées. On abordera dans le paragraphe suivant sur les descripteurs définis *a posteriori* ce type de paramétrage. Ces travaux démontrent la polyvalence du modèle analytique pour paramétrer les défauts des pièces cylindriques générés par la majorité des procédés de fabrication. L'autre modèle s'avère plus efficace pour des problèmes de discontinuités sur la géométrie de la pièce, souvent produites par des opérations successives d'usinage.

Capello et Semeraro, de l'école polytechnique de Milan, proposent un modèle d'association des éléments géométriques pour mettre en évidence l'effet de l'échantillonnage, imposé par la mesure, dans l'évaluation de la conformité des spécifications géométriques choisies par le concepteur. Sur un exemple de profil circulaire [CAPELLO et SEMERARO, 99], ils montrent que les deux principaux facteurs influents sur la qualité de l'association des éléments géométriques sont le nombre et la position des points de mesure. Et une mauvaise association entraînera une mauvaise estimation de la géométrie pour évaluer sa conformité. Pour améliorer la précision de l'association entre l'élément géométrique mesuré et l'élément associé, ils proposent de représenter l'élément mesuré par des harmoniques issues des séries de Fourier. Les travaux réalisés en 2000 dans [CAPELLO et SEMERARO, 00] sur une géométrie plane, ont permis d'établir une relation analytique entre l'erreur d'association estimée et plusieurs facteurs, tels que le nombre et la distribution des points de mesure, l'erreur de mesure ou encore l'erreur de position de la pièce sur la machine. Capello et Semeraro étendent leur modèle à d'autres types de géométrie compatibles avec un échantillonnage uniforme rectangulaire, en l'occurrence ligne et cercle pour les éléments 2D et pour les éléments 3D : plan, cylindre et cône. Dans [CAPELLO et SEMERARO, 01a], ils formalisent la théorie sur ces géométries et définissent pour chacune les relations entre l'erreur estimée et la géométrie associée, le plan de contrôle et le procédé de fabrication et de mesure. Les défauts géométriques générés par la fabrication peuvent être dus à des phénomènes tel que la vibration de l'outil de coupe ou encore à un retour élastique de la pièce. Dans la deuxième partie de leurs travaux [CAPELLO et SEMERARO, 01b], Capello et Semeraro supposent que les défauts géométriques d'une surface peuvent se décomposer en défauts spécifiques créés par des phénomènes particuliers. Ils classent alors les phénomènes élémentaires identifiés pour voir dans quelle mesure les classes de phénomènes participent à la partie systématique et/ou aléatoire de l'erreur d'association estimée. La décomposition en séries de Fourier fait partie des méthodes de paramétrage des formes les plus répandues. La norme sur la circularité [ISO/TS-12181-1, 03] fait référence à des paramètres faisant intervenir les composantes harmoniques de la transformée de Fourier, qui s'expriment comme une amplitude et une phase pour chaque nombre d'ondulations par tour (UPR). Les séries de Fourier sont aussi évoquées dans les annexes de normes concernant les stratégies d'extraction des éléments géométriques. Pour l'évaluation de la rectitude, les documents normatifs [ISO/TS-12780-2, 03] considèrent que le profil extrait peut se décomposer en série de Fourier. Pour satisfaire le critère de Nyquist, il en résulte une stratégie d'échantillonnage en fonction de la fréquence de la plus haute harmonique considérée. Il en sera de même pour la planéité [ISO/TS-12781-2, 03] et la cylindricité [ISO/TS-12180-2, 03].

(c) *Harmoniques sphériques*. Cette autre méthode de paramétrage permet de décrire des formes complexes dans une base de description, composée d'harmoniques sphériques. Comme la base des harmoniques de Fourier, cette base est orthogonale. Une surface bi-paramétrée par  $\theta$  et  $\phi$  peut alors se développer sous la forme :

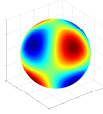
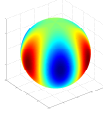
$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_l^m Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.7)$$

où  $c_l^m$  sont les coefficients issus de la décomposition dans la base des harmoniques sphériques et  $Y_l^m(\theta, \phi)$  définissent les harmoniques sphériques [WIKIPÉDIA, 09]. Dans le tableau 1.4, les premières expressions analytiques des harmoniques associées à leurs représentations sont présentées.

Expression analytique	Représentation <sup>a</sup>
$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	
$Y_1^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$	
$Y_1^1(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{j\phi}$	
$Y_2^0(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	
$Y_2^1(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{j\phi}$	
$Y_2^2(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2j\phi}$	
$Y_3^0(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$	
$Y_3^1(\theta, \phi) = \frac{-1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}} \sin \theta (\cos^2 \theta - 1) e^{j\phi}$	

*suite sur la prochaine page...*

<sup>a</sup>. on ne représente ici que la partie réelle de l'expression analytique

Expression analytique	Représentation <sup>a</sup>
$Y_3^2(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2j\phi}$	
$Y_3^3(\theta, \phi) = \frac{-1}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \theta e^{3j\phi}$	

a. on ne représente ici que la partie réelle de l'expression analytique

Tableau 1.4 – Premières expressions analytiques des harmoniques sphériques et représentations associées

Les harmoniques sphériques sont beaucoup utilisées pour reconstruire des objets 3D. Zhou et *al.* présentent une nouvelle approche sur le filtrage des surfaces 3D, en utilisant les harmoniques sphériques [ZHOU *et al.*, 04]. L'algorithme développé dans ces travaux permet de paramétrer des formes très complexes en incluant un paramétrage local sur certaines zones de l'objet. Tout aussi éloignés du domaine des défauts géométriques, Wang et Lai emploient cette base de description pour décrire les conditions d'éclairage issues de photos de visage humain avec un nombre réduit de paramètres [WANG et LAI, 08]. En la combinant avec un modèle capable de reconstruire le visage en 3D à partir d'une seule image, Wang et Lai synthétisent avec peu de paramètres un visage en 3D avec ses conditions d'éclairage. Une dizaine d'années auparavant, une équipe de recherche française exploite dans ces travaux [BUREL et HENOCQ, 95] les propriétés des harmoniques sphériques pour reconstruire des objets 3D, principalement issus de l'imagerie médicale, et déterminer leur orientation.

Plus proche de notre domaine de recherche, Kanada développe une méthode sur l'évaluation des défauts de forme sur des surfaces sphériques [KANADA, 95], autrement dit la sphéricité. Afin de valider sa méthode, Kanada génère des éléments sphériques avec des défauts en exploitant les harmoniques sphériques.

(d) *Polynômes de Zernike*. Issus du domaine de l'optique, les polynômes de Zernike ont été définis pour décrire les défauts d'aberrations des instruments d'optique. Les polynômes de Zernike constituent une base de description, dont l'expression mathématique des polynômes pairs (1.8) et impairs (1.9) est donnée par :

$$Z_n^{-m}(\rho, \theta) = {}^p U_n^m(\rho, \theta) = R_n^m(\rho) \cos(m\theta) \quad (1.8)$$


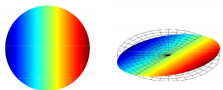
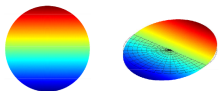
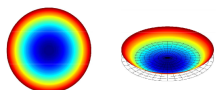
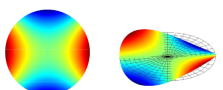
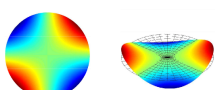
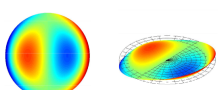
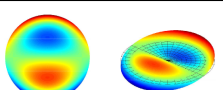
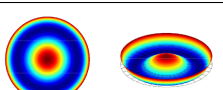
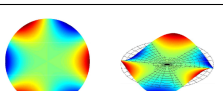
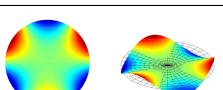
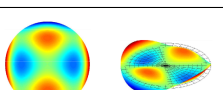
$$Z_n^m(\rho, \theta) = {}^i U_n^m(\rho, \theta) = R_n^m(\rho) \sin(m\theta) \quad (1.9)$$

où la fonction radiale  $R_n^m(\rho)$  est définie pour  $n$  et  $m$  avec  $n \geq m \geq 0$  par

$$R_n^m(\rho) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\sum_{l=0}^{(n-m)/2}} \frac{(-1)^l (n-l)!}{l! (\frac{1}{2}(n+m)-l)! (\frac{1}{2}(n-m)-l)!} \rho^{n-2l} & \text{pour } n-m \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } n-m \text{ impair} \end{cases} \quad (1.10)$$

Ce paramétrage a fait l'objet de la partie 5 de la norme [NF-ISO-10110-5, 08] sur la représentation des exigences de conception et des exigences fonctionnelles des éléments et systèmes optiques. Cette partie concerne les tolérances de forme de surface. La spécification des défauts récurrents sur les éléments d'optique peut être définie comme la combinaison linéaire d'un certain nombre de polynômes de Zernike  $C_0 Z_0^0(\rho, \theta) + C_1 Z_1^1(\rho, \theta) + C_2 Z_1^{-1}(\rho, \theta) + \dots$  où les  $C_i$  sont appelés coefficients

de Zernike. La norme distingue trois types de défauts de forme que l'on peut spécifier : le défaut sagittal, de l'irrégularité et/ou de l'irrégularité à symétrie de révolution. Le tableau 1.5 présente les premiers polynômes de Zernike.

Polynôme	Type de défaut	Représentation
$Z_0^0 = 1$	Piston (translation)	
$Z_1^1 = \rho \cos(\theta)$	Inclinaison selon x (tilt)	
$Z_1^{-1} = \rho \sin(\theta)$	Inclinaison selon y (tilt)	
$Z_2^0 = 2\rho^2 - 1$	Défocalisation	
$Z_2^2 = \rho^2 \cos(2\theta)$	Astigmatisme	
$Z_2^{-2} = \rho^2 \sin(2\theta)$	Astigmatisme	
$Z_3^1 = (3\rho^2 - 2)\rho \cos(\theta)$	Coma selon x	
$Z_3^{-1} = (3\rho^2 - 2)\rho \sin(\theta)$	Coma selon y	
$Z_4^0 = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$	Sphéricité	
$Z_3^3 = \rho^3 \cos(3\theta)$	Astigmatisme Tréfoil	
$Z_3^{-3} = \rho^3 \sin(3\theta)$	Astigmatisme Tréfoil	
$Z_4^2 = (4\rho^2 - 3)\rho^2 \cos(2\theta)$	Astigmatisme Sphéricité	

*suite sur la prochaine page...*

Polynôme	Type de défaut	Représentation
$Z_4^{-2} = (4\rho^2 - 3)\rho^2 \sin(2\theta)$	Astigmatisme Sphéricité	
$Z_4^4 = \rho^4 \cos(4\theta)$	Astigmatisme Quadratique	
$Z_4^{-4} = \rho^4 \sin(4\theta)$	Astigmatisme Quadratique	

Tableau 1.5 – Premiers polynômes de Zernike et représentations associées

On peut se référer à quelques travaux réalisés sur ce paramétrage. Campbell de l'université de Berkeley propose une nouvelle formulation des fonctions polynomiales standards de Zernike pour décrire plus judicieusement les aberrations de l'oeil [CAMPBELL, 03]. Plutôt que d'avoir deux coefficients de Zernike qui caractérisent le même type de défaut, Campbell propose de simplifier avec un seul coefficient, auquel on associe une amplitude et une orientation. Sicam *et al.* ont mis en place un algorithme qui calcule directement les coefficients de Zernike afin de caractériser la forme de la surface antérieure d'une cornée [SICAM *et al.*, 04]. La mesure de la cornée s'effectue par l'intermédiaire d'un système optique et l'algorithme s'applique sur une image réfléchie de la cornée.

Une extension 3D aux polynômes de Zernike est décrite par Novotni et Klein [NOVOTNI et KLEIN, 04]. Établis à partir des harmoniques sphériques, les descripteurs de Zernike 3D gardent les propriétés d'orthogonalité de la base des harmoniques sphériques. Ils sont définis par :

$$Z_{nl}^m(\rho, \theta, \phi) = R_{nl}(\rho)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.11)$$

où  $R_{nl}(\rho)$  sont des polynômes dits « radiaux » et  $Y_l^m(\theta, \phi)$  les harmoniques sphériques (cf. tableau 1.4). Ce paramétrage va plus loin que les précédents puisqu'il va décrire entièrement l'objet volumique 3D. Novotni et Klein en présentent justement quelques applications sur des objets 3D dans [NOVOTNI et KLEIN, 04]. Une équipe de recherche anglaise en micro-biologie s'intéresse à cette méthode pour décrire et représenter des molécules dans [MAK *et al.*, 08].

(e) *Polynômes de Tchebychev.* Il existe encore beaucoup de bases de description construites à partir de polynômes. On peut en citer une dernière, formée avec les polynômes de Tchebychev. Elle est intéressante car les travaux menés par Henke et Summerhays [HENKE *et al.*, 99, SUMMERHAYS *et al.*, 01] sur l'analyse des défauts géométriques de pièces créées par tournage font intervenir ces polynômes. En effet, ils paramètrent la génératrice des pièces cylindriques par les polynômes de Tchebychev. La fonction  $f(x)$  définissant la génératrice peut ainsi s'exprimer sous la forme,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \quad (1.12)$$

et dont les polynômes de Tchebychev de la première espèce s'écrivent,

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \text{ pour } n \neq 0 \quad (1.13)$$

et se représentent :

Polynômes	
$T_0(x)$	$= 1$
$T_1(x)$	$= x$
$T_2(x)$	$= 2x^2 - 1$
$T_3(x)$	$= 4x^3 - 3x$
$T_4(x)$	$= 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x)$	$= 16x^5 - 20x^3 + 5x$

Tableau 1.6 – Premiers polynômes de Tchebychev

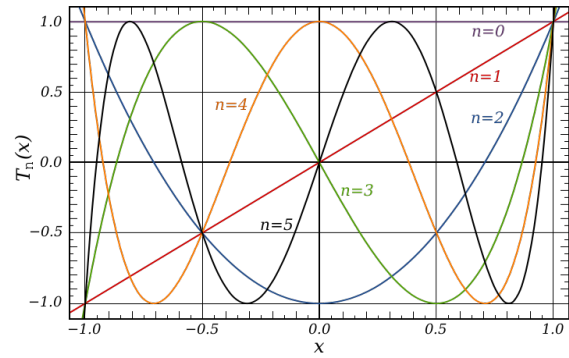


Figure 1.10 – Représentation des premiers polynômes de Tchebychev dans le domaine  $-1 < x < 1$

(f) *Analyse par ondelettes*. La décomposition en séries de Fourier, que l'on a vu précédemment, est sans aucun doute l'un des outils les plus utilisés par les physiciens et les mathématiciens. Bâtie sur la base du concept physique de fréquence, l'analyse de Fourier peut se révéler inadaptée, par exemple pour des fonctions ou des signaux dont la fréquence est variable au cours du temps ou avec des instabilités locales. Pour pouvoir décrire ce type de fonction, des décompositions temps-fréquence ont été introduites. Ces décompositions permettent de décrire les fonctions étudiées dans le plan temps-fréquence. Tout d'abord, l'analyse de Fourier à court terme (aussi appelée transformation de Fourier à fenêtre glissante ou transformée de Gabor) revient à réaliser une analyse de Fourier locale en tous points de la fonction étudiée. Quant à l'analyse par ondelettes, elle agit comme un microscope mathématique, c'est-à-dire qu'elle adapte sa résolution à la taille de l'objet analysé. Ces méthodes font parties des méthodes de description qui visent à adapter l'outil d'analyse à l'objet analysé. Dans leurs travaux sur l'analyse multi-échelle des surfaces usinées [CHEN *et al.*, 95], Chen *et al.* exposent une comparaison des différentes bases de description et leur potentiel de description dans le plan temps-fréquence (cf. figure 1.11).

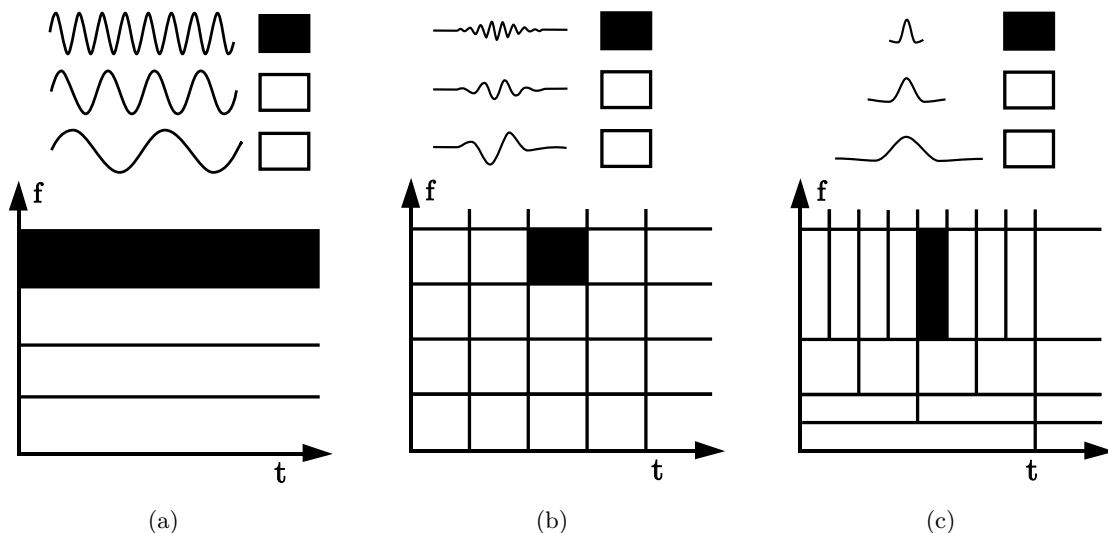


Figure 1.11 – Comparaison des bases de description et de la résolution plan-fréquence de FT, STFT et WT. (a) Transformée de Fourier (FT), (b) Transformée de Fourier à court terme (STFT) et (c) Transformée en Ondelettes (WT).

D'un point de vue plus pratique, l'analyse par ondelettes se définit comme suit ; partant d'une fonc-



tion  $\psi(x)$  bien localisée (dans le plan temps fréquence), on lui associe la famille d'ondelettes  $\psi_{(b,a)}(x)$  engendrées par des translations et des dilatations, respectivement quantifiées par les coefficients  $b$  et  $a$ , de  $\psi(x)$ .

$$\psi_{(b,a)}(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (1.14)$$

La transformée en ondelettes définit donc l'ensemble des coefficients :

$$T_f(b, a) = \langle f, \psi_{(b,a)} \rangle \quad (1.15)$$

qui décrivent le contenu de  $f$  dans le plan temps-fréquence.

Chen et *al.* démontrent que la décomposition multi-échelle, appliquée aux surfaces usinées, se révèle particulièrement intéressante pour décrire les aspects fonctionnels et la qualité de fabrication des surfaces usinées. Lee et *al.* font le même constat lorsqu'ils appliquent ce paramétrage sur des profils de rugosité [LEE *et al.*, 98] et concluent que cette méthode de filtrage est très adaptée au domaine de la tribologie. Des chercheurs américains appliquent l'analyse par ondelettes à des profils extraits sur des surfaces pour filtrer et séparer la rugosité, les défauts d'ondulations et le défaut de forme [RAJA *et al.*, 02]. Lingadurai et Shunmugam réalisent le même travail sur des surfaces [LINGADURAI et SHUNMUGAM, 06]. Ils examinent les caractéristiques métrologiques de surfaces fabriquées par des procédés de tournage, de rectification et de polissage. Ils précisent que les caractéristiques métrologiques obtenues, en termes de longueur d'ondes et de phases, sont facilement exploitables et représentent un apport incontestable dans l'analyse des textures de surface.

(g) *Décomposition modale.* Dans la littérature, on trouve un paramétrage original qui diffère des précédents, la décomposition modale. La base de décomposition utilisée est un ensemble d'harmoniques de fréquences différentes. Ces harmoniques sont issues de la résolution d'un problème de dynamique des structures. Le paramétrage sera alors constitué de l'ensemble des coefficients pondérateurs sur chaque harmonique, communément appelé mode de vibration en mécanique des structures. La somme des modes, pondérés par leur coefficient, donnera une approximation de la forme de l'élément géométrique.

Le chercheur américain Pentland est l'initiateur de cette méthode de décomposition [PENTLAND, 90]. L'objectif de ses travaux était d'obtenir automatiquement un modèle volumétrique 3D pour la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) et pour la reconnaissance d'objet. Premièrement, pour simuler le comportement mécanique de l'objet à paramétrer, il choisit la méthode des éléments finis. La variation de forme de l'objet est ainsi discrétisée en un nombre fini de déplacements, appliqués à des points que l'on appelle noeuds. Les déplacements entre chaque noeud peuvent éventuellement être interpolés par des fonctions de lissage. Et deuxièmement, l'originalité a été d'utiliser le comportement dynamique de l'objet, en l'occurrence les modes de vibrations naturels, pour décrire le comportement déformable de l'objet et/ou sa forme. Les modes de vibrations sont les solutions  $(\phi_i, \omega_i^2)$  du problème aux valeurs propres suivant :

$$K\phi_i = \omega_i^2 M\phi_i \quad (1.16)$$

Le vecteur  $\phi_i$  est appelé  $i^e$  vecteur modal et  $\omega_i$  est la pulsation correspondante.

Pentland expose une méthode permettant d'extraire automatiquement un modèle déformable 3D de l'objet à partir d'une image de celui-ci [PENTLAND, 90]. La première étape consiste à segmenter l'image par des formes convexes qui représentent grossièrement les informations de celle-ci. Un modèle déformable 3D est construit pour chaque forme convexe et la décomposition modale de chacun permet de paramétrer l'objet photographié avec la précision souhaitée.

Scarloff et Pentland présentent des applications de cette méthode sur les correspondances entre deux objets et la reconnaissance d'un objet à un autre. Ils développent un algorithme permettant de trouver le maximum de correspondances entre deux entités, en étudiant une matrice d'affinités évaluée à partir des modes de vibrations de chaque entité [SCLAROFF et PENTLAND, 93]. De la mise en correspondance précédente, ils expriment le niveau d'erreur d'alignement et le niveau d'énergie de déformation entre les deux entités. En minimisant la somme de ces deux fonctions, ils obtiennent un jeu de paramètres désignant l'amplitude des modes qui permettent d'aligner l'objet référence avec l'objet cible déformé. La valeur de ces amplitudes reflète directement le degré de similarité entre les deux entités [SCLAROFF et PENTLAND, 95].

Fortement inspirés par les travaux de l'équipe américaine, Nastar et Ayache appliquent ce type de paramétrage pour suivre et analyser les mouvements d'entités déformables dans le temps sur une séquence d'images médicales 2D et 3D [NASTAR et AYACHE, 93]. Nastar et Ayache montrent l'efficacité de l'approximation modale en terme de qualité de description avec un faible nombre de descripteurs et de surcroît sur des exemples complexes, tels que le mouvement d'un ventricule gauche ou encore une tête humaine en 3D [NASTAR, 94]. Un apport supplémentaire dans ces travaux a été d'explicitier les solutions analytiques des modes de vibrations sur des éléments géométriques classiques. En approfondissant leurs travaux sur l'imagerie médicale, Nastar et Ayache réalisent le paramétrage modal d'un ventricule à chaque instant  $t$  et modélisent l'évolution de l'amplitude des modes principaux avec des harmoniques de Fourier [NASTAR et AYACHE, 96].

A l'intersection de ces travaux [MOGHADDAM *et al.*, 01], Moghaddam *et al.* proposent une technique de mise en correspondance d'images pour faire de la reconnaissance d'images dans une base de recherche. Ils définissent un critère de similarité probabiliste basé sur des fonctions de probabilités relatives à deux classes de mise en correspondance qu'ils ont définies. Tout d'abord, la mise en correspondance de différentes images représentant le même individu ayant diverses expressions, par exemple. Puis, la mise en correspondance d'images de deux individus différents. Les écarts  $d(I_1, I_2)$  entre les deux images sont déterminés en calculant la différence entre l'intensité lumineuse de chaque pixel de l'image 1 ( $I_1$ ) avec celle de l'image 2 ( $I_2$ ). Ces écarts sont ensuite paramétrés par les modes de vibrations d'une surface plane.

- **Descripteurs définis *a posteriori***

(a) *Analyse en Composantes Principales*. L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une méthode mathématique qui transforme un certain nombre de variables qui peuvent être corrélées en nombre plus restreint de variables décorréelées, appelées composantes principales. Créée par Karl Pearson, l'ACP est aussi connue sous le nom de transformation de Karhunen-Loève [PEARSON, 01]. Les variables descriptives d'un ensemble de données vont être synthétisées en composantes principales. Ces composantes principales définissent un nouvel espace de description pour l'ensemble des données, qui a la propriété d'être orthogonal (cf. figure 1.12). La projection des données dans ce nouvel espace est telle que la première coordonnée (ou première composante principale) correspond à la plus grande variance, la deuxième correspond à la deuxième plus grande variance et ainsi de suite. D'une part, le tri décroissant des variances permet d'identifier les descripteurs les plus significatifs et d'autre part, l'ACP permet de restreindre les variables descriptives aux variances les plus grandes.

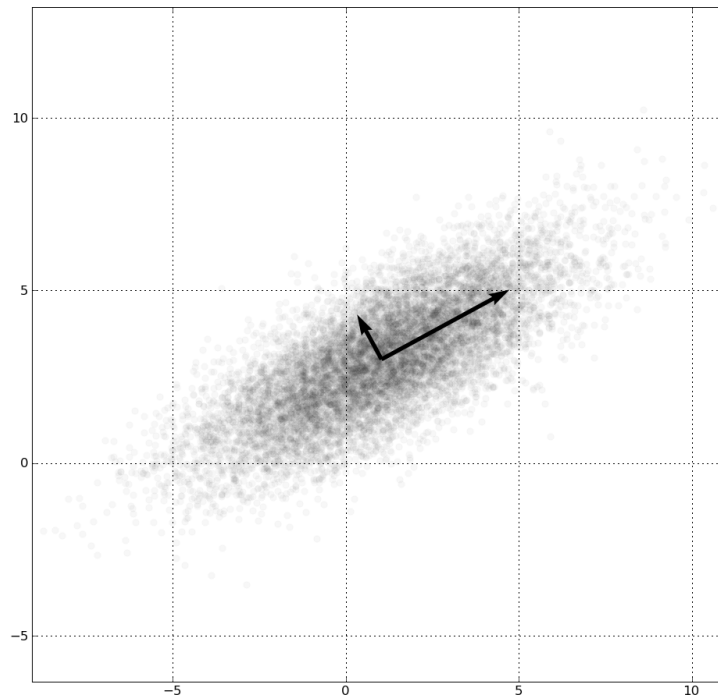


Figure 1.12 – ACP d'une distribution normale multivariable

Mathématiquement, l'ACP se résume à un calcul de valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de covariance des données ou à une décomposition en valeur singulière de la matrice des données. Pour une matrice  $X_{p,n}$  de données centrées, avec  $p$  caractères mesurés sur  $n$  individus d'une population, l'ACP est définie par :

$$Y = W^T X \quad (1.17)$$

où  $Y$  est une matrice à  $n$  colonnes dont les colonnes sont le résultat de la projection des vecteurs colonnes de  $X$  dans les vecteurs de bases contenus dans  $W$ .  $W$  est composée de  $l$  vecteurs colonnes, qui sont les vecteurs propres de la matrice de covariance  $C_{p,p}$  avec  $l \leq p$  et  $C = XX^T$ .

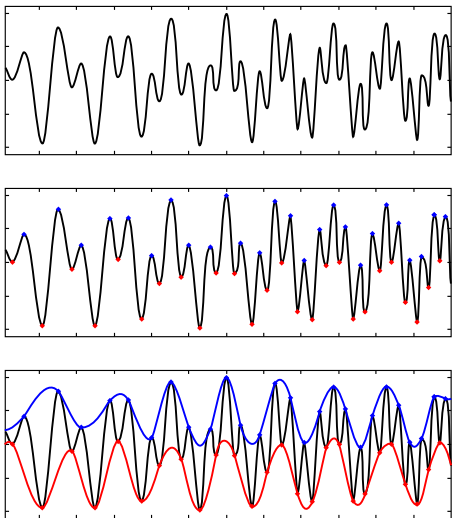
À partir d'un ensemble de données, l'ACP permet de synthétiser ces données pour en extraire un paramétrage judicieux, défini par les vecteurs colonnes de la matrice  $Y$ , dans un espace de description orthogonal, constitué des composantes principales.

Une fois de plus, on retrouve beaucoup d'applications de l'ACP dans l'imagerie numérique. Dans ce domaine, Samal et Iyengar appliquent l'ACP pour réaliser de la détection de formes et de contours sur des familles d'images [SAMAL et IYENGAR, 93]. Ils montrent que les formes peuvent être détectées plus précisément en appliquant la transformée de Hough (technique de reconnaissance de formes) sur les formes issues de l'ACP, plutôt que directement sur la famille d'images. Dans le domaine de l'imagerie médicale, beaucoup de modèles de reconstruction de formes ou de contours sont élaborés. Pour que ces modèles soient généralisables et performants, ils sont définis sur les formes ou contours les plus représentatifs d'un lot d'images. Pour ce faire, [KOTCHEFF et TAYLOR, 98] et [DE BRUIJNE *et al.*, 03] utilisent l'ACP.

Dans les mêmes travaux [HENKE *et al.*, 99, SUMMERHAYS *et al.*, 01] que nous avons introduits dans le paragraphe sur les descripteurs définis *a priori*, Henke et Summerhays extraient une base de formes caractéristiques du lot de mesure avec l'ACP. En faisant un parallèle avec le paramétrage Fourier-Tchebychev, ils en concluent que le paramétrage issu par l'ACP se montre beaucoup plus efficace pour des surfaces ayant des défauts géométriques complexes et des discontinuités. Les travaux menés par Colosimo et Pacella utilisent l'ACP pour identifier les formes systématiques d'un lot

de mesures de circularité sur des pièces tournées [COLOSIMO et PACELLA, 07]. Ils s'intéressent particulièrement à l'efficacité de l'ACP, en d'autres termes que les composantes principales soient identifiables et interprétables. Cela consiste à évaluer le nombre de composantes principales nécessaires à retenir pour paramétrer le lot.

(b) *Décomposition Modale Empirique*. Introduite par Huang et *al.*, la décomposition modale empirique (ou EMD, pour Empirical Mode Decomposition) est une technique de décomposition adaptée à des signaux non stationnaires, même champ d'application que l'analyse en ondelettes [HUANG et *al.*, 98]. L'EMD est entièrement pilotée par les données à paramétrer et ne requièrent aucune base de décomposition définie *a priori*, contrairement à l'analyse en ondelettes. Une comparaison avec la décomposition en ondelettes a d'ailleurs été faite par Flandrin et Gonçalves [FLANDRIN et GONÇALVÈS, 03]. Tout signal se décompose en une somme de modes (ou IMF pour Intrinsic Mode Function). Un IMF est un mode dont la moyenne est nulle et dont le nombre de ses maxima et minima est identique ou différent de un. L'EMD est définie par un processus dit de tamisage, très bien décrit et synthétisé par Boudraa et *al.* dans [BOUDRAA et *al.*, 03], dont les principales étapes sont données dans le tableau suivant :

	Étapes	Illustrations
1	Fixer le seuil $\epsilon$ , $j \leftarrow 1$ ( $j^{\text{ème}}$ IMF)	
2	$r_{j-1}(t) \leftarrow x(t)$ (résidu)	
3	Extraction de L'IMF :  (a) $h_{j,i-1}(t) \leftarrow r_{j-1}(t)$ , $i \leftarrow 1$ ( $i$ nombre de tamisage)  (b) Identifier les extrema locaux de $h_{j,i-1}(t)$  (c) Calculer l'enveloppe supérieure $U_{j,i-1}(t)$ et l'enveloppe inférieure $L_{j,i-1}(t)$ par interpolation (splines cubiques) de $h_{j,i-1}(t)$	

*suite sur la prochaine page...*

où  $T$  est la durée du signal et  $\leftarrow$  est l'opération d'affectation

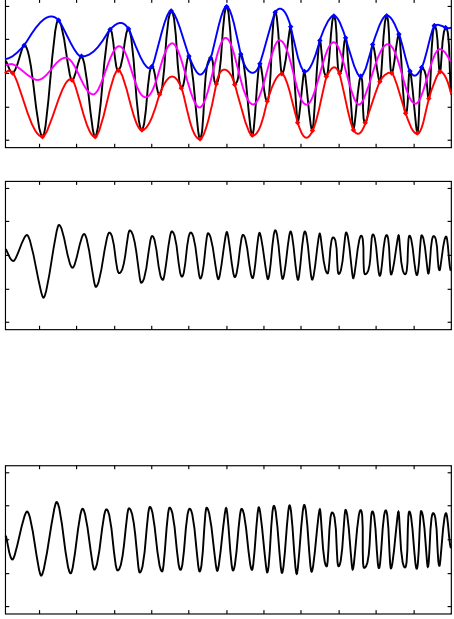
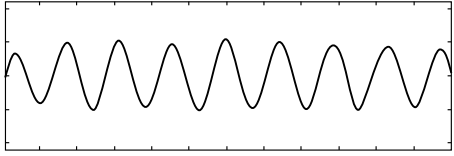
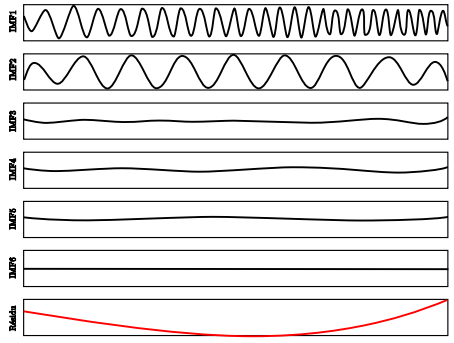
	Étapes	Illustrations
	<p>(d) Calculer la moyenne des enveloppes :  <math>\mu_{j,i-1}(t) \leftarrow (U_{j,i-1}(t) + L_{j,i-1}(t)) / 2</math></p> <p>(e) Mise à jour :  <math>h_{j,i} \leftarrow h_{j,i-1}(t) - \mu_{j,i-1}(t), i \leftarrow i + 1</math></p> <p>(f) Calculer le critère d'arrêt :  <math>SD(i) = \sum_{t=0}^T \frac{ h_{j,i-1}(t) - h_{j,i}(t) ^2}{(h_{j,i-1}(t))^2}</math></p> <p>(g) Décision : Répéter (b)-(f) jusqu'à ce que <math>SD(i) &lt; \epsilon</math> et affecter  <math>IMF_j(t) \leftarrow h_{j,i}(t)</math> (<math>j^{\text{ème}}</math> IMF)</p>	
4	<p>Mise à jour du résidu :  <math>r_j(t) \leftarrow r_{j-1}(t) - IMF_j(t)</math></p>	
5	<p>Répéter l'étape 3 avec <math>j \leftarrow j + 1</math> jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'extrema de <math>r_j(t)</math></p>	<p style="text-align: center;">Décomposition Modale Empirique</p> 

Tableau 1.7 – Processus dit de tamisage (sifting process)

Le résultat du tamisage que l'on voit dans l'illustration de l'étape 5 conduit à la représentation suivante :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N IMF_i(t) + r_N(t) \quad (1.18)$$

Boudraa et *al.* emploient la décomposition modale empirique pour caractériser les fonds marins [BOUDRAA *et al.*, 03]. Le résultat de la décomposition des profils bathymétriques simulés montre que les IMFs obtenus caractérisent fidèlement les différents types d'ondulations des fonds marins.

### 1.2.3 Approche par reconstruction

Les méthodes de reconstruction de contours, surfaces ou volumes privilégient naturellement la fidélité et la qualité de la reconstruction. Ces méthodes s'appuient généralement sur un nombre important de paramètres et plus il y aura de détails à décrire, plus ce nombre sera élevé. De la même

façon que les méthodes descriptives, on fera la distinction entre les méthodes de reconstruction qui utilisent les propriétés locales de la géométrie étudiée et celles qui s'associent à la géométrie globale.

### 1.2.3.1 Paramétrage local

(a) *Courbes et surfaces paramétrées.* Les courbes de Bézier, les B-splines, les courbes et surfaces NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) sont les représentations paramétriques les plus courantes. Elles sont citées dans l'ordre chronologique de leur développement et de leur évolution, puisque les B-splines sont une généralisation des courbes de Bézier et les NURBS émergent d'une généralisation des B-splines. Un état de l'art de ces trois évolutions est présenté par Dimas et Briassoulis [DIMAS et BRIASSOULIS, 99].

Cubélès-Valade et Riviere proposent d'utiliser les pôles définis par les courbes de Bézier pour spécifier position et dimension des surfaces dites complexes [CUBÉLÈS-VALADE et RIVIÈRE, 98]. Pour  $n + 1$  points de contrôle  $(P_0, \dots, P_n)$ , une courbe de Bézier est définie par l'équation paramétrique

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i \text{ avec } t \in [0, 1] \quad (1.19)$$

et où les  $B_i^n$  sont les polynômes de Bernstein. Pour un degré  $m$ , il y a  $m + 1$  polynômes  $(B_0^m, \dots, B_m^m)$  définis sur  $[0, 1]$ , par

$$B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1 - u)^{m-i} \quad (1.20)$$

où les  $\binom{m}{i}$  sont les coefficients binomiaux. On présente sur la figure 1.13, la courbe de Bézier cubique définie par quatre points.

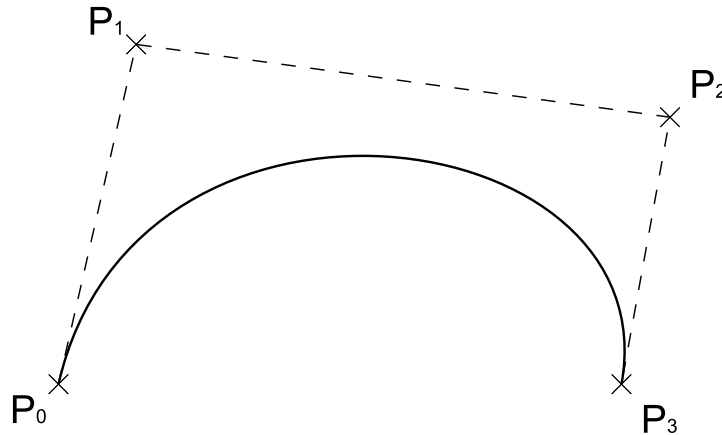


Figure 1.13 – Courbe de bézier cubique défini par  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$

La forme paramétrique de la courbe s'écrit :

$$P(t) = P_0 (1 - t)^3 + 3P_1 t (1 - t)^2 + 3P_2 t^2 (1 - t) + P_3 t^3 \text{ pour } t \in [0, 1] \quad (1.21)$$

Une équipe autrichienne présente un modèle de contour actif appliqué à des courbes et surfaces paramétriques, à savoir des B-splines [POTTMANN *et al.*, 02, POTTMANN et LEOPOLDESEDER, 03]. Par une méthode d'optimisation itérative, qui minimise une fonction quadratique, ils déforment les B-splines dans le but d'obtenir une meilleure approximation de la géométrie initiale. Beaucoup employée dans l'analyse numérique en mathématique ou encore en Conception Assistée par Ordinateur, une B-spline est une combinaison linéaire de splines de même degré (linéaire, quadratique,

cubique, *etc.*) dont l'échantillonnage des noeuds est régulier. Si on se donne  $m + 1$  noeuds  $t_i$  avec  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$  alors une B-spline de degré  $n$  s'écrit

$$S(t) = \sum_{i=0}^{m-n-1} P_i b_{i,n}(t), \quad t \in [0, 1] \quad (1.22)$$

où les  $P_i$  définissent les  $m - n$  points de contrôles et les  $m - n$  fonctions splines de degré  $n$  sont définies par la formulation récursive suivante :

$$b_{j,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.23)$$

$$b_{j,n}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+n} - t_j} b_{j,n-1}(t) + \frac{t_{j+n+1} - t}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} b_{j+1,n-1}(t) \quad (1.24)$$

La généralisation des B-splines a permis de construire les fonctions NURBS. Dans des travaux récents [PIERCE et ROSEN, 08], Pierce et Rosen intègrent les défauts de forme des pièces dans l'analyse des tolérances géométriques en modélisant les défauts de forme par des surfaces NURBS. Pour  $m - n$  points de contrôle  $P_i$ , une courbe NURBS se définit par :

$$C(t) = \sum_{i=0}^{m-n-1} R_{i,n} P_i \quad (1.25)$$

dans laquelle, les fonctions

$$R_{i,n} = \frac{w_i b_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^{m-n-1} w_j b_{j,n}(t)} \quad (1.26)$$

sont appelées fonctions rationnelles de base de degré  $n$ . Les  $b_{i,n}$  sont calculés par l'algorithme récursif énoncé dans les équations 1.23 et 1.24.

Le lecteur aura remarqué que la forme mathématique des représentations paramétriques exposée auparavant fait référence à des courbes. La formulation équivalente pour les surfaces paramétriques existe et fait apparaître un paramètre supplémentaire, généralement  $(s, t)$  ou  $(u, v)$ . De Casteljau décrit une méthode permettant de décrire des facettes triangulaires avec des courbes de Bézier. En utilisant cette description particulière des surfaces par ces facettes triangulaires dites de Bézier [GUPTA et TURNER, 93], Gupta et Turner construisent un modèle géométrique variationnel des surfaces d'une pièce. Ils décrivent ensuite l'utilisation de leur modèle pour faire de l'analyse de tolérance.

(b) *Modèles de contours actifs.* Les modèles de contours actifs sont beaucoup utilisés pour approximer des formes ou des contours d'objets sur des images et ils sont plus connus sous le nom de *Snakes*. Introduits par Kass et *al.*, ces modèles sont des splines paramétrées dans le plan de l'image à énergie minimum [KASS et *al.*, 88]. Le plan de l'image est défini par les coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et le contour est représenté par le vecteur  $\mathbf{v}(s) = (x(s), y(s))^T$  où  $s \in [0, 1]$  est le domaine paramétrique. On cherche ensuite les fonctions  $x(s)$  et  $y(s)$  permettant de décrire la forme du contour de l'objet identifié. Pour cela, la fonction  $\mathcal{E}(\mathbf{v})$  est définie

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}(\mathbf{v}). \quad (1.27)$$

Cette fonction représente l'énergie du contour et l'expression finale du contour correspond au minimum de cette énergie. Le premier terme de la fonction

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \int_0^1 w_1(s) \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} \right|^2 + w_2(s) \left| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial s^2} \right|^2 ds, \quad (1.28)$$

correspond à l'énergie interne de déformation. Elle est définie avec deux paramètres :  $w_1(s)$  contrôle la tension du contour alors que  $w_2(s)$  contrôle sa rigidité. Le second terme de l'équation 1.27 représente l'énergie de la fonction  $P(x, y)$ .

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}) = \int_0^1 P(\mathbf{v}(s)) ds \quad (1.29)$$

La fonction  $P(x, y)$  représente en quelque sorte le critère selon lequel le contour va se conformer pour approximer une zone de l'image. Kass et *al.* donnent plusieurs exemples, on peut citer une fonction simple, celle qui représente l'intensité  $I(x, y)$  de l'image. Finalement, la minimisation de  $\mathcal{E}(\mathbf{v})$  permet de déterminer la fonction  $\mathbf{v}(s)$ .

Cohen et Cohen présentent une généralisation 3D des modèles de contours actifs avec un modèle, qu'ils nomment *ballon*. Ils proposent une application de leur modèle sur de l'imagerie médicale [COHEN et COHEN, 93].

(c) *Modèle basé sur des surfaces superquadriques.* Terzopoulos et Metaxas introduisent un modèle déformable des surfaces superquadriques, destiné à reconstruire ou reconnaître des formes 3D sur des images.

Les surfaces superquadriques dérivent des surfaces quadriques. Barr définit quatre types de surfaces quadriques : les ellipsoïdes, les hyperboloïdes à une nappe, les hyperboloïdes à deux nappes et les toroïdes [BARR, 81]. La généralisation des surfaces quadriques aux surfaces superquadriques conserve ces quatre types de surfaces. Elles représentent la surface enveloppe du volume défini par l'inéquation implicite générale suivante :

$$|x|^r + |y|^s + |z|^t \leq 1 \quad (1.30)$$

Dans leur travaux, Terzopoulos et Metaxas considèrent des ellipsoïdes superquadriques définies par la formulation paramétrée

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a_1 C_u^{\epsilon_1} C_v^{\epsilon_2} \\ a_2 C_u^{\epsilon_1} S_v^{\epsilon_2} \\ a_3 S_u^{\epsilon_1} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

où  $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$  et  $-\pi \leq v \leq \pi$ , et où  $C_w^\epsilon = \text{sgn}(\cos w) |\cos w|^\epsilon$  et  $S_w^\epsilon = \text{sgn}(\sin w) |\sin w|^\epsilon$  [TERZOPOULOS et METAXAS, 91]. Dans cette formulation, les paramètres  $0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1$  sont des rapports de longueur dans les trois axes et  $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0$  sont les degrés des superquadriques. Nous montrons sur la figure 1.14, la représentation des ellipsoïdes superquadriques pour lesquelles  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  varient de 0.3 à 3.  $\epsilon_1$  contrôle la composante verticale et sa valeur augmente de gauche à droite.  $\epsilon_2$  contrôle la composante horizontale et augmente du bas vers le haut.



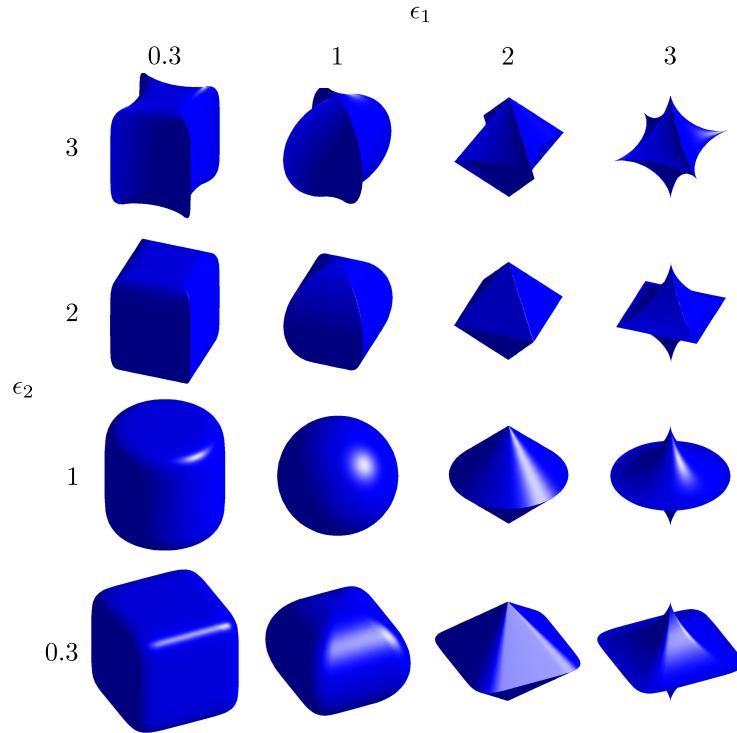


Figure 1.14 – Représentation des ellipsoïdes superquadriques pour  $0.3 \leq \epsilon_1, \epsilon_2 \leq 3$

Ainsi, Terzopoulos et Metaxas établissent un modèle de déformations locales et globales, à partir des paramètres intrinsèques des ellipsoïdes superquadriques, de paramètres cinématiques, dynamiques et d'élasticités.

(d) *Surfaces fractales.* De nombreux travaux montrent que les surfaces peuvent être décrites par des outils de la géométrie fractale [GAGNEPIN et ROQUES-CARMES, 86], [HASEGAWA *et al.*, 93] et [LOPEZ *et al.*, 95]. En effet, la caractérisation multi-échelle des surfaces, qu'apporte l'analyse fractale, est très intéressante pour étudier les phénomènes tribologiques. Plusieurs auteurs ont montré que de telles surfaces peuvent être décrites par deux paramètres fractals : la dimension fractale et le facteur d'échelle [MAJUMDAR et BHUSHAN, 90]. Nous n'explicitons pas ici la théorie des objets fractals, théorie développée par Mandelbrot dans les années 70 [MANDELBROT, 75]. Dans le domaine de la tribologie, Zahouani de l'École Centrale de Lyon emploie des modèles fractals pour caractériser la topographie des surfaces afin d'analyser le comportement des surfaces dans différentes conditions de contacts (frottement, adhérence, *etc.*). Dans [ZAHOUANI *et al.*, 98b], Zahouani *et al.* simulent les surfaces fractales avec la fonction de Weierstrass

$$Z_w(x) = A \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x + \phi_n)}{\gamma^{nH}}, \text{ avec } \gamma > 1 \text{ et } 0 < H < 1, \quad (1.32)$$

où  $A$  est un facteur d'échelle et  $\gamma^n$  la fréquence des modes cosinus. Le paramètre  $n_1$  correspond à une basse fréquence de coupure. La fonction de Weierstrass a la particularité d'être continue partout mais dérivable à aucun endroit (cf. figure 1.15) et d'avoir un comportement fractal.

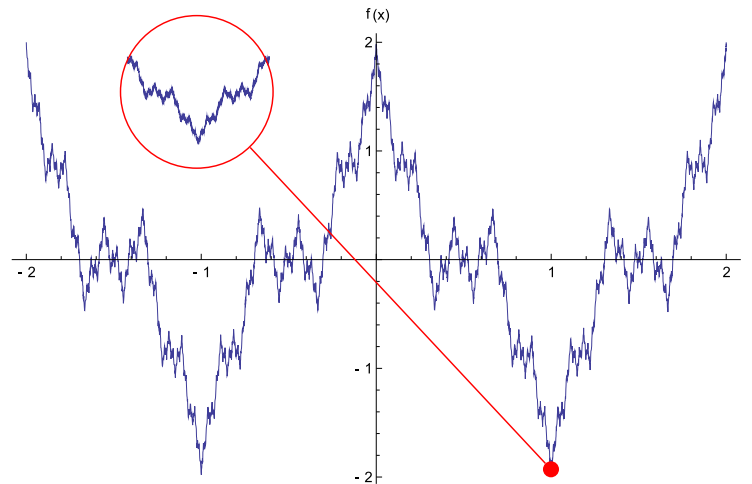


Figure 1.15 – Exemple de fonction de Weierstrass. N'importe quel zoom (cercle rouge) est similaire à la représentation globale

Majumdar et Tien [MAJUMDAR et TIEN, 90] généralisent cette fonction pour les surfaces 3D avec la formulation suivante :

$$Z(x, y) = A \sum_{n=n_1}^{n_{max}} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x + \phi_n) \cos(2\pi\gamma^n y + \psi_n)}{\gamma^{nH}}. \quad (1.33)$$

Zahouani et *al.* montrent l'influence de la résolution des instruments de mesure de rugosité sur l'estimation des paramètres de rugosité [ZAHOUANI *et al.*, 98a]. La mesure topographique des surfaces ne délivre malheureusement qu'une connaissance hypothétique de la surface réelle, donc des propriétés de rugosités. Il s'avère alors difficile de prédire la qualité de mise en contact des surfaces (surface de portance, volume d'usure, force de frottements, *etc.*). De ce fait, Zahouani et *al.* proposent de modéliser la topographie des surfaces par une géométrie fractale et établissent une relation entre le paramètre de dimension fractale de la surface et l'aire de contact.

Toujours dans le domaine de la tribologie, Vallet et *al.* travaillent sur l'analyse de la diffusion et de la viscosité d'un fluide à travers le champ d'ouverture du contact entre deux surfaces brutes pressées l'une contre l'autre [VALLET *et al.*, 08b]. Ces travaux mettent en évidence la robustesse de la modélisation des surfaces en contact par une géométrie fractale. En effet, l'évolution des coefficients de transmissivité et de diffusion en fonction de la pression de serrage des surfaces réelles et des surfaces synthétisées (fractales) est équivalente.

Une équipe américaine montre la perspicacité d'utiliser les fractales comme base géométrique pour synthétiser les défauts des éléments géométriques faisant référence aux tolérances de forme normalisées (rectitude, circularité, planéité, *etc.*). Leurs travaux [SRINIVASAN et WOOD, 97], montrent aussi la faisabilité d'exprimer un besoin fonctionnel via les paramètres des fractales. Une étude sur la spécification d'une rectitude d'une surface d'appui met en évidence l'impact de la dimension fractale sur les paramètres de performance étudiés [SRINIVASAN et WOOD, 92].

### 1.2.3.2 Paramétrage global

(a) *Surfaces de niveaux.* L'idée de la méthode des surfaces de niveaux est de décrire une surface par une famille d'hypersurfaces  $\mathcal{S}(\mathbf{p}, t)$  dans  $\mathbb{R}^3$ , où  $\mathbf{p}$  paramètre la surface et  $t$  le temps, qui évolue suivant l'Équation aux Dérivées Partielles (EDP) suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \beta \mathcal{N} \quad (1.34)$$

avec pour conditions initiales  $\mathcal{S}(t = 0) = \mathcal{S}_0$ , où  $\mathcal{N}$  est le vecteur normal unitaire pointant vers l'intérieur de  $\mathcal{S}$ ,  $\beta$  une fonction de vitesse et  $\mathcal{S}_0$  une surface initiale fermée.

Pour résoudre l'EDP, Osher et Sethian [OSHER et SETHIAN, 88] ont introduit la méthode dite des surfaces de niveaux. Une des clefs de cette méthode réside dans l'introduction d'une fonction implicite  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$u(\mathcal{S}, t) = 0 \quad \forall t \quad (1.35)$$

Après dérivation par rapport à  $t$  et si  $\mathcal{N}$  est tel que  $\mathcal{N} = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ , on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta |\nabla u| \quad (1.36)$$

La résolution de l'équation 1.36 décrit alors la représentation implicite d'une surface en mouvement tout en gérant les changements de topologie de la surface en évolution (cf. figure 1.16).

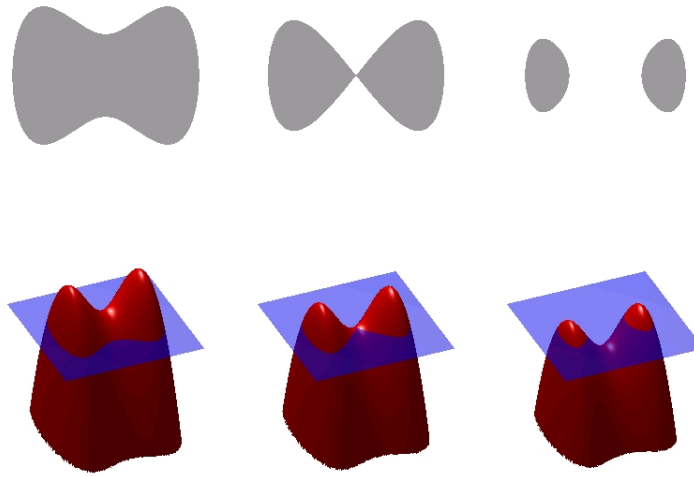


Figure 1.16 – Illustration de la méthode des surfaces de niveaux

Les travaux de Malladi et Sethian [MALLADI et SETHIAN, 99] ont permis d'appliquer cette méthode au domaine de l'imagerie médicale. On retrouve une fois de plus l'équipe américaine qui, dans des travaux menés par Zhao [ZHAO *et al.*, 00], [ZHAO *et al.*, 01], reconstruisent des objets complexes 3D à partir d'un nuage de points.

(b) *Modèle basé sur des surfaces superquadriques.* Les surfaces superquadriques ont déjà été présentées dans le paragraphe 1.2.3.1 comme un paramétrage local. Mais si l'on ne considère pas les déformations locales appliquées par le modèle de [TERZOPOULOS et METAXAS, 91], les paramètres intrinsèques, cinématiques et dynamiques définissent un paramétrage global.

(c) *Enveloppe convexe.* Les problématiques dans lesquelles nous trouvons les enveloppes convexes sont principalement dans le traitement d'images, la reconnaissance de formes. L'enveloppe convexe peut être comparée à la région limitée par un élastique, englobant tous les points contenus dans un plan, qu'on relâche et qui se met en contact avec le maximum de points (cf. figure 1.17).

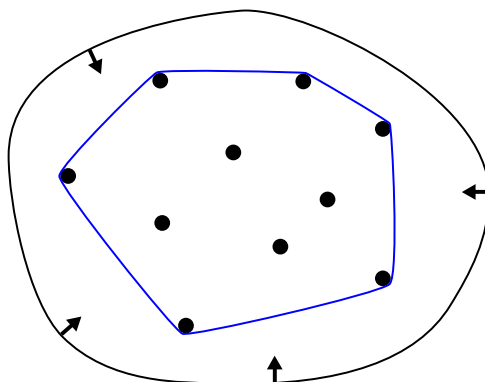


Figure 1.17 – L'enveloppe convexe est la région délimitée par la courbe bleue

En traitement d'images, des algorithmes basés sur les enveloppes convexes sont appliqués pour extraire des formes convexes ou non. Dans [SONKA *et al.*, 93], les auteurs présentent un algorithme permettant de détecter les concavités d'un convexe (cf. figure 1.18(a)) par un autre convexe et par itération ils construisent un arbre des concavités (cf. figure 1.18(b)), qui définit finalement la forme souhaitée.

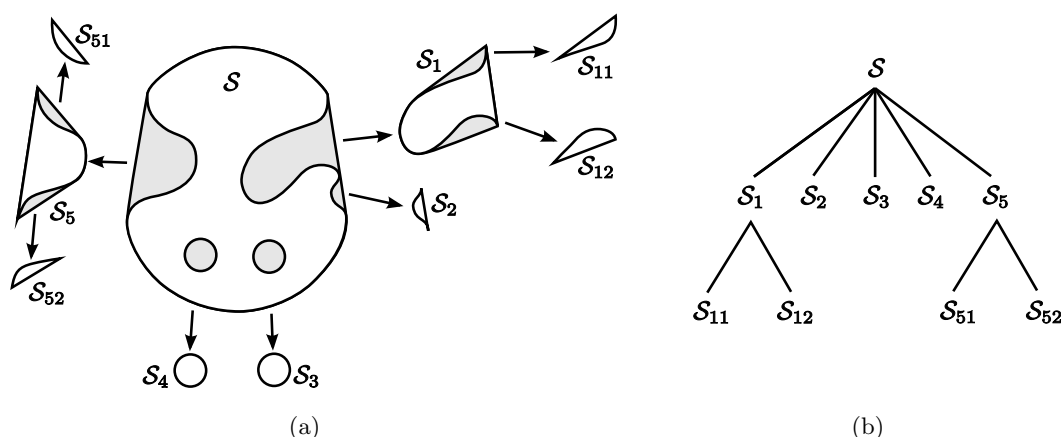


Figure 1.18 – (a) Enveloppe convexe et ses concavités, (b) Représentation de l'arbre des concavités du convexe.

Plusieurs auteurs [LEE *et al.*, 97], [ZHU et DING, 02] et [HUANG, 03] proposent d'utiliser les enveloppes convexes pour évaluer les tolérances de rectitude et de planéité. En générant une enveloppe convexe autour d'un ensemble de points de mesure, ils cherchent la zone minimale qui encadre le convexe.

(d) *Construction de formes technologiques.* L'idée de ce paramétrage est de reconstruire la forme d'un élément géométrique avec une famille de formes technologiques, ayant un sens physique. Ces formes peuvent être générées par des fonctions polynomiales, trigonométriques ou bien par les définitions des bases descriptives que l'on a vu au paragraphe 1.2.2.2.

Gousskov et Tichkiewitch construisent une famille de neuf formes qui sont des caractéristiques particulières des défauts du procédé de fabrication [GOUSSKOV et TICHKIEWITCH, 98]. Ces formes particulières, qu'ils appellent défauts, sont générées sur un élément géométrique cylindrique et sont respectivement nommées : excentricité, conicité, tonneau-diabolo, ellipticité, ondulations orthoradiales, ondulations en spirale, ondulations axiales, forme de l'axe du cylindre et parallélisme. Ils mettent en évidence qu'il est possible d'établir une relation entre les défauts géométriques de la

surface et les défauts spécifiques du procédé de fabrication.

Toujours dans cette démarche de relier les paramètres du procédé avec les défauts géométriques sur les pièces, Zhang *et al.* énumèrent un ensemble de défauts géométriques qu'un procédé de fabrication par tournage est susceptible de créer sur les pièces cylindriques usinées [ZHANG *et al.*, 05]. Ils les classent selon trois catégories indépendantes :

- Les défauts de forme par section peuvent être créés par
  - des défauts de rotation de la broche du tour
  - et/ou les efforts de serrage de la pièce dans les mors.
- Les défauts axiaux créés par
  - le défaut d'alignement entre l'axe de la broche et celui de la pièce,
  - la flexion la pièce
  - et/ou la dilatation thermique de la pièce.
- Les défauts de diamètre des sections principalement engendrés par
  - la qualité du montage de la pièce
  - et l'usure de l'outil.

Ils modélisent la représentation de ces défauts par des polynômes de Legendre (sur la génératrice du cylindre) et des séries de Fourier (sur la section du cylindre). En effet, les travaux de Zhang *et al.* font émerger une autre famille de polynômes, que nous n'avons pas décrit dans les paragraphes précédents. Très succinctement ces polynômes peuvent s'exprimer par la formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.37)$$

et les premiers polynômes s'écrivent et se représentent :

Polynômes
$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Tableau 1.8 – Premiers polynômes de Legendre

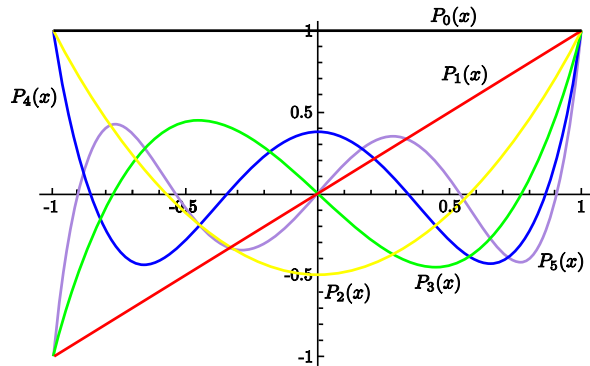


Figure 1.19 – Représentation des premiers polynômes de Legendre

Zhang *et al.* vont même jusqu'à définir des nouveaux paramètres de tolérance pour caractériser des défauts de forme sur un cylindre, par exemple un cylindre concave (forme diabololo). Ces paramètres s'appuient sur les coefficients pondérateurs des polynômes de Legendre-Fourier.

Dans un dernier exemple, les travaux récents de Nicolas *et al.* proposent d'étudier les déformations géométriques des pièces ayant subi un traitement thermique [NICOLAS *et al.*, 07]. À partir d'une pièce référence, ils construisent un modèle géométrique variationnel : deux translations et une variable d'ouverture définie par une fonction cosinus. Ils recalent ensuite leur modèle variationnel avec des mesures de pièces traitées.

## 1.3 Conclusion

Nous venons d'énumérer un certain nombre de paramétrages qui permettent de caractériser la forme des éléments géométriques. Le lecteur aura remarqué que cette liste non-exhaustive s'attache à des méthodes de paramétrage géométrique. En effet, ce fut une volonté de notre part d'explicitier les paramétrages voisins de celui que nous avons développé et que nous exposons dans le chapitre 2. De plus, nous pouvons constater que ces paramétrages ne s'inscrivent pas tous dans des applications liées à la spécification géométrique des produits. Il est clair que certains paramétrages sont plus naturellement employés que d'autres dans ce champ d'application. Néanmoins, le paramétrage le plus simple et le plus utilisé dans ce domaine reste celui de la mesure brute de l'élément géométrique.



## La métrologie modale des surfaces MemoSurf®

### *Objectif du chapitre*

*Après avoir effectué un état de l'art d'un certain nombre de paramétrages, nous proposons dans ce chapitre d'introduire un paramétrage autour duquel nous avons développé une démarche permettant de caractériser les défauts géométriques des surfaces. Appliquée dans un premier temps, au domaine de la métrologie, cette caractérisation géométrique se montre également pertinente dans l'expertise d'un lot de surfaces mesurées. Ainsi l'étude porte non seulement sur l'identification des défauts géométriques des surfaces mais aussi sur la signature du procédé de fabrication et/ou du moyen de mesure.*

## 2.1 Introduction

Dans le domaine de la spécification géométrique des produits, nous avons vu qu'il était nécessaire d'élaborer de nouveaux paramétrages pour caractériser le défaut de forme des produits. En effet le concept de zone de tolérance, introduit dans les normes notamment [NF-ISO-1101, 06], ne suffit pas pour spécifier la forme géométrique des produits. Quelques concepts comme les spécifications restrictives ou les zones de tolérances variables (cf. annexe A) ont permis d'enrichir ce concept de zone.

Pour répondre à ce manque, nous avons vu qu'il existe une multitude de paramétrages pour caractériser la forme géométrique des pièces (cf. chapitre 1). Nous proposons dans ce chapitre, un paramétrage basé sur la Décomposition Modale Discrète (DMD). Initié par des travaux de recherche sur la corrélation entre la vibration sonore d'une cloche et ses défauts géométriques [SAMPER *et al.*, 03], ce paramétrage a une approche similaire aux travaux de [PENTLAND, 90] et [NASTAR et AYACHE, 93] dans l'imagerie.

Plusieurs raisons nous ont poussés à développer, dans un premier temps, ce paramétrage en métrologie. En effet, les moyens de mesures actuels permettent avec une facilité croissante et des coûts décroissants d'obtenir une mesure d'un produit par un grand nombre de points. Le traitement de ces données permet à de nouveaux paramétrages d'exprimer les défauts mesurés et avec une



plus grande précision. Nous intitulons ce paramétrage modal appliqué en métrologie, la **M**étrologie **m**odale des **S**urfaces MemoSurf<sup>®</sup>.

## 2.2 Principe de la Décomposition Modale Discrète (DMD)

La Décomposition Modale Discrète s'inscrit dans la famille des paramétrages descriptifs et l'espace des descripteurs est défini *a priori* (cf. §1.2.2.2). Autrement dit, la DMD va décomposer un élément géométrique, connu de manière discrète (mesuré ou simulé), dans une famille de descripteurs qui dérivent du domaine de la mécanique vibratoire, d'où le terme « modale ». Dans la suite, nous décrivons la théorie de la DMD en faisant référence à son application sur les éléments géométriques, bien évidemment ce choix est lié à la formalisation que l'on développe dans le §2.3.

### 2.2.1 Éléments de dynamique des systèmes discrets

L'espace des descripteurs est issu d'une analyse modale réalisée à partir du modèle mécanique représentant l'élément géométrique nominal. Les descripteurs ne sont autres que les déformées modales ou modes propres résultants de l'analyse.

La première opération est la discrétisation de l'élément géométrique nominal. Nous transformons ensuite cet élément discrétisé en une structure mécanique discrète. La structure mécanique est alors caractérisée par une matrice de raideur  $K$  et une matrice de masse  $M$  [GÉRADIN et RIXEN, 96]. La détermination des modes propres, que nous qualifions de naturels, s'effectue en résolvant, pour un système conservatif discret, l'équation matricielle dynamique :

$$M \cdot \ddot{q} + K \cdot q = 0 \quad (2.1)$$

Pour un système à  $n$  degrés de liberté, les matrices  $K$  et  $M$  ont pour dimension  $(n \times n)$  et le vecteur de déplacement dynamique  $q$  ( $n \times 1$ ). Les solutions (modes propres) de l'équation 2.1 sont de la forme :

$$q_i = Q_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \quad (2.2)$$

où  $Q_i$  est le vecteur amplitudes associé à la pulsation  $\omega_i$ . Le calcul des modes naturels, définis par  $(\omega_i, Q_i)$ , se fait en résolvant le système linéaire suivant :

$$(K - \omega_i^2 \cdot M) \cdot Q_i = 0 \quad (2.3)$$

Le système linéaire défini par (2.3) admet alors  $n$  solutions propres, les modes propres naturels. Les pulsations propres associées sont obtenues en calculant les racines de l'équation caractéristique suivante :

$$\det(K - \omega_i^2 \cdot M) = 0 \quad (2.4)$$

Les modes sont alors triés selon les  $\omega_i$  croissants de telle sorte que l'on obtienne les déformées modales les plus « simples » en premier.

*Remarque.* Il est à noter que la résolution d'un système dynamique dans le domaine continu permet d'obtenir les solutions en déplacements en tout point du modèle mécanique de l'élément géométrique. Néanmoins, les équations n'ont de solutions exploitables que dans des cas où le modèle s'appuie sur des éléments géométriques simples. Les lignes et les plans pourront, par exemple, facilement se modéliser par des poutres et des plaques dont la théorie est bien connue [LEISSA, 69].

## 2.2.2 L'espace des descripteurs

### 2.2.2.1 Les modes naturels

Afin d'exploiter les propriétés géométriques des modes naturels, calculés pour un élément géométrique nominal, nous avons choisi d'utiliser une méthode numérique, celle des éléments finis [ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 02]. Tout problème mécanique résolu par une modélisation éléments finis nécessite de définir :

- le type d'élément,
- les propriétés mécaniques du matériau,
- les conditions aux limites.

Lorsque l'on effectue une analyse vibratoire, ce sont ces trois données qui vont influencer sur le résultat des modes naturels, aussi bien au niveau de leur fréquence que de leur déformée ( $Q_i$ ). Nous verrons par la suite que notre intérêt par rapport aux valeurs des fréquences est limité, seul le tri qu'elles effectuent sur les modes sera intéressant. Par contre, les propriétés géométriques des déformées modales nous intéressent tout particulièrement puisqu'elles sont à l'origine de la construction de notre espace de descripteurs. Dans le cas des modèles éléments finis, les déformées modales sont définies par des champs de déplacement des points du maillage, que l'on appelle nœuds, complétées par des fonctions d'interpolations associées au type d'élément utilisé. Les déformées sont donc des fonctions discrètes (les déplacements nodaux) complétées par des fonctions continues (les fonctions d'interpolation).

*Remarque.* Les déplacements nodaux des poutres et des coques contiennent six degrés de liberté par nœud, trois translations et trois rotations. Nous n'utiliserons par la suite qu'une translation (paramètre mesurable).

**Hypothèse 1.** Les éléments géométriques mesurés ou simulés que l'on cherche à caractériser ont dans tous les cas leurs nominaux définis par des courbes, des surfaces, groupe de courbes ou de surfaces. Le modèle éléments finis sera alors construit à partir d'éléments poutres pour les courbes et par des éléments coques pour les surfaces.

Le comportement mécanique des éléments poutres et coques est défini, respectivement, par la théorie des poutres et coques minces. Ces théories s'appliquent à des géométries élancées. On considérera alors des poutres dont la largeur et la hauteur sont négligeables devant la longueur. De la même façon pour les coques, l'épaisseur sera négligeable devant la largeur et la longueur. A travers ces deux théories, sachant que la théorie des coques dérive de celle des poutres, on distingue deux types de comportements mécaniques,

- un comportement de type « flexion », où les contraintes mécaniques varient dans la hauteur et/ou largeur de l'élément poutre (cf. figure 2.1(a)), respectivement pour l'élément coque, et
- un comportement de type « membrane », où les contraintes mécaniques sont constantes dans la hauteur et/ou largeur de l'élément poutre (cf. figure 2.1(b) et (c)), respectivement pour l'élément coque.

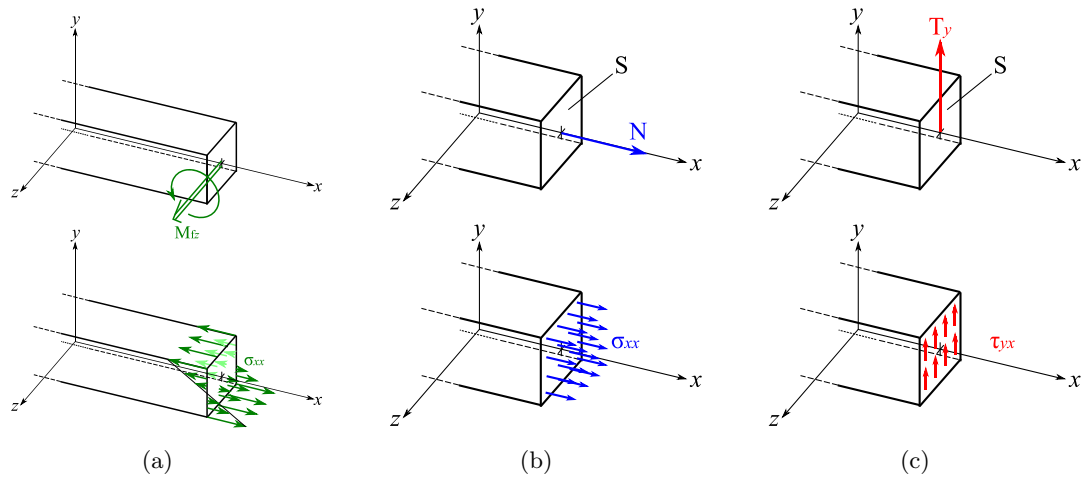


Figure 2.1 – Comportement de type flexion – (a) Poutre soumise à un moment fléchissant, Comportement de type membrane – (b) Poutre soumise à un effort de traction et (c) Poutre soumise à un effort tranchant

Les déplacements nodaux, qui composent les déformées modales, résultent de la combinaison de ces deux comportements. On parlera de modes de flexion et de modes membranaires mais certains modes combinent les deux.

Si l'on revient sur les propriétés géométriques des modes, on peut supposer que les modes formés uniquement par les déplacements nodaux, qui s'effectuent dans le plan tangent des éléments coques ou selon l'axe de l'élément poutre, n'ont pas d'intérêt géométrique pour décrire la forme des éléments géométriques (cf. figure 2.2). De plus, ce type de variation géométrique n'est pas estimable par les moyens de mesure géométriques. C'est pourquoi nous formulons une deuxième hypothèse concernant les conditions aux limites.

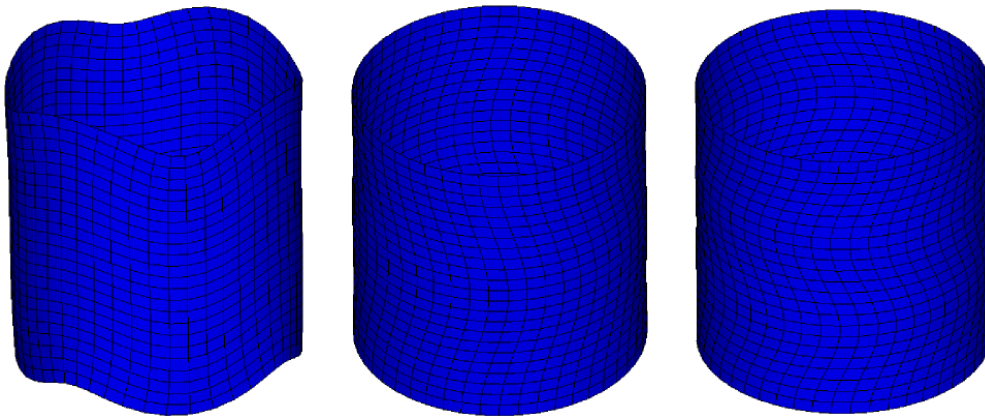


Figure 2.2 – Exemples de déformées modales avec des déplacements nodaux uniquement dans le plan des éléments coques

**Hypothèse 2.** Pour éviter le déplacement des nœuds dans le plan tangent des éléments coques ou selon l'axe de l'élément poutre, nous bloquons les degrés de liberté concernés (les rotations sont libres). Pour les éléments coques, nous fixons les mouvements des nœuds à zéro dans le plan orienté par la normale locale à la surface de l'élément géométrique nominale au nœud impliqué (cf. figure 2.3(a)). De la même façon, pour les éléments poutres, les déplacements longitudinaux selon l'axe de ces éléments sont bloqués (cf. figure 2.3(b)).

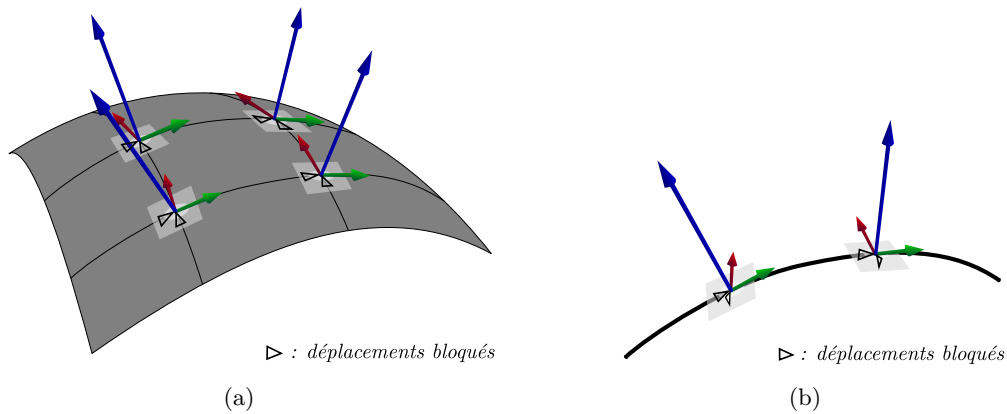


Figure 2.3 – Illustrations des conditions aux limites appliquées aux éléments coques et poutres

Nous venons d'énoncer deux hypothèses dans lesquelles nous avons défini le type d'élément et les conditions aux limites que l'on sélectionne pour construire le modèle mécanique, il reste à préciser les propriétés du matériau.

**Hypothèse 3.** Pour calculer les modes, nous modélisons notre structure mécanique avec un matériau homogène et isotrope avec une loi de comportement élastique linéaire<sup>1</sup>, définie par un module de Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$  ( $0 < \nu < 0.5$ ).

Cette troisième hypothèse, arbitrairement choisie, permet de se placer dans des conditions favorables à l'utilisation des théories des poutres et des coques minces. Nous verrons dans la suite que l'on peut mettre en place une modélisation plus subtile pour générer des déformées modales adaptées à un besoin particulier.

Finalement, la prise en compte de ces trois hypothèses pour le modèle éléments finis de l'élément géométrique nominal permet de créer un ensemble de modes de vibration, qualifiés de « naturels », triés selon leur fréquence. Le nombre de modes maximum, que l'on puisse calculer, est égal au nombre de degré de liberté du modèle éléments finis. La tableau 2.1 illustre le résultat d'un calcul réalisé sur une structure mécanique d'un cylindre, on représente ici les premiers modes naturels.

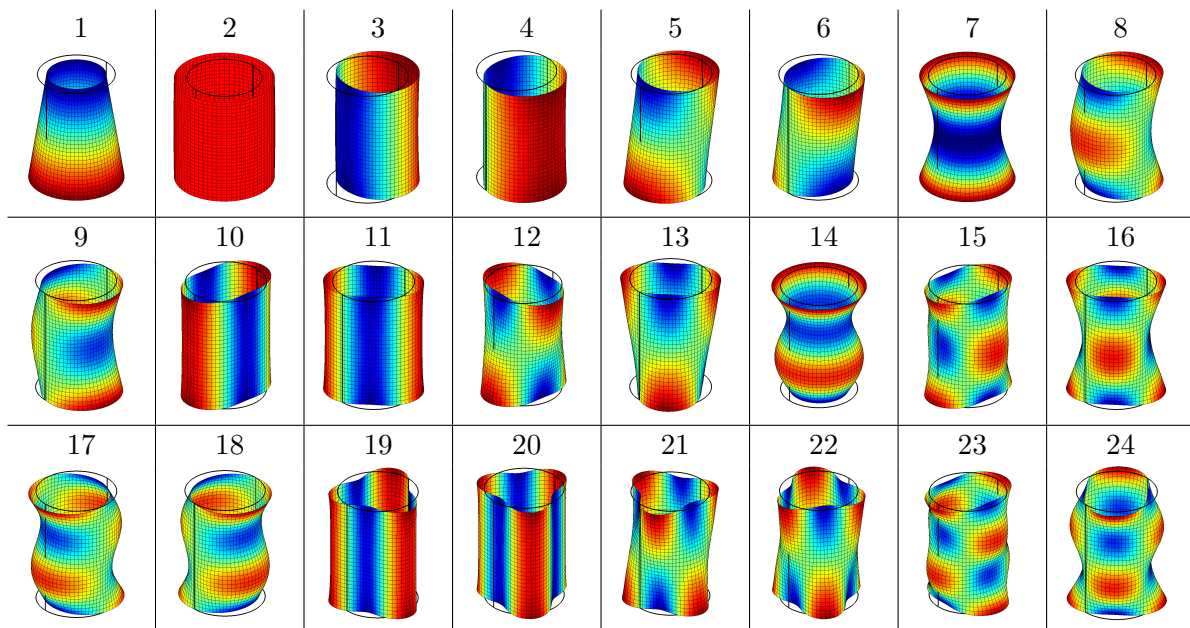


Tableau 2.1 – Les premiers modes naturels d'un cylindre

1. nous avons arbitrairement choisi d'utiliser un acier avec  $E = 200$  GPa et  $\nu = 0.3$

Sur le tableau 2.1, nous remarquons la complexité croissante des déformées modales qui évolue avec l'accroissement de la fréquence. On discerne également sur cet exemple deux types de modes, que l'on différencie par leurs propriétés géométriques :

- les modes à symétrie de révolution (1, 2, 7, 14) et
- les autres sont par paires avec un déphasage angulaire (3–4, 5–6, *etc.*).

Cette particularité est liée à la classe d'invariance à laquelle appartient l'élément géométrique nominal. Les classes d'invariances sont issues de la théorie des surfaces associées technologiquement et topologiquement (SATT), introduite par Clément [CLÉMENT *et al.*, 91]. L'invariance topologique par la rotation autour de l'axe du cylindre nécessite alors la génération d'une paire de modes déphasés d'un angle pour définir l'amplitude et le positionnement angulaire du mode.

En suivant les trois pré-requis, suggérés par les trois hypothèses, nous venons de décrire la méthode permettant de générer de façon automatique notre espace de descripteurs associé à son élément géométrique nominal. De plus, nous avons vu que cet espace pouvait être créé à partir de tous les types d'éléments géométriques puisque la modélisation éléments finis permet, avec seulement deux types d'éléments (cf. hypothèse 1), de balayer l'ensemble des cas possibles.

### 2.2.2.2 Les modes technologiques

Nous venons de voir que les modes naturels définissent un espace de description exhaustif, puisque n'importe quelle mesure d'élément géométrique nominal peut être complètement décrite dans l'espace qui lui est associé. En effet, le nombre de modes calculés est égal au nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis. Néanmoins, cette exhaustivité peut s'avérer moins performante lorsque des formes particulières que l'on cherche à identifier n'interviennent pas explicitement dans l'espace modal. L'idée est alors d'enrichir l'espace naturel avec ces formes particulières, que l'on appelle modes technologiques.

L'intérêt d'introduire ces modes résulte de la manière dont ces nouveaux modes ont été construits. Nous exposons deux façons de procéder pour générer ces modes en fonction de la description recherchée. Tout d'abord, nous pouvons intervenir sur la modélisation éléments finis et définir un modèle expert pour caractériser un comportement particulier. Si l'on cherche, par exemple, à modéliser un comportement anisotrope du matériau, il est facile d'adapter le modèle mécanique pour obtenir un tel comportement. La figure 2.4 montre un type de modélisation, à base d'éléments poutres, qui privilégie la souplesse de la structure mécanique dans une direction (un modèle avec des éléments coques orthotropes aurait eu le même comportement).

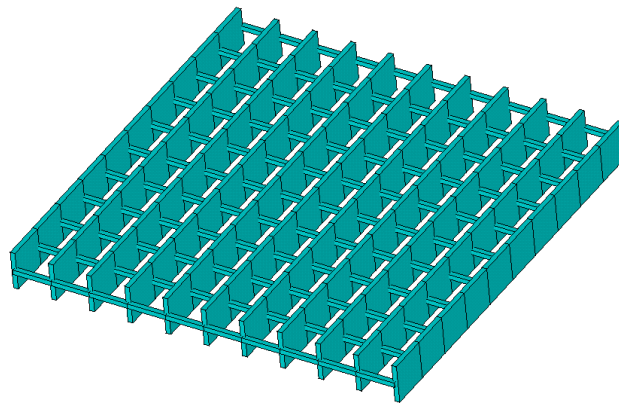


Figure 2.4 – Exemple de modèle d'une structure anisotrope

Les premiers modes (figure 2.5) de ce modèle éléments finis privilégient naturellement les plus

grandes souplesses. On peut observer que le septième mode possède entre une et deux périodicités dans la direction souple du modèle alors qu'il faut attendre le dix-huitième mode pour avoir la première ondulation dans la direction la plus raide.

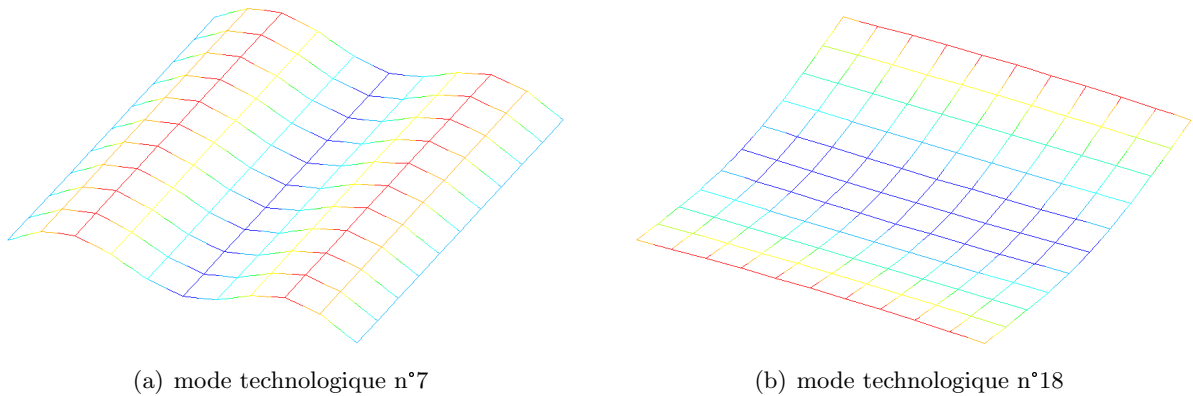


Figure 2.5 – Modes d'une structure anisotrope

Un intérêt de cette modélisation est l'étude d'une surface plane usinée où les ondulations d'usinage auront une longueur d'onde différente en fonction de leur direction.

La deuxième façon de créer des modes technologiques est de les générer manuellement avec des outils mathématiques, comme des fonctions ou combinaisons de fonctions polynomiales ou encore des fonctions paramétriques et bien d'autres (cf. §1.2.2.2 à la page 16). La création de ces modes est généralement liée à des caractéristiques particulières d'un procédé de fabrication : telles que les « stries » d'usinage, la flexion de la pièce due à un effort de l'outil trop important, *etc.* L'idée des modes technologiques est de modéliser géométriquement la forme ou la déformation induite par le procédé de fabrication. Un certain nombre d'exemples a fait l'objet de la section sur la construction des formes technologiques au §1.2.3.2 à la page 33.

Nous avons notamment cité les travaux de Gousov et Tichkiewitch qui construisent une famille de formes technologiques reflétant les défauts potentiels d'un procédé d'usinage par tournage de pièces cylindriques [GOUSOV et TICHKIEWITCH, 98]. Sur le même type de procédé de fabrication, Zhang *et al.* proposent une modélisation avec des séries de Fourier et des polynômes de Legendre d'un ensemble de formes technologiques. On représente sur la figure suivante, les principales formes obtenues par [ZHANG *et al.*, 05] :

Conique	Concave	Convexe	Banane
$A_{00} + A_{01}z$	$A_{00} + A_{02} (3z^2 - 1) / 2$	$A_{00} - A_{02} (3z^2 - 1) / 2$	$A_{00} + A_{12} ((3z^2 - 1) / 2) \cos \theta$

Tableau 2.2 – Représentation et équation polynomiale de quatre formes technologiques typiques définies par [ZHANG *et al.*, 05]

où les constantes  $A_{ij}$  contrôlent l'amplitude de chaque forme.

Les travaux, que nous venons de citer, s'inscrivent parfaitement dans la caractérisation de la forme des éléments géométriques, liée au procédé d'obtention. Toujours dans le domaine de l'usinage par enlèvement de matière, on trouve de multiples travaux complémentaires à ceux-ci, qui, par la modélisation du procédé d'usinage, prédisent la forme des surfaces usinées. Cette modélisation peut s'établir, premièrement, de façon géométrique en paramétrant le passage de l'outil en fonction de sa forme [TOURNIER et DUC, 02] ou deuxièmement par une modélisation du couple outil-matière [LANDON *et al.*, 04]. En plus de la forme, ces types de paramétrages prennent en compte les défauts d'ondulation voire la rugosité à l'échelle de la pièce. Néanmoins, ces modélisations restent spécifiques aux conditions de coupes et dédiées à un procédé de fabrication.

Avec une démarche inverse, en partant de la mesure d'élément géométrique, une équipe de recherche de l'IRCCyN<sup>2</sup> caractérise la forme de surfaces planes fraisées à l'aide de la méthode DCT (Transformée en Cosinus discrète) et identifient des formes technologiques, qu'ils corrélient à l'usinage, pour enrichir leur base DCT.

Ces formes définissent pour nous des nouveaux modes, que l'on qualifie de « technologiques ». L'exploitation de ces modes technologiques peut s'effectuer en construisant un espace de descripteurs technologiques, qui regroupe toutes les modes technologiques identifiés. Une alternative est d'introduire ces modes technologiques dans l'espace des modes naturels. Pour ce faire, il s'agit de soustraire leur contribution dans l'espace de modes naturels en rendant l'ensemble des modes indépendants, opération présentée dans [ADRAGNA *et al.*, 06]. Une dernière alternative quant à l'utilisation de ces modes technologiques est de les employer comme un filtre et décrire ensuite le résidu dans l'espace naturel.

### 2.2.3 La projection vectorielle modale

L'espace des descripteurs étant défini, par les modes naturels et/ou technologiques, l'opération à suivre consiste à décomposer la mesure ou simulation de mesure d'un élément géométrique dans cet espace.

Mathématiquement, la famille des vecteurs modaux  $Q_i$  forme une base vectorielle  $Q$ , appelée couramment base modale. Le vecteur mesure  $^{mes}V$ , issu de la mesure de l'élément géométrique, peut être exprimé de manière unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de cette base. Autrement dit,

$$^{mes}V = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i \quad (2.5)$$

où  $n$  est le nombre de modes égal au nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis et les  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  sont les coordonnées du vecteur  $^{mes}V$  dans la base  $Q$ , que l'on appellera coordonnées modales.

L'ensemble des coordonnées modales  $\lambda_i$  définissent le vecteur modal  $\lambda$  ( $n \times 1$ ). Elles sont obtenues par l'opération de projection vectorielle, que l'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\lambda = Q^* \cdot ^{mes}V = (Q^T \cdot Q)^{-1} \cdot Q^T \cdot ^{mes}V \quad (2.6)$$

La base modale  $Q$  est une base non-orthogonale au sens euclidien, cela signifie que le produit scalaire  $Q \cdot ^{mes}V$ , défini dans un espace euclidien, ne donnera pas la bonne projection. C'est pourquoi, l'on construit la base duale  $Q^*$  tel que :

$$Q_i \cdot Q_j^* = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.7)$$

Ainsi, nous calculons les coordonnées modales de  ${}^{mes}V$  dans la base  $Q$ , comme l'illustre le cas 2D de la figure 2.6.

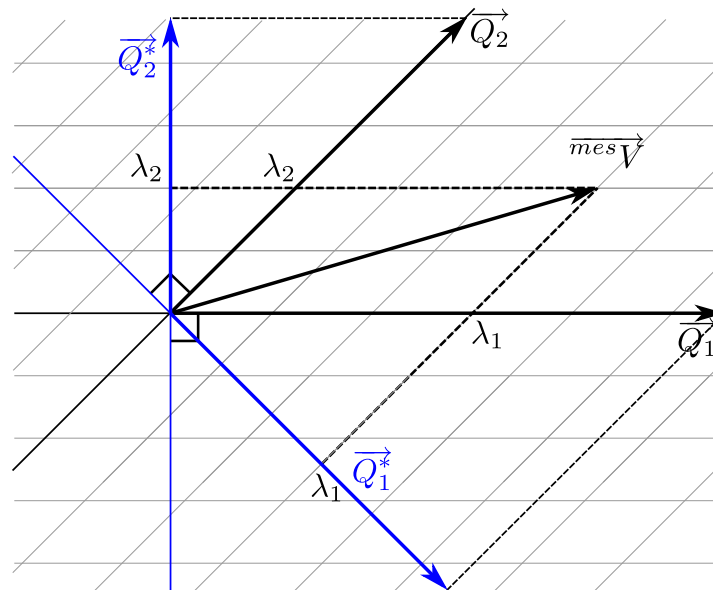


Figure 2.6 – Illustration de la projection vectorielle dans une base non-orthogonale

On démontre dans l'annexe B que le résultat de la projection vectorielle, définie par l'équation 2.6, est équivalent à rechercher l'ensemble des  $\lambda_i$  par un problème de minimisation, au sens des moindres carrés, des écarts géométriques entre le vecteur mesure  ${}^{mes}V$  et les déformées modales  $Q_i$ . En d'autres termes, les coordonnées modales  $\lambda_i$  caractérisent la contribution de chaque mode  $Q_i$ , qui permettent de recomposer le vecteur mesure  ${}^{mes}V$ .

Afin de donner du sens à cette contribution, nous avons choisi de normer les vecteurs modaux  $Q_i$  tel que :

$$\|Q_i\|_{\infty} = 1 \quad (2.8)$$

C'est-à-dire que le déplacement nodal maximal, en valeur absolue, du champ de déplacement de chaque mode est normé à 1. De ce fait, la valeur des coordonnées modales représentera l'amplitude « métrique » de chaque mode. On présente sur la figure 2.7, une illustration de l'incidence de la norme infinie sur le champ de déplacement d'un mode.

*Remarque.* L'amplitude des coordonnées modales que l'on qualifie de « métrique » signifie que si les coordonnées du vecteur mesure sont exprimées en millimètres alors les coordonnées modales seront également exprimées millimètres.

*Remarque.* En normant la base modale  $Q$  avec la norme infinie, nous imposons à chaque mode une représentation géométrique, qui restera inchangée si la coordonnée modale à laquelle il est associé reste de signe positif. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si la coordonnée modale est négative, sa représentation est inversée (le cône changera de direction et le « diabolo » deviendra « tonneau »).



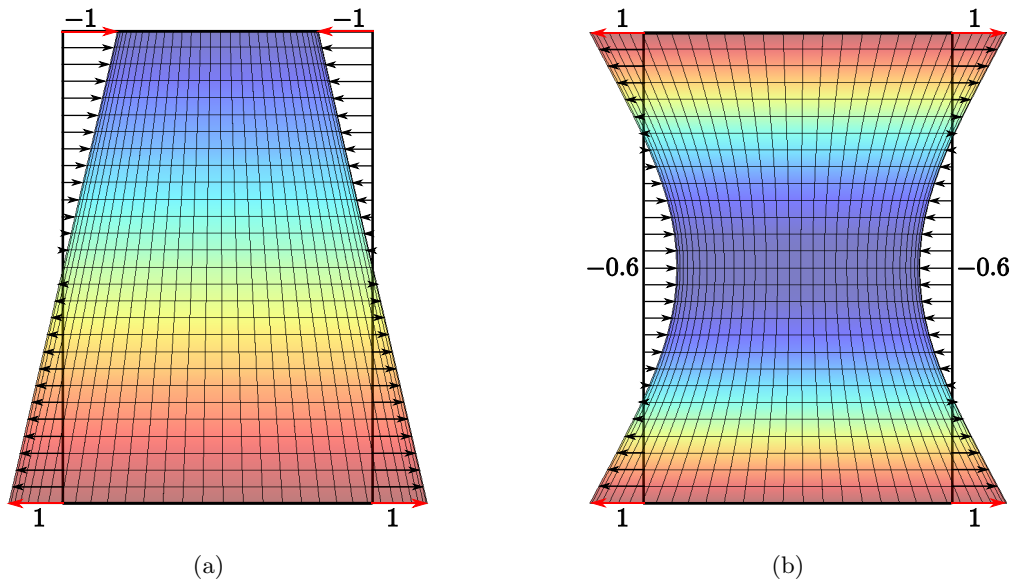


Figure 2.7 – Représentation géométrique du choix de la norme infinie, sur l'exemple du mode 1 et 7 du tableau 2.1 à la page 43

Le résultat de la projection vectorielle modale se présente sous la forme d'un vecteur  $\lambda$  que nous exprimons par un spectre. Ce spectre, que l'on qualifie de modal, représente alors la contribution (en amplitude) des composantes  $\lambda_i$  de la mesure d'un élément géométrique en fonction des composantes (vecteurs modaux). La section suivante montre des exemples de la représentation graphique de ces spectres.

## 2.3 Formalisation de la DMD en métrologie

Un des objectifs de ces travaux est de concevoir un outil d'aide à l'expertise géométrique des pièces mécaniques, liée à un procédé de fabrication (par l'étude d'un lot de pièces) ou à un procédé de mesure (par l'étude des erreurs de mesure). Pour ce faire, nous proposons de déployer la Décomposition Modale Discrète (DMD) dans le domaine de la métrologie, sous le nom de Métrologie Modale des Surfaces MemoSurf<sup>®</sup>. Avant de développer la formalisation de cette méthode en métrologie et en guise de préambule, nous exposons un bref état de l'art des solutions d'expertise existantes suivi de la définition des six ordres de défauts géométriques répertoriés dans la norme.

### 2.3.1 Les solutions d'expertise existantes

Dans des travaux menés sur le tolérancement des mécanismes flexibles avec prise en compte du défaut de forme, Perpoli propose une classification pertinente de ces solutions [PERPOLI, 04]. Il est à noter que les travaux de Perpoli font également partie des travaux initiateurs de la décomposition modale.

Ces solutions apparaissent dans les critères d'analyse des logiciels de traitement de mesure. Perpoli classe ces solutions selon trois catégories suivant qu'elles s'appliquent à des surfaces à étendue : réduite (topographie), moyenne ou grande. Les mesures sont alors réalisées par des moyens avec ou sans contact et les fichiers de données résultants sont analysés par différentes méthodes d'expertise. Nous détaillons maintenant brièvement ces méthodes en fonction de leur domaine d'application.

### • Méthodes d'expertise orientées topographie

Les moyens de mesure utilisés pour la topographie regroupent des moyens avec ou sans contact. On trouve des microscopes optiques ou mécaniques à balayage, des interféromètres, des capteurs de type inductifs, *etc.* Une fois la mesure effectuée, il s'agit d'extraire les données utiles en fonction de l'expertise que l'on souhaite réaliser (forme, ondulation ou rugosité), principalement par des opérations de redressement et de filtrage. En règle générale, les méthodes d'analyses associées à ces moyens de mesure sont de trois types :

- Analyse des paramètres de rugosité : on retrouve ici le calcul de l'ensemble des paramètres de rugosité traditionnels définis dans les normes comme le calcul de taux de surface portante, l'écart moyen arithmétique de la surface, *etc.*
- Analyse géométrique : elle concerne l'extraction de profil, la mesure de distances et d'angles, mais aussi le calcul de surfaces et de longueurs développées. Aussi, pour déterminer des volumes d'usure, de rétention ou d'endommagement, le calcul des caractéristiques des pics et des creux peut être effectué.
- Analyse de paramètres fréquentiels : il s'agit le plus souvent d'une transformée de Fourier appliquée à la mesure discrète pour analyser l'anisotropie des états de surfaces par exemple.

Les méthodes d'expertise topographique sont, pour la plupart, vouées à l'analyse de structure de la matière plus qu'à l'analyse de forme. Elles permettent de qualifier et de caractériser les états de surface, de déterminer les propriétés de frottement et d'autolubrification, d'analyser un endommagement, *etc.* Les échantillons mesurés ne peuvent excéder un carré de quelques centimètres.

### • Méthodes d'expertise orientées mesure de surfaces à étendue moyenne

Ce domaine d'application concerne la majorité des pièces mécaniques puisque l'on entend par surfaces moyennes, des surfaces dont les dimensions ne dépassent pas un cube de plusieurs dizaines de centimètres de côté. Les moyens de mesure utilisés sont, pour la plupart, des technologies à contact avec des palpeurs inductifs. Ces moyens permettent de vérifier l'ensemble des spécifications géométriques normalisées portées au plan, notamment les tolérances de forme qui nous intéressent particulièrement. Les méthodes d'analyse les plus poussées, proposées par les applications de mesure, définissent un nombre d'ondulation par tour en utilisant la transformée de Fourier pour caractériser des mesures de circularité voire de rectitude. On trouvera bien évidemment le développement de méthodes d'expertise dédiées à certaines pièces mécaniques, par exemple dans l'industrie du roulement, la qualité des chemins de roulement des bagues s'évalue en niveau d'ovalité et de triangulation pour des besoins fonctionnels. Nous constatons que dans ce champ d'application la caractérisation de la forme géométrique des pièces reste ouverte.

### • Méthodes d'expertise orientées surfaces à grande étendue

La conception de surfaces de plus en plus complexes, associée à la production en grande série, est à l'origine d'un besoin de mesure qualitatif et quantitatif de la forme de ces surfaces. Un certain nombre de moyens de mesure ayant des fréquences de mesure élevées (technologie laser, palpeur de scanning, *etc.*) ont été développés et les outils informatiques associés permettent d'exploiter les nuages de points acquis. La démarche de traitement des données est similaire quel que soit l'outil utilisé :

- création d'un maillage polygonal à partir du nuage de points,
- recalage de la surface polygonale par rapport à un système de référence,
- comparaison avec la Définition de Forme Numérisée (DFN) de la surface : les écarts entre la DFN et la surface mesurée sont représentés par des niveaux de couleurs,
- contrôle des spécifications géométriques normalisées directement sur la surface mesurée,

– possibilité d’extraire des sections, des contours pour vérifier des caractéristiques particulières. Ces outils de traitement permettent d’obtenir aisément une visualisation des écarts géométriques de la pièce par rapport à sa cible mais l’analyse reste assez basique.

### 2.3.2 Les six ordres de défauts

Le tolérancement géométrique est l’expression des variations admissibles de la géométrie réelle autour du nominal défini par le concepteur. Les documents normatifs découpent ces variations en six catégories [ISO-8785, 98].

#### (1) Taille

Ce type de défaut est généralement exprimé par les caractéristiques intrinsèques des éléments idéaux associés aux points mesurés selon un critère d’association.

#### (2) Position

Le défaut de position est, quant à lui, exprimé par les caractéristiques de situation (distance et angle) entre éléments idéaux, c’est-à-dire entre l’élément géométrique idéal associé à la mesure et l’élément géométrique nominal.

Les quatre catégories de défaut suivants sont séparées par une opération de filtrage et s’expriment par des caractéristiques de situation entre éléments idéaux et non idéaux, c’est-à-dire entre l’élément géométrique idéal associé à la mesure et la mesure.

#### (3) Forme

Les défauts de forme sont de grandes longueurs d’ondes.

#### (4) Ondulation

L’ondulation est extraite de la rugosité puisqu’elle permet de définir le filtre de coupure.

#### (5) Rugosité

La rugosité caractérise des défauts géométriques de très courtes longueurs d’ondes et les suppose périodiques.

#### (6) Micro rugosité

Sur ce dernier type de défaut, les « longueurs d’ondes » sont aussi très courtes mais n’ont aucune périodicité évidente.

Il est nécessaire de définir des modèles pour chaque catégorie de défauts afin de pouvoir écrire des spécifications géométriques claires et les vérifier. De plus, la notion de courtes ou grandes longueurs d’ondes est subjective et souvent liée au procédé de fabrication (usinage). La notion de périodicité est également relative au procédé (par exemple : l’avance par tour pour une surface tournée, le passage des dents de la fraise en fraisage, *etc.*). L’étape suivante est la définition d’un paramétrage. Les domaines de prédilections de nos travaux sont la forme et l’ondulation même si le paramétrage introduit par notre méthode permet, en théorie, de toutes les étudier.

### 2.3.3 Le contenu des dix étapes de MemoSurf®

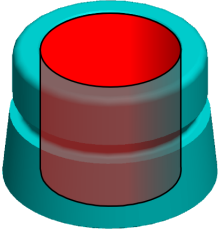
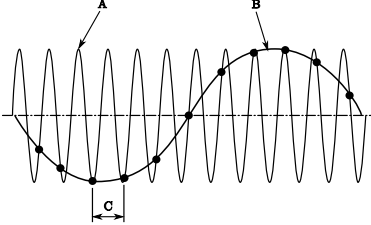
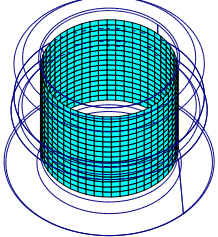
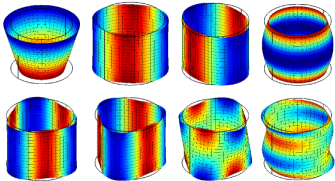
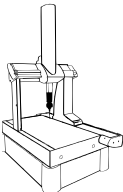
La métrologie modale des surfaces utilise donc la DMD pour décrire la mesure d’un élément géométrique dans l’espace des modes naturels, construit à partir de son nominal. L’objectif de cette formalisation est d’établir une démarche pratique robuste pour utiliser cette méthode. Cette démarche est découpée en dix étapes, associée au vocabulaire spécifique que nous avons introduit.

Tout d’abord, nous ne parlerons plus d’espace des modes naturels mais de famille de défauts élémentaires. D’une façon plus pragmatique, cette famille est établie à partir de la Définition de Forme Numérisée (DFN) de l’élément géométrique nominal. Les écarts géométriques, qui caractérisent les défauts et issus de la mesure, sont ensuite décomposés dans cet ensemble de défauts élémentaires. Il en résulte une représentation spectrale de la mesure, montrant ainsi la contribution

de chaque défaut élémentaire trié selon leur complexité géométrique croissante. Nous pouvons alors grâce à cette méthode,

- visualiser et identifier les défauts élémentaires prépondérants,
- aider le réglleur dans les éventuelles corrections machines à effectuer pour obtenir des pièces conformes (c'est-à-dire dans les tolérances),
- caractériser les défauts géométriques créés par le procédé de fabrication en étudiant un lot de pièces,
- caractériser les défauts engendrés par le moyen de mesure et d'en évaluer la correction,
- vérifier la conformité d'une mesure de forme (cf. Chapitre 4).

Nous synthétisons dans le tableau 2.3 les dix étapes de notre démarche d'expertise des défauts géométriques des pièces mécaniques que nous détaillons dans les sous sections suivantes.

Étapes		Description	Illustration
E1	Identification des surfaces fonctionnelles	Extraire les surfaces fonctionnelles à caractériser et identifier leur typologie dans la classification des éléments géométriques idéaux du tableau 2.4	
E2	Choix du niveau « modal »	Déterminer le nombre de points de mesure nécessaire pour décrire la complexité du défaut recherché : utilisation du critère de Nyquist	
E3	Création du maillage	Construire un réseau de points, uniformément répartis, sur la (ou les) surface(s) fonctionnelle(s) représentée(s) par l'élément géométrique nominal	
E4	Construction de la base modale naturelle	Construire la base modale naturelle à partir de l'élément géométrique nominal identifié	
E5	Choix du moyen de mesure	Choisir un moyen de mesure permettant d'acquérir un grand nombre de points	

*suite sur la prochaine page...*

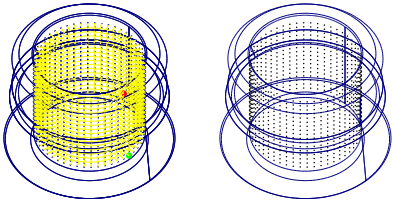
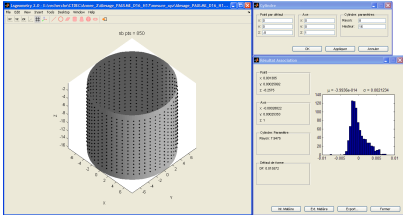
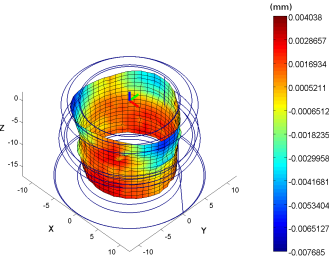
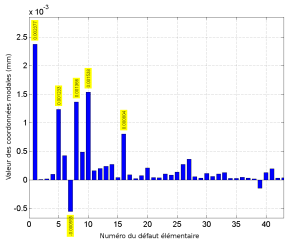
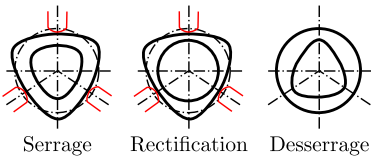
Étapes		Description	Illustration
E6	Acquisition et exportation	Exporter un fichier contenant les coordonnées XYZ des points mesurés	
E7	Association	Associer un élément géométrique idéal à l'élément géométrique mesuré (surface fonctionnelle mesurée) à partir de critères	
E8	Décomposition	Décomposer les écarts résiduels dans la base des modes naturels (DMD)	
E9	Visualisation des résultats	Exploiter et visualiser les résultats issus de la DMD	
E10	Interprétation	Analyser les modes prépondérants et rechercher les causes potentielles	

Tableau 2.3 – Les 10 étapes de MemoSurf<sup>®</sup>

*Remarque.* La métrologie modale des surfaces a fait l'objet du développement d'une maquette numérique dans l'environnement MATLAB<sup>®</sup>. En effet, cette maquette est dédiée aux mesures issues des MMT et permet à tout métrologue de traiter ces mesures par la DMD. Nous présentons schématiquement en annexe C la maquette numérique exploitant cette démarche.

### 2.3.3.1 Étape 1 : Identification des surfaces fonctionnelles

Cette première étape consiste à extraire la (ou les) surface(s) fonctionnelle(s) à mesurer de la DFN et identifier sa (ou leur) typologie à l'aide d'une classification, que nous proposons, basée sur les tolérances de forme (tableau 2.4). Dans un souci de création de familles de défauts élémentaires génériques, nous avons choisi de décliner les éléments géométriques idéaux, spécifiés par les tolérances de forme, en trois catégories :

- les éléments idéaux avec une géométrie dite « référence »,
- les éléments idéaux avec une géométrie dite « étendue », sont des éléments dont les dimensions géométriques sont disproportionnées ; par exemple on estime qu'un cylindre est court lorsque son rapport diamètre sur hauteur est supérieur à  $\frac{3}{2}$ ,
- les éléments idéaux dont la géométrie est particulière sont principalement les profils de ligne et les surfaces gauches.

*Remarque.* Dans le cas des géométries particulières, il est nécessaire de créer une famille de défauts élémentaires spécifiques. Pour l'étude d'un lot de pièces, cette opération n'est effectuée qu'une seule fois.

Tolérances de forme	Géométries références		Géométries étendues	Géométries particulières	Surfaces fonctionnelles extraites
—	Droite 2D				Droite 2D
▱		$\frac{2}{3} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$			
			$\frac{a}{b} > \frac{3}{2}$		
			$\frac{a}{b} < \frac{2}{3}$		
◊					
				⊙ ◻ ...	⊙ ◻ ...
○	Cercle 2D				Cercle 2D
∅		$\frac{2}{3} \leq \frac{d}{h} \leq \frac{3}{2}$			
			Court : $\frac{d}{h} > \frac{3}{2}$		
			Long : $\frac{d}{h} < \frac{2}{3}$		
				Composition de surfaces cylindriques, cylindre avec perçage latéral, ...	Composition de surfaces cylindriques, cylindre avec perçage latéral, ...
⌒				Profil de ligne	Profil de ligne
D		$50^\circ \leq \alpha \leq 130^\circ$			
		$\frac{1}{6} \leq \frac{h}{d} \leq \frac{1}{2}$			
			$\alpha < 50^\circ$		
			$\alpha > 130^\circ$		
		Tore intérieur			
	Tore extérieur				Tore extérieur
	Surface hémisphérique				Surface hémisphérique
				Surface gauche	Surface gauche

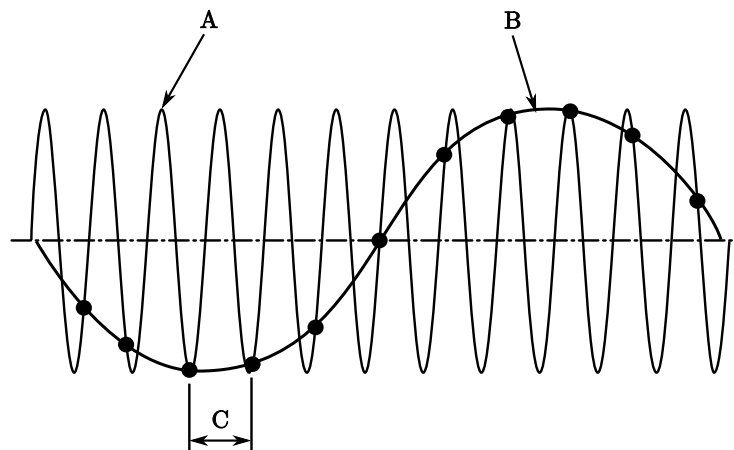
Tableau 2.4 – Classification des éléments géométriques idéaux par rapport aux tolérances de forme

### 2.3.3.2 Étape 2 : Choix du niveau modal

Afin de déterminer le nombre de points de mesure que l'on souhaite acquérir sur la surface fonctionnelle, il est nécessaire de connaître la complexité du défaut géométrique que l'on cherche à caractériser. La complexité du défaut peut s'exprimer en nombre d'ondulations (ou en longueur d'onde). Et plus le nombre d'ondulations sera élevé, plus le nombre de points de mesure sera important. La relation entre le nombre d'ondulations et le nombre de points de mesure nous est imposée par le critère d'échantillonnage de Nyquist, exploité entre autres dans l'annexe de la norme [ISO/TS-12780-2, 03].

**Théorème de Nyquist.** *Si l'on sait qu'un signal infiniment long ne contient aucune longueur d'onde inférieure à une longueur d'onde spécifiée, le signal peut être reconstruit à partir des valeurs du signal à des intervalles régulièrement espacés pourvu que l'intervalle soit plus petit que la moitié de la longueur d'onde spécifiée.*

Nous employons le critère d'échantillonnage de Nyquist pour éviter le phénomène de repliement. Le repliement se produit lorsqu'une sinusoïde de longueur d'onde courte apparaît comme étant une sinusoïde de longueur d'onde plus grande car l'intervalle d'échantillonnage est trop grand pour définir la vraie forme du signal (cf. figure 2.8).



**Légende**  
 A vrai signal  
 B signal replié  
 C intervalle d'échantillonnage

Figure 2.8 – Repliement

Nous avons fait le choix d'utiliser au moins sept points d'échantillonnage par longueur d'onde. Nous adaptons alors cette préconisation à notre méthode en écrivant la relation suivante :

$$N = 6 \times N_o + \begin{cases} 1 & \text{si ligne ouverte (profil)} \\ 0 & \text{si ligne fermée (cercle)} \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $N_o$  désigne le nombre d'ondulations et  $N$  le nombre de points d'échantillonnage associé.

Si l'on souhaite caractériser le défaut élémentaire de la figure 2.9(a),  $N = 6 \times 3 + 0 = 18$  sur une section car il y a au plus 3 ondulations et sur la génératrice  $N = 6 \times \frac{1}{2} + 1 = 4$  seulement une demie ondulation. Nous pouvons alors créer un réseau minimal de  $18 \times 4 = 72$  points du type cage à oiseaux, représenté sur la figure 2.9(b).

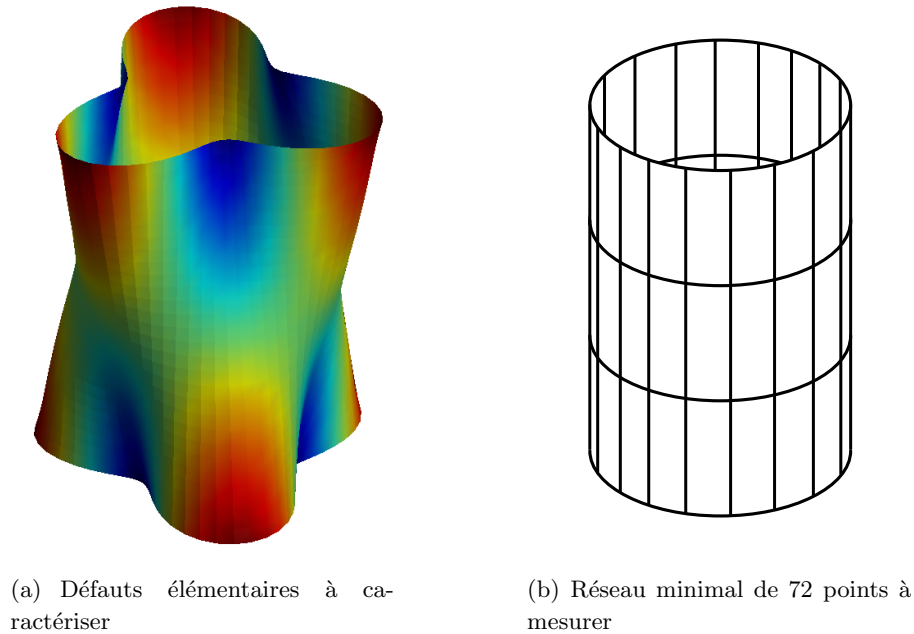


Figure 2.9 – Réseau minimal de points à mesurer

Le réseau de points de type cage à oiseaux est le nom donné à une stratégie d'extraction de points de mesure sur des éléments cylindriques. Il est clair que cette stratégie respecte l'échantillonnage conseillée par le critère de Nyquist, permettant ainsi de garantir un niveau de filtrage satisfaisant pour le besoin du métrologue dans la vérification des défauts géométriques. Cependant, la question qui subsiste est : est-ce la stratégie optimale ?

On trouve dans la littérature un grand nombre de travaux sur l'évaluation du nombre et de la répartition optimale des points de mesure en observant les incertitudes obtenues sur des paramètres géométriques, caractérisant les ordres de défauts. Lee *et al.* évaluent l'influence de différentes stratégies sur des caractéristiques géométriques et l'état de surface des éléments géométriques mesurés [LEE *et al.*, 97]. Quant à Yau, il estime le nombre de points de mesure, qui garantit que l'incertitude du recalage de l'élément idéal sur les points est inférieure aux tolérances spécifiées [YAU, 98]. Nous pouvons aussi citer les travaux de Capello et Semeraro [CAPELLO et SEMERARO, 99] et de Weckenmann et Knauer [WECKENMANN et KNAUER, 98], qui mettent en évidence l'importance de la stratégie de mesure (nombre et répartition) dans l'estimation du diamètre et du défaut de forme des éléments circulaires. Depuis une dizaine d'années, une équipe de recherche de l'université Aix-Marseille développe une modélisation statistique des incertitudes, causées par le moyen de mesure notamment, qui se traduit sur les paramètres des surfaces par une variabilité géométrique. Mailhé *et al.* [MAILHÉ *et al.*, 09] montrent que cette modélisation offre au métrologue un outil de réflexion supplémentaire pour répartir ces points de mesure.

Le lecteur aura compris que, dans notre formalisation, nous avons opté pour des réseaux de points qui respectent le critère d'échantillonnage de Nyquist, tout en étant conscients d'un sur-échantillonnage éventuel, mais qui augmente la qualité de la mesure.

### 2.3.3.3 Étape 3 : Création du maillage

Lors de cette étape, il s'agit de construire un réseau de points, qui va définir d'une part les points de mesure et d'autre part le modèle éléments finis nécessaire à la construction de la base modale naturelle (cf. étape 4). En fonction des préconisations de l'étape précédente sur le nombre de points, on privilégiera un réseau de points répartis de façon uniforme et on préférera les maillages



de type tensoriel (cf. tableau 2.5) pour respecter les hypothèses de travail des éléments finis.

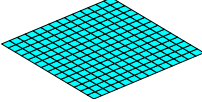
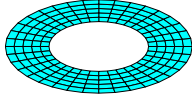
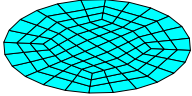
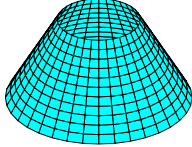
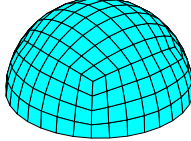
Plan	Anneau	disque	Cône	Surface hémisphérique
				

Tableau 2.5 – Maillage tensoriel associé à quelques géométries usuelles

Nous faisons remarquer au lecteur que le choix d'avoir une grille de points de mesure identique au maillage du modèle éléments finis tend à rendre robuste notre méthode d'expertise. Nous avons alors une information de mesure pour chaque nœud du maillage. Ainsi, le vecteur mesure  $^{mes}V$  et la base modale  $Q$  ont des dimensions homogènes pour réaliser la projection vectorielle modale (cf. équation 2.6 à la page 46). Mais nous verrons que cela impose d'utiliser des moyens de mesure spécifiques (cf. étape 5). Nous pourrions néanmoins envisager d'avoir deux réseaux de points indépendants, le maillage éléments finis resterait le maillage tensoriel défini usuellement et le nuage de points de la mesure serait quelconque. Le traitement de ces données serait légèrement différent puisque pour retrouver l'information de mesure aux nœuds du maillage, une étape supplémentaire d'interpolation serait à prévoir à l'issue de l'étape 7.

#### 2.3.3.4 Étape 4 : Construction de la base modale naturelle

La base modale naturelle va définir notre famille de défauts élémentaires, associée à chaque type de géométrie du tableau 2.4 de la page 53. Elle est calculée à partir du modèle éléments finis, construit sur la DFN de l'élément géométrique idéal identifié. Nous avons choisi de décliner les éléments géométriques idéaux en trois catégories pour pouvoir construire des bases modales génériques, qui s'adaptent à tous les éléments idéaux de la même typologie et ayant des proportions géométriques du même ordre.

C'est pourquoi, en pratique, une seule base modale est calculée par type de géométrie référence avec leur proportion moyenne correspondante (pour le cylindre  $\frac{d}{h} = 1$ ). Dans le cas où ce rapport de dimensions géométriques (ou rapport d'élanement) ne respecte pas les limites fixées, une autre base est calculée pour ce type de géométrie, que nous appelons étendue. Les limites que nous avons fixées sur les proportions géométriques des éléments idéaux ont été arbitrairement choisies en fonction de notre expertise. Nous introduisons cette différence entre géométrie référence et étendue puisque ce rapport d'élanement influence l'ordre de tri naturel des modes dans la base. On représente, dans le tableau 2.6, les bases modales naturelles d'un cylindre court, « normal » et long. Nous constatons sur cet exemple qu'en fonction du rapport d'élanement appliqué au cylindre l'ordre naturel des modes est modifié. La base d'un cylindre court privilégie naturellement les modes avec des ondulations sur les sections (modes « trilobes » à la 9<sup>e</sup> et 10<sup>e</sup> position) alors que le cylindre long favorise les modes avec des ondulations sur les génératrices (mode « diabolo » à la 5<sup>e</sup> position). À la limite, pour un cylindre très court, la base modale serait constituée uniquement de modes, caractérisant la circularité et, dans le cas inverse, la base modale d'un cylindre très long caractériserait la rectitude du cylindre. Hormis les cas particuliers, l'utilisation de l'élément géométrique nominal pour construire la base modale permet d'obtenir des modes ordonnés naturellement par rapport au procédé de fabrication.

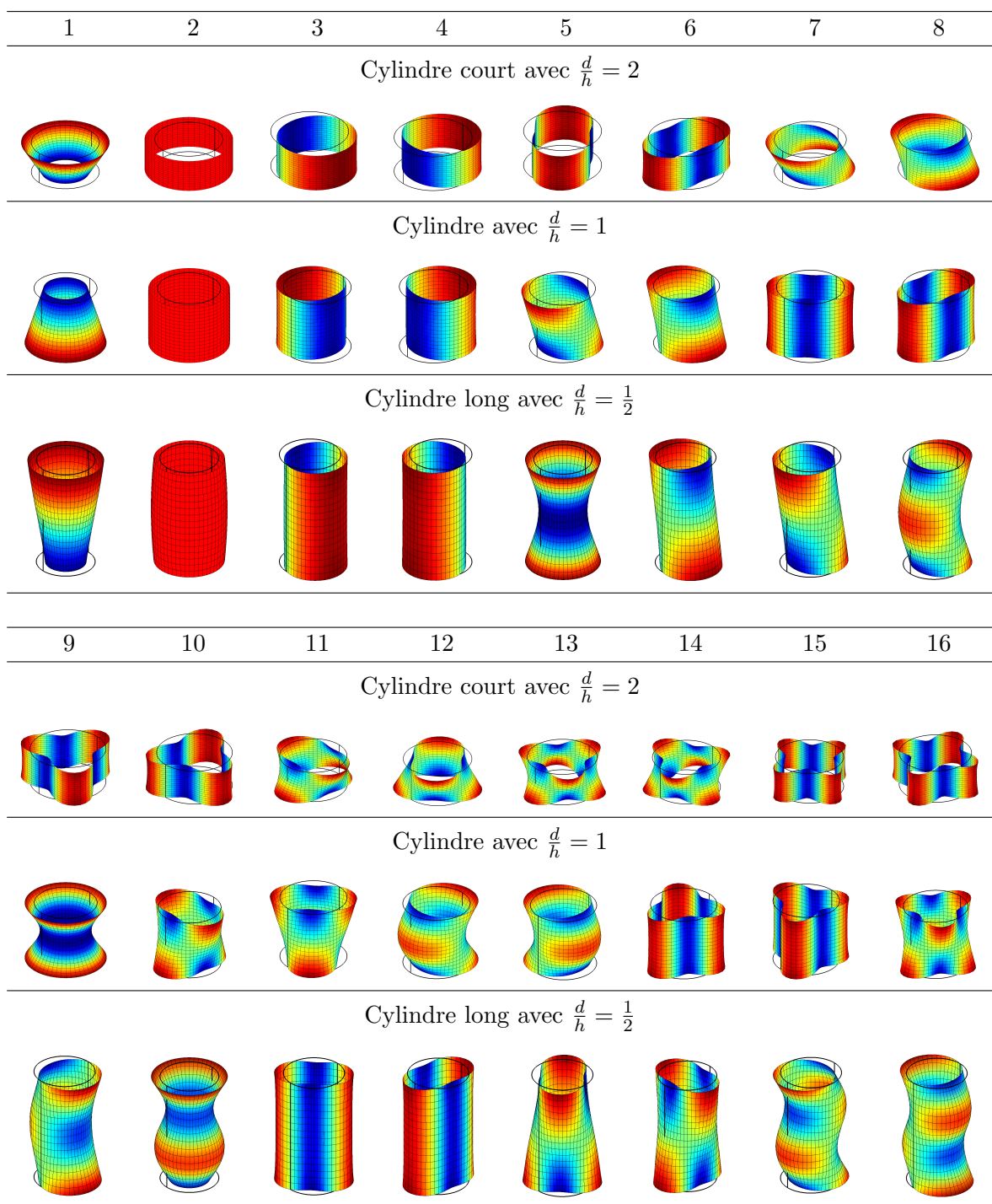


Tableau 2.6 – Les bases génériques d’un cylindre en fonction de son rapport d’élancement

Le nombre de modes à calculer dépend du niveau de filtrage ou niveau de description, que l’on souhaite, pour caractériser les écarts géométriques, issus de la mesure. Il ne faut pas oublier que le nombre maximal théorique de modes est lié au nombre de noeuds du modèle éléments finis. Mais si l’on veut respecter le critère d’échantillonnage de Nyquist, le nombre de modes que l’on peut décrire est bien inférieur. De façon empirique on estime que pour  $n$  noeuds du maillage, on pourra décrire, selon Nyquist, un nombre de modes égal à  $\frac{n}{5}$ .

### 2.3.3.5 Étape 5 : Choix du moyen de mesure

Nous ne voulons pas soulever, dans cette étape, la problématique liée à la méthode de mesure mais simplement préciser les moyens de mesure compatibles avec notre méthode d'expertise en terme de sensibilité, résolution et d'étendue de mesure.

Il est clair que l'utilisation du moyen de mesure sélectionné doit satisfaire techniquement à l'objet de la mesure relatif à la spécification à contrôler et avoir une incertitude de mesure (pas nécessairement propre à l'instrument de mesure) compatible à la tolérance. Après avoir fait le choix du moyen, il faut le confirmer « métrologiquement » en analysant le processus de mesure afin d'estimer les incertitudes de mesure. Cette vérification est un travail généralement négligé puisqu'il est réalisé expérimentalement, elle fait l'objet de l'opération d'étalonnage. L'étalonnage d'un moyen de mesure fournit habituellement une incertitude sur la grandeur mesurée, corrigée d'une erreur systématique. L'incertitude déduite sera alors une erreur aléatoire. De nombreux travaux de recherche, particulièrement sur des approches statistiques, ont été menés [COX *et al.*, 08, BACHMANN *et al.*, 04].

Bachmann *et al.* proposent une approche différente au procédure d'étalonnage classique pour estimer les incertitudes de mesure. En effet, plutôt que rechercher ce qui est de l'ordre du systématique, pour le corriger, leur modèle englobe tous les types d'erreurs (systématiques, non-systématiques et aléatoires). Leur modélisation se traduit, sur les paramètres des surfaces, par une variabilité géométrique qui est représentée par une zone spatiale dans laquelle se situe l'élément géométrique étudié [BACHMANN *et al.*, 04]. Ce modèle permet, en outre, de déduire la méthode de mesure qui améliore la qualité d'approximation de la surface mesurée.

Tout en étant conscients des problèmes liés aux incertitudes des moyens de mesure et sans essayer de les contourner, puisque nous y avons été confrontés, l'objet de cette formalisation ne s'est pas centré sur cette problématique. La capacité de l'instrument de mesure, que nous avons utilisé, comparativement aux tolérances à contrôler, nous a permis de nous affranchir des difficultés à évaluer les incertitudes. Une autre exigence que l'on a sur le choix du moyen de mesure est sa capacité à acquérir un grand nombre de points (de quelques centaines à quelques milliers). Il existe de nos jours de plus en plus de technologies capables d'acquérir un nombre de points important et dans un temps raisonnable :

- mesure avec contact : palpeur à contacts statiques ou dynamiques
- mesure sans contact : principalement les procédés optiques (interférométrie, triangulation, photogrammétrie, *etc.*)

Malgré tout, nous avons principalement utilisé des résultats de mesure issus de Machines à Mesurer Tridimensionnelles (MMT). Plusieurs raisons nous ont poussés à faire ce choix, premièrement la flexibilité de la programmation du palpé point par point, deuxièmement la capacité de mesure compte tenu des tolérances spécifiées sur les pièces mécaniques que l'on cherche à expertiser et enfin la disponibilité des MMT de notre partenaire le CTDEC. Nous avons donc pu mettre en place un pilotage de la MMT par la génération automatique de fichiers de commande.

### 2.3.3.6 Étape 6 : Acquisition et exportation

Comme nous venons de l'évoquer dans l'étape précédente, nous avons automatisé notre démarche d'expertise avec des fichiers scripts dans un langage de programmation dédié au pilotage des MMT, à savoir le langage DMIS pour Dimensional Measuring Interface Standard. On représente sur la figure 2.10 la simulation du chemin de palpé, générée par un fichier de commande, pour mesurer l'alésage de la pièce d'étude.

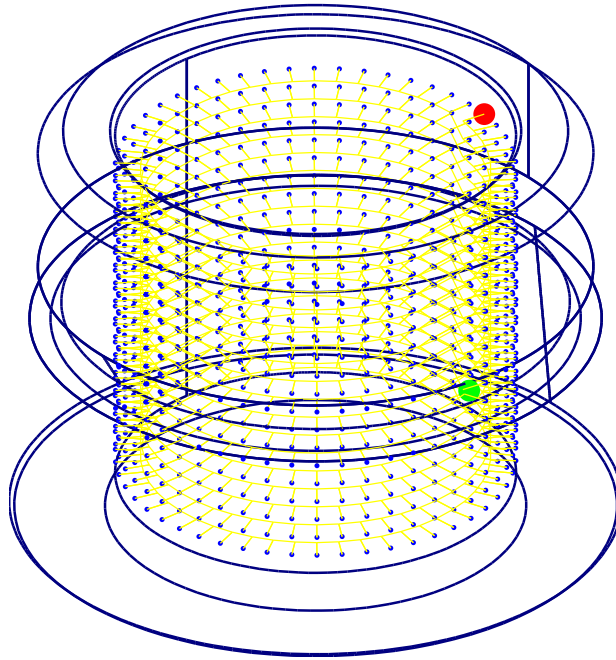


Figure 2.10 – Simulation du chemin de palpage

Les données que nous exploitons dans la suite sont des fichiers contenant les coordonnées  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  de chaque point mesuré. Lorsque les mesures proviennent d'une MMT, les coordonnées des points sont généralement exprimées dans le repère de la DFN de l'élément géométrique.

### 2.3.3.7 Étape 7 : Association

Cette septième étape consiste à associer un élément géométrique idéal à un ensemble de points, en l'occurrence celui exporté dans l'étape précédente. Depuis les années 70, de nombreuses méthodes d'association sont basées sur une approche géométrique. Ces méthodes cherchent à minimiser une distance en optimisant les paramètres de l'élément géométrique idéal associé. Selon le critère de minimisation choisi, l'expression du problème de minimisation peut s'écrire de différentes manières. Trois critères sont principalement cités :

- le critère des moindres carrés, il utilise la norme euclidienne des distances entre l'élément géométrique idéal et la surface réelle, représentée par le nuage de points mesurés,
- le critère de Tchebychev (ou minimax) qui cherche à minimiser la norme infinie des distances,
- et le troisième critère minimise la norme algébrique des distances, critère de tangence matière.

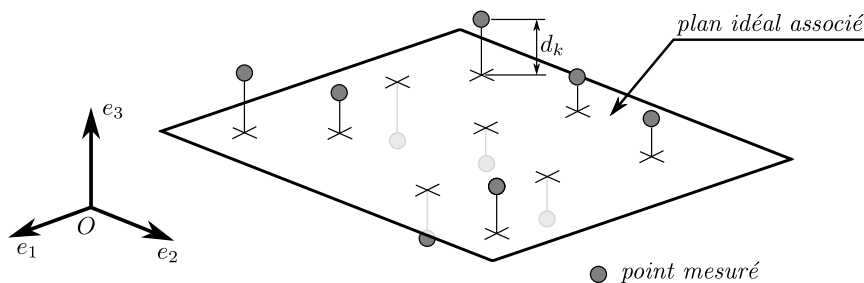


Figure 2.11 – Méthode d'association géométrique d'un plan

Selon le critère choisi, le problème à minimiser s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^n |d_k|^N \text{ avec } \begin{cases} N = 1 & \text{norme algébrique, tangence matière} \\ N = 2 & \text{norme euclidienne, moindres carrés} \\ N \rightarrow \infty & \text{norme infinie, Tchebychev} \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour résoudre ce problème, il existe plusieurs méthodes mathématiques classiques comme la méthode de Gauss pour le critère des moindres carrés ou la méthode du simplexe pour le critère de Tchebychev et le critère de tangence matière, *etc.*

• **La méthode de Gauss** consiste à former la fonction  $W = \sum d_k^2$ , où les  $d_k$  sont exprimés en fonction des  $q_p$  paramètres de l'élément géométrique idéal. La fonction passe par un minimum que l'obtient en résolvant un système de  $p$  équations linéaires à  $p$  inconnues, obtenu par les dérivées partielles :

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial W}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_p} = 0 \quad (2.11)$$

• **La méthode du simplexe** consiste à exprimer le problème sous la forme de contraintes linéaires et d'une fonction objectif.

Au milieu des années 70, Bourdet et Clément introduisent le concept du torseur de petits déplacements dont l'objectif est de résoudre le problème d'association d'un élément géométrique idéal à un nuage de points en métrologie tridimensionnelle [BOURDET et CLÉMENT, 76]. L'idée générale est de minimiser les écarts  $e_i$  entre l'élément idéal et le nuage de points en effectuant un petit déplacement  $\overrightarrow{D_{M_{th_i}}}$  tel que la position finale de l'élément idéal soit globalement le plus près possible des points mesurés  $M_i$ . Ainsi le problème d'association d'un élément idéal (ou groupe d'éléments) peut être posé sous une forme générale,

$$e_i = \xi_i - \overrightarrow{D_{M_{th_i}}} \cdot \vec{n}_i \quad (2.12)$$

où  $\vec{n}_i$  et  $\xi_i$  sont représentés sur la figure 2.12.

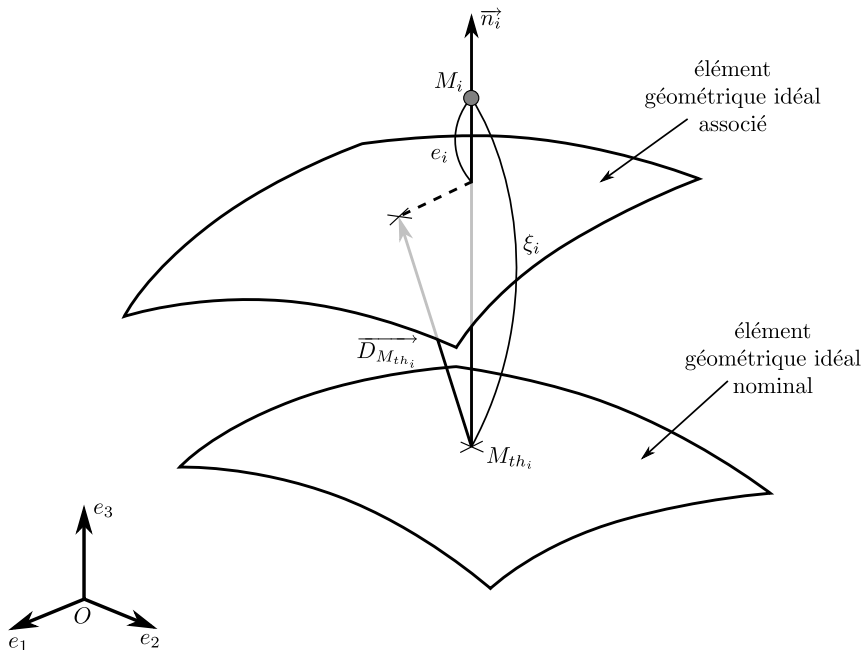


Figure 2.12 – Petit déplacement en un point

On obtient alors un système de  $n$  équations linéaires ( $n =$  nombre de points mesurés) pour  $r$  inconnues, c'est-à-dire les  $r$  composantes du torseur de petits déplacements. La résolution d'un tel système fait appel à la méthode de Gauss pour le critère des moindres carrés ou à la méthode du simplexe pour les deux autres critères.

Quel que soit le critère d'association choisi, le résultat de l'association d'un élément géométrique idéal à un nuage de points relève de différents facteurs :

- Il dépend du nombre de paramètres indépendants (paramètres de position, d'orientation et intrinsèques) permettant à l'élément géométrique de s'adapter au nuage de points.
- Il est possible de mettre sous contraintes un certain nombre de ces paramètres, la formulation du problème de minimisation est alors modifiée et le résultat de l'association le sera nécessairement aussi.
- Les résultats de l'association dépendent également des algorithmes utilisés et de la précision de calcul de l'outil d'optimisation.

Le résultat de l'association devra alors répondre au critère de la meilleure représentation de l'élément géométrique réel, relativement à l'utilisation de l'élément idéal associé. Parmi les trois critères cités précédemment, les normes de spécification [ISO-5459, 81] distinguent :

- Le critère de Tchebychev relatif à la forme de l'élément. Le défaut de forme  $t$  est alors représenté par la zone minimale définie par deux enveloppes, formées par l'ensemble des sphères ou des cercles de diamètre  $t$ , centrés sur l'élément idéal.
- et le critère de tangence matière relatif à la fonction d'assemblage. La fonction d'assemblage se traduit par un élément idéal tangent au coté libre de la matière.

Bien que non prévu par les normes de spécifications, le critère des moindres carrés est actuellement le critère le plus utilisé en mesure tridimensionnelle. Ce critère a l'avantage d'être robuste et fiable quels que soient le nombre de points et l'étendue de la surface. Comme nous l'avons vu précédemment, l'élément idéal des moindres carrés est celui qui minimise la somme des carrés des écarts  $d_k$  (cf. équation 2.10), ce qui lui confère comme propriétés mathématiques :

- la somme des écarts  $d_k$  nulle,  $\sum_{k=1}^n d_k = 0$ ,
- la répartition des écarts  $d_k$  suit généralement une loi gaussienne, ce qui permet de détecter d'éventuels points statistiquement aberrants.

Les travaux de Linares et *al.* sur l'influence du filtrage mécanique dans l'association des éléments géométriques [LINARES *et al.*, 07], montrent que, dans le cas d'utilisation de palpeurs dynamiques et statiques à contact, les points mesurés sont répartis suivant une densité de probabilité gaussienne autour de l'élément idéal associé, avec comme hypothèse d'avoir un état de surface de la pièce de bonne qualité (forme, ondulation et rugosité faibles). Dans ce cas, ils concluent qu'une estimation correcte de la surface réelle est obtenue par le critère des moindres carrés. Et dans le cas, où les mesures sont réalisées avec des technologies optiques, Linares et *al.* démontrent que les critères d'associations géométriques sont insuffisants. Ils proposent alors une approche statistique qui utilise la méthode du maximum de vraisemblance. La fonction de vraisemblance est constituée du produit des probabilités conditionnelles des points à appartenir à l'élément idéal associé.

Dans le cadre de nos travaux, la majorité des expertises géométriques a été réalisée à partir de mesures tridimensionnelles acquises par des MMT. Nous avons légitimement appliqué le critère d'association des moindres carrés pour extraire les paramètres géométriques des éléments mesurés. Nous extrayons notamment de cette association les écarts normaux résiduels que l'on représente par le vecteur  $^{mes}V$ . Nous présentons dans la suite les résultats de l'association d'un élément cylindrique à un nuage de points mesurés.

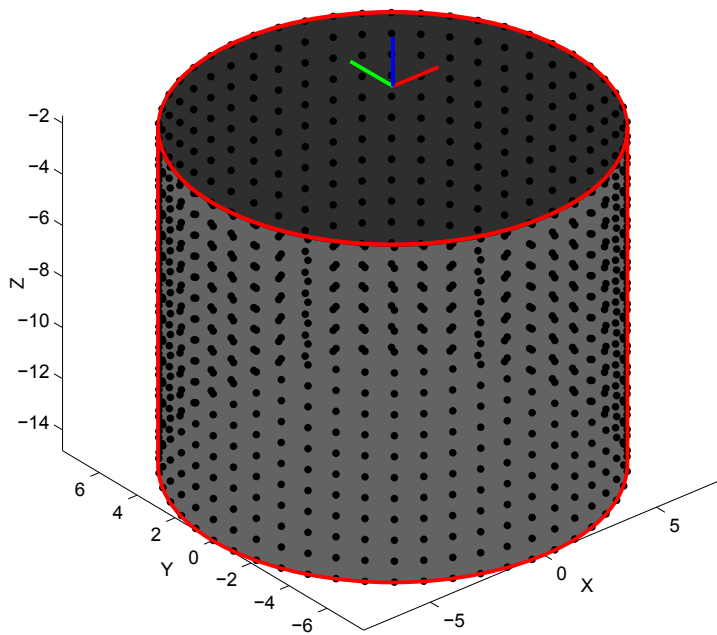


Figure 2.13 – Représentation du cylindre associé avec le critère des moindres carrés

Point de l'axe		
x	y	z
0.0014	0.0003	-8.2575
Axe		
x	y	z
-0.0003	0.0002	1
Diamètre		
15.895 mm		
Défaut de forme		
15.6 $\mu\text{m}$		

Tableau 2.7 – Paramètres géométriques du cylindre associé

Nous pouvons représenter les écarts normaux résiduels par une distribution (cf. figure 2.14). Néanmoins la cartographie multicolore (cf. figure 2.15) est beaucoup plus visuelle. La convention des couleurs est la suivante, le bleu représente les écarts négatifs c'est-à-dire du côté intérieur matière et le rouge désigne le côté extérieur matière avec des écarts positifs.

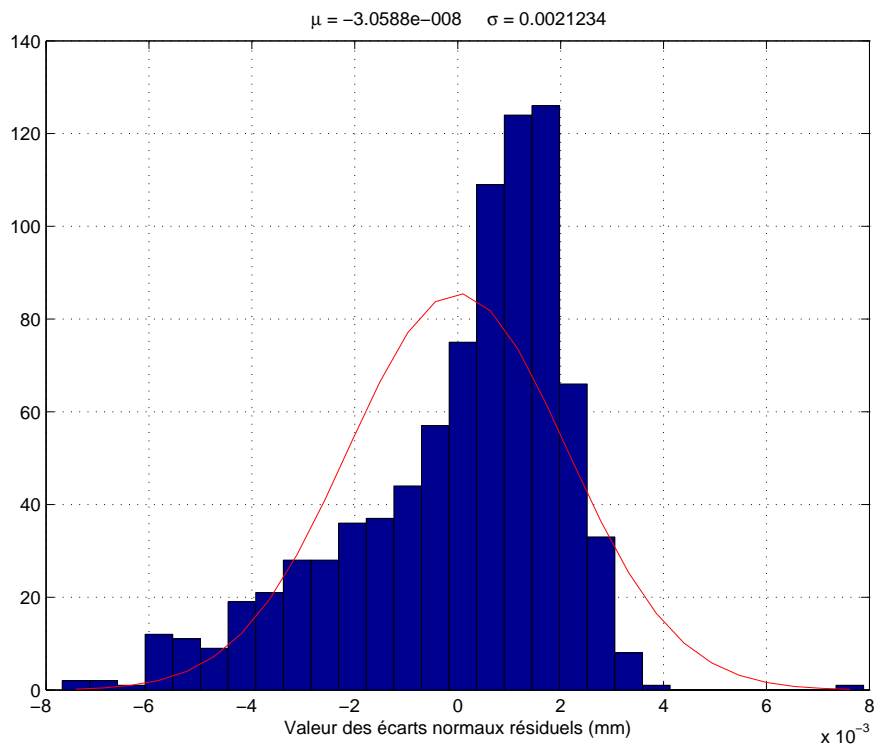


Figure 2.14 – Représentation de la distribution des écarts normaux résiduels

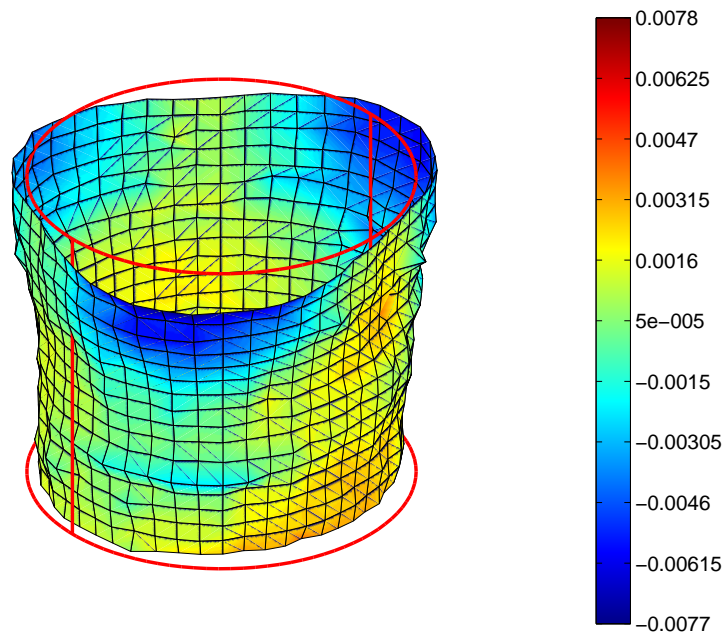


Figure 2.15 – Cartographie des écarts normaux résiduels exprimés en millimètres

Nous remarquons que la distribution des écarts normaux résiduels ne suit pas une loi gaussienne, contrairement aux propriétés mathématiques annoncées pour le critère des moindres carrés. Si l'on représente la répartition géométrique des écarts normaux résiduels par section autour du cylindre des moindres carrés, nous constatons d'une part que la répartition sur chaque section n'est pas toujours centrée et d'autre part que l'écart type varie fortement en fonction des sections (cf. figure 2.16). Ces effets traduisent un défaut de forme important, plus particulièrement d'un fort défaut de cône et d'un défaut trilobe significatif sur les sections du haut du cylindre, que l'on peut observer sur la cartographie 2.15.

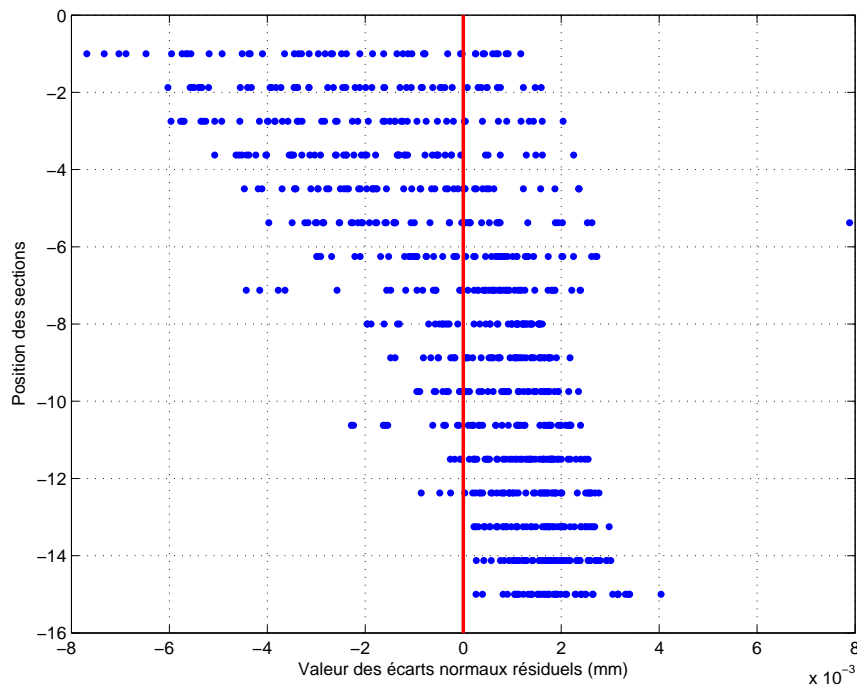


Figure 2.16 – Répartition géométrique des écarts normaux résiduels par section



*Remarque.* Dans les cas où le réseau de points palpés n'est pas identique, en nombre et en terme de répartition, au maillage du modèle éléments finis construit à l'étape 3, nous proposons d'interpoler le nuage de points mesurés pour obtenir les écarts normaux résiduels au noeud du maillage éléments finis (cf. figure 2.17).

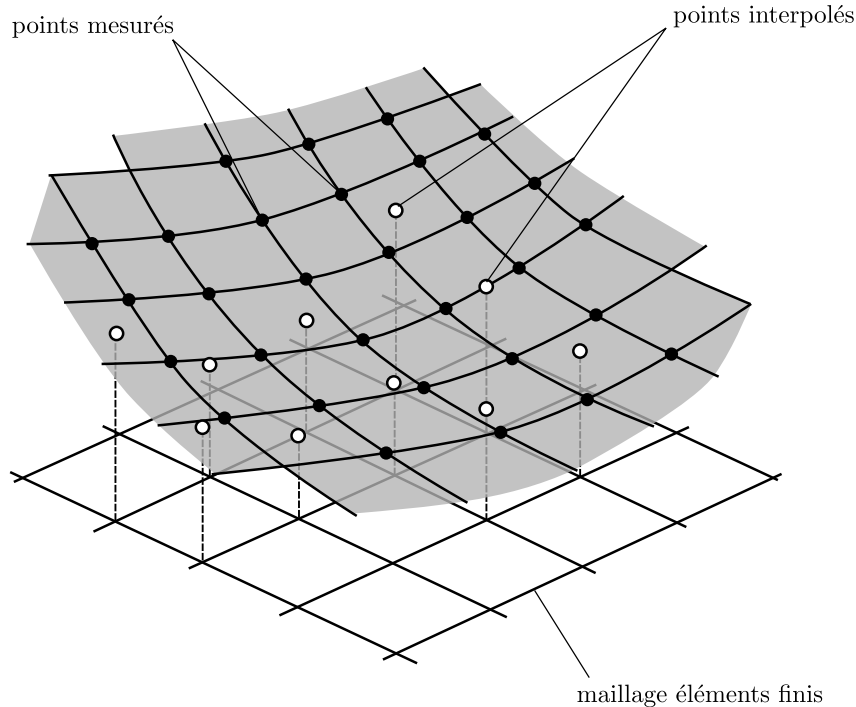


Figure 2.17 – Interpolation de la mesure

### 2.3.3.8 Étape 8 : Décomposition (DMD)

Nous allons chercher à décrire, ici, les écarts normaux résiduels issus de l'association précédente avec la famille de défauts élémentaires constitués dans l'étape 4. Cette opération va être l'objet de la projection vectorielle modale définie par l'équation 2.6 à la section 2.2.3 (page 46). Le vecteur  $^{mes}V$ , représentant ces écarts, est alors décomposé dans la base modale  $Q$ , formée des modes  $Q_i$  qui définissent les défauts élémentaires. Le vecteur  $\lambda$ , qui résulte de cette projection, définit alors l'ensemble des contributions  $\lambda_i$  de chaque mode  $Q_i$ . On peut ainsi écrire le vecteur  $^{mes}V$ , comme la combinaison linéaire suivante :

$$^{mes}V = \sum_{i=1}^{N_Q} \lambda_i Q_i + \epsilon(N_Q) \quad (2.13)$$

$N_Q$  est le nombre de modes calculés dans l'étape 4 ( $\approx \frac{n}{5}$ ) et  $\epsilon$  définit le résidu vectoriel de la décomposition. Les coordonnées modales  $\lambda_i$  sont alors représentées sous la forme du spectre ci-dessous :

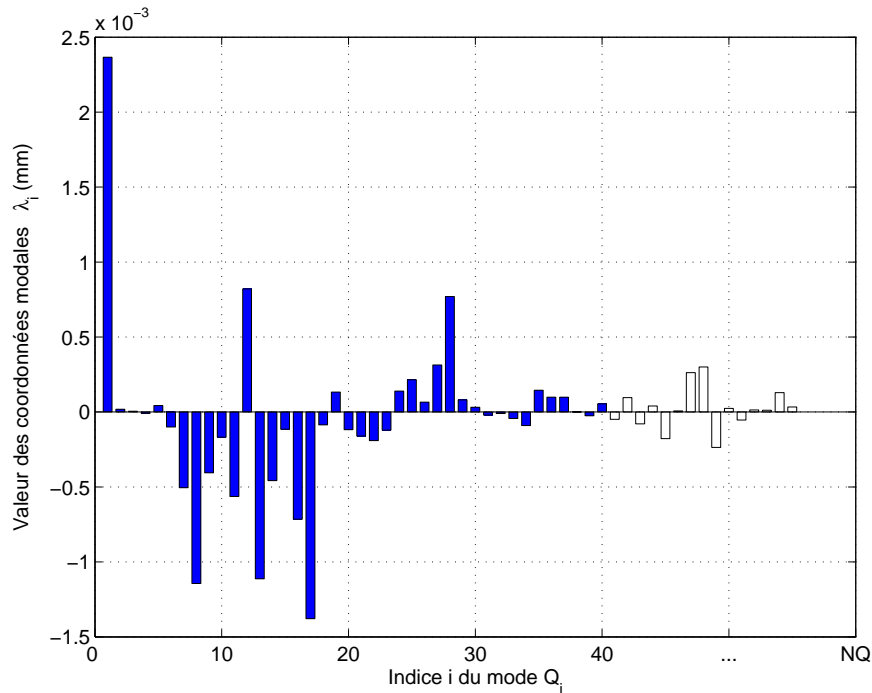


Figure 2.18 – Représentation spectrale de la projection vectorielle

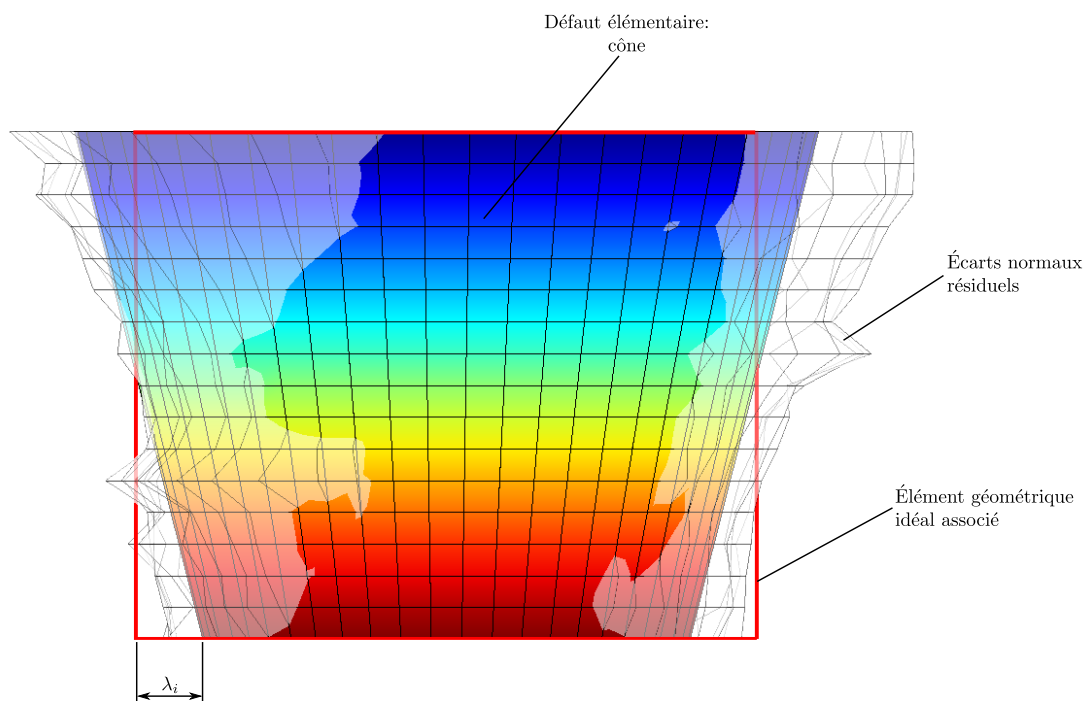


Figure 2.19 – Signification géométrique de la coordonnée modale associée au défaut élémentaire : cône

Dans le cadre de cette application à l'expertise métrologique, la DMD a plusieurs objectifs. Tout d'abord, elle permet de filtrer la mesure au juste nécessaire pour décrire l'ordre du défaut désiré (cf. §2.3.2, p. 50) par le nombre  $N_Q$ . Et deuxièmement, elle réduit l'espace des paramètres de description. En effet, d'un nombre  $n$  de points de mesure on pourra se restreindre à quelques valeurs scalaires, correspondant aux défauts élémentaires prépondérants. Nous verrons dans l'étape suivante dans quelle mesure nous considérons qu'un défaut élémentaire est prépondérant.

### 2.3.3.9 Étape 9 : Exploitation et visualisation

Dans cette avant dernière étape, nous mettons en place plusieurs outils de visualisation afin d'exploiter au mieux les résultats de la DMD. Au fur et à mesure des expertises industrielles à réaliser, nous avons pu améliorer la qualité de ces représentations dans la perspective de donner du sens à ces résultats.

#### • Représentation spectrale des résultats de la DMD

La représentation spectrale de la projection vectorielle permet d'identifier les coordonnées modales  $\lambda_i$  les plus importantes, correspondant aux défauts élémentaires ayant les plus grandes amplitudes (cf. figure 2.19). On qualifiera ces défauts de prépondérants, que l'on notera  $Q_{p_i}$ .

Comme nous l'avons introduit dans la section 2.2.2.1 (p. 41) sur l'expression des espaces de description, en fonction des invariances de l'élément géométrique sur lequel est construit la base modale naturelle, des paires voire des triplets de modes de forme géométrique identique vont être générés. Une paire de modes sera constituée de deux modes déphasés, respectivement, un triplet sera composé de trois modes déphasés (cas d'une sphère). Pour exploiter les résultats de la meilleure façon qu'il soit, nous devons dans ce cas dissocier le spectre modal en un spectre d'amplitude et un spectre de phase, à la façon des harmoniques de Fourier.

Dans le cas d'étude que nous traitons depuis le début de cette formalisation, la base modale générée sur le cylindre contient des paires de modes, compte tenu de l'invariance liée à l'axe du cylindre. Ainsi, nous pouvons exprimer la combinaison linéaire d'un couple de modes  $Q_i$  et  $Q_{i+1}$ , pondérés de leurs coordonnées modales  $\lambda_i$  et  $\lambda_{i+1}$ , avec un paramètre d'amplitude  $\lambda'_j$  et un paramètre de phase  $\phi'_j$  (cf. figure 2.20).

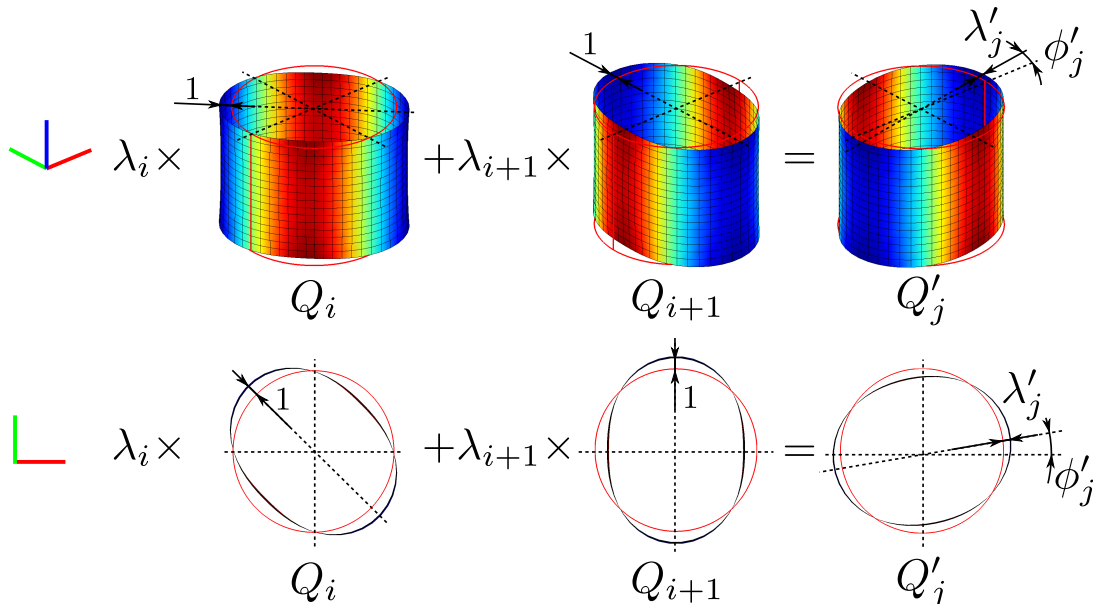


Figure 2.20 – Changement de paramétrage pour les paires de modes

Compte tenu de ce nouveau paramétrage attribué aux paires de modes, nous représentons sur la figure 2.21 le spectre modal correspondant seulement aux amplitudes de chaque mode (ou défaut élémentaire). Nous identifions alors les défauts élémentaires les plus significatifs.

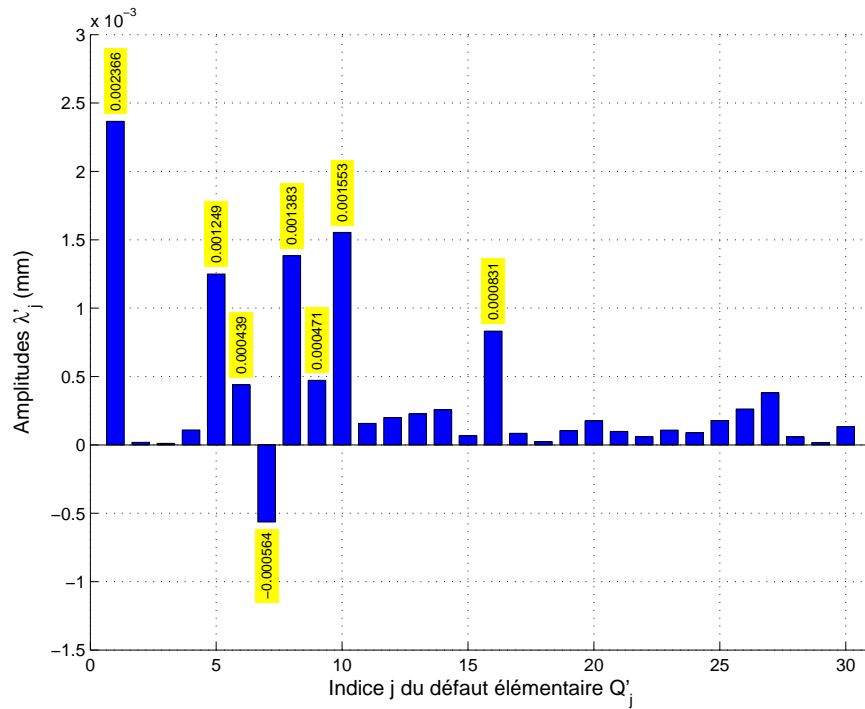


Figure 2.21 – Spectre modal des amplitudes

La problématique du spectre de phase se posant pour les cas où la base modale naturelle génère des couples de modes déphasés, une interrogation se pose sur le type d'information à fournir. Nous en distinguons deux en fonction du besoin « client ». Premièrement, on peut trouver un intérêt à orienter un défaut élémentaire par rapport au repère de l'élément associé ou deuxièmement, lorsque ce repère a été arbitrairement choisi lors de la mesure, l'intérêt est plutôt de quantifier l'orientation relative entre chaque défaut élémentaire. La figure 2.22 présente le spectre modal de la phase  $\phi'_j$  associé au spectre des amplitudes et orienté par rapport au repère de mesure.

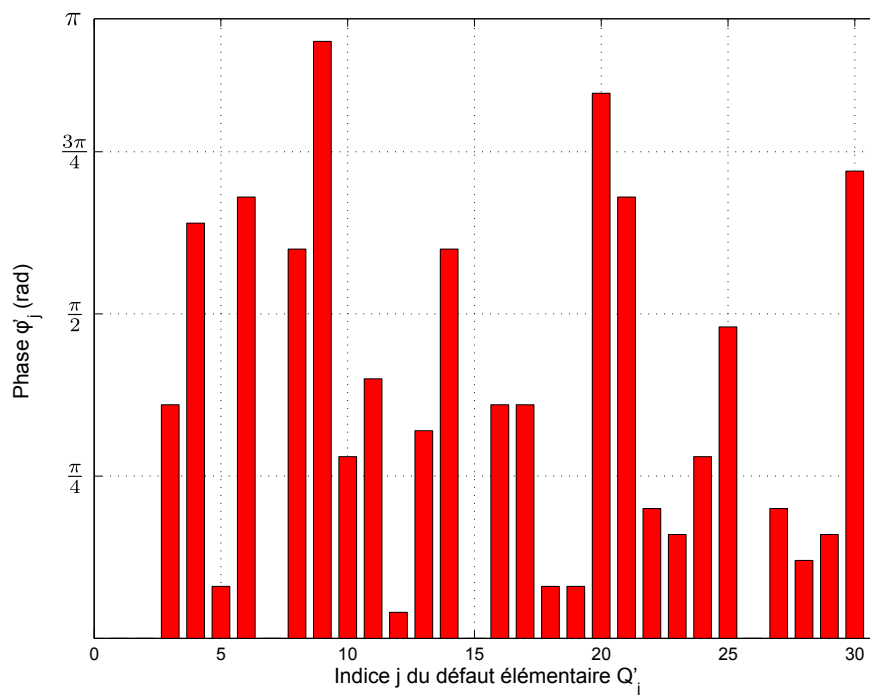


Figure 2.22 – Spectre modal de phase

L'orientation de chaque défaut élémentaire  $Q'_j$  a été calculée à partir des données de la première section. Nous avons choisi de calculer l'angle de déphasage correspondant à l'angle entre l'axe x et le premier maximum (cf. figure 2.23).

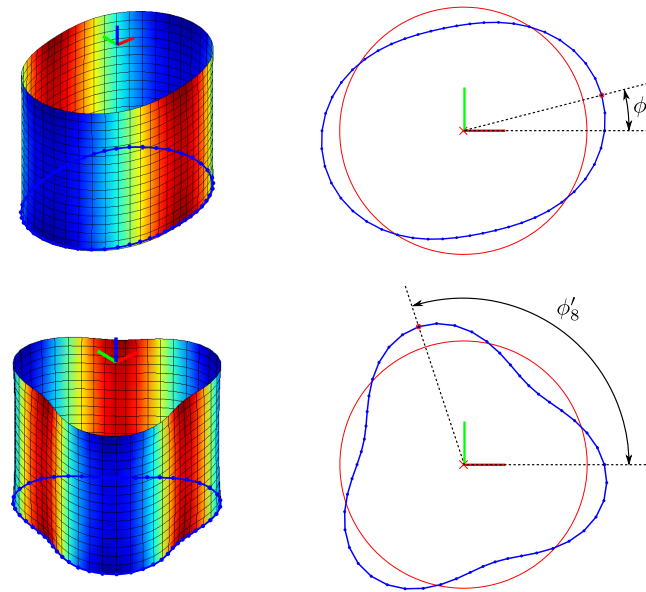


Figure 2.23 – Calcul du spectre de phase

- **Visualisation des défauts prépondérants**

Une fois ces défauts identifiés, nous les classons dans l'ordre décroissant de leurs amplitudes  $\lambda'_j$ , accompagnés de leur représentation graphique. Ce tri va définir l'ordre de prépondérance des défauts élémentaires, dont on visualise les huit premiers sur la figure 2.24. On notera l'ensemble des  $Q'_j$  triés par  $Q'_{p_j}$  avec les amplitudes  $\lambda'_{p_j}$  associées.

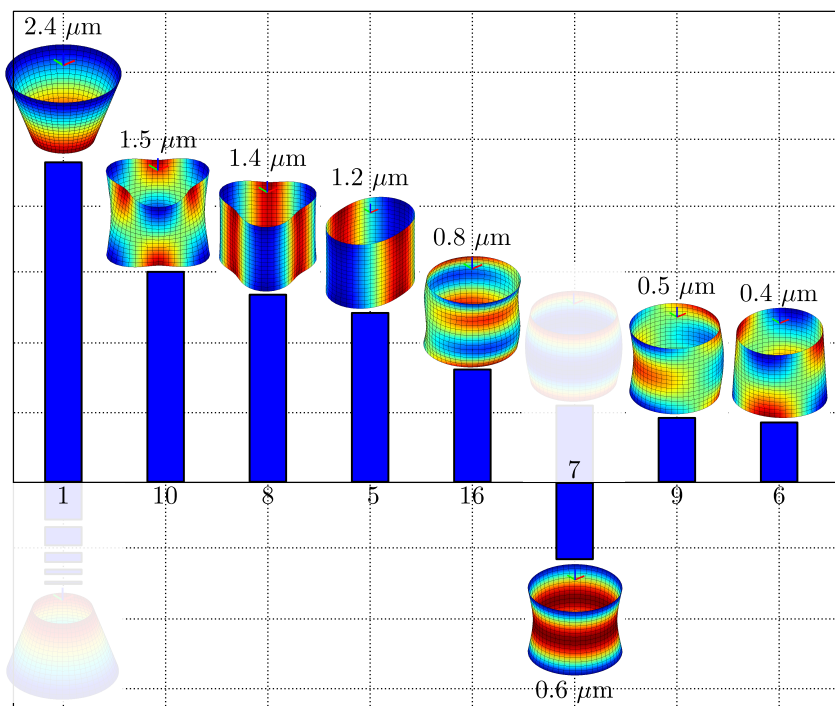


Figure 2.24 – Représentation des défauts prépondérants

La pertinence de ces défauts prépondérants sera évaluée dans la suite par deux autres critères que l'on propose. On trouvera aussi un grand intérêt à ces défauts prépondérants, dans la section 2.4 (p. 74), dans des applications sur des lots de pièces mesurées. En complément à cette représentation, nous proposons d'introduire ici des informations sur les orientations relatives entre les défauts prépondérants. Nous prenons le premier mode prépondérant, paramétrable par un angle, comme référence et calculons les déphasages angulaires de chaque défaut élémentaire par rapport à celui-ci (figure 2.25)

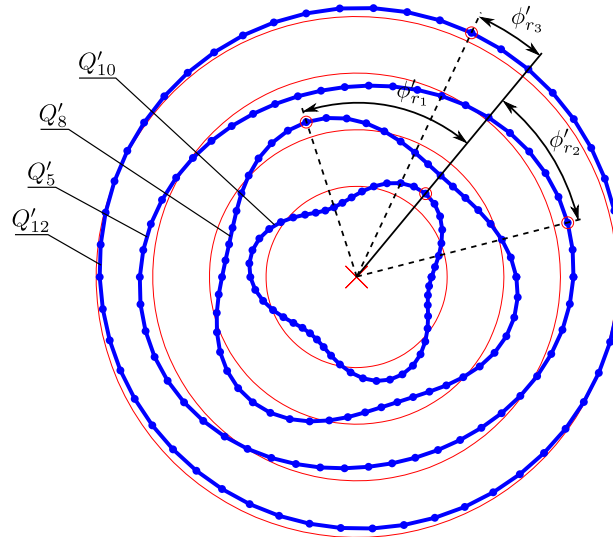


Figure 2.25 – Calcul des déphasages relatifs entre défauts prépondérants à partir de la première section du cylindre

- **Reconstruction**

La reconstruction  $R_{N_p}$  consiste à calculer la somme des défauts prépondérants  $Q'_{p_j}$ .

$$R_{N_p} = \sum_{j=1}^{N_p} Q'_{p_j} \quad (2.14)$$

où  $N_p$  désigne le nombre de modes prépondérants choisis. Sur la figure 2.26, la reconstruction  $R_{N_p}$  est calculée avec les huit défauts prépondérants (cf. figure 2.24). Il est utile de préciser deux choses, premièrement que l'échelle de couleur des deux représentations est différente et deuxièmement que l'importante variation de couleur entre ces deux représentations provient des points aberrants qui ne sont pas filtrés sur la mesure.

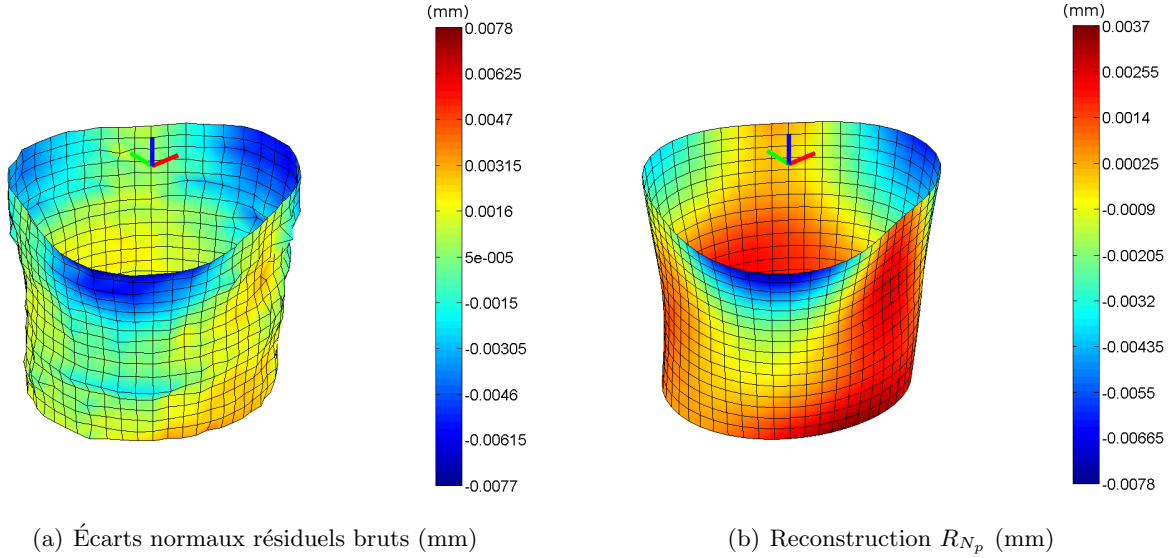


Figure 2.26 – Comparaison des cartographies entre les écarts normaux bruts et la reconstruction

La figure 2.26(b) nous montre alors une représentation visuelle et quantitative, avec l'échelle de couleur, du filtrage appliqué par les défauts prépondérants. Pour évaluer la pertinence de ce filtrage, nous exposons dans la suite deux critères d'évaluation.

#### • Évaluation de la qualité de la DMD

Afin d'évaluer la qualité de la DMD, nous mettons en place un premier critère qui calcule la moyenne quadratique d'un résidu de forme et un deuxième que l'on appelle critère de zone. Nous avons vu dans l'équation 2.13 que le résidu vectoriel  $\epsilon$  est défini par la différence entre le vecteur  $^{mes}V$  et le vecteur  $^{fil}V$  qui s'écrit :

$$^{fil}V = \sum_{i=1}^{N_Q} \lambda_i Q_i \quad (2.15)$$

Le résidu vectoriel filtré  $^{fil}\epsilon$  se détermine alors par :

$$^{fil}\epsilon = ^{fil}V - R_{N_p} = \sum_{i=1}^{N_Q} \lambda_i Q_i - \sum_{j=1}^{N_p} Q'_{p_j} \quad (2.16)$$

La figure 2.27 montre la représentation graphique de cette soustraction mathématique.

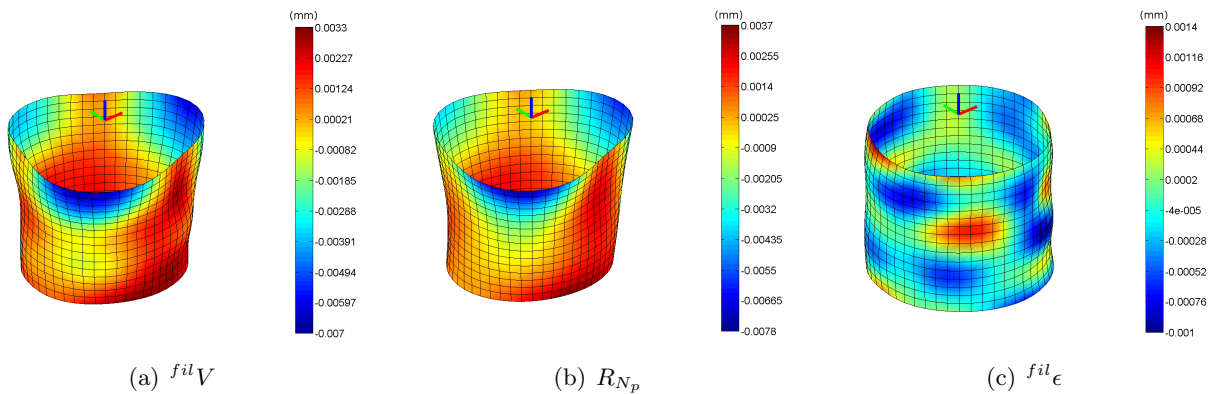


Figure 2.27 – Représentation de la cartographie du résidu vectoriel filtré  $^{fil}\epsilon$

On définit alors la moyenne quadratique de  $fil_{\epsilon}$  :

$$\overline{fil_{\epsilon}} = \sqrt{\frac{fil_{\epsilon}^T \cdot fil_{\epsilon}}{n}} \quad (2.17)$$

Le deuxième critère que nous introduisons, nommé critère de zone, représente la taille de la zone, calculée sur la reconstruction  $R_{N_p}$  :

$$Z_{N_p} = \max(R_{N_p}) - \min(R_{N_p}) \quad (2.18)$$

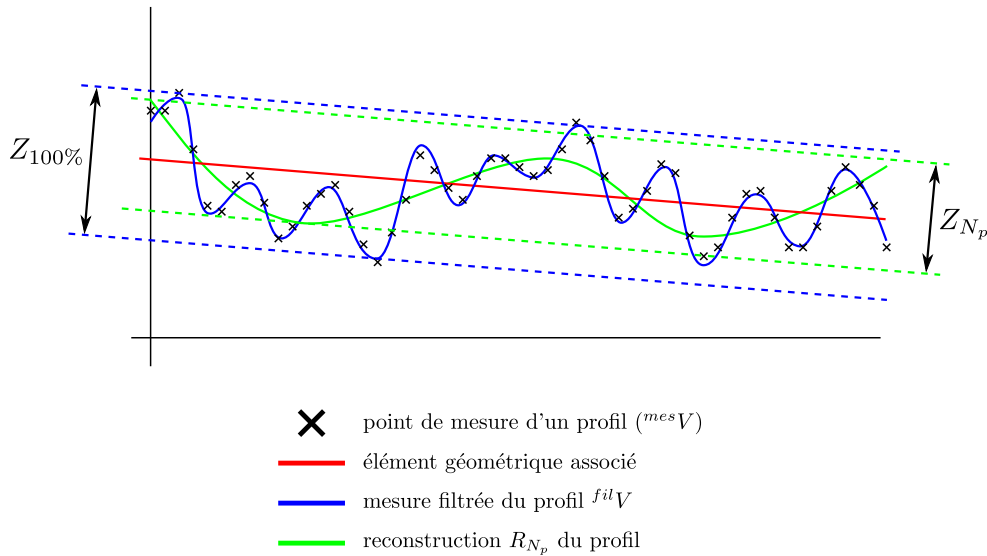


Figure 2.28 – Illustration du critère de zone

Nous pouvons alors tracer l'évolution de ces deux critères en fonction de la reconstruction  $R_{N_p}$  pour évaluer la pertinence des défauts élémentaires.



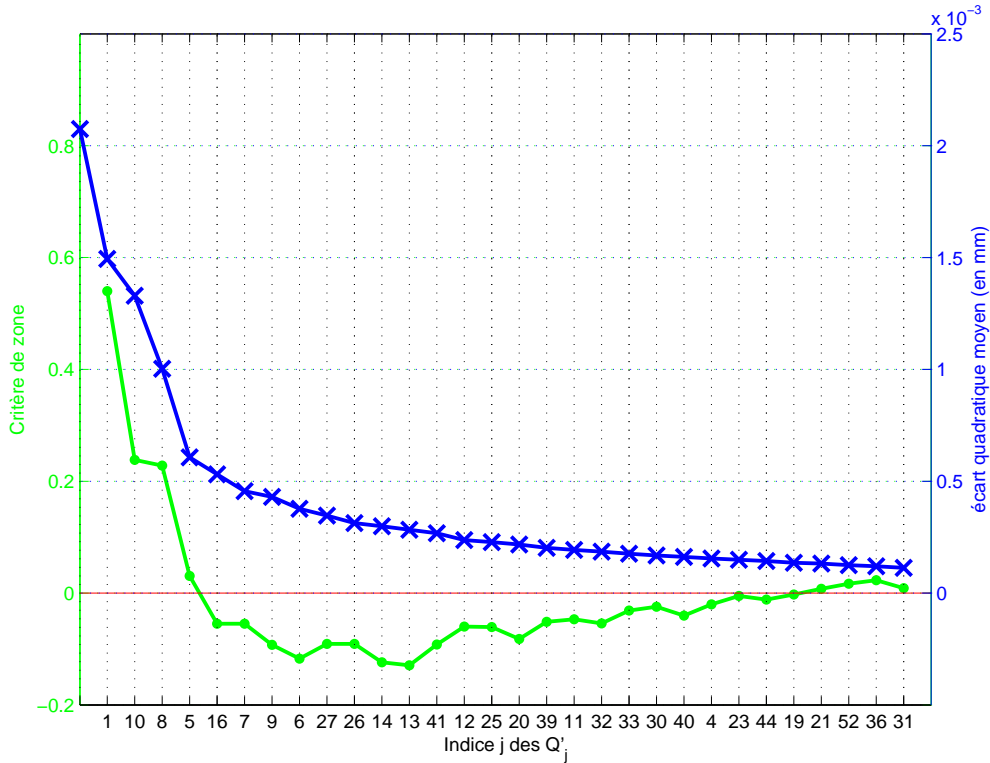
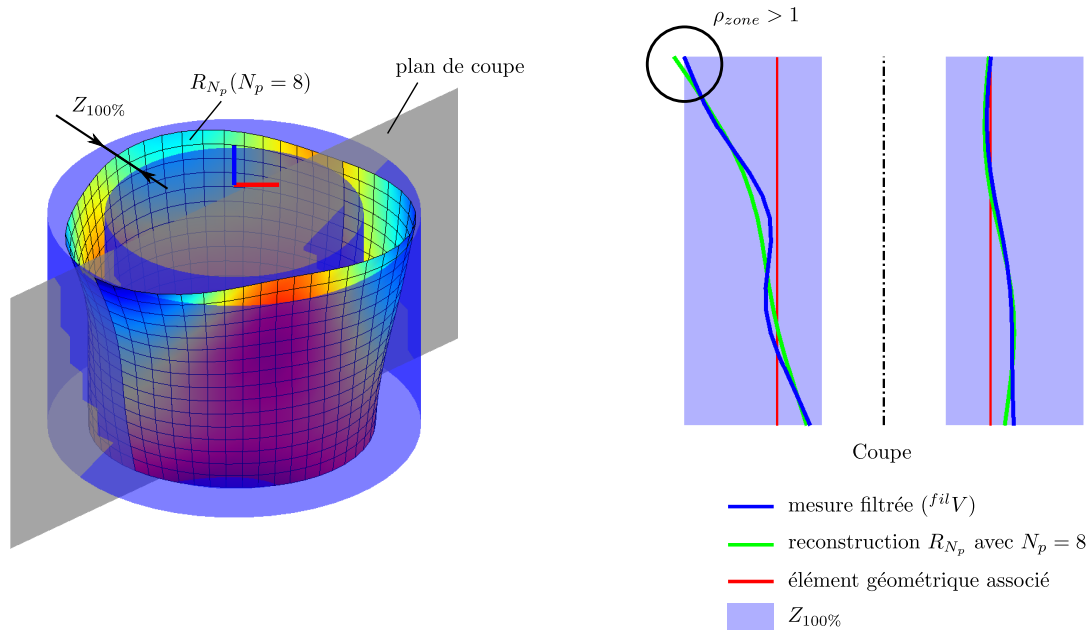


Figure 2.29 – Évolution des deux critères

Le critère de zone  $1 - \rho_{zone}$ , tracé en vert sur la figure 2.29, est exprimé à partir du rapport  $\rho_{zone}$  défini par :

$$\rho_{zone} = \frac{Z_{N_p}}{Z_{100\%}} \quad \text{où } Z_{100\%} = \max(f^{il}V) - \min(f^{il}V) \quad (2.19)$$

Tout d'abord, nous vérifions la convergence vers 0 de la moyenne quadratique du résidu  $f^{il}\epsilon$  avec une monotonie décroissante puisque la projection vectorielle utilisée est équivalente à la minimisation des écarts quadratiques (cf. annexe B). Quant au critère de zone, il tend également vers 0 mais sa convergence n'est pas toujours décroissante et le rapport  $\rho_{zone}$  peut dépasser la valeur de 1 (cf. figure 2.30), car d'une part, ce n'est pas notre critère d'optimisation et d'autre part, il y a un phénomène de compensation lors de la combinaison des modes. Il est cependant intéressant d'introduire ce critère pour montrer l'évolution du défaut de forme au sens de la norme. On peut tout de même convenir que l'efficacité de reconstruction se corrèle relativement bien avec le tri par valeur d'amplitude décroissante que l'on propose. Ainsi, la pente de la courbe de  $\overline{f^{il}\epsilon}$  entre chaque point traduit l'efficacité du défaut élémentaire  $Q'_{p_j}$  ajouté à chaque itération. Nous pouvons conclure, moyennant un seuil fixé, sur le nombre de défauts élémentaires significatifs pour représenter le défaut géométrique de l'élément mesuré.

Figure 2.30 – Illustration du rapport  $\rho_{zone} > 1$ 

### 2.3.3.10 Étape 10 : Interprétation (modale et fonctionnelle)

L'objet de cette dernière étape est d'apporter des conclusions sur les résultats de l'expertise modale. En fonction du type d'étude menée, l'expertise métrologique réalisée permettra de caractériser le procédé de fabrication ou de contrôler une conformité.

- **Caractérisation des procédés**

Ce type d'expertise s'inscrit dans l'étude d'une présérie de fabrication. Nous chercherons à mesurer un échantillon de pièces pour, dans un premier temps caractériser une signature du procédé et dans un second temps, identifier les causes potentielles liées au procédé à travers les défauts élémentaires prépondérants. Une étude plus approfondie du procédé de fabrication permettrait de relier les paramètres procédés aux défauts élémentaires et ainsi calculer des valeurs de correction pour ces paramètres (cf. chapitre 4).

- **Conformité à une spécification**

Dans le cadre d'un contrôle de conformité, l'expertise modale permettra tout d'abord de mettre en évidence les défauts élémentaires qui engendrent la non conformité. Et dans un second temps, l'expertise permettra de vérifier si les spécifications modales définies sont conformes. Nous verrons dans le dernier chapitre les pistes de recherche mises en place pour définir ces spécifications.

## 2.3.4 Estimation de l'incertitude de la DMD

Dans l'objectif d'estimer les sources d'erreur induites par la DMD seule (indépendamment du moyen de mesure), nous avons effectué des tests de comparaison entre la reconstruction de la forme et les écarts normaux initiaux  $^{mes}V$ . Pour s'affranchir du résidu  $\epsilon$ , nous avons utilisé la base modale complète (matrice carrée,  $N_Q = n$  où  $n$  est le nombre de degrés de liberté). Dans l'équation 2.20, nous partons d'un vecteur  $^{mes}V$  numérique que nous projetons dans la base complète. Puis nous calculons le vecteur  $R_{N_Q} = \sum_{i=1}^{N_Q} \lambda_i Q_i$  que nous comparons à  $^{mes}V$ .

$$\Delta = ^{mes}V - R_{N_Q} \quad (2.20)$$

La moyenne quadratique de  $\Delta$  relative à l'amplitude de  $^{mes}V$  donne un réel très proche de  $1.10^{-15}$ , qui est la mantisse des réels utilisés dans l'application (erreur numérique minimale). Nous en déduisons que la DMD n'introduit pas d'erreur quantifiable.

## 2.4 Méthode d'analyse statistique

La formalisation que nous venons de présenter permet d'expertiser les défauts géométriques d'une pièce et de les représenter avec un certain nombre d'outils de visualisation. Nous proposons dans cette section d'exploiter un lot de mesures avec la métrologie modale des surfaces. De cette façon, nous pourrions remonter à la signature du procédé du point de vue des défauts géométriques qu'il crée.

L'analyse statistique que nous allons déployer dans cette section a donc pour objectif de caractériser les défauts géométriques (forme et ondulation principalement) du lot d'écart normaux résiduels  $^{mes}V$ . Pour ce faire, nous présentons le spectre modal des amplitudes du lot, à partir duquel nous pouvons extraire le spectre moyen et écart-type du lot. Afin de rendre visuelle cette caractérisation statistique, nous proposons de représenter les formes géométriques moyenne et écart-type du lot correspondantes. Le passage du spectre à la représentation géométrique nécessite quelques précautions. En effet, pour que les formes géométriques moyenne et écart-type aient un sens, il faut s'assurer que toutes les mesures aient été réalisées dans un repère identique attaché à la pièce. Dans le cas contraire, par exemple sur des pièces à symétrie de révolution où il est difficile de définir un repère avec une orientation identique sur chaque pièce, nous proposons un pré-traitement sur les écarts résiduels de façon à maximiser la corrélation entre ces écarts.

Nous présentons dans la suite le déploiement de ces outils statistiques sur un exemple pédagogique d'un lot de mesures d'un étalon de circularité, acquis par une MMT.

### 2.4.1 Présentation des résultats des mesures

Dans cette section, nous avons choisi de réaliser des mesures d'un d'étalon de circularité avec une MMT dans le but d'évaluer les défauts géométriques engendrés par le moyen de mesure. Nous avons réalisé 25 mesures successives de l'étalon sans le déplacer. La mesure du profil de circularité est effectuée sur l'équateur de l'étalon comme l'indique la figure 2.31. Chaque mesure est caractérisée par 200 points, équirépartis sur le profil.

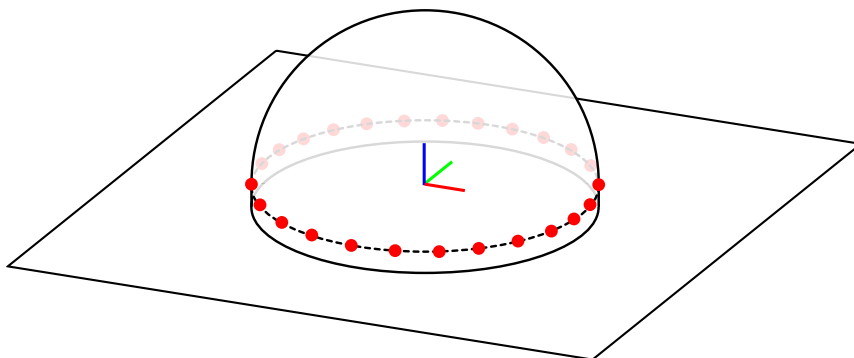


Figure 2.31 – Mesure de l'étalon de circularité

Nous représentons sur la figure 2.32 les écarts normaux résiduels, issus de l'association d'un cercle par le critère des moindres carrés, de chaque profil. Nous utilisons une représentation polaire  $r_j(\theta_k)$  tel que le  $j^e$  profil soit décrit par les  $n = 200$  écarts résiduels et  $\theta_k = 2\pi(k - 1)/n$  avec

$k = 1, \dots, n$ . Les mêmes écarts sont représentés dans un plan cartésien, ainsi nous mettons en évidence la valeur de ces écarts.

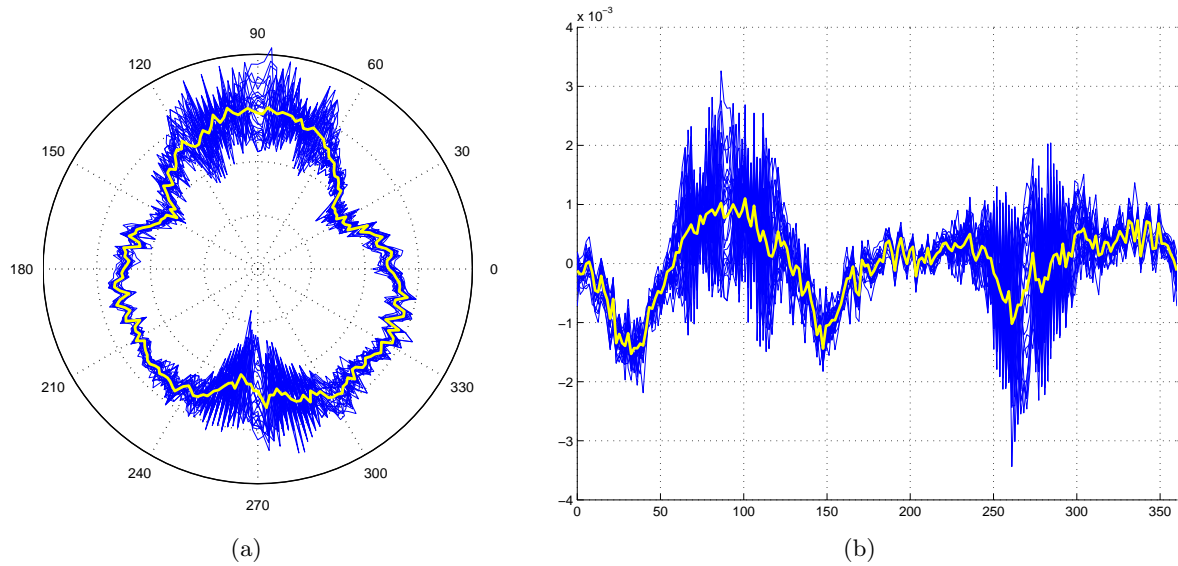


Figure 2.32 – Résultats des 25 mesures de profil de circularité. (a) Représentation polaire, (b) Représentation cartésienne (valeur des écarts en mm). Sur chaque graphique, le profil en gras et jaune représente le profil moyen.

Dans les conditions de mesure précédentes, l'étalon de circularité n'a pas été déplacé, nous pouvons donc exploiter les données statistiques moyenne et écart-type pour caractériser le lot. Par contre si l'on déplace l'étalon entre chaque mesure, les données statistiques sont inexploitable. Cette opération revient à faire l'analogie avec un changement de pièce lorsque l'on souhaite caractériser un lot de pièces issues du même procédé de production. Dans ce cas, nous proposons d'introduire un algorithme mathématique permettant de maximiser la corrélation des écarts de chaque pièce en ajustant le(ou les) degré(s) de liberté restant(s). Pour développer cet algorithme nous nous sommes inspirés des travaux de Colosimo et Pacella [COLOSIMO et PACELLA, 07] sur l'utilisation de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) pour identifier des formes géométriques récurrentes sur des mesures de circularité.

En reprenant notre étude, dans le cas où l'étalon a été déplacé entre chaque mesure, nous allons chercher l'alignement des profils qui maximise la corrélation entre les profils. L'algorithme mathématique consiste, dans ce cas, à faire une permutation circulaire d'un profil  $j$  par rapport à un profil  $i$  référence. Si chaque profil est caractérisé par un nombre  $n$  de points, le nombre de permutations circulaires possibles est alors égal à  $n - 1$ . A chaque permutation, nous évaluons la corrélation entre les  $i^e$  et  $j^e$  profils, à l'aide du critère de corrélation donné par

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (2.21)$$

où  $\sigma_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_i(k) - \bar{y}_i) (y_j(k) - \bar{y}_j)$  est la covariance entre le  $i^e$  et  $j^e$  profil, la variance associée au  $i^e$  profil est alors définie par  $\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_i(k) - \bar{y}_i)^2$  et  $\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_i(k)$  est la valeur moyenne de chaque profil  $i$ . Il est à noter que dans notre cas cette quantité est nulle puisque les écarts résiduels des profils proviennent d'une minimisation des moindres carrés. La meilleure permutation correspond alors à l'indice correspondant à la valeur de corrélation la plus grande. En réitérant cette opération, d'une part avec les  $p - 1$  profils restant hormis le  $j^e$  avec le  $i^e$  profil comme référence et d'autre part en faisant tourner l'indice  $i$  du profil référence, nous obtenons une

matrice  $R$  de corrélation symétrique ( $p \times p$ ). Cette matrice définit sur chaque ligne les meilleures permutations de chaque profil  $j$  avec le profil  $i$  comme référence.

Nous choisissons d'identifier la ligne  $i$  ayant la somme des moyennes des écarts quadratiques, entre les  $p$  profils permutés pour corrélérer au mieux au profil  $i$  et le  $i^e$  profil, la plus petite. C'est-à-dire que pour  $i$  allant de 1 à  $p$ , on cherche :

$$\min \left( \sum_{j=1}^p \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (mes\ per(i) V_{kj} - mes V_{ki})^2}{n}} \right) \quad (2.22)$$

où  $mes V_i$  correspond au vecteur mesure du  $i^e$  profil et  $mes\ per(i) V_j$  correspond au vecteur mesure du profil permuté  $j$ , qui corrèle au mieux avec celui de  $i$ .

La figure 2.33 montre un lot de 25 profils de circularité pour lequel nous avons volontairement déplacé l'étalon entre chaque mesure des 200 points. Le résultat de l'algorithme de corrélation précédent sur ce lot est présenté sur la figure 2.34. On observe alors que les profils de circularité ont un comportement géométrique commun, observation que l'on ne pouvait pas faire sur la figure 2.33. Ce comportement systématique indique que le procédé de mesure, que l'on a employé, a une signature spécifique. Ce comportement sera par la suite analysé via la Décomposition Modale Discrète.

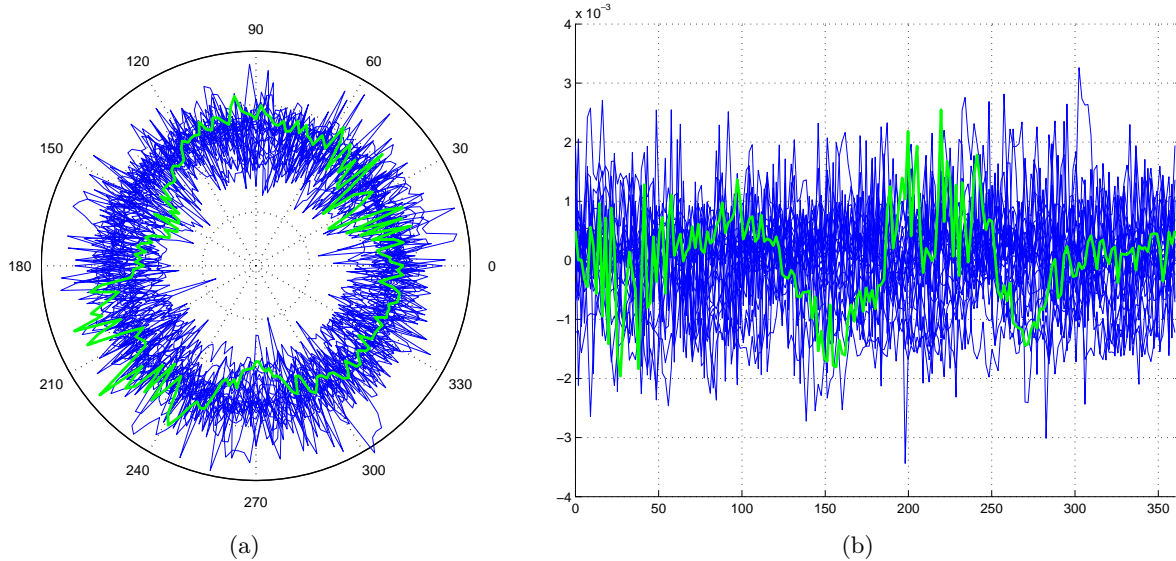


Figure 2.33 – Résultats des 25 mesures de profil de circularité sans permutation. (a) Représentation polaire, (b) Représentation cartésienne (valeur des écarts en mm). Sur chaque graphique, le profil en gras et vert représente l'un des 25 profils.

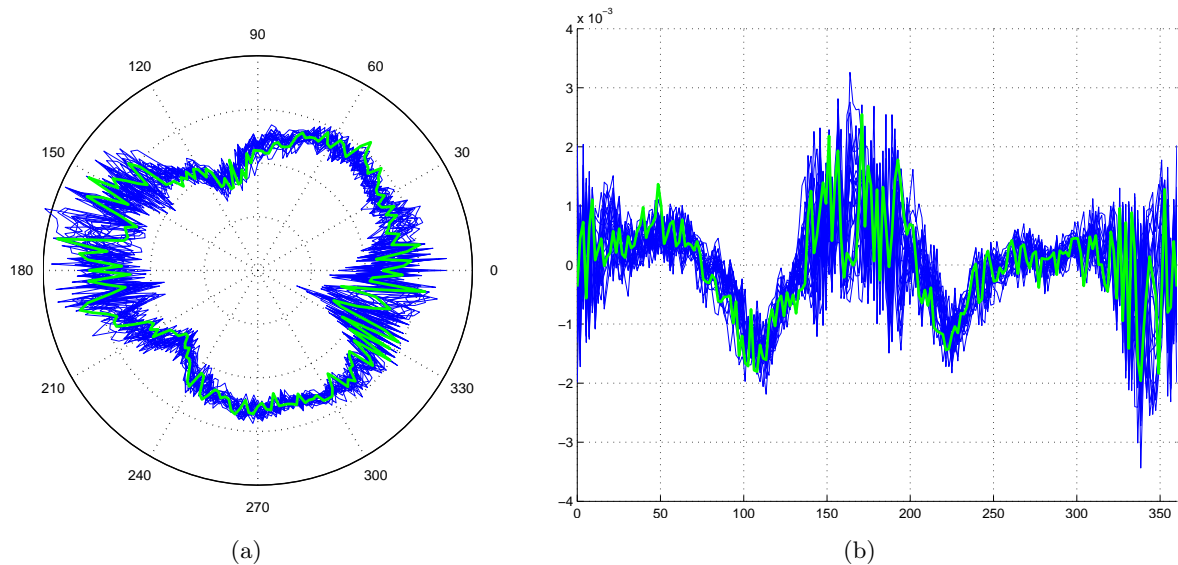


Figure 2.34 – Résultats des 25 mesures de profil de circularité après optimisation des permutations. (a) Représentation polaire, (b) Représentation cartésienne (valeur des écarts en mm). Sur chaque graphique, le profil en gras et vert représente l'un des 25 profils.

## 2.4.2 La DMD d'un lot

La DMD permet de décomposer un ensemble d'écarts de forme résiduels, sous forme d'un vecteur  $^{mes}V$ , comme une combinaison linéaire de défauts élémentaires  $Q_i$ . Le résultat de cette décomposition forme un vecteur  $\lambda$ , composé des coordonnées modales  $\lambda_i$ . Après traitement, nous extrayons un nouveau paramétrage des défauts élémentaires  $Q_i$ , compte tenu des couples de défauts générés. Ce nouveau paramétrage caractérise alors les défauts élémentaires  $Q'_j$ , avec une amplitude  $\lambda'_j$  et une phase  $\phi'_j$ .

L'objectif de cette section est de proposer un certain nombre d'outils pour caractériser non plus une seule mesure mais un lot de mesures. Dans un premier temps, nous caractérisons le lot avec une approche spectrale et dans un second temps, nous interprétons cette approche de façon géométrique pour faciliter la compréhension de l'univers spectral. Ces approches ont fait l'objet de travaux sur des applications 3D [FAVRELIERE *et al.*, 07].

### 2.4.2.1 Représentation d'un lot par l'approche spectrale

D'une façon exhaustive, nous représentons, tout d'abord, l'ensemble des  $p$  spectres modaux  $\lambda'$  pour chaque mesure  $m$ . On obtient ainsi une succession de spectres représentés sur le même histogramme (cf. figure 2.35). Visuellement, on peut identifier si l'ensemble des mesures traduit une signature spécifique liée au procédé d'obtention, en l'occurrence dans notre cas d'étude elle est liée au moyen de mesure.

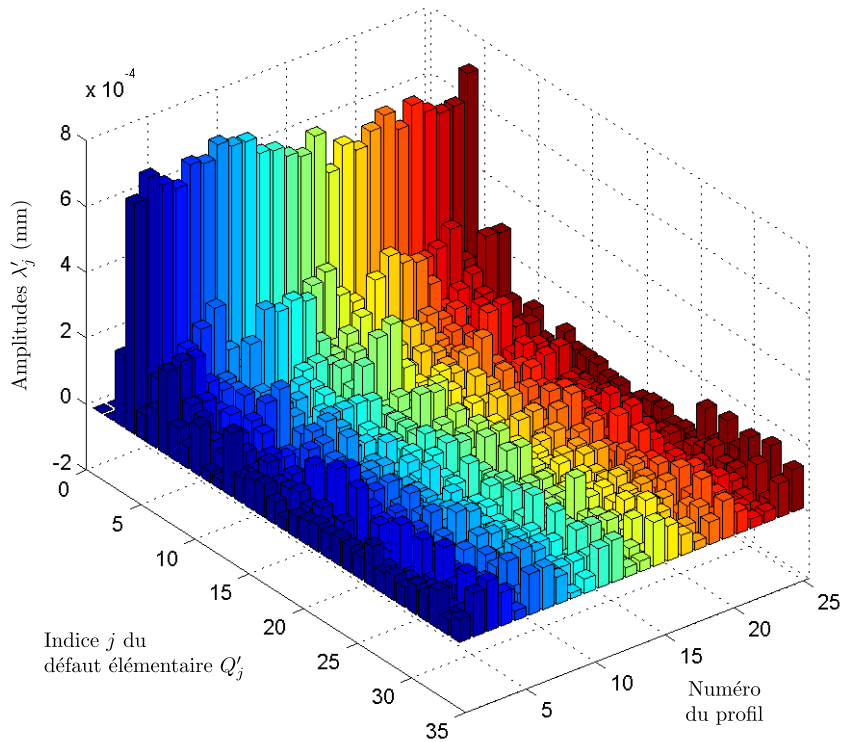


Figure 2.35 – Spectre modal des amplitudes  $\lambda_j$  du lot

Pour les aspects visuels de l'exemple, nous représentons les premiers défauts de la base naturelle  $Q_i$  et les défauts  $Q'_j$  que nous avons synthétisés suite à la DMD (cf. tableau 2.8). Sur l'histogramme 3D, figure 2.35, sont représentées les amplitudes  $\lambda_j$ .

$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$
$Q'_1$	$Q'_2$	$Q'_3$	$Q'_4$			
$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$	$\lambda_3 Q_3$	$\lambda_4 Q_4 + \lambda_5 Q_5$	$\lambda_6 Q_6 + \lambda_7 Q_7$			
$(\lambda'_1, \phi'_1)$	$\lambda'_2$	$(\lambda'_3, \phi'_3)$	$(\lambda'_4, \phi'_4)$			

Tableau 2.8 – Base modale naturelle  $Q$  et sa synthétisation en un ensemble de défauts  $Q'_j$

De la même façon nous pouvons représenter la phase angulaire  $\phi'_j$  de chaque défaut  $Q'_j$  et pour chaque profil mesuré. On trace alors l'histogramme 3D sur la figure 2.36.



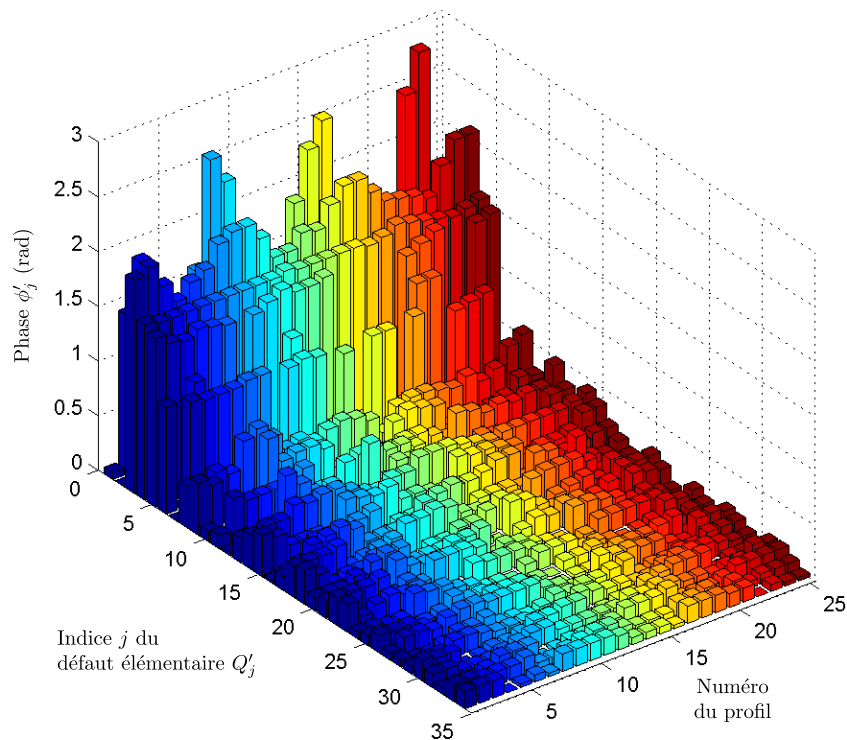


Figure 2.36 – Spectre modal de phase du lot

Nous pouvons nous interroger sur les limites d'affichage de ce type de représentation. En effet dès que le lot devient trop important il est difficile d'en retirer une tendance. C'est pourquoi dans la suite nous proposons de travailler sur un spectre en deux dimensions, représentant la moyenne des amplitudes et leur écart-type associé. Nous verrons que cette analyse statistique a malgré tout des limites et nous envisagerons quelques pistes de travail pour y répondre.

#### 2.4.2.2 Approche spectrale statistique

On propose dans cette section une analyse statistique du spectre modal du lot. Concernant le spectre modal des amplitudes, le calcul de la moyenne et de l'écart-type ne nous pose aucune difficulté. Par contre, l'étude statistique du spectre de phase d'un lot est plus délicate et notre définition de la phase nécessite quelques modifications pour obtenir des valeurs de moyenne et écart-type vraisemblables (cf. figure 2.37). De plus, ne voyant qu'un intérêt limité aux données statistiques de la phase, nous nous limitons au calcul de la phase moyenne d'un lot à partir de la reconstruction moyenne du lot. Les données concernant la phase relative entre les modes prépondérants semblent avoir plus d'intérêt dans l'étude de lots de pièces. C'est une piste de recherche qui reste à explorer.



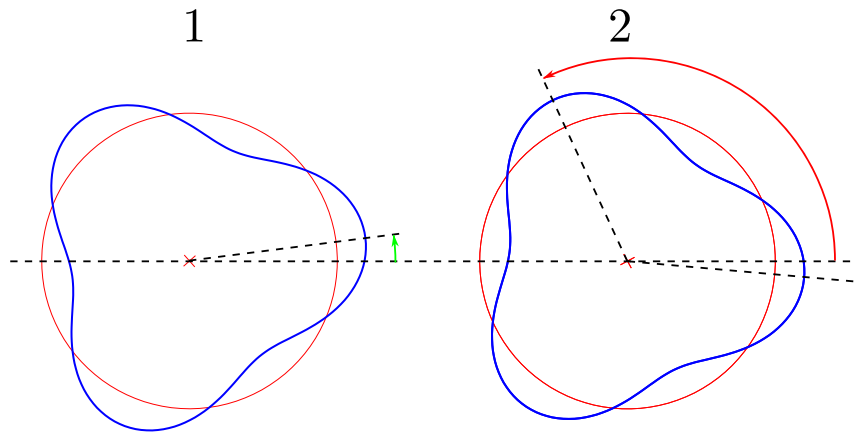


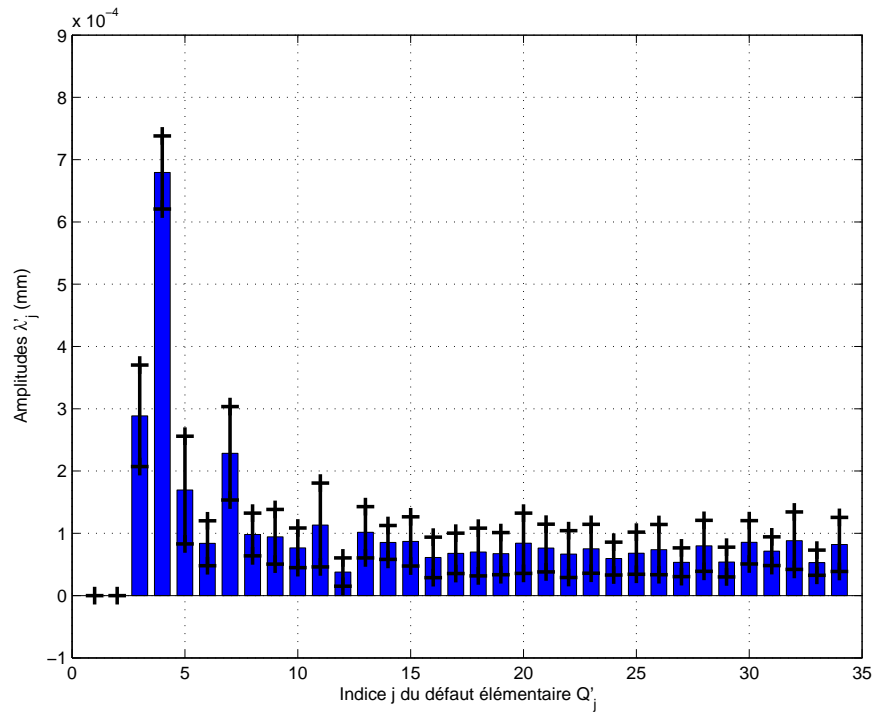
Figure 2.37 – Problème posé par notre définition de la phase angulaire

La représentation du spectre modal statistique correspond donc à la moyenne et à l'écart-type de chaque  $\lambda'_j$ , que nous pouvons écrire :

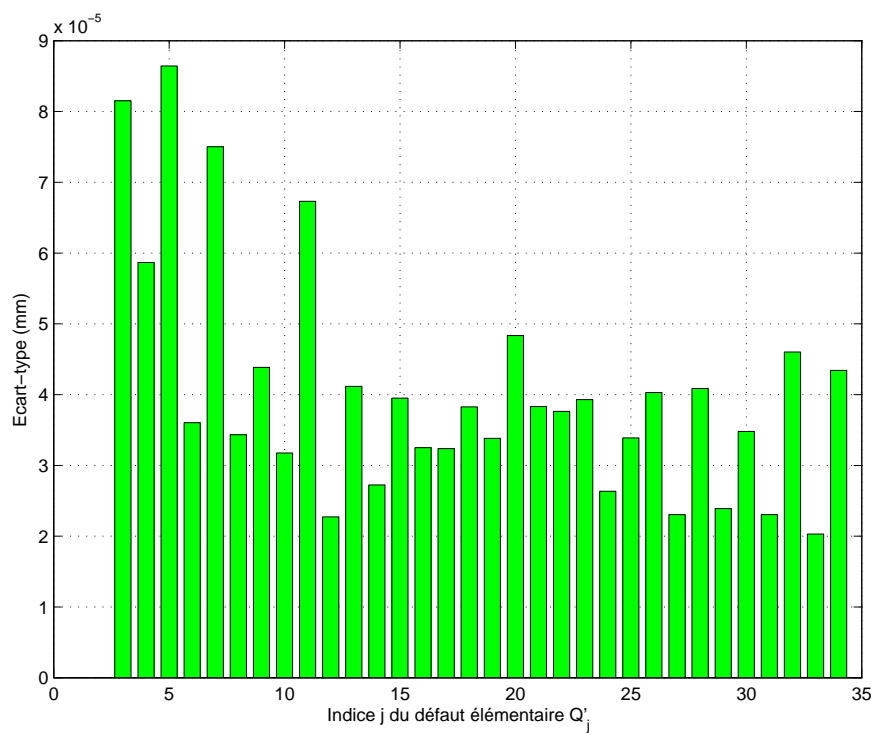
$$\bar{\lambda}'_j = \frac{1}{p} \sum_{m=1}^p \lambda'_{jm} \quad (2.23)$$

$$\sigma_{\lambda'_j} = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{m=1}^p (\lambda'_{jm} - \bar{\lambda}'_j)^2} \quad (2.24)$$

Nous montrons sous la forme d'un spectre le résultat de ces deux quantités (cf. figure 2.38). La première représentation figure 2.38(a) met en évidence les valeurs moyennes des amplitudes les plus élevées, que nous avons appelées prépondérantes précédemment, enrichies par une information supplémentaire sur sa variabilité, en l'occurrence ici plus ou moins un écart-type. Nous pouvons ainsi conclure sur la pertinence de chaque défaut élémentaire  $Q'_j$  à caractériser le lot. Le second spectre figure 2.38(b) illustre les valeurs numériques des écarts-types associés aux  $\lambda'_j$ . Pour faciliter l'interprétation de cette approche spectrale statistique, nous proposons dans la section suivante, d'en construire la représentation géométrique associée.



(a)



(b)

Figure 2.38 – Représentation spectrale des résultats du calcul des moyennes et écarts-types des amplitudes  $\lambda'_j$  du lot. (a) Représentation de la moyenne avec la superposition de  $\pm\sigma_{\lambda'_j}$ , (b) Représentation d'un écart-type.

### 2.4.2.3 Écarts de forme géométriques moyens et écarts-types

Du point de vue de l'expert en métrologie modale des surfaces, l'approche spectrale statistique peut s'avérer suffisante pour décrire la forme géométrique du lot. Cependant, confrontés à des problèmes de compréhension avec nos partenaires industriels, nous proposons de représenter les écarts de forme géométriques moyens et les écarts-types correspondants aux informations statistiques issues de la DMD.

Ces représentations peuvent être obtenues de deux manières différentes, soit à partir des écarts de forme filtrés ou reconstruits par la DMD, soit à partir des caractéristiques statistiques modales du lot. Dans le deuxième cas, compte tenu des limites évoquées dans la section précédente (§ 2.4.2.2), nous utilisons les moyennes et écarts-types des coordonnées modales naturelles  $\lambda_{im}$  de chaque mesure  $m$ , obtenues initialement par la DMD. Si l'on définit les écarts de forme filtrés par la DMD de chaque mesure  $m$  tel que,

$${}^{fil}V_m = \sum_{i=1}^{N_Q} \lambda_{im} Q_i \quad (2.25)$$

alors la moyenne et l'écart-type des écarts de forme filtrés du lot  ${}^{fil}V$  s'obtiennent simplement en calculant la moyenne et l'écart-type de chaque écart filtré  $k$  sur les  $p$  mesures (cf. équation 2.26 et 2.27).

$$\overline{{}^{fil}V_k} = \frac{1}{p} \sum_{m=1}^p {}^{fil}V_{km} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{{}^{fil}V_k} = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{m=1}^p \left( {}^{fil}V_{km} - \overline{{}^{fil}V_k} \right)^2} \quad (2.27)$$

À partir des caractéristiques statistiques des  $\lambda_{im}$ , nous obtenons aisément la moyenne de l'écart de forme filtré  $k$  :

$$\overline{{}^{fil}V_k} = \sum_{i=1}^{N_Q} \bar{\lambda}_i Q_{ki} \quad (2.28)$$

En ce qui concerne l'écart-type de chaque écart de forme filtré  $k$ , il est lié à la matrice de variance-covariance  ${}^\lambda\Sigma$  des  $\lambda_{im}$  du lot. Par la relation matricielle,

$${}^{fil}V\Sigma = Q^T \cdot {}^\lambda\Sigma \cdot Q \quad (2.29)$$

nous obtenons la matrice de variance-covariance  ${}^{fil}V\Sigma$  des  ${}^{fil}V_{km}$ . La diagonale de cette matrice est alors constituée des écarts-types au carré de chaque écart de forme filtrée  $k$ . On présente sur la figure 2.39, les représentations géométriques de ces caractéristiques statistiques. Il a été choisi ici de filtrer les écarts de forme mesurés avec les défauts élémentaires  $Q_i$  correspondants aux dix amplitudes moyennes  $\bar{\lambda}_j$  les plus élevées.

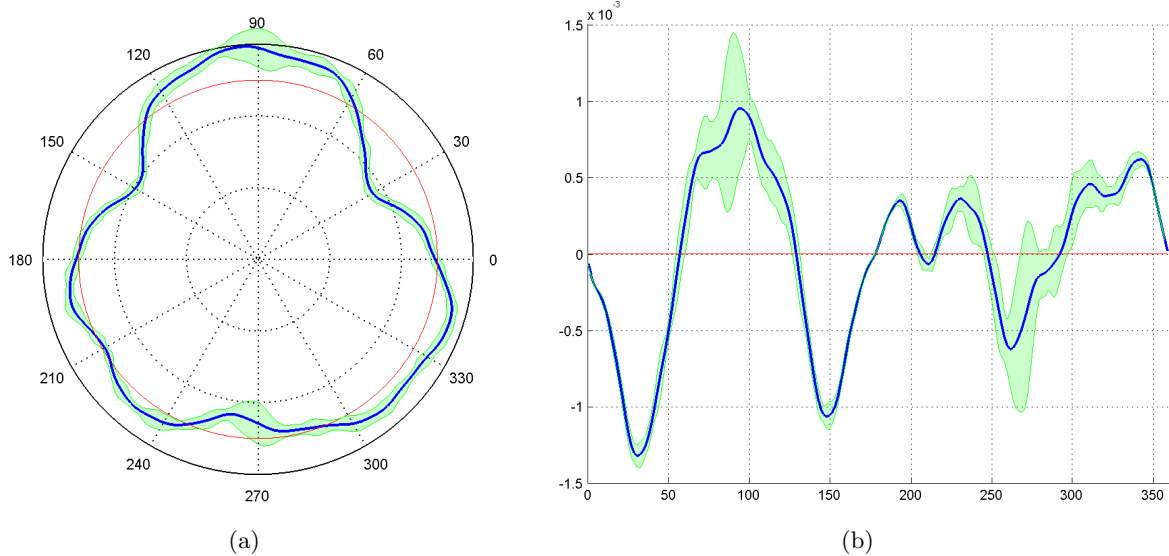


Figure 2.39 – Représentation de la moyenne et écart-type de chaque écart de forme filtré par la DMD du lot des 25 profils de circularité. (a) Représentation polaire, (b) Représentation cartésienne (valeur des écarts en mm). Sur chaque graphique, le profil en gras et bleu représente la moyenne et la zone verte  $\pm\sigma$ .

## 2.5 Application à des exemples industriels

Dans le cadre de ces travaux, nous avons rencontré un certain nombre d'exemples industriels, qui nous ont permis de développer et d'étendre notre démarche métrologique sur l'analyse de la forme des surfaces [ADRAGNA *et al.*, 06, FAVRELIERE *et al.*, 09]. Nous en présentons trois exemples dans la suite de cette section.

### 2.5.1 Étude d'une surface conique

#### • Problématique

L'expertise métrologique réalisée sur cet exemple a pour but de caractériser la qualité géométrique de la forme d'une surface conique (cf. figure 2.40). Cette surface mâle est en contact avec une surface femelle du même type pour réaliser une fonction d'étanchéité. Le respect de cette fonctionnalité requiert nécessairement un défaut de forme le plus faible possible.

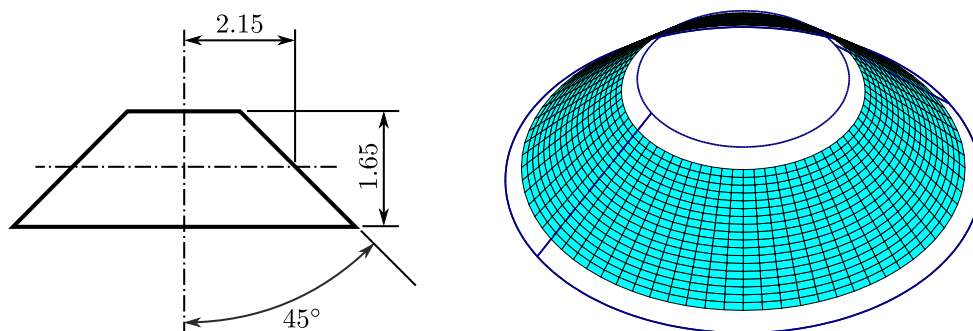
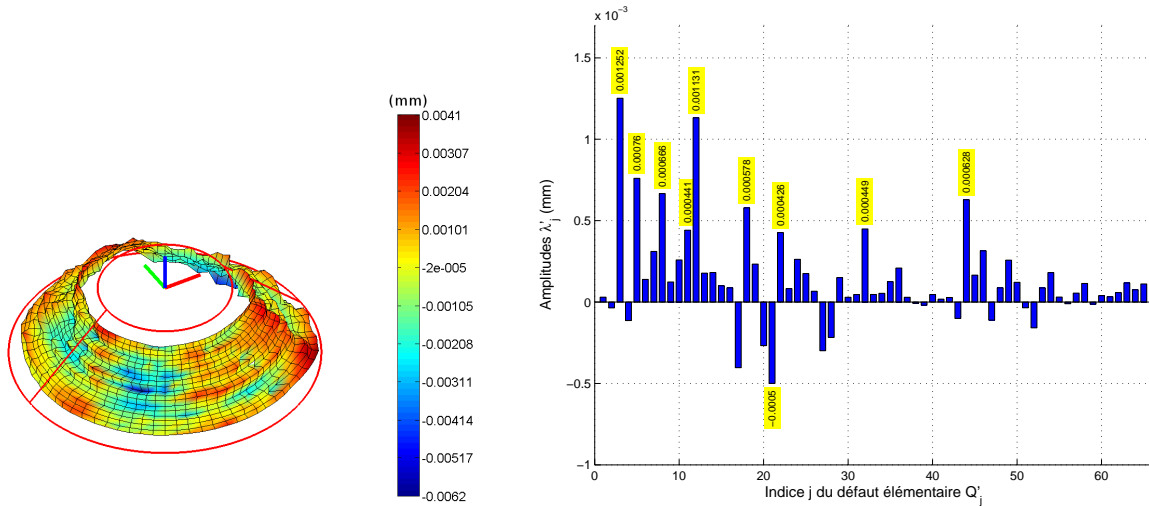


Figure 2.40 – Surface conique mesurée

• Démarche

Pour paramétrer la forme géométrique de cette surface, nous appliquons notre démarche sur les écarts normaux résultants de la mesure (cf. figure 2.41(a)). Nous caractérisons ainsi la forme géométrique de la surface conique par un ensemble de défauts prépondérants (cf. tableau 2.9). Nous avons alors proposé plusieurs types de représentation pour illustrer visuellement et qualitativement les résultats de notre expertise (cf. figure 2.42). Il est clair que pour établir une relation directe, au sens mathématique, entre les performances de l'étanchéité et les paramètres modaux, un travail de modélisation sera nécessaire. Nous verrons dans le dernier chapitre les différentes pistes de travail que nous avons étudiées pour lier la fonction à la forme.



(a) Cartographie des écarts normaux résiduels

(b) Spectre modal des amplitudes

Figure 2.41 – Décomposition modale des écarts normaux

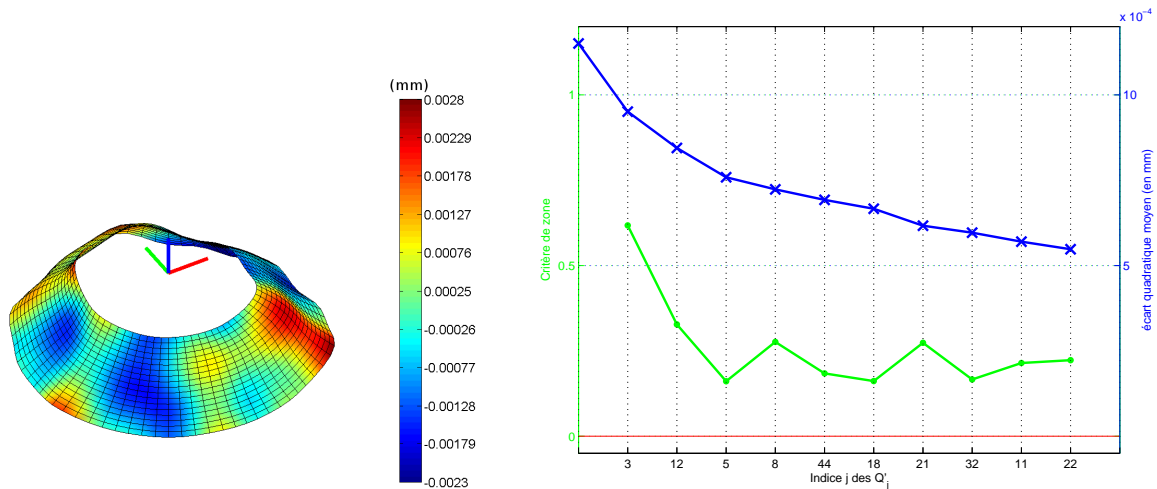
$Q'_3$	$Q'_{12}$	$Q'_5$	$Q'_8$	$Q'_{44}$
$Q'_{18}$	$Q'_{21}$	$Q'_{32}$	$Q'_{11}$	$Q'_{22}$

Tableau 2.9 – Représentation des 10 premiers modes prépondérants

• Commentaires

Dans le cadre de cette application, nous avons pu mettre en évidence une dizaine de modes prépondérants dont la pertinence est confirmée par la convergence vers 0 des deux critères de reconstruction. Nous avons également pu quantifier ceux-ci par l'intermédiaire de leur valeur d'amplitude (cf. figure 2.41(b)). Nous apportons donc ici un éclairage original sur les défauts de forme de la surface conique. Il est clair que leur interprétation par rapport à la fonction est laissée au fabricant, qui selon sa situation (client ou fournisseur) a plus ou moins connaissance de la fonctionnalité de la pièce. La quantification de la performance de la fonction vis-à-vis des défauts géométriques

nécessite une bonne connaissance de l'assemblage et une étude approfondie de la relation forme-fonction.



(a) Cartographie des écarts normaux reconstruits à partir des 10 modes prépondérants

(b) Évolution des critères de reconstruction

Figure 2.42 – Caractérisation du défaut de forme

## 2.5.2 Étude d'un échantillon de surfaces cylindriques

### • Problématique

Cette étude de lot s'inscrit dans une étude expérimentale du type suivi de production. Un lot de plusieurs centaines de pièces (cf. figure 2.43) a été usiné et nous présentons ici le résultat d'un prélèvement d'une pièce sur cinquante. A l'aide des outils mis en place dans la section précédente, nous caractérisons les défauts de forme créés par le moyen de production à partir de la mesure d'une surface cylindrique dressée.

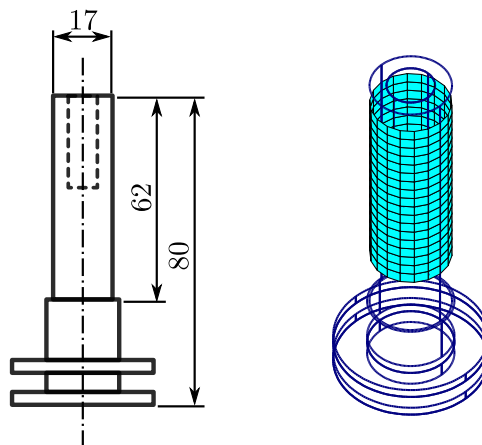


Figure 2.43 – Surface cylindrique mesurée

### • Démarche

Nous avons analysé un échantillon de 14 pièces. Nous avons mis en évidence les cinq premiers défauts prépondérants (cf. figure 2.44), qui sont caractéristiques des écarts de forme mesurés sur les surfaces cylindriques. La représentation du spectre moyen et écart-type de la figure 2.45, nous montre que ces défauts élémentaires, identifiés comme prépondérants, sont relativement stables au

cours de la production.

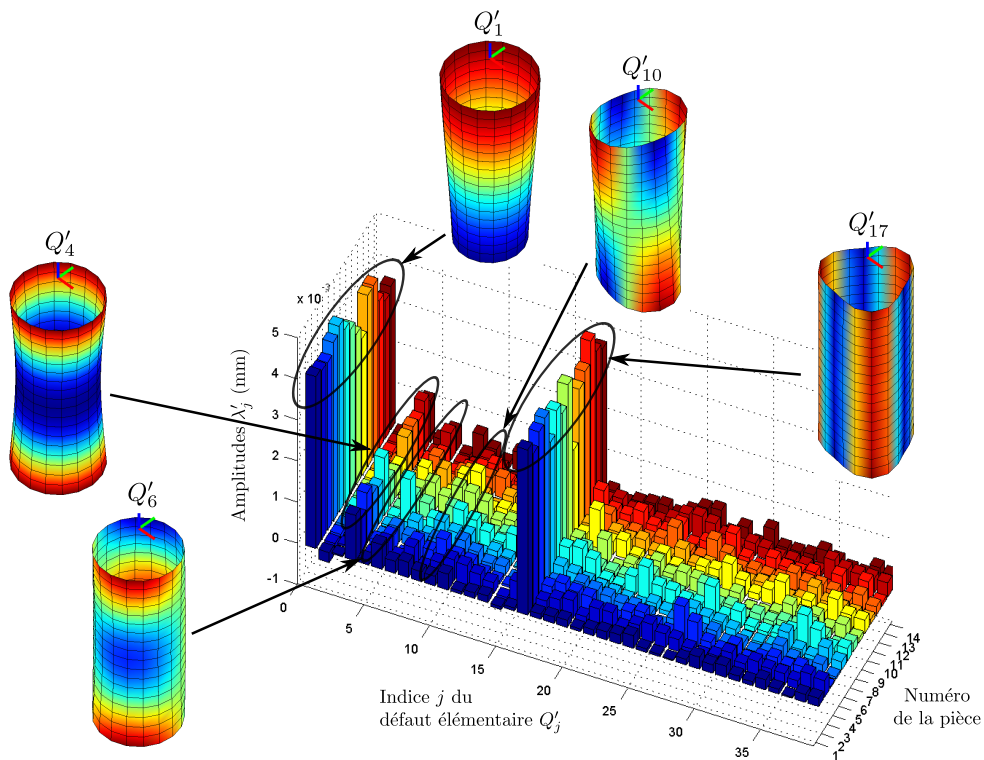


Figure 2.44 – Spectre modal des amplitudes  $\lambda'_j$  du lot

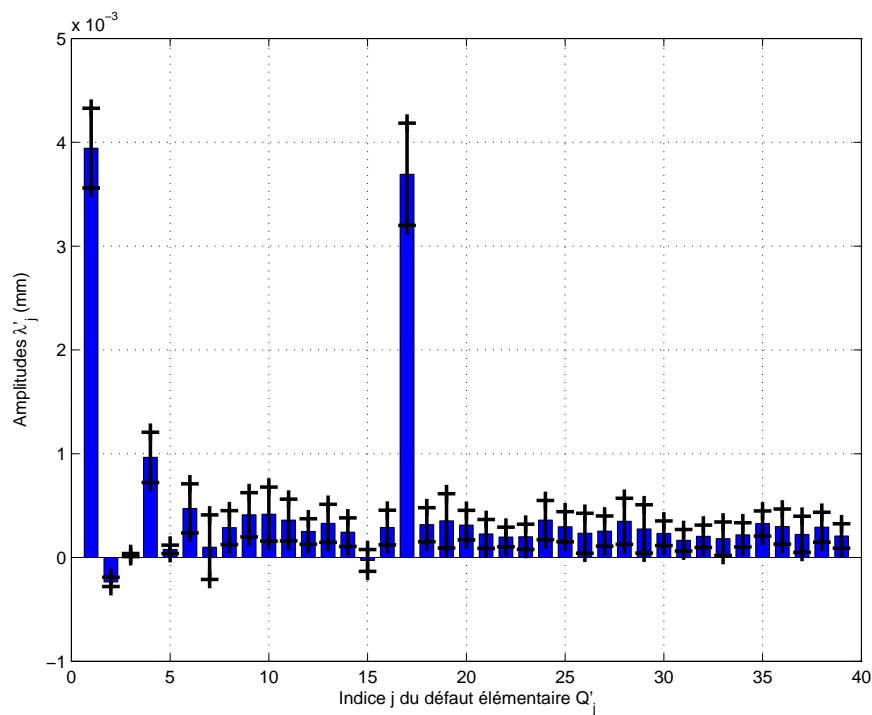


Figure 2.45 – Représentation spectrale de la moyenne et écart-type du lot

Nous représentons les écarts de forme moyens filtrés par les cinq défauts prépondérants, accompagnés de la cartographie des écarts-types. On peut alors identifier le défaut de forme moyen et son amplitude ainsi que les zones dans lesquelles on aura les plus grandes dispersions.

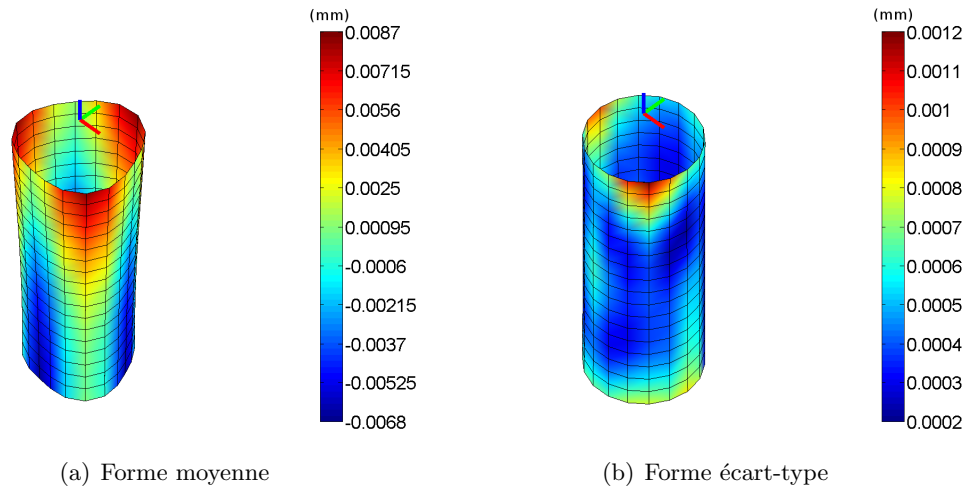


Figure 2.46 – Représentation de la moyenne et écart-type de chaque écart de forme filtré par la DMD du lot

- **Commentaires**

Cette démarche permet aux industriels d’analyser avec une méthode rigoureuse et visuelle les défauts de forme d’un lot de pièces. Dans cet exemple nous avons mis en évidence cinq modes prépondérants, qui révèlent que le procédé de fabrication est répétable et reproductible. L’entreprise partenaire peut ainsi effectuer son expertise sur la criticité des formes prépondérantes correspondantes.

### 2.5.3 Étude d’une pré-série de pièces plastiques

Cette dernière application montre notamment que la métrologie modale des surfaces s’applique également à des géométries plus complexes, en l’occurrence à la forme gauche de capots de balances en plastique. Il est à noter cependant que la DMD doit être mise en œuvre par un expert dans la mesure où nous n’avons plus affaire à un élément géométrique simple dont la base modale générique est connue. Nous devons, dans ce cas, calculer les modes spécifiques à cette application et ce, seulement pour la première pièce.

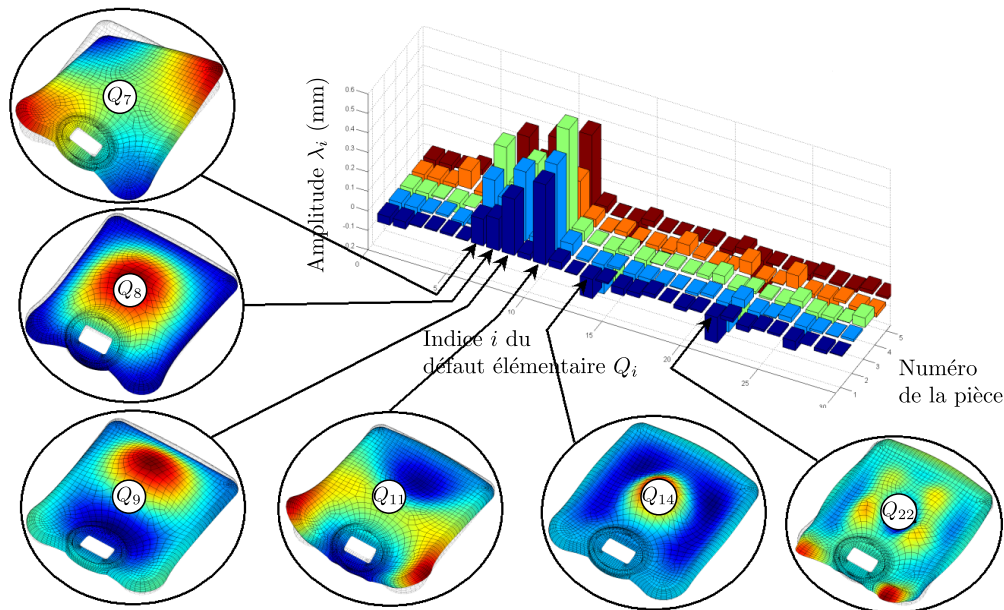
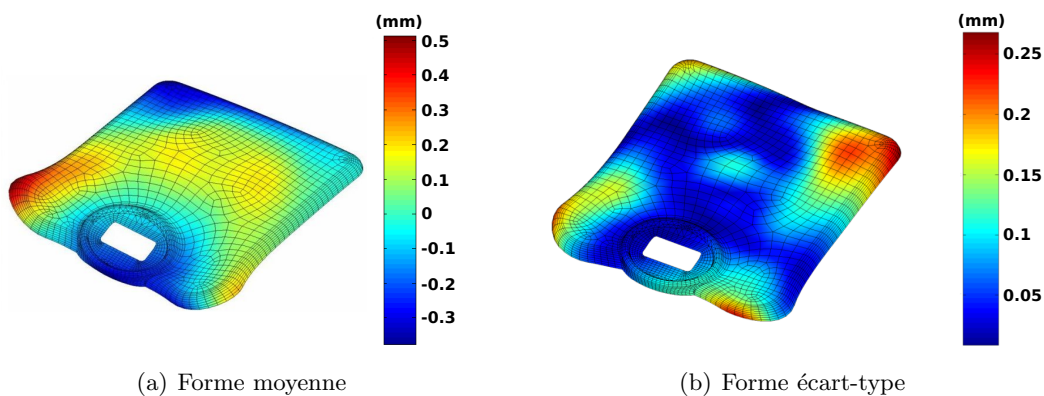
- **Problématique**

L’entreprise concernée met en œuvre un plan de surveillance de ces pièces plastiques à l’aide d’un tableau de caractéristiques. Ce tableau n’est pas simple à déchiffrer (beaucoup de données) et ne permet pas de voir les couplages de données.

- **Démarche**

En prenant un lot de capots (cinq pièces seulement), nous décrivons sa signature modale et en extrayons les caractéristiques moyennes et écarts types. Notre collaboration a permis de proposer [FAVRELIÈRE *et al.*, 07] plusieurs types de représentations d’un lot dont la figure 2.47 montre l’exemple. Tout d’abord, nous mettons en évidence les défauts prépondérants du lot (graphiquement et par leur valeur d’amplitude). Puis par troncature du spectre nous obtenons la forme moyenne du lot de capots et la cartographie des écarts types (cf. figure 2.48). Nous pouvons, comme dans le cas précédent, identifier les zones dans lesquelles on aura les plus fortes dispersions vis-à-vis de la forme moyenne.



Figure 2.47 – Spectre modal des amplitudes  $\lambda_i$ 

(a) Forme moyenne

(b) Forme écart-type

Figure 2.48 – Représentation de la moyenne et écart-type de chaque écart de forme filtré par la DMD du lot

### • Commentaires

Dans cette application nous voyons tout l'intérêt des représentations graphiques 3D qui sont bien plus explicites que le tableau de caractéristiques de notre partenaire. La synthèse du lot par l'intermédiaire des cartographies moyenne et écart type offre la possibilité d'estimer les défauts engendrés par le procédé d'injection ou par la géométrie du moule.

## 2.6 Conclusion

La métrologie modale des surfaces est une méthode d'expertise géométrique basée sur un paramétrage particulier, que nous avons appelé paramétrage modal. L'objectif de cette méthode est de caractériser la forme des pièces avec une formulation mathématique, pour que la définition du défaut de forme soit la moins ambiguë possible. Le paramétrage modal est issu de la Décomposition Modale Discrète (DMD) des écarts géométriques mesurés sur la surface que l'on souhaite paramétrer. En effet, ces écarts sont décomposés dans une base de défauts élémentaires, appelés modes ou déformées modales. Il en résulte ainsi un ensemble de coefficients pondérateurs, que l'on nomme

coordonnées modales. Ce paramétrage a donc fait l'objet d'une application dans le domaine de la métrologie.

Partis du constat que le défaut de forme est le parent pauvre du tolérancement, nous avons déployé un outil d'expertise des formes. Tout d'abord, cet outil fournit un certain nombre de représentations graphiques permettant de décrire la forme géométrique des surfaces mesurées. Ces représentations graphiques s'appuient sur le paramétrage modal. Nous avons ensuite introduit les outils statistiques traditionnels pour traiter des lots de pièces, nous permettant entre autres de caractériser la forme moyenne et écart-type du lot. À travers la mise en place de ces outils, nous pouvons :

- visualiser les défauts géométriques de forme prépondérants d'une surface,
- caractériser les défauts géométriques générés par un procédé de fabrication par l'étude d'un lot,
- contrôler la conformité d'une mesure de forme sur une pièce ou un lot.

Dans le cadre de cette application métrologique, le paramétrage modal est un paramétrage particulièrement intéressant puisque d'une part, il sait s'adapter à tous les types d'éléments géométriques et que d'autre part, il fait partie de la famille des paramétrages dont les descripteurs sont définis *a priori*, ce qui lui offre comme propriété de pouvoir décrire n'importe quel type de défaut (de la même façon que la Transformée de Fourier). Nous allons voir dans le chapitre suivant que ce paramétrage peut également avoir un intérêt dans des assemblages de pièces, où les défauts de forme des surfaces en contact ne peuvent pas être négligés.



## Assemblage de surfaces avec défauts de forme

### *Objectif du chapitre*

*L'objectif de ce chapitre est de montrer l'influence des écarts géométriques de forme dans l'assemblage de composants. En enrichissant le modèle des petits déplacements par le paramétrage modal, que nous avons introduit au chapitre précédent, nous mettons en évidence, sur un exemple simple d'assemblage de deux pièces, l'intérêt de prendre en compte les écarts de forme. Pour ce faire, nous proposons une approche d'assemblage de composants, appliquée à des cas d'assemblages sans jeux et à efforts imposés.*

### 3.1 Modèle et outils de tolérancement 3D

D'une façon générale, un produit mécanique doit remplir des fonctions particulières définies par le cahier des charges fourni par le client. Le travail du concepteur consiste alors à trouver une solution à un moindre coût pour répondre aux exigences fonctionnelles fixées. Ces exigences peuvent être, par exemple, des fonctions d'étanchéité, de guidage, d'assemblabilité, etc.

Lorsque l'on conçoit un mécanisme, l'aspect assemblabilité peut paraître évident mais c'est la première fonction que doit vérifier le mécanisme. Dans des soucis d'interchangeabilité, le concepteur doit alors être en mesure de définir les variations géométriques maximales de la pièce, qui assurent l'assemblage du mécanisme. Ces spécifications doivent être compréhensibles par tous les acteurs du cycle de vie du produit, c'est la vocation du tolérancement géométrique que propose la norme par un langage graphique. Cependant, les aspects qualitatif et quantitatif du tolérancement ne sont pas proposés. C'est pourquoi de nombreuses équipes de recherche, notamment françaises, travaillent sur des méthodes d'analyse et de synthèse de tolérance, basées sur des modèles de tolérancement. Des synthèses bibliographiques de ces méthodes ont été réalisées dans les travaux de Chase et Parkinson [CHASE et PARKINSON, 91] puis ceux de Dantan [DANTAN, 00]. Un modèle de tolérancement est un support conceptuel permettant de transférer les exigences fonctionnelles d'un mécanisme vers les composantes du mécanisme.

Compte tenu de ces innombrables travaux, nous renvoyons le lecteur sur des états de l'art dressés, notamment par [PETIT, 04, GERMAIN, 07], et nous proposons une classification de diverses

travaux dont la thématique commune concerne l'assemblage de composants sans jeux et à efforts imposés. En effet, ces travaux font intervenir la plupart des méthodes de tolérancement auxquelles nous faisons référence précédemment, et s'inscrivent dans le champ d'application de ce chapitre. La classification présentée dans le tableau 3.1 est à double entrée, nous faisons d'une part, la distinction entre une Mise en Position (MIP) avec et sans prise en compte du défaut de forme et d'autre part, entre des composants déformables et indéformables.

Géométrie déformable	[MERKLEY, 98] [SAMPER et GIORDANO, 98, PERPOLI, 04] [SELLEM et RIVIÈRE, 98] [CAMELIO <i>et al.</i> , 03] [SHIU <i>et al.</i> , 03] [MOUNAUD <i>et al.</i> , 07]	[HUANG et CEGLAREK, 02] [CID <i>et al.</i> , 04, CID, 05]
Géométrie indéformable	[GIORDANO <i>et al.</i> , 92, GIORDANO <i>et al.</i> , 05] [BALLOT, 95] [TEISSANDIER <i>et al.</i> , 99, BALLU, 09] [ANSELMETTI, 01] [DAVIDSON <i>et al.</i> , 02] [LAPERRIÈRE <i>et al.</i> , 02] [VILLENEUVE et VIGNAT, 05]	[GUPTA et TURNER, 93] [ANSELMETTI et BISSON, 01] [RADOUANI, 03] [LEE <i>et al.</i> , 06] [AMETA <i>et al.</i> , 07] [HUANG et KONG, 08] [PIERCE et ROSEN, 08] [MORIÈRE <i>et al.</i> , 09] [SAMPER <i>et al.</i> , 09]
	MIP sans défaut de forme	MIP avec défaut de forme

Tableau 3.1 – Classification des références bibliographiques sur les types d'assemblages

Sans vouloir être exhaustifs, nous proposons cet ensemble de travaux répondant à la problématique d'assemblage de composants par différentes approches de tolérancement et modèles associés, en faisant une distinction sur la prise en compte du défaut de forme.

### 3.1.1 Mise en position sans défaut de forme

#### • Géométrie indéformable

Dans le cas d'assemblage de composants, supposés indéformables, les approches sont nombreuses. Anselmetti introduit et déploie la méthode CLIC (Cotation en Localisation avec Influence des Contacts) [ANSELMETTI, 01]. Le concepteur définit les liaisons entre les composants dans des Tableaux de Mise en Position (TMP) et les exigences fonctionnelles du mécanisme. La détermination d'une cotation ISO est ensuite générée dans un environnement informatique [ANSELMETTI, 05]. Le modèle des T-Maps, introduit par Davidson *et al.* [DAVIDSON *et al.*, 02], qualifie les variations d'une géométrie par rapport aux structures primitives de contrôles, qui identifient les degrés de liberté et les invariants d'une structure. Une zone de tolérance peut ainsi être traduite en région multi-dimensionnelle, appelée Tolerance-Map<sup>®</sup> (T-Map), en fonction de la nature de l'objet tolérancé (plan, cylindre, *etc.*). L'accumulation des défauts des différents composants du système est réalisée par la somme de Minkowski des T-Maps, représentant ainsi une analyse des tolérances des composants.

Ballot et Bourdet proposent de s'appuyer sur la théorie des mécanismes [BALLOT, 95] permettant d'établir des relations torsorielles pour définir un assemblage. Ces relations s'appuient sur le torseur

de petits déplacements, initié dans des applications métrologiques [BOURDET et CLÉMENT, 76], et par la modélisation SATT [CLÉMENT *et al.*, 98] des surfaces ou groupes de surfaces. Pour définir le mécanisme, la théorie du torseur de petits déplacements introduit quatre types de torseurs :

- le *torseur d'écart* qui qualifie les défauts d'une surface associée par rapport à son nominal,
- le *torseur défaut* qui relie les écarts entre deux surfaces d'une pièce,
- le *torseur jeu* qui représente le jeu entre deux surfaces nominales de deux pièces différentes,
- et le *torseur pièce* qui relie tous les torseurs d'écart d'une pièce.

Teissandier *et al.* utilisent le torseur de petits déplacements pour définir le concept d'UPEL (Union Pondérée d'Espace de Liberté). Une UPEL est un ensemble de six intervalles bornant les petits déplacements admissibles de la surface tolérancée entre deux surfaces idéales représentant la zone de tolérance [TEISSANDIER *et al.*, 99]. Ainsi, la position relative entre deux surfaces quelconques d'un assemblage peut être caractérisée par des petits déplacements qu'ils représentent graphiquement sous forme de polytopes [TEISSANDIER et DUFAURE, 02].

Avec une définition modifiée du torseur de petits déplacements, l'équipe de Laperrière utilise dans leur modèle les matrices jacobiniennes [LAPERRIÈRE *et al.*, 02]. Chaque composante du torseur de petits déplacements n'est pas l'écart par rapport au nominal mais l'intervalle de tolérance de cet écart.

Dans cette liste non-exhaustive, nous pouvons citer les travaux sur la méthode des domaines, initiée par Giordano et Duret [GIORDANO *et al.*, 92, GIORDANO et DURET, 93], qui repose sur la théorie des mécanismes et du torseur de petits déplacements. Nous porterons une attention particulière à cette méthode, puisque nous l'employons pour caractériser l'assemblage de notre cas d'étude dans la suite de ces travaux. La méthode des domaines jeux et écarts consiste à traduire les zones de tolérances en domaines de tolérances dans l'espace du torseur de petits déplacements. De la même façon que les méthodes utilisant le torseur de petits déplacements, cette approche nécessite la définition d'un repère attaché à un point d'application. Généralement, il est défini au centre de la surface considérée. Nous pourrions de cette façon exprimer les écarts de mise en position simplement et en n'importe quel point. La méthode définit d'une part, un torseur écarts lié à un domaine écarts et d'autre part, un torseur jeux lié à un domaine jeux :

- *torseur et domaine écarts*. Le torseur écarts est constitué des composantes de petits déplacements de la surface associée par rapport à sa position nominale. Le domaine écarts est la traduction de la tolérance imposée à une surface dans l'espace des petits déplacements.
- *torseur et domaine jeux*. Le torseur jeux exprime les degrés de liberté possibles entre deux pièces grâce au jeu d'une liaison définie par deux surfaces en contact. En considérant l'hypothèse de pièces indéformables, les petites mobilités dues aux jeux sont limitées par la condition d'impenétrabilité des pièces entre elles. Ainsi, dans un torseur de liaison, on distingue les mobilités de la liaison qui sont les invariants de la liaison et les mobilités du jeu que l'on nomme torseur jeux. Le domaine jeux d'une liaison définit l'ensemble des torseurs jeux respectant les conditions de non interférence pour une liaison.

L'analyse d'un mécanisme consiste à exprimer les domaines écarts des surfaces tolérancées ainsi que les domaines jeux des liaisons au même point. Par un ensemble d'union et d'intersection de domaines, on trouve le domaine écarts résultant de l'assemblage des tolérances des surfaces, ainsi que le domaine jeux résultant de l'assemblage des jeux des liaisons. On pourra se référer à différents travaux [GIORDANO *et al.*, 99, PETIT, 04, GIORDANO *et al.*, 05, GERMAIN, 07] pour avoir des explications plus détaillées sur la mise en place de cette méthode.

#### • Géométrie déformable

Pour enrichir ce modèle, à l'étude des liaisons mécaniques avec la prise en compte des déformations

élastiques des composants du mécanisme, Samper et *al.* proposent de définir les domaines jeux élastiques [SAMPER et GIORDANO, 98]. On peut citer les travaux de Perpoli, qui propose une application sur l'assemblage d'une aile de carrosserie [PERPOLI, 04]. Dans cette thématique du tolérancement des assemblages flexibles, bon nombre de travaux ont été menés durant ces dernières années. En effet, la prise en compte du comportement mécanique des pièces souples dans le cadre d'un assemblage est primordiale.

Dans ce domaine, Ceglarek et ses collaborateurs montrent l'influence et la propagation des écarts dimensionnels dans des assemblages de pièces flexibles, avec des modélisations du comportement mécanique par des poutres élastiques [SHIU *et al.*, 03] et en utilisant des modèles éléments finis [CAMELIO *et al.*, 03]. Avec des modélisations similaires, Merkley lie les statistiques aux modèles pour prédire les performances de ces types d'assemblage [MERKLEY, 98].

Dans le domaine de l'aéronautique, Mounaud et *al.* intègrent la flexibilité des composants dans l'assemblage d'un système hydraulique [MOUNAUD *et al.*, 07]. La prise en compte de la souplesse est caractérisée par la détermination des efforts et des déplacements aux noeuds du modèle éléments finis puis introduite dans la théorie du torseur de petits déplacements.

Sellem et *al.* montrent comment les SATT peuvent être étendues à l'analyse des systèmes souples [SELLEM et RIVIÈRE, 98].

### 3.1.2 Mise en position avec défaut de forme

La précision croissante des assemblages de composants nécessite de plus en plus la prise en compte du défaut de forme dans les modèles de tolérancement. Au début des années 90, Gupta et Turner construisent un modèle géométrique variationnel, à partir de triangles, permettant ainsi de modéliser les écarts de forme de la surface géométrique. En établissant un ensemble de contraintes sous forme d'inégalités, reliant les paramètres caractérisant la surface à la zone de tolérance, il est possible de définir un espace limite des variations possibles de la géométrie [GUPTA et TURNER, 93].

Le modèle des T-Maps, que nous avons évoqué précédemment, est enrichi en considérant une zone de tolérance supplémentaire pour le défaut de forme [AMETA *et al.*, 07].

Lee et *al.* proposent une démarche itérative sur l'assemblage de deux pièces selon différentes configurations avec la prise en compte de défauts d'ondulation et de la rugosité. Ils évaluent l'erreur de position et d'orientation de l'assemblage des deux pièces dans chaque configuration. En implémentant cette démarche dans une approche statistique sur les défauts d'ondulation et de rugosité, ils évaluent les variations des paramètres de positionnement et d'orientation [LEE *et al.*, 06].

Pierce et Rosen génèrent des pièces dont les surfaces géométriques possèdent des variations de forme de différentes précisions, en utilisant des modèles de surfaces NURBS. Le procédé d'assemblage des pièces est ensuite simulé et ils évaluent les paramètres qui caractérisent le fonctionnement du mécanisme [PIERCE et ROSEN, 08].

Avec un algorithme d'assemblage basé sur des mouvements cinématiques, Huang et Kong intègrent les défauts de position, d'orientation et de forme par simulation [HUANG et KONG, 08]. Les variations d'écarts géométriques des pièces sont créées par une méthode d'analyse modale statistique, basée sur des fonctions cosinus [HUANG et CEGLAREK, 02].

En modélisant les écarts de forme des pièces avec une description polynomiale, Morière et *al.* identifient quatre configurations de contact possibles en fonction de la concavité ou convexité des surfaces [MORIÈRE *et al.*, 09]. Ils utilisent ensuite différentes fonctions objectifs et critères d'optimisation pour simuler l'assemblage.

À partir d'une étude expérimentale des contacts entre les pièces, Radouani montre l'intérêt de prendre en compte le défaut de forme comparativement à la mise en position théorique réalisée avec

les surfaces associées [RADOUANI, 03]. Il définit alors un paramètre de dépassement et un paramètre d'interpénétration pour inclure le défaut de forme dans le calcul des tolérances.

Toujours sur la mise en évidence de l'influence du défaut de forme, Anselmetti et Bisson proposent d'intégrer les défauts de forme et d'orientation d'une surface sur l'estimation d'indicateurs d'aptitude (Ppk)[ANSELMETTI et BISSON, 01]. Pour ce faire, ils travaillent sur la répartition des points et non sur les centres de gravité des surfaces calculés.

Finalement, nous pouvons citer quelques travaux intégrant le défaut de forme dans l'assemblage de pièces déformables, notamment ceux de Cid, basés sur le torseur de petits déplacements [CID *et al.*, 04, CID, 05]. Huang et Ceglarek caractérisent le défaut de forme par une transformée discrète en cosinus pour évaluer des écarts d'assemblage et d'emboutissage des pièces souples [HUANG et CEGLAREK, 02].

## 3.2 Étude d'un assemblage

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons d'enrichir les méthodes classiques d'assemblage de composants avec la prise en compte des écarts géométriques de forme. D'une façon générale, un assemblage de pièces est caractérisé par les écarts de mise en position engendrés par la mise en contact des surfaces associées, appartenant aux classes de surface du SATT. Cette association peut être réalisée selon différents critères et l'expression des écarts selon différentes approches (cf. §3.1).

Pour illustrer notre approche, nous allons étudier un exemple d'assemblage de deux pièces, représenté sur la figure 3.1. Il s'agit d'un mécanisme en boucle simple, fermée par une condition fonctionnelle  $CF_B$  entre la paire de surfaces  $B_i$ , définie par une spécification de localisation. La spécification de localisation est vérifiée, si tous les points de la surface supérieure tolérancée sont dans la zone de tolérance définie par l'espace compris entre deux plans parallèles distants de  $t$  et centrés sur le plan théorique situé à une certaine distance du plan de référence  $B$ . Nous supposons la paire de surfaces  $B_i$  parfaites, c'est-à-dire sans défauts géométriques. L'objectif de cet exemple est de montrer comment les défauts géométriques des surfaces  $A_i$  en contact influent sur la position relative des surfaces  $B_i$ . Nous nous plaçons dans des conditions de solides indéformables, à la fois pour les pièces 1 et 2, et pour le dispositif de posage.

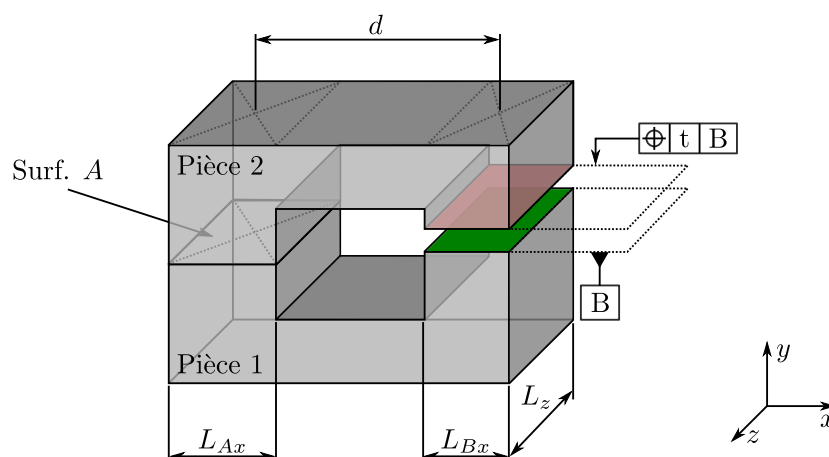


Figure 3.1 – Condition fonctionnelle de l'assemblage

Dans ce cas d'étude, la surface de contact  $A$  est carrée de 40 mm de côté ( $L_{Ax} = L_z$ ). Les surfaces fonctionnelles  $B_i$  sont rectangulaires de  $20 \times 40$  mm ( $L_{Bx} \times L_z$ ) de côtés et la surface intermédiaire est un carré de 40 mm de côté. Les autres dimensions des pièces n'auront pas d'influence dans notre



analyse. Nous supposons que les pièces 1 et 2 sont différentes et qu'elles ont les mêmes types de défaut.

Les conditions d'assemblage des deux pièces sont décrites sur la figure 3.2. Nous considérons les deux surfaces en contact  $A_1$  et  $A_2$  avec des défauts de position, d'orientation et de forme. La mise en position est réalisée par un dispositif de posage extérieur et le MAintien en Position (MAP) est assuré par un effort. Ainsi nous supprimons toutes les mobilités dans l'assemblage. En effet, l'assemblage est en appui plan primaire sur la surface inférieure de la pièce 1 (3 degrés sont bloqués) et les trois tiges assurent le reste de la mise en position. L'effort de maintien  $F$  vient brider l'assemblage et bloque les trois dernières mobilités. Compte tenu de ces hypothèses sur la MIP et le MAP, nous calculons le torseur de petits déplacements relatif à l'écart de mise en position induit par les défauts géométriques des surfaces en contact. Dans le cadre de cette étude, nous simulons les défauts de forme de  $A_1$  et  $A_2$  par l'intermédiaire d'un spectre modal qui suit une loi décroissante sur les valeurs des amplitudes des coordonnées modales. À la manière du spectre des harmoniques de Fourier, nous observons une forme globalement décroissante des valeurs des coefficients modaux. L'exception du Dirac en montre les limites.

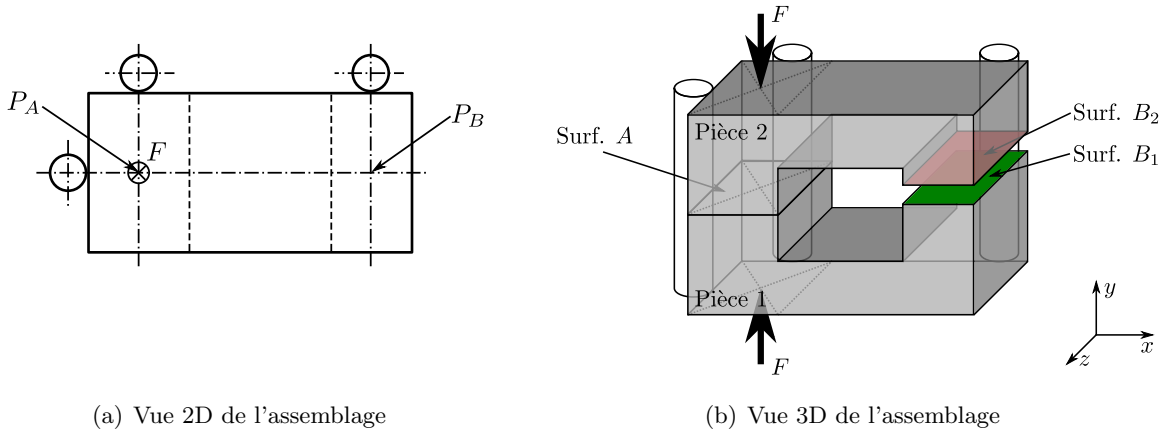


Figure 3.2 – Assemblage

Nous détaillons, tout d'abord, notre démarche en deux dimensions en supposant que les surfaces  $A_1$  et  $A_2$  n'ont pas de défauts selon  $z$ . On pourra dans ce cas étudier l'assemblage dans  $(x, y)$ . Ensuite, nous effectuons la même étude sur la liaison plan sur plan, réalisée par la paire de surfaces  $A_i$ , en considérant des défauts sur l'axe  $z$ .

### 3.2.1 Assemblage en 2D

Afin de mieux appréhender notre démarche, nous choisissons tout d'abord, de présenter cet assemblage en 2D en supposant qu'il n'y a pas de défauts sur l'axe  $z$ . L'assemblage des profils est réalisé en deux étapes successives. Premièrement, nous ne tenons pas compte du défaut de forme, les profils associés sont alors mis en contact. Deuxièmement, nous introduisons une méthode qui intègre les écarts de forme des profils pour effectuer l'assemblage.

Nous déployons cette approche sur des profils dont les défauts de position, orientation et forme sont simulés. Nous modélisons le défaut de position et d'orientation de chaque profil par les petits déplacements  $t_y$  et  $r_z$  (translation suivant  $y$  et rotation autour de  $z$ ), qui pourraient être représentés par les modes  $Q_1$  et  $Q_2$  (cf. figure 3.3). Les défauts de forme sont paramétrés par les modes suivants, de  $Q_3$  à  $Q_n$ . Ces modes sont extraits de la base modale naturelle d'une poutre libre-libre dont les

degrés de liberté du modèle éléments finis se restreignent à  $t_y$  et  $r_z$  (cf. figure 3.3). Nous pouvons remarquer que les modes sont normés avec la norme infinie égale à 1.

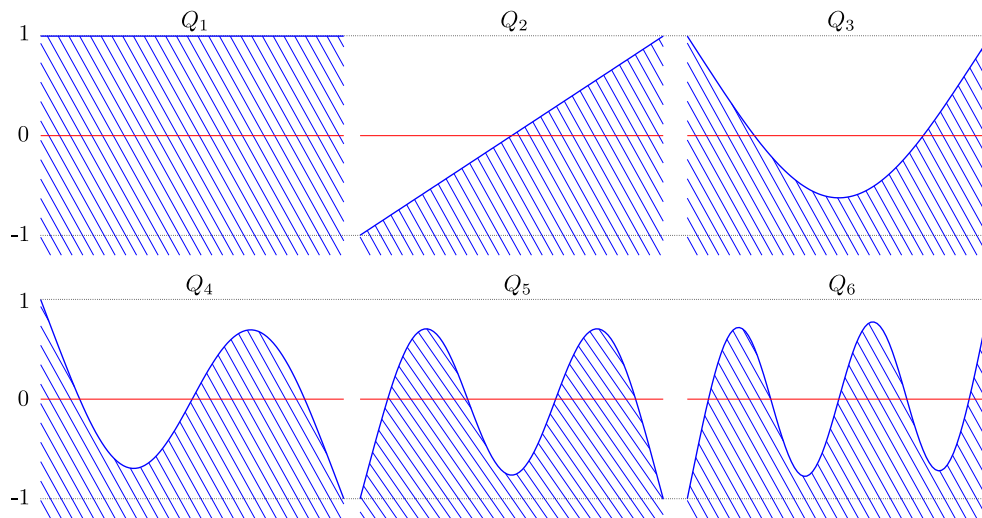
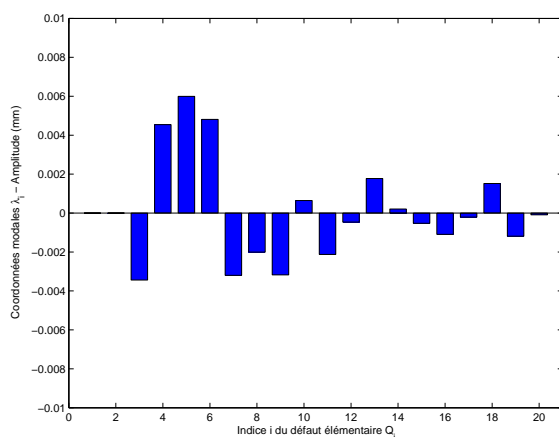
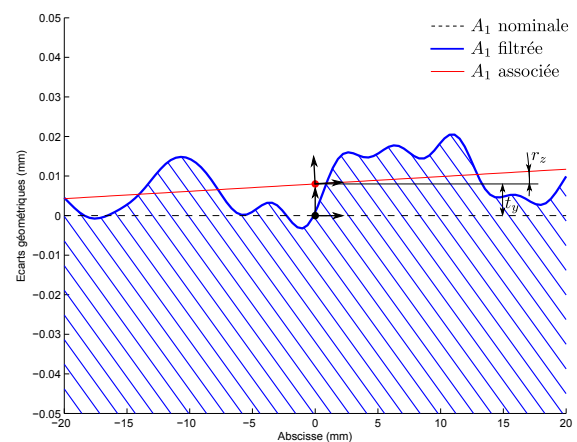


Figure 3.3 – Base modale naturelle  $Q$  d'une poutre

Les défauts de position et d'orientation étant simulés par des petits déplacements, nous imposons les coordonnées modales des deux premiers modes à zéro. Pour modéliser la forme, nous appliquons une loi décroissante du type  $\frac{1}{x}$  sur la valeur des amplitudes des coordonnées modales  $\lambda_{A1_i}$  pour le profil de la surface  $A_1$  et  $\lambda_{A2_i}$  pour le profil de la surface  $A_2$ . Le choix de cette loi est dicté d'une part par notre volonté de privilégier les formes de grandes longueurs d'ondes et d'autre part c'est une évolution caractéristique des éléments géométriques que nous avons mesurés. On représente sur les figures 3.4 et 3.5 le résultat de la simulation du spectre modal et la représentation géométrique du défaut de chaque profil. Le profil filtré de chacune des surfaces  $A_i$ , que nous observons sur les figures 3.4(b) et 3.5(b), est calculé par la combinaison linéaire des 20 premiers modes du spectre modal auquel il est associé. Ceci a l'avantage de filtrer tous les défauts qui ne sont pas de la forme. Nous représentons également les surfaces associées, au sens des moindres carrés, en rouge sur les mêmes figures. En 2D les deux surfaces associées sont paramétrées par une translation  $t_y$  et une rotation  $r_z$ .



(a) Spectre modal des amplitudes



(b) Représentation géométrique de la surface  $A_1$  filtrée

Figure 3.4 – Surface  $A_1$

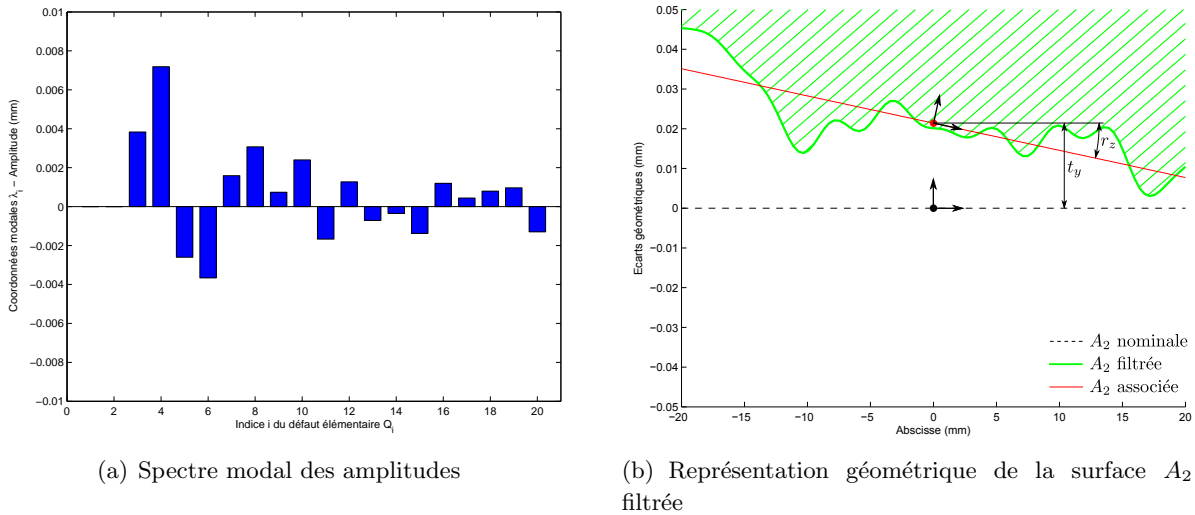


Figure 3.5 – Surface  $A_2$

3.2.1.1 Mise en position sans défauts de forme

Tout d’abord, nous réalisons l’assemblage en faisant coïncider les surfaces associées (cf. figure 3.6). Nous pouvons observer que lorsqu’on ne prend pas les défauts de forme en compte, il y a des zones de jeu et d’interpénétration.

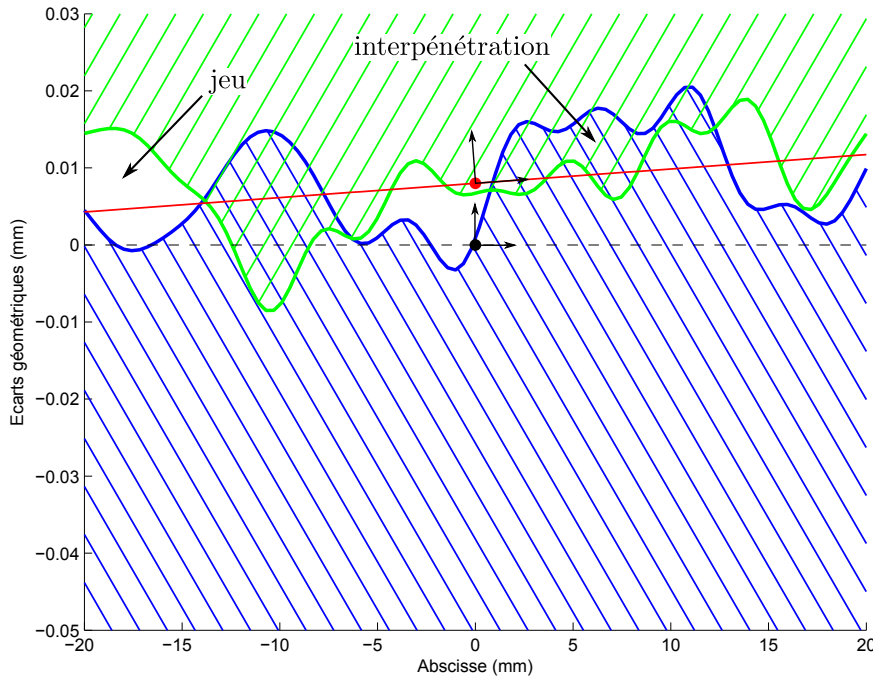


Figure 3.6 – Mise en position sur les surfaces associées (sans défauts de forme)

Nous pouvons ainsi évaluer l’écart de mise en position engendré par l’assemblage sur les surfaces associées et vérifier la spécification de localisation. Pour ce faire, nous utilisons le paramétrage par le torseur de petits déplacements et sa représentation par la méthode des domaines. Nous définissons donc les torseurs écarts rigides  $Er_{A_1}$  et  $Er_{A_2}$  au centre de la paire de surface nominale de contact  $A$ . Ces torseurs écarts correspondent à l’écart de mise en position respectivement entre la surface associée à  $A_1$  et la surface nominale et entre la surface associée  $A_2$  et la surface nominale (cf. figure 3.7). Le torseur écarts rigides, relatif à l’écart de mise en position entre les deux surfaces

associées, peut alors s'écrire par une simple relation de Chasles  $Er_{1A2} = -Er_{A1} + Er_{A2}$ . Nous représentons sur la figure 3.8(a) ce torseur écarts dans l'espace des petits déplacements 2D  $(t_y, r_z)$ .

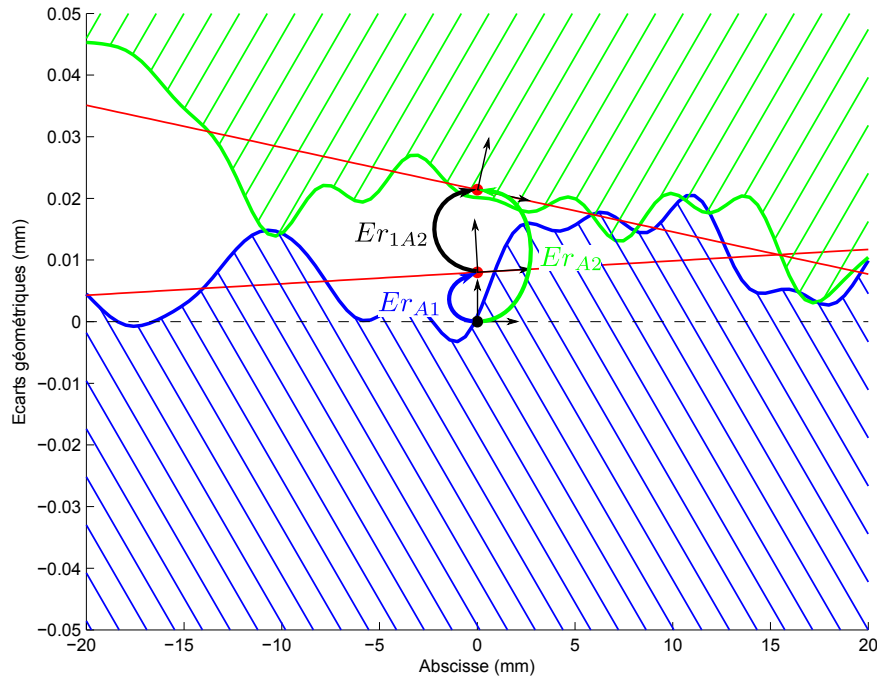


Figure 3.7 – Torseur écarts des surfaces associées

Le torseur écarts rigides  $Er_{1A2}$  étant calculé au centre de la surface  $A$  et la condition fonctionnelle  $CF_B$  au centre de la surface  $B$ , nous transportons ce torseur afin de le comparer au domaine de la condition fonctionnelle  $CF_B$ . Ce domaine est construit par quatre inéquations telles que tous les points de  $B_2$  soient compris dans la zone de tolérance spécifiée. Dans le plan 2D  $(y, z)$ , le torseur écarts associé à la surface réelle  $B_2$ , que l'on suppose sans défaut de forme, est défini par la relation 3.1.

$$E = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ t_y & 0 \\ 0 & r_z \end{array} \right\}_{P_B} \quad (3.1)$$

Le déplacement des points  $P$ , qui délimitent la surface  $B_2$ , peut être calculé d'après la formule de changement de point d'un moment :

$$\begin{aligned} \vec{\delta P} &= \vec{\delta P_B} + \vec{PP_B} \wedge \vec{\delta \theta} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ t_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm \frac{L_{Bx}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

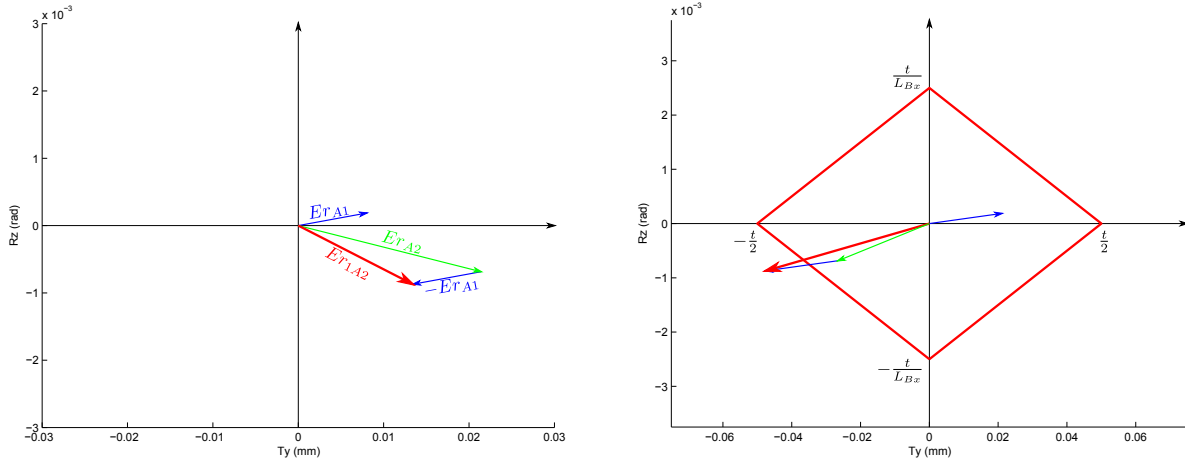
Pour chaque point  $P$  seul le déplacement suivant la normale à surface est à prendre en compte pour vérifier la tolérance géométrique. Le calcul se limite à la composante :

$$\vec{\delta P} \cdot \vec{y} = t_y \pm \frac{L_{Bx}}{2} r_z \quad (3.3)$$

La spécification de localisation impose que cette composante  $\vec{\delta P} \cdot \vec{y}$  soit comprise entre  $-\frac{t}{2}$  et  $\frac{t}{2}$ . Nous obtenons ainsi un ensemble de quatre inéquations indépendantes pour définir le domaine écart :

$$\begin{cases} -\frac{t}{2} \leq t_y - \frac{L_{Bx}}{2} r_z \leq \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq t_y + \frac{L_{Bx}}{2} r_z \leq \frac{t}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

Ces quatre inéquations définissent le domaine écarts de la surface  $B_2$  tolérancée avec une tolérance de localisation de  $t$ . Nous représentons graphiquement sur la figure 3.8(b) le domaine dans l'espace des petits déplacements  $(t_y, r_z)$ . Nous pouvons alors vérifier si le torseur écarts  $Er_{1A2}$  transporté est inclus dans le domaine écart de la condition fonctionnelle  $CF_B$ .



(a) Assemblage de  $A_1$  et  $A_2$  observé au centre de la surface  $A$

(b) Vérification de la condition fonctionnelle observée au centre de la surface  $B$

Figure 3.8 – Résultat de l'assemblage, réalisé sur les surfaces associées, dans l'espace des petits déplacements

### 3.2.1.2 Mise en position avec défauts de forme

Nous considérons maintenant les défauts de forme des surfaces  $A_i$  pour réaliser l'assemblage des pièces. Notre démarche suppose d'être dans des conditions d'assemblage statique : de pièces indéformables, une mise en position réalisée par un dispositif considéré sans défauts géométriques et l'assemblage bridé par un effort de maintien. Sous le couvert de ces trois hypothèses, notre approche peut se résumer en trois étapes :

- le dispositif de mise en position contraint les degrés de liberté de la liaison considérée,
- on détermine ensuite l'ensemble des configurations possibles de contact,
- enfin la direction de l'effort de maintien permet d'identifier la configuration de contact des deux pièces.

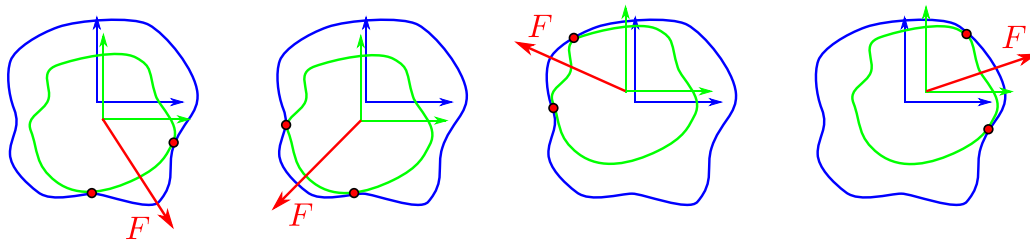


Figure 3.9 – Exemple de configurations possibles pour cet assemblage

La figure 3.9 précédente montre qu'en fonction de la direction de l'effort de maintien les points de contact entre les deux surfaces changent. L'enjeu est donc de déterminer dans un premier temps, les points de contact potentiels compte tenu du système de mise en position considéré, puis d'identifier la facette reliant les points de contact grâce à la direction de l'effort.

Pour déterminer les points de contact possibles, nous définissons une surface écart correspondant aux écarts géométriques de forme entre les deux surfaces  $A_i$  (cf. figure 3.11(a)). Ce calcul revient à considérer la surface  $A_1$  parfaite et à reporter les écarts de forme sur la surface  $A_2$  en vis-à-vis. La détermination de la surface écart peut s'effectuer à partir des écarts de forme brutes de chaque surface, mais si l'on veut conserver l'intérêt du filtrage, la soustraction des spectres modaux nous conduit au bon résultat, c'est-à-dire aux écarts de forme filtrés de la surface écart. Le calcul du spectre se définit par l'opération de soustraction 3.5.

$$\lambda_{1A2_i} = \lambda_{A2_i} - \lambda_{A1_i} \quad (3.5)$$

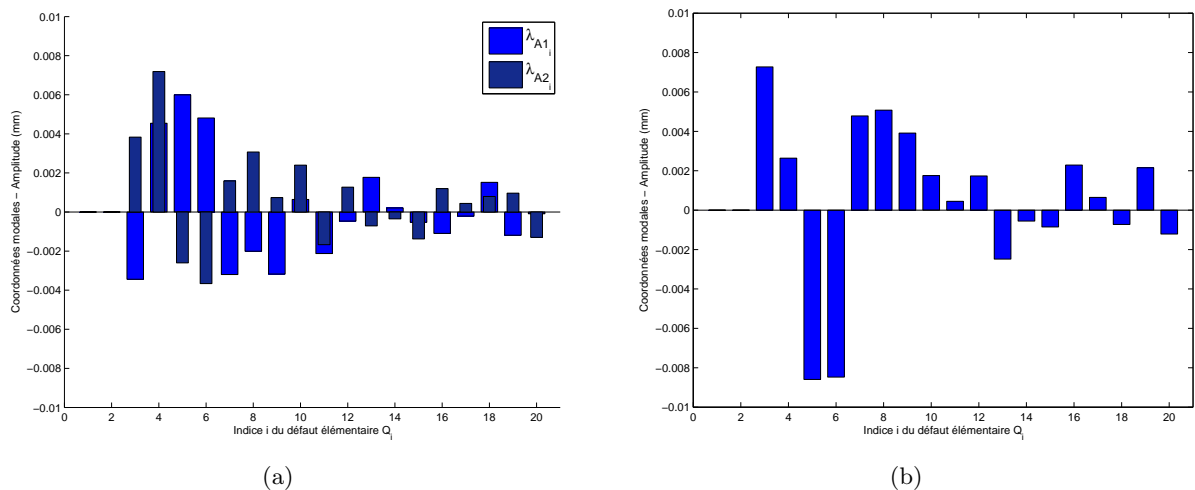
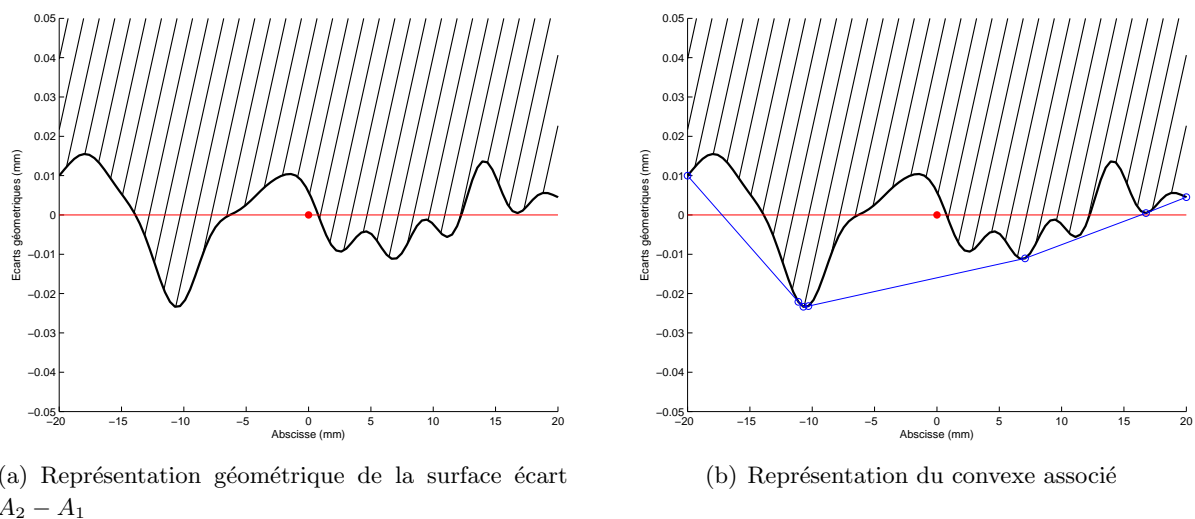


Figure 3.10 – Calcul du spectre modal de la surface écart

La seconde étape consiste à chercher tous les points de contact potentiels entre les deux surfaces. Dans notre simplification en deux dimensions, nous cherchons un couple de points définissant la facette de contact. Nous calculons dans ce cas l'enveloppe convexe de la surface écart représentée figure 3.11(b). Cette enveloppe convexe définit l'ensemble des couples de points de contact possibles.



(a) Représentation géométrique de la surface écart  $A_2 - A_1$

(b) Représentation du convexe associé

Figure 3.11 – Surface écart  $A_2 - A_1$

Pour identifier la facette de contact, autrement dit le couple de points en contact, nous imposons un effort de maintien en position dont les caractéristiques sont :

- l'effort de type glisseur,
- sa direction, définie par les composantes de transmission d'effort de la liaison considérée,
- sa position, contenue dans l'élément géométrique nominal de contact.

Dans notre exemple, l'effort de maintien est localisé au centre de la surface nominale de contact  $A$  dont la direction est perpendiculaire à cette surface. L'hypothèse de solides indéformables permet de nous affranchir de l'intensité de l'effort. Par conséquent, la facette de contact est celle qui est intersectée par la direction de l'effort (cf. figure 3.12). Les points appartenant à la facette de contact sont donc les points sur lesquelles la mise en contact des profils extraits sera réalisée (cf. figure 3.13).

Nous définissons donc l'écart de mise en position entre la surface de contact des surfaces associées (en rouge sur la figure 3.12) et la facette de contact détectée (en magenta sur la même figure) par un torseur écarts de forme  $Ef_{1A2}$ .

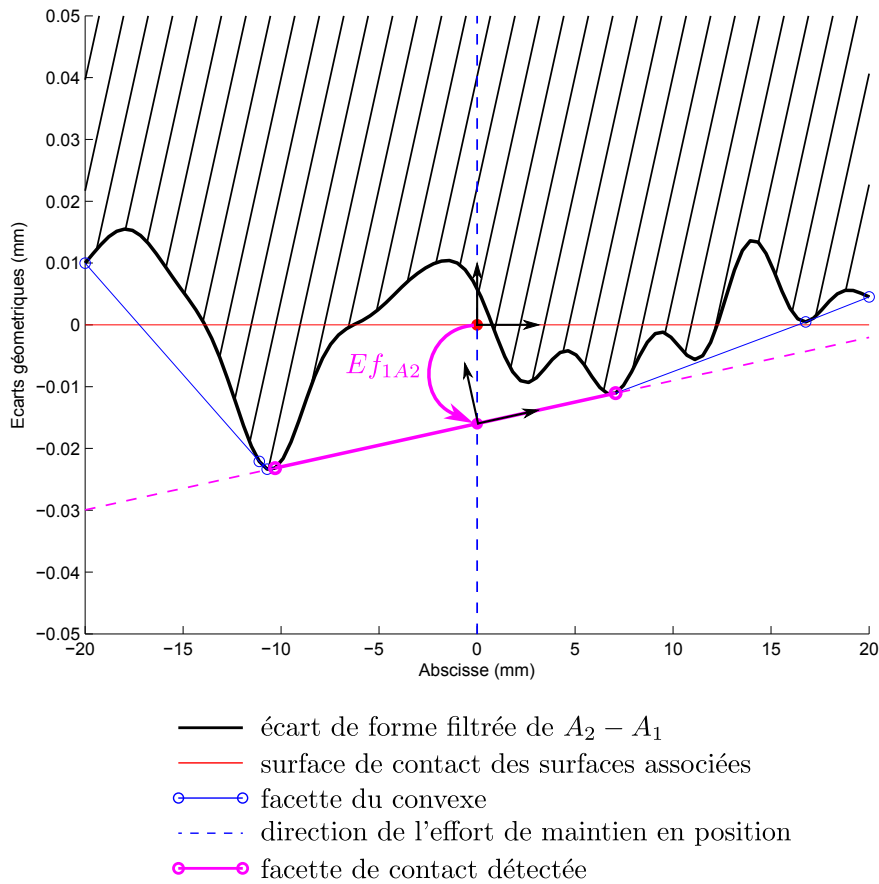


Figure 3.12 – Détection de la facette de contact et torseur écarts associé

La figure 3.13 montre la mise en position des surfaces  $A_1$  et  $A_2$  compte tenu de la facette de contact détectée précédemment. Nous pouvons observer dans ce cas qu'il n'y a plus d'interpénétration des pièces. Si l'on souhaite maintenant caractériser l'écart de mise en position globale qui tient compte des défauts de forme des surfaces, on définit le torseur écarts résultant, s'écrivant alors comme la somme du torseur écarts rigides et du torseur écarts de forme (cf. équation 3.6).

$$E_{1A2} = Er_{1A2} + Ef_{1A2} \quad (3.6)$$

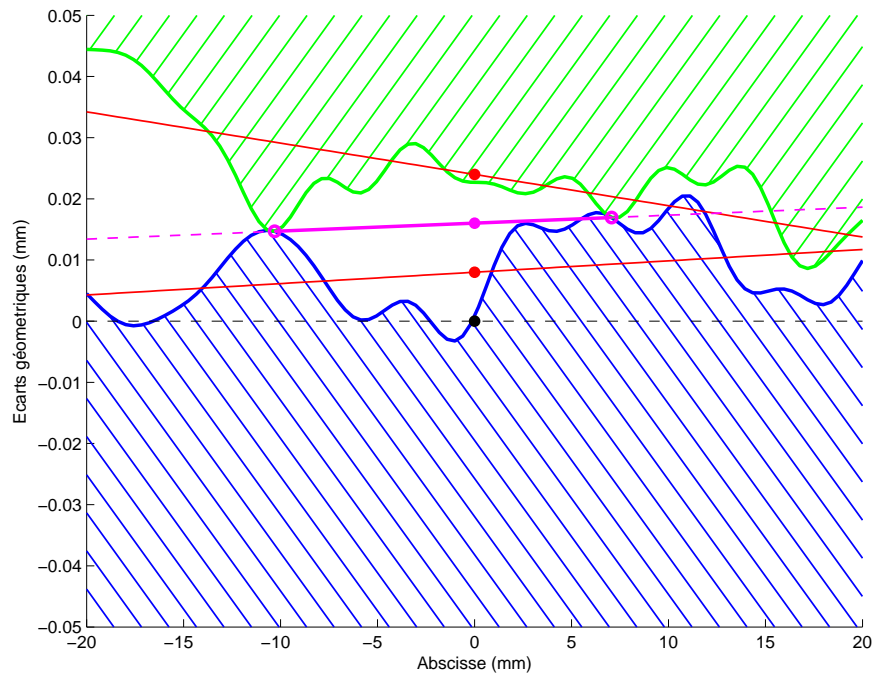
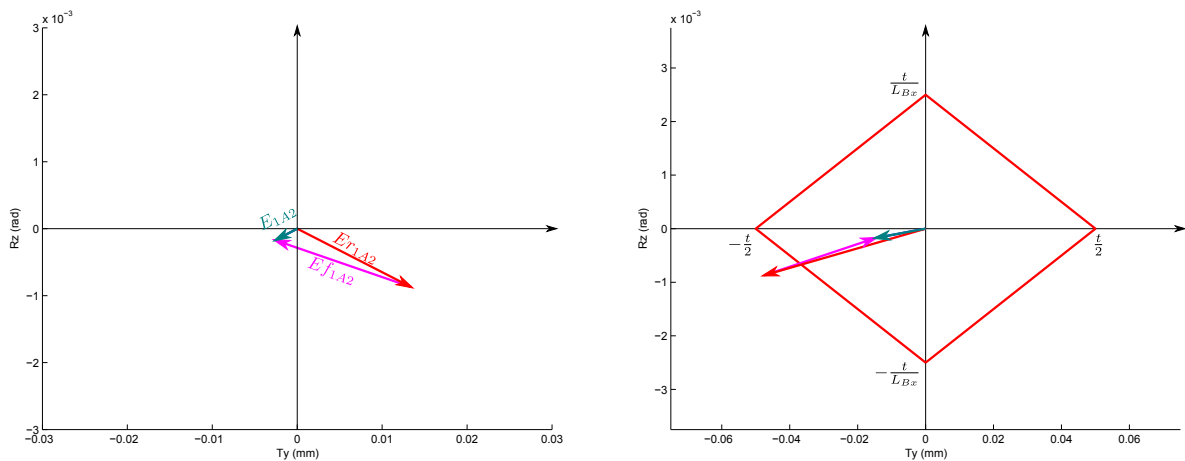


Figure 3.13 – Mise en position sur la facette de contact détectée (avec défauts de forme)

En représentant le torseur écarts résultant  $E_{1A2}$  dans l'espace des petits déplacements  $(t_y, r_z)$ , nous remarquons que, selon la prise en compte ou non des défauts de forme, la condition fonctionnelle  $CF_B$  est respectée dans un cas et pas dans l'autre. En effet, dans notre étude, lorsque l'assemblage des composants 1 et 2 est réalisé avec les surfaces associées, c'est-à-dire sans défauts de forme,  $CF_B$  n'est pas vérifiée alors que si l'on tient compte des écarts de forme des surfaces en contact l'assemblage est conforme à  $CF_B$  (cf. figure 3.14(b)).



(a) Assemblage de  $A_1$  et  $A_2$  observé au centre de la surface  $A$

(b) Vérification de la condition fonctionnelle observée au centre de la surface  $B$

Figure 3.14 – Résultat de l'assemblage avec défauts de forme dans l'espace des petits déplacements

### 3.2.2 Assemblage en 3D

Nous présentons, dans cette section, le même assemblage que celui réalisé précédemment mais avec l'hypothèse que les surfaces  $A_i$  en contact ont des défauts géométriques de position, orientation et forme sur les trois dimensions. Les degrés de liberté exploités sont donc  $t_y$  (translation suivant



l'axe  $y$ ),  $r_x$  et  $r_z$  (rotation autour des axes  $x$  et  $z$ ).

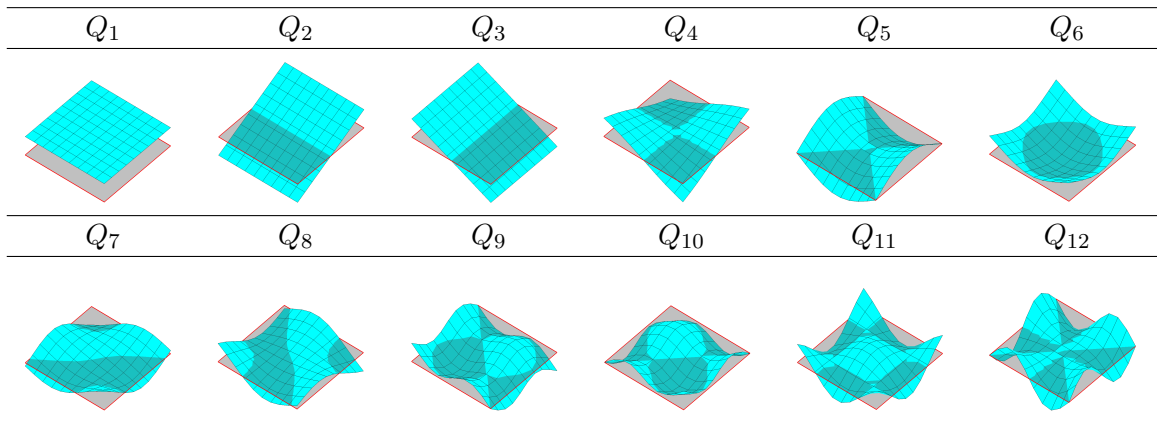
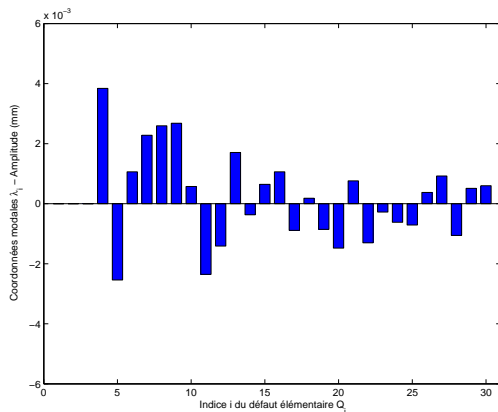
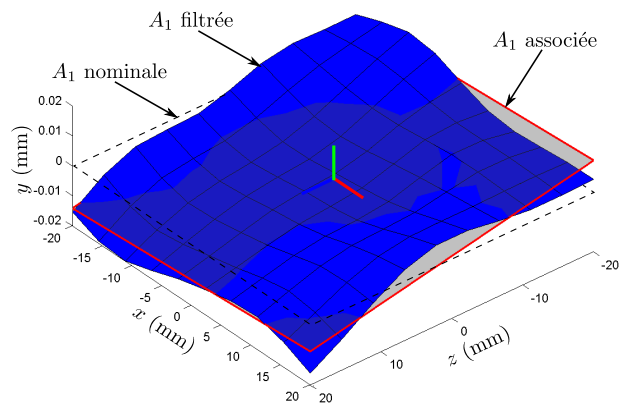


Tableau 3.2 – Premiers modes de la base naturelle d'un plan

De la même manière que dans le cas 2D, nous construisons des surfaces  $A_1$  et  $A_2$  contenant des défauts géométriques. L'ensemble de ces défauts est alors paramétré par les composantes de petits déplacements ( $t_y$ ,  $r_x$  et  $r_z$ ) pour la position et l'orientation et par un ensemble de coordonnées modales, définies par les spectres 3.15(a) et 3.16(a), pour les défauts de forme. Les coordonnées modales  $\lambda_i$  sont associées aux modes  $Q_i$ , issus de la base modale naturelle d'un plan (cf. tableau 3.2). Le modèle éléments finis construit à partir de la surface carrée  $A$  possède des conditions limites libre-libre et se limite aux degrés de liberté  $t_y$ ,  $r_x$  et  $r_z$ . Les figures 3.15 et 3.16 montrent la représentation géométrique d'une paire de surfaces  $A_i$ , que l'on a simulée, et le paramétrage associé (petits déplacements pour les surfaces associées et spectres modaux).

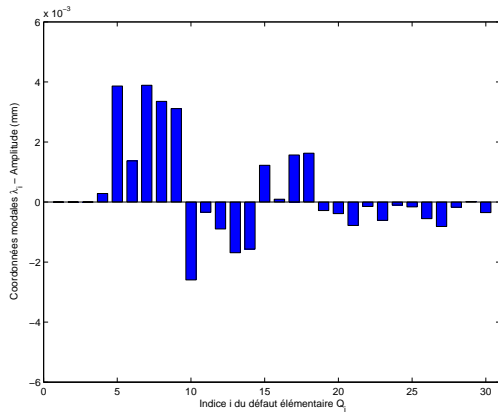


(a) Spectre modal des amplitudes

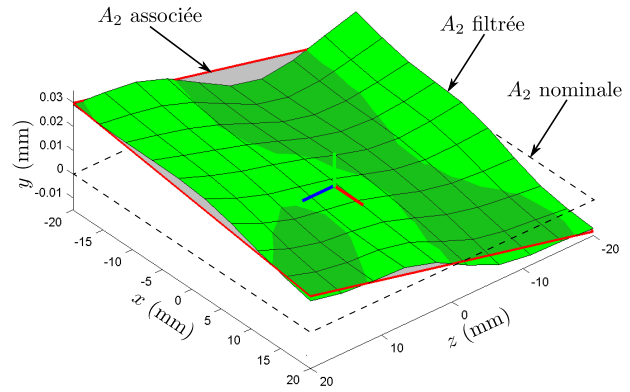


(b) Représentation géométrique de la surface  $A_1$  filtrée

Figure 3.15 – Surface  $A_1$



(a) Spectre modal des amplitudes

(b) Représentation géométrique de la surface  $A_2$  filtréeFigure 3.16 – Surface  $A_2$ 

### 3.2.2.1 Mise en position sans défauts de forme

Dans un premier temps, l'assemblage est réalisé avec une mise en contact des surfaces associées (cf. figure 3.17). On observe également que, dans cette hypothèse d'assemblage qui ne considère pas les défauts de forme, les surfaces  $A_1$  et  $A_2$  s'interpénètrent. Sur la figure 3.18, on représente l'écart de mise en position engendré dans ces conditions d'assemblage et défini par le torseur écarts rigides  $Er_{1A2}$ , dans l'espace des petits déplacements  $(t_y, r_x, r_z)$ . Exprimé au centre de la surface  $B$ , ce torseur écarts est inclus dans le domaine écart de la condition fonctionnelle  $CF_B$ , donc l'assemblage est conforme à la spécification de localisation. Dans l'espace 3D, ce domaine est construit par huit inéquations telles que tous les points de  $B_2$  soient compris dans la zone de tolérance spécifiée. Autrement dit, la condition fonctionnelle est respectée si la relation suivante est vérifiée :

$$-\frac{t}{2} \leq \overrightarrow{\delta P} \cdot \vec{y} \leq \frac{t}{2} \quad (3.7)$$

Le domaine écarts est alors défini dans l'espace des petits déplacements  $(t_y, r_x, r_z)$  par les huit inéquations suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{t}{2} \leq t_y + \frac{L_{Bx}}{2} r_z + \frac{L_z}{2} r_x \leq \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq t_y + \frac{L_{Bx}}{2} r_z - \frac{L_z}{2} r_x \leq \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq t_y - \frac{L_{Bx}}{2} r_z - \frac{L_z}{2} r_x \leq \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq t_y - \frac{L_{Bx}}{2} r_z + \frac{L_z}{2} r_x \leq \frac{t}{2} \end{cases} \quad (3.8)$$

La représentation graphique de ce domaine est donnée figure 3.18, par un polytope convexe à trois dimensions (un octaèdre).

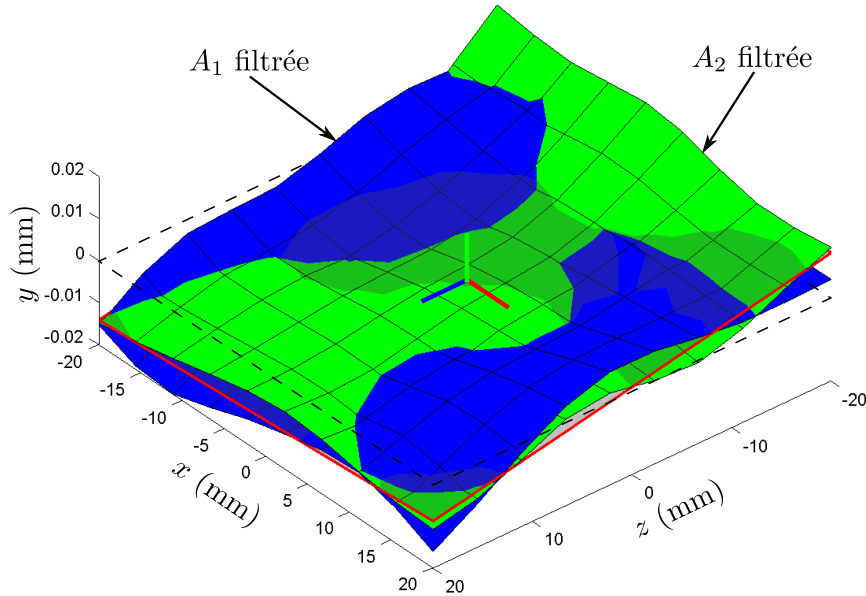


Figure 3.17 – Mise en position sur les surfaces associées (sans défauts de forme)

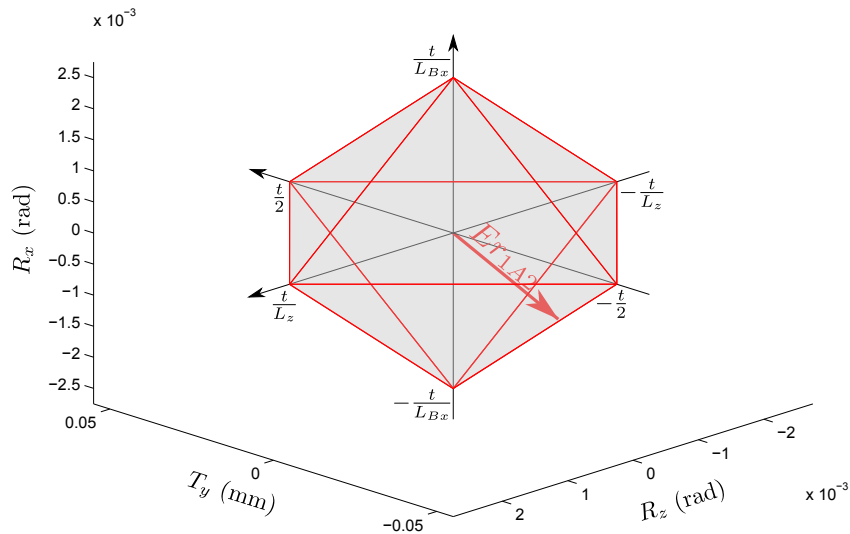
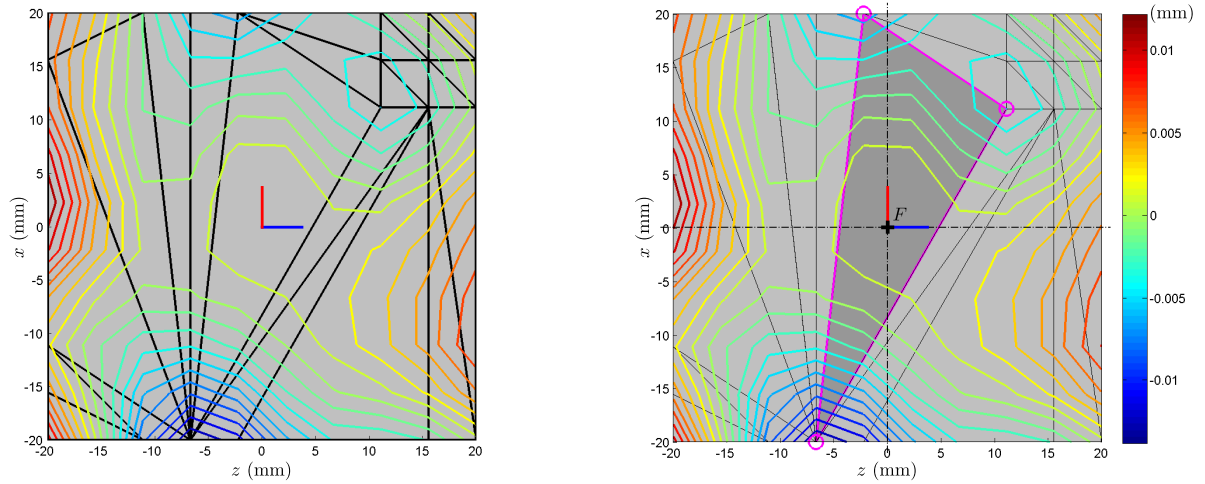


Figure 3.18 – Vérification de la condition fonctionnelle observée au centre de la surface  $B$

### 3.2.2.2 Mise en position avec défauts de forme

Dans un second temps, nous effectuons l'assemblage des pièces en tenant compte des défauts de forme des surfaces  $A_1$  et  $A_2$ . En considérant les mêmes conditions de mise en position et de maintien en position, nous déployons la même démarche que dans le cas 2D. Après avoir calculé la surface écart par l'intermédiaire des spectres modaux, nous déterminons les points de contact possibles (cf. figure 3.19(a)). Nous pouvons observer que les points de contact potentiels sont reliés par des facettes triangulaires. En effet, trois est le nombre de points nécessaires et suffisants pour que le contact plan sur plan soit isostatique. Finalement, si l'on conserve la position et la direction de l'effort de maintien en position, nous identifions la facette par laquelle est traversée l'effort  $F$  (en magenta sur la figure 3.19(b)). Nous déterminons ainsi les trois points de contact.



(a) Vue de dessus de la surface écart  $A_2 - A_1$  et du convexe associé

(b) Vue de dessus de la facette de contact

Figure 3.19 – Détection de la facette de contact de l'assemblage

On montre sur la figure 3.20 le résultat de la mise en position sur la facette de contact détectée. On observe alors que les deux surfaces  $A_i$  sont en contact sur les trois points identifiés sans s'interpénétrer. Nous ajoutons cet écart de mise en position supplémentaire dû aux défauts de forme à l'écart de mise en position calculé avec les surfaces associées, en appliquant la relation 3.6 sur les torseurs écarts. Si l'on transporte et représente ces torseurs écarts dans l'espace des petits déplacements (cf. figure 3.21), nous constatons que, lorsque l'on prend en compte les défauts de forme des surfaces  $A_i$  dans l'assemblage, la condition fonctionnelle  $CF_B$  n'est plus respectée.

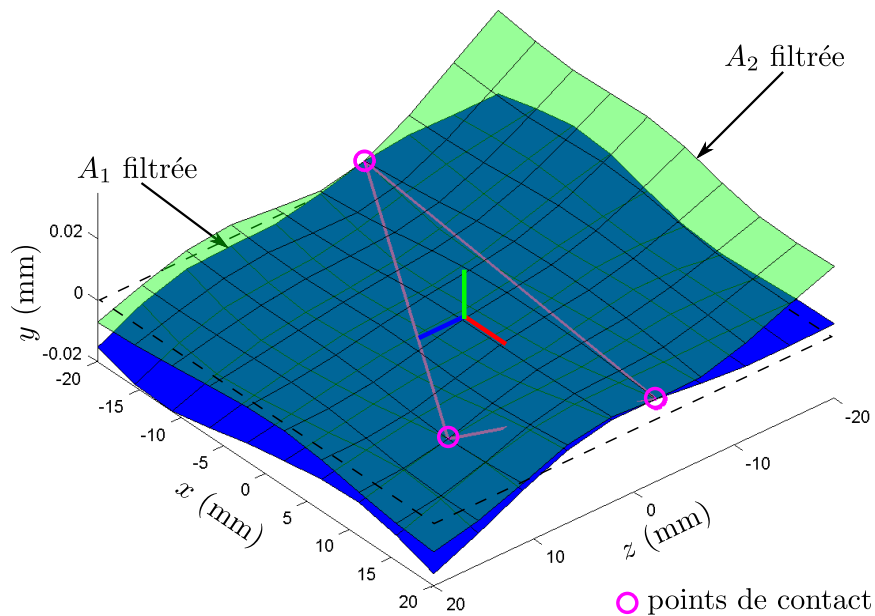


Figure 3.20 – Mise en position sur la facette de contact détectée (avec défauts de forme)

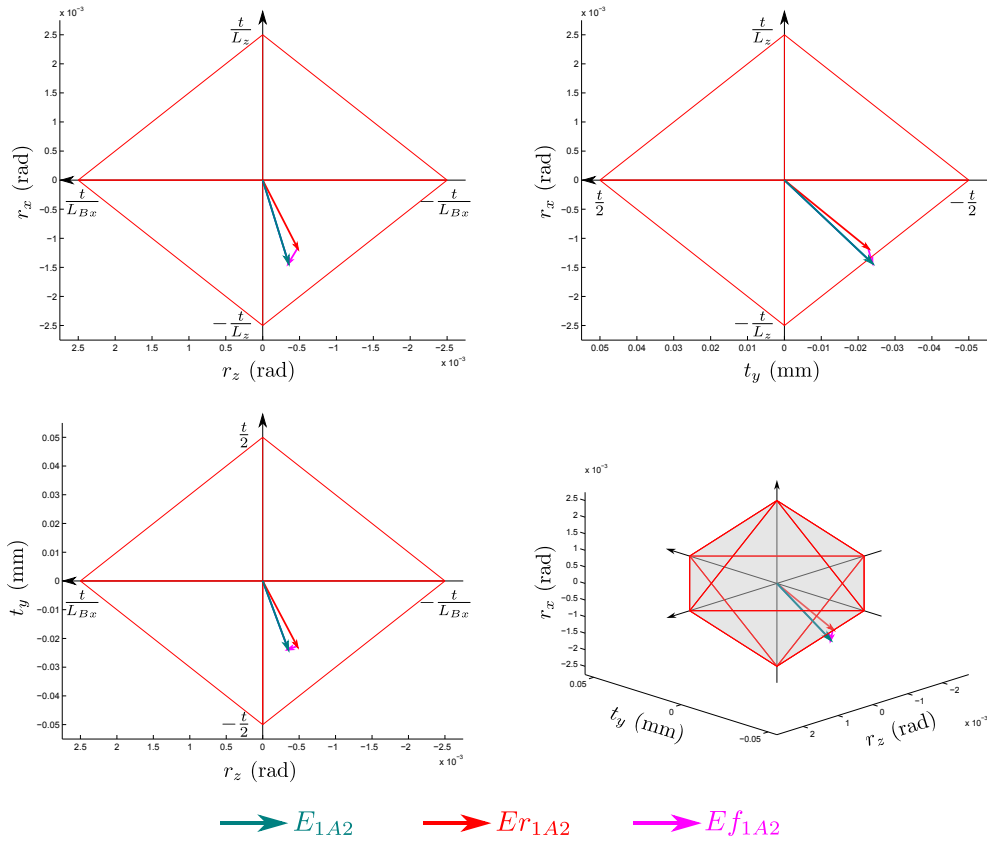


Figure 3.21 – Vérification de la condition fonctionnelle observée au centre de la surface  $B$

### 3.3 Étude d'un assemblage de lots

En reprenant l'exemple d'assemblage de la section 3.2, nous proposons dans cette partie d'évaluer la conformité d'assemblage de deux lots de pièces, ayant des défauts géométriques de position, orientation et forme. Nous supposons les caractéristiques statistiques (moyenne et matrice de covariance) de chaque lot connues. Elles pourraient être issues de la mesure d'un échantillon de pièces que l'on appellera échantillon pilote. Nous évaluons alors les écarts de mise en position de chaque assemblage avec et sans défauts de forme et nous en déduisons un Taux de Non Conformité (TNC) dans chaque cas pour le lot considéré.

Dans une première partie 3.3.1, nous présentons une solution permettant de simuler un lot de pièces à partir des caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote. Puis, nous terminons cette section en présentant les résultats de l'évaluation du TNC pour notre cas d'assemblage de lots en 2D et en 3D.

#### 3.3.1 Simulation d'un lot à partir des caractéristiques statistiques d'un échantillon pilote

Nous proposons, dans cette section, une démarche permettant de simuler un lot de surfaces ayant des défauts géométriques à partir des caractéristiques statistiques (moyenne et matrice de covariance) de l'échantillon pilote de ces surfaces [SAMPER *et al.*, 09]. Pour ce faire, nous reprenons le paramétrage des défauts géométriques établi dans la section 3.2 avec, d'une part, les défauts de position et orientation qui étaient caractérisés par des petits déplacements, et d'autre part, les défauts de forme qui étaient définis par les coordonnées modales. Les caractéristiques statistiques de

l'échantillon pilote seront alors définies par la moyenne et la matrice de covariance de ces paramètres. Notre cas d'étude étant un exemple académique, nous ne disposons pas de surfaces mesurées. C'est pourquoi nous détaillons dans le paragraphe 3.3.1.1 une méthode pour simuler les caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote.

### 3.3.1.1 Génération des caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote

Comme nous l'avons introduit précédemment, l'objectif de l'échantillon pilote est d'obtenir des caractéristiques statistiques réalistes, au sens de la représentation de la réalité industrielle, pour générer un lot beaucoup plus important. Nous proposons ici de générer ces caractéristiques statistiques représentant un échantillon qui proviendrait de mesures. Nous pouvons ainsi caractériser l'échantillon pilote par la moyenne des paramètres de position, orientation et forme et la matrice de covariance de ces paramètres.

Tout d'abord, on définira la signature des défauts géométriques d'une surface par  $\Lambda$ , constituée des paramètres de petits déplacements  $E_R$  et des coordonnées modales restreintes à la description de la forme  $^{for}\lambda$ . Nous notons  $\bar{\Lambda}$  la signature moyenne des paramètres géométriques et  $^{\Lambda}\Sigma$  la matrice de covariance associée. Nous décrivons ensuite la méthode employée pour obtenir ces caractéristiques statistiques. Il est important de préciser que les figures qui illustrent la description de cette méthode font référence à la génération de l'échantillon pilote d'une des surfaces de notre cas d'assemblage en 2D.

- Premièrement, nous générons une signature moyenne des paramètres  $\Lambda_i$ . Compte tenu des observations que nous avons pu faire lors des expertises réalisées, nous imposons aux  $\Lambda_i$  une loi de distribution décroissante ayant une évolution du type  $\mu_0/i$  (sur la figure 3.22  $\mu_0 = 0.06$  mm). Afin d'assurer un filtrage de la forme géométrique des surfaces, nous limitons à  $m$  le nombre de paramètres  $\Lambda_i$ .
- Deuxièmement, nous ajoutons à la signature moyenne précédente un bruit gaussien dont l'écart-type varie suivant la loi décroissante  $\sigma_0/i$  (sur la figure 3.22  $\sigma_0 = 0.007$  mm). L'objectif dans cette deuxième étape est de simuler un faible nombre de signatures de paramètres pour intégrer l'existence d'une covariance entre les paramètres géométriques de notre échantillon pilote. En effet, si l'on simule un grand nombre de signatures, la valeur de la covariance entre chaque paramètre tendra vers 0.
- Finalement, nous pouvons calculer les caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote (la moyenne  $\bar{\Lambda}$  et la matrice de covariance  $^{\Lambda}\Sigma$ ).

Nous avons volontairement choisi d'intégrer de la covariance entre les paramètres géométriques dans le but de générer des lots de surfaces dont les défauts géométriques peuvent être à l'image du comportement réel des procédés de fabrication.

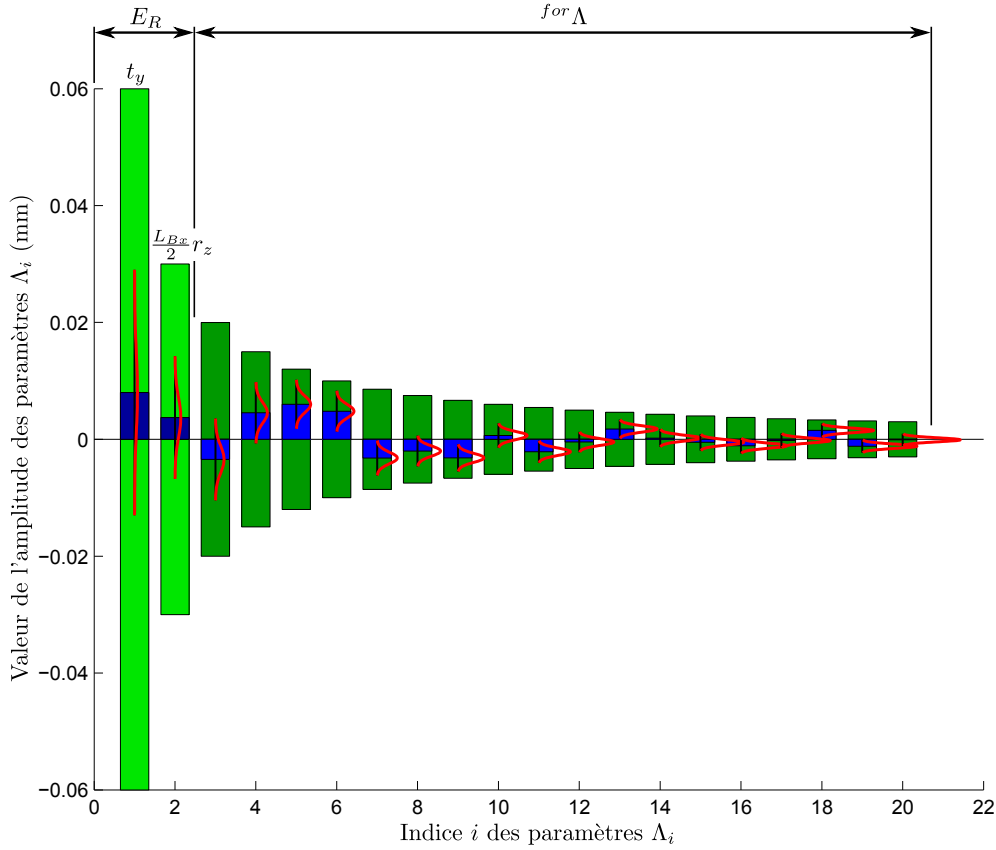


Figure 3.22 – Génération des caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote

### 3.3.1.2 Génération d'un lot à partir de ces caractéristiques statistiques

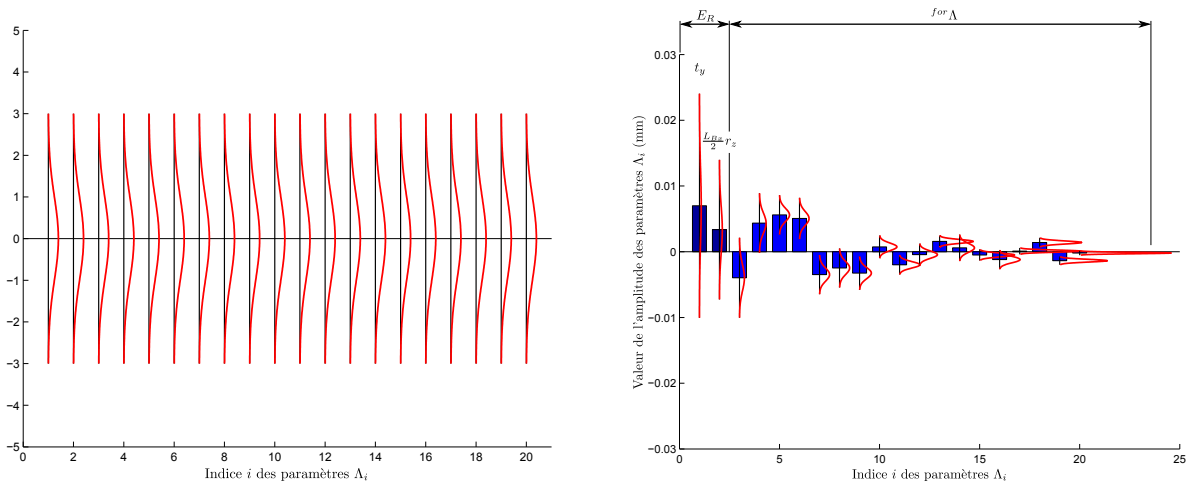
Nous exposons ici la démarche permettant de conduire à la génération d'un lot de surfaces à partir des caractéristiques statistiques d'un échantillon, que nous avons qualifié de pilote. Cette génération s'effectue en deux étapes :

- Nous tirons aléatoirement  $N$  signatures  $^{aléa}\Lambda$  de  $m$  paramètres géométriques. Chaque paramètre géométrique suit une loi de distribution normale tel que  $\overline{^{aléa}\Lambda_i} = 0$  et  $\sigma_{^{aléa}\Lambda_i} = 1$  (cf. figure 3.23(a)).
- Dans cette seconde et dernière étape, il s'agit d'appliquer aux signatures aléatoires précédentes les caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote ( $\bar{\Lambda}$  et  $^{\Lambda}\Sigma$ ). Pour réaliser cette opération, nous diagonalisons la matrice de covariance de l'échantillon pilote afin d'obtenir les variances principales d'une part, et la matrice de passage  $P$  composée des directions des variances principales d'autre part. En appliquant la relation 3.9, analogue à un changement de repère, nous calculons les  $N$  signatures simulées  $^{sim}\Lambda$  avec les caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote (cf. figure 3.23(b)).

$$\underbrace{^{sim}\Lambda}_{m \times N} = \underbrace{P}_{m \times m} \cdot \underbrace{\sqrt{^{\Lambda}D}}_{m \times m} \cdot \underbrace{^{aléa}\Lambda}_{m \times N} + \underbrace{\bar{\Lambda}}_{m \times 1} \quad (3.9)$$

où  $^{\Lambda}D$  est la matrice diagonale, constituée des variances principales.

En simulant deux lots de  $N$  surfaces  $A_1$  et  $A_2$  avec la démarche que nous venons de décrire, nous sommes en mesure de réaliser les  $N$  assemblages. Nous vérifions alors si les écarts de mise en position du lot d'assemblages respectent la condition fonctionnelle  $CF_B$ , ce qui nous permet de calculer un TNC.

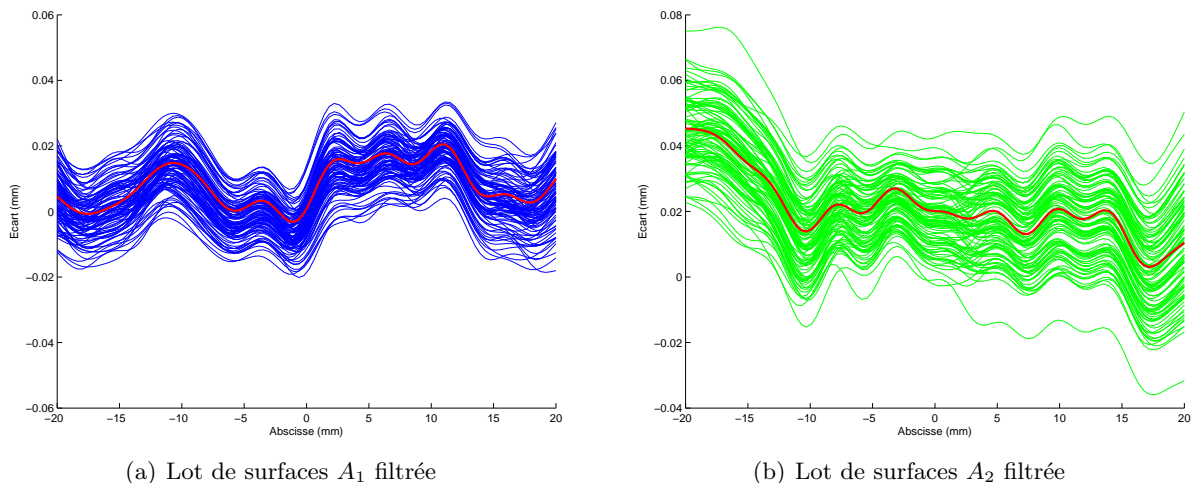


(a) Génération aléatoire des  $N$  signatures  $^{aléa} \Lambda$  (b) Signature d'un lot de surfaces  $A_1$  de l'assemblage  
Figure 3.23 – Résultats de la génération d'un lot de surfaces  $A_1$  à partir de son échantillon pilote

### 3.3.2 Cas 2D

Nous proposons dans cette section de réaliser les  $N$  assemblages des lots de  $N$  surfaces  $A_1$  et de  $N$  surfaces  $A_2$ . Dans des conditions industrielles, le fabricant va probablement produire un lot de pièces 1 indépendamment du lot de pièces 2 et son objectif est de garantir un TNC minimal compte tenu de la spécification à vérifier. Grâce à la méthode de génération de lots par simulation que nous avons mise en place, nous pouvons, à partir d'un échantillon issu de la production du fabricant, déduire les caractéristiques statistiques de sa production et ainsi générer un lot plus conséquent pour estimer le TNC.

Pour illustrer nos propos, nous simulons deux lots de cent surfaces  $A_1$  et  $A_2$  (cf. figure 3.24), à partir de deux échantillons pilotes simulés également. Nous réalisons ensuite les cent assemblages pour estimer le TNC.



(a) Lot de surfaces  $A_1$  filtrée (b) Lot de surfaces  $A_2$  filtrée  
Figure 3.24 – Représentation géométrique des lots de surfaces et leur moyenne en rouge

Nous représentons dans l'espace des petits déplacements les écarts de mise en position au point  $B$  des cent assemblages (cf. figure C.1). En fixant la tolérance  $t$  de la spécification de localisation à 0.1 mm, nous comparons le TNC de la mise en position réalisée sans défauts de forme et celui de la mise en position réalisée avec défauts de forme. Nous obtenons dans le premier cas un TNC



de 72% et dans le second un TNC de 19%. L'ellipse représente le domaine d'isoprobabilité à  $6\sigma$  de la loi multi-normale des deux variables de petits déplacements  $(t_y, r_z)$ , centrée sur l'assemblage moyen (croix verticale noire sur la figure C.1).

L'importante différence entre les valeurs de TNC nous montre que la prise compte des défauts de forme dans un assemblage est primordiale. Les échantillons pilotes étant simulés à partir des paramètres géométriques du cas 2D de la section 3.2.1, on retrouve sur le TNC l'effet « positif » dans ce cas, de l'écart de mise en position lié aux défauts de forme.

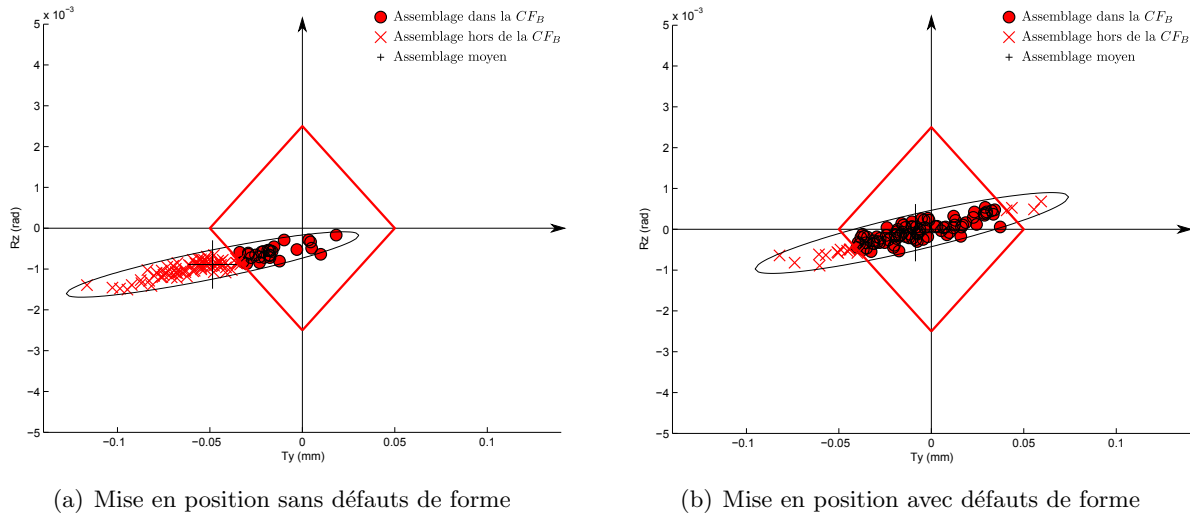


Figure 3.25 – Condition fonctionnelle  $CF_B$  et torseurs écarts du lot d'assemblages

### 3.3.3 Cas 3D

Dans cette section, nous réalisons l'assemblage en trois dimensions de deux lots de cent surfaces  $A_1$  et  $A_2$  simulées. En suivant la même démarche que le cas 2D précédent, nous évaluons le TNC du lot d'assemblages, selon que les surfaces en vis-à-vis soient mises en position sur les surfaces associées (cf. figure 3.26) ou selon qu'elles soient mises en position en considérant les défauts de forme (cf. figure 3.27). Dans le cas des surfaces associées, nous obtenons un TNC de 15% et dans l'autre le TNC est égal à 19%. Nous représentons l'ellipsoïde correspondant au domaine d'isoprobabilité à  $6\sigma$  de la loi multi-normale des trois variables de petits déplacements  $(t_y, r_x, r_z)$ .

Nous pouvons établir la même conclusion que précédemment, avec une tendance inversée sur les TNC. Cette tendance est en accord avec le constat que nous avons fait dans la section 3.2.2 puisque les échantillons pilotes des surfaces  $A_1$  et  $A_2$  ont également été simulés avec les paramètres géométriques des surfaces  $A_1$  et  $A_2$  définis dans le cas de l'assemblage 3D.

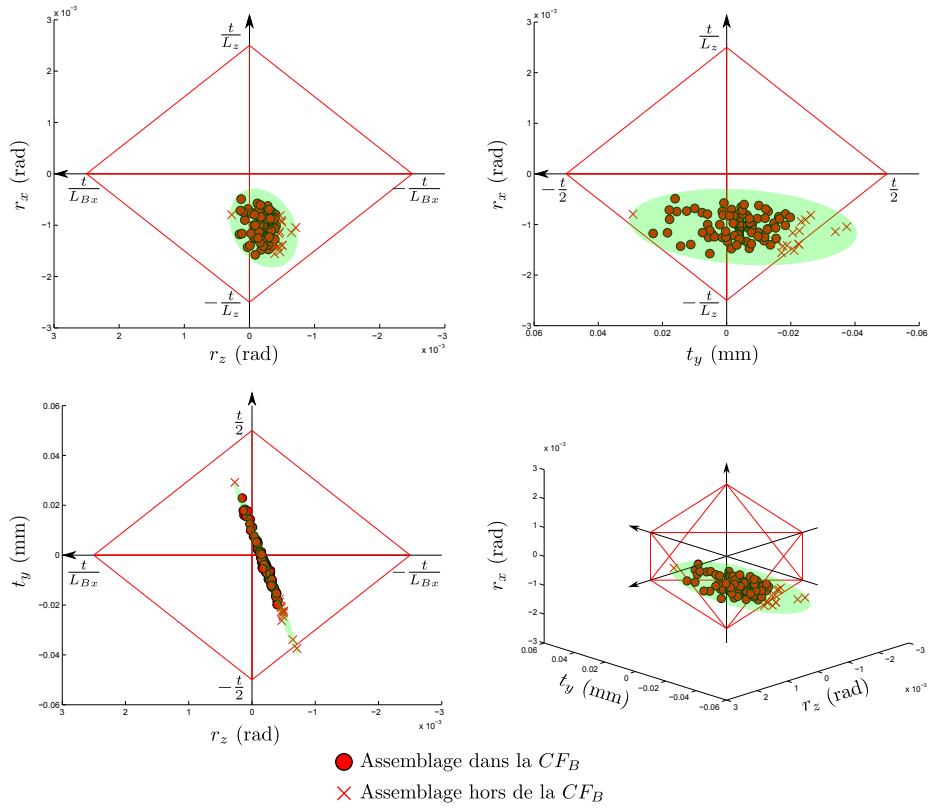


Figure 3.26 – Vérification de la condition fonctionnelle  $CF_B$  du lot d'assemblage sans défauts de forme

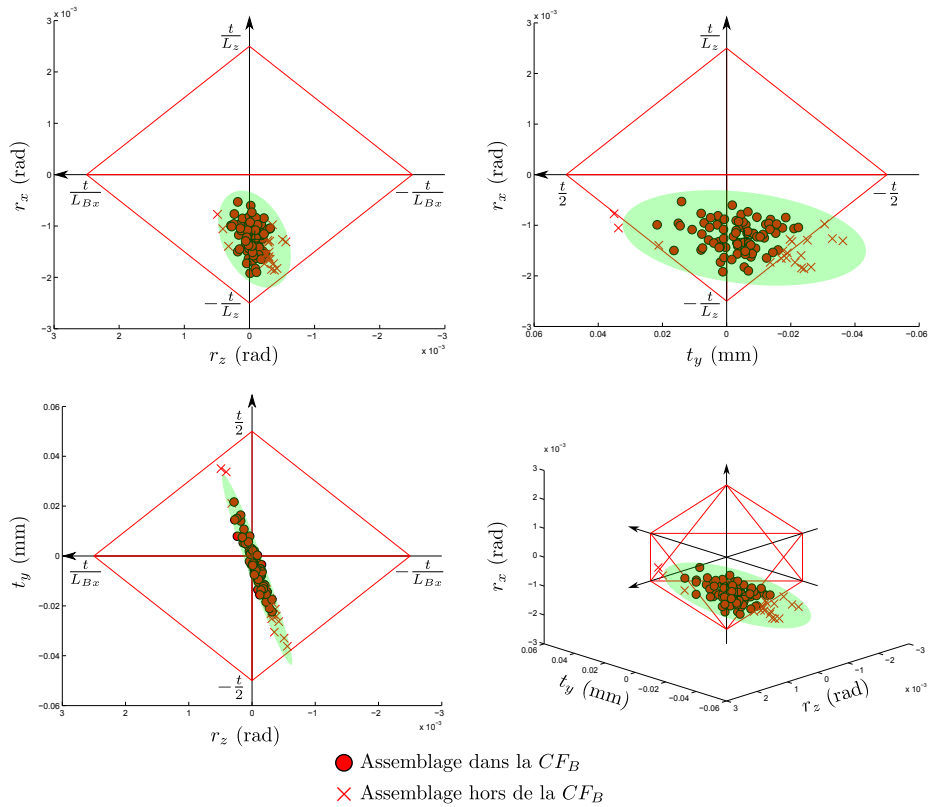


Figure 3.27 – Vérification de la condition fonctionnelle  $CF_B$  du lot d'assemblage avec défauts de forme

### 3.4 Synthèse de la méthode

Nous venons d'exposer dans ce chapitre une méthode d'assemblage de composants permettant de prendre en compte les défauts géométriques de forme des éléments géométriques en contact. Cette méthode est exploitable pour des assemblages de composants indéformables, sans jeux et à efforts imposés.

Dans ce chapitre, notre approche est appliquée plus particulièrement à un assemblage de deux pièces dont la mise en contact est réalisée par l'intermédiaire d'une liaison plan sur plan sans jeux et le maintien en position est assuré par un effort de type glisseur. Les défauts géométriques des surfaces en contact sont paramétrés par des petits déplacements, au sens du torseur de petits déplacements [BOURDET et CLÉMENT, 76], en ce qui concerne les défauts de position et d'orientation. Quant aux défauts de forme, ils ont naturellement été paramétrés par notre paramétrage modal. Les écarts de mise en position engendrés par les défauts géométriques ont ensuite été évalués par les composantes du torseur écarts [GIORDANO *et al.*, 92] et représentés dans l'espace de ces composantes. Ainsi, nous vérifions si l'assemblage considéré respecte la condition fonctionnelle initiale. Dans un second temps, nous appliquons cette démarche à des assemblages de lots de pièces simulées mais néanmoins représentatives d'une certaine production. Le modèle statistique que l'on propose repose sur les caractéristiques statistiques d'un échantillon de pièces, que l'on appelle échantillon pilote, et qui pourrait être issu d'une campagne de mesure. De ce fait, nos lots de pièces simulées possèdent les caractéristiques statistiques de l'échantillon pilote correspondant. Nous pouvons alors estimer le Taux de Non Conformité des assemblages et analyser par ce fait l'influence du défaut de forme.

Tout en étant conscient que nous ne travaillons que sur un assemblage sans mobilités, nous avons pu mettre en évidence l'influence des défauts de forme sur la conformité d'une spécification géométrique. D'autre part, il s'avère intéressant pour un fabricant de pouvoir évaluer le TNC de ses produits sans réaliser de contrôle 100%. La modélisation statistique que nous proposons dans la deuxième partie de ce chapitre, répond à ce besoin.

### 3.5 Perspectives de la méthode

Cette méthode constitue, à notre sens, une approche intéressante qui peut s'étendre à bien d'autres exemples d'assemblages. En effet, les hypothèses de travail sur lesquelles nous avons construit cette méthode peuvent être remises en question pour la faire évoluer.

Nous pourrions explorer des assemblages de pièces avec des conditions de maintien en position différentes. Plutôt que d'imposer un effort de type glisseur, on peut envisager un protocole de positionnement dans lequel un effort de type couple assurerait le maintien en position. Dans le cas contraire, où aucun effort de maintien n'est imposé, on sous-entend des assemblages avec jeux donc des mécanismes avec mobilités. C'est une perspective qui trouve de nombreuses applications industrielles, notamment dans la transmission de puissance et dans le domaine fluide en particulier (pneumatique et hydraulique), d'autant plus que les défauts de forme ont un rôle déterminant dans les performances de ce type de mécanismes. Il requiert une maîtrise totale du jeu fonctionnel qui généralement doit assurer à la fois une grande précision pour le guidage et une fonction d'étanchéité. Le domaine des assemblages avec jeu sont des pistes de réflexions sur lesquelles nos travaux ont d'ores et déjà suscité l'intérêt d'un certain nombre d'industriels.

Nous venons d'évoquer le domaine de l'étanchéité, un domaine dans lequel la forme géométrique des pièces en contact a un rôle indispensable. Nous verrons, dans le chapitre suivant, la présentation

de travaux que nous avons entamés sur ce sujet en coopération avec le laboratoire TREFLE<sup>1</sup> de Bordeaux. Il s'agit d'évaluer les performances d'une étanchéité réalisée par des brides annulaires sous fortes pressions de serrage en fonction des défauts géométriques potentielles des brides. Ces fortes pressions nous imposent de considérer un certain comportement mécanique du matériau pour modéliser les déformations engendrées par ces pressions au niveau du contact. Il en résultera un champ d'ouverture qui, selon la loi d'écoulement envisagée, nous permettra d'évaluer les performances de l'étanchéité.

Une troisième et dernière perspective, que nous pourrions intégrer dans notre méthode d'assemblage, est la prise en compte du comportement déformable des pièces en contact. Là encore, plusieurs choix s'offrent à nous, puisqu'en fonction des applications rencontrées, l'hypothèse d'un comportement plastique suffira, alors que pour d'autres un comportement élastique sera requis. L'évolution du comportement mécanique au cours de l'assemblage peut également être envisagée. Cet aspect déformable peut être intégré aussi bien dans les hypothèses liées aux conditions de contact que dans le comportement global d'une pièce ou d'un assemblage déformable.



**Objectif du chapitre**

*Dans ce chapitre, nous abordons la nécessité de définir l'expression d'un besoin fonctionnel, lié à la forme, avec un langage de spécification non ambigu. Ayant développé un paramétrage mathématique pour caractériser la forme géométrique des pièces, nous proposons d'exprimer des exigences fonctionnelles liées à ce paramétrage. L'estimation de l'acceptabilité est également un des enjeux d'un langage de spécification. Nous proposons d'étudier cette notion d'acceptabilité à travers une étude sur la maîtrise d'un procédé d'emboutissage et une seconde sur la criticité du défaut de forme sur les performances d'une fonction d'étanchéité.*

## 4.1 Expression du besoin de spécification

Lors de la conception d'un produit, le concepteur définit une géométrie cible permettant de garantir son bon fonctionnement. La production des pièces n'étant jamais parfaite, il est nécessaire de trouver un compromis entre le besoin du bureau d'études et les procédés de fabrication. Ce compromis est arbitré par le tolérancement géométrique qui permet d'exprimer les variations admissibles de la géométrie réelle autour de la géométrie cible.

La maîtrise de ces variations géométriques se décompose en six ordres de défauts [ISO-8785, 98]. Ces ordres sont définis selon des critères technologiques et mathématiques. D'un point de vue purement mathématique, si l'on souhaite exprimer les variations d'une géométrie, nous devons considérer le paramétrage qui nous permet de la définir. Même si les variations géométriques possibles sont indépendantes du paramétrage, ce dernier est indispensable pour les appréhender.

De ce fait, nous constatons qu'il est nécessaire de définir des modèles de variations géométriques pour tous ou chacun des ordres de défauts. Ces modèles définissent alors un langage permettant d'échanger sur les limites admissibles par la géométrie réelle par rapport à sa cible. De plus, les exigences des clients en qualité géométrique augmentent tant sur le plan quantitatif que sur le plan qualitatif. Il est de plus en plus courant par exemple de voir exprimer des besoins en qualité perçue sur de nombreuses pièces. Comment écrire ces besoins ? Les annotations au plan autorisent d'écrire

noir sur blanc le besoin, mais leur signification peut paraître ambiguë pour un certain nombre d'acteurs du cycle de vie du produit. On pense notamment à l'embaras du métrologue pour les contrôler.

D'autre part, les pièces de petites dimensions, notamment, peuvent avoir des défauts géométriques dont les dimensions ne permettent pas de faire la distinction entre les ordres de défauts. En effet, un alésage de petite dimension aura des défauts de forme qui pourront être bien plus importants que le défaut dimensionnel. Dès lors que le défaut de forme n'est plus négligeable, dans quelle mesure doit-on utiliser les méthodes traditionnelles pour exprimer le besoin ? L'exigence de l'enveloppe et l'utilisation de l'exigence du maximum de matière permettent de lier dimension et forme mais il peut être utile d'employer un langage permettant de distinguer les différents défauts. Nous voyons donc, dans cet exemple, les limites du langage normalisé actuel dans l'expression des défauts de forme.

Le besoin de définir un nouveau langage de spécification se justifie d'autant plus, dès lors que la forme géométrique a un rôle important dans la fonctionnalité du produit ou tout simplement lorsque la forme est la fonction. Nous présentons dans le tableau 4.1, un ensemble de fonctions, classées par domaines d'application, dans lesquelles les défauts de forme nécessitent d'être pris en compte.

Domaine d'application	Fonction réalisée	Exemple
Électro-magnétique	Guidage magnétique	Entrefer
Mécanique	Guidage de précision	Roulements
	Pression de contact	Prothèse de hanche
	Usure	Phénomènes tribologiques
Fluide	Étanchéité statique	Brides en contact
	Étanchéité dynamique	Distribution hydraulique
	Hydrodynamisme	Portance et traînée d'une pale de rotor
Optique	Guidage d'ondes	Accélérateurs de particules
	Réflexion et transmission	Théorie des aberrations
Perception	Visuelle	Carrosserie de voiture
	Auditive	Sonorité d'une cloche

Tableau 4.1 – Applications où la forme intervient dans la fonction

Nous identifions deux enjeux majeurs, relatifs à cette liste de fonctions, auxquels doit satisfaire un langage de spécification :

- Estimer l'acceptabilité. C'est-à-dire être capable de prévoir dans quelle mesure les performances de la fonction du produit sont entachées.
- Écrire ce qui est acceptable de manière univoque.

Nous avons justement introduit dans le chapitre 2 un paramétrage des formes, permettant de caractériser la forme de tous les éléments géométriques. Nous avons également déployé, dans ce chapitre, une méthodologie de contrôle relative à ce paramétrage MemoSurf<sup>®</sup>. Dans le chapitre 3, nous avons ensuite utilisé ce paramétrage dans une application d'assemblage de composants pour estimer la conformité d'une spécification géométrique « classique ». Nous verrons donc dans ce dernier chapitre de quelle manière nous pouvons établir un langage de spécification à partir du paramétrage modal.

## 4.2 Spécifications modales

Comme nous venons de le voir, la maîtrise de la qualité géométrique des produits est présente depuis l'écriture des spécifications jusqu'à la métrologie. Une volonté des comités de normalisation est de définir des outils permettant d'agir sur chaque type de défaut indépendamment les uns des autres. Sans aller contre cette volonté, une première approche de nos travaux a permis de mettre en évidence une manière de spécifier les défauts géométriques avec le paramétrage modal en unifiant positionnement et forme [SAMPER et FORMOSA, 07]. L'évolution du paramétrage modal, comme on peut le constater dans le chapitre 2, fait que notre volonté est de n'utiliser ce paramétrage que pour caractériser les écarts de forme issus d'une association géométrique (en accord avec le principe d'indépendance de l'ISO [ISO-8785, 98]). La zone spécifiée peut être divisée en deux zones comme le propose [AMETA *et al.*, 07], la première limite les déplacements de la surface associée et la seconde celle des écarts de forme. Pour aller plus loin dans cette démarche, nous pouvons chercher à limiter chaque forme, représentée par un mode, indépendamment à la manière de [ZHANG *et al.*, 05]. Nous pouvons aussi chercher à les associer pour définir une combinaison de modes dont la somme vectorielle se partage l'espace des déplacements admissibles. Il est utile de préciser que ces approches, présentées dans la suite, s'appuient sur une démarche « au pire des cas ».

L'écriture des spécifications avec notre paramétrage fait partie de nos travaux les plus récents. Initiés par les travaux de Serge Samper et Fabien Formosa, nous illustrons nos approches de spécifications modales avec l'exemple de la figure 4.1 [SAMPER et FORMOSA, 07]. Nous traitons l'exemple en 2D dans un premier temps pour simplifier les expressions, puis nous montrons les résultats du cas 3D.

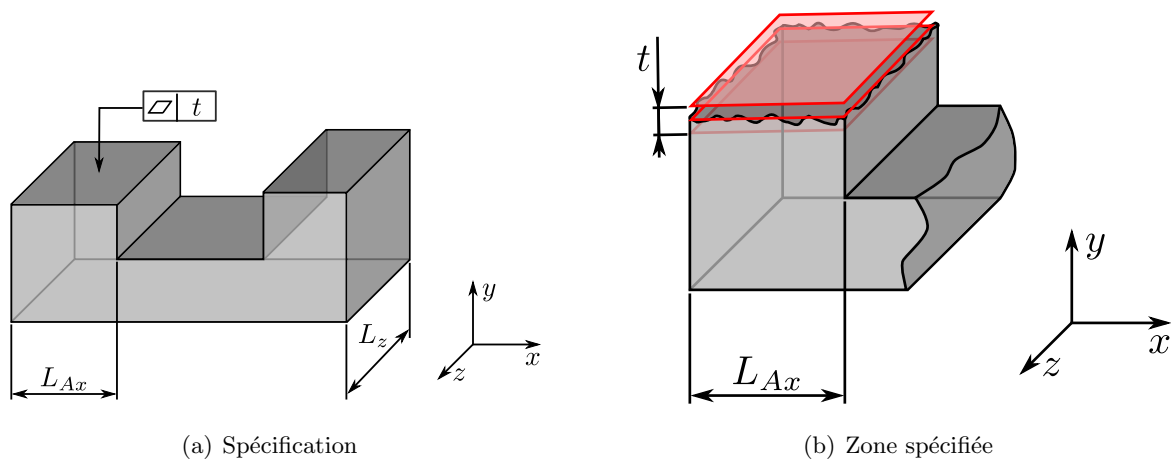


Figure 4.1 – Exemple de spécification

Nous considérons l'exigence fonctionnelle de planéité, définie sur la figure 4.1. Puis dans le cas 2D, nous simplifions cette exigence en appliquant la spécification fonctionnelle à un profil de la surface (revient à considérer que les surfaces en contact n'ont pas de défauts sur l'axe  $z$ ). Nous prenons alors une base modale naturelle  $Q$ , associée à un modèle poutre en condition libre-libre (cf. figure 4.2). Pour le cas 3D, nous utilisons la base modale d'un modèle plaque (cf. tableau 3.2 à la page 104).



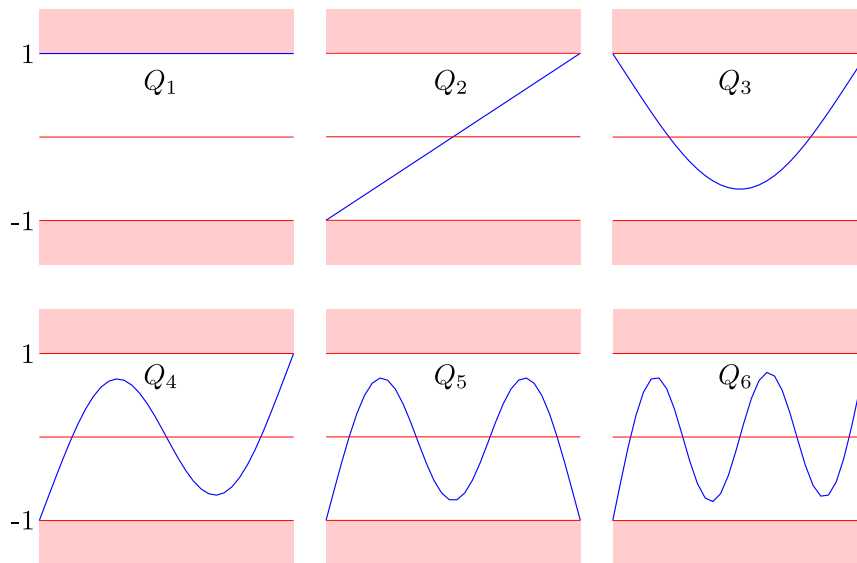


Figure 4.2 – Base modale d'une poutre libre-libre

*Remarque.* Il est important de préciser que les modes sont normés avec la norme infinie égale à 1, définie dans l'équation 2.8 à la page 47. Les formes représentées ont alors toutes une limite égale à 1 ou/et -1. Multipliées par la valeur de la demi-tolérance elles tangentent la zone de tolérance.

#### 4.2.1 Approche spectrale

La première approche d'écriture de spécifications modales que nous présentons ici, est la plus naturelle et fait partie des approches que nous qualifions de spectrales. Nous définissons ce type d'approche par rapport à l'écriture des spécifications. C'est-à-dire que ce type de spécification limite par une valeur de tolérance chaque défaut ou ensemble de défauts de manière indépendante.

En s'inscrivant dans ce type de démarche, la norme sur la cylindricité propose une extension sur l'évaluation des écarts de cylindricité [ISO/TS-12180-1, 03]. Elle classe ces écarts selon trois types (cf. tableau 4.2), qui peuvent chacun être spécifié par des caractéristiques géométriques différentes.

Type d'écarts	Spécification recommandée	Illustrations
Écarts sur la ligne médiane	Rectitude de la ligne médiane	
Écarts radiaux	Parallélisme du profil de génératrice par rapport à l'axe du cylindre pris comme référence	
Écarts de sections	Circularité des sections	

Tableau 4.2 – Écarts de forme cylindrique ©ISO 2003

Dans le domaine de l'optique et instruments d'optique, les défauts géométriques de forme sont

primordiaux dans la fonction des produits. Ce domaine a donc fait l'objet de nombreux travaux dans le contrôle des systèmes optiques. La volonté de caractériser les écarts de forme de ces produits a abouti à une norme sur les tolérances de forme de surface appliquées aux surfaces sphériques et asphériques [NF-ISO-10110-5, 08]. Le tolérancement de ces surfaces est alors défini par la spécification des valeurs maximales admises par trois catégories de défauts : le défaut sagittal, le défaut de l'irrégularité et/ou le défaut de l'irrégularité à symétrie de révolution (cf. figure 4.3). De plus, les tolérances de trois valeurs quadratiques moyennes du défaut de forme de surface peuvent être spécifiées. Ces valeurs représentent la valeur quadratique moyenne de la fonction restante après soustraction de différents types de défauts de surface. Comme nous l'avons présentée dans le chapitre 1, l'utilisation des polynômes de Zernike est une méthode qui permet de déterminer la valeur du défaut sagittal, de l'irrégularité et de l'irrégularité à symétrie de révolution d'une surface donnée.

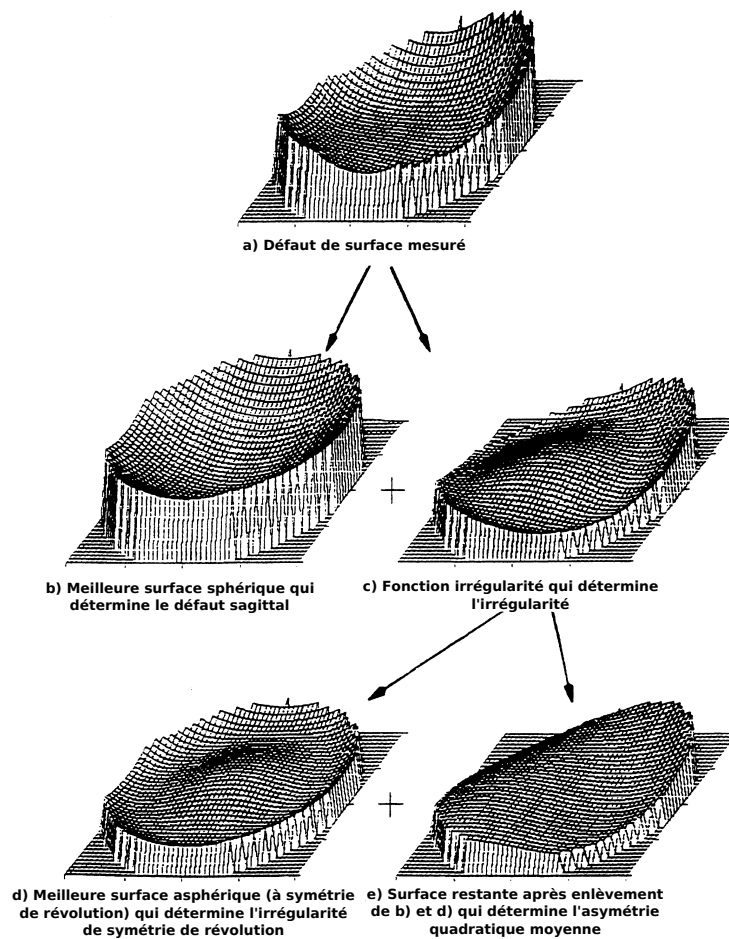


Figure 4.3 – Exemple de surface mesurée et de sa décomposition en types de défauts ©ISO

On retrouve également des spécifications de type spectral dans des applications spécifiques, liées à la circularité. La circularité d'une pièce peut être caractérisée par des composantes harmoniques résultant d'une transformée de Fourier et s'exprimant par une amplitude et une phase pour chaque ondulation par tour (Undulations Per Revolutions – UPR) [ISO/TS-12181-1, 03]. Il est alors possible de spécifier l'amplitude d'un ou plusieurs nombre(s) d'UPR. Par exemple, les roulementiers spécifient la circularité des chemins de roulements en fixant des limites de circularité différentes pour un ou plusieurs nombre(s) d'UPR.

En suivant le même type d'approche, nous pouvons à l'aide du paramétrage modal établir

des spécifications similaires. De la décomposition modale, il résulte un ensemble de coordonnées modales qui représente l'amplitude du défaut modal considéré. Généralement représentées sur un spectre, nous pouvons exprimer le besoin client en définissant un spectre admissible compris entre deux spectres limites. La figure 4.4 montre trois façons de spécifier pour un spectre de coordonnées modales :

- La spécification uniforme (a) impose à chaque mode de respecter la même zone de forme.
- La spécification par paliers (b) impose à chaque mode ou groupe de modes de respecter une zone de forme pas nécessairement identique.
- La spécification hyperbolique (c) permet d'écrire avec une loi simple que l'exigence décroît avec l'ordre du mode.

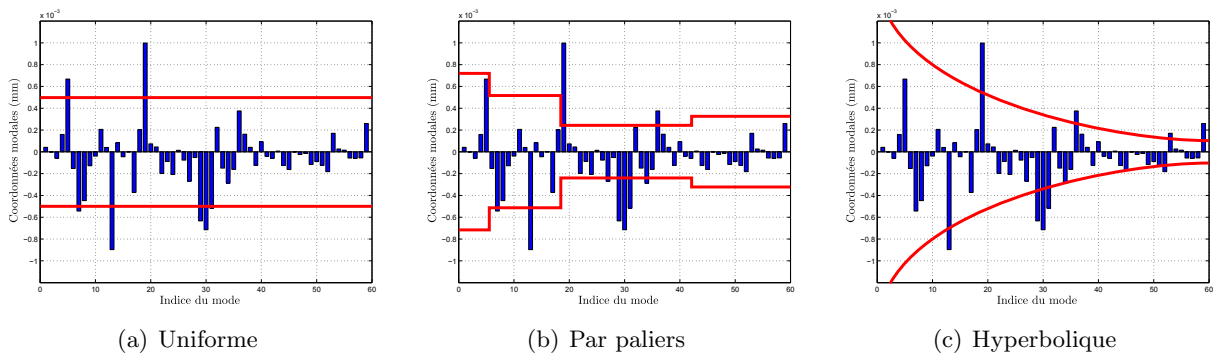


Figure 4.4 – Spécifications modales spectrales

Néanmoins, la description de cette approche « bilimites » ne nous restreint pas à une démarche « au pire de cas », l'approche statistique peut également être envisagée. En statistique, l'approche spectrale revient à considérer un lot de caractéristiques non liées, chacune réparties suivant une distribution identifiée (cf. figure 4.5).

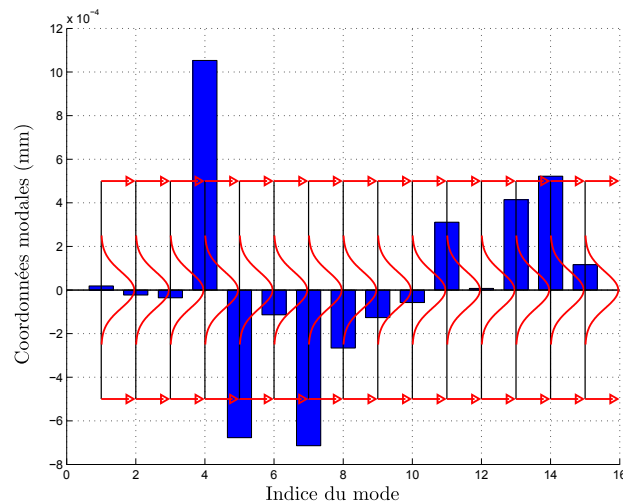


Figure 4.5 – Spécifications modales statistiques de type uniforme

Cette première méthode de spécification a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et très visuelle. Elle a cependant l'inconvénient de ne pas combiner les modes entre eux ce que nous proposons à travers la méthode des domaines modaux.

### 4.2.2 Domaine modal

Dans le cas où la spécification couple les coordonnées modales, l'approche spectrale ne suffit plus et il devient nécessaire d'utiliser l'espace des coordonnées modales pour exprimer la spécification, c'est l'objectif du domaine modal. De la même façon que la méthode des domaines construit des domaines dans l'espace des petits déplacements, nous calculons des domaines modaux dans l'espace des coordonnées modales.

Comme dans l'approche spectrale, nous pouvons envisager de définir la spécification par une approche « bilimites » (contraintes sur les coordonnées) ou par une approche « statistique ». La première donnera un polytope dans l'espace des coordonnées modales, la seconde donnera une enveloppe d'acceptation statistique (associée à un risque) d'un lot de caractéristiques représentant un lot de formes.

#### 4.2.2.1 Domaine modal d'une zone

Dans cette section, nous posons le problème de la relation entre les coordonnées modales et la limitation des écarts de forme d'une surface à une zone (cf. figure 4.1(b)). Les défauts modaux  $Q_1$  et  $Q_2$  ne sont pas pris en compte dans le calcul des domaines modaux car nous caractérisons uniquement les écarts de forme de la surface. De surcroît la zone spécifiée, étant généralement centrée sur la surface associée au sens des moindres carrés, la Décomposition Modale Discrète (DMD) engendrera des coordonnées modales nulles sur les modes  $Q_1$  et  $Q_2$ . Nous associons alors les coordonnées modales entre elles, en utilisant la méthode des domaines pour calculer le domaine modal associé.

Le domaine modal est donc défini par les inéquations :

$$-\frac{t}{2} \leq \delta_k \leq \frac{t}{2}, \text{ tel que} \quad (4.1)$$

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{N_Q} \lambda_i Q_{ki} \quad (4.2)$$

Si l'on discrétise en 33 éléments (34 nœuds) le modèle poutre, dont les six premiers modes sont représentés sur la figure 4.2, et que l'on écrit les relations liant les trois premiers modes de forme ( $Q_3$ ,  $Q_4$  et  $Q_5$ ), on obtient les 68 inéquations 4.3 définissant la H-représentation du domaine modal associé à la spécification de planéité.

		$Q_3$		$Q_4$		$Q_5$		
Noeud 1	$-\frac{t}{2} \leq$	+1	$\lambda_3$	-1	$\lambda_4$	-1	$\lambda_5$	$\leq \frac{t}{2}$
Noeud 2	$-\frac{t}{2} \leq$	+0.86	$\lambda_3$	-0.76	$\lambda_4$	-0.66	$\lambda_5$	$\leq \frac{t}{2}$
Noeud 3	$-\frac{t}{2} \leq$	+0.72	$\lambda_3$	-0.51	$\lambda_4$	-0.32	$\lambda_5$	$\leq \frac{t}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Noeud $k$	$-\frac{t}{2} \leq$	$\dots$	$\lambda_3$	$\dots$	$\lambda_4$	$\dots$	$\lambda_5$	$\leq \frac{t}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Noeud 32	$-\frac{t}{2} \leq$	+0.72	$\lambda_3$	0.51	$\lambda_4$	-0.32	$\lambda_5$	$\leq \frac{t}{2}$
Noeud 33	$-\frac{t}{2} \leq$	+0.86	$\lambda_3$	0.76	$\lambda_4$	-0.66	$\lambda_5$	$\leq \frac{t}{2}$
Noeud 34	$-\frac{t}{2} \leq$	+1	$\lambda_3$	+1	$\lambda_4$	-1	$\lambda_5$	$\leq \frac{t}{2}$

Nous représentons, sur la figure suivante, le H-domaine dans l'espace  $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ . Nous avons choisi d'imposer  $t = 2$ .

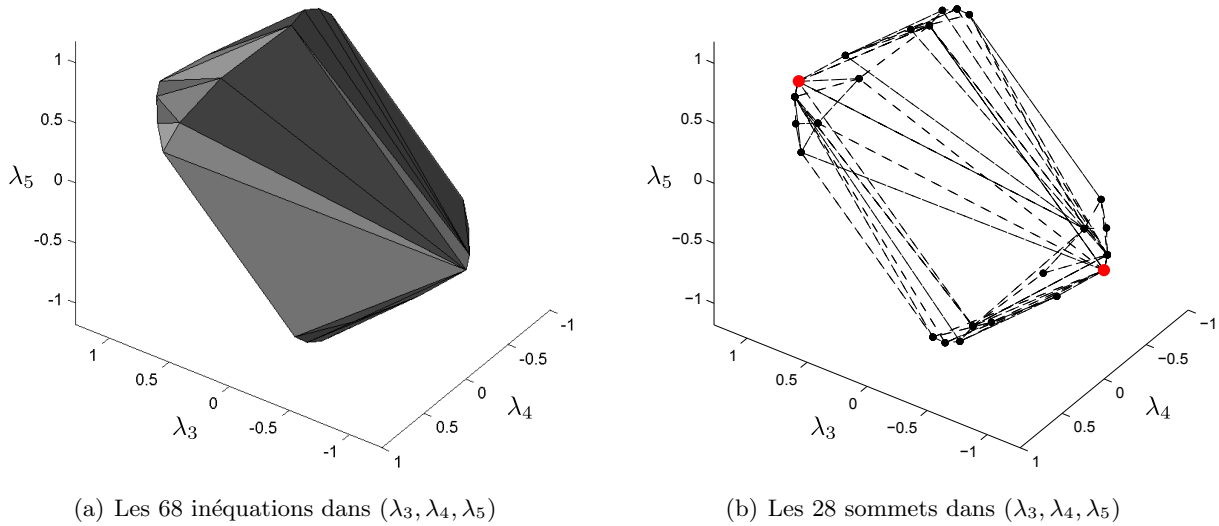


Figure 4.6 – Domaine modal spécifié

Plusieurs commentaires sont à faire sur le calcul des domaines modaux. Tout d'abord, si nous avons utilisé les six premiers modes de forme (de  $Q_3$  à  $Q_8$ ), nous aurions eu 68 inéquations et 3848 sommets. Simplement en doublant l'espace de représentation, le nombre de sommets explosent. Deuxièmement, chaque sommet est une combinaison des coordonnées modales qui donne une forme en contact avec la zone spécifiée, l'ensemble des sommets est l'ensemble des combinaisons au « pire des cas ». Nous pouvons apporter un dernier commentaire sur les valeurs maximales des coordonnées modales. En effet, nous remarquons que  $\lambda_3$  peut valoir 1.27 si  $\lambda_5$  vaut 0.27 et que les autres  $\lambda_i$  sont nulles. Cet exemple, représenté par les sommets rouge de la figure 4.6(b), montre les limites de la spécification modale de type spectrale pour respecter une zone.

Nous montrons, sur la figure 4.7, le couplage des deux types d'approches. Dans cet exemple, nous ajoutons au domaine modal spécifié, une contrainte spectrale sur la valeur de la coordonnée modale  $\lambda_3$ . Le résultat de l'intersection des deux domaines donne un domaine modal tronqué sur l'axe  $\lambda_3$ .

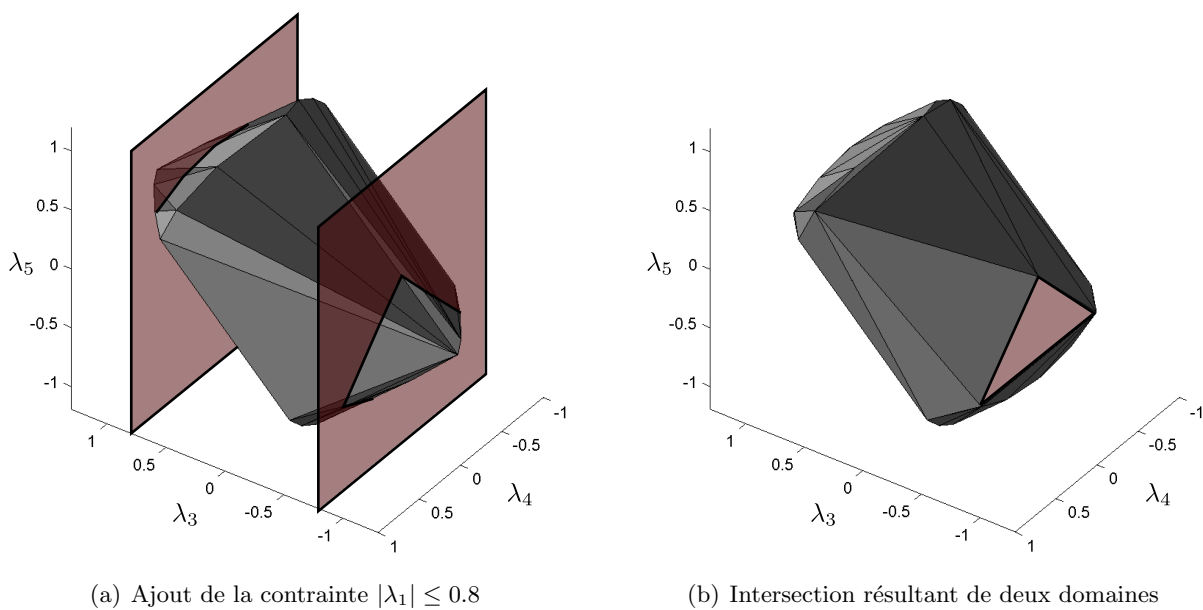


Figure 4.7 – Domaine modal spécifié et contrainte spectrale

La résolution des équations 4.1 et 4.2 appliquées à la surface complète discrétisée par  $n$  nœuds donnera  $2 \times n$  inéquations dans un espace construit à partir de  $N_Q$  modes. Le système d'inéquations 4.3 aura alors une taille  $n \times N_Q$ . Pour l'exemple de la figure 4.1, nous avons pris une grille de  $10 \times 10$  nœuds et nous représentons le domaine modal dans l'espace des  $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ , correspondant aux trois premiers modes de forme. Le domaine modal est donc défini par 200 inéquations dans un espace de dimensions trois et nous obtenons 92 sommets (cf. figure 4.8).

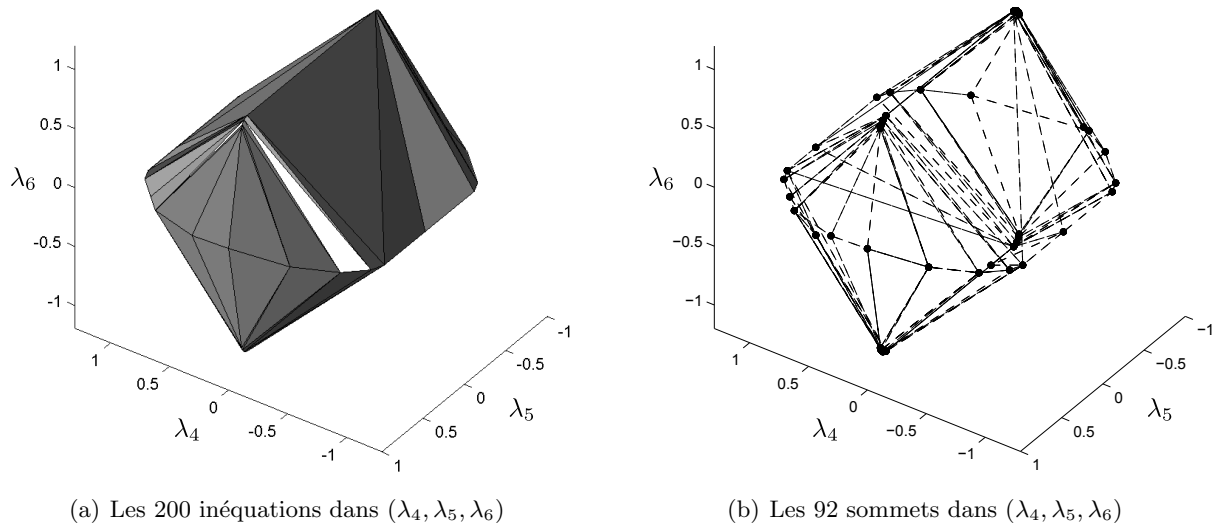


Figure 4.8 – Domaine modal spécifié

#### 4.2.2.2 Domaine d'une spécification quelconque

Dans le cas où la spécification n'est pas définie par une exigence de zone et en fonction du type d'approche considérée, nous pouvons énoncer plusieurs pistes de réflexions.

(a) *Approche type bilimites.* Si nous connaissons le modèle théorique (analytique ou déterminé par un plan d'expériences) liant la spécification aux coordonnées modales, nous pouvons écrire des inéquations (équation 4.3). Si nous procédons à des essais dans l'espace des coordonnées, nous obtiendrons des sommets du domaine, calculé à partir du convexe associé.

(b) *Approche statistique.* De la même manière que pour toute démarche de tolérancement, nous pouvons lier les coordonnées modales avec une exigence statistique. La traduction de cette dernière se fera par une enveloppe dans l'espace des modes. Si nous utilisons des lois normales liées nous obtenons des hyper-ellipsoïdes dont le centre est la moyenne du lot et les axes de symétrie définissent le paramétrage non covariant.

#### 4.2.3 Conclusion sur les spécifications modales

Nous pouvons imaginer que le concepteur souhaite limiter les défauts de forme de fortes périodicités et utiliser l'approche spectrale qui permet d'écrire ces exigences de manière simple. Si au contraire il désire respecter la notion de zone, associée au paramétrage modal, nous proposons une extension de la méthode des domaines. Les domaines de spécification modale restent, cependant, dans une logique combinatoire qui peut être rapidement chronophage, sans parler de la manipulation des domaines qui est relativement lourde, mais informatisable et transparente pour l'utilisateur. Le problème principal est le temps de calculs qui limite la dimension de l'espace d'analyse donc le

nombre de coefficients à prendre en compte. Nous avons commencé à explorer des solutions simplificatrices qui permettront de rendre les temps de calculs plus rapides. De plus, nous savons que l'approche « au pire des cas » génère des coûts importants en sur qualité. Les approches statistiques, notamment à l'aide du tolérancement inertiel proposé par Pillet [PILLET, 04], montrent une voie intéressante qui a commencée à être explorée dans la thèse de Adragna [ADRAGNA, 07] puis celle de Denimal [DENIMAL, 09].

En proposant ces deux approches, qui permettent d'exprimer des spécifications par le paramétrage modal, nous venons de répondre à un des enjeux d'un langage de spécification. L'objet du deuxième enjeu est d'être capable d'estimer l'acceptabilité. Pour parvenir à cet enjeu, il faut être en mesure d'évaluer l'influence des défauts géométriques de forme par rapport au performance du besoin fonctionnel. Cette évaluation passe par la maîtrise des défauts géométriques de forme et par conséquent la maîtrise du procédé de fabrication. Nous proposons, dans la suite de ce chapitre, une ouverture vers ces deux thématiques avec d'une part, des travaux réalisés sur la maîtrise d'un procédé d'emboutissage et d'autre part, des travaux menés, dans le cadre d'une coopération, sur la criticité des défauts de forme sur les performances d'un système d'étanchéité.

## 4.3 Vers la maîtrise des procédés : emboutissage

### 4.3.1 Problématique

Nous présentons, dans cette section, une démarche d'optimisation d'un procédé d'emboutissage dont l'objectif est la maîtrise des défauts géométriques de forme. Ces travaux font suite à de précédents travaux de recherche dans lesquels il s'agissait d'optimiser un procédé d'emboutissage constitué de plusieurs étapes [LEDOUX, 05] [LEDOUX *et al.*, 06]. Les objectifs de ces travaux étaient :

- de trouver les dimensions optimales du flan initial afin de minimiser la perte de matière tout en garantissant les dimensions spécifiées et
- de déterminer le jeu de paramètres procédés (rayon des outils, force du serre-flan, *etc.*) qui minimise la diminution d'épaisseur de la pièce.

La progression du procédé d'emboutissage était composée de quatre étapes : le découpage du flan initial, l'emboutissage du flan, une opération de pliage et le découpage de la collerette résiduelle. Ces deux dernières opérations étaient nécessaires compte tenu de l'anisotropie du matériau employé. En effet, la texture cristallographique non-uniforme fait apparaître des ondulations, appelées cornes d'anisotropie, au cours du procédé d'emboutissage sur la couronne extérieure de la pièce emboutie.

L'étude d'optimisation géométrique, que nous proposons, utilise les résultats obtenus sur la configuration optimale de l'outillage (cf. figure 4.10) dans laquelle les paramètres procédés ont été optimisés (cf. figure 4.11). Notre objectif est de supprimer les deux dernières opérations en modifiant la forme géométrique du flan initial tout en garantissant les spécifications géométriques sur la pièce finale (cf. figure 4.9).

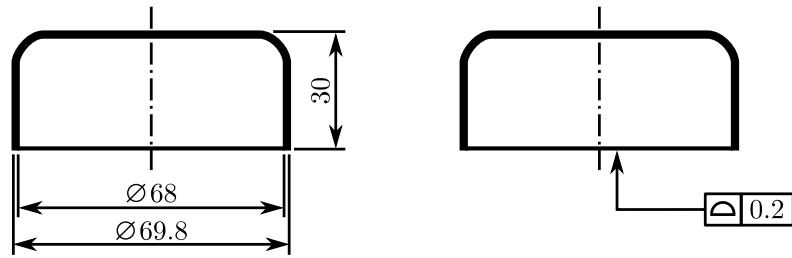


Figure 4.9 – Géométrie cible

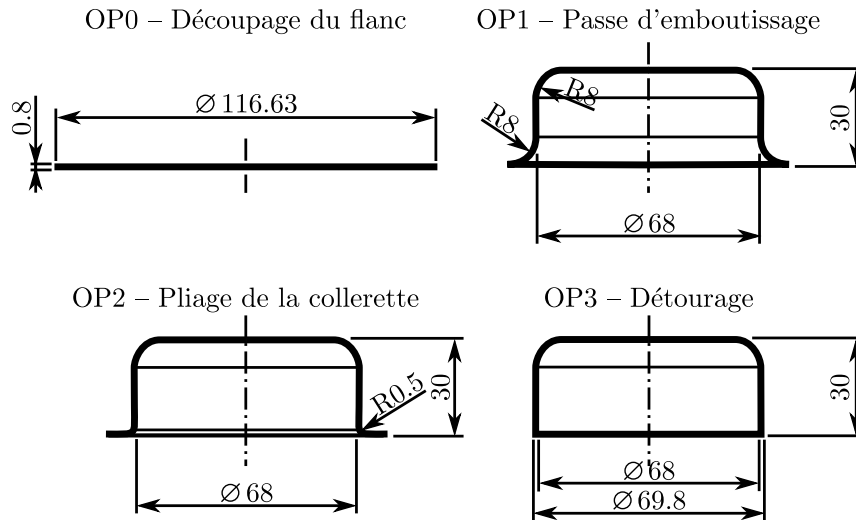


Figure 4.10 – Progression optimale du procédé d'emboutissage

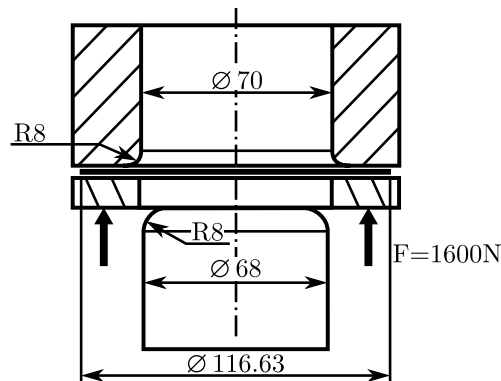


Figure 4.11 – Détail de l'OP1 et de l'outillage optimal associé

Classiquement, pour compenser la formation de ces cornes d'anisotropie, le fabricant procède par une méthode essais-erreurs, c'est-à-dire qu'il réalise différents essais d'emboutissage en modifiant la géométrie du flan initial. Cette méthode requiert beaucoup de temps, la mobilisation du procédé et le découpage d'un certain nombre de flans.

Dans ces travaux, nous proposons une autre solution, dans laquelle nous pilotons la forme géométrique du flan par des fonctions cosinus et les écarts de forme de la couronne extérieure de la pièce emboutie sont caractérisés par le paramétrage modal. Les essais sont réalisés par des simulations éléments finis. Nous utilisons la technique des plans d'expériences pour déterminer l'influence de la modification géométrique du flan initial sur la géométrie finale de la pièce emboutie (ampli-



tude des cornes d'anisotropie et hauteur finale). L'ensemble de ces essais nous permet d'établir des relations polynomiales entre les paramètres et ainsi de calculer la géométrie optimale du flan pour obtenir la conformité de la pièce finale.

### 4.3.2 Démarche

La pièce étudiée est une coupe cylindrique qui est obtenue avec une seule opération d'emboutissage. Cette pièce est assemblée à une autre pièce par soudage, nous ne représentons pas ici la seconde pièce. Afin d'assurer une certaine qualité dans le procédé de soudage, les écarts géométriques de la couronne extérieure de la pièce emboutie doivent être faibles. La pièce emboutie est représentée sur la figure 4.9 avec son tolérancement géométrique associé.

Le procédé d'obtention de cette pièce est montré sur la figure 4.10. Le flan initial est un disque découpé dans une tôle d'acier USB (DC05) d'épaisseur 0.8 mm. Les travaux de recherche, menés par Ledoux et *al.*, ont permis d'optimiser les paramètres de ce procédé d'obtention afin de minimiser la diminution d'épaisseur de la pièce tout en respectant la hauteur finale de 30 mm [LEDOUX *et al.*, 06]. Il en résulte l'outillage optimal, montré sur la figure 4.11.

Nous nous focalisons, dans la suite, sur la réduction du nombre d'opérations pour obtenir la pièce finale avec les opérations OP0 et OP1. Pour cela, il est nécessaire de définir précisément la forme géométrique initiale du flan avec comme objectifs,

- une hauteur finale de la pièce de 30 mm et
- une amplitude des cornes d'anisotropie inférieure à 0.2 mm.

*Remarque.* Les travaux de recherche, menés par Ledoux et *al.* [LEDOUX *et al.*, 06], ont également montré que la modification géométrique du flan initial n'a que peu d'influence sur l'épaisseur de la pièce finale. Une augmentation de 6 mm sur le diamètre initial du flan diminue l'épaisseur de la pièce de moins de 2  $\mu\text{m}$ . Nous faisons légitimement l'hypothèse que l'on puisse trouver une géométrie optimale du flan initial sans influencer sur la valeur d'épaisseur finale.

#### 4.3.2.1 Simulation numérique

Les simulations numériques sont réalisées sur le logiciel ABAQUS dans sa version explicite. Le modèle éléments finis utilisé discrétise le flan initial avec des éléments de type coque à quatre nœuds. Il y a sept points d'intégrations dans l'épaisseur. L'outillage est modélisé par des surfaces rigides. Les principaux paramètres utilisés pour les simulations sont présentés dans le tableau 4.3. Dans la réalisation de cette pièce, le retour élastique est faible, nous ne tiendrons donc pas compte de cet effet.

<b>Discrétisation du flan</b>	
Type d'éléments	Coque (4 nœuds)
Points d'intégration	7
Nombre d'éléments	1428
<b>Discrétisation de l'outillage</b>	
Type de surface	Surface rigide
<b>Paramètres de l'opération d'emboutissage</b>	
Vitesse du poinçon	3 m/s
Coefficient de frottement	0.1

Tableau 4.3 – Paramètres numériques de la simulation éléments finis

Le matériau est une tôle d'acier USB (DC05) de 0.8 mm d'épaisseur. Une loi de comportement élasto-plastique avec prise en compte de l'anisotropie selon le critère de Hill 48 [HILL, 48] est utilisée. L'érouissage du matériau est déterminé par un essai de traction et mesuré en utilisant un extensomètre et un système d'analyse d'images [DUMOULIN *et al.*, 03]. La loi d'érouissage est renseignée point par point dans le code éléments finis. Les caractéristiques du matériau sont présentées dans le tableau 4.4.

USB (DC05)	
Module de Young	206.62 GPa
Limite d'élasticité	168.12 MPa
Coefficient de Poisson	0.298
Masse volumique	7800 kg/m <sup>3</sup>
Coefficients d'anisotropie	$r_{0^\circ} = 2.09$
	$r_{45^\circ} = 1.58$
	$r_{90^\circ} = 2.72$

Tableau 4.4 – Principales propriétés du matériau

#### 4.3.2.2 Validation du modèle numérique

Afin de déterminer si le modèle numérique est proche ou non du comportement réel, un essai du procédé d'emboutissage a été réalisé. Les résultats de mesure sur la pièce emboutie et ceux issus de la simulation sont comparés dans le tableau 4.5.

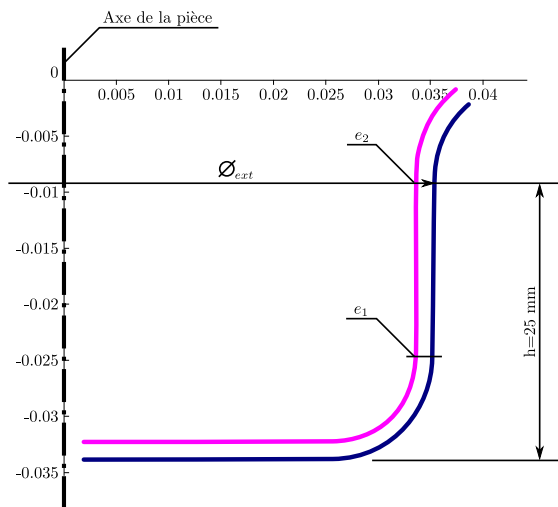


Figure 4.12 – Détail des mesures effectuées

	$e_1$ (mm)	$e_2$ (mm)	$\varnothing_{ext}$ (mm)	Circularité (mm)
simulée	0.789	0.88	69.79	0.12
réelle	0.791	0.89	69.66	0.14

Tableau 4.5 – Comparaison des mesures effectuées

Nous pouvons constater que les résultats numériques sont très proches de la pièce réelle, ce qui par conséquent valide la simulation numérique.

#### 4.3.2.3 Réalisation de la simulation initiale

Dans une démarche d'optimisation, il est important de définir une configuration initiale proche de l'optimale pour pouvoir justement la trouver. Par conséquent, une bonne estimation du diamètre initial du flan  $D_0$  permettra d'obtenir une hauteur finale proche de la cible. Afin d'estimer cette dimension  $D_0$ , il est nécessaire de formuler deux hypothèses :

- H1 : conservation du volume.
- H2 : épaisseur globalement constante.

Compte tenu des hypothèses H1 et H2, le calcul du diamètre initial  $D_0$  est alors estimé à 116.63 mm.

Dans la simulation numérique initiale, les hypothèses H1 et H2 ne sont pas prises en compte. À partir du diamètre  $D_0$  et de la configuration optimale de l'outillage, nous obtenons par simulation numérique une amplitude des cornes d'anisotropie égale à 1.72 mm (cf. figure 4.13). Sur l'essai réel, effectué avec les mêmes paramètres, nous mesurons une amplitude d'environ 1.7 mm.

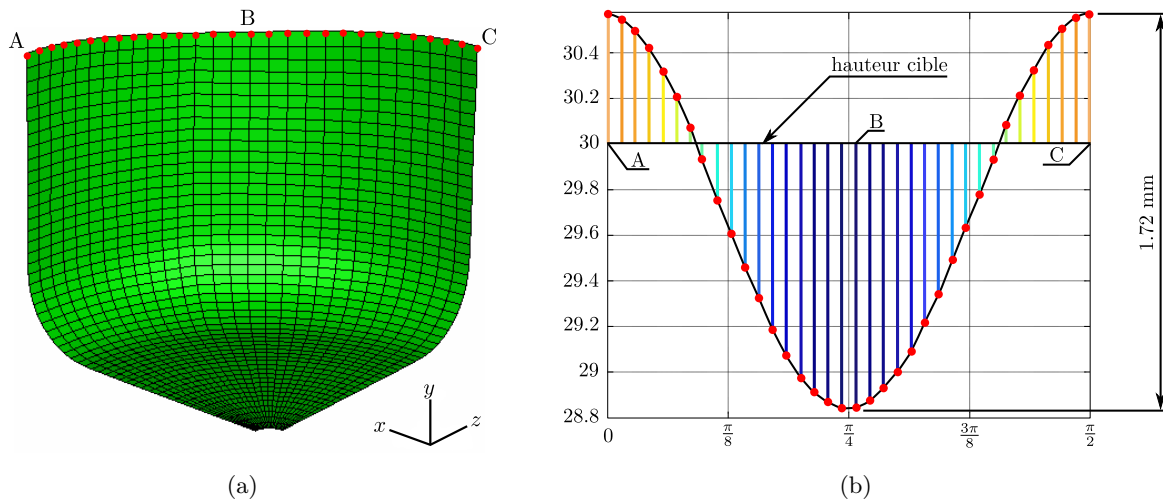


Figure 4.13 – Simulation initiale et écarts de forme autour de la hauteur cible

#### 4.3.2.4 Paramétrage modal des écarts de forme

Sur la figure 4.13(b), nous représentons les écarts de forme projetés sur l'axe  $y$ . Chaque segment de couleur représente l'écart de forme local de chaque nœud autour de la hauteur cible de 30 mm. Nous proposons donc d'utiliser le paramétrage modal pour caractériser la forme de ce profil, correspondant à un quart de la couronne extérieure de la pièce emboutie. Pour ce faire, nous appliquons la DMD à ces écarts de forme, qui résultent de la simulation numérique. La base modale est calculée à partir du modèle poutre de la figure 4.14.

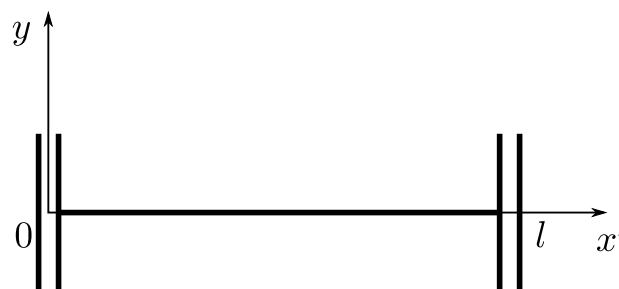


Figure 4.14 – Modèle poutre avec des conditions limites de symétries

Les simulations numériques étant réalisées avec un modèle éléments finis d'un quart de la pièce et avec les conditions limites adéquates, nous choisissons de calculer la base modale naturelle d'une poutre avec des conditions limites de symétries pour caractériser la forme géométrique d'un quart de la couronne extérieure. Le modèle poutre est alors discrétisé en 35 éléments de type poutre et le résultat du calcul des cinq premiers modes est présenté sur la figure 4.15. Nous montrons que, dans

ce cas particulier, le calcul des modes propres aboutit à des solutions sous la forme d'une série de fonctions cosinus. Nous pouvons écrire que, pour un modèle poutre à un degré de liberté sur  $y$ , la solution générale de l'équation de la dynamique 2.1 (page 40) est :

$$Y(x') = A_0 \cosh(\alpha x') + B_0 \sinh(\alpha x') + C_0 \cos(\alpha x') + D_0 \sin(\alpha x') \quad (4.4)$$

Nous pouvons exprimer les  $i^e$  fonctions dérivées  $Y^{(i)}$ ,

$$Y^{(1)}(x') = \alpha [A_0 \sinh(\alpha x') + B_0 \cosh(\alpha x') - C_0 \sin(\alpha x') + D_0 \cos(\alpha x')] \quad (4.5)$$

$$Y^{(2)}(x') = \alpha^2 [A_0 \cosh(\alpha x') + B_0 \sinh(\alpha x') - C_0 \cos(\alpha x') - D_0 \sin(\alpha x')] \quad (4.6)$$

$$Y^{(3)}(x') = \alpha^3 [A_0 \sinh(\alpha x') + B_0 \cosh(\alpha x') + C_0 \sin(\alpha x') - D_0 \cos(\alpha x')] \quad (4.7)$$

En appliquant les conditions limites de symétries, définies par

$$Y^{(1)}(0) = 0, \quad (4.8)$$

$$Y^{(3)}(0) = 0, \quad (4.9)$$

$$Y^{(1)}(l) = 0, \quad (4.10)$$

$$Y^{(3)}(l) = 0, \quad (4.11)$$

les solutions  $Y_n(x')$  s'écrivent :

$$Y_n(x) = C_0 \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (4.12)$$

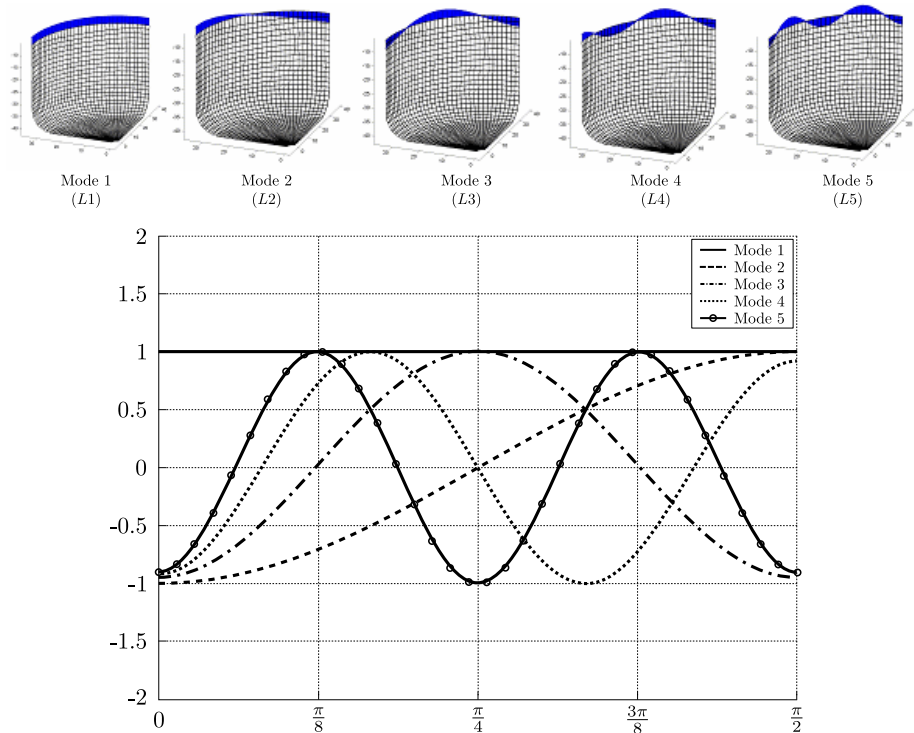


Figure 4.15 – Base modale naturelle du modèle poutre défini

Nous venons de démontrer que, dans ces hypothèses de conditions limites, les modes propres de notre modèle poutre sont des fonctions cosinus. La figure 4.16 présente le spectre modal, résultant de la DMD des écarts de forme du profil de la simulation initiale (cf. figure 4.13). Il apparaît clairement sur ce spectre que les premiers modes sont les plus significatifs. En effet, avec les cinq

premiers modes, la moyenne quadratique du résidu est de l'ordre de 1% de la moyenne quadratique des écarts initiaux. Par conséquent, nous nous limitons aux cinq premiers modes pour paramétrer la taille et les écarts de forme.

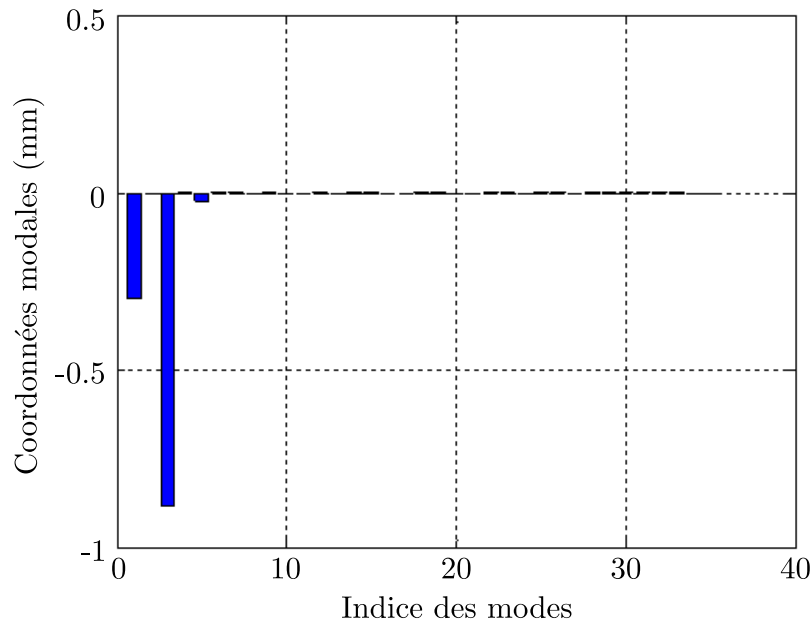


Figure 4.16 – Spectre modal de la simulation initiale

#### 4.3.2.5 Choix des paramètres de pilotage

Pour piloter la forme géométrique du flan initial (taille et forme), nous utilisons des fonctions cosinus. Pour limiter le nombre de simulations numériques, dans le cadre de l'optimisation, nous prenons trois fonctions cosinus différentes (cf. figure 4.17). La première, appelée  $D$ , définit la valeur du diamètre du flan, la seconde, appelée  $A1$ , caractérise un défaut d'ovalité (deux lobes) et la troisième, appelée  $A2$ , décrit un défaut quadrilobé. Ainsi, par combinaison de ces paramètres de pilotage, nous pouvons obtenir une forme géométrique plus complexe du flan initial.

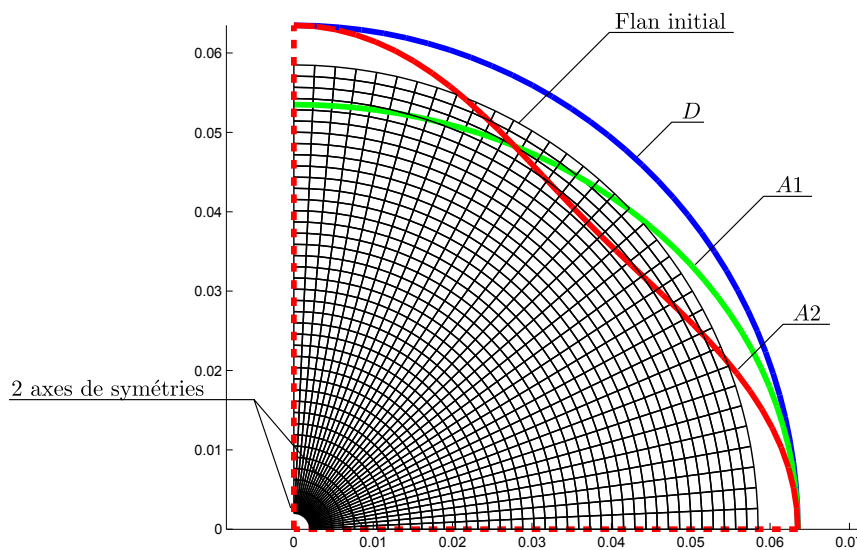


Figure 4.17 – Paramètres de pilotage de la forme géométrique du flan initial

*Remarque.* Les trois paramètres de pilotage ( $D$ ,  $A1$  et  $A2$ ) correspondent exactement, dans notre

cas particulier, aux trois premiers modes de la base modale du modèle poutre, que nous avons défini.

### 4.3.3 Stratégie d'optimisation

Nous venons de définir les paramètres d'entrée ( $D$ ,  $A1$  et  $A2$ ) du procédé. Nous souhaitons trouver le jeu optimal de paramètres qui minimisera les écarts géométriques de la couronne extérieure de la pièce une fois emboutie. Ces écarts sont caractérisés par les paramètres de sortie  $L1$ ,  $L2$ ,  $L3$ ,  $L4$  et  $L5$  (coordonnées modales).

Pour ce faire, nous utilisons la technique du plan d'expériences, qui nécessite de suivre les quatre étapes suivantes :

- choisir les domaines de variation de chaque paramètre d'entrée du procédé (paramètre de pilotage)
- choisir le modèle mathématique et réaliser les essais du plan d'expériences
- calculer les relations polynomiales et analyser l'influence des paramètres de pilotage sur la pièce finale
- optimiser le modèle mathématique obtenu et vérifier.

#### 4.3.3.1 Détermination des domaines de variation des paramètres de pilotage

Compte tenu des estimations obtenues sur le diamètre initial  $D_0$  du flan et des résultats de la simulation numérique, il est possible de définir les domaines de variation de chaque paramètre de pilotage ( $D$ ,  $A1$  et  $A2$ ). Ces choix sont très importants puisqu'ils conditionnent le bon déroulement du procédé d'optimisation.

En effet, nous pouvons évoquer deux cas extrêmes. Si l'espace de recherche est trop petit alors la solution optimale peut être en dehors, et au contraire si l'espace de recherche est trop grand, la précision de la solution peut être insuffisante.

Nous fixons donc l'amplitude des fonctions cosinus comprise entre  $\pm 1.5$  mm. Cette variation nous paraît suffisante pour compenser les cornes d'anisotropie, l'amplitude initiale étant de 1.72 mm. De plus, lors de la simulation numérique initiale, nous avons obtenu une hauteur moyenne de 29.69 mm, ce qui est proche de la hauteur cible (30 mm). Nous choisissons alors un domaine de variation de  $\pm 1.5$  mm pour le diamètre initial du flan (cf. tableau 4.6).

Paramètres	Valeur initiale (mm)	Valeur mini (mm)	Valeur maxi (mm)
$D$ : diamètre	117	115.5	118.5
$A1$ : amplitude	0	-1.5	1.5
$A2$ : amplitude	0	-1.5	1.5

Tableau 4.6 – Domaines de variation des paramètres de pilotage du procédé

#### 4.3.3.2 Choix du modèle et plan d'expériences

Nous sélectionnons un modèle polynomial du second degré, ce qui suppose la prise en compte des variations quadratiques des paramètres du procédé,

$$\mathcal{Y} = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_{12}X_1X_2 + a_{ij}X_iX_j + \dots + a_{11}X_1^2 + a_{nn}X_n^2 \quad (4.13)$$

Dans ce modèle, les termes  $X_iX_j$  sont des interactions entre les facteurs, ce qui signifie que l'effet du facteur  $X_i$  va dépendre de celui de  $X_j$ .

Pour réaliser ce plan d'expériences, nous utilisons un plan composite, constitué d'un plan d'expériences fractionnaire de huit expériences (Exp. 1–8 dans le tableau 4.7) et d'une expérience au centre (Exp. 9 dans le tableau 4.7). Pour obtenir le plan composite, nous complétons le plan fractionnaire avec six expériences (Exp. 10–15 dans le tableau 4.7) pour évaluer les facteurs quadratiques du modèle polynomial. Si l'on normalise le domaine de variation des facteurs du plan fractionnaire à  $\pm 1$ , le domaine de variation des facteurs du plan composite est alors étendu à  $\pm\alpha$  avec  $|\alpha| > 1$ . La valeur optimale de  $\alpha$  dépend des propriétés du plan et du nombre de facteurs impliqués. Dans notre cas, la valeur optimale de  $\alpha$  est 1.287.

Nous définissons alors le plan d'expériences permettant le calcul du modèle polynomial du second degré. Chaque ligne du tableau 4.7 correspond à une simulation numérique tel que la géométrie du flan initial soit définie par les valeurs des paramètres  $D$ ,  $A1$  et  $A2$ . Le résultat de chaque simulation est un fichier de points qui caractérisent la position des points de la couronne extérieure projetés sur l'axe  $y$ . Ces données sont ensuite traitées comme des écarts géométriques par rapport à la hauteur cible de 30 mm. Ces écarts sont décomposés dans la base modale, définie par notre modèle poutre (cf. figure 4.15), afin de calculer les coordonnées modales ( $L1$ – $L5$ ).

Exp.	$D$ (mm)	$A1$ (mm)	$A2$ (mm)	Prof.	$L1$ Val. cib. (0)	$L2$ Val. cib. (0)	$L3$ Val. cib. (0)	$L4$ Val. cib. (0)	$L5$ Val. cib. (0)
1	115.5	-1.5	-1.5	P 1	$-1.35.10^0$	$1.68.10^0$	$8.72.10^{-1}$	$-3.32.10^{-1}$	$-9.07.10^{-2}$
2	115.5	-1.5	1.5	P 2	$-1.24.10^0$	$1.65.10^0$	$-1.48.10^0$	$2.56.10^{-1}$	$-6.70.10^{-2}$
3	115.5	1.5	-1.5	P 3	$-1.22.10^0$	$-1.03.10^0$	$1.12.10^0$	$-1.29.10^{-1}$	$-9.22.10^{-2}$
4	115.5	1.5	1.5	P 4	$-1.12.10^0$	$-7.91.10^{-1}$	$-1.33.10^0$	$8.71.10^{-2}$	$-8.06.10^{-2}$
5	118.5	-1.5	-1.5	P 5	$1.28.10^0$	$1.76.10^0$	$8.43.10^{-1}$	$-3.86.10^{-1}$	$-7.35.10^{-2}$
6	118.5	-1.5	1.5	P 6	$1.34.10^0$	$1.74.10^0$	$-1.59.10^0$	$2.78.10^{-1}$	$-6.45.10^{-2}$
7	118.5	1.5	-1.5	P 7	$1.39.10^0$	$-9.37.10^{-1}$	$1.15.10^0$	$-1.47.10^{-1}$	$-1.05.10^{-1}$
8	118.5	1.5	1.5	P 8	$1.52.10^0$	$-6.94.10^{-1}$	$-1.42.10^0$	$1.16.10^{-1}$	$-1.02.10^{-1}$
9	117	0	0	P 9	$1.82.10^{-1}$	$4.48.10^{-1}$	$-3.02.10^{-1}$	$-5.16.10^{-2}$	$-1.99.10^{-2}$
10	115.07	0	0	P 10	$-1.45.10^0$	$3.65.10^{-1}$	$-2.67.10^{-1}$	$-6.36.10^{-2}$	$-3.62.10^{-2}$
11	118.93	0	0	P 11	$1.97.10^0$	$4.47.10^{-1}$	$-3.98.10^{-1}$	$-9.28.10^{-2}$	$-4.45.10^{-2}$
12	117	-1.93	0	P 12	$4.32.10^{-2}$	$2.00.10^0$	$-5.24.10^{-1}$	$-7.16.10^{-2}$	$-4.03.10^{-2}$
13	117	-1.93	0	P 13	$2.49.10^{-1}$	$-1.22.10^0$	$-1.82.10^{-1}$	$-5.05.10^{-2}$	$-2.41.10^{-2}$
14	117	0	-1.93	P 14	$-1.02.10^{-2}$	$2.98.10^{-1}$	$1.38.10^0$	$-3.12.10^{-1}$	$-1.23.10^{-1}$
15	117	0	-1.93	P 15	$1.02.10^{-1}$	$4.67.10^{-1}$	$-1.74.10^0$	$-2.37.10^{-1}$	$-1.52.10^{-1}$

Tableau 4.7 – Plan d'expériences central composite

#### 4.3.3.3 Calcul des coefficients du modèle polynomial et analyse de leurs effets

À partir des résultats du plan d'expériences, nous calculons les coefficients du modèle polynomial du second degré par une méthode de régression multi-linéaire. Nous obtenons alors des relations

quadratiques entre les paramètres modaux ( $L1-L5$ ) et les paramètres du procédé ( $D$ ,  $A1$  et  $A2$ ).

$$\begin{aligned}
 L1 = & -1.13 \cdot 10^{-2} & +7.07 & D' & +1.69 \cdot 10^{-3} & A1' & +4.56 \cdot 10^{-2} & A2' \\
 & -1.64 \cdot 10^{-2} & & D'^2 & -6.50 \cdot 10^{-4} & D'A1' & -1.29 \cdot 10^{-1} & D'A2' \\
 & & & & -2.44 \cdot 10^{-1} & A1'^2 & +7.00 \cdot 10^{-4} & A1'A2' \\
 & & & & & & -6.84 \cdot 10^{-1} & A2'^2
 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 L2 = & -2.89 \cdot 10^{-3} & +7.56 \cdot 10^{-4} & D' & -7.56 & A1' & -8.53 \cdot 10^{-4} & A2' \\
 & +2.73 \cdot 10^{-5} & & D'^2 & +2.17 \cdot 10^{-1} & D'A1' & -8.25 \cdot 10^{-4} & D'A2' \\
 & & & & -4.68 \cdot 10^{-5} & A1'^2 & -4.12 \cdot 10^{-4} & A1'A2' \\
 & & & & & & +6.58 \cdot 10^{-4} & A2'^2
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
 L3 = & -3.85 & -1.21 \cdot 10^{-1} & D' & +7.96 \cdot 10^{-5} & A1' & -6.99 & A2' \\
 & +1.46 \cdot 10^{-1} & & D'^2 & +1.25 \cdot 10^{-5} & D'A1' & +1.44 \cdot 10^{-1} & D'A2' \\
 & & & & -1.16 \cdot 10^{-1} & A1'^2 & -1.12 \cdot 10^{-4} & A1'A2' \\
 & & & & & & +3.21 \cdot 10^{-1} & A2'^2
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
 L4 = & 4.42 \cdot 10^{-4} & -8.42 \cdot 10^{-5} & D' & +1.69 \cdot 10^{-1} & A1' & -4.38 \cdot 10^{-4} & A2' \\
 & -3.85 \cdot 10^{-4} & & D'^2 & +7.77 \cdot 10^{-2} & D'A1' & +3.75 \cdot 10^{-6} & D'A2' \\
 & & & & +1.44 \cdot 10^{-5} & A1'^2 & -5.78 \cdot 10^{-1} & A1'A2' \\
 & & & & & & +3.85 \cdot 10^{-4} & A2'^2
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
 L5 = & -6.88 \cdot 10^{-2} & +3.27 \cdot 10^{-2} & D' & -1.23 \cdot 10^{-4} & A1' & -6.30 \cdot 10^{-2} & A2' \\
 & -2.39 \cdot 10^{-2} & & D'^2 & -5.00 \cdot 10^{-5} & D'A1' & +4.80 \cdot 10^{-2} & D'A2' \\
 & & & & +6.17 \cdot 10^{-2} & A1'^2 & +7.50 \cdot 10^{-6} & A1'A2' \\
 & & & & & & -4.46 \cdot 10^{-1} & A2'^2
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

où  $D'$ ,  $A1'$  et  $A2'$  sont les variables centrées réduites qui correspondent respectivement à  $D$ ,  $A1$  et  $A2$ .

Nous pouvons dans un deuxième temps tracer les graphiques d'effets des paramètres du procédé ( $D$ ,  $A1$  et  $A2$ ) en exploitant les résultats du plan composite. Ces graphiques permettent de quantifier l'influence des paramètres du procédé par rapport aux paramètres géométriques. En l'occurrence nous pouvons identifier lequel des paramètres  $D$ ,  $A1$  ou  $A2$  sont les plus influents sur les paramètres modaux  $L1-L5$ .

Nous remarquons sur la figure 4.18 que le paramètre le plus influent sur  $L1$  est  $D$ . En effet, ce paramètre est directement lié au diamètre du flan initial. De la même façon,  $A1$  est le paramètre le plus influent sur  $L2$  puisqu'il pilote l'ovalité du flan initial. Et enfin,  $A2$  est le paramètre le plus influent sur  $L3$  car  $A2$  est le paramètre qui contrôle l'effet quadrilobé du flan initial. Quant aux paramètres modaux  $L4$  et  $L5$ , ils restent au voisinage de zéro. Nous constatons également que tous les termes constants du modèle polynomial sont nul hormis celui de la relation de  $L3$ . Cela signifie qu'avec un flan initial circulaire, le défaut géométrique principal de la couronne extérieure de la pièce emboutie sera de la forme quadrilobée.



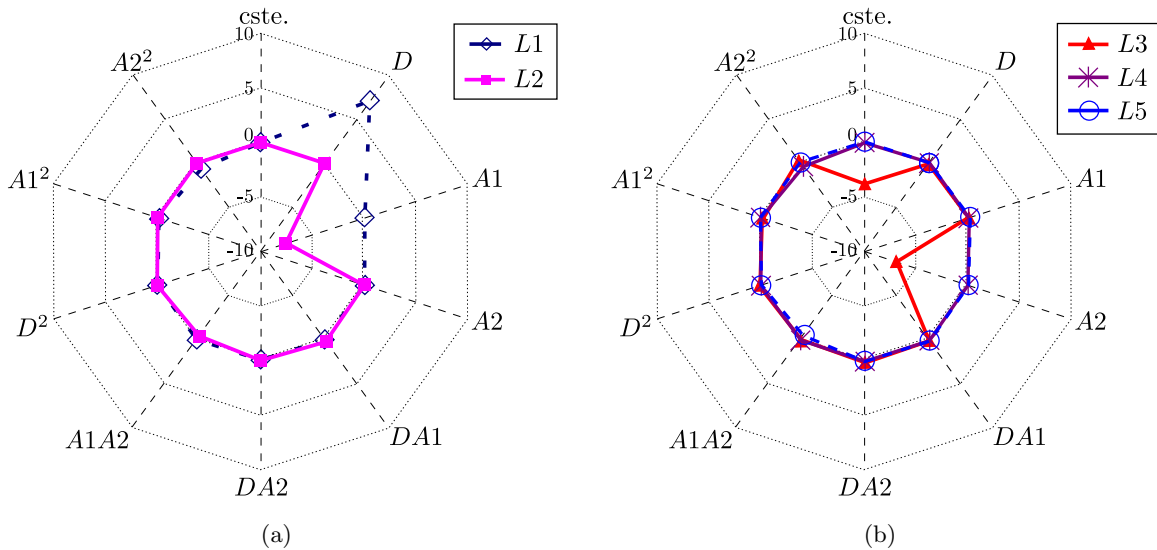


Figure 4.18 – Graphiques d’influence des paramètres de l’outillage sur les paramètres géométriques

#### 4.3.3.4 Recherche de la configuration optimale des paramètres

Avec les relations obtenues 4.14–4.18, nous allons chercher à trouver la configuration optimale des paramètres de pilotage permettant de minimiser les défauts géométriques de forme et de respecter les valeurs cibles. Nous construisons alors une fonction objectif  $\mathcal{F}$  (cf. équation 4.19). Le minimum de cette fonction correspond aux écarts géométriques minimaux entre la pièce cible et la pièce emboutie. En effet, si les coordonnées modales  $L_i$  sont nulles, les écarts géométriques le sont également.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \sum_{i=1}^5 L_i^2 \\ &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2\end{aligned}\quad (4.19)$$

Les résultats de l’algorithme de minimisation nous donne un jeu de paramètres  $D$ ,  $A_1$  et  $A_2$  qui minimisent au mieux la fonction  $\mathcal{F}$  (cf. tableau 4.8). Nous réalisons ensuite la simulation numérique correspondant à cette configuration optimale, dont les résultats de la décomposition modale des écarts de forme obtenues sont également présentés dans le tableau 4.8. Au regard de la comparaison du spectre modal de la configuration optimale avec celui de la configuration initiale, nous constatons une forte diminution des coordonnées modales  $L_1$  et  $L_3$  (cf. figure 4.19). Nous montrons sur la figure 4.20, la représentation géométrique des écarts géométriques, résultant des simulations numériques avec les paramètres optimaux et initiaux. Avec cette optimisation, nous observons que l’amplitude des cornes d’anisotropie a été divisée par 10.

Configuration optimale du plan quadratique					
$D$ (mm)	$A_1$ (mm)	$A_2$ (mm)			
117.05	$-4.51 \cdot 10^{-4}$	$-8.07 \cdot 10^{-1}$			
Résultats					
	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$
Optimum	-0.01	$8.21 \cdot 10^{-4}$	$-2.78 \cdot 10^{-2}$	$7.92 \cdot 10^{-4}$	$-8.13 \cdot 10^{-2}$
Initial	-0.030169	$-1.06 \cdot 10^{-3}$	$-8.82 \cdot 10^{-1}$	$3.85 \cdot 10^{-5}$	$-2.39 \cdot 10^{-2}$

Tableau 4.8 – Configuration optimale et décomposition modale des écarts de forme correspondant

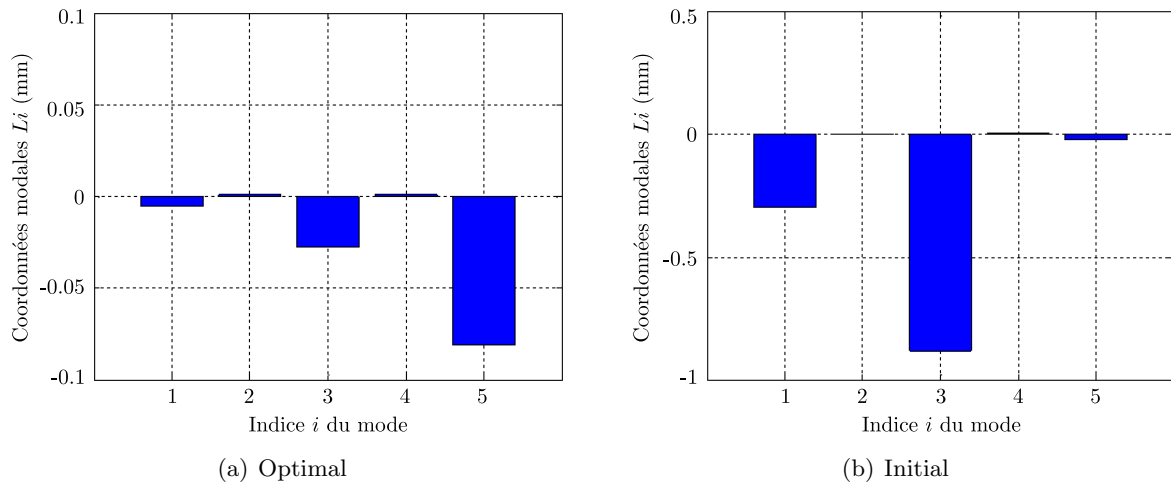


Figure 4.19 – Comparaison des spectres modaux du profil optimal et initial

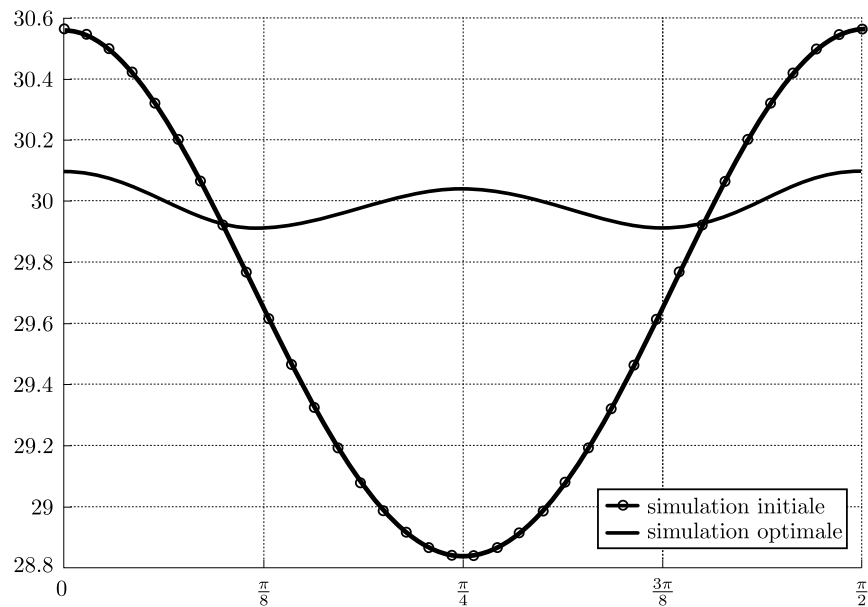


Figure 4.20 – Comparaison des écarts de forme du profil optimal et initial

Nous avons pu mettre en évidence, à travers cette démarche d'optimisation, qu'avec seulement 15 simulations numériques, il était possible d'améliorer considérablement la qualité géométrique de la pièce tout en diminuant le nombre d'opérations de fabrication. Nous constatons que les spécifications géométriques (cf. figure 4.9) sont respectées. Si l'on souhaite améliorer cette solution, il est nécessaire de prendre en compte des paramètres géométriques supplémentaires, des fonctions cosinus d'ordre supérieur par exemple. En effet, nous observons sur le spectre modal de la configuration optimale que la valeur la plus élevée est celle du paramètre  $L_5$ . Ceci s'explique tout simplement par le fait qu'aucun paramètre de pilotage n'a d'effet sur ce type de défaut.

#### 4.3.4 Conclusion et perspectives

Dans le cadre de ces travaux de recherche, nous venons de proposer une approche, initiée par des travaux de Ledoux [LEDOUX, 05], permettant de maîtriser la qualité géométrique d'une pièce issue d'un procédé d'emboutissage. Avec une démarche basée sur la technique des plans d'expériences

et par simulation numérique du procédé, nous avons obtenu le jeu de paramètres optimaux permettant de réduire significativement l'amplitude des cornes d'anisotropie, qui apparaissent lors de la première passe d'emboutissage. En effet, à l'aide du paramétrage modal, nous avons caractérisé les écarts géométriques issus des simulations numériques puis relier les paramètres modaux aux paramètres géométriques, qui définissent la forme géométrique du flan initial, par un modèle polynomial du second degré. La minimisation d'une fonction objectif, formulée à partir de ces relations quadratiques, a permis d'en déduire la configuration optimale.

Dans cette section 4.3, le paramétrage modal est utilisé dans l'objectif de maîtriser la qualité géométrique d'un produit à travers le pilotage d'un procédé de fabrication, en l'occurrence ici un procédé d'emboutissage. Dans cette application, l'évaluation de la qualité géométrique est définie par les spécifications géométriques imposées par le concepteur. On peut supposer que le concepteur a choisi ces spécifications pour répondre à des exigences fonctionnelles. Mais l'on peut s'interroger sur la façon d'estimer l'acceptabilité face un besoin et plus particulièrement lorsque le besoin est lié à la forme du produit.

## 4.4 Vers la spécification d'un besoin : étanchéité

Dans cette dernière partie, nous abordons la problématique de l'estimation de l'acceptabilité en étudiant le cas d'un besoin fonctionnel précis, en l'occurrence une fonction d'étanchéité réalisée par deux pièces métalliques statiques. À l'origine de ces travaux, nous retrouvons une équipe de chercheur du laboratoire TREFLE<sup>1</sup> de Bordeaux. Cette problématique a tout d'abord fait l'objet d'une étude expérimentale approfondie [MARIE *et al.*, 03, MARIE et LASSEUX, 07] à l'aide de la mise en place d'un dispositif expérimental complexe. Compte tenu de la durée des expérimentations et de la nécessité de modéliser les phénomènes physiques engendrés, des travaux de modélisation ont été menés en parallèle dont le but était de prédire les performances de l'étanchéité réalisée [VALLET *et al.*, 08b, VALLET *et al.*, 08a].

L'objectif de la coopération avec le laboratoire TREFLE est de déterminer la criticité du défaut forme sur les performances de l'étanchéité. Cet axe de recherche pertinent dans l'avancée de nos travaux, nous permettent de nous confronter à la spécification d'une exigence fonctionnelle. Néanmoins, cette étude n'ayant démarré que très récemment nous ne présenterons pas, dans cette partie, de résultats concrets, mais plutôt la démarche par laquelle nous avons entamé cette étude. Un projet d'élèves ingénieurs, nous a d'ailleurs permis dans un premier temps de mettre en place un protocole automatisé pour concrétiser nos simulations numériques.

### 4.4.1 Problématique

Ces travaux consistent donc à étudier l'étanchéité réalisée entre deux surfaces métalliques en contact statique. La réalisation de ce type de fonction est issue d'une application rencontrée dans les assemblages de turbomachines, ce qui signifie dans des conditions extrêmes de température et de pression.

Les surfaces métalliques provenant d'un procédé d'usinage quelconque, les défauts géométriques créés par ce procédé vont nécessairement engendrer un débit de fuite entre les deux surfaces en contact. On se propose alors d'évaluer ce débit de fuite en fonction des défauts géométriques potentiels des surfaces usinées. Cette évaluation sera réalisée à l'aide de l'algorithme de calcul mis en place par l'équipe de recherche du TREFLE. Notre expertise sur le paramétrage des défauts

---

1. Transferts Écoulements Fluides Énergétiques

géométriques permettra de générer ces défauts numériquement et l'application de l'algorithme de calcul de débit de fuite permettra d'en évaluer la criticité.

Sur la modélisation des défauts géométriques, le laboratoire TREFLE s'est attaché principalement aux défauts liés à l'état de surface. Leur première approche a été de modéliser les défauts de rugosité des surfaces en contact par des surfaces fractales et de lier les performances de l'étanchéité aux paramètres fractals [VALLET *et al.*, 08b]. L'objet de notre coopération est donc d'établir le même type de relation avec les paramètres modaux, qui caractériseront les défauts de forme et d'ondulation.

Nous détaillons schématiquement, sur la figure 4.21, l'assemblage réalisant l'étanchéité. Deux pièces cylindriques, supposées rigides, viennent en contact l'une sur l'autre. Le contact s'établit entre la surface circulaire, supposée parfaitement plane, de la pièce 1 et la surface annulaire, dont nous étudions les défauts, de la pièce 2. Par rapport au diamètre des pièces 1 et 2 de plusieurs dizaines de millimètres, la surface annulaire est très mince ( $r_e - r_i < 1$  mm). Finalement, l'assemblage est maintenu par un effort équivalent à un champ de pression de plusieurs centaines de MPa. Il a été montré dans les travaux de Vallet *et al.* que la variation d'intensité de ce champ de pression a beaucoup d'influence sur le résultat du débit de fuite [VALLET *et al.*, 08b]. En effet, les pressions de contact engendrées varient également et la prise en compte de lois de comportement mécanique déformable, au niveau du contact, est indispensable.

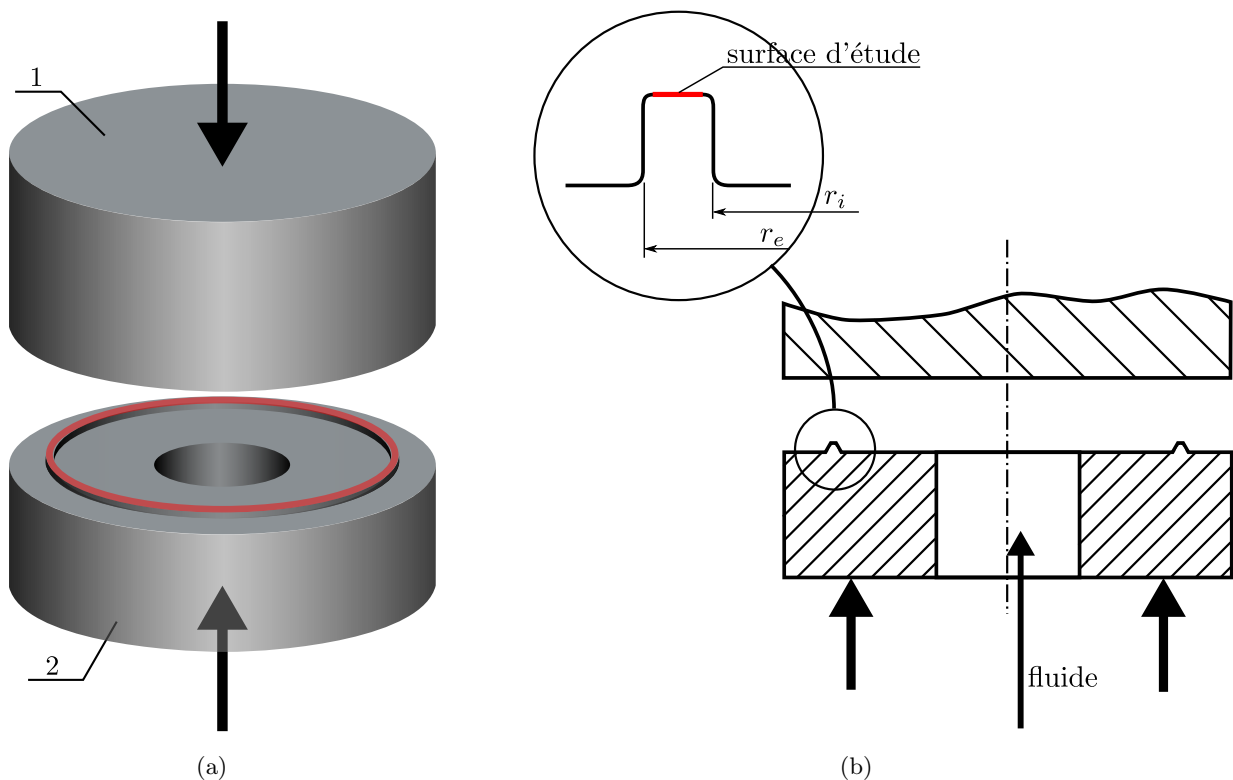


Figure 4.21 – Principe du système d'étanchéité étudié

La démarche que nous proposons de déployer pour étudier la criticité des défauts de forme et d'ondulation est la suivante. N'ayant que peu d'éléments sur la forme des défauts critiques, nous construisons dans un premier temps, une table d'essais, basée sur une matrice d'Hadamard, pour identifier la criticité des formes introduites (défauts modaux). Dans un second temps, les simulations numériques de débit de fuite des essais de la table sont réalisées. Nous pourrions finalement identifier les défauts ou les combinaisons de défauts modaux critiques sur les performances de l'étanchéité,

pour un champ de pression fixé.

#### 4.4.2 Démarche

Avec une approche similaire à la section 4.3, nous proposons de générer un ensemble de défauts géométriques, pilotés par une table d'essais, à l'aide des défauts modaux issus de la base modale d'une surface annulaire. Compte tenu de l'élanement de la surface annulaire, nous calculons une base modale sur un élément géométrique dont le rapport d'élanement est légèrement différent. Une mise en position de la surface annulaire sur la surface supposée parfaite est ensuite réalisée. Pour effectuer la mise en position, plusieurs hypothèses sont envisagées (cf. chapitre 3). Une fois cet assemblage rigide réalisée, il en résulte un champ de hauteurs, qui, sous l'effort de maintien, va « s'écraser ». En fonction du comportement mécanique déformable associé, nous définissons finalement un champ d'ouverture grâce auquel nous pourrions calculer le débit de fuite associé. Le modèle d'écoulement, permettant d'estimer le débit de fuite, a été caractérisé par les chercheurs du laboratoire TREFLE.

Cette approche se conclue par la formulation d'une relation linéaire (hypothèse de la table d'essais) dans un premier temps, entre le débit de fuite et les paramètres modaux. Les graphes d'effet nous permettront d'identifier les plus critiques et de quantifier leur influence.

##### 4.4.2.1 Génération des défauts de forme

Les défauts géométriques de forme et d'ondulation sont issus d'une combinaison linéaire des modes naturelles d'une surface annulaire (cf. figure 4.22). Le modèle éléments finis, qui nous a permis de calculer la base modale, n'a pas été construit à partir de la géométrie de la surface réelle de contact. En effet, compte tenu de son élanement (anneau mince avec  $\frac{r_e - r_i}{r_i} \ll 1$ ), le calcul de la base modale naturelle aurait privilégié les modes dont la déformée est représentée par des ondulations orthogonales à la surface (cf. tableau 4.9). Or, les déformées modales faisant intervenir des ondulations dans le sens radial, nous intéresse également. C'est pourquoi nous construisons le modèle éléments finis sur une surface annulaire dont le rayon moyen est identique mais avec un rapport  $\frac{r_e - r_i}{r_i} \approx 1$ . Les modes avec des ondulations radiales ont alors des fréquences de résonances plus basses et se retrouvent dans les premiers modes de la base (cf. tableau 4.10).

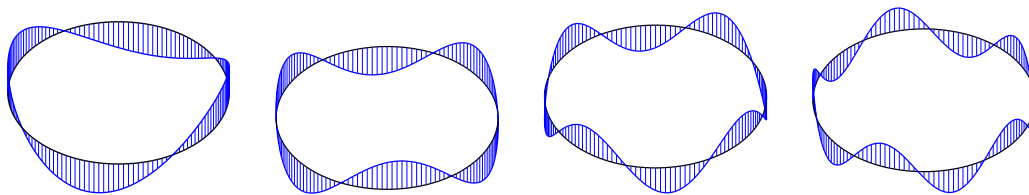


Tableau 4.9 – Modes dont les ondulations sont orthogonales à l'anneau

Dans le tableau 4.10, nous représentons les premiers modes naturels de la base, associés au modèle éléments finis de la figure 4.22. Les modes de positionnement  $Q_1$  à  $Q_3$  ne sont volontairement pas représentés puisque nous ne modélisons que des écarts de forme et ondulation.

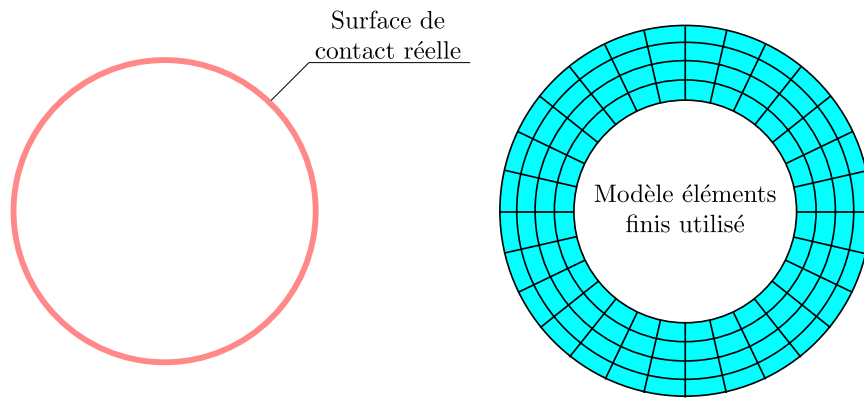


Figure 4.22 – Modèle éléments finis

$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$
$Q_7$	$Q_8$	$Q_9$
$Q_{10}$	$Q_{11}$	$Q_{12}$
$Q_{13}$	$Q_{14}$	$Q_{15}$

Tableau 4.10 – Modes de forme de la base naturelle d'un anneau

Les combinaisons linéaires sont issues des essais de la table dressée dans le tableau 4.11. Pour les 50 paramètres modaux, nous réalisons 64 essais plus un au centre. Construite à partir d'une matrice d'Hadamard, cette table d'essais permet de détecter les paramètres modaux influents et de construire un modèle polynomial du premier ordre entre les paramètres modaux et le paramètre caractérisant l'étanchéité.

Essais	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	...	...	...	$l_{46}$	$l_{47}$	$l_{48}$	$l_{49}$	$l_{50}$
1	1	1	1	1	1	...	...	...	1	1	1	1	1
2	-1	1	-1	1	-1	...	...	...	1	-1	1	-1	1
3	1	-1	-1	1	1	...	...	...	-1	-1	1	1	-1
4	-1	-1	1	1	-1	...	...	...	-1	1	1	-1	-1
5	1	1	1	-1	-1	...	...	...	-1	-1	1	1	1
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
61	1	1	1	-1	-1	...	...	...	-1	-1	1	1	1
62	-1	1	-1	-1	1	...	...	...	-1	1	1	-1	1
63	1	-1	-1	-1	-1	...	...	...	1	1	1	1	-1
64	-1	-1	1	-1	1	...	...	...	1	-1	1	-1	-1
65	0	0	0	0	0	...	...	...	0	0	0	0	0

Tableau 4.11 – Table d’essais pour 50 paramètres modaux

Nous montrons sur la représentation topographique 4.23(a) le résultat d’une combinaison linéaire, issue d’un essai de la table. La table d’essais est construite avec deux niveaux possibles sur chaque paramètre modal (+1 et -1). Une fois les combinaisons réalisées pour chaque essai, nous normons les vecteurs, résultant de ces combinaisons, avec la norme infinie. Cette norme est définie par l’intermédiaire de l’essai qui a le plus grand défaut de forme au sens de la zone. Le défaut de celui-ci est alors imposé (à 10  $\mu\text{m}$  dans notre exemple figure 4.23(a)) et les autres essais en découlent.

En fonction du procédé d’usinage employé, nous pouvons également additionner une signature caractéristique du procédé, si elle est considérée comme non négligeable. Si la surface annulaire est obtenue par tournage, il est vraisemblable que les sillons de l’outil soient de l’ordre de grandeur du défaut de forme exigé par ce type d’application. Avec des paramètres d’usinage sur l’avance et la profondeur de passe de quelques dizaines de microns, la topographie de la forme de la pièce réalisée pourrait alors être celle représentée sur la figure 4.23(b).

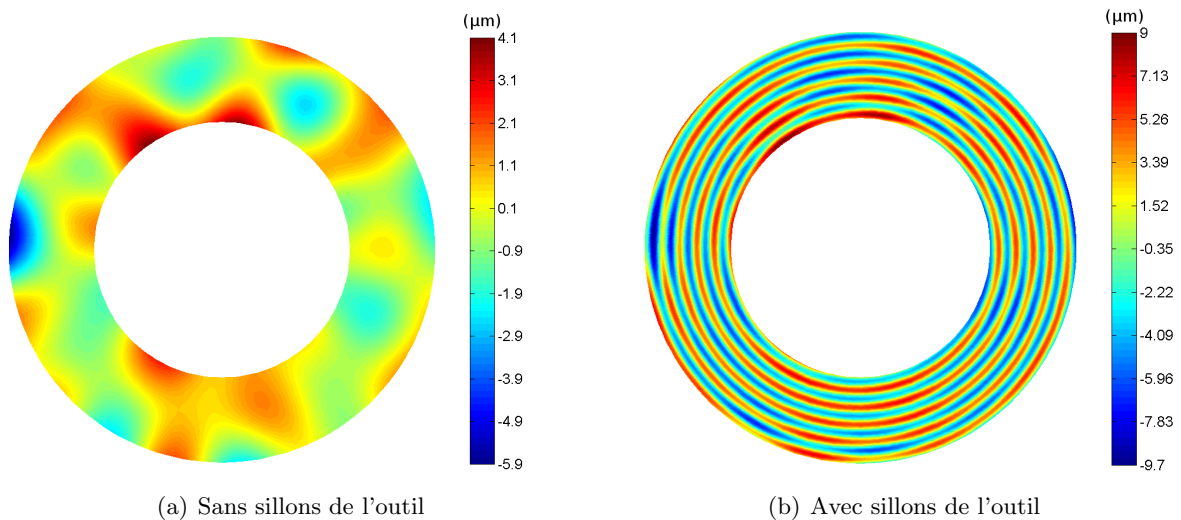


Figure 4.23 – Topographie des écarts de forme d’un essai de la table

#### 4.4.2.2 Algorithme du calcul de débit de fuite

Nous présentons dans cette section, l'algorithme du calcul de débit de fuite développé par le laboratoire TREFLE (cadre gris sur la figure 4.24). Pour faciliter le calcul de débit de fuite, la topographie de la surface générée est mis sous forme cartésienne  $z(x, y)$  (cf. figure 4.25). Nous réalisons tout d'abord une mise en position de la surface avec défauts. Un calcul de la déformation de la surface sous serrage est ensuite réalisée, suivi d'une étape de préparation pour l'étape de percolation. Finalement, le débit de fuite est calculé selon un modèle d'écoulement de Reynolds et caractérisé par le tenseur de transmissivité  $K$ .

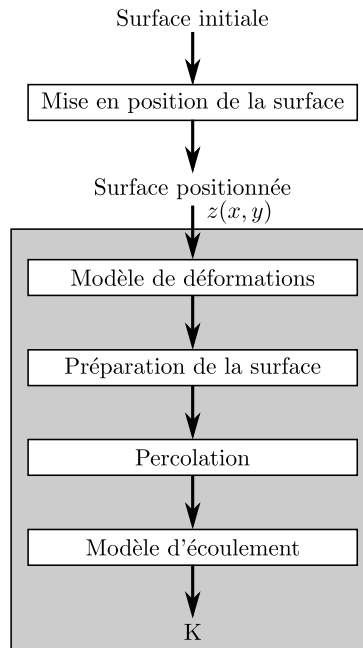


Figure 4.24 – Algorithme du calcul de débit de fuite

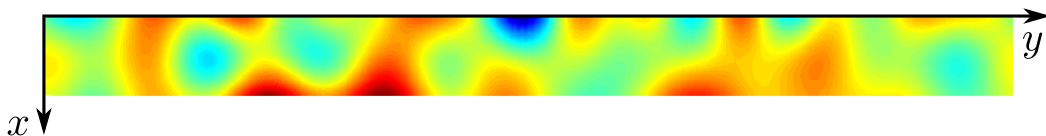


Figure 4.25 – Topographie des écarts de forme en coordonnées cartésiennes

- **Mise en position**

La mise en position des deux surfaces peut être réalisée de différentes manières. Nous pouvons dans un premier temps envisager une simple translation sur  $z$  de la surface annulaire jusqu'au premier contact avec la surface en vis-à-vis (cf. figure 4.26(a)). Nous pouvons également appliquer la même démarche d'assemblage, qui a été décrite dans le chapitre 3 (cf. figure 4.26(b)).



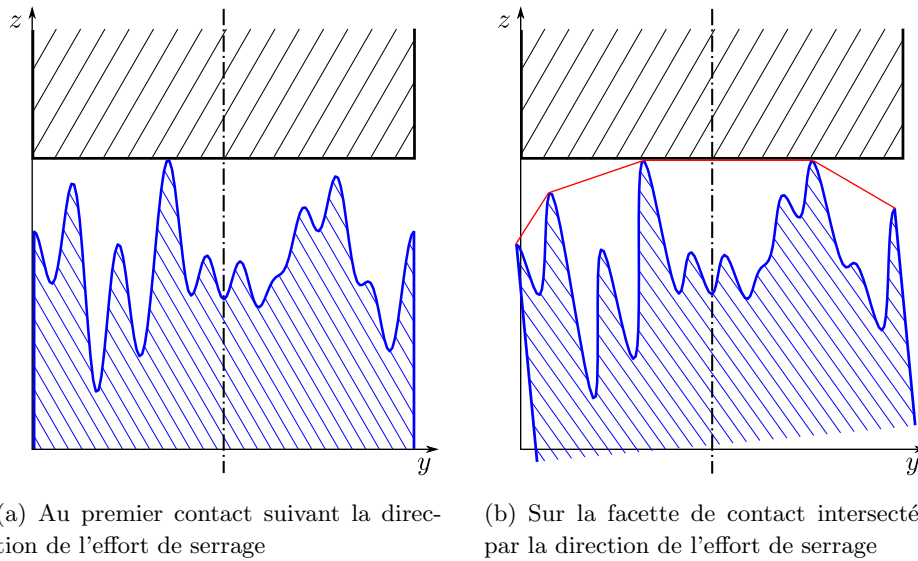


Figure 4.26 – Hypothèses de mise en position

En fonction du type de mise en position choisie, il en résulte un champ de hauteurs  $h(x, y)$ , qui sera ensuite exploité dans le calcul de débit de fuite (cf. figure 4.27).

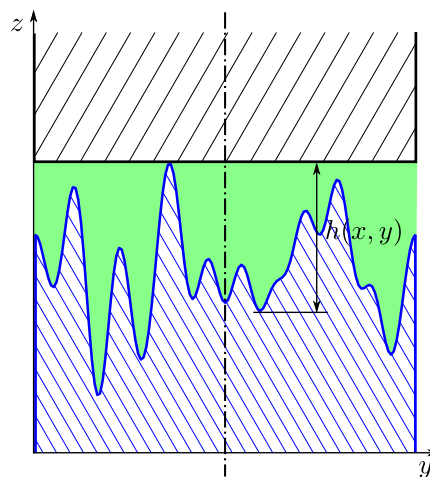


Figure 4.27 – Champ de hauteurs après mise en position

#### • Modèle de déformation

Lorsque les surfaces en vis-à-vis sont en contact, un effort de serrage est appliqué. La tendance, qui a été démontrée par Marie et *al.*, est que plus on serre moins il y a de « fuite » [MARIE *et al.*, 03]. Cependant, ces efforts importants engendrent une déformation de la matière et donc une variation du champ de hauteurs à considérer. Le modèle de déformation le plus simple qui a été envisagée dans un premier temps est un modèle plastique (cf. figure 4.28). Nous pouvons également introduire des modèles de déformations élasto-plastiques. Différents modèles ont été étudiés dans les travaux du laboratoire TREFLE et il s'avèrent que les modèles élasto-plastiques employées respectent assez bien la réalité. Cependant, leurs modèles s'appliquent sur des surfaces dont les défauts géométriques ne résultent que de la rugosité. Il sera donc probablement nécessaire que nous envisagions d'autres types de modèles, sachant que le comportement local au contact a de forte chance d'être différent du comportement global de la pièce.

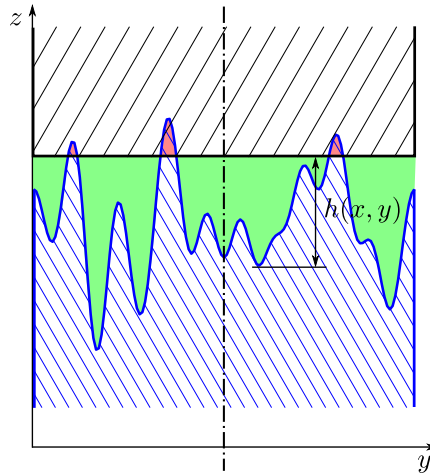


Figure 4.28 – Champ de hauteurs après déformation plastique

- **Percolation**

Dans la suite, le champ de hauteurs résultant sera nommé champ d'ouvertures. À l'issue des étapes précédentes, ce champ d'ouvertures peut posséder des cavités dans lesquelles le fluide ne pourra s'y « infiltrer », l'étape de percolation permet alors de détecter et d'éliminer les ouvertures correspondantes pour que le calcul de débit de fuite converge plus rapidement.

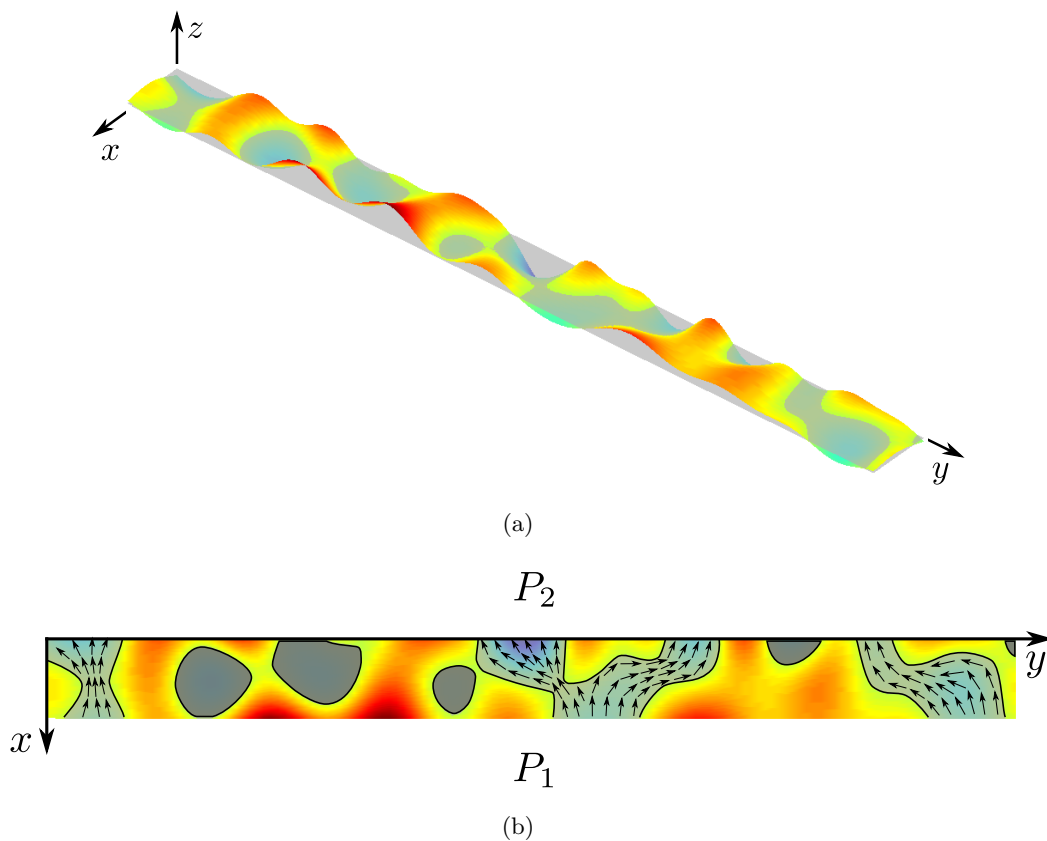


Figure 4.29 – Détection des zones percolées

- **Modèle d'écoulement**

Le champ d'ouvertures entre les deux surfaces assemblées est désormais connu. En choisissant un modèle d'écoulement tel que le modèle de Reynolds, nous pouvons lier le champ d'ouvertures  $h$  au

débit fuite  $Q$ . Le modèle de Reynolds s'écrit,

$$\frac{Q}{l} = \frac{K}{\mu} \cdot \frac{(P_2 - P_1)}{L} \quad (4.20)$$

où  $K$  est la transmissivité liée à  $h^3$ . La transmissivité  $K$  caractérise la performance de l'étanchéité entre les deux surfaces. Plus la transmissivité sera faible, meilleures seront les performances de l'étanchéité.

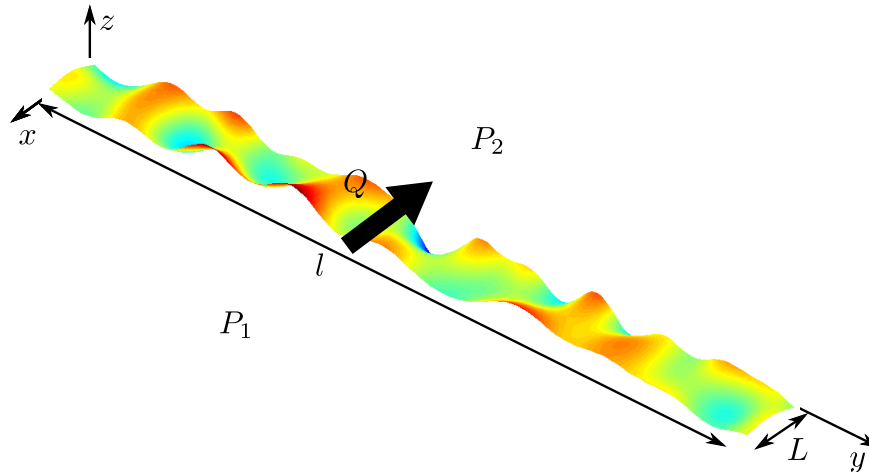


Figure 4.30 – Modèle d'écoulement

Bien évidemment, ce modèle n'est pas unique et nous laissons le choix de cette modélisation aux experts de la mécanique des fluides, en l'occurrence le laboratoire TREFLE.

En rassemblant les compétences du laboratoire TREFLE sur la modélisation des écoulements et de la mécanique déformable et celles que nous avons acquises sur le paramétrage des formes, nous avons pu ébaucher une démarche pour caractériser et quantifier l'influence des défauts de forme sur un problème d'étanchéité.

### 4.4.3 Perspectives

Des études sont en cours (stagiaire ParisTech Bordeaux) pour lier les défauts de forme et montrent que cette démarche semble plus que prometteuse. En effet, notre coopération avec le laboratoire TREFLE se poursuit dans l'objectif de réaliser la table d'essais que nous avons mise en place. La réalisation de ces essais permettra d'obtenir la relation polynomiale linéarisée entre la transmissivité  $K$  et les paramètres modaux  $l_i$ . Nous pourrons ainsi étudier et quantifier l'influence des défauts géométriques de forme sur les performances de l'étanchéité entre deux surfaces métalliques. Des exigences sur certains défauts modaux ou combinaisons de défauts pourront être énoncées pour respecter un niveau de performance dans une fonction d'étanchéité. Cette approche pourra alors se décliner dans tous les types d'applications, qui nécessitent une exigence fonctionnelle sur l'étanchéité.

## 4.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous proposons d'exprimer un besoin fonctionnel avec le paramétrage modal. Nous avons introduit ce paramétrage pour caractériser les variations géométriques d'une pièce de l'ordre du défaut de forme. Les exigences, que l'on sera en mesure de spécifier, sont destinées à un ensemble de fonctionnalités où la forme géométrique des pièces est la fonction

(guidages de précision par exemple). La première approche que nous avons présentée, s'attache à fixer un ensemble de bilimites sur les amplitudes des coordonnées modales. Cette approche naturelle a l'avantage d'écrire simplement les exigences et d'avoir une certaine facilité de compréhension. Plus proche du tolérancement par zone, la deuxième approche exploite la méthode des domaines dans l'espace des petits déplacements [GIORDANO *et al.*, 92] pour l'étendre à l'espace des modes dont la dimension peut être très grande (ce qui rend coûteuse cette approche). Nous avons utilisé les domaines modaux pour respecter ces exigences. L'écriture de ces spécifications nécessite d'être capable d'estimer les variations admissibles de la géométrie réelle autour de la géométrie cible.

Ce deuxième enjeu pose des difficultés majeures. Les propositions de réponses que nous faisons dans ce chapitre sont spécifiques aux applications traitées. En effet, la maîtrise de la qualité géométrique des produits passe par la maîtrise du procédé de fabrication. Notre approche sur ce point est donc dédiée au procédé de mise en forme que nous avons étudié. La deuxième problématique, abordée en fin de chapitre sur la criticité des défauts de forme sur les performances d'une fonction d'étanchéité, permettra d'estimer l'acceptabilité de certaines formes vis-à-vis des exigences requises.



## Conclusion et perspectives

La finalité des travaux présentés dans ce mémoire est de contribuer au développement d'un modèle de tolérancement de forme. Pour y parvenir, nous avons introduit un paramétrage particulier pour caractériser le défaut de forme des éléments géométriques mesurés ou simulés. Le paramétrage introduit résulte de la décomposition des écarts dans un espace de formes géométriques, issues de la mécanique vibratoire. Nous qualifions ce paramétrage de paramétrage modal et l'espace des formes est en réalité l'espace des modes ou déformées modales. Nous avons choisi de déployer le paramétrage modal depuis le domaine de la métrologie vers les spécifications fonctionnelles.

La mise en place du paramétrage modal dans le domaine de la métrologie, nous a permis de développer une méthode d'expertise des défauts géométriques des surfaces : la métrologie modale des surfaces. Cette méthode repose sur la formulation de dix étapes que nous avons détaillées dans ce mémoire. Le paramétrage modal s'appuyant sur un espace de descripteurs intrinsèques à l'élément géométrique nominal, nous pouvons caractériser tous les types d'éléments géométriques. De plus, la génération *a priori* des descripteurs permet d'étudier en théorie tous les ordres de défauts. Néanmoins, nos travaux se sont focalisés sur les défauts de forme et d'ondulation. L'expertise métrologique réalisée par le biais de cette méthodologie nous permet finalement de :

- identifier et visualiser les paramètres modaux significatifs qui correspondent aux formes géométriques les plus contributives dans les écarts de forme mesurés,
- caractériser la signature d'un procédé de fabrication ou de mesure, à travers l'analyse d'un lot de pièces et
- vérifier la conformité d'une pièce ou d'un lot.

Nous obtenons donc à l'issue de ces expertises, un paramétrage du défaut de forme des surfaces mesurées.

Dans la suite, nous exploitons les résultats de ce paramétrage pour évaluer la conformité d'une spécification géométrique dans un assemblage de deux pièces. En effet, un mécanisme nécessite une certaine précision d'assemblage pour garantir son bon fonctionnement. Dans cette étude, nous avons clairement mis en évidence que dans un assemblage précis la prise en compte des défauts de forme est indispensable. Pour y parvenir, nous avons développé une méthode d'assemblage basée sur le paramétrage modal. Cette méthode est exposée selon les hypothèses d'assemblage suivantes : composants indéformables, assemblage sans jeux et un effort de maintien en position imposé. Notre cas d'étude porte sur le contact réalisé entre deux surfaces planes. Les défauts géométriques de chaque surface sont paramétrés d'une part, par un torseur de petits déplacements pour les défauts de position et d'autre part, par les paramètres modaux pour les défauts de forme. Un calcul des

taux de non conformité est réalisé sur un lot d'assemblages avec et sans prise en compte des défauts de forme. L'écart entre les résultats obtenus justifie la prise en compte des défauts de forme dans des assemblages précis. L'étude d'assemblage fut traitée avec un ensemble de formes géométriques générées par une méthode de simulation basée sur les paramètres modaux d'un échantillon pilote. Nous abordons ici un autre intérêt du paramétrage modal.

Hormis les assemblages, nous pouvons identifier de multiples domaines, dans lesquels nous trouvons des fonctions où la prise en compte des défauts de forme est incontournable. Dans le domaine de l'optique par exemple, le guidage d'ondes est entièrement piloté par la forme des instruments d'optique mis en jeu. Le problème du tolérancement à l'aide d'un paramétrage riche et couplé, comme celui que nous proposons, est sa complexité. Il est illusoire de demander au concepteur de définir toutes les contraintes soit, paramètre par paramètre (espace spectral) soit par des relations dans le domaine modal. Ces méthodes ne peuvent être mises en oeuvre qu'à l'aide d'une méthode assistant le concepteur. De ce fait, nous proposons deux approches pour définir un langage de spécification à partir du paramétrage modal. Dans le domaine spectral, la définition d'une courbe enveloppe ou de paliers groupant des modes peut être utilisée. Dans l'espace des coordonnées modales, le calcul automatique d'un domaine peut être réalisé en utilisant des relations liées à la condition fonctionnelle à respecter. La décomposition modale d'une surface peut être vue comme une chaîne de cotes, mais avec des relations plus complexes. Dans une chaîne de cotes, la valeur des tolérances est donnée grâce à la connaissance des moyens de production à travers les capacités. De la même manière pour maîtriser les formes, l'utilisation de données de production peut être exploitée. Les exigences fonctionnelles sont alors représentées par des domaines modaux.

Après avoir défini un langage d'expression, nous proposons d'estimer les variations admissibles par les paramètres modaux sur deux types d'applications. La maîtrise de la qualité géométrique des produits nécessite la maîtrise du moyen de production. Dans ce cadre, nous avons fait l'étude d'un procédé d'emboutissage, dans laquelle nous avons pu lier les défauts géométriques engendrés par le procédé aux paramètres du procédé. Une phase d'optimisation a permis de calculer le jeu de paramètres procédé optimal permettant d'améliorer significativement la qualité géométrique des pièces embouties. L'estimation de l'acceptabilité est également liée à l'exigence du besoin fonctionnel. La deuxième problématique, que nous avons développée, a pour objectif d'évaluer l'influence du défaut de forme sur les performances de l'étanchéité réalisée entre deux brides. Pour ce faire nous avons construit une table d'essais, combinant de manière linéaire les paramètres modaux, afin d'obtenir la criticité de chacun sur l'étanchéité et ainsi, réduire l'espace des paramètres *a priori*, aux plus influents d'entre eux. Finalement, ces deux cas d'études nous auront permis de montrer la pertinence de l'utilisation du paramétrage modal dans la définition d'un langage de spécification, dédié aux problématiques du défaut de forme.

## Nos apports

Les apports de notre étude sont :

- ☞ La proposition d'un paramétrage de forme.
- ☞ La formalisation d'une méthode d'expertise métrologique des surfaces.
- ☞ Une méthode d'assemblage de composants indéformables qui tient compte des défauts de forme.

- ☞ La génération de formes géométriques paramétrées (par les coordonnées modales)
- ☞ L'expression d'un langage pour spécifier les défauts de forme.
- ☞ Une approche sur la maîtrise de la forme géométrique des pièces embouties.
- ☞ Une démarche vers la spécification d'une fonction d'étanchéité.

## Les perspectives

Plusieurs perspectives de poursuites de nos travaux sont envisageables :

- ☞ La formalisation de la méthode sur la métrologie modale des surfaces a fait l'objet d'une première maquette numérique exploitable dans l'environnement Matlab<sup>®</sup>. Le déploiement de ce type d'outil ne peut perdurer dans cet environnement. Plusieurs scénarios sont envisageables : le développement d'un outil numérique indépendant allant du pilotage de la mesure jusqu'à son traitement ou une version « plugin » qui complète un logiciel hôte pour lui apporter de nouvelles fonctionnalités.
- ☞ La méthode d'assemblage avec défauts de forme que nous avons proposée est une approche que nous jugeons pertinente. Il serait souhaitable de l'étendre à d'autres types de contact (surfaces cylindriques, *etc.*). Nous pourrions également aborder les assemblages avec mobilités afin de caractériser le jeu résiduel. Pour valider cette méthode, une expérimentation permettrait de nous confronter à la réalité des défauts géométriques [BALLU, 09].
- ☞ La déformation des pièces est une problématique incontournable dans les assemblages dès lors que la géométrie des pièces est élançée ou que les efforts de maintien en position sont importants. Dans le premier cas, il s'agira de tenir compte de la flexibilité des pièces sur le comportement du mécanisme [PERPOLI, 04, MOUNAUD *et al.*, 07]. Dans le deuxième cas, une modélisation du comportement mécanique des surfaces en contact est nécessaire. En fonction des pressions de contact engendrées, ce comportement pourra être plastique, élastique, élasto-plastique, *etc.* [VALLET *et al.*, 08b].
- ☞ La maîtrise d'un procédé de fabrication est un vaste sujet. L'approche que nous avons mise en place avec la méthode des plans d'expériences mérite d'être approfondie, d'autant plus que les procédés de mise en forme s'intègrent bien dans ce type d'approche. Complétée par une démarche sur la Maîtrise Statistique des Procédés (MSP), nous pourrions aborder le pilotage de la production par les paramètres d'entrées du procédé d'emboutissage.
- ☞ D'une manière générale, le paramétrage modal des formes peut être une entrée de simulations diverses. Une famille de formes (lot de surfaces) estimées à partir d'échantillons pilotes aura une criticité (ou une performance) selon le type de fonction considérée. La poursuite de la coopération avec le laboratoire TREFLE permettra d'aboutir à la caractérisation d'une fonction d'étanchéité. En exploitant les résultats de notre étude de criticité des défauts de forme modaux sur l'étanchéité, notre objectif sera alors de pouvoir garantir un certain niveau de performance en fonction de la forme géométrique des pièces en contact. La mise au point du modèle de comportement mécanique des pièces sera l'un des points clés de l'étude.



La fonction aspect de surface qui est au coeur d'un nouveau projet du SYMME utilisera lui aussi ce paramétrage. D'autres types de fonctions pourront être testées selon les coopérations.

- ☞ Le résidu de la projection modale est une information très intéressante pour ceux que la texture intéresse. En effet, il est souvent difficile d'extraire la texture d'une surface et il est fait usage, par l'expert, de diverses fonctions mathématiques (polynômes en particulier). Le filtrage modal permet alors de soustraire la forme et ceci de façon automatique.

## Bibliographie

- [ADRAGNA, 07] Pierre-Antoine ADRAGNA. « *Tolérancement des Systèmes Assemblés, une approche par le Tolérancement Inertiel et Modal* ». Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2007.
- [ADRAGNA *et al.*, 06] Pierre-Antoine ADRAGNA, Serge SAMPER, Maurice PILLET et Hugues FAVRELIÈRE. « Analysis of shape deviations of measured geometries with a modal basis ». *Journal of machine engineering*, 6 : 134–143, 2006.
- [AMETA *et al.*, 07] Gaurav AMETA, Joseph K. DAVIDSON et Jami SHAH. « Influence of Form on Frequency Distribution for 1-D Clearance Which is Generated from Tolerance-Maps ». *Proceedings of the 10th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2007.
- [ANSELMETTI, 01] Bernard ANSELMETTI. « Spécification fonctionnelle par la méthode CLIC ». *Revue Technologie et Formation*, 97 : 25–35, 2001.
- [ANSELMETTI, 05] Bernard ANSELMETTI. « Génération automatique de la cotation fonctionnelle par la méthode CLIC ». *Proceedings of the 4th International Conference on Integrated Design and Production*, 2005.
- [ANSELMETTI et BISSON, 01] Bernard ANSELMETTI et Serge BISSON. « Influence des défauts de forme et d'orientation d'une surface sur l'estimation d'indicateurs d'aptitude ». *Dans Qualita*, 2001.
- [BACHMANN *et al.*, 04] Jérôme BACHMANN, Jean MARC LINARES, Jean Michel SPRAUEL et Pierre BOURDET. « Aide in decision-making : contribution to uncertainties in three-dimensional measurement ». *Precision Engineering*, 28(1) : 78–88, 2004.
- [BALLOT, 95] Eric BALLOT. « *Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement* ». Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 1995.
- [BALLU, 09] Alex BALLU. « Measurement of gap hull for model validation, product verification and maintenance ». *Proceedings of the 11th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2009.
- [BALLU *et al.*, 01] Alex BALLU, Luc MATHIEU et Jean-Yves DANTAN. « Global view of geometrical specifications ». *Proceedings of the 7th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2001.
- [BARR, 81] A.H. BARR. « Superquadrics and Angle-Preserving Transformations ». *IEEE Computer Graphics and Applications*, 18 : 21–30, 1981.

- [BOUDRAA *et al.*, 03] Abdel-Ouahab BOUDRAA, Claire POLLET, Jean CHRISTOPHE CEXUS et Zineb SAIDI. « Caractérisation des Fonds Marins par Décomposition Modale Empirique ». *Dans 20° Colloque sur le traitement du signal et des images*, Troyes, 2003. Colloque GRETSI.
- [BOURDET et CLÉMENT, 76] Pierre BOURDET et André CLÉMENT. « Controllably a complex surface with a 3 axis measuring machine ». *Annals of the CIRP*, 25 : 354–361, 1976.
- [BUREL et HENOCQ, 95] Gilles BUREL et Hugues HENOCQ. « Determination of the Orientation of 3D Objects Using Spherical Harmonics ». *Graphical Models and Image Processing*, 57(5) : 400–408, septembre 1995.
- [CAMELIO *et al.*, 03] Jaime CAMELIO, S. Jack HU et Dariusz CEGLAREK. « Modeling Variation Propagation of Multi-Station Assembly Systems With Compliant Parts ». *Journal of Mechanical Design*, 125 : 673–681, 2003.
- [CAMPBELL, 03] Charles E. CAMPBELL. « A new method for describing the aberrations of the eye using Zernike polynomials ». *Optometry and vision science*, 80(1) : 79–83, 2003.
- [CAPELLO et SEMERARO, 99] Edoardo CAPELLO et Quirico SEMERARO. « The effect of sampling in circular substitute geometries evaluation ». *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 39 : 55–85, 1999.
- [CAPELLO et SEMERARO, 00] Edoardo CAPELLO et Quirico SEMERARO. « Harmonic fitting approach for plane geometry measurements ». *International Journal Advanced Manufacture Technology*, 16 : 250–258, 2000.
- [CAPELLO et SEMERARO, 01a] Edoardo CAPELLO et Quirico SEMERARO. « The harmonic fitting method for the assessment of the substitute geometry estimate error. Part I : 2D and 3D theory ». *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 41 : 1071–1102, 2001.
- [CAPELLO et SEMERARO, 01b] Edoardo CAPELLO et Quirico SEMERARO. « The harmonic fitting method for the assessment of the substitute geometry estimate error. Part II : statistical approach, machining process analysis and inspection plan optimisation ». *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 41 : 1103–1129, 2001.
- [CHASE et PARKINSON, 91] Kenneth W. CHASE et Alan R. PARKINSON. « A survey of research in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies ». *Research in Engineering Design*, 3(1) : 23–37, mars 1991.
- [CHEN *et al.*, 95] X. CHEN, J. RAJA et S. SIMANAPALLI. « Multi-scale analysis of engineering surfaces ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 35(2) : 231–238, février 1995.
- [CHEUNG *et al.*, 02] Kwok-Wai CHEUNG, Dit-Yan YEUNG et Roland T. CHIN. « On deformable models for visual pattern recognition ». *Pattern Recognition*, 35(7) : 1507–1526, 2002.
- [CHIEN, 82] A.Y. CHIEN. « Approximate Harmonic Models for Roundness Profiles with Equivalent Energy Mean Square Values ». *Wear*, 77 : 247–252, 1982.
- [CHO et TU, 01] N. CHO et J. TU. « Roundness modeling of machined parts for tolerance analysis ». *Precision Engineering*, 25(1) : 35–47, 2001.
- [CID, 05] Gregory CID. « *Etablissement des relations de comportement de mécanismes avec prise en compte des écarts géométriques et des souplesses des composants* ». Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2005.
- [CID *et al.*, 04] Gregory CID, François THIEBAUT et Pierre BOURDET. « Taking the deformation into account for components tolerancing ». *Proceeding of the IDMME'04 Conference*, 2004.

- [CLÉMENT *et al.*, 91] André CLÉMENT, Alain DESROCHERS et Alain RIVIÈRE. « Theory and practice of 3D tolerancing for assembly ». *Proceedings of the 2nd CIRP International Seminar on Computer-Aided Design*, 1991.
- [CLÉMENT *et al.*, 98] André CLÉMENT, Alain RIVIÈRE, Philippe SERRÉ et Catherine CUBÉLÈS-VALADE. « *Geometric design tolerancing : theories, standards and applications* », Chapitre The TTRS : 13 Constraints for Dimensioning and Tolerancing, pages 122–129. Springer, 1998.
- [COHEN et COHEN, 93] Laurent D. COHEN et Isaac COHEN. « Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-d and 3-d images ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7 : 1131–1147, 1993.
- [COLOSIMO et PACELLA, 07] Bianca Maria COLOSIMO et Massimo PACELLA. « On the Use of Principal Component Analysis to Identify Systematic Patterns in Roundness Profiles ». *Quality and reliability engineering international*, 23 : 707–725, 2007.
- [COX *et al.*, 08] Maurice G. COX, Giovanni B. ROSSI, Peter M. HARRIS et Alistair FORBES. « A probabilistic approach to the analysis of measurement processes ». *Metrologia*, 45(5) : 493–502, 2008.
- [CUBÉLÈS-VALADE et RIVIÈRE, 98] Catherine CUBÉLÈS-VALADE et Alain RIVIÈRE. « Nominal and actual geometry explicit declaration ». *Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, pages 357–364, 1998.
- [DANTAN, 00] Jean-Yves DANTAN. « *Synthèse des Spécifications Géométriques : Modélisation par Calibre à Mobilités Internes* ». Thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2000.
- [DAVIDSON *et al.*, 02] J. K. DAVIDSON, A. MUJEZINOVIC et J. J. SHAH. « A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces ». *Journal of Mechanical Design*, 124 : 609–622, 2002.
- [DE BRUIJNE *et al.*, 03] M. DE BRUIJNE, B. VAN GINNEKEN, M. A. VIERGEVER et W. J. NIESSEN. « Three-dimensional point distribution models for tubular objects ». Rapport technique, Utrecht University : Information and Computing Sciences, 2003.
- [DENIMAL, 09] Dimitri DENIMAL. « *Déploiement du tolérancement inertiel dans la relation client fournisseur* ». Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2009.
- [DIMAS et BRIASSOULIS, 99] E. DIMAS et D. BRIASSOULIS. « 3D geometric modelling based on NURBS : a review ». *Advances in Engineering Software*, 30(9-11) : 741–751, septembre 1999.
- [DUMOULIN *et al.*, 03] S. DUMOULIN, L. TABOUROT, C. CHAPPUIS, P. VACHER et R. ARRIEUX. « Determination of the equivalent stress-equivalent strain relation of a sample of copper in tensile loading ». *Journal of Materials Processing Technology*, 133 : 79–83, 2003.
- [FAVRELIÈRE *et al.*, 07] Hugues FAVRELIÈRE, Serge SAMPER, Pierre-Antoine ADRAGNA et Max GIORDANO. « 3D statistical analysis and representation of form error by a modal approach ». *Proceedings of the 10th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2007.
- [FAVRELIÈRE *et al.*, 09] Hugues FAVRELIÈRE, Serge SAMPER et Pierre-Antoine ADRAGNA. « Caractérisation des défauts d’une surface sphérique par décomposition modale ». *Revue internationale d’ingénierie numérique - Conception collaborative et simulation*, 2009.
- [FLANDRIN et GONÇALVÈS, 03] Patrick FLANDRIN et Paulo GONÇALVÈS. « Sur la décomposition modale empirique ». *Dans 20° Colloque sur le traitement du signal et des images*, Troyes, 2003. Colloque GRETSI.

- [GAGNEPIN et ROQUES-CARMES, 86] J.J. GAGNEPIN et C. ROQUES-CARMES. « Fractal approach to two-dimensional and three-dimensional surface roughness ». *Wear*, 109 : 114–119, 1986.
- [GERMAIN, 07] Frédéric GERMAIN. « *Tolérance statistique tridimensionnel, intégration en CFAO* ». Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2007.
- [GIORDANO et DURET, 93] Max GIORDANO et Daniel DURET. « Clearance Space and Deviation Space. Application to three-dimensional chain of dimensions and positions ». *Proceedings of the 3rd CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 1993.
- [GIORDANO *et al.*, 92] Max GIORDANO, Daniel DURET, Stéphane TICHADOU et Robert ARRIEUX. « Clearance Space in Volumic Dimensioning ». *Annals of the CIRP*, 41 : 565–568, 1992.
- [GIORDANO *et al.*, 99] Max GIORDANO, Eric PAIREL et Serge SAMPER. « Mathematical representation of tolerance zones ». *Proceedings of the 6th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 1999.
- [GIORDANO *et al.*, 05] Max GIORDANO, Serge SAMPER et Jean-Philippe PETIT. « Tolerance analysis and synthesis by means of deviation domains, axi-symmetric cases ». *Proceedings of the 9th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2005.
- [GOMES et FAUGERAS, 00] J. GOMES et O. FAUGERAS. « Level sets and distance functions ». *Computer Vision - ECCV 2000, PT I*, 1842 : 588–602, 2000.
- [GOUSKOV et TICHKIEWITCH, 98] A. GOUSKOV et S. TICHKIEWITCH. « Influence of the machine-tool defects on the formation of the residual defects on a surface : application to turning ». *Proceeding of the IDMMME'98 Conference*, pages 341–348, 1998.
- [GÉRADIN et RIXEN, 96] M. GÉRADIN et D. RIXEN. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. MASSON, 1996.
- [GUPTA et TURNER, 93] S. GUPTA et J.U. TURNER. « Variational Solid Modeling for Tolerance Analysis ». *Proceedings of the ASME International in Engineering Conference*, 1 : 487–494, 1993.
- [HASEGAWA *et al.*, 93] M. HASEGAWA, J.C. LIU et Y. KONISHI. « Characterization of engineering surfaces by fractal analysis ». *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, 27(3) : 192–196, septembre 1993.
- [HENKE *et al.*, 99] R.P. HENKE, K.D. SUMMERHAYS, J.M. BALDWIN, R.M. CASSOU et C.W. BROWN. « Methods for evaluation of systematic geometric deviations in machined parts and their relationships to process variables ». *Precision Engineering*, 23 : 273–292, 1999.
- [HILL, 48] R. HILL. « A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metal ». *Proceedings of Royal Society of London*, 193 : 281–297, 1948.
- [HUANG, 03] Jyunping HUANG. « An efficient approach for solving the straightness and the flatness problems at large number of data points ». *Computer Aided Design*, 35(1) : 15–25, 2003.
- [HUANG et CEGLAREK, 02] Wenzhen HUANG et Dariusz CEGLAREK. « Mode-based Decomposition of Part Form Error by Discrete-Cosine-Transform with Implementation to Assembly and Stamping System with Compliant Parts ». *Annals of the CIRP*, 51 : 21–26, 2002.
- [HUANG et KONG, 08] Wenzhen HUANG et Zhenyu KONG. « Simulation and integration of geometric and rigid body kinematics errors for assembly variation analysis ». *Journal of manufacturing systems*, 27 : 36–44, 2008.
- [HUANG *et al.*, 98] Norden E. HUANG, Zheng SHEN, Steven R. LONG, Manli C. WU, Hsing H. SHIH, Quanan ZHENG, Nai-Chyuan YEN, Chi Chao TUNG et Henry H. LIU. « The empirical

- mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis ». *Proceedings of Royal Society of London*, 454 : 903–995, 1998.
- [ISO-5459, 81] ISO-5459. « *Technical drawings - geometrical tolerancing - datums and datum-systems for geometrical tolerances* », 1981.
- [ISO-8785, 98] ISO-8785. « *Geometrical Product Specifications (GPS) - Surface imperfections - Terms, definitions and parameters* », 1998.
- [ISO/CEI-10918-1, 94] ISO/CEI-10918-1. « *Technologies de l'information - Compression numérique et codage des images fixes de nature photographique : prescriptions et lignes directrices* », 1994.
- [ISO/TS-12180-1, 03] ISO/TS-12180-1. « *Geometrical product specifications (GPS) - Cylindricity - Part 1 : Vocabulary and parameters of cylindrical form* », 2003.
- [ISO/TS-12180-2, 03] ISO/TS-12180-2. « *Geometrical product specifications (GPS) - Cylindricity - Part 2 : Specification operators* », 2003.
- [ISO/TS-12181-1, 03] ISO/TS-12181-1. « *Geometrical product specifications (GPS) - Roundness - Part 1 : Vocabulary and parameters of roundness* », 2003.
- [ISO/TS-12181-2, 03] ISO/TS-12181-2. « *Geometrical product specifications (GPS) - Roundness - Part 2 : Specification operators* », 2003.
- [ISO/TS-12780-1, 03] ISO/TS-12780-1. « *Geometrical product specifications (GPS) - Straightness - Part 1 : Vocabulary and parameters of straightness* », 2003.
- [ISO/TS-12780-2, 03] ISO/TS-12780-2. « *Geometrical product specifications (GPS) - Straightness - Part 2 : Specification operators* », 2003.
- [ISO/TS-12781-1, 03] ISO/TS-12781-1. « *Geometrical product specifications (GPS) - Flatness - Part 1 : Vocabulary and parameters of flatness* », 2003.
- [ISO/TS-12781-2, 03] ISO/TS-12781-2. « *Geometrical product specifications (GPS) - Flatness - Part 2 : Specification operators* », 2003.
- [ISO/TS-17450-1, 05] ISO/TS-17450-1. « *Geometric Product Specification (GPS) - General Concepts - Part 1 : Model for geometrical specification and verification* », 2005.
- [IYER *et al.*, 05] Natraj IYER, Subramaniam JAYANTI, Kuiyang LOU, Yagnanarayanan KALYANARAMAN et Karthik RAMANI. « Three-dimensional shape searching : state-of-the-art review and future trends ». *Computer-Aided Design*, 37(5) : 509–530, avril 2005.
- [KANADA, 95] Tohru KANADA. « Evaluation of spherical form errors—Computation of sphericity by means of minimum zone method and some examinations with using simulated data ». *Precision Engineering*, 17(4) : 281–289, octobre 1995.
- [KASS *et al.*, 88] M. KASS, A. WITKIN et D. TERZOPOULOS. « Snakes : active contour models ». *International Journal of Computer Vision*, 1 : 321–331, 1988.
- [KOTCHEFF et TAYLOR, 98] Aaron C. W. KOTCHEFF et Chris J. TAYLOR. « Automatic construction of eigenshape models by direct optimization ». *Medical Image Analysis*, 2 : 303–314, 1998.
- [LANDON *et al.*, 04] Yann LANDON, Stéphane SEGONDS, Pierre LASCOUMES et Pierre LAGARRIGUE. « Tool positioning error (TPE) characterisation in milling ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 44(5) : 457–464, avril 2004.
- [LAPERRIÈRE *et al.*, 02] L. LAPERRIÈRE, W. GHIE et A. DESROCHERS. « Statistical and Deterministic Tolerance Analysis and Synthesis Using a Unified Jacobian-Torsor Model ». *Annals of the CIRP*, 51 : 417–420, 2002.

- [LEDOUX, 05] Yann LEDOUX. « *Optimisation des procédés d'emboutissage par caractérisation géométrique et essais numériques* ». Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2005.
- [LEDOUX *et al.*, 06] Yann LEDOUX, Eric PAIREL et Robert ARRIEUX. « Numerical optimisation of an industrial multi-pass stamping progression by using the design of experiments method ». *Trends and Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, 2006.
- [LEE *et al.*, 97] G. LEE, J. MOU et Y. SHEN. « Sampling strategy design for dimensional measurement of geometric features using coordinate measuring machine ». *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 37 : 917–934, 1997.
- [LEE *et al.*, 98] S-H. LEE, H. ZAHOUANI, R. CATERINI et T.G. MATHIA. « Morphological characterisation of engineered surfaces by wavelet transform ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 38(5-6) : 581–589, 1998.
- [LEE *et al.*, 06] Neville K. S. LEE, Grace YU, Ajay JONEJA et Dariusz CEGLAREK. « The modeling and analysis of a butting assembly in the presence of workpiece surface roughness and part dimensional error ». *International Journal Advanced Manufacture Technology*, 31 : 528–538, 2006.
- [LEISSA, 69] Arthur W. LEISSA. *Vibration of plates*. 1969.
- [LINARES *et al.*, 07] J.M. LINARES, C. BROCOL, S. ARANDA et J.M. BERGHEAU. « Influence du filtrage mécanique dans l'association des surfaces ». *Proceedings of the 13th International Congress of Metrology*, 2007.
- [LINGADURAI et SHUNMUGAM, 06] K. LINGADURAI et M.S. SHUNMUGAM. « Metrological characteristics of wavelet filter used for engineering surfaces ». *Measurement*, 39 : 575–584, 2006.
- [LOPEZ *et al.*, 95] J. LOPEZ, G. HANSALI, H. ZAHOUANI, J. C. Le BOSSE et T. MATHIA. « 3D fractal-based characterisation for engineered surface topography ». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 35(2) : 211–217, février 1995.
- [MAILHÉ *et al.*, 09] J. MAILHÉ, J.M. LINARES, J. M. SPRAUEL et J.P. RAYNAL. « Impact of the Sampling Strategy on Geometrical Checking Uncertainties ». *Proceedings of the 11th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2009.
- [MAJUMDAR et BHUSHAN, 90] A. MAJUMDAR et B. BHUSHAN. « Role of Fractal Geometry in Roughness Characterization and Contact Mechanics of Surfaces ». *Journal of Tribology*, 112(2) : 205–216, avril 1990.
- [MAJUMDAR et TIEN, 90] A. MAJUMDAR et C.L. TIEN. « Fractal characterization and simulation of rough surfaces ». *Wear*, 136(2) : 313–327, mars 1990.
- [MAK *et al.*, 08] Lora MAK, Scott GRANDISON et Richard J. MORRIS. « An extension of spherical harmonics to region-based rotationally invariant descriptors for molecular shape description and comparison ». *Journal of Molecular Graphics and Modelling*, 26(7) : 1035–1045, avril 2008.
- [MALLADI et SETHIAN, 99] R. MALLADI et J. SETHIAN. « A unified approach to noise removal, image enhancement and shape recovery ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 11 : 1154–1168, 1999.
- [MANDELBROT, 75] Benoit MANDELBROT. « Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands ». *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 72(10) : 3825–3828, octobre 1975.

- [MARIE et LASSEUX, 07] Christophe MARIE et Didier LASSEUX. « Experimental leak-rate measurement through a static metal seal ». *Journal of fluids engineering*, 129 : 799–805, 2007.
- [MARIE *et al.*, 03] Christophe MARIE, Didier LASSEUX, Hassan ZAHOUANI et Philippe SAINOT. « An integrated approach to characterize liquid leakage through metal contact ». *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, 48 : 81–86, 2003.
- [MATHIEU et BALLU, 03] Luc MATHIEU et Alex BALLU. « GeoSpelling : a common language for specification and verification to express method uncertainty ». *Proceedings of the 8th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2003.
- [MATHIEU et VILLENEUVE, 07] Luc MATHIEU et François VILLENEUVE. *Tolérancement géométrique des produits*. 2007.
- [MCINERNEY et TERZOPOULOS, 96] Tim MCINERNEY et Demetri TERZOPOULOS. « Deformable models in medical image analysis : a survey ». *Medical Image Analysis*, 1(2) : 91–108, 1996.
- [MERKLEY, 98] Karl G. MERKLEY. « *Tolerance analysis of compliant assemblies* ». Thèse de doctorat, Brigham Young University, 1998.
- [MOGHADDAM *et al.*, 01] Baback MOGHADDAM, Chahab NASTAR et Alex PENTLAND. « A Bayesian similarity measure for deformable image matching ». *Image and Vision Computing*, 19(5) : 235–244, avril 2001.
- [MONTAGNAT *et al.*, 01] J. MONTAGNAT, H. DELINGETTE et N. AYACHE. « A review of deformable surfaces : topology, geometry and deformation ». *Image and Vision Computing*, 19(14) : 1023–1040, décembre 2001.
- [MORIÈRE *et al.*, 09] Stéphane MORIÈRE, Jean MAILHÉ et Jean Marc LINARES. « Assembly method comparison including form defect ». *Proceedings of the 11th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2009.
- [MOUNAUD *et al.*, 07] Mathieu MOUNAUD, Pierre BOURDET et François THIEBAUT. « Integrating the flexibility of components in the assembly of aeronautics hydraulic systems ». *Proceedings of the 10th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2007.
- [NASTAR, 94] Chahab NASTAR. « Vibration modes for nonrigid motion analysis in 3D images ». *Proceedings of the Third European Conference on Computer Vision*, 1994.
- [NASTAR et AYACHE, 93] Chahab NASTAR et Nicholas AYACHE. « Fast segmentation, tracking, and analysis of deformable objects ». *Proceedings of the Third International Conference on Computer Vision*, 1993.
- [NASTAR et AYACHE, 96] Chahab NASTAR et Nicholas AYACHE. « Frequency-Based Nonrigid Motion Analysis : Application to Four Dimensional Medical Images ». *Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 18 : 1067–1079, 1996.
- [NF-ISO-10110-5, 08] NF-ISO-10110-5. « *Optique - Indications sur les dessins pour éléments et systèmes optiques - Partie 5 : tolérances de forme de surface* », 2008.
- [NF-ISO-1101, 06] NF-ISO-1101. « *Geometrical Product Specifications (GPS) - Geometrical tolerancing - Tolerances of form, orientation, location and run-out* », 2006.
- [NICOLAS *et al.*, 07] Cyril NICOLAS, Cyrille BAUDOUIN, Stéphane LELEU, Mihaela TEODORESCU et Régis BIGOT. « Stratégie de contrôle dimensionnel et identification de la déformation d'un produit ». *Proceedings of 5th International Conference on Integrated Design and Production*, 2007.
- [NOVOTNI et KLEIN, 04] Marcin NOVOTNI et Reinhard KLEIN. « Shape retrieval using 3D Zernike descriptors ». *Computer Aided Design*, 36(11) : 1047–1062, septembre 2004.



- [OSHER et SETHIAN, 88] Stanley OSHER et J. SETHIAN. « Fronts propagating with curvature dependent speed, algorithms based on a Hamilton-Jacobi formulation ». *Journal of Computational Physics*, 79 : 12–49, 1988.
- [PEARSON, 01] Karl PEARSON. « On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space ». *Philosophical Magazine*, 6 : 559–572, 1901.
- [PEAUCELLE, 05] Louis PEAUCELLE. « Du concept d’interchangeabilité à sa réalisation ». *Gérer et comprendre*, 80 : 58–75, 2005.
- [PENTLAND, 90] Alex PENTLAND. « Automatic extraction of deformable part models ». *International Journal of Computer Vision*, 13 : 107–126, 1990.
- [PERPOLI, 04] Isabelle PERPOLI. « Tolérancement des mécanismes flexibles : Application à une aile de carrosserie ». mémoire CNAM mécanique Annecy, 2004.
- [PETIT, 04] Jean-Philippe PETIT. « Spécification géométrique des produits : Méthode d’analyse de tolérances. Application en conception assistée par ordinateur. ». Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2004.
- [PIERCE et ROSEN, 08] Robert Scott PIERCE et David ROSEN. « A Method for Integrating Form Errors Into Geometric Tolerance Analysis ». *Journal of Mechanical Design*, 130 : 1–10, 2008.
- [PILLET, 04] Maurice PILLET. « Inertial Tolerancing ». *The total quality management magazine*, 16 : 202–209, 2004.
- [POTTMANN et LEOPOLDSEDER, 03] Helmut POTTMANN et Stefan LEOPOLDSEDER. « A concept for parametric surface fitting which avoids the parametrization problem ». *Computer Aided Geometric Design*, 20 : 343–362, 2003.
- [POTTMANN *et al.*, 02] Helmut POTTMANN, Stefan LEOPOLDSEDER et M. HOFER. « Approximation with active B-spline curves and surfaces ». *Proceedings of Pacific Graphics*, pages 8–25, 2002.
- [RADOUANI, 03] Mohammed RADOUANI. « Contribution à la validation des chaînes de cotes ». Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2003.
- [RAJA et RADHAKRISHNAN, 77] J. RAJA et V. RADHAKRISHNAN. « Analysis and synthesis of surface profiles using Fourier series ». *International journal of machine tool design and research*, 17 : 245–251, 1977.
- [RAJA *et al.*, 02] J. RAJA, B. MURALIKRISHNAN et S. FU. « Recent advances in separation of roughness, waviness and form ». *Precision Engineering*, 26(2) : 222–235, avril 2002.
- [SAMAL et IYENGAR, 93] A. SAMAL et P. IYENGAR. « Natural shape detection based on principle component analysis, ». *SPIE Journal of electronic Imaging*, 2 : 253–263, 1993.
- [SAMPER, 08] Serge SAMPER. « Monographie sur le tolérancement modal ». Rapport technique, 2008.
- [SAMPER et FORMOSA, 07] Serge SAMPER et Fabien FORMOSA. « Form Defects Tolerancing by Natural Modes Analysis ». *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 7, 2007.
- [SAMPER et GIORDANO, 98] Serge SAMPER et Max GIORDANO. « Taking into account elastic displacements in 3D tolerancing - Models and application ». *Journal of Materials Processing Technology*, 78 : 156–162, juin 1998.
- [SAMPER *et al.*, 03] Serge SAMPER, Hervé LOUCHE et Pierre PACCARD. « Conception d’une cloche. Mise en place d’une démarche de simulation vibratoire ». *Proceedings of the 3rd International Conference on Integrated Design and Production*, 2003.

- [SAMPER *et al.*, 09] Serge SAMPER, Pierre-Antoine ADRAGNA, Hugues FAVRELIÈRE et Maurice PILLET. « Modeling of 2D and 3D assemblies taking into account form errors of plane surfaces ». *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 2009.
- [SCLAROFF et PENTLAND, 93] Stan SCLAROFF et Alex PENTLAND. « A modal framework for correspondence and recognition ». *Proceedings of the fourth international conference on Computer vision*, pages 308–313, 1993.
- [SCLAROFF et PENTLAND, 95] Stan SCLAROFF et Alex PENTLAND. « Modal matching for correspondence and recognition ». *Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 17 : 545–561, 1995.
- [SELLEM et RIVIÈRE, 98] E. SELLEM et A. RIVIÈRE. « Tolerance analysis of deformable assemblies ». *proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, 1998.
- [SHIU *et al.*, 03] B. W. SHIU, D. W. APLEY, D. CEGLAREK et J. SHI. « Tolerance allocation for compliant beam structure assemblies ». *Transactions of the IIE Journal of Engineering and Technology, Industrial and Production Engineering*, 35(4) : 329–342, 2003.
- [SICAM *et al.*, 04] Victor Arni D. P. SICAM, Joris COPPENS, Tom J. T. P. VAN DEN BERG et Rob G. L. VAN DER HEIJDE. « Corneal surface reconstruction algorithm that uses Zernike polynomial representation ». *Journal of the Optical Society of America A*, 21(7) : 1300–1306, 2004.
- [SONKA *et al.*, 93] Milan SONKA, Vaclav HLAVAC et Roger BOYLE. *Image Processing, Analysis and Machine Vision*. Chapman & Hall, 1993.
- [SRINIVASAN et WOOD, 92] R.S. SRINIVASAN et K.L. WOOD. « Fractal-based Geometric Tolerancing for Mechanical Design ». *Design Theory and Manufacturing*, 42 : 107–115, 1992.
- [SRINIVASAN et WOOD, 97] R. S. SRINIVASAN et K. L. WOOD. « A Form Tolerancing Theory Using Fractals and Wavelets ». *Journal of Mechanical Design*, 119(2) : 185–193, 1997.
- [SUMMERHAYS *et al.*, 01] K.D. SUMMERHAYS, R.P. HENKE, J.M. BALDWIN, R.M. CASSOU et C.W. BROWN. « Optimizing discrete point sample patterns and measurement data analysis on internal cylindrical surfaces with systematic form deviations ». *Journal of the International Societies for Precision Engineering and Nanotechnology*, 26 : 105–121, 2001.
- [TEISSANDIER et DUFAURE, 02] Denis TEISSANDIER et Jérôme DUFAURE. « Tolerance synthesis with polytopes : Application to radial ball bearing arrangements ». *Proceeding of the IDM-ME'02 Conference*, 2002.
- [TEISSANDIER *et al.*, 99] D. TEISSANDIER, Y. COUÉTARD et A. GÉRARD. « A computer aided tolerancing model : proportioned assembly clearance volume ». *Computer Aided Design*, 31 : 805–817, 1999.
- [TERZOPOULOS et METAXAS, 91] D. TERZOPOULOS et D. METAXAS. « Dynamic 3-D models with local and global deformations : deformable superquadrics ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7 : 703–714, 1991.
- [TOURNIER et DUC, 02] C. TOURNIER et E. DUC. « A Surface Based Approach for Constant Scallop Height Tool-Path Generation ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 19(5) : 318–324, mars 2002.
- [VALLET *et al.*, 08a] C. VALLET, D. LASSEUX, P. SAINOT et H. ZAHOUANI. « Numerical determination of sealing performance of rough contact : real versus synthetic fractal surfaces ». *Proceedings of the Pressure Vessels and Piping Conference*, July 2008.

- [VALLET *et al.*, 08b] C. VALLET, D. LASSEUX, P. SAINOT et H. ZAHOUANI. « Real versus synthesized fractal surfaces : Contact mechanics and transport properties ». *Tribology International*, 2008.
- [VILLENEUVE et VIGNAT, 05] François VILLENEUVE et Frédéric VIGNAT. « Simulation of manufacturing process (1) : Generic resolution of the positioning problem ». *Proceedings of the 9th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2005.
- [WANG et LAI, 08] S.F. WANG et S.H. LAI. « Reconstructing 3D Shape, Albedo and Illumination from a Single Face Image ». *Computer Graphics Forum*, 27(7) : 1729–1736, octobre 2008.
- [WECKENMANN et KNAUER, 98] A. WECKENMANN et M. KNAUER. « The Influence of Measurement Strategy on the Uncertainty of CMM-Measurements ». *Annals of the CIRP*, 47 : 451–455, 1998.
- [WIKIPÉDIA, 09] WIKIPÉDIA. « *Spherical harmonics* ». L'encyclopédie libre, 2009.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_harmonics](http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics).
- [XP-04-562, 00] XP-04-562. « *Spécification géométrique des produits (GPS) - Surfaces complexes, prismatiques et de révolution - Spécification sur les dessins* », 2000.
- [YAU, 98] H-T YAU. « Uncertainty analysis in geometris best fit ». *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 38 : 1323–1342, 1998.
- [ZAHOUANI *et al.*, 98a] H. ZAHOUANI, R. VARGIOLU, Ph. KAPSA, J.L. LOUBET et T.G. MATHIA. « Effect of lateral resolution on topographical images and three-dimensional functional parameters ». *Wear*, 219(1) : 114–123, août 1998.
- [ZAHOUANI *et al.*, 98b] H. ZAHOUANI, R. VARGIOLU et J.L. LOUBET. « Fractal Models of Surface Topography and Contact Mechanics ». *Mathematical and Computer Modelling*, 28 : 517–534, 1998.
- [ZHANG et LU, 04] Dengsheng ZHANG et Guojun LU. « Review of shape representation and description techniques ». *Pattern Recognition*, 37(1) : 1–19, 2004.
- [ZHANG *et al.*, 05] X. ZHANG, C. ZHANG, B. WANG et S. C. FENG. « Unified functional tolerancing approach for precision cylindrical components ». *International Journal of Production Research*, 43 : 25–47, 2005.
- [ZHAO *et al.*, 00] Hong-Kai ZHAO, Stanley OSHER, Barry MERRIMAN et Myungjoo KANG. « Implicit and Nonparametric Shape Reconstruction from Unorganized Data Using a Variational Level Set Method ». *Computer Vision and Image Understanding*, 80(3) : 295–314, décembre 2000.
- [ZHAO *et al.*, 01] Hong-Kai ZHAO, Stanley OSHER et R. FEDKIW. « Fast surface reconstruction and deformation using the level set method ». *Proceedings IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, 2001.
- [ZHOU *et al.*, 04] Kun ZHOU, Hujun BAO et Jiaoying SHI. « 3D surface filtering using spherical harmonics ». *Computer-Aided Design*, 36(4) : 363–375, février 2004.
- [ZHU et DING, 02] Xiangyang ZHU et Han DING. « Flatness tolerance evaluation : an approximate minimum zone solution ». *Computer Aided Design*, 34(9) : 655–664, août 2002.
- [ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 02] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR. *The finite element method for solid and structural mechanics*. 2002.

---

---

# Annexes

---

---



## Les tolérances de forme selon ISO 1101

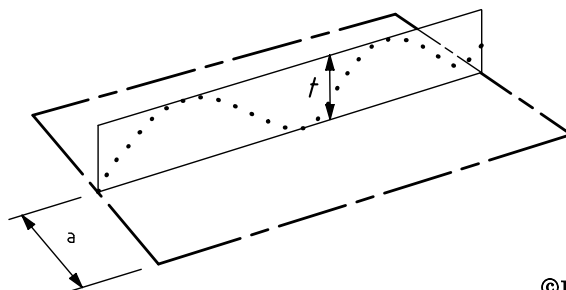
### A.1 Définition des tolérances géométriques liées à la forme

Les tolérances de forme sont au nombre de six selon l'élément géométrique auquel elles s'appliquent. On présente dans la suite de cette annexe la définition de ces six tolérances de forme, conformément à la norme [NF-ISO-1101, 06].

#### A.1.1 Tolérance de rectitude

Des informations spécifiques liées à la tolérance de rectitude sont disponibles dans les documents [ISO/TS-12780-1, 03, ISO/TS-12780-2, 03].

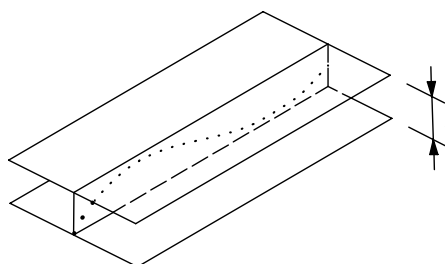
- La zone de tolérance, dans le plan considéré, est limitée par deux droites parallèles, distantes de  $t$ , uniquement dans la direction spécifiée.



©ISO 2004

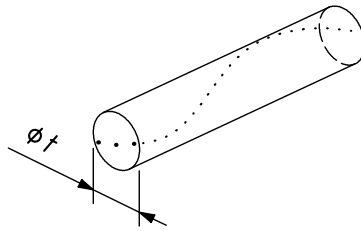
<sup>a</sup> Toute distance

- La zone de tolérance est limitée par deux plans parallèles distants de  $t$ .



©ISO 2004

- La zone de tolérance est limitée par un cylindre de diamètre  $t$ , lorsque la valeur de la tolérance est précédée du symbole  $\varnothing$ .

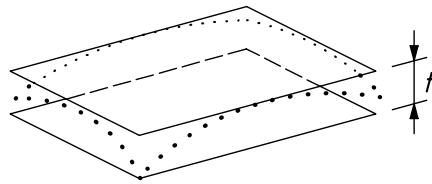


©ISO 2004

### A.1.2 Tolérance de planéité

Des informations spécifiques liées à la tolérance de planéité sont disponibles dans les documents [ISO/TS-12781-1, 03, ISO/TS-12781-2, 03].

- La zone de tolérance est limitée par deux plans parallèles distants de  $t$ .

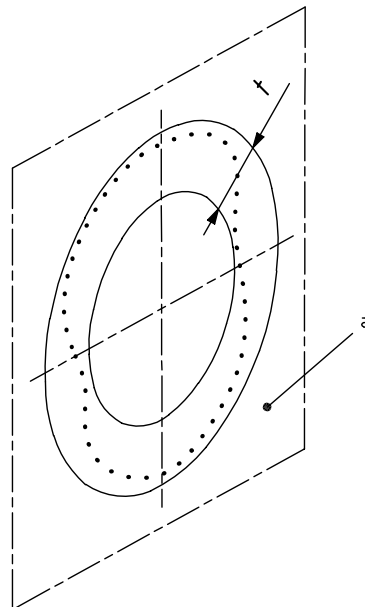


©ISO 2004

### A.1.3 Tolérance de circularité

Des informations spécifiques liées à la tolérance de circularité sont disponibles dans les documents [ISO/TS-12181-1, 03, ISO/TS-12181-2, 03].

- La zone de tolérance, dans la section droite considérée, est limitée par deux cercles concentriques ayant une différence de rayons égale à  $t$ .



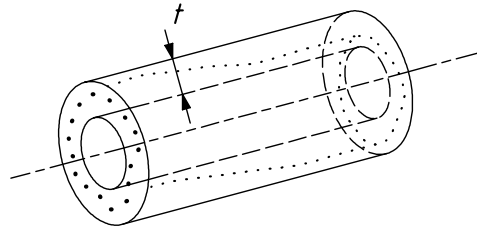
©ISO 2004

<sup>a</sup> Toute section

### A.1.4 Tolérance de cylindricité

Des informations spécifiques liées à la tolérance de cylindricité sont disponibles dans les documents [ISO/TS-12180-1, 03, ISO/TS-12180-2, 03].

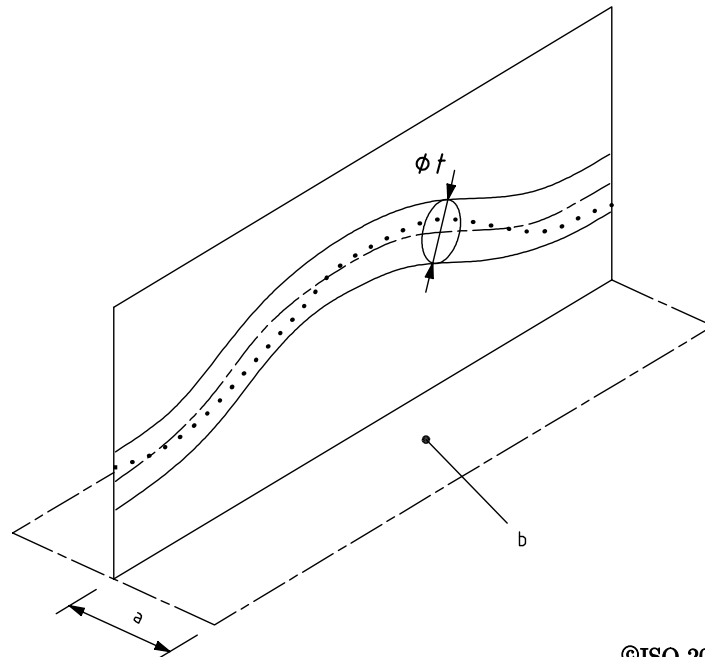
- La zone de tolérance est limitée par deux cylindres coaxiaux ayant une différence de rayons de  $t$ .



©ISO 2004

### A.1.5 Tolérance de profil d'une ligne non rapportée à une référence spécifiée

- La zone de tolérance est limitée par deux lignes enveloppes des cercles de diamètre  $t$ , dont les centres sont situés sur une ligne ayant la forme géométrique théorique exacte.



©ISO 2004

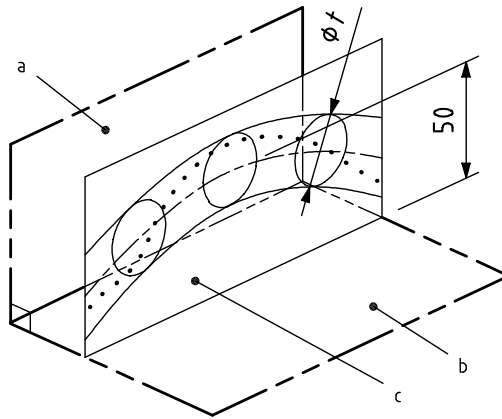
<sup>a</sup> Toute section

<sup>b</sup> Plan perpendiculaire au plan du profil

### A.1.6 Tolérance de profil d'une ligne par rapport à un système de références spécifiées

- La zone de tolérance est limitée par deux lignes enveloppes des cercles de diamètre  $t$ , dont les centres sont situés sur une ligne ayant la forme géométrique théorique exacte par rapport au plan de référence A et au plan de référence B.



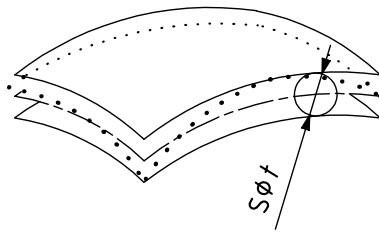


©ISO 2004

- <sup>a</sup> Référence spécifiée A
- <sup>b</sup> Référence spécifiée B
- <sup>c</sup> Plan parallèle à la référence spécifiée A

**A.1.7 Tolérance de profil d'une surface non rapportée à une référence spécifiée**

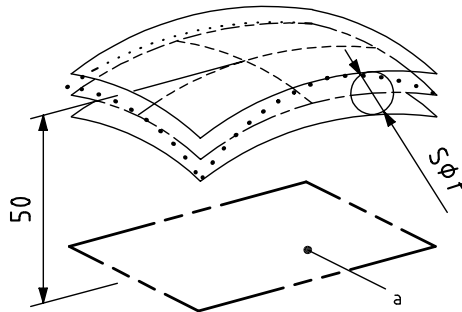
- La zone de tolérance est limitée par deux surfaces enveloppes des sphères de diamètre  $t$ , dont les centres sont situés sur une surface ayant la forme géométrique théorique exacte.



©ISO 2004

**A.1.8 Tolérance de profil d'une surface par rapport à une référence spécifiée**

- La zone de tolérance est limitée par deux surfaces enveloppes des sphères de diamètre  $t$ , dont les centres sont situés sur une surface ayant la forme géométrique théorique exacte par rapport au plan de référence A.



©ISO 2004

- <sup>a</sup> Référence spécifiée A
- <sup>b</sup> Référence spécifiée B

### A.1.9 Spécifications restrictives

Ces tolérances de forme peuvent être appliquées à l'élément géométrique complet ou à une zone restrictive, on parle alors de spécifications restrictives.

Si une tolérance est appliquée, pour la même caractéristique, sur une longueur restreinte, placée n'importe où sur l'élément, la valeur de cette longueur restreinte doit être ajoutée à la suite de la valeur de la tolérance et séparée par un trait oblique voir l'exemple de la figure A.1(a). Si deux tolérances ou plus de la même caractéristique doivent être indiquées, elles peuvent être combinées comme représenté à la figure A.1(b).

Si la tolérance est appliquée seulement à une partie restreinte de l'élément, cette partie doit être indiquée comme sur les exemples des figures A.2(a) et A.2(b).



Figure A.1 – Exemples de spécifications restrictives

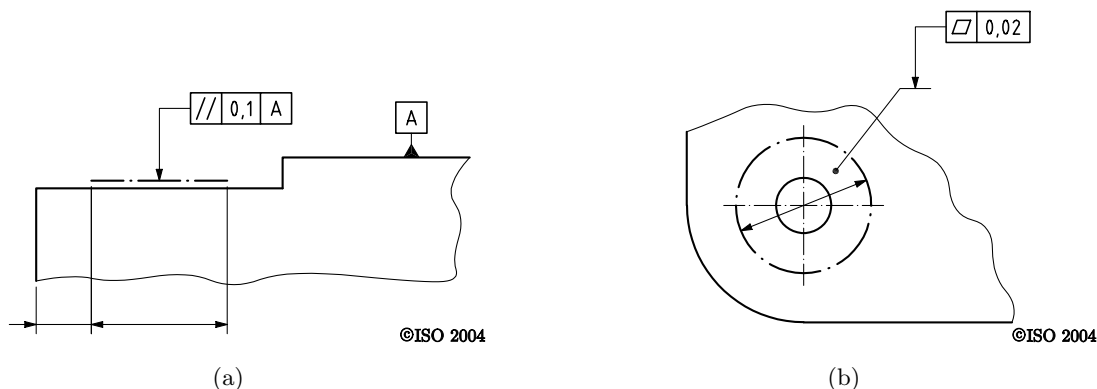


Figure A.2 – Exemples de spécifications sur une partie restreinte de l'élément

Cette norme ne permet pas d'exprimer sans ambiguïté certaines conditions fonctionnelles. Pour pallier à ces éventuels problèmes de spécifications, il existe des extensions à la norme ou des normes spécifiques par métier, par exemple la norme [NF-ISO-10110-5, 08].

## A.2 Exemple d'extension à la norme

Cette norme [XP-04-562, 00] détaille la façon d'exprimer les exigences géométriques des surfaces complexes, prismatiques et de révolution, à l'exception des surfaces hélicoïdales et en précise la signification. Elle précise notamment les exigences géométriques liées à la forme en définissant un nouveau concept de la zone de tolérance.

L'élément tolérancé peut être tout ou partie du modèle de la surface réelle de la pièce (cf. §A.1.9). La zone de tolérance est définie par rapport à la forme théorique de l'élément tolérancé. C'est un volume limité par deux surfaces, lieux géométriques des extrémités du diamètre d'une sphère, normal à la forme théorique. Ce diamètre est constant ou variable, et la position du centre de la sphère par rapport à la forme théorique est constante ou variable, comme indiqué sur la figure A.3. Sur cette figure,  $t$  est la valeur de la tolérance,  $d$  est la distance du centre de la sphère à la forme théorique (suivant la normale à cette forme).

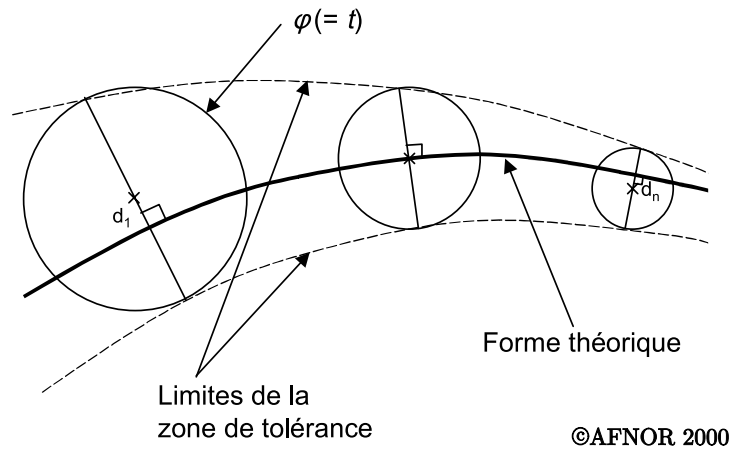
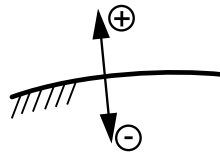


Figure A.3 – Représentation de la zone de tolérance

Cette distance  $d$  s'exprime en valeur algébrique pour indiquer la position de la zone de tolérance par rapport à la matière : par convention le signe « + » signifie que le décalage du centre de la sphère se fait vers l'extérieur de la matière de la surface tolérancée, le signe « - » signifie que le décalage du centre de la sphère se fait vers l'intérieur de la matière de la surface tolérancée (cf. figure A.4).



©AFNOR 2000

Figure A.4 – Convention de signe



## La projection vectorielle

L'objet de cette annexe est de montrer que l'opération de projection vectorielle que nous utilisons dans la Décomposition Modale Discrète (DMD) est équivalente à une opération de minimisation au sens des moindres carrés.

### B.1 Opération de projection vectorielle

Soit un vecteur  $V$ , exprimé dans un espace vectoriel  $E$ , que l'on cherche à exprimer dans une base vectorielle  $B$  quelconque de l'espace  $E$ . Les propriétés des espaces vectoriels nous assure que le vecteur  $V$  peut s'exprimer dans la base vectorielle  $B$  de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de cette base, par le produit matriciel B.1.

$$V = B \cdot \alpha \quad (\text{B.1})$$

où le vecteur  $\alpha$ , définissant les coordonnées de  $V$  dans la base  $B$ , sont calculés par l'opération matricielle B.2 :

$$\alpha = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot V \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Minimisation des écarts quadratiques

Dans cette seconde formulation du problème, nous cherchons toujours à décrire le vecteur  $V$  avec l'ensemble des vecteurs de la base  $B$ , mais cette fois, par un problème de minimisation. Autrement dit, nous allons chercher à associer le vecteur  $V$  avec une solution  $S$ , combinaison linéaire des vecteurs de la base  $B$ , tel que  $S = B \cdot \beta$ .

Le problème de minimisation est le suivant, nous recherchons l'ensemble des coefficients  $\beta_i$  qui minimisent la fonction

$$\begin{aligned} d &= (V - S)^T \cdot (V - S) \\ &= V^T \cdot V - 2V^T \cdot S + S^T \cdot S \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

qui définit la somme des écarts quadratiques entre le vecteur  $V$  et la solution envisagée  $S$ .

La solution de ce problème linéaire s'obtient en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{\partial d}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{B.4})$$

On peut alors développer l'expression de cette équation, pour en extraire la solution :

$$\begin{aligned}
 -2V^T \cdot \frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial S^T}{\partial \beta} \cdot S + S^T \cdot \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0 \\
 -2V^T \cdot B + B^T \cdot S + S^T \cdot B &= 0 \\
 -2V^T \cdot B + 2B^T \cdot B \cdot \beta &= 0 \\
 B^T \cdot B \cdot \beta &= V^T \cdot B
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\text{et finalement } \beta = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot V$$

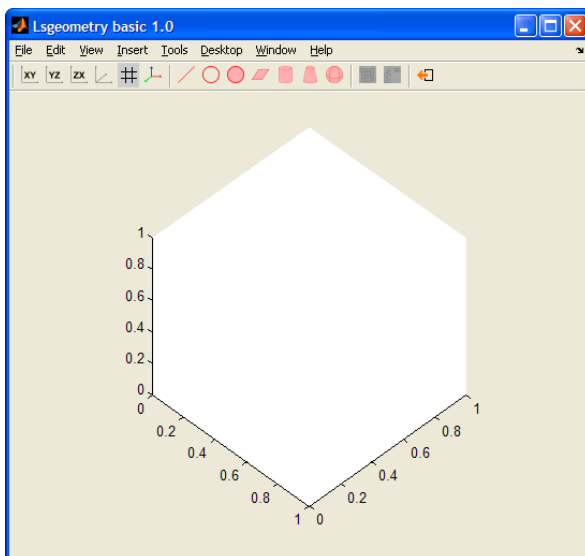
Ainsi, nous obtenons la solution du problème de minimisation des écarts quadratiques et nous remarquons qu'elle s'exprime de la même façon que pour la projection. Le vecteur  $\alpha$ , issu de la projection vectorielle de  $V$  dans la base  $B$ , est aussi solution de la minimisation des écarts quadratiques entre  $V$  et les vecteurs de la base  $B$ .

## Développement informatique MATLAB<sup>®</sup>

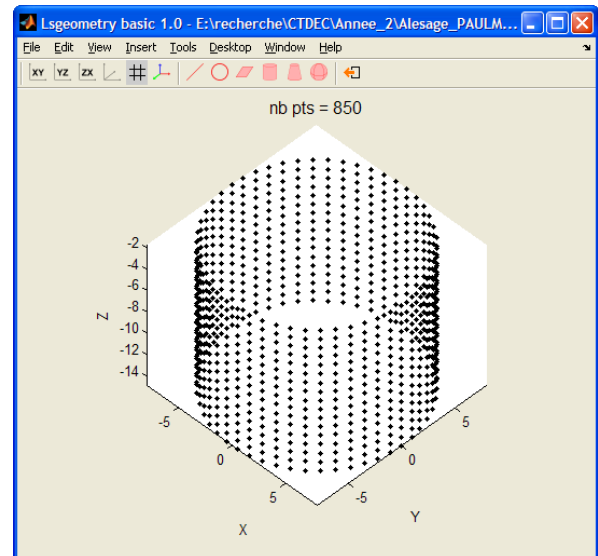
Dans cette annexe, nous présentons schématiquement la démarche pratique de la métrologie modale des surfaces. En effet, MemoSurf<sup>®</sup> a fait l'objet d'un développement informatique spécifique dans l'environnement MATLAB<sup>®</sup>. Dédié à l'exploitation des mesures d'éléments géométriques dits « simples » ce développement ne traite que les résultats de mesure provenant de Machines à Mesurer Tridimensionnelles.

La maquette numérique développée est autonome et utilisable par n'importe quel métrologue. Elle est composée d'un module de création (cf. C.2) suivi d'un module d'expertise (cf. C.3) :

- Le module de création génère le modèle éléments finis d'une part, et le programme de mesure pour piloter la MMT d'autre part.
- Le module d'expertise, qui intègre la Décomposition Modale Discrète, traite les résultats de mesure.



(a) Module de création



(b) Module d'expertise

Figure C.1 – Maquette numérique

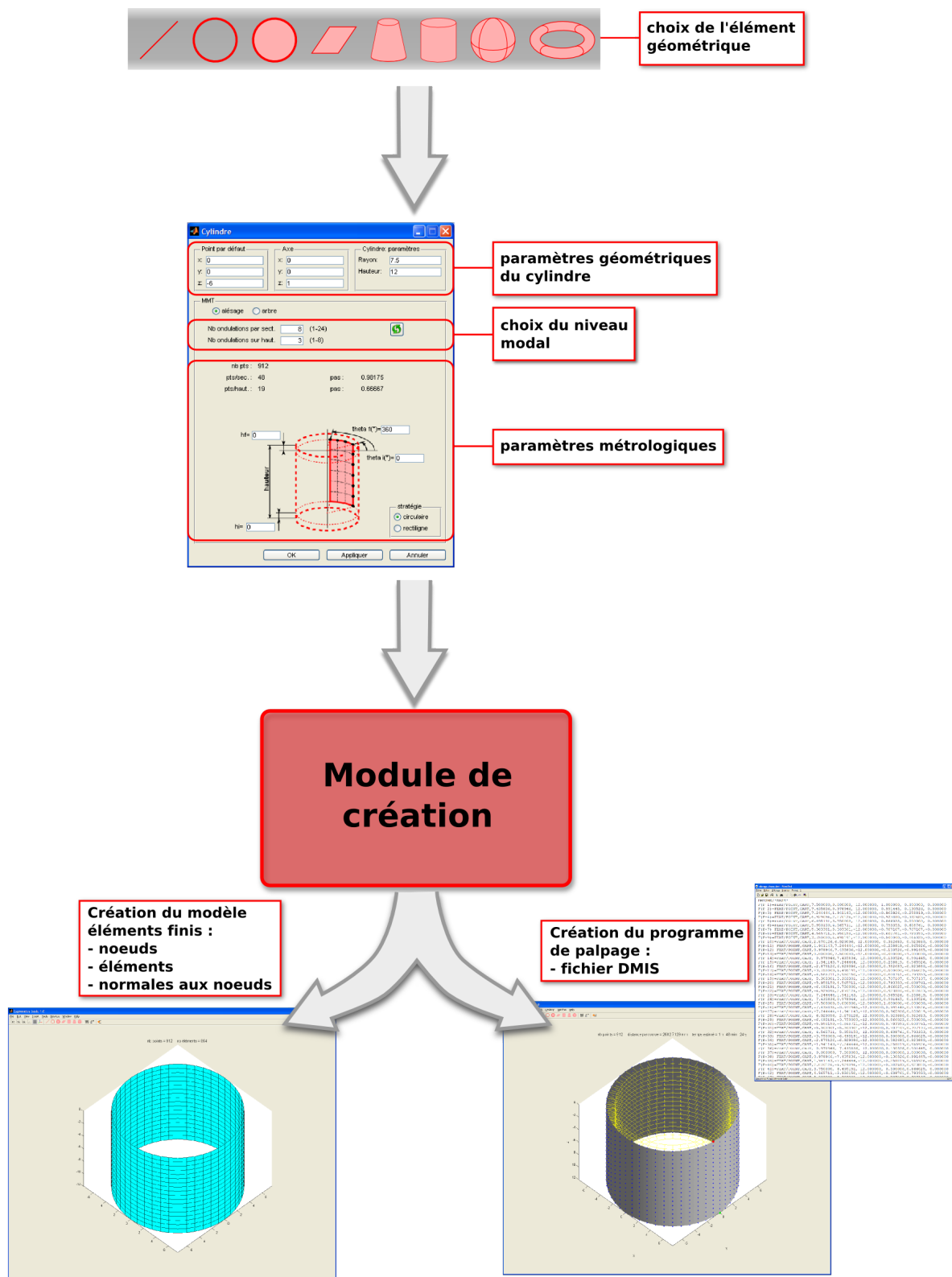


Figure C.2 – Module de création

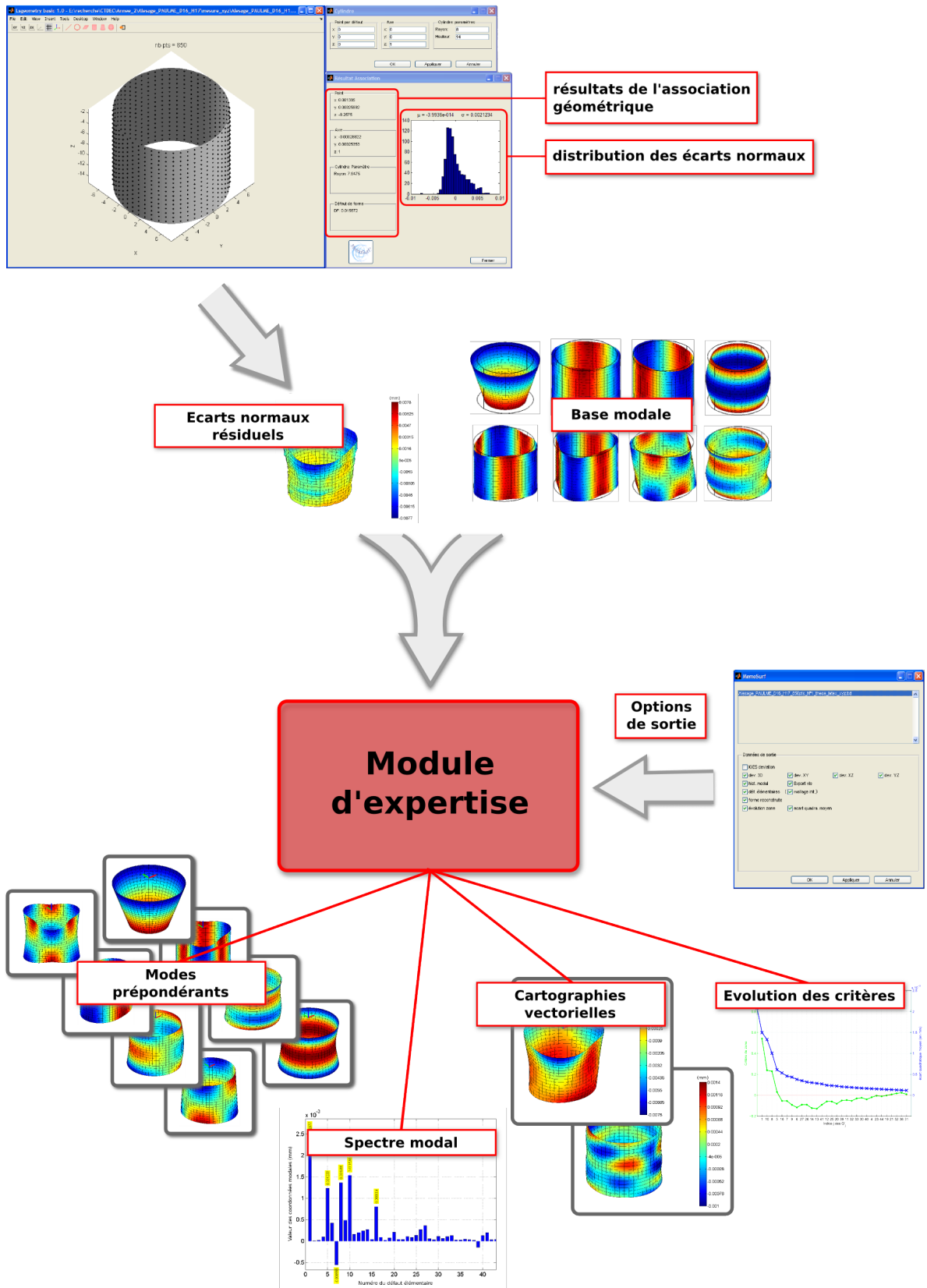


Figure C.3 – Module d'expertise





## Publications associées à ces travaux

### Revues internationales à comité de lecture

2009 Serge SAMPER, Pierre-Antoine ADRAGNA, Hugues FAVRELIÈRE et Maurice PILLET. « Modelling of 2D and 3D assemblies taking into account form errors of plane surfaces ». *Journal of Computing and Information Science Engineering*, 2009.

Hugues FAVRELIÈRE, Serge SAMPER et Pierre-Antoine ADRAGNA. « Caractérisation des défauts d'une surface sphérique par décomposition modale ». *Revue internationale d'ingénierie numérique – Conception collaborative et simulation*, 2009.

2007 Yann LEDOUX, Hugues FAVRELIÈRE et Serge SAMPER. « Optimization of a classical stamping progression by modal correction of anisotropy ears ». *International Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 129 : 1101–1108, 2007.

2006 Pierre-Antoine ADRAGNA, Serge SAMPER, Maurice PILLET et Hugues FAVRELIÈRE. « Analysis of shape deviations of measured geometries with a modal basis ». *Journal of Machine Engineering : Manufacturing Accuracy Increasing Problems*, 1 : 134–143, 2006.

Yann LEDOUX, Serge SAMPER, Hugues FAVRELIÈRE, Fabien FORMOSA, Eric PAIREL et Robert ARRIEUX. « Optimization of a stamping process by a design of experiments linked to a modal analysis of geometric defects ». *Archives of civil and mechanical engineering*, 6 : 5–17, 2006.

### Communications orales et colloques à comité de lecture

2009 Hugues FAVRELIÈRE, Serge SAMPER, Yann DERICKXSEN et Max GIORDANO. « Modal Metrology : New method of form parametrization ». *14<sup>e</sup> Congrès International de métrologie*, 2009.

- 2008 Pierre-Antoine ADRAGNA, Serge SAMPER, Hugues FAVRELIÈRE et Maurice PILLET. « Statistical assemblies with form errors ». *4th International Precision Assembly Seminar*, 2008.
- Hugues FAVRELIÈRE, Serge SAMPER et Yann DERICKXSEN. « Métrologie modale et statistique appliquée à l'étude d'une calotte sphérique et d'un cylindre ». *9<sup>e</sup> Ateliers de la métrologie*, 2008.
- 2007 Pierre-Antoine ADRAGNA, Serge SAMPER, Hugues FAVRELIÈRE et Maurice PILLET. « Analysis of an assembly with form errors ». *5th international conference in Integrated Design and Production*, 2007.
- Hugues FAVRELIÈRE, Serge SAMPER et Pierre-Antoine ADRAGNA. « Caractérisation des défauts d'une surface sphérique par décomposition modale ». *5th international conference in Integrated Design and Production*, 2007.
- Hugues FAVRELIÈRE, Serge SAMPER, Pierre-Antoine ADRAGNA et Max GIORDANO. « 3D statistical analysis and representation of form error by modal approach ». *10th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, 2007.
- Serge SAMPER, Pierre-Antoine ADRAGNA, Hugues FAVRELIÈRE, Jacques LOTTIN, Bertrand NICQUEVERT et Ludovic CHARVIER. « Form specification for a mechatronic design – Application to an accelerator cell ». *8th International Workshop on Research and Education in Mechatronics*, 2007.
- 2006 Serge SAMPER, Hugues FAVRELIÈRE, Pierre VACHER et TERENCE COUDERT. « 3D measurement and synthesis of facial expressions ». *9th Symposium on 3D Analysis of Human Movement*, 2006.



## Résumé

### Tolérancement Modal : De la Métrologie vers les Spécifications

La définition d'un produit fait appel à l'utilisation d'un langage établi entre les acteurs intervenant dans le cycle de vie du produit : concepteur, fabricant et métrologue. Il peut s'agir d'un langage commun, c'est le cas de la norme ISO, ou spécifique. Il permet de définir la manière dont doivent être spécifiées une cote, la ou les tolérances, ainsi que les défauts géométriques de forme, position et orientation. La production des pièces ne pouvant être parfaite, il est nécessaire de trouver un compromis entre le besoin du concepteur et les procédés de fabrication. La maîtrise des variations admissibles de la géométrie réelle autour de la géométrie cible est un enjeu du tolérancement géométrique. Les modèles définissant ces variations sont nombreux mais restent incomplets pour caractériser le défaut de forme. L'objet des travaux présentés dans ce mémoire est de définir un nouveau paramétrage des formes à partir duquel nous construisons un modèle de tolérancement de forme. Nommé « paramétrage modal », il modélise un élément géométrique dans un espace de formes géométriques, issues de la mécanique vibratoire.

Dans un premier temps, le paramétrage modal est utilisé pour visualiser les défauts géométriques des surfaces et fait l'objet d'une méthode d'expertise des surfaces en métrologie, la **Métrologie Modale des Surfaces** (MemoSurf®).

Au delà de la visualisation, la métrologie est également une étape de vérification des spécifications géométriques. C'est pourquoi dans un deuxième temps, nous développons une méthode permettant d'estimer la précision d'un assemblage avec défauts de forme.

La définition des exigences fonctionnelles est indispensable à tout modèle de tolérancement. Nous proposons donc, dans la dernière partie de ce document, de définir un langage de spécification à travers le paramétrage modal. Deux démarches sur des problématiques industrielles sont présentées dans l'optique d'estimer les variations admissibles des paramètres modaux relatives à la maîtrise d'un procédé et à la spécification d'un besoin.

---

## Mots clés

Défauts de forme, métrologie, paramétrage modal, assemblage, spécifications

---

---

## Abstract

### Modal Tolerancing : From metrology to specifications

The product definition uses an established language between every actors of the product life cycle : designer, producer and metrologist. It can be a common language, such as the ISO standard, or specific one. It allows to define dimensions, tolerances and any kind of geometrical errors : form, position and orientation. The production of parts is never to be perfect, therefore it is necessary to reach a compromise between the designer requirements and the manufacturing processes. Moreover, controlling the acceptable variations of the real geometry around the target remains a major issue of geometrical tolerancing. Many existing models aiming at defining those variations but appear to be insufficient to characterize the form error. The objective of the presented work is to define a new form parameterization from which a model of form tolerancing is built. Resulting from vibratory mechanics and namely called « modal parameterization », it models a geometrical element in a geometrical form space.

First, the modal parameterization is used to visualize the geometrical errors of surfaces and to characterize those surfaces using tailor-made metrology, this latter approach is called Modal Metrology of Surfaces (MemoSurf®).

Beyond visualization, the metrology is also a checking stage of the geometrical specifications. As a consequence, in the second approach, an assembly method allowing to assess the accuracy of an assembly exhibiting form errors.

The applicability of the presented tolerancing model is related to a proper statement of the functional requirements. Finally, the last part of this document proposes to define a specification language throughout the modal parameterization framework. In order to assess the acceptable variations of the modal parameters, two industrial examples are presented : the first is concerning a process control and the second, a requirement specification.

---

## Key words

Form errors, metrology, modal parameterization, assembly, specifications